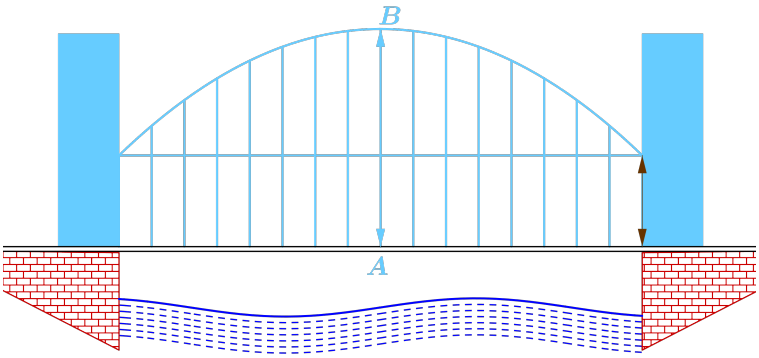
TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TUYỂN TẬP

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

TOÁN

9



TẬP 1

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Năm - 2020

Biên soạn & sưu tầm: Ths NGUYỄN CHÍN EM

Mục lục

Đề số 1. Đề thi vào 10, chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Vũng Tàu, Vòng 1, năm 2018 8
Đề số 2. Đề thi vào 10, chuyên Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang, năm 2018 13
Đề số 3. Đề thi vào 10, chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang, năm 2018 19
Đề số 4. Đề thi vào 10, chuyên Đại Học Vinh, tỉnh Nghệ An, năm 2018 27
Đề số 5. Đề thi vào 10, chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh, năm 2018 32
Đề số 6. Đề thi vào 10, chuyên Nguyễn Trãi, tỉnh Hải Dương, năm 2018 . . . 37
Đề số 7. Đề thi vào 10, chuyên Bình Phước, năm 2018 45
Đề số 8. Đề thi vào 10, chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ, năm 2018 53
Đề số 9. Đề thi vào 10, chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, tỉnh Vĩnh Long, năm 2018 59
Đề số 10. Đề thi vào 10, chuyên Vĩnh Phúc, vòng 2 năm 2018-2019 65
Đề số 11. Đề thi vào 10, chuyên Thực hành Sư phạm, Hồ Chí Minh, năm 2018 71
Đề số 12. Đề thi vào 10, chuyên Thái Bình, năm 2018 78
Đề số 13. Đề thi vào 10, chuyên Thái Nguyên, tỉnh Thái Nguyên, năm 2018 . 85
Đề số 14. Đề thi vào 10, chuyên PTNK, Tp. Hồ Chí Minh, vòng 2, năm 2018 91
Đề số 15. Đề thi vào 10, chuyên PTNK, Tp. Hồ Chí Minh, vòng 1, năm 2018 96
Đề số 16. Đề thi vào 10, chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, năm 2018 102
Đề số 17. Đề thi vào 10, chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên, năm 2018 107
Đề số 18. Đề thi vào 10, chuyên Lương Thế Vinh, tỉnh Đồng Nai, năm 2018 . 112
Đề số 19. Đề thi vào 10, chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Quảng Trị, năm 2018 . . . 117
Đề số 20. 124
Đề số 21. Đề thi vào 10, chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, năm 2018 129
Đề số 22. Đề thi vào 10, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, năm 2018 135
Đề số 23. Đề thi vào 10, chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định, vòng 1, năm 2018 140
Đề số 24. Đề thi vào 10, chuyên Lào Cai, tỉnh Lào Cai, năm 2018 146
Đề số 25. Đề thi vào 10 chuyên, tỉnh Kiên Giang, năm 2018 150

Đề số 26. Đề thi vào 10, chuyên KHTN Hà Nội, vòng 2, năm 2018 155
Đề số 27. Đề thi vào 10, chuyên KHTN Hà Nội, vòng 1, năm 2018 160
Đề số 28. Đề thi vào 10, chuyên Toán, Tin tỉnh Hưng Yên, năm 2018 164
Đề số 29. Đề thi vào 10, chuyên Hoàng Văn Thụ, tỉnh Hòa Bình, năm 2018 . 169
Đề số 30. Đề thi vào 10 chuyên, Tp. Hồ Chí Minh, năm 2018 174
Đề số 31. Đề thi vào 10 chuyên, Tp. Hà Nội, năm 2018 179
Đề số 32. Đề thi vào 10, chuyên ĐHSP Hà Nội, vòng 2, năm 2018 185
Đề số 33. Đề thi vào 10, chuyên sư phạm Hà Nội, vòng 1, năm 2018 189
Đề số 34. Đề thi vào 10, chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bình Định, vòng 2, năm 2018194
Đề số 35. Đề thi vào 10, chuyên Bến Tre, tỉnh Bến Tre, năm 2018 200
Đề số 36. Đề thi vào 10, chuyên Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh, năm 2018 204
Đề số 37. Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm 2009 - 2010 208
Đề số 38. Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2008 211
Đề số 39. Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2007 215
Đề số 40. Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2005 - 2006, Vòng 1 218
Đề số 41. Đề thi chuyên Toán Tin, Sở Giáo dục Hà Nội năm 2005 V2 222
Đề số 42. Đề thi chuyên Toán Tin, Sở Giáo dục Hà Nội năm 2004 V2 226
Đề số 43. Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2004 - 2005, Vòng 1 230
Đề số 44. Đề thi chuyên Toán - Tin AMS, Hà Nội vòng 2, năm 2003 234
Đề số 45. Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm 2003 - 2004 237
Đề số 46. Đề thi vào 10 chuyên Toán Hà Nội năm 2015 240
Đề số 47. Đề thi vào 10 chuyên Toán Hà Nội năm 2014 244
Đề số 48. Đề thi vào 10 chuyên Toán Hà Nội năm 2013 251
Đề số 49. Đề thi vào 10 chuyên Toán Hà Nội năm 2011 255
Đề số 50. Đề thi vào 10 chuyên Toán Hà Nội năm 2010 259
Đề số 51. Đề thi vào 10 chuyên Toán THPT Amsterdam Hà Nội năm 2012 . . 263
Đề số 52. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2015, vòng 2 267
Đề số 53. Đề thi vào 10 chuyên KHTN Hà Nội năm 2015, vòng 1 271
Đề số 54. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2014, vòng 2 275
Đề số 55. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2014, vòng 1 279
Đề số 56. Đề thi vào 10 chuyên KHTN Hà Nội năm 2013, vòng 2 284
Đề số 57. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2013, vòng 1 288
Đề số 58. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012, vòng 2 292

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Đề số 59. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012, vòng 1 295
Đề số 60. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2011, vòng 2 299
Đề số 61. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2011, vòng 1 303
Đề số 62. Đề thi vào 10 chuyên KHTN Hà Nội năm 2010, vòng 2 307
Đề số 63. Đề thi vào 10 chuyên KHTN Hà Nội năm 2010, vòng 1 310
Đề số 64. Đề thi vào 10 chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2015, vòng 2 313
Đề số 65. Đề thi vào 10 chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2015, vòng 1 317
Đề số 66. Đề thi vào 10 Chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2014, vòng 2 320
Đề số 67. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2014, vòng 1 324
Đề số 68. Đề thi vào 10 chuyên KHTN Hà Nội năm 2013, vòng 2 329
Đề số 69. Đề thi vào 10 Chuyên KHTN Hà Nội năm 2013, vòng 1 333
Đề số 70. Đề thi vào 10 chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2012, vòng 2 337
Đề số 71. Đề thi vào 10 chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2012, vòng 1 341
Đề số 72. Đề thi vào 10 Chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2011, vòng 2 345
Đề số 73. Đề thi vào 10 Chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2011, vòng 1 349
Đề số 74. Đề thi vào 10 chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2010, vòng 2 352
Đề số 75. Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long, 2017 356
Đề số 76. Đề thi vào 10, trường THPT Năng Khiếu, 2017 361
Đề số 77. Đề thi vào 10, Chuyên Vĩnh Phúc Vòng 2, 2017 366
Đề số 78. Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long, 2017 370
Đề số 79. Đề thi vào 10, Chuyên Trần Phú, Hải Phòng 2017 375
Đề số 80. Đề thi vào 10, Chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận, 2017 380
Đề số 81. Đề thi vào 10, Sở Giáo Dục Hà Nội - Chuyên Tin, 2017 383
Đề số 82. Đề thi vào 10 Chuyên, Sở giáo dục Tiền Giang, 2017 387
Đề số 83. Đề thi vào 10, Chuyên THPT, TPHCM, 2017 391
Đề số 84. Đề thi vào 10, Chuyên Thái Nguyên 2017 394
Đề số 85. Đề thi vào 10, Chuyên Thái Bình - Vòng 1, 2017 400
Đề số 86. Đề thi vào 10, Chuyên Thái Bình - Vòng 2, 2017 405
Đề số 87. Đề thi vào 10, Chuyên đại học sư phạm Hà Nội - Vòng 2, 2017 . . . 410
Đề số 88. Đề thi vào 10, Trường THPT chuyên ĐHSP - Vòng 1, 2017 414
Đề số 89. Đề thi vào 10, Chuyên Toán, THPT Chuyên Quốc Học Huế Vòng 2, 2017 420
Đề số 90. Đề thi vào 10 THPT Chuyên Quốc Học Huế Vòng 1, 2017 425

Đề số 91. Đề thi vào 10 PTNK Hồ Chí Minh, 2017 429
Đề số 92. Đề thi vào 10, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, 2017 434
Đề số 93. Đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, 2017 439
Đề số 94. Đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Tất Thành - Kon Tum, 2017 446
Đề số 95. Đề thi vào 10, Chuyên Lương Văn Tuỵ, Ninh Bình, 2017 450
Đề số 96. Đề thi vào 10, Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, 2017 453
Đề số 97. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Vũng Tàu V2, 2017 458
Đề số 98. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Vũng Tàu Vòng 1, 2017 462
Đề số 99. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị, 2017 467
Đề số 100. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quí Đôn Ninh Thuận, 2017 470
Đề số 101. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng, 2017 473
Đề số 102. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, vòng 1, 2017 . . . 478
Đề số 103. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Khiết, Quãng Ngãi 2017 481
Đề số 104. Đề thi vào 10, Chuyên LHP Nam Định vòng 2, 2017 486
Đề số 105. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định (Vòng 1), 2017 . 490
Đề số 106. Đề thi vào 10, Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa 2017 495
Đề số 107. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Lâm Đồng, 2017 500
Đề số 108. Đề thi vào 10, Chuyên KHTN, Hà Nội, V2, 2017 504
Đề số 109. Đề thi vào 10, Chuyên KHTN Hà Nội vòng 1 , 2017 510
Đề số 110. Đề thi vào 10, Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang, 2017 513
Đề số 111. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hưng Yên, 2017 517
Đề số 112. Đề thi vào 10, Chuyên Hùng Vương Phú Thọ, Vòng 2, 2017 522
Đề số 113. Đề thi vào 10, Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, Vòng 1, 2017 . . . 527
Đề số 114. Đề thi vào lớp 10, Chuyên Hùng Vương-Gia Lai, 2017 533
Đề số 115. Đề thi vào 10, Chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, 2017 537
Đề số 116. Đề thi vào 10, Chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh, 2017 541
Đề số 117. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hà Tĩnh, 2017 545
Đề số 118. Đề thi vào chuyên Toán 10, Sở giáo dục Hà Nội, 2017 549
Đề số 119. Đề thi vào 10 chuyên Hạ Long, Sở giáo dục Quảng Ninh, 2017 . . 554
Đề số 120. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Đồng Tháp, 2017 557
Đề số 121. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Đắk Lắk, 2017 562
Đề số 122. Đề thi vào 10, Chuyên Đại Học Vinh, Vòng 2, 2017 567
Đề số 123. Đề thi vào 10, Chuyên Đại Học Vinh, Vòng 1, 2017 570

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Đề số 124. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bình Dương, 2017 573
Đề số 125. Đề thi vào 10, Chuyên Bắc Ninh, Bắc Ninh, 2017 576
Đề số 126. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bạc Liêu, 2017 581
Đề số 127. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bắc Giang, 2017 587
Đề số 128. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục An Giang, 2017 592
Đề số 129. Đề thi vào 10, PTNK, TPHCM 2016 596
Đề số 130. Đề thi vào 10 Chuyên, Sở Giáo dục Vũng Tàu, Vòng 1, 2016 600
Đề số 131. Đề thi vào 10, Chuyên Vĩnh Phúc - V2, 2016 604
Đề số 132. Đề thi vào 10, Chuyên Vĩnh Phúc, vòng 1, 2016 608
Đề số 133. Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long, 2016 612
Đề số 134. Đề thi vào 10, Chuyên Trần Phú, Hải Phòng 2016 617
Đề số 135. Đề thi vào 10, Chuyên Thái Nguyên 2016 622
Đề số 136. Đề thi vào 10, Chuyên Thái Bình - Vòng 2, 2016 626
Đề số 137. Đề thi vào 10 Chuyên, Sở Giáo dục Tây Ninh, 2016 630
Đề số 138. Đề thi vào 10, Chuyên ĐHSP HCM, Vòng 2, 2016 634
Đề số 139. Đề thi vào 10, Chuyên Toán Đại Học Sư Phạm Hà Nội vòng 2, 2016 638
Đề số 140. Đề thi vào 10, Chuyên sư phạm Hà Nội - Vòng 1, 2016 642
Đề số 141. Đề thi vào 10 Chuyên, Sở Giáo dục Sơn La, 2016 646
Đề số 142. Đề thi vào 10, Chuyên Quốc Học Huế, vòng 2, năm 2016 650
Đề số 143. Đề thi vào 10, Sở giáo dục Quảng Bình, 2016 654
Đề số 144. Đề thi vào 10, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, 2016 658
Đề số 145. Đề thi vào 10, Chuyên Lương Văn Tụy Ninh Bình, 2016 663
Đề số 146. Đề thi vào 10, Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, 2016 667
Đề số 147. Đề thi vào lớp 10, Chuyên Long An, 2016 670
Đề số 148. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Vũng Tàu, 2016 674
Đề số 149. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Ninh Thuận, 2016 679
Đề số 150. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng, 2016 683
Đề số 151. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, vòng 1, 2016 . . . 688
Đề số 152. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định vòng 2, 2016 . . 692
Đề số 153. Đề thi vào 10, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định (Vòng 1), 2016 . 695
Đề số 154. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Lào Cai, 2016 699
Đề số 155. Đề thi vào 10, Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, Vòng 2, 2016 704
Đề số 156. Đề thi vào 10, Chuyên Lam Sơn, 2016 - V1 708

Đề số 157. Đề thi vào 10 Chuyên, Sở Giáo dục Lâm Đồng, 2016 713
Đề số 158. Đề thi vào 10, Chuyên Kiên Giang, 2016, V2 718
Đề số 159. Đề thi vào 10, Chuyên KHTN Hà Nội, V2, 2016 721
Đề số 160. Đề thi vào 10, Chuyên Khoa học Tự nhiên Hà Nội, Vòng 1, năm 2016 724
Đề số 161. Đề thi vào 10, Chuyên Hưng Yên Vòng 2, 2016 729
Đề số 162. Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hưng Yên, 2016 733
Đề số 163. Đề thi vào 10, Chuyên Hùng Vương, Sở giáo dục Phú Thọ, 2016 . 737
Đề số 164. Đề thi vào 10 chuyên Toán, vòng 2, Chuyên Hùng Vương Gia Lai, 2016 741
Đề số 165. Đề thi vào 10, THPT Chuyên Tp Hồ Chí Minh, 2016 746
Đề số 166. Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hòa Bình, Chuyên Hoàng Văn Thụ 2016 751
Đề số 167. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hòa Bình, 2016 755
Đề số 168. Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hậu Giang, 2016 759
Đề số 169. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hà Tĩnh, 2016 764
Đề số 170. Đề thi vào 10, Chuyên Hà Nội, 2016 768
Đề số 171. Đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, V2, 2016 773
Đề số 172. Đề thi vào 10, Chuyên Đồng Tháp, 2016 777
Đề số 173. Đề thi vào 10 Chuyên, Sở giáo dục Đăk Lăk, 2016 782
Đề số 174. Đề thi vào 10, chuyên đại học Vinh vòng 2, 2016 786
Đề số 175. Đề thi vào 10, Chuyên Bình Phước, 2016 790
Đề số 176. Đề thi vào 10, Chuyên Biên Hòa Hà Nam, năm học 2016-2017 . . 795
Đề số 177. Đề thi vào 10, Chuyên Biên Hòa Hà Nam vòng 1, 2016 799
Đề số 178. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bến Tre, 2016 802
Đề số 179. Thi vào 10 chuyên, Sở Giáo dục Bắc Ninh, 2016 808
Đề số 180. Đề thi vào 10 Chuyên, Sở giáo dục Bạc Liêu, 2016 812
Đề số 181. Đề thi vào 10, Chuyên Bắc Giang, 2016 816
Đề số 182. Đề thi vào 10, Chuyên Sư Phạm Hà Nội Vòng 2, 2015 821
Đề số 183. Đề thi vào 10, Chuyên ĐH Khoa học Tự nhiên, vòng 1, 2015 . . . 826
Đề số 184. Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hưng Yên, 2015 830
Đề số 185. Đề thi vào 10, Chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội , 2014 834

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TỈNH VŨNG TÀU, VÒNG 1, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}-\dfrac{14}{\sqrt{7}}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}$.

b) Giải phương trình $5x^2+2\sqrt{5}x+1=0$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-2y=16\\x+5y=-23.\end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}A&=\frac{3}{\sqrt{7}-2}-\frac{14}{\sqrt{7}}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}=\frac{3\left(7+\sqrt{2}\right)}{7-4}-\frac{14\sqrt{7}}{7}+\left|\sqrt{7}-2\right|\\&=\sqrt{7}+2-2\sqrt{7}+\sqrt{7}-2=0.\end{aligned}$$

b) Ta có $5x^2+2\sqrt{5}x+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}x+1\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{5}x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

c) Ta có $\begin{cases}3x-2y=16\\x+5y=-23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=16\\3x+15y=-69\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}17y=-85\\3x-2y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-5\\3x+10=16\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=2\\y=-5.\end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{(2;-5)\}$.

Câu 2.

a) Tìm tất cả giá trị của hệ số a để hàm số $y=ax+2$ đồng biến và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;3)$.

b) Cho đường thẳng $(d)\colon y=(3-2m)x-m^2$ và parabol $(P)\colon y=x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và $x_1(x_2-1)+2(x_1-x_2)=2x_1-x_2$.

Lời giải.

a) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a\cdot 1+2=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=1.$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2=(3-2m)x-m^2 \Leftrightarrow x^2-(3-2m)x+m^2=0.$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow (3-2m)^2-4m^2>0 \Leftrightarrow 9-12m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{3}{4}$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=3-2m \\ x_1x_2=m^2. \end{cases}$

Ta có $x_1(x_2-1)+2(x_1-x_2)=2x_1-x_2 \Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)=0 \Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3. \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện, ta được $m=-3$.

Câu 3.

a) Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 174 m. Nếu tăng chiều rộng 5 m và giảm chiều dài 2 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng thêm 215 m^2. Tính chiều rộng và chiều dài ban đầu của mảnh vườn.

b) Giải phương trình $5x^4-2x^2-3x^2\sqrt{x^2+2}=4$.

Lời giải.

a) Gọi $x(\text{m})$ và $y(\text{m})$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh vườn $(x>2, y>5)$.

Chu vi mảnh vườn bằng 174 m nên ta có $x+y=\dfrac{174}{2}=87.$ (1)

Khi tăng chiều rộng 5 m và giảm chiều dài 2 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng thêm 215 m^2 nên ta có phương trình $(x-2)(y+5)=xy+215 \Leftrightarrow 5x-2y=225.$ (2)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Từ (1) & (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=87 \\ 5x-2y=225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=174 \\ 5x-2y=225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=57 \\ y=30 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy ban đầu chiều dài và chiều rộng mảnh vườn lần lượt là 57 m và 30 m.

b) Ta có $5x^4-2x^2-3x^2\sqrt{x^2+2}=4 \Leftrightarrow 5x^4-3x^2\sqrt{x^2+2}-2(x^2+2)=0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+2}$ $(t \geq \sqrt{2})$, ta được phương trình

$$5x^4-3x^2t-2t^2=0 \Leftrightarrow (x^2-u)(5x^2+2u)=0 \Leftrightarrow u=x^2 \,(\text{vì } 5x^2+2u>0).$$

Khi đó, ta có $x^2=\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x^4=x^2+2 \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

Câu 4. Cho đường tròn (O) có AB là dây cung không đi qua tâm và I là trung điểm của dây AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M khác điểm A. Vẽ hai tiếp tuyến MC và MD đến (O) (tiếp điểm C thuộc cung nhỏ AB, tiếp điểm D thuộc cung lớn AB).

a) Chứng minh tứ giác $OIMD$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $MD^2=MA\cdot MB$.

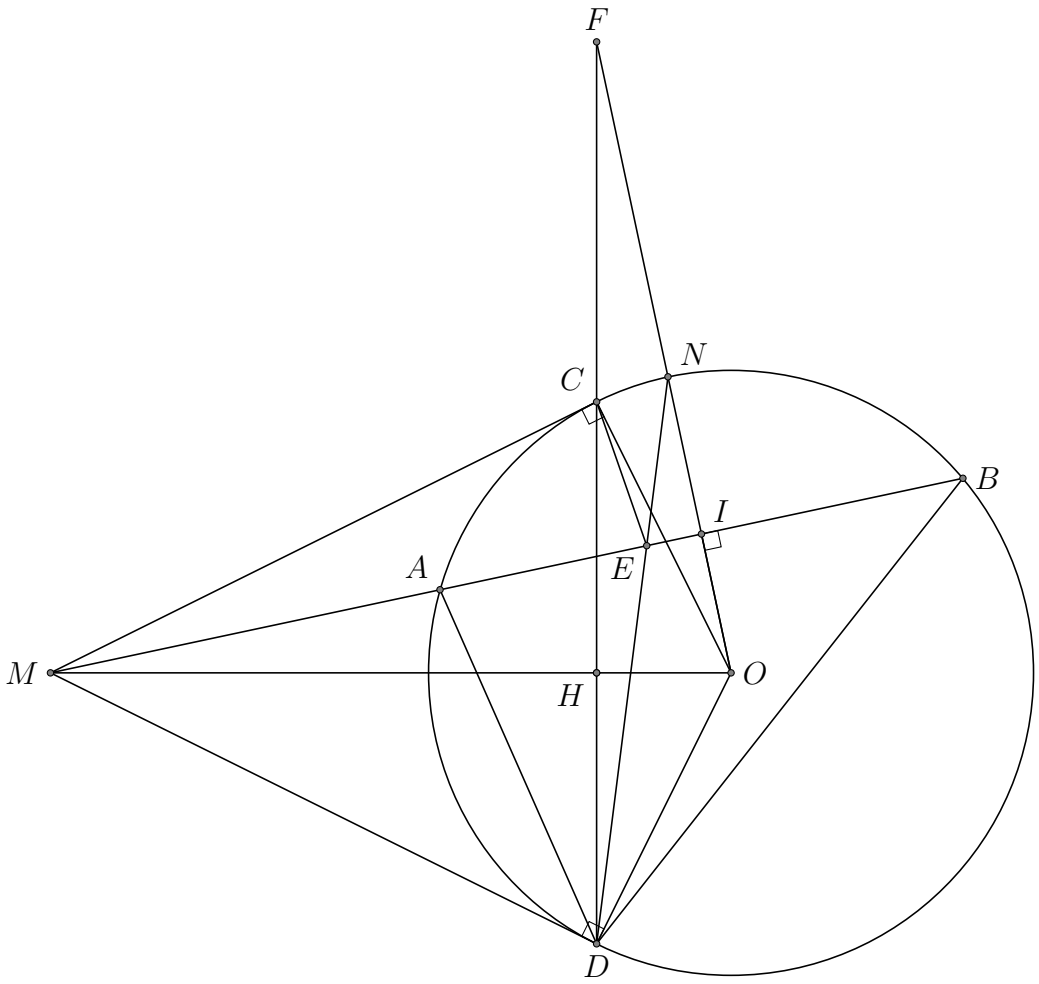
c) Đường thẳng OI cắt cung nhỏ AB của (O) tại điểm N, giao điểm của hai đường thẳng DN và MB là E. Chứng minh tam giác MCE cân tại M.

d) Đường thẳng ON cắt đường thẳng CD tại điểm F. Chứng minh $\dfrac{1}{OI\cdot OF}+\dfrac{1}{ME^2}=\dfrac{4}{CD^2}$.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Do I là trung điểm của dây cung AB của đường tròn (O) nên $OI \perp AB \Rightarrow \widehat{MIO} = 90^\circ$.

Lại có MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D nên $\widehat{MDO} = 90^\circ$.

Tứ giác $OIMD$ có $\widehat{MIO} + \widehat{MDO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nội tiếp được đường tròn.

b) Hai tam giác MAD và MBD có $\widehat{BMD}$ chung và $\widehat{MDA} = \widehat{MBD}$ (cùng chắn cung AD).

$\Rightarrow \triangle MAD \backsim \triangle MBD \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MD^2 = MA \cdot MB.$

c) Ta có ON là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên $NA = NB \Rightarrow \overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$.

$\Rightarrow \widehat{MED} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{NB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{NA}\right) = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ND} = \widehat{MDN}.$

$\Rightarrow$ Tam giác MED cân tại $M \Rightarrow ME = MD$.

Ta lại có $MC = MD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). $\Rightarrow ME = MC \Rightarrow$ tam giác MCE cân tại M.

d) Ta có $MC = MD$ và $OC = OD$ nên MO là đường trung trực của đoạn thẳng CD

$\Rightarrow MO \perp CD$ tại trung điểm H của CD.

Hai tam giác OIM và OHF có $\widehat{OIM} = \widehat{OHF} = 90^\circ$ và $\widehat{MOF}$ chung.

$\Rightarrow \triangle OIM \backsim \triangle OHF \Rightarrow \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OM}{OF} \Rightarrow OI \cdot OF = OM \cdot OH = OD^2$.

Do đó $\dfrac{1}{OI \cdot OF} + \dfrac{1}{ME^2} = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{MD^2} = \dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{4}{CD^2}$.

Câu 5. Cho $a > 0$, $b > 0$ và $a + b \leq 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{a}{1+b} + \dfrac{b}{1+a} + \dfrac{1}{a+b}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{a}{1+b} + \frac{4}{9}a(1+b) \geq 2\sqrt{\frac{a}{1+b} \cdot \frac{4a(1+b)}{9}} = \frac{4a}{3} \Rightarrow \frac{a}{1+b} \geq \frac{8}{9}a - \frac{4}{9}ab.$$

Tương tự, ta có $\dfrac{b}{1+a} \geq \dfrac{8}{9}b - \dfrac{4}{9}ab$.

Do đó $S \geq \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{8}{9}(a+b) - \dfrac{8}{9}ab = \left(\dfrac{1}{a+b} + a + b\right) - \dfrac{a+b+8ab}{9} \geq 2 - \dfrac{a+b+8ab}{9}$.

Ta lại có $4ab \leq (a+b)^2 \leq 1 \Rightarrow a + b + 8ab \leq 3$.

Do đó, ta có $S \geq 2 - \dfrac{3}{9} = \dfrac{5}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\dfrac{5}{3}$, đạt được khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BẮC GIANG, TỈNH BẮC GIANG, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \dfrac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ (với $x > 0; x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \dfrac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$.

Lời giải.

a) Với $x > 0;\ x \neq 1$.

Ta có $A = \left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \dfrac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$

$= \left[\dfrac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}\right] : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$

$= \left[\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right] : \dfrac{1-\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{1-x}$

$= \dfrac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Với $A \geq \dfrac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$ thì

$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \geq \dfrac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow \sqrt{2018}(\sqrt{x}+1) \geq \sqrt{x}(1+\sqrt{2018}) \Leftrightarrow \sqrt{2018} \geq \sqrt{x} > 0$

$\Leftrightarrow 0 < x \leq 2018$.

Mà x nguyên .

Vậy có tất cả 2018 giá trị x để $A \geq \dfrac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - (m+1)x - 3 = 0 \quad (1)$, với x là số ẩn, m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Đặt $B = \dfrac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 - 5}{x_1^2 + x_2^2 - 4}$. Tìm m để B đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Để phương trình (1) đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta>0. \end{cases}$

$\Leftrightarrow (m-1)^2-4\cdot(-3)=(m-1)^2+12>0$ với mọi m.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1x_2=-3 \\ x_1+x_2=m+1. \end{cases}$

Khi đó $B=\dfrac{3x_1^2+3x_2^2+4x_1+4x_2-5}{x_1^2+x_2^2-4}=\dfrac{3[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+4(x_1+x_2)-5}{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4}$

$=\dfrac{3[(m+1)^2-2\cdot(-3)]+4(m+1)-5}{(m+1)^2-2\cdot(-3)-4}$

$=\dfrac{3(m^2+2m+1+6)+4m+4-5}{m^2+2m+1+2}=\dfrac{3m^2+10m+20}{m^2+2m+3}.$

$\Rightarrow B(m^2+2m+3)=3m^2+10m+20\Leftrightarrow (B-3)m^2+(2B-10)m+3B-20=0$

$\Leftrightarrow (B-3)m^2+2(B-5)m+3B-20=0.(0.1)$

Từ (0.1) có nghiệm thì $\Delta'>0\Leftrightarrow (B-5)^2-(B-3)(3B-20)\geq 0$

$\Leftrightarrow B^2-10B+25-3B^2+20B+9B-60\geq 0$

$\Leftrightarrow -2B^2+19B-35\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\leq B\leq 7.$

Vậy B đạt giá trị lớn nhất bằng 7 khi và chỉ khi $4m^2+4m+1=0\Leftrightarrow (2m+1)^2=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+x^2+4x=7$.

Lời giải.

ĐKXĐ $x\geq -3$.

$\sqrt{x+3}+x^2+4x=7\Leftrightarrow \sqrt{x+3}-2+x^2+4x-5=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+(x-1)(x+5)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+x+5\right)=0$

$\Rightarrow x-1=0 \quad (\text{Vì} \quad x\geq -3\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+x+5\geq 0)$

$\Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathcal{S}=\{1\}$.

Câu 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy-x+3y-6=0 \\ \sqrt{5x-6}+\sqrt{16-3y}=2x^2-2x+y-4. \end{cases}$

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

ĐKXĐ $\begin{cases} x \geq \dfrac{6}{5} \\ y \leq \dfrac{16}{3}. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x^2 - xy - x + 3y - 6 = 0 \quad (0.2) \\ \sqrt{5x-6} + \sqrt{16-3y} = 2x^2 - 2x + y - 4 (0.3). \end{cases}$

Từ phương trình (0.2) ta có $x^2 - xy - x + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ y = x + 2. \end{array}\right.$

Với $x = 3$ thay vào (0.3) ta được

$\sqrt{5 \cdot 3 - 6} + \sqrt{16 - 3y} = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2 + y - 4 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{16 - 3y} = 10 - y$.

$\Leftrightarrow \sqrt{16 - 3y} = 7 - y$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 7 \\ 16 - 3y = 49 - 14y + y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 7 \\ y^2 - 11y + 33 = 0 \quad (PTVN). \end{cases}$

Với $y = x + 2$ thay vào phương trình (2) ta được phương trình

$\sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - 2x + x + 2 - 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - x - 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x-6} - 2 + \sqrt{10-3x} - 2 = 2x^2 - x - 6$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x-10}{\sqrt{5x-6}+2} + \dfrac{6-3x}{\sqrt{10-3x}+2} = (x-2)(2x+3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{5(x-2)}{\sqrt{5x-6}+2} - \dfrac{3(x-2)}{\sqrt{10-3x}+2} = (x-2)(2x+3)$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \dfrac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2.$

(Vì $\dfrac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \dfrac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - (2x+3) < 0$ với $x \geq \dfrac{6}{5}$) .

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4.$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathcal{S} = \{(2;4)\}$.

Câu 5. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $2018 + n^2$ là số chính phương.

Lời giải.

Giả sử $n^2 + 2018$ là số chính phương, đặt $n^2 + 2018 = p^2$ (p là số tự nhiên lớn hơn 0).

Ta được $n^2 - p^2 + 2018 = 0 \Leftrightarrow n^2 - p^2 = -2018 \Leftrightarrow (n-p)(n+p) = -2018 = (-1) \cdot 2018 = (-2018) \cdot 1 = (-1009) \cdot 2 = (-2) \cdot 1009.$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Gọi $a = n - p,\ b = n + p$ ($a,\ b$ cũng là các số nguyên).

Vì tích của a và b bằng -2018 là một số chẵn, suy ra trong 2 số a và b phải có ít nhất một số chẵn. (0.4)

Mặt khác $a + b = (n - p + n + p) = 2n$ là một số chẵn.

Suy ra a và b phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. (0.5)

Từ (0.4) và (0.5) suy ra a và b đều là số chẵn.

Do đó $a = 2k, b = 2l$ (với k, l là số nguyên).

Theo trên ta có $a \cdot b = 2018$ hay $2k \cdot 2l = 2018 \Leftrightarrow 4 \cdot k \cdot l = 2018$.

Vì k, l là số nguyên nên suy ra 2018 phải chia hết cho 4 (điều này vô lý, vì 2018 không chia hết cho 4).

Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn yêu cầu bài toán (đpcm).

Câu 6. Một đội bóng chuyền VTV cup 2018. Cứ hai đội trong giải đấu đó thi đấu với nhau đúng một trận. Đội thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, đội thứ hai thắng x_2 trận và thua y_2 trận,..., đội thứ mười thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong một trận đấu bóng chuyền không có trận hòa. Chứng minh rằng: $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2$.

Lời giải.

Từ bài toán ta thấy mỗi đội bóng chuyền thi đấu đúng 9 trận tức là

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \cdots = x_{10} + y_{10} = 9$.

Do cứ 2 đội trong giải thi đấu với nhau chỉ thắng hoặc thua nghĩa là

$x_1 + \cdots + x_{10} = y_1 + \cdots + y_{10}$.

Xét hiệu $(x_1^2 + x_2^2 + x_{10})^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_{10})^2 = (x_1 - y_1)(x_1 + y_1) + \cdots + (x_{10} - y_{10})(x_{10} + y_{10})$

$= 9(x_1 + \cdots + x_{10} - y_1 - \cdots - y_{10}) = 0.$

Suy ra điều phải chứng minh.

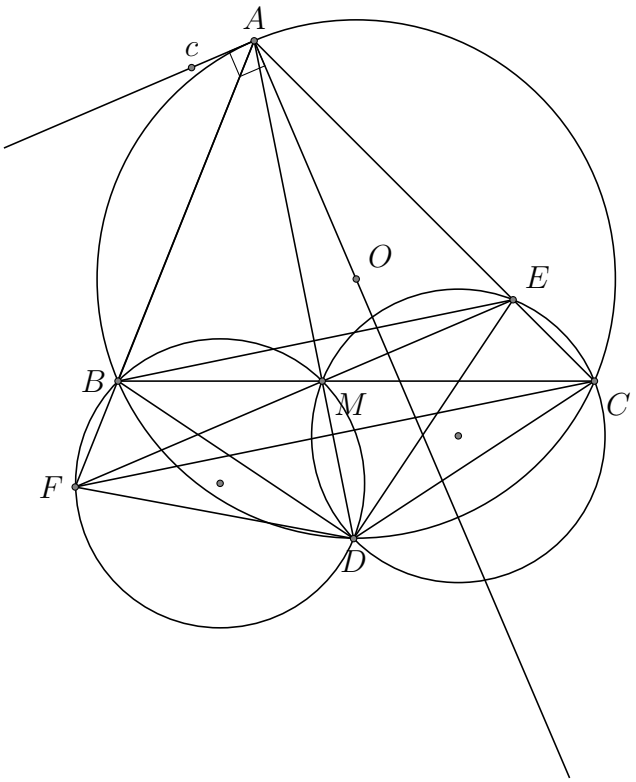
Câu 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M không trùng với B và C), đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD cắt đường thẳng AC tại điểm E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD cắt đường thẳng AB tại F khác B.

a) Chứng minh tứ giác $BECF$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh hai tam giác ECD, FBD đồng dạng và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

Lời giải.



a) Xét $\triangle AME$ và $\triangle ACD$ có

$\widehat{A}$ chung và $\widehat{AME} = \widehat{ACD}$ (tứ giác $MECD$ nội tiếp).

Suy ra $\triangle AME \backsim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AM}{AC} \Leftrightarrow AE \cdot AC = AD \cdot AM.$ (0.6)

Chứng minh tương tự ta cũng có $AB \cdot AF = AD \cdot AM.$ (0.7)

Từ (0.6) và (0.7) suy ra $AE \cdot AC = AB \cdot AF \Leftrightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}.$

Suy ra tứ giác $BECF$ nội tiếp đường tròn.

b) Ta có $\widehat{DEC} = \widehat{DMC}$ (cùng chắn cung $\widehat{CD}$).

Mà $\widehat{DMC} = \widehat{AMB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{AMB} = \widehat{BFD}$ (tứ giác $BMDF$ nội tiếp).

Suy ra $\widehat{DEC} = \widehat{BFD}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{ECD} = \widehat{FBD}$.

Xét $\triangle ECD$ và $\triangle FBD$ có $\widehat{DEC} = \widehat{BFD}$ và $\widehat{ECD} = \widehat{FBD}$. (cmt)

Suy ra $\triangle ECD \backsim \triangle FBD \quad (g-g)$.

Ta có $\widehat{BMF} = \widehat{BDF}$ (tứ giác $FBMD$ nội tiếp) và $\widehat{EMC} = \widehat{EDC}$ (tứ giác $MECD$ nội tiếp).

Mà $\widehat{BDF} = \widehat{EDC}$ (Vì $\triangle ECD \backsim \triangle FBD$). Suy ra $\widehat{BMF} = \widehat{EMC}$.

Mặt khác $\widehat{BME} + \widehat{EMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BME} + \widehat{BMF} = 180^\circ$.

Do đó 3 điểm E, M, F thẳng hàng.

c) Kẻ tiếp tuyến Ac với đường tròn (O) tại điểm M.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta có $\widehat{BAc} = \widehat{ACB}$ (vì cùng chắn cung $\widehat{AB}$). Hay $\widehat{FAc} = \widehat{ACB}$. (0.8)

$\widehat{BFE} = \widehat{BCE}$ (vì cùng chắn cung $\widehat{BE}$). Hay $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$. (0.9)

Từ (0.8) và (0.10) suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{FAc}$. Mà $\widehat{AFE}$ và $\widehat{FAc}$ ở vị trí so le trong. Suy ra $Ac \parallel EF$.

Mặt khác $Ac \perp AO$ (vì Ac là tiếp tuyến của đường tròn (O)) $\Rightarrow AO \perp EF$ (đpcm).

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $BC^2 = 2BA \cdot AC + 4AC^2$. Tính số đo góc $\widehat{ABC}$.

Lời giải.

Đặt $BC = a;\ AB = c;\ AC = b$ với $a; b; c > 0$.

$\widehat{DEC} = \widehat{BFD}$ và Theo đề ta có $a^2 = 2cb + 4b^2$.

Mà $a^2 = b^2 + c^2$ (Định lý Py-ta-go).

Suy ra $b^2 + c^2 = 2bc + 4b^2 \Leftrightarrow -3b^2 - 2bc + c^2 = 0 \Leftrightarrow (b + c)(-3b + c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -c \text{ (loại)} \\ c = 3b \text{ (nhận).} \end{array}\right.$

Với $c = 3b$ thì $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{b}{3b} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \widehat{ABC} = 18°$.

Vậy $\widehat{ABC} = 18°$.

Câu 9. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| + |z^3 - x^3|.$$

Lời giải.

Vì vai trò của x, y, z là như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$.

Khi đó $M = |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| + |z^3 - x^3| = x^3 - y^3 + y^3 - z^3 - z^3 + x^3 = 2(x^3 - z^3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{M}{2} = (x - z)(x^2 + xz + z^2) = \sqrt{x^2 - 2xz + z^2} \cdot \sqrt{x^2 + xz + z^2} \cdot \sqrt{x^2 + xz + z^2}$. (0.10)

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$(0.10) \Leftrightarrow \dfrac{M}{2} \leq \sqrt{\left(\dfrac{x^2 - 2xz + z^2 + x^2 + xz + z^2 + x^2 + xz + z^2}{3}\right)^3} = \sqrt{(x^2 + z^2)^3} \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = 16\sqrt{2}$.

Vậy $\max P = 32\sqrt{2}$ đạt được khi $y = z = 0$ và $x = 2\sqrt{2}$ và các hoán vị.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TIỀN GIANG, TỈNH TIỀN GIANG, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức

$$E = \left(x^5 + 3x^2 - 3x - 2\right)^{2018}$$

biết $x = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{1 - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{1 - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{1 - \sqrt{\left(2\sqrt{3} - 3\right)^2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1} = 1. \end{aligned}$$

Suy ra

$$E = \left(x^5 + 3x^2 - 3x - 2\right)^{2018} = \left(1^5 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2\right)^{2018} = (-1)^{2018} = 1.$$

Câu 2. Giải phương trình

$$5\sqrt{x^3 + 8} = 2\left(x^2 - x + 6\right).$$

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$.

Với mọi x thỏa điều kiện, đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+2} \\ v=\sqrt{x^2-2x+4} \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương

$$5\sqrt{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=2\left(x^2-x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow 5uv=2\left(u^2+v^2\right)\Leftrightarrow (u-2v)(2u-v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v \\ v=2u \end{array}\right.$$

Với $u=2v$, ta có

$$u=2v\Leftrightarrow u^2=4v^2\Leftrightarrow x+2=4\left(x^2-2x+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-9x+14=0 \quad \text{(Vô nghiệm)}$$

Với $2u=v$, ta có

$$2u=v\Leftrightarrow 4u^2=v^2\Leftrightarrow 4(x+2)=x^2-2x+4$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13} \\ x=3-\sqrt{13} \end{array}\right. \quad \text{(thỏa)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=3+\sqrt{13}$ và $x=3-\sqrt{13}$.

Câu 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=7 \\ y(y-2x)-2x=10. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=7 \\ y(y-2x)-2x=10 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=9 \\ (y-2x-1)(y+1)=9. \end{cases} \tag{0.11}$$

Đặt $\begin{cases} x+1=u \\ y+1=v \end{cases}\Rightarrow y-2x-1=v-2u$. Suy ra hệ (0.11) tương đương

$$\begin{cases} u^2+v^2=9 \\ (v-2u)v=9 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=9 \\ v^2-2uv=9. \end{cases}$$

Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới ta được

$$u^2+2uv=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=-2v.\end{array}\right.$$

Với $u=0$, ta có

$$\left\{\begin{array}{l}u=0\\v^2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u=0\\\left[\begin{array}{l}v=3\\v=-3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1\\\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-4\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=-1\\y=2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x=-1\\y=-4.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Với $u=-2v$, ta có

$$\left\{\begin{array}{l}u=-2v\\u^2+v^2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u=-2v\\v^2=\dfrac{9}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}u=-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\\v=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}u=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\\v=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}-1\\y=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}-1\\y=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(-1;2)$, $(-1;-4)$, $\left(-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}-1;\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1\right)$ và $\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}-1;-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1\right)$.

Câu 4. Cho phương trình

$$x^2-(2m+4)\,x+3m+2=0.$$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_2-2x_1=3$.

Lời giải.

Ta có $\Delta=4m^2+4m+8=(2m+1)^2+7>0$ với mọi x. Nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa

$$\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=2m+4\\x_1x_2=3m+2.\end{array}\right.\tag{0.12}$$

Suy ra

$$3\left(x_1+x_2-4\right)=2\left(x_1x_2-2\right).$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lại có $x_2 - 2x_1 = 3$, nên

$$3(x_1 + x_2 - 4) = 2(x_1x_2 - 2) \Leftrightarrow 4x_1^2 - 3x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Với $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 5$. Thế vào hệ (0.12) ta được

$$\begin{cases} 2m + 4 = 6 \\ 3m + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Với $x_1 = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x_2 = \dfrac{5}{2}$. Thế vào hệ (0.12) ta được

$$\begin{cases} 2m + 4 = \dfrac{9}{4} \\ 3m + 2 = -\dfrac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{7}{8}.$$

Vậy tìm được 2 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = 1$ và $m = -\dfrac{7}{8}$.

Câu 5. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho Parabol $(P)\colon y = \dfrac{1}{4}x^2$. Tìm tọa độ hai điểm A, B trên (P) sao cho A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $(d)\colon y = -2x + \dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Gọi $A\left(a; \dfrac{a^2}{4}\right)$ và $B\left(b; \dfrac{b^2}{4}\right)$, $(a \neq b)$ là hai điểm phân biệt trên (P). Gọi $M\left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ là trung điểm AB.

Gọi (Δ) là đường thẳng qua A, B. Ta có phương trình đường thẳng (Δ)

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y - \dfrac{a^2}{4}}{\dfrac{b^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} \Leftrightarrow y = \left(\frac{a+b}{4}\right)x - ab$$

Suy ra, để A, B đối xứng qua đường thẳng d thì

$$\begin{cases} M \in (d) \\ (\Delta) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2+b^2}{8} = -2\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \dfrac{9}{2} \\ \left(\dfrac{a+b}{4}\right)(-2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = -8(a+b) + 36 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -8 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Do đó a, b là nghiệm phương trình bậc 2

$$X^2 - 2X - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 4 \\ X = -2 \end{array}\right.$$

Vậy hai điểm A, B thỏa yêu cầu bài toán có tọa độ là $A(4; 4)$ và $B(-2; 1)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 6. Chứng minh rằng

$$M = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 30a$$

chia hết cho 24 với mọi số nguyên a.

Lời giải.

Chứng minh bài toán phụ: tích của 4 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 24.

Thật vậy, gọi tích bốn số tự nhiên liên tiếp là P

a) Trường hợp 1: một trong 4 số bằng 0. Ta có $P = 0$ nên $P \vdots 24$.

b) Trường hợp 2: với 4 số đều khác 0.

Trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tai 2 số chẵn, một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 4. Do đó $P \vdots 8$.

Lại có, trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tai một số chia hết cho 3, nên $P \vdots 3$.

Mà 8 và 3 là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, nên $P \vdots 24$.

Áp dụng bài toán phụ, suy ra

$$a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3) \vdots 24.$$

Do đó

$$a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 30a = a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3) + 24a \vdots 24 \Leftrightarrow M \vdots 24.$$

Câu 7. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm K đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Gọi H là giao điểm của BF và CE.

a) Chứng minh tam giác AEF và tam giác ACB đồng dạng.

b) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua O. Chứng minh AA' vuông góc với EF.

c) Từ A dựng các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (K) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Lời giải.

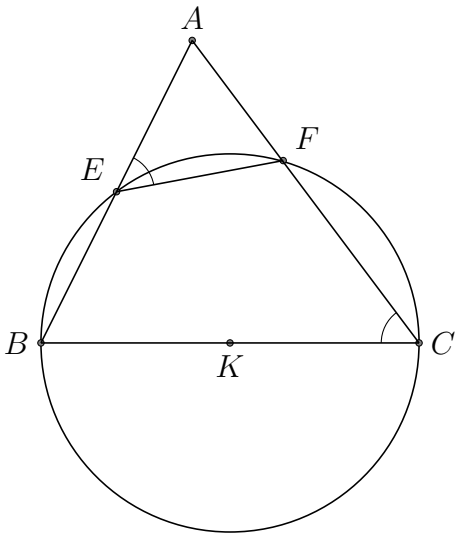
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Chứng minh tam giác AEF và tam giác ACB đồng dạng.

Ta có tứ giác $BEFC$ nội tiếp

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{AEF} + \widehat{BEF} = 180^\circ \\ \widehat{BCF} + \widehat{BEF} = 180^\circ \text{ (tứ giác } BEFC \text{ nội tiếp)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{BCF}$.



Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ACB$, có

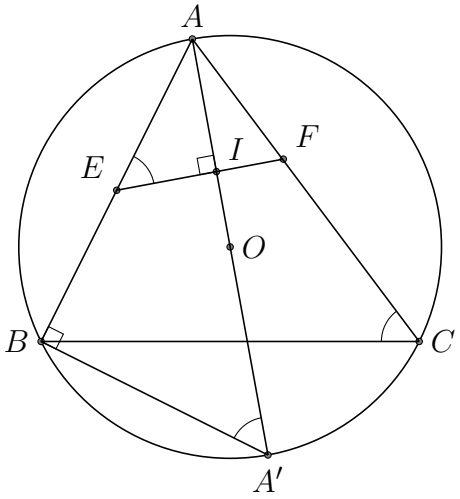
$$\begin{cases} A \text{ chung} \\ \widehat{AEF} = \widehat{BCF} \end{cases} \Rightarrow \triangle AEF \backsim \triangle ACB.$$

b) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua O. Chứng minh AA' vuông góc với EF.

Do tứ giác $ABA'C$ nội tiếp nên
$\widehat{AA'B} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{AA'B} = \widehat{AEF}$.
Gọi $I = AA' \cap EF$.
Xét $\triangle AEI$ và $\triangle AA'B$, có

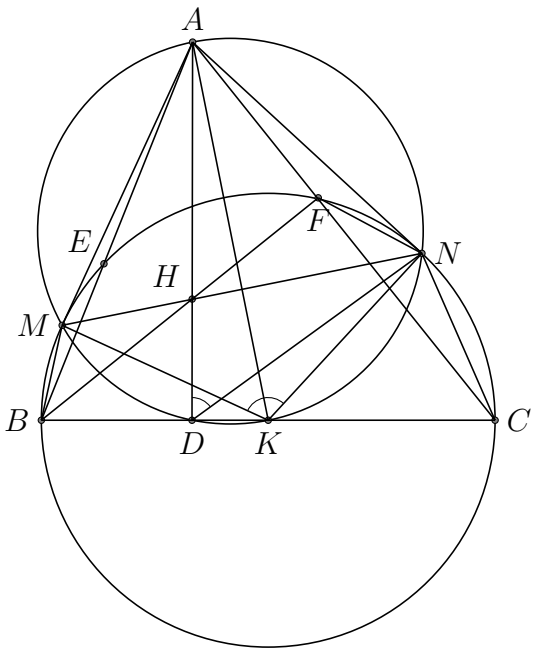
$$\begin{cases} A \text{ chung} \\ \widehat{AEI} = \widehat{AA'B} \end{cases} \Rightarrow \triangle AEI \backsim \triangle AA'B.$$

$\Rightarrow \widehat{AIE} = \widehat{ABA'} = 90^\circ \Leftrightarrow AA' \perp EF$.



c) Từ A dựng các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (K) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Gọi D là chân đường cao kẻ A của tam giác ABC, ta có $\widehat{AMK} = \widehat{ANK} = \widehat{ADK} = 90^\circ$.
Suy ra 5 điểm A, M, D, K, N cùng thuộc một đường tròn đường kính AK.

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{ANM} = \widehat{AKM} \\ \widehat{ADN} = \widehat{AKN}. \end{cases}$$

Lại có, do AM, AN là tiếp tuyến. Suy ra

$$\widehat{AKN} = \widehat{AKM} \Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{ANM}. \tag{0.13}$$

Mặt khác, xét $\triangle AFN$ và $\triangle ANC$, có

$$\begin{cases} A \text{ chung} \\ \widehat{ACN} = \widehat{ANF} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle AFN \backsim \triangle ANC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AF}{AN} \Leftrightarrow AN^2 = AF \cdot AC. \tag{0.14}$$

Lại xét $\triangle ADC$ và $\triangle AFH$, có

$$\begin{cases} A \text{ chung} \\ \widehat{AFH} = \widehat{ADC} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AFH \backsim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AF \cdot AC = AH \cdot AD. \tag{0.15}$$

Từ (0.14) và (0.15) suy ra

$$AN^2 = AH \cdot AD \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AD}{AN} \Rightarrow \triangle AND \backsim \triangle AHN \Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{ANH}. \tag{0.16}$$

Từ (0.13) và (0.16) suy ra

$$\widehat{ANH} = \widehat{ANM}.$$

Do đó ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, TỈNH NGHỆ AN, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho phương trình $x^2-(2m+3)x+3m+1=0$, m là tham số.

a) Tìm tất cả các số thực m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$.

b) Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta=(2m+3)^2-4(3m+1)=4m^2+5>0$ với mọi m. Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m+3\\x_1x_2=3m+1\end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7&\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=7\\&\Leftrightarrow(2m+3)^2-3(3m+1)=7\\&\Leftrightarrow4m^2+3-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=\dfrac{1}{4}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $m=-1;m=\dfrac{1}{4}$.

b) Để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta=4m^2+5$ phải là một số chính phương.

Đặt $4m^2+5=k^2$, $k\in\mathbb{N}$.

Khi đó $(k-2m)(k+2m)=5=1\cdot5=(-1)\cdot(-5)$. Suy ra các trường hợp.

TH1. $\begin{cases}k-2m=1\\k+2m=5\end{cases}\Rightarrow m=1.$

TH1. $\begin{cases}k-2m=5\\k+2m=1\end{cases}\Rightarrow m=-1.$

TH1. $\begin{cases} k-2m=-1 \\ k+2m=-5 \end{cases} \Rightarrow m=-1.$

TH1. $\begin{cases} k-2m=-5 \\ k+2m=-1 \end{cases} \Rightarrow m=1.$

Thử lại với $m=1$, $m=-1$ thì phương trình đã cho đều có nghiệm nguyên. Vậy $m=1$, $m=-1$.

Câu 2. Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x^2+4x+3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x^2+4x+3} \\ &\Leftrightarrow x+x+3+2\sqrt{x(x+3)}=2x^2+4x+3 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+3)}=2x^2+2x \Leftrightarrow \sqrt{x(x+3)}=x^2+x \\ &\Leftrightarrow x(x+3)=x^2(x+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+3=x(x^2+2x+1) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+2x^2-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x-1)(x^2+3x+3) \end{array}\right. =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm là $x=0$, $x=1$.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=3 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=5. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x, y \neq 0$. Ta có hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=5 \\ x+\dfrac{1}{x}+y-\dfrac{1}{y}=3. \end{cases}$$

Đặt $a=x+\dfrac{1}{x}$, $b=y-\dfrac{1}{y}$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2,\ b=1 \\ a=1,\ b=2. \end{array}\right.$

TH1. Với $a=2, b=1$ ta có $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y-\dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\pm\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$

TH1. Với $a=1, b=2$ ta có $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=1 \\ y-\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1=0 \\ y^2-2y-1=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm (x,y) là $\left(1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(1;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 4. Cho số tự nhiên n $(n\geq 2)$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương.

Lời giải.

Ta có $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1) \vdots p.$ (1)

Do $p-1 \vdots n$ nên $p-1\geq n$ hay $p\geq n+1$. Do đó $n-1<p$ nên từ (1) suy ra $n^2+n+1 \vdots p$.

Đặt $p-1=an$, $a\in\mathbb{N}, a\geq 1$. Khi đó $p=an+1$ và $n^2+n+1 \vdots an+1$. Suy ra $a\leq n+1$ (vì nếu $a>n+1$ thì $an+1>(n+1)n+1$, mâu thuẫn). (2)

Mặt khác $a(n^2+n+1)-n(an+1) \vdots an+1$ hay $(a-n)n+a \vdots an+1$. (3)

Do $a\geq 1$ nên $(a-1)n+a>0$, do đó từ (3) suy ra $(a-1)n+a\geq an+1$ hay $a\geq n+1$. (4)

Từ (2) và (4) suy ra $a=n+1$. Do đó $p=(n+1)n+1=n^2+n+1$. Suy ra $n+p=n^2+2n+1=(n+1)^2$ là số chính phương, đpcm.

Câu 5. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $(a-b)^2=a+b+2$. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{a^3}{(b+1)^3}\right)\cdot\left(1+\frac{b^3}{(a+1)^3}\right)\leq 9.$$

Lời giải.

Ta có

$$(a-b)^2=a+b+2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=a+b+2$$

$$a(a+1)+b(b+1)=2(a+1)(b+1) \Leftrightarrow \frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=2.$$

Đặt $x=\dfrac{a}{b+1}$, $y=\dfrac{b}{a+1}$. Khi đó $x,y\geq 0$ và $x+y=2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(1+x^3)(1+y^3)\leq 9$

$$\Leftrightarrow 1+x^3y^3+x^3+y^3\leq 9$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3+(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)\leq 8$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3+2(4-3xy)\leq 8$$

$$\Leftrightarrow xy(x^2y^2-6)\leq 0, \texttt{đúng vì } 0\leq xy\leq \frac{(x+y)^2}{4}=1.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ hay $\left[\begin{array}{l} a = 0,\ b = 2 \\ a = 2,\ b = 0. \end{array}\right.$

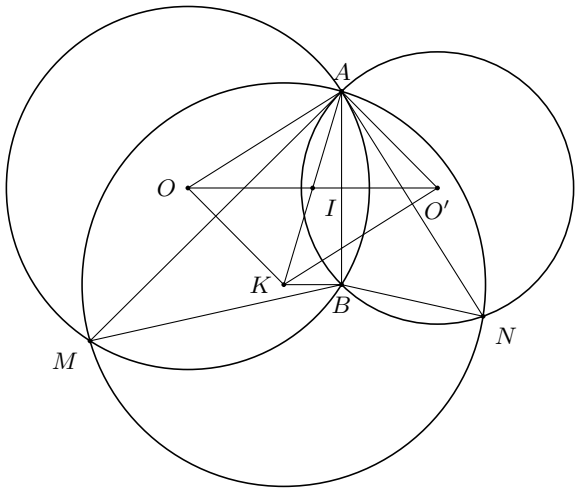
Câu 6. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau tại hai điểm A và B $(R > r)$ sao cho O và O' ở hai phía đối với đường thẳng AB. Gọi K là điểm sao cho $OAO'K$ là hình bình hành.

a) Chứng minh rằng tam giác ABK là tam giác vuông.

b) Đường tròn tâm K bán kính KA cắt các đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ theo thứ tự tại M và N (M, N khác A). Chứng minh rằng $\widehat{ABM} = \widehat{ABN}$.

c) Trên đường tròn $(O; R)$ lấy điểm C thuộc cung AM không chứa B (C khác A, M). Đường thẳng CA cắt đường tròn $(O'; r)$ tại D. Chứng minh rằng $KC = KD$.

Lời giải.



a) Gọi I là giao điểm của KA và OO'. Khi đó I là trung điểm của KA. Mặt khác OO' là trung trực của AB nên $IA = IB$. Từ đó suy ra $IB = IA = IK$ nên tam giác ABK vuông tại B (đpcm).

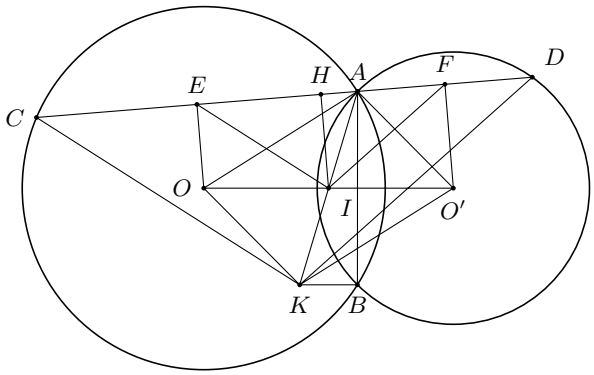
b) Ta có $KA = KM$, $OA = OM$ nên OK là trung trực của AM. Do đó $KO \perp AM$.
Vì $KO \parallel AO'$ nên ta suy ra $MA \perp AO'$. Do đó MA là tiếp tuyến của đường tròn (O').
Tương tự ta cũng có NA là tiếp tuyến của đường tròn (O).
Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{ANB}$ và $\widehat{NAB} = \widehat{AMB}$. Xét hai tam giác AMB và ABN suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{ABN}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

c) Gọi E, F là trung điểm của OA, AD và H là trung điểm EF.

Khi đó ta có OE, $O'F$ cùng vuông góc với CD nên $IH \perp CD$. Suy ra $IE = IF$.

Mặt khác $KC = 2IE$, $KD = 2IF$ nên ta suy ra $KC = KD$.



Câu 7. Cho 17 số tự nhiên mà các chữ số của mỗi số được lấy từ tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4\}$. Chứng minh rằng ta có thể chọn được 5 số trong 17 số đã cho sao cho tổng của 5 số này chia hết cho 5.

Lời giải.

Kí hiệu T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 lần lượt là tập hợp các số có chữ số tận cùng là $0, 1, 2, 3, 4$.

- Nếu mỗi tập hợp trên đều khác rỗng thì ta chọn từ mỗi tập một phần tử,. Khi đó tổng của 5 số được chọn có tận cùng bằng 0 nên chia hết ch 5.

- Nếu có một tập rỗng thì khi đó theo nguyên lí Đirichlê, trong 4 tập còn lại luôn có một tập có ít nhất 5 phần tử. Ta chọn 5 số từ tập này, khi đó tổng của 5 số được chọn cũng chia hết cho 5.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn chọn được 5 số có tổng chia hết cho 5.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÀ TĨNH, TỈNH HÀ TĨNH, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho x, y, z là các số hữu tỷ, thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Chứng minh $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ là một số hữu tỷ.

Lời giải.

Từ giả thiết $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \Leftrightarrow zx+yz=xy \Leftrightarrow 2xy-2yz-2zx=0$

$$\begin{aligned}\text{Do đó } \sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx}\\ &= \sqrt{(x+y-z)^2}\\ &= |x+y-z| \text{ là số hữu tỷ.}\end{aligned}$$

Câu 2.

a) Giải phương trình $4x^2-3x-2=\sqrt{x+2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-x-y=-5 \\ \dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{1}{y^2-2y}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $x \geq -2$. Ta có phương trình tương đương $16x^2-12x-8=4\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow 16x^2-8x+1=4(x+2)+4\sqrt{x+2}+1 \Leftrightarrow (4x-1)^2=\left(2\sqrt{x+2}+1\right)^2$

Xét $4x-1=-\left(2\sqrt{x+2}+1\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-x-2=0 \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$

Xét $4x-1=2\sqrt{x+2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x-1=0 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}; \dfrac{5+\sqrt{41}}{8}\right\}$.

b) ĐKXĐ: $x, y \neq 0; x, y \neq 2$. Từ phương trình $xy-x-y=-5 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=-4$.

Đặt $\begin{cases} x-1=a \\ y-1=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x=a^2-1 \\ y^2-2y=b^2-1 \end{cases}$ và $ab=-4$. Ta có

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{1}{y^2-2y}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{a^2+b^2-2}{17-a^2-b^2}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow a^2+b^2=8\Rightarrow(a+b)^2-2ab=8\Rightarrow a+b=0$

$\Rightarrow a=-b$. Do đó $ab=-4\Leftrightarrow -a^2=-4\Leftrightarrow a=\pm 2$.

TH1: $\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=-2\\y-1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=2\\y-1=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(-1;3),(3;-1)$.

Câu 3. Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$ (m là tham số). Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm x_1,x_2 với mọi m. Tìm m để biểu thức $P=\dfrac{2x_1x_2+1}{x_1^2-2mx_2+1-2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $\Delta'=m^2+2m+1=(m+1)^2\geq 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\x_1x_2=-2m-1\end{cases}$

Do đó $P=\dfrac{-4m-1}{x_1^2+(x_1+x_2)x_2+1-2m}=\dfrac{-4m-1}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1-2m}$

$=\dfrac{-4m-1}{(x_1+x_2)^2-x_1x_2+1-2m}$

$=\dfrac{-4m-1}{4m^2+2}=\dfrac{-4m-1}{4m^2+2}+1-1$

$=\dfrac{(2m-1)^2}{4m^2+2}-1\geq -1$

Vậy GTNN của P bằng -1 khi $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho 3 số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{zx}{zx+y}}\leq\frac{3}{2}$$

.

Lời giải.

Áp dụng BĐT CauChy ta có

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}}=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z+x}+\frac{y}{y+z}\right)$$

Tương tự ta cũng có

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{z}{z+x}\right)$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$$\sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}\right)$$

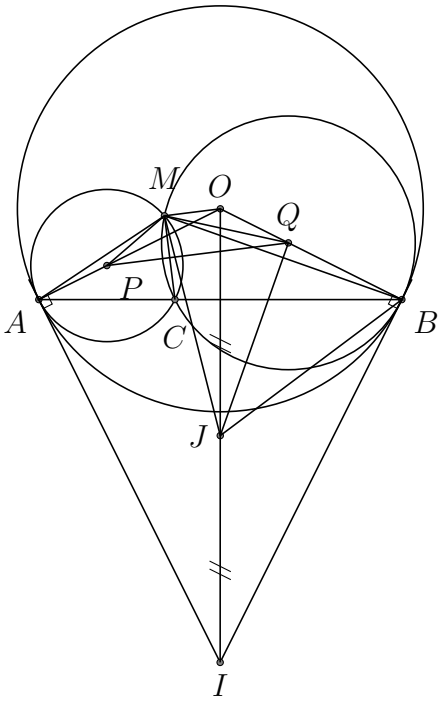
Do đó $P \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{z+x}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}\right)=\frac{3}{2}$.
Dấu $''=''$ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Câu 5. Cho đường tròn tâm O và dây cung AB cố định ($O \notin AB$). C là điểm di động trên đoạn AB (C không trùng với A, B và trung điểm của AB). Đường tròn tâm P đi qua điểm C và tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, đường tròn tâm Q đi qua C và tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Các đường tròn $(P), (Q)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại I.

a) Chứng minh MC là tia phân giác của góc AMB và các điểm A, M, O, B, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh khi điểm M thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.



a) Ta có AI là tiếp tuyến chung của (P) và (O); BI là tiếp tuyến chung của (Q) và (O) và O, P, A thẳng hàng; O, Q, B thẳng hàng.
Trong đường tròn (P) có $\widehat{AMC} = \widehat{BAI}$
Trong đường tròn (Q) có $\widehat{BMC} = \widehat{ABI}$

mà $\widehat{BAI} = \widehat{ABI} \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{BMC} \Rightarrow MC$ là tia phân giác của $\widehat{AMB}$

Ta có $\widehat{AIB} + \widehat{BAI} + \widehat{ABI} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AIB} + \widehat{AMB} = 180^0$ nên tứ giác $AMBI$ nội tiếp.

Lại có $\widehat{OAI} = \widehat{OBI} = 90^0$ nên tứ giác $AOBI$ nội tiếp.

Do đó các điểm A, M, O, B, I cùng thuộc một đường tròn đường kính OI.

b) Gọi J là trung điểm của OI.

Ta có ΔAMP cân nên $\widehat{MPO} = 2\widehat{MAO}$

ΔPMQ cân nên $\widehat{MQO} = 2\widehat{MBO}$ mà $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} \Rightarrow \widehat{MPO} = 2\widehat{MQO}$

suy ra tứ giác $PMOQ$ nội tiếp.

Do đó đường tròn ngoại tiếp ΔMPQ chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMOQ$.

Các điểm A, M, O, B, I cùng thuộc đường tròn đường kính OI nên $JM = JB, QM = QB$ suy ra $\Delta JMQ = \Delta JBQ \Rightarrow \widehat{JMQ} = \widehat{JBQ}$ mà ΔJOB cân $\Rightarrow \widehat{JBQ} = \widehat{JOQ}$. Do đó $\widehat{JMQ} = \widehat{JOQ}$ hay tứ giác $JMOQ$ nội tiếp. Suy ra các điểm P, M, O, Q, I cùng thuộc một đường tròn. Ta có O, I cố định nên JO cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMPQ luôn thuộc đường trung trực của đoạn JO cố định.

Câu 6. Cho $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ với $(n \in N^*)$ là những số nguyên dương và không có hai số nào liên tiếp. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại ít nhất một số chính phương b thỏa mãn $S_n \leq b \leq S_{n+1}$.

Lời giải.

Vì $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nên $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.

Ta có $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} \geq 1 \Leftrightarrow S_{n+1} \geq \left(\sqrt{S_n} + 1\right)^2 \Leftrightarrow S_n + a_{n+1} \geq \left(\sqrt{S_n} + 1\right)^2$

$\Leftrightarrow S_n + a_{n+1} \geq S_n + 2\sqrt{S_n} + 1 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq 2\sqrt{S_n} + 1 \qquad (*)$

Vì $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ và không có hai số nào liên tiếp nên ta có

$a_{n+1} \geq a_n + 2$

$a_n \geq a_{n-1} + 2 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_{n-1} + 2.2$

$a_{n-1} \geq a_{n-2} + 2 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_{n-2} + 3.2$

$\ldots$

$a_2 \geq a_1 + 2 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_1 + n.2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên được

$na_{n+1} \geq a_n + an - 1 + \cdots + a_1 + 2\left(1 + 2 + \cdots + n\right) = S_n + n(n+1) \Leftrightarrow na_{n+1} - n(n+1) \geq S_n$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{na_{n+1} - n(n+1)} + 1 \geq 2\sqrt{S_n} + 1$. Ta chứng minh $a_{n+1} \geq 2\sqrt{na_{n+1} - n(n+1)} + 1$.

Thậy vậy $a_{n+1} \geq 2\sqrt{na_{n+1} - n(n+1)} + 1 \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + 1 \geq 4na_{n+1} - 4n(n+1)$

$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 2(2n+1)a_{n+1} + (2n+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a_{n+1} - 2n - 1)^2 \geq 0$ luôn đúng, do đó $(*)$ đúng.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Vậy với $n \in N^*$ thì ta luôn có $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} \geq 1$ suy ra luôn tồn tại ít nhất 1 số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{S_n} \leq k \leq \sqrt{S_{n+1}} \Leftrightarrow S_n \leq k^2 \leq S_{n+1}$ hay luôn tồn tại ít nhất một số chính phương $b = k^2$ với ($k$nguyên dương) thỏa mãn $S_n \leq b \leq S_{n+1}$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, TỈNH HẢI DƯƠNG, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho $x = a + 1 - \sqrt{1 + a^2 + \dfrac{a^2}{(a+1)^2}}$, $(a > 0)$ và $P = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$.
Rút gọn P theo a.

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$.
Chứng minh $\sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-x)(4-z)} + \sqrt{z(4-x)(4-y)} - \sqrt{xyz} = 8$

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
x &= a + 1 - \sqrt{1 + a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}} \\
&= a + 1 - \sqrt{[(a+1)^2 - 2a] + \frac{a^2}{(a+1)^2}} \\
&= a + 1 - \sqrt{\frac{(a+1)^4 - 2a(a+1)^2 + a^2}{(a+1)^2}} \\
&= a + 1 - \sqrt{\frac{[(a+1)^2 - a]^2}{(a+1)^2}} \\
&= a + 1 - \left|\frac{(a+1)^2 - a}{a+1}\right| = a + 1 - \frac{(a+1)^2 - a}{a+1} \ (\text{ vì } a > 0) \\
&= \frac{a}{a+1}.
\end{aligned}$$

Vì $a>0$ nên $\dfrac{a}{a+1}<1$ nên ta có:

$$\begin{aligned}P&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}+1}{\sqrt{(x-1)^2}}\\&=\frac{\sqrt{x}+|\sqrt{x}-1|+1}{|x-1|}\\&=\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{1-x}\\&=\frac{2}{1-x}.\end{aligned}$$

b) Theo giả thiết ta có $x+y+z+\sqrt{xyz}=4\Rightarrow y+z=4-x-\sqrt{xyz}$.

Do đó ta có:

$$\begin{aligned}&x(4-y)(4-x)=x(16-4z-4y+yz)\\=\;&x[16-4(y+z)+yz]=x[16-4(4-x-\sqrt{xyz})+yz]\\=\;&x(4x+4\sqrt{xyz}+yz)=x\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)^2.\end{aligned}$$

Do đó $\sqrt{x(4-y)(4-z)}=\sqrt{x\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)^2}=\sqrt{x}(2\sqrt{x}+\sqrt{yz})=2x+\sqrt{xyz}$.

Và khi đó $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-x)(4-z)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}=2x+\sqrt{xyz}+2y+\sqrt{xyz}+2z+\sqrt{xyz}=2(x+y+z)+3\sqrt{xyz}=8+\sqrt{xyz}$.

Nhận xét. 1) Bài toán ý (a) sử dụng hằng đẳng thức cơ bản và chú ý lập luận để chỉ ra được điều kiện $x<1$.

2) Bài toán ý (b), để ý thấy tính *cyclic* của $x,\ y,\ z$ và khéo léo sử dụng giả thiết.

Một bài toán tương tự: Cho các số dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x+y+z+\sqrt{2xyz}=2$. Chứng minh $\sqrt{x(2-y)(2-z)}+\sqrt{y(2-x)(2-z)}+\sqrt{z(2-x)(2-y)}=\sqrt{8}+\sqrt{xyz}$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=x^2+7$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\x(x+1)+y(y+1)=4.\end{cases}$

Lời giải.

1) Điều kiện $x > 0$. Đặt $\sqrt{x + \dfrac{3}{x}} = t,\ t > 0$. Suy ra $t^2 = x + \dfrac{3}{x} = \dfrac{x^2+3}{x} \Rightarrow x^2 + 3 = t^2 x \Rightarrow x^2 + 7 = t^2 x + 4$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} &2(x+1)t = t^2x + 4 \Leftrightarrow t^2x - 2(x+1)t + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow xt(t-2) - 2(t-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-2)(xt-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{2}{x}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Nếu $t = 2$ thì $x + \dfrac{3}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$. Thử lại thỏa mãn phương trình đã cho.
- Nếu $t = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3}{x} = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Thử lại thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 3$.

2)

Xét hai phương trình

$$3x^2 + xy - 4x + 2y = 2 \tag{0.17}$$

$$x(x+1) + y(y+1) = 4 \tag{0.18}$$

Trừ vế với vế của phương trình (0.17) cho (0.18) trong hệ ta được

$2x^2 + xy - 5x - y^2 + y = -2 \Leftrightarrow 2x^2 + (y-5)x - y^2 + y + 2 = 0$.

Xét phương trình

$$2x^2 + (y-5)x - y^2 + y + 2 = 0 \tag{0.19}$$

ta có $\Delta_x = (y-5)^2 - 8(-y^2 + y + 2) = 9(y-1)^2$. Khi đó phương trình (0.19) có nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 - y + 3(y-1)}{4} = \dfrac{y+1}{2} \\ x = \dfrac{5 - y - 3(y-1)}{4} = 2 - y. \end{array}\right.$$

- Nếu $x = \dfrac{y+1}{2}$, thay vào phương trình (0.18) ta được

  $x(x+1) + (2x-1)2x = 4 \Leftrightarrow 5x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-4}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{1}{10} \end{array}\right.$. Thay vào thỏa mãn hệ phương trình.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- Nếu $x = 2 - y$ hay $y = 2 - x$ thay vào phương trình (0.18) ta được $x(x+1) + (2-x)(3-x) = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$. Thay vào hệ phương trình thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;\ y)$ là $(1;\ 1)$, $(\frac{-4}{5};\ \frac{1}{10})$.

Nhận xét. 1) Bài toán (1) là dạng giải phương trình cơ bản.

2) Bài toán (2), bằng cách đưa về phương trình bậc hai đối với ẩn x ta tìm được mối liên hệ giữa x và y. Ta cũng có thể đưa về phương trình bậc hai đối với ẩn y : $y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0$.

Câu 3.

a) Đặt $N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2017} + a_{2018}$, $M = a_1^5 + a_2^5 + \cdots + a_{2017}^5 + a_{2018}^5$, với $a_1;\ a_2;\ a_3; \ldots a_{2017},\ a_{2018}$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M cũng chia hết cho 30.

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên n và k để $n^8 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.

Lời giải.

a) Ta có

$$M - N = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + \cdots + (a_{2018}^5 - a_{2018}).$$

Xét $a_k^5 - a_k = a_k(a_k^2 - 1)(a_k^2 + 1) = a_k(a_k + 1)(a_k - 1)(a_k^2 + 1),\ \forall k = 1, \ldots 2018.$

Ta có $(a_k - 1)a_k(a_k + 1) \vdots 6$.

Nếu $a_k \vdots 5$ thì $a_k^5 - a_k = a_k(a_k^2 - 1)(a_k^2 + 1) \vdots 5$;

Nếu a_k chia 5 dư 1 hoặc dư 4 thì $a_k^2 - 1 \vdots 5$;

Nếu a_k chia 5 dư 2 hoặc dư 3 thì $a_k^2 + 1 \vdots 5$.

Do đó $a_k^5 - a_k = a_k(a_k^2 - 1)(a_k^2 + 1) \vdots 5$.

Vì ƯCLN$(5;\ 6) = 1$ nên ta có $a_k^5 - a_k \vdots 30$.

Do đó $M - N \vdots 30$.

Vì thế nếu N chia hết cho 30 thì M cũng chia hết cho 30.

b) Ta có

$$\begin{aligned} n^8+4^{2k+1} &= (n^4)^2+4^{2k+1} \\ &= (n^4)^2+\left(2^{2k+1}\right)^2 \\ &= (n^4)^2+2n^4 2^{2k+1}+\left(2^{2k+1}\right)^2-2^{2k+2}n^4 \\ &= \left(n^4+2^{2k+1}\right)^2-\left(n^2 2^{k+1}\right)^2 \\ &= \left(n^4+2^{2k+1}-n^2.2^{k+1}\right)\left(n^4+2^{2k+1}+n^2.2^{k+1}\right) \end{aligned}$$

Do $n,\ k$ là các số tự nhiên nên $n^4+2^{2k+1}-n^2 2^{k+1} \le n^4+2^{2k+1}+n^2 2^{k+1}$, do đó để n^8+4^{2k+1} là số nguyên tố thì $n^4+2^{2k+1}-n^2 2^{k+1}=1$.

Ta có $n^4+2^{2k+1}-n^2.2^{k+1}=n^4-2n^2 2^k+(2^k)^2+2^{2k+1}-2^{2k}=\left(n^2-2^k\right)^2+2^{2k}\ge 1$, do đó $n^4+2^{2k+1}-n^2.2^{k+1}=1$ xảy ra khi $n=1$ và $k=0$.

Vậy với $n=1,\ k=0$ thì n^8+4^{2k+1} là số nguyên tố.

⚠**Nhận xét.** 1) Trong ý (1) ở trên có thể trình bày cách 2 như sau:

$$a^5-a=a(a^2-a)(a^2+1)=a(a^2-1)(a^2-4+5)=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5a(a^2-1)\ \vdots 5.$$

Bài toán trên là trường hợp đặc biệt của định lí nhỏ Fermat, thường được diễn đạt dưới hai dạng:

- Dạng 1: Nếu p là số nguyên tố và a là một số nguyên thì a^p-a chia hết cho p.
- Dạng 2: Nếu a là một số nguyên không chia hết cho số nguyên tố p thì $a^{p-1}-1$ chia hết cho p.

2) Trong ý (2) ở trên có thể thay giả thiết n^8+4^{2k+1} bởi giả thiết $n^4+4^{2k+1},\ n^{16}+4^{2k+1},\ldots$

Câu 4. Cho nửa đường tròn $(O;\ R)$ đường kính BC. Gọi A là điểm di động trên nửa đường tròn (A khác $B,\ C$). Kẻ $AD\perp BC$ (D thuộc BC) sao cho đường tròn đường kính AD cắt $AB,\ AC$ và nửa đường tròn (O) lần lượt tại $E,\ F,\ G$ (G khác A). Đường thẳng AG cắt BC tại H.

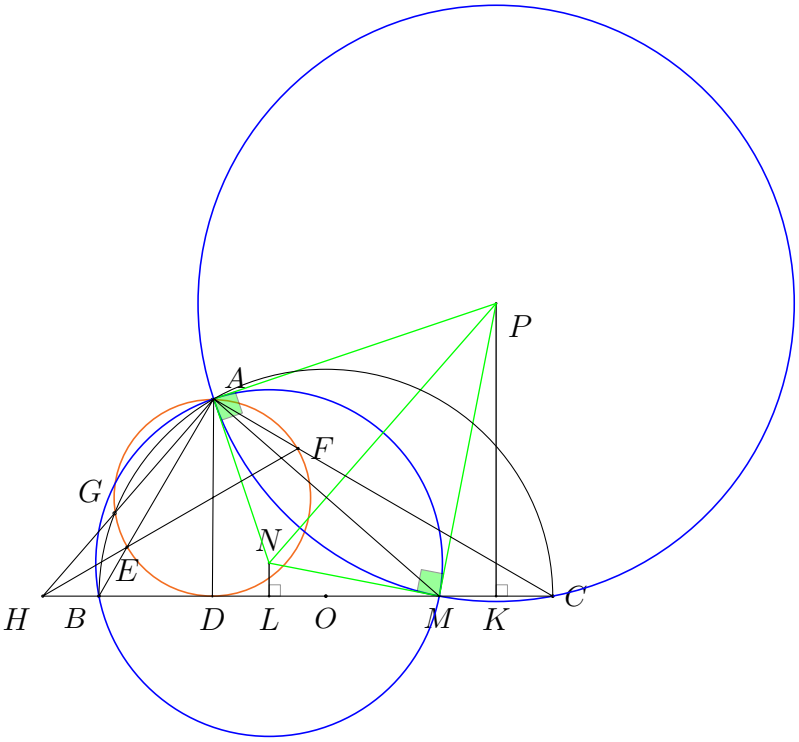
a) Tính $\dfrac{AD^3}{BE\times CF}$ theo R và chứng minh $H,\ E,\ F$ thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $FG\times CH+GH\times CF=CG\times HF$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

c) Trên BC lấy M cố định (M khác B, C). Gọi N, P lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB và MAC. Xác định vị trí của A để diện tích tam giác MNP nhỏ nhất.

Lời giải.

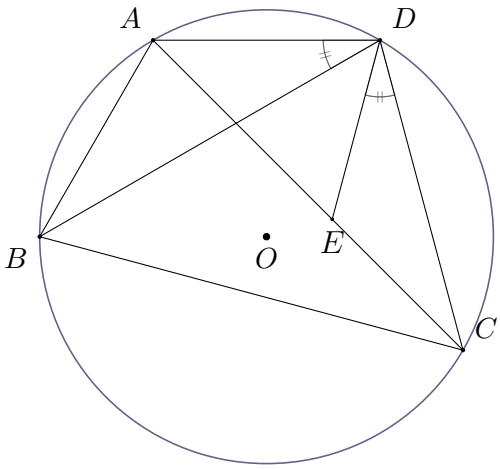


a) Ta có $BE \times BA = BD^2$, $CF \times CA = CD^2$, $BD \times CD = AD^2$. Suy ra $BE \times CF \times BA \times CA = BD^2 \times CD^2 = (BD \times CD)^2 = AD^4 \Rightarrow BE \times CF = \dfrac{AD^4}{AD \times BC} = \dfrac{AD^3}{BC} \Rightarrow \dfrac{AD^3}{BE \times CF} = BC = 2R$.

Tứ giác $HGEB$ nội tiếp nên $\widehat{HEB} = \widehat{HGB} = \widehat{ACB} = \widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{HEB} = \widehat{AEF}$ mà A, E, B thẳng hàng nên H, E, F thẳng hàng.

b)

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Định lý Ptolemy: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, R). Khi đó ta có $AD \times CB + AB \times CD = AC \times BD$.

Chứng minh định lí: Lấy E trên AC sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$.

Khi đó $\Delta ADB \backsim \Delta CDE$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{CE} = \dfrac{DB}{DE} \Rightarrow AB \times DC = BD \times EC$ (1).

Ta cũng có $\Delta ADE \backsim \Delta BDC$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{BC} = \dfrac{DE}{DC} \Rightarrow AD \times BC = BD \times AE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB \times DC + AD \times BC = BD \times EC + BD \times AE = BD(EC + AE) = BD \times AC$. Tứ giác $GFCH$ nội tiếp.

Áp dụng định lý Ptôlêmê với tứ giác nội tiếp $GFCH$ ta có $GF \times HC + GH \times FC = GC \times HF$.

c) Ta có $\widehat{ANM} + \widehat{APM} = 2\widehat{ABC} + 2\widehat{ACB} = 2(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{NMP} = \widehat{NAP} = 90^\circ$.

Đặt $R_1 = NA,\ R_2 = PA$, khi đó $S_{\Delta MNP} = \dfrac{1}{2} R_1 R_2$.

Ta cũng có $\dfrac{BM}{\sin \widehat{BAM}} = 2R_1,\ \dfrac{CM}{\sin \widehat{CAM}} = 2R_2 \Rightarrow R_1 R_2 = \dfrac{1}{4} BM \cdot CM \cdot \dfrac{1}{\sin \widehat{BAM} \cdot \sin \widehat{CMA}}$.

Ta có $\sin \widehat{BAM} \cdot \sin \widehat{CAM} \leq \dfrac{1}{2}\left(\sin^2 \widehat{BAM} + \sin^2 \widehat{CAM}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sin^2 \widehat{BAM} + \cos^2 \widehat{BAM}\right) = \dfrac{1}{2}$ (do hai gócCAM và BAM phụ nhau).

Dấu " = " xảy ra khi $\sin \widehat{BAM} = \sin \widehat{CAM} \Leftrightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ hay AM là phân giác của góc BAC. Gọi A' là điểm chính giữa cung BC không chứa A, khi đó A là giao điểm của đường thẳng $A'M$ và đường tròn (O).

Câu 5. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - a^2 - 28b^2 - 28c^2.$$

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Theo giả thiết $ab+bc+ca=1$ và áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{ab+bc+ca+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}=a.\frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le a.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$$
$$\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{ab+bc+ca+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}=b.\frac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}\le b.\left[\frac{1}{4(b+c)}+\frac{1}{b+a}\right]$$
$$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{c}{\sqrt{ab+bc+ca+c^2}}=\frac{c}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}=c.\frac{1}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}\le c.\left[\frac{1}{4(b+c)}+\frac{1}{c+a}\right]$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{4(b+c)}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{4(b+c)}+\frac{c}{c+a}=\frac{9}{4}.$$

Áp dụng AM - GM ta có

$$\frac{a^2}{2}+\frac{49b^2}{2}\ge 7ab;$$
$$\frac{a^2}{2}+\frac{49c^2}{2}\ge 7ac;$$
$$\frac{7}{2}(b^2+c^2)\ge 7bc.$$

Suy ra $a^2+28b^2+28c^2\ge 7(ab+bc+ca)=7\Rightarrow -(a^2+28b^2+28c^2)\le -7$.
Từ đó ta có $P\le\left(\frac{9}{4}-7\right)=\frac{-19}{4}$.
Và $P_{\max}=\frac{-19}{4}\Leftrightarrow a=\frac{7}{\sqrt{15}},\ b=c=\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Nhận xét. + Bài toán sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$ để đưa các mẫu của các phân thức về tích, sau đó áp dụng bất đẳng thức AM - GM đưa về tổng các phân thức.
+ Sau khi đánh giá được giá trị lớn nhất của tổng ba phân thức đầu với dấu bằng xảy ra khi các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\begin{cases}\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a+c}\\ \frac{1}{4(b+c)}=\frac{1}{b+a}\\ \frac{1}{4(b+c)}=\frac{1}{c+a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=c\\ a=7b=7c.\end{cases}$$

Với điều kiện này ta dự đoán điểm rơi cho bất đẳng thức AM - GM để xử lý cho biểu thức $a^2+28b^2+28c^2$ còn lại.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BÌNH PHƯỚC, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $T = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1\right)$.

b) Cho $x + \sqrt{3} = 2$. Tính giá trị biểu thức:

$$H = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 20x + 2023.$$

Lời giải.

a) Điều kiện: $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ ab \neq 1 \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} = \frac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+1)}{ab-1}.$$

và

$$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 = \frac{-2(\sqrt{a}+1)}{ab-1}.$$

Nên

$$T = \frac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+1)}{ab-1} : \frac{-2(\sqrt{a}+1)}{ab-1} = -\sqrt{ab}.$$

b) Ta có: $x + \sqrt{3} = 2 \Leftrightarrow 2 - x = \sqrt{3} \Rightarrow (2-x)^2 = 3 \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$,

$H = (x^5 - 4x^4 + x^3) + (x^4 - 4x^3 + x^2) + 5(x^2 - 4x + 1) + 2018$.

Suy ra $H = x^3(x^2 - 4x + 1) + x^2(x^2 - 4x + 1) + 5(x^2 - 4x + 1) + 2018$.

Do $x^2 - 4x + 1 = 0$ nên $H = 2018$.

Câu 2. Cho Parabol $(P)\colon y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d)\colon y=(m+1)x-m^2-\dfrac{1}{2}$ (m là tham số).

Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ sao cho biểu thức $T=y_1+y_2-x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{2}x^2=(m+1)x-m^2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+2m^2+1=0 \quad (1)$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm.

$\Leftrightarrow \Delta'\geq 0\Leftrightarrow (m+1)^2-2m^2-1=2m-m^2\geq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 2$.

Vậy với $0\leq m\leq 2$ thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

Khi đó theo định lí Vi-ét thì

$$\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1)\\ x_1x_2=2m^2+1 \end{cases}$$

Ta có

$$y_1=(m+1)x_1-m^2-\frac{1}{2}$$
$$y_2=(m+1)x_2-m^2-\frac{1}{2}$$

Do đó

$$\begin{aligned} T&=y_1+y_2-x_1x_2=(m+1)(x_1+x_2)-2m^2-1-x_1x_2\\ &=2(m+1)^2-4m^2-2=-2m^2+4m=2-2(m-1)^2,\forall m\in[0;2]. \end{aligned}$$

Đặt $t=m-1$. Do $m\in[0;2]\Rightarrow t\in[-1;1]\Rightarrow t^2\in[0;1]$.

Nên $T=2-2(m-1)^2=2-2t^2\geq 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 0 đạt được khi $t^2=1\Leftrightarrow (m-1)^2=1\Leftrightarrow m=0;\ m=2$.

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{6x-14}=x^2-5$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq\dfrac{7}{3}$.

Ta có:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{6x-14}=x^2-5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-2+\sqrt{6x-14}-2=x^2-9.$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{6(x-3)}{\sqrt{6x-14}+2}-(x-3)(x+3)=0.$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{6}{\sqrt{6x-14}+2}-(x+3)\right]=0.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{6}{\sqrt{6x-14}+2}-(x+3)=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{6}{\sqrt{6x-14}+2}=(x+3) \qquad (*) \end{array}\right.$$

Ta có: $\begin{cases} VT(*)<\dfrac{7}{2} \\ VP(*)>\dfrac{16}{3} \end{cases}$ $\left(\forall x \geq \dfrac{7}{3}\right)$. Suy ra phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất$x=3$.

Câu 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2+x^2+y^2+1=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+(xy-1)^2=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $\begin{cases} x+y=u \\ xy-1=v \end{cases}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Khi đó, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=10 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=10 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=16 \\ uv=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=-4 \\ uv=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1 \\ v=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-3 \\ v=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

- Với $\begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=4 \end{cases}$ (Hệ pt vô nghiệm)
- Với $\begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$
- Với $\begin{cases} u=-1 \\ v=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$
- Với $\begin{cases} u=-3 \\ v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là: $(1;2)$, $(2;1)$, $(1;-2)$, $(-2;1)$, $(0;-3)$, $(-3;0)$.

Câu 5. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên dây BC lấy điểm M (M khác B và C). Trên dây BD lấy điểm N sao cho $\widehat{MAN}=\frac{1}{2}\widehat{CAD}$; AN cắt CD tại K. Từ M kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$).

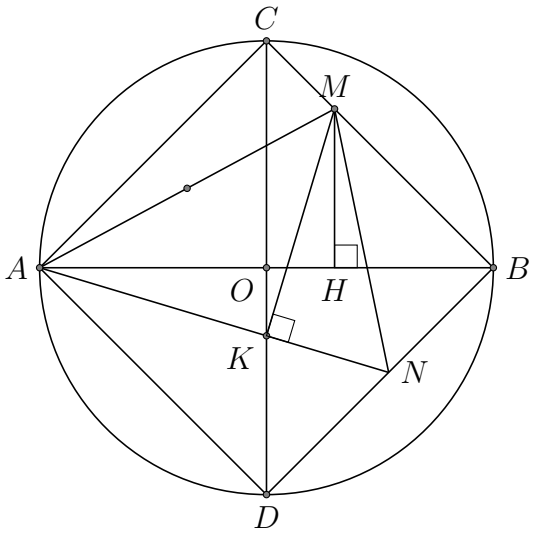
a) Chứng minh tứ giác $ACMH$ và tứ giác $ACMK$ nội tiếp.

b) Tia AM cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Tiếp tuyến tại E và B của đường tròn (O) cắt nhau tại F. Chứng minh rằng AF đi qua trung điểm của HM.

c) Chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M di chuyển trên dây BC (M khác B và C).

Lời giải.

a)



Ta có: $\overset{\frown}{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\overset{\frown}{ACM} = 90^\circ$.

$\overset{\frown}{ACM} = \overset{\frown}{AHM} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ACM} + \overset{\frown}{AHM} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $ACMH$ nội tiếp.

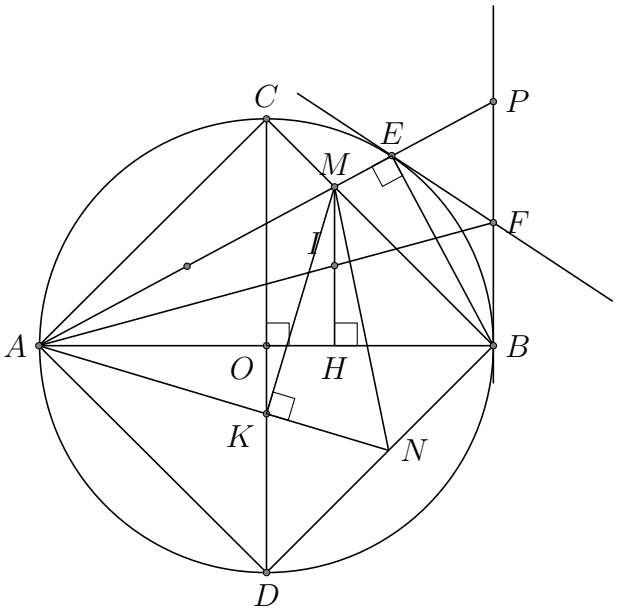
Ta lại có:

$$\overset{\frown}{MAK} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CAD} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

$$\overset{\frown}{MCK} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

$\Rightarrow \overset{\frown}{MAK} = \overset{\frown}{MCK}$. Suy ra tứ giác $ACMK$ nội tiếp.

b)



Gọi $AF \cap MH = \{I\}$; $AM \cap BF = \{P\}$.

$MH \parallel PB$ (vì cùng vuông góc với AB). Suy ra $\dfrac{MH}{PB} = \dfrac{AH}{AB}$ (1)

$IH \parallel FB \Rightarrow \dfrac{IH}{FB} = \dfrac{AH}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{IH}{FB} = \dfrac{MH}{PB}$.

Ta có: $\overset{\frown}{AEB} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BEP} = 90^\circ$.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $FE = FB \Rightarrow \overset{\frown}{FEB} = \overset{\frown}{FBE}$.

$\overset{\frown}{FEP} = 90^\circ - \overset{\frown}{FEB}$; $\overset{\frown}{FPE} = 90^\circ - \overset{\frown}{FBE}$;

$\Rightarrow \overset{\frown}{FEP} = \overset{\frown}{FPE} \Rightarrow FE = FP$.

Vì $FE = FP$ và $FE = FB$ do đó $FB = FP$ mà $F \in BP \Rightarrow BP = 2FB$.

Suy ra $\dfrac{IH}{FB} = \dfrac{MH}{2FB} \Rightarrow MH = 2IH$. Suy ra AF đi qua trung điểm I của MH.

c) Vì tứ giác $ACMK$ nội tiếp. Suy ra $\overset{\frown}{ACM} = \overset{\frown}{MKN} = 90^\circ$.

Gọi giao điểm của AM và dây DC là G.

Tứ giác $ADNG$ có $\overset{\frown}{NAG} = \overset{\frown}{NDG} = 45^\circ$. Suy ra tứ giác $ADNG$ nội tiếp.

$\Rightarrow \overset{\frown}{ADN} = \overset{\frown}{MGN} = 90^\circ$.

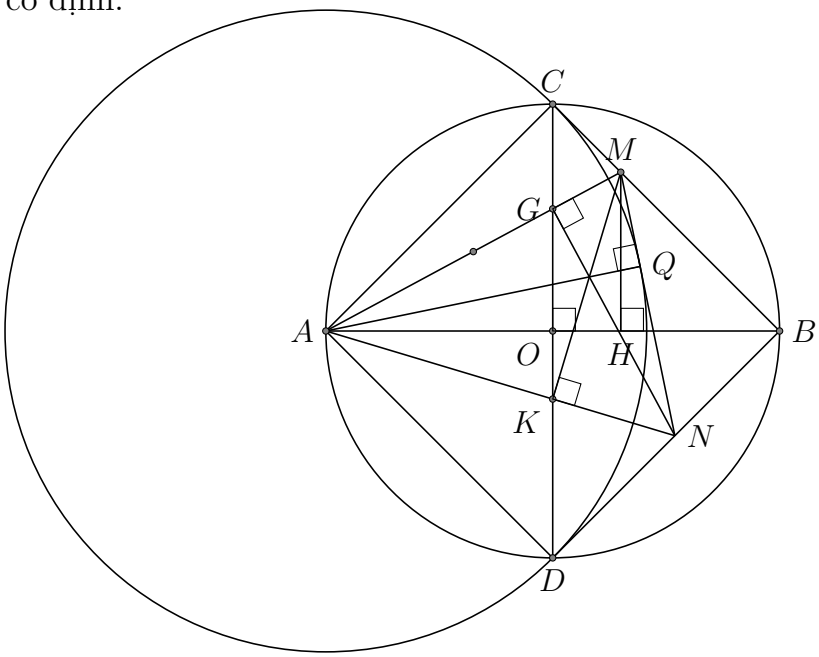
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Vì $\widehat{MKN} = \widehat{MGN} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $MGKN$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{AKC}$.

Mà $\widehat{AMC} = \widehat{AKC}$ (vì cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) nên $\widehat{AMC} = \widehat{AMN}$.

Kẻ AQ vuông góc với MN tại Q. Khi đó $\triangle AMC = \triangle AMQ$ (ch-gn) $\Rightarrow AQ = AC$.

Trong đó: $AC = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ không đổi và A là một điểm cố định nên khi M di chuyển trên dây BC thì MN luôn tiếp xúc với đường tròn $(A; R\sqrt{2})$ là một đường tròn cố định.



Câu 6.

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $16p + 1$ là lập phương của số nguyên dương.

b) Tìm tất cả các bộ số nguyên (a, b) thỏa mãn $3(a^2 + b^2) - 7(a + b) = -4$.

Lời giải.

a) Vì $16p + 1$ là lẻ và lớn hơn 1 nên có thể đặt $16p + 1 = (2n + 1)^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có:

$$16p + 1 = (2n + 1)^3 \Leftrightarrow 8p = n(4n^2 + 6n + 3)$$

Vì $4n^2 + 6n + 3$ là số lẻ lớn hơn 1 và không phân tích được thành tích của hai số nguyên nên từ trên suy ra $\begin{cases} n = 8 \\ 4n^2 + 6n + 3 = p \end{cases}$

Từ đó, ta có $p = 307$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy $p = 307$ là số nguyên tố duy nhất thỏa mãn yêu cầu.

b) Nhân cả hai vế với 12, ta được:

$$36(a^2+b^2)-84(a+b)=-48 \Leftrightarrow (6a-7)^2+(6b-7)^2=50$$

Số 50 có thể phân tích thành tổng của hai số chính phương là $50=25+25=1+49$.

Nhận xét: Do vai trò của a, b như nhau nên nếu (a,b) thỏa mãn thì (b,a) cũng thỏa mãn. Nên chỉ cần xét các trường hợp sau:

- **TH1:**

$$\begin{cases}(6a-7)^2=25\\(6b-7)^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}6a-7=5\\6b-7=5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=5\\6b-7=-5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-5\\6b-7=5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-5\\6b-7=-5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=2\\b=\frac{1}{3}\end{cases}\\\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

- **TH2:**

$$\begin{cases}(6a-7)^2=1\\(6b-7)^2=49\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}6a-7=1\\6b-7=7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=1\\6b-7=-7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-1\\6b-7=-7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-1\\6b-7=-7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\b=\frac{7}{3}\end{cases}\\\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}a=1\\b=\frac{7}{3}\end{cases}\\\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Kết hợp với giả thuyết và nhận xét ở trên, ta có các bộ số (a,b) thỏa mãn là $\{(0,1);(1,0);(2,2)\}$.

Câu 7.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\geq x+y$.

b) Xét các số thực a, b, c với $b\neq a+c$ sao cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm thực m, n thỏa mãn $0\leq m,n\leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}$$

Lời giải.

a) Với x, y là hai số dương, ta có:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y\Leftrightarrow x^3+y^3\geq xy(x+y).$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)\geq xy(x+y).$$

$$x^2-xy+y^2\geq xy\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0 \text{ (Hiển nhiên).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y>0$.

b) Giả thiết phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm m,n $(0\leq m\leq 1, 0\leq n\leq 1)$ nên $a\neq 0$.

Theo định lí Vi-ét ta có: $m+n=-\dfrac{b}{a}$ và $m\cdot n=\dfrac{c}{a}$.

Từ đó suy ra

$$M=\frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}=\frac{\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\left(2-\dfrac{c}{a}\right)}{1-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\frac{(1+m+n)(2-mn)}{1+m+n+mn}.$$

Vì $2-mn\leq 2$ và $mn\geq 0$ nên

$$M\leq\frac{(1+m+n)\cdot 2}{1+m+n}=2$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 2 đạt được khi $mn=0$ hay $c=0$.

Do $0\leq m\leq 1$, $0\leq n\leq 1$ nên $mn\leq 1$, suy ra:

$$m(n-1)+n(m-1)+(mn-1)\leq 0\Leftrightarrow mn\leq\frac{1}{3}(1+m+n).$$

Do đó:

$$M\geq\frac{1+m+n}{1+m+n+\dfrac{1}{3}(1+m+n)}=\frac{3}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{3}{4}$ đạt được khi $m=n=1$ hay $a+b+c=0$ và $a=c$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, TỈNH PHÚ THỌ, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho a, b, c là ba số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}=x$ ($x\in\mathbb{R}$). Tính $P=xabc$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}\Leftrightarrow a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\Leftrightarrow a-b=\frac{b-c}{bc}.$$

Tương tự ta có $b-c=\dfrac{c-a}{ca}$; $c-a=\dfrac{a-b}{ab}$.

Từ đó (sử dụng giả thiết a, b, c đôi một khác nhau) ta có

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{b-c}{bc}\cdot\frac{c-a}{ca}\cdot\frac{a-b}{ab}\Rightarrow a^2b^2c^2=1. \tag{1}$$

Mặt khác, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\begin{aligned}x&=a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}\\&=\frac{ab+1}{b}=\frac{bc+1}{c}=\frac{ca+1}{a}\\&=\frac{(ab+1)-(bc+1)}{b-c}=\frac{(bc+1)-(ca+1)}{c-a}=\frac{(ca+1)-(ab+1)}{a-b}\\&=\frac{b(a-c)}{b-c}=\frac{c(b-a)}{c-a}=\frac{a(c-b)}{a-b}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x^3=\dfrac{b(a-c)}{b-c}\cdot\dfrac{c(b-a)}{c-a}\cdot\dfrac{a(c-b)}{a-b}=-abc.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$(xabc)^3=x^3\cdot(abc)^3=-abc\cdot(abc)^3=-(a^2b^2c^2)^2=-1.$$

Vậy $P=xabc=-1$.

Câu 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=9$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^3+y^3+z^3+3xyz$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \Leftrightarrow xy+yz+zx=xyz$.

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức AM-GM và sử dụng giả thiết $x+y+z=9$ ta được

$$\begin{aligned} T&=x^3+y^3+z^3+3xyz\\ &=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+6xyz\\ &=9^3-27(xy+yz+zx)+6xyz\\ &=9^3-21xyz\geq 9^3-21\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=162. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 162, đạt được khi $x=y=z=3$.

Câu 3. Cho a là số nguyên dương. Giả sử x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$ là các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+(2-a)x+a=0$.

a) Chứng minh rằng $A=4(x_1+x_2)-x_1^2+x_2^2+x_3^2$ không đổi khi a thay đổi.

b) Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$ $(n\in\mathbb{N})$. Chứng minh rằng S_n là số nguyên lẻ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} &x^3-3x^2+(2-a)x+a=0\\ \Leftrightarrow&(x-1)(x^2-2x-a)=0\\ \Leftrightarrow&(x-1)\left[(x-1)^2-(1+a)\right]=0. \end{aligned}\tag{1}$$

Vì $a>0$ nên $1+a>0$, do đó

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{aligned} &x=1,\\ &x=1-\sqrt{1+a},\\ &x=1+\sqrt{1+a}. \end{aligned}\right.$$

Vì $x_1<x_2<x_3$ nên $x_1=1-\sqrt{1+a}$, $x_2=1$, $x_3=1+\sqrt{1+a}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} A&=4(x_1+x_2)-x_1^2+x_2^2+x_3^2\\ &=4(1-\sqrt{1+a}+1)-(1-\sqrt{1+a})^2+1+(1+\sqrt{1+a})^2\\ &=9. \end{aligned}$$

Vậy $A=9$ không đổi khi a thay đổi.

b) Ta có $x_2 = 1$ nên $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = 1 + x_1^n + x_3^n$.

Đặt $P_n = x_1^n + x_3^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ta đi chứng minh P_n chẵn với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì x_1, x_3 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - a = 0$ nên

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 - a = 0 \\ x_3^2 - 2x_3 - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^n(x_1^2 - 2x_1 - a) = 0 \\ x_3^n(x_3^2 - 2x_3 - a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{n+2} - 2x_1^{n+1} - ax_1^n = 0 \\ x_3^{n+2} - 2x_3^{n+1} - ax_3^n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1^{n+2} + x_3^{n+2}) - 2(x_1^{n+1} + x_3^{n+1}) - a(x_1^n + x_3^n) = 0$$

$$\Rightarrow P_{n+2} - 2P_{n+1} - aP_n = 0 \Rightarrow P_{n+2} = 2P_{n+1} + aP_n. \quad (2)$$

Do $P_0 = x_1^0 + x_3^0 = 2$, $P_1 = x_1 + x_3 = 2$ và a là số nguyên dương nên từ (2) suy ra P_3, P_4,..., P_n chẵn với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vậy nên $S_n = 1 + P_n$ luôn là số nguyên lẻ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Câu 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2(y+3) = y(x^2-3)^2$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2(y+3) = y(x^2-3)^2 \Leftrightarrow y(x^4 - 7x^2 + 9) = 3x^2. \quad (1)$$

Do x, y là hai số nguyên dương, $3x^2 > 0$ nên từ (1) ta có $x^4 - 7x^2 + 9 > 0$. Mặt khác, từ (1) suy ra $3x^2 \vdots (x^4 - 7x^2 + 9)$. Do đó

$$3x^2 \geq x^4 - 7x^2 + 9 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-9) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3\} \quad (\text{do } x \in \mathbb{N}^*).$$

- Với $x = 1$, thay vào (1) ta được $y = 1$ (thỏa mãn).
- Với $x = 2$, thay vào (1) ta được $y = -4$ (loại do $y \in \mathbb{N}^*$).
- Với $x = 3$, thay vào (1) ta được $y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy các cặp số nguyên dương cần tìm là $(x; y) \in \{(1; 1), (3; 1)\}$.

Câu 5. Giải phương trình $x^2 - 2\sqrt{2x-1} = \dfrac{13x^2 - 28x + 24}{2x+1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$. Ta có

$$x^2 - 2\sqrt{2x-1} = \frac{13x^2 - 28x + 24}{2x+1}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$$\Leftrightarrow x^2(2x+1)-2(2x+1)\sqrt{2x-1}=13x^2-28x+24$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+x^2-2\left[(2x-1)+2\right]\sqrt{2x-1}=13x^2-28x+24$$

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+14x-12-2\sqrt{2x-1}-\left(\sqrt{2x-1}\right)^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-6x^2+12x-8)-\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\left(x-2-\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3-\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\left(x-2-\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2-\sqrt{2x-1})\left[(x-2)^2+(x-2)\sqrt{2x-1}+(2x-1)+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2-\sqrt{2x-1})\left[\left(x-2+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2-\sqrt{2x-1})\left[\left(x-2+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-2-\sqrt{2x-1}=0 & \text{(thỏa mãn)} \\ \left(x-2+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)+2=0 & \text{(loại do } 2x-1\geq 0\text{)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ 2x-1=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ (x-1)(x-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{5\}$.

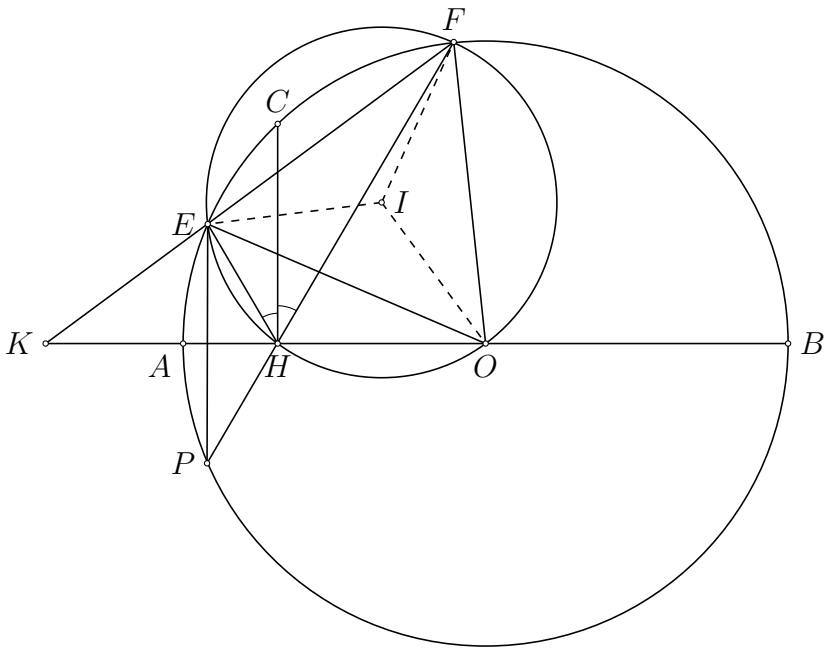
Câu 6. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$, H là điểm cố định trên đoạn OA ($H\neq O$, $H\neq A$). Đường thẳng qua H và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn đã cho tại C. Gọi E là điểm thay đổi trên cung AC ($E\neq A$, $E\neq C$), F là điểm thay đổi trên cung BC ($F\neq B$, $F\neq C$) sao cho $\widehat{EHC}=\widehat{FHC}$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EHOF$ nội tiếp.

b) Gọi R' là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EHOF$. Tính $\widehat{EHF}$ khi $R=R'$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Gọi P là điểm đối xứng với điểm E qua đường thẳng AB. Ta có $OP = OE$ nên $P \in (O)$.
Do H nằm trên đường trung trực của EP nên $HE = HP$, suy ra $\widehat{EHA} = \widehat{PHA}$. (1)
Mặt khác, do $\widehat{EHC} = \widehat{FHC}$ nên $\widehat{EHA} = \widehat{FHO}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PHA} = \widehat{FHO}$. Do đó ba điểm F, H, P thẳng hàng. Từ đó suy ra

$$\widehat{EFH} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{EP} = \text{sđ } \overset{\frown}{EA} = \widehat{EOH},$$

do đó tứ giác $EHOF$ nội tiếp đường tròn.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EHOF$.
Khi $R = R'$ thì $IE = IF = IO = OE = OF = R$ nên $\triangle IOE$ và $\triangle IOF$ là các tam giác đều. Do đó $\widehat{EOF} = \widehat{IOE} + \widehat{IOF} = 120^\circ$.
Mặt khác, do tứ giác $EHOF$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EHF} = \widehat{EOF} = 120^\circ$.

c) Gọi K là giao điểm của EF và AB.
Vì tứ giác $EHOF$ là tứ giác $EHOF$ nội tiếp nên $KH \cdot KO = KE \cdot KF$. (3)
Mặt khác, do tứ giác $AEFB$ nội tiếp nên $KA \cdot KB = KE \cdot KF$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $KH \cdot KO = KA \cdot KB$. Ta có

$$\begin{aligned} &KH \cdot KO = KA \cdot KB \\ \Rightarrow &(KA + AH) \cdot (KA + AO) = KA \cdot (KA + AB) \\ \Rightarrow &KA = \frac{AH \cdot AO}{AB - AH - AO} = \frac{AH \cdot AO}{OH} \end{aligned}$$

không đổi do A, H, O cố định. Do đó EF luôn đi qua điểm K cố định.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 7. Trung tâm thành phố Việt Trì có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 3 loại: Đèn ánh sáng trắng có 671 bóng, đèn ánh sáng vàng nhạt có 673 bóng, đèn ánh sáng đỏ có 675 bóng. Vào dịp giỗ tổ Hùng Vương, người ta thực hiện thay bóng đèn theo quy luật sau: Mỗi lần tháo bỏ 2 bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi đến một lúc nào đó có thể tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều thuộc cùng một loại không?

Lời giải.

Ta có nhận xét: Khi chuyển từ lượt trước sang lượt sau, số bóng đèn của một màu bất kì hoặc tăng 2, hoặc giảm 1, do đó hiệu của số bóng đèn của hai màu bất kì hoặc thay đổi 3 (nếu một màu tăng 2, một màu giảm 1) hoặc thay đổi 0 (nếu cả hai màu đều tăng hai hoặc đều giảm 1), tức là thay đổi một bội của 3.

- Lúc đầu, hiệu của số bóng đèn vàng nhạt và trắng bằng $673 - 671 = 2$, là số chia cho 3 dư 2. Theo nhận xét trên, hiệu của số bóng đèn vàng nhạt và trắng luôn là một số chia cho 3 dư 2, không thể xảy ra số bóng đèn vàng nhạt và số bóng đèn trắng đều bằng 0, tức là không thể xảy ra tất cả 2019 bóng đèn đều màu đỏ.

- Lúc đầu, hiệu của số bóng đèn đỏ và vàng nhạt bằng $675 - 673 = 2$, là số chia cho 3 dư 2. Theo nhận xét trên, hiệu của số bóng đèn đỏ và vàng nhạt luôn là một số chia cho 3 dư 2, không thể xảy ra số bóng đèn đỏ và số bóng đèn vàng nhạt đều bằng 0, tức là không thể xảy ra tất cả 2019 bóng đèn đều màu trắng.

- Lúc đầu, hiệu của số bóng đèn đỏ và trắng bằng $675 - 671 = 4$, là số chia cho 3 dư 1. Theo nhận xét trên, hiệu của số bóng đèn đỏ và trắng luôn là một số chia cho 3 dư 1, không thể xảy ra số bóng đèn đỏ và số bóng đèn trắng đều bằng 0, tức là không thể xảy ra tất cả 2019 bóng đèn đều màu vàng nhạt.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM, TỈNH VĨNH LONG, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right) : \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$. Tìm giá trị của A tại $x = 14 + 6\sqrt{5}$.

b) Tính giá trị biểu thức $B = \sqrt{12 - \sqrt{80 - 32\sqrt{3}}} - \sqrt{12 + \sqrt{80 - 32\sqrt{3}}}$.

Lời giải.

a) Với $x > 0$, $x \neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}\right]\sqrt{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} \cdot \sqrt{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4}. \end{aligned}$$

Ta lại có $x = 14 + 6\sqrt{5} = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 5 = \left(3+\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \left|3+\sqrt{5}\right| = 3+\sqrt{5}$.

Khi đó, giá trị của A tại $x = 14 + 6\sqrt{5}$ là

$$\frac{3+\sqrt{5}}{14+6\sqrt{5}+2\left(3+\sqrt{5}\right)+4} = \frac{3+\sqrt{5}}{24+8\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{8\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{8}.$$

b) Ta có $B^2 = 24 - 8\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3}-2\right)^2$.

Suy ra $B = \pm\left(2\sqrt{3}-2\right)$.

Do $B < 0$ nên $B = 2 - 2\sqrt{3}$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 + (2m-3)\,x - m^2 - 1 = 0 \quad (0.20)$ (x ẩn số, m là tham số).

a) Chứng tỏ rằng phương trình (0.20) có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (0.20). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = 3$.

Lời giải.

a) Ta có $ac = 1\left(-m^2 - 1\right) = -m^2 - 1 < 0\ \forall m$ nên phương trình (0.20) có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi m.

b) Do phương trình (0.20) có hai nghiệm trái dấu và $x_1 < x_2$ nên $x_1 < 0$, $x_2 > 0$.
Suy ra $|x_1| = -x_1, |x_2| = x_2$ và

$$|x_1| - |x_2| = 3 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 3 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = 3 \Leftrightarrow 2m - 3 = 3 \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 3.

a) Giải phương trình $\left(x^2 - 9\right)^2 = 12x + 1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x - y - 9} - 36 + x^2 = 0 \\ y^2 - xy + 9 = 0. \end{cases}$

Lời giải.

a) Giải phương trình $\left(x^2 - 9\right)^2 = 12x + 1$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - 9\right)^2 = 12x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 - 18x^2 + 81 = 12x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 + 18x^2 + 81 = 36x^2 + 12x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x^2 + 9\right)^2 = (6x + 1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2 + 9 = 6x + 1 \\ x^2 + 9 = -6x - 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x^2 + 6x + 10 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 4\}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-y-9}-36+x^2=0 & (0.21) \\ y^2-xy+9=0. & (0.22) \end{cases}$

Điều kiện $2x-y-9\geq 0$.

Ta có $(0.22) \Leftrightarrow 4y^2-4xy+x^2=x^2-36 \Leftrightarrow (2y-x)^2=x^2-36.$ (0.23)

Thay (0.23) vào (0.21) ta được

$$\sqrt{2x-y-9}+(2y-x)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-9=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=6 \\ y=3. \end{cases}$

Câu 4.

a) Tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị biểu thức $P=-x^4+x^2+14x+49$ là số nguyên tố.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2=2x-3y-2$.

Lời giải.

a) Ta có $P=\left(x^2+14x+49\right)-\left(x^2\right)^2=(x+7)^2-\left(x^2\right)^2=\left(x+7-x^2\right)\left(x+7+x^2\right)$.

Dễ thấy $x+7+x^2\geq x+7-x^2$ và $x+7+x^2>1$ với mọi số tự nhiên x.

Từ đó, kết hợp với P nguyên tố suy ra

$$x+7-x^2=1 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $x=3$ thì $P=19$ thỏa mãn bài toán. Vậy số tự nhiên x cần tìm là $x=3$.

b) Xét phương trình $x^2-xy+y^2=2x-3y-2$. (0.24)

Ta có $(0.24) \Leftrightarrow x^2-(y+2)x+y^2+3y+2=0$. (0.25)

Phương trình (0.25) có $\Delta=(y+2)^2-4\left(y^2+3y+2\right)=-3y^2-8y-4$.

Phương trình (0.25) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow -3y^2-8y-4\geq 0 \Leftrightarrow -2\leq y\leq -\frac{2}{3}.$$

Vì y nguyên nên $y=-2$ hoặc $y=-1$.

Với $y=-2$ thì từ (0.25) suy ra $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

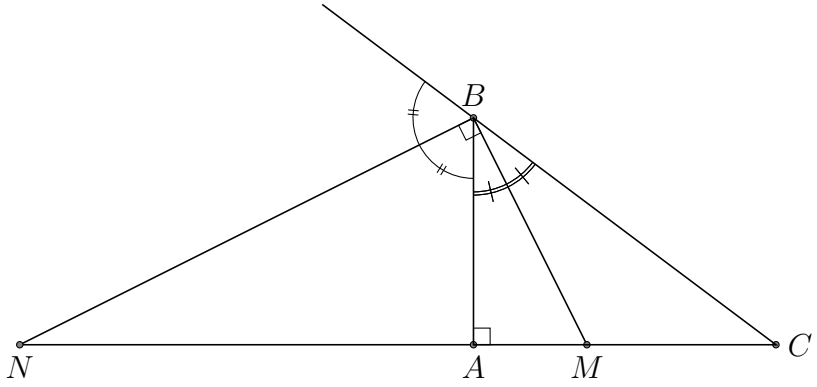
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Với $y=-1$ thì từ (0.25) suy ra $x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình đã cho là $(0;-2),(0;-1),(1;-1)$.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$ cm, $AC=8$ cm. Các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc B lần lượt cắt đường thẳng AC tại M và N. Tính diện tích của tam giác BMN.

Lời giải.

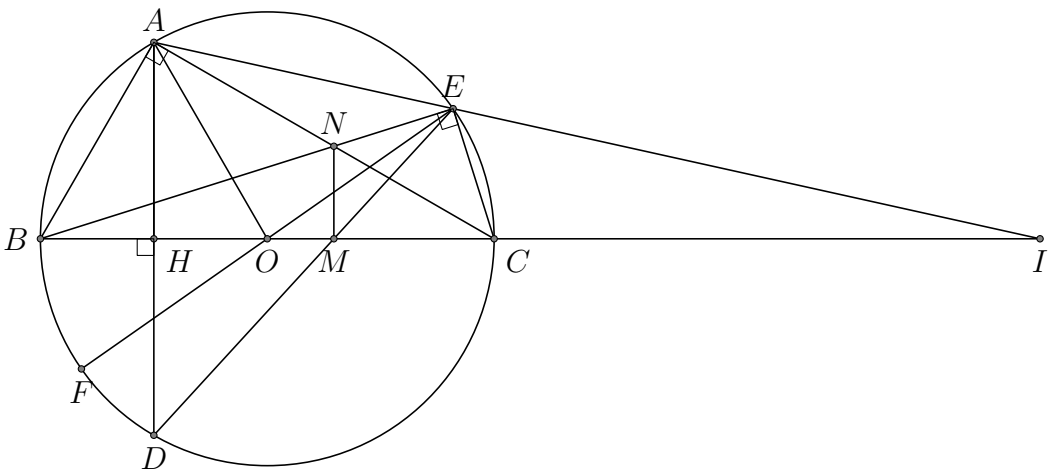


- $\triangle ABC$ vuông tại A suy ra $BC=10$ cm.
- BM là đường phân giác trong của $\triangle ABC \Rightarrow \dfrac{MA}{BA}=\dfrac{MC}{BC}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\dfrac{MA}{BA}=\dfrac{MC}{BC}=\dfrac{MA+MC}{BA+BC}=\dfrac{AC}{BA+BC}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow MA=3$ (cm).
- BN là đường phân giác ngoài của $\triangle ABC \Rightarrow \dfrac{NA}{BA}=\dfrac{NC}{BC}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\dfrac{NA}{BA}=\dfrac{NC}{BC}=\dfrac{NC-NA}{BC-BA}=\dfrac{AC}{BC-BA}=2 \Rightarrow NA=12$ (cm).
- Từ đó ta tính được $NM=NA+MA=15$ (cm). Suy ra $S_{\triangle BMN}=\dfrac{1}{2}BA\cdot NM=45$ (cm^2).

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A với $(AB<AC)$ và đường cao AH. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E $(E\neq A,\ E\neq C)$ sao cho hai tia AE và BC cắt nhau tại I; AC cắt BE tại N. Kéo dài AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D, DE cắt BC tại M.

a) Chứng minh MN song song AD.

b) Chứng minh hai tam giác OME và OEI đồng dạng.



Lời giải.

a) Chứng minh $MN \parallel AD$.

Dễ thấy tứ giác $MNEC$ nội tiếp, do $\widehat{NEM} = \widehat{BED} = \widehat{ACB} = \widehat{NCM}$. Mà $\widehat{NEC} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{NMC} = 90^\circ$.

Ta có $MN \perp BC$, $AD \perp BC$ suy ra $MN \parallel AD$.

b) Chứng minh $\triangle OME \backsim \triangle OEI$.

Gọi F là giao điểm của OE với đường tròn (O), (F khác với E). Ta có $\widehat{BOF} = \widehat{EOC} \Rightarrow \widehat{EC} = \widehat{BF}$. Suy ra $\widehat{DEF} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{FD} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\widehat{BD} - \text{sđ}\widehat{BF}\right)$.

Mặt khác $\widehat{AIB} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{EC}\widehat{BF}\right)$, (tính chất góc có đỉnh bên ngoài đường tròn).

Suy ra $\widehat{AIB} = \widehat{DEF}$.

Xét hai tam giác OME và OEI có

- $\widehat{EOI}$ chung.
- $\widehat{EIO} = \widehat{MEO}$.

$\Rightarrow \triangle OME \backsim \triangle OEI$.

Câu 7. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} \geq a - \dfrac{b}{2}$.

b) $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \dfrac{a+b+c}{3}$.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Ta có $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}=\dfrac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\geq a-\dfrac{ab^2}{2ab}=a-\dfrac{b}{2}$.

b) Tương tự theo câu a, ta có $\dfrac{b^3}{b^2+c^2}\geq b-\dfrac{c}{2}$ và $\dfrac{c^3}{a^2+c^2}\geq c-\dfrac{a}{2}$.
Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{c^2+b^2}+\frac{c^3}{a^2+c^2}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Ta có $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}\geq\dfrac{a^3}{a^2+\dfrac{a^2+b^2}{2}+b^2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$.
Tương tự ta cũng có $\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geq\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{b^3}{b^2+c^2}$ và $\dfrac{c^3}{c^2+ac+a^2}\geq\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{c^3}{c^2+a^2}$.
Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{c^2+b^2}+\frac{c^3}{a^2+c^2}\right)\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN VĨNH PHÚC, VÒNG 2 NĂM 2018-2019

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - m + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $2x_1 + 2x_2 + y_1y_2 = 0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$.

Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0$ (luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$).

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m - 1. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} A(x_1; x_1^2), B(x_2; x_2^2) &\Rightarrow 2(x_1 + x_2) + y_1y_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4m + (m-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1. \end{aligned}$$

Vậy, với $m = -1$ thì yêu cầu bài toán xảy ra.

Câu 2. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = \sqrt{-x^2 + 6x - 1}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq 4 \\ -x^2 + 6x - 1 \geq 0. \end{cases}$

Bình phương hai vế phương trình ta được

$$2x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 4x} = -x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2\sqrt{x^2 - 4x} - 3 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x}$, điều kiện $t \geq 0$. Phương trình trên trở thành $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{5} \\ x=2-\sqrt{5}\,(\text{loại}). \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2+\sqrt{5}$.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y+xy=5. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y+xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=5 \\ 2\,(x+y)+2xy=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+2(x+y)=15\ (1) \\ x+y+xy=5. \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $\left[\begin{array}{l} x+y=-5 \\ x+y=3. \end{array}\right.$

- Với $x+y=-5$, ta có $\begin{cases} y=-5-x \\ x+y+xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-5 \\ x^2+5x+10=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).
- Với $x+y=3$, ta có $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y+xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2. \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2),(2;1)$.

Câu 4. Cho phương trình $x^3+2y^3+4z^3=9!$ (1), trong đó x,y,z là ẩn và $9!$ là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9.

a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên x,y,z thỏa mãn (1) thì x,y,z đều chia hết cho 4.

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn (1).

Lời giải.

a) Xét phương trình $x^3+2y^3+4z^3=9!$ (1)

Ta viết phương trình (1) dưới dạng $x^3+2y^3+4z^3=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow x^3 \vdots 2 \Rightarrow x=2x_1, x_1\in\mathbb{Z}$, thay trở lại phương trình (1), ta được

$$8x_1^3+2y^3+4z^3=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow 2y^3 \vdots 4 \Rightarrow y=2y_1, y_1\in\mathbb{Z}.$$

Tiếp tục thay trở lại (1) ta được $8x_1^3+16y_1^3+4z^3 = 2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow 4z^3 \vdots 8 \Rightarrow z = 2z_1, z_1 \in \mathbb{Z}$.

Thay trở lại (1), ta được

$$8x_1^3 + 16y_1^3 + 32z_1^3 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \Leftrightarrow x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7.$$

Lý luận tương tự như trên, ta được

$$8x_2^3 + 16y_2^3 + 32z_2^3 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \Leftrightarrow x_2^3 + 2y_2^3 + 4z_2^3 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7. \quad (2)$$

Như vậy ta được $x = 4x_2, y = 4y_2, z = 4z_2 \Rightarrow x, y, z$ cùng chia hết cho 4.

b) Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (1). Khi đó theo kết quả phần trên thì tồn tại các số nguyên dương x_2, y_2, z_2 sao cho $x = 4x_2, y = 4y_2, z = 4z_2$. Thay trở lại vào phương trình (2) ta được $x_2^3 = 2y_2^3 + 4z_2^3 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow x_2 \vdots 2 \Rightarrow x_2 = 2x_3$, thay trở lại phương trình trên ta có $4x_3^3 + y_2^3 + z_2^3 = 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. (3)

Ta có

$$\begin{aligned} 4x_3^3 + y_2^3 + z_2^3 &\equiv \pm 4 \pm 1 \pm 2 \pmod 9 \\ &\equiv \pm 4 \pm 1 \pmod 9 \\ &\equiv \pm 1 \pm 2 \pmod 9 \\ &\equiv \pm 4 \pm 2 \pmod 9 \end{aligned}$$

Ta thấy không có trường hợp nào $4x_3^3 + y_2^3 + 2z_2^3$ chia hết cho 9, vô lý.

Do đó cả ba số x_3, y_2, z_2 đều chia hết cho 3. Đặt $x_3 = 3x_4, y_2 = 3y_3, z_2 = 3z_3$, khi đó (3) trở thành $4x_4^3 + y_3^3 + 2z_3^3 = 105 \Rightarrow y_3^3 < 125 \Rightarrow y_3 < 5$, kết hợp với y_3 lẻ ta được $y_3 \in \{1; 3\}$. Thử trực tiếp ta thấy không thỏa mãn. Vậy không tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geq 1.$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho viết lại thành $\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2} + \dfrac{1}{1+\dfrac{c}{b}+\left(\dfrac{c}{b}\right)^2} + \dfrac{1}{1+\dfrac{a}{c}+\left(\dfrac{a}{c}\right)^2} \geq 1.$

Đặt $x = \dfrac{b}{a}, y = \dfrac{c}{b}, z = \dfrac{a}{c} \Rightarrow x, y, z > 0, xyz = 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành

$$\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+z+z^2} \geq 1.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Bất đẳng thức trên tương đương với
$(1+x+x^2)(1+y+y^2)+(1+y+y^2)(1+z+z^2)+(1+z+z^2)(1+x+x^2) \geq (1+x+x^2)(1+y+y^2)(1+z+z^2)$.
Khai triển và sử dụng $xyz=1$, rút gọn ta được $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0 \quad \text{(luôn đúng)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

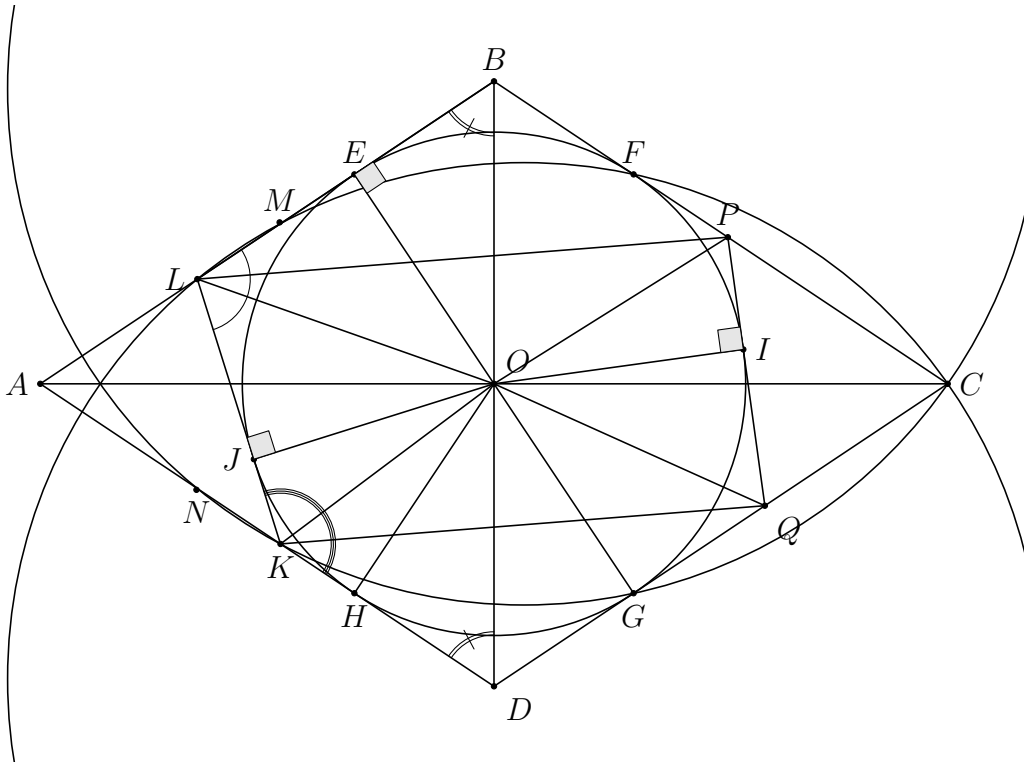
Câu 6. Cho hình thoi $ABCD$ $(AC>BD)$. Đường tròn nội tiếp (O) của tứ giác $ABCD$ theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA tại các điểm E, F, G, H. Xét điểm K trên đoạn HA và điểm L trên đoạn AE sao cho KL tiếp xúc với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $\widehat{LOK}=\widehat{LBO}$ và $BL\cdot DK=OB^2$.

b) Đường tròn ngoại tiếp của tam giác CFL cắt cạnh AB tại điểm M khác L và đường tròn ngoại tiếp của tam giác CKG cắt cạnh AD tại điểm N khác K. Chứng minh bốn điểm K, L, M, N cùng thuộc một đường tròn.

c) Lấy các điểm P, Q tương ứng trên các đoạn FC, CG sao cho LP song song với KQ. Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với (O).

Lời giải.



a) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{LOJ} = \widehat{LOE}$ và $\widehat{KOJ} = \widehat{KOH} \Rightarrow \widehat{LOK} = \frac{1}{2}\widehat{EOH}$

Suy ra $\widehat{LOK} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2 \cdot \widehat{BOE}\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2(90^\circ - \widehat{LBO})\right) = \widehat{LBO}$. (1)

Ta có $\widehat{DOL} = \widehat{LOK} + \widehat{KOD} = \widehat{LBO} + \widehat{BLO} = \widehat{LOK} + \widehat{BLO} \Rightarrow \widehat{KOD} = \widehat{BLO}$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $\triangle BLO \backsim \triangle DOK$ nên ta có

$$\frac{BL}{OD} = \frac{OB}{DK} \Rightarrow BL \cdot DK = OB \cdot OD = OB^2.$$

b) Do bốn điểm C, F, L, M cùng thuộc một đường tròn, nên $\widehat{BFM} = \widehat{BLC}$

$\Rightarrow \triangle BFM \backsim \triangle BLC$, do đó $BM \cdot BL = BF \cdot BC = BO^2$ (vì $\triangle BOC$ vuông tại O và $OF \perp BC$).

Theo kết quả câu a) $BO^2 = BL \cdot DK$. Suy ra $BM = DK$. Từ đó, M và K đối xứng nhau qua AC. (3)

Chứng minh tương tự, ta có N và L đối xứng nhau qua AC. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $KMLN$ là một hình thang cân và do đó nội tiếp.

c) Do $\begin{cases} BC \parallel DA \\ LP \parallel KQ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BPL} = \widehat{DKQ} \Rightarrow \triangle BPL \backsim \triangle DKQ \Rightarrow \frac{BP}{DK} = \frac{BL}{DQ}$.

Theo phần a) suy ra $BP \cdot DQ = BL \cdot DK = BO^2 \Rightarrow \frac{BP}{BO} = \frac{BO}{DQ} = \frac{DO}{DQ}$

$\Rightarrow \triangle BPO \backsim \triangle DOQ$. Từ đó suy ra $\frac{OP}{OQ} = \frac{BP}{DO} = \frac{BP}{BO}$. (5)

Do $\widehat{POQ} = 180^\circ - \widehat{BOP} - \widehat{DOQ} = 180^\circ - \widehat{BOP} - \widehat{BPO} = \widehat{OBP} = \widehat{QDO}$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra các tam giác $\triangle BOP, \triangle OQP, \triangle DQO$ đôi một đồng dạng.

Do đó $\widehat{BPO} = \widehat{OPQ}$; $\widehat{PQO} = \widehat{OQD}$. (7)

Gọi I là hình chiếu vuông góc của O trên BC, suy ra hai tam giác $\triangle OFP$ và $\triangle OIP$ có chung cạnh huyền OP và $\widehat{FPO} = \widehat{IOP}$ (do (7)). Suy ra $OI = OF$, do $OI \perp PQ$, suy ra PQ tiếp xúc với (O).

Câu 7. Một bảng hình vuông gồm có n hàng và n cột (n là một số nguyên dương). Các hàng và cột được đánh số từ 1 đến n (các hàng đánh số từ trên xuống dưới và các cột được đánh số từ trái qua phải). Ô vuông nằm trên hàng i, cột j $(i, j = 1, 2, \cdots n)$ của bảng gọi là ô (i, j). Tại mỗi ô của bảng điền số 0 hoặc 1 sao cho nếu ô $(i; j)$ điền số 0, thì $a_1 + b_j \geq n$, trong đó a_i là số 1 trên dòng i và b_j là số 1 trên cột j. Gọi P là tổng tất cả các số trong các ô của bảng hình vuông đã cho.

a) Xây dựng một bảng hình vuông thỏa mãn yêu cầu của bài toán trong trường $n = 4$ và $P = 8$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Chứng minh rằng $P \geq \left[\frac{n^2}{2}\right]$, với $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ là phần nguyên của số $\frac{n^2}{2}$.

Lời giải.

a) Ta đưa ra một cách xây dựng bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0

b) Giả sử $k = \min\{a_1, a_2, \cdots a_n, b_1, b_2, \cdots b_n\}$. Xét dòng có đúng k số 1 là dòng m.

Xét k cột chứa các ô chứa số 1 của dòng m, mỗi cột như vậy sẽ chứa ít nhất k số 1, suy ra số số 1 trong k cột này $\geq k^2$.

Trong dòng m này có $n-k$ ô chứa số 0, xét $n-k$ cột chứa số 0 của dòng m này. Trong mỗi cột này có chứa ít nhất $n-k$ số 1 (vì tổng số số 1 trên hàng và cột chứa số 0 là $\geq n$, trong đó số số 1 trong hàng m lại bằng 1 suy ra mỗi cột chứa số 0 thuộc dòng m sẽ $\geq n-k$) nên số số 1 trong $n-k$ cột này $\geq (n-k)^2$.

Do đó $P \geq k^2 + (n-k)^2 = \frac{k^2}{1} + \frac{(n-k)^2}{1} \geq \frac{(k+n-k)^2}{2} = \frac{n^2}{2} \geq \left[\frac{n^2}{2}\right]$. Do đó $P \geq \left[\frac{n^2}{2}\right]$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 11

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THỰC HÀNH SƯ PHẠM, HỒ CHÍ MINH, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho parabol $(P)\colon y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(D)\colon y=\dfrac{1}{2}x+3$.

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy. Tìm tọa độ giao điểm của chúng bằng phép toán.

b) Viết phương trình đường thẳng (D') song song với (D) và tiếp xúc với parabol (P).

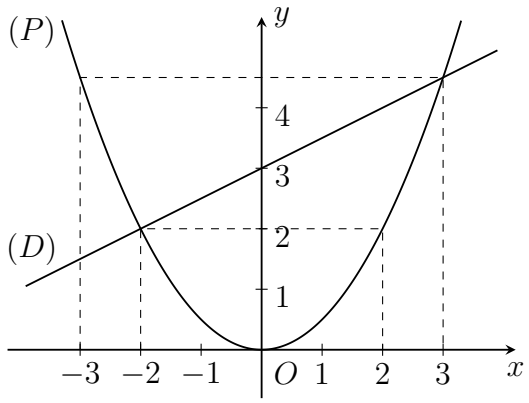
Lời giải.

a) • Vẽ (P) và (D).

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Bảng giá trị của hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

x	-3	-2	0	2	3
y	$\dfrac{9}{2}$	2	0	2	$\dfrac{9}{2}$



Vì hệ số $a=\dfrac{1}{2}>0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

• Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (D) bằng phép toán.

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x+3 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25>0$.

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3. \end{array}\right.$

Ta có $x=-2 \Rightarrow y=2$; $x=3 \Rightarrow y=\dfrac{9}{2}$.

Vậy (D) và (P) cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $(-2;2)$ và $\left(3;\dfrac{9}{2}\right)$.

b) Đường thẳng (D') song song với (D), suy ra (D') có phương trình $y = \frac{1}{2}x + k$, với $k \neq 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (D') và (P) là

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + k \Leftrightarrow x^2 - x - 2k = 0 \quad (2)$$

(D') và (P) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm kép, nghĩa là

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}.$$

Vậy đường thẳng (D') có phương trình là $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - (m+3)x - m + 8 = 0$ (m là tham số). Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $2x_1 + 3x_2 = 13$.

Lời giải.

- **Điều kiện 1**. Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - 4(-m+8) > 0$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 10m - 23 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -5 - 4\sqrt{3} \\ m > -5 + 4\sqrt{3}. \end{array}\right. \quad (*)$$

- **Điều kiện 2**. Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 3 & (1) \\ x_1 x_2 = -m + 8. & (2) \end{cases}$

Đề bài yêu cầu: $2x_1 + 3x_2 = 13$. (3)

Từ (1) và (2), suy ra $x_1 = 3m - 4$ và $x_2 = -2m + 7$.

Thay x_1, x_2 vào (3) ta được

$$(3m-4)(-2m+7) = -m + 8 \Leftrightarrow 6m^2 - 30m + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 3. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $(*)$, ta được $m = 2$, $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. Cho biểu thức $A = \dfrac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x - \sqrt{4x} - 3} + \dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \dfrac{3 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.

a) Rút gọn A.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Tìm số nguyên x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \neq 9. \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x-2\sqrt{x}-3} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{3x+4\sqrt{x}-7+(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})-(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

b) Ta có $A = \dfrac{\sqrt{x}-3+6}{\sqrt{x}-3} = 1 + \dfrac{6}{\sqrt{x}-3}$.

Để A nhận giá trị nguyên thì 6 chia hết cho $\sqrt{x}-3$, khi đó

$$\begin{bmatrix} \sqrt{x}-3 = \pm 6 \\ \sqrt{x}-3 = \pm 3 \\ \sqrt{x}-3 = \pm 2 \\ \sqrt{x}-3 = \pm 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{x} = 9 \\ \sqrt{x} = 6 \\ \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 81 \\ x = 36 \\ x = 25 \\ x = 16 \\ x = 4 \\ x = 1 \\ x = 0. \end{bmatrix}$$

Câu 4. Giải phương trình $4x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \left|2x - \dfrac{1}{x}\right| = 6$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = \left|2x - \dfrac{1}{x}\right|$, với $t \geqslant 0$, suy ra $t^2 = 4x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 4$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = -2 \text{ (loại)}. \end{bmatrix}$$

Với $t = 1$, suy ra

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 = 1 \Leftrightarrow 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 = 1 \\ x^2 = \dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \pm 1 \\ x = \pm \dfrac{1}{4}. \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-1; -\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}; 1\right\}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Một cửa hàng điện máy trong ngày khai trương đã bán được 65 quạt điện và 65 nồi cơm điện thuộc cùng một loại. Cửa hàng thu được 55.250.000 đồng từ tiền bán hai sản phẩm trên đây và tính ra lãi được 8.125.000 đồng. Cho biết mỗi quạt điện cửa hàng được lãi 20% trên giá bán, mỗi nồi cơm điện cửa hàng được lãi 10% trên giá bán. Hãy tính giá nhập kho của cửa hàng điện máy cho mỗi loại sản phẩm quạt điện và nồi cơm điện.

Lời giải.

Gọi x, y (đồng) lần lượt là giá bán quạt điện và nồi cơm điện của cửa hàng điện máy.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} 65(x+y) = 55.250.000 \\ 65(0.2x + 0.1y) = 8.125.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 850.000 \\ 2x + y = 1.250.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400.000 \\ y = 450.000. \end{cases}$$

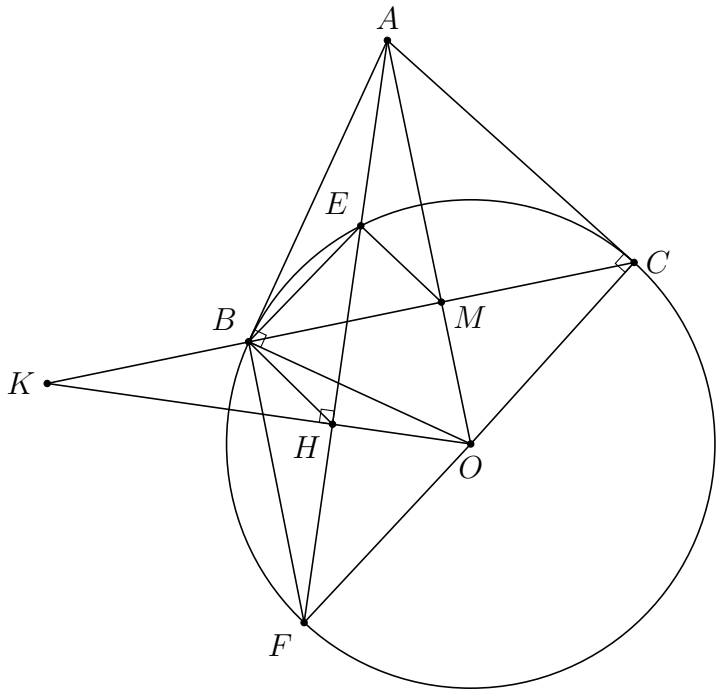
Suy ra, giá nhập kho đối với mỗi quạt điện là $0.8 \times 400.000 = 320.000$ đồng và mỗi nồi cơm điện là $0.9 \times 450.000 = 405.000$ đồng.

Câu 6. Từ điểm K nằm ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến KBC với đường tròn (không qua O) và B nằm giữa K và C. Các tiếp tuyến với đường tròn vẽ từ B và C cắt nhau tại A. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với KO, cắt KO tại H và cắt đường tròn (O) tại E và F (E nằm giữa A và F). Gọi M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng:

a) Các điểm A, C, O, H, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tứ giác $EMOF$ nội tiếp.

Lời giải.



a) Vì $\widehat{ACO} = \widehat{ABO} = \widehat{AHO} = 90^\circ$ nên các đỉnh A, C, H nằm trên đường tròn đường kính AO. Vậy các điểm A, C, O, H, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xét hai tam giác ABE và AFB có:

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{ABE} = \widehat{AFB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến AB và dây cung BE bằng góc nội tiếp chắn $\widehat{BE}$).

$\Rightarrow \triangle ABE \backsim \triangle AFB \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AF$.

Mặt khác, tam giác ABO vuông tại B có BM là đường cao nên $AB^2 = AM \cdot AO$.

Suy ra $AE \cdot AF = AM \cdot AO \Rightarrow \triangle AEM \backsim \triangle AOF \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{AFO}$.

Do đó, tứ giác $EMOF$ có $\widehat{MEF} + \widehat{EFO} = 180^\circ$ nên $EMOF$ nội tiếp.

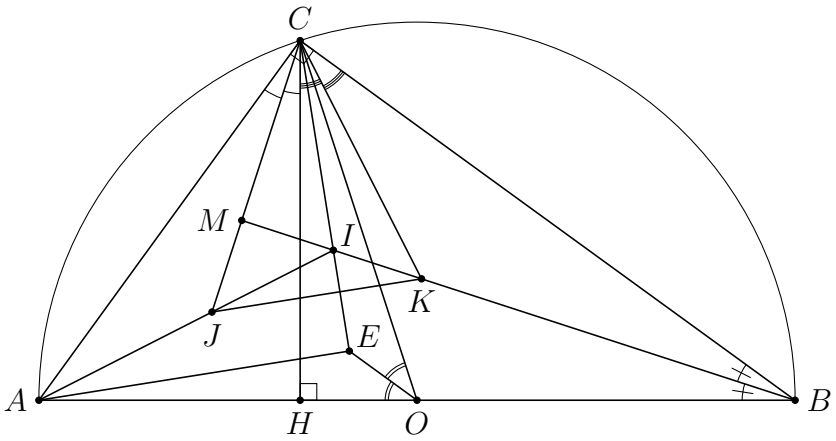
Câu 7. Cho nữa đường tròn đường kính AB và một điểm C di động trên nữa đường tròn đó sao cho $CA \leqslant CB$ (C khác A và B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC, CHA và CHB.

a) Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác CJK.

b) Gọi O là trung điểm AB và E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHO. Tính số đo góc $\widehat{AEO}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.



a) Từ giải thiết, ta có I, K nằm trên đường phân giác trong của $\widehat{CBA}$. Gọi M là giao điểm của BI và CJ. Ta sẽ chứng minh $KI \perp CJ$ hay $\widehat{CMI} = 90^\circ$.
Thật vậy, ta có $\widehat{ACJ} = \frac{1}{2}\widehat{ACH}$ và $\widehat{CBK} = \frac{1}{2}\widehat{CBA}$.
mà $\widehat{ACH} = \widehat{CBA}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ACB}$). Suy ra $\widehat{ACJ} = \widehat{CBK}$.
Mặt khác, ta lại có $\widehat{CIM} = \widehat{ICB} + \widehat{CBK}$.
Trong tam giác CMI, ta có

$$\widehat{MCI} + \widehat{CIM} = \widehat{MCI} + \widehat{ICB} + \widehat{CBK} = \widehat{ACJ} + \widehat{MCI} + \widehat{ICB} = \widehat{ACB} = 90^\circ.$$

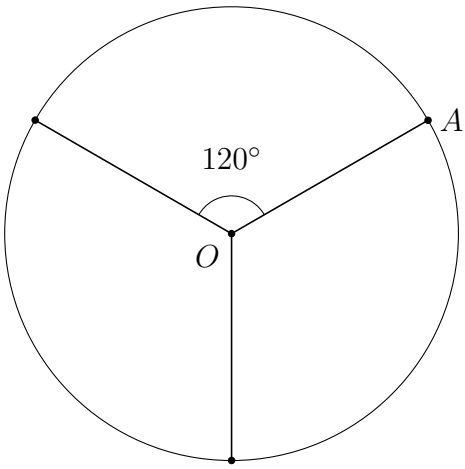
Suy ra $\widehat{CMI} = 90^\circ$, hay $KI \perp CJ$.
Tương tự ta cũng chứng minh được $JI \perp CK$. Vậy I là trực tâm của tam giác CJK.

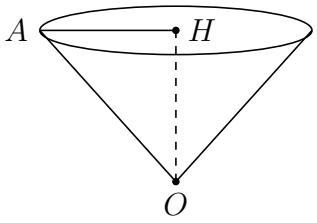
b) Xét hai tam giác COE và AOE có:
OE là cạnh chung
$\widehat{COE} = \widehat{AOE}$ (do OE là phân giác trong của $\widehat{COA}$).
$OC = OA$ (bán kính của đường tròn (O)).
Do đó $\triangle COE = \triangle AOE \Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{OCE} = \frac{1}{2}\widehat{OCH}$.
Suy ra

$$\widehat{AEO} = 180^\circ - \widehat{OAE} - \widehat{AOE} = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{OCH} + \widehat{COH}\right) = 135^\circ.$$

Câu 8. Người ta cắt một tấm tôn hình tròn bán kính 50 cm thành 3 hình quạt tròn bằng nhau. Từ mỗi hình quạt tròn đó, người ta tạo ra một thùng đựng nước hình nón bằng cách ghép sát hai bán kính của nó lại với nhau. Tâm của hình quạt tròn là đỉnh của hình nón. Hãy tính thể tích của mỗi thùng đựng nước đó.

Lời giải.





Ta có chu vi đường tròn đáy của hình nón bằng chiều dài cung AB. Do đó

$$2\pi AH = l_{AB} = OA \cdot \frac{120\pi}{180} \Rightarrow AH = \frac{1}{3}OA = \frac{50}{3}\,\text{cm}.$$

Tam giác AHO vuông tại H, ta có

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{100\sqrt{2}}{3}.$$

Thể tích mỗi thùng đựng nước

$$V = \frac{1}{3}OH \cdot \pi AH^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{100\sqrt{2}}{3}\left(\frac{50}{3}\right)^2 \pi = \frac{250000\pi}{81}\,\text{cm}^3 \approx 9{,}7\,\text{lít}.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 12

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI BÌNH, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho phương trình $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm không âm x_1, x_2. Tính theo m giá trị biểu thức $P=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải.

Phương trình: $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm không âm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1+x_2 \geq 0 \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-(m^2-2m+4) \geq 0 \\ 2m \geq 0 \\ m^2-2m+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4 \geq 0 \\ m \geq 0 \\ (m-1)^2+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Xét $P=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \geq 0$

$$\Rightarrow P^2=\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=2m+2\sqrt{m^2-2m+4}$$

$$\Rightarrow P=\sqrt{2m+2\sqrt{m^2-2m+4}}.$$

Với $m \geq 2$, ta có:

$P^2=2m+2\sqrt{m(m-2)+4} \geq 2.2+2\sqrt{0+4}=8$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=2$.

$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{2}$.

Vậy $\min P=2\sqrt{2}$ khi $m=2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{x+2}$. Tìm tất cả các giá trị x nguyên để y nguyên.

Lời giải.

Xét $y=\dfrac{x^2+2}{x+2}=\dfrac{x^2-4+6}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}+\dfrac{6}{x+2}=x-2+\dfrac{6}{x+2}$.

Với $x \in \mathbb{Z}$, ta có: $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{6}{x+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+2 \in \text{Ư}(6)$

hay $x+2 \in \{1;-1;2;-2;3;-3;6;-6\} \Leftrightarrow x \in \{-1;-3;0;-4;1;-5;4;-8\}$.

Vậy $x \in \{-1;-3;0;-4;1;-5;4;-8\}$ là các giá trị cần tìm.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 3. Cho các số $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện $a+2b+5c=0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $ax^2+bx+c=0$ (1)

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Với $a=0 \Rightarrow$ phương trình (1) trở thành $bx+c=0$ (2)

+ Nếu $b=0$ thì từ điều kiện $a+2b+5c=0$ suy ra $c=0$.
  $\Rightarrow$ Phương trình (2) nghiệm đúng với mọi x.
  $\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm.
+ Nếu $b\neq 0$ thì phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{c}{b} \Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm.

Trường hợp 2. Với $a\neq 0 \Rightarrow$ phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x.
Từ $a+2b+5c=0 \Rightarrow b=-\dfrac{a+5c}{2} \Rightarrow b^2=\dfrac{(a+5c)^2}{4}$. Do đó:

$$\Delta=b^2-4ac=\frac{(a+5c)^2}{4}-4ac=\frac{a^2+10ac+25c^2-16ac}{4}$$
$$=\frac{a^2-6ac+25c^2}{4}=\frac{a^2-6ac+9c^2+16c^2}{4}=\frac{(a-3c)^2}{4}+4c^2\geq 0.$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm.

Kết luận: Phương trình (1) luôn có nghiệm với các số $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện $a+2b+5c=0$.

Câu 4. Giải phương trình $(4x^3-x+3)^3=x^3+\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$(4x^3-x+3)^3=x^3+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2(4x^3-x+3)=3+2x^3$. (1)

Đặt $y=2x$ khi đó phương trình (1) tương đương với

$$2\left(\frac{y^3}{2}-\frac{y}{2}+3\right)^3=3+\frac{y^3}{4} \Leftrightarrow (y^3-y+6)^3=12+y^3. \quad (2)$$

Đặt $z=y^3-y+6$ khi đó phương trình (2) tương đương với $\begin{cases} z=y^3-y+6 \\ y^3+12=z^3. \end{cases}$ $(*)$

Ta thấy $z^3-z=y^3+12-y^3+y-6=y+6 \Rightarrow y=z^3-z-6$.

Nên hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} z=y^3-y+6 \\ y=z^3-z-6. \end{cases}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Từ đó ta có $(y+z)(y^2-yz+z^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-y \\ y^2-yz+z^2-2=0. \end{array}\right.$

Với $z=-y$ thay vào $(*)$ ta được $y^3=-6 \Leftrightarrow y=\sqrt[3]{6} \Rightarrow x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

Với $y^2-yz+z^2-2=0$ ta có hệ $\begin{cases} y^2-yz+z^2-2=0 \\ y^3+12=z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-yz+z^2-2=0 \\ (y-z)(y^2+yz+z^2)=-12. \end{cases}$ $(**)$

Theo bất đẳng thức Cô-si áp dụng cho ba số không âm $(y-z)^2,\ y^2+yz+z^2,\ y^2+yz+z^2$ ta có

$$\begin{aligned}(y-z)^2(y^2+yz+z^2)^2 &\le \left(\frac{(y-z)^2+(y^2+yz+z^2)+(y^2+yz+z^2)}{3}\right)^3 \\ &= (y^2+z^2)^3 \le (2(y^2-yz+z^2))^3 = 4^3 < 12^2\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẩn với $(**)$ do đó hệ phương trình vô nghiệm.

Do đó nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}\right\}$.

Câu 5. Hai cây nến cùng chiều dài và làm bằng các chất liệu khác nhau, cây nến thứ nhất cháy hết với tốc độ đều trong 3 giờ, cây nến thứ hai cháy hết với tốc độ đều trong 4 giờ. Hỏi phải cùng bắt đầu đốt lúc mấy giờ chiều để đến 4 giờ chiều, phần còn lại của cây nến thứ hai dài gấp đôi phần còn lại của cây nến thứ nhất?

Lời giải.

Giả sử chiều dài ban đầu của hai cây nến là h (cm).

Gọi thời điểm cùng bắt đầu đốt hai cây nến là x (giờ)$(x>0)$. Sau x (giờ) thì:

- Cây nến thứ nhất cháy được $x \cdot \dfrac{h}{3}=\dfrac{hx}{3}$ (cm).

- Cây nến thứ hai cháy được $x \cdot \dfrac{h}{4}=\dfrac{hx}{4}$ (cm).

- Phần còn lại của cây nến thứ nhất là $h-\dfrac{hx}{3}=h\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$ (cm).

- Phần còn lại của cây nến thứ hai là $h-\dfrac{hx}{4}=h\left(1-\dfrac{x}{4}\right)$ (cm).

Theo đề bài ta có phương trình:

$h\left(1-\dfrac{x}{4}\right)=2 \cdot h\left(1-\dfrac{x}{3}\right) \Leftrightarrow 1-\dfrac{x}{4}=2-\dfrac{2x}{3} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}\right)x=1 \Leftrightarrow x=2,4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy thời điểm cùng bắt đầu đốt hai cây nến là $4-2,4=1,6$ (giờ) hay 1 giờ 36 phút chiều.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 6. Cho các số x, y dương thỏa mãn điều kiện $(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=2018$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{2018}{y+\sqrt{1+y^2}}=\frac{2018\left(y-\sqrt{1+x^2}\right)}{-1}=2018\left(\sqrt{1+y^2}-y\right). \quad (1)$$

Tương tự ta cũng có

$$y+\sqrt{1+y^2}=2018\left(\sqrt{1+x^2}-x\right). \quad (2)$$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được

$$2019(x+y)=2017\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right).$$

Ta thấy

$$\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right)^2=2+x^2+y^2+2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\geq 2+x^2+y^2+2(1+xy)=4+(x+y)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y$. Khi đó

$$2019(x+y)\geq 2017\sqrt{4+(x+y)^2}\Rightarrow 2019\cdot P\geq 2017\sqrt{4+P^2}.$$

$$\Rightarrow 2019^2\cdot P^2\geq 2017^2.(4+P^2)\Rightarrow P^2\geq\frac{2017^2}{2018}\Rightarrow P\geq\frac{2017}{\sqrt{2018}}.$$

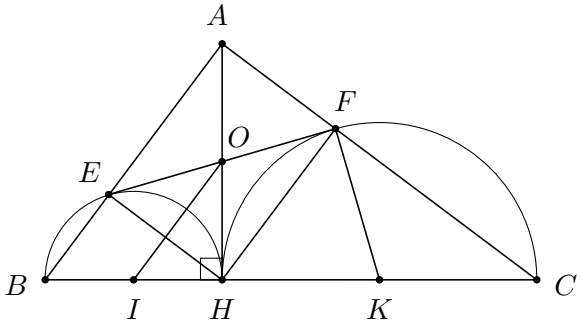
Vậy $\min P=\dfrac{2017}{\sqrt{2018}}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{2017}{2\sqrt{2018}}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có $AB=4, AC=3, BC=5$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ hai nửa đường tròn đường kính BH và HC. Hai nửa đường tròn này cắt AB, AC lần lượt tại E, F.

a) Tính diện tích của nửa hình tròn đường kính BH.

b) Chứng minh tứ giác $BEFC$ nội tiếp và đường thẳng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đường kính BH và CH.

Lời giải.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Gọi I là trung điểm của BH, K là trung điểm của HC, O là giao điểm của AH và EF.

$\triangle ABC$ có: $\begin{cases} BC^2 = 5^2 = 25 \\ AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A (theo định lí Py-ta-go đảo).

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{4^2}{5} = 3{,}2 \Rightarrow IB = \dfrac{BH}{2} = 1{,}6.$

Diện tích nửa hình tròn đường kính BH là

$S = \dfrac{1}{2}\pi \cdot IB^2 = \dfrac{1}{2}\pi \cdot (1,6)^2 = 1{,}28\pi$ (đơn vị diện tích).

b) Ta có: $\widehat{BEH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow HE \perp AB \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ.$

Tương tự, ta có: $\widehat{AFH} = 90^\circ.$

Tứ giác $AEHF$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

$\Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{HAF}.$

Mà $\widehat{HAF} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEF} + \widehat{C} = 90^\circ.$

Tứ giác $BEFC$ có: $\widehat{BEF} + \widehat{C} = \widehat{BEH} + \widehat{HEF} + \widehat{C} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$

$\Rightarrow BEFC$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OE = OH.$

$\triangle IEO$ và $\triangle IHO$ có: $\begin{cases} IO \text{ chung} \\ IE = IH \\ OE = OH \end{cases} \Rightarrow \triangle IEO = \triangle IHO$ (c.c.c).

$\Rightarrow \widehat{IEO} = \widehat{IHO} = 90^\circ \Rightarrow EF \perp IE.$

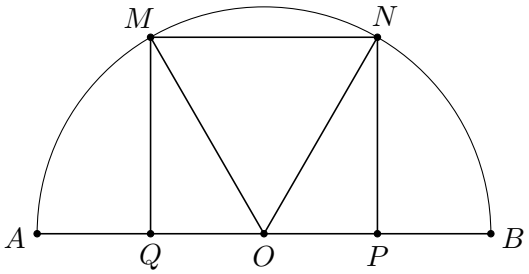
$\Rightarrow EF$ là tiếp tuyến tại E của (I).

Chứng minh tương tự, ta được EF là tiếp tuyến tại F của (K).

Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đường kính BH và CH.

Câu 8. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Tìm kích thước hình chữ nhật $MNPQ$ có hai đỉnh M, N thuộc nửa đường tròn, hai đỉnh P, Q thuộc đường kính AB sao cho diện tích $MNPQ$ lớn nhất.

Lời giải.



Gọi O là trung điểm của AB.

$\triangle OQM$ và $\triangle OPN$ có

$\widehat{OQM} = \widehat{OPN} = 90^\circ$ ($MNPQ$ là hình chữ nhật)

$OM = ON = R$

$MQ = NP$ ($MNPQ$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow \triangle OQM = \triangle OPN$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)

$\Rightarrow OQ = OP = \dfrac{1}{2}QP \Rightarrow S_{MNPQ} = QM \cdot QP = 2QM \cdot QO$

Ta có: $2QM \cdot QO \leq QM^2 + QO^2 = OM^2 = R^2$

$\Rightarrow S_{MNPQ} \leq R^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow QO = QM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow QP = R\sqrt{2}; QM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\max S_{MNPQ} = R^2$ khi $QP = R\sqrt{2};\ QM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}.$$

Lời giải.

Trước hết chúng ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \tag{1}$$

trong đó $a,\ b,\ x,\ y$ là các số thực và $x,\ y \geq 0$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Ta tiếp tục chứng minh bất đẳng thức sau

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \tag{2}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta có

$$\begin{aligned}&3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2\\\Leftrightarrow&3(a^2+b^2+c^2)\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\\Leftrightarrow&2(a^2+b^2+c^2)-2ab-2bc-2ca\geq 0\\\Leftrightarrow&(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng).}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Do đó bất đẳng thức (2) được chứng minh.

Ta tiếp tục chứng minh bất đẳng thức sau

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9 \tag{3}$$

Thật vậy $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=9$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Do đó bất đẳng thức (3) được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (3) ta có

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}=\frac{1}{\sqrt{(2a+b)^2+(a-b)^2}}\leq\frac{1}{2a+b}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Chứng minh tương tự như trên ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}&=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)\\\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}&=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right).\end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$P\leq\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=\sqrt{3}.$$

Từ đó ta có $P\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Vậy $\max P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 13

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI NGUYÊN, TỈNH THÁI NGUYÊN, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Không dùng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}-\frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A &= \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}-\frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\\ &= \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}-\frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\\ &= \frac{7+4\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\\ &= \frac{7+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{\left(7+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}\\ &= \frac{16-4\sqrt{5}}{4}=4-\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Câu 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2+3=4x\\ x^3+12x+y^3=6x^2+9.\end{cases}$$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}x^2+y^2+3=4x\\ x^3+12x+y^3=6x^2+9.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+4+y^2=1\\ x^3-6x^2+12x-8+y^3=1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1\\ (x-2)^3+y^3=1\end{cases}(1)$

Đặt $x-2=a$, $y=b$. Hệ phương trình (1) trở thành

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ a^3+b^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+b^3=1\\ (a^2+b^2)^3=(a^3+b^3)^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=1 \\ a^6+b^6+3a^2b^2(a^2+b^2)=a^6+b^6+2a^3b^3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=1 \\ 3a^2b^2=2a^3b^3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=1 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ ab=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

- Khi $a=0 \Rightarrow b=1$, suy ra $x=2$, $y=1$.
- Khi $b=0 \Rightarrow a=1$, suy ra $x=3$, $y=0$.
- Khi $ab=\dfrac{3}{2}$. Vì $1=a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \dfrac{1}{2}$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy cặp nghiệm của hệ phương trình là $(2;1)$ và $(3;0)$.

Câu 3. Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình

$$16(x^3-y^3)=15xy+371.$$

Lời giải.

Vì $16(x^3-y^3)=15xy+371>0 \Rightarrow x^3>y^3 \Rightarrow x>y$.

Mặt khác ta thấy y chẵn không phải là nghiệm của phương trình vì nếu y chẵn $16(x^3-y^3)$ và $15xy$ là số chẵn mà 371 lại là số lẻ.

- Khi $y=1$: Phương trình tương đương với

$$16x^3-15x-387=0 \Leftrightarrow (x-3)(16x^2+48x+129)=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ (do } x\in\mathbb{Z}^+).$$

- Khi $y \geq 3 \Rightarrow x \geq 4$. Ta có

$$\begin{aligned} 16(x^3-y^3)-15xy &= 16(x-y)(x^2+xy+y^2)-15xy \\ &\geq 16(x^2+xy+y^2)-15xy \\ &> 16(x^2+y^2) \\ &\geq 16(4^2+3^2)=400>371. \end{aligned}$$

Do đó với $y \geq 3$ thì phương trình vô nghiệm.

Cặp nghiệm nguyên dương $(x;y)$ của phương trình là $(3;1)$.

Câu 4. Giải phương trình $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$.

Ta có $3x^2-12x+14=3(x-2)^2+2\ge 2$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\le\dfrac{2x-3+1}{2}+\dfrac{5-2x+1}{2}=2$.

Mà $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14\Rightarrow\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=2=3x^2-12x+14$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=2$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Câu 5. Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}}\ge\frac{x+y+z}{5}.$$

Lời giải.

Ta thấy rằng $8a^2+3b^2+14ab=(3a+2b)^2-(a-b)^2\le(3a+2b)^2$ nên

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}}\\
\ge\ &\frac{x^2}{\sqrt{(3x+2y)^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{(3y+2z)^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{(3z+2x)^2}}\\
\ge\ &\frac{x^2}{3x+2y}+\frac{y^2}{3y+2z}+\frac{z^2}{3z+2x}\\
\ge\ &\frac{(x+y+z)^2}{3x+2y+3y+2z+3z+2x}=\frac{x+y+z}{5}.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Câu 6. Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC}=100^\circ$. Điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa điểm A có bờ BC sao cho $\widehat{CBD}=15^\circ$, $\widehat{BCD}=35^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{ADB}$.

Lời giải.

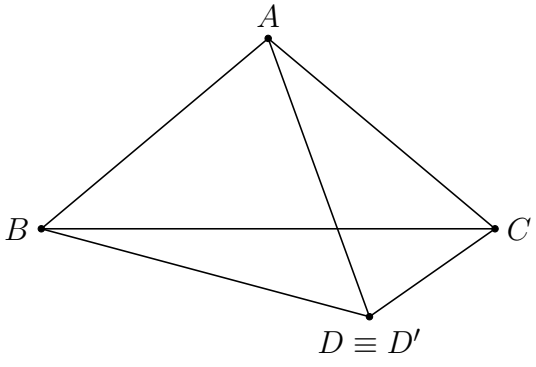
Xét tam giác BDC có

$$\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=180^\circ\Rightarrow\widehat{D}=180^\circ-\widehat{B}-\widehat{C}=130^\circ.$$

Trên AD lấy điểm D' sao cho $AD'=AB=AC$.

Lúc đó ta có

$$\begin{cases}\widehat{ABD'}=\widehat{AD'B}=\dfrac{180^\circ-\widehat{BAD'}}{2}\\ \widehat{ACD'}=\widehat{AD'C}=\dfrac{180^\circ-\widehat{CAD'}}{2}\end{cases}$$



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Suy ra $\widehat{BD'C} = \widehat{AD'B} + \widehat{AD'C} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BAD'}}{2} + \dfrac{180^\circ - \widehat{CAD'}}{2} = 130^\circ$.

Như vậy $\widehat{BDC} = \widehat{BD'C} = 130^\circ \Rightarrow D \equiv D'$ (Do D và D' cùng nằm trên AD và cung tròn $\widehat{BC}$). Như vậy $AB = AC = AD$ hay $\triangle ABD$ cân tại A.

Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} + \widehat{CBD} = 40^\circ + 15^\circ = 55^\circ$.

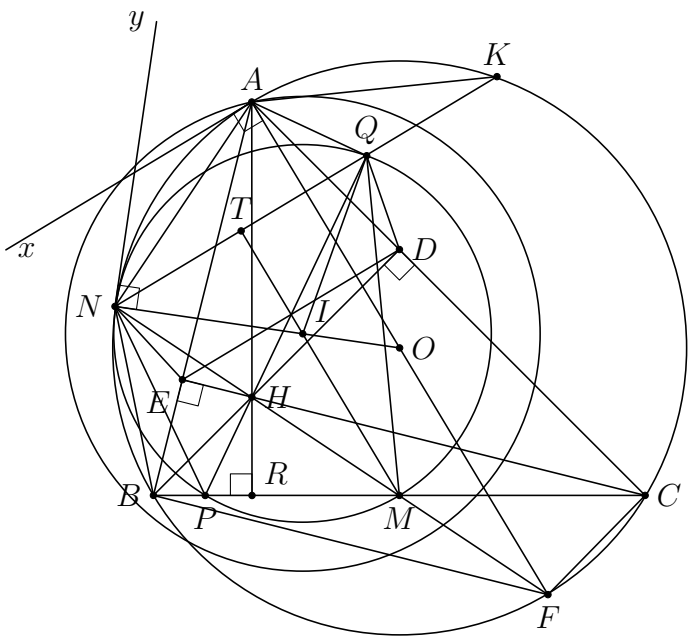
Câu 7. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H (D thuộc AC, E thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia MH cắt đường tròn (O) tại N.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, D, E, H, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $\widehat{BHP} = \widehat{CHM}$, Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng HP. Chứng minh rằng tứ giác $DENQ$ là hình thang cân.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải.



a) Kéo dài AO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F, nối BF, CF.

Do AF là đường kính của đường tròn (O) nên ta có $\widehat{ACF} = \widehat{ABF} = 90^\circ$.

Từ $BH \perp AC$, $CF \perp AC \Rightarrow CF \parallel BH$.

Tương tự $CH \perp AB$, $BF \perp AB \Rightarrow BF \parallel CH$.

Từ $\begin{cases} BH \parallel FC \\ CH \parallel FB \end{cases} \Rightarrow BHFC$ là hình bình hành.

Từ đó suy ra HF và BC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường hay HF đi qua trung điểm M của BC.

Suy ra N, H, F thẳng hàng, suy ra $\widehat{ANF} = 90^\circ$ hay $\widehat{ANH} = 90^\circ$, suy ra N thuộc đường tròn đường kính AH.

Vì $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$ nên E, D thuộc đường tròn đường kính EH.

Như vậy năm điểm A, E, H, E, N cùng nằm trên đường tròn đường kính EH.

b) Vì $\widehat{AQH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$ nên $AQDH$ là tứ giác nội tiếp hay Q nằm trên đường tròn đi qua các điểm A, D, H, E, N.

Từ $\begin{cases} \widehat{CHF} = \widehat{NHE} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{QHD} = \widehat{BHP} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{CHF} = \widehat{BHP} \text{ (giả thiết)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{NHE} = \widehat{QHD} \Rightarrow \overset{\frown}{NE} = \overset{\frown}{QD}.$

Suy ra $DENQ$ là hình thang cân.

c) Kéo dài AH cắt BC tại điểm R.

Ta có $\begin{cases} \widehat{AHQ} = \widehat{PHR} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{AHQ} = \widehat{ANQ} \text{ (cùng chắn cung AQ)} \\ \widehat{ANQ} + \widehat{QNM} = 90^\circ = \widehat{HPR} + \widehat{PHR} \end{cases} \Rightarrow \widehat{QNM} = \widehat{QPM} \Rightarrow MPNQ$ là tứ giác nội tiếp.

Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O).

Từ $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow BEDC$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$). Suy ra $\widehat{DEA} = \widehat{EAx} \Rightarrow Ax \parallel DE$.

Vì $OA \perp Ax$ và $Ax \parallel DE$ nên $OA \perp DE$.

Kéo dài NQ cắt đường tròn (O) tại điểm K.

Vì $QDEN$ là hình thang cân nên $DE \parallel QN \Rightarrow OA \perp NK \Rightarrow AO$ là trung trực của NK. Suy ra $\triangle ANK$ cân tại A.

Kẻ tiếp tuyến Ny của đường tròn (O) suy ra $\widehat{ANK} = \widehat{AKN} = \widehat{ANy}$.

Ta có $\triangle BEC$ và $\triangle BDC$ vuông tại E và D đồng thời M là trung điểm của BC nên $ME = MD = MB = MC = \dfrac{BC}{2}$ suy ra M nằm trên trung trực của DE mà $QDEN$ là hình thang cân nên M cũng thuộc trung trực của $NQ \Rightarrow \triangle MNQ$ cân tại M.

Mặt khác $\widehat{ANy} + \widehat{ANO} = 90^\circ = \widehat{ANO} + \widehat{ONH} \Rightarrow \widehat{ONH} = \widehat{ANy} = \widehat{ANK}$.

Ta có $\widehat{ANO} = \widehat{ANK} + \widehat{KNO} = \widehat{KNO} + \widehat{ONH} = \widehat{QNM}$.

Các tam giác OAN và MNQ cân tại O và các góc ở đáy bằng nhau nên $\widehat{NOA} =$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$\widehat{NMQ}$.

Gọi T là trung điểm của NQ. MT cắt NO tại I.

Vì $OA \perp NQ$, $MT \perp NQ \Rightarrow OA \parallel MT$. Dễ thấy MT chính là trung trực của NQ.

$I \in MT \Rightarrow \widehat{NIT} = \widehat{QIT} = \widehat{AON} = \widehat{NMQ} \Rightarrow \widehat{NIQ} = 2\widehat{NMQ}$ và I nằm trên trung trực của NQ nên I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ hay đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O) tại điểm N.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 14

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN PTNK, TP. HỒ CHÍ MINH, VÒNG 2, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho các phương trình $x^2 - x + m = 0$ (1) và $mx^2 - x + 1 = 0$ (2) với m là tham số.

a) Tìm m để các phương trình (1) và (2) đều có 2 nghiệm dương phân biệt.

b) Giả sử điều kiện ở câu a) được thoả mãn, gọi x_1, x_2 là các nghiệm của (1) và x_3, x_4 là các nghiệm của (2). Chứng minh rằng $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 > 5$.

Lời giải.

a) Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_{(1)} > 0 \\ m > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}.$$

Tương tự, phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < \frac{1}{4}$.

Vậy các phương trình đã cho đều có 2 nghiệm dương phân biệt khi $0 < m < \frac{1}{4}$.

b) Áp dụng định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1;\ x_1x_2 = m \\ x_3 + x_4 = \frac{1}{m};\ x_3x_4 = \frac{1}{m} \end{cases}$. Khi đó

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = 1 + \frac{1}{m}.$$

Mà $0 < m < \frac{1}{4}$ nên $1 + \frac{1}{m} > 5$.

Câu 2. Cho a, b là hai số nguyên thoả mãn $a^3 + b^3 > 0$.

a) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 \geq a + b > 0$.

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3 \geq a^2+b^2$.

c) Tìm tất cả các bộ số x, y, z, t nguyên sao cho $x^3+y^3=z^2+t^2$ và $z^3+t^3=x^2+y^2$.

Lời giải.

a) Ta có $a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4} \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a-\dfrac{b}{2}=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$, trái với $a^3+b^3>0$.

Suy ra $a^2-ab+b^2>0$, mà $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)>0 \Rightarrow a+b>0$.

Lại có $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $a^2-ab+b^2 \geq 1$ nên $a^3+b^3 \geq a+b$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a;b) \in \{(1;1),(1;0),(0;1)\}$.

b) Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $ab \leq 0$, ta có $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \geq (a+b)(a^2+b^2) \geq a^2+b^2$, do $a+b \geq 1$.
- Nếu $ab>0$ kết hợp với $a+b>0$ suy ra $a>0, b>0$, dẫn tới $a+b \geq 2$.
  Suy ra $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \geq 2(a^2-ab+b^2)=a^2+b^2+(a-b)^2 \geq a^2+b^2$.

Dẫn tới $a^3+b^3 \geq a^2+b^2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a;b) \in \{(0;1),(1;0),(1;1)\}$.

c) Từ giả thiết suy ra $x^3+y^3 \geq 0$ và $z^3+t^3 \geq 0$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x^3+y^3=0$ thì $y^2+t^2=0 \Rightarrow y=t=0 \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$.
- Nếu $z^3+t^3=0$, tương tự suy ra $x=y=z=t=0$.
- Nếu $x^3+y^3>0$ và $z^3+t^3>0$, theo câu b) thì $x^3+y^3 \geq x^2+y^2$ và $z^3+t^3 \geq z^2+t^2$.
  Dẫn tới $x^3+y^3+z^3+t^3 \geq x^2+y^2+z^2+t^2$.
  Dấu bằng xảy ra khi $(x;y),(z;t) \in \{(0;1),(1;0),(1;1)\}$.

Từ đó dẫn tới hệ phương trình có các nghiệm

$$(x;y;z;t) \in \{(0;0;0;0),(0;1;0;1),(0;1;1;0),(1;0;0;1),(1;0;1;0),(1;1;1;1)\}.$$

Câu 3. Cho $A_n=2018^n+2032^n-1964^n-1984^n$ với n là số tự nhiên.

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì A_n chia hết cho 51.

b) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho A_n chia hết cho 45.

Lời giải.

Bổ đề. Với a, b, n là các số tự nhiên thì $a^n - b^n$ chia bết cho $a - b$.

Chứng minh:

Với $n = 0$, mệnh đề hiển nhiên đúng.

Với $n \geq 1$ thì ta có $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1}\right)$ nên $a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$.

a) Áp dụng bổ đề trên ta có $2018^n - 1964^n$ chia hết cho 54 và $2032^n - 1984^n$ chia hết cho 48 nên $2018^n - 1964^n$ và $2032^n - 1984^n$ đều chia hết cho 3, dẫn tới A_n chia hết cho 3.

Lại có $2018^n - 1984^n$ chia hết cho 34 và $2032^n - 1964^n$ chia hết cho 68 nên $2018^n - 1984^n$ và $2032^n - 1964^n$ đều chia hết cho 17, dẫn tới A_n chia hết cho 17.

Mà $\text{ƯCLN}(3; 17) = 1$ nên suy ra A_n chia hết cho 51 với mọi số tự nhiên n.

b) A_n chia hết cho 45 thì A_n chia hết cho 5 và 9.

Ta có $A_n \equiv 3^n + 2^n - 2 \cdot 4^n \pmod 5$.

Đặt $n = 4k + r$ với $k, r \in \mathbb{N}, r < 4$, khi đó $A_n \equiv 3^r + 2^r - 2 \cdot 4^r \pmod 5$.

Thử lần lượt với $r = 0, 1, 2, 3$ ta thấy $A_n \equiv 0 \pmod 5 \Leftrightarrow r = 0$.

Vậy A_n chia hết cho 5 khi và chỉ khi n chia hết cho 4.

Lại có $A_n \equiv 2^n + 7^n - 2^n - 4^n \equiv 7^n - 4^n \pmod 9$.

Đặt $n = 3k + r$ với $k, r \in \mathbb{N}, r < 3$, khi đó $A_n \equiv 7^r - 4^r \pmod 9$.

Thử lần lượt với $r = 0, 1, 2$ ta thấy $A_n \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow r = 0$.

Vậy A_n chia hết cho 9 khi và chỉ khi n chia hết cho 3.

Từ đó dẫn tới A_n chia hết cho 45 khi và chỉ khi n chia hết cho 12.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn. Một đường tròn qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F; BF cắt CE tại D. Lấy điểm K sao cho tứ giác $DBKC$ là hình bình hành.

a) Chứng minh rằng $\triangle KBC$ đồng dạng với $\triangle DFE$, $\triangle AKC$ đồng dạng với $\triangle ADE$.

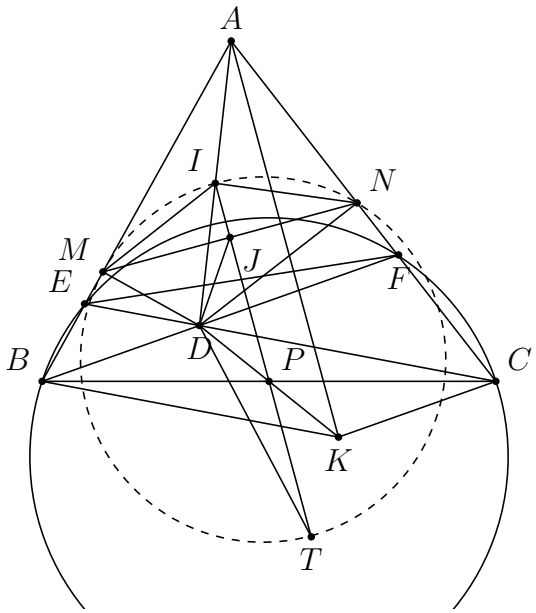
b) Hạ DM vuông góc với AD, DN vuông góc với AC. Chứng minh rằng MN vuông góc với AK.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

c) Gọi I là trung điểm AD, J là trung điểm MN. Chứng minh đường thẳng IJ đi qua trung điểm của cạnh BC.

d) Đường thẳng IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN tại T (khác I). Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DTJ.

Lời giải.



a) Tứ giác $BEFC$ nội tiếp và tứ giác $BDCK$ là hình bình hành nên ta có $\widehat{KBC} = \widehat{BCD} = \widehat{DFE}$ và $\widehat{KCB} = \widehat{DBC} = \widehat{DEF}$. Suy ra $\triangle KBC \backsim \triangle DFE$, dẫn tới $\dfrac{KC}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$.
Mặt khác ta có $\triangle ABC \backsim \triangle AFE \Rightarrow \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{AE}$, nên $\dfrac{KC}{DE} = \dfrac{AC}{AE}$.
Mà $\widehat{ACK} = \widehat{ACD} + \widehat{DCK} = \widehat{ABD} + \widehat{EDB} = \widehat{AED} \Rightarrow \triangle AKC \backsim \triangle ADE$ (c.g.c).

b) Vì $\triangle AKC \backsim \triangle ADE \Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{DAE}$.
Tứ giác $AMDN$ nội tiếp nên $\widehat{DAE} = \widehat{DNM}$, suy ra $\widehat{KAC} = \widehat{DNM}$.
Dẫn tới $\widehat{KAC} + \widehat{ANM} = 90^\circ$, hay $AK \perp MN$.

c) Giả sử BC và DK cắt nhau tại P là trung điểm của mỗi đường.
Ta có $IM = IN = \dfrac{AD}{2}$ nên $IJ \perp MN$. Mà $AK \perp MN$ nên $IJ \parallel AK$.
Vì I là trung điểm AD nên IJ đi qua trung điểm P của DK, hay IJ đi qua trung điểm P của BC.

d) Vì $IJ \perp MN$ nên IT là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN, hay $\widehat{IMT} = 90^\circ$. Suy ra $IM^2 = IJ \cdot IT$, mà $IM = ID$ nên $ID^2 = IJ \cdot IT \Rightarrow \dfrac{ID}{IJ} = \dfrac{IT}{ID}$.

Dẫn tới $\triangle IDT \backsim \triangle IJD \Rightarrow \widehat{IDJ} = \widehat{ITD}$, suy ra AD là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác DJT.

Câu 5. Đội văn nghệ của một trường THCS có 8 học sinh. Nhà trường muốn thành lập các nhóm tốp ca, mỗi nhóm gồm đúng 3 học sinh (mỗi học sinh có thể tham gia vài nhóm tốp ca khác nhau). Biết rằng hai nhóm tốp ca bất kỳ có chung nhiều nhất là một học sinh.

a) Chứng minh rằng không có học sinh nào tham gia từ 4 nhóm tốp ca trở lên.

b) Có thể thành lập được nhiều nhất là bao nhiêu nhóm tốp ca như vậy?

Lời giải.

a) Giả sử phản chứng rằng có một học sinh A tham gia 4 nhóm tốp ca nào đó.
Vì hai nhóm tốp ca bất kỳ có chung nhiều nhất là một học sinh nên học sinh A là học sinh chung duy nhất của 4 nhóm tốp ca trên. Mỗi nhóm tốp ca này sẽ có thêm 2 học sinh nữa nên sẽ có ít nhất 8 học sinh nữa khác A, vô lý.

b) Ta sẽ chứng minh có không quá 8 nhóm tốp ca.
Thật vậy, giả sử có thể thành lập được 9 nhóm tốp ca. Khi đó, tổng số lượt học sinh tham gia 9 nhóm tốp ca là 27 lượt, mà chỉ có 8 học sinh nên theo nguyên lý Đi-rích-lê thì tồn tại một học sinh tham gia ít nhất 4 nhóm tốp ca, mâu thuẫn với câu a).
Ta sẽ chứng minh có thể lập được 8 nhóm tốp ca thoả mãn các điều kiện của bài toán. Ký hiệu 8 học sinh đó là A, B, C, D, E, F, G, H. Các học sinh có thể được chia thành các nhóm tốp ca như sau: (A, B, C), (A, D, E), (A, F, G), (B, D, F), (B, E, H), (C, D, G), (C, F, H), (D, G, H).
Vậy có thể lập được nhiều nhất là 8 nhóm tốp ca.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 15

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN PTNK, TP. HỒ CHÍ MINH, VÒNG 1, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Biết $0 < x \le y$ và

$$\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})+2(x+2y)}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)=\frac{5}{3}.$$ Tính $\frac{x}{y}$

.

Lời giải.

Xét vế trái của đẳng thức đề bài cho, ta có

$$\begin{aligned}\text{VT}=&\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})+2(x+2y)}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)\\ =&\frac{2(x+y)}{3(x+y)}+\frac{y\sqrt{y}+x\sqrt{x}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\\ =&\frac{2}{3}+\frac{y\sqrt{y}+x\sqrt{x}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}.\end{aligned}$$

Với $0 < x \le y$, đặt $a=\frac{x}{y}, 0 < a \le 1$, suy ra $x = ay$, ta có

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3}+\frac{y\sqrt{y}(1+a\sqrt{a})}{y\sqrt{y}(a+\sqrt{a})}=\frac{5}{3}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1+a\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}=1\\ \Leftrightarrow\ &1+a\sqrt{a}=a+\sqrt{a}\\ \Leftrightarrow\ &(a-1)(\sqrt{a}-1)=0\\ \Leftrightarrow\ &a=1.\end{aligned}$$

Vậy $\frac{x}{y}=1$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $\frac{2x^2(7-x)}{\sqrt{3-x}}=x(x-7)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+3)(x-1)=(y-2)(x+3)\\(x-1)\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2.\end{cases}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

a) Điều kiện $x < 3$, khi đó phương trình tương đương

$$x(7-x)\left(\frac{2x}{\sqrt{3-x}}+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \text{(nhận)} \\ x=7 & \text{(loại)} \\ \dfrac{2x}{\sqrt{3-x}}+1=0 & (*). \end{array}\right.$$

Xét phương trình (*), ta có

$$\frac{2x+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 3-x=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x=-1 \vee x=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;0\}$.

b) Ta có $y^2-5y+8=\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ với mọi y. Xét phương trình

$$(x+3)(x-1)=(y-2)(x+3) \Leftrightarrow (x+3)(x-y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=y-1. \end{array}\right.$$

- Với $x=-3$, thế vào phương trình còn lại ta có

$$-4\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2 \qquad \text{(loại, vì VT}< 0 \text{ và VP}\ge 0).$$

- Với $x=y-1$, thế vào phương trình còn lại ta có

$$\begin{aligned} (y-2)\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2 &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-2=0 \\ \sqrt{y^2-5y+8}=y-2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ \begin{cases} y \ge 2 \\ y^2-5y+8=(y-2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=2 & \text{(nhận)} \\ y=4 & \text{(nhận).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\{(1;2),(3;4)\}$

Câu 3. Cho phương trình $x^2-x+3m-11=0 \quad (1)$.

a) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm kép? Tìm nghiệm đó.

b) Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $2017x_1 + 2018x_2 = 2019$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = 1-4(3m-11) = 45-12m$. (1) có nghiệm kép khi và chi khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{15}{4}$. Khi đó nghiệm kép x_1, x_2 của (1) là $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{15}{4}$. Theo định lý Vi-ét và yêu cầu bài toán, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = 3m - 11 \\ 2017x_1 + 2018x_2 = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = 3m - 11 \\ 2017(x_1 + x_2) + x_2 = 2019 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ 3m - 11 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ m = 3 \qquad \text{(nhận)}. \end{cases}$$

Vậy $m = 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4.

a) Đầu tháng 5 năm 2018, khi đang vào vụ thu hoạch, giá dưa hấu bất ngờ giảm mạnh. Nông dân A cho biết vì sợ dưa hỏng nên phải bán 30% số dưa hấu thu hoạch được với giá 1500 đồng mỗi kilogam (1500đ/kg), sau đó nhờ phong trào "giải cứu dưa hấu" nên đã may mắn bán hết số dưa còn lại với giá 3500đ/kg; nếu trừ tiền đầu tư thì lãi được 9 triệu đồng (không kể công chăm sóc hơn hai tháng của cả nhà). Cũng theo ông A, mỗi sào đầu tư (hạt giống, phân bón,..) hết 4 triệu đồng và thu hoạch được 2 tấn dưa hấu. Hỏi ông A đã trồng bao nhiêu sào dưa hấu?

b) Một khi đất hình chữ nhật ABCD (AB $<$ AD) có chu vi 240 mét được chia thành hai phần gồm khu đất hình chữ nhật ABMN làm chuồng trại và phần còn lại làm

vườn thả để nuôi gà (M, N lần lượt thuộc các cạnh AD, BC). Theo quy hoạch trang trại nuôi được 2400 con gà, bình quân mỗi con gà cần một mét vuông của diện tích vườn thả và diện tích vườn thả gấp ba lần diện tích chuồng trại. Tính chu vi của khu đất làm vườn thả.

Lời giải.

a) Gọi x là số sào dưa hấu ông A đã trồng, $x \in \mathbb{N}^*$. Khi đó số tấn dưa hấu thu hoạch là $2x$.

Ta có

	Số tiền (triệu đồng)	Số tấn dưa hấu	Giá mỗi tấn (triệu đồng)
Bán lần I	$1,5 \cdot 0,6x = 0,9x$	$30\% \cdot 2x = 0,6x$	$1,5$
Bán lần II	$3,5 \cdot 1,4x = 4,9x$	$70\% \cdot 2x = 1,4x$	$3,5$
Tổng hai lần bán	$5,8x$	$2x$	

Số tiền lãi là 9 triệu đồng, ta có phương trình $5,8x - 4x = 9 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy ông A đã trồng 5 sào dưa hấu.

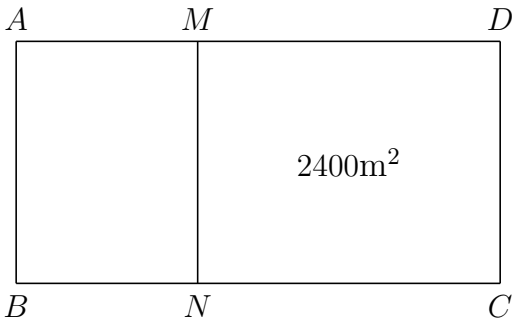
b)

Ta có $\begin{cases} S_{MNCD} = 2400 \\ S_{ABNM} = \dfrac{1}{3} S_{MNCD} = 800. \end{cases}$

Kết hợp đề bài ta có

$\begin{cases} (AB + AD) \cdot 2 = 240 \\ AB \cdot AD = 2400 + 800 \end{cases}$

$\begin{cases} AB + AD = 120 \\ AB \cdot AD = 3200 \end{cases}$



Khi đó AB, AD thỏa nghiệm phương trình

$x^2 - 120x + 3200 = 0 \Rightarrow \begin{cases} AB = 40 \\ AD = 80. \end{cases}$

Ta có $DM = \dfrac{S_{MNCD}}{CD} = \dfrac{2400}{40} = 60.$

Vậy chu vi khu đất làm vườn thả là $(DM + CD) \cdot 2 = 200$m.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (T) tâm O, bán kính R; $\widehat{CAD} = 45^\circ$, AC vuông góc với BD và cắt BD tại I. Dựng CK vuông góc với AD ($K \in AD$), CK cắt BD tại H và cắt (T) tại E ($E \not\equiv C$).

a) Tính số đó góc $\widehat{COD}$. Chứng minh các điểm C, I, K, D cùng thuộc một đường tròn và $AC = BD$.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHE. Tính IK theo R.

c) IK cắt AB tại F. Chứng minh O là trực tâm tam giác AIK và $CK \cdot CB = CF \cdot CD$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} \widehat{CAD} = \dfrac{1}{2}\text{Sđ}(\widehat{CD}) & \text{(góc nội tiếp)} \\ \widehat{COD} = \text{Sđ}(\widehat{CD}) & \text{(góc ở tâm)} \end{cases}$$

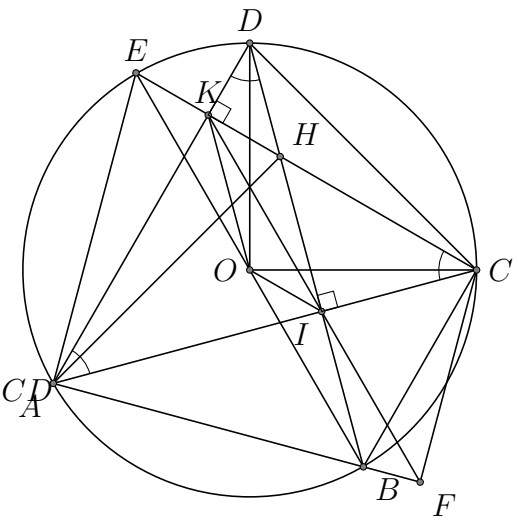
$\Rightarrow \widehat{COD} = 2 \cdot \widehat{CAD} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $CIKD$ có:

$$\begin{cases} \widehat{CID} = 90^\circ & (AC \perp BD) \\ \widehat{CKD} = 90^\circ & (CK \perp AD) \\ \widehat{CID}, \widehat{CKD} \text{ là hai góc kề cùng nhìn cạnh } CD \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CIKD$ nội tiếp.

$\Rightarrow C, I, K, D$ cùng nằm trên một đường tròn.



Ta có $\widehat{DAI} = \widehat{ADI} = 45^\circ$ ($\triangle AID$ vuông tại I) $\Rightarrow$ Sđ$(\widehat{CD})$ = Sđ$(\widehat{AB})$ $\Rightarrow$ Sđ$(\widehat{DCB})$ = Sđ$(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow AC = BD$.

b) Ta có $\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{ADB} = 45^\circ & (\triangle AID \text{ vuông tại } I) \\ \widehat{DAC} = \widehat{ACE} = 45^\circ & (\triangle ACK \text{ vuông tại } K) \end{cases} \Rightarrow$ Sđ$(\widehat{AB})$ = Sđ$(\widehat{AE})$ $\Rightarrow AB = AE$.

Xét $\triangle HCB$ có CI vừa là tia phân giác, vừa là đường cao nên CI cũng là đường trung tuyến, do đó I là trung điểm BH. Khi đó $\triangle AIH = \triangle AIB$ (hai cạnh góc vuông bằng nhau).

Vậy $AB = AH = AE$ do đó A là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHE$.

Chứng minh tương tự I là trung điểm BH, ta có K là trung điểm EH.

Ta có $\widehat{BOE} = 2\widehat{BCE} = 2 \cdot (\widehat{ACE} + \widehat{ACB}) = 180^\circ$.

Do đó B, O, E thẳng hàng và $IK = \dfrac{1}{2}BE = R$ (vì IK là đường trung bình $\triangle BHE$).

c) Ta có $\begin{cases} OE = OB \\ IH = IB \end{cases} \Rightarrow OI \parallel EC$ mà $EC \perp AD$ nên $OI \perp AD$.

Chứng minh tương tự ta có $OK \perp AC$ do đó O là trực tâm $\triangle AIK$.

Ta có $\begin{cases} \widehat{FBC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \quad \text{(kề bù)} \\ \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \quad (ABCD \text{ nội tiếp}) \end{cases} \Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{ADC}$.

Mặt khác $\begin{cases} \widehat{FIC} = \widehat{AIK} \quad \text{(đối đỉnh)} \\ \widehat{ADC} = \widehat{AIK} \quad (CDKI \text{ nội tiếp}) \end{cases} \Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{ADC}$.

Vậy $\widehat{FBC} = \widehat{FIC} \Rightarrow FBIC$ nội tiếp $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BFC} = \widehat{BIC} = 90^\circ \\ \widehat{BCF} = \widehat{BIF} = \widehat{KID} = \widehat{KCD} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle FCB \backsim \triangle KCD$

$\Rightarrow \dfrac{CF}{CK} = \dfrac{CB}{CD} \Rightarrow CK \cdot CB = CF \cdot CD.$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 16

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY, NINH BÌNH, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 6. Cho biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{x\sqrt{x}}{P}$.

Lời giải.

a) Với $x > 0$, $x \neq 4$ ta có

$$P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-\sqrt{x}-6)-(x+\sqrt{x}-6)}{x-4} = -\frac{2\sqrt{x}}{x-4}.$$

b) Ta có

$$A = \frac{x\sqrt{x}}{P} = -\frac{x(x-4)}{2} = -\frac{x^4-4x+4}{2}+2 = -\frac{(x-2)^2}{2}+2 \leq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của A là 2.

Câu 7. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}=3$.

Lời giải.

Điều kiện xác định : $x \geq 0$.

Đặt $u = \sqrt{3x+1}$, $v = \sqrt{x}$ $(0 \leq u, v \leq 3)$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^2-3v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ u^2-9u+14=0. \end{cases}$$

Từ đó, ta tìm được $u = 2$, $v = 1$. Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{3x+1}=2 \\ \sqrt{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x-2y}-\sqrt{3y-x}=1\\ \sqrt{3x-2y}+\sqrt{3y-x}+x+4y=9.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $3x-2y\geq 0$; $3y-x\geq 0$.

Đặt $u=\sqrt{3x-2y}\geq 1$, $v=\sqrt{3y-x}\geq 0$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}u-v=1\\ u+v+u^2+2v^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\ 3v^2+4v-7=0.\end{cases}$$

Từ đó, ta tìm được $u=2$, $v=1$. Suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{3x-2y}=2\\ \sqrt{3y-x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=4\\ 3y-x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Câu 9. Tìm các số tự nhiên x,y thỏa mãn $x^2+3y^2+4xy+4x+10y-12=0$

Lời giải.

Nếu $y=0$ thì $x^2+4x-12=0$, suy ra $x=2$.

Giả sử phương trình đã cho có nghiệm tự nhiên $(x;y)$ với $y\geq 1$. Phương trình đã cho tương đương

$$x^2+4(y+1)x+3y^2+10y-12=0.$$

Coi y là tham số, x là ẩn, phương trình trên có

$$\Delta'=4(y+1)^2-(3y^2+10y-12)=(y-1)^2+15.$$

Do phương trình có nghiệm tự nhiên nên tồn tại số nguyên dương m sao cho $\Delta'=m^2$, suy ra

$$(m-y+1)(m+y-1)=15=1\cdot 3=3\cdot 5.$$

Do $y-1\geq 0$ nên $m+y-1>m-y+1$. Suy ra

$$\begin{cases}m-y+1=1\\ m+y-1=15\end{cases}\quad\text{hoặc}\quad\begin{cases}m-y+1=3\\ m+y-1=5.\end{cases}$$

Giải các hệ trên ta được $y=8$ hoặc $y=2$. Với cả hai trường hợp, ta đều có

$$x^2+4(y+1)x+3y^2+10y-12>0,$$

với mọi x tự nhiên.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tự nhiên duy nhất là $(2;0)$.

Câu 10. Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b+2}+\frac{1}{b^2+c+2}+\frac{1}{c^2+a+2}\leq\frac{3}{4}.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2+1 \geq 2a,$$
$$b^2+1 \geq 2b,$$
$$c^2+1 \geq 2c.$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^2+b+2}+\frac{1}{b^2+c+2}+\frac{1}{c^2+a+2} \leq \frac{1}{2a+b+1}+\frac{1}{2b+c+1}+\frac{1}{2c+a+1}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{1}{2a+b+1} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+1\right). \quad (2)$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{2b+c+1} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+1\right), \quad (3)$$
$$\frac{1}{2c+a+1} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}+1\right). \quad (4)$$

Cộng (2), (3), (4), theo vế với chú ý rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$, ta được

$$\frac{1}{2a+b+1}+\frac{1}{2b+c+1}+\frac{1}{2c+a+1} \leq \frac{3}{4}.$$

Kết hợp với (1), ta được điều phải chứng minh.

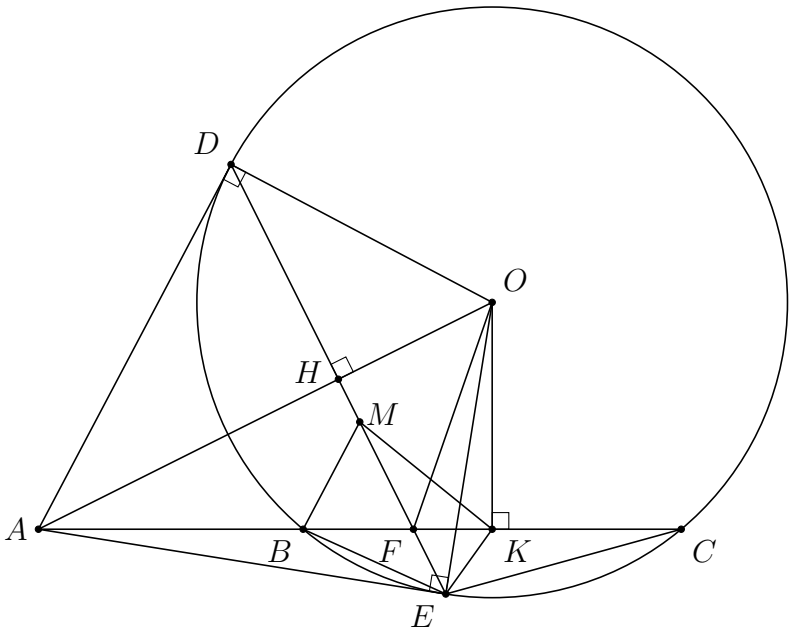
Câu 11. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Gọi (O) là một đường tròn thay đổi luôn đi qua B và C (tâm O không thuộc đường thẳng BC). Từ A kẻ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn (O) (D, E là các tiếp điểm và D, O nằm cùng trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC). Gọi K, H lần lượt là trung điểm của BC và DE.

a) Chứng minh $AE^2 = AB \cdot AC$.

b) Trên DE lấy điểm M sao cho BM song song với AD. Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp đường tròn và MK song song với DC.

c) Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.



a) Ta có $\triangle ABE \backsim \triangle AEC$ (g.g), suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AE}{AC}$. Vậy $AE^2 = AB \cdot AC$.

b) Dễ thấy, năm điểm O, A, D, E, K nằm trên đường tròn đường kính OA. Suy ra $\widehat{DEK} = \widehat{DAK}$, mà $\widehat{DAK} = \widehat{MBK}$ (do $AD \parallel BM$), nên $\widehat{MBK} = \widehat{MEK}$. Vậy tứ giác $BMKE$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi F là giao điểm của DE và AC. Khi đó tứ giác $OHFK$ nội tiếp đường tròn đường kính OF. Suy ra

$$AF \cdot AK = AH \cdot AO = AE^2 = AB \cdot AC,$$

hay $AF = \dfrac{AB \cdot AC}{AK}$, do đó F là điểm cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK (cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OHFK$) chạy trên đường trung trực của đoạn thẳng FK.

Câu 12. Trong mặt phẳng cho 2018 điểm phân biệt $A_1, A_2, \ldots, A_{2018}$ bất kì nằm trên đường tròn $(O;1)$. Chứng minh rằng luôn tìm được điểm M nằm trên đường tròn $(O;1)$ thỏa mãn

$$MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_{2018} > 2018.$$

Lời giải.

Giả sử không tồn tại điểm nao trên đường tròn $(O;1)$ thỏa mãn bài toán. Khi đó, lấy điểm X bất kì trên đường tròn $(O;1)$, ta đều có

$$XA_1 + XA_2 + XA_3 + \cdots + XA_{2018} \leq 2018. \quad (1)$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Do có tối đa 2018 đường kình đi qua các điểm A_1, A_2, $\ldots$, A_{2018} nên ta có thể chọn một đường kính MN sao cho $M, N \neq A_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2018$. Khi đó

$$\begin{aligned} MA_1 + NA_1 > MN = 2,\\ MA_2 + NA_2 > MN = 2,\\ \ldots,\\ MA_{2018} + NA_{2018} > MN = 2. \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$\left(\sum_{n=1}^{2018} MA_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{2018} NA_n\right) > 2 \cdot 2018.$$

Tuy nhiên theo (1) thì

$$\left(\sum_{n=1}^{2018} MA_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{2018} NA_n\right) \leq 2 \cdot 2018.$$

Ta gặp mâu thuẫn. Vậy tồn tại điểm M thỏa mãn bài toán.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 17

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH, TỈNH PHÚ YÊN, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức

$$P=\left[\frac{2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{ab}+1}+\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}\right)}{2\sqrt{ab}-1}-1\right]:\left[\frac{2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{ab}+1}-\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}\right)}{2\sqrt{ab}-1}+1\right].$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P biết $2\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$.

Lời giải.

a) Điều kiện $a\geq 0, b\geq 0, ab\neq \dfrac{1}{4}$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{ab}+1}+\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}\right)}{2\sqrt{ab}-1}-1 &= \frac{2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{ab}+1}+\frac{2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{ab}-1}\\ &= (2\sqrt{a}+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{ab}+1}+\frac{1}{2\sqrt{ab}-1}\right)\\ &= \frac{4\sqrt{ab}\,(2\sqrt{a}+1)}{4ab-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{ab}+1}-\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}\right)}{2\sqrt{ab}-1}+1 &= \frac{2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{ab}+1}-\frac{2\sqrt{a}+1}{2\sqrt{ab}-1}\\ &= (2\sqrt{a}+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{ab}+1}-\frac{1}{2\sqrt{ab}-1}\right)\\ &= \frac{-2\,(2\sqrt{a}+1)}{4ab-1}.\end{aligned}$$

Do đó

$$P=\frac{4\sqrt{ab}\,(2\sqrt{a}+1)}{4ab-1}\times\frac{4ab-1}{-2\,(2\sqrt{a}+1)}=-2\sqrt{ab}.$$

b) Ta có $\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-8\sqrt{ab}\geq 0$

Hay $-2\sqrt{ab}\geq -\dfrac{1}{4}\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=-\dfrac{1}{4}$.

Dấu ' ' = ' ' xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2\sqrt{a}+\sqrt{b}=1\\ 2\sqrt{a}=\sqrt{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{16}\\ b=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Vậy $\min P = -\dfrac{1}{4}$ khi và chỉ khi $a = \dfrac{1}{16}, b = \dfrac{1}{4}$.

Câu 2. Giải các phương trình, hệ phương trình

a) $\dfrac{3x}{x^2+x+1} + \dfrac{3x}{x^2-x+1} = 4$;

b) $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ (x+y)^3 + x^2 + y^2 = x + y - 2xy + 1. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\dfrac{3x}{x^2+x+1} + \dfrac{3x}{x^2-x+1} = 4.$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm, nên ta chia cả tử và mẫu mỗi phân thức cho x ta được

$$\frac{3}{x+\dfrac{1}{x}+1} + \frac{3}{x+\dfrac{1}{x}-1} = 4.$$

Đặt $y = x + \dfrac{1}{x}$, $|y| \geq 2$.

Phương trình trở thành

$$\frac{3}{y+1} + \frac{3}{y-1} = 4 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -\dfrac{1}{2} \text{(loại.)} \end{array}\right.$$

Với $y = 2$, ta có $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ (x+y)^3 + x^2 + y^2 = x + y - 2xy + 1. \end{cases}$

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5 \\ (x+y)^3 + (x+y)^2 - (x+y) - 1 = 0. \end{cases}$

Đặt $S = x + y, P = xy$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 5 \qquad (1) \\ S^3 + S^2 - S - 1 = 0 \qquad (2). \end{cases}$$

Từ $(2) \Leftrightarrow (S-1)(S+1)^2 = 0 \Leftrightarrow S = \pm 1$.

Thế $S = \pm 1$ vào (1) ta được $P = -2$.

Với $S = 1, P = -2$ ta có phương trình $X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -1 \\ X = 2. \end{array}\right.$

Ta thu được các nghiệm $(-1; 2), (2; -1)$.

Với $S = -1, P = -2$ ta có phương trình $X^2 + X - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = -2. \end{array}\right.$

Ta thu được các nghiệm $(1; -2), (-2; 1)$.

Vậy các nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 2), (2; -1), (1; -2), (-2; 1)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

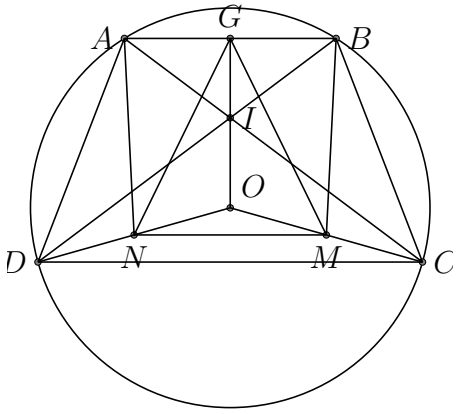
Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ sao cho $AD = BC = R$. Gọi I là giao điểm hai đường chéo AC và BD, G là trung điểm cạnh AB.

a) Chứng minh ba điểm O, I, G thẳng hàng.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OC, OD. Chứng minh tam giác CGM là tam giác đều.

Lời giải.

a) Ta có $ABCD$ là hình thang cân (vì $AD = BC$), suy ra trung điểm G của AB và giao điểm I nằm trên trục đối xứng của hình thang.
Mặt khác $OC = OD$ nên O nằm trên đường trung trực đoạn thẳng CD.
Từ đó suy ra I, O, G nằm trên trục hình thang, hay O, I, G thẳng hàng.



a) Tam giác OAD có ba cạnh bằng R nên đều, suy ra $AN \perp OD$ và $\widehat{DAN} = 30^\circ$.
Tương tự, ΔOBC đều, $BM \perp OC$ và $\widehat{CBM} = 30^\circ$.
Xét ΔGAN và ΔGBN có:
$GA = GB$;
$AN = BM$ (vì $\Delta OAD = \Delta OBC$);
$\widehat{GAN} = \widehat{GAD} - 30^\circ = \widehat{GBC} - 30^\circ = \widehat{GBM}$;
suy ra $\Delta GAN = \Delta GBM$ (c.g.c) $\Rightarrow GN = GM$, hay GMN là tam giác cân (1).
Vì $\widehat{AGO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$ nên $AGON$ nội tiếp, suy ra $\widehat{OGN} = \widehat{OAN} = 30^\circ$.
Tương tự $\widehat{OGM} = 30^\circ$, do đó $\widehat{MGN} = 60^\circ$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra MGN là tam giác đều.

Câu 4. Cho các số thực x, y, z khác 0, đôi một khác nhau và thỏa điều kiện

$$x^2 - xy = y^2 - yz = z^2 - zx = a, \quad (a \in \mathbb{R}).$$

a) Chứng minh rằng $a \neq 0$, từ đó suy ra $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} = -3$.

Lời giải.

a) Ta có $a = x(x-y) = y(y-z) = z(z-x)$ (1).
Do x, y, z khác 0, đôi một khác nhau suy ra $a \neq 0$.
Từ (1) ta có $\dfrac{a}{x} = x-y; \dfrac{a}{y} = y-z; \dfrac{a}{z} = z-x$.
Suy ra $a\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = x-y+y-z+z-x = 0$. Mà $a \neq 0$ nên $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 0$.

b) Từ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 0$ suy ra $xy+yz+zx = 0 \Leftrightarrow xy = -yz-zx$ (2).
Vì thế

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} = \frac{x^2y+y^2z+z^2x}{xyz} = \frac{-x(yz+zx)+y^2z+z^2x}{xyz} = \frac{-xyz-z\left(x^2-y^2-zx\right)}{xyz} \quad (3).$$

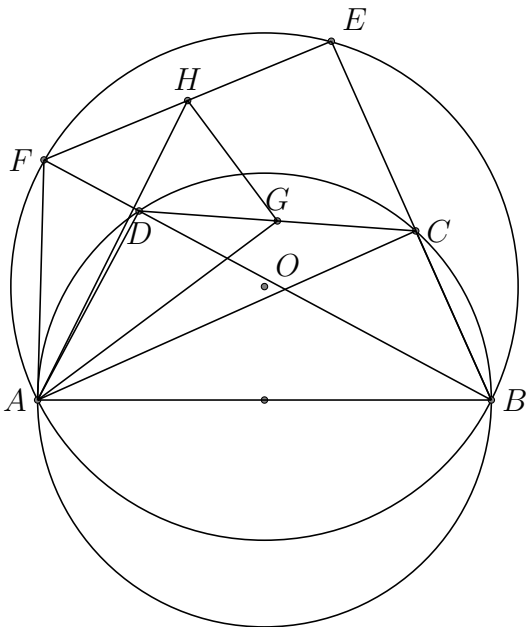
Theo giả thiết $x^2-xy = y^2-yz \to x^2-y^2 = xy-yz$ (4).
Kết hợp (2), (3), (4): $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x} = \dfrac{-xyz-z\left(xy--yz-zx\right)}{xyz} = -3$.

Câu 5. Cho đường tròn $(O;R)$, dây $AB < 2R$. Vẽ đường tròn đường kính AB. Trên cung AB (phần nằm trong đường tròn (O)) lấy hai điểm C, D sao cho C thuộc cung BD. Tia đối của các tia CB, DB cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại E, F. Gọi G, H lần lượt là trung điểm của CD, EF.

a) Chứng minh rằng $AC \cdot AF = AD \cdot AE$.

b) Tính số đo góc $\widehat{AGH}$.

Lời giải.



a) Ta có $ABCD$ và $ABEF$ nội tiếp nên
$\widehat{AEF} = \widehat{ABF} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ và
$\widehat{AFE} = 180^\circ - \widehat{ABE} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.
Suy ra

$$\Delta AFE \sim \Delta ADC(g.g) \quad (*)$$

nên $\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AE}{AC}$ hay $AC \cdot AF = AD \cdot AE$.

b) Ta có H, G lần lượt là trung điểm của EF, CD và vì $\Delta AFE \sim \Delta ADC$ nên $\Delta AFH \sim \Delta ADG$.

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AH}{AG} \Leftrightarrow \dfrac{AF}{AH} = \dfrac{AD}{AG}$ và $\widehat{FAH} = \widehat{DAG} \Leftrightarrow \widehat{FAD} = \widehat{HAG}$.
Suy ra $\Delta FAD \sim \Delta HAG$. Từ đó $\widehat{AGH} = \widehat{ADF} = 90^\circ$.

Câu 6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(2+9xyz)\geq 21.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 21\\
\Leftrightarrow\ &(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9\left(xy+yz+zx\right)\geq 21\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+9\left(xy+yz+zx\right)\geq 18\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{(z+y)^2}{zy}+\frac{(x+z)^2}{xz}+9\left(xy+yz+zx\right)\geq 24 \qquad (1).
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{(x+y)^2}{xy}+9xy\geq 2\sqrt{\frac{(x+y)^2}{xy}\cdot 9xy}=6(x+y) \qquad (2).$$

$$\frac{(z+y)^2}{zy}+9yz\geq 2\sqrt{\frac{(z+y)^2}{zy}\cdot 9yz}=6(z+y) \qquad (3).$$

$$\frac{(z+x)^2}{zx}+9xz\geq 2\sqrt{\frac{(z+x)^2}{zx}\cdot 9xz}=6(z+x) \qquad (4).$$

Cộng (2), (3) và (4) vế theo vế ta được

$$\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{(z+y)^2}{zy}+\frac{(x+z)^2}{xz}+9\left(xy+yz+zx\right)\geq 12(x+y+z)=24.$$

Vậy (1) đúng. Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}\dfrac{(x+y)^2}{xy}=9xy\\ \dfrac{(z+y)^2}{zy}=9yz\\ \dfrac{(z+x)^2}{zx}=9zx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=3\\ \dfrac{z+y}{zy}=3\\ \dfrac{x+z}{xz}=3\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 18

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, TỈNH ĐỒNG NAI, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải phương trình $x^4 - 22x^2 + 25 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2,\ t \geq 0$, ta có phương trình

$$t^2 - 22t + 25 = 0 \Leftrightarrow t = 11 \pm 4\sqrt{6} = \left(2\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)^2.$$

Từ đó, ta có các nghiệm của phương trình là $x = \pm\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$.

Câu 2. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a}+2} + \dfrac{a+\sqrt{a}}{a+3\sqrt{a}+2}\right)\dfrac{4-a}{\sqrt{a}}$ (với a là số thực dương).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm a để P đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}+1)}\right)\frac{4-a}{\sqrt{a}} \\ &= \left(\frac{a}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}\right)\frac{(2+\sqrt{a})(2-\sqrt{a})}{\sqrt{a}} \\ &= (\sqrt{a}+1)(2-\sqrt{a}) = 2 + \sqrt{a} - a. \end{aligned}$$

b) Ta có $P = \dfrac{9}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{a}\right)^2 \leq \dfrac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $a = \dfrac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ 3x^2 + 2xy - 3y^2 = 30. \end{cases}$

Lời giải.

Từ hệ, ta có

$$3x^2 + 2xy - 3y^2 = 5(x^2 - xy) \Leftrightarrow 2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3y)(2x-y) = 0 \Leftrightarrow x = 3y,\ y = 2x.$$

- $x = 3y$ thay vào hệ ta có $9y^2 - 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \to x = 3 \\ y = -\dfrac{2}{3} \to x = -2. \end{array}\right.$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

- $y = 2x$ thay vào hệ ta có $-x^2 = 6$ (vô nghiệm).

Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y) = (3;1),\ (-2;-\dfrac{2}{3})$.

Câu 4. Tìm tất cả các tham số thực m để phương trình $x^2-(m+1)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho biểu thức $P=\dfrac{x_1+x_2-1}{(x_1+x_2)^2-3x_1x_2+3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta=(m+1)^2-8m>0\Leftrightarrow(m-3)^2>8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3+2\sqrt{2}\\m<3-2\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=m+1,\ x_1x_2=2m$. Khi đó

$$P=\frac{m}{(m+1)^2-6m+3}=\frac{m}{m^2-4m+4}\Rightarrow P+\frac{1}{8}=\frac{m^2+4m+4}{(m-2)^2}=\frac{1}{8}\left(\frac{m+2}{m-2}\right)^2\geq 0.$$

Do đó $P\geq-\dfrac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi $m=-2$.

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Câu 5. Tìm cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0$.

Lời giải.

Ta xét phương trình $2x^2-(2y+3)x-4y^2-3=0.$ (1)

Ta xem phương trình (1) như là phương trình bậc hai theo ẩn x, với tham số là y. Lúc này, điều kiện cần để phương trình (1) có nghiệm nguyên là $\Delta=(6y+1)^2+32$ là số chính phương, hay có số tự nhiên a để

$$(6y+1)^2+32=a^2\Leftrightarrow(6y+1+a)(6y+1-a)=-32.$$

Do $6y+1+a\geq 6y+1-a$ và hai số $6y+1+a,\ 6y+1-a$ là hai số cùng tính chẵn lẻ, nên ta có các trường hợp sau:

- $\begin{cases}6y+1+a=16\\6y+1-a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\a=9\end{cases}$, thay vào phương trình ta được $x=-1$.
- $\begin{cases}6y+1+a=2\\6y+1-a=-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{4}{3}\\a=9\end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases}6y+1+a=8\\6y+1-a=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{6}\\a=6\end{cases}$, (loại).
- $\begin{cases}6y+1+a=4\\6y+1-a=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}\\a=6\end{cases}$, (loại).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(-1;1)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 6. Cho ba số thực dương $a,\ b,\ c$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3}{ab(a^2+b^2)}+\frac{b^3+c^3}{bc(b^2+c^2)}+\frac{c^3+a^3}{ca(c^2+a^2)}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Lời giải.

Ta có

$$2(a^3+b^3)-(a+b)(a^2+b^2)=a^3+b^3-ab^2-a^2b=(a+b)(a-b)^2\geq 0.$$

Do đó

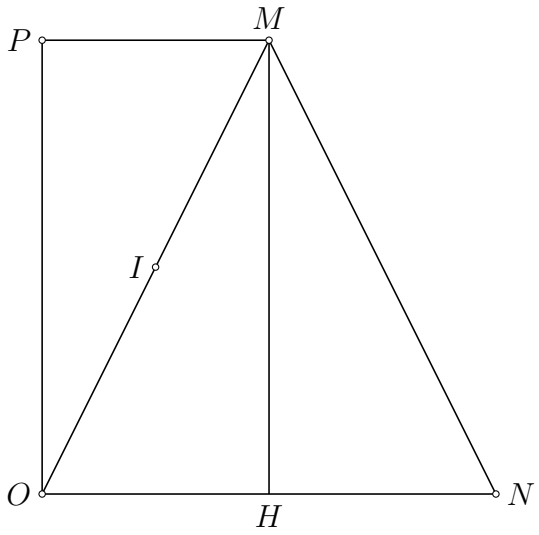
$$a^3+b^3\geq\frac{1}{2}(a+b)(a^2+b^2)\Rightarrow\frac{a^3+b^3}{ab(a^2+b^2)}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Tương tự ta cũng có $\dfrac{b^3+c^3}{bc(b^2+c^2)}\geq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$, $\dfrac{c^3+a^3}{ca(c^2+a^2)}\geq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$.

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta có đpcm.

Câu 7. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(50;\ 100)$ và $N(100;\ 0)$. Tìm số điểm nguyên nằm bên trong tam giác OMN.

Lời giải.



Gọi $H(50;0)$ là trung điểm ON. Do tam giác OMN cân tại M, nên MH là trục đối xứng của tam giác OMN. Suy ra số điểm nguyên nằm trong tam giác OMH bằng số điểm nguyên nằm trong tam giác MHN. Mặt khác, tâm I của hình chữ nhật $OHMP$ có tọa độ nguyên, nên số điểm nguyên trong hai tam giác OMP và OMH bằng nhau. Do đó, số điểm nguyên nằm trong tam giác OMN bằng số điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật $OPMH+$ số điểm nguyên nằm trong đoạn $MH-$ số điểm nguyên nằm trong đoạn OM) .

Số điểm nguyên trong hình chữ nhật $OHMP$ bằng $49\cdot 99$.

Đường thẳng OM có phương trình $y=2x$, nên số điểm nguyên trong đoạn OM bằng 49.

Số điểm nguyên trong đoạn MH bằng 99.

Từ đó, suy ra số điểm nguyên trong tam giác OMN bằng $98\cdot 49+99=4901$.

Câu 8. Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định. Biết điểm C thuộc đường tròn (O), với C khác A và B. Vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC và AD lần lượt tại E và F.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

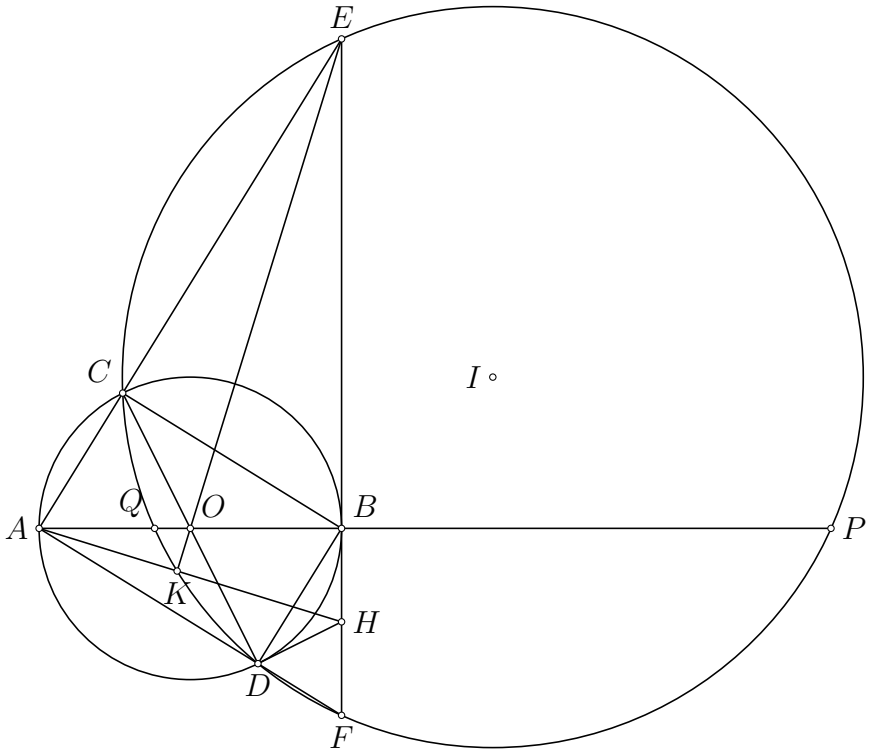
a) Chứng minh tứ giác $ECDF$ nội tiếp đường tròn.

b) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF. Chứng minh rằng OE vuông góc với AH.

c) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH. Chứng minh rằng điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ECDF$.

d) Gọi I là tâm của đường tròn (I) ngoại tiếp tứ giác $ECDF$. CHứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định và đường tròn (I) luôn đi qua hai điểm cố định khi C di động trên đường tròn (O).

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$ (góc nội tiếp chắn cung AC). Mà $\widehat{CBA} = \widehat{CEB}$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$), suy ra $\widehat{CEF} = \widehat{CDA}$. Do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

b) Ta có ΔBDF vuông tại D và H là trung điểm BF, nên ta có $HB = HD$. Mặt khác $OB = OD$, nên $OH \perp BD$, do đó $OH \perp AC$. Lại có $AO \perp EH$, nên suy ra O là trực tâm tam giác AHE, suy ra $OE \perp AH$.

c) Ta có tứ giác $EAKB$ nội tiếp (do $\widehat{AKE} = \widehat{ABE} = 90^\circ$), nên $\widehat{KAO} = \widehat{OEB}$, suy ra $\Delta AOK \backsim \Delta EOB$, nên ta có $OK \cdot OE = OA \cdot OB = OC \cdot OD \Rightarrow \dfrac{OK}{OC} = \dfrac{OD}{OE}$.
Suy ra $\Delta KOD \backsim \Delta COE \Rightarrow \widehat{ODK} = \widehat{OEC}$, hay là $\widehat{CDK} = \widehat{KEC}$. Từ đó, ta có K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$.

d) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường tròn (I) với đường thẳng AB.
Khi đó, ta có $OP \cdot OQ = OC \cdot OD = R^2$. (1)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Mặt khác $AP \cdot AQ = AC \cdot AE = AB^2 = 4R^2$. Mà

$$\begin{aligned} AP \cdot AQ &= (AO - OQ) \cdot (AO + OP) = R^2 + AO(OP - OQ) - OP \cdot OQ \\ &= R(OP - OQ) \Rightarrow OP - OQ = 4R. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có OP, OQ không đổi, hay P, Q là các điểm cố định. Do đó, I luôn nằm trên đường trung trực của đoạn PQ là một đường thẳng cố định.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 19

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TỈNH QUẢNG TRỊ, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Rút gọn biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-4}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với x là số dương khác 4.

Lời giải.

Với điều kiện x là số dương khác 4 ta có

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-4}\right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \\
&= \left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}\right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)+(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{x-\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(x-4)} \\
&= \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-4)} = \frac{2}{4-x}.
\end{aligned}$$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng $y = 2x+1$ cắt đồ thị hàm số $y = ax^2$ tại hai điểm A và B sao cho $AB = \sqrt{15}$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là

$$2x+1 = ax^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2x - 1 = 0. \tag{0.26}$$

- Nếu $a = 0$ thì phương trình (0.26) trở thành $2x+1=0$. Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng không thể cắt đồ thị hàm số $y = ax^2$ tại hai điểm.
- Với $a \neq 0$, phương trình (0.26) là một phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta' = (-1)^2 - a \cdot (-1) = a+1.$$

Đường thẳng $y = 2x+1$ cắt đồ thị hàm số $y = ax^2$ tại hai điểm A và B khi phương trình (0.26) có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Khi đó phương trình (0.26) có hai nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2}{a} \\ x_1x_2=-\dfrac{1}{a}. \end{cases}$

Gọi $A(x_1;2x_1+1)$ và $B(x_2;2x_2+1)$. Ta có

$$AB=\sqrt{15} \Leftrightarrow AB^2=15 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+(2x_1-2x_2)^2=15 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=3$$
$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=3 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{4}{a}-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{a}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện $a>-1$, $a\neq 0$ thì $a=2$, $a=-\dfrac{2}{3}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=7 \\ xy(x-y)=2. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$. Mà $xy(x-y)=2$ nên phương trình thứ nhất của hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(x-y)^3+3\cdot 2=7 \Leftrightarrow (x-y)^3=1 \Leftrightarrow x-y=1 \Leftrightarrow x=y+1.$$

Thay $x=y+1$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$(y+1)^3-y^3=7 \Leftrightarrow 3y^2+3y-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2. \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $(2;1)$ và $(-1;-2)$.

Câu 4. Giải phương trình $x^2-\sqrt{2x^2+2x-1}-x=0$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $2x^2+2x-1\geq 0$.

Ta có

$$x^2-\sqrt{2x^2+2x-1}-x=0 \Leftrightarrow x^2-x=\sqrt{2x^2+2x-1}.$$

Bình phương hai vế của phương trình trên ta được phương trình hệ quả

$$x^4-2x^3-x^2-2x+1=0. \tag{0.27}$$

- Rõ ràng $x=0$ không là nghiệm của (0.27).
- Với $x\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình (0.27) cho x^2 ta được

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2x-\frac{2}{x}-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=-1 \\ x+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1=0 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+1=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện xác định ta nhận $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x-1)^2(x^2+4)=4(y^2+6y+9)$.

Lời giải.

Ta có

$$(x-1)^2(x^2+4)=4(y^2+6y+9)\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+4)=4(y+3)^2. \tag{0.28}$$

Trường hợp 1: Nếu $x-1=0\Rightarrow x=1$ thì từ phương trình (0.28) ta có $y+3=0$ hay $y=-3$. Do đó, phương trình ban đầu có nghiệm nguyên $(x;y)=(1;-3)$.

Trường hợp 2: $x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1$.

Lúc này, vế phải của (0.28) là số chính phương nên vế trái của (0.28) cũng phải là một số chính phương. Mà $(x-1)^2$ (lưu ý, x nguyên và khác 1) là số chính phương nên x^2+4 phải là số chính phương.

Với số nguyên a ta đặt

$$x^2+4=a^2\Leftrightarrow a^2-x^2=4\Leftrightarrow (a-x)(a+x)=4.$$

Do a, x là các số nguyên nên có các trường hợp sau:

- $\begin{cases} a-x=-1 \\ a+x=-4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (không thỏa mãn a, x nguyên).
- $\begin{cases} a-x=-4 \\ a+x=-1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (không thỏa mãn a, x nguyên).
- $\begin{cases} a-x=1 \\ a+x=4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (không thỏa mãn a, x nguyên).
- $\begin{cases} a-x=4 \\ a+x=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (không thỏa mãn a, x nguyên).

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- $\begin{cases} a-x=-2 \\ a+x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ x=0 \end{cases}$ (thỏa mãn).
- $\begin{cases} a-x=2 \\ a+x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ x=0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Với $x=0$ ta được $y^2+6x+8=0$, ta tìm được $y=-2$, $y=-4$.
Vậy có ba cặp số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(0;-2)$, $(0;-4)$ và $(1;-3)$.

Câu 6. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho mỗi số $n+234$ và $n-37$ là lập phương của một số nguyên dương.

Lời giải.
Với a, b là các số nguyên ta đặt

$$\begin{cases} n+234=a^3 \\ n-37=b^3. \end{cases} \tag{0.29}$$

Suy ra $(a-b)(a^2+ab+b^2)=271$. Do 271 là số nguyên tố, a, b nguyên và $a^2+ab+b^2 \geq 0$ nên có các trường hợp sau:

- $\begin{cases} a^2+ab+b^2=271 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 3b^2+3b-270=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=10 \\ b=9 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-9 \\ b=-10. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\begin{cases} a^2+ab+b^2=1 \\ a-b=271 \end{cases}$ (hệ phương trình này vô nghiệm).

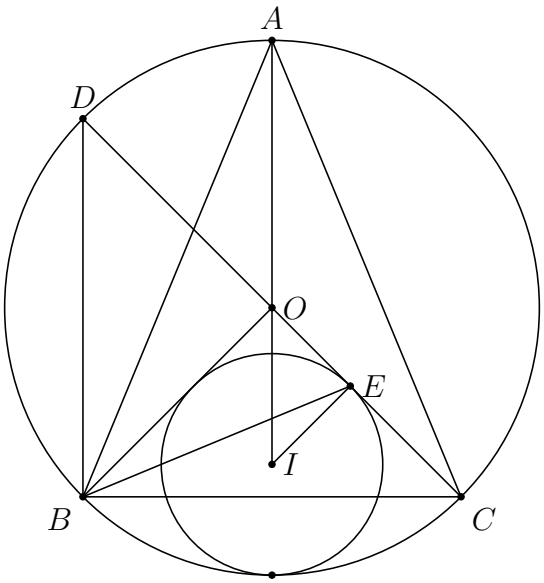
Thay a, b vào (0.29) ta tìm được $n=766$.

Câu 7. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn $(O;R)$, $\widehat{BAC}=45^\circ$. Đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với hai cạnh của góc $\widehat{BOC}$ và đường tròn (O). Đường thẳng OC cắt đường tròn (O) tại D (D khác C). Gọi E là điểm tiếp xúc của đường tròn I và OC.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, O, I thẳng hàng và tính r theo R.

b) Chứng minh rằng $\widehat{DBA}=\widehat{ABO}=\widehat{OBE}=\widehat{EBC}$.

Lời giải.



a) Ta có tam giác ABC cân tại A và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $AO \perp BC$. (0.30)

Mặt khác OB, OC tiếp xúc với (I) nên OI là tia phân giác của $\widehat{BOI}$. Mà tam giác OBC cân tại O nên $OI \perp BC$. (0.31)

Từ (0.30), (0.31) suy ra A, O, I thẳng hàng.

Tam giác OIE vuông tại E có $\widehat{IOE} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOE} = 45^\circ$.

Suy ra $r = IE = OI \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (0.32)

Vì (I) tiếp xúc trong với (O) nên $OI = R - r$. (0.33)

Từ (0.32), (0.33) suy ra

$$r = (R-r)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (2+\sqrt{2})r = R\sqrt{2} \Leftrightarrow r = \frac{R\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow r = \left(\sqrt{2}-1\right)R.$$

b) Ta có AO là phân giác của $\widehat{BAC}$.

Các tam giác AOB, AOC cân tại O nên

$$\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = \widehat{CAO} = \widehat{ACD} = 22{,}5^\circ.$$

Lại có $\widehat{DBA} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AD}$).

Như vậy $\widehat{DBA} = \widehat{ABO} = 22{,}5^\circ$.

Tam giác DBC vuông tại B có $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 45^\circ$.

Suy ra $BD = \dfrac{CD\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$.

Mặt khác $DE = DO + OE = R + IE = R + r = R + \left(\sqrt{2}-1\right)R = R\sqrt{2}$.

Vì vậy tam giác BDE cân tại D, suy ra $\widehat{DBE} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67{,}5^\circ$.

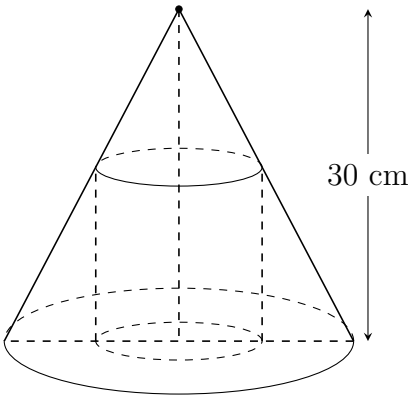
Khi đó

$$\widehat{OBE} = 67{,}5^\circ - \widehat{DBA} - \widehat{ABO} = 22{,}5^\circ.$$
$$\widehat{EBC} = 90^\circ - \widehat{DBE} = 22{,}5^\circ.$$

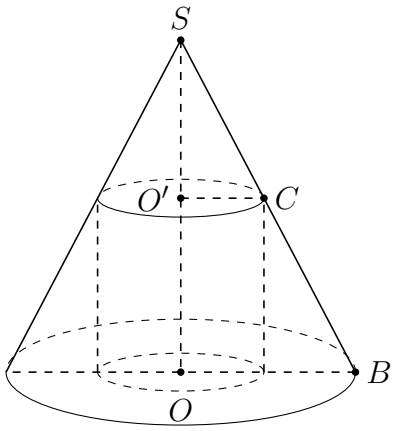
Vậy $\widehat{DBA} = \widehat{ABO} = \widehat{OBE} = \widehat{EBC} = 22{,}5^\circ$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 8.
Từ một hình nón có chiều cao bằng $h = 30$ cm, người thợ tiện ra một hình trụ như hình vẽ. Tính chiều cao của hình trụ sao cho vật liệu bị bỏ (không thuộc hình trụ) là ít nhất.



Lời giải.
Kí hiệu các điểm như hình vẽ. Đặt $OO' = x$ (với $0 < x < h$), bán kính đáy của hình nón là R, bán kính của hình trụ là r.
Ta có



$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'C}{OB} \Leftrightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow r = \frac{(h-x)R}{h}.$$

Thể tích của khối trụ là

$$V' = \pi r^2 x = \pi \cdot \frac{[(h-x)R]^2}{h^2} \cdot x.$$

Vật liệu bị bỏ (không thuộc hình trụ) là ít nhất khi thể tích của trụ là lớn nhất.
Xét biểu thức $P = x(h-x)^2$.
Ta có

$$4 \cdot \frac{h-x}{2} \cdot \frac{h-x}{2} \cdot x \le 4 \left(\frac{\frac{h-x}{2} + \frac{h-x}{2} + x}{3} \right)^3 \Leftrightarrow P \le 1000.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{h-x}{2} = x$ hay $x = \frac{h}{3} = 10$ cm.
Vậy để vật liệu bị bỏ (không thuộc hình trụ) là ít nhất khi chiều cao của trụ bằng 10 cm.

Câu 9. Cho số thực x thỏa mãn điều kiện $x^2 + (3-x)^2 \ge 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x^4 + (3-x)^4 + 6x^2(3-x)^2$.

Lời giải.
Ta có hằng đẳng thức $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
Ta có

$$\begin{aligned} Q &= x^4 + (3-x)^4 + 6x^2(3-x)^2 = (x+3-x)^4 - 4x(3-x)\left[x^2 + (3-x)^2\right] \\ &= 81 - 2\left[9 - x^2 - (3-x)^2\right]\left[x^2 + (3-x)^2\right] \\ &= 81 + 2\left[x^2 + (3-x)^2\right]^2 - 18\left[x^2 + (3-x)^2\right] \\ &= 2\left[x^2 + (3-x)^2 - 5\right]^2 + 2\left[x^2 + (3-x)^2\right] + 31. \end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Như vậy $Q \geq 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 5 + 31$ hay $Q \geq 41$.
Đẳng thức xảy ra khi

$$x^2 + (3-x)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Vậy Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng 41 khi $x = 1$, $x = 2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 20

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải phương trình $x^2+2x+2=3x\sqrt{x+1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -1$, ta có

$$x^2+2x+2=3x\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2-3x\sqrt{x+1}+2(x+1)=0.$$

Đặt $\begin{cases}u=x\\v=\sqrt{x+1}\geq 0\end{cases}$, phương trình đã cho trở thành

$$u^2-3uv+2v^2=0\Leftrightarrow (u-v)(u-2v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u-v=0\\u-2v=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\u=2v.\end{array}\right.$$

- Với $u=v$ suy ra $\sqrt{x+1}=x\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\x+1=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Với $u=2v$ suy ra $2\sqrt{x+1}=x\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\4(x+1)=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=2+2\sqrt{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=2+2\sqrt{2}$.

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác cân?

Lời giải.

Ta có số cần lập chỉ một trong hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1. a, b, c là ba cạnh tam giác đều $a=b=c>0$, có 9 số lập được.
- Trường hợp 2. a, b, c là ba cạnh tam giác cân (không đều).
  Xét $a=b\neq c$. Vì $a+b>c$ nên
  Với bộ số $(2,2,c)$ có 2 cách chọn c, lập được 2 số.
  Với bộ số $(3,3,c)$ có 4 cách chọn c, lập được 4 số.
  Với bộ số $(4,4,c)$ có 6 cách chọn c, lập được 6 số.
  Bắt đầu từ $a=b\geq 5$ trở đi thì $a+b\geq 10$ thì dù chọn c là số bất kỳ từ 1 đến 9 (không tính trường hợp trùng với a, b) thì ta đều có $a+b>c$. Chọn a, b có 5 cách chọn, chọn c có 8 cách chọn. Nên có $8\cdot 5=40$ cách chọn, lập được 40 số.
  Vì vai trò a, b, c như nhau nên ta có $(2+4+6+40)\cdot 3=156$.
  Vậy có $9+156=165$ số cần tìm.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 3.

a) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.

b) Cho ba số x, y, z khác 0 đồng thời thỏa mãn $x+y+z = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{xyz} = 4$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} > 0$. Tính giá trị biểu thức $Q = (y^{2017}+z^{2017})(z^{2019}+x^{2019})(x^{2021}+y^{2021})$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} VT &= (a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 \\ &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ &= VP. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xyz} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2(x+y+z)}{xyz} \\ &= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2. \end{aligned}$$

Mà $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 2.$ (1)

Mặt khác $x+y+z = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{x+y+z} = 2.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow (xy+yz+zx)(x+y+z) = xyz$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ y=-z \\ z=-x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2017} = -y^{2017} \\ y^{2019} = -z^{2019} \\ z^{2021} = -x^{2021} \end{array}\right. \Rightarrow Q = 0.$$

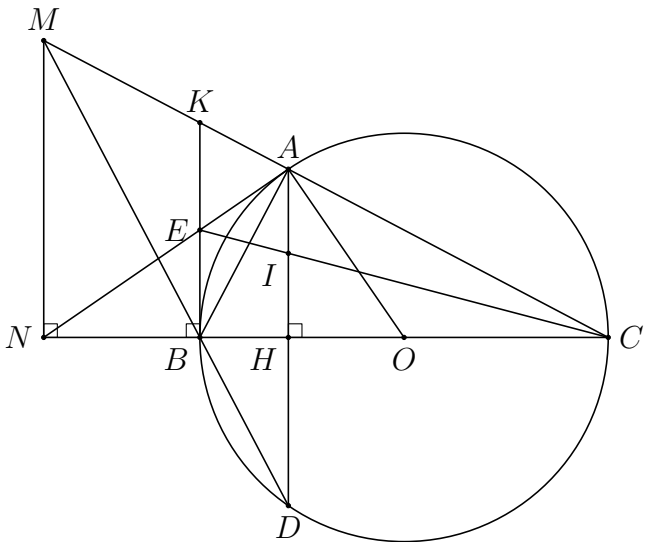
Câu 4. Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm trên đoạn thẳng BO (điểm H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường tròn (O) tại A và D. Gọi M là giao điểm của AC và BD, qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại N.

a) Chứng minh rằng $MNBA$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tính giá trị của $P = 2\left(\dfrac{BO}{AB}\right)^2 - \dfrac{OH}{BH}$.

c) Từ B kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt hai đường thẳng AC và AN lần lượt tại K và E. Chứng minh rằng đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm của đoạn thẳng AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $\widehat{BAM} = 90^\circ$. Mặt khác $\widehat{MNB} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $MNBA$ có $\widehat{BAM} + \widehat{MNB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Vậy tứ giác $MNBA$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MB.

b) Ta có tam giác ABC vuông tại A, nên $BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{AB^2}{2BO}$. Mặt khác $OH = BO - BH = BO - \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{2BO^2 - AB^2}{2BO}$ suy ra $\dfrac{OH}{BH} = \dfrac{2BO^2 - AB^2}{AB^2} = 2\left(\dfrac{BO}{AB}\right)^2 - 1$. Vậy $P = 1$.

c) Ta thấy $\widehat{MBN} = \widehat{DBC}$ (hai góc đối đỉnh); $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ (tứ giác $DBAC$ nội tiếp) suy ra $\widehat{MBN} = \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{BCA}$. (1)

Tứ giác MNBA nội tiếp nên ta có $\widehat{NMB} = \widehat{NAB}$. (2)

Tam giác OAC cân tại O suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{OAC}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{BAO} = \widehat{NAB} + \widehat{BAO} \Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{NAO}$.
Mà $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên $\widehat{NAO} = 90^\circ$, suy ra NA là tiếp tuyến của (O).
Theo tính chất của tiếp tuyến ta có $EA = EB$ và $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.
Trong tam giác vuông KAB, ta có $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} \Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{EAK}$ (phụ với hai góc bằng nhau). Suy ra tam giác KAE cân tại $E \Rightarrow AE = KE \Rightarrow EB = KE$.
Mặt khác, AH song song BK (vì cùng vuông góc với AB).
$AI \parallel KE \Rightarrow \dfrac{CI}{CE} = \dfrac{AI}{KE}$ (định lí Ta-lét).
$HI \parallel EB \Rightarrow \dfrac{CI}{CE} = \dfrac{HI}{BE}$ (định lí Ta-lét) $\Rightarrow \dfrac{AI}{KE} = \dfrac{HI}{BE}$.
Mà $KE = EB$, suy ra $AI = HI$ nên I là trung điểm của đoạn thẳng AH.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 5. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1$.

Lời giải.

Ta có $a+b+c=abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=1$.

Đặt $\dfrac{1}{a}=x$, $\dfrac{1}{b}=y$, $\dfrac{1}{c}=z$, khi đó $x, y, z>0$ và $xy+yz+zx=1$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}-\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}<1\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)-\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}>0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{z}>0. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ta lại có $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\sqrt{(1-xy)^2+(x+y)^2}=(x+y)\sqrt{1+z^2}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
(*)\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z(x+y)\sqrt{1+z^2}}{z}>0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(zx+yz)\sqrt{1+z^2}}{z}>0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(1-xy)\sqrt{1+z^2}}{z}>0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{xy\sqrt{1+z^2}}{z}>0, \forall x, y, z>0.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 6. Để tiết kiệm chi phí vận hành đồng thời đưa du khách tham quan hết 18 danh lam thắng cảnh của tính K, Công ty Du lịch lữ hành KH đã thiết lập các tuyến một chiều như sau: nếu có tuyến đi từ A đến B và từ B đến C thì không có tuyến đi từ A đến C. Hỏi có bao nhiêu cách thiết lập để đi hết 18 địa điểm trên?

Lời giải.

Gọi A là địa điểm có nhiều tuyến đường nhất (gồm cả đường xuất phát từ A và đường đi đến A). Ta chia các địa điểm còn lại thành 3 loại:

Loại 1: Các tuyến đường xuất phát từ A có $n(1)=m$ tuyến đường.

Loại 2: Các tuyến đường đi đến A có $n(2)=n$ tuyến đường.

Loại 3: Không có tuyến đi và đến từ A có $n(3)=p$ tuyến đường.

Ta có $m+n+p=17$.

Số tuyến đường liên quan đến A có $m+n$ tuyến.

Số tuyến đường không liên quan đến A không vượt quá $p(m+n)$.

Số tuyến đường liên quan loại 1 và 2 không vượt quá mn.

Vì $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, với mọi số thực a, b, c.

Do đó $ab+bc+ca \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Gọi S là tổng các tuyến đường một chiều qua 18 địa điểm trên, ta có

$$S \leq m+n+p(m+n)+mn = mn+(p+1)m+n(p+1) \leq \frac{(m+n+p+1)^2}{3} = 108.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=n=p+1=\dfrac{18}{3}=6 \Leftrightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=6 \\ p=5. \end{cases}$

Vậy có thể thiết lập tối đa 108 tuyến đường một chiều để đi qua hết 18 địa điểm đã cho.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 21

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $A=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, với $x>0;\ x\neq 1$.

Chứng minh rằng $A\geq\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}A &= \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}+\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\\ &= 2(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(2\sqrt{x}+1)\\ &= x-\sqrt{x}+1\\ &= \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4},\quad \forall x>0, x\neq 1.\end{aligned}$$

Câu 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức $y=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{8}{x-4}$.

Lời giải.

$y=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{8}{x-4}=\dfrac{9x+4}{(x+1)(x-4)}$.

Ta thấy $x+1$ và $x-4$ là hai số cách nhau 5 đơn vị, suy ra $(x+1)(x-4)$ là tích của một số chẵn và một số lẻ. Suy ra $(x-4)(x+1)$ là số chẵn.

Như vậy để $y\in\mathbb{Z}$ thì $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}9x+4=0 \text{ (loại vì } x\in\mathbb{Z})\\ |9x+4|\geq|(x+1)(x-4)|\end{array}\right.\\ 9x+4 \text{ là số chẵn.}\end{cases}$

$9x+4$ là số chẵn khi $x=2k,\ k\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}|9x+4|\geq|(x+1)(x-4)| &\Leftrightarrow \left(x^2-3x-4\right)^2-(9x+4)^2\leq 0\\ &\Leftrightarrow (x^2-12x-8)(x^2+6x)\leq 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-12x-8\leq 0\\ x^2+6x\geq 0\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x^2-12x-8\geq 0\\ x^2+6x\leq 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leq x\leq 6+2\sqrt{11}\\ -6\leq x\leq 6-2\sqrt{11}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $0\leq x\leq 12$ hoặc $-6\leq x\leq -1$.

Mặt khác $x=2k$ nên $x\in\{-6;-4;-2;0;2;4;6;8;10;12\}$.

Thử lại ta thấy $x=-6$ và $x=0$ thỏa.

Với $x=-6$ thì $y=-1$.

Với $x=0$ thì $y=-1$.

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là $(-6;-1)$; $(0;-1)$.

Câu 3. Chứng minh rằng phương trình $(ax^2+2bx+c)(bx^2+2cx+a)(cx^2+2ax+b)=0$ luôn có nghiệm với mọi số thực a, b, c.

Lời giải.

$$(ax^2+2bx+c)(bx^2+2cx+a)(cx^2+2ax+b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2+2bx+c=0 & (1)\\ bx^2+2cx+a=0 & (2)\\ cx^2+2ax+b=0 & (3). \end{cases}$$

Xét các biệt thức Δ' của ba phương trình trên $\begin{cases} \Delta'_1=b^2-ca\\ \Delta'_2=c^2-ab.\\ \Delta'_3=a^2-bc \end{cases}$

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử phương trình đề bài không có nghiệm với mọi số thực a, b, c, nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta'_1=b^2-ca<0\\ \Delta'_2=c^2-ab<0\\ \Delta'_3=a^2-bc<0 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0 \Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2<0.$$ (vô lý)

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. Trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $(d)\colon y=mx+2m$, với m là tham số. Gọi A và B lần lượt là giao điểm của (d) với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm C và D nằm về hai phía trục tung sao cho điểm C có hoành độ âm và $BD=2AC$.

Lời giải.

Tọa độ của $A(-2;0)$ và $B(0;2m)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2-mx-2m=0$.

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $C(c;mc+2m)$ và $D(d;md+2m)$ khi $\Delta>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0\\ m<-8. \end{array}\right.$

Theo đề bài, có $c<0$; $d>0$ và $c+d=m$; $cd=-2m$ (theo Vi-ét).

$$\begin{aligned} BD=2AC &\Leftrightarrow BD^2=4AC^2\\ &\Leftrightarrow d^2+(md+2m-2m)^2=4[(c+2)^2+(mc+2m)^2]\\ &\Leftrightarrow (m^2+1)d^2=4(m^2+1)(c+2)^2\\ &\Leftrightarrow d^2=4(c+2)^2\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=2c+4\\ d=-2c-4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $d=2c+4$ và $c+d=m$ thì $c=\dfrac{m-4}{3}$, $d=\dfrac{2m+4}{3}$.

  $cd=-2m \Leftrightarrow \dfrac{m-4}{3}\cdot\dfrac{2m+4}{3}=-2m \Leftrightarrow 2m^2+14m-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=-8 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

  Thử lại thấy $m=1$ thỏa.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

- Với $d=-2c-4$ và $c+d=m$ thì $c=-m-4$, $d=2m+4$.
  $cd=-2m \Leftrightarrow (-m-4)(2m+4)=-2m \Leftrightarrow 2m^2+10m+16=0$ (vô nghiệm).

Vậy $m=1$ thỏa đề bài.

Câu 5. Giải phương trình $5x(x+1)=3\left(x\sqrt{2x^2+1}+4\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}5x(x+1)=3\left(x\sqrt{2x^2+1}+4\right) &\Leftrightarrow 5x^2+5x-12-3x\sqrt{2x^2+1}=0\\ &\Leftrightarrow 10x^2+10x-24-6x\sqrt{2x^2+1}=0\\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2+1}-3x)^2=(x-5)^2\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+1}=4x-5 \quad (1)\\ \sqrt{2x^2+1}=2x+5 \quad (2).\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+1=16x^2-40x+25\\ 4x-5\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{6}{7}\end{array}\right.\\ x\geq \dfrac{5}{4}\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+1=4x^2+20x+25\\ 2x+5\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-5-\sqrt{13}\\ x=-5+\sqrt{13}\end{array}\right.\\ x\geq -\dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=-5+\sqrt{13}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$; $x=-5+\sqrt{13}$.

Câu 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4\sqrt{x+2}+2\sqrt{3(x+4)}=3y(y-1)+10\\ (x+2)^3+x=y(y^2+1)-2.\end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases}4\sqrt{x+2}+2\sqrt{3(x+4)}=3y(y-1)+10 \quad (1)\\ (x+2)^3+x=y(y^2+1)-2 \quad (2).\end{cases}$$

Điều kiện $x\geq -2$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (x+2)^3-y^3+x+2-y=0\\ &\Leftrightarrow (x+2-y)\left[(x+2)^2+(x+2)y+y^2\right]+x+2-y=0\\ &\Leftrightarrow (x+2-y)\left[(x+2+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2+1\right]=0\\ &\Leftrightarrow x+2-y=0\\ &\Leftrightarrow x+2=y.\end{aligned}$$

Thay $x+2=y$ vào (1) ta được $4\sqrt{y}+2\sqrt{3(y+2)}=3y^2-3y+10 \quad (3)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\begin{cases}4\sqrt{y}\leq 2(y+1)\\ 2\sqrt{3(y+2)}\leq y+5\end{cases} \Rightarrow \text{VT}\leq 3y+7.$

Mặt khác $3(y-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow 3y^2-3y+10\geq 3y+7$.

Vậy (3) xảy ra khi và chỉ khi $y=1$, suy ra $x=-1$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O có $\widehat{BAC}$ tù, $AB < AC$ và H là trực tâm. Các đường thẳng AH, BH, CH lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại các điểm D, E, F.

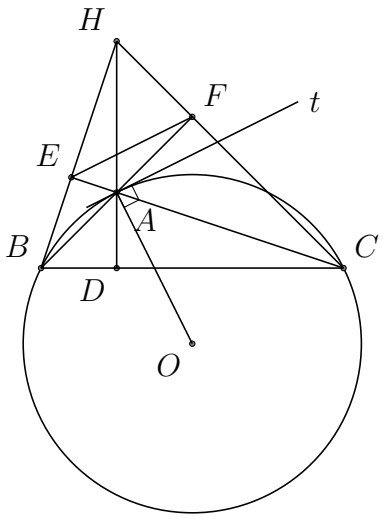
a) Chứng minh rằng AO vuông góc với EF.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO với đường tròn ngoại tiếp tam giác OHD. Chứng minh rằng EF là đường trung trực của đoạn AK.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng AO vuông góc với EF.

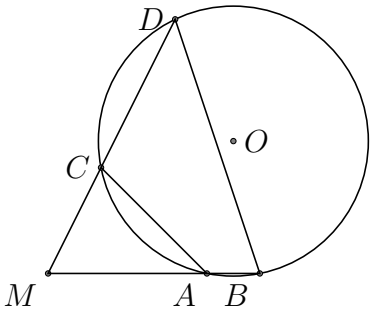
Vẽ At là tiếp tuyến tại A của (O).
Có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$, suy ra $BEFC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau).
$\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{CBF}$.
Mà $\widehat{CBF} = \widehat{CAt}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến) nên $\widehat{CEF} = \widehat{CAt}$.
Suy ra $EF \parallel At$ (2 góc ở vị trí đồng vị).
Mặt khác $OA \perp At$ (At là tiếp tuyến) nên $AO \perp EF$.



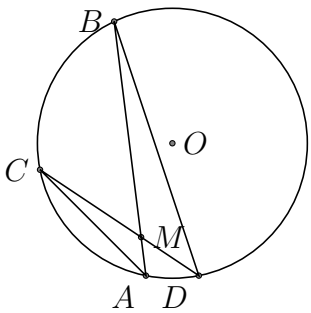
b) Chứng minh rằng EF là đường trung trực của đoạn AK.

Bài toán phụ. Cho điểm M không thuộc đường tròn (O). Qua M kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt (O) tại A, B và C, D. Chứng minh $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ (đẳng thức này được gọi là phương tích của điểm M đối với (O)).

TH 1. M nằm bên ngoài (O).
Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ ta có
$\begin{cases} \widehat{MAC} = \widehat{MDB}\ (ABDC \text{ nội tiếp}) \\ \widehat{M} \text{ chung} \end{cases}$
$\Rightarrow \triangle MAC \backsim \triangle MDB$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD.$



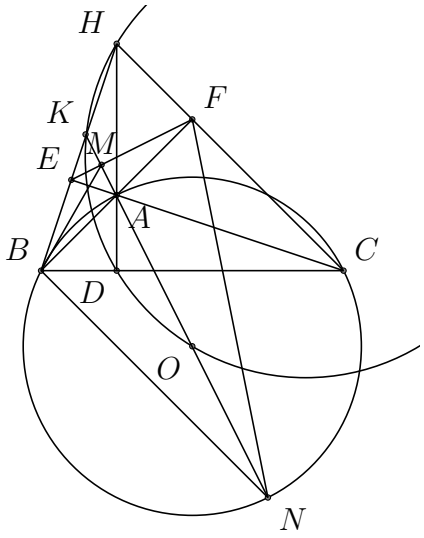
TH 2. M nằm bên trong (O).
Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ ta có
$\begin{cases} \widehat{MAC} = \widehat{MDB}\ (ABDC \text{ nội tiếp}) \\ \widehat{AMC} = \widehat{DMB}\ (\text{hai góc đối đỉnh}) \end{cases}$
$\Rightarrow \triangle MAC \backsim \triangle MDB$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD.$



Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Trở lại bài toán.



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của OA với EF và (O) (N khác A).

Có $AK \cdot AO = AD \cdot AH$ (phương tích của điểm A đối với (OHD)). (1)

Có $\widehat{BDH} = \widehat{BFH} = 90^\circ$, suy ra $BDFH$ nội tiếp đường tròn đường kính BH (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau).

$\Rightarrow AD \cdot AH = AF \cdot AB$ (phương tích của điểm A đối với $(BDFH)$). (2)

(O) có $\widehat{ABN}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{ABN} = 90^\circ$.

Có $\widehat{NBF} = \widehat{NMF} = 90^\circ$, suy ra $BMFN$ nội tiếp đường tròn đường kính FN (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau).

$\Rightarrow AF \cdot AB = AN \cdot AM$ (phương tích của điểm A đối với $(BMFN)$). (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $AK \cdot AO = AN \cdot AM$.

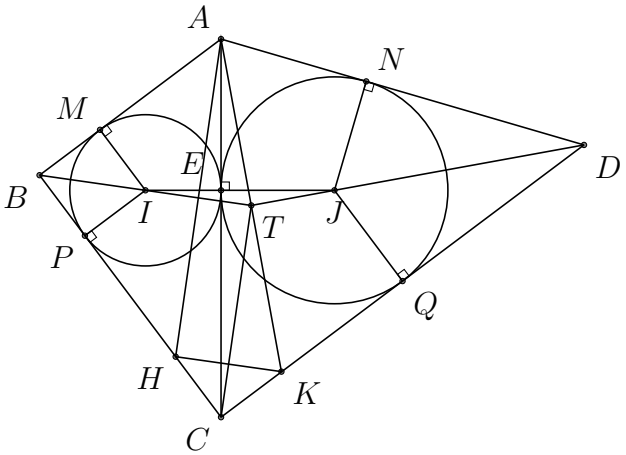
$\Rightarrow AK = \dfrac{AN \cdot AM}{AO} = 2AM \Rightarrow MK = AM$.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AK.

Mà $EF \perp AK$ tại M nên EF là đường trung trực của đoạn AK.

Câu 8. Cho hai đường tròn $(I;r)$ và $(J;R)$ tiếp xúc ngoài nhau tại E (với $r < R$) và đường thẳng d là tiếp tuyến chung tại E của hai đường tròn đó. Trên d lấy hai điểm A và C sao cho E nằm giữa A, C và $R < EA < EC$. Các tiếp tuyến thứ hai của đường tròn (I) vẽ từ A và C cắt nhau tại B, các tiếp tuyến thứ hai của đường tròn (J) vẽ từ A và C cắt nhau tại D. Chứng minh rằng tồn tại một điểm cách đều bốn đường thẳng AB, BC, CD, DA.

Lời giải.



Gọi M, P lần lượt là tiếp điểm của (I) với AB và BC.

Gọi N, Q lần lượt là tiếp điểm của (J) với AD và CD.

Lấy H thuộc BC sao cho $BH = BA$; K thuộc CD sao cho $DK = DA$.

Do tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau nên ta có

$$\begin{cases} AM = AE = AN \\ BM = BP \\ CP = CE = CQ \\ DQ = DN. \end{cases}$$

$\Rightarrow AB + CD = BC + DA \Rightarrow BC - AB = CD - DA \Rightarrow BC - BH = CD - DK \Rightarrow CH = CK$.

$\Rightarrow \triangle CHK$ cân tại C.

Gọi T là giao điểm của BI và DJ.

Có BT là phân giác trong của $\triangle ABH$ cân tại B (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). (1)

$\Rightarrow BT$ là trung trực của AH. (*)
Có DT là phân giác trong của $\triangle ADK$ cân tại D (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). (2)
$\Rightarrow DT$ là trung trực của AK. (**)
Từ (*) và (**), ta có T là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHK$.
$\Rightarrow TH = TK$.
Mà $CH = CK$ (cmt) nên CT là trung trực của HK.
Mặt khác $\triangle CHK$ cân tại C nên CT là phân giác trong của $\triangle CHK$. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta có T cách đều AB, BC, CD, DA. (đpcm)

Câu 9. Cho x, y là các số tự nhiên thỏa mãn $3y^2 + 1 = 4x^2$. Chứng minh rằng x là tổng bình phương của hai số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải.
Ta có

$$3y^2 = (2x - 1)(2x + 1).$$

Do $2x - 1$ và $2x + 1$ nguyên tố cùng nhau nên $2x - 1 = 3m^2$, $2x + 1 = n^2$ hoặc $2x - 1 = m^2$, $2x + 1 = 3n^2$ với m, $n \in \mathbb{N}$.
Trường hợp thứ nhất loại do $n^2 = 3m^2 + 2 \equiv 2 \pmod 3$.
Trường hợp thứ hai, do m lẻ nên ta đặt $m = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$. Suy ra $2x - 1 = (2k + 1)^2$. Vậy ta có $x = k^2 + (k + 1)^2$ (đpcm).

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 22

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho $x \neq 1$, hãy rút gọn biểu thức sau

$$A = \frac{5x+1}{x^3-1} - \frac{1-2x}{x^2+x+1} - \frac{2}{1-x}.$$

b) Tìm cặp số thực $(x;y)$ với y lớn nhất thỏa mãn điều kiện $x^2+5y^2+2y-4xy-3=0$.

c) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa điều kiện $\begin{cases} a^2+a=b^2 \\ b^2+b=c^2 \\ c^2+c=a^2. \end{cases}$ Chứng minh rằng $(a-b)(b-c)(c-a)=1$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{5x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{(5x+1)+(2x-1)(x-1)+2(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{4(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{4}{x-1}. \end{aligned}$$

b) Phương trình viết lại thành $x^2-4xy+5y^2+2y-3=0$. Phương trình có nghiệm khi $\Delta' = -y^2-2y+3 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1$.
Vì y lớn nhất nên chọn $y=1$, thay vào phương trình ta được $x=2$. Vậy $(2;1)$ là cặp nghiệm cần tìm.

c) Cộng theo vế ta được $a+b+c=0$. Cộng đẳng thức thứ nhất và thứ hai ta được

$$\begin{aligned} a+b &= c^2-a^2 = (c-a)(c+a) \\ -c &= (-b)(c+a) \end{aligned}$$

Tương tự ta thu được

$$-b = (-a)(b-c)$$
$$-a = (-c)(a-b)$$

Nhân các đẳng thức trên và thu gọn ta được $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Câu 2.

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 3.

b) Một số nguyên dương được gọi là *số may mắn* nếu số đó bằng 99 lần tổng tất cả các chữ số của nó. Tìm *số may mắn* đó.

Lời giải.

a) Giả sử tồn tại số tự nhiên n để $n^3 - 9n + 27$ chia hết cho 81. Suy ra $n^3 - 9n + 27$ chia hết cho 3, hay $n = 3k$.
Khi đó $n^3 - 9n + 27 = 27(k^3 - k + 1)$, suy ra $k^3 - k + 1 \vdots 3$. Nhưng $k^3 - k + 1 = (k-1)k(k+1) + 1$ không chia hết cho 3 với mọi k.
Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

b) Giả sử số cần tìm là $\overline{a_1 a_2 \cdots a_m}$. Theo giả thiết $\overline{a_1 a_2 \cdots a_m} = 99(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$. Ta xét các trường hợp sau:

- $m \le 3$ kiểm tra trực tiếp không có số may mắn nào.
- $m \ge 5$ Ta luôn có $\begin{cases} \overline{a_1 a_2 \cdots a_m} \ge 10^{m-1} \\ 99(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \le 99.9.m \end{cases}$ suy ra $10^{m-1} \le 891m$.
  Do đó khi $m \ge 5$ thì bất đẳng thức trên không còn đúng.
- $m = 4$ Khi đó, $1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 = 99(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ hay $901a_1 + a_2 = 89a_3 + 98a_4$.
  Do $89a_3 + 98a_4 \le (89+98) \times 9 = 1683$ nên $a_1 = 1$. Khi đó $a_3 = 10 - a_4 + \dfrac{11 + a_2 - 9a_4}{89}$ suy ra $11 + a_2 - 9a_4 = 0$ hay $a_2 = 7, a_4 = 2, a_3 = 8 v a_1 = 1$. Vậy số cần tìm là 1782.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-3x} = x + 2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y + xy = 2 \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện $-1 \le x \le \frac{1}{3}$
Phương trình lại

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x+1}-1)+(\sqrt{1-3x}-1)=x \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{3x}{\sqrt{1-3x}+1}=x \\ \Leftrightarrow \quad & x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{3}{\sqrt{1-3x}+1}\right)=0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{1-3x}+1}=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Mà phương trình $1-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{3}{\sqrt{1-3x}+1}=0$ vô nghiệm, nên nghiệm của phương trình ban đầu là $x=0$.

b) Hệ viết lại thành $\begin{cases}(x-2y)+xy=0\\(x-2y)^2+4xy=4.\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}(x-2y)=a\\xy=b\end{cases}$ khi đó ta có hệ $\begin{cases}a+b=2\\a^2+4b=4.\end{cases}$ Giải hệ phương trình ta được

$\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=2\\xy=0\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=2\\y=0.\end{cases}$

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC (M khác B và C), N là điểm trên cạnh CD sao cho $BM = CN$. Gọi H, I là giao điểm của AM với BN, DC.

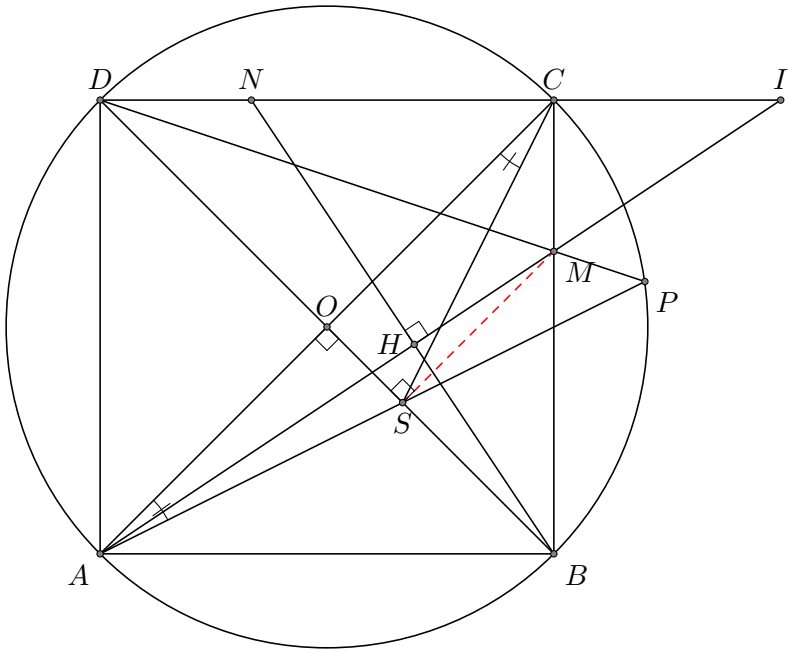
a) Chứng minh rằng tứ giác $AHND$ nội tiếp, MN vuông góc với BI.

b) Tìm vị trí điểm M để độ dài đoạn MN ngắn nhất.

c) Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại P (P khác D). Gọi S là giao điểm của AP và BD. Chứng minh SM song song AC.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có $BM = CN, AB = BC, \angle ABM = \angle BCN = 90^0$ suy ra $\triangle ABM = \triangle BCN$.
Mà $\angle BAM + \angle BMA = 90^0$ suy ra $\angle CBN + \angle BMA = 90^0$ hay $\angle BHM = 90^0$. Do đó tứ giác $AHND$ nội tiếp.
Xét tam giác BNI có BC, HI là hai đường cao của tam giác nên M là trực tâm, hay NM là đường cao suy ra $MN \perp BI$.

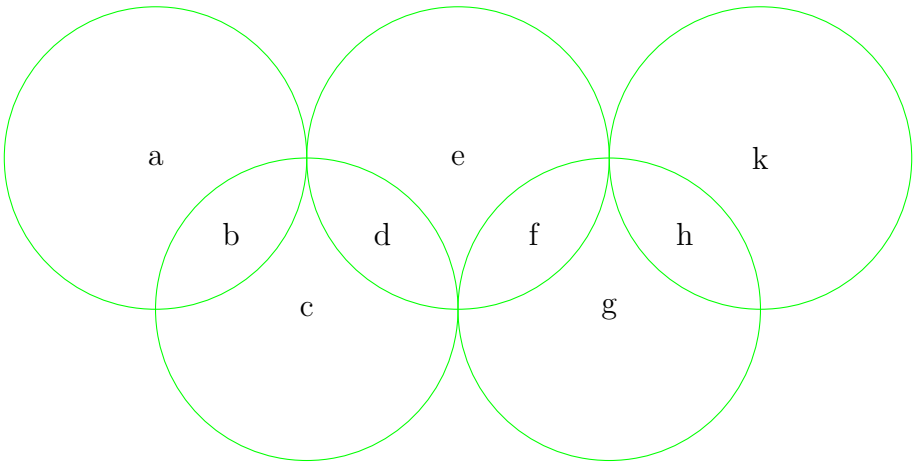
b) Đặt $AB = a, BM = x$ suy ra $MC = a - x$. Khi đó $MN^2 = CM^2 + CN^2 = (a-x)^2 + a^2 = 2(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{2}$. Như vậy MN nhỏ nhất khi $x = \frac{a}{2}$ hay M là trung điểm BC.

c) Ta có $\angle DMC = 90^0 - \angle PDC$ mà $\angle PDC = \angle PAC$ (cùng chắn cung PC) nên $\angle DMC = 90^0 - \angle PAC$.
Do BD là trung trực của AC nên $\angle SAC = \angle SCA$ suy ra $\angle DMC = 90^0 - \angle SCA = \angle DSC$. Suy ra tứ giác $CMSD$ nội tiếp, mà $\angle MCD = 90^0$ nên $\angle MSD = 90^0$, hay MS song song AC.

Câu 5. Trên biểu tượng Olympic có 9 miền được ký hiệu $a, b, c, \cdots, k$ (*như hình minh họa*). Người ta điền 9 số $1, 2, 3, \cdots, 9$ vào 9 miền trên sao cho mỗi miền được điền bởi một số, miền khác nhau được điền bởi số khác nhau và tổng các số trong cùng một hình tròn đều bằng 14.

a) Tính tổng các số trong các miền b, d, f và h.

b) Xác định cách điền thỏa yêu cầu trên.



Lời giải.

a) Gọi $a', b', \ldots, k'$ lần lượt là các số trong các miền $a, b, \ldots, k$. Mỗi hình tròn có tổng là 14 nên 5 hình tròn là $5 \times 14 = 70$. Khi cộng như thế các số ở các miền b, d, f và h được cộng hai lần nên $b' + d' + f' + h' = 70 - (1 + 2 + \cdots + 9) = 25$.

b) Theo giả thiết $a' + b' = h' + k' = 14$ nên ta chỉ có hai cặp thỏa $(5; 9)$ và $(6; 8)$. Do đó $b' + h'$ chỉ có thể nhận các giá trị là $11, 13, 15, 17$.

- Nếu $b' + h' = 11$ thì $d' + f' = 14$ suy ra $(d'; f')$ là các cặp sau $(6; 8), (5; 9)$ điều này không thể.
- Nếu $b' + h' = 13$ thì $d' + f' = 12$ suy ra $(d'; f')$ là các cặp sau $(4; 8), (5; 7)$ điều này không thể.
- Nếu $b' + h' = 17$ thì $d' + f' = 8$ suy ra $(d'; f')$ là các cặp sau $(1; 7), (2; 6)$ điều này không thể.
- Nếu $b' + h' = 15$ thì $d' + f' = 10$ không mất tính tổng quát ta giả sử $b' = 9, h' = 6$ khi đó $a' = 5, k' = 8, d' = 3, f' = 7, c' = 2, e' = 4, g' = 1$ (hoặc có thể đối xứng lại).

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 23

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TỈNH NAM ĐỊNH, VÒNG 1, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{2x+3}=x$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 2x+3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

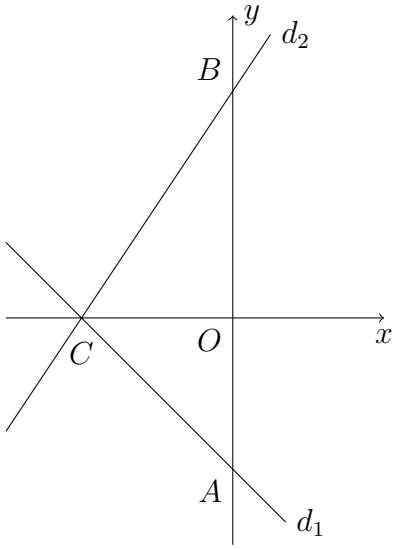
Vậy nghiệm phương trình là $x=3$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $y=-x-2$ (d_1) và $y=\dfrac{3}{2}x+3$ (d_2) . Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục Oy và C là giao điểm của (d_1) với (d_2) . Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có

- $A=d_1\cap Oy\Rightarrow x=0\Rightarrow y=-2\Rightarrow A(0;-2)$.
- $B=d_2\cap Oy\Rightarrow x=0\Rightarrow y=3\Rightarrow B(0;3)$.
- $C=d_1\cap d_2\Rightarrow -x-2=\dfrac{3}{2}x+3\Leftrightarrow x=-2$ $\Rightarrow y=0\Rightarrow C(-2;0)$.



Lại có $CO\perp AB$ và $OC=2$, $AB=OA+OB=2+3=5$.
Do đó diện tích $\triangle ABC$ là

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot AB=5.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB=8$ cm, $BC=17$ cm, $CA=15$ cm. Tính chu vi đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

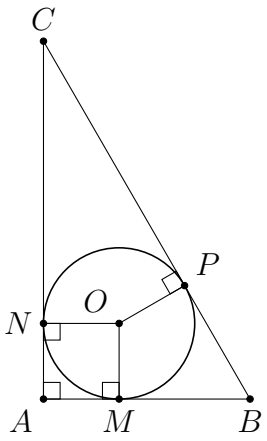
Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Ta có $8^2+15^2=17^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A.
Gọi M, N, P là tiếp điểm của AB, AC, BC với đường tròn (O,r) nội tiếp $\triangle ABC$.
Khi đó $AMON$ là hình vuông và $BM=BP$, $CN=CP$. Do đó

$$\begin{aligned} & AB+AC=2r+BM+CN=2r+BC \\ \Rightarrow\quad & r=\frac{AB+AC-BC}{2}=3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

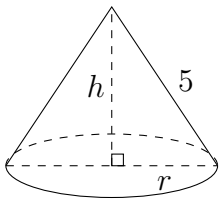
Chu vi (O,r) là $2\pi r=6\pi$ cm.



Câu 4. Một hình nón có chu vi đường tròn đáy là 6π cm, độ dài đường sinh là 5 cm. Tính thể tích hình nón đó.

Lời giải.

Bán kính đường tròn đáy của hình nón là $r=\dfrac{6\pi}{2\pi}=3$ cm.
Chiều cao hình nón là $h=\sqrt{5^2-3^2}=4$ cm.
Thể tích hình nón là $V=\dfrac{1}{3}\cdot 4\cdot \pi\cdot 3^2=12\pi$ cm^2.



Câu 5. Cho biểu thức $P=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$ (với $x>0;x\neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh rằng với mọi $x>0$, $x\neq 1$ thì $P>4$.

Lời giải.

a) Với $x>0;x\neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x-1}{\sqrt{x}}:\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b) Với $x>0;x\neq 1$ ta có các biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} P>4 &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}>4 \\ &\Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1>4\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2>0 \text{ (luôn đúng, với mọi } x>0;x\neq 1). \end{aligned}$$

Vậy $P>4$ với mọi $x>0$, $x\neq 1$.

Câu 6. Cho phương trình $x^2-mx-m^2+m-4=0$ với m là tham số.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Chứng minh với mọi m, phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho ($x_1 < x_2$). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $|x_2| - |x_1| = 2$.

Lời giải.

a) Ta có $ac = -m^2 + m - 4 = -\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{15}{4} < 0$, với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

b) Ta có $x_1 < x_2$ mà theo câu a) lại có x_1, x_2 trái dấu nên $x_1 < 0 < x_2$. Suy ra $|x_1| = -x_1$ và $|x_2| = x_2$. Khi đó

$$|x_2| - |x_1| = 2 \Leftrightarrow x_2 + x_1 = 2 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m = 2$.

Câu 7. Giải phương trình $6\sqrt{x+2} + 3\sqrt{3-x} = 3x + 1 + 4\sqrt{-x^2+x+6}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $-2 \le x \le 3$.

Đặt $2\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = a > 0$. Bình phương hai vế suy ra $3x + 1 + 4\sqrt{-x^2+x+6} = a^2 - 10$.

Ta được

$$3a = a^2 - 10 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -2 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 4\sqrt{-x^2+x+6} = 14 - 3x \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \le \dfrac{14}{3} \\ 25x^2 - 100x + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = 2$.

Câu 8. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với các cạnh BC, AB lần lượt tại D, N. Kẻ đường kính DI của đường tròn $(O; R)$. Tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại I cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh $\triangle BOE$ vuông và $EI \cdot BD = FI \cdot CD = R^2$.

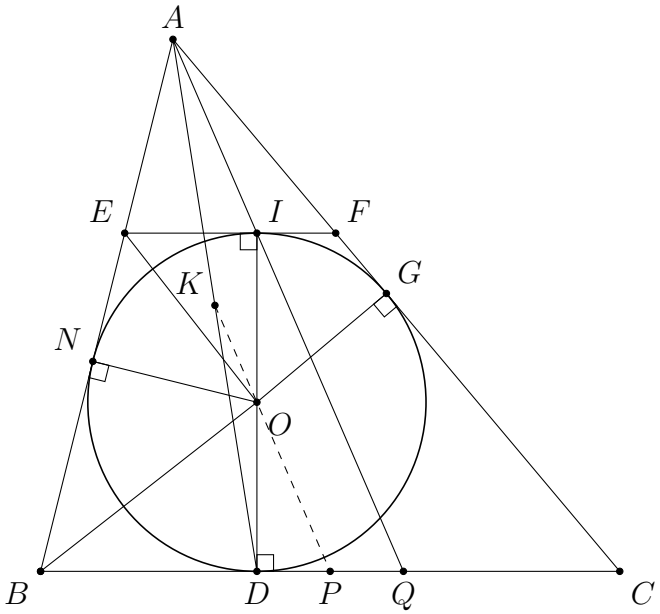
b) Gọi P, K lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, AD. Gọi Q là giao điểm của BC và AI. Chứng minh $AQ = 2KP$.

c) Gọi A_1 là giao điểm AO với cạnh BC, B_1 là giao điểm của BO với cạnh AC. C_1 là giao điểm của CO với cạnh AB và $(O_1; R_1)$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} < \frac{2}{R_1 - OO_1}.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lời giải.



a) Ta có $EF \parallel BC$ nên $\widehat{IEB} + \widehat{EBD} = 180^\circ$.
Mà $\widehat{OEB} + \widehat{OBE} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{IEB} + \widehat{EBD}\right) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EOB} = 90^\circ$ hay $\triangle BOE$ vuông tại O.
Lại có $ON \perp BE$ nên $ON^2 = EN \cdot BN$, mà $EN = EI$, $BN = BD$, $ON = R$ nên

$$EI \cdot BD = R^2. \tag{1}$$

Gọi G là tiếp điểm của AC với (O, R). Tương tự ta cũng chứng minh được $\triangle COF$ vuông tại O, đường cao OG nên

$$OG^2 = FG \cdot CG \Leftrightarrow FI \cdot CD = R^2. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC. Ta có $BD = BN$, $CD = CG$, $AN = AG$ nên

$$BD + AG + CG = p \Leftrightarrow BD + AC = p. \tag{3}$$

Gọi p' là nửa chu vi $\triangle AEF$. Vì $EF \parallel BC$ nên

$$\frac{p'}{p} = \frac{AF}{AC} = \frac{IF}{CQ} = \frac{AF + IF}{AC + CQ}. \tag{4}$$

Lại có

$$AE + EF + AF = AE + EI + IF + AF = AN + AG = 2AG = 2(AF + IF)$$

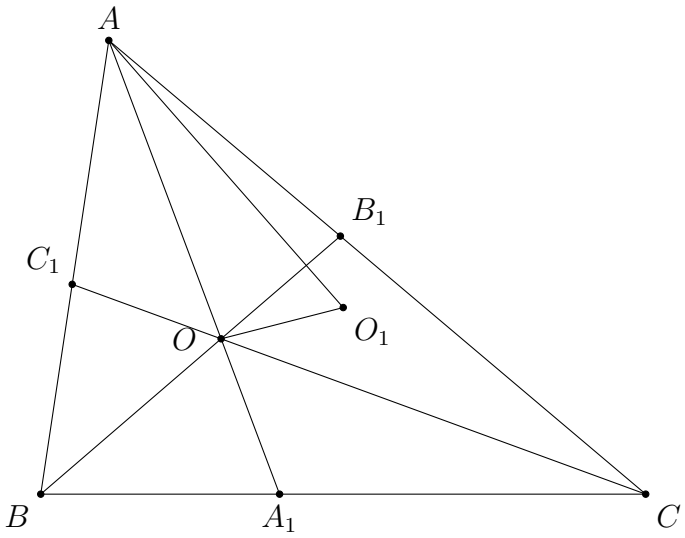
$$\Rightarrow AF + IF = \frac{AE + EF + AF}{2} = p'. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra $AC + CQ = p$. (6)

Từ (3) và (6) suy ra $BD = CQ \Rightarrow P$ là trung điểm DQ, do đó KP là đường trung bình của $\triangle ADQ$. Vậy $AQ = 2KP$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

c) Ta sử dụng hình vẽ dưới đây.



Ta có BO là phân giác $\triangle ABA_1$ nên

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{CA}{CA_1}=\frac{BA}{BA_1}=\frac{AB+AC}{BC}\Rightarrow\frac{OA}{AA_1}=\frac{AB+AC}{AB+AC+BC}.$$

Tương tự cũng có

$$\frac{OB}{BB_1}=\frac{AB+BC}{AB+AC+BC};\quad\frac{OC}{CC_1}=\frac{BC+AC}{AB+AC+BC}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}2=\frac{OA}{AA_1}+\frac{OB}{BB_1}+\frac{OC}{CC_1}&>\frac{AO_1-OO_1}{AA_1}+\frac{BO_1-OO_1}{BB_1}+\frac{CO_1-OO_1}{CC_1}\\&=(R_1-OO_1)\left(\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}\right).\end{aligned}$$

Mà O nằm trong $\triangle ABC$ nên nằm tròn đường tròn $(O_1;R_1)$. Do đó $R_1-OO_1>0$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(2x+4y-1)\sqrt{2x-y-1}=(4x-2y-3)\sqrt{x+2y} & (1)\\ x^2+8x+5-2(3y+2)\sqrt{4x-3y}=2\sqrt{2x^2+5x+2}. & (2)\end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $\sqrt{2x-y-1}=a$, $\sqrt{x+2y}=b$ $(a,b\geq 0)$. Phương trình (1) trở thành

$$\left(2b^2-1\right)a=\left(2a^2-1\right)b\Leftrightarrow(a-b)(2ab+1)=0\Leftrightarrow a=b.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Do đó $\sqrt{2x-y-1}=\sqrt{x+2y} \Leftrightarrow x=3y+1$. Thế vào phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned} & x^2+8x+5-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2} \\ \Leftrightarrow\ & \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)^2=0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x+1-\sqrt{3x+1}=0 \\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0. \end{aligned}$$

Thử lại thấy $(x;y)=(1;0)$ thỏa mãn hệ phương trình. Vậy nghiệm hệ là $(x;y)=(1;0)$.

Câu 10. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+2bc+2ca=7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=\frac{11a+11b+12c}{\sqrt{8a^2+56}+\sqrt{8b^2+56}+\sqrt{4c^2+7}}.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si (Cauchy, AM-GM) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{8a^2+56} &= \sqrt{8a^2+8(ab+2bc+2ca)} \\ &= \sqrt{(4a+4b)(2a+4c)} \\ &\le \frac{4a+4b+2a+4c}{2}=3a+2b+2c. \end{aligned} \tag{1}$$

Tương tự ta cũng có

$$\sqrt{8b^2+56} \le 2a+3b+2c \tag{2}$$

$$\sqrt{4c^2+7} \le \frac{a+b+4c}{2} \tag{3}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$Q \ge \frac{11a+11b+12c}{3a+2b+2c+2a+3b+2c+\frac{a+b+4c}{2}}=2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$, $c=\dfrac{3}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2 khi $(a;b;c)=\left(1;1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 24

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÀO CAI, TỈNH LÀO CAI, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

1) Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với a, b là các số dương khác nhau. Rút gọn P.

2) Cho hai số dương a, b và số c khác 0 thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$.

Lời giải.

1) Ta biến đổi

$$\begin{aligned}P&=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-a(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\\&=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\\&=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.\end{aligned}$$

2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{c}=-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\\\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c<0\\ab+bc+ca=0\end{cases}.$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\\\Leftrightarrow\ &a+b=a+b+2c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}\\\Leftrightarrow\ &c+\sqrt{ab+bc+ca+c^2}=0\\\Leftrightarrow\ &c+|c|=0.\text{ Điều này đúng vì }c<0.\end{aligned}$$

Câu 2. Cho $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$; $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$. Tính giá trị biểu thức $M=(x-y)^3+3(x-y)(xy+1)$.

Lời giải.

Áp dụng hằng đẳng thức $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

Ta có $x^3=4\sqrt{2}-3x$, $y^3=24\sqrt{2}-3y$.

Suy ra

$$\begin{aligned}M&=x^3-y^3-3xy(x-y)+3xy(x-y)+3(x-y)\\&=x^3-y^3+3(x-y)=-20\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 3. Một công ty vận tải dự định dùng loại xe lớn để chở 20 tấn rau theo hợp đồng. Nhưng khi vào việc, công ty không còn xe lớn nên phải thay bằng những xe có trọng tải nhỏ hơn 1 tấn so với xe lớn ban đầu. Để đảm bảo hợp đồng, công ty phải dùng một số lượng xe nhiều hơn số xe dự định là 1 xe. Hỏi trọng tải của mỗi xe nhỏ là bao nhiêu tấn?

Lời giải.

Giả sử một xe tải nhỏ có thể chở được x tấn rau ($x > 0$).

Suy ra một xe tải lớn trở được $x + 1$ tấn rau.

Theo đề bài ta có phương trình sau

$$\frac{20}{x} = \frac{20}{x+1} + 1 \Leftrightarrow \frac{20}{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -5 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy trọng tải của xe tải nhỏ là 4 tấn.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $x^3 - 3x + m - 4 = 0$ (trong đó x là ẩn) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{x_1 + x_2}{(x_1 x_2)^{2019}}$ là số nguyên.

Lời giải.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\Delta' = \dfrac{9}{4} - m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{25}{4}$.

Áp dụng định lý Vi-et ta có $\dfrac{x_1 + x_2}{(x_1 x_2)^{2019}} = \dfrac{3}{(m-4)^{2019}}$.

Vì m là số nguyên nên biểu thức trên là số nguyên khi $(m-4)^{2019}$ là ước của 3, suy ra $m - 4$ là ước của 3. Xét 2 trường hợp:

- Nếu $m - 4 = \pm 3 \Rightarrow (m-4)^{2019} = \pm 3^{2019}$ không phải là ước của 3.

- Nếu $m - 4 = \pm 1 \Rightarrow (m-4)^{2019} = \pm 1$ là ước của 3. Khi đó $m = 5$ hoặc $m = 3$.

Vậy đáp án của bài toán là $m = 3$ và $m = 5$.

Câu 5. Cho đường tròn (w) có tâm O và một điểm A nằm ngoài đường tròn (w). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AK, AL tới (w) với K, L là các tiếp điểm. Dựng tiếp tuyến (d) của đường tròn (w) tại điểm E thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{KL}$. Đường thẳng (d) cắt các đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tai P và cắt ON tại Q.

1. Chứng minh $\widehat{AOL} = \widehat{AKL}$.

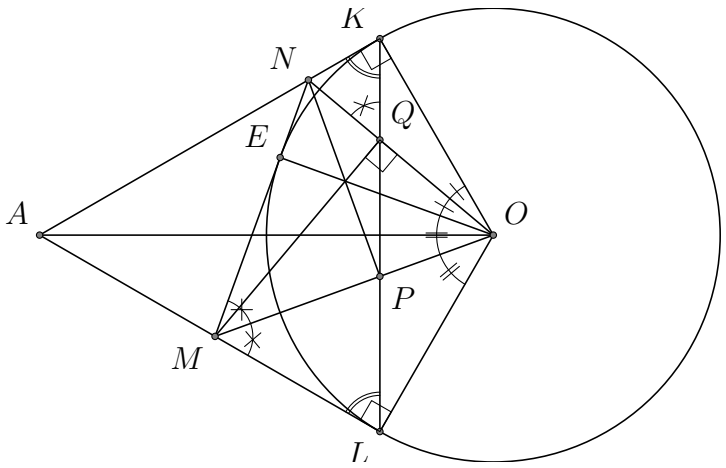
2. Chứng minh $\widehat{MON} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{KAL}}{2}$.

3. Chứng minh MQ vuông góc với ON.

4. Chứng minh $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có $\widehat{AKO}+\widehat{ALO}=180^\circ$ nên $AKOL$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{AKL}=\widehat{AOL}$.

b) Vì MN, AK, AL là 3 tiếp tuyến của đường tròn (O) nên OM, ON lần lượt là phân giác của các góc $\widehat{KOE}$, $\widehat{LOE}$. Suy ra

$$\widehat{MON}=\widehat{MOE}+\widehat{NOE}=\frac{1}{2}\widehat{KOE}+\frac{1}{2}\widehat{LOE}=\frac{1}{2}\widehat{KOL}=\frac{1}{2}(180^\circ-\widehat{KAL})=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{KAL}.$$

c) Từ chứng minh trên ta có $\widehat{QOM}=\frac{1}{2}\widehat{KOL}$.
Mặt khác ML là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{QLM}=\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{KL}=\frac{1}{2}\widehat{KOL}$.
Suy ra $\widehat{QOM}=\widehat{QLM}$ nên $QOLM$ là tứ giác nội tiếp mà $\widehat{MLO}=90^\circ\Rightarrow\widehat{MQO}=90^\circ$.

d) Tương tự chứng minh trên ta có $\widehat{NPM}=90^\circ$ nên $NQPM$ là tứ giác nội tiếp.
Suy ra $\widehat{KQN}=\widehat{NMP}$ mà MO là phân giác góc $\widehat{NML}$ nên $\widehat{NMP}=\widehat{LMP}$.
Do đó $\widehat{KQN}=\widehat{LMP}$.
Mặt khác AK, AL là 2 tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{QKN}=\widehat{MLP}$.
Suy ra $\triangle KQN\backsim\triangle LMP$ nên $\dfrac{NK}{PL}=\dfrac{KQ}{LM}\Rightarrow PL\cdot KQ=NK\cdot LM=EN\cdot EM$.

Câu 6. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$3(a+b+c)\geq\sqrt{8a^2+1}+\sqrt{8b^2+1}+\sqrt{8c^2+1}.$$

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned}18(a+b+c)&=\left(8a+\frac{1}{a}+9a\right)+\left(8b+\frac{1}{b}+9b\right)+\left(8c+\frac{1}{c}+9c\right)\\&=\left(\frac{8a^2+1}{a}+9a\right)+\left(\frac{8b^2+1}{b}+9b\right)+\left(\frac{8c^2+1}{c}+9c\right)\\&\geq 6\sqrt{8a^2+1}+6\sqrt{8b^2+1}+6\sqrt{8c^2+1}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 8a+\dfrac{1}{a}=9a \\ 8ab+\dfrac{1}{b}=9b \\ 8c+\dfrac{1}{c}=9c \\ a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$

Câu 7. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $y^2+2xy-3x-2=0$.

Lời giải.

Giả sử phương trình sau có nghiệm nguyên

$$y^2+2xy-3x-2=0 \tag{1}$$

Coi x là ẩn và y là tham số, thì biệt thức $\Delta=4x^2+12x+8$ phải là số chính phương. Tức là

$$\begin{aligned} & 4x^2+12x+8=k^2,\ k\in\mathbb{N} \\ \Rightarrow\ & (2x+3)^2-k^2=1 \\ \Rightarrow\ & (2x+3-k)(2x+3+k)=1. \end{aligned}$$

Xét 2 trường hợp

- Nếu $2x+3-k=2x+3+k=1$ thì $x=-1$, thay vào phương trình (1) ta được $y^2-2y+1=0\Leftrightarrow y=1$.
- Nếu $2x+3-k=2x+3+k=-1$ thì $x=-2$, thay vào phương trình (1) ta được $y^2-4y+4=0\Leftrightarrow y=2$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(-1;1)$ và $(x;y)=(-2;2)$.

Câu 8. Cho m, n là hai số nguyên thỏa mãn $4(m+n)^2-mn$ chia hết cho 225. Chứng minh mn cũng chia hết cho 225.

Lời giải.

Đặt $A=4(m+n)^2-mn$ thì $4A=15(m+n)^2+(m-n)^2$.

Vì $4A\vdots 225$ nên $\begin{cases} 4(m-n)^2\vdots 3 \\ 4(m-n)^2\vdots 5. \end{cases}$

Mà 3, 5 là các số nguyên tố nên $m-n$ chia hết cho 3 và 5.

Suy ra $(m-n)^2$ chia hết cho 9 và 25 mà hai số này nguyên tố cùng nhau nên $(m-n)^2\vdots 225$.

Do đó $15(m+n)^2\vdots 225$ nên $(m+n)^2\vdots 15$ nên $m+n$ chia hết cho 3 và 5.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} m-n\vdots 15 \\ m+n\vdots 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\vdots 15 \\ n\vdots 15 \end{cases} \Rightarrow mn\vdots 225.$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 25

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, TỈNH KIÊN GIANG, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2}-\dfrac{x}{x-2\sqrt{x}}\right):\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ với $x>0; x\neq 1; x\neq 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A&=\left(\dfrac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2}-\dfrac{x}{x-2\sqrt{x}}\right):\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\\&=\left(\dfrac{x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}-\dfrac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}\right):\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\\&=\left(\dfrac{x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\\&=\dfrac{-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}:\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\\&=\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}\cdot\dfrac{2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\\&=\dfrac{-2}{\sqrt{x}+1}.\end{aligned}$$

Vậy dạng thu gọn của biểu thức đã cho là $A=\dfrac{-2}{\sqrt{x}+1}$.

Câu 2. Giải phương trình $x^2+6x-5-(2x+5)\sqrt{x+1}=0$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -1$. Ta có

$$\begin{aligned}x^2+6x-5-(2x+5)\sqrt{x+1}=0&\Leftrightarrow (x^2-9)+2(2x+5)+(2x-6)-(2x+5)\sqrt{x+1}=0\\&\Leftrightarrow (x-3)(x+3)+2(x-3)+(2x+5)(2-\sqrt{x+1})=0\\&\Leftrightarrow (x-3)(x+5)-(2x+5)\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}=0\\&\Leftrightarrow (x-3)\left(x+5-\dfrac{2x+5}{\sqrt{x+1}+2}\right)=0\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=0\\x+5-\dfrac{2x+5}{\sqrt{x+1}+2}=0\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\ (\text{TMĐK})\\x+5-\dfrac{2x+5}{\sqrt{x+1}+2}=0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Ta có $x+5-\dfrac{2x+5}{\sqrt{x+1}+2} \geq x+5-\dfrac{2x+5}{2}=\dfrac{5}{2}>0$.

Suy ra, phương trình $x+5-\dfrac{2x+5}{\sqrt{x+1}+2}=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Câu 3. Cho Parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $d\colon y=-2mx-4m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=3$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2+2mx+4m=0$. (1)

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Khi đó, ta có

$$\Delta'=m^2-4m>0 \Leftrightarrow m(m-4)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>4. \end{array}\right.$$

Khi đó, áp dụng hệ thức Vi-ét ta thu được $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=4m \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned} |x_1|+|x_2|=3 &\Leftrightarrow (|x_1|+|x_2|)^2=9 \\ &\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2\,|x_1|\cdot|x_2|=9 \\ &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2\,|x_1x_2|=9 \\ &\Leftrightarrow 4m^2-8m+8\,|m|=9 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>4 \\ 4m^2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} m<0 \\ 4m^2-16m=9 \end{cases} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>4 \\ \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{3}{2} \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} m<0 \\ \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{9}{2} \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=-\dfrac{1}{2}$.

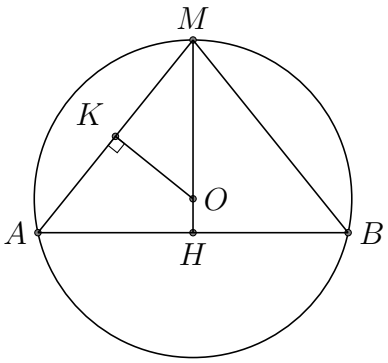
Câu 4. Cho tam giác AMB cân tại M nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB). Biết $AM=10$ cm, $AB=12$ cm. Tính độ dài MH và bán kính R.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Tam giá AMB cân tại M do đó H là trung điểm của AB.
Xét tam giác AMH vuông tại H có

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}.$$



Gọi K là hình chiếu của O lên AM, ta có:

- K là trung điểm của AM;

- $OK \perp AM$.

Ta lại có $\begin{cases} MH \perp AB \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow M, O, H$ thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{KMO} = \widehat{AMH}$.
Xét tam giác OKM vuông tại K thì

$$OM = \frac{MK}{\cos \widehat{KMO}} = \frac{MK}{\cos \widehat{AMH}} = \frac{MK}{\frac{MH}{AM}} = \frac{MK \cdot AM}{MH} = \frac{5 \cdot 10}{8} = \frac{25}{4}.$$

Vậy bán kính R của đường tròn tâm O là 6,25 cm.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = |2 - |x + 1||$ và đường thẳng d: $y = a$, với a là hằng số. Hãy vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Từ đó, tìm điều kiện của a để đường thẳng d cắt đồ thị của hàm số $f(x)$ tại bốn điểm.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = |2 - |x + 1||$. Ta xét các trường hợp sau:

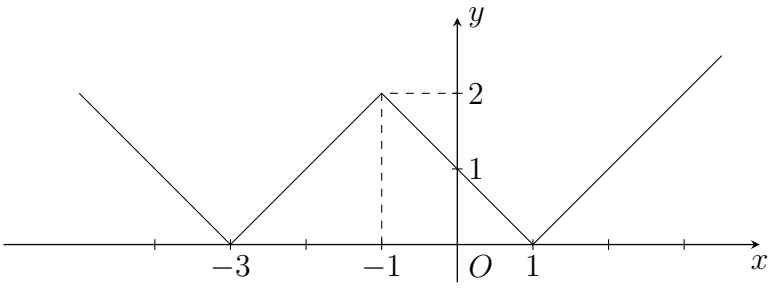
TH1: Với $x \geq 1$ thì $y = |2 - x - 1| = |1 - x| = x - 1$.

TH2: Với $-1 \leq x \leq 1$ thì $y = |2 - x - 1| = |-x + 1| = 1 - x$.

TH3: Với $-3 \leq x \leq -1$ thì $y = |2 + x + 1| = |3 + x| = 3 + x$.

TH4: Với $x \leq -3$ thì $y = |2 + x + 1| = |3 + x| = -x - 3$.

Suy ra, đồ thị của hàm số $y = f(x) = |2 - |x + 1||$ có dạng

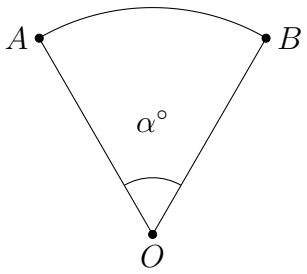


Từ đồ thị trên ta nhận thấy để đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm thì $0 < a < 2$.

Câu 6.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Một người muốn làm một chiếc quạt có chu vi là 80 cm (hình minh họa bên). Tìm số đo của góc $\widehat{AOB}$ ($\widehat{AOB} = \alpha$) sao cho diện tích của chiếc quạt là lớn nhất.



Lời giải.

Ta có chu vi chiếc quạt $= OA + OB + \left|\overset{\frown}{AB}\right| = 2R + \theta R = 80$ (cm), trong đó $\theta = \dfrac{\alpha\pi}{180}$.

$\Rightarrow R = \dfrac{80}{\theta + 2}$ (cm).

Diện tích của hình quạt là $S = \dfrac{1}{2}\theta R^2 = \dfrac{1}{2}\theta\left(\dfrac{80}{\theta+2}\right)^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si (AM-GM) cho hai số dương, ta có

$$S = \frac{1}{2}\theta\left(\frac{80}{\theta+2}\right)^2 \le \frac{3200\theta}{(2\sqrt{2\theta})^2} = \frac{3200\theta}{8\theta} = 400.$$

Suy ra, $S \le 400$ (cm^2). Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $\theta = 2 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{360}{\pi}$.

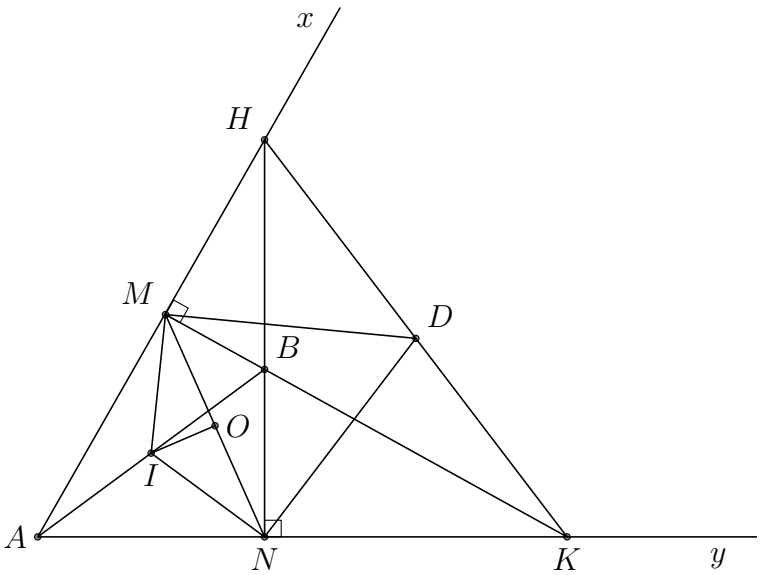
Câu 7. Cho điểm A cố định, $\widehat{xAy} = 60^\circ$ và điểm B luôn nằm trong góc xAy ($B \notin Ax, B \notin Ay$). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên Ax, Ay. Đường thẳng BN cắt Ax tại H và đường thẳng BM cắt Ay tại K.

a) Chứng minh rằng $HK = 2MN$.

b) Gọi I, D lần lượt là trung điểm của AB, HK. Chứng minh rằng tứ giác $MIND$ nội tiếp.

c) Giả sử $AB = 8$ cm, gọi O là trung điểm của MN. Tính độ dài IO.

Lời giải.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Tứ giác $AMBN$ nội tiếp (do $\widehat{BMA}+\widehat{BNA}=180^\circ$).
$\Rightarrow \widehat{MBH}=\widehat{MAN}=60^\circ$.
Xét tam giác BMH vuông tại M nên $BM=BH\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{BH}{2}$.
Tứ giác $MNKH$ là tứ giác nội tiếp nên ta có $\triangle MNB\backsim\triangle HKB\Rightarrow\dfrac{MN}{HK}=\dfrac{BM}{BH}=\dfrac{1}{2}$.
Vậy $HK=2MN$.

b) Do I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMBN$ nên $\widehat{MIN}=2\widehat{MAN}=120^\circ$.
Vì D là trung điểm của HK nên các tam giác DMH, DNK, DMN cân tại D. Suy ra

$$\widehat{DMN}=180^\circ-\widehat{AMN}-\widehat{DHM};$$
$$\widehat{DNM}=180^\circ-\widehat{ANM}-\widehat{DKN}.$$

$\Rightarrow \widehat{DMN}+\widehat{DNM}=360^\circ-(\widehat{AMN}+\widehat{ANM})-(\widehat{DHM}+\widehat{DKN})=360^\circ-120^\circ-120^\circ=120^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{DMI}+\widehat{DNI}=\widehat{DMN}+\widehat{DNM}+180^\circ-\widehat{MIN}=180^\circ$.
Tứ giác $MIND$ có tổng hai góc đối bằng 180° nên là tứ giác nội tiếp.

c) Các tam giác AMB, ANB là các tam giác vuông tại M và N nên $MI=NI=\dfrac{AB}{2}=4$ cm.
Tam giác MIN cân tại I nên $IO\perp MN$ và $\widehat{IMN}=30^\circ$.
Suy ra $IO=IM\cdot\sin\widehat{IMO}=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$ cm.
Vậy $IO=2$ cm.

Câu 8. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq 1.$$

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si (AM-GM) cho hai số dương ta có:

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq x;$$
$$\frac{y^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq y;$$
$$\frac{z^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geq z.$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}+\frac{y+z}{4}+\frac{z+x}{4}\geq x+y+z.$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y+z}{2}\geq x+y+z$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}=1.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{2}{3}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 26

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHTN HÀ NỘI, VÒNG 2, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31. \end{cases}$

b) Giải phương trình $9+3\sqrt{x(3-2x)}=7\sqrt{x}+5\sqrt{3-2x}$.

Lời giải.

a) Đặt $a=x+y$ và $b=xy(a^2\geq 4b)$. Hệ phương trình có thể được viết thành

$$\begin{cases} ab=2 \\ a^3-3ab+b^3+7(a+b+1)=31. \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} 31 &= a^3-3ab+b^3+7(a+b+1) \\ &= (a+b)^3-3ab(a+b)+7(a+b)+1 \\ &= (a+b)^3+(a+b)+1. \end{aligned}$$

Suy ra $(a+b)^3+(a+b)-30=0$ hay $a+b=3$ (vì nếu $a+b>3$ thì $(a+b)^3+(a+b)-30>0$, còn nếu $a+b<3$ thì $(a+b)^3+(a+b)-30<0$).
Giải hệ phương trình $a+b=3$ và $ab=2$ với chú ý $a^2\geq 4b$ ta được $a=2;b=1$. Từ đó dễ dàng tìm được $x=y=1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

b) Điều kiện: $0\leq x\leq \dfrac{1}{2}$.
Đặt $a=\sqrt{x}$ và $b=\sqrt{3-2x}$ thì ta có $a,b\geq 0$ và $2a^2+b^2=3$. Ngoài ra, từ giả thiết, ta cũng có

$$9+3ab=7a+5b. \tag{1}$$

Từ đó, ta có
$2a^2+b^2+3ab+6=7a+5b\Leftrightarrow (a+b-2)(2a+b-3)=0$ suy ra $b=2-a$ hoặc $b=3-2a$.

- Với $b=2-a$ thay vào (1) ta được $9+3a(2-a)=2a+10$. Giải phương trình này, ta được $a=\dfrac{1}{3}$ (tương ứng, $b=\dfrac{2}{3}$ và $x=\dfrac{1}{9}$), hoặc $a=1$ (tương ứng, $b=1$ và $x=1$).

- Với $b = 3 - 2a$, thay vào (1) ta được $9 + 3a(3 - 2a) = 2a + 10$. Giải phương trình này, ta được $a = 1$ (tương ứng, $b = 1$ và $x = 1$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{1}{9}$ và $x = 1$.

Câu 2.

a) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5.

b) Cho $a_1, a_2, \cdots, a_{50}$ là các số nguyên thỏa mãn $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le x_{50} \le 50$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 100$.
Chứng minh rằng từ các số đã cho ta có thể chọn được một vài số có tổng bằng 50.

Lời giải.

a) Từ giả thiết, ta suy ra $(x + y)(x - 2y - 1) = (x^2 - 2xy - y) + (xy - 2y^2 - x)$ chia hết cho 5. Do đó, trong hai số $x + y$ và $x - 2y - 1$ có ít nhất một số chia hết cho 5.

- Nếu $x + y$ chia hết cho 5 thì $y \equiv x \pmod 5$, suy ra

$$0 \equiv x^2 - 2xy - y \equiv x^2 + 2x^2 + x \equiv x(3x + 1) \pmod 5.$$

Do đó x chia hết cho 5 hoặc x chia cho 5 dư 3.

  - Nếu x chia hết cho 5 thì ta cũng có y chia hết cho 5 (do $x + y$ chia hết cho 5) nên hiển nhiên $2x^2 + y^2 + 2x + y$ chia hết cho 5.
  - Nếu x chia 5 dư 3 thì y chia 5 dư 2 (do $x + y$ chia hết cho 5), suy ra

$$2x^2 + y^2 + 2x + y \equiv 2 \cdot 3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 + 2 \equiv 0 \pmod 5.$$

- Nếu $x - 2y - 1$ chia hết cho 5 thì ta có $x \equiv 2y + 1 \pmod 5$, suy ra

$$0 \equiv x^2 - 2xy - y \equiv (2x + 1)^2 - 2y(2y + 1) - y \equiv y + 1 \pmod 5.$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có $2x^2 + y^2 + 2x + y$ chia hết cho 5.

b) Nếu tồn tại chỉ số n $(1 \le n \le 50)$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 50$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.
Xét trường hợp ngược lại, khi đó tồn tại chỉ số n $(1 \le n \le 49)$ sao cho

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le 49, a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \ge 51. \quad (1)$$

Từ đây suy ra $a_{n+1} \ge 2$. Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1 : $a_{n+1} = 2$. Từ (1), dễ thấy $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 49$, suy ra

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{50} = 49.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nếu $n \leq 24$ thì do $a_1 \leq a_{n+2}, a_2 \leq a_{n+3}, \cdots .a_n \leq a2n+1$ nên
$49 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n+1} < a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{49} + a_{50}$, mâu thuẫn. Vậy $n \geq 25$, suy ra

$$49 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq na_1 \geq 25a_1.$$

Từ đây, ta có $a_1 < 2$ nên $a_1 = 1$. Do đó $a_2 + \cdots + a_n = 48$ và $a_2 + \cdots + a_{n+1} = 50$.

Trường hợp 2 : $a_{n+1} \geq 3$. Lúc này, do

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{50} - 100 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}) \leq 49. \tag{2}$$

nên $49 \geq (49-n)a_{n+2} \geq (49-n) \cdot 3$, suy ra $n \geq 33$. Do đó, ta có

$$49 \geq (a_1 + \cdots + a_{16}) + (a_{17} + \cdots + a_n) \geq 16 + (n-16)a_{17} \geq 16 + 17a_{17},$$

suy ra $a_{17} < 2$. Mà $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{17}$ và a_i là các số nguyên nên

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{17}.$$

- Nếu $a_{n+1} \leq 18$, đặt $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = 50 + k$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, ta có

  $$18 \geq a_{n+1} \geq (50+k) - 49 = k + 1,$$

  suy ra $k \leq 17$. Từ đây, ta có $a_{k+1} + \cdots + a_{n+1}$ vì $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$.
- Nếu $a_{n+1} \geq 19$, từ (2) và từ giả thiết, ta có

  $$49 \geq (49-n)a_{n+2} \geq (49-n) \cdot 19.$$

  suy ra $n \geq 47$. Từ đây, ta có $a_1 = a_2 = \cdots = a_{45} = 1$, vì nếu $a_{45} \geq 2$ thì $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{44}) + (a_{45} + \cdots + a_n) \geq 44 + (n-44)a_{45} \geq 44 + (47-44) \cdot 2 > 49$. Đặt $a_{n+1} = 50 - k (k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 31)$. Khi đó, ta có $a_1 + \cdots + a_k + a_{n+1} = 50$ vì $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$.

Câu 3. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) có CD song song với BE. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc đoạn thẳng BE sao cho $\overset{\frown}{MAB} = \overset{\frown}{PAE}$. Điểm K thuộc đường thẳng AC sao cho MK song song với AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho ML song song với AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC lần lượt cắt BD, CE tại Q, S (Q khác B, S khác O).

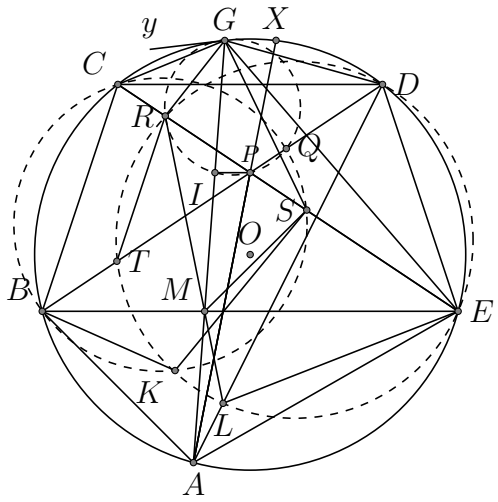
a) Chứng minh ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE lần lượt cắt BD, CE tại T, R (T khác L, R khác E). Chứng minh rằng năm điểm M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Do các tứ giác $BCQK$ và $BCDA$ nội tiếp nên $\widehat{CKQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{CAD}$ suy ra $KQ \parallel AD$. Mặt khác, ta lại có $MK \parallel AD$ nên ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có ba điểm R, M, L thẳng hàng.
Ta có $MQ \parallel AD$ nên $\widehat{RMQ} = \widehat{RLD} = \widehat{RTD}$, suy ra tứ giác $RTMQ$ nội tiếp.
Chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $RMSQ$ nội tiếp. Do đó, năm điểm M, T, R, Q, A cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O). Ta có $MR \parallel AC$ nên $\widehat{RMG} = \widehat{CAG} = \widehat{CEG}$, suy ra tứ giác $RMGE$ nội tiếp.
Chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $QMBG$ nội tiếp. Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{RGQ} &= \widehat{RGM} + \widehat{QGM} = \widehat{REM} + \widehat{QBM} \\ &= 180^\circ - \widehat{BPE} = 180^\circ - \widehat{RPQ} \end{aligned}$$

nên tứ giác $RPQG$ nội tiếp. Bây giờ, gọi I là giao điểm thứ hai của đường thẳng AG và đường tròn (PQR), X là giao điểm thứ hai của đường thẳng AP và đường tròn (O). Ta có $\widehat{CAG} = \widehat{XAD}$, suy ra $\widehat{CDG} = \widehat{XGD}$. Từ đó, ta có $GX \parallel CD$.
Do $XG \parallel CD$ nên tứ giác $GCDX$ là hình thang cân, mà $PC = PD$ nên $PG = PX$. Ta có $\widehat{RPI} = \widehat{RGI} = \widehat{REB} = \widehat{RCD}$ nên $PI \parallel CD$ hay $PI \parallel GX$.
Kẻ tiếp tuyến Gy của đường tròn (O). Ta có $\widehat{XGy} = \widehat{XAG}$ và $\widehat{PGX} = \widehat{PXG} = \widehat{API}$ nên

$$\widehat{GIP} = \widehat{GAX} + \widehat{API} = \widehat{XGy} + \widehat{PGX} = \widehat{PGy}.$$

suy ra Gy là tiếp tuyến của đường tròn (GIP). Do đó Gy là tiếp tuyến chung của các đường tròn (O) và (GIP). Vậy đường tròn (PQR) tiếp xúc với đường tròn (O) tại G.

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \leq 2$$

.

Lời giải.

Sử dụng các bất đẳng thức Cauchy và AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\text{VT} &\le \sqrt{2\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)}\cdot\sqrt{2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)}\\ &= 2\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)}\\ &\le \left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 27

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHTN HÀ NỘI, VÒNG 1, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$x^2 - x + 2\sqrt{x^3+1} = 2\sqrt{x+1}$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + y^2 = 1 + y \\ x^2 + 2y^2 + 2xy = 4 + x \end{cases}$$

Lời giải.

a) Đặt $a = \sqrt{x+1}$ và $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$, phương trình đã cho trở thành

$$b^2 - 1 + 2ab = 2a.$$

hay

$$(b-1)(b+1+2a) = 0.$$

Từ đó, ta có $b = 1$ (do $b + 1 + 2a > 0$), hay

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Giải ra ta được $x = 0$ hoặc $x = 1$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

b) Nhân phương trình thứ nhất với 2 sau đó cộng với phương trình thứ hai ta được

$$(x + 2y)^2 = x + 2y + 6.$$

hay

$$(x + 2y - 3)(x + 2y + 2) = 0.$$

Suy ra $x = 3 - 2y$ hoặc $x = -2y - 2$.

- Với $x = 3 - 2y$, thay vào phương trình thứ nhất, ta được $(y-1)^2 = 0$. Từ đó, ta có $y = 1$ và $x = 1$.
- Với $x = -2y - 2$, thay vào phương trình thứ nhất ta được $y^2 + 3y + 1 = 0$. Từ đó, ta có $y = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x = 1 + \sqrt{5}$ hoặc $y = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x = 1 - \sqrt{5}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 2.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$(x+y)(3x+2y)^2 = 2x+y-1.$$

b) Với a, b là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $\sqrt{a+2b} = 2+\sqrt{\dfrac{b}{3}}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2a}}.$$

Lời giải.

a) Đặt $a = 3x+2y$ và $b = x+y$. Từ phương trình đã cho ta có

$$ab^2 = b-a-1.$$

hay

$$a(b^2+1) = b-1.$$

Suy ra $b-1$ chia hết cho b^2+1. Từ đó, ta có $2 = (b^2+1)-(b+1)(b-1)$ chia hết cho b^2+1. Suy ra $b^2+1 \in \{1;2\}$ hay $b \in \{0;1;-1\}$.

- Với $b=0$, ta có $a=-1$. Giải ra ta được $x=2$ và $y=-3$.
- Với $b=1$, ta có $a=0$. Giải ra ta được $x=1$ và $y=-1$.
- Với $b=-1$, ta có $a=-1$. Giải ra ta được $x=1$ và $y=-2$.

b) Sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} M+\sqrt{\frac{b}{3}} &= \frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2a}} + \sqrt{\frac{b}{3}} \\ &= \frac{a^2}{a\sqrt{a+2b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b+2a}} + \frac{b^2}{b\sqrt{3b}} \\ &\geqslant \frac{(a+b+b)^2}{a\sqrt{a+2b}+b\sqrt{b+2a}+b\sqrt{3b}} \\ &\geqslant \frac{(a+2b)^2}{a\sqrt{a+2b}+b\sqrt{(1+1)(b+2a+3b)}} \\ &= \sqrt{a+2b}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$M \geqslant \sqrt{a+2b} - \sqrt{\frac{b}{3}} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=3$ nên $\min M = 2$.

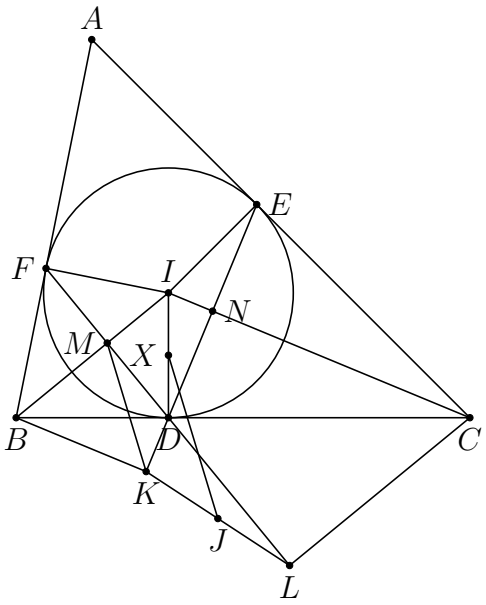
Câu 3. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng DE, M là trung điểm của đoạn thẳng DF.

a) Chứng minh rằng hai tam giác BKM và DEF đồng dạng.

b) Gọi L là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng DF, N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng hai đường thẳng MK và NL song song.

c) Gọi J, X lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng KL, ID. Chứng minh rằng đường thẳng JX vuông góc với EF.

Lời giải.



a) Ta có BD, BF là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên BI là trung trực của DF, suy ra BI vuông góc với DF tại M. Từ đó ta có tứ giác $BMDK$ nội tiếp, suy ra

$$\angle BMK = \angle BDK = \angle CDE.$$

Mà DC là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $\angle CDE = \angle DFE$. Kết hợp với kết quả ở trên, ta được $\angle BMK = \angle DFE$. Lại có $\angle BKM = \angle BDM = \angle DEF$ nên các tam giác BKM và DEF đồng dạng (g.g).

b) Ta có các tứ giác $BKDM$ và $CLDN$ nội tiếp nên

$$\angle DMK = \angle DBK, \quad \angle DCN = \angle DLN.$$

Mà $BK \parallel CN$ nên $\angle DBK = \angle DCN$. Từ đó ta có

$$\angle DMK = \angle DLN.$$

suy ra $MK \parallel LN$ (ĐPCM).

c) Ta có

$$\angle DMK = \angle DCN = 90^\circ - \angle CDN = 90^\circ - \angle DFE = 90^\circ - \angle DMN$$

nên $\angle KMN = 90^\circ$. Từ đây dễ dàng suy ra tứ giác $KMNL$ là hình thang vuông. Mà J là trung điểm của KL nên $JM = JN$. Lại có $XM = XN = \frac{1}{2}ID$ nên $JX \perp MN$. Nói cách khác $JX \perp EF$. Đây chính là điều phải chứng minh.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 4. Trên mặt phẳng cho hai điểm P, Q phân biệt. Xét 10 đường thẳng nằm trong mặt phẳng trên thỏa mãn các tính chất sau:

a) Không có hai đường thẳng nào song song hoặc trùng nhau.

b) Mỗi đường thẳng đi qua P hoặc Q, không có đường thẳng nào đi qua cả P và Q. Hỏi 10 đường thẳng trên có thể chia mặt phẳng thành tối đa bao nhiêu miền? Hãy giải thích.

Lời giải.

Gọi m, n lần lượt là số đường đi qua P và Q, S là số miền được tạo thành, khi đó từ giả thiết ta có

$$m + n = 10.$$

Nếu $m = 0$ hoặc $n = 0$ thì dễ thấy $S = 20$.

Xét trường hợp $m, n \geqslant 1$. Bắt đầu từ mặt phẳng với hai điểm P, Q, ta vẽ m đường thẳng đôi một phân biệt đi qua P, số miền được tạo thành là $2m$.

Ta lần lượt vẽ thêm các đường thẳng đi qua Q. Khi vẽ đường thẳng đầu tiên, nó cắt m đường thẳng đi qua P tại m điểm phân biệt, m điểm này chia đường thẳng vừa vẽ thành $m+1$ phần. Nói cách khác, đường thẳng vừa vẽ đi qua đúng $m + 1$ miền trong $2m$ miền được tạo ra, nên lúc này số miền là $2m + (m + 1)$.

Kể từ đường thẳng thứ hai đến đường thẳng thứ n. Mỗi đường thẳng đi qua Q được vẽ sẽ cắt m đường thẳng đi qua P tại m điểm phân biệt khác Q. Chúng cùng với Q, chia đường thẳng vừa vẽ thành $m + 2$ phần. Do đó, với mỗi lần vẽ, số miền tăng thêm $m + 2$. Tóm lại, ta có

$$S = 2m + (m + 1) + (n - 1)(m + 2) = mn + 2m + 2n - 1 = mn + 19.$$

Sử dụng BĐT AM-GM, ta có

$$S \leqslant \frac{(m + n)^2}{4} + 19 = 44.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi có 5 đường thẳng đi qua P và 5 đường thẳng đi qua Q. Số miền được tạo tối đa là 44.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 28

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TOÁN, TIN TỈNH HƯNG YÊN, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{-1}{-x^2+\sqrt{x}}$ và $B=x^4-5x^2-8x+2025$, với $x>0, x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính các giá trị của x để biểu thức $T=B-2A^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=x-1$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}T=&B-2A^2=x^4-5x^2-8x+2025-2(x-1)^2\\=&x^4-7x^2-4x+2023=x^4-8x^2+16+x^2-4x+4+2003\\=&(x^2-4)^2+(x-2)^2+2003\geq 2003, \forall x.\end{aligned}$$

Do đó GTNN của T là 2003, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Câu 2.

a) Tìm các giá trị của m để đồ thị hai hàm số $y=x^2; y=x-m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ sao cho $(x_1-x_2)^8+(y_1-y_2)^8=162$.

b) Tìm các giá trị của x để $M=x^4+(x+1)^3-2x^2-2x$ là số chính phương.

Lời giải.

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là nghiệm của phương trình

$$x^2=x-m\Leftrightarrow x^2-x+m=0$$

Để đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình trên phải có hai nghiệm phân biệt, suy ra $\Delta>0\Leftrightarrow 1-4m>0\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}$. Khi đó, x_1, x_2 là hai nghiệm

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

của (1) nên theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=m \end{cases}$ mà $\begin{cases} y_1=x_1-m \\ y_2=x_2-m \end{cases} \Rightarrow y_1-y_2=x_1-x_2.$

Do đó

$$\begin{aligned} & (x_1-x_2)^8+(y_1-y_2)^8=162 \\ \Leftrightarrow\ & 2(x_1-x_2)^8=162 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=3 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=3 \\ \Rightarrow\ & 1-4m=3 \Leftrightarrow m=\frac{-1}{2}(\text{thỏa mãn}) \end{aligned}$$

Vậy với $m=\frac{-1}{2}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có

$$\begin{aligned} & M=x^4+(x+1)^3-2x^2-2x \\ \Leftrightarrow\ & M=x^4+x^3+x^2+x+1 \\ \Leftrightarrow\ & 4M=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4 \end{aligned}$$

Xét $4x^4+4x^3+4x^2+4x+4-(2x^2+x)^2=3x^2+4x+4=2x^2+(x+2)^2>0.$
Và $4x^4+4x^3+4x^2+4x+4-(2x^2+x+2)^2=-5x^2\le 0.$
Suy ra $(2x^2+x)^2<4M\le(2x^2+x+2)^2$. Vì M là số chính phương nên $4M$ cũng là số chính phương nên xảy ra các trường hợp sau

(a) $4M=(2x^2+x+2)^2\Rightarrow 5x^2=0\Rightarrow x=0.$

(b) $4M=(2x^2+x+1)^2\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=-1;x=3.$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy với $x\in\{-1;0;3\}$ thì M là số chính phương.

Câu 3.

a) Giải phương trình $2x^3-\sqrt{108x-45}=x\sqrt{48x+20}-3x^2.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=(x+1)(y+1) \\ \left(\frac{x}{y+1}\right)^2+\left(\frac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases}.$

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $x\ge\frac{-5}{2}$. Phương trình tương đương với
$2x^3+3x^2-3\sqrt{12x+5}-2x\sqrt{12x+5}=0\Leftrightarrow(2x+3)(x^2-\sqrt{12x+5})=0.$
Xét $2x+3=0\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$(loại).

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Xét

$$\begin{aligned} & x^2-\sqrt{12x+5}=0 \Leftrightarrow x^4=12x+5 \\ \Leftrightarrow\ & x^4+4x^2+4=4x^2+12x+9 \Leftrightarrow (x^2+2)^2=(2x+3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2+2=2x+3 \\ x^2+2=-2x-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+5=0 (\text{vô nghiệm}) \\ x^2-2x-1=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right. (\text{thỏa mãn}) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

b) ĐKXĐ: $x \neq -1; y \neq -1$.

Từ phương trình thứ nhất ta có $x(x+1)+y(y+1)=(x+1)(y+1) \Leftrightarrow \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=1$.

Đặt $\dfrac{x}{y+1}=a; \dfrac{y}{x+1}=b$. Ta có hệ

$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2-2ab=1 \Leftrightarrow ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0; b=1 \\ b=0; a=1 \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$. Hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy hệ có tập nghiệm $\{(1;0),(0;1)\}$.

Câu 4. Cho đường tròn tâm $(O;R)$ và một đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Trên d lấy một điểm M bất kì, qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn tâm (O). Tiếp tuyến của đường tròn tâm (O) tại C cắt AB tại E.

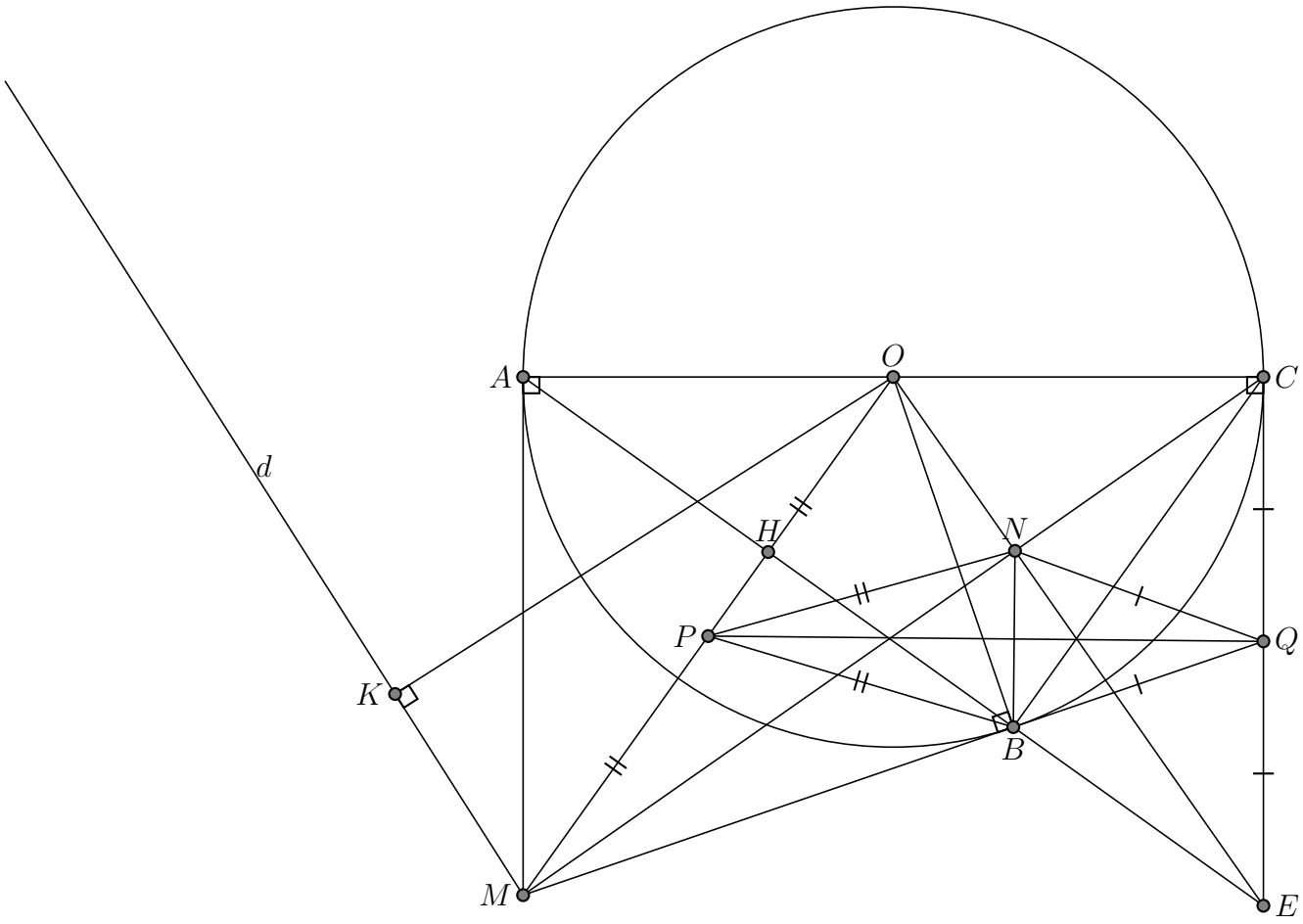
a) Chứng minh rằng: $BE \cdot MB = BC \cdot OB$.

b) Gọi N là giao điểm của CM với OE. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của hai đoạn thẳng OM và CE vuông góc với đường thẳng BN.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của dây AB khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d. Biết $R = 8$ cm và khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng 10 cm.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Ta có $\widehat{OBM} = \widehat{EBC} = 90°$.
$\widehat{BMO} = \widehat{AMO} = \widehat{HAO} = \widehat{BAC}$ (do cùng phụ với góc $\widehat{AOH}$).
Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BCE}$ (do cùng phụ với $\widehat{BEC}$), suy ra $\widehat{BMO} = \widehat{BCE}$.
Suy ra $\triangle OBM \backsim \triangle EBC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{OB}{EB} \Rightarrow BE \cdot MB = BC \cdot OB$.

b) Xét $\triangle OAM$ và $\triangle ECA$. Ta có $\widehat{OAM} = \widehat{ECA} = 90°, \widehat{OMA} = \widehat{BAC} = \widehat{EAC}$.
Suy ra $\triangle OAM \backsim \triangle ECA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OA}{EC} = \dfrac{AM}{CA} \Rightarrow \dfrac{OC}{EC} = \dfrac{AM}{CA} \Rightarrow \dfrac{OC}{AM} = \dfrac{EC}{CA}$.
Lại có $\widehat{ECO} = \widehat{CAM} \Rightarrow \triangle ECO \backsim \triangle CAM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CEO} = \widehat{ACM}$.
Mà $\widehat{ECN} + \widehat{ACM} = 90° \Rightarrow \widehat{ECN} + \widehat{CEO} = 90° \Rightarrow \widehat{ENC} = 90° \Rightarrow CM \perp OE$.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của OM, CE. Thì theo tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ta suy ra $PN = PB = \dfrac{1}{2} \cdot OM, QN = QB = \dfrac{1}{2} \cdot CE$.
Do đó PQ là đường trung trực của BN hay $PQ \perp BN$.

c) Kẻ $OK \perp d$ tại K. Gọi H là giao điểm của OM với AB.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM ta có $OH \cdot OM = OA^2 = R^2 = 64$ cm không đổi. Do đó AB nhỏ nhất khi OH lớn nhất, suy ra OM nhỏ nhất. Mà $OM \geq OK \Rightarrow OM \geq 10$ cm không đổi.
Vậy AB nhỏ nhất khi $OM = 10$ cm $\Rightarrow OH = 6{,}4$ cm.
$\Rightarrow AB = 2 \cdot BH = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 9{,}6$ cm.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $a > 0$ và $a + b \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{8a^2 + b}{4a} + b^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{8a^2 + a + b - a}{4a} + b^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \geq \frac{8a^2 + 1 - a}{4a} + 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4a^2 + 1 + 4a^2 - a}{4a} + |b| - \frac{1}{4} \geq \frac{4a + 4a^2 - a}{4a} + b - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} + a + b - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy GTNN của P bằng $\dfrac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 29

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ, TỈNH HÒA BÌNH, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$.

b) $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}-2}{2}$.

Lời giải.

a) $A=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)-2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2}{2}=2.$

b) Điều kiện: $x\geq 0, x\neq 4$. Khi đó

$$\begin{aligned}B&=\left(\frac{\sqrt{x}}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\frac{\sqrt{x}-2}{2}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}.\frac{\sqrt{x}-2}{2}\\&=\frac{2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}.\frac{\sqrt{x}-2}{2}\\&=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}.\end{aligned}$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0, x\neq 4$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^2-2|x-3|-5=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+2y+1=0\\x^2+y^2-2x+4y-3=0.\end{cases}$

Lời giải.

a) **TH1.** $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$. Khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&x^2-2(x-3)-5=0\\\Leftrightarrow\ &x^2-2x+1=0\\\Leftrightarrow\ &(x-1)^2=0\\\Leftrightarrow\ &x=1\quad\text{(loại)}.\end{aligned}$$

TH2. $x-3<0 \Leftrightarrow x<3$. Khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & x^2-2(3-x)-5=0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+2x-11=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} x=-1+2\sqrt{3} & \text{(nhận)} \\ x=-1-2\sqrt{3} & \text{(nhận).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=-1+2\sqrt{3}$ hoặc $x=-1-2\sqrt{3}$.

b) Phương trình thứ nhất tương đương $x=-2y-1$, thay vào phương trình thứ hai ta có

$$\begin{aligned} & (-2y-1)^2+y^2-2(-2y-1)+4y-3=0 \\ \Leftrightarrow\ & 4y^2+4y+1+y^2+4y+2+4y-3=0 \\ \Leftrightarrow\ & 5y^2+12y=0 \\ \Leftrightarrow\ & y=0 \vee y=\frac{-12}{5}. \end{aligned}$$

- $y=0 \Rightarrow x=-1$.
- $y=\dfrac{-12}{5} \Rightarrow x=\dfrac{19}{5}$.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S=\left\{(-1;0),\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{-12}{5}\right)\right\}$.

Câu 3.

a) Cho parabol $(P): y=ax^2$ và đường thẳng $d: y=3x-2$. Tìm a để (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 2, khi đó hãy vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Quãng đường từ A đến B dài 72km. Người thứ nhất đi xe đạp từ A đến B, sau đó 1 giờ, người thứ hai đi xe đạp từ B đến A. Hai người gặp nhau tại C cách B là 30km, vận tốc của người đi xe thứ hai lớn hơn vận tốc của người đi xe thứ nhất là 1km. Tính thời gian của mỗi người từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $ax^2-3x+2=0$.
Vì (d) cắt (P) tại một điểm có hoành độ bằng 2 nên thay $x=2$ vào phương trình ta có

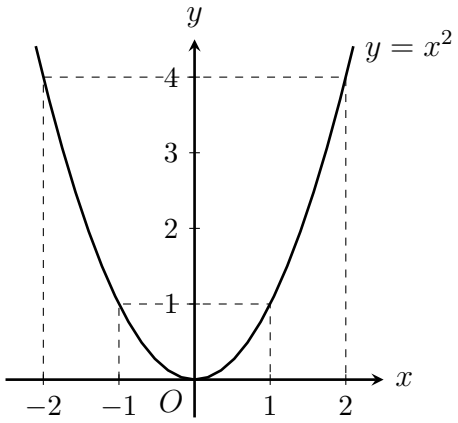
$$4a-6+2=0 \Leftrightarrow a=1.$$

Vậy (P): $y=x^2$.
Bảng giá trị của (P)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số (P): $y=x^2$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



b) Gọi vận tốc của người đi xe thứ nhất là x (đơn vị: km / h), $x > 0$.
Khi đó, vận tốc của người đi xe thứ hai là $x + 1$.
Quãng đường người đi xe thứ nhất tới C là: $72 - 30 = 42$ (km).
Do đó, thời gian của người đi xe thứ nhất tới C là: $\dfrac{42}{x}$ (km / h).
Quãng đường người đi xe thứ hai tới C là: 30 (km).
Do đó, thời gian của người đi xe thứ hai tới C là: $\dfrac{30}{x+1}$ (km / h).
Vì người đi xe thứ nhất xuất phát trước 1 giờ so với người đi xe thứ hai nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & \frac{42}{x} = 1 + \frac{30}{x+1} \\ \Leftrightarrow\ & 42(x+1) = x(x+1) + 30x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 11x - 42 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} x = 14 & \text{(nhận)} \\ x = -3 & \text{(loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy thời gian người đi xe thứ nhất từ lúc khởi hành tới lúc gặp nhau là $\dfrac{42}{14} = 3$ (giờ).
Thời gian người đi xe thứ hai từ lúc khởi hành tới lúc gặp nhau là $\dfrac{30}{15} = 2$ (giờ).

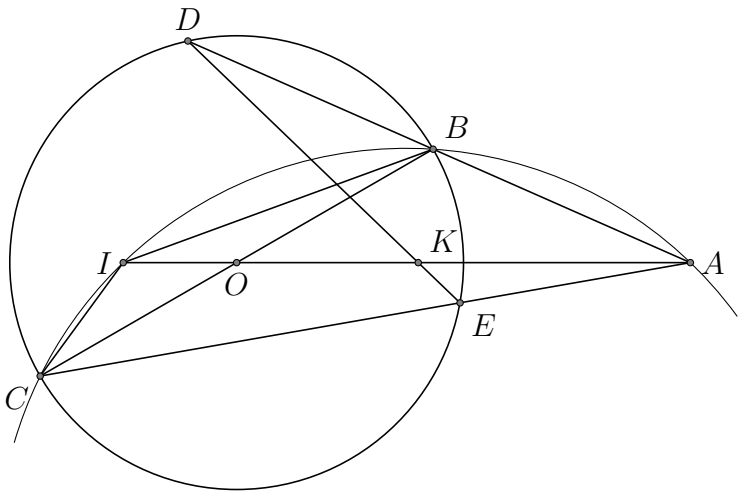
Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định sao cho $OA = 2R$. Đường kính BC của (O) quay quanh O nhưng đường thẳng BC không đi qua điểm A. Vẽ đường tròn qua ba điểm A, B, C cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E, DE cắt OA tại K.

a) Chứng minh rằng 4 điểm E, K, I, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng khi BC quay quanh điểm O và đường thẳng BC không đi qua điểm A thì độ dài AI không đổi.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có $ABIC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OCI} = \widehat{BAO}$. Lại có $\widehat{BDE} = \widehat{OCE}$.
Suy ra $\widehat{OCE} + \widehat{OCI} = \widehat{BAO} + \widehat{BDE} \Leftrightarrow \widehat{ICE} = \widehat{BAO} + \widehat{BDE}$.
Mặt khác $\widehat{DKI} = \widehat{BAO} + \widehat{BDE}$ (tính chất góc ngoài). Suy ra $\widehat{ICE} = \widehat{DKI}$. Do đó, tứ giác $EKIC$ nội tiếp, tức là, E, K, I, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có $OA.OI = OB.OC = R^2 \Rightarrow OI = \dfrac{R^2}{2R} = \dfrac{R}{2}$.
Vậy $AI = OA + OI = 2R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{5R}{2}$. không đổi khi BC di chuyển.

Câu 5.

a) Tìm số tự nhiên n sao cho $(n+5)$ và $(n+30)$ đều là các số chính phương.

b) Hôm nay là thứ Ba, hỏi sau $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 110^3 + 111^3)$ ngày nữa thì là ngày thứ mấy trong tuần?

Lời giải.

a) Để $n+5, n+30$ là các số chính phương thì phải tồn tại các số tự nhiên a, b sao cho

$$n + 5 = b^2; n + 30 = a^2 \text{ với } (a, b \in \mathbb{N}^*, a > b).$$

Ta có $a^2 - b^2 = 25 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 25$.
Mặt khác, $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên ta suy ra $(a-b), (a+b) \in \{1; 5; 25\}$.
Ta thấy $a+b > a-b$ nên $a-b = 1$ và $a+b = 25$. Do đó, $a = 13; b = 12$. Suy ra $n = 139$.

b) Ta có $n^3 - n = n(n-1)(n+1) \Rightarrow n^3 = (n-1)n(n+1) + n$, áp dụng ta có

$$\begin{aligned}
& 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 110^3 + 111^3 \\
= \; & (1-1)1(1+1) + 1 + (2-1)2(2+1) + 2 + (3-1)3(3+1) + 3 + \cdots + \\
& + (110-1)110(110+1) + 110 + (111-1)111(111+1) + 111 \\
= \; & (1 + 2 + 3 + \cdots + 110 + 111) + (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + 109 \cdot 110 \cdot 111 + 110 \cdot 111 \cdot 112) \\
= \; & \frac{111(111+1)}{2} + \frac{110 \cdot 111 \cdot 112 \cdot 113}{4} \\
= \; & 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 37^2 \text{ (chia hết cho 7)}
\end{aligned}$$

Vậy sau $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 110^3 + 111^3)$ ngày nữa là ngày thứ Ba.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 30

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, TP. HỒ CHÍ MINH, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$. Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải.

Thay $a=-(b+c)$; $a+c=-b$ và $a+b=-c$ vào điều kiện thứ hai ta có

$$\begin{aligned} & (b+c)^2=2(-b+1)(-c-1) \\ \Leftrightarrow\ & b^2+c^2+2bc=2bc+2b-2c-2 \\ \Leftrightarrow\ & (b-1)^2+(c+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $a=0$.

Vậy $A=a^2+b^2+c^2=2$.

Câu 2. Giải phương trình $4\sqrt{x+3}=1+4x+\dfrac{2}{x}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x\geq -3, x\neq 0$.

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{x+3}=1+4x+\frac{2}{x} \\ \Rightarrow\ & 4x\sqrt{x+3}=x+4x^2+2 \\ \Rightarrow\ & 4x^2-4x\sqrt{x+3}+x+3=1 \\ \Rightarrow\ & (2x-\sqrt{x+3})^2=1 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x-\sqrt{x+3}=1 \\ 2x+\sqrt{x+3}=-1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải ra nghiệm và thay vào phương trình ban đầu, ta thu được $x=\dfrac{5+\sqrt{57}}{8}$ và $x=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}$.

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{x+3}=1+4x+\frac{2}{x} \\ \Rightarrow\ & 4x\sqrt{x+3}=x+4x^2+2 \\ \Rightarrow\ & -16x^4+8x^3+31x^2-4x-4=0 \\ \Rightarrow\ & (4x^2-5x-2)(-4x^2-3x+2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4x^2-5x-2=0 \\ -4x^2-3x+2=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Giải ra nghiệm và thay vào phương trình ban đầu, ta thu được $x=\dfrac{5+\sqrt{57}}{8}$ và $x=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}$.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^3=1 & (1) \\ x^2+y^5=x^3+y^2. & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Thay phương trình (1) vào (2) ta có

$$x^2+y^5=x^3+y^2 \Rightarrow x^2+y^5=x^3+y^2(x^2+y^3) \Leftrightarrow x^2(1-x-y^2)=0$$

- $x=0$ suy ra $y=1$.
- $1=x+y^2$ suy ra $x=1-y^2$. Thay vào phương trình (1) thu được

$$(1-y^2)^2+y^3=1 \Leftrightarrow y(y^2+y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \\ y=-2. \end{array}\right.$$

  - Với $y=0$ suy ra $x=1$.
  - Với $y=1$ suy ra $x=0$.
  - Với $y=-2$ suy ra $x=-3$.

  Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(0;1),(1;0),(-3;-2)$.

Câu 4. Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ vuông tại A có đường cao AH. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của H lên AB,AC.

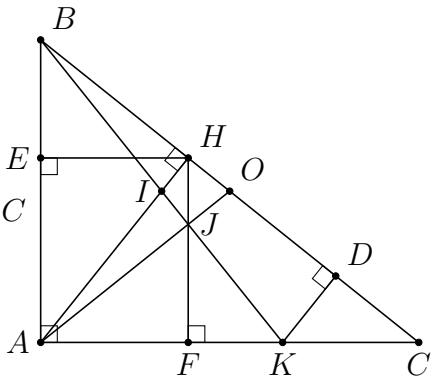
a) Chứng minh rằng $BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}$.

b) Gọi D là điểm đối xứng của B qua H và gọi O là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC cắt AC tại K. Chứng minh rằng BK vuông góc với AO.

Lời giải.

a) Nhân cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh với $\sqrt{BC}$ ta thu được

$$BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC} \Leftrightarrow BE.AC+CF.AB=AH.BC$$



Mặt khác,

$$\begin{aligned} VT&=BE.AC+CF.AB=(AB-AE)AC+(AC-AF)AB \\ &=2AB.AC-AE.AC+AF.AB \\ &=4S-2S_{\triangle AHC}-2S_{\triangle AHB}=2S=AH.BC=VP \end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Vì $AH \| DK$ và H là trung điểm BD suy ra $IB = IK$, mà trong tam giác ABK vuông tại A có AI là trung tuyến suy ra $IA = IB$ hơn nữa $OA = OB$. Vậy IO là trung trực của AB suy ra $\widehat{IBO} = \widehat{IAO}$ suy ra $ABHJ$ nội tiếp, suy ra $AK \perp AO$.

Câu 5. Chứng minh rằng $x^4 - x + \dfrac{1}{2} > 0$ với mọi số thực x.

Lời giải.

Cách 1. Ta có phân tích

$$x^4 - x + \frac{1}{2} = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

Do đó đẳng thức không xảy ra, nghĩa là $x^4 - x + \dfrac{1}{2} > 0$ với mọi số thực x.

Cách 2. Ta có đánh giá bởi $AM - GM$ như sau:

$$x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{256}} + \frac{1}{\sqrt[3]{256}} + \frac{1}{\sqrt[3]{256}} \geq 4\sqrt[4]{x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{256}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{256}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{256}}} = |x| \geq x$$

hay

$$x^4 - x \geq -\frac{3}{\sqrt[3]{256}} = -\sqrt[3]{\frac{27}{256}} > -\sqrt[3]{\frac{32}{256}} = \frac{1}{2}.$$

Do đó $x^4 - x + \dfrac{1}{2} > 0$.

Câu 6. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy + y^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có đánh giá sau

$$x^2y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -\frac{x^2 + y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Từ điều kiện ta có $xy = x^2 + y^2 - 3$, thay vào BĐT trên ta có

$$-\frac{x^2 + y^2}{2} \leq x^2 + y^2 - 3 \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2 \leq x^2 + y^2 \leq 6.$$

Dẳng thức của đánh giá đầu tiên xảy ra khi $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$.
Do đó $\max P = 6$ khi $x = y = \pm\sqrt{3}$ và $\min P = 2$ khi $x = -y = \pm 1$.

Cách 2. Ta xét hai trường hợp sau

TH 1. $y = 0$. Khi đó $x^2 = 3$. Vậy $P = 3$.

TH 2. $y \neq 0$. Ta có

$$(x^2 - xy + y^2)P = 3(x^2 + y^2) \Leftrightarrow (t^2 - t + 1)P = 3t^2 + 3 \text{ chia hai vế cho } y^2 \text{ và đặt } t = \frac{x}{y}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Khi $P \neq 3$, ta xem phương trình trên là bậc hai theo ẩn t, nghĩa là

$$(P-3)t^2 - Pt + P - 3 = 0$$

Rõ ràng phương trình này có nghiệm t do đó

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 4(P-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq P \leq 6$$

Kết hợp hai trường hợp ta có $2 \leq P \leq 6$.

- Khi $P = 2$ thì $t = -1$, khi đó $x = -y = \pm 1$.
- Khi $P = 6$ thì $t = 1$, khi đó $x = y = \pm\sqrt{3}$.

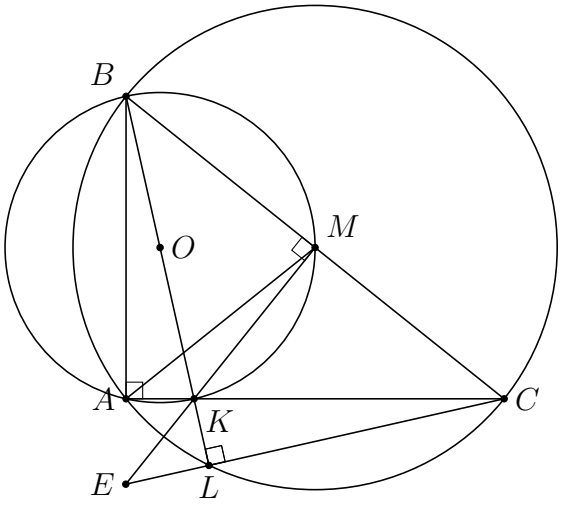
Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB. Đường thẳng AC cắt (O) tại trung điểm thứ hai K. Đường thẳng BK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại L. Các đường thẳng CL và KM cắt nhau tại E. Chứng minh rằng điểm E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM.

Lời giải.

Do các tứ giác $ABMK$ và $ABCL$ nội tiếp nên ta có $\widehat{AMB} = \widehat{BLC} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{KBM} = \widehat{MEC}$ vì cùng phụ với cặp góc đối đỉnh $\widehat{BKM} = \widehat{EKL}$.

Suy ra $MAEC$ nội tiếp. Vậy E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM.



Câu 8. Các số nguyên dương từ 1 đến 2018 được tô màu theo quy tắc sau: Các số mà khi chia cho 24 dư 17 được tô màu xanh; Các số mà khi chia cho 40 dư 7 được tô màu đỏ; Các số còn lại được tô màu vàng.

a) Chứng tỏ rằng không có số nguyên dương nào được tô cả hai màu xanh và đỏ. Hỏi có bao nhiêu số được tô màu vàng?

b) Có bao nhiêu cặp số $(a; b)$ sao cho a được tô màu xanh, b được tô màu đỏ và $|a - b| = 2$?

Lời giải.

a) Từ giả thiết ta suy ra:

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- Số màu xanh sẽ có dạng $a = 24k + 17,\ k \in \mathbb{Z}$, với

$$1 \le a \le 2018 \Leftrightarrow 1 \le 24k + 17 \le 2018 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le k \le \frac{667}{8} \Leftrightarrow 0 \le k \le 83.$$

Vậy có 84 số được tô màu xanh.

- Số màu đỏ sẽ có dạng $b = 40l + 7,\ l \in \mathbb{Z}$, với

$$1 \le b \le 2018 \Leftrightarrow 1 \le 40l + 7 \le 2018 \Leftrightarrow -\frac{3}{20} \le l \le \frac{2011}{40} \Leftrightarrow 0 \le l \le 50.$$

Vậy có 51 số được tô màu đỏ.

Giả sử có số được tô cả màu xanh và đỏ, khi đó tồn tại $k_0, l_0 \in \mathbb{Z}$ sao cho

$$24k_0 + 17 = 40l_0 + 7 \Leftrightarrow 12k_0 + 5 = 20l_0, \text{ mâu thuẫn với tính chẵn lẻ.}$$

Vậy số nguyên dương nào được tô cả hai màu xanh và đỏ. Do đó số lượng số được tô màu vàng là $2018 - 84 - 51 = 1883$.

b) Ta xét hai trường hợp:

- $a - b = 2$. Thay $a = 24k + 17,\ k \in \mathbb{Z}$ và $b = 40l + 7,\ l \in \mathbb{Z}$ ta có

$$24k + 17 - 40l - 7 = 2 \Leftrightarrow 3k - 5l + 1 = 0.$$

Dễ thấy $k = 3$ và $l = 2$ là một nghiệm nguyên riêng của phương trình, vậy ta có nghiệm nguyên của phương trình là $\begin{cases} k = 3 + 5t \\ l = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$.

Vì $0 \le k \le 83 \Leftrightarrow 0 \le 3 + 5t \le 83 \Leftrightarrow \frac{-3}{5} \le t \le 16$. Vậy có 17 giá trị nguyên của t do đó trường hợp này có 17 cặp $(a; b)$ thỏa đề bài.

- $a - b = -2$. Tương tự ta thu được phương trình nghiệm nguyên

$$6k - 10l + 3 = 0.$$

Dễ thấy $UCLN(6, 10) = 2$ không là ước của 3, do đó phương trình này không có nghiệm nguyên.

Vậy có tất cả 17 cặp $(a; b)$ thỏa đề bài.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 31

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, TP. HÀ NỘI, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải phương trình $x^2+3x+8=(x+5)\sqrt{x^2+x+2}$.

Lời giải.

Ta có $x^2+3x+8=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}>0$. Do đó $x+5>0\Leftrightarrow x>-5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+x-2=(x+5)\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)\Leftrightarrow x^2+x-2=(x+5)\cdot\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x+2}+2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)\left(1-\frac{x+5}{\sqrt{x^2+x+2}+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+x+2}+2}=1. \end{array}\right.$$

TH1. $x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Cả hai nghiệm này đều thỏa mãn.

TH2. $\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+x+2}+2}=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+2}+2=x+5\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+2}=x+3$.

Bình phương hai vế ta có

$$x^2+x+2=x^2+6x+9\Leftrightarrow x=-\frac{7}{5}.\ \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-2;-\dfrac{7}{5};1\right\}$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1. \end{cases}$

Lời giải.

Phương trình thứ nhất tương đương

$$(y-x)^2=(3x-1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y-x=3x-1 \\ y-x=1-3x \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=4x-1 \\ y=1-2x. \end{array}\right.$$

TH1. $y = 4x - 1$, thay vào phương trình thứ hai ta có

$$\begin{aligned}(4x-1)^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 &\Leftrightarrow 16x^2 - 8x + 1 = x^3 + 8x^2 - x + 1\\ &\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 7x = 0\\ &\Leftrightarrow x(x-7)(x-1) = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\\ x = 1\\ x = 7.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $x = 0$ thì $y = -1$. Với $x = 1$ thì $y = 3$. Với $x = 7$ thì $y = 27$.
TH2. $y = 1 - 2x$, thay vào phương trình thứ hai ta có

$$\begin{aligned}(1-2x)^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x^3 + 8x^2 - x + 1\\ &\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0\\ &\Leftrightarrow x(x+3)(x+1) = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\\ x = -1\\ x = -3.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $x = 0$ thì $y = 1$. Với $x = -1$ thì $y = 3$. Với $x = -3$ thì $y = 7$.
Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S = \{(0;-1), (1;3), (7;27), (0;1), (-1;3), (-3;7)\}$.

Câu 3. Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.
Lời giải.
Ta có $p^4 + 2019q^4 = (p^4 - q^4) + 2020q^4 = (p^2 - q^2)(p^2 + q^2) + 2020q^4$.
Vì 2020 chia hết cho 20 nên ta chỉ cần chứng minh $(p^2 - q^2)(p^2 + q^2)$.
Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể có số dư là 0, 1 hoặc 4.
Mặt khác p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên p^2, q^2 không chia hết cho 5.
Do đó p^2, q^2 chia 5 dư 1 hoặc 4. Suy ra $p^2 - q^2$ hoặc $p^2 + q^2$ chia hết cho 5.
Ta còn có p, q là số lẻ nên $p^2 - q^2$ và $p^2 + q^2$ đều chia hết cho 2.
Vì vậy $(p^2 - q^2)(p^2 + q^2)$ chia hết cho $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.
Vậy $p^4 + 2019q^4$ chia hết cho 20.

Câu 4. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a < b \le c < d$; $ad = bc$ và $\sqrt{d} - \sqrt{a} \le 1$.

a) Chứng minh $a + d > b + c$.

b) Chứng minh a là một số chính phương.

Lời giải.

a) Ta có $a(a+d) - a(b+c) = a^2 + ad - ab - ac = a^2 + bc - ab - ac = (a-b)(a-c) > 0$.
Do đó $a(a+d) > a(b+c) \Leftrightarrow a + d > b + c$.

b) Ta có $1 \ge \left(\sqrt{d} - \sqrt{a}\right)^2 = a + d - 2\sqrt{ad} \Rightarrow 2\sqrt{ad} \ge a + d - 1$.
Mặt khác $2\sqrt{ad} = 2\sqrt{bc} \le b + c$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Suy ra $b+c \geq a+d-1 > b+c-1$. Do $a+d-1$ là số nguyên nên $a+d-1 = b+c$.
Do đó $2\sqrt{ad} = a+d-1 \Leftrightarrow \sqrt{d}-\sqrt{a} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{d} = \sqrt{a}+1$.
Bình phương hai vế ta có $d = a+2\sqrt{a}+1 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \dfrac{d-a-1}{2}$.
Do đó $\sqrt{a}$ là số hữu tỷ. Mà a là số nguyên dương nên $\sqrt{a}$ là số nguyên. Vì vậy a là số chính phương.

Câu 5. Với x, y, z là các số thực thỏa mãn $xyz = 1$, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = 1.$$

Lời giải.
Ta có

$$\frac{1}{yz+y+1} = \frac{xyz}{yz+y+xyz} = \frac{xz}{xz+z+1} = \frac{xz}{xz+z+xyz} = \frac{x}{xy+x+1},$$
$$\frac{1}{xz+z+1} = \frac{xyz}{xz+z+xyz} = \frac{xy}{xy+x+1}.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{xy+x+1} = 1.$$

Câu 6. Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}$.

Lời giải.
Bổ đề: Cho $a, b, c > 0$. Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$.
Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.
Quay lại bài toán.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2x^2+y^2+3 = 2(x^2+1)+(y^2+1) \geq 4x+2y.$$

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{4x+2y}}$. (0.34)
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{4x+2y} + \frac{1}{6} \geq \frac{2}{\sqrt{6(4x+2y)}}.$$ (0.35)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Sử dụng bổ đề ở trên ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}\geq\dfrac{9}{4x+2y}$. (0.36)

Từ (0.34), (0.35) và (0.36), ta có $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}}\leq\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\dfrac{1}{9x}+\dfrac{1}{18y}+\dfrac{1}{6}\right)$.

Do đó $P\leq\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{6y}+\dfrac{1}{6z}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

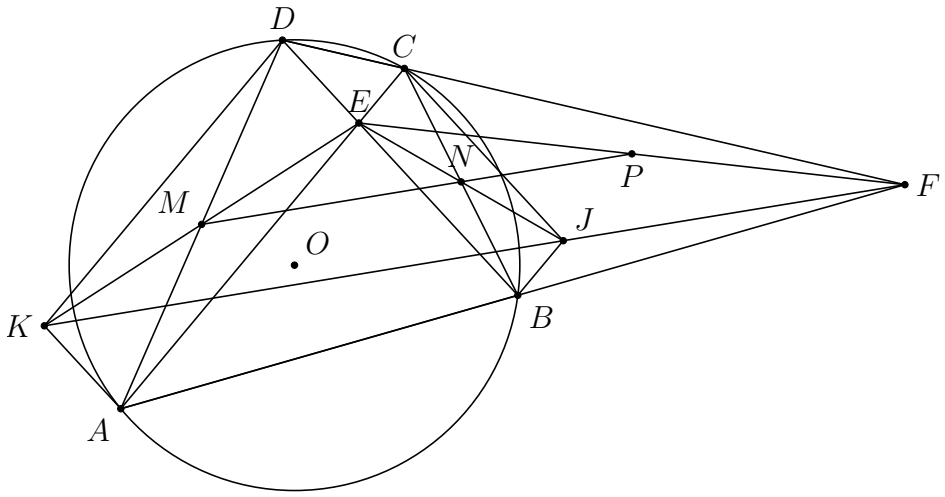
Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ (không có hai cạnh nào song song) nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA và CD cắt nhau tại điểm F. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ hình bình hành $AEDK$.

a) Chứng minh tam giác FKD đồng dạng với tam giác FEB.

b) Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

c) Chứng minh đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của tam giác EMN.

Lời giải.



a) Do $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FCB}=\widehat{FAD}$ và $\widehat{FBC}=\widehat{FDA}$.
Xét $\triangle FCB$ và $\triangle FDA$ có $\widehat{FCB}=\widehat{FAD}$ và $\widehat{FBC}=\widehat{FDA}$.
Do đó $\triangle FCB\backsim\triangle FAD$ (g-g). Suy ra $\dfrac{CB}{AD}=\dfrac{BF}{DF}$. (0.37)
Do $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ và $\widehat{DAC}=\widehat{DBC}$ (góc nội tiếp chắn cùng một cung).
Xét $\triangle ADE$ và $\triangle BCE$ có $\widehat{ADE}=\widehat{BCE}$ và $\widehat{DAE}=\widehat{CBE}$.
Do đó $\triangle ADE\backsim BCD$ (g-g). Suy ra $\dfrac{CB}{AD}=\dfrac{EB}{EA}$. (0.38)
Từ (0.37) và (0.38), ta có $\dfrac{BF}{DF}=\dfrac{EB}{EA}$.
Mặt khác $EA=KD$ (do $AEDK$ là hình bình hành), ta có $\dfrac{BF}{DF}=\dfrac{EB}{DK}$. (0.39)

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Ta có $\widehat{KDE} = \widehat{KAE}$ (do $AEDK$ là hình bình hành) và $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (do $ABCD$ nội tiếp).
Do đó $\widehat{KDF} = \widehat{KDE} + \widehat{EDC} = \widehat{KAE} + \widehat{CAB} = \widehat{KAF}$.
Mặt khác, do $AK \parallel DB$ nên $\widehat{KAF} = \widehat{EBF}$ (góc ở vị trí đồng vị).
Suy ra $\widehat{KDF} = \widehat{EBF}$ (0.40)
Từ (0.39) và (0.40), ta suy ra $\triangle KDF \backsim \triangle EBF$ (c-g-c).

b) Gọi P là trung điểm của EF. Ta dựng điểm J sao cho $BECJ$ là hình bình hành.
Chứng minh tương tự ta có $\triangle FED \backsim \triangle FJB$. Do đó $\widehat{BFI} = \widehat{DFE}$. (0.41)
Do $\triangle KDF \backsim \triangle EBF$ nên $\widehat{KFD} = \widehat{BFE}$.
Suy ra $\widehat{DFE} = \widehat{DFA} - \widehat{BFE} = \widehat{DFA} - \widehat{DFK} = \widehat{AFK}$. (0.42)
Từ (0.41) và (0.42), ta có $\widehat{BFJ} = \widehat{AFK}$. Vì vậy J thuộc KF.
Do $BECJ$ là hình bình hành nên N cũng là trung điểm EJ. Tương tự M cũng là trung điểm EK.
$\triangle EFJ$ có P, N là trung điểm của EF, EJ nên $NP \parallel JF$. (0.43)
$\triangle EKJ$ có M, N là trung điểm của EK, EJ nên $MN \parallel KJ$. (0.44)
Từ (0.43) và (0.44), ta có M, N, P thẳng hàng.
Vậy MN đi qua trung điểm của đoạn EF.

c) Do $\triangle EDA \backsim \triangle ECB$ nên $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{EA}{EB}$.
Lại có $DE = AK$, $EC = BJ$ nên $\dfrac{AK}{BJ} = \dfrac{EA}{EB}$.
Ta có $\widehat{EAK} = 180^\circ - \widehat{AED} = 180^\circ - \widehat{CEB} = \widehat{EBJ}$.
Xét $\triangle EAK$ và $\triangle EBJ$ có $\dfrac{AK}{BJ} = \dfrac{EA}{EB}$ và $\widehat{EAK} = \widehat{EBJ}$. Do đó $\triangle EAK \backsim \triangle EBJ$.
Suy ra $\widehat{AEK} = \widehat{BEJ}$.
Lại có $\widehat{DKE} = \widehat{AEK}$ (hai góc ở vị trí so le trong), nên $\widehat{DKE} = \widehat{BEJ}$. (0.45)
Theo chứng minh câu a), $\triangle DKF \backsim \triangle BEF$ nên $\widehat{DKF} = \widehat{BEF}$. (0.46)
Từ (0.45) và (0.46), ta có $\widehat{DKF} - \widehat{DKE} = \widehat{BEF} - \widehat{BEJ} \Rightarrow \widehat{EKJ} = \widehat{JEF}$.
Mặt khác, $\widehat{EKF} = \widehat{EMN}$ (hai góc ở vị trí đồng vị) nên $\widehat{EMN} = \widehat{JEF}$. Do đó, EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\triangle EMN$.

Câu 8. Cho tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \le x \le 50\}$. Xét A là một tập hợp con bất kì của tập hợp S và có tính chất: Không có ba phần tử nào của tập hợp A là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

a) Tìm một tập hợp A có đúng 40 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài.

b) Có hay không một tập hợp A có đúng 41 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài? Giải thích câu trả lời.

Lời giải.

a) **Bổ đề:** Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Khi đó, abc chia hết cho 5.
Ta giả sử a, b, c đều không chia hết cho 5.
Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể có số dư là 0, 1 hoặc 4. Do a, b, c không

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

chia hết cho 5 nên a^2, b^2, c^2 chia 5 có số dư là 1 hoặc 4.
Nếu a^2 và b^2 có cùng số dư khi chia cho 5 thì $a^2 + b^2$ chia 5 có số dư là 2 hoặc 3 (mâu thuẫn). Vậy a^2 và b^2 chia 5 có số dư khác nhau, do đó $a^2 + b^2$ chia hết cho 5. Suy ra c chia hết cho 5 (mâu thuẫn).
Do đó, giả sử phản chứng sai. Vì vậy abc chia hết cho 5.
Quay lại bài toán
Xét $A = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 50 \text{ và } x \vdots 5\}$. Sử dụng bổ đề trên, ta suy ra tập A không chứa ba phần tử nào tạo thành số đo ba cạnh của một tam giác vuông.

b) Ta xét $A = S \setminus \{5; 20; 30; 35; 50; 8; 9; 24; 36\}$.
Các số chia hết cho 5 nằm trong A là 10, 15, 25, 40, 45.

(a) Chỉ có $(6; 8; 10)$ và $(10; 24; 26)$ tạo thành ba cạnh của tam giác vuông chứa 10 mà 8,4, 24 không thuộc A.

(b) Chỉ có $(8, 15, 17)$, $(9, 12, 15)$, $(15, 20, 25)$ và $(15, 36, 39)$ tạo thành ba cạnh của tam giác vuông chứa 15 mà $8, 9, 20, 36$ không thuộc A.

(c) Chỉ có $(7, 24, 25)$ và $(15, 20, 25)$ tạo thành ba cạnh của tam giác vuông chứa 25 mà $24, 20$ không thuộc A.

(d) Chi có $(9, 40, 41)$, $(24, 32, 40)$ và $(30, 40, 50)$ tạo thành ba cạnh của tam giác vuông chứa 40 mà $9, 24, 30$ không thuộc A.

(e) Chỉ có $(27, 36, 45)$ tạo thành ba cạnh của tam giác vuông chứa 45 mà 36 không thuộc A.

Do đó, tập A đã chọn có 41 phần tử và thỏa mãn yêu cầu đề bài.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 32

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI, VÒNG 2, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Các số thực x, y không âm thỏa mãn $(x+1)(y+1)=2$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2}+xy.$$

Lời giải.

Vì x, y không âm nên $x+y\geq 0$ và $xy\geq 0$. Đặt $x+y=a\geq 0$ và $xy=b\geq 0$.
Từ điều kiện $(x+1)(y+1)=2$ ta suy ra $a+b=1$. Ta có

$$\begin{aligned}
P&=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2}+xy\\
&=\sqrt{(x+y)^2-2xy-\sqrt{2\left[x^2y^2+(x+y)^2-2xy+1\right]}+2}+xy\\
&=\sqrt{a^2-2b-\sqrt{2\left(b^2+a^2-2b+1\right)}+2}+b\\
&=\sqrt{a^2-2b-\sqrt{2\left[a^2+(1-b)^2\right]}+2}+b\\
&=\sqrt{a^2-2b-\sqrt{4a^2}+2}+b\\
&=\sqrt{a^2-2b-2a+2}+b\\
&=a+b=1.
\end{aligned}$$

Vậy $P=1$.

Câu 2. Các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q=x+y+z$.

Lời giải.

- Trước hết, ta đi chứng minh rằng $xy<2$, $yz<2$, $zx<2$. Giả sử ngược lại, $xy\geq 2$, ta có

$$x^2+y^2+x^2+x^2y^2\geq 2xy+x^2y^2\geq 2\cdot 2+2^2=8,$$

điều này mẫu thuẫn với giả thiết. Do đó $xy<2$. Tương tự $yz<2$, $zx<2$.
Trở lại bài toán, ta có

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6\\
\Leftrightarrow\ &(x+y+z)^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-2(xy+yz+zx)=6\\
\Leftrightarrow\ &(x+y+z)^2=6+xy(2-xy)+yz(2-yz)+zx(2-zx)\geq 6.
\end{aligned}$$

Do đó $Q\geq\sqrt{6}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=(\sqrt{6};0;0)$ và các hoán vị.
Vậy $Q_{\min}\sqrt{6}$ khi và chỉ khi $(x;y;z)=(\sqrt{6};0;0)$ và các hoán vị.

- Ta có

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6\\
\Leftrightarrow\ &6-(x+y+z)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-2(xy+yz+zx)\\
\Leftrightarrow\ &6-(x+y+z)^2=(xy-1)^2+(yz-1)^2+(zx-1)^2-3\geq 3.\\
\Rightarrow\ &(x+y+z)^2\leq 9\Rightarrow x+y+z\leq 3.
\end{aligned}$$

Do đó $Q_{\max}=3$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Câu 3.

a) Cho biểu thức $M=\dfrac{(a+b)^2}{a^3+ab^2-a^2b-b^3}$, với a,b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng M không thể nhận giá trị nguyên.

b) Cho a,b là hai số nguyên dương, đặt $A=(a+b)^2-2a^2$, $B=(a+b)^2-2b^2$. Chứng minh rằng A và B không đồng thời là số chính phương.

Lời giải.

a) Giả sử $M=\dfrac{(a+b)^2}{a^3+ab^2-a^2b-b^3}$ là một số nguyên (với a, b là hai số nguyên dương phân biệt). Ta có

$$\begin{aligned}
&M=\frac{(a+b)^2}{a^3+ab^2-a^2b-b^3}\\
\Rightarrow\ &(a+b)^2=M(a-b)(a^2+b^2)\\
\Rightarrow\ &(a+b)^2\vdots(a^2+b^2)\\
\Rightarrow\ &2ab\vdots(a^2+b^2).
\end{aligned}$$

Do $a,b\in\mathbb{N}^*$ nên để $2ab\vdots(a^2+b^2)$ thì $2ab\geq a^2+b^2\Leftrightarrow(a-b)^2\leq 0\Leftrightarrow a=b$. Điều này mâu thuẫn với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Do đó M không thể nhận giá trị nguyên.

b) Giả sử A và B đồng thời là hai số chính phương, tức là

$$A=m^2,\text{ và }B=m^2$$

với $m,n\in\mathbb{N}^*$. Gọi $d=(a;b)$. Khi đó $a=dx$ và $b=dy$ với $x,y\in\mathbb{N}^*$ và $(x;y)=1$. Ta có

$$m^2=(a+b)^2-2a^2=(dx+dy)^2-2d^2x^2=d^2\left[(x+y)^2-2x^2\right]. \tag{1}$$

Do đó $m^2\vdots d^2$, suy ra $m\vdots d$. Đặt $m=dp$ với $p\in\mathbb{N}^*$. Thay vào (1) ta được

$$p^2=(x+y)^2-2x^2.$$

Tương tự ta cũng có $q\in\mathbb{N}^*$ sao cho $q^2=(x+y)^2-2y^2$.
Do $(x;y)=1$ nên ta xét hai trường hợp sau:
+) Nếu x,y cùng lẻ thì $p^2=(x+y)^2-2x^2\equiv -2\equiv 2\pmod 4$ (vô lí).
+) Nếu x,y không cùng tính chẵn lẻ thì $q^2=(x+y)^2-2y^2\equiv 1-2\equiv 3\pmod 4$(vô lí).
Vậy A và B không đồng thời là số chính phương.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

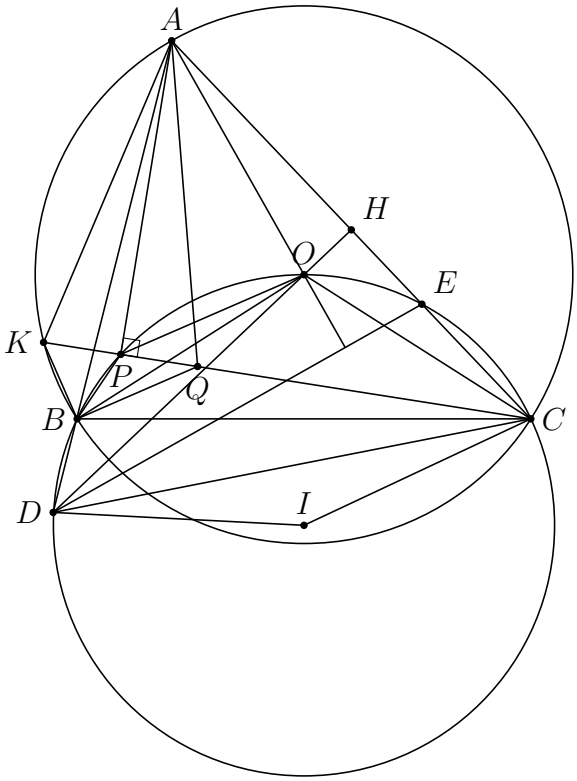
Câu 4. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại D và E. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC. Đường thẳng qua B song song với OP cắt PC tại Q. Chứng minh rằng:

a) $PB = PQ$.

b) O là trực tâm của tam giác ADE.

c) $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{PQB} = \widehat{QPO}$ (so le trong), mà $\widehat{QPO} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{OC}$ nên $\widehat{PQB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{OC}$. (1)

Mặt khác, do $PO \parallel BQ$ nên $\widehat{QBO} = \widehat{BOP} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BP}$. Do đó

$$\widehat{PBQ} = \widehat{OBQ} + \widehat{OBP} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BP} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{OP} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{OB}. \quad (2)$$

Xét đường tròn (I) ngoại tiếp $\triangle OBC$, vì $OB = OC$ nên từ (1) và (2) ta có $\widehat{PQB} = \widehat{PBQ}$, suy ra $\triangle PQB$ cân tại B. Do đó $PB = PQ$.

b) Ta có $\widehat{ABO} = \widehat{OCD}$ (do tứ giác $OBDC$ nội tiếp đường tròn (I)), $\widehat{ABO} = \widehat{BAO}$ (do $OA = OB$), $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$ (do $OC = OA$) nên

$$\widehat{DAC} = \widehat{OAB} + \widehat{OAC} = \widehat{ABO} + \widehat{OCA} = \widehat{OCD} + \widehat{OCA} = \widehat{DCA}.$$

Do đó $\triangle DAC$ cân tại D, suy ra $DA = DC$. Mà $OA = OC$ nên DO là đường trung trực của đoạn thẳng AC và do đó, $DO \perp AC$ tại H. (3)
Xét đường tròn (I) có $\widehat{ODE} = \widehat{OCE}$ (cùng chắn cung OE), mà $\widehat{OCE} = \widehat{OAE}$ (do $OC = OA$) nên $\widehat{ODE} = \widehat{OAE}$. Do đó $AO \perp DE$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra O là trực tâm của tam giác ADE.

c) Gọi K là giao điểm của CP và (O). Ta có $\widehat{BPC} = \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{BKC}$ nên $\triangle PKB$ cân tại P. Do đó $PK = PB$. Mà $PB = PQ$ nên $PK = PQ$. Hơn nữa, $AP \perp KQ$ nên $\widehat{PAQ} = \widehat{PAK}$. Mặt khác

$$\widehat{PAK} = 90^\circ - \widehat{AKC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\widehat{OAC}\right) = \widehat{OAC}.$$

Do đó $\widehat{PAO} = \widehat{PAQ} + \widehat{QAO} = \widehat{PAK} + \widehat{QAO} = \widehat{OAC} + \widehat{QAO} = \widehat{QAC}$.

Câu 5. Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen nhau giữa họ, người ta thấy rằng: nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi S là số cặp người quen nhau trong một cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

a) Xây dựng ví dụ để $S = 870$.

b) Chứng minh $S \leq 870$.

Lời giải.

a) Chia 45 người thành 9 nhóm, trong đó: nhóm 1 có 1 người, nhóm 2 có 2 người,..., nhóm 9 có 9 người thỏa mãn cả hai điều kiện sau

- Trong một nhóm bất kì không tồn tại hai người quen nhau.
- Mỗi người trong một nhóm quen tất cả các người trong các nhóm còn lại.

Khi đó các nhóm này thỏa mãn điều kiện bài ra. Ta có

$$S = \frac{1}{2}(1 \cdot 44 + 2 \cdot 43 + \cdots + 9 \cdot 36) = 870.$$

b) Gọi a_i là số người quen đúng i người khác $(1 \leq i \leq 44)$. Nếu người P quen i người thì P không quen ai trong a_i người này, nghĩa là P quen nhiều nhất $45 - a_i$ người, hay $i \leq 45 - a_i$, suy ra $a_i \leq 45 - i$. Ta có $a_1 + a_2 + \cdots + a_{44} = 45$ và

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 44a_{44}) \\ &\leq \frac{1}{2}(36a_1 + 36a_2 + \cdots + 36a_{36} + 37a_{37} + \cdots + 44a_{44}) \\ &= \frac{1}{2}\left[36\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{44}\right) + a_{37} + 2a_{38} + \cdots + 8a_{44}\right] \\ &\leq \frac{1}{2}(36 \cdot 45 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + \cdots + 8 \cdot 1) = 870. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 33

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI, VÒNG 1, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức

$$P=\frac{2}{(x+1)\sqrt{x+1}+(x-1)\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}},\quad \text{với } x>1.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P=x-1$.

Lời giải.

a) Với $x>1$, ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^3}+\sqrt[3]{(x-1)^3}}\cdot\frac{2x-\sqrt{x+1}.\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}+x-1\right)}\cdot\frac{\left(2x-\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}\right)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(2x-\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}\right)}\cdot\frac{\left(2x-\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}\right).\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1-(x-1)}=\frac{2\sqrt{x+1}}{2}\\
&= \sqrt{x+1}.
\end{aligned}$$

b) Với $x>1$ ta có

$$\begin{aligned}
P=x-1 &\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-1\\
&\Leftrightarrow x+1=(x-1)^2\\
&\Leftrightarrow x(x-3)=0.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \text{ (không thỏa mãn)}\\ x=3 \text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy với $x=3$ thì $P=x-1$.

Câu 2. Một nhà máy chuyên sản xuất một loại sản phẩm. Năm 2015, nhà máy sản xuất được 5000 sản phẩm. Do ảnh hưởng của thị trường tiêu thụ nên sản lượng của nhà máy trong các năm 2016 và 2017 đều giảm. Cụ thể: số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong 2016 giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015, số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 cũng giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2016. Biết rằng số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 giảm 51% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong 2015. Tìm x.

Lời giải.

Điều kiện $0 < x < 100$.

Số sản phẩm nhà máy đó sản xuất được trong năm 2016 là:

$$5000 - 5000 \cdot x\% = 5000 - 50x \text{ (sản phẩm)}.$$

Số sản phẩm nhà máy đó sản xuất được trong năm 2017 là:

$$\begin{aligned} 5000 - 50x - (5000 - 50x) \cdot x\% &= 5000 - 50x - \frac{(100-x)x}{2} \\ &= \frac{x^2 - 200x + 10000}{2} \text{ (sản phẩm)}. \end{aligned}$$

Số sản phẩm năm 2017 giảm 51% so với năm 2015 nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 200x + 10000}{2} = 5000 - 5000 \cdot 51\% \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 200x + 10000 = 4900 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 200x + 5100 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 30 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 170 \text{ (không thỏa mãn)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $x = 30$.

Câu 3. Cho phương trình $x^3 - x - 1 = 0$. Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho.

a) Chứng minh $x_0 > 0$.

b) Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{x_0^2 - 1}{x_0^3} \cdot \sqrt{2x_0^2 + 3x_0 + 2}.$$

Lời giải.

a) Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $x_0 < -1$ ta có $x_0^3 - x_0 = x_0(x_0^2 - 1)$.
  Vì $x_0 < -1$ nên $x_0^2 - 1 > 0$ suy ra $x_0^3 - x_0 - 1 < 0$ (vô lý)
- Nếu $-1 \le x_0 < 0$ ta có $x_0^3 - x_0 < -x_0 \le 1$ (vô lý)

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

- Nếu $x_0 = 0$, ta thấy không phải là nghiệm của phương trình
  Vậy $x_0 > 0$.

b) Ta đặt $x_0 = a$ $(a > 0)$ để tiện biến đổi

$$M = \frac{a^2-1}{a^3}.\sqrt{2a^2+3a+2} = \frac{(a-1)(a+1)}{a^3}.\sqrt{2a^2+3a+2}$$

Vì $a^3 - a - 1 = 0 \Rightarrow a^3 = a + 1 > 1$ (vì $a > 0$), từ đó suy ra $a^3 > 1$ hay $a > 1$. Vậy

$$M = (a-1)\sqrt{2a^2+3a+2} > 0. \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{aligned} M^2 &= (a-1)^2(2a^2+3a+2) \\ &= (a^2-2a+1)(2a^2+3a+2) \\ &= 2a^4+3a^3+2a^2-4a^3-6a^2-4a+2a^2+3a+2 \\ &= 2a^4-a^3-2a^2-a+2. \end{aligned}$$

mặt khác $a^3 = a + 1$ suy ra $a^4 = a^2 + a$
suy ra

$$M^2 = 2(a^2+a) - a^3 - 2a^2 - a + 2 = -a^3 + a + 2 = -(a^3 - a - 1) + 1 = 1.$$

Mà $M > 0$ (chứng minh trên) suy ra $M = 1$.
Vậy $M = 1$.

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $BC = a, AB = b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Qua điểm M dựng đường thẳng cắt đường chéo AC của hình chữ nhật $ABCD$ tại điểm P và cắt đường thẳng BC tại Q sao cho B nằm giữa C và Q.

1) Khi $MP \perp AC$, hãy:

   a) Tính PQ theo a và b

   b) Chứng minh $a \cdot BP = b \cdot PN$.

2) Chứng minh $\widehat{MNP} = \widehat{MNQ}$ (không nhất thiết MP và AC vuông góc với nhau).

Lời giải.

1) Trường hợp $MP \perp AC$

   (a) Tính PQ

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta có $AC = \sqrt{a^2+b^2}$

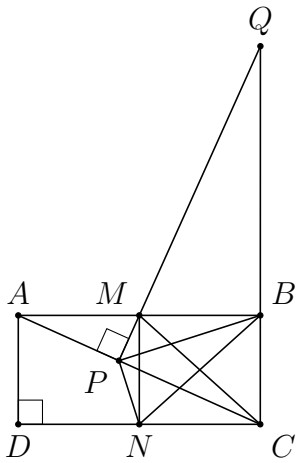
$PM = AM \sin \widehat{BAC} = AM \cos \widehat{BCA} = \dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

$MQ = \dfrac{MB}{\cos \widehat{BMQ}} = \dfrac{MB}{\cos \widehat{BCA}} = \dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a}$

$PQ = PM + QM$

$= \dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a}$

$= \dfrac{b(2a^2+b^2)}{2a\sqrt{a^2+b^2}}$



(b) Chứng minh $a \cdot BP = b \cdot PN$

Vì $\widehat{MPC} = \widehat{MNC} = \widehat{MBC} = 90^\circ$

suy ra B, M, P, N, C cùng thuộc một đường tròn đường kính BN.

$\Rightarrow \widehat{BPN} = \widehat{BMN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BN)

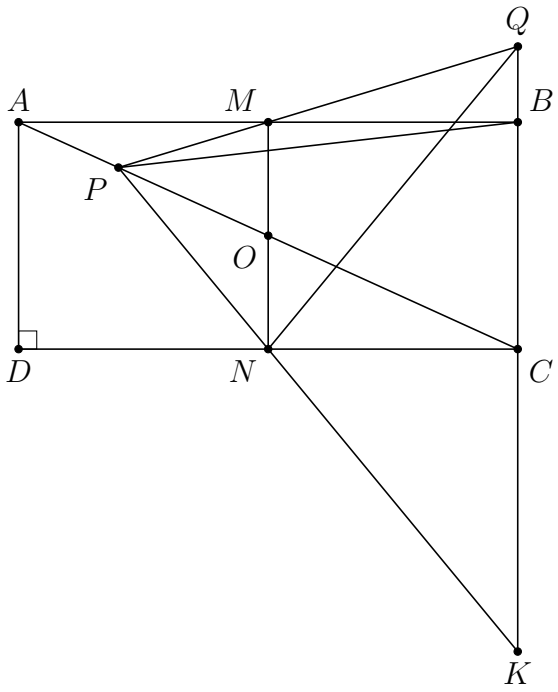
$\Rightarrow \widehat{PNB} = \widehat{BCP}$ (cùng chắn $\widehat{PB}$)

Xét $\triangle BPN$ và $\triangle ABC$ có: $\begin{cases} \widehat{BPN} = \widehat{ABC} = 90^\circ \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{PNB} = \widehat{BCA} \text{ (cùng bằng } \widehat{BCP}) \end{cases}$

suy ra $\triangle BPN \backsim \triangle ABC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{BP}{PN} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{b}{a}$.

2)



Gọi K là giao điểm của BC và PN; O là giao điểm của MN và AC.

Ta có $\dfrac{OM}{CQ} = \dfrac{ON}{CK} \Rightarrow CQ = CK$ (vì $OM = ON$).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\Rightarrow \triangle QNK$ cân $\Rightarrow \widehat{CQN} = \widehat{CKN}$;
mà $\widehat{CQN} = \widehat{MNQ}$ (so le trong); $\widehat{PNM} = \widehat{CKN}$ (đồng vị)
$\Rightarrow \widehat{MNQ} = \widehat{MNP}$.

Câu 5. Cho các số nguyên $x,\ x_1, x_2\ \ldots, x_9$ thỏa mãn

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_9) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_9) = x$$

Tính $P = x.\, x_1.\, x_2\ \ldots\ x_9$.

Lời giải.

- Nếu tồn tại i $(i = \overline{1;9})$ mà $|x_i| = 1$ ta có $x = 0 \Rightarrow P = x.\, x_1.\, x_2\ \ldots\ x_9 = 0$.
- Nếu tồn tại i $(i = \overline{1;9})$ mà $x_i = 0 \Rightarrow P = x.\, x_1.\, x_2\ \ldots\ x_9 = 0$
- Xét trường hợp $x_i \neq 0$ và $x_i \neq 1; x_i \neq -1$,
  Ta có

$$\begin{aligned} x^2 &= (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_9).(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_9) \\ x^2 &= (1-x_1^2)(1-x_2^2)\ldots(1-x_9^2) \end{aligned}$$

  Vì $x_i \neq 0; x_i \neq 1; x_i \neq -1$ và $x_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 - x_i^2 < 0$
  $\Rightarrow (1-x_1^2)(1-x_2^2)\ldots(1-x_9^2) < 0$
  $\Rightarrow x^2 < 0$ (vô lý).
  Vậy $P = 0$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 34

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TỈNH BÌNH ĐỊNH, VÒNG 2, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

1. Cho biểu thức

$$T=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right),$$

với $a\neq b, a>0, b>0$.

a) Rút gọn biểu thức T.

b) Chứng tỏ $T>1$.

2. Cho n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng số $20^n-3^n+16^n-1$ chia hết cho số 323.

Lời giải.

1.

a) Rút gọn biểu thức T.

$$\begin{aligned}T&=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right)\\&=\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\\&=\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\\&=\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}.\end{aligned}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a, b, cùng với điều kiện $a\neq b$, ta được

$$a+b>2\sqrt{ab}.$$

Do đó

$$T=\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}>\frac{2\sqrt{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1.$$

Vậy $T>1$.

2. Bài này ta áp dụng kiến thức, với mọi số a, b và số tự nhiên n, thì

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

- $a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$, $a \neq b$.
- $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia hết cho $a + b$.
- $a^{2n} - b^{2n}$ chia hết cho $a + b$.

Đặt $A = 20^n - 3^n + 16^n - 1$.
Ta phân tích 323 thành tích các số nguyên tố, khi đó $323 = 17 \cdot 19$.
Ta sẽ chứng minh A chia hết cho 19 và A chia hết cho 17.

- Do $20^n - 3^n$ chia hết cho $20 - 3 = 17$ và $16^n - 1$ chia hết cho $16 + 1 = 17$ (n chẵn) nên A chia hết cho 17.
- Do $20^n - 1$ chia hết cho $20 - 1 = 19$ và $16^n - 3^n$ chia hết cho $16 + 3 = 19$ (n chẵn) nên A chia hết cho 19.

Vậy $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho $17 \cdot 19 = 323$.

Câu 2.

1. Giải bất phương trình $3x + 2 \leq \sqrt{7x + 8}$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{y} = 3 \\ x + y + \dfrac{6}{x + y} = -5 \end{cases}$.

Lời giải.

1. Điều kiện $7x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{8}{7}$.
•TH1
$-\dfrac{8}{7} \leq x \leq -\dfrac{2}{3}$
Khi đó $7x + 8 \leq 0 \leq \sqrt{7x + 8}$ (thỏa).
•TH2
$-\dfrac{2}{3} \leq x$
Bất phương trình đã cho tương đương

$$(3x + 2)^2 \leq 7x + 8 \Leftrightarrow 9x^2 + 5x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(9x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{9}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $-\dfrac{2}{3} \leq x \leq \dfrac{4}{9}$.
Vậy các giá trị x thỏa bất phương trình là $-\dfrac{8}{7} \leq x \leq \dfrac{4}{9}$.

2. Điều kiện $x, y \neq 0$.

$$\begin{cases} x + y - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{y} = 3 \\ x + y + \dfrac{6}{x + y} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + y) - 4(x + y) - 3xy = 0 & (1) \\ (x + y)^2 + 5(x + y) + 6 = 0. & (2) \end{cases}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$(2) \Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-2 \\ x+y=-3. \end{array}\right.$

•TH1:$x+y=-2$ thay vào (1), ta được $-2xy+8-3xy=0 \Leftrightarrow xy=\dfrac{8}{5}$.

Áp dụng định lí Vi-et đảo, x, y là nghiệm của phương trình $t^2+2t+\dfrac{8}{5}=0$ (vô nghiệm).

•TH2:$x+y=-3$, thay vào (1) ta được $-3xy+12-3xy=0 \Leftrightarrow xy=2$.

Áp dụng định lí Vi-et đảo, x, y là nghiệm của phương trình $t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2. \end{array}\right.$

Suy ra, tập nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\{(-1;-2);(-2;-1)\}$.

Câu 3. Cho phương trình: $(m-1)x^2-2(2m-3)x-5m+25=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị m là số nguyên sao cho phương trình có nghiệm là số hữu tỉ.

Lời giải.

• TH1: $m=1$. Phương trình đã cho trở thành

$$2x+20=0 \Leftrightarrow x=-10 \text{ (thỏa ycbt).}$$

• TH2: $m \neq 1$. Ta có $\Delta'=(2m-3)^2-(m-1)(-5m+25)=9m^2-42m+34$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9m^2-42m+34 \geq 0$ (1)

Khi đó nghiệm của phương trình là $x_{1,2}=\dfrac{2m-3 \pm \sqrt{\Delta}}{m-1}$.

Vậy để phương trình có nghiệm hữu tỉ thì $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9m^2-42m+34=n^2$ (với $n \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow (3m-7)^2+15=n^2 \Leftrightarrow (3m-7-n)(3m-7+n)=15$.

Ta có $15=1 \cdot 15=-1 \cdot (-15)=3 \cdot 5=-3 \cdot (-5)$ và $3m-7-n<3m-7+n$ nên các trường hợp sau có thể xảy ra:

- $\begin{cases} 3m-7-n=1 \\ 3m-7+n=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ n=7 \end{cases}$ (thỏa (1)).
- $\begin{cases} 3m-7-n=3 \\ 3m-7+n=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{11}{3} \\ n=1 \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} 3m-7-n=-5 \\ 3m-7+n=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} 3m-7-n=-15 \\ 3m-7+n=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{1}{3} \\ n=7 \end{cases}$ (loại).

Vậy các giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{5;1\}$.

Câu 4.

1. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn và $AB \geqslant BC; BC \geqslant CA$. Xác định vị trí điểm M thuộc miền tam giác ABC (gồm các cạnh và miền trong tam giác) sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến ba cạnh là nhỏ nhất.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

2. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có các góc đều nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC và AD lần lượt tại K và I. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M và N. Gọi O là trung điểm BC. Chứng minh

   a) DA là phân giác của $\widehat{FDE}$.

   b) F là trung điểm của MN.

   c) $OD \cdot OK = OE^2$ và $BD \cdot DC = OD \cdot DK$.

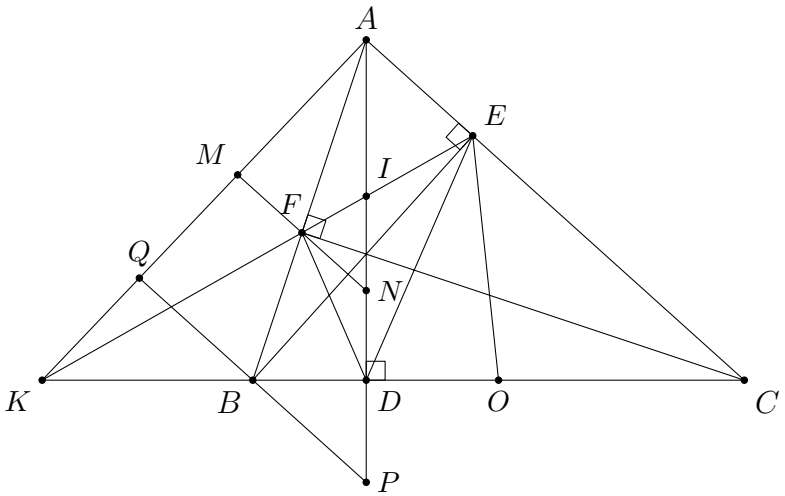
Lời giải.

1. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh AB, BC, CA và gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABM, BCM, CAB. Khi đó

$$d_1 = \frac{2S_1}{AB}, d_2 = \frac{2S_2}{BC}, d_3 = \frac{2S_3}{AC} \text{ và } S_1 + S_2 + S_3 = S_{\triangle ABC}.$$

   Ta có $d_1 + d_2 + d_3 = \dfrac{2S_1}{AB} + \dfrac{2S_2}{BC} + \dfrac{2S_3}{AC} \geqslant \dfrac{2S_1}{AB} + \dfrac{2S_2}{AB} + \dfrac{2S_3}{AB} = \dfrac{2S_1 + 2S_2 + 2S_3}{AB} = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB}$.
   Mà $\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB}$ là khoảng cách từ C đến cạnh AB nên $d_1 + d_2 + d_3$ nhỏ nhất khi M trùng với C.

2. Hình vẽ



   a) Chứng minh DA là phân giác của $\widehat{EDF}$.
   Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{FDA} &= \widehat{FBH} \text{ (tứ giác } FHDB \text{ nội tiếp)}\\ &= \widehat{HCE} \text{ (tứ giác } FBCE \text{ nội tiếp)}\\ &= \widehat{HDE} \text{ (tứ giác } HDCE \text{ nội tiếp)}\end{aligned}$$

   Vậy AD là phân giác của $\widehat{EDF}$ (đpcm).

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Chứng minh F là trung điểm của MN.

Xét $\triangle EDF$ có DI là phân giác trong (câu a) và DK là phân giác ngoài (do $DI \perp DK$)

$$\frac{IE}{IF} = \frac{KE}{KF} \left(= \frac{DE}{DF}\right) \Rightarrow \frac{FK}{FI} = \frac{EK}{EI}. \quad (1)$$

.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{FM}{FN} &= \frac{FM}{AE} \cdot \frac{AE}{FN} \\ &= \frac{FK}{EK} \cdot \frac{EI}{FI} \qquad \text{(Định lý Ta-lét với } MN \parallel AC) \\ &= \frac{FK}{FI} \cdot \frac{EI}{EK} \\ &= 1 \qquad \text{(do (1))} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow FM = FN.$$

Vậy F là trung điểm MN (đpcm).

c) Chứng minh $OD \cdot OK = OE^2$ và $BD \cdot DC = OD \cdot DK$.

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AD, AK lần lượt tại P, Q. Khi đó dễ thấy B là trung điểm PQ. Theo định lý Ta-lét với $PQ \parallel AC$ ta có

$$\begin{aligned} 1 = \frac{BQ}{BP} = \frac{BQ}{AC} \cdot \frac{AC}{BP} = \frac{KB}{KC} \cdot \frac{DC}{DB} \\ \Rightarrow KB \cdot DC = DB \cdot KC \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có $\triangle BEC$ vuông tại E có OE là trung tuyến nên $OE = OB = OC$.

Từ đó (2) $\Rightarrow (OK - OB)(OD + OC) = (OB - OD)(OK + OC)$

$\Rightarrow (OK - OE)(OD + OE) = (OE - OD)(OE + OE)$

$\Rightarrow OD \cdot OK = OE^2$ (đpcm).

Mặt khác (2) $\Rightarrow (DK - DB) \cdot DC = DB \cdot (DK + DC)$

$\Rightarrow DK \cdot DC - DB \cdot DC = DB \cdot DK + DB \cdot DC$

$\Rightarrow DK \cdot (DC - DB) = 2DB \cdot DC$

$\Rightarrow 2DK \cdot DO = 2DB \cdot DC.$

Vậy $BD \cdot DC = OD \cdot DK$ (đpcm).

Câu 5. Cho hai số dương a, b thỏa $a + \dfrac{1}{b} = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Ta có $1 = a + \dfrac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{b}} \Rightarrow \dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 &= a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + b^2 + 4 \\
&= a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\dfrac{1}{b^2}} + 4 \\
&= a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2 + \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{a^2}{b^2}} + 4 \\
&\geqslant a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2 + \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{16}} + 4 \\
&= 17\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) + 4 \\
&\geqslant \frac{17\left(a + \dfrac{1}{b}\right)^2}{2} + 4 \\
&= \frac{25}{2}.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{1}{2}, b = 2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 35

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BẾN TRE, TỈNH BẾN TRE, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{a\sqrt{b}+\sqrt{a}-b\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}$ với a,b là hai số thực dương.

a) Rút gọn biểu thức $P:\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a+b)}$.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $a=2019+2\sqrt{2018}$ và $b=2020+2\sqrt{2019}$.

Lời giải.

a) Ta có $P=\dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{1+\sqrt{ab}}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{ab}+1\right)}{1+\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P:\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a+b)}&=P\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a+b)\\&=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a+b)\\&=(a-b)(a+b)=a^2-b^2.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{2019+2\sqrt{2018}}-\sqrt{2020+\sqrt{2019}}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{2018}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2019}+1\right)^2}=\sqrt{2018}-\sqrt{2019}.\end{aligned}$$

Câu 2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng p^2-1 chia hết cho 24.

Lời giải.

Ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p$ là số lẻ.

$\Rightarrow p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp nên $p^2-1\vdots 8$.

p là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}p=3k+1\\p=3k+2\end{array}\right.$ với $k\geq 1$.

- $p=3k+1\Rightarrow (p-1)(p+1)=3k(p+1)\vdots 3$.
- $p=3k+2\Rightarrow (p-1)(p+1)=3(p-1)(k+1)\vdots 3$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Từ đó suy ra p^2-1 chia hết cho $3;8$.

Mà $(3;8)=1 \Rightarrow p^2-1 \vdots 24$.

Câu 3. Cho phương trình $x^2-2mx-m-4=0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2+m+4>0 \Leftrightarrow \left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=-m-4. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^2+x_2^2} &= \frac{1}{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2} = \frac{1}{4m^2+2m+8} \\ &= \frac{1}{\left(2m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{31}{4}} \le \frac{1}{\frac{31}{4}} = \frac{4}{31}. \end{aligned}$$

Vậy $\max \dfrac{1}{x_1^2+x_2^2} = \dfrac{4}{31} \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 4. Giải phương trình $\sqrt{x^3+1}=x^2-3x-1$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+1 \ge 0 \\ x^2-3x-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2-3x-1 \ge 0. \end{cases}$

Ta có

$$\sqrt{x^3+1}=x^2-3x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=(x^2-x+1)-2(x+1).$$

Đặt $a=\sqrt{x+1}; b=\sqrt{x^2-x+1}; (a \ge 0, b>0)$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} b^2-2a^2=ab &\Leftrightarrow 2a^2+ab-b^2=0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)(2a-b)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a=b \end{array}\right. \Leftrightarrow 2a=b \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1} &\Leftrightarrow x^2-5x-3=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2} (\text{TMĐK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=2 \\ (x-2y)(1-2xy)=4. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x^2+4y^2=2 \\ (x-2y)(1-2xy)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4xy+4y^2=2\,(1-2xy) \\ (x-2y)(1-2xy)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=2(1-2xy) \\ (x-2y)(1-2xy)=4 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} a=x-2y \\ b=1-2xy \end{cases}$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} a^2=2b \\ ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=2 \\ 1-2xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3-xy+2=x+y$.

Lời giải.

Biến đổi phương trình thành

$$(x+1)(x^2-x-y)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=-2 \\ x^2-x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=2 \\ x^2-x-y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=1 \\ x^2-x-y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=-1 \\ x^2-x-y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=11 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(-3;11),(1;1),(0;2),(-2;4)$.

Câu 7. Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$T=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4a+4b}{a}+\frac{a+b}{b}=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geq 5+4=9.$$

Vậy $\min T=9$ khi $a=\dfrac{2}{3};b=\dfrac{1}{3}$.

Câu 8. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khác A,B), tia AM cắt đường thẳng d tại điểm N. Gọi C là trung điểm đoạn thẳng AM, tia CO cắt đường thẳng d tại điểm D.

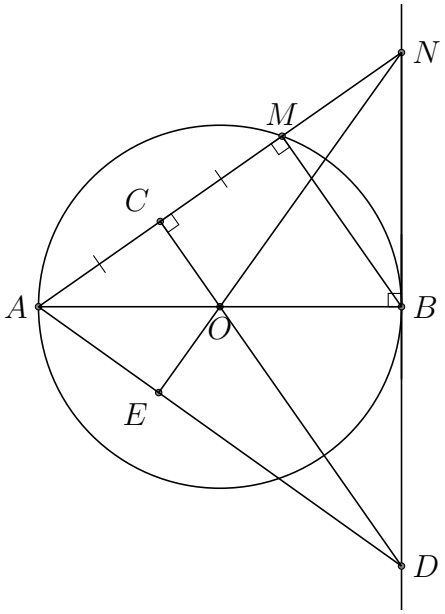
a) Chứng minh tứ giác $OBNC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi E là hình chiếu của N trên đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng ba điểm N, O, E thẳng hàng và $\dfrac{NE \cdot AD}{ND} = 2R$.

c) Chứng minh rằng $CA \cdot CN = CO \cdot CD$.

d) Xác định vị trí của điểm M để $2AM + AN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



a) Do C là trung điểm của AM nên $OC \perp AM$.
Tứ giác $OCBN$ có $\widehat{OCM} = \widehat{OBN} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn.

b) Xét trong tam giác ADN có DC, AB lần lượt là các đường cao.
Do đó O là trực tâm tam giác $\Rightarrow N, O, E$ thẳng hàng.
Ta có $S_{AND} = \dfrac{1}{2}NE \cdot AD = \dfrac{1}{2}AB \cdot DN$
$\Rightarrow NE \cdot AD = 2R \cdot DN \Rightarrow \dfrac{NE \cdot AD}{DN} = 2R.$

c) Xét hai tam giác vuông CAO và CDN ta có
$\widehat{CDN} = \widehat{MBN} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{MB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).
$\widehat{MAB} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{MB}$ (góc nội tiếp).
Suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{CDN}$ (cùng phụ với $\widehat{CND}$).
Từ đó ta có $\triangle CAO \backsim \triangle CDN \Rightarrow \dfrac{CA}{CO} = \dfrac{CD}{CN} \Rightarrow CA \cdot CN = CO \cdot CD.$

d) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có
$2AM + AN \geq 2\sqrt{2AM \cdot AN} = 2\sqrt{2AB^2} = 4R\sqrt{2}.$
Vậy $\min 2AM + AN = 4R\sqrt{2}$ khi $AM = \dfrac{AN}{2} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 36

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BẮC NINH, TỈNH BẮC NINH, NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right):\dfrac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$ với $|a|>|b|>0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}P&=\dfrac{\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}{b^2}:\dfrac{4|a|\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\\&=4a\sqrt{a^2-b^2}:\left(4|a|\sqrt{a^2-b^2}\right)\\&=\dfrac{a}{|a|}\end{aligned}$$

Do đó nếu $a>0$ thì $P=1$; nếu $a<0$ thì $P=-1$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2+ax+b=0\quad(1)$, với x là ẩn, a, b là tham số. Tìm a,b biết phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases}x_1-x_2=5\\x_1^3-x_2^3=35.\end{cases}$

Lời giải.

Phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi $a^2-4b\geq 0$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-a\\x_1x_2=b.\end{cases}$

Ta có $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)^3+3x_1x_2(x_1-x_2)$. Suy ra $35=125+15b\Leftrightarrow b=-6$.

Mà $x_1=x_2+5$ nên $x_2(x_2+5)=-6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2=-2\\x_2=-3.\end{array}\right.$

Với $x_2=-2\Rightarrow x_1=3\Rightarrow a=-1$ (thỏa mãn).

Với $x_2=-3\Rightarrow x_1=2\Rightarrow a=1$ (thỏa mãn). Vậy $a=-1,b=-6$ hoặc $a=1,b=-6$.

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=x+3$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq-\dfrac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2\sqrt{x+3}+2\sqrt{3x+1}\leq\dfrac{4+x+3}{2}+\dfrac{4+3x+1}{2}=2x+6$$

Suy ra $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\leq x+3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\\\sqrt{3x+1}=4\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Thử lại $x=1$ thỏa mãn phương trình đã cho.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 4. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Lời giải.
Ta có $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\dfrac{1}{2}(a-b)^2+\dfrac{1}{2}(b-c)^2+\dfrac{1}{2}(c-a)^2\ge 0$.
Nên $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow P\ge 1$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Vì $0\le a,b,c\le 2$ nên

$$(2-a)(2-b)(2-c)\ge 0\Leftrightarrow abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8\le 0.$$

Do đó $ab+bc+ca\ge\dfrac{abc+4}{2}\ge 2$.
Suy ra

$$P=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=\frac{9}{ab+bc+ca}-2\le\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=1,c=0$ và các hoán vị.

Câu 5. Tìm cặp số nguyên tố (x,y) thỏa mãn phương trình $x^2-2y^2=1$.

Lời giải.
Vì vế phải lẻ nên x là số nguyên tố lẻ.
Do đó $2y^2=x^2-1=(x-1)(x+1)\vdots 4\Rightarrow y^2\vdots 2\Rightarrow y$ là số chẵn.
Mặt khác y là số nguyên tố nên $y=2$. Thay vào phương trình ban đầu được $x=3$.
Vậy $x=3;y=2$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Câu 6. Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của hai số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải.
Giả sử $n^2=(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$, suy ra

$$4n^2=12k^2+12k+4\Leftrightarrow(2n-1)(2n+1)=3(2k+1)^2.$$

Vì $2n-1$, $2n+1$ là hai số lẻ liên tiếp nên chúng nguyên tố cùng nhau. Do đó $\begin{cases}2n-1=3t^2\\2n+1=s^2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2n+1=3t^2\\2n-1=s^2\end{cases}$ với s,t là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $st=2k+1$; s không chia hết cho 3.
Vì s lẻ nên $s=6m+1$ hoặc $6m-1$.
Trường hợp 1: $\begin{cases}2n-1=3t^2\\2n+1=s^2.\end{cases}$
Từ $2n+1=s^2=(6m\pm 1)^2=36m^2\pm 12m+1\Rightarrow 3t^2=2n-1=36m^2\pm 12m-1$ (vô lí).
Trường hợp 2: $\begin{cases}2n+1=3t^2\\2n-1=s^2.\end{cases}$
Từ $2n-1=s^2\Rightarrow 2n=36m^2\pm 12m+2$ nên $n=(3m)^2+(3m\pm 1)^2$.
Vậy ta được điều phải chứng minh.

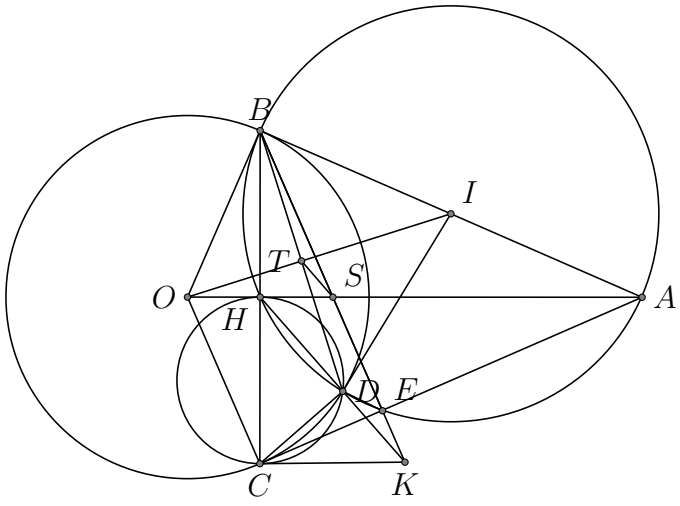
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 7. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) với B, C là các tiếp điểm. Gọi H là giao điểm của AO và BC. Đường tròn đường kính CH cắt đường tròn (O) tại điểm D khác C. Gọi T là trung điểm của BD.

a) Chứng minh tứ giác $ABHD$ nội tiếp.

b) Gọi E là giao điểm của đường tròn đường kính AB và AC (E khác A); S là giao điểm của AO và BE. Chứng minh rằng TS song song với HD.

Lời giải.



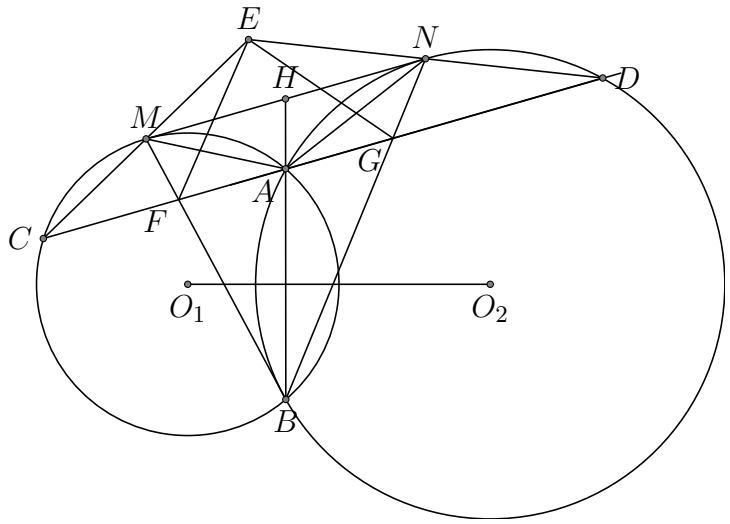
a) Ta có $AH \perp HC$ nên AH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $CH \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{HCD}$.
Mà $\widehat{HCD} = \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{ABD}$.
Do đó tứ giác $ABHD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

b) Kéo dài HD, BE cắt nhau tại K.
Ta có $\widehat{HDC} = 90^\circ$ mà $\widehat{BEA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CDK} = \widehat{CEK} = 90^\circ$.
Nên tứ giác $CDEK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EDK}$.
Mặt khác, do tứ giác $BHDE$ nội tiếp nên $\widehat{EDK} = \widehat{KBH}$. Do đó $\widehat{ECK} = \widehat{KBH}$.
Trong tam giác BCE có $\widehat{EBH} + \widehat{BCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ECK} + \widehat{BCE} = 90^\circ$ hay $CK \perp HC$.
Do đó CK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CH.
Trong tam giác BCK có $\begin{cases} HS \perp BC \\ CK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HS \parallel CK$.
Mà H là trung điểm của BC nên S là trung điểm của BK.
Trong tam giác BDK, TS là đường trung bình nên $TS \parallel DK \Rightarrow TS \parallel HD$.

Câu 8. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với M thuộc (O_1) và N thuộc (O_2). Qua A kẻ đường thẳng d song song với MN, d cắt $(O_1), (O_2), BM, BN$ lần lượt tại C, D, F, G (C, D khác A). Gọi E là giao điểm của CM và DN. Chứng minh rằng $EF = EG$.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Gọi H là giao điểm của AB và MN.
Ta có $\widehat{EMN} = \widehat{ECA} = \widehat{NMA}$; $\widehat{ENM} = \widehat{EDA} = \widehat{MNA}$.
Do đó $\triangle EMN = \triangle AMN \Rightarrow MN$ là trung trực của $AE \Rightarrow AE \perp MN \Rightarrow AE \perp FG$.
Ta lại có $\triangle HMA \backsim \triangle HBM \Rightarrow HM^2 = HA \cdot HB$.
Tương tự $Hn^2 = HA \cdot HB \Rightarrow HM = HN \Rightarrow AF = AG$.
Trong tam giác EFG, AE vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle EFG$ cân tại $E \Rightarrow EF = EG$.

Câu 9. Cho 20 số tự nhiên, mỗi số có ước nguyên tố không vượt quá 7. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai số trong số 20 số đã cho mà tích của hai số đó là số chính phương.

Lời giải.

Gọi 20 số là n_1, $n_2 \dots n_{20}$.
Do ước nguyên tố của mỗi số không vượt quá 7 nên $n_i = 2^{a_i} \cdot 3^{b_i} \cdot 5^{c_i} \cdot 7^{d_i}$, với $i = 1, 2, \dots, 20$.
Các số a_i, b_i, c_i, d_i nhận các giá trị chẵn hoặc lẻ, ta có 16 bộ 4 số có tính chất chẵn lẻ như vậy gồm: (chẵn, chẵn, chẵn, chẵn), (chẵn, chẵn, chẵn, lẻ),...,(lẻ, lẻ, lẻ, lẻ).
Với 20 số n_i ta có 20 bộ số (a_i, b_i, c_i, d_i). Vậy với 20 bộ số với 16 tính chất đã nêu, theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ít nhất hai bộ n_k và n_l với hai bộ số $(a_k, b_k, c_k, d_k), (a_l, b_l, c_l, d_l)$ tương ứng cùng tính chất chẵn lẻ như trên.
Khi đó $n_k \cdot n_l = 2^{a_k+a_l} \cdot 3^{b_k+b_l} \cdot 5^{c_k+c_l} \cdot 7^{d_k+d_l} = 2^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot 5^{2c} \cdot 7^{2d}$ là một số chính phương.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 37

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI, NĂM 2009 - 2010

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. *(3,0 điểm)*[9D5G2][9D5G3]

a) Tìm các số nguyên dương n để $A=\dfrac{(n-8)^2-48}{n+5}$ có giá trị là số nguyên dương.

b) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mã đẳng thức $x^2+y\left(y^2+y-3x\right)=0$.

Lời giải.

a) Ta có $A=n-21+\dfrac{121}{n+5}$ nên $n+5$ là ước của 121 và $n+5\geq 6$. Nên

$$\left[\begin{array}{ll} n+5 &= 11 \\ n+5 &= 121 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n &= 6 \\ n &= 116. \end{array}\right.$$

b) Biến đổi phương trình $x^2-3yx+y^3+y^2=0$. Coi x là ẩn, tính biệt thức

$$\Delta=9y^2-4y^3-4y^2=y^2(5-4y).$$

Do $\Delta\geq 0$ nên $y\leq\dfrac{5}{4}$. Vì y là số nguyên dương nên $y=1$.

Thay vào phương trình ban đầu $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(1;1)$ và $(x;y)=(2;1)$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*[9D5G5]

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x^2+1\right)y=2x^2\\ \left(y^2+1\right)z=2y^2\\ \left(z^2+1\right)x=2z^2.\end{cases}$

Lời giải.

Xét 2 trường hợp:

TH1: Nếu $x=0$ thì $y=0$ và $z=0$.

TH2: Nếu $x\neq 0$ thì $y>0, z>0, x>0$.

Nhân từng vế 3 phương trình với nhau, thu được:

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=8xyz. \tag{0.47}$$

Ta có $x^2+1\geq 2x,\quad y^2+1\geq 2y,\quad z^2+1\geq z$ nên $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\geq 8xyz$.

Nên phương trình (0.47) tương đương với $x=y=z=1$.

Từ đó thu được các nghiệm (x,y,z) là $(0;0;0),(1;1;1)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 3. *(3,0 điểm)*[9H3G7]
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC.

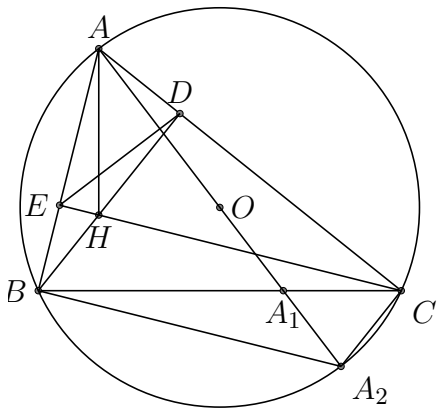
a) Chứng minh $AD \cdot AC = AE \cdot AB$.

b) Tia AO cắt BC tại A_1 và cắt cung nhỏ BC tại A_2, tia BO cắt AC tại B_1 và cắt cung nhỏ AC tại B_2. Tia CO cắt AB tại C_1 và cắt cung nhỏ AB tại C_2. Chứng minh

$$\frac{A_1A_2}{A_1A} + \frac{B_1B_2}{B_1B} + \frac{C_1C_2}{C_1C} = 1.$$

c) Từ A vẽ tia Ax vuông góc với DE. Cho BC cố định, điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC luôn có 3 góc nhọn. Chứng minh tia Ax luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên $BEDC$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ nên $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ ta được

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AD \cdot AC = AE \cdot AB.$$

b) Ta có $\dfrac{A_1A_2}{A_1A} = \dfrac{S_{CA_1A_2}}{S_{CA_1A}} = \dfrac{S_{BA_1A_2}}{S_{BA_1A}} = \dfrac{S_{CA_1A_2} + S_{BA_1A_2}}{S_{CA_1A} + S_{BA_1A}} = \dfrac{S_{A_2BC}}{S_{ABC}}$.

Gọi $H = BD \cap CE$ ta có $CH \perp AB$ và $BA_2 \perp AB$ nên $CH \parallel BA_2$.

Tương tự $BH \parallel CA_2$ nên $BHCA_2$ là hình bình hành.

Suy ra $S_{A_2BC} = S_{HBC}$. Ta được $\dfrac{A_1A_2}{A_1A} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$.

Vậy $\dfrac{A_1A_2}{A_1A} + \dfrac{B_1B_2}{B_1B} + \dfrac{C_1C_2}{C_1C} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{HCA}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}}$.

c) Ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ABC} = \widehat{AA_2C}$ nên $\widehat{ADE} + \widehat{A_2AC} = \widehat{AA_2C} + \widehat{A_2AC} = 90^\circ$.

Vậy $AO \perp BC$, suy ra Ax luôn đi qua điểm O.

Câu 4. *(1,0 điểm)*[8D1G9]
Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là hằng số). Biết rằng $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, $P(3) = 30$. Hãy tính giá trị của biểu thức $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10} + 25$.

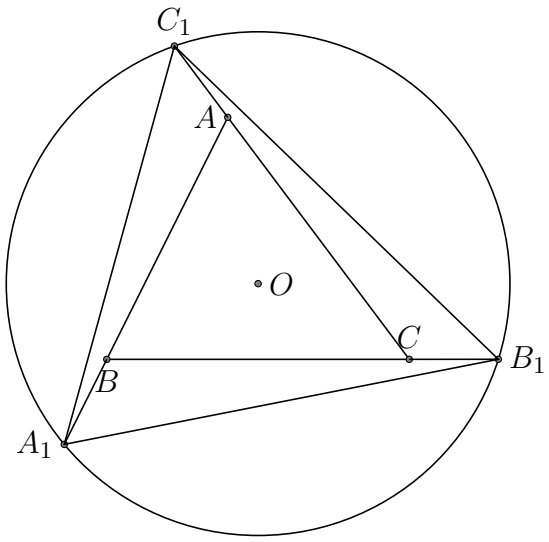
Lời giải.
Da thức $P(x) - 10x$ có các nghiệm 1, 2 và 3, nên tồn tại đa thức Q sao cho

$$P(x) - 10x = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x).$$

Đa thức $P(x) - 10x$ có bậc 4 và hệ số bậc cao nhất bằng 1, nên $Q(x) = x + e$ với e là hằng số.
Do đó, $P(12) + P(-8) = 10 \cdot (12-8) + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (12+e) + 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot (8-e)$.
$\Rightarrow P(12) + P(-8) = 10 \cdot 4 + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (12 + e + 8 - e) = 40 + 990 \cdot 20 = 19840$.
Vậy $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10} + 25 = 2009$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*[9D5G1]
Chứng minh rằng nếu ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm ngoài đường tròn (O) sao cho tam giác ABC có 3 góc nhọn thì chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không lớn hơn chu vi của đường tròn (O).

Lời giải.



Giả sử các tia AB, BC, CA cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1. Và gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trong các góc $\widehat{AC_1B_1}, \widehat{CB_1A_1}, \widehat{BA_1C_1}$, không mất tính tổng quát ta giả sử góc nhỏ nhất là $\widehat{AC_1B_1}$.
Khi đó $\widehat{BAC} = \widehat{AC_1A_1} + \widehat{AA_1C_1} \geq \widehat{AC_1A_1} + \widehat{AC_1B_1} = \widehat{A_1C_1B_1}$.
Suy ra $\sin\widehat{BAC} \geq \sin\widehat{A_1C_1B_1}$.
Vì góc $\widehat{ABC}$ nhọn nên góc $\widehat{A_1BB_1}$ là góc tù nên $A_1B_1 \geq BB_1 \geq BC$.
Áp dụng định lý sin ta có: $A_1B_1 = 2R\sin\widehat{A_1C_1B_1}$ và $BC = 2r\sin\widehat{BAC}$.
Suy ra $2R\sin\widehat{A_1C_1B_1} \geq 2r\sin\widehat{BAC}$ nên $\dfrac{R}{r} \geq \dfrac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{A_1C_1B_1}} \geq 1$.
Vậy $R \geq r$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 38

ĐỀ THI CHUYÊN HÀ NỘI NĂM 2008

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+19}-\sqrt{y+6}=(m-2008)y+1 \\ \sqrt{y+19}-\sqrt{x+6}=(m-2008)x+1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=2008$.

b) Chứng minh hệ phương trình đã cho có không quá một nghiệm khi $m \geq 2008$.

Lời giải.

ĐK: $x \geq -6; y \geq -6$.

Trừ theo vế hai PT của hệ đã cho ta được

$P=\sqrt{x+19}-\sqrt{y+19}+\sqrt{x+6}-\sqrt{y+6}=(m-2008)(y-x).$ (1) .

a) Với $m=2018$, ta có $P=0$.

Nếu $x>y$ thì $\sqrt{x+19}>\sqrt{y+19}$ và $\sqrt{x+6}>\sqrt{y+6}$, suy ra $P>0$ (mâu thuẫn).

Tương tự, nếu $x<y$ thì $P<0$ (mâu thuẫn).

Vậy $x=y$, thay vào PT thứ nhất của hệ (với $m=2018$) ta được

$$\sqrt{x+19}-\sqrt{x+6}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+19}=\sqrt{x+6}+1.$$

Bình phương 2 vế và rút gọn ta được $6=\sqrt{x+6} \Leftrightarrow x=30$.

Tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(30;30)$.

b) Với $m>2018$, lập luận tương tự như trên, từ (1) suy ra $x=y$. Do đó số nghiệm của hệ đã cho là số nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x+19}-\sqrt{x+6}=(m-2018)x. \quad (2)$$

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1 khác x_2 khi đó

$$\sqrt{x_1+19}-\sqrt{x_1+6}=(m-2018)x_1.$$
$$\sqrt{x_2+19}-\sqrt{x_2+6}=(m-2018)x_2.$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên, nhân liên hợp ta được

$(x_1-x_2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1+19}+\sqrt{x_2+19}}-\dfrac{1}{\sqrt{x_1+6}+\sqrt{x_2+6}}\right)$

$=(x_1-x_2)(m-2018)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1+19}+\sqrt{x_2+19}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+6}+\sqrt{x_2+6}} = m - 2018. \quad (3)$$

Dễ thấy vế ptrái của (3) là một số âm, trong khi vế phải dương, mâu thuẫn.

Vậy phương trình có không quá một nghiệm.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt $a_n = 3n^2 - 6n + 13$.

a) Chứng minh rằng nếu hai số a_i, a_k không chia hết cho 5 và chia cho 5 dư khác nhau thì $(a_i + a_k)$ chia hết cho 5.

b) Tìm số tự nhiên n lẻ để a_n là số chính phương.

Lời giải.

a) Ta có $a_n = 3(n+1)^2 + 10$ và $3(n+1)^2$ có tận cùng là $0, 2, 3, 5, 7$ hoặc 8. Do đó a_n chia 5 dư $0, 2, 3$. Suy ra với a_i, a_k không chia hết cho 5 và chia cho 5 có số dư khác nhau thì $(a_i + a_k) \vdots 5$.

b) Với n lẻ thì $a_n = 3(n+1)^2 + 10$ chia 4 dư 2. Mặt khác, do a_n là số chính phương nên a_n chia 4 dư 0 hoặc 1. Vậy không tồn tại n để a_n là số chính phương.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho a là số thay đổi thỏa mãn $-1 \le a \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của b sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$2\sqrt{1-a^4} + (b-1)\left(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}\right) + b - 4 \le 0$$

.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}, 0 \le t \le \sqrt{2}$.

Bài toán trở thành tìm b lớn nhất sao cho

$-t^2 + (b-1)t + b - 2 \le 0, \forall t \in [0; \sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2+t+2}{t+1} \ge b, \forall t \in [0; \sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow M = t + 1 + \dfrac{2}{t+1} - 1 \ge b, \forall t \in [0; \sqrt{2}]$.

Sử dụng BĐT Cauchy ta có $M \ge 2\sqrt{2} - 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \sqrt{2} - 1$.

Suy ra $M \ge b, \forall t \in [0; \sqrt{2}]$ khi và chỉ khi $b \le 2\sqrt{2} - 1$.

Vậy giá trị lớn nhất có thể có của b thỏa mãn bài toán là $b = 2\sqrt{2} - 1$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai đường tròn (O_1), (O_2) lần lượt có đường kính AB và AC. Gọi H là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). Đường thẳng d thay đổi đi qua A cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại các điểm D, E sao cho A nằm giữa D và E.

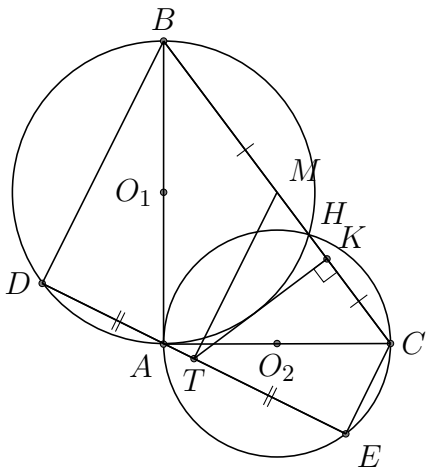
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi.

b) Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tứ giác $BDEC$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo b và c, với $b = AC$, $c = AB$.

c) Đường thẳng đi qua trung điểm đoạn DE và vuông góc với BC cắt BC tại K.
Chứng minh rằng $KB^2 = BD^2 + KH^2$.

Lời giải.



a) Do AB và AC thứ tự là đường kính các đường tròn (O_1) và (O_2) suy ra tứ giác $BDEC$ là hình thang vuông. Vậy trung trực của đoạn DE chính la đường trung bình của hình thang $BDEC$. Do đó đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua trung điểm M của BC.

b) Ta có $S_{BDEC} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACE}$.
Tam giác ABD có AB không đổi nên S_{ABD} lớn nhất $\Leftrightarrow$ đường cao hạ từ D xuống AB lớn nhất $\Leftrightarrow$ D là điểm chính giữa của cung AB. Khi đó $\widehat{BAD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{CAE} = 45^\circ$ (vì $\widehat{BAC} = 90^\circ$), lúc này E là điểm chính giữa cung AC, dẫn đến S_{ACE} cũng lớn nhất.
Do đó S_{BDEC} lớn nhất khi và chỉ khi D là điểm chính giữa cung AB. Lúc này ta có

$$S_{BDEC} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACE} = \frac{1}{4}(b+c)^2.$$

c) Gọi T là trung điểm của DE. Ta có
$\widehat{BHD} = \widehat{BAD}$ (cùng chắn cung BD),
$\widehat{CHE} = \widehat{CAE}$ (cùng chắn cung CE).
Suy ra $\widehat{DHE} = \widehat{BAC} = 90^\circ$, dẫn đến $HT = TD$.
Sử dụng định lí Pythagore cho các tam giác vuông ta có
$KB^2 = TB^2 - TK^2 = TB^2 - TH^2 + HK^2$
$= TB^2 - TD^2 + HK^2 = BD^2 + HK^2$ (đpcm).

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho A là tập hợp gồm 6 phần tử bất kỳ của tập hợp $\{0;1;2;\cdots;14\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp B_1 và B_2 của tập hợp A (B_1, B_2 khác nhau và khác tập hợp rỗng) sao cho tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_1 bằng tổng tất cả các phần tử tập hợp B_2.

Lời giải.

Xét các tập con gồm không quá 2 phần tử của A. Giả sử các tổng của các phần tử của mỗi tập con đều khác nhau. Suy ra các phần tử của A đều khác 0. Giả sử 6 phần tử của A là $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_6 \leq 14$.

Ta có A có $2^6 - 1 = 63$ tập con khác rỗng, nếu các tập con này đều có tổng khác nhau thì tổng lớn nhất $a_1 + a_2 + \ldots + a_6 > 63$ (vì không thể có $a_1; \ldots; a_6$ lấy giá trị từ 1 đến 6 vì nếu vậy $a_6 + a_1 = a_5 + a_2$ nên không xảy ra dấu bằng).

Ta xét $a_6 - a_5; a_4 - a_3; a_2 - a_1$ có giá trị khác nhau (nếu có 2 giá trị bằng nhau thì sẽ có 2 tổng hai phần tử bằng nhau) và không lấy giá trị $1, 2, 3$ (ví dụ như $a_6 - a_5 = 3; a_4 - a_3 = 2; a_2 - a_1 = 1$ thì $a_6 - a_5 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 \Rightarrow a_6 + a_3 + a_1 = a_5 + a_4 + a_2$). Vì vậy ít nhất 3 giá trị này phải lấy $\geq 1; \geq 2; \geq 4$ từ đó $a_6 + a_4 + a_2 \geq a_5 + a_3 + a_1 + 7 \Rightarrow 2(a_6 + a_4 + a_2) \geq a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + 7$.

Ta lại có $a_6 \leq 14; a_4 \leq 12; a_2 \leq 9$ (vì $a_6 - a_2 = a_6 - a_5 + a_5 - a_4 + a_4 - a_3 + a_3 - a_2 \geq 1 + 1 + 2 + 1 = 5 \Rightarrow a_2 \leq a_6 - 5 \leq 9$) từ đó $a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \leq 63$ (vô lí).

Vậy điều giả sử là sai.

Từ đó ít nhất trong các tập con của A phải có hai tập con mà tổng các phần tử bằng nhau.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 39

ĐỀ THI CHUYÊN HÀ NỘI NĂM 2007

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. *(3,0 điểm)*[Đề thi chuyên Toán Tin, Sở Giáo dục Hà Nội năm 2007][9D5G3] Cho phương trình: $x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0 \quad (1)$

a) Tìm nghiệm $(x;y)$ của phương trình (1) thỏa mãn $x^2+y^2=10$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1).

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0 \quad (1) \\ x^2+y^2=10 \quad (2) \end{cases}$

$\Rightarrow 3x^2-y^2+2xy-2x-10y+4=20 \Leftrightarrow (3x-y-8)(x+y+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-y=8 \\ x+y=-2 \end{array}\right.$

TH1. Xét $3x-y=8 \Rightarrow y=3x-8$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$x^2+(3x-8)^2=10 \Leftrightarrow 10x^2-48x+54=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=1 \\ x=\dfrac{9}{5} \Rightarrow y=-\dfrac{13}{5} \end{array}\right.$$

TH2. Xét $x+y=-2 \Rightarrow y=-x-2$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$x^2+(-x-2)^2=10 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-3 \\ x=-3 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm $(1;-3),(-3;1),(3;1),(\dfrac{9}{5};-\dfrac{13}{5})$

b) Ta có $x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0 \Leftrightarrow (x-y-3)(x+3y+1)=-7$

Vì x và y là các số nguyên nên ta có một số trường hợp sau:

TH1. Xét $\begin{cases} x-y-3=1 \\ x+3y+1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x+3y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

TH2. Xét $\begin{cases} x-y-3=-1 \\ 3x+y+1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ 3x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

TH3. Xét $\begin{cases} x-y-3=7 \\ x+3y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=10 \\ x+3y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$

TH4. Xét $\begin{cases} x-y-3=-7 \\ x+3y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-4 \\ x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên $(1;-3),(2;0),(7;-3),(-3;1)$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*[Đề thi chuyên Toán Tin, Sở Giáo dục Hà Nội năm 2007][9H2G3][9H3G3][9H3G3] Cho điểm A di chuyển trên đường tròn tâm O, đường kính $BC = 2R$ (A không trùng với B và C). Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm của AM. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC và I là trung điểm của HC.

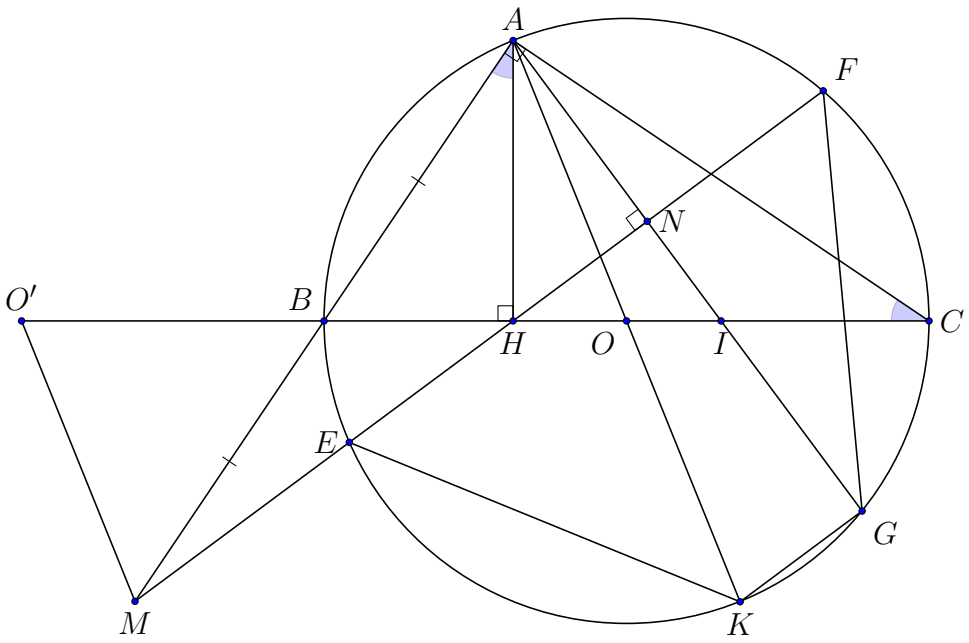
a) Chứng minh rằng M chuyển động trên một đường tròn cố định.

b) Chứng minh tam giác AHM đồng dạng với tam giác CIA.

c) Chứng minh $MH \perp AI$.

d) MH cắt đường tròn (O) tại E và F, AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G. Chứng minh rằng tổng bình phương các cạnh của tứ giác $AEGF$ không đổi.

Lời giải.



a) Lấy điểm O' đối xứng với O qua B, khi đó O' là điểm cố định. Dễ thấy $\triangle ABO = \triangle MBO'$ nên $O'M = OA = R$, do đó M chuyển động trên đường tròn $(O'; R)$ cố định.

b) Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nữa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ACI} = \widehat{MAH}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$) (1)

Lại có $\triangle AHB \backsim \triangle CHA$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{AB}{CA} \Rightarrow \dfrac{AH}{2CI} = \dfrac{\frac{1}{2}AM}{CA} \Rightarrow \dfrac{AH}{CI} = \dfrac{AM}{CA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AHM \backsim \triangle CIA$ (c.g.c).

c) Đặt $HM \cap AI = N$. Do $\triangle AHM \backsim \triangle CIA$ nên $\widehat{AMH} = \widehat{CAI}$

Suy ra $\widehat{AMN} + \widehat{NAM} = \widehat{CAI} + \widehat{NAM} = 90^\circ$. Từ đó suy ra $MH \perp AI$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

d) Kẻ đường kính AK, khi đó $\widehat{AGK} = 90°$.Từ đó và câu 3) suy ra $KG \parallel EF$. Tứ giác $EKGF$ là hình thang nội tiếp đường tròn (O) nên $EKGF$ là hình thang cân.Do đó $GF = EK$, suy ra $AE^2 + GF^2 = AE^2 + EK^2 = AK^2 = 4R^2$. Tương tự ta được $EG^2 + FA^2 = 4R^2$.
Vậy $AE^2 + GF^2 + EG^2 + FA^2 = 8R^2$.

Câu 3. *(1,0 điểm)*[Đề thi chuyên Toán Tin, Sở Giáo dục Hà Nội năm 2007][9D5G2]
Tìm số nhỏ nhất trong các số nguyên dương là bội của 2007 và có 4 chữ số cuối cùng là 2008.

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $10000A + 2008$ (với $A \in \mathbb{N}$).
Ta có $10000A + 2008 \vdots 2007 \Leftrightarrow 1972A + 1 \vdots 2007 \Leftrightarrow 1972A + 1 = 2007k,\ k \in \mathbb{N}^*$.
Từ đó $A = \dfrac{2007k - 1}{1972} = k + \dfrac{35k - 1}{1972}$.
Do $A \in \mathbb{N}$ nên $35k - 1 = 1972m$, với $m \in \mathbb{N}^*$.
Suy ra $1972m + 1 \vdots 35 \Rightarrow 12m + 1 \vdots 35 \Rightarrow 12m + 36 \vdots 35 \Rightarrow 12(m + 3) \vdots 35 \Rightarrow m + 3 \vdots 35$
Tìm đó ta được $m = 32$ là số nhỏ nhất thỏa mãn. Khi đó $A = 1835$.
Vì số cần tìm là nhỏ nhất khi A nhỏ nhất, dẫn đến m là nhỏ nhất. Do đó số nhỏ nhất cần tìm là $A = 18352008$.

Câu 4. *(1,0 điểm)*[Đề thi chuyên Toán Tin, Sở Giáo dục Hà Nội năm 2007][9D5G4]
Cho một lưới hình vuông kích thước 5×5. Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số -1; 0; 1. Xét tổng các số được tính theo từng cột, theo từng hàng và theo đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Lời giải.
Có tất cả 12 tổng (5 cột, 5 hàng, 2 đường chéo). Do chọn điền vào ô các số $-1; 0; 1$ nên giá trị mỗi tổng S là số nguyên thỏa mãn $-5 \le S \le 5$. Vậy S có thể nhận 11 giá trị .
Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Câu 5. *(1,0 điểm)*[Đề thi chuyên Toán Tin, Sở Giáo dục Hà Nội năm 2007][9D5G1]
Tính tổng sau theo n (n thuộc tập hợp số tự nhiên khác 0):

$$S = 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + \big(n - 1\big) \cdot 2 + n$$

Lời giải.
Ta có $S = 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \Rightarrow 2S = 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + \cdots + (n-1) \cdot 2^2 + 2n$
Suy ra $2S - S = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 - n \Rightarrow S = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 - n$
$\Rightarrow 2S = 2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^3 + 2^2 - 2n$
$\Rightarrow 2S - S = 2^{n+1} - 2 - n \Rightarrow S = 2^{n+1} - (n + 2)$.
Vậy $S = 2^{n+1} - (n + 2)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 40

ĐỀ THI CHUYÊN HÀ NỘI NĂM 2005 - 2006, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2005 - 2006, Vòng 1).
[9D1K8] Cho biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

a) Điều kiện để P có nghĩa là $x>0, x\neq 1$.

$$\begin{aligned}P&=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}\\&=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1+x+1}{\sqrt{x}}\\&=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

b) $P=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}+2=0$. Phương trình này có hai nghiệm là $x=4, x=\dfrac{1}{4}$.

Câu 2 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2005 - 2006, Vòng 1).
[8D4K4] Cho bất phương trình $3(m-1)x+1>2m+x$ (m là tham số).

a) Giải bất phương trình với $m=1-2\sqrt{2}$.

b) Tìm m để bất phương trình nhận mọi giá trị $x>1$ là nghiệm.

Lời giải.

a) Với $m=1-2\sqrt{2}$ bất phương trình tương đương với

$$3\left(1-2\sqrt{2}-1\right)x+1>2(1-2\sqrt{2})+x\Leftrightarrow(-6\sqrt{2}-1)x>1-4\sqrt{2}\Leftrightarrow x<\frac{4\sqrt{2}-1}{1+6\sqrt{2}}.$$

Vậy với $m=1-2\sqrt{2}$ thì bất phương trình có nghiệm $x<\dfrac{4\sqrt{2}-1}{1+6\sqrt{2}}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) $3(m-1)x+1>2m+x \Leftrightarrow (3m-4)x>2m-1$. (*)

- Nếu $3m-4=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{4}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow 0\cdot x>\dfrac{5}{3}$ (vô lý).
- Nếu $3m-4<0 \Leftrightarrow m<\dfrac{4}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow x<\dfrac{2m-1}{3m-4}$. Khi đó không tồn tại giá trị của m để (*) nhận mọi giá trị $x>1$ là nghiệm.
- Nếu $3m-4>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{4}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow x>\dfrac{2m-1}{3m-4}$. Khi đó

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{3m-4}\le 1 \Leftrightarrow \frac{2m-1}{3m-4}-1\le 0 \Leftrightarrow \frac{-m+3}{3m-4}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{4}{3} \text{ (loại)} \\ m\ge 3 \text{ (chọn).}\end{array}\right.$$

Vậy với $m\ge 3$ thì bất phương trình nhận mọi giá trị $x>1$ là nghiệm.

Câu 3 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2005 - 2006, Vòng 1).
[9D4K6] Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): 2x-y-a^2=0$ và Parabol $(P): y=ax^2$ (a là tham số dương).

a) Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng khi đó A, B nằm về bên phải trục tung.

b) Gọi u, v theo thứ tự là hoành độ của A, B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{4}{u+v}+\dfrac{1}{uv}$.

Lời giải.

a) $(d): 2x-y-a^2=0 \Leftrightarrow y=2x-a^2$.
Để d cắt P tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình hoành độ có hai nghiệm phân biệt, tức là $2x-a^2=ax^2 \Leftrightarrow ax^2-2x+a^2=0$. (1)
Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a\ne 0 \\ \Delta'=1-a^3>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<1 \text{ (do } a>0).$$

Từ đó giả sử u, v là hoành độ của A, B, ta có hệ thức Vi-ét $\begin{cases} u+v=\dfrac{2}{a}>0 \\ u\cdot v=a>0. \end{cases}$
Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt hay hai điểm A, B nằm về bên phải trục tung.

b) Ta có $T=\dfrac{4}{u+v}+\dfrac{1}{uv}=2a+\dfrac{1}{a}\ge 2\sqrt{2a\cdot\dfrac{1}{a}}=2\sqrt{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $2\sqrt{2}$ đạt được khi $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 4 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2005 - 2006, Vòng 1).
[9H3K8][9H3G8] Cho đường tròn tâm O có dây cung AB cố định và điểm I là điểm chính giữa của cung lớn AB. Lấy điểm M bất kỳ trên cung lớn AB, dựng tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H và cắt tia BM tại C.

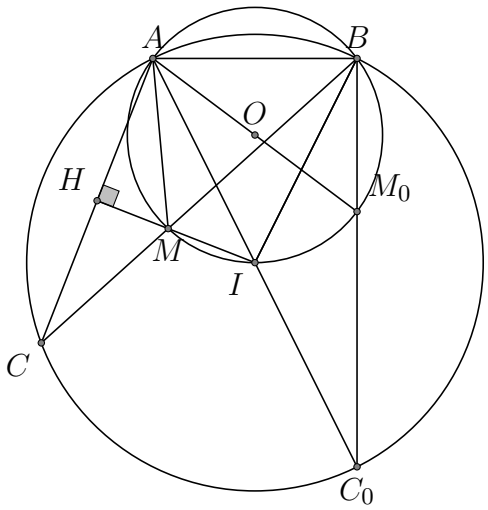
a) Chứng minh rằng $\triangle AIB$ và $\triangle AMC$ là các tam giác cân.

b) Khi điểm M di động trên cung lớn AB, chứng minh rằng điểm C di chuyển trên một cung tròn cố định.

c) Xác định vị trí điểm M để chu vi $\triangle AMC$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a) Do I là điểm chính giữa của cung AB nên $IA = IB$ hay tam giác IAB cân tại I.
Nếu M thuộc cung IA; (không chứa B) thì $\widehat{CMH} = \widehat{IMB}$; (đối đỉnh).
Mặt khác $\widehat{AMI} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AI} \Rightarrow \widehat{AMH} = 180^\circ - \widehat{AMI} = \frac{1}{2}\text{sđ}(\widehat{AM} + \widehat{AI}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \widehat{IA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \widehat{IB}$.
Hay $\widehat{AMH} = \widehat{IMB} = \widehat{HMC}$. Suy ra HM vừa là đường cao, vừa là đường phân giác của tam giác AMC. Suy ra $\triangle AMC$ cân tại M.
Nếu M thuộc cung IB; (không chứa A) thì lập luận tương tự ta cũng có $\triangle AMC$ cân tại M.

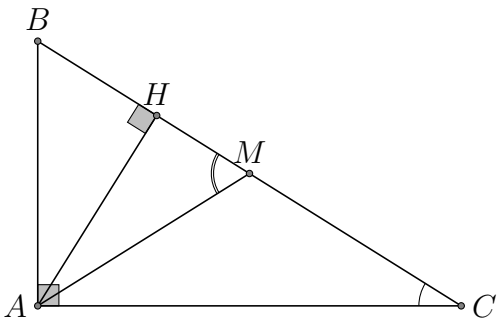


b) Do IH là trung trực của AC nên $IA = IC$, mà IA không đổi nên C nằm trên đường tròn tâm I bán kính IA. Khi $M \equiv A$ thì $C \equiv A$, còn khi $M \equiv B$ thì $C \equiv C_1$ (trong đó C_1 là giao điểm của đường thẳng qua A vuông góc với IB với đường tròn tâm I bán kính IA). Do đó khi M chuyển động trên cung lớn AB thì C chuyển động trên $\widehat{AC_1}$ của đường tròn $(I; IA)$.

c) Giả sử C_0 là giao điểm của AI với đường tròn tâm I, bán kính IA. Còn M_0 là điểm đối xứng của A qua O. Nhận thấy rằng, khi tia Ax trùng với tia AI thì M trùng M_0, lúc đó B, M_0, C_0 thẳng hàng. Từ mối liên hệ giữa độ dài dây cung và độ dài đường kính ta có $AM \leq AM_0, AC \leq AC_0$.
Suy ra $p(\triangle AMC) \leq p(\triangle AM_0C_0)$. Vậy chu vi $\triangle AMC$ lớn nhất khi AM là đường kính của đường tròn tâm O.

Câu 5 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2005 - 2006, Vòng 1).
[9H1G4] Cho $\triangle ABC$ vuông ở A có $AB < AC$ và trung tuyến AM, góc $\widehat{ACB} = \alpha$ và $\widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh rằng $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta$.
Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Dựng $AH \perp BC$, do $AB < AC$ nên $H \in BM$. Ta có $AH = AM \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}BC \cdot \sin\beta$. (1)

Mặt khác $AH = AC \cdot \sin\alpha = BC \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow 1 + \sin\beta = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 41

ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TIN, SỞ GIÁO DỤC HÀ NỘI NĂM 2005 V2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho $P=(a+b)(b+c)(c+a)-abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Lời giải.

Ta có: $a+b+c\equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow a+b\equiv -c \pmod 4$

Tương tự: $b+c\equiv -a \pmod 4, c+a\equiv -b \pmod 4$.

Suy ra: $P\equiv (-c)\cdot(-a)\cdot(-b)-abc\equiv -2abc \pmod 4$.

Mặt khác, do $a+b+c$ chia hết cho 4 nên trong 3 số a,b,c có ít nhất một số chẵn.

Khi đó $2abc$ chia hết cho 4, hay P chia hết cho 4.

Câu 2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)^4+13=6x^2y^2+m\\ xy\left(x^2+y^2\right)=m\end{cases}$

a) Giải phương trình với $m=-10$.

b) Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

a) Với $m=-10$, ta nhận được hệ $\begin{cases}(x+y)^4+23=6x^2y^2\\ xy\left(x^2+y^2\right)=-10\end{cases}$

Đặt $u=(x+y)^2, v=xy$, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}u^2-6v^2+23=0 & (1)\\ uv-2v^2=-10 & (2)\end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có: $u=\dfrac{2v^2-10}{v}$.

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$\left(\frac{2v^2-10}{v}\right)^2-6v^2+23=0\Leftrightarrow 2v^4+17v^2-100=0\Leftrightarrow v^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=2\\ v=-2\end{array}\right.$$

Với $v=2$, ta có: $u=-1$, loại vì $u=(x+y)^2\geq 0$.

Với $v=-2$, ta có: $u=1$, khi đó ta có: $(x+y)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ x+y=-1\end{cases}$

Giải hệ $\begin{cases}x+y=1\\ xy=-2\end{cases}$ ta được các nghiệm $(x;y)=(-1;2)$ và $(x;y)=(2;-1)$.

Giải hệ $\begin{cases}x+y=-1\\ xy=-2\end{cases}$ ta được các nghiệm $(x;y)=(1;-2)$ và $(x;y)=(-2;1)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Vậy với $m=-10$, hệ có nghiệm $(x;y)\in\{(-1;2),(2;-1),(1;-2),(-2;1)\}$.

b) Nhận thấy nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(-x_0;-y_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0=y_0=0$.

Thay nghiệm $x_0=y_0=0$ vào hệ đã cho ta được $\begin{cases}m=13\\m=0\end{cases}$, vô lý.

Vậy không tồn tại giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 3. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=6$. Xét hệ thức $P=x+y^2+z^3$.

a) Chứng minh $P\geq x+2y+3z-3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất cuả P.

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$y^2+1\geq 2y;z^3+1+1\geq 3z$$

Suy ra: $P=x+y^2+z^3\geq x+(2y-1)+(3z-2)=x+2y+3z-3$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$(x+2y+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)\geq\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{2y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{3z}\cdot\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2=36$$

Khi đó: $x+2y+3z\geq 6$.

Suy ra: $P\geq x+2y+3z-3\geq 3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}x=y=z\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=6\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $\min P=3\Leftrightarrow x=y=z=1$.

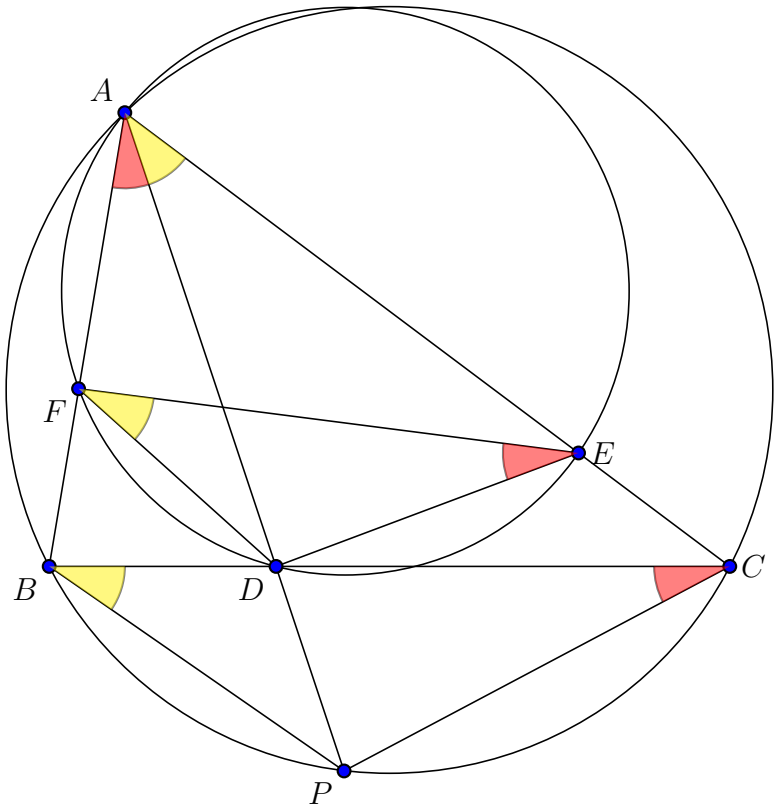
Câu 4. Cho tam giác ABC, lấy 3 điểm D, E, F theo thứ tự trên cạnh BC, CA, AB sao cho $AEDF$ là tứ giác nội tiếp. Trên tia AD lấy điểm P (D nằm giữa A và P) sao cho $DA\cdot DP=DB\cdot DC$.

a) Chứng minh tứ giác $ABPC$ nội tiếp.

b) Chứng minh hai tam giác DEF và tam giác PCB đồng dạng với nhau.

c) Gọi S và S_1 lần lượt là diện tích tam giác ABC và tam giác DEF. Chứng minh rằng $\dfrac{S_1}{S}\leq\left(\dfrac{EF}{2AD}\right)^2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



Lời giải.

a) Từ $DA \cdot DP = DB \cdot DC$, suy ra: $\dfrac{DP}{DB} = \dfrac{DC}{DA}$

Mà $\widehat{BDP} = \widehat{ADC}$ nên $\triangle BDP \sim \triangle ADC$, dẫn đến $\widehat{DPB} = \widehat{DCA}$ suy ra tứ giác $ABPC$ nội tiếp.

b) Vì các tứ giác $AEDF$ và $ABPC$ nội tiếp nên $\widehat{DEF} = \widehat{DAF} = \widehat{BCP}$ và $\widehat{DFE} = \widehat{DAE} = \widehat{CBP}$.

Từ đó suy ra: $\triangle DEF \sim \triangle PCB$.

c) Vì $\triangle DEF \sim \triangle PCB$ nên $S_1 = \dfrac{EF^2}{BC^2} \cdot S_{PCB} = \dfrac{EF^2}{BC^2} \cdot \dfrac{DP}{DA} \cdot S$

Lại có: $\dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{(BD+DC)^2} \leq \dfrac{1}{4BD \cdot DC} = \dfrac{1}{4DA \cdot DP}$

Suy ra: $S_1 \leq \dfrac{EF^2}{4DA \cdot DP} \cdot \dfrac{DP}{DA} \cdot S \leq \left(\dfrac{EF}{2AD}\right)^2 \cdot S$

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$ và 2005 đường thẳng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

a) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

b) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích là 0,5.

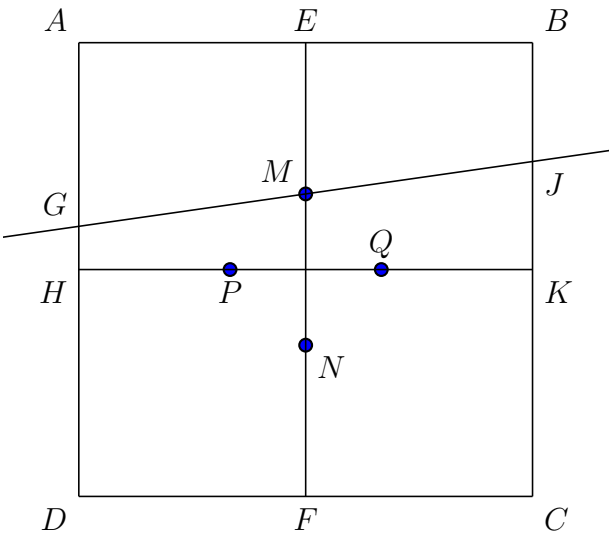
Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng đó có ít nhất 502 đường đồng quy.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Đặt $AB = AD = a$.

Gọi EF, HK là hai trục đối xứng của hình vuông $ABCD$ mà $EF \parallel AD$ và $HK \parallel AB$. Giả sử một đường thẳng cắt các đoạn thẳng AD, BC, EF lần lượt tại G, J, M sao cho $S_{CDGJ} = 2S_{ABJG}$.



Từ đó ta có: $DG + CJ = 2(AG + BJ)$ hay $(a - AG) + (b - BJ) = 2AG + 2BJ$.

Từ đó $AG + BJ = \dfrac{2a}{3}$ hay $EM = \dfrac{a}{3}$. Suy ra M là điểm cố định.

Lấy điểm N trên EF, các điểm P, Q trên HK sao cho $EM = MN = NF = HP = PQ = QK = \dfrac{a}{3}$.

Lập luận tương tự như trên thì các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm cố định M, N, P, Q.

Áp dụng nguyên lý Dirichlet, từ 2005 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $\left\lfloor \dfrac{2005}{4} \right\rfloor + 1 = 502$ đưởng thẳng đi qua một trong 4 điểm trên, nghĩa là 502 đường thẳng đó đồng quy.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 42

ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TIN, SỞ GIÁO DỤC HÀ NỘI NĂM 2004 V2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

V2.tex

Câu 1. Chứng minh rằng số tự nhiên

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2003 \cdot 2004 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2004}\right)$$

chia hết cho 2005.

Lời giải.

Đặt $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2003 \cdot 2004, B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2004}$

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{1}{2004}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2003}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1002} + \frac{1}{1003}\right) \\ &= \frac{2005}{2004} + \frac{2005}{2 \cdot 2003} + \ldots + \frac{2005}{1002 \cdot 1003} \\ &= 2005 \underbrace{\left(\frac{1}{2004} + \frac{1}{2 \cdot 2003} + \ldots + \frac{1}{1002 \cdot 1003}\right)}_{C} \end{aligned}$$

Suy ra: $P = 2005 \cdot A \cdot C$.

Mà $A \cdot C$ là số nguyên nên ta có P chia hết cho 2005.

Câu 2. Cho phương trình: $x + 3\left(m - 3x^2\right)^2 = m$

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Lời giải.

Đặt $m - 3x^2 = y \Rightarrow y + 3x^2 = m$. Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} x + 3y^2 = m & (1) \\ y + 3x^2 = m & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) vế với vế ta được:

$$(x - y) + 3(y - x)(y + x) = 0 \Leftrightarrow (y - x)(3x + 3y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 3x + 3y = 1 \end{array}\right.$$

Thế vào phương trình (1) ta được: $\left[\begin{array}{l} 3x^2 + x - m = 0 \\ 9x^2 - 3x + 1 - 3m = 0 \end{array}\right.$ $(*)$

a) Với $m = 2$, ta có: $\left[\begin{array}{l} 3x^2 + x - 2 = 0 \\ 9x^2 - 3x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{6} \end{array}\right.$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Vậy với $m=2$, phương trình có nghiệm $x \in \left\{-1; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1\pm\sqrt{21}}{6}\right\}$.

b) Phương trình đã cho có nghiệm khi hệ $(*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_1 \geq 0\\ \Delta_2 \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+12m \geq 0\\ 9-36(1-3m) \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{12}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \geq -\dfrac{1}{12}$.

Câu 3. Giải bất phương trình sau: $\sqrt[3]{25x\left(2x^2+9\right)} \geq 4x+\dfrac{3}{x}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$.

- Với $x>0$, bất phương trình tương đương với: $\sqrt[3]{25x^4\left(2x^2+9\right)} \geq 4x^2+3 \qquad (1)$

  Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương ta có:

  $5x^2+5x^2+\left(2x^2+9\right) \geq \sqrt[3]{25x^4\left(2x^2+9\right)}$ hay $4x^2+3 \geq \sqrt[3]{25x^4\left(2x^2+9\right)} \qquad (2)$

  Từ (1), (2) suy ra để bất phương trình có nghiệm thì dấu đẳng thức phải xảy ra ở bất đẳng thức (2), lúc đó $5x^2=2x^2+9 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (vì $x>0$).

- Với $x<0$, bất phương trình tương đương với: $\sqrt[3]{25x^4\left(2x^2+9\right)} \leq 4x^2+3$

  Suy ra bất phương trình đúng với $\forall x<0$.

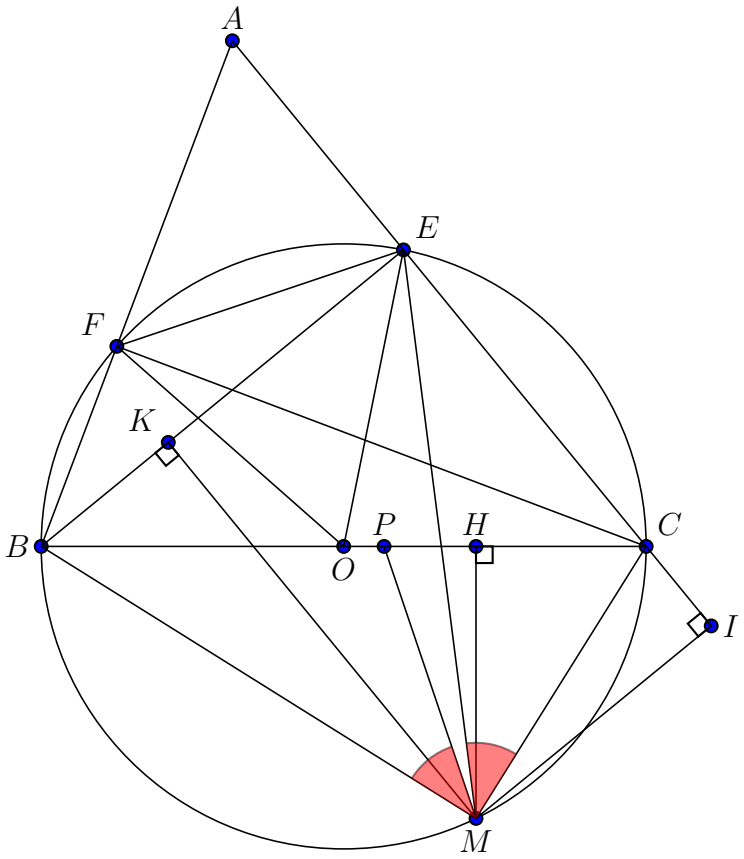
  Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in (-\infty;0) \cup \left\{\sqrt{3}\right\}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, kẻ hai đường cao BE, CF.

a) Biết góc $\widehat{BAC}=60^\circ$, tính độ dài EF theo $BC=a$.

b) Trên nửa đường tròn đường kính BC không chứa E, F lấy một điểm M bất kỳ. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CE, EB. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S=\dfrac{BC}{MH}+\dfrac{CE}{MI}+\dfrac{EB}{MK}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



Lời giải.

a) Gọi O là trung điểm BC.

Do $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ACF} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{EOF} = 2\widehat{ECF} = 60^\circ \Rightarrow \triangle EOF$ đều.

Từ đó suy ra: $EF = EO = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$.

b) Lấy điểm P trên BC sao cho $\widehat{BMP} = \widehat{EMC}$.

Ta có: $\triangle CME \sim \triangle PMB$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{BP}{MH} = \dfrac{EC}{MI}$.

Lại có: $\triangle MEB \sim \triangle MCP$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{MK} = \dfrac{CP}{MH}$.

Suy ra: $\dfrac{BP + PC}{MH} = \dfrac{EC}{MI} + \dfrac{EB}{MK} \Rightarrow \dfrac{BC}{MH} = \dfrac{EC}{MI} + \dfrac{EB}{MK} \Rightarrow S = \dfrac{2BC}{MH}$.

Để S đạt giá trị nhỏ nhất thì MH lớn nhất, hay M là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$.

Khi đó: $H \equiv O \Rightarrow MH = MO \Rightarrow S = \dfrac{2BC}{MO} = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 4 khi M là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$.

Câu 5. Cho một đa giác có chu vi bằng 1, chứng minh rằng có một hình tròn bán kính $r = \dfrac{1}{4}$ chứa toàn bộ đa giác đó.

Lời giải.

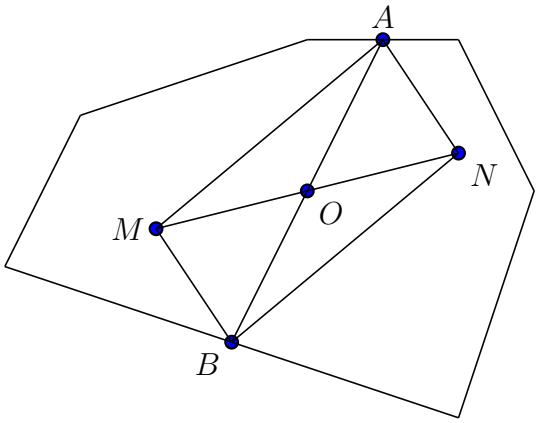
Lấy điểm A trên biên của đa giác. Lấy điểm B trên biên đa giác sao cho AB chia chu vi đa giác thành 2 phần có độ dài mỗi phần bằng $\frac{1}{2}$.

Gọi O là trung điểm của AB.

Giả sử M là một điểm tùy ý thuộc biên hoặc miền trong đa giác, lấy N đối xứng với M qua O.

Khi đó ta có tứ giác $AMBN$ là hình bình hành và $AM + MB < \frac{1}{2}$.

Mà $MN < AM + AN = AM + MB \Rightarrow MN < \frac{1}{2} \Rightarrow OM < \frac{1}{4}$, suy ra M nằm trong đường tròn tâm O bán kính $r = \frac{1}{4}$.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 43

ĐỀ THI CHUYÊN HÀ NỘI NĂM 2004 - 2005, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2004 - 2005, Vòng 1).
[9D1K8] Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2.$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để $\dfrac{P}{\sqrt{x}}>2$.

Lời giải.

a) Điều kiện để P có nghĩa là $x>0, x\neq 1$.

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2\\&=\left[\frac{(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}+1)^2}{x-1}\right]\cdot\frac{(1-x)^2}{4x}\\&=\frac{4\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{(1-x)^2}{4x}\\&=\frac{1-x}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

b) $\dfrac{P}{\sqrt{x}}>2\Rightarrow\dfrac{1-x}{(\sqrt{x})^2}>2\Leftrightarrow 1-3x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{3}$. Kết hợp với $x>0$ và $x\neq 1$ ta suy ra $0<x<\dfrac{1}{3}$.

Câu 2 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2004 - 2005, Vòng 1).
[9D4K4] Cho phương trình $x^2-(m-2)x-m^2+3m-4=0$ (với m là tham số).

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm m để tỉ số giữa hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng 2.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Phương trình bậc hai có $ac = 1.(-m+3m-4) = -\left(m-\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{7}{4} < 0$ với mọi m, do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

b) Phương trình này có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu nên $x_1 = -2x_2$ hoặc $x_2 = -2x_1$, do đó ta có $\begin{cases} (x_1+2x_2)(x_2+2x_1) = 0 \\ \Leftrightarrow x_1x_2 + 2(x_1+x_2)^2 = 0 \qquad (*) \end{cases}$ Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2 = m-2 \\ x_1x_2 = -m^2+3m-4 \end{cases}$.
Thay vào $(*)$ ta được: m^2-5m+4. Phương trình này có nghiệm $m \in \{-4;1\}$.

Câu 3 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2004 - 2005, Vòng 1).
[9D4K6] Trên mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng (d) có phương trình $2kx + (k-1)\,y = 2$ (k là tham số).

a) Với giá trị nào của k thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x\sqrt{3}$. Khi đó hãy tính góc tạo bởi đường(d) và tia Ox.

b) Tìm k để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Lời giải.

a) Ta xét các trường hợp sau

- Với $k = 1$, phương trình đường thẳng (d) là $x = 1$, (d) không song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$.
- Với $k \neq 1$, phương trình đường thẳng (d) trở thành

$$y = -\frac{2k}{k-1}\cdot x + \frac{2}{k-1} \qquad (*)$$

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ khi và chỉ khi $\dfrac{-2k}{k-1} = \sqrt{3}$ hay $k = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$. Khi đó góc nhọn α tạo bởi (d) với tia Ox có $\tan\alpha = \sqrt{3}$ nên $\alpha = 60^\circ$.

b) Ta xét các trường hợp sau

- Với $k = 1$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng 1.
- Với $k = 0$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng 2.
- Với $k \neq 0$ và $k \neq 1$, gọi giao điểm của (d) với hai trục tọa độ Ox, Oy là A và B.
  Do $A \in Ox$ nên $y = 0$, khi đó từ $(*)$ ta có $x_A = \dfrac{1}{k}$, suy ra $OA = \left|\dfrac{1}{k}\right| = \dfrac{1}{|k|}$.
  Do $B \in Oy$ nên $x = 0$, khi đó từ $(*)$ ta có $y_B = \dfrac{2}{k-1}$, suy ra $OB = \left|\dfrac{2}{k-1}\right| = \dfrac{2}{|k-1|}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Trong tam giác vuông OAB, ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\\ \Rightarrow&\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{2}{k-1}\right)^2}\\ \Rightarrow&\frac{1}{OH^2}=k^2+\frac{(k-1)^2}{4}\\ \Rightarrow&OH=\frac{2}{\sqrt{5k^2-2k+1}}.\end{aligned}$$

Vì $5k^2-2k+1=5\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\geq\frac{4}{5}$ với mọi k nên $OH\leq\sqrt{5}$, $OH=\sqrt{5}$ khi $k=\frac{1}{5}$.

Vậy khi $k=\frac{1}{5}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) là lớn nhất.

Câu 4 (Đề thi Chuyên Hà Nội năm 2004 - 2005, Vòng 1).

[9H3K8] Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B trên cạnh Ox (A nằm giữa O và B), điểm M bất kỳ trên cạnh Oy. Đường tròn (T) đường kính AB cắt tia MA, MB lần lượt tại điểm thứ hai là C, E. Tia OE cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là F.

a) Chứng minh bốn điểm O, A, E, M nằm trên một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó.

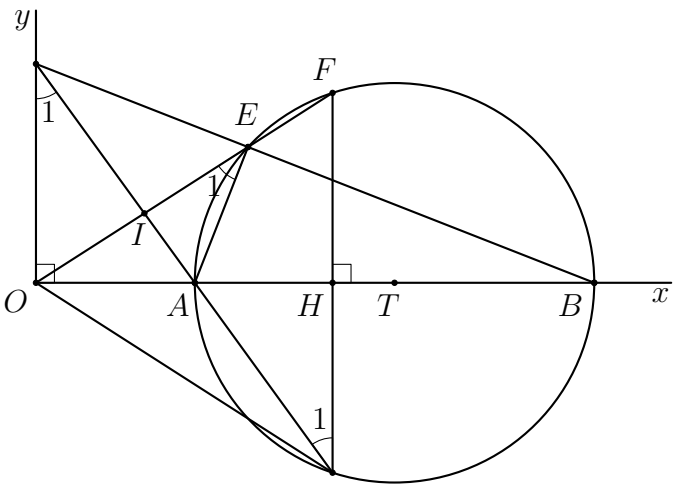
b) Tứ giác $OCFM$ là hình gì? Tại sao?

c) Chứng minh hệ thức $OE\cdot OF+BE\cdot BM=OB^2$.

d) Xác định vị trí điểm M để tứ giác $OCFM$ là hình bình hành, tìm mối quan hệ giữa OA và AB để tứ giác là hình thoi.

Lời giải.

a) Vì $\widehat{AOM}=\widehat{AEM}=90^\circ$ nên bốn điểm A, O, M, E thuộc đường tròn đường kính AM.



Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Tứ giác $AOME$ nội tiếp nên $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$.
Bốn điểm A, C, F, E cùng thuộc đường tròn (T) nên $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (cùng bù với $\widehat{AEF}$). Do đó $\widehat{M_1} = \widehat{C_1}$, suy ra $FC \parallel OM$. Vậy tứ giác $OCFM$ là hình thang.

c) Vì $\triangle OFA \backsim \triangle OBE(g.g)$ nên ta có $\dfrac{OF}{OB} = \dfrac{OA}{OE}$, suy ra

$$OF.OE = OA.OB \qquad (1)$$

Mặt khác, $\triangle OBM \backsim \triangle EBA(g.g)$ nên ta có $\dfrac{OB}{EB} = \dfrac{BM}{BA}$, suy ra

$$BE.BM = OB.BA \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OE.OF + BE.BM = OB(OA + AB) = OB^2$.

d) +) Gọi I và H lần lượt là giao điểm của CM với OF và của CF với OB. Hình thang $OCFM$ là hình bình hành khi và chỉ khi I là trung điểm của OF, suy ra A là trọng tâm của tam giác COF, hay $OA = 2AH$ và $OH = \dfrac{3}{2}OA$. Khi đó điểm H xác định nên hai điểm C và F cũng xác định. Vì vậy điểm M là giao điểm của CA với tia Ox là điểm cần tìm.
+) Tứ giác $OCFM$ là hình thoi khi $CI \perp OF$, suy ra tam giác COF đều. Điểm A là tâm của tam giác đều COF nên $\widehat{CAT} = 60^\circ$, vì thế tam giác ACT là tam giác đều. Từ đó $OA = AC = AT = \dfrac{AB}{2}$. Ngược lại, nếu $OA = \dfrac{AB}{2}$ thì ta dễ dàng suy ra được tứ giác $OCFM$ là hình thoi.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 44

ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN - TIN AMS, HÀ NỘI VÒNG 2, NĂM 2003

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho hai số tự nhiên a và b, chứng minh rằng nếu a^2+b^2 chia hết cho 3 thì a và b chia hết cho 3.

Lời giải.

Đặt $a=3k+r$ với $r\in\{0;1;2\}$ thì ta thấy a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc dư 1.

Tương tự b^2 chia cho 3 dư 0 hoặc dư 1.

Từ $(a^2+b^2)\vdots 3 \Rightarrow a^2$ và b^2 đều chia hết cho 3.

Suy ra $a\vdots 3$ và $b\vdots 3$.

Câu 2. Cho phương trình: $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2=m$

a) Giải phương trình khi $m=15$.

b) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

a) Điều kiện $x\neq 0, x\neq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}-15=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}-15=0.$$

Đặt $\dfrac{1}{x(x+1)}=y$. Khi đó phương trình trở thành

$$y^2+2y-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=3\\y=-5.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}, \dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$.

b) Đặt $\dfrac{1}{x(x+1)}=y\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x(x+1)\neq 0\\yx^2+yx-1=0\end{array}\right.$.

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l}y\neq 0\\\Delta>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y<-4\\y>0\end{array}\right.$.

Phương trình $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2=m$ (2) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $y^2+2y-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}y>0\\y<-4\end{array}\right.$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Theo định lý Vi-ét: $y_1 + y_2 = -2$. Vậy buộc (2) phải thỏa $\begin{cases} y_1 < -4 \\ y_2 > 0 \end{cases}$.

Giải hệ $\begin{cases} -1 - \sqrt{1+m} < -4 \\ -1 + \sqrt{1+m} > 0 \end{cases}$ thu được $m > 8$.

Thử lại thấy $m > 8$ là các giá trị cần tìm.

Câu 3. Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $x + y = 2003$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x\left(x^2 + y\right) + y\left(y^2 + x\right)$$

Lời giải.

Ta có

$$P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 2xy = 2003^3 - 6007xy.$$

Vì

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 2003^2 - 4xy$$

Nên xy tăng (hoặc giảm) khi $|x-y|$ giảm (tăng).

Với giả thiết x, y là các số nguyên dương, ta thấy ngay:

$P_{min} = 2003^3 - 6007.1001.1002$ đạt được khi $(x;y)$ bằng $(1001;1002)$ hoặc $(1002;1001)$.

$P_{max} = 2003^3 - 6007.1.1002$ đạt được khi $(x;y)$ bằng $(1;1002)$ hoặc $(1002;1)$.

Câu 4. Cho đường tròn (O) với dây BC cố định ($BC < 2R$) và điểm A trên cung lớn BC (A khác B, C và điểm chính giữa của cung). Gọi H là hình chiếu của A lên BC, E và F lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường kính AA'.

a) Chứng minh $HE \perp AC$.

b) Chứng minh hai tam giác HEF và tam giác ABC đồng dạng.

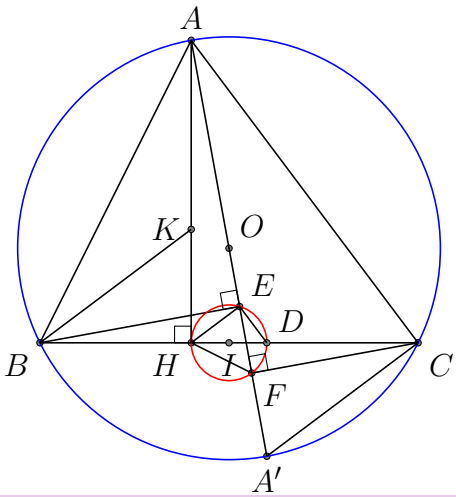
c) Khi A di chuyển, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cố định.

Lời giải.

a) Do $\widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ nên tứ giác $AEHB$ nội tiếp. Hơn nữa do AA' là đường kính nên $\widehat{ACA'} = 90^\circ$. Khi đó

$$\widehat{EHC} + \widehat{HCA} = \widehat{BAA'} + \widehat{BCA} + \widehat{BCA'} + \widehat{BCA} = \widehat{ACA'} = 90^\circ.$$

Vậy $HE \perp AC$.



b) Do $\widehat{AHC} = \widehat{AFC} = 90^\circ$ nên tứ giác $AHFC$ nội tiếp. Suy ra

$$\widehat{EHF} = \widehat{EHC} + \widehat{CHF} = \widehat{BAE} + \widehat{EAC} = \widehat{BAC}.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Xét tam giác HEF và tam giác ABC có $\widehat{HEF} = \widehat{ABC}$ (do tứ giác $AEHB$ nội tiếp) và $\widehat{EHF} = \widehat{BAC}$ (cmt). Vậy hai tam giác HEF và ABC đồng dạng. **c)** Gọi D là giao điểm của đường tròn (HEF) và BC. Khi đó

$$\widehat{DEF} = \widehat{DHF} = \widehat{CAF}$$

nên $DE \parallel AC$. Mà $AC \perp HE$ nên $DE \perp HE$. Do đó tam giác HED vuông tại E.

$$\text{Suy ra tâm } I \text{ của } (HEF) \text{ là trung điểm của } HD. \tag{0.48}$$

Gọi K là trực tâm tam giác ABC. Khi đó do BK và $A'C$ cùng vuông với AC; CK và A, B cùng vuông với AB nên tứ giác $BKCA'$ là hình bình hành. Suy ra

$$BK = CA'. \tag{0.49}$$

Mặt khác

$$\widehat{HDF} = \widehat{HEF} = \widehat{ABC} = \widehat{AA'C}$$

nên tam giác $CDFA'$ nội tiếp. Suy ra

$$\widehat{CDA'} = \widehat{CFA'} = 90^\circ. \tag{0.50}$$

Hơn nữa

$$\widehat{KBH} = \widehat{A'CD} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ACB}). \tag{0.51}$$

Từ (0.49), (0.50) và (0.51) suy ra $\Delta BHK = \Delta CDA'$, từ đó có $BH = CD$. Kết hợp với (0.48) suy ra I là trung điểm của BC nên I cố định.

Câu 5. Lấy 4 điểm ở miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 8 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác là 1, chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 8 đỉnh đã cho có diện tích không vượt quá $\dfrac{1}{10}$. Tổng quát hóa bài toán cho n đa giác với n điểm nằm ở miền trong của đa giác đó.

Lời giải.

Nối các điểm tạo thành các tam giác đôi một chỉ chung một cạnh, phủ vừa kín các tứ giác. Tổng các góc trong của các tam giác bằng tổng các góc trong của tứ giác cộng với 4 lần 360° nên bằng $360^\circ + 4.360^\circ = 10.180^\circ$.

Vậy có 10 tam giác mà tổng diện tích là 1 nên tồn tại tam giác có diện tích không vượt quá $\dfrac{1}{10}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 45

- HỆ CHUYÊN TOÁN - TIN (Dùng chung)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI, NĂM 2003 - 2004

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. *(3,0 điểm)*

Cho biểu thức $P = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \dfrac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

c) Tìm x để biểu thức $Q = \dfrac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x \geq 0$ và $x \neq 1$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - (2\sqrt{x} + 1) + 2(\sqrt{x} + 1) \\ &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + 1 \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{(x+1)^2 - (\sqrt{x})^2}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{(x + 1 - \sqrt{x})(x + 1 + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x} + 1} = x - \sqrt{x} + 1 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức $P = x - \sqrt{x} + 1$

b) Do Điều kiện $x \geq 0$ nên ta có:

$$x \geq \sqrt{x} \Longrightarrow x - \sqrt{x} \geq 0 \Longrightarrow x - \sqrt{x} + 1 \geq 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 1$.

c) Ta có

$$\frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \geq 1 \qquad (1)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (1) &\Longleftrightarrow \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \geq 1 \\ &\Longleftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 \geq \sqrt{x} \\ &\Longleftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

(*) luôn đúng, suy ra (1) luôn đúng.
Ta có: $Q \geq 0$.
Ta lại có

$$Q = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{\frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}} \leq 2$$

Như vậy $0 \leq Q \leq 2$. Theo yêu cầu bài toán Q nguyên, nên ta có các trường hợp sau:

+) Với $Q = 2 \Longleftrightarrow \sqrt{x} = x - \sqrt{x} + 1 \Longrightarrow x = 1$

+) Với $Q = 1 \Longleftrightarrow 2\sqrt{x} = x - \sqrt{x} + 1 \Longleftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 1 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

+) Với $Q = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Câu 2. *(3,0 điểm)*
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P) : y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$, có hệ số góc k.

a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh với mọi giá trị của k, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Gọi hoành độ của điểm A và B là x_1 và x_2, chứng minh $|x_1 - x_2| \geq 2$.

c) Chứng minh tam giác OAB vuông.

Lời giải.
a) Phương trình đường thẳng $d : y = k(x - 0) - 1 = kx - 1$
Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^2 = kx - 1 \Longleftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0 \quad (1)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B thì (1) có hai nghiệm phân biệt. Khi đó

$$\Delta = k^2 + 4 > 0 \quad (*)$$

Ta thấy (*) luôn đúng với mọi giá trị của k. Vậy d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
b) Theo yêu cầu bài toán, chứng minh

$$|x_1 - x_2| \geq 2 \quad (**)$$

Từ (**), suy ra

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1.x_2 - 4 \geq 0 \Longleftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 - 4 \geq 0 \quad (***)$$

Do x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), nên $x_1 + x_2 = -k; x_1.x_2 = -1$
Từ (***), suy ra $k^2 + 4 - 4 = k^2 \geq 0$, với mọi k.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng $AB = 2a$, có trung điểm là O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O') đường kính AO. Trên (O') lấy một điểm M (M khác A và O), tia OM cắt (O) tại C, gọi D là giao điểm thứ hai của CA với (O').

a) Chứng minh tam giác ADM cân.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt tia OD tại E, xác định vị trí tương đối của đường thẳng EA đối với (O) và (O').

c) Đường thẳng AM cắt OD tại H, đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh ba điểm A, M và N thẳng hàng.

d) Tại vị trí của M sao cho ME song song với AB, hãy tính độ dài đoạn thẳng OM theo a.

Lời giải.

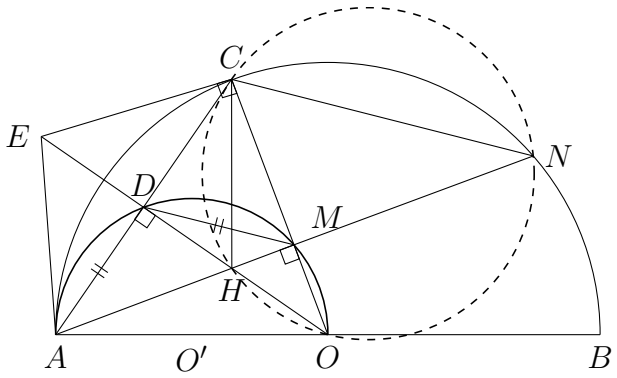
a) Ta có $\triangle OAC$ cân tại O. Mặt khác $OD \perp AC$ nên OD là đường phân giác của góc $\widehat{AOC}$

Suy ra $\widehat{COD} = \widehat{DOA}$ (1)

Tứ giác $AOMD$ nội tiếp nên $\widehat{DMA} = \widehat{DOA}; \widehat{MOD} = \widehat{MAD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DMA} = \widehat{MAD}$ hay tam $\triangle DAM$ cân tại D.

b) Ta có DE là đường trung trực của AC nên $EC = EA \Longrightarrow \widehat{ECA} = \widehat{EAC}$



Ta lại có $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$. Mà $\widehat{ECA} + \widehat{ACO} = 90^\circ \Longrightarrow \widehat{EAC} + \widehat{CAO} = 90^\circ \Longrightarrow AE \perp AO'$ hay AE là tiếp tuyến của đường tròn (O')

c) Ta có tam giác ACN cân tại C, mà $CM \perp AM$ suy ra $CM \perp MN$

Hay M là trung điểm của AN. Do đó A, M, N thẳng hàng.

d) Do $ME \parallel AB \Longrightarrow ME = MO$.

Mặt khác $\triangle EMA \backsim \triangle MAO \Longrightarrow AM^2 = EM.OA = OM.OA$. Mà $AM^2 = OA^2 - OM^2$

Nên $a^2 - OM^2 = OM.a$. Đặt $OM = x$ $(0 < x < a)$, ta được: $x^2 + 2ax - a^2 = 0 \Longrightarrow x = a(\sqrt{2} - 1)$.

Vậy $OM = a(\sqrt{2} - 1)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 46

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN HÀ NỘI NĂM 2015

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải phương trình $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 8$.

Bình phương hai vế phương trình và rút gọn ta có $x^2-8x+9=6\sqrt{x^2-8x}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-8x}$. Ta thu được phương trình $t^2+9=6t \Leftrightarrow t=3$.

Do đó $3=\sqrt{x^2-8x} \Leftrightarrow x^2-8x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-1 \end{array}\right.$. Do điều kiện ta có $x=9$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=10x-10y \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $5(x^3+2y^3)=(10x-10y)(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^3-2x^2y+2xy^2-4y^3=0 \Leftrightarrow x=2y$.

Thay vào $x^2+y^2=5$ ta có $y=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 1$.

Vậy nghiệm hệ là $(2;1)$ và $(-2;-1)$.

Câu 3. Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh (n^4-1) chia hết cho 40.

Lời giải.

Ta có $n^4-1=(n^2+1)(n+1)(n-1)$.

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n là số lẻ do đó n^2+1, $n+1$, $n-1$ là các số chẵn.

Suy ra n^4-1 chia hết cho 8.

Mặt khác, cũng từ n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 5 nghĩa là n có dạng $n=5k\pm 1$ hoặc $n=5k\pm 2$ với $k \in \mathbb{Z}$. Từ đây suy ra n^4 có dạng $5M+1$ hay n^4-1 chia hết cho 5.

Do 8 và 5 nguyên tố cùng nhau nên n^4-1 chia hết cho 40.

Câu 4. Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có $2x^2+4x+1-p=0$ và $2y^2+4y+1-p^2=0$.

Khi đó $\Delta_x=8(p+1)$ và $\Delta_y=8(p^2+1)$.

Bài toán đưa về tìm p sao cho $p+1=2a^2$ và $p^2+1=2b^2 \Rightarrow p^3+p^2+p+1=(2ab)^2=m^2 \quad (*)$

Hay $p(p^2+p+1)=(m-1)(m+1)$. Có hai trường hợp

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

+ Nếu $p|m-1$: Đặt $m=pk+1$, $k\in\mathbb{N}$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow p^2+(1-k^2)p+(1-2k)=0$.
Do đó $(1-k^2)^2+4(2k-1)$ là số chính phương.
Gọi $n=k^2-1$, khi đó $n^2+4(2k-1)=h^2\Leftrightarrow 4(2k-1)=h^2-n^2=(h-n)(h+n)$.
Vì $h-n$ và $h+n$ cùng tính chẵn lẻ nên phải có $\left[\begin{cases}h-n=2\\h+n=2(2k-1)\end{cases}\right.\left.\begin{cases}h+n=2\\h-n=2(2k-1)\end{cases}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}h=2k\\\left[\begin{array}{l}n=2k-2\\n=2-2k\end{array}\right.\end{cases}$.
Từ đây giải ra $k=1\Rightarrow p=1$ (vô lý).
+ Nếu $p|m+1$: tương tự giải được $p=7$. Từ đó suy ra $x=1$ và $y=4$.

Câu 5. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$.

Lời giải.
Không mất tính tổng quát, giả sử $x\geq y\geq z\quad(*)$.
Xét $x=1$ suy ra $y=z=1$ và $n=3$.
Xét $x\geq 2$. Từ giả thiết ta có $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2\geq(xyz)^2$.
Chia 2 vế cho x^3 ta có $\dfrac{y^3+z^3}{x^3}+1\geq\dfrac{(yz)^2}{x}\quad(1)$.
Do $(*)$ ta có $\dfrac{y^3+z^3}{x^3}\leq 2$ từ đó suy ra $x\geq\dfrac{(yz)^2}{3}$.
Mặt khác từ $(*)$ ta có $x^2|(y^3+z^3)\Rightarrow 2y^3\geq y^3+z^3\geq x^2$.
Từ đó ta có được $2y^3\geq x^2\geq\dfrac{y^4z^4}{9}\Rightarrow yz^4\leq 18\Rightarrow z\leq\sqrt[5]{18}<2\Rightarrow z=1$.
Thay vào (1) ta có $\dfrac{y^2}{x}\leq\dfrac{y^3+1}{x^3}+1\leq 1+\dfrac{1}{x^3}+1\Rightarrow y^2\leq 2x+\dfrac{1}{x^2}\leq 2x+\dfrac{1}{4}\Rightarrow x>\dfrac{y^2}{2}$.
Ta lại có $1+(2x)^{\frac{3}{2}}>1+y^3=z^3+y^3\geq x^2>\dfrac{y^4}{4}$.
Từ đây dẫn đến $x=2$ và $y=1\Rightarrow n=\dfrac{5}{2}$ (vô lý). Vậy ta chỉ có $n=3$.

Câu 6 (Đề thi Tuyển sinh Lớp 10 THPT Chuyên - TP Hà Nội năm 2015).
[9D5G1] Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh

$$ab+bc+ca\leq\frac{3}{4}.$$

Lời giải.
Ta có $1=(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc\Rightarrow abc\leq\dfrac{1}{8}$.
Mặt khác $1=(a+b)(b+c)(c+a)\leq\left(\dfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3\Rightarrow a+b+c\geq\dfrac{3}{2}$.
Do đó $1=(a+b)(b+c)(c+a)=2abc+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+bc^2+bc^2$
$\Rightarrow 1=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)-abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.
Do đó $1\geq\dfrac{3}{2}(ab+bc+ca)-\dfrac{1}{8}\Rightarrow ab+bc+ca\leq\dfrac{3}{4}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Gọi Q là điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ (Q khác B và Q khác C). Gọi E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của Q qua các đường thẳng AB và AC.

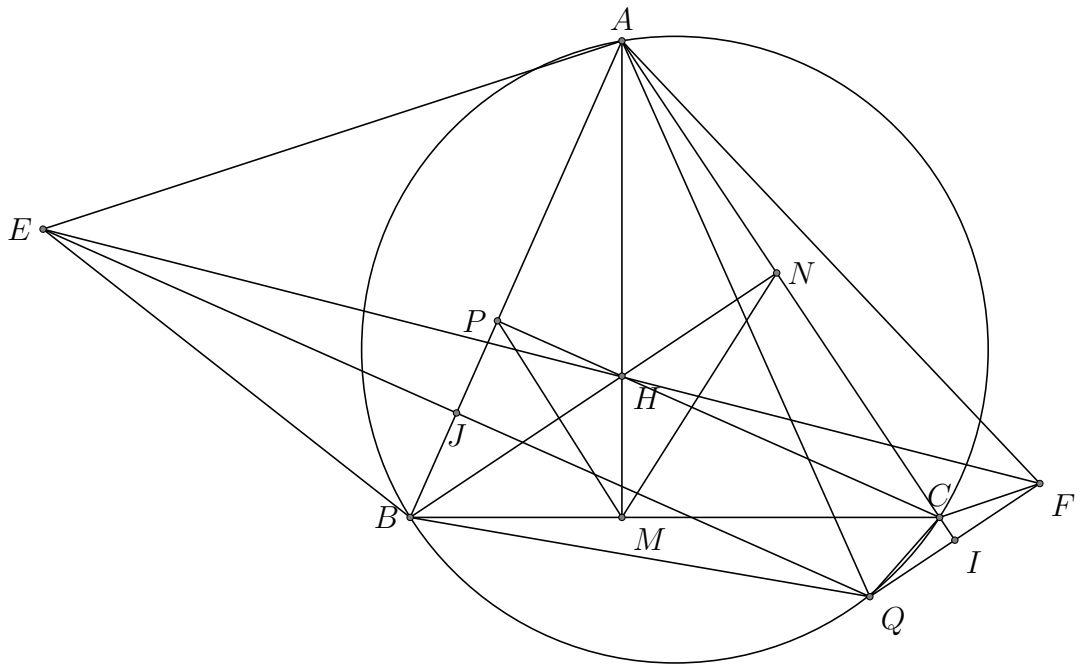
a) Chứng minh $MH\cdot MA=MP\cdot MN$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Chứng minh E, H, F thẳng hàng.

c) Gọi J là giao điểm của QE và AB, I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí điểm Q trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ để $\left(\dfrac{AB}{QJ}+\dfrac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{NAM}=\widehat{NBC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$).
Mặt khác, tứ giác $MHPB$ nội tiếp nên $\widehat{HPM}=\widehat{NBC}$. Do đó $\widehat{NAM}=\widehat{HPM}$ (1).
Ta lại có $\widehat{NMA}=\widehat{ACH}$ ($HMCN$ nội tiếp) và $\widehat{HMP}=\widehat{ABH}$ (do $HPMB$ nội tiếp).
Ngoài ra, $\widehat{ABH}=\widehat{ACH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$). Suy ra $\widehat{NMA}=\widehat{HMP}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle NMA\backsim\triangle HMP\Rightarrow\dfrac{MN}{MH}=\dfrac{MA}{MP}\Rightarrow MH\cdot MA=MN\cdot MP$.

b) Ta có $\widehat{AEB}+\widehat{AHB}=\widehat{AQB}+(180^\circ-\widehat{ACB})=180^\circ$. Suy ra $AEBH$ là tứ giác nội tiếp.
Do đó $\widehat{AHE}=\widehat{ABE}=\widehat{ABQ}$.
Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\widehat{AHF}=\widehat{ACQ}$.
Do đó $\widehat{AHE}+\widehat{AHF}=\widehat{ABQ}+\widehat{ACQ}=180^\circ$.

c) Gọi G là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Ta có $S_{BCQ}\le S_{BCG}$.
Ta lại có $AB\cdot QJ=2S_{ABQ}$ và $AC\cdot QI=2S_{ACQ}$.
Theo bất đẳng thức Schwartz, ta có

$$\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}=\frac{AB^2}{AB\cdot QJ}+\frac{AC^2}{AC\cdot QI}\ge\frac{(AB+AC)^2}{2S_{ABQ}+2S_{ACQ}}=\frac{(AB+AC)^2}{2S_{ABC}+2S_{BCQ}}\ge\frac{(AB+AC)^2}{2S_{ABC}+2S_{BCG}}.$$

Vậy $\left(\dfrac{AB}{QJ}+\dfrac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất là $\dfrac{(AB+AC)^2}{2S_{ABC}+2S_{BCG}}$.
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}QJ=QI\\Q\equiv G\end{cases}\Leftrightarrow Q$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 8. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < \left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < \dfrac{1}{1000}$.

Lời giải.

Lấy $c = 0$. Như vậy cần chọn a, b sao cho $0 < \left|a + b\sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{1000}$.

Ta thấy $0 < (\sqrt{2} - 1)^8 < \dfrac{1}{1000}$ và $(\sqrt{2} - 1)^8 = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.

Bài toán được chứng minh.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 47

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN HÀ NỘI NĂM 2014

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải phương trình $x\left(5x^3+2\right)-2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{2}$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&x\left(5x^3+2\right)-2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0\\
\Leftrightarrow&5x^4+2x+1-2\sqrt{2x+1}+1=0\\
\Leftrightarrow&5x^4+\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2=0\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}5x^4=0\\\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow&x=0 \text{ (thỏa điều kiện).}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2(4y+1)-2y=-3\\x^2\left(x^2-12y\right)+4y^2=9\end{cases}$ (1)

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\v=2y\end{cases}$. Khi đó hệ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}u(2v+1)-v=-3\\u(u-6v)+v^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u-v+2uv=-3\\(u-v)^2-4uv=9.\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}\alpha=u-v\\\beta=uv\end{cases}$. Khi đó hệ (1) trở thành $\begin{cases}\alpha+2\beta=-3\\\alpha^2-4\beta=9\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=1;\beta=-2\\\alpha=-3;\beta=0.\end{array}\right.$

TH1: $\alpha=1;\beta=-2$, khi đó ta có $\begin{cases}u-v=1\\uv=-2.\end{cases}$

Thế $u=v+1$ vào $uv=-2$ ta được phương trình $v^2+v+2=0$ (vô nghiệm).

TH2: $\alpha=-3;\beta=0$, khi đó ta có $\begin{cases}u-v=-3\\uv=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=0;v=3\\u=-3;v=0.\end{array}\right.$

Ta thấy chỉ có $u=0;v=3$ thỏa mãn cách đặt ban đầu, do đó ta có $\begin{cases}x^2=0\\2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Câu 3. Chứng minh nếu n là số nguyên dương thì $25^n+7^n-4^n\left(3^n+5^n\right)$ chia hết cho 65.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Đặt $P(n) = 25^n + 7^n - 4^n\,(3^n + 5^n)$, ta có $65 = 5 \cdot 13$ và $(5, 13) = 1$.
Do đó ta chỉ cần chứng minh $P(n)$ chia hết cho 5 và 13.
Với $n = 1 \Rightarrow P(1) = 25 + 7 - 4(3 + 5) = 0 \vdots 65$ nên $P(n)$ đúng với $n = 1$.
Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k \geq 1$, tức là $P(k)$ chia hết cho 5 và 13. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng chia hết cho 5 và 13.
Thật vậy ta có

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 25^{k+1} + 7^{k+1} - 4^{k+1}(3^{k+1} + 5^{k+1}) \\ &= 7(25^k + 7^k - 4^k(3^k + 5^k)) + 18 \cdot 25^k - 5 \cdot 12^k - 13 \cdot 5^k \\ &= 7P(k) + 18 \cdot 25^k - 5 \cdot 12^k - 13 \cdot 5^k. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $18 \cdot 25^k - 5 \cdot 12^k$ chia hết cho 13.
Ta có $18 \cdot 25^k - 5 \cdot 12^k = 13 \cdot 25^k + 5(25^k - 12^k)$.
Đặt $G(k) = 25^k - 12^k$, bằng quy nạp ta chứng minh được $G(k) \vdots 13$, suy ra $18 \cdot 25^k - 5 \cdot 12^k$ chia hết cho 13.
Vậy $P(n) \vdots 13$ và $P(n) \vdots 5$, do đó $P(n) \vdots 65$.
Cách khác: Đặt $P(n) = 25^n + 7^n - 4^n\,(3^n + 5^n)$. Ta có
$25 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 25^n \equiv (-1)^n \pmod{13}$
$7 \equiv 7 \pmod{13} \Rightarrow 7^n \equiv 7^n \pmod{13}$
$12 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 12^n \equiv (-1)^n \pmod{13}$
$20 \equiv 7 \pmod{13} \Rightarrow 20^n \equiv 7^n \pmod{13}$
Suy ra $P(n) \equiv (-1)^n + 7^n - (-1)^n - 7^n \pmod{13}$ hay $P(n) \equiv 0 \pmod{13}$.
Do đó $P(n) \vdots 13$. (1)
Tương tự ta cũng có
$25 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 25^n \equiv 0 \pmod{5}$
$7 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 7^n \equiv 2^n \pmod{5}$
$12 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 12^n \equiv 2^n \pmod{5}$
$20 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 20^n \equiv 0 \pmod{5}$
Suy ra $P(n) \equiv 2^n - 2^n \pmod{5}$ hay $P(n) \equiv 0 \pmod{5}$, nên $P(n) \vdots 5$. (2)
Từ (1), (2) và $(5, 13) = 1$, suy ra $P(n) \vdots 65$.

Câu 4. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2y + xy - 2x^2 - 3x + 4 = 0$ $(*)$
Lời giải.
Ta có $(*) \Leftrightarrow x(xy + y - 2x - 3) = -4 \Rightarrow x|4 \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$. (1)
Lại có $(*) \Leftrightarrow xy(x + 1) - (2x^2 + 3x + 1) + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(xy - 2x - 1) = -5 \Rightarrow (x + 1)|5$.
Suy ra $x + 1 \in \{\pm 1; \pm 5\}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $x \in \{-2; 4\}$.
Thay $x = -2$ vào $(*)$ ta được $y = -1$.
Thay $x = 4$ vào $(*)$ ta được $y = 2$.
Vậy có hai cặp số thỏa mãn là $(-2; -1)$ và $(4; 2)$.

Câu 5. Tìm các bộ số tự nhiên $(a_1; a_2; a_3; \cdots; a_{2014})$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014} \geq 2014^2 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{2014}^2 \leq 2014^3 + 1 \end{cases}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2014}\geq 2014^2 & (1) \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2014}^2\leq 2014^3+1 & (2) \end{cases}$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow -2\cdot 2014\left(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2014}\right)\leq -2\cdot 2014^3$. $(1')$

Lấy $(1')+(2)$ ta được:

$$\begin{aligned} &\left(a_1^2-2\cdot 2014\cdot a_1\right)+\left(a_2^2-2\cdot 2014\cdot a_2\right)+\cdots+\left(a_{2014}^2-2\cdot 2014\cdot a_{2014}\right)\leq -2014^3+1 \\ \Leftrightarrow &\left(a_1-2014\right)^2+\left(a_2-2014\right)^2+\cdots+\left(a_{2014}-2014\right)^2\leq 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Do $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2014}\in\mathbb{N}$ nên $\left(a_1-2014\right)^2+\left(a_2-2014\right)^2+\cdots+\left(a_{2014}-2014\right)^2\in\mathbb{N}$.

Từ (3) ta có hai trường hợp:

TH1: $\left(a_1-2014\right)^2=\left(a_2-2014\right)^2=\cdots=\left(a_{2014}-2014\right)^2=0\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_{2014}=2014$. Trường hợp này, bộ số $(a_1,a_2,\cdots,a_{2014})$ thỏa mãn (1).

TH2: Trong các số $\left(a_1-2014\right)^2,\left(a_2-2014\right)^2,\cdots,\left(a_{2014}-2014\right)^2$ có một số bằng 1 còn các số còn lại đều bằng 0.

Suy ra các số $a_1,a_2,\cdots,a_{2014}$ có một số bằng 2013 hoặc 2015, còn các số còn lại đều bằng 2014. Thử lại các bộ số này vào (1) thì chỉ có bộ số $(a_1,a_2,\cdots,a_{2014})$ có một số bằng 2015 còn các số còn lại bằng 2014 (thỏa mãn).

Vậy bộ số tự nhiên $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2014})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán khi tất các số đều bằng 2014, hoặc có một số bằng 2015 còn các số còn lại bằng 2014.

Câu 6. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{z+xy}}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A&=\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}}=\frac{x\left(x-\sqrt{x+yz}\right)}{\left(x+\sqrt{x+yz}\right)\left(x-\sqrt{x+yz}\right)} \\ &=\frac{x\left(x-\sqrt{x+yz}\right)}{x^2-\left(x\left(x+y+z\right)+yz\right)}=\frac{x\left(x-\sqrt{x+yz}\right)}{x^2-x^2-xy-xz-yz} \\ &=\frac{x\left(x-\sqrt{x+yz}\right)}{-xy-xz-yz}=\frac{x\left(\sqrt{x+yz}-x\right)}{xy+xz+yz}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sqrt{x+yz}&=\sqrt{x\left(x+y+z\right)+yz}=\sqrt{x^2+xy+xz+yz} \\ &=\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}\leq\frac{x+y+x+z}{2}. \end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Do đó

$$\begin{aligned} A &\le \frac{x\left(\dfrac{x+y+x+z}{2}-x\right)}{xy+xz+yz} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+xy+x^2+xz-2x^2}{xy+xz+yz} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{xy+xz}{xy+xz+yz} \end{aligned} \tag{1}$$

Tương tự ta có:

$$B = \frac{y}{y+\sqrt{y+zx}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{xy+yz}{xy+xz+yz} \tag{2}$$

$$C = \frac{z}{z+\sqrt{z+yx}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{xz+yz}{xy+xz+yz} \tag{3}$$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$\begin{aligned} Q &\le \frac{1}{2}\cdot\frac{xy+xz}{xy+xz+yz}+\frac{1}{2}\cdot\frac{xy+yz}{xy+xz+yz}+\frac{1}{2}\cdot\frac{xz+yz}{xy+xz+yz} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2xy+2yz+2xz}{xy+xz+yz} = 1. \end{aligned}$$

Vậy $Q_{\max} = 1$ khi $x+y = x+z = y+z \Leftrightarrow x = y = z$.
Mà $x+y+z = 1 \Rightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

Câu 7. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trung điểm BC. M là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm MN.

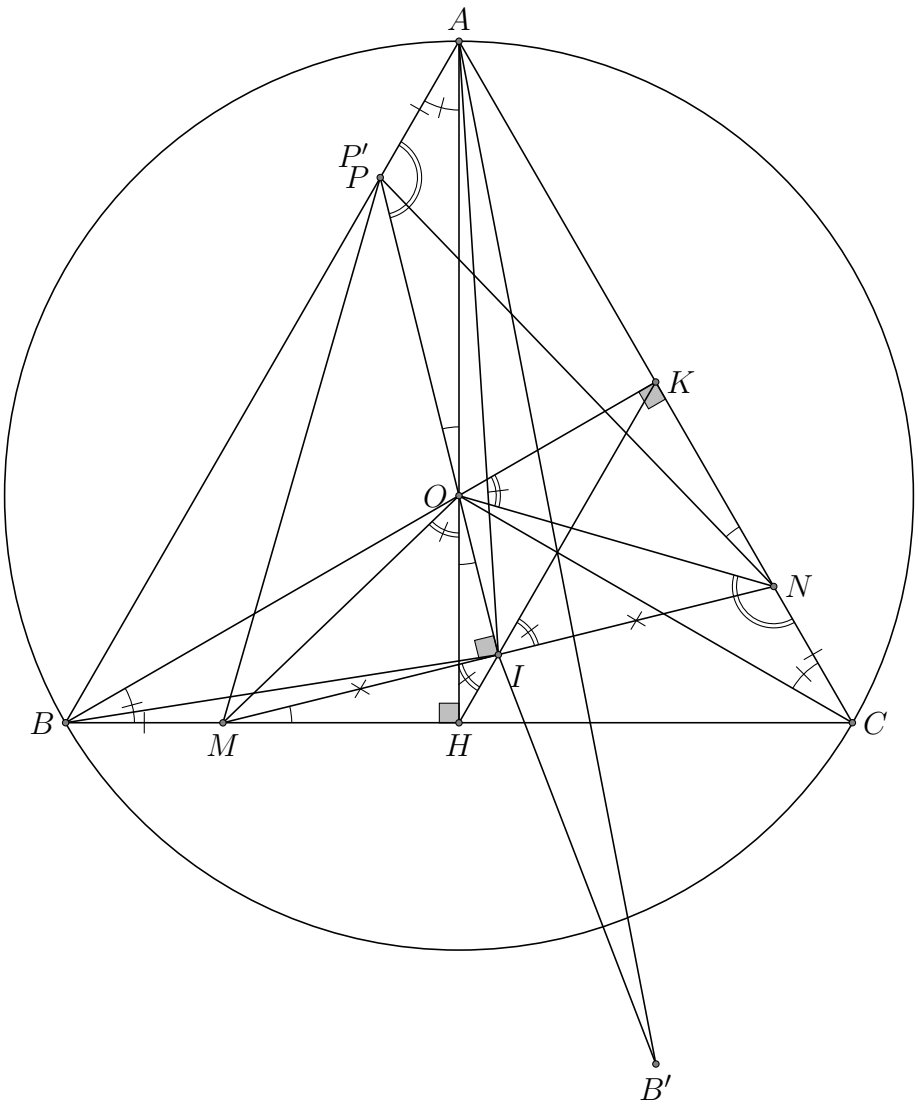
a) Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi P là giao điểm của OI và AB. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

c) Xác định vị trí của điểm M để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Xét $\triangle BOM$ và $\triangle CON$ có:

$$BO = OC \text{ (bán kính đường tròn)}$$
$$\widehat{OBM} = \widehat{OCN} = 30^\circ$$
$$BM = CN \text{ (gt)}$$

Vậy $\triangle BOM = \triangle CON$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON \Rightarrow \triangle OMN$ cân tại O.
Mặt khác ta có I là trung điểm của $MN \Rightarrow OI \perp MN$ hay $\triangle OIM$ vuông tại I.
Tứ giác $OMHI$ có I, H cùng nhìn đoạn thẳng OM dưới một góc vuông nên $OMHI$ là tứ giác nội tiếp. (1)
Do đó bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi P' là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AP' = NC = BM \Rightarrow \triangle P'AN = \triangle NCM$ (c.g.c) (2) $\Rightarrow P'N = NM$.
Tương tự ta chứng minh được $P'N = P'M$. Suy ra $\triangle P'MN$ đều.
Ta cần chứng minh $P' \equiv P$.
Ta có $\triangle OP'A = \triangle ONC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AP'O} = \widehat{ONC} \Rightarrow$ tứ giác $AP'ON$ nội tiếp

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\Rightarrow \widehat{AOP'} = \widehat{ANP'}$ (3)

Từ (2) $\Rightarrow \widehat{ANP'} = \widehat{NMC}$ (4)

Từ (1) $\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{IOH}$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{P'OA} = \widehat{IOH} \Rightarrow P' \in OI \Rightarrow P' \equiv P$. Mà $\triangle P'MN$ đều nên suy ra $\triangle PMN$ đều.

c) Gọi $\mathscr{C}$ là chu vi của $\triangle IAB$.

Ta có $\mathscr{C} = IA + IB + AB$, $\mathscr{C}_{\min} \Leftrightarrow (IA + IB)_{\min}$.

Gọi K là trung điểm của AC, ta sẽ chứng minh H, I, K thẳng hàng.

Theo câu a) $\Rightarrow \widehat{MIH} = \widehat{HOM}$, tương tự ta có $\widehat{KIN} = \widehat{KON}$.

Ta có $\triangle OHM = \triangle OKN$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{KON} = \widehat{MOH}$. Từ đó suy ra $\widehat{KIN} = \widehat{MIH} \Rightarrow K, I, H$ thẳng hàng.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua $HK \Rightarrow IB = IB' \Rightarrow IA + IB = IA + IB' \geq AB'$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow I \equiv AB' \cap HK \Rightarrow I$ là trung điểm của $HK \Rightarrow \begin{cases} M \equiv H \\ N \equiv K \end{cases}$.

Câu 8. Cho bảng ô vuông kích thước $3 \times n$ (3 hàng, n cột, n là số tự nhiên lớn hơn 1) được tạo bởi các ô vuông nhỏ kích thước 1×1. Mỗi ô vuông nhỏ được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Tìm số n bé nhất để với mọi cách tô màu như thế luôn tìm được hình chữ nhật tạo bởi các ô vuông nhỏ sao cho 4 ô vuông nhỏ ở 4 góc của hình chữ nhật cùng màu.

Lời giải.

Bằng hình vẽ dễ dàng chứng minh được với $n = 2, 3, 4, 5, 6$ đều không thỏa mãn.

Với $n = 7$. Trên hàng 1 có ít nhất bốn ô cùng màu. Xét 4 ô đó. Giả sử các ô đó thuộc cột $1, 2, 3, 4$ và được tô màu xanh.

Xét hàng 2 với 4 ô thuộc các cột $1, 2, 3, 4$.

- Nếu có 2 ô màu xanh, giả sử ô ở cột $1, 2$ thì hình vuông gồm 4 ô tạo bởi hàng $1, 2$, cột $1, 2$ thỏa mãn.

X	X	X	X			
X	X					

- Nếu không có hai màu xanh thì tồn tại ít nhất 3 màu đỏ. Giả sử các ô đó thuộc hàng 2, cột $1, 2, 3$. Xét hàng 3 thuộc cột $1, 2, 3$. Trong đó phải có hai ô cùng màu, giả sử hai ô đó thuộc cột $1, 2$.

  + Nếu hai ô này màu xanh thì hình chữ nhật tạo bởi hàng $1, 3$ cột $1, 2$ thỏa mãn.

X	X	X	X			
Đ	Đ	Đ				
X	X					

  + Nếu hai ô này màu đỏ thì hình chữ nhật tạo bởi hàng $2, 3$ cột $1, 2$ thỏa mãn.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

X	X	X	X			
Đ	Đ	Đ				
Đ	Đ					

Do đó với $n \geq 7$ thì luôn tìm được hình chữ nhật tạo bởi các ô vuông nhỏ sao cho 4 ô vuông ở 4 góc của hình chữ nhật cùng màu.
Vậy n nhỏ nhất là 7.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 48

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN HÀ NỘI NĂM 2013

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $7^{2013}+3^n$ có chứa số hàng đơn vị 8.

Lời giải.

Ta có 7^4 tận cùng bởi 1, suy ra $7^{2013}=(7^4)^{503}\cdot 7$ tận cùng bởi 7. Để số $7^{2013}+3^n$ có chữ số hàng đơn vị là 8 thì 3^n phải có chữ số hàng đơn vị là 1.

Xét $3^n=3^{4k+r}=81^k\cdot 3^r$ với $r\in\{0;1;2;3\}$ nên 3^n lần lượt có chữ số hàng đơn vị là $1,3,9,7$.

Vậy số $7^{2013}+3^n$ có chữ số hàng đơn vị là 8 khi và chỉ khi $r=0\Leftrightarrow n=4k$ với $k\in\mathbb{N}$.

Câu 2. Cho a, b là các số tự nhiên lớn hơn 2 và p là số tự nhiên thỏa mãn $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$. Chứng minh p là hợp số.

Lời giải.

Giả sử p là số nguyên tố. Từ $a^2b^2=p\left(a^2+b^2\right)\Rightarrow a^2b^2\vdots p\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\vdots p \\ b\vdots p \end{array}\right.$, (1).

Suy ra $a^2b^2\vdots p^2\Rightarrow p\left(a^2+b^2\right)\vdots p^2\Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\vdots p$, (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a\vdots p \\ b\vdots p \end{cases}$.

Từ đó $a\geqslant p$ và $b\geqslant p$, suy ra $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\leqslant\dfrac{2}{p^2}\Rightarrow\dfrac{1}{p}\leqslant\dfrac{2}{p^2}\Rightarrow p\leqslant 2$, (3).

Từ a,b là các số tự nhiên lớn hơn 2, suy ra $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}<\dfrac{1}{2}\Rightarrow p>2$, (4).

Từ (3) và (4) dẫn đến mâu thuẫn. Vậy p là hợp số.

Câu 3. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2-3y^2+2xy-2x+6y-8=0$.

Lời giải.

$x^2-3y^2+2xy-2x+6y-8=0$

$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+3y-3)=5=1\cdot 5=5\cdot 1=(-1)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-1)$.

Ta giải bốn hệ phương trình

$\begin{cases} x-y+1=1 \\ x+3y-3=5 \end{cases};\begin{cases} x-y+1=5 \\ x+3y-3=1 \end{cases};\begin{cases} x-y+1=-1 \\ x+3y-3=-5 \end{cases};\begin{cases} x-y+1=-5 \\ x+3y-3=-1 \end{cases}$.

Từ đó phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên là $(2;2),(-2;0),(4;0),(-4;2)$.

Câu 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+xy+3y^2-2y-4=0 \\ 3x^2+5y^2+4x-12=0. \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} 2x^2+xy+3y^2-2y-4=0 \\ 3x^2+5y^2+4x-12=0 \end{cases}$

Lấy phương trình thứ nhất nhân với 2 rồi trừ đi phương trình hai ta được

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2-4y-4x+4&=0 \\ \Leftrightarrow (x+y)^2-4(x+y)+4&=0 \\ \Leftrightarrow x+y&=2 \\ \Leftrightarrow y&=2-x. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được $8x^2-16x+8=0 \Leftrightarrow x=1$.
Từ đó hệ có nghiệm duy nhất là $(1;1)$.

Câu 5. Với a, b là các số thực thỏa mãn $a+b+4ab=4a^2+4b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$A=20\left(a^3+b^3\right)-6\left(a^2+b^2\right)+2013.$$

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{4}(a+b)=a^2+b^2-ab \geqslant \dfrac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow 0 \leqslant a+b \leqslant 1$.

Mặt khác $A \leqslant 20(a+b)(a^2+b^2-ab)-6\cdot\dfrac{(a+b)^2}{2}+2013$.

Suy ra $A \leqslant 20(a+b)\cdot\dfrac{a+b}{4}-3(a+b)^2+2013=2(a+b)^2+2013 \leqslant 2015$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\max A=2015$ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.

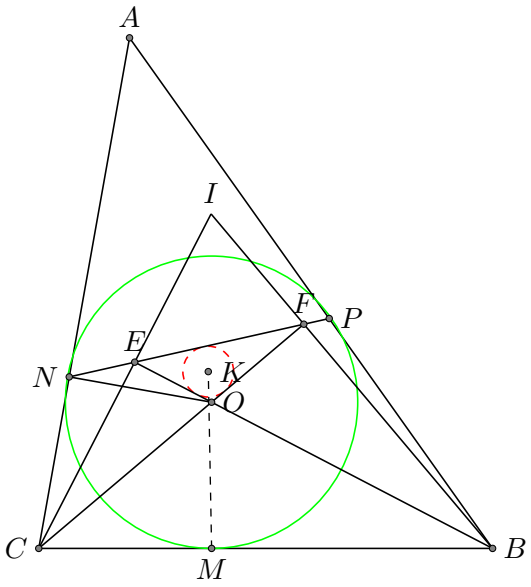
Câu 6. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P. Đường thẳng NP cắt BO, CO lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh góc $\widehat{OEN}$, $\widehat{OCA}$ bằng nhau hoặc bù nhau.

b) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OEF. Chứng minh O, M, K thẳng hàng.

Lời giải.

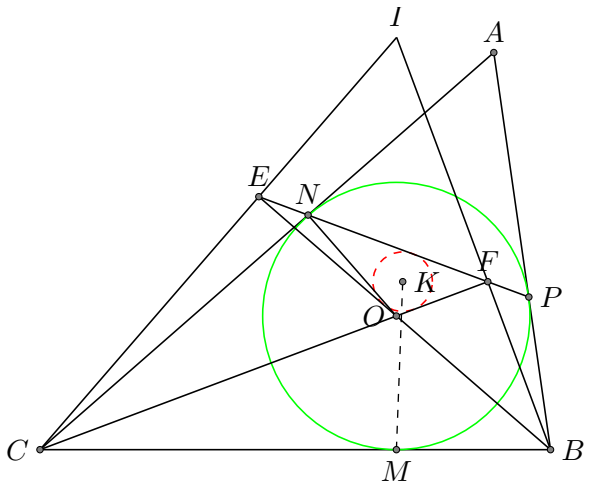


a) Ta có $\widehat{BPN} = \widehat{A} + \widehat{ANP} = \widehat{A} + (90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}) = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A}}{2}$

Trường hợp 1: Điểm E nằm trong đoạn NP. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{OEN} &= \widehat{BPN} + \frac{1}{2}\widehat{B} = (90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{A}) + \frac{1}{2}\widehat{B}\\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{C}) = 180^\circ - \widehat{OCA},\end{aligned}$$

suy ra $\widehat{OEN} + \widehat{OCN} = 180^\circ$.



Trường hợp 2: Điểm E nằm ngoài đoạn NP. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{OEN} &= 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B} - \widehat{BPN} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B} - (90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{A})\\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) = \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{OCA}.\end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Từ chứng minh trên suy ra bốn điểm O, N, E, C cùng thuộc một đường tròn, do đó $\widehat{BEC} = \widehat{ONC} = 90°(1)$.
Tương tự, bốn điểm O, P, F, B cùng thuộc một đường tròn, do đó $\widehat{BFC} = \widehat{OPB} = 90°(2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$ nên từ giác $BCEF$ nội tiếp.

c) Gọi I là giao điểm của CE và BF. Bốn điểm O, N, E, C cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{OEC} = \widehat{ONC} = 90°$, suy ra $BE \perp CI$. Tương tự $CF \perp BI$, suy ra O là trực tâm tam giác IBC do đó I, O, M thẳng hàng (3). Tứ giác $OEIF$ nội tiếp đường tròn đường kính OI, suy ra ba điểm O, K, I thẳng hàng (4).
Từ (3) và (4) suy ra ba điểm O, M, K thẳng hàng.

Câu 7. Trong mặt phẳng cho 6 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong 3 điểm luôn có 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 671. Chứng minh rằng trong 6 điểm đã cho luôn tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có chu vi nhỏ hơn 2013.

Lời giải.

Với A_iA_k bất kì $(1 \leq i < k \leq 6)$, ta quy định:

- Nếu $A_iA_k < 671$ thì A_i, A_k được nối với nhau bởi đoạn thẳng màu xanh.
- Nếu $A_iA_k \geq 671$ thì A_i, A_k được nối với nhau bởi đoạn thẳng màu đỏ.

Xét 5 đoạn thẳng $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_6$. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ba đoạn thẳng cùng màu. Không mất tính tổng quát, giả sử ba đoạn A_1A_1, A_1A_3, A_1A_4 cùng màu.
Trường hợp 1: Ba đoạn A_1A_1, A_1A_3, A_1A_4 cùng màu xanh. Do đó tồn tại một cạnh trong tam giác $A_2A_3A_4$ màu xanh, chẳng hạn cạnh A_2A_3. Khi đó tam giác $A_1A_2A_3$ thỏa đề bài.
Trường hợp 2: Ba đoạn A_1A_1, A_1A_3, A_1A_4 cùng màu đỏ. Lập luận tương tự , tam giác $A_2A_3A_4$ thỏa đề bài.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 49

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN HÀ NỘI NĂM 2011

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Với $a \neq \pm b$ giải phương trình: $(a^4-b^4)x^2-2(a^3-b^3)x+a^2-b^2=0$.

Lời giải.

$(a^4-b^4)x^2-2(a^3-b^3)x+a^2-b^2=0$

có $\Delta' = (a^3+b^3)^2-(a^4-b^4)(a^2-b^2) = a^6+b^6-2a^3b^3-a^6+a^4b^2+b^4a^2-b^6$

$= a^2b^2(a^2+b^2-2ab) = [ab(a-b)]^2 \geq 0.$

Vậy phương trình có hai nghiệm

$x_1 = \dfrac{a^3-b^3+ab(a-b)}{a^4-b^4} = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$ và $x_2 = \dfrac{a^3-b^3-ab(a-b)}{a^4-b^4} = \dfrac{a-b}{a^2-b^2}$.

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-xy = 2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2 = 6. \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} x-y-xy = 2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-xy = 2+3\sqrt{2} \\ (x-y)^2+2xy = 6. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x-y = a \\ xy = b \end{cases}$ khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} a-b = 2+3\sqrt{2} & (1) \\ a^2+2b = 6 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $b = a-2-3\sqrt{2}$

Thay vào (2) ta được $a^2+2(a-2-3\sqrt{2}) = 6 \Leftrightarrow (a+1)^2 = (3+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2+\sqrt{2} \\ a = -4-\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Với $a = 2+\sqrt{2} \Rightarrow b = -2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 2+\sqrt{2} \\ xy = -2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x, -y$ là nghiệm của phương trình $x^2-(2+\sqrt{2})x+2\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -2. \end{cases}$

Với $a = -4-\sqrt{2} \Rightarrow b = -6-4\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x-y = -4-\sqrt{2} \\ xy = -6-4\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x, -y$ là nghiệm của phương trình $x^2-(4+\sqrt{2})x+6+4\sqrt{2} = 0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -2. \end{cases}$

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 - 9n - 3$ chia hết cho $n - 11$.

Lời giải.

Ta có: $n^2 - 9n - 3 = n^2 - 11n + 2n - 22 + 25 = n(n-11) + 2(n-11) + 25$.

Để $n^2 - 9n - 3 \vdots n - 11 \Leftrightarrow 25 \vdots n - 11$.

- Nếu $n - 11 = 1 \Rightarrow n = 12$.
- Nếu $n - 11 = -1 \Rightarrow n = 10$.
- Nếu $n - 11 = 5 \Rightarrow n = 16$.
- Nếu $n - 11 = -5 \Rightarrow n = 6$.
- Nếu $n - 11 = 11 \Rightarrow n = 22$.
- Nếu $n - 11 = -11 \Rightarrow n = 0$ (loại).

  Vậy $n \in \{12; 10; 16; 6; 22\}$.

Câu 4. Cho ba số x, y, z không âm thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức **Bunhiacopxki** ta có: $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = 36 \Rightarrow A \geq 12$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $0 \leq x, y, z \leq 6 \Rightarrow x(x-6) \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 6x$

Tương tự $y^2 \leq 6y$; $z^2 \leq 6z$

Suy ra $A \leq 6(x + y + z) = 36$, dấu bằng xảy ra khi $(x; y; z) = (0; 0; 6)$ và các hoán vị.

Câu 5. Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao cho $AN = R$ và điểm M thay đổi trên cung nhỏ BN (M không trùng với B, N). Gọi I là giao điểm của AM và BN. Đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với AB tại H, cắt tia AN tại điểm C.

a) Chứng minh ba điểm B, C, M thẳng hàng.

b) Xác định vị trí của điểm M để chu vi của tứ giác $ABMN$ là lớn nhất.

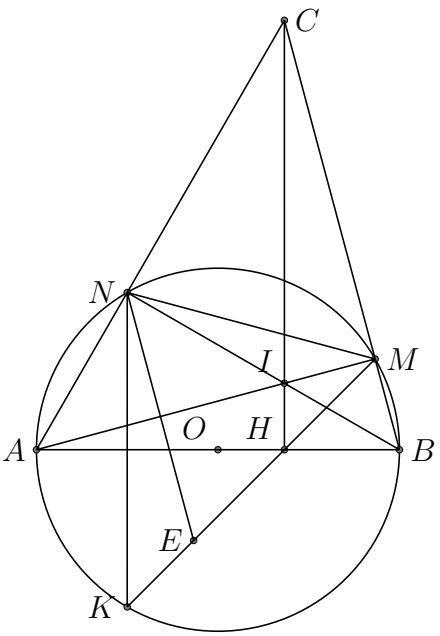
c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MHN thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên cung nhỏ BN của đường tròn $(O; R)$.

d) Gọi P là điểm chính giữa cung AB không chứa điểm N của đường tròn $(O; R)$.Đường thẳng MP cắt AB tại D. Chứng minh rằng $\dfrac{MD}{MA} + \dfrac{MD}{MB}$ không đổi khi M di động trên cung nhỏ BN của đường tròn $(O; R)$.

Lời giải.

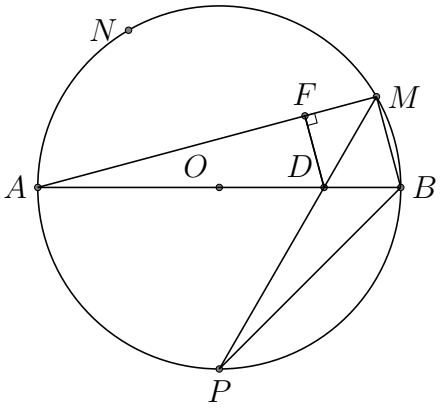
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Dễ thấy I là trực tâm của tam giác ABC, suy ra $BC \perp AI$ (1).
Mặt khác $\widehat{AMB} = 90°$, suy ra $BM \perp AI$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm B, M, C thẳng hàng.



b) Lấy K đối xứng với N qua AB, trên đoạn MK lấy điểm E sao cho $ME = MN$.
Vì K đối xứng với N qua AB nên $\widehat{NBK} = 2\widehat{NBA} = 60°$.
Mà $\widehat{NMK} = \widehat{NBK} \Rightarrow \widehat{NMK} = 60°$.
Vậy tam giác NME đều suy ra $NE = MN$ và $\widehat{ENK} = \widehat{BNM}$ (vì cùng bằng $60° - \widehat{ENB}$).
Do đó $\triangle MNB = \triangle ENK(c-g-c)$ suy ra $MB = EK$.
Vì vậy $MN + MB = ME + EK = MK$.
Chu vi tứ giác $ABMN$ bằng $BA+AN+MN+MB = 3R + MK$. Suy ra chu vi tứ giác $ABMN$ lớn nhất khi MK là đường kính của đường tròn (O).

c) Tứ giác $IMBH$ nội tiếp nên $\widehat{IHM} = \widehat{IBM}$. Tứ giác $IHAN$ nội tiếp nên $\widehat{IHN} = \widehat{NAI}$, mặt khác $\widehat{IBM} = \widehat{NAI}$ (cùng chắn cung MN) suy ra $\widehat{IHM} = \widehat{IHN}$ hay $\widehat{NHM} = 2\widehat{NBM}$.
Ngoài ra $\widehat{NOM} = 2\widehat{NBM}$ (tính chất góc nội tiếp).
Suy ra $\widehat{NOM} = \widehat{NHM}$, suy ra tứ giác $MHON$ là tứ giác nội tiếp, do đó tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác này chính là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNH$. Vì vậy tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle MNH$ nằm trên đường trung trực của đoạn ON cố định



d) Gọi F là hình chiếu của D trên AM.
MD là phân giác của $\triangle MAB$, ta có:
$\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DA}{BA - DA} = \dfrac{DF}{MB - DF}$
$= \dfrac{\frac{MD}{\sqrt{2}}}{MB - \frac{MD}{\sqrt{2}}} = \dfrac{MD}{\sqrt{2}MB - MD}$
suy ra $MA(\sqrt{2}MB - MD) = MB.MD$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}MA.MB = MA.MD + MB.MD$
$\Leftrightarrow \dfrac{MD}{MA} + \dfrac{MD}{MB} = \sqrt{2}$.

Câu 6. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $xyz = x^2 - 2z + 2$.

Lời giải.

$xyz = x^2 - 2z + 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{x^2+2}{xy+2}$ là số nguyên dương.

- Nếu $x = y$ thì $z = 1$. Khi đó bộ $(k; k; 1)$ với k là số nguyên dương thỏa mãn đề bài.

- Nếu $x < y$ thì $z < 1$ (không thỏa mãn).

- Nếu $x > y$ thì $x^2 + 2 > xy + 2$.
  Vì z là số nguyên dương nên $(x^2 + 2) \vdots (xy + 2) \Leftrightarrow y(x^2 + 2) \vdots (xy + 2) \Leftrightarrow [x(xy + 2) - 2(x - y)] \vdots (xy + 2) \Rightarrow 2(x - y) \vdots (xy + 2)$.
  Do đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $2(x - y) = k(xy + 2)$.
  Nếu $k \geq 2 \Rightarrow x - y \geq xy + 2 \Rightarrow (x + 1)(y - 1) + 3 \leq 0$ (Vô lý).
  Nếu $k = 1 \Rightarrow 2(x - y) = xy + 2 \Leftrightarrow (x + 2)(y - 2) = -6$.
  Suy ra ta có bộ số $(x; y; z) = (4; 1; 3)$.

Vậy tất cả các bộ nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa bài toán là $(4; 1; 3)$ và $(k; k; 1)$ với k nguyên dương.

Câu 7. Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

Lời giải.

Ta sử dụng **bổ đề**: Trong 5 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được 3 số sao cho tổng 3 số chia hết cho 3.

Chứng minh bổ đề: Xét số dư của 5 số tự nhiên khi chia cho 3.

- Nếu có 3 số có cùng số dư khi chia cho 3 thì tổng 3 số đó chia hết cho 3.

- Nếu không có 3 số nào không có cùng số dư khi chia cho 3 thì ít nhất tồn tại 1 số chia hết cho 3, 1 số chia 3 dư 1, 1 số chia 3 dư 2 nên tổng 3 số này chia hết cho 3.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Tiếp tục chứng minh: Trong 17 số tự nhiên luôn chọn được 9 số sao cho tổng của 9 số chia hết cho 9.

Áp dụng bổ đề ở trên ta có :

Lấy 3 bộ 5 số ta chọn được 3 bộ số có tổng chia hết cho 3.

Như vậy còn 8 số, lấy tiếp 5 số thì ta chọn được 1 bộ 3 số có tổng chia hết cho 3.

Còn 5 số cuối cùng ta chọn được thêm 1 bộ 3 số có tổng chia hết cho 3.

Do đó ta có 5 bộ 3 số có tổng chia hết cho 3.

Tổng 5 bộ 3 số lần lượt là : $T_1; T_2; T_3T_4; T_5$ Xét 5 số tự nhiên: $\frac{T_1}{3}; \frac{T_2}{3}; \frac{T_3}{3}; \frac{T_4}{3}; \frac{T_5}{3}$ thì ta luôn chọn được 3 số chia hết cho 3 do đó tồn tại 3 số trong 5 tổng trên có tổng chia hết cho 9.

Trong 53 số tự nhiên ta chọn được 5 bộ, mỗi bộ gồm 9 số tự nhiên có tổng chia hết cho 9.

Tổng của các bộ số lần lượt là $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5$.

Xét bộ 5 số tự nhiên $\frac{S_1}{9}; \frac{S_2}{9}; \frac{S_3}{9}; \frac{S_4}{9}; \frac{S_5}{9}$ áp dụng bổ đề ban đầu thì ta chọn được 3 số sao cho tổng chia hết cho 3 do đó trong 5 số $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5$ sẽ tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 27 (điều phải chứng minh).

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 50

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN HÀ NỘI NĂM 2010

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho n là số nguyên, chứng minh $A = n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $B = n^4 - 3n^2 + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải.

a) Ta có $A = (n-1)n(n+1) + 12n \vdots 6$.

b) Ta có $B = (n^2 - n - 1)(n^2 + n - 1)$. Vì $n^2 - n - 1 < n^2 + n - 1$ nên để B là số nguyên tố thì $n^2 - n - 1 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \text{ (Loại)} \\ n = 2 \text{ (Thỏa mãn)} \end{array}\right. \Rightarrow n = 2$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*Cho phương trình $\left(m^2 + 2m + 2\right)x^2 - \left(m^2 - 2m + 2\right)x - 1 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2\left(2x_1x_2 - 1\right)$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1 + x_2$.

Lời giải.

a) Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 2m + 2} \\ x_1x_2 = \dfrac{-1}{m^2 + 2m + 2} \end{cases}$. Theo giả thiết

$(x_1 + x_2)^2 = 4x_1^2x_2^2 \Rightarrow (m^2 - 2m + 2)^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 2m + 2 = 2 \\ m^2 - 2m + 2 = -2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 2m = 0 \\ m^2 - 2m + 4 = 0 \text{ (Vô nghiệm)} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

- Với $m = 0$, thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Với $m = 2$, thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy các giá trị của m cần tìm là $m = 0$, $m = 2$.

b) Ta có $S = x_1 + x_2 = \dfrac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 2m + 2}$.

- $S-(3-2\sqrt{2})=\dfrac{(2\sqrt{2}-2)m^2-4(2-\sqrt{2})m-4(1-\sqrt{2})}{m^2+2m+2}$
  $=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}m-2)^2}{m^2+2m+2}\geq 0\Rightarrow S\geq 3-\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=\sqrt{2}$.
- $S-(3+2\sqrt{2})=\dfrac{(-2\sqrt{2}-2)m^2-4(2+\sqrt{2})m-4(2+\sqrt{2})}{m^2+2m+2}$
  $=\dfrac{-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}m+2)^2}{m^2+2m+2}\leq 0\Rightarrow S\leq 3+\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=-\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\max}=3+\sqrt{2}$ khi $m=-\sqrt{2}$ và $S_{\min}=3-\sqrt{2}$ khi $m=\sqrt{2}$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Cho a bất kỳ, chứng minh rằng $\dfrac{a^{2010}+2010}{\sqrt{a^{2010}+2009}}>2$.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $y^2-x\big(x-2\big)\big(x^2-2x+2\big)=0$.

Lời giải.

a) Áp dụng Cauchy cho $a^{2010}+2009$ và 1 ta có
$a^{2010}+2009+1\geq 2\sqrt{a^{2010}+2009}$. Dấu bằng xảy ra khi $a^{2010}+2009=1$ (vô lí) $\Rightarrow$ đpcm.

b) Đặt $t=(x-1)^2(t\geq 0)\Rightarrow$ phương trình có dạng $y^2-(t-1)(t-1)=0\Rightarrow (y-t)(y+t)=-1$.
Vì $t\geq 0$ nên $y+t\geq y-t\Rightarrow$ nên ta có $\begin{cases}y-t=-1\\y+t=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\t=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\x=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*Cho đường tròn $\big(O;R\big)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Đường tròn đường kính OM cắt đường tròn $\big(O;R\big)$ tại hai điểm E, F.

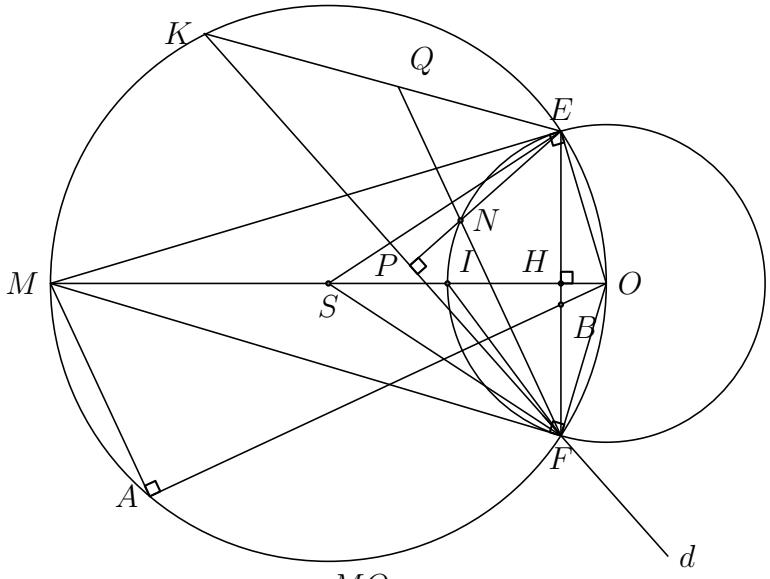
a) Chứng minh giao điểm I của đoạn thẳng OM với đường tròn $\big(O;R\big)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

b) Cho A là một điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm M của đường tròn đường kính OM (A khác E và F). Đoạn thẳng OA cắt đoạn thẳng EF tại điểm B. Chứng minh $OA.OB=R^2$.

c) Cho biết $OM=2R$ và N là điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm I của đường tròn $\big(O;R\big)$ (N khác E và F). Gọi d là đường thẳng qua F và vuông góc với đường thẳng EN tại điểm P, d cắt đường tròn đường kính OM tại điểm K (K khác F). Hai đường thẳng FN và KE cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng $PK.PK+QN.QK\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

Lời giải.

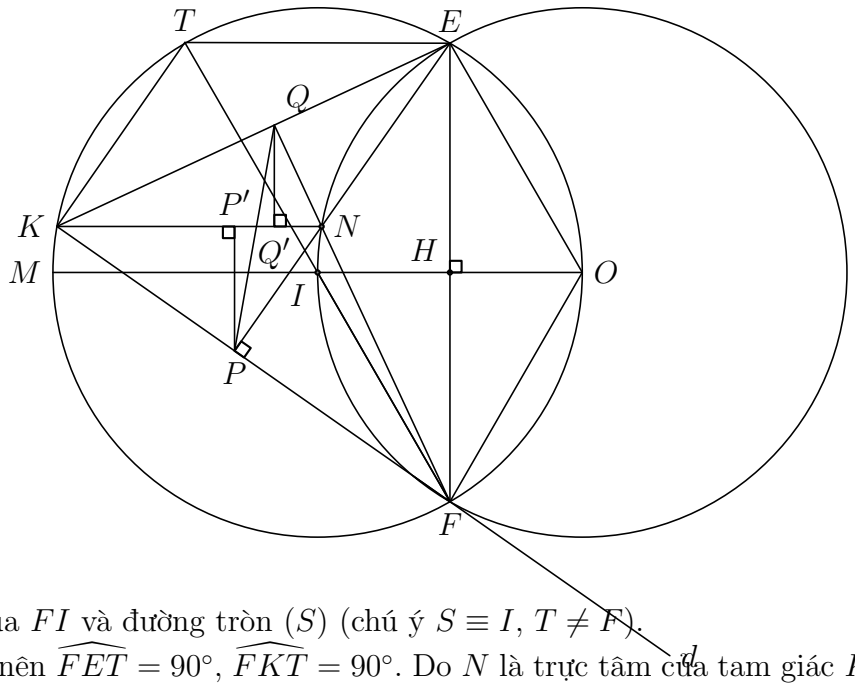
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Gọi S là trung điểm $MO \Rightarrow SE = SF = \dfrac{MO}{2} \Rightarrow \widehat{MEO} = \widehat{MFO} = 90^\circ \Rightarrow ME$, MF là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow MO$ là tia phân giác $\widehat{EOF} \Rightarrow I$ là điểm chính giữa cung $EF \Rightarrow EI$, FI là các tia phân giác $\widehat{MEF}$ và $\widehat{MFE} \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

b) Gọi H là giao điểm của EF và $MO \Rightarrow MO \perp EH$.
Vì MO là đường kính đường tròn $(S) \Rightarrow \widehat{MAO} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MAO \backsim \Delta BHO$ (g.g)
$\Rightarrow OA.OB = OM.OH$.
Xét tam giác MEO có $\widehat{MEO} = 90^\circ$, $EH \perp MO \Rightarrow OH.OM = OE^2 \Rightarrow OA.OB = R^2$.

c) Vì $MO = 2R \Rightarrow ME = MF = R\sqrt{3} \Rightarrow EH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EF = R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta MEF$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EKF} = 60^\circ$, $\widehat{PNQ} = \widehat{FNE} = 120^\circ \Rightarrow KQNP$ là tứ giác nội tiếp đường kính KN
$\Rightarrow \widehat{KQN} = 90^\circ$.



Gọi T là giao điểm của FI và đường tròn (S) (chú ý $S \equiv I$, $T \neq F$).
Vì FT là đường kính nên $\widehat{FET} = 90^\circ$, $\widehat{FKT} = 90^\circ$. Do N là trực tâm của tam giác KEF

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

nên $KN \perp EF \Rightarrow KTEN$ là hình bình hành (các cạnh đối song song)
$\Rightarrow KN = ET = EF.\cot 60^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = R \Rightarrow PQ = KN.\sin 60^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.
Gọi P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của P, Q lên KN. Ta có
$2S_{KQNP} = PN.PK + QN.QK = KN(PP' + QQ') \le KN.PQ = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $PQ \perp KN$, hay $K \equiv M$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*Giải phương trình $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$.

Lời giải.

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ với $\forall x$ nên ta có

$$(x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) = x^{10} + x^5 + 1 = \left(x^5 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 51

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN THPT AMSTERDAM HÀ NỘI NĂM 2012

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì n^5+5n^3-6n chia hết cho 30.

Lời giải.

Ta có: $A=n^5+5n^3-6n=n(n^4+5n^2-6)=n(n^2-1)(n^2+1)(n^2+6)$

Dễ thấy $(n-1)n.(n+1)\vdots 6$

Ta sẽ chứng minh $A\vdots 5$.

Thật vậy

- Nếu $n=5k$ thì $A\vdots 5$.
- Nếu $n=5k+1$ thì $(n-1)\vdots 5\Rightarrow A\vdots 5$.
- Nếu $n=5k+2$ hoặc $n=5k+3$ thì $(n^2+6)\vdots 5\Rightarrow A\vdots 5$.
- Nếu $n=5k+4$ thì $(n+1)\vdots 5\Rightarrow A\vdots 5$.

Vậy $A=n^5+5n^3-6n\vdots 30$.

Câu 2. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $2n^2+n+8$ không phải là số chính phương.

Lời giải.

Ta có $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3 nên $n(n+1)$ không chia hết cho $3\Rightarrow n=1(\mod 3)\Rightarrow 2n^2+n+8=2(\mod 3)$. Vậy $2n^2+n+8$ không phải là một số chính phương.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-2y-\dfrac{2}{x}+1=0\\ x^2-4xy+4y^2-\dfrac{4}{x^2}+1=0\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}x-2y-\dfrac{2}{x}+1=0\\ x^2-4xy+4y^2-\dfrac{4}{x^2}+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y-\dfrac{2}{x}+1=0\\ (x-2y)^2-(\dfrac{2}{x})^2+1=0.\end{cases}$

Đặt: $\begin{cases}a=x-2y\\ b=\dfrac{2}{x}\end{cases}$

Khi đó, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}a-b+1=0\\ a^2-b^2+1=0\end{cases}\Rightarrow (b-1)^2-b^2+1=0$

$\Leftrightarrow -2b+2=0\Leftrightarrow b=1\Rightarrow a=0$

Do đó: $\begin{cases} x-2y=0 \\ \dfrac{2}{x}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm $(2;1)$.

Câu 4. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=2(xy-yz-zx)$.

Lời giải.

Ta có: $x^2+y^2+z^2=2012 \Leftrightarrow (x+y-z)^2=2012+2(xy-xz-yz) \geq 0$

$\Rightarrow 2(xy-xz-yz) \geq -2012$

Suy ra: $\min_M=-2012$. Dấu bằng xảy ra khi $x+y=z$.

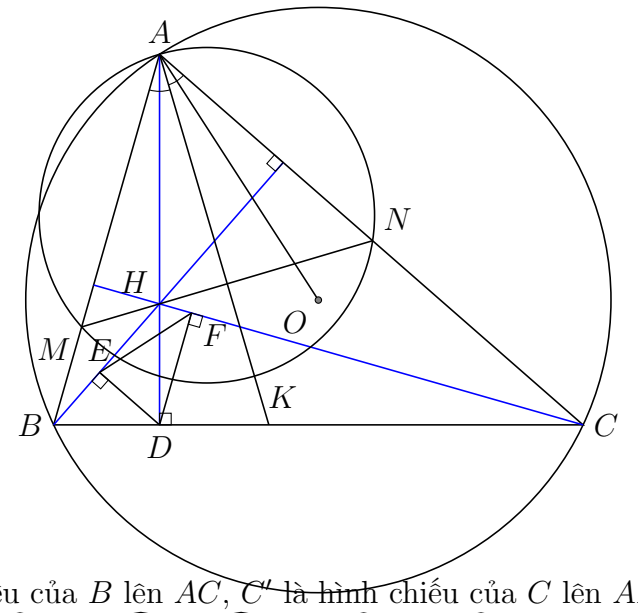
Câu 5. Cho đường tròn (O,R) và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Một điểm A di động trên đường tròn (O,R) sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi AD là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Đường thẳng chứa phân giác ngoài của $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng tam giác MNP cân.

b) Gọi E, F là hình chiếu của D lên BH, CH. Chứng minh rằng OA vuông góc với EF.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong $\widehat{BAC}$ tại K. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Gọi B' là hình chiếu của B lên AC, C' là hình chiếu của C lên AB.
Khi đó: $\widehat{AMN}=\widehat{ABH}+\widehat{MHB}; \widehat{ANM}=\widehat{ACH}+\widehat{NHC}$ (1)
Tứ giác $BCB'C'$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ABH}=\widehat{ACH}$ (1)
Hơn nữa, MN là phân giác ngoài góc BHC nên $\widehat{MHB}=\widehat{NHC}$ (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{AMN}=\widehat{ANM}$ hay tam giác AMN cân.

b) Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC
Ta có $\widehat{BEP}=\widehat{BDP}$ (tứ giác $BPED$ nội tiếp), $\widehat{BDP}=\widehat{BAD}$ (cùng phụ $\widehat{ABD}$), $\widehat{BAD}=$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\widehat{HDF}$ (do $\triangle AC'H \backsim \triangle DFH$), $\widehat{HDF} = \widehat{HEF}$ (tứ giác $HEDF$ nội tiếp).
Suy ra: $\widehat{BEP} = \widehat{HEF}$.
Ta có: $\widehat{BEP} + \widehat{BEF} = \widehat{BEF} + \widehat{FEH} = 180^\circ \Rightarrow P, E, F$ thẳng hàng.
Tương tự Q, F, E thẳng hàng.
Vậy đường thẳng EF trùng với đường thẳng PQ (4)
Kẻ tiếp tuyến xAy của đường tròn (O), ta có $OA \perp xAy$ (5)
Khi đó $AP.AB = AD^2 = AQ.AC \Rightarrow \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AQ}{AB} \Rightarrow \triangle APQ \backsim ACB \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{xAB}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{AB}$)
Suy ra $\widehat{APQ} = \widehat{xAB} \Rightarrow xAy \parallel PQ$ (6)
Từ (4), (5), (6) suy ra $OA \perp EF$.

c) Gọi T là giao điểm của KM và BH, S là giao điểm của KN và CH.
Do $AM = AN$ và AK là phân giác của MAN nên AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.
Suy ra $HTKS$ là hình bình hành $\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm của TS. (7)
Ta có: $\dfrac{TH}{TB} = \dfrac{MC'}{MB}$ (vì $KM \parallel CC'$, $\dfrac{MC'}{MB} = \dfrac{HC'}{HB}$ (vì HM là phân giác góc BHC') suy ra $\dfrac{TH}{TB} = \dfrac{HC'}{HB}$
Tương tự $\dfrac{SH}{SC} = \dfrac{HB'}{HC}$. Tứ giác $BC'B'C$ nội tiếp.
Suy ra $\widehat{C'BH} = \widehat{B'CH} \Rightarrow \dfrac{TH}{TB} = \dfrac{SH}{SC} \Rightarrow TS \parallel BC$ (8)
Từ (7), (8) suy ra HK đi qua trung điểm của BC.

Câu 6. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $(x+1)(y+z) = xyz + 2$

Lời giải.

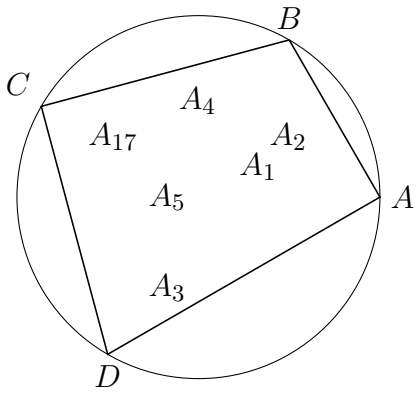
Ta có: $(x+1)(y+z) = xyz + 2 \Leftrightarrow x(y+z-yz) = 2 - y - z$.
Với $y + z = yz \Leftrightarrow (1-y)(1-z) = 1 \Rightarrow y = z = 2$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành: $4(x+1) = 4x + 2$ (mâu thuẫn).
Do đó $y + z \neq yz$. Khi đó: $x = \dfrac{2 - y - z}{y + z - yz}$.
Để x nguyên dương thì ta có hai trường hợp:

- Nếu $2 - y - z \geq 0, y + z - yz \geq 1$ thì $y + z \leq 2$. Ta tìm được $y = z = 1$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với: $2(x+1) = x + 2 \Rightarrow x = 0$ (mâu thuẫn).
- Nếu $2 - y - z \leq 0, y + z - yz \leq -1$ hay $x = \dfrac{y + z - 2}{yz - y - z}$. Nhận thấy $y + z - 2 \geq 0$ và $yz - y - z \geq 1$ nên để x nguyên dương thì $y + z - 2 \geq yz - y - z \Leftrightarrow (y-2)(z-2) \leq 2$. Đến đây dễ thấy được phương trình có các nghiệm $(1; 3; 4), (1; 4; 3)$.

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $R = 2cm$. Chứng minh rằng trong số 17 điểm $A_1, A_2, ..., A_17$ bất kì nằm trong tứ giác $ABCD$ luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.



Từ tâm O của đường tròn, ta hạ các đường vuông góc xuống các dây cung: AB, BC, CD, DA thì có 4 tứ giác nội tiếp được tạo thành, chúng đều nội tiếp đường tròn có $d = 2$cm. Gọi AA_1A_2O) là 1 trong 4 tứ giác nội tiếp đó. Từ trung điểm của OA, ta hạ các đường vuông góc xuống các cạnh OA_1, OA_2, AA_1, AA_2 của tứ giác nội tiếp AA_1A_2O) thì lần này nò bị chia thành 4 tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính 1cm. Ba tứ giác nội tiếp kia cũng chia theo cách như vậy. Từ đó suy ra có 16 tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính 1cm được tạo thành sau quá trình phân chia trên. khi gieo 17 điểm đã cho vào tứ giác nội tiếp $ABCD$ thì chúng thuộc vào 16 tứ giác nội tiếp trên, theo nguyên lý Derrichle tồn tại 2 điểm cùng thuộc 1 tứ giác nội tiếp và do đó khoảng các giữa chúng cũng không vượt quá 1cm.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 52

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2015, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn: $(3a+3b+3c)^3 = 24 + (3a+b-c)^3 + (3b+c-a)^3 + (3c+a-b)^3$. Chứng minh rằng: $(a+2b)(b+2c)(c+2a) = 1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+2y+xy = 5 \\ 27(x+y)+y^3+7 = 26x^3+27x^2+9x. \end{cases}$

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} 3a+b-c = x \\ 3b+c-a = y \\ 3c+a-b = z \end{cases}$

Ta có: $(3a+3b+3c)^3 = 24 + (3a+b-c)^3 + (3b+c-a)^3 + (3c+a-b)^3$

$\Rightarrow (x+y+z)^3 = 24 + x^3 + y^3 + z^3$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 = 24 + (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$

$\Leftrightarrow 24 - 3(x+y)(y+z)(z+x) = 0$

$\Rightarrow 24 - 3(2a+4b)(2b+4c)(2c+4a) = 0$

$\Leftrightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a) = 1.$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+2y+xy = 5 \\ 27(x+y)+y^3+7 = 26x^3+27x^2+9x \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2) = 9 \\ 27(x+y)+y^3+7 = 26x^3+27x^2+9x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2) = 9 \\ x^3+y^3+7+3xy(x+2)(y+2) = 27x^3+27x^2+9x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2) = 9 \\ x^3+y^3+8+3xy(x+y)+12(x+y)+6(x+y)^2 = (3x+1)^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2) = 9 \\ (x+y+2)^3 = (3x+1)^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2) = 9 \\ y+1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x+1) = 9 \\ y+1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ y+1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3,5 \\ y = -8. \end{cases} \end{array}\right.$

Câu 2.

a) Tìm số tự nhiên n để $n+5$ và $n+30$ đều là số chính phương (số chính phương là bình phương của một số nguyên).

b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức: $1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

c) Giả sử x, y, z là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}.$$

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} n+5=x^2 \\ n+30=y^2 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{N}, x>0, y>0) \Rightarrow y^2-x^2=25$

$\Leftrightarrow (y-x)(y+x)=1\cdot 25$ vì $x,y\in\mathbb{N}, x>0, y>0$.

Lại có $y-x<y+x$ nên $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=13. \end{cases}$

Thay vào ta được $n=139$ thỏa mãn.

b) Ta thấy: $1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ với $x,y\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow x, y$ là các số chính phương $\Rightarrow \sqrt{x+y+3}, \sqrt{x}, \sqrt{y}\in\mathbb{N}$

Đặt $\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b, \sqrt{x+y+3}=c \quad (a,b,c\in\mathbb{N})$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=c+1 \\ x+y=a^2+b^2 \\ x+y+3=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=c+1 \\ c^2-a^2-b^2=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow (a+b-1)^2-a^2-b^2=3$

$\Leftrightarrow 2a+2b-2ab=-3$

$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x=9 \\ y=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

c) Ta có $P=\dfrac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\dfrac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\dfrac{z}{\sqrt{x+y-4}}$

$=\dfrac{4x}{4\sqrt{y+z-4}}+\dfrac{4y}{4\sqrt{z+x-4}}+\dfrac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}$

$=\dfrac{4x}{2\sqrt{4(y+z-4)}}+\dfrac{4y}{2\sqrt{4(z+x-4)}}+\dfrac{4z}{2\sqrt{4(x+y-4)}}$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\geq \frac{4x}{y+z-4+4}+\frac{4y}{x+z-4+4}+\frac{4z}{x+y-4+4}$$
$$=4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\geq 6.$$

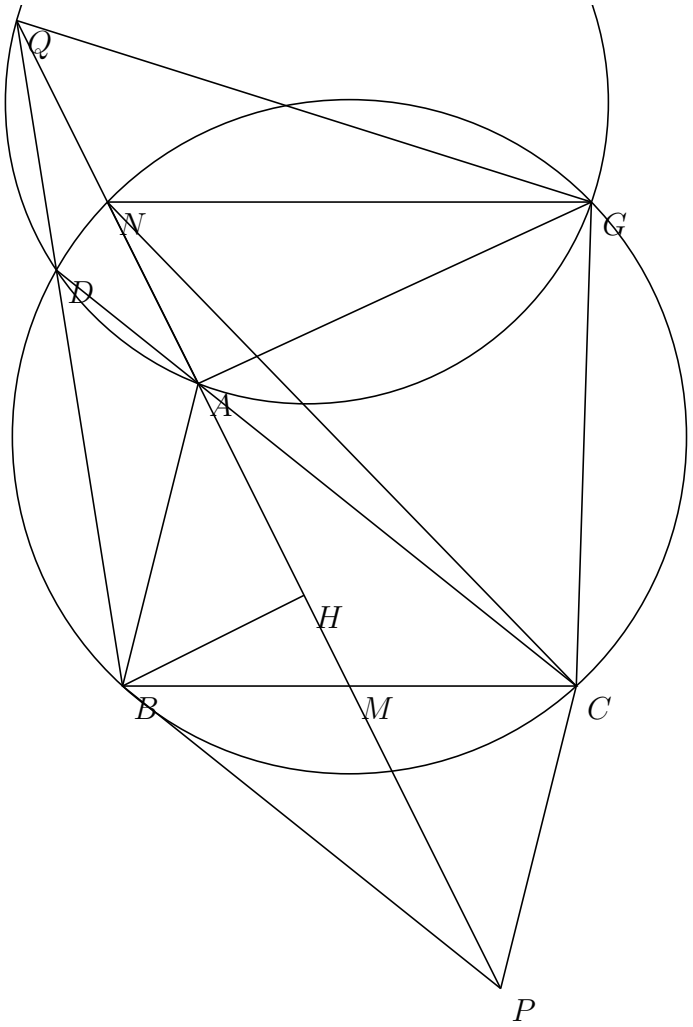
Vậy $\min P=6 \Leftrightarrow x=y=4$.

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn không cân với $AB<AC$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN=2MH$.

a) Chứng minh rằng $BN=AC$.

b) Gọi Q là điểm đối xứng với A qua N. Đường thẳng AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B,D,N,C cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (O).

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt (O) tại G và D. Chứng minh rằng NG song song với BC.



Lời giải.

a) P là điểm đối xứng của A qua M. Suy ra $HP=HM+MP=2HM+AH=AN+AH=NH$. Suy ra H là trung điểm NP. Mà $BH\perp NP$ nên tam giác BNP cân tại B nên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$BN = BP$. Mặt khác lại có M là trung điểm BC nên tứ giác $ACPB$ là hình bình hành nên $AC = BP$ suy ra $AC = BN$.

b) Do tứ giác $ACPB$ là hình bình hành nên $\widehat{PAC} = \widehat{APB}$. Mà tam giác BPN cân tại B nên $\widehat{APB} = \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{PAC} \Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{BNQ}$. Vì $AC = NB$ và $NQ = AN$ nên $\triangle BNA = \triangle CAN \Rightarrow \widehat{DBN} = \widehat{DCN}$. Suy ra B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Vì $DQGA$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CAG} = \widehat{BQG}$. Mà $\widehat{GBQ} = \widehat{GCA}$ nên $\triangle GBQ$ đồng dạng với $\triangle GCA$.

$$\Rightarrow \frac{GA}{AC} = \frac{GQ}{QB} \Rightarrow \frac{GA}{NB} = \frac{GQ}{NC}.$$

Mà $\widehat{BNC} = \widehat{BDC} = \widehat{AGQ}$ suy ra tam giác NBC đồng dạng với tam giác AGQ. Suy ra $\widehat{GQA} = \widehat{NCB}$ mà $\widehat{GQA} = \widehat{GDC}$ nên $\widehat{NCB} = \widehat{GDC}$ nên $BN = CG$ nên $NG \parallel BC$.

Câu 4. Ký hiệu tập hợp S gồm 2015 điểm phân biệt trên một mặt phẳng. Giả sử tất cả các điểm của S không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh có ít nhất 2015 đường thẳng phân biệt mà mỗi đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm của S.

Lời giải.

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học với $n \geq 3$. Với $n = 3$ thì 3 điểm không thẳng hàng tạo thành một tam giác nên bài toán đúng. Giả sử bài toán đúng với $n \geq 3$.

Xét $n+1$ điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Xét n điểm bất kì trong đó.

TH1: n điểm được xét không thẳng hàng, theo giả thiết quy nạp sẽ có n đường thẳng được tạo ra từ các điểm đó. Nối điểm thứ $n+1$ với n điểm đang xét thì có ít nhất một đường thẳng mới vì $n+1$ điểm không cùng nằm trên một đường thẳng.

TH2: n điểm được xét nằm trên cùng một đường thẳng, nối điểm thứ $n+1$ với n điểm đã cho ta được n đường thẳng, cộng với đường thẳng ban đầu ta được $n+1$ đường thẳng.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 53

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2015, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2+3a=b^2+3b=2$

a) Chứng minh rằng $a+b=-3$.

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3=-45$.

Lời giải.

a) $\begin{cases} a^2+3a=2 \\ b^2+3b=2 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2+3(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)+3(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \text{ (loại vì } a\neq b) \\ a+b=-3 \end{array}\right.$.

b) Từ kết quả câu a) ta suy ra $(a+b)^3=-27 \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-27 \Leftrightarrow a^3+b^3-9ab=-27$.
Từ giả thiết, ta có $a^2+3a+b^2+3b=4 \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab+3(a+b)=4 \Leftrightarrow ab=-2$.
Vậy $a^3+b^3=-45$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=5xy \\ 4x^2+y^2=5xy^2 \end{cases}$

Lời giải.

- Dễ thấy $x=y=0$ là một nghiệm của hệ phương trình.
- Nếu $y\neq 0$, nhân hai vế của phương trình $2x+3y=5xy$ với y, ta được:
$\begin{cases} 2xy+3y^2=5xy^2 \\ 4x^2+y^2=5xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5xy \\ 2x^2-xy-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5xy \\ (x-y)(2x+y)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3y=5xy \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3y=5xy \\ 2x+y=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm $(0;0)$, $(1;1)$ và $\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$.

Câu 3. Tìm các số x, y không nhỏ hơn 2 sao cho $xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

Lời giải.

Ta có $xy-1 \vdots (x-1)(y-1) \Leftrightarrow xy-1 \vdots xy+1-x-y$.

Suy ra $(x+1)+(y-1) \vdots (x-1)(y-1) \Rightarrow x-1 \vdots y-1$ và $y-1 \vdots x-1 \Rightarrow x=y$

Từ giả thiết suy ra $x^2-1 \vdots (x-1)^2 \Rightarrow x+1 \vdots x-1 \Rightarrow 2 \vdots x-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy $x=y=3$ hoặc $x=y=3$.

Câu 4. Với x, y là những số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2+2y+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{3y+1}$.

Lời giải.

$x^2y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow 2y=-x^2y^2-1 \Leftrightarrow y=\dfrac{-x^2y^2-1}{2}$.

$P=\dfrac{2xy}{3\left(x^2y^2-1\right)+2}=\dfrac{2xy}{-3x^2y^2-1} \Leftrightarrow 3Px^2y^2+2xy+P=0$ (1), $\Delta=4-12P^2$.

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Rightarrow 4-12P^2 \geq 0 \Rightarrow P^2 \leq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq P \leq \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\min P=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y=-\dfrac{2}{3}$; $\max P=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y=\dfrac{2}{3}$.

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC không cân có tâm đường tròn nội tiếp là I. Đường thẳng AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC, IB.

a) Chứng minh rằng $EF \parallel BC$.

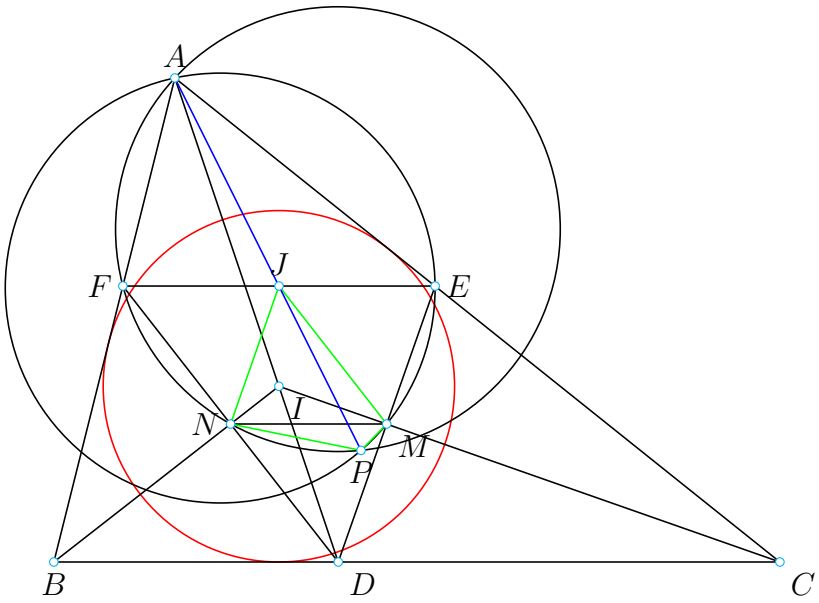
b) Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng DE, DF, EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN tại P khác A. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, J cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh A, P, J thẳng hàng.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có AD là phân giác $\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$. Mà ΔBED, ΔCDF là tam giác cân suy ra $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow BC \parallel FE$.

b) Ta có $BC \parallel FE \Rightarrow \widehat{FED} = \widehat{EDB} = \widehat{BED}$.
Mà $\widehat{APM} = 180^\circ - \widehat{AEM} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{APM} = \widehat{DEF}$
Tương tự $\widehat{DFE} = \widehat{APN} \Rightarrow \widehat{APN} + \widehat{APM} = \widehat{DFE} + \widehat{FED} = \widehat{MPN}$
mà $\widehat{MJN} = \widehat{MDN} = \widehat{EDF} \Rightarrow \widehat{MJN} + \widehat{MPN} = 180^\circ \Rightarrow MPNJ$ nội tiếp.

c) Ta có $\widehat{APM} = \widehat{DEF}$ và $\widehat{JPM} = \widehat{JNM} = \widehat{JEM} \Rightarrow \widehat{JPM} = \widehat{APM} \Rightarrow A, P, J$ thẳng hàng.

Câu 6. Cho bảng ô vuông 2015. Kí hiệu ô $(i; j)$ là ô ở hàng thứ i, cột j. Ta viết các số nguyên dương từ 1 đến 2015 theo qui tắc sau:

1	3	6	10	...
2	5	9	...	
4	8	...		
7	...			
...				

i) Số 1 được viết ở ô $(1;1)$.

ii) Nếu số k được viết ở ô $(i;j), i>1$ thì $k+1$ được viết vào ô $(i-1;j+1)$.

iii) Nếu k được viết vào ô $(1;j)$ thì $k+1$ được viết vào ô $(j+1;1)$.

(xem hình vẽ)
Khi đó 2015 được viết vào ô $(m;n)$. Hãy xác định m,n.

Lời giải.

Theo đề bài, các số nguyên dương được sắp xếp theo từng hàng chéo của bảng: hàng chéo thứ nhất có 1 số, hàng chéo thứ hai có 2 số, hàng chéo thứ ba có 3 số, ...
Giả sử số x nằm ở hàng chéo thứ k ta có:
$\frac{k(k-1)}{2}<x\le\frac{k(k+1)}{2}\Rightarrow\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\le k<\frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}\Rightarrow k=\left[\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\right]$
Áp dụng với $x=2015$ ta có $k=\left[\frac{-1+\sqrt{1+8\cdot 2015}}{2}\right]=63$
Số đầu tiên ở hàng chéo thứ $k=63$ là $\frac{k(k+1)}{2}+1=1954$
Như vậy số 2015 nằm ở vị trí thứ $2015-1954+1=62$ của hàng chéo thứ 63 (vị trí áp chót).
Vậy tọa độ của nó là $(2;62)$.

Câu 7. Giả sử a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ac+abc\le 4$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ac)$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho bốn số ab,ac,bc,abc ta có:
$4\ge ab+bc+ac+abc\ge 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3}\Rightarrow abc\le 1\Rightarrow a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 2(ab+ac+bc)$ (1).
Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x$, $\sqrt[3]{b^2}=y$, $\sqrt[3]{c^2}=z(x,y,z>0)$
$(1)\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{y^3z^3}+2\sqrt{x^3z^3}$
Áp dụng bất đẳng thức Schur bậc ba, ta có:
$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)$
$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\ge 0$ với mọi số thực không âm x,y,z.
Thật vậy, không làm mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\Rightarrow z(z-x)(z-y)\ge 0$
Ta được $x(x-z)-y(y-z)=x^2-xz+yz-y^2=(x-y)(x+y-z)\ge 0$
$\Rightarrow x(x-y)(x-z)+y(x-y)(y-z)\ge 0\Leftrightarrow x(x-z)(x-y)+y(y-z)(y-x)\ge 0$
$\Rightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\ge 0$.
Từ đó, ta có $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{y^3z^3}+2\sqrt{x^3z^3}$.
Dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}x=y=z\\x=y,z=0\end{array}\right.\Rightarrow a=b=c=1$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 54

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2014, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

1) Giả sử x, y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn

$$\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=4$$

Chứng minh rằng $5y=4x$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-3y^2+xy=12\\6x+x^2y=12+6y+y^2x\end{cases}$.

Lời giải.

1) Dễ thấy đẳng thức sau đúng với mọi $a\neq b; a\neq -b$

$$\frac{b}{a+b}-\frac{b}{a-b}=\frac{-2b^2}{a^2-b^2}$$

suy ra

$$\frac{b}{a+b}=\frac{b}{a-b}-\frac{-2b^2}{a^2-b^2}$$

Do đó đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{y}{x-y}-\frac{2y^2}{x^2-y^2}+2\left(\frac{y^2}{x^2-y^2}-\frac{2y^4}{x^4-y^4}\right)+4\left(\frac{y^4}{x^4-y^4}-\frac{2y^8}{x^8-y^8}\right)+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{y}{x-y}=4\Leftrightarrow y=4x-4y\Leftrightarrow 5y=4x.$$

2) Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}(x-y)(2x+3y)=12\\6(x-y)+xy(x-y)=12\end{cases}$

suy ra

$$(x-y)(2x+3y)=(x-y)(6+xy)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\ \text{(loại)}\\2x+3y=6+xy\end{array}\right.$$

Ta có

$$2x+3y=(6+xy)\Leftrightarrow(x-3)(y-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right.$$

Với $x=3$, thay vào phương trình đầu của hệ ta có $18-3y^2+3y=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=2\end{array}\right.$

Với $y=2$, thya vào phương trình đầu của hệ ta có $2x^2+2x-12=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-4\end{array}\right.$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(3;-1)$, $(3;2)$ và $(-4;2)$.

Câu 2.

1) Cho x, y là các số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh $x = y$.

2) Giả sử x, y là những số thực không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 + xy = x^2 + y^2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}} + \frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}.$$

Lời giải.

a) Do x, y là các số nguyên lớn hơn 1 nên $x, y \geq 2$
$\Rightarrow -4xy + 1 < -7x + 7y < 4xy + 1$
$\Rightarrow 4x^2y^2 - 4xy + 1 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < 4x^2y^2 + 4xy + 1$
$\Rightarrow (2xy - 1)^2 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < (2xy + 1)^2$
Mà $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương và $1 < 2xy - 1 < 2xy + 1$ nên ta có $4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy)^2 \Leftrightarrow x = y$, đpcm

b) Ta có

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 = x^2 + y^2 - xy \\ \Leftrightarrow\ & (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = x^2 + y^2 - xy \\ \Leftrightarrow\ & (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - xy = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $x = y = 0$ suy ra $P = \frac{5}{2}$.
Với $x + y = 1$ suy ra $0 \leq x, y \leq 1$
suy ra $P \leq \frac{1+\sqrt{1}}{2+\sqrt{0}} + \frac{2+\sqrt{1}}{1+\sqrt{0}} = 4$, dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = 0$
$P \geq \frac{1+\sqrt{0}}{2+\sqrt{1}} + \frac{2+\sqrt{0}}{2+\sqrt{1}} + \frac{2+\sqrt{0}}{1+\sqrt{1}} = \frac{4}{3}$, dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, y = 1$.
Vậy $P_{max} = 4 \Leftrightarrow x = 1; y = 0$.
$P_{min} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 0, y = 1$

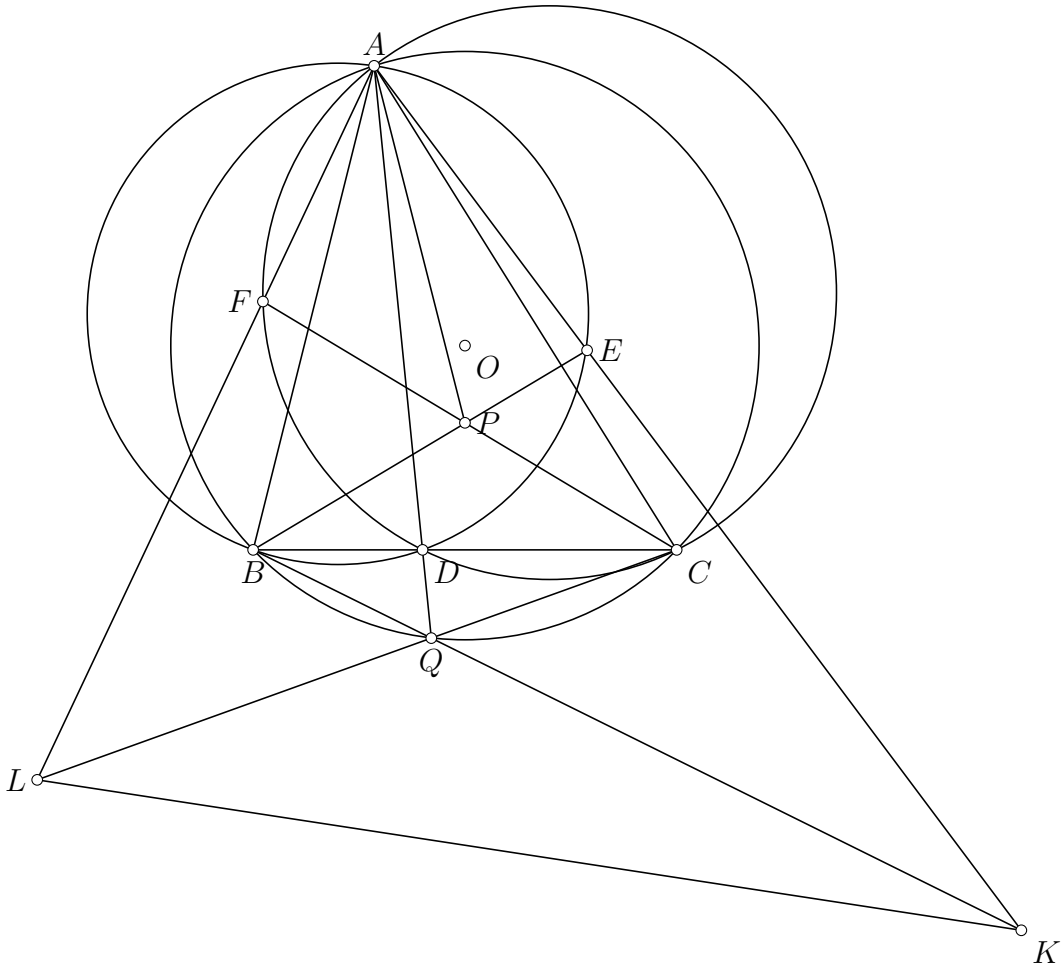
Câu 3. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn tâm (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB. Chứng minh $\widehat{QKL}+\widehat{PAB}=\widehat{QLK}+\widehat{PAC}$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{EAF}=\widehat{EAD}+\widehat{DAF}=\widehat{EBD}+\widehat{FCB}=180^\circ-\widehat{BPC}=180^\circ-\widehat{EPF}$ suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp.

b) Tứ giác $AEPF$ nội tiếp suy ra $\widehat{AEB}=\widehat{LFC}$ (1).
Ta lại có $\widehat{FCL}=\widehat{FCB}+\widehat{BCL}=\widehat{PBC}+\widehat{BAQ}=\widehat{DAE}+\widehat{BAQ}=\widehat{BAE}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle FCL\backsim\triangle EAB$ (dpcm)

c) Từ $\triangle FCL\backsim\triangle EAB$ suy ra $\dfrac{FL}{FA}=\dfrac{FC}{AE}$ hay $FL.AE=FC.EB$ (3)
Chứng minh tương tự $EK.FA=FC.EB$ (4),
Từ (3) và (4) suy ra $FL.EA=EK.FA$ hay $\dfrac{FL}{FA}=\dfrac{EK}{EA}$ suy ra EF song song với KL.
Ta lại có $\widehat{QKL}=\widehat{ALK}-\widehat{ALQ}=\widehat{AFE}-\widehat{ABE}=\widehat{APE}-\widehat{ABE}=\widehat{PAB}$.
Tương tự ta có $\widehat{QKL}=\widehat{PAC}$.
suy ra $\widehat{QKL}+\widehat{PAB}=\widehat{QLK}+\widehat{PAC}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 4. Cho tập hợp A gồm 31 phần tử và dãy gồm m tập con của A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) Mỗi tập thuộc dãy có ít nhất hai phần tử

ii) Nếu hai tập thuộc dãy có chung nhau ít nhất hai phần tử thì số phần tử của hai tập này khác nhau.

Chứng minh rằng $m \leq 900$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta thấy m tập con thuộc dãy là phân biệt. Vì A có 31 phần tử nên số tập con có đúng 2 phần tử của A là $\dfrac{31.30}{2}$.

Kí hiệu $a_k (2 \leq k \leq 31)$ là các tập có đúng k phần tử, nằm trong dãy đã cho, suy ra $m = a_2 + a_3 + \ldots a_{31}$.

Xét một tập hợp có k phần tử suy ra số các tập hợp con có hai phần tử của tập đó là $\dfrac{k(k-1)}{2} \Rightarrow a_k$ tập này sẽ có $a_k.\dfrac{k(k-1)}{2}$ tập con 2 phần tử.

Mà theo giả thiết với hai phần tử bất kì của A thì chúng không thể đồng thời thuộc 2 tập có k phần tử của dãy suy ra các tập con của hai phần tử nói trên là phân biệt.

suy ra

$$\frac{k(k-1)}{2}a_k \leq \frac{31.30}{2} \Rightarrow a_k \leq 31.30.\frac{1}{k(k-1)}$$

suy ra

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{31} \leq 31.30\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{30.31}\right)$$

$$\Rightarrow m \leq 31.30\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{30} - \frac{1}{31}\right)$$

Vậy $m \leq 900$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 55

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2014, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)=8$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$

Đặt $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=a\ge 0$; ta có $a^2=2+2\sqrt{1-x^2}$, ta có phương trình $a^3=8\Leftrightarrow a=2$

Với $a=2$ thì $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-xy+y^2=1\\x^2+xy+2y^2=4.\end{cases}$

Lời giải.

Xét $x=0$ ta có hệ $\begin{cases}y^2=1\\y^2=2\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Xét y=0 ta có hệ $\begin{cases}x^2=1\\x^2=4\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Vậy x, y khác 0 đặt $x=ty$; $t\ne 0$.

Ta có hệ $\begin{cases}t^2y^2-ty^2+y^2=1\\t^2y^2+ty^2+2y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2(t^2-t+1)=1\\y^2(t^2+t+2)=4\end{cases}\quad(*)$.

Vì mỗi vế hệ $(*)$ khác 0 ta chia 2 vế hệ $(*)$ cho nhau ta được

$$\frac{t^2-t+1}{t^2+t+2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4t^2-4t+4=t^2+t+2\Leftrightarrow 3t^2-5t+2=0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)(3t-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right..$$

Với $t=1$ thay vào hệ $(*)$ ta có 2 nghiệm $(x;y)\in\{(1;1);(-1;-1)\}$.

Với t=$\frac{2}{3}$ ta có ta có 2 nghiệm $(x;y)\in\left\{\left(\frac{2\sqrt{7}}{9};\frac{3}{\sqrt{7}}\right);\left(-\frac{2\sqrt{7}}{9};-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\right\}$.

Câu 3. Giả sử x; y; z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(x+z)}.$$

Lời giải.

$x+y+z=xyz\Leftrightarrow\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}=1.$

Nên $\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{x\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{xyz}{(x+y)(x+z)}$ (1).

Tương tự

$$\dfrac{2y}{1+y^2}=\dfrac{2xyz}{(x+y)(y+z)} \quad (2);$$
$$\dfrac{3z}{1+z^2}=\dfrac{3xyz}{(x+z)(y+z)} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{2y}{1+y^2}+\dfrac{3z}{1+z^2}=\dfrac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(x+z)}$.

Cách khác từ giả thiết

$$\begin{aligned}&x+y+x=xyz\\&\Leftrightarrow x^2+xy+xz=x^2yz\\&\Leftrightarrow x^2+1=x^2yz-xy-xz+1=(xy-1)(xz-1)\\&\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{(xy-1)(xz-1)}\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có kết quả.

Câu 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy$.

Lời giải.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy$.

Đặt $x+y=a$, $xy=b$ ta có phương trình

$$\begin{aligned}&ab^2+a=3+b\\&\Leftrightarrow a(b^2+1)=b+3\\&\Leftrightarrow a=\dfrac{b+3}{b^2+1}\end{aligned}$$

Nếu $b=3$ vô nghiệm.

Với $b\neq 3$ ta có $a=\dfrac{b+3}{b^2+1}\Leftrightarrow a(b-3)=\dfrac{b^2-9}{b^2+1}=1-\dfrac{10}{b^2+1}$ suy ra $b^2+1\text{Ư}(10)$; $b\in\{2;1\}$ suy ra $(b;a)=(1;2);(2;1)$ giải ra $(x;y)=(1;1)$.

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC với $AB<BC$. D là điểm thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua C song song với AD cắt trung trực AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt trung trực AB tại F.

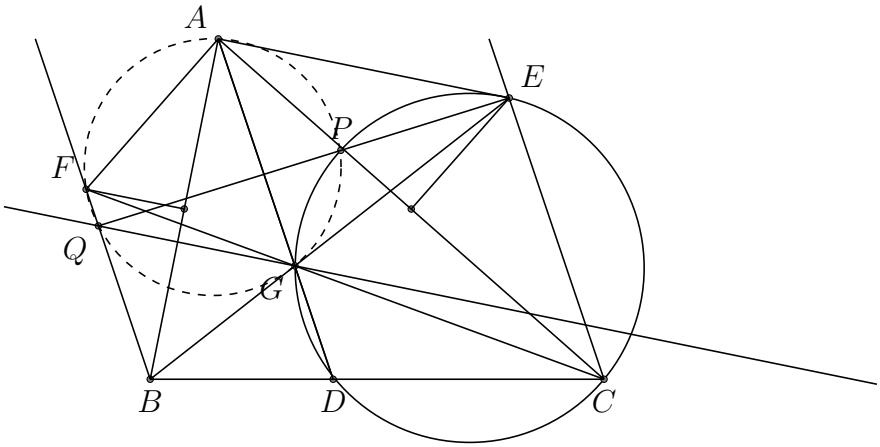
a) Chứng minh rằng tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

b) Chứng minh đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại G.

c) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BF tại Q. Đường thẳng QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Ta có tam giác AFB cân tại F tam giác AEC cân tại E suy ra $\widehat{ABF} = \widehat{BAF} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$;
$\widehat{ACE} = \widehat{CAE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ nên $\triangle ABF \backsim \triangle ACE$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{AB}{AC}$ (1).

b) Ta có BF song song với CE vì cùng song song với AD.
Giả sử CF cắt BE tại G, áp dụng định lí Ta-lét $\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BG}{GE}$ (2)
Áp dụng tính chất đường phân giác $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{BG}{GE} = \dfrac{BD}{DC}$. Áp dụng định lí Ta-lét đảo suy ra GD song song với CE.
Vậy AD, BE, CF đồng quy.

c) Ta có $\widehat{QBG} = \widehat{GEC}$ (so le trong), $\widehat{QGB} = \widehat{AEG}$ (đồng vị).
$\Rightarrow \widehat{BGQ} = \widehat{ECA} + \widehat{EAC} = \widehat{FAG}$.
Suy ra tứ giác $AFQG$ nội tiếp.
Vì tứ giác $CGPE$ nội tiếp nên $\widehat{PEC} = \widehat{PGF}$, mà $\widehat{PEC} = \widehat{PQF}$ (đồng vị).
$\Rightarrow \widehat{EQG} = \widehat{FGP}$ suy ra $FQGP$ nội tiếp.
Vậy 5 điểm A, F, Q, G, P nội tiếp.

Câu 6. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng $2abc(a + b + c) \leq \dfrac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a^4b^2+b^4c^2 \geq 2a^2b^3c \\ b^4c^2+c^4a^2 \geq 2ab^2c^3 \\ a^4b^2+c^4a^2 \geq 2a^3bc^2 \end{cases}$ nên $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \geq abc(ab^2+bc^2+ca^2)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{1}{9} &= a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{ab+bc+ca}{9} \\ &\geq abc(ab^2+bc^2+ca^2)+\frac{ab+bc+ca}{9}=A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= abc\left(a^2b+b^2c+c^2a+\frac{1}{9a}+\frac{1}{9b}+\frac{1}{9c}\right) \\ &= abc\left[\left(ab^2+\frac{1}{9a}\right)+\left(bc^2+\frac{1}{9b}\right)+\left(ca^2+\frac{1}{9c}\right)\right] \\ A &\geq abc\left(\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c\right)=\frac{2abc}{3}(a+b+c) \\ &\Rightarrow a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{1}{9} \geq \frac{2abc}{3}(a+b+c) \quad (1) \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} &a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab^2c+a^2bc+abc^2 \Leftrightarrow \\ &a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+a^2bc+abc^2) \geq 3(ab^2c+a^2bc+abc^2) \\ \Leftrightarrow &(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)\frac{1}{3} \geq abc(a+b+c) \\ \Leftrightarrow &\frac{4}{9} \geq \frac{4abc}{3}(a+b+c) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $2abc(a+b+c) \leq \frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2 Đặt $ab=x$, $bc=y$, $ac=z$ $(x,y,z>0)$ Vì $ab+ac+bc=1 \Rightarrow x+y+z=1$.

Suy ra $2(xy+yz+xz) \leq \frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si

$$\begin{aligned} a^4b^2+b^4c^2 &\geq 2a^2b^2bc=2x^2y \\ b^4c^2+c^4a^2 &\geq 2b^2c^2ac=2y^2z \\ c^4a^2+a^4b^2 &\geq 2a^2c^2ba=2z^2x \\ \Rightarrow 2(xy+yz+xz) &\leq \frac{5}{9}+(x^2y+y^2z+z^2x) \end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$x^2y+\frac{1}{9}y\geq\frac{2}{3}yx$$
$$y^2z+\frac{1}{9}z\geq\frac{2}{3}yz$$
$$z^2x+\frac{1}{9}x\geq\frac{2}{3}zx$$
$$\Rightarrow x^2y+y^2z+z^2x+\frac{1}{9}(x+y+z)\geq\frac{2}{3}(xy+yz+xz)$$
$$\frac{4}{9}=\frac{4}{9}(x+y+z)^2\geq 3.\frac{4}{9}(xy+yz+xz)=\frac{4}{3}(xy+yz+xz)$$
$$\Rightarrow x^2y+y^2z+z^2x+\frac{5}{9}\geq 2(xy+yz+xz)$$

Dấu $=$ xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ Suy ra $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Từ $u=2x+1\Rightarrow x=\frac{u-1}{2}=\frac{(2x+1)-1}{2}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 56

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2013, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=1+x-y+xy \\ 7xy+x-y=7 \end{cases}$.

b) Giải phương trình $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$.

Lời giải.

a) Cộng vế với vế hai phương trình trong hệ ta được $x^3+y^3+6xy-8=0$
Đặt $a=x+y; b=xy \quad (a^2\geq 4b)$
Phương trình trên trở thành $a^3-3ab+6b-8=0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a+4-3b)=0$
Do $a^2+2a+4-3b=x^2+y^2-xy+2x+2y+4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2+\dfrac{1}{2}(x+2)^2+\dfrac{1}{2}(y+2)^2\geq 0 \quad \forall x,y$
Dấu $''=''$ xảy ra khi $x=y=-2$ không thỏa mãn phương trình thứ 2 của hệ
Do đó $a=2\Rightarrow y=2-x$, thay vào phương trình 2 ta được $x=1$ hoặc $x=\dfrac{9}{7}$.
Vậy hệ có 2 nghiệm là $(x;y)\in\{(1;1),\left(\dfrac{9}{7};\dfrac{5}{7}\right)\}$.

b) ĐKXĐ $-1\leq x\leq 1$.
Phương trình $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$
$\Leftrightarrow 2x+6+2\sqrt{1-x^2}-6\sqrt{x+1}-2\sqrt{1-x}=0$
Đặt $a=\sqrt{x+1}; b=\sqrt{1-x} \quad (a,b\geq 0)$.
Phương trình trên có dạng $2a^2+4+2ab-6a-2b=0\Leftrightarrow (a-1)(2a+2b-4)=0$.

- Với $a=1\Rightarrow \sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=0$, thỏa mãn.
- Với $a+b=2\Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=2\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=4\Leftrightarrow 1-x^2=1\Leftrightarrow x=0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Câu 2.

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $(x;y)$:

$$5x^2+8y^2=20412.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot\sqrt{1+x^2y^2}$, trong đó x,y là các số thực dương thỏa mãn $x+y\leq 1$.

Lời giải.

a) Xét phương trình $5x^2+8y^2=20412$, từ phương trình suy ra x chẵn, đặt $x=2a$, với $a\in\mathbb{Z}$.
Phương trình trở thành $20a^2+8y^2=20412\Leftrightarrow 5a^2+2y^2=5103$.
Vì 5103 chia hết cho 3 nên $5a^2+2y^2=3(2a^2+y^2)-(a^2+y^2)$ chia hết cho 3, suy ra a^2+y^2 chia hết cho 3.
Do số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên từ a^2+y^2 chia hết cho 3, suy ra a và y cùng chia hết cho 3.
Đặt $a=3c; y=3d$ với $c;d\in\mathbb{Z}$. Ta có $45c^2+18d^2=5103$, suy ra $5c^2+2d^2=567$.
Lập luận tương tự như trên, suy ra $c;d$ chia hết cho 3, nên $c=3t; d=3u$ với $t,u\in\mathbb{Z}$.
Do đó $45t^2+18u^2=567\Rightarrow 5t^2+2u^2=63$.
Tương tự như trên ta có $t;u$ chia hết cho 3, đặt $t=3k; u=3h$ với $k;h\in\mathbb{Z}$.
Suy ra $5k^2+2h^2=7\Rightarrow 5k^2<7$ và $5k^2$ lẻ $\Rightarrow k^2=1; u^2=1$.
Thay ngược lại ta được $(x;y)\in\{(54;27),(54;-27),(-54;27),(-54;-27)\}$.

b) Xét biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot\sqrt{1+x^2y^2}$
Áp dụng BĐT AM-GM ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{2}{\sqrt{xy}}$.
Do đó $P\geq 2\sqrt{\dfrac{1+x^2y^2}{xy}}$. Dấu $''=''$ xảy ra khi $x=y$.
Đặt $M=\dfrac{1+x^2y^2}{xy}=xy+\dfrac{1}{16xy}+\dfrac{15}{16xy}\geq\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{16xy}$.
Mà $x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow 1\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\dfrac{1}{xy}\geq 4\Rightarrow\dfrac{15}{16xy}\geq\dfrac{15}{4}$.
Suy ra $M\geq\dfrac{17}{4}\Rightarrow P\geq\sqrt{17}$. Dấu $''=''$ xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.
Vậy $\text{Min}P=\sqrt{17}$, xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

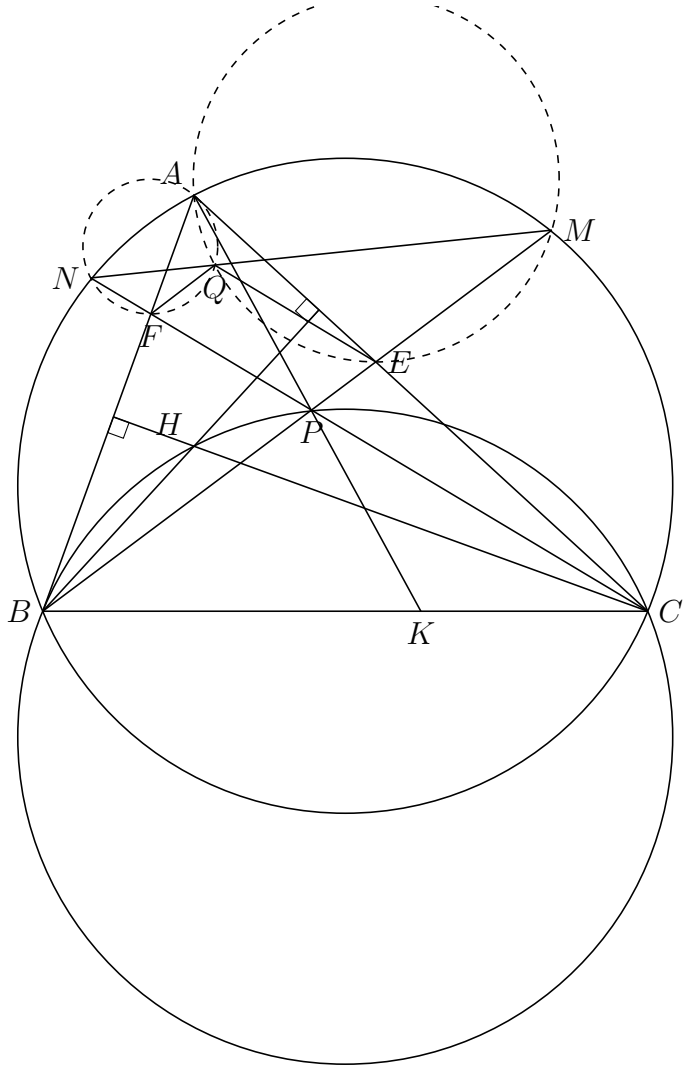
Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có trực tâm H. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC (P khác B,C,H) và nằm trong tam giác ABC; PB cắt (O) tại M khác B; PC cắt (O) tại N khác C; BM cắt AC tại E, CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q khác A.

a) Chứng minh rằng M,N,Q thẳng hàng.

b) Giả sử AP là phân giác góc MAN. Chứng minh PQ đi qua trung điểm của BC.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Vì $\widehat{BHC} = \widehat{BPC}$ (cùng chắn cung $\widehat{BC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC)
Mà $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ nên $\widehat{EAF} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow AEPF$ là tứ giác nội tiếp.
Do đó $\widehat{AEP} + \widehat{AFP} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AFN} + \widehat{AEM} = 180^\circ$.
Các tứ giác $ANFQ$ và $AMEQ$ nội tiếp nên $\widehat{AQN} = \widehat{AFN}; \widehat{AQM} = \widehat{AEM}$.
Do đó $\widehat{AQN} + \widehat{AQM} = 180^\circ$, suy ra M, Q, N thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ mà $\widehat{ANM} = \widehat{AFQ}$ nên $\widehat{AFQ} = \widehat{ABM}$, suy ra $FQ \parallel PE$. Tương tự $FQ \parallel QE$ nên tứ giác $EQFP$ là hình bình hành, do đó $\widehat{QEP} = \widehat{QFP}$.
Mặt khác $\widehat{QFP} = \widehat{NAQ}$ (cùng bù với $\widehat{NFQ}$), suy ra $\widehat{MAQ} = \widehat{NAQ}$. Mà AP là phân giác của $\widehat{MAN}$ nên A, Q, P thẳng hàng.
Giả sử AP cắt BC tại K. Ta có $\widehat{QAE} = \widehat{QME}$ mà $\widehat{QME} = \widehat{NCB}$ nên $\widehat{QAC} = \widehat{NCB}$ mà góc $\widehat{AKC}$ chung, suy ra $\Delta KCP \backsim \Delta KAC$(g-g).
Do đó $\dfrac{KC}{KA} = \dfrac{KP}{KC} \Rightarrow KC^2 = KA \cdot KP$.
Tương tự $KB^2 = KA \cdot KP$. Suy ra $KB^2 = KC^2$ hay $KB = KC$.

Câu 4. Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{192}$ và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{192} = 0 \\ |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{192}| = 2013 \end{cases}.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Chứng minh rằng $x_{192} - x_1 \geq \dfrac{2013}{96}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra trong dãy có ít nhất một số dương và số âm.

Giả sử có k số âm và $192-k$ số không âm $k \in \mathbb{N}^*, k < 192$. Ta xếp các theo thứ tự $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k < 0 \leq x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq \cdots \leq x_{192}$.

Đặt $S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ và $S_2 = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{192}$.

Ta có $S_1 < 0 < S_2$ và $S_1 + S_2 = 0$.

Do đó $|S_1| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|, S_2 = |x_{k+1}| + \cdots |x_{192}|$.

Mà $S_2 = -S_1 = |S_1|$ nên $S_2 - S_1 = 2013$ suy ra $S_2 = -S_1 = \dfrac{2013}{2}$.

Ta có $kx_1 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_k = S_1 \Rightarrow x_1 \leq \dfrac{S_1}{k} \Rightarrow -x_1 \geq \dfrac{-S_1}{k} = \dfrac{S_2}{k}$.

$x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{192} \leq (192-k)\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{192-k}\right) = \dfrac{192S_2}{k(192-k)}$.

Áp dụng BĐT AM-GM, ta có $0 < k(192-k) \leq \dfrac{192^2}{4}$.

Vì vậy $x_{192} - x_1 \geq \dfrac{192S_2 \cdot 4}{192^2}$. Mà $2S_2 = 2013$ nên $x_{192} - x_1 \geq \dfrac{2013}{96}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 192-k = k \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_k \\ x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{192} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 96 \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{96} = \dfrac{-2013}{192} \\ x_{97} = x_{98} = \cdots x_{192} = \dfrac{2013}{192} \end{cases}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 57

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2013, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3$.

Lời giải.

Điều kiện $-\dfrac{1}{3}\le x\le 2$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3 &\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{-3x^2+5x+2}=9\\ &\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+5x+2}=-x+3\\ &\Leftrightarrow 4x^2-11x+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{7}{4}\end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x\in\left\{1;\dfrac{7}{4}\right\}$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=xy+\dfrac{1}{xy}.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Ta có $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=xy+\dfrac{1}{xy}+2$. Nên ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)-2.\end{cases}$$

Đặt $u=x+\dfrac{1}{y}$, $v=y+\dfrac{1}{x}$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}u+v=\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}u=uv-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{9}{2}-u\\ \dfrac{9}{4}+\dfrac{3u}{2}=u\left(\dfrac{9}{2}-u\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{3}{2}\\ v=3.\end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}\\ y+\dfrac{1}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy+2=3y\\ xy+1=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\ 2x^2-3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=2\\ x=\dfrac{1}{2},y=1\end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Vậy nghiệm hệ phương trình là $(1;2)$; $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 3. Với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) = 8abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{3}{4} + \frac{ab}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc}{(b+c)(c+a)} + \frac{ca}{(c+a)(a+b)}.$$

Lời giải.
Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a+b}\left(1-\frac{b}{b+c}\right) + \frac{b}{b+c}\left(1-\frac{c}{c+a}\right) + \frac{c}{c+a}\left(1-\frac{a}{a+b}\right) = \frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{ba}{(b+c)(c+a)} + \frac{cb}{(c+a)(a+b)} = \frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow\ &ac(a+c) + ba(b+a) + cb(c+b) = \frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)\\
\Leftrightarrow\ &ac(a+c) + ba(b+a) + cb(c+b) = 6abc\\
\Leftrightarrow\ &ac(a+c) + b^2(a+c) + ab(a+c) + bc(a+c) = 8abc\\
\Leftrightarrow\ &(a+c)(ac+b^2+ab+bc) = 8abc\\
\Leftrightarrow\ &(a+b)(b+c)(c+a) = 8abc \quad \text{(giả thiết)}.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên dương có năm chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc} - (10d+e)$ chia hết cho 101?

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
\overline{abcde} &= \overline{abc}\cdot 100 + \overline{de}\\
&= \overline{abc}\cdot 101 - (\overline{abc} - \overline{de})\\
&= \overline{abc}\cdot 101 - (\overline{abc} - (10+e)).
\end{aligned}$$

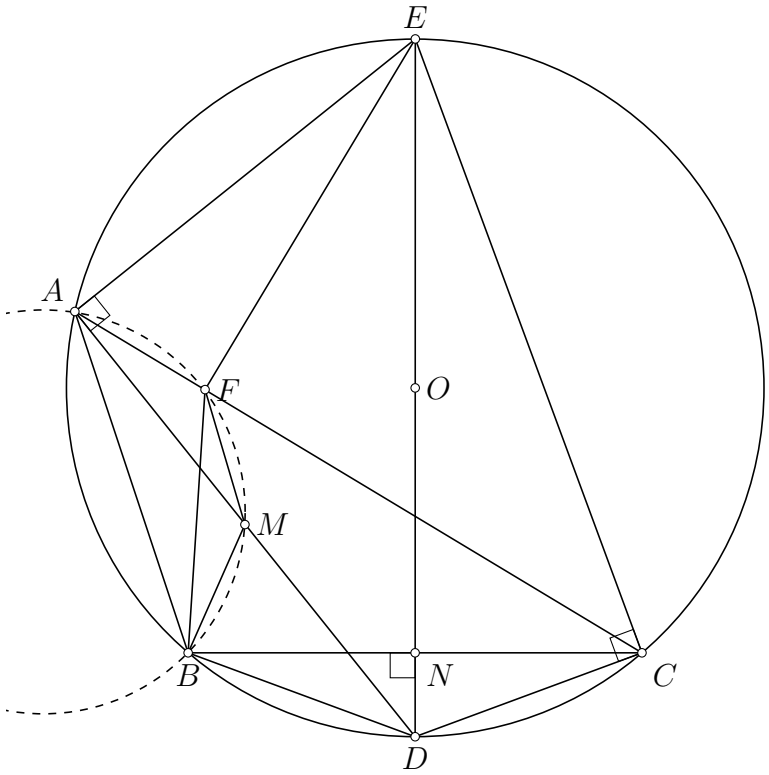
Do đó, $\overline{abc} - (10d+e)$ chia hết cho 101 khi và chỉ khi $\overline{abcde}$ chia hết cho 101.
Ta có $101\cdot m \le 99999 \Leftrightarrow m \le \frac{99999}{101} = 990 + \frac{9}{101}$.
Suy ra số có năm chữ số lớn nhất chia hết cho 101 là $990\cdot 101$.
Lại có $101\cdot n > 9999 \Leftrightarrow n > \frac{999}{101} = 99$.
Suy ra số có năm chữ số nhỏ nhất chia hết cho 101 là $100\cdot 101$.
Vậy số các số có năm chữ số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $990 - 100 + 1 = 891$ số.

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại điểm D khác A. Gọi M là trung điểm AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt đoạn thẳng AC tại điểm F khác A. Chứng minh rằng

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) $\triangle BDM \backsim \triangle BCF$. b) $EF \perp AC$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BDM} = \widehat{BCA}$ (tính chất góc nội tiếp trong đường tròn).
Lại có $\widehat{FBM} = \widehat{FAM} = \widehat{CBD}$ (tính chất góc nội tiếp trong đường tròn).
Do đó $\widehat{FBM} + \widehat{MBC} = \widehat{CBD} + \widehat{MBC}$, hay $\widehat{FBC} = \widehat{MBD}$.
Nên $\triangle BDM \backsim \triangle BCF$ (g.g).

b) Ta sẽ chứng minh cho $\triangle CEF \backsim \triangle DEA$. Thật vậy, do $\triangle BDM \backsim \triangle BCF$ nên

$$\frac{DM}{CF} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot DM}{CF} = \frac{2 \cdot BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{DA}{CF} = \frac{BD}{BN}.$$

Với $N = OD \cap BC$ là trung điểm BC. Mà $\triangle BDN \backsim \triangle EDC$ nên $\dfrac{BD}{BN} = \dfrac{DE}{CE}$.
Từ đó ta có $\dfrac{DM}{CF} = \dfrac{DE}{CE}$. Và $\triangle CEF \backsim \triangle DEA$ (c.g.c).
Suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{EAD} = 90^\circ$. Vậy $EF \perp AC$.

Câu 6. Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc + bcd + cda + dab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(a^3 + b^3 + c^3) + 9d^3$.
Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Với α là số thực dương, áp dụng BĐT Cô-si (Cauchy, AM-GM) cho ba số ta có

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{3}+\frac{a^3}{3\alpha^3}+\frac{b^3}{3\alpha^3} &\geq \frac{dab}{\alpha^2},\\ \frac{d^3}{3}+\frac{b^3}{3\alpha^3}+\frac{c^3}{3\alpha^3} &\geq \frac{dbc}{\alpha^2},\\ \frac{d^3}{3}+\frac{c^3}{3\alpha^3}+\frac{a^3}{3\alpha^3} &\geq \frac{dca}{\alpha^2},\\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3\alpha^2} &\geq \frac{abc}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$d^3+\left(\frac{2}{3\alpha^3}+\frac{1}{3\alpha^2}\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\frac{1}{\alpha^2}(dab+dbc+dca+abc)=\frac{1}{\alpha^2}.$$

Bây giờ, ta chọn $\alpha>0$ sao cho $\dfrac{2}{3\alpha^3}+\dfrac{1}{3\alpha^2}=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow 4\alpha^3-3\alpha-6=0$.

Đặt $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ ta được

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=6\Leftrightarrow x^6-12x^3+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\\ x=\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}.\end{array}\right.$$

Ta được $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)$. Khi đó

$$d^3+\frac{4}{9}\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\frac{1}{\alpha^2}\Leftrightarrow 9d^3+4\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\frac{9}{\alpha^2}=\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^2}.$$

Dẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt[3]{\dfrac{\alpha}{\alpha+3}}$, $d=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\alpha^3+3\alpha^2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{36}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 58

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2012, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ 9xy(3x-y)+6=26x^3-2y^3 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)^3=(3x-y)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x+y=3x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy(x+y)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Câu 2. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)=2x$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $-4 \le x \le 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}\left(\sqrt{4-x}+2\right)=2x. \tag{1}$$

Dễ thấy $x=0$ là nghiệm của phương trình. Xét $x \neq 0$, phương trình (1) tương đương với

$$\sqrt{4-x}+2=2\left(\sqrt{x+4}+2\right).$$

Đặt $u=\sqrt{x+4}$, $v=\sqrt{4-x}$ $(u,v \ge 0)$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} v=2u+2 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{2}{5} \\ v=\dfrac{14}{5} \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được $x=-\dfrac{96}{25}$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 0 và $-\dfrac{96}{25}$.

Câu 3. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A=41^{106}+57^{2012}$.

Lời giải.

Ta có $41^2=(40+1)^2=40^2+80+1 \equiv 81 \mod 100$. Suy ra $41^4 \equiv 81^2 \equiv 61 \mod 100$ nên $41^5 \equiv 61 \cdot 41 \equiv 1 \mod 100$. Do đó $41^{106} \equiv 41\left(41^5\right)^{21} \equiv 41 \mod 100$.

Ta lại có $57^2 \equiv 49 \mod 100$ nên $57^4 \equiv 1 \mod 100$, suy ra $57^{2012}=\left(57^4\right)^{503} \equiv 1 \mod 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của A là $41+1=42$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất của hám số $y=3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}$, với $\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Với điều kiện $\frac{1}{2} \le x \le \frac{\sqrt{5}}{2}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x\sqrt{5-4x^2} \le \frac{x^2+5-4x^2}{2} = \frac{5-3x^2}{2},$$
$$3\sqrt{2x-1} \le 3 \cdot \frac{2x-1+1}{2} = 3x \le \frac{3(x^2+1)}{2}.$$

Do đó

$$y = 3\sqrt{2x-1} + x\sqrt{5-4x^2} \le \frac{x^2+5-4x^2}{2} + \frac{3(x^2+1)}{2} = 4.$$

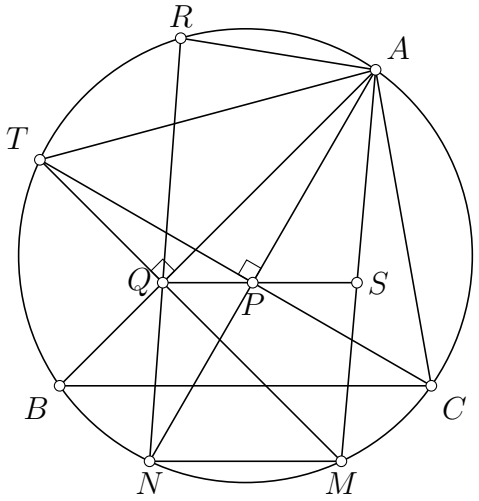
Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của y là 4.

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$), nội tiếp đường tròn (O). Giả sử M, N là hai điểm thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ sao cho MN song song với BC và tia AN nằm giữa hai tia AM và AB. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm C trên AN và Q là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AB.

a) Giả sử CP cắt QM tại điểm T. Chứng minh rằng T nằm trên đường tròn tâm (O).

b) Gọi giao điểm của NQ và (O) là R khác N. Giả sử AM cắt PQ tại S. Chứng minh rằng bốn điểm A, R, Q, S cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



a) Do $MN \parallel BC$ nên $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BN}$ hay $\overset{\frown}{BAN} = \overset{\frown}{CAM}$. Mặt khác tứ giác $APQT$ nội tiếp đường trong đường kính AT nên $\overset{\frown}{PTQ} = \overset{\frown}{PAQ}$. Suy ra $\overset{\frown}{CTM} = \overset{\frown}{CAM}$, do đó tứ giác $CATM$ nội tiếp hay T thuộc đường tròn (O).

b) Do tứ giác $APQT$ nội tiếp nên $\overset{\frown}{TPQ} = \overset{\frown}{TAQ}$. Mặt khác do tứ giác $TACB$ nội tiếp nên $\overset{\frown}{TAB} = \overset{\frown}{TCB}$, suy ra $\overset{\frown}{TPQ} = \overset{\frown}{TCB}$. Từ đó $PQ \parallel BC$. Suy ra $\overset{\frown}{ASQ} = \overset{\frown}{AMN}$, mà $\overset{\frown}{AMN} + \overset{\frown}{ARQ} = 180^\circ$ nên $\overset{\frown}{ASQ} + \overset{\frown}{ARQ} = 180^\circ$, hay tứ giác A, R, Q, S nội tiếp.

Câu 6. Với mỗi số nguyên n lớn hơn hoặc bằng 2 cố định, xét các tập n số thực đôi một khác nhau $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Kí hiệu $C(X)$ là số các giá trị khác nhau của tổng $x_i + x_j$ $(1 \le i < j \le n)$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $C(X)$.

Lời giải.

- Giả sử các số của tập hợp X được sắp xếp theo thứ tự $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Ta có

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < \cdots < x_1 + x_n < x_2 + x_n < x_3 + x_n < \cdots < x_{n-1} + x_n.$$

Từ đó sẽ có ít nhất $2n-3$ giá trị phân biệt của tổng $x_i + x_j$. Suy ra $C(X) \ge 2n-3$. Xét tập $X_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Khi đó với mọi $1 \le i < j \le n$ thì $x_i + x_j = i + j \in \{3, 4, \ldots, 2n-1\}$ và $C(X_1) = 2n-3$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $C(X)$ là $2n-3$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- Số các tổng $x_i + x_j$ là $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Suy ra $C(X) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$. Xét tập $X_2 = \{2, 2^2, \ldots, 2^n\}$. Giả sử tồn tại bốn chỉ số $i < r < s < j$ sao cho $x_i + x_j = x_r + x_s$. Khi đó $2^i + 2^j = 2^r + 2^s$. Suy ra $1 + 2^{j-i} = 2^{r-i} + 2^{s-i}$, do đó $2 \mid 1$, vô lí. Điều đó khẳng định các tổng $x_i + x_j$ với $x_i, x_j \in X_2$ $(i < j)$ đều khác nhau, suy ra $C(X_2) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của $C(X)$ là $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 59

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2012, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1 (Đề thi vào Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012, vòng 1).
[9D5G5] Giải phương trình $\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$.

Lời giải.
Điều kiện xác định: $x \geq -6$.
Phương trình đã cho tương đương

$$\left(\sqrt{x+9}-2012\right)\left(\sqrt{x+6}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=4048135 \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-5;4048135\}$.

Câu 2 (Đề thi vào Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012, vòng 1).
[9D3G4] Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 2x+y+xy=4. \end{cases}$

Lời giải.
Nhân cả hai vế của phương trình thứ hai với 2 rồi cộng theo vế với phương trình thứ nhất ta được

$$(x+y)^2+4(x+y)=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=-6. \end{array}\right.$$

- Với $x+y=2$ ta có

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ x=y=1. \end{array}\right.$$

- Với $x+y=-6$ ta có

$$\begin{cases} x+y=-6 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-6 \\ x^2+5x+10=0. \end{cases}$$

  Hệ phương trình này vô nghiệm.

Vậy các nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(2;0)$ và $(1;1)$.

Câu 3 (Đề thi vào Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012, vòng 1).
[9D5G3] Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y+1)(xy+x+y) = 5 + 2(x+y).$$

Lời giải.
Phương trình đã cho tương đương

$$(x+y+1)(x+y+xy-2) = 3.$$

Do x, y là các số nguyên nên $x+y+1 \in \{\pm 1, \pm 3\}$ hay $x+y \in \{-4; -2; 0; 2\}$.

- Nếu $x+y=-4$ thì $xy=5$ không có cặp số nguyên nào thỏa mãn.
- Nếu $x+y=-2$ thì $xy=1$ ta tìm được $x=y=-1$.
- Nếu $x+y=0$ thì $xy=5$ không có cặp số nguyên nào thỏa mãn.
- Nếu $x+y=2$ thì $xy=1$ ta tìm được $x=y=1$.

Vậy có hai cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu là $(1; 1)$ và $(-1; -1)$.

Câu 4 (Đề thi vào Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012, vòng 1).
[9D5G1] Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+1) \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có

$$\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số không âm ta có

$$3 \leq \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x+y}{2} + \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{2} = x+y+1.$$

Suy ra $x+y \geq 2$.
Vậy ta có

$$P = \left(\frac{x^2}{y} + y\right) + \left(\frac{y^2}{x} + x\right) - (x+y) \geq 2x + 2y - (x+y) = x+y \geq 2.$$

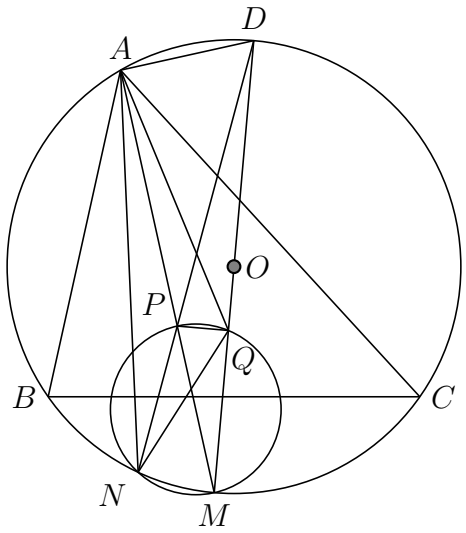
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.
Vậy $\min P = 2$ khi $x=y=1$.

Câu 5 (Đề thi vào Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012, vòng 1).
[9H3B3][9H3K7] Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác B, M khác C và AM không đi qua O). Giả sử P là một điểm thuộc đoạn thẳng AM sao cho đường tròn đường kính MP cắt cung nhỏ BC tại điểm N khác M.

a) Gọi D là điểm đối xứng với điểm M qua O. Chứng minh rằng ba điểm N, P, D thẳng hàng.

b) Đường tròn đường kính MP cắt MD tại điểm Q khác M. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AQN.

Lời giải.



a) Do N nằm trên đường trên đường tròn đường kính MP và N nằm trên đường tròn đường kính MD nên $\widehat{MNP} = \widehat{MND} = 90^\circ$.
Từ đó suy ra N, P, D thẳng hàng.

b) Do các tứ giác $NADM$ và $NPQM$ nội tiếp nên ta có

$$\widehat{ANP} = \widehat{AMD} = \widehat{QNP}. \tag{1}$$

Dễ thấy $APQD$ nội tiếp đường tròn đường kính DP nên

$$\widehat{AQP} = \widehat{ADP} = \widehat{AMN} = \widehat{NQP}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có NP và QP là các đường phân giác trong của tam giác ANQ.
Vậy P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AQN.

Câu 6 (Đề thi vào Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012, vòng 1).
[9D5G1] Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \le b \le 3 \le c$, $c \le b+1$, $a+b \ge c$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \dfrac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\
&= \frac{ab+a+ab+b+abc+ac+abc+bc-abc-ac-bc-c}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\
&= \frac{a(b+1)+b(a+1)+ac(b+1)+bc(a+1)-ac(b+1)-c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\
&= \frac{a(b+1)(c+1)+b(a+1)(c+1)-c(b+1)(a+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\
&= \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}.
\end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta chứng minh

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}\geq\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}-\frac{3}{3+1}=\frac{5}{12}. \quad (1)$$

Thật vậy, ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{a+1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{b+1}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{c}{c+1}\right)\geq 0\\
\Leftrightarrow&\frac{a-1}{2(a+1)}+\frac{b-2}{3(b+1)}+\frac{3-c}{4(c+1)}\geq 0\\
\Leftrightarrow&(3-c)\left[\frac{1}{4(c+1)}-\frac{1}{3(b+1)}\right]+[(3-c)+(b-2)]\left[\frac{1}{3(b+1)}-\frac{1}{2(a+1)}\right]+\\
&+[(3-c)+(b-2)+(a-1)]\frac{1}{2(a+1)}\geq 0\\
\Leftrightarrow&\frac{(3-c)(3b-4c-1)}{12(b+1)(c+1)}+\frac{(b+1-c)(2a-3b-1)}{6(b+1)(a+1)}+\frac{a+b-c}{2(a+1)}\geq 0. \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ điều kiện $0<a\leq b\leq 3\leq c$, $b+1\leq c$, $c\leq a+b$, ta thấy mỗi phân thức ở vế trái đều không âm. Do đó (2) đúng nên (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a=1$, $b=2$ và $c=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 60

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2011, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \le x \le 1$.

Phương trình tương đương với $\dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$.

Nếu $0 \le x < 1 \Rightarrow 3\left(\sqrt{1-x}+1\right) > 3$ đồng thời $\sqrt{x}+\sqrt{x+3} < \sqrt{1}+\sqrt{4}=3$

Suy ra VT>VP (loại).

Thử lại ta thấy $x=1$ là nghiệm.

Vậy phương trình có một nghiệm $x=1$.

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=2x^2y^2 \\ (x+y)(1+xy)=4x^2y^2. \end{cases}$

Lời giải.

Dễ thấy $x=y=0$ là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x \ne 0, y \ne 0$, hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 & (1) \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(2+\dfrac{2}{xy}\right)=8 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) và (2) ta thu được $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^3=8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{1}{xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(0;0)$ và $(x;y)=(1;1)$.

Câu 3. Với mỗi số thực a ta gọi phần nguyên của a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và kí hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức $n+\left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

Lời giải.

Đặt $K=\left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3}\right]$, do $n \ge 1 \Rightarrow K \ge 1$.

Ta có: $K \le \sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3} < K+1 \Leftrightarrow \left(K-\dfrac{1}{3}\right)^3 \le n-\dfrac{1}{27} < \left(K+\dfrac{2}{3}\right)^3$

$\Leftrightarrow K^3 - K^2 + \dfrac{K}{3} - \dfrac{1}{27} \le n - \dfrac{1}{27} < K^3 + 2K^2 + \dfrac{4}{3}K + \dfrac{8}{27}$.

Suy ra $K^3 + \dfrac{K}{3} \le n + K^2 < K^3 + 3K^2 + \dfrac{4}{3}K + \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $K^3 < n + K^2 < (K+1)^3$.

Suy ra $n + K^2 = n + \left[\sqrt[3]{n - \dfrac{1}{27}} + \dfrac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

Câu 4. Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy + yz + zx = 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x + 3y + 2z}{\sqrt{6(x^2+5)} + \sqrt{6(y^2+5)} + \sqrt{z^2+5}}.$$

Lời giải.

$\sqrt{6(x^2+5)} + \sqrt{6(y^2+5)} + \sqrt{z^2+5} = \sqrt{6(x+y)(x+z)} + \sqrt{6(y+z)(y+x)} + \sqrt{(z+x)(z+y)}$
$\le \dfrac{3(x+y) + 2(x+z)}{2} + \dfrac{3(x+y) + 2(y+z)}{2} + \dfrac{(z+x) + (z+y)}{2} = \dfrac{9x + 9y + 6z}{2} = \dfrac{3}{2}(3x + 3y + 2z)$.

Suy ra $P = \dfrac{3x + 3y + 2z}{\sqrt{6(x^2+5)} + \sqrt{6(y^2+5)} + \sqrt{z^2+5}} \ge \dfrac{2}{3}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1, z = 2$.

Vậy $P_{\min} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 5. Cho hình thang $ABCD$ với BC song song AD. Các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{CDA}$ là các góc nhọn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. P là điểm bất kì trên đoạn thẳng BC (P không trùng với B, C). Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BIP cắt đoạn thẳng PA tại M khác P và đường tròn ngoại tiếp tam giác CIP cắt đoạn thẳng PD tại N khác P.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, M, I, N, D cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là (K).

b) Giả sử các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại Q, chứng minh rằng Q cũng nằm trên đường tròn (K).

c) Trong trường hợp P, I, Q thẳng hàng, chứng minh rằng $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{BD}{CA}$.

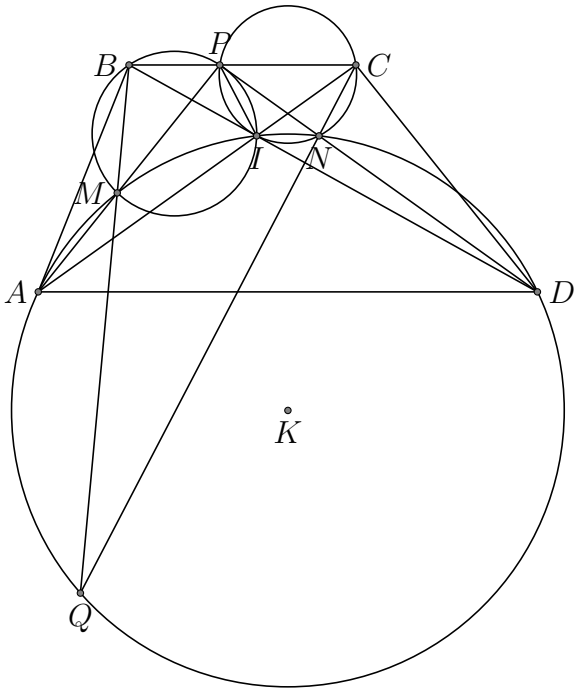
Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Tứ giác $BPIM$ nội tiếp và $AD \parallel BC$
$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{BPM} = \widehat{BIM}$.
Suy ra tứ giác $AMID$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $DNIA$ nội tiếp.
Vậy năm điểm A, M, I, N, D thuộc một đường tròn.

b) Do các tứ giác $BPIM$ và $CPIN$ nội tiếp nên ta có $\widehat{QMI} = \widehat{BPI} = \widehat{CNI}$.
Suy ra tứ giác $MINQ$ nội tiếp.
Mà $M, I, N \in (K)$ suy ra tứ giác $MINQ$ nội tiếp đường tròn (K).
Vậy Q thuộc đường tròn (K) (đpcm).



c) Khi P, I, Q thẳng hàng, kết hợp với Q thuộc đường tròn (K) ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AIQ} = \widehat{PIC} & \text{(đối đỉnh)} \\ \widehat{PIC} = \widehat{PNC} & \text{(do tứ giác } NIPC \text{ nội tiếp)} \\ \widehat{PNC} = \widehat{QND} & \text{(đối đỉnh)} \\ \widehat{QND} = \widehat{QID} & \text{(do tứ giác } INDQ \text{ nội tiếp)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AIQ} = \widehat{QID}.$$

$\Rightarrow IQ$ là phân giác $\widehat{DIA}$ nên IP là phân giác góc BIC.
Do đó $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{ID}{IA} = \dfrac{IB+ID}{IC+IA} = \dfrac{BD}{AC} \Rightarrow \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{BD}{CA}$ (đpcm).

Câu 6. Giả sử A là một tập con của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi x thuộc A ($x \neq 1$), luôn tồn tại a, b cũng thuộc A sao cho $x = a + b$ (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất.

Lời giải.

Giả sử A có n số, chúng ta xếp chúng theo thứ tự $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = 100$. (1)
Suy ra với mỗi $k \in \{1; 2; 3; \cdots; n-1\}$ ta có $x_{k+1} = x_i + x_j \leq x_k + x_k = 2x_k$ (2) với $1 \leq i, j \leq k$.
Áp dụng kết quả (2) ta thu được $x_2 \leq 1+1 = 2, x_3 \leq 2+2 = 4, x_4 \leq 8, x_5 \leq 16, x_6 \leq 32, x_7 \leq 64$.
Suy ra tập A phải có ít nhất 8 phần tử.
+ Giả sử $n = 8 \Rightarrow x_8 = 100$.
Vì $x_6 + x_7 \leq 32 + 64 = 96 < 100 \Rightarrow x_8 = 2x_7 \Rightarrow x_7 = 50$.
Vì $x_5 + x_6 \leq 16 + 32 = 48 < 50 \Rightarrow x_7 = 2x_6 \Rightarrow x_6 = 25$.
Vì $x_4 + x_5 \leq 8 + 16 = 24 < 25 \Rightarrow x_6 = 2x_5 \Rightarrow x_5 = \dfrac{25}{2}$ (mâu thuẫn).
+ Với $n = 9$ ta có tập $A = \{1; 2; 3; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy tập A có số phần tử nhỏ nhất là 9.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 61

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2011, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)y^2+x+y=3\\(y-2)x^2+y=x+1\end{cases}.$$

b) Giải phương trình

$$\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{x^2+7}{2(x+1)}.$$

Lời giải.

a) Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x-1)y^2+(x-1)=2-y\\(y-2)x^2+(y-2)=x-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(y^2+1)=2-y\quad(1)\\(y-2)(x^2+1)=x-1\quad(2)\end{cases}$$

+) Nếu $x>1$ suy ra $(x-1)(y^2+1)>0$ nên từ $(1)\Rightarrow 2-y>0\Rightarrow y<2\Rightarrow(y-2)(x^2+1)<0$ do đó từ $(2)\Rightarrow x-1<0\Rightarrow x<1$ (mâu thuẫn).
+) Nếu $x<1$, tương tự suy ra $x>1$ (mâu thuẫn).
+) Nếu $x=1$ thì $y=2$ (thỏa mãn).
Đáp số $(x,y)=(1,2)$.

b) Điều kiện: $x>0$.
Phương trình tương đương

$$2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7.$$

Chia cả hai vế cho $x\neq 0$ ta thu được
$2(1+\frac{1}{x})\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x+\frac{7}{x}\Leftrightarrow(x+\frac{3}{x})-2(1+\frac{1}{x})\sqrt{x+\frac{3}{x}}+\frac{4}{x}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}\right)=0$

+) Giải $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=2\Leftrightarrow x+\dfrac{3}{x}=4\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

+) Giải $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{2}{x}\Leftrightarrow x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{4}{x^2}\Leftrightarrow x^3+3x-4=0=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0\Leftrightarrow x=1$.

Đáp số $x=1, x=3$.

Câu 2.

a) Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức

$$x^4+y^4=7z^4+5.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn đẳng thức

$$(x+1)^4-(x-1)^4=y^3.$$

Lời giải.

a) Giả sử tồn tại các số nguyên x,y,z thỏa mãn

$x^4+y^4=7z^4+5\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4=8z^4+5$ (1).

Ta có $a^4\equiv 0,1(\mod 8)$ với mọi số nguyên a

$\Rightarrow \begin{cases}x^4+y^4+z^4\equiv 0,1,2,3(\mod 8)\\8z^4+5\equiv 5(\mod 8)\end{cases}$.

Mâu thuẫn với (1). Vậy không tồn tại bộ số nguyên (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức.

b) Phương trình tương đương với

$[(x+1)^2+(x-1)^2]\,[(x+1)^2-(x-1)^2]=y^3\Leftrightarrow (2x^2-2)4x=y^3\Leftrightarrow 8x^3+8x=y^3$.

+) Nếu $x\geq 1\Rightarrow 8x^3<8x^3+8x<(2x+1)^3\Leftrightarrow (2x)^3<y^3<(2x+1)^3$ (mâu thuẫn vì y nguyên).

+) Nếu $x\leq 1$ và (x,y) là nghiệm, ta suy ra $(-x,-y)$ cũng là nghiệm, mà $-x\geq -1$ (mâu thuẫn).

+) Nếu $x=0\Rightarrow y=0$ (thỏa mãn).

Vậy $x=y=0$ là nghiệm duy nhất.

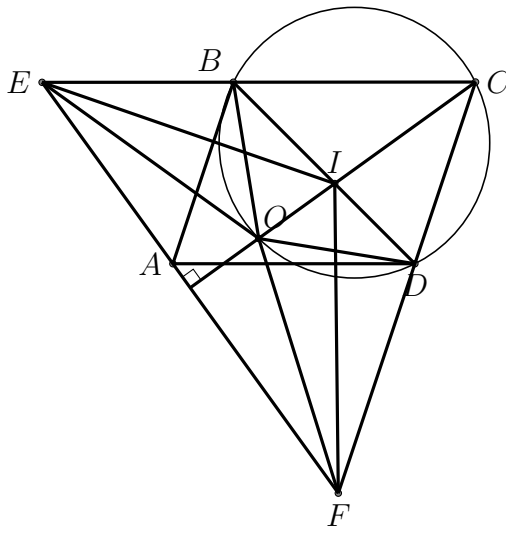
Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ với $\widehat{BAD}<90^\circ$. Đường phân giác của góc $\widehat{BCD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O khác C. Kẻ đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với CO. Đường thẳng (d) lần lượt cắt các đường thẳng CB, CD tại E, F.

a) Chứng minh rằng $\triangle OBE=\triangle ODC$.

b) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

c) Gọi giao điểm của OC và BD là I, chứng minh rằng $IB.BE.EI=ID.DF.FI$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Lời giải.

a) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp và CO la phân giác góc $\widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{OCD} = \widehat{OCB} = \widehat{ODB} \Rightarrow \triangle OBD$ cân tại $O \Rightarrow OB = OD$ (1). Tứ giác $OBCD$ nội tiếp nên $\widehat{ODC} = \widehat{ODC} = \widehat{OBE}$ (2) (cùng bù với $\widehat{OBC}$). Trong $\triangle CEF$ có CO vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên $\triangle CEF$ cân tại C. Do $AB \parallel CF \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = \widehat{EAB} \Rightarrow \triangle ABE$ cân tại $B \Rightarrow BE = BA = CD$ (3).
Từ $(1), (2), (3)$ suy ra $\triangle OBE = \triangle ODC$(c-g-c)(đpcm).

b) Từ câu (a) ta có $\triangle OBE = \triangle ODC$ suy ra $OE = OC$. Mà CO là đường cao tam giác cân $CEF \Rightarrow OE = OF$. Từ đó $OE = OC = OF$ vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle CEF$(đpcm).

c) Theo (3) $\Rightarrow BE = CD$ mà $CE = CF \Rightarrow BC = DF$. Ta có CT là đường phân giác góc $\widehat{BCD} \Rightarrow \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{DF}{BE} \Rightarrow IB.BE = ID.DF$.
Mà CO là trung trực của EF và $I \in CO$ nên $IE = IF$.
Từ hai đẳng thức trên suy ra $IB.BE.EI = ID.DF.FI$(đpcm).

Câu 4. Với x, y, z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 8y^3}} + \sqrt{\frac{4y^3}{y^3 + (x+y)^3}}.$$

Lời giải.
Ta chứng minh

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 8y^3}} \geq \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} \qquad (1)$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta có
$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^3+8y^3} \geq \dfrac{x^4}{(x^2+2y^2)^2} \Leftrightarrow (x^2+2y^2)^2 \geq x(x^3+8y^3) \Leftrightarrow 4x^2y^2+4y^4 \geq 8xy^3$
$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$ (đúng).
Ta chứng minh $\sqrt{\dfrac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}} \geq \dfrac{y^2}{x^2+2y^2}$ (2).
Ta có
$(2) \Leftrightarrow \dfrac{4y^3}{y^3+(x+y)^3} \geq \dfrac{y^4}{(x^2+2y^2)^2}$
$\Leftrightarrow (x^2+2y^2)^2 \geq y\left(y^3+(x+y)^3\right) \Leftrightarrow (x^2+2y^2)^2-y^4 \geq y(x+y)^3 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2+3y^2) \geq y(x+y)^3$.
Ta có
$x^2+y^2 \geq \dfrac{1}{2}(x+y)^2$
$x^2+3y^2 = x^2+y^2+2y^2 \geq 2xy+2y^2 = 2y(x+y)$
$\Rightarrow (x^2+y^2)(x^2+3y^2) \geq \dfrac{1}{2}(x+y)^2.2y(x+y) = y(x+y)^3 \Rightarrow (2)$ đúng.
Từ (1) va (2) $\Rightarrow P \geq 1$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y$. Vậy $P_{\min}=1$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 62

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2010, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=4$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{3}$.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
&x+3+3x+1+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}=16\\
\Leftrightarrow&\sqrt{3x^2+10x+3}=6-2x\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}6-2x\geq 0\\3x^2+10x+3=36-24x+4x^2\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}x\leq 3\\x^2-34x+33=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}x\leq 3\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=33\end{array}\right.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy=26\\3x+(2x+y)(x-y)=11\end{cases}$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}2x+y=a\\x-y=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=3x\\a^2+b^2=5x^2+2y^2+2xy\end{cases}$

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}a^2+b^2=26\\a+b+ab=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)^2-2ab=26\\2(a+b)+2ab=22\end{cases}$

Cộng theo từng vế hai phương trình của hệ được $(a+b)^2+2(a+b)-48=0 \Leftrightarrow (a+b+1)^2=49$ suy ra $a+b=-8$ hoặc $a+b=6$.

- Với $a+b=-8 \Rightarrow ab=19$. Do đó a, b là nghiệm phương trình $t^2-8t+19=0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a+b=6 \Rightarrow ab=5 \Rightarrow \begin{cases}a=5\\b=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=1\\b=5\end{cases}$

Vậy $(x;y) \in \{(2;1);(2;3)\}$.

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n để n^2+391 là số chính phương.

Lời giải.

Đặt $a=n^2+319$. Để a là số chính phương thì phải có $n^2+319=k^2$, $(k\in\mathbb{N}^*)$

$\Leftrightarrow k^2-n^2=319\Leftrightarrow (k-n)(k+n)=319$. Mà $k+n>0\Rightarrow k-n>0$.

Vì $k+n>k-n>0\Rightarrow k+n$ và $k-n$ là ước nguyên dương của 319.

Do đó $\begin{cases}k+n=319\\k-n=1\end{cases}\Rightarrow n=195\Rightarrow a=196^2$.

Câu 4. Giả sử x, y, z là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\geq 1$.

Lời giải.

Ta có $(x-y)^2\geq 0\Rightarrow x^2+y^2\geq 2xy\Rightarrow 2(x^2+y^2)\geq (x+y)^2$.

Do đó $\sqrt{2x^2+2y^2}\geq x+y$.

Lại có $xy+z=xy+z(x+y+z)=z^2+z(x+y)+xy$. Mà $x,\,y>0\Rightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$.

Từ đó suy ra $xy+z\geq z^2+2z\sqrt{xy}+xy=(z+\sqrt{xy})^2\geq 0$.

Do đó $\sqrt{xy+z}\geq z+\sqrt{xy}$.

Vậy $\dfrac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\geq\dfrac{x+y+z+\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}=\dfrac{1+\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}=1$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\begin{cases}x=y\\x+y+z=1\end{cases}$

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và M là điểm nằm trong tam giác. Kí hiệu H là hình chiếu của M trên cạnh BC và P, Q, E, F lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MB, MC, AB, AC. Giả sử bốn điểm P, Q, E, F thẳng hàng.

a) Chứng minh rằng M là trực tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng $BEFC$ nội tiếp.

Lời giải.

a)

Các tia BM và CM cắt AC và AB lần lượt tại I và K.

Các tứ giác $CFQH$ và $HPMQ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FHC}=\widehat{FQC}$ và $\widehat{MQP}=\widehat{MHP}$.

Mà $\widehat{FQC}=\widehat{MQP}$ (đối đỉnh),

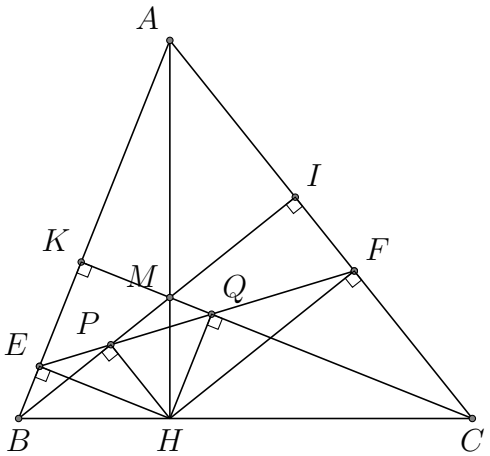
do đó $\widehat{MHP}=\widehat{FHC}$.

$\Rightarrow \widehat{MHP}+\widehat{MHF}=90^\circ$, tức là $\widehat{PHF}=90^\circ$.

Tứ giác $IPHF$ là hình chữ nhật

vì có $\widehat{IPH}=\widehat{PHF}=\widehat{HFI}=90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{FIP}=90^\circ\Rightarrow BM\perp AC$.



Tương tự $CM\perp AB$.

Vậy M là trực tâm tam giác ABC.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Ta có $HP \parallel AC$ (vì cùng vuông góc với BI) nên $\widehat{ACB} = \widehat{PHB}$ (đồng vị).
Tứ giác $BEPH$ nội tiếp nên $\widehat{PHB} + \widehat{PEB} = 180°$.
$\Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{BCF} = 108°$.
Vậy tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 6. Trong dãy gồm 2010 số thực khác 0 được sắp xếp theo thứ tự a_1, a_2, ..., a_{2010}, ta đánh dấu tất cả các số dương và tất cả các số mà tổng của nó với một số liên tiếp liền ngay sau nó là một số dương. (Ví dụ dụ với dãy số -8, -4, 4, -1, 2, -1, -2, -3, ..., -2015 thì các số được đánh dấu là $a_2 = -4$, $a_3 = 4$, $a_4 = -1$, $a_5 = 2$). Chứng minh rằng nếu trong dãy đã cho có ít nhất một số dương thì tổng của tất cả các số được đánh dấu là một số dương.

Lời giải.

Xét dãy số a_1; a_2; ...; a_{2010} từ trái sang phải.
Giả sử a_m là số đầu tiên được đánh dấu ($1 \leq m \leq 2010$). Khi đó tồn tại a_k sao cho $k > m$, $k \leq 2010$.
Mà $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_k > 0$ còn $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{k-1} \leq 0$. Như vậy $a_k > 0$.
Mặt khác $a_m < 0 \Rightarrow a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_k > -a_m > 0 \Rightarrow a_{m+1}$ được đánh dấu.
Tương tự a_{m+2}; ...; a_k đều được đánh dấu.
Như vậy $A_1 = \{a_m; a_{m+1}; \ldots; a_k\}$ có tất cả các số được đánh dấu.
Tổng tất cả các số của A_1 bằng $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_k > 0$.
Từ số a_{k+1} đến cuối dãy ta lại xét a_n là số đầu tiên được đánh dấu. Lập luận tương tự tập số $A_2 = \{a_n; a_{n+1}; \ldots; a_t\}$, ($n < t \leq 2010$) có tất cả các số được đánh dấu và tổng của chúng là số dương. Các số được đánh dấu khác của dãy mà không thuộc tập số A_i nói trên chỉ có thể là số dương.
Vậy tổng của tất cả các số được đánh dấu là số dương.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 63

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2010, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+8y^2+12xy=23 \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

Lời giải.

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ ta được

$$4x^2+12xy+9y^2=25 \Leftrightarrow (2x+3y)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 2x+3y=-5. \end{array}\right.$$

Với $2x+3y=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5-3y}{2}$ thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\left(\frac{5-3y}{2}\right)^2+y^2=2 \Leftrightarrow 13y^2-30y+17=0 \Leftrightarrow (x;y) \in \left\{(1;1);\left(\frac{7}{13};\frac{17}{13}\right)\right\}.$$

Với $2x+3y=-5$ tương tự ta cũng giải được $(x;y) \in \left\{(-1;-1);\left(-\frac{7}{13};-\frac{17}{13}\right)\right\}$.

Câu 2. Giải phương trình $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{4x^2-2x+1}=3+\sqrt{8x^3+1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{2}$. Đặt $\sqrt{2x+1}=a$, $\sqrt{4x^2-2x+1}=b$ ta được

$$a+3b=3+ab \Leftrightarrow (a-3)(1-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ b=1. \end{array}\right.$$

Với $a=3 \Leftrightarrow 2x+1=9 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn).

Với $b=1 \Leftrightarrow 4x^2-2x+1=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên không âm $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức

$$(1+x^2)(1+y^2)+4xy+2(x+y)(1+xy)=25.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (1+x^2)(1+y^2)+4xy+2(x+y)(1+xy)=25 \\ \Leftrightarrow\ & (xy+1)^2+2(x+y)(1+xy)+(x+y)^2=25 \\ \Leftrightarrow\ & (xy+1+x+y)^2=25 \Leftrightarrow [(x+1)(y+1)]^2=25. \end{aligned}$$

Vì x,y là các số nguyên dương nên $(x+1)(y+1)=5$ và $(x;y) \in \{(0;4);(4;0)\}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 4. Với mỗi số thực a, ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và kí hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có

$$\left[\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=n.$$

Lời giải.

Ta có

$$\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\frac{k^2}{k(k+1)}+\frac{k+1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k}=1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}.$$

Thay k lần lượt từ 1 đến n ta có

$$\left[\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=\left[n+1-\frac{1}{n+1}\right]=\left[n+\frac{n}{n+1}\right]=n.$$

Câu 5. Cho đường tròn (O) với đường kính $AB=2R$. Trên đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A ta lấy điểm C sao cho $\widehat{ACO}=30^\circ$. Gọi H là giao điểm thứ hai của đường thẳng BC với đường tròn (O).

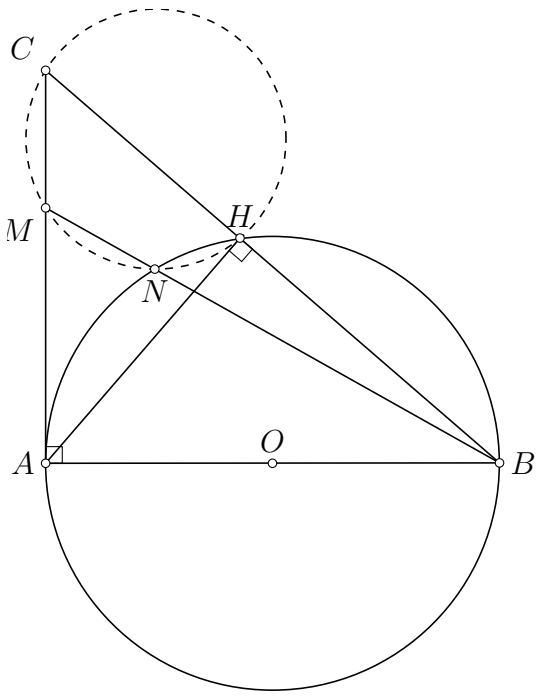
a) Tính độ dài đoạn thẳng AC, BC và khoảng cách từ A đến đường thẳng BC theo R.

b) Với mỗi điểm M trên đoạn thẳng AC, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại điểm N (khác B). Chứng minh rằng bốn điểm C, M, N, H nằm trên cùng một đường tròn và tâm đường tròn đó luôn chạy trên một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên đoạn thẳng AC.

Lời giải.

a) Ta có $AC=AO\cdot\cot\widehat{ACO}=R\sqrt{3}$,
$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=R\sqrt{7}$.
Lại có $\widehat{AHB}=90^\circ$. Nên khoảng cách từ A đến BC chính là độ dài $AH=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{2\sqrt{21}R}{7}$.

b) Ta có $\widehat{HNB}=\widehat{HAB}$ (cùng chắn $\widehat{HB}$).
Mà $\widehat{HAB}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$).
Nên $\widehat{HNB}=\widehat{ACB}$, do đó $\widehat{ACB}+\widehat{MNH}=180^\circ$.
Suy ra tứ giác $CMNH$ nội tiếp, hay bốn điểm C, M, N, H cùng nằm trên một đường tròn, gọi tâm đường tròn đó là I.
Ta có $IH=CI$ nên I nằm trên đường trung trực d của CH. Mà C, H cố định nên d cố định.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 6. Với a, b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(1+a)(1+b)=\dfrac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$.

Lời giải.

Theo BĐT Bunhiacopski ta có

$$(1+16)(a^4+1)\geq (a^2+4)^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^4+1}\geq \frac{a^2+4}{\sqrt{17}}.$$

Tương tự cũng có $\sqrt{b^4+1}\geq \dfrac{b^2+4}{\sqrt{17}}$. Từ đó ta có $P\geq \dfrac{a^2+b^2+8}{\sqrt{17}}$. (1)

Mặt khác, theo BĐT Côsi ta có $a^2+\dfrac{1}{4}\geq a$; $b^2+\dfrac{1}{4}\geq b$; $\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq ab$.

Nên $\dfrac{3}{2}(a^2+b^2)+\dfrac{1}{2}\geq (a+b+ab)=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow a^2+b^2\geq \dfrac{1}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $P\geq \dfrac{\sqrt{17}}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 64

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2015, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho $a \geq 0$, $a \neq 1$. Rút gọn biểu thức

$$S = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1\right].$$

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = 2-\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} = 2+\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^3} = \sqrt{a}-1$$

$$\frac{a-1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)} - 1 = \frac{\sqrt{a}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{a}-1}{2}.$$

Suy ra $S = \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) + (\sqrt{a}-1) : \dfrac{\sqrt{a}-1}{2} = 4-2+2 = 4.$

Câu 2. Cho x, y thỏa mãn $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ và $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{y}{1-y} = 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow -2(x+y)+1 = -3xy.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P =& x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 3xy} = x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 2(x+y) + 1} \\ =& x + y + \sqrt{(x+y-1)^2} = x + y + |x+y-1| = x + y + 1 - (x+y) = 1. \end{aligned}$$

(do $2(x+y) - 1 = 3xy \leq \dfrac{3}{4}(x+y)^2$ nên $3(x+y)^2 - 8(x+y) + 4 > 0$, suy ra $x + y < \dfrac{2}{3}$).

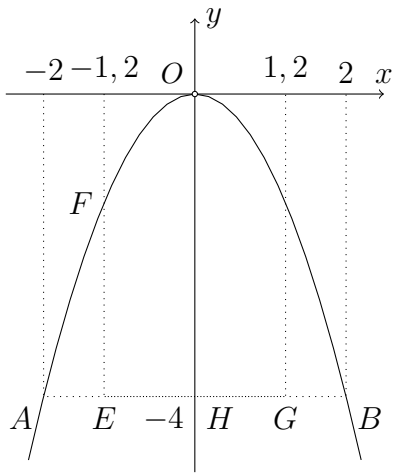
Câu 3. Một xe tải có chiều rộng $2,4$m và chiều cao $2,5$m muốn đi qua một cái cổng có hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$m (bỏ qua độ dầy của cổng).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi parabol (P) $y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

b) Hỏi xe tải có thể qua cổng được không? Tại sao?

Lời giải.

Gọi $A,\ B$ là chân cổng Parabol và H là trung điểm của AB.



a) Theo đề bài ta có $OA = OB = 2\sqrt{5},\ AH = \dfrac{1}{2}AB = 2$ nên ta có $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 4$. Suy ra $A\left(-2;-4\right),\ B\left(2;-4\right)$. Mà hai điểm này thuộc Parabol nên ta có

$$-4 = 4a \Rightarrow a = -1.$$

b) Ta thấy xe có thể đi qua được công thuận lợi nhất khi xe nhận Oy làm trục đối xứng. Khi đó, ta gọi hai ví trí của bánh xe là E, G. Ta có $E\left(-\dfrac{6}{5};-4\right),\ G\left(\dfrac{6}{5};-4\right)$. Qua E dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt (P) tại F, khi đó xe tải đi qua được cổng khi và chỉ khi $EF \geqslant 2,5$. Ta có $F\left(-\dfrac{6}{5};\dfrac{36}{25}\right)$ nên $EF = 4 - \dfrac{36}{25} = \dfrac{64}{25} = 2,56 > 2,5$.
Vậy xe tải đi qua được cổng Parabol.

Câu 4. Cho hai số nguyên $a,\ b$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $(a, b) = 1$ và

$$a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b) \Leftrightarrow (a + b)^2 - 2(a + b) + 1 = 4ab \Leftrightarrow (a + b - 1)^2 = 4ab.$$

Từ đây, suy ra ab là số chính phương, nên a và b là các số chính phương, hay $a = x^2,\ b = y^2$. Suy ra

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 = (2xy)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 1.$$

Do đó, x và y là hai số tự nhiên liên tiếp. Do đó $a,\ b$ là hai số chính phương liên tiếp. Bài toán được chứng minh.

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$. M là trung điểm của cạnh BC. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Các tiếp tuyến với (O) tại $B,\ C$ cắt nhau tại S. Gọi $X,\ Y$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO. Chứng minh rằng:

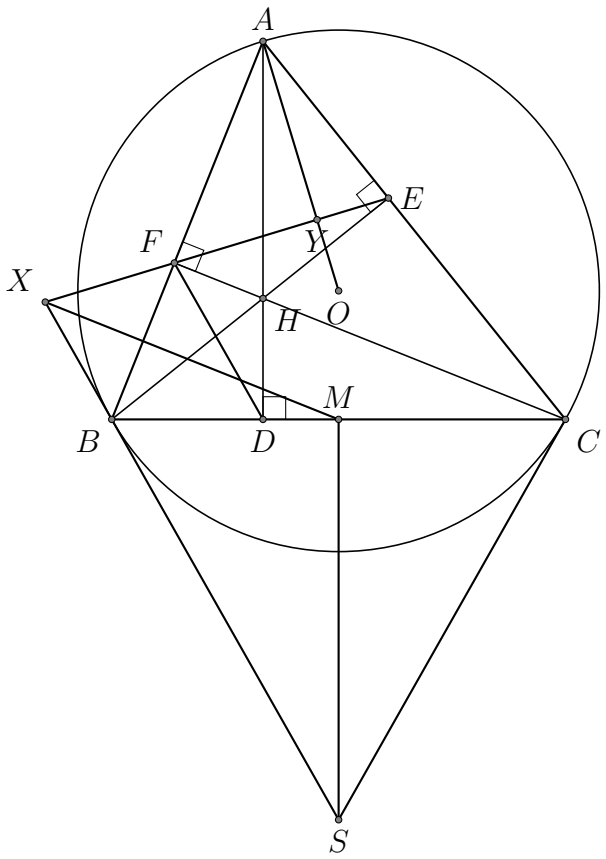
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) $MX \perp BF$.

b) Hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

c) $\dfrac{EF}{FY} = \dfrac{BC}{CD}$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (vì BE và CF là hai đường cao).
Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp, nên $\widehat{ECB} = \widehat{BFC}$.
Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{XBE}$ (cùng chắn cung AB). Suy ra $\widehat{XFB} = \widehat{XBC}$, nên ΔXBF cân , dẫn tới $XF = XB$ (1).
Trong tam giác vuông BFC có FM là trung tuyến (vì $MB = MC$) Suy ra $MF = MB$ (2) .
Từ (1) , (2) ta có XM là trung trực BF nên $MX \perp BF$.

b) Xét ΔDFA và ΔSXM có $\widehat{SXM} = \widehat{DFH}$ (vì $\widehat{FXB} = \widehat{BFD} = \widehat{ECB}$).
Ta có $\widehat{BSM} = 90^\circ - \widehat{SBC}$; $\widehat{ACF} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{FDH}$ (vì $\widehat{FDH} = \widehat{FCA}$ cùng chắn cung AF); $\widehat{BAC} = \widehat{SBC}$ (vì cùng chắn cung BC). Suy ra $\widehat{FDH} = \widehat{XSB}$.
Vậy hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

c) Xét ΔAEB và ΔAFC có $\widehat{BAC}$ chung $\widehat{AFC} = \widehat{AEB} = 90^\circ$, suy ra $\Delta AEB \backsim \Delta AFC$, nên ta có $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{FE}{BC}$. (3)
Xét ΔFAY và ΔDAC có $\widehat{AFY} = \widehat{ACD}$ (vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp), $\widehat{AYF} = \widehat{ADC} = 90^\circ$,

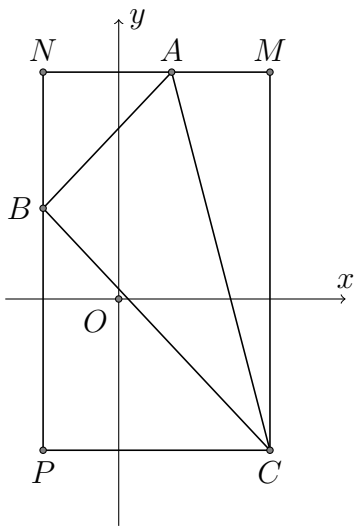
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

suy ra $\Delta FAY \backsim \Delta CAD$, nên ta có $\dfrac{FY}{CD} = \dfrac{AF}{AC}$. (4)

Từ (3), (4) ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{FY}{CD}$, hay $\dfrac{EF}{FY} = \dfrac{BC}{CD}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh là các điểm nguyên (một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó là các số nguyên). Chứng minh rằng hai lần diện tích của tam giác ABC là một số nguyên.

Lời giải.



Giả sử $A\left(x_a;\ y_a\right)$, $B\left(x_b;\ y_b\right)$, $C\left(x_c; y_c\right)$ và $A,\ B,\ C$ nằm như hình vẽ.

Qua các đỉnh $A,\ B,\ C$ vẽ các đường thẳng vuông góc với các trục tọa độ và các đường thẳng này cắt nhau tạo thành một hình chữ nhật $MNPC$ như hình vẽ.

Ta có

$$S_{ABC} = S_{MNPC} - S_{ANB} - S_{AMC} - S_{BPC}.$$

Mà $MN = |x_b - x_c|$, $NP = |y_a - y_c|$ nên $S_{MNPC} = \left|\left(x_b - x_c\right)\left(y_a - y_c\right)\right|$.

$AN = |x_a - x_b|$, $NB = |y_a - y_b| \Rightarrow S_{ANB} = \dfrac{1}{2}\left|\left(x_a - x_b\right)\left(y_a - y_b\right)\right|$.

Tương tự ta có $S_{AMC} = \dfrac{1}{2}\left|\left(x_c - x_a\right)\left(y_c - y_a\right)\right|$; $S_{BPC} = \dfrac{1}{2}\left|\left(x_c - x_b\right)\left(y_b - y_c\right)\right|$.

Suy ra

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left(x_b - x_a\right)\left(y_c - y_a\right) + \left(x_c - x_a\right)\left(y_b - y_a\right)\right|.$$

Vì $x_a,\ x_b,\ x_c,\ y_a,\ y_b,\ y_c$ là các số nguyên nên $2S_{ABC}$ là số nguyên.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 65

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2015, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1\right)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2}{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}$ với $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

a) Chứng minh rằng $P=\dfrac{1}{ab}$.

b) Giả sử a,b thay đổi sao cho $4a+b+\sqrt{ab}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)-2=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)$
$=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1\right)\dfrac{(a-b)^2}{ab}$; $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2=\dfrac{(a-b)^2}{(ab)^2}$. Thay vào biểu thức ta có $P=\dfrac{1}{ab}$.

b) Đặt $z=4a$, $P=\dfrac{4}{zb}$, $4a+b+\sqrt{ab}=1\Leftrightarrow z+b+\dfrac{1}{2}\sqrt{zb}=1$.
Ta có $1=z+b+\dfrac{1}{2}\sqrt{zb}\geq 2\sqrt{zb}+\dfrac{1}{2}\sqrt{zb}=\dfrac{5}{2}\sqrt{zb}\Rightarrow zb\leq\dfrac{4}{25}$. Vậy $P_{\min}=25$ khi $a=\dfrac{1}{10}$ và $b=\dfrac{2}{5}$.

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x-my=2-4m\\ mx+y=3m+1\end{cases}$ với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

b) Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m. Giả sử (x_0,y_0) là một nghiệm của của hệ phương trình, chứng minh rằng $x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0$

Lời giải.

a) $\begin{cases}x-2y=-6\\ 2x+y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=8\\ y=7-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{8}{5}\\ y=\dfrac{19}{5}\end{cases}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2+1)x = 3m^2 - 3m + 2 \\ y = 3m + 1 - mx \end{cases}$

Dễ thấy $m^2 + 1 > 0$ với mọi m cho nên hệ luôn có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{3m^2 - 3m + 2}{m^2+1} \\ y = \dfrac{4m^2 + m + 1}{m^2+1} \end{cases}$.

x_0, y_0 là nghiệm của hệ suy ra $\begin{cases} x_0 - my_0 = 2 - 4m \\ mx_0 + y_0 = 3m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + m^2y_0^2 - 2mx_0y_0 = (2-4m)^2 \\ m^2x_0^2 + y_0^2 + 2mx_0y_0 = (3m+1)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow (m^2+1)(x_0^2 + y_0^2) = (2-4m)^2 + (3m+1)^2 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = \dfrac{25m^2 - 10m + 5}{m^2+1}$

$x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = \dfrac{25m^2 - 10m + 5 - 5(3m^2 - 3m + 2 + 4m^2 + m + 1) + 10(m^2+1)}{m^2+1} = 0.$

Câu 3. Cho a, b là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình $a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$ có nghiệm duy nhất. Chứng minh rằng $|a| = |b|$.

Lời giải.

$a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)x^2 - 2(a^2+b^2)x + a^3 + b^3 = 0.$

Nếu $a + b = 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Nếu $a + b \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất khi $\Delta' = (a^2+b^2)^2 - (a+b)(a^3+b^3) = 0 \Leftrightarrow -ab(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

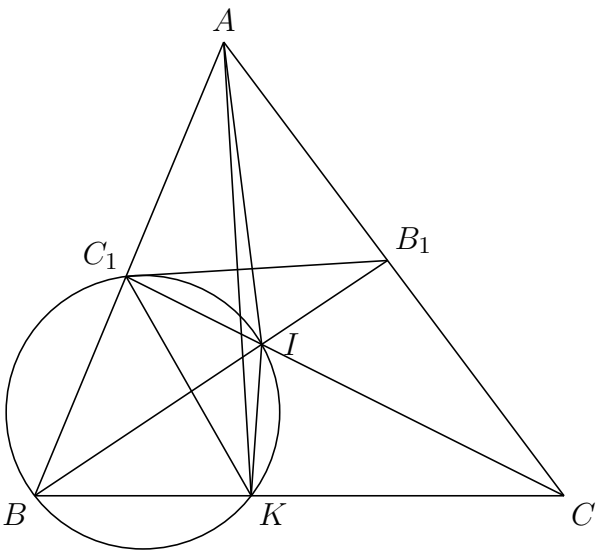
Câu 4. Cho tam giác ABC có các góc ABC và góc ACB nhọn, góc $BAC = 60°$. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I.

a) Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai khác B của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I. Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

c) Chứng minh AK vuông góc B_1C_1.

Lời giải.



Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) $\widehat{B_1IC_1} = \widehat{BIC} = 180^\circ - \dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ suy ra $\widehat{B_1IC_1} + \widehat{A} = 180^\circ$.

b) $\widehat{B_1IC_1} = \widehat{BIC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BIC_1} = \widehat{CIB_1} = \widehat{C_1KB} = \widehat{A} = 60^\circ$ suy ra tứ giác $ACKC_1$ nội tiếp, mặt khác theo a) tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp cho nên $BK \cdot BC = BC_1 \cdot BA = BI \cdot BB_1$ suy ra tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

c) Tứ giác $ACKC_1$ và AB_1IC_1 nội tiếp suy ra $\widehat{KAC_1} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$, $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{AIB_1} = \dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$, $\widehat{KAC_1} + \widehat{AC_1B_1} = \dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = 90^\circ$.

Câu 5. Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) = \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$$

Lời giải.

Ta có $a^2 + \dfrac{1}{4} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \dfrac{1}{4}} = a$; $b^2 + \dfrac{1}{4} \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \dfrac{1}{4}} = b$.

$\left(a^2+b+\dfrac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\dfrac{3}{4}\right) \geq \left(a+b+\dfrac{1}{2}\right)^2 = a^2+b^2+2ab+a+b+\dfrac{1}{4} \geq 4ab+a+b+\dfrac{1}{4} = \left(2a+\dfrac{1}{2}\right)\left(2b+\dfrac{1}{2}\right)$, dấu bằng xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 66

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2014, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1\\ \Leftrightarrow &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}\right)=1\\ \Leftrightarrow &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{cxy+ayz+bxz}{abc}\right)=1 \quad (*)\end{aligned}$$

Từ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0 \Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$.

Thay vào $(*)$ ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $|x| \le \sqrt{3}; |y| \le 1; |z| \le \sqrt{2}$.

Áp dụng Bất đẳng thức $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ta có

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2} \le \frac{x^2+1-y^2}{2}+\frac{y^2+2-z^2}{2}+\frac{z^2+1-x^2}{2}=3$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}x=\sqrt{1-y^2}\\ y=\sqrt{2-z^2}\\ z=\sqrt{3-x^2}\\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=1\\ y^2+z^2=2\\ z^2+x^2=3\\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=1\\ y^2=0\\ z^2=2\\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=1\\ y=0\\ z^2=2\\ x+z\sqrt{2}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=\sqrt{2}\end{cases}.$$

Vậy $(x, y, z)=(1, 0, \sqrt{2})$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 3. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số $a_n = 1 + \dfrac{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n-2)}{(n+5)(n+6)\cdots(2n)}$ là một số chính phương.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{2^n \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]\,(n+4)!}{(2n)!} = 1 + \frac{2^n \cdot (n+4)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \\ &= 1 + \frac{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \\ &= 1 + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \left(n^2+5n+5\right)^2. \end{aligned}$$

Câu 4. Cho $a; b; c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Lời giải.

Đặt $a = \dfrac{x}{y}, b = \dfrac{y}{z}; c = \dfrac{z}{x}$. Khi đó ta có

$$P = \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} = \frac{yz}{xy+xz+2yz} + \frac{zx}{xy+yz+2xz} + \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Do đó

$$\begin{aligned} 3 - P &= 1 - \frac{yz}{xy+xz+2yz} + 1 - \frac{zx}{xy+yz+2xz} + 1 - \frac{xy}{xz+yz+2xy} \\ &= (xy+yz+xz)\left(\frac{1}{xy+xz+2yz} + \frac{1}{xy+yz+2xz} + \frac{1}{xz+yz+2xy}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{B} + \dfrac{1}{C} \geq \dfrac{9}{A+B+C}, \forall A, B, C > 0$, ta có

$$\begin{aligned} 3 - P &\geq (xy+yz+xz) \cdot \frac{9}{4xy+4yz+4xz} = \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow P &\leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{aligned} &\begin{cases} xy+yz+2xz = xy+2yz+xz = 2xy+yz+xz \\ xyz = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &x = y = z = 1 \Rightarrow a = b = c = 1 \end{aligned}$$

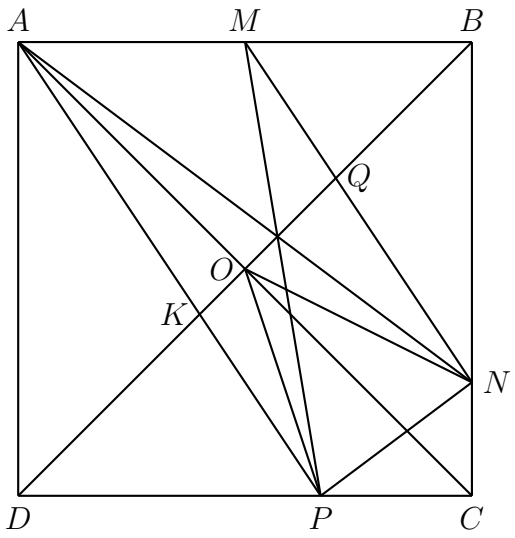
Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm AB, các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng:

1) Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc $\widehat{NOP} = 45°$.

2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

3) Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

Lời giải.



1) Đặt $AB = a$ ta có $AC = a\sqrt{2}$.
Chứng minh: $\Delta ADP \backsim \Delta NBM$ $(g.g)$
$\Rightarrow \dfrac{BM}{DP} = \dfrac{BN}{AD} \Rightarrow BN.DP = \dfrac{a^2}{2}$, mà $OB.OD = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow \Delta DOP \backsim \Delta BNO$ $(c-g-c)$.
Từ đó tính được $\widehat{NOP} = 45°$.

2) Theo câu a) ta có $\dfrac{OB}{DP} = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{OD}{DP}, \widehat{PON} = \widehat{ODP} = 45°$
Tam giác $\Delta DOP \backsim \Delta ONP$ $(c.g.c)$.
$\Rightarrow \widehat{DOP} = \widehat{ONP}$.
Vậy DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔOPN nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

3) Đặt giao điểm của MN và BD là Q và AP là K. Áp dụng tính chất đường phân giác cho các tam giác $MBN; APD$ ta có

$$\begin{cases} \dfrac{QM}{QN} = \dfrac{BM}{BN} \\ \dfrac{KP}{KA} = \dfrac{DP}{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{QM}{QN} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow \frac{QM}{KP} = \frac{QN}{KA} \quad (1)$$

Giả sử MP cắt AN tại I, KI cắt MN tại H.
Áp dụng định lí Ta-lét ta có $\dfrac{HM}{PK} = \dfrac{HN}{KA}$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{HM}{HN} = \dfrac{QM}{QN} \Rightarrow Q \equiv H$.
Vậy BD, PM, AN đồng quy.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 6. Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1;2;3;4;\ldots;2014\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất hai phần tử và nếu $x \in A, y \in A, x > y$, thì $\dfrac{y^2}{x-y} \in A$.

Lời giải.

Chọn hai phần tử $x, y \in A, y < x$.

Nếu $x > 2y$ suy ra $\dfrac{y^2}{y-x} \in A$ và $\dfrac{y^2}{x-y} < y$, Đặt $y_1 = \dfrac{y^2}{x-y}$, ta có $x > 2y > 2y_1$ và $y_2 = \dfrac{y_1^2}{x-y_1} \in A, y_2 < y_1$, tiếp tục như vậy ta xây dựng được dãy số $x, y, y_1, y_2, \ldots, y_n \in A$ sao cho $x > 2y > 2y_1 > 2y_2 > \ldots > 2y_n$. Nếu y_0 là phần tử nhỏ nhất của A dễ thấy tồn tại n sao cho $y_0 > y_n$(mâu thuẩn).

Nếu $x < 2y$ suy ra $\dfrac{y^2}{y-x} \in A$ và $\dfrac{y^2}{x-y} > y$, Đặt $y_1 = \dfrac{y^2}{x-y}$, ta có $x < 2y < 2y_1$ và $y_2 = \dfrac{y_1^2}{x-y_1} \in A, y_2 > y_1$, tiếp tục như vậy ta xây dựng được dãy số $x, y, y_1, y_2, \ldots, y_n \in A$ sao cho $x < 2y < 2y_1 < 2y_2 < \ldots < 2y_n$. Nếu y_0 là phần tử lớn nhất của A dễ thấy tồn tại n sao cho $y_0 < y_n$(mâu thuẩn).

Từ đó suy ra $x = 2y$. Do đó A có dạng $\{y; 2y\}$ với $y \in \{1;2;3;\ldots;1007\} \Rightarrow$ Số tập con là 1007.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 67

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2014, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)=8$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$

Đặt $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=a\ge 0$; ta có $a^2=2+2\sqrt{1-x^2}$, ta có phương trình $a^3=8\Leftrightarrow a=2$

Với $a=2$ thì $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-xy+y^2=1\\x^2+xy+2y^2=4.\end{cases}$

Lời giải.

Xét $x=0$ ta có hệ $\begin{cases}y^2=1\\y^2=2\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Xét y=0 ta có hệ $\begin{cases}x^2=1\\x^2=4\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Vậy x, y khác 0 đặt $x=ty$; $t\ne 0$.

Ta có hệ $\begin{cases}t^2y^2-ty^2+y^2=1\\t^2y^2+ty^2+2y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2(t^2-t+1)=1\\y^2(t^2+t+2)=4\end{cases}\quad(*)$.

Vì mỗi vế hệ $(*)$ khác 0 ta chia 2 vế hệ $(*)$ cho nhau ta được

$$\frac{t^2-t+1}{t^2+t+2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4t^2-4t+4=t^2+t+2\Leftrightarrow 3t^2-5t+2=0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)(3t-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right..$$

Với $t=1$ thay vào hệ $(*)$ ta có 2 nghiệm $(x;y)\in\{(1;1);(-1;-1)\}$.

Với t=$\frac{2}{3}$ ta có ta có 2 nghiệm $(x;y)\in\left\{\left(\frac{2\sqrt{7}}{9};\frac{3}{\sqrt{7}}\right);\left(-\frac{2\sqrt{7}}{9};-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\right\}$.

Câu 3. Giả sử x; y; z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(x+z)}.$$

Lời giải.

$x+y+z=xyz\Leftrightarrow\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}=1.$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nên $\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{x\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{xyz}{(x+y)(x+z)}$ (1).

Tương tự

$$\dfrac{2y}{1+y^2}=\dfrac{2xyz}{(x+y)(y+z)} \quad (2);$$
$$\dfrac{3z}{1+z^2}=\dfrac{3xyz}{(x+z)(y+z)} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{2y}{1+y^2}+\dfrac{3z}{1+z^2}=\dfrac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(x+z)}$.

Cách khác từ giả thiết

$$\begin{aligned}&x+y+x=xyz\\&\Leftrightarrow x^2+xy+xz=x^2yz\\&\Leftrightarrow x^2+1=x^2yz-xy-xz+1=(xy-1)(xz-1)\\&\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{(xy-1)(xz-1)}\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có kết quả.

Câu 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy$.

Lời giải.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy$.

Đặt $x+y=a$, $xy=b$ ta có phương trình

$$\begin{aligned}&ab^2+a=3+b\\&\Leftrightarrow a(b^2+1)=b+3\\&\Leftrightarrow a=\dfrac{b+3}{b^2+1}\end{aligned}$$

Nếu $b=3$ vô nghiệm.

Với $b\neq 3$ ta có $a=\dfrac{b+3}{b^2+1}\Leftrightarrow a(b-3)=\dfrac{b^2-9}{b^2+1}=1-\dfrac{10}{b^2+1}$ suy ra $b^2+1\text{Ư}(10)$; $b\in\{2;1\}$ suy ra $(b;a)=(1;2);(2;1)$ giải ra $(x;y)=(1;1)$.

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC với $AB<BC$. D là điểm thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua C song song với AD cắt trung trực AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt trung trực AB tại F.

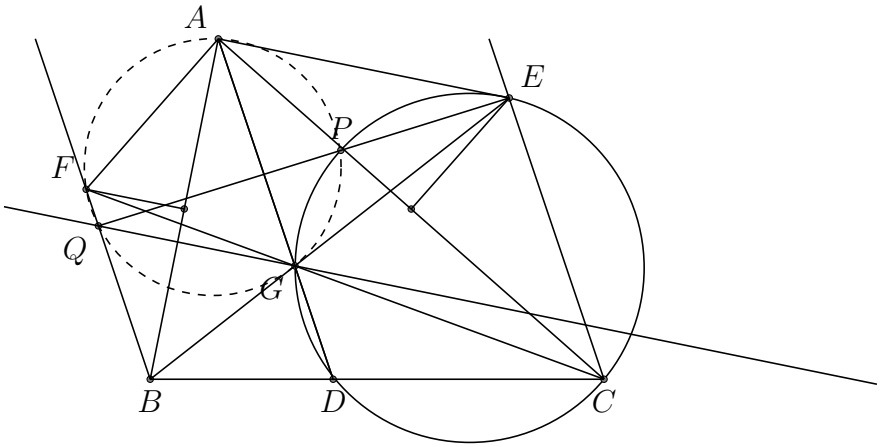
a) Chứng minh rằng tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

b) Chứng minh đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại G.

c) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BF tại Q. Đường thẳng QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có tam giác AFB cân tại F tam giác AEC cân tại E suy ra $\widehat{ABF} = \widehat{BAF} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$;
$\widehat{ACE} = \widehat{CAE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ nên $\triangle ABF \backsim \triangle ACE$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{AB}{AC}$ (1).

b) Ta có BF song song với CE vì cùng song song với AD.
Giả sử CF cắt BE tại G, áp dụng định lí Ta-lét $\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BG}{GE}$ (2)
Áp dụng tính chất đường phân giác $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{BG}{GE} = \dfrac{BD}{DC}$. Áp dụng định lí Ta-lét đảo suy ra GD song song với CE.
Vậy AD, BE, CF đồng quy.

c) Ta có $\widehat{QBG} = \widehat{GEC}$ (so le trong), $\widehat{QGB} = \widehat{AEG}$ (đồng vị).
$\Rightarrow \widehat{BGQ} = \widehat{ECA} + \widehat{EAC} = \widehat{FAG}$.
Suy ra tứ giác $AFQG$ nội tiếp.
Vì tứ giác $CGPE$ nội tiếp nên $\widehat{PEC} = \widehat{PGF}$, mà $\widehat{PEC} = \widehat{PQF}$ (đồng vị).
$\Rightarrow \widehat{EQG} = \widehat{FGP}$ suy ra $FQGP$ nội tiếp.
Vậy 5 điểm A, F, Q, G, P nội tiếp.

Câu 6. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng $2abc(a + b + c) \leq \dfrac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a^4b^2+b^4c^2 \geq 2a^2b^3c \\ b^4c^2+c^4a^2 \geq 2ab^2c^3 \\ a^4b^2+c^4a^2 \geq 2a^3bc^2 \end{cases}$ nên $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \geq abc(ab^2+bc^2+ca^2)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{1}{9} &= a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{ab+bc+ca}{9} \\ &\geq abc(ab^2+bc^2+ca^2)+\frac{ab+bc+ca}{9}=A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= abc\left(a^2b+b^2c+c^2a+\frac{1}{9a}+\frac{1}{9b}+\frac{1}{9c}\right) \\ &= abc\left[\left(ab^2+\frac{1}{9a}\right)+\left(bc^2+\frac{1}{9b}\right)+\left(ca^2+\frac{1}{9c}\right)\right] \\ A &\geq abc\left(\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c\right)=\frac{2abc}{3}(a+b+c) \\ &\Rightarrow a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{1}{9} \geq \frac{2abc}{3}(a+b+c) \quad (1) \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} &a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab^2c+a^2bc+abc^2 \Leftrightarrow \\ &a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+a^2bc+abc^2) \geq 3(ab^2c+a^2bc+abc^2) \\ \Leftrightarrow &(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)\frac{1}{3} \geq abc(a+b+c) \\ \Leftrightarrow &\frac{4}{9} \geq \frac{4abc}{3}(a+b+c) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $2abc(a+b+c) \leq \frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2 Đặt $ab=x$, $bc=y$, $ac=z$ $(x,y,z>0)$ Vì $ab+ac+bc=1 \Rightarrow x+y+z=1$.

Suy ra $2(xy+yz+xz) \leq \frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si

$$\begin{aligned} a^4b^2+b^4c^2 &\geq 2a^2b^2bc=2x^2y \\ b^4c^2+c^4a^2 &\geq 2b^2c^2ac=2y^2z \\ c^4a^2+a^4b^2 &\geq 2a^2c^2ba=2z^2x \\ \Rightarrow 2(xy+yz+xz) &\leq \frac{5}{9}+(x^2y+y^2z+z^2x) \end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\begin{aligned}
&x^2y+\frac{1}{9}y\geq\frac{2}{3}yx\\
&y^2z+\frac{1}{9}z\geq\frac{2}{3}yz\\
&z^2x+\frac{1}{9}x\geq\frac{2}{3}zx\\
\Rightarrow&x^2y+y^2z+z^2x+\frac{1}{9}(x+y+z)\geq\frac{2}{3}(xy+yz+xz)\\
&\frac{4}{9}=\frac{4}{9}(x+y+z)^2\geq 3.\frac{4}{9}(xy+yz+xz)=\frac{4}{3}(xy+yz+xz)\\
\Rightarrow&x^2y+y^2z+z^2x+\frac{5}{9}\geq 2(xy+yz+xz)
\end{aligned}$$

Dấu $=$ xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ Suy ra $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Từ $u=2x+1\Rightarrow x=\frac{u-1}{2}=\frac{(2x+1)-1}{2}$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 68

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2013, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=1+x-y+xy \\ 7xy+x-y=7 \end{cases}$.

b) Giải phương trình $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$.

Lời giải.

a) Cộng vế với vế hai phương trình trong hệ ta được $x^3+y^3+6xy-8=0$
Đặt $a=x+y; b=xy \quad (a^2\geq 4b)$
Phương trình trên trở thành $a^3-3ab+6b-8=0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a+4-3b)=0$
Do $a^2+2a+4-3b=x^2+y^2-xy+2x+2y+4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2+\dfrac{1}{2}(x+2)^2+\dfrac{1}{2}(y+2)^2\geq 0 \quad \forall x,y$
Dấu $''=''$ xảy ra khi $x=y=-2$ không thỏa mãn phương trình thứ 2 của hệ
Do đó $a=2\Rightarrow y=2-x$, thay vào phương trình 2 ta được $x=1$ hoặc $x=\dfrac{9}{7}$.
Vậy hệ có 2 nghiệm là $(x;y)\in\{(1;1),\left(\dfrac{9}{7};\dfrac{5}{7}\right)\}$.

b) ĐKXĐ $-1\leq x\leq 1$.
Phương trình $x+3+\sqrt{1-x^2}=3\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$
$\Leftrightarrow 2x+6+2\sqrt{1-x^2}-6\sqrt{x+1}-2\sqrt{1-x}=0$
Đặt $a=\sqrt{x+1}; b=\sqrt{1-x} \quad (a,b\geq 0)$.
Phương trình trên có dạng $2a^2+4+2ab-6a-2b=0\Leftrightarrow (a-1)(2a+2b-4)=0$.

- Với $a=1\Rightarrow \sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=0$, thỏa mãn.
- Với $a+b=2\Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=2\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=4\Leftrightarrow 1-x^2=1\Leftrightarrow x=0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Câu 2.

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $(x;y)$:

$$5x^2+8y^2=20412.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot\sqrt{1+x^2y^2}$, trong đó x,y là các số thực dương thỏa mãn $x+y\leq 1$.

Lời giải.

a) Xét phương trình $5x^2+8y^2=20412$, từ phương trình suy ra x chẵn, đặt $x=2a$, với $a\in\mathbb{Z}$.
Phương trình trở thành $20a^2+8y^2=20412\Leftrightarrow 5a^2+2y^2=5103$.
Vì 5103 chia hết cho 3 nên $5a^2+2y^2=3(2a^2+y^2)-(a^2+y^2)$ chia hết cho 3, suy ra a^2+y^2 chia hết cho 3.
Do số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên từ a^2+y^2 chia hết cho 3, suy ra a và y cùng chia hết cho 3.
Đặt $a=3c; y=3d$ với $c;d\in\mathbb{Z}$. Ta có $45c^2+18d^2=5103$, suy ra $5c^2+2d^2=567$.
Lập luận tương tự như trên, suy ra $c;d$ chia hết cho 3, nên $c=3t; d=3u$ với $t,u\in\mathbb{Z}$.
Do đó $45t^2+18u^2=567\Rightarrow 5t^2+2u^2=63$.
Tương tự như trên ta có $t;u$ chia hết cho 3, đặt $t=3k; u=3h$ với $k;h\in\mathbb{Z}$.
Suy ra $5k^2+2h^2=7\Rightarrow 5k^2<7$ và $5k^2$ lẻ $\Rightarrow k^2=1; u^2=1$.
Thay ngược lại ta được $(x;y)\in\{(54;27),(54;-27),(-54;27),(-54;-27)\}$.

b) Xét biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot\sqrt{1+x^2y^2}$
Áp dụng BĐT AM-GM ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{2}{\sqrt{xy}}$.
Do đó $P\geq 2\sqrt{\dfrac{1+x^2y^2}{xy}}$. Dấu $''=''$ xảy ra khi $x=y$.
Đặt $M=\dfrac{1+x^2y^2}{xy}=xy+\dfrac{1}{16xy}+\dfrac{15}{16xy}\geq\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{16xy}$.
Mà $x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow 1\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\dfrac{1}{xy}\geq 4\Rightarrow\dfrac{15}{16xy}\geq\dfrac{15}{4}$.
Suy ra $M\geq\dfrac{17}{4}\Rightarrow P\geq\sqrt{17}$. Dấu $''=''$ xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.
Vậy $\text{Min}P=\sqrt{17}$, xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

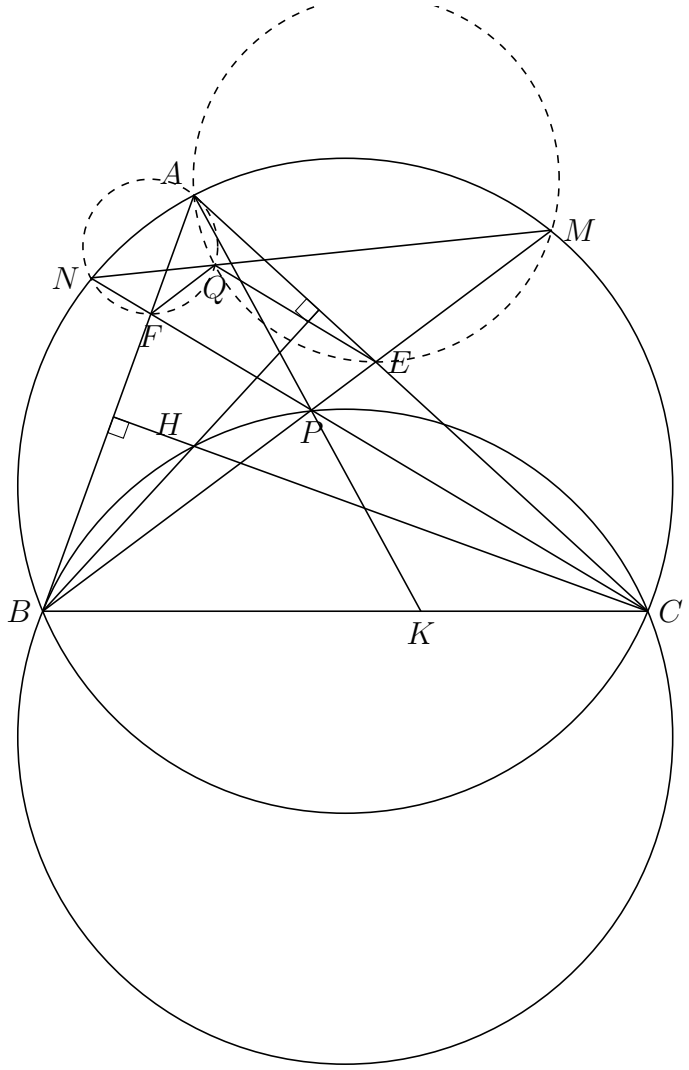
Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có trực tâm H. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC (P khác B,C,H) và nằm trong tam giác ABC; PB cắt (O) tại M khác B; PC cắt (O) tại N khác C; BM cắt AC tại E, CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q khác A.

a) Chứng minh rằng M,N,Q thẳng hàng.

b) Giả sử AP là phân giác góc MAN. Chứng minh PQ đi qua trung điểm của BC.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Vì $\widehat{BHC} = \widehat{BPC}$ (cùng chắn cung $\widehat{BC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC)
Mà $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ nên $\widehat{EAF} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow AEPF$ là tứ giác nội tiếp.
Do đó $\widehat{AEP} + \widehat{AFP} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AFN} + \widehat{AEM} = 180^\circ$.
Các tứ giác $ANFQ$ và $AMEQ$ nội tiếp nên $\widehat{AQN} = \widehat{AFN}; \widehat{AQM} = \widehat{AEM}$.
Do đó $\widehat{AQN} + \widehat{AQM} = 180^\circ$, suy ra M, Q, N thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ mà $\widehat{ANM} = \widehat{AFQ}$ nên $\widehat{AFQ} = \widehat{ABM}$, suy ra $FQ \parallel PE$. Tương tự $FQ \parallel QE$ nên tứ giác $EQFP$ là hình bình hành, do đó $\widehat{QEP} = \widehat{QFP}$.
Mặt khác $\widehat{QFP} = \widehat{NAQ}$ (cùng bù với $\widehat{NFQ}$), suy ra $\widehat{MAQ} = \widehat{NAQ}$. Mà AP là phân giác của $\widehat{MAN}$ nên A, Q, P thẳng hàng.
Giả sử AP cắt BC tại K. Ta có $\widehat{QAE} = \widehat{QME}$ mà $\widehat{QME} = \widehat{NCB}$ nên $\widehat{QAC} = \widehat{NCB}$ mà góc $\widehat{AKC}$ chung, suy ra $\Delta KCP \backsim \Delta KAC$(g-g).
Do đó $\dfrac{KC}{KA} = \dfrac{KP}{KC} \Rightarrow KC^2 = KA \cdot KP$.
Tương tự $KB^2 = KA \cdot KP$. Suy ra $KB^2 = KC^2$ hay $KB = KC$.

Câu 4. Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{192}$ và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{192} = 0 \\ |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{192}| = 2013 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $x_{192} - x_1 \geq \dfrac{2013}{96}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra trong dãy có ít nhất một số dương và số âm.

Giả sử có k số âm và $192-k$ số không âm $k \in \mathbb{N}^*, k < 192$. Ta xếp các theo thứ tự $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k < 0 \leq x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq \cdots \leq x_{192}$.

Đặt $S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ và $S_2 = x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{192}$.

Ta có $S_1 < 0 < S_2$ và $S_1 + S_2 = 0$.

Do đó $|S_1| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|, S_2 = |x_{k+1}| + \cdots |x_{192}|$.

Mà $S_2 = -S_1 = |S_1|$ nên $S_2 - S_1 = 2013$ suy ra $S_2 = -S_1 = \dfrac{2013}{2}$.

Ta có $kx_1 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_k = S_1 \Rightarrow x_1 \leq \dfrac{S_1}{k} \Rightarrow -x_1 \geq \dfrac{-S_1}{k} = \dfrac{S_2}{k}$.

$x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{192} \leq (192-k)\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{192-k}\right) = \dfrac{192S_2}{k(192-k)}$.

Áp dụng BĐT AM-GM, ta có $0 < k(192-k) \leq \dfrac{192^2}{4}$.

Vì vậy $x_{192} - x_1 \geq \dfrac{192S_2 \cdot 4}{192^2}$. Mà $2S_2 = 2013$ nên $x_{192} - x_1 \geq \dfrac{2013}{96}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 192-k = k \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_k \\ x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{192} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 96 \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{96} = \dfrac{-2013}{192} \\ x_{97} = x_{98} = \cdots x_{192} = \dfrac{2013}{192} \end{cases}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 69

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN KHTN HÀ NỘI NĂM 2013, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3$.

Lời giải.

Điều kiện $-\dfrac{1}{3}\le x\le 2$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3 &\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{-3x^2+5x+2}=9\\ &\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+5x+2}=-x+3\\ &\Leftrightarrow 4x^2-11x+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{7}{4}\end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x\in\left\{1;\dfrac{7}{4}\right\}$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=xy+\dfrac{1}{xy}.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Ta có $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=xy+\dfrac{1}{xy}+2$. Nên ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)-2.\end{cases}$$

Đặt $u=x+\dfrac{1}{y}$, $v=y+\dfrac{1}{x}$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}u+v=\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}u=uv-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{9}{2}-u\\ \dfrac{9}{4}+\dfrac{3u}{2}=u\left(\dfrac{9}{2}-u\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{3}{2}\\ v=3.\end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}\\ y+\dfrac{1}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy+2=3y\\ xy+1=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\ 2x^2-3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=2\\ x=\dfrac{1}{2},y=1\end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy nghiệm hệ phương trình là $(1;2)$; $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 3. Với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) = 8abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}.$$

Lời giải.
Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a+b}\left(1-\frac{b}{b+c}\right)+\frac{b}{b+c}\left(1-\frac{c}{c+a}\right)+\frac{c}{c+a}\left(1-\frac{a}{a+b}\right)=\frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{ac}{(a+b)(b+c)}+\frac{ba}{(b+c)(c+a)}+\frac{cb}{(c+a)(a+b)}=\frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow\ &ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=\frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)\\
\Leftrightarrow\ &ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=6abc\\
\Leftrightarrow\ &ac(a+c)+b^2(a+c)+ab(a+c)+bc(a+c)=8abc\\
\Leftrightarrow\ &(a+c)(ac+b^2+ab+bc)=8abc\\
\Leftrightarrow\ &(a+b)(b+c)(c+a)=8abc\quad\text{(giả thiết)}.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên dương có năm chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101?

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
\overline{abcde} &= \overline{abc}\cdot 100+\overline{de}\\
&= \overline{abc}\cdot 101-(\overline{abc}-\overline{de})\\
&= \overline{abc}\cdot 101-(\overline{abc}-(10+e)).
\end{aligned}$$

Do đó, $\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101 khi và chỉ khi $\overline{abcde}$ chia hết cho 101.
Ta có $101\cdot m\le 99999 \Leftrightarrow m\le \frac{99999}{101}=990+\frac{9}{101}$.
Suy ra số có năm chữ số lớn nhất chia hết cho 101 là $990\cdot 101$.
Lại có $101\cdot n>9999 \Leftrightarrow n>\frac{999}{101}=99$.
Suy ra số có năm chữ số nhỏ nhất chia hết cho 101 là $100\cdot 101$.
Vậy số các số có năm chữ số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $990-100+1=891$ số.

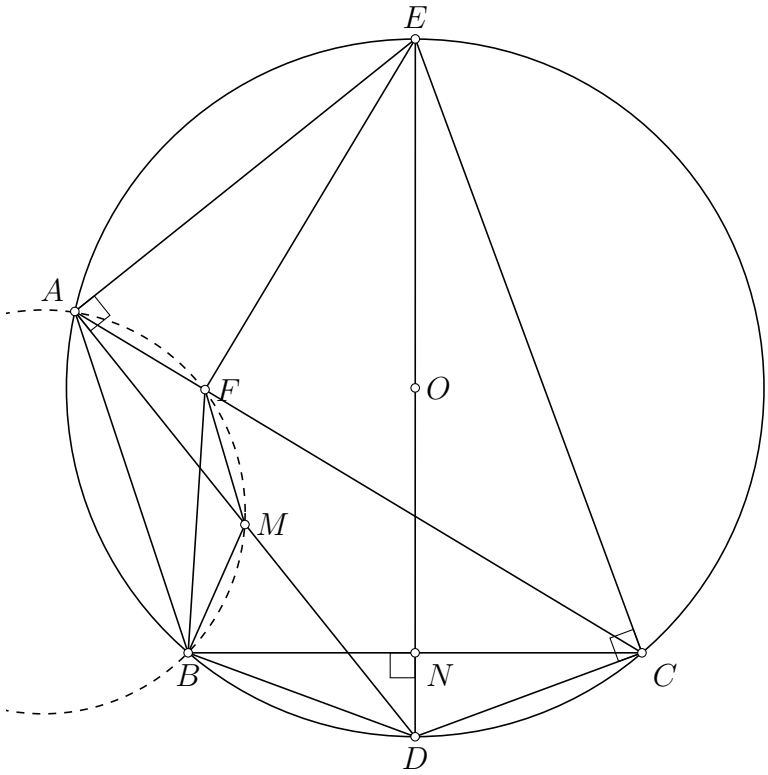
Câu 5. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) với $AB<AC$. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại điểm D khác A. Gọi M là trung điểm AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt đoạn thẳng AC tại điểm F khác A. Chứng minh rằng

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) $\triangle BDM \backsim \triangle BCF$.

b) $EF \perp AC$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BDM} = \widehat{BCA}$ (tính chất góc nội tiếp trong đường tròn).
Lại có $\widehat{FBM} = \widehat{FAM} = \widehat{CBD}$ (tính chất góc nội tiếp trong đường tròn).
Do đó $\widehat{FBM} + \widehat{MBC} = \widehat{CBD} + \widehat{MBC}$, hay $\widehat{FBC} = \widehat{MBD}$.
Nên $\triangle BDM \backsim \triangle BCF$ (g.g).

b) Ta sẽ chứng minh cho $\triangle CEF \backsim \triangle DEA$. Thật vậy, do $\triangle BDM \backsim \triangle BCF$ nên

$$\frac{DM}{CF} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot DM}{CF} = \frac{2 \cdot BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{DA}{CF} = \frac{BD}{BN}.$$

Với $N = OD \cap BC$ là trung điểm BC. Mà $\triangle BDN \backsim \triangle EDC$ nên $\dfrac{BD}{BN} = \dfrac{DE}{CE}$.
Từ đó ta có $\dfrac{DM}{CF} = \dfrac{DE}{CE}$. Và $\triangle CEF \backsim \triangle DEA$ (c.g.c).
Suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{EAD} = 90^\circ$. Vậy $EF \perp AC$.

Câu 6. Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc + bcd + cda + dab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(a^3 + b^3 + c^3) + 9d^3$.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Với α là số thực dương, áp dụng BĐT Cô-si (Cauchy, AM-GM) cho ba số ta có

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{3}+\frac{a^3}{3\alpha^3}+\frac{b^3}{3\alpha^3} &\geq \frac{dab}{\alpha^2},\\ \frac{d^3}{3}+\frac{b^3}{3\alpha^3}+\frac{c^3}{3\alpha^3} &\geq \frac{dbc}{\alpha^2},\\ \frac{d^3}{3}+\frac{c^3}{3\alpha^3}+\frac{a^3}{3\alpha^3} &\geq \frac{dca}{\alpha^2},\\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3\alpha^2} &\geq \frac{abc}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$d^3+\left(\frac{2}{3\alpha^3}+\frac{1}{3\alpha^2}\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\frac{1}{\alpha^2}(dab+dbc+dca+abc)=\frac{1}{\alpha^2}.$$

Bây giờ, ta chọn $\alpha>0$ sao cho $\dfrac{2}{3\alpha^3}+\dfrac{1}{3\alpha^2}=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow 4\alpha^3-3\alpha-6=0$.

Đặt $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ ta được

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=6\Leftrightarrow x^6-12x^3+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\\ x=\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}.\end{array}\right.$$

Ta được $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)$. Khi đó

$$d^3+\frac{4}{9}\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\frac{1}{\alpha^2}\Leftrightarrow 9d^3+4\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\frac{9}{\alpha^2}=\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^2}.$$

Dẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt[3]{\dfrac{\alpha}{\alpha+3}}$, $d=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\alpha^3+3\alpha^2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{36}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^2}$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 70

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2012, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+2\sqrt{x^2+2x-1}}+2x^2+4x-4=0$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+2x-1\geq 0$.

Đặt $x^2+2x=a(a\geq 1)$. Phương trình trở thành:

$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+2a-4=0\Leftrightarrow\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}=4-2a\Leftrightarrow\left|\sqrt{a-1}+1\right|=4-2a$

$\Leftrightarrow\sqrt{a-1}=3-2a\Leftrightarrow\begin{cases}a & \leq\dfrac{3}{2}\\ a-1 & =4a^2-12a+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leq\dfrac{3}{2}\\ (a-2)(4a-5)=0\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{4}.$

Với $a=\dfrac{5}{4}$ ta có $4x^2+8x=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{-5}{2}\end{array}\right.$. Thay vào thỏa mãn điều kiện. Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{-5}{2}\right\}$.

Câu 2. Cho các số a, b, c đôi một phân biệt thỏa mãn $a^2(b+c)=b^2(a+c)=2012$. Tính giá trị của biểu thức $M=c^2(a+c)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}a^2(b+c) & =2012\\ b^2(a+c) & =2012\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2(b+c)-b^2(a+c)=0 & (1)\\ a^2(b+c)+b^2(a+c)=4024 & (2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow ab(a-b)+c(a+b)(a-b)=0\Leftrightarrow(a-b)(ab+bc+ca)=0\Leftrightarrow ab+bc+ca=0$ (vì $a\neq b$).

$(2)\Leftrightarrow ab(a+b)+c(a+b)^2-2abc=4024\Leftrightarrow(a+b)(ab+bc+ca)-2abc=4024\Leftrightarrow abc=-2012$.

Từ đây ta có $c(a+b)=-ab\Rightarrow c^2(a+b)=-abc=2012$.

Câu 3. Cho 5 số nguyên dương phân biệt sao cho mỗi số dương trong chúng không có ước số nguyên nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải.

Vì mỗi số dương trong chúng không có ước số nguyên nào khác 2 và 3 nên mỗi số trong 5 số có dạng $2^x\cdot 3^y$, $x,y\in\mathbb{R}$. Mặt khác $(x;y)$ chỉ có thể có dạng (chẵn; chẵn); (lẻ lẻ); (chẵn; lẻ) hoặc (lẻ; chẵn). Vì có 5 số nên tồn tại hai cặp $(x;y)$ có cùng dạng. Hai số có hai cặp $(x;y)$ cùng dạng có tích là một số chính phương.

Câu 4. Cho các số thực x_1, x_2,$\cdots$,$x_n(n\geq 3)$. Kí hiệu $\max\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ là số lớn nhất trong các số x_1, x_2,$\cdots$,x_n. Chứng minh rằng

$$\max\{x_1,x_2,\cdots x_n\}\geq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|}{2n}.$$

Lời giải.

Đặt $x_m = \text{Max}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, ta chứng minh $x_i + x_j + |x_i - x_j| \le 2x_m$. Thật vậy

$x_i + x_j + |x_i - x_j| \le 2x_m \Leftrightarrow (2x_m - x_i - x_j) \ge |x_i - x_j| \Leftrightarrow (x_m - x_i)(x_m - x_j) \ge 0$ luôn đúng.

Ta có:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \cdots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|}{2n}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + |x_1 - x_2| + x_2 + x_3 + |x_2 - x_3| + \cdots + x_n + x_1 + |x_n - x_1|}{2n}$$
$$\le \frac{2x_m + 2_m + \cdots + 2x_m}{2n} = x_m$$

Câu 5. Trong lớp học có 36 bàn học cá nhân, được xếp thành 4 hàng và 9 cột (các hàng đánh số từ 1 đến 4, các cột đánh số từ 1 đến 9). Sĩ số học sinh của lớp là 35. Sau một học kỳ cô giáo chủ nhiệm xếp lại chỗ ngồi các bạn học sinh trong lớp. Đối với mỗi học sinh của lớp, giả sử trước khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở bàn thuộc hàng thứ m, cột thứ n và sau khi chuyển chỗ, bạn ngồi ở bàn thuộc hàng thứ a_m, cột thứ a_n, ta gắn cho bạn đó số nguyên $(a_m + a_n) - (m + n)$. Chứng minh tổng của 35 số nguyên gắn với 35 bạn học sinh không vượt quá 11.

Lời giải.

Mượn một bạn X ở lớp khác ngồi vào chỗ trống còn lại. Khi đó tổng các số nguyên gắn cho 36 học sinh trước và sau khi đổi chỗ bằng nhau. Do đó tổng của 35 số nguyên ứng với 35 học sinh bằng $-x$. Trong đó x là số nguyên ứng với X.

Vậy tổng 35 số không vượt quá $(4 + 9) - (1 + 1) = 11$.

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O) (M khác C và D). MA cắt DB, DC theo thứ tự X, Z. MB cắt CA, CD tại Y, T. CX cắt DY tại K.

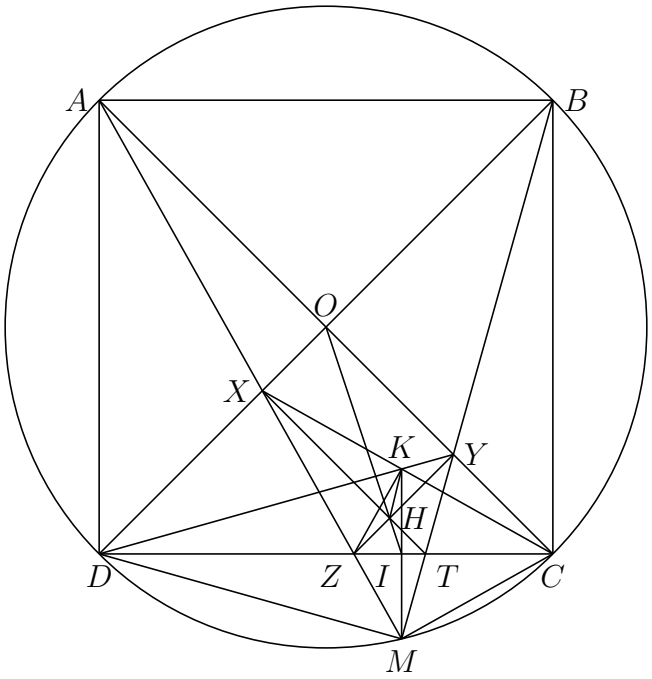
a) Chứng minh rằng $\widehat{MXT} = \widehat{TXC}$, $\widehat{MYZ} = \widehat{ZYD}$ và $\widehat{CKD} = 135°$.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{KX}{MX} + \dfrac{KY}{MY} + \dfrac{ZT}{CD} = 1$.

c) Gọi I là giao điểm của MK và CD. Chứng minh rằng XT, YZ, OI cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) $\widehat{MXD} = \frac{1}{2}\text{sđ}(\widehat{AB} + \widehat{MD}) = \frac{1}{2}\text{sđ}(\widehat{BC} + \widehat{MD}) = \widehat{MTD}$. Do đó tứ giác $DXTM$ nội tiếp suy ra $\widehat{MXT} = \widehat{MDC}$ và $\widehat{XTD} = \widehat{XMD} = 45^\circ = \widehat{XBC}$ nên giác $XBCT$ nội tiếp, suy ra $\widehat{TXC} = \widehat{MBC} = \widehat{MDC}$. Vậy $\widehat{MXT} = \widehat{TXC}$.

Tương tự các tứ giác $MZYC$ và $AYZD$ nội tiếp, suy ra $\widehat{MYZ} = \widehat{ZYD}$.

Mặt khác vì $BXTC$ nội tiếp nên $\widehat{KCD} = \widehat{DBM} = \widehat{DCM}$, tứ giác $ADZY$ nội tiếp nên $\widehat{KDC} = \widehat{CAM} = \widehat{CDM}$. Vậy $\triangle DKC = \triangle DMC \Rightarrow \widehat{DKC} = \widehat{DMC} = 135^\circ$.

b) Ta có $\widehat{XKD} = 180^\circ - \widehat{DKC} = 45^\circ = \widehat{XMD}$ nên tứ giác $DXKM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{KMH} = \widehat{KDX}$. Mặt khác $\widehat{KCZ} = \widehat{XBT} = \widehat{KDX}$. Từ đó ta có $\widehat{KMZ} = \widehat{KCZ}$. Do đó tứ giác $KCMZ$ nội tiếp, suy ra $XK \cdot XC = XZ \cdot XM \Rightarrow \dfrac{XK}{XM} = \dfrac{XZ}{XC} = \dfrac{XZ}{XA} = \dfrac{DZ}{AB} = \dfrac{DZ}{DC}$.

Tương tự $\dfrac{YK}{YM} = \dfrac{CT}{DC}$. Từ đây ta có:

$$\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = \frac{DZ}{CD} + \frac{CT}{DC} + \frac{ZT}{DC} = 1$$

c) Gọi H là giao của XT và YZ. Ta có tứ giác $YZMC$ nội tiếp nên $\widehat{YZC} = \widehat{YMC} = 45^\circ \Rightarrow YZ \parallel BD$. Tương tự $XT \parallel AC$ suy ra $YZ \perp XT \Rightarrow \widehat{XHZ} = 90^\circ$.

Mặt khác tứ giác $ZKCM$ nội tiếp nên $\widehat{ZKC} = \widehat{ZMC} = 90^\circ$. Từ đây ta có $XKHZ$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HKZ} = \widehat{HXZ}$, $\widehat{HZK} = \widehat{HXK}$. Theo câu a. ta có $\widehat{HXK} = \widehat{HXZ}$ nên

$\widehat{HKZ} = \widehat{HZK}$. Vậy $HK = HZ$. Tương tự $HK = HT$, hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔKZT.

Để ý rằng tam giác $\triangle HZT$ đồng dạng $\triangle ODC$, suy ra $\dfrac{HZ}{OD} = \dfrac{ZT}{DC}$ (1). Lại có $MI \parallel AD \parallel BC$ (vì cùng vuông góc CD) nên $\dfrac{IZ}{ID} = \dfrac{IM}{IM + AD} = \dfrac{IM}{IM + BC} = \dfrac{IT}{IC} = \dfrac{IZ + IT}{ID + IC} = \dfrac{ZT}{DC}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{HZ}{OD} = \dfrac{IZ}{ID}$. Do đó H, I, O thẳng hàng.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 71

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2012, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\cdot\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ với $a>b>0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Biết $a-b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right)\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\\&=\frac{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)+\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)}{a+b-a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\\&=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\\&=\frac{a^2+b^2}{b}.\end{aligned}$$

b) Thay $a=b+1$, ta có

$$P=\frac{(b+1)^2+b^2}{b}=\frac{2b^2+2b+1}{b}=2b+2+\frac{1}{b}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số không âm, ta có

$$2b+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2b}{b}}=2\sqrt{2}.$$

Vậy $P\geq 2+2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2b=\dfrac{1}{b}$ hay $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $a=b+1=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\min P=2+2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $(a;b)=\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 2. Trên quãng đường AB dài 210 km, tại cùng một thời điểm, một xe máy khởi hành từ A đi về B và một ô tô khởi hành từ B đi về A. Sau khi gặp nhau, xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Lời giải.

Đổi: 2 giờ 15 phút $= \dfrac{9}{4}$ giờ.

Gọi vận tốc xe máy là x (km/h), vận tốc xe ô tô là y (km/h) $(y > x > 0)$.

Gọi vị trí hai xe gặp nhau là C thì quãng đường CB là $4x$ (km), CA là $\dfrac{9y}{4}$ (km).

Vì tổng quãng đường CA, CB là 210 km nên ta có phương trình

$$4x + \frac{9y}{4} = 210.$$

Thời gian xe máy đi hết quãng đường là $\dfrac{210}{x}$ (h), thời gian ô tô đi hết quãng đường là $\dfrac{210}{y}$ (h).

Vì ô tô đi hết quãng đường nhanh hơn xe máy $4 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{7}{4}$ (h) nên ta có phương trình

$$\frac{210}{x} - \frac{210}{y} = \frac{7}{4}.$$

Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + \dfrac{9y}{4} = 210 \\ \dfrac{210}{x} - \dfrac{210}{y} = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \dfrac{9y}{4} = 210 \\ 4 + \dfrac{9y}{4x} - \left(\dfrac{4x}{y} + \dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x + 9y = 840 \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 40 \text{ (thỏa mãn).} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 30 km/h, vận tốc của ô tô là 40 km/h.

Câu 3. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol $(P) : y = -x^2$ và đường thẳng $(d) : y = mx - m - 2$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2.

b) Tìm m để $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$.

Lời giải.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là
$-x^2 = mx - m - 2$ hay $x^2 + mx - m - 2 = 0 \quad (1)$.
Ta có $\Delta = m^2 - 4(-m - 2) = m^2 + 4m + 8 = (m + 2)^2 + 4 > 0 \ \forall m$.
Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).
Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -m - 2. \end{cases}$
Vậy $|x_1 - x_2| = \sqrt{20} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -6. \end{array}\right.$

Câu 4. Cho tam giác ABC. Đường tròn (ω) có tâm O và tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L. Tiếp tuyến (d) của đường tròn (ω) tại điểm E thuộc cung nhỏ KL, cắt các đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

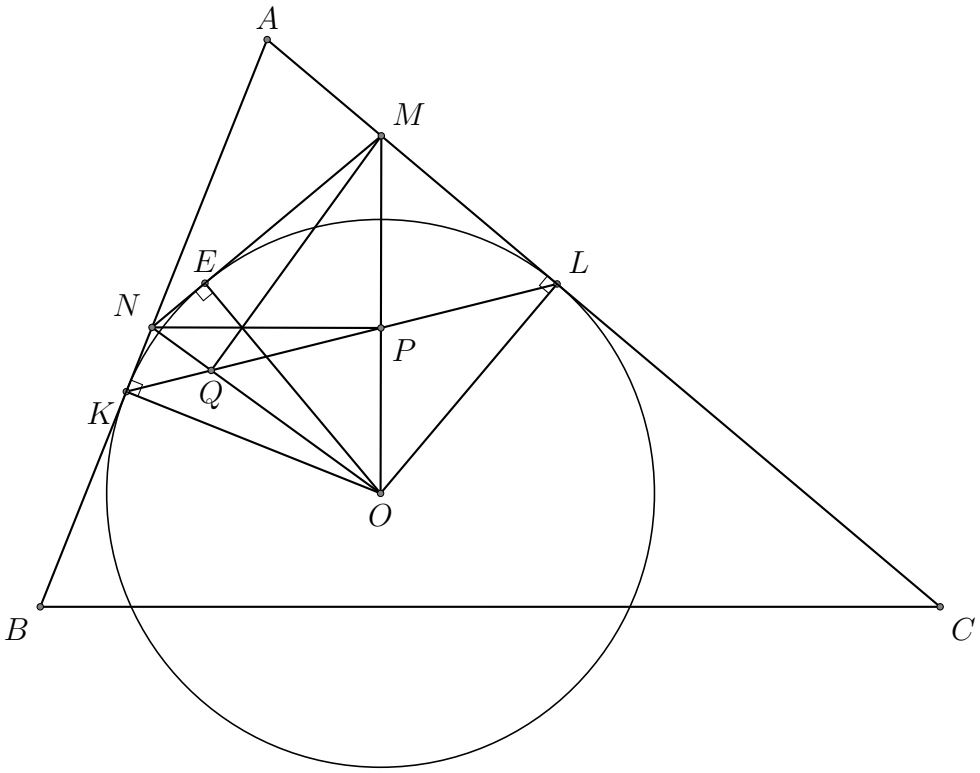
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Chứng minh rằng $\widehat{MON} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

c) Chứng minh $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$.

Lời giải.



a) Xét tứ giác $AKOL$ có $\widehat{AKO} = \widehat{ALO} = 90^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{KOL} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KOL} = 180^\circ - \widehat{A}$.
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ON và OM lần lượt là hai tia phân giác của $\widehat{KOE}$ và $\widehat{LOE}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{MOE} = \dfrac{\widehat{LOE}}{2} \\ \widehat{NOE} = \dfrac{\widehat{KOE}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{MOE} + \widehat{NOE} = \frac{\widehat{LOE} + \widehat{KOE}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = \frac{\widehat{LOK}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}. \quad (1)$$

b) Ta có AK và AL là hai tiếp tuyến của đường tròn (ω) nên $AK = AL$.
$\Rightarrow \triangle AKL$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{ALK} = \dfrac{180^\circ - \widehat{KAL}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MON} = \widehat{ALK}$.
Do đó tứ giác $OQML$ là tứ giác nội tiếp.
$\Rightarrow \widehat{MQO} = 180^\circ - \widehat{MLO} = 90^\circ \Rightarrow MQ \perp ON$.
Chứng minh tương tự, ta có $NP \perp OM$.
Vậy MQ, NP, OE là ba đường cao của tam giác MNO nên chúng cùng đi qua trực tâm tam giác MNO.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

c) Do $OQML$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{LQO} = \widehat{LMO}$.
Mà $\widehat{LQO} = \widehat{NQK}$, suy ra $\widehat{LMO} = \widehat{NQK}$.
Vậy $\triangle KQN \backsim \triangle LMP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KQ}{LM} = \dfrac{KN}{LP}$.
Lại có $KN = EN$, $LM = EM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
$\Rightarrow \dfrac{KQ}{EM} = \dfrac{EN}{LP} \Rightarrow KQ \cdot LP = EM \cdot EN$.

Câu 5. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $\sqrt{xy}(x-y) = x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $x - y = \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}} > 0$ nên $x > y$.

Bình phương hai vế, ta được

$xy(x-y)^2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow xy\left[(x+y)^2 - 4xy\right] = (x+y)^2$

$\Leftrightarrow 4(xy)^2 - xy(x+y)^2 + (x+y)^2 = 0 \quad (1)$

Điều kiện để phương trình (1) (phương trình bậc hai với ẩn xy) có nghiệm là

$\Delta = (x+y)^4 - 16(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=4 \\ 4(xy)^2 - 16xy + 16 = 0 \\ x > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy = 2 \\ x > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\sqrt{2} \\ y = 2-\sqrt{2}. \end{cases}$

Vậy $\min P = 4$ khi $(x;y) = \left(2+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}\right)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 72

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2011, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho $a=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

a) Chứng minh rằng $4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0$.

b) Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+\sqrt{a^4+a+1}$.

Lời giải.

a) Từ giả thiết suy ra $a>0$ và

$$a+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}\Rightarrow\left(a+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{8}\right)\Rightarrow 4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0.\ (1)$$

b) Từ (1) suy ra $a^2=\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{4}$

$$\Rightarrow S=a^2+\sqrt{\frac{(1-a)^2}{8}+a+1}=a^2+\frac{a+3}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1-a)}{4}+\frac{\sqrt{2}(a+3)}{4}=\sqrt{2}.$$

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=2\\ \sqrt{x+y}=x^2-y\end{cases}$.

b) Cho hai số hữu tỷ a và b thỏa mãn đẳng thức: $a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0$. Chứng minh rằng $1-ab$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Lời giải.

a) Điều kiện $x+y>0$. Ta có phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+y)^2-1+2xy\left(\frac{1}{x+y}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(x+y-1)-\frac{2xy(x+y-1)}{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow x+y=1 (do\ x^2+y^2+x+y>0).$$

Kết hợp với phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$\begin{cases}x+y=1\\ x^2-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases}.$$

b) Nếu $ab = 0$ thì hiển nhiên đúng.

Nếu $ab \neq 0$.

Ta có $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$

$\Leftrightarrow ab(a+b)^2 + 2(a+b) = -1,$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + 1 = 1 - ab,$

$\Leftrightarrow 1 - ab = [ab(a+b) + 1]^2.$

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$, với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p.

Lời giải.

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta giả sử $a \geqslant b \geqslant c$. Ta có

$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Vì p là số nguyên tố và $p \geqslant 3$, suy ra $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p khi và chỉ khi $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ chia hết cho p hay $a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2) \vdots p$.

$\Leftrightarrow a^2b^2 - c^4 \vdots p \Leftrightarrow (ab - c^2)(ab + c^2) \vdots p$.

Do $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$ và p là số nguyên tố nên $ab - c^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c \Rightarrow p = 3a^2 \Rightarrow a = b = c = 1$ và $p = 3$.

Điều phải chứng minh.

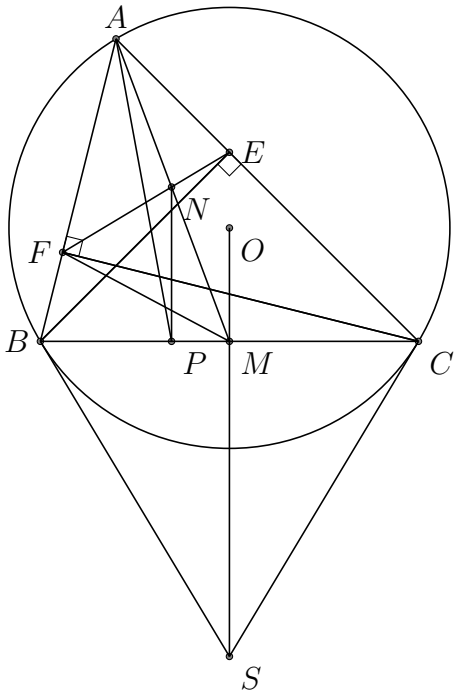
Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm (O), BE, CF là các đường cao. Các tiếp tuyến với đường tròn tâm (O) tại tại B và C cắt nhau tại S, các đường thẳng BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{ME}$.

b) Chứng minh rằng $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$.

c) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của AS và BC. Chứng minh $NP \perp BC$.

Lời giải.



a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{SBM}$ và $\widehat{AEB} = \widehat{BMS} = 90^\circ$ nên $\Delta AEB \backsim \Delta BMS$.
Suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{BM}$, mà $BM = ME$ nên $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{ME}$. (1)

b) Tam giác BME cân tại M nên $\widehat{MEB} = \widehat{MBE}$.
Lại có $\widehat{SBM} + \widehat{ABE} = \widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 90^\circ = \widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{AEM}$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$.

c) Từ kết quả của câu 2 ta có $\widehat{BAP} = \widehat{EAN}$, mà $\widehat{ABP} = \widehat{EAN}$ (cùng bù với $\widehat{CEF}$).
Nên $\Delta AEN \backsim \Delta ABP$, suy ra $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NE}{BP}$ (3).
Vì $\Delta MAE \backsim \Delta SAB (CMT)$ và tương tự ta có $\Delta MAF \backsim \Delta SAC$.
Nên $\widehat{AME} = \widehat{ASB}, \widehat{AMF} = \widehat{ASC}$.
Suy ra $\widehat{EMF} = \widehat{BSC} \Rightarrow \widehat{SBP} = \widehat{MEN}$ (do hai tam giác cân có hai góc ở đỉnh bằng nhau).
Suy ra $\Delta EMN \backsim \Delta BSP \Rightarrow \dfrac{NE}{BP} = \dfrac{MN}{SP}$ (4).
Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NM}{PS} \Rightarrow NP \parallel MS$, mà $MS \perp BC$ nên suy ra $NP \perp BC$.

Câu 5. Trong hộp có chứa 2011 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu), trong đó có 655 viên bi màu đỏ, 655 viên bi màu xanh, 655 viên bi màu tím và 45 viên bi còn lại là các màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 178 viên bi bất kì. Chứng minh rằng trong các viên bi vừa lấy ra, luôn có ít nhất 45 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 177 viên bi thì kết luận của bài toán còn đúng không?

Lời giải.

Nếu ta chọn ra 44 viên bi màu đỏ, 44 viên bi màu xanh, 44 viên bi màu tím và 45 viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên) thì tổng số bi lấy ra là: 44+44+44+45 = 177

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

viên bi.

Do đó sẽ không có 45 viên bi nào cùng màu. Vậy bài toàn không đúng nếu ta chỉ lấy ra 177 viên bi.

Nếu lấy ra 178 viên bi thì số bi màu trắng hoặc màu vàng có tối đa là 45, như vậy vẫn còn lại ít nhất $178 - 45 = 133$ bi màu đỏ hoặc màu xanh, hoặc màu tím.

Theo nguyên lí Dirichlet sẽ tồn tại một màu mà có ít nhất $\left[\frac{133}{3}\right] + 1 = 45$ viên bi.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 73

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2011, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức
$A = \left(\dfrac{x-y}{2y-x} + \dfrac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2}\right) : \dfrac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$ (với $x>0$, $y>0$, $x \neq 2y$, $y \neq 2-2x^2$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Cho $y=1$. Hãy tìm x để $A = \dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

a) $A = \left(\dfrac{x-y}{2y-x} + \dfrac{x^2+y^2+y-2}{(x+y)(2y-x)}\right) . \dfrac{(x+y)(x+1)}{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)}$
$= \dfrac{2x^2+y-2}{2y-x} . \dfrac{x+1}{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)} = \dfrac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$.

b) Với $y=1$, ta có $A = \dfrac{x+1}{(2-x)(2x^2+3)} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 4x^3-8x^2+11x-7=0 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 2. Một nhóm công nhân đặt kế hoạch sản xuất 200 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.

Gọi số sản phẩm phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm) ($x>0$, $x \in \mathbb{N}$).
Số ngày làm theo kế hoạch là $\dfrac{200}{x}$ (ngày).
Số ngày làm $x+10$ sản phẩm là $\dfrac{200-4x}{x+10}$ (ngày).
Vì nhóm công nhân làm vượt 2 ngày nên ta có phương trình
$\dfrac{200}{x} - \dfrac{200-4x}{x+10} = 2 \Rightarrow x = 20$ (thỏa mãn).
Vậy theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân làm 20 sản phẩm.

Câu 3. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - m2 + 3$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2. Với giá trị nào của m thì x_1, x_2 là độ dài cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ (1). Để (P) cắt (d) tai 2 điểm phân biệt thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 12 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$. Vì x_1, x_2 là độ dài các cạnh của tam giác nên

$\begin{cases} x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow m > \sqrt{3}$.

Vì $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2m^2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

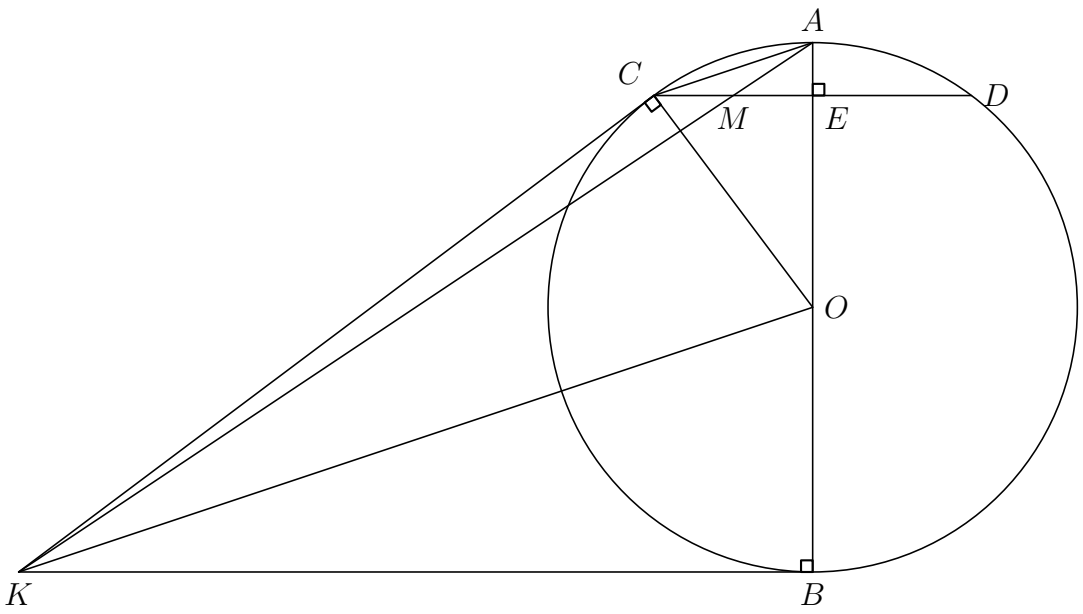
Vì $m > \sqrt{3}$, $-2 < m < 2$ nên $m = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10$. Dây cung CD vuông góc với AB tại điểm E sao cho $AE = 1$. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K, AK và CE cắt nhau tại M.

a) Chứng minh tam giác AEC đồng dạng với tam giác OBK. Tính BK.

b) Tính diện tích tam giác CKM.

Lời giải.



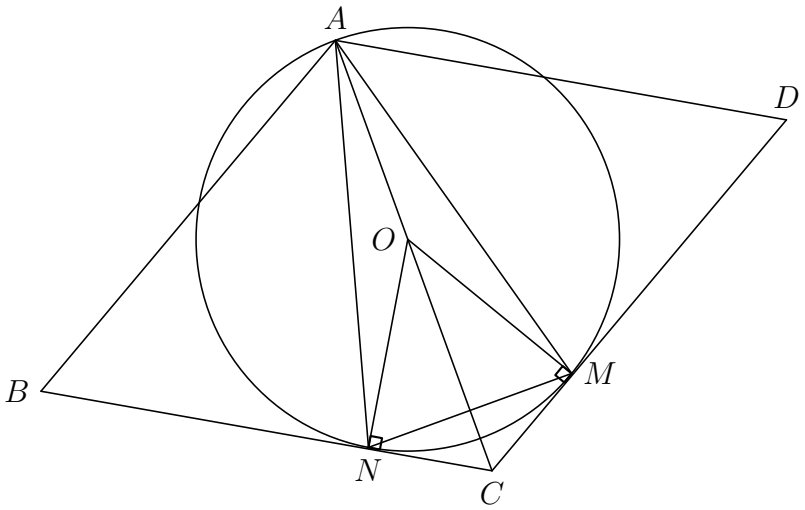
a) Theo tính chất góc ngoài tam giác cân AOC thì $\widehat{COB} = 2\widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{BOK} = \widehat{OAC}$
$\Rightarrow AC \parallel OK$. Mà $CE \parallel KB$ nên $\Delta AEC \backsim \Delta OBK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BK}{CE} = \dfrac{OB}{AE}$.
Xét tam giác vuông OEC, áp dụng Pitago có $CE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \Rightarrow BK = 15$.

b) Ta có $\Delta AEM \backsim \Delta ABK \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{ME}{BK} \Rightarrow ME = \dfrac{3}{2} \Rightarrow CM = CE - ME = \dfrac{3}{2}$
$\Rightarrow S_{\Delta CKM} = \dfrac{1}{2}.CM.BE = \dfrac{27}{4}$ (đvdt).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Các điểm M, N chạy trên BC và CD tương ứng sao cho góc $MAN = 30^\circ$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN chạy trên đường thẳng cố định.

Lời giải.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN \Rightarrow \Delta MON$ cân tại O.
Mà $\widehat{MON} = \widehat{MAN} = 60^\circ$ nên tam giác MAN đều.
Mặt khác $\widehat{MON} + \widehat{MCN} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $MCNO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{MNA} = 60^\circ$. Vì $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{MCA} = 60^\circ$. Vậy $\widehat{MCA} = \widehat{MCO}$ nên O thuộc AC.

Câu 6. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$$

Lời giải.

Đặt $A = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$.

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots + \frac{2}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$$

$$\Rightarrow 2A > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

$$> \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \ldots + \frac{\sqrt{81}-\sqrt{80}}{(\sqrt{81}+\sqrt{80})(\sqrt{81}-\sqrt{80})}$$

$$= \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{81}-\sqrt{80} = 9-1 = 8.$$

$$\Rightarrow A > 4.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 74

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2010, VÒNG 2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn $a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2=1$.

Lời giải.

$a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}\Leftrightarrow a+\sqrt{1-a^2}=b+\sqrt{1-b^2}\Leftrightarrow a\sqrt{1-a^2}=b\sqrt{1-b^2}$

$\Rightarrow a^2-a^4=b^2-b^4\Leftrightarrow a^4-b^4-(a^2-b^2)=0\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2+b^2-1)=0.$

Theo đề bài ta có $a\neq b$ nên $a^2-b^2\neq 0$, suy ra $a^2+b^2-1=0$ hay $a^2+b^2=1$.

Câu 2. Chứng minh rằng $\sqrt{2009^2+2009^2\times 2010^2+2010^2}$ là một số nguyên dương.

Lời giải.

Đặt $a=2009$, ta có

$$\begin{aligned}&2009^2+2009^2\times 2010^2+2010^2=a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2\\ =&a^4+2a^3+3a^2+2a+1=a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a=(a^2+a+1)^2.\end{aligned}$$

Do đó $\sqrt{2009^2+2009^2\times 2010^2+2010^2}=\sqrt{(a^2+a+1)^2}=a^2+a+1$ là một số nguyên dương.

Câu 3. Giả sử bốn số thực a,b,c,d đôi một khác nhau và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

i) Phương trình $x^2-2cx-5d=0$ có hai nghiệm là a và b.

ii) Phương trình $x^2-2ax-5b=0$ có hai nghiệm là c và d.

Chứng minh rằng

a) $a-c=c-b=d-a$.

b) $a+b+c+d=30$.

Lời giải.

a) Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases}a+b=2c & (1)\\ ab=-5d & (2)\end{cases}$ và $\begin{cases}c+d=2a & (3)\\ cd=-5b & (4).\end{cases}$

Từ (1) và (3) ta suy ra $c-b=a-c=d-a$.

b) Đặt $c-b=a-c=d-a=m$, suy ra $\begin{cases}c=a-m\\ b=c-m=a-2m\\ d=a+m.\end{cases}$

Từ đó ta có $a+b+c+d=4a-2m$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Từ (2) suy ra $a(a-2m)=-5(a+m) \Leftrightarrow a^2-2am=-5a-5m$ (5).
Từ (4) suy ra $(a-m)(a+m)=-5(a-2m) \Leftrightarrow a^2-m^2=-5a+10m$ (6).
Từ (5) và (6) suy ra $m^2-2am=-15m$. Theo giả thiết $a \neq c$ nên $m \neq 0$, suy ra $m-2a=-15$. Từ đó ta có $a+b+c+d=30$.

Câu 4. Giả sử m và n là những số nguyên dương với $n>1$. Đặt $S=m^2n^2-4m+4n$. Chứng minh rằng

a) Nếu $m>n$ thì $(mn^2-2)^2<n^2S<m^2n^4$.

b) Nếu S là số chính phương thì $m=n$.

Lời giải.

a) $(mn^2-2)^2<n^2S \Leftrightarrow m^2n^4-4mn^2+4<m^2n^4-4mn^2+4n^3 \Leftrightarrow n^3>1 \Leftrightarrow n>1$ (đúng theo giả thiết).
$n^2S<m^2n^4 \Leftrightarrow m^2n^4-4mn^2+4n^3<m^2n^4 \Leftrightarrow m>n$ (đúng theo giả thiết).

b) Giả sử ngược lại $m \neq n$, xét hai trường hợp
TH1: $m>n$, theo ý (1) và do S chính phương nên suy ra
$n^2S=(mn^2-1)^2 \Rightarrow m^2n^4-4mn^2+4n^3=m^2n^4-2mn^2+1 \Rightarrow 4n^3=2mn^2+1$ (**Sai** vì vế trái là số chẵn và vế phải là số lẻ với m,n nguyên dương).
TH2: $m<n$, khi đó

- Nếu $m \geq 2$ thì $2mn+1 \geq 4n+1>4n$, suy ra

$$(mn)^2<(mn)^2-4m+4n<(mn)^2+4n<(mn)^2+2mn+1=(mn+1)^2$$

suy ra $(mn)^2<S<(mn+1)^2$ (mâu thuẫn với S là số chính phương).

- Nếu $m=1$ thì $S=n^2+4n-4$ và $n \geq 2$.
Với $n>2$ thì $n^2+2n+1<n^2+2n+2n-4<n^2+4n+4$ nên $(n+1)^2<S<(n+2)^2$ (mâu thuẫn với S là số chính phương).
Với $n=2$ thì $S=8$ không phải số chính phương.

Vậy nếu S là số chính phương thì $m=n$.

Câu 5. Cho tam giác ABC với $AB>AC, AB>BC$. Trên cạnh AB lấy các điểm M và N sao cho $BC=BM$ và $AC=AN$.

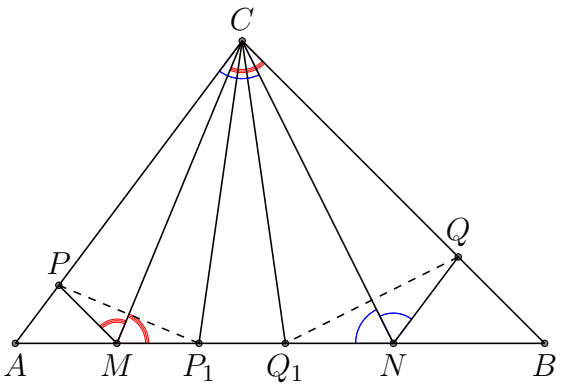
a) Chứng minh điểm N nằm trong đoạn thẳng BM.

b) Qua M và N kẻ MP song song với BC và NQ song song với CA ($P \in CA, Q \in CB$). Chứng minh rằng $CP=CQ$.

c) Cho $\widehat{ACB}=90^\circ, \widehat{CAB}=30^\circ$ và $AB=a$. Hãy tính diện tích của tam giác MCN theo a.

Lời giải.

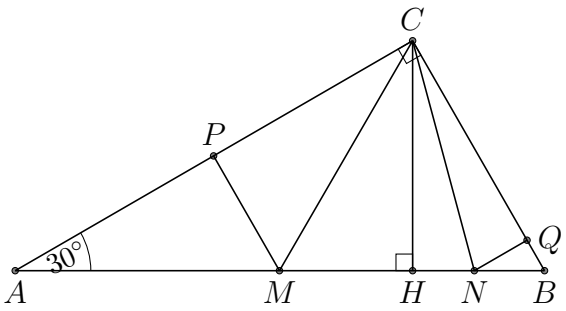
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Từ $CA+CB>AB$ suy ra $AN+BM>AN+BN \Leftrightarrow BM>BN$. Vậy N nằm giữa B và M.

b) Theo giả thiết, $\triangle CBM$ cân ở B nên $\widehat{BCM}=\widehat{BMC}$.
$MP \parallel BC$ nên suy ra $\widehat{BCM}=\widehat{PMC}$ (sole trong). Suy ra $\widehat{BMC}=\widehat{PMC}$. Vậy MC là phân giác $\widehat{BMP}$. Gọi P_1 là điểm đối xứng của P qua MC thì $P_1 \in AB$.
Chứng minh tương tự ta có NC là phân giác $\widehat{ANQ}$. Gọi Q_1 là điểm đối xứng của Q qua NC thì $Q_1 \in AB$.
Ta có $\begin{cases}\widehat{CPM}=\widehat{CP_1M} & (P,P_1 \text{ đối xứng qua } MC)\\ \widehat{CQN}=\widehat{CQ_1N} & (Q,Q_1 \text{ đối xứng qua } NC)\\ \widehat{CPM}=\widehat{CQN} & (\text{cùng bù với } \widehat{ACB})\end{cases} \Rightarrow \widehat{CP_1M}=\widehat{CQ_1N}$.
Suy ra $\widehat{CP_1Q_1}=\widehat{CQ_1P_1}$ nên $\triangle CP_1Q_1$ cân tại C nên $CP_1=CQ_1$.
Mà $CP=CP_1$ và $CQ=CQ_1$ nên suy ra $CP=CQ$.

c)
Ta có $CB=BM=\dfrac{a}{2}, CA=AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow MN=BM-BN=\dfrac{a}{2}-\left(a-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)=\dfrac{(\sqrt{3}-1)a}{2}$.
Kẻ $CH \perp AB$ tại H.
$CH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
$S_{MCN}=\dfrac{CH\cdot MN}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{16}a^2$.



Câu 6. Trên một bảng đen ta viết ba số $\sqrt{2}, 2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện một trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xóa hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a và b, rồi viết vào hai vị trí vừa xóa hai số mới là $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$, đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không thể có đồng thời ba số $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lời giải.

Do $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2+b^2$ nên tổng bình phương ba số không thay đổi sai mỗi lần chơi.

Tổng bình phương ba số ban đầu là $\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{13}{2}$.

Tổng bình phương ba số cần biến đổi ra là $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{41}{8}+2\sqrt{2}$.

Như thế ta không thể nào có được đồng thời ba số $\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\sqrt{2};1+\sqrt{2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 75

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VĨNH LONG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Cho biểu thức $K=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2x-10}{x+2\sqrt{x}-3}$. Rút gọn biểu thức K và tìm các giá trị của x để $K>0$.

b) Rút gọn giá trị biểu thức $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}}-\sqrt{7-\sqrt{3}}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x\geq 0$ và $x\neq 1$.
Ta có: $K=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2x-10)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$
$=\dfrac{x-1+x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6-2x+10}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$
$=\dfrac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.
Với $x\geq 0$ và $x\neq 1$ ta có: $K>0\Leftrightarrow \sqrt{x}-1>0\Leftrightarrow x>1$.

b) Ta có: $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}}=\sqrt{\sqrt{7-\sqrt{3}}^2+2\sqrt{\left(7-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}+\sqrt{\sqrt{3}-1}^2}$
$=\sqrt{\left(\sqrt{7-\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^2}$
$=\left|\sqrt{7-\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}\right|$
$=\sqrt{7-\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}$. Vậy: $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}}-\sqrt{7-\sqrt{3}}=\sqrt{7-\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{7-\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{3}-1}$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2-2x+3-m=0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Giả sử x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=-x_1^2x_2^2-3\left(x_1^2+x_2^2\right)+4.$$

Lời giải.

a) Vì $a=1\neq 0$ Ta có: $\Delta=(-2)^2-4.1.(3-m)=m-2$
Để phương trình có nghiệm khi $\Delta\geq 0\Leftrightarrow m\geq 2$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1+x_2=2; x_1.x_2=3-m$.
Khi đó: $A=-x_1^2x_2^2-3\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)+4=1-m^2$.
Do $m\geq 2\Rightarrow m^2\geq 4\Rightarrow -m^2\leq -4\Leftrightarrow 1-m^2\leq -3$.
Suy ra $A\leq -3$. Giá trị lớn nhất của A là -3 khi $m=2$.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$

b) Giải phương trình $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$.

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$
Điều kiện $S^2\geq 4P$.
Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} S+2P=2 \\ S\left(S^2-3P\right)=8 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{2-S}{2} \\ S\left(S^2-\dfrac{6-3S}{2}\right)=8 \end{cases}$
$\Rightarrow 2S^3+3S^2-6S-16=0\Leftrightarrow (S-2)\left(2S^2+7S+8\right)=0\Leftrightarrow S=2\Rightarrow P=0$.
Suy ra x,y là hai nghiệm của phương trình:$X^2-2X=0\Leftrightarrow X=0, X=2$.
Kết luận:$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$. hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

b) Điều kiện: $x\geq -2$.
Ta có: $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$
$\Leftrightarrow 2(x^2-3x+2)=3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}$
$\Leftrightarrow -2(x+2)+2(x^2-2x+4)-3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}=0$. (1)
Vì $x^2-2x+4>0$ nên chia hai vế phương trình trình (1) cho x^2-2x+4 ta được
$-2\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}\right)-3\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}+2=0$
Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}\geq 0$ ta có $-2t^2-3t+2=0$.
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ do $t\geq 0\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$
Với $t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-2x+4=4(x+2)$
$\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13}\,(n). \\ x=3-\sqrt{13}\,(n). \end{array}\right.$

Câu 4.

a) Tìm tất cả số nguyên x sao cho $2x^2+x-2$ chia hết cho x^2+1.

b) Tìm $x,y\in\mathbb{Z}$ thoả $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

a) Ta có: $\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+1}=2+\dfrac{x-4}{x^2+1}$
Xét $x=4\Rightarrow 2x^2+x-2$ chia hết cho x^2+1
Xét $x\neq 4$ để $(x-4)\vdots(x^2+1)\Rightarrow |x-4|\geq x^2+1$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4\geq x^2+1 \\ x-4\leq -x^2-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+5\leq 0\,(1) \\ x^2+x-3\leq 0\,(2) \end{array}\right.$
Ta nhận thấy (1) vô nghiệm còn (2) kết hợp với điều kiện x là số nguyên suy ra $x\in\{-2,-1,0,1\}$
Thử lại ta nhận giá trị $x=0$.
Vậy $x\in\{0;4\}$ thì $2x^2+x-6$ chia hết cho x^2+1

b) Điều kiện: $x,y\geq 0$
Ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21}\Rightarrow\sqrt{y}=\sqrt{21}-\sqrt{x}\Rightarrow y=21+x-2.\sqrt{21.x}\Rightarrow\sqrt{21.x}\in\mathbb{N}$
Vì $21=3.7$; 3 và 7 là các số nguyên tố nên $x=3.7.a^2=21.a^2$ $(a\in\mathbb{N})$
Lập luận tương tự ta có $y=21.b^2$. Thay vào $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21}$ ta được $a+b=1$
Kết luận phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(0;21)$ hoặc $(21;0)$

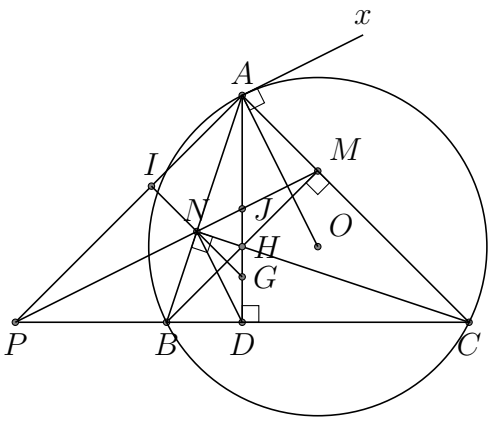
Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, các đường cao AD,BM,CN cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $AM.AC=AN.AB$.

b) Chứng minh rằng $OA\perp MN$.

c) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC. Đường thẳng đi qua N song song với AC cắt AP,AD lần lượt tại I,G. Chứng minh rằng $NI=NG$.

Lời giải.



a) Ta có: $\Delta ABM\sim\Delta ACN$ (góc-góc) $\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AM}{AN}.\Rightarrow AM.AC=AN.AB$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $BNMC$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh M, N cùng nhìn BC dưới một góc vuông). Suy ra $\widehat{ABC} + \widehat{NMC} = 180^0$ mà $\widehat{NMA} + \widehat{NMC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ABC}$
Dựng tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) tại A, ta có $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$.
Do đó $\widehat{xAC} = \widehat{AMN}$ (hai góc ở vị trí so le trong) nên $Ax \parallel MN$.
Ta lại có $OA \perp Ax$. Do đó $OA \perp MN$.

c) Ta có: $\widehat{ADM} = \widehat{ABM} = \widehat{NDH} \Rightarrow DJ$ là tia phân giác $\widehat{MDN}$.
Mà $AD \perp BC$ nên có DB là đường phân giác ngoài của ΔDMN.
Xét ΔDMN có $\dfrac{PN}{PM} = \dfrac{JN}{JM}$ (1).
Áp dụng hệ quả Talet vào các tam giác ΔJAM có $NG \parallel AM \Rightarrow \dfrac{JN}{JM} = \dfrac{NG}{AM}$ (2).
Mặt khác ΔPAM có $NI \parallel AM \Rightarrow \dfrac{PN}{PM} = \dfrac{JN}{AM}$(3).
Từ (1); (2); (3) suy ra $\dfrac{NI}{AM} = \dfrac{NG}{AM} \Rightarrow NI = NG$.

Câu 6.

a) Với a, b là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{\mathrm{a+b}}.$$

b) Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $x + y + z = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq 1.$$

Lời giải.

a) Với a, b dương nên ta có: $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \dfrac{(a+b)^2}{(a+b)ab} \geq \dfrac{4ab}{(a+b)ab} \Rightarrow \dfrac{a+b}{ab} \geq \dfrac{4}{a+b}$
Dấu " = " xảy ra khi $a = b$

b) **Cách 1**:
Áp dụng bất đẳng thức trên ta có : $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{xy+xz} \Rightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{x(y+z)}$.
Mà $x + y + z = 4$ nên $y + z = 4 - x > 0$.
suy ra $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{x(4-x)} \Rightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{-x^2+4x-4+4}$.
$\Rightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{-(x-2)^2+4}$ (1).
Vì $y + z = 4 - x$ nên $x(4-x) > 0$. Suy ra $4 \geq -(x-2)^2 + 4 > 0$.
Do đó $\dfrac{4}{-(x-2)^2+4} \geq 1$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq 1$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ xy=xz \\ x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=z=1 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện $x,y,z>0$).

Cách 2:

Ta có: $x(4-x) \le \left(\dfrac{x+4-x}{2}\right)^2 \Rightarrow x(4-x) \le 4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x\,(4-x)} \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{4}{x\,(4-x)} \ge 1.$

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ xy=xz \\ x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=z=1 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện $x,y,z>0$).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 76

ĐỀ THI VÀO 10, TRƯỜNG THPT NĂNG KHIẾU, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Biết a, b là các số dương $a \neq b$ và

$$\left(\frac{(a+2b)^2-(2a+b)^2}{a+b}\right):\left(\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{a-b}-3ab\right)=3$$

Tính $S=\dfrac{1+2ab}{a^2+b^2}$

Lời giải.

$$\left(\frac{(a+2b)^2-(2a+b)^2}{a+b}\right):\left(\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{a-b}-3ab\right)$$

$$=\left(\frac{(3a+3b)(b-a)}{a+b}\right):\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}-3ab\right)$$

$$=\left(3(b-a)\right):\left(\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a-b}\right)$$

$$=\left(3(b-a)\right):\frac{(a-b)^3}{a-b}$$

$$=\frac{3}{b-a}$$

Từ giả thiết ta suy ra được $b-a=1\Rightarrow b=a+1$

Thay vào S ta được:

$$S=\frac{1+2a(a+1)}{a^2+(a+1)^2}=\frac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1}=1$$

Câu 2.

a) Giải phương trình: $(x^2-6x+5)\left(\sqrt{x-2}-x+4\right)=0$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2y}-3\right)=0\\ x^2-6xy-y^2=6\end{cases}$$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định $x\geq 2$

- $x^2-6x+5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\text{ (loại)}\\ x=5\text{ (nhận)}\end{array}\right.$

- $\sqrt{x-2}-x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x-2=x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$

  Kết luận, tập nghiệm của phương trình là $S=\{5;6\}$

b) Giải hệ phương trình:

Điều kiện xác định: $x \geq 0$ và $y \geq -\dfrac{x}{2}$

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2y}-3\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2y=9 \end{cases}$$

TH_1: $x=0$

$\Rightarrow -y^2=6$ (loại)

TH_2: $x+2y=9 \Rightarrow x=9-2y$

$\Rightarrow (9-2y)^2-6(9-2y)y-y^2=6$

$\Rightarrow 15y^2-90y+75=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=5 \Rightarrow x=-1 \text{ (loại)} \\ y=1 \Rightarrow x=7 \text{(nhận)} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là: $(x;y)=(7;1)$

Câu 3. Cho phương trình $(x+m)^2-5(m+x)+6=0$ (1).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi số thực m. Tính $S=(x_1+m)^2+(x_2+m)^2+5(x_1+x_2+2m)$.

b) Biết $x_1<x_2$. Tìm m sao cho $x_2<1$ và $x_1^2+2x_2=2(m-1)$

Lời giải.

a) Đặt $t=x+m$ (1) trở thành:

$$t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \Rightarrow x=3-m \\ t=2 \Rightarrow x=2-m \end{cases}$$

Vì $3-m \neq 2-m$ với mọi m nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó, $S=t_1^2+t_2^2+5(t_1+t_2)=2^2+3^2+5(2+3)=38$

b) $x_1<x_2 \Rightarrow x_1=2-m, x_2=3-m$

$x_2<1 \Rightarrow 3-m<1 \Rightarrow m>2$

$$x_1^2+2x_2=2(m-1) \Leftrightarrow (3-m)^2+2(2-m)=2m-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=6 \end{cases}$$

Vậy $m=6$

Câu 4.

a) Nam kể với Bình rằng ông của Nam có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ được chia thành bốn phần: hai phần (gồm các hình vuông $AMIQ$ và $INCP$ với M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA) để trồng rau sạch, các phần còn lại để trồng hoa. Tổng diện tích

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

phần để trồng rau sạch là $1200m^2$ và tổng diện tích phần để trồng hoa là $1300m^2$. Bình nói:"Chắc chắn bạn bị nhầm rồi!" . Nam: "Bạn nhanh thật. Mình đã nói nhầm phần diện tích. Chính xác là phần trồng rau sạch có diện tích $1300m^2$ và phần trồng hoa có diện tích $1200m^2$. Hãy tính cạnh hình vuông $AMIQ$ (biết $AM < MB$) và giải thích tại sao Bình lại biết Nam bị nhầm.

b) Lớp 9T có 30 bạn, mỗi bạn dự định mỗi tháng đóng góp 70000 đồng và sau 3 tháng sẽ đủ tiền mua tặng mỗi em ở "Mái ấm tình thương X" ba gói quà (giá tiền mỗi gói quà đều như nhau). Khi các bạn đủ số tiền dự trù thì "Mái ấm tình thương X" đã nhận chăm sóc thêm 9 em gái và giá tiền của mỗi gói quà lại tăng thêm 5% nên chỉ có thể tặng mỗi em hai gói quà. Hỏi "Mái ấm tình thương X" có bao nhiêu em được nhận quà?

Lời giải.

a) Đặt $AM = x$ (m), $CP = y$ (m).
Từ giả thiết ta được $x^2 + y^2 = 1300$ và $2xy = 1200$.
Áp dụng định lý Vi-ét đảo ta được $\left[\begin{array}{l} x = 20, y = 30 \\ x = 30, y = 20 \end{array}\right.$
Vì $MA < MB$ nên $MA = 20m$,

b) Gọi x là số thành viên ban đầu của "Mái ấm tình thương X".
Tổng số tiền lớp 9T dự định đóng góp là: $30.3.70000 = 6300000$(đồng)
Từ giả thiết ta có phương trình: $\dfrac{6300000}{3x}(1 + 0,05) = \dfrac{6300000}{2(x + 9)} \Leftrightarrow x = 21$
Vậy số em của "Mái ấm tình thương X" được nhận quà là: $21 + 9 = 30$ em.

Câu 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) tâm O, bán kính R, $\widehat{BAC} = 120°$, $\widehat{ABC} = 45°$, H là trực tâm. AH, BH, CH lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P

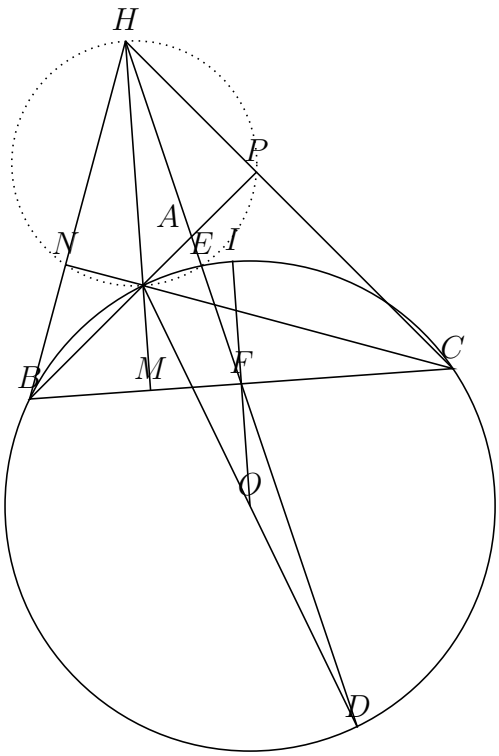
a) Tính AC theo R. Tính số đo góc $\widehat{HPN}$ và tỉ số $\dfrac{MP}{MN}$.

b) Dựng đường kính AD; HD cắt (T) tại E $(E \neq D)$ và cắt BC tại F. Chứng minh các điểm A, H, N, P, E cùng thuộc một đường tròn và F là trung điểm HD.

c) Chứng minh $AD \perp NP$. Tia OF cắt (T) tại I, chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và AI đi qua trung điểm MP.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 90^0$, nên ΔAOC vuông cân tại O.
Do đó: $AC = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2}$.
Ta có: $\widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 15^0$
Tứ giác $BCNP$ nội tiếp đường tròn đường kính BC, suy ra:
$\widehat{HPN} = 90^0 - \widehat{PNB} = 90^0 - \widehat{ACB} = 90^0 - 15^0 = 75^0$
Ta có: $\widehat{NPA} = \widehat{ACB} = \widehat{APM}$, nên $\widehat{NPM} = 2\widehat{ACB} = 30^0$.
Tương tự, $\widehat{MNP} = 2\widehat{CBA} = 90^0$.
Do đó: $\dfrac{MN}{MP} = sin\widehat{NPM} = sin30^0 = \dfrac{1}{2}$.

b) Ta có AD là đường kính nên $\widehat{AED} = 90^0$
Do đó các điểm A, N, H, P, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH.
Mặt khác $AC \perp BD$ và $AC \perp CD$ nên $BH \parallel CD$.
Tương tự, $CH \parallel BD$, nên $BHCD$ là hình bình hành.
Suy ra F là trung điểm HD.

c) Ta có $\widehat{CNP} = \widehat{CBP} = 45^0 = \widehat{NCO}$, nên $NP \parallel CO$.
Mà $CO \perp AD$, nên $NP \perp AD$.
Từ câu b) suy ra F là trung điểm cạnh BC, nên OF là trung trực của BC.
Mà I thuộc OF, suy ra $\widehat{BIO} = \dfrac{1}{2}\widehat{BIC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^0$.
Do đó tam giác BIO đều, suy ra $IB = IO = R$. Tương tự $IC = R$.
Hơn nữa, ta được F là trung điểm IO, do đó $OHID$ là hình bình hành.
Suy ra $IH = OD = R$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Vậy $IH = IB = IC$, nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.
Ta có ΔABM vuông cân tại M, nên $MA = MB$, mà $OA = OB$, suy ra $OM \perp AB$.
Do đó $OM \parallel HP$.
Mà $MH \parallel OP$, nên $MHPO$ là hình bình hành, suy ra $MH = OP$.
Do $AH = OI$, nên $AM = IP$, suy ra $AMIP$ là hình bình hành.
Do đó AI đi qua trung điểm của MP.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 77

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN VĨNH PHÚC VÒNG 2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m^2-3m+1=0$, trong đó thì m là tham số, x là ẩn số.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.

b) Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1;x_2$. Chứng minh rằng $|x_1+x_2+x_1x_2|\le\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

a) Xét phương trình $x^2-2(m-1)x+2m^2-3m+1=0(1)$
$\Delta'=(m-1)^2-(2m^2-3m+1)=-m^2+m$
Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'\ge0\Leftrightarrow-m^2+m\ge0\Leftrightarrow0\le m\le1$.

b) Với $0\le m\le1$; Theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\x_1x_2=2m^2-3m+1\end{cases}$.
Khi đó $|x_1+x_2+x_1.x_2|=|2m-2+2m^2-3m+1|=|2m^2-m-1|=|2(m-\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{9}{8}|$.
Với $0\le m\le1$ thì $0\le2(m-\dfrac{1}{4})^2\le\dfrac{9}{16}$
$\Rightarrow\dfrac{-9}{8}\le2(m-\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{9}{8}\le\dfrac{-9}{16}\Rightarrow|x_1+x_2+x_1x_2|\le\dfrac{9}{8}$ (đpcm).

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-xy=1\\4x^2+4xy-y^2=m\end{cases}$, trong đó m là tham số và x,y là các ẩn số.

a) Giải hệ phương trình với $m=7$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Lời giải.

a) Với $m=7$ thì hệ là $\begin{cases}2x^2-xy=1\\4x^2+4xy-y^2=7\end{cases}(I)$
Với $y=0$ thì hệ là $\begin{cases}2x^2=1\\4x^2=7\end{cases}$ (vô lí). Vậy $y\ne0$.
Khi đó $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-xy=1\\4x^2+4xy-y^2=7\left(2x^2-xy\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-xy=1\\-10x^2+11xy-y^2=0\end{cases}$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ (x-y)(10x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ 10x = y \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - x^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 10x \\ 2x^2 - 10x^2 = 1 (\text{vô nghiệm}) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right. .$$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.
Như câu a, dễ thấy rằng $x = 0$ thì phương trình thứ nhất vô lí.
Với $x \neq 0$ ta rút y theo x từ phương trình thứ nhất rồi thế vào phương trình thứ hai ta có

$$\text{c}4x^2 + 4x\frac{2x^2-1}{x} - (\frac{2x^2-1}{x})^2 = m \Leftrightarrow 8x^4 - mx^2 - 1 = 0.$$

Đặt $t = x^2$ ta có phương trình $8t^2 - mt - 1 = 0(2)$.
Yêu cầu bài toán trở thành phương (2) có nghiệm dương. Thấy rằng $a.c < 0$ nên điều này luôn đúng. Vậy với mọi số thực m thì hệ phương trình có nghiệm.

Câu 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ với AD, BC là hai cạnh đáy; $BC > AD, BC = BD = 1, AB = AC, CD < 1, \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180°$, gọi E là điểm đối xứng với D qua đường thẳng BC.

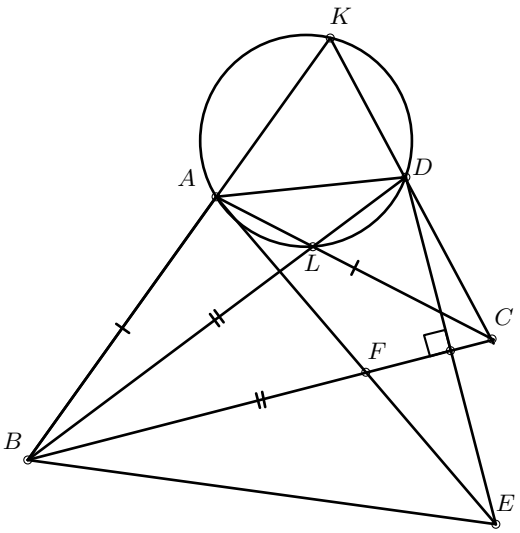
a) Chứng minh rằng 4 điểm A, C, E, B cùng nằm trên một đường tròn và $\widehat{BEC} = 2\widehat{AEC}$.

b) Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại điểm K, đường thẳng BC cắt đường thẳng AE tại điểm F. Chứng minh rằng $FA = FD$ và đường thẳng FD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK.

c) Tính độ dài cạnh CD.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Do E đối xứng với D qua BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$.
Có $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180°$, từ đó A, C, E, B cùng nằm trên một đường tròn.
Có tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, kết hợp với tứ giác $ACEB$ nội tiếp ta được $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}, \widehat{ACB} = \widehat{BEA}$.
Từ đó suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{BEA} \Rightarrow \widehat{BEC} = 2\widehat{AEC}$.

b) Có $DE \perp BC, AD \perp BC \Rightarrow \triangle ADE$ vuông tại D và $FD = FE = FA$.
Mặt khác $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180° \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDK} \Rightarrow$ tứ giác $AKDL$ nội tiếp.
Có $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ (do $AD \parallel BC$), tứ giác $ACDB$ nội tiếp suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{CBE}$, do BC là trung trực của BE nên $\widehat{DBC} = \widehat{CBE}$. Do đó $\widehat{ADB} = \widehat{CAE}$ suy ra FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tam giác ADK, kết hợp với $FA = FD \Rightarrow FD$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK.

c) Do EF là phân giác của $\widehat{BEC}$, suy ra $\dfrac{FC}{FB} = \dfrac{CE}{EB} = CE$(vì $BE = BD = 1$)
Ta có $\triangle AFC$ đồng dạng với $\triangle BFE$ nên ta có $\dfrac{AC}{AF} = \dfrac{BE}{BF}$
Áp dụng định lí Ptolemy có: $AE.BC = AB.CE + AC.BE \Rightarrow 2AF = AC(1 + CE)$
$\Rightarrow \dfrac{2}{1+CE} = \dfrac{AC}{AF} = \dfrac{BE}{BF} = \dfrac{BC}{BF} = \dfrac{BF + FC}{BF} = 1 + \dfrac{FC}{BF} = 1 + CE.$
$\Rightarrow (1 + CE)^2 = 2 \Rightarrow 1 + EC = \sqrt{2}$
$\Rightarrow CD = CE = \sqrt{2} - 1.$

Câu 4. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz(1)$. Mỗi bộ số $(x; y; z)$ trong đó x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn (1) được gọi là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương có dạng $(x; y; y)$ của phương trình (1).

b) Chứng minh rằng tồn tại nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ của phương trình (1) và thỏa mãn điều kiện $\min\{a;b;c\} > 2017$. Trong đó kí hiệu $\min\{a;b;c\}$ là số nhỏ nhất trong các số $a;b;c$.

Lời giải.

a) Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương là $(x;y;y)$. Khi đó ta có
$x^2+2y^2=3xy^2$ từ đó x chia hết cho y hay $x=ty$ từ đó hay vào phương trình ta có
$t^2+2=3ty$ từ đó 2 chia hết cho t tức là $t\in\{1;2\}$.
Với $t=1$ thì $y=1;x=1$
Với $t=2$ thì $y=1;x=2$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương có dạng $(x;y;y)$ đó là $(1;1;1);(2;1;1)$.

b) Dễ thấy (1;2;5) là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.
Gọi nghiệm đầu tiên đó có dạng là $(a;b;c)$ ta sẽ xây dựng nên nghiệm mà giá trị $\min\{a;b;c\}$ là cao hơn. Thật vậy ta tìm nghiệm ở dạng $(a+d;b;c)$ tức là d thỏa mãn:

$$(a+d)^2+b^2+c^2=3(a+d)bc\Rightarrow d=3bc-2a\in\mathbb{N}^*.$$

Ta chọn được d khi đó ta sẽ có nghiệm $(a';b;c)$ mà $\min\{a';b;c\} > \min\{a;b;c\}$. Lặp lại quá trình này không quá 2017 lần ta có sẽ tìm được một nghiệm của phương trình thỏa mãn $\min\{a;b;c\} > 2017$.

Câu 5. Cho số tự nhiên $n>1$ và $n+2$ số nguyên dương $a_1,a_2,a_3,...,a_{n+2}$ thỏa mãn điều kiện $1\le a_1\le a_2\le a_3\le ...\le a_{n+2}\le 3n$. Chứng minh rằng tồn tại hai số $a_i,a_j(1\le j<i\le n+2)$ sao cho $a<a_i-a_j<2n$.

Lời giải.

Với mỗi k đặt $b_i=s_i+k\Rightarrow a_i-a_j=b_i-b_j(2)$. Do đó ta có thể chọn k sao cho $b_{n+2}=3n$ và chuyển về xét dãy số $1\le b_1<b_2<...<b_{n+2}=3n$. Khi đó ta chỉ cần chứng minh sự tồn tại hai số $b_i,b_j(1\le j<i\le n+2)$ sao cho $n<b_i-b_j<2n$.
Xét 2 trường hợp:

a) Nếu tồn tại $j\in\{1,2,..,n+1\}$ sao cho $n<b_j<2n$ thì ta có $n<b_{n+2}-b_j<2n$.

b) Nếu với mọi $j\in\{1,2,..,n+1\}$, ta có $b_j\notin[n+1;2n-1]$ thì các số $b_1,b_2,...,b_{n+1}\in\{1,2,...,3n-1\}\backslash\{n+1,...,2n-1\}$. Các số thuộc tập $\{1,2,...,3n-1\}\backslash\{n+1,...,2n-1\}$ chia thành các cặp số: $(1;2n),(2;2n+1),...,(n;3n-1)$. Do đó trong $n+1$ số $b_1,b_2,...,b_{n+1}$ phải tồn tại 2 số b_i,b_j thuộc cùng một cặp, hay là $n<b_i-b_j=2n-1<2n$. Theo (2) từ cặp số b_i,b_j thỏa mãn $n<b_i-b_j=2n-1<2n$ thì tồn tại cặp số $a_i.a_j$ thỏa mãn $n<a_i-a_j=2n-1<2n$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 78

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VĨNH LONG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Cho biểu thức $K = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2x-10}{x+2\sqrt{x}-3}$. Rút gọn biểu thức K và tìm các giá trị của x để $K > 0$.

b) Rút gọn giá trị biểu thức $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}} - \sqrt{7-\sqrt{3}}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq 0$ và $x \neq 1$.
Ta có: $K = \dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2x-10)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$
$= \dfrac{x-1+x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6-2x+10}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$
$= \dfrac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.
Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ ta có: $K > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

b) Ta có: $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}} = \sqrt{\sqrt{7-\sqrt{3}}^2 + 2\sqrt{\left(7-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} + \sqrt{\sqrt{3}-1}^2}$
$= \sqrt{\left(\sqrt{7-\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^2}$
$= \left|\sqrt{7-\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1}\right|$
$= \sqrt{7-\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1}$. Vậy: $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}} - \sqrt{7-\sqrt{3}} = \sqrt{7-\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1} - \sqrt{7-\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{3}-1}$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2x + 3 - m = 0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = -{x_1}^2{x_2}^2 - 3\left({x_1}^2 + {x_2}^2\right) + 4.$$

Lời giải.

a) Vì $a = 1 \neq 0$ Ta có: $\Delta = (-2)^2 - 4.1.(3-m) = m - 2$
Để phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1+x_2=2; x_1.x_2=3-m$.
Khi đó: $A=-{x_1}^2{x_2}^2-3\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)+4=1-m^2$.
Do $m\geq 2\Rightarrow m^2\geq 4\Rightarrow -m^2\leq -4\Leftrightarrow 1-m^2\leq -3$.
Suy ra $A\leq -3$. Giá trị lớn nhất của A là -3 khi $m=2$.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$

b) Giải phương trình $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$.

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$
Điều kiện $S^2\geq 4P$.
Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} S+2P=2 \\ S\left(S^2-3P\right)=8 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{2-S}{2} \\ S\left(S^2-\dfrac{6-3S}{2}\right)=8 \end{cases}$
$\Rightarrow 2S^3+3S^2-6S-16=0\Leftrightarrow (S-2)\left(2S^2+7S+8\right)=0\Leftrightarrow S=2\Rightarrow P=0$.
Suy ra x,y là hai nghiệm của phương trình:$X^2-2X=0\Leftrightarrow X=0, X=2$.
Kết luận:$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$. hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

b) Điều kiện: $x\geq -2$.
Ta có: $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$
$\Leftrightarrow 2(x^2-3x+2)=3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}$
$\Leftrightarrow -2(x+2)+2(x^2-2x+4)-3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}=0$. (1)
Vì $x^2-2x+4>0$ nên chia hai vế phương trình trình (1) cho x^2-2x+4 ta được
$-2\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}\right)-3\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}+2=0$
Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}\geq 0$ ta có $-2t^2-3t+2=0$.
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ do $t\geq 0\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$
Với $t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-2x+4=4(x+2)$
$\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13}\,(n). \\ x=3-\sqrt{13}\,(n). \end{array}\right.$

Câu 4.

a) Tìm tất cả số nguyên x sao cho $2x^2+x-2$ chia hết cho x^2+1.

b) Tìm $x,y\in\mathbb{Z}$ thoả $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

a) Ta có: $\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+1}=2+\dfrac{x-4}{x^2+1}$
Xét $x=4\Rightarrow 2x^2+x-2$ chia hết cho x^2+1
Xét $x\neq 4$ để $(x-4)\vdots(x^2+1)\Rightarrow |x-4|\geq x^2+1$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4\geq x^2+1 \\ x-4\leq -x^2-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+5\leq 0\,(1) \\ x^2+x-3\leq 0\,(2) \end{array}\right.$
Ta nhận thấy (1) vô nghiệm còn (2) kết hợp với điều kiện x là số nguyên suy ra $x\in\{-2,-1,0,1\}$
Thử lại ta nhận giá trị $x=0$.
Vậy $x\in\{0;4\}$ thì $2x^2+x-6$ chia hết cho x^2+1

b) Điều kiện: $x,y\geq 0$
Ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21}\Rightarrow\sqrt{y}=\sqrt{21}-\sqrt{x}\Rightarrow y=21+x-2.\sqrt{21.x}\Rightarrow\sqrt{21.x}\in\mathbb{N}$
Vì $21=3.7$; 3 và 7 là các số nguyên tố nên $x=3.7.a^2=21.a^2$ $(a\in\mathbb{N})$
Lập luận tương tự ta có $y=21.b^2$. Thay vào $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21}$ ta được $a+b=1$
Kết luận phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(0;21)$ hoặc $(21;0)$

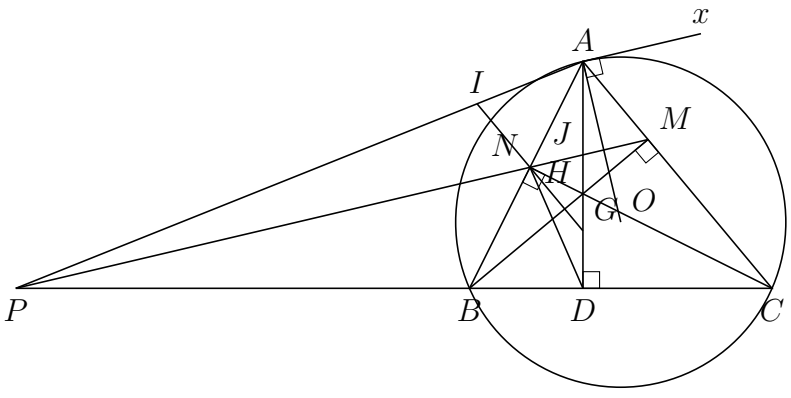
Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, các đường cao AD,BM,CN cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $AM.AC=AN.AB$.

b) Chứng minh rằng $OA\perp MN$.

c) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC. Đường thẳng đi qua N song song với AC cắt AP,AD lần lượt tại I,G. Chứng minh rằng $NI=NG$.

Lời giải.



Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Ta có: $\Delta ABM \sim \Delta ACN$ (góc-góc) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AM}{AN}. \Rightarrow AM.AC = AN.AB$

b) Ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $BNMC$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh M, N cùng nhìn BC dưới một góc vuông). Suy ra $\widehat{ABC} + \widehat{NMC} = 180^0$ mà $\widehat{NMA} + \widehat{NMC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ABC}$
Dựng tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) tại A, ta có $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$.
Do đó $\widehat{xAC} = \widehat{AMN}$ (hai góc ở vị trí so le trong) nên $Ax \parallel MN$.
Ta lại có $OA \perp Ax$. Do đó $OA \perp MN$.

c) Ta có: $\widehat{ADM} = \widehat{ABM} = \widehat{NDH} \Rightarrow DJ$ là tia phân giác $\widehat{MDN}$.
Mà $AD \perp BC$ nên có DB là đường phân giác ngoài của ΔDMN.
Xét ΔDMN có $\dfrac{PN}{PM} = \dfrac{JN}{JM}$ (1).
Áp dụng hệ quả Talet vào các tam giác ΔJAM có $NG \parallel AM \Rightarrow \dfrac{JN}{JM} = \dfrac{NG}{AM}$ (2).
Mặt khác ΔPAM có $NI \parallel AM \Rightarrow \dfrac{PN}{PM} = \dfrac{JN}{AM}$(3).
Từ (1); (2); (3) suy ra $\dfrac{NI}{AM} = \dfrac{NG}{AM} \Rightarrow NI = NG.$

Câu 6.

a) Với a, b là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{\mathrm{a+b}}.$$

b) Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $x + y + z = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq 1.$$

Lời giải.

a) Với a, b dương nên ta có: $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \dfrac{(a+b)^2}{(a+b)ab} \geq \dfrac{4ab}{(a+b)ab} \Rightarrow \dfrac{a+b}{ab} \geq \dfrac{4}{a+b}$
Dấu " = " xảy ra khi $a = b$

b) **Cách 1**:
Áp dụng bất đẳng thức trên ta có : $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{xy+xz} \Rightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{x(y+z)}.$
Mà $x + y + z = 4$ nên $y + z = 4 - x > 0$.
suy ra $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{x(4-x)} \Rightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{-x^2+4x-4+4}.$
$\Rightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq \dfrac{4}{-(x-2)^2+4}$ (1).
Vì $y + z = 4 - x$ nên $x(4-x) > 0$. Suy ra $4 \geq -(x-2)^2 + 4 > 0$.
Do đó $\dfrac{4}{-(x-2)^2+4} \geq 1$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq 1.$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ xy=xz \\ x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=z=1 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện $x,y,z>0$).

Cách 2:

Ta có: $x(4-x) \le \left(\dfrac{x+4-x}{2}\right)^2 \Rightarrow x(4-x) \le 4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x\,(4-x)} \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{4}{x\,(4-x)} \ge 1.$

Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ xy=xz \\ x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=z=1 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện $x,y,z>0$).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 79

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

1) Cho biểu thức $Q = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right)\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}\right)$ với $x > 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm các giá trị của x để $Q = -1$.

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 2017m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thoả mãn $|x_1| - |x_2| = 2018$.

Lời giải.

1)

a) Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có

$$Q = \frac{1}{\sqrt{x}+1}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

b) Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có

$$Q = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = -\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

2) Dễ thấy phương trình đã cho có $ac = 1 \cdot (-2017m^2 - 1) < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < x_2$. Từ đó ta có $x_1 = m - 1 - \sqrt{\Delta'}$ và $x_2 = m - 1 + \sqrt{\Delta'}$. Suy ra

$$|x_1| - |x_2| = 2018 \Leftrightarrow -m + 1 + \sqrt{\Delta'} - m + 1 - \sqrt{\Delta'} = 2018 \Leftrightarrow m = -1008.$$

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \sqrt{12-x}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện của phương trình là $7 \le x \le 12$. Với điều kiện đó, phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+1} = \sqrt{12-x} + \sqrt{x-7} \\
\Leftrightarrow &x+1 = 12-x+2\sqrt{12-x}\sqrt{x-7}+x-7 \\
\Leftrightarrow &x-4 = 2\sqrt{12-x}\sqrt{x-7} \\
\Leftrightarrow &x^2-8x+16 = -4x^2+76x-336 \\
\Leftrightarrow &5x^2-84x+352 = 0 \\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{44}{5} \\ x = 8 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Thử lại, ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{44}{5}; 8\right\}$.

b) Dễ thấy $x \neq 0$ và $y \neq 0$. Khi đó, hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 + \dfrac{x}{y} = \dfrac{10}{y^2} \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 6 = \dfrac{10}{y^2} \end{cases}$$

Trừ hai phương trình theo vế ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 6 = 0$ hay $\frac{x}{y} = 2$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y^2 = 1$ hay $y = \pm 1$. Từ đó $x = \pm 2$.
Vậy các nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(2;1)$ và $(-2;-1)$.

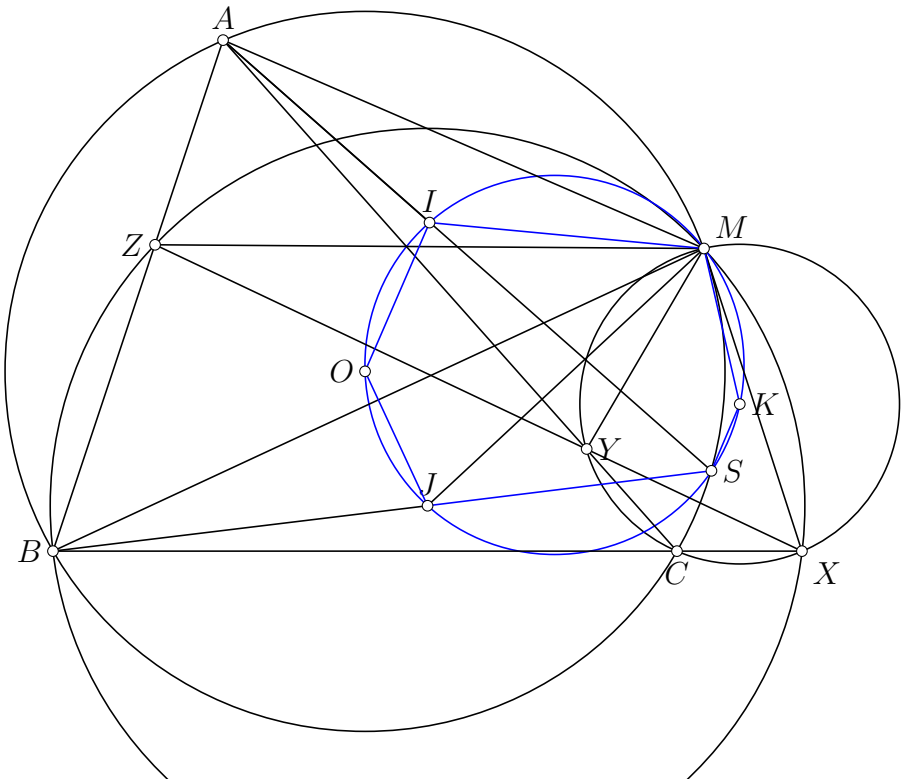
Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), Y trên cạnh CA, Z trên cạnh AB sao cho $\widehat{AZY} > 90^\circ$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ, S là giao điểm khác A của AI và đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $\widehat{SAC} = \widehat{AZY} - 90^\circ$.

b) Gọi X là giao điểm của YZ và BC, M là giao điểm khác Y của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ và CXY. Chứng minh rằng M nằm trên đường tròn (O).

c) Gọi J, K là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác BZX và CXY, T là giao điểm của AI và BJ. Chứng minh rằng sáu điểm T, O, M, I, J, K cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{AZY} = \dfrac{360^\circ - \widehat{AIY}}{2} = 180^\circ - \dfrac{\widehat{AIY}}{2} \Rightarrow \widehat{AZY} - 90^\circ = 90^\circ - \dfrac{\widehat{AIY}}{2} = \widehat{IAY} = \widehat{SAC}$.

b) Do $\widehat{AMC} = \widehat{AMY} + \widehat{YMC} = \widehat{BZY} + \widehat{YXC} = 180^\circ - \widehat{ABC}$ nên M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay đường tròn (O).

c) Ta có $\widehat{ZMX} = \widehat{ZMY} + \widehat{XMY} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{XBZ}$ hay M thuộc đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác BZX.
Ta chứng minh $T \equiv S$. Thật vậy, ta có $\widehat{SBX} = \widehat{SAC} = \widehat{AZX} - 90^\circ = 90^\circ - \widehat{BZX} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{BJX}}{2} = \widehat{JBX}$. Do tam giác BZX nhọn nên J nằm trong tam giác BZX, suy ra J nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A. Do tam giác $\widehat{AZY} > 90^\circ$ nên I nằm trong góc $\widehat{AZY}$ và ngoài tam giác AZY, suy ra tia AC nằm giữa tia AB và AS, do đó S nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A. Vậy J và S nằm cùng nửa mặt phẳng bờ BX, do đó B, J, S thẳng hàng. Suy ra $T \equiv S$.
Dễ thấy OI, OJ là đường trung trực của MA, MB tương ứng nên $\widehat{IOJ} = 180^\circ - \widehat{AMB} = \widehat{ISJ}$ hay tứ giác $IOJS$ nội tiếp một đường tròn $(\mathfrak{C})$.
Tương tự IK và JK lần lượt là đường trung trực của MY và MX nên $\widehat{IKJ} = \widehat{XMY} = \widehat{ACB} = \widehat{ASB} = \widehat{ISJ}$ hay K thuộc $(\mathfrak{C})$.
Dễ thấy $\widehat{JMB} = \widehat{JBM} = \widehat{IAM} = \widehat{IMA}$, từ đó $\widehat{IMJ} = \widehat{IMB} + \widehat{JMB} = \widehat{IMB} + \widehat{IMA} = \widehat{AMB} = \widehat{ISJ}$ hay M thuộc đường tròn $(\mathfrak{C})$.
Vậy cả sáu điểm T, O, M, I, J, K cùng thuộc đường tròn $(\mathfrak{C})$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 4. Cho các số dương a, b, c, chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\geq 1.$$

Lời giải.

Ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned}\frac{a^4}{b^3(c+2a}+\frac{c+2a}{9a}+\frac{1}{3}&\geq\frac{a}{b}\\ \frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{a+2b}{9b}+\frac{1}{3}&\geq\frac{b}{c}\\ \frac{c^4}{a^3(b+2c)}+\frac{b+2c}{9c}+\frac{1}{3}&\geq\frac{c}{a}.\end{aligned}$$

Lấy tổng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\geq\frac{8}{9}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{5}{3}\geq\frac{8}{9}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}-\frac{5}{3}=1.$$

Câu 5.

a) Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z sao cho $x^{16}+y^{16}+2017=z^{16}$.

b) A và B chơi một trò chơi, A chơi trước. Ban đầu có n viên sỏi. Trong mỗi lượt chơi của mình, người chơi sẽ lấy ra 4, 5, hoặc 7 viên sỏi. Quá trình đó tiếp tục như vậy. Ai đến lượt chơi của mình mà không thể lấy thêm sỏi là thua cuộc. Biết cả hai đều là người chơi thông minh, chứng minh rằng nếu n có dạng $11k+l$ với $k,l\in\mathbb{N}, 0\leq l\leq 3$ thì B thắng cuộc.

Lời giải.

a) Giả sử tồn tại các số tự nhiên x, y, z thoả mãn bài toán.

- Trường hợp 1: z là số chẵn.
  Khi đó x, y khác tính chẵn lẻ. Ta có thể coi x lẻ, y chẵn. Suy ra
  $$x^{16}+2017\equiv z^{16}-y^{16}\equiv 0\pmod{2^{16}}\Rightarrow x^{16}+2017\equiv 0\pmod{64}.$$
  Vì x lẻ nên $x^2\equiv 1\pmod 8$, do đó $x^{16}\equiv 1\pmod{64}$. Suy ra $x^{16}+2017\equiv 34\pmod{64}$. Ta gặp mâu thuẫn.
- Trường hợp 2: z là số lẻ.
  Khi đó x, y cùng tính chẵn lẻ. Nếu x, y cùng lẻ thì
  $$1\equiv z^{16}\equiv x^{16}+y^{16}+2017\equiv 2019\pmod{64}.$$
  hay $64\mid 2018$. Vô lí.
  Do đó x, y cùng chẵn. Suy ra
  $$1\equiv z^{16}\equiv x^{16}+y^{16}+2017\equiv 2017\pmod{64}.$$
  hay $64\mid 2016$. Vô lí.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Vậy không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thoả mãn bài toán.

b) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo k.
Nếu $k = 0$ thì hiển nhiên A thua.
Nếu $k = 1$ thì ta có chiến thuật chơi của B như sau. Trường hợp $0 \leq l \leq 1$, nếu A lấy 4, 5 hoặc 7 viên sỏi thì B tương ứng lấy 7, 5 và 4 viên sỏi. Trường hợp $2 \leq l \leq 3$, nếu A lấy 4, 5 hoặc 7 viên sỏi thì B tương ứng lấy ra 7, 7 hoặc 4 viên sỏi. Giả sử với mọi $m \leq k$, $m \in \mathbb{N}$ thì B luôn có chiến thuật chơi để thắng A. Ta chứng minh với $m = k + 1$ thì B cũng thắng. Thật vậy, khi đó số viên sỏi là $11(k + 1) + l = 11k + l + 11$. Do giả thiết quy nạp nên B có chiến thuật chơi sao cho với $11k + l$ thì B thắng. Do đó chiến thuật chơi đó sẽ làm cho số sỏi còn dư lại của $11k + l$ viên là p với $0 \leq p \leq 3$. Ta quay lại trường hợp $k = 1$. Do đó với $n = 11(k + 1) + l$ thì B thắng.
Vậy theo nguyên lí quy nạp B luôn thắng.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 80

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TRẦN HƯNG ĐẠO, BÌNH THUẬN, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+1=xy \\ x^2+y^2+1+2(x+y)=0 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} y^2+1=xy \\ x^2+y^2+1+2(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+1=xy \\ x^2+xy+2(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+1=xy \\ (x+y)(x+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+1=xy \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-y \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y \\ y^2+y+1=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-2;-1)$.

Câu 2. Cho n số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$ chia hết cho 6. Chứng minh $P=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3$ cũng chia hết cho 6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P-S &= (a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+\ldots+(a_n^3-a_n) \\ &= (a_1-1)a_1(a_1+1)+(a_2-1)a_2(a_2+1)+\ldots+(a_n-1)a_n(a_n+1). \end{aligned}$$

Mỗi số hạng có dạng $(a_k-1)a_k(a_k+1)$ đều chia hết cho 6 (là tích 3 số nguyên liên tiếp), do đó $P-S$ chia hết cho 6, mà S chia hết cho 6 nên P chia hết cho 6.

Câu 3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z+xyz=4$. Chứng minh

$$\left(1+xy+\frac{y}{z}\right)\left(1+yz+\frac{z}{x}\right)\left(1+zx+\frac{x}{y}\right) \geq 27.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải.

Ta có

$$\circ \begin{cases} 1+xy+\dfrac{y}{z}=\dfrac{y+z+xyz}{z}=\dfrac{4-x}{z} \\ 1+yz+\dfrac{z}{x}=\dfrac{z+x+xyz}{x}=\dfrac{4-y}{x} \\ 1+zx+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x+y+xyz}{y}=\dfrac{4-z}{y} \end{cases}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\Rightarrow \left(1+xy+\dfrac{y}{z}\right)\left(1+yz+\dfrac{z}{x}\right)\left(1+zx+\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{(4-x)(4-y)(4-z)}{xyz}$ (1).

$\circ\ 4=x+y+z+xyz\geq 4\sqrt[4]{x^2y^2z^2}=4\sqrt{xyz}\Leftrightarrow xyz\leq 1$ (2).

$\circ$ Từ (1) bất đẳng thức tương đương

$$\begin{aligned}&(4-x)(4-y)(4-z)\geq 27xyz\\&\Leftrightarrow 64-xyz-16(x+y+z)+4(xy+yz+zx)\geq 27xyz\\&\Leftrightarrow 16+(xy+yz+zx)\geq 7xyz+4(x+y+z)\\&\Leftrightarrow 16+(xy+yz+zx)\geq 3xyz+16\\&\Leftrightarrow xy+yz+zx\geq 3xyz(*)\end{aligned}$$

Mặt khác, theo (2) và bất đẳng thức AM−GM cho 3 số, ta có:

$$xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3xyz.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

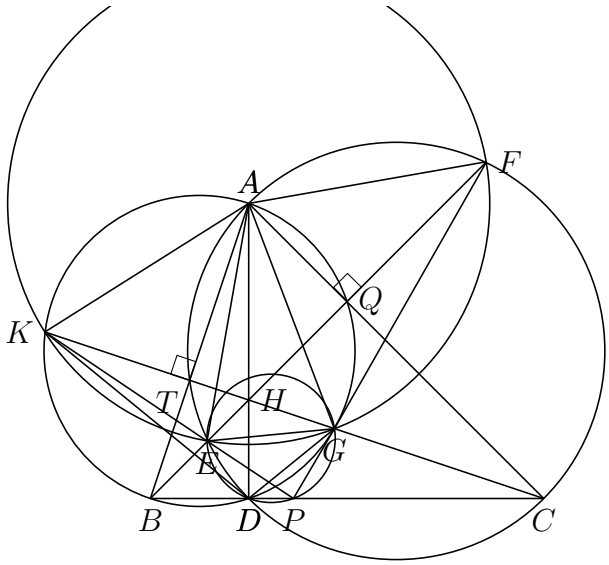
Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn ($AB<AC$) có AD là đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC. Tia BH cắt đường tròn đường kính AC tại E,F sao cho $BE<BF$, tia CH cắt đường tròn đường kính AB tại G,K sao cho $CG<CK$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EDG cắt BC tại điểm thứ hai là P.

a) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $KEGF$.

b) Chứng minh ba điểm P,E,K thẳng thàng.

c) Chứng mình bốn điểm K,D,P,F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



a) Gọi BH cắt đường tròn (AB) tại Q và CH cắt đường tròn (AC) tại T. Xét đường tròn (AC) ta có $AF=AE$, đường tròn (AB) ta có $AG=AK$ (tính chất đường kính dây cung). Mặt khác, $AK^2=AT.AB=AQ.AC=AF^2$ (hệ thức lượng tam giác vuông), nên suy ra $AF=AE=AG=AK$ hay A là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $KEGF$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Ta có $\widehat{PEG} = \widehat{PDG} = \widehat{BAG} = \dfrac{\widehat{KAG}}{2}$ (1) (do 2 tứ giác $EDPG$ và $ABDG$ nội tiếp).

Mặt khác $\widehat{KEG} = \widehat{KEA} + \widehat{AEG} = 180^\circ - \dfrac{\widehat{KAG}}{2}$ (2) (sử dụng tính chất của 2 tam giác cân AKE, AEG).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{KEG} + \widehat{GEP} = 180^\circ$ hay 3 điểm K, E, P thẳng hàng.

c) Ta có $\widehat{KEG} + \widehat{KAB} = \widehat{KEG} + \dfrac{\widehat{KAG}}{2} = 180^\circ$. Trong đường tròn tâm (A) ngoại tiếp tứ giác $AEGF$, $\widehat{KEG} + \widehat{KFG} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{KDB} = \widehat{KAB} = \widehat{KFG} = \widehat{KFP}$, hay tứ giác $KDPF$ nội tiếp.

Câu 5. Trong ngày quốc tế thiếu nhi 1/6 vừa qua, có 97 em nhỏ đến từ 3 trường của một huyện miền núi được nhận mỗi em một món quà. Biết rằng chỉ có 4 loại quà được phát và nếu trong 5 em nhỏ bất kỳ đến từ cùng một trường, nhận cùng một loại quà thì có 2 em cùng tuổi. Chứng minh rằng, luôn có 3 em nhỏ đến từ cùng một trường, cùng tuổi và nhận cùng một loại quà.

Lời giải.

Do có 97 học sinh đến từ 3 trường, nên luôn có ít nhất một trường có tối thiểu là $\left[\dfrac{97}{3}\right] + 1 = 33$ học sinh. Chia quà cho 33 học sinh thì ít nhất có một nhóm $\left[\dfrac{33}{4}\right] + 1 = 9$ học sinh được cùng loại quà.

∘ Giả sử, trong nhóm 9 học sinh này, không có 3 học sinh nào cùng tuổi. Khi đó, theo giả thiết, ta chọn 5 học sinh ra và lấy được hai học sinh (A, B) cùng tuổi, loại ra; ta chọn tiếp 5 học sinh và được hai học sinh (C, D) cùng tuổi, loại ra; ta được trong 5 học sinh còn lại có hai học sinh (E, F) cùng tuổi.

∘ Phân học sinh thành 2 cặp (A, C, E) và (B, D, F) và 3 học sinh còn lại đặt là (X, Y, Z), chú ý rằng, mỗi bộ 3 đều không có học sinh nào cùng tuổi nhau.

∘ Chọn 2 nhóm như sau: (A, C, E, X, Y) và (A, C, E, X, Z), khi đó, chọn được ra ít nhất 2 cặp cùng tuổi trong mỗi nhóm, dù cặp nào xảy ra cùng tuổi, ta đều ghép với các cặp ban đầu để được một bộ 3 cùng tuổi. Khi đó mâu thuẫn với điều giả sử.

Tóm lại, luôn có 3 em nhỏ đến từ cùng một trường, cùng tuổi và nhận cùng một loại quà.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 81

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ NỘI - CHUYÊN TIN, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Giải phương trình $\sqrt{5x-x^2}+2x^2-10x+6=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $0 \le x \le 5$. Phương trình đã cho tương đương:
$\sqrt{x(5-x)}+2x(x-5)+6=0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x(5-x}-2x(5-x)+6=0$
$\Leftrightarrow 2x(5-x)-\sqrt{x(5-x)}-6=0$
Đặt $t=\sqrt{x(5-x)} \ge 0$
Khi đó ta có phương trình:
$2t^2-t-6=0 \Leftrightarrow (t-2)(2t+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{3}{2}\,(\text{loại}) \end{array}\right.$
$t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x(5-x)}=2 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\,(\text{thỏa}) \\ x=4\,(\text{thỏa}) \end{array}\right.$.
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1;4\}$

b) Điều kiện: $x \ge 0, y \ge 0$
Ta có hệ: $\begin{cases} x+y+xy=3\ (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\ (2) \end{cases}$
$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=4 \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=4\ (3)$
Đặt $\begin{cases} x+y=a \\ \sqrt{xy}=b \end{cases}$. Từ $(1),(3)$ ta có hệ phương trình:
$\begin{cases} a+b^2=3 \\ a+2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b^2=3 \\ a=4-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-2b+1=0 \\ a=4-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \sqrt{xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}$
Khi đó x, y là hai nghiệm của phương trình: $t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=y=1$.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Câu 2.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=2$ và $3x^2+2y^2-z^2=13$.

b) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a+b+c$.

Lời giải.

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x^2+2y^2-z^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+y-2 \ (1) \\ 3x^2+2y^2-z^2=13 \ (2) \end{cases}$.

Thế (1) vào (2) ta được:

$3x^2+2y^2-(x+y-2)^2=13$

$\Leftrightarrow 2x^2+y^2-2xy+4x+4y-17=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x+2)^2=21-4y$

Vì x, y, z là số nguyên dương nên $(x-y)^2 \geq 0$ và $(x+2)^2 \geq (1+2)^2=9$

Suy ra $VT \geq 9 \Rightarrow 21-4y \geq 9 \Rightarrow 3 \geq y \geq 1$

Với $y=3$ ta có: $2x^2+9-6x+4x+12-17=0 \Leftrightarrow 2x^2-2x+4=0$ (vô nghiệm)

Với $y=2$ ta có: $2x^2+4-4x+4x+8-17=0 \Leftrightarrow 2x^2-5=0$ (loại)

Với $y=1$ ta có: $2x^2+1-2x+4x+4-17=0 \Leftrightarrow 2x^2+2x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$\Rightarrow z=1$

Vậy $x=2; y=1; z=1$ thỏa yêu cầu đề bài.

b) Đặt $t=a+b+c$

$\Rightarrow t^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=2c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow t \vdots 2$

Mặt khác: $a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=(t-a-b)^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=t^2+b^2+c^2-2ta-2tb+2ab$

$\Leftrightarrow 0=t^2-2ta-2tb+2ab$

$\Leftrightarrow ab=\dfrac{-t^2+2ta+2tb}{t}=t\left(\dfrac{-t+2a+2b}{2}\right)=(a+b+c)\left(\dfrac{-t+2a+2b}{2}\right)$

Vậy ab chia hết cho $a+b+c$.

Câu 3. Cho các số thực dương a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2}$$

Lời giải.

Ta áp dụng BĐT sau: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x=y$

Ta có: $\dfrac{1}{2a+b+c} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2a+b+c}\right)^2 \leq \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)^2 \leq \dfrac{2}{16}\left(\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(a+c)^2}\right)$

$\leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{4ab}+\dfrac{1}{4ac}\right) \leq \dfrac{1}{8.4.2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) \leq \dfrac{1}{64}\left(\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Tương tự, suy ra: $P \leq \dfrac{1}{64}\left(\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{4}{c^2}\right)=\dfrac{1}{64}.3.4=\dfrac{3}{16}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

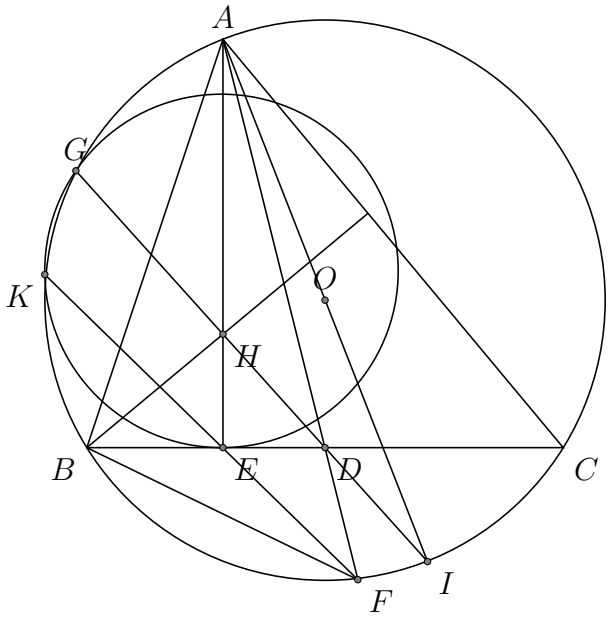
Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB<AC$), nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của cạnh BC, E là hình chiếu của A trên cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh $BC^2=4.DA.DF$

b) Tia DH cắt đường tròn (O) tại điểm G. Chứng minh bốn điểm A,G,E,D cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng FE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác GKE.

Lời giải.



a) Xét ΔADC $\Delta BDF(g.g) \Rightarrow \dfrac{AD}{BC}=\dfrac{DC}{DF}$

$\Rightarrow AD.DF=BD.DC=\dfrac{BC^2}{4}$

$\Rightarrow BC^2=4DA.DF$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Gọi I là điểm đối xứng với A qua $O \Rightarrow AI$ là đường kính của (O).
$\angle ABI = \angle ACI = 90^\circ$
$\Rightarrow IB // CH$ (cùng $\perp AB$) và $IC // BH$ (cùng $\perp AC$)
$\Rightarrow IBHC$ là hình bình hành $\Rightarrow HI$ đi qua trung điểm D của BC
$\Rightarrow G, H, D, I$ thẳng hàng $\Rightarrow \angle DGA = 90^\circ$
Ta có: $\angle DGA = \angle DEA = 90^\circ \Rightarrow AGED$ là tứ giác nội tiếp
$\Rightarrow A, G, E, D$ cùng nằm trên một đường tròn.

c) Vì $AGED$ là tứ giác nội tiếp nên
$\angle EGD = \angle EAD = 90^\circ - \angle EDA = 90^\circ - (\angle DEF + \angle DFE)$
$\Rightarrow \angle KEB = \angle DEF = 90^\circ - (\angle EGD + \angle DFE)$ (1)
Vì $AGKF$ là tứ giác nội tiếp nên
$\angle DFE = 180^\circ - \angle AGK = 90^\circ - \angle EGD - \angle EGK$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle KEB = 90^\circ - (90^\circ - \angle EGK) = \angle EGK$
$\Rightarrow \angle KEB = \angle EGK$
Gọi Et là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔGKE (Et và G nằm khác phía đối với EK)
$\Rightarrow \angle KEB = \angle KEt$
$\Rightarrow \angle KEt = \angle KEB \Rightarrow Et \equiv EB$
Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔGKE (đpcm).

Câu 5. Ta viết lên bảng 99 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, ..., 99$. Ta thực hiện các thao tác sau: Xóa ba số a, b, c bất kì trên bảng rồi lại viết lên bảng số $(abc + ab + bc + ca + a + b + c)$. Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Tìm số còn lại đó.

Lời giải.

Ta có $abc + ab + bc + ca + a + b + c = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1$
Tại mỗi thao tác thứ nhất ta chọn xóa 3 số a, b, c và thay bằng $(a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1$, ta thấy thao tác này không làm thay đổi tích $S = (a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_i + 1)$ với $a_1, a_2, ..., a_i$ là tất cả các số còn lại trên bảng.
Vì vậy số cuối cùng còn lại bằng: $(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1)...(99 + 1) - 1 = 100! - 1$

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 82

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC TIỀN GIANG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức: $\mathrm{P}=\sqrt{3-\sqrt{5-2\sqrt{3}}}-\sqrt{3+\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$.

b) Giải phương trình: $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+6}=y+1\\ x^2+y^2+xy=7\end{cases}$.

Lời giải.

a) $\mathrm{P}^2=6-2\sqrt{9-5+2\sqrt{3}}=6-2\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

Do $\mathrm{P}<0$ nên $\mathrm{P}=1-\sqrt{3}$.

b) Điều kiện: $-4\le x\le 1$ Đặt $u=\sqrt{1-x}$, $v=\sqrt{4+x}$ với $u\ge 0, v\ge 0$.

Ta được: $\begin{cases}u+v=3\\ u^2+v^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=3-u\\ u^2+(3-u)^2=5\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=1,\ v=2\\ u=2,\ v=1\end{array}\right.$. Tóm lại ta có: $x=0$ hoặc $x=-3$.

c) Điều kiện: $y\ge -1$

Hệ đã cho tương đương:

$\begin{cases}x^2+2x+6=y^2+2y+1\\ \dfrac{1}{4}\left[(x-y)^2+3(x+y)^2\right]=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2(x-y)+5=0\\ (x-y)^2+3(x+y)^2=28\end{cases}$

Đặt $u=x+y$, $v=x-y$, khi đó hệ trở thành:

$\begin{cases}uv+2v+5=0 \qquad (1)\\ 3u^2+v^2=28 \qquad (2)\end{cases}$

* Ta thấy $v=0$ không thỏa hệ.

* $v\ne 0$ ta được: $u=\dfrac{-2v-5}{v}$. Thay vào (1) ta được:

$3.\left(\dfrac{-2v-5}{v}\right)^2+v^2=28\Leftrightarrow v^4-16v^2+60v+75=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}v=-5 & \Rightarrow u=1\\ v=-1 & \Rightarrow u=3\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, ta được: $S = (1;\,2)\,;(-3;\,2)$.

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P) : $y = 2x^2$ và đường thẳng (d) : $y = ax + 2 - a$ (a là tham số). Tìm tất cả các giá trị $a \in \mathbb{Z}$ để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho $AB = \sqrt{5}$.

b) Cho phương trình $x^4 + 2\sqrt{6}mx^2 + 24 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 phân biệt thỏa mãn: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 144$.

c) Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa $a + b + c \leqslant 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2018}{ab + bc + ca}.$$

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P)
$2x^2 = ax + 2 - a \Leftrightarrow 2x^2 - ax + a - 2 = 0 \quad (*)$
(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (a-4)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 4$.
Với $a \neq 4$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{a-2}{2}$
Suy ra số giao điểm là: $A\,(1;2)\,; B\left(\dfrac{a-2}{2}; \dfrac{(a-2)^2}{2}\right)$.
Khi đó, $AB^2 = \left(\dfrac{a-2}{2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{(a-2)^2}{2} - 2\right)^2$
Thay $AB = \sqrt{5}$ ta có phương trình $a^4 - 8a^3 + 17a^2 - 8a - 4 = 0$
$(a-2)\,.\,(a^3 - 6a^2 + 5a + 2) = 0$
Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $a^3 - 6a^2 + 5a + 2 \neq 0$. Suy ra, $a = 2$.

b) Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$
Khi đó, phương trình trở thành: $t^2 + 2\sqrt{6}mt + 24 = 0 \qquad (1)$
Vì phương trình có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \mathrm{P} > 0 \Leftrightarrow m < -2. \\ \mathrm{S} > 0 \end{cases}$
Với t_1, t_2 là hai nghiệm của phương trình (1) thì :
$x_1 = -\sqrt{t_1},\ x_2 = \sqrt{t_1},\ x_3 = -\sqrt{t_2},\ x_4 = \sqrt{t_2}$
$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2\,(t_1^2 + t_2^2) = 2\left[(t_1 + t_2)^2 - 2t_1.t_2\right] = 144 \Rightarrow m^2 = 5 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$.
Vì $m < -2$ nên $m = -\sqrt{5}$.

c) Ta có, $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + bc + ca \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3} \leq 3 \Rightarrow \dfrac{2016}{ab + bc + ca} \geq 672$
Ta chứng minh: $(x + y + z)\,.\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 9, \forall x, y, z > 0 \qquad (*)$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có, $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{3\sqrt[3]{xyz}}$

Suy ra $(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Áp dụng kết quả $(*)$, ta có:

$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \geq 9$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 1.$

Suy ra $\mathrm{P}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2018}{ab+bc+ca} \geq 673.$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 673.

Câu 3. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2+18n+2020$ là số chính phương.

Lời giải.

Để $n^2+18n+2020$ là số chính phương khi $n^2+18n+2020=m^2$, $m \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m^2-(n^2+18n)=2020 \Leftrightarrow m^2-(n^2+18n+81)=1939$

$\Leftrightarrow (m-n-9)(m+n+9)=1939$ mà $1939=1939.1=277.7$

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} m+n+9=1939 \\ m-n-9=1 \end{cases}; \begin{cases} m+n+9=277 \\ m-n-9=7 \end{cases}.$

Giải ra tìm được $n=960$ hoặc $n=126$.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O và dây cung AB không đi qua O. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$. D thay đổi trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ (D khác A và B). MD cắt AB tại C. Chứng minh rằng:

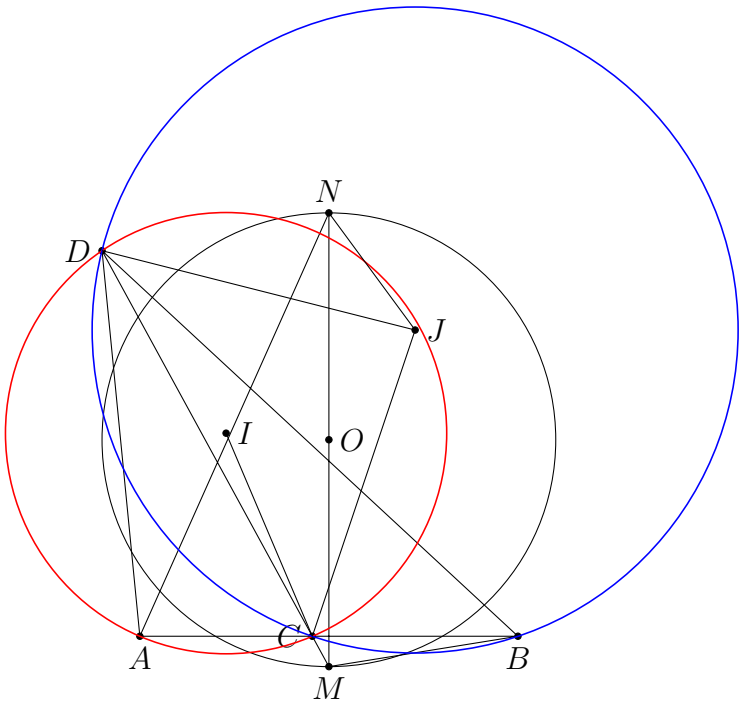
a) $MB.BD=MD.BC$.

b) MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

c) Tổng bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và ACD không đổi.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Xét $\triangle MBC$ và $\triangle MDB$ có:
$\widehat{DBM} = \widehat{MBC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)
$\widehat{BMC} = \widehat{BMD}$
Do vậy $\triangle MBC$và $\triangle MDB$ đồng dạng. Suy ra $\dfrac{MB}{BC} = \dfrac{MD}{BD} \Rightarrow MB.BD = MD.BC.$

b) Gọi (J) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDC$
$\Rightarrow \widehat{BJC} = 2\widehat{BDC} = 2\widehat{MBC}$ hay $\widehat{MBC} = \dfrac{\widehat{BJC}}{2}.$
ΔBCJ cân tại $J \Rightarrow \widehat{CBJ} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BJC}}{2}$
Suy ra $\widehat{MBC} + \widehat{CBJ} = \dfrac{\widehat{BJC}}{2} + \dfrac{180^\circ - \widehat{BJC}}{2} = 90^\circ \Rightarrow MB \perp BJ$
Suy ra MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

c) Kẻ đường kính MN của (O) $\Rightarrow NB \perp MB$.
Mà MB là tiếp tuyến của đường tròn (J), suy ra J thuộc NB.
Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$. Chứng minh tương tự I thuộc AN.
Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{ADB} = 2\widehat{BDM} = \widehat{BJC} \Rightarrow CJ \parallel IN$.
Chứng minh tương tự: $CI \parallel JN$.
Do đó tứ giác $CINJ$ là hình bình hành $\Rightarrow CI = NJ$.
Suy ra tổng bán kính của hai đường tròn (I) và (J) là: $IC + JB = BN$ (không đổi).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 83

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THPT, TPHCM, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho các số thực a, b, c sao cho $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=29$ và $abc=11$. Tính $a^5+b^5+c^5$.

b) Cho biểu thức $A=(m+n)^2+3m+n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là số chính phương thì n^3+1 chia hết cho m.

Lời giải.

a) Ta có $a+b+c=3$, $ab+bc+ca=-10$, $abc=11$. Do đó, a, b, c là ba nghệm của phương trình $x^3-3x^2-10x-11=0$. Tuy nhiên, phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm thực $x\approx 5,2$ nên không tồn tại a, b, c.

b) Ta có $(m+n)^2<(m+n)^2+3m+n<(m+n+2)^2$. Từ đó, nếu A là số chính phương thì $A=(m+n+1)^2$, suy ra $m=n+1$. Do đó, $m\mid n^3+1$

Câu 2.

a) Giải phương trình $2(x+2)\sqrt{3x-1}=3x^2-7x-3$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}-\dfrac{10}{x}=-1 \\ 20y^2-xy-y=1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với $\left(\sqrt{3x-1}+x+2\right)^2=4x^2$. Giải phương trình ta được $x=\dfrac{7+\sqrt{29}}{2}$.

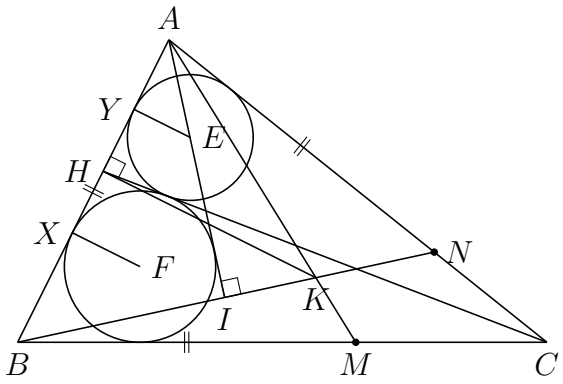
b) Ta có $20y^2-xy-y=1\Leftrightarrow 20y-x-1=\dfrac{1}{y}$. Thay vào phương trình $x+\dfrac{1}{y}-\dfrac{10}{x}=-1$ ta nhận được phương trình $xy=\dfrac{1}{2}$. Vậy hệ trở thành $\begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ 20y^2-2y-3=0 \end{cases}$. Giải hệ ta được nghiệm $\left(-2;-\dfrac{1}{4}\right)$, $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{3}{10}\right)$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AN = AB = BM$. Các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K. Gọi H là hình chiếu của K trên AB. Chứng minh rằng

a) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH.

b) Các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

Lời giải.



a) Tam giác ABN cân tại A nên tia phân giác AI của góc A vuông góc với BN. Tam giác ABK có KH và AI là hai đường cao nên đồng quy tại điểm P. Do đó, BP cũng vuông góc với AM mà $\triangle ABM$ cân tại B nên BP chính là phân giác góc B. Suy ra, P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và $P \in KH$.

b)

Câu 4. Cho x, y là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Lời giải.

Viết lại $P = \dfrac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \dfrac{(x+y)^2}{xy} - 2$.

Áp dụng AM-GM cho ba số $\dfrac{8\sqrt{xy}}{x+y}$, $\dfrac{8\sqrt{xy}}{x+y}$ và $\dfrac{(x+y)^2}{xy}$ ta được $P \geq 10$. Dấu "="xảy ra khi $x = y$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC}$ tù. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC lần lượt tại L, H, J.

a) Các tia BO, CO cắt LH lần lượt tại M, N. Chứng minh 4 điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với AJ, cắt AJ và đường trung trực của cạnh BC lần lượt tại D và F. Chứng minh 4 điểm B, D, F, C cùng thuộc một đường tròn.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lời giải.

a)

b)

c)

Câu 6. Trên một đường tròn có 9 điểm phân biệt, các điểm này được nối với nhau bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc màu đỏ. Biết rằng mỗi tam giác tạo bởi 3 trong 9 điểm chứa ít nhất một cạnh màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm sao cho 6 đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

Lời giải.

Trường hợp 1: Có một điểm nào đó, kí hiệu x_1 được nối với ít nhất 4 đỉnh x_2, x_3, x_4, x_5 các cạnh màu xanh. Lúc đó, 4 đỉnh x_2, x_3, x_4, x_5 phải được nối với nhau màu đỏ (vì giả thiết mỗi tam giác có ít nhất 1 cạnh màu đỏ).

Trường hợp 2: Mỗi điểm có không quá 3 điểm khác nối với nó bởi cạnh màu xanh. Lúc này, có ít nhất một điểm, kí hiệu x_1 chung cạnh màu xanh với nhiều nhất 2 điểm (vì nếu tất cả các điểm có chung 3 cạnh xanh với 3 điểm khác thì số cạnh là $9 \cdot 3 : 2$ không nguyên). Do đó, điểm x_1 được nối với ít nhất 6 điểm còn lại bằng màu đỏ. Rõ ràng, trong 6 điểm này, có ít nhất 3 điểm được nối với nhau cạnh màu đỏ, kết hợp với điểm x_1 ta suy ra điều phải chứng minh.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 84

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI NGUYÊN 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Không dùng máy tính cầm tay hãy rút gọn: $A=\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}A&=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}\\&=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}(3+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)}\\&=\frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)}=\frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}+1)}\\&=\frac{2\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}+2}=1.\end{aligned}$$

Câu 2. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x^2+y^2-xy+4y+1=0\\ y(7-x^2-y^2+2xy)=2(x^2+1)\end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases}x^2+y^2-xy+4y+1=0\\y(7-x^2-y^2+2xy)=2(x^2+1)\end{cases}\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=-y^2+xy-4y\\y(7-x^2-y^2+2xy)=2(-y^2+xy-4y)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=-y^2+xy-4y\\y[15-(x-y)^2-2(x-y)]=0.\end{cases}\quad(2)$$

Do $y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho nên từ (2), ta có:

$$\begin{cases}x^2+1=-y^2+xy-4y\\15-(x-y)^2-2(x-y)=0\end{cases}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y=-5 \\ x-y=3 \end{array}\right. \\ x^2+1=-y^2+xy-4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=-5 \\ x^2+1=-y^2+xy-4y \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=3 \\ x^2+1=-y^2+xy-4y. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ta có:

$$\begin{cases} x-y=-5 \\ x+1=-y^2+xy-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-5 \\ (y-5)^2+1=-y^2+(y-5)y-4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-5 \\ y^2-y+26=0. \end{cases}$$ (hệ vô nghiệm)

Ta có:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+1=-y^2+xy-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3 \\ (y+3)^2+1=-y^2+(y+3)y-4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3 \\ y^2+7y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(1;-2);(-2;-5)$.

Câu 3. Cho số tự nhiên $A=\underbrace{\overline{777...7}}_{\text{n chữ số 7}}-18+2n$ với $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Chứng minh rằng A chia hết cho 9.

Lời giải.

Với số tự nhiên $a\in\mathbb{N}^*$, ta đặt $S(a)$ là tổng các chữ số của a. Khi đó ta luôn có $a-S(a)$ chia hết cho 9. Ta có:

$$A=\underbrace{\overline{777\ldots7}}_{n \text{ chữ số } 7}-18+2n=7.\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{n \text{ chữ số } 1}-18+2n=7.(\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{n \text{ chữ số } 1}-n)+9(n-2).$$

Tổng các chữ số của $\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{n \text{ chữ số } 1}$ là n nên ta có $\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{n \text{ chữ số } 1}-n$ chia hết cho 9.

Vì vậy $7(\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{n \text{ chữ số } 1}-n)$ chia hết cho 9.

Hiển nhiên $9(n-2)$ chia hết cho 9.

Do đó $A\vdots 9$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 4. Xét các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \le \sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Lời giải.
Ta có:

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+ac+bc) \Rightarrow 3 \ge 3(ab+bc+ac) \Rightarrow ab+bc+ac \le 1.$$

Do đó ta có:

$$ab+bc+ac \le 1 \Rightarrow a^2+ab+bc+ac \le a^2+1 \Rightarrow (a+b)(a+c) \le a^2+1.$$

Tương tự ta có:
$$(a+b)(b+c) \le b^2+1, (a+c)(b+c) \le c^2+1.$$

Từ đó ta có:
$$\begin{aligned} P &\le \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \\ \Rightarrow P &\le \sqrt{\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{b^2}{(a+b)(b+c)}} + \sqrt{\frac{c^2}{(a+c)(b+c)}}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}} &\le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right) \\ \sqrt{\frac{b^2}{(a+b)(b+c)}} &\le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c}\right) \\ \sqrt{\frac{c^2}{(a+c)(b+c)}} &\le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c}\right). \end{aligned}$$

Do đó:
$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c}\right) = \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a=b=c> \\ a+b+c=\sqrt{3} \\ \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{a+c} \\ \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{b}{b+c} \\ \dfrac{c}{a+c} = \dfrac{c}{b+c} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Vậy P có giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất.
Ví dụ: $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=2$, $a_5=2$, $a_6=2$, $a_7=3$. Tính giá trị của tổng

$$S=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2017}}+\frac{1}{a_{2018}}.$$

Lời giải.

Gọi k là số nguyên dương gần $\sqrt{n}$ nhất. Khi đó ta có:

$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}\Leftrightarrow k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow k^2-k+1\le n<k^2+k+1.$$

Từ đó ta sẽ có $2k$ số $a_n=k$. Vậy:

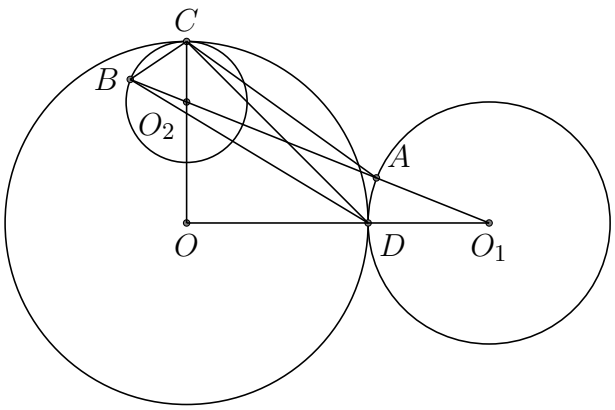
$$S=\underbrace{(\frac{1}{1}+\frac{1}{1})}_{\text{2 số hạng}}+\underbrace{(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2})}_{\text{4 số hạng}}+\cdots+\underbrace{(\frac{1}{44}+\cdots+\frac{1}{44})}_{\text{88 số hạng}}+\underbrace{(\frac{1}{45}+\cdots+\frac{1}{45})}_{\text{38 số hạng}}$$

(từ $a_{1981}=a_{1982}=\cdots=a_{2018}=45$)

$S=2.44+38.\dfrac{1}{45}=\dfrac{3998}{45}$.

Câu 6. Cho hai đường tròn tâm O_1 và O_2 nằm ngoài nhau. Đoạn thẳng O_1O_2 cắt đường tròn (O_1) tại điểm A. Phần kéo dài của đoạn thẳng O_1O_2 cắt (O_2) tại B. Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc ngoài với đường tròn (O_1) tại điểm D và tiếp xúc trong với đường tròn (O_2) tại C (điểm O không nằm trên O_1O_2). Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



Đặt $\widehat{COD}=\alpha;\widehat{AO_1D}=\beta$. Do ΔO_2BC cân tại O_2 nên:

Ta có $\widehat{CBA}=\widehat{CBO_2}=90^\circ-\dfrac{\widehat{CO_2B}}{2}\Rightarrow\widehat{CO_2B}=180^\circ-2\widehat{CBA}.$ $(*)$

Mặt khác: $\widehat{CO_2B}=\widehat{OO_2O_1}=180^\circ-(\alpha+\beta).$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $\widehat{CBA}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$ (1)

Ta có:

$$\widehat{CDA}=180^\circ-(\widehat{ADO_1}+\widehat{CDO})=180^\circ-(90^\circ-\frac{\beta}{2}+90^\circ-\frac{\alpha}{2})=\frac{\alpha+\beta}{2}.\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBA}=\widehat{CDA}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Do đó các điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

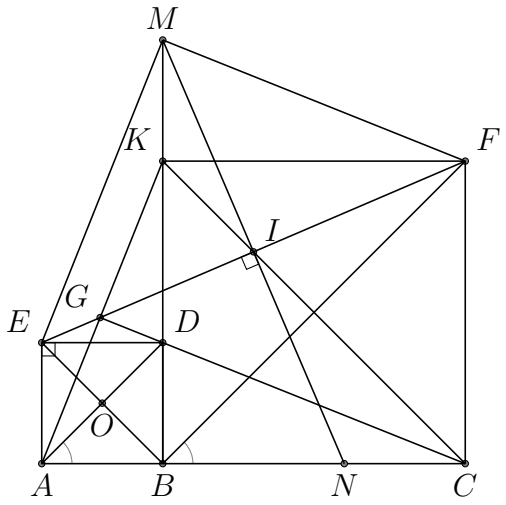
Câu 7. Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng theo thứ tự đó sao cho $AB < BC$. Trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AC dựng các hình vuông $ABDE$ và $BCFK$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Đường thẳng qua I vuông góc với EF cắt các đường thẳng BD và AB lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $AEIN$ và tứ giác $EMID$ nội tiếp đường tròn.

b. Ba điểm A, I, D thẳng hàng và các điểm B, N, F, M, E nằm trên cùng một đường tròn.

c. Ba đường thẳng AK, EF, CD đồng quy.

Lời giải.



a. Ta có:
$\widehat{EAN} = \widehat{EIN} = 90^\circ$ nên tứ giác $AEIN$ nội tiếp đường tròn đường kính EN.
$\widehat{EDM} = \widehat{EIM} = 90^\circ$ nên tứ giác $EMID$ nội tiếp đường tròn đường kính EM.

b. Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{FBC} = 45^\circ$ nên $AD//BF$. (1)
Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng BE và AD. Khi đó O là trung điểm của BE và AD. Mà I là trung điểm của EF nên OI là đường trung bình của tam giác EBF ứng với cạnh BF. Do đó $OI//BF$. (2)
Từ (1) và (2) ta có A, I, D cùng nằm trên đường thẳng qua O và song song với BF. Vậy A, I, D thẳng hàng. Ta có tam giác NEF cân tại N và $\widehat{IEN} = \widehat{IAN} = 45^\circ$ nên tam giác NEF vuông cân tại N. Tam giác MEF cân tại M và $\widehat{MEI} = \widehat{MDI} = 45^\circ$ nên tam giác MEF vuông cân tại M. Vì vậy tứ giác $MENF$ là hình vuông. Suy ra bốn điểm M, E, N, F nằm trên đường tròn đường kính MN. Mặt khác tam giác MBN vuông tại B nên B cũng nằm trên đường tròn đường kính MN. Vậy 5 điểm B, N, F, M, E cùng nằm trên đường tròn đường kính MN.

c. Chứng minh tương tự ta có ba điểm C, I, K thẳng hàng.
Gọi G là giao điểm của AK và CD.
Do D là trực tâm tam giác AKC nên $\widehat{AGC} = 90^\circ$. (3)
Tứ giác $AEGD$ nội tiếp nên $\widehat{EGA} = \widehat{EDA} = 45^\circ$. (4)

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Tứ giác $CGKF$ nội tiếp nên $\widehat{CGF} = \widehat{CKF} = 45^\circ$. (5)

Từ (3), (4), (5) ta có $\widehat{EGA} + \widehat{AGC} + \widehat{CGF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EGF} = 180^\circ$.

Do đó G nằm trên đường thẳng EF.

Vậy ba đường thẳng AK, CD, EF đồng quy.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 85

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI BÌNH - VÒNG 1, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho $A=\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}\right)\left(\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}}-1\right)$ với $(x>0,\ x\neq 1)$.

a) Rút gọn A.

b) Đặt $B=(x-\sqrt{x}+1)A$. Chứng minh rằng $B>1$ với $x>0,\ x\neq 1$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}}-1\right)\\&=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3\sqrt{x}+5}{(x-1)(\sqrt{x}-1)}\right).\frac{(\sqrt{x}+1)^2-4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\\&=\frac{\sqrt{x}-1+3\sqrt{x}+5}{(x-1)(\sqrt{x}-1)}.\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{4\sqrt{x}}\\&=\frac{4(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}.\frac{(\sqrt{x}-1)}{4\sqrt{x}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Vậy $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với $x>0,\ x\neq 1$.

b) Với $x>0,\ x\neq 1$ nên ta có

$B=(x-\sqrt{x}+1)A=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}>1$ $\big($do $x\neq 1$ nên $(\sqrt{x}-1)^2>0\big)$.

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P):\ y=x^2$ và đường thẳng $d:\ y=2mx+2m+8$ (với m là tham số).

a) Khi $m=-4$, tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P).

b) Chứng minh rằng đường thẳng d và parabol (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2. Tìm m để $x_1+2x_2=2$.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 = 2mx + 2m + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 8 = 0. \ (*)$$

Khi $m = -4$, phương trình $(*)$ trở thành

$$x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8 \end{array}\right. .$$

Với $x = 0$ thì $y = 0$; với $x = -8$ thì $y = 64$.
Vậy khi $m = -4$ thì tọa độ giao điểm của (P) với d là $(0; 0)$ và $(-8; 64)$.

b) Để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.
Ta có $\Delta' = m^2 + 2m + 8 = (m + 1)^2 + 7 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt tương đương với d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
Áp dụng hệ thức Vi-ét và theo bài ra ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1 x_2 = -2m - 8 & (2) \\ x_1 + 2x_2 = 2 & (3) \end{cases}$
Từ (1) và (3) ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2m \\ x_2 = 4m - 2 \end{cases},$$

thay vào (2) ta được

$$(2 - 2m)(4m - 2) = -2m - 8 \Leftrightarrow -4m^2 + 7m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Vậy $m \in \left\{-\dfrac{1}{4}; 2\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + y^2 - 2 = x^2 + 3x \\ x + y - 4\sqrt{y - 1} = 0 \end{cases}$.

Lời giải.
Điều kiện: $y \geq 1$.
Xét hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + y^2 - 2 = x^2 + 3x & (1) \\ x + y - 4\sqrt{y - 1} = 0 & (2) \end{cases}$
Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow xy^2 + y^2 - (x^2 + 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2(x + 1) - (x + 1)(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)(y^2 - x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = y^2 - 2 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Thay $x=-1$ vào (2) ta được $y=1$ hoặc $y=17$.

Thay $x=y^2-2$ vào (2) ta được $y^2-2+y-4\sqrt{y-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right.$.

Với $y=1$ thì $x=-1$; $y=2$ thì $x=0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(-1;1),(-1;17),(0;2)\}$.

Câu 4. Cho quãng đường AB dài 300 km. Cùng một lúc, xe ô tô thứ nhất xuất phát từ A đến B, xe ô tô thứ hai đi từ B về A. Sau khi xuất phát được 3 giờ thì hai xe gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết thời gian đi cả quãng đường AB của xe thứ nhất nhiều hơn xe thứ hai là 2 giờ 30 phút.

Lời giải.

Đổi: 2 giờ 30 phút $=\dfrac{5}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là x (km/h), y (km/h) với $y>x>0$.

Sau 3 giờ, xe thứ nhất đi được quãng đường $3x$ km, xe thứ hai đi được quãng đường $3y$ km.

Ta có phương trình

$$3x+3y=300 \Leftrightarrow x+y=100. \ (1)$$

Thời gian xe thứ nhất đi hết quãng đường AB là $\dfrac{300}{x}$ giờ, thời gian xe thứ hai đi hết quãng đường AB là $\dfrac{300}{y}$ giờ.

Ta có phương trình

$$\frac{300}{x}-\frac{300}{y}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{60}{x}-\frac{60}{y}=\frac{1}{2}. \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \dfrac{60}{x}-\dfrac{60}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=40 \\ y=60 \end{cases} \\ \begin{cases} x=300 \\ y=-200 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Đối chiếu điều kiện, vậy vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là 40 km/h và 60 km/h.

Câu 5. Cho đường tròn (O,R) có đường kính AB. Điểm C là điểm bất kỳ trên (O,R), C không trùng với A, B. Tiếp tuyến tại C của (O,R) cắt tiếp tuyến tại A, B của (O,R) lần lượt tại P, Q. Gọi M là giao điểm của OP với AC, N là giao điểm của OQ với BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác $CMON$ là hình chữ nhật và $AP.BQ=MN^2$.

b) Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ.

c) Chứng minh rằng $PMNQ$ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm C để đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$ có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải.

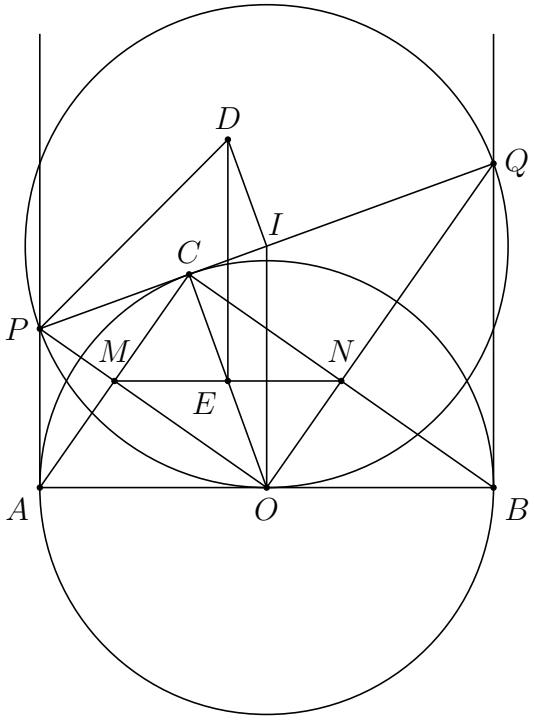
a) - Ta có $OA=OC=R$ và $PA=PA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), suy ra OP là đường trung trực của AC, từ đó ta có $\widehat{OMC}=90^\circ$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ONC} = 90°$.
- Lại có $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), từ đó suy ra tứ giác $CMON$ có $\widehat{OMC} = \widehat{ONC} = \widehat{MCN} = 90°$.
- Vậy tứ giác $CMON$ là hình chữ nhật.
- Vì $CMON$ là hình chữ nhật nên $\widehat{POQ} = 90°$.
- Vì PQ là tiếp tuyến của (O) tại C nên $OC \perp PQ$, suy ra ΔOPQ vuông tại O và nhận OC là đường cao. Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông ta có

$$PC.QC = CO^2.$$



- Mặt khác $PA = PC$, $QB = QC$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) và $MN = OC$ (do $CMON$ là hình chữ nhật).
- Vậy $AP.BQ = MN^2$.

b) - Gọi I là trung điểm của PQ, do tam giác OPQ vuông tại O và có OI là trung tuyến nên ta có

$$OI = \frac{PQ}{2} \Rightarrow O \in \left(I; \frac{PQ}{2}\right).$$

- Vì AP, BQ là các tiếp tuyến của (O) nên $AP \perp AB$ và $BQ \perp AB$, từ đó suy ra tứ giác $APQB$ là hình thang vuông.
- Mặt khác OI là đường trung bình của hình thang $APQB$, suy ra $OI \parallel AP \Rightarrow OI \perp AB$ hay AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn $\left(I; \frac{PQ}{2}\right)$.
- Do tam giác OCP vuông tại C với đường cao CM. Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông ta có $OC^2 = OM.OP$.
- Tương tự ta có $OC^2 = ON.OQ$, từ đó suy ra

$$OM.OP = ON.OQ \Rightarrow \frac{OM}{OQ} = \frac{ON}{OP}.$$

- Xét tam giác ΔOMN và ΔOQP có $\widehat{POQ}$ chung và $\frac{OM}{OQ} = \frac{ON}{OP}$, suy ra ΔOMN và ΔOQP đồng dạng theo trường hợp (c-g-c), suy ra $\widehat{MNO} = \widehat{MPQ}$.
- Vậy $PMNQ$ là tứ giác nội tiếp.

c) - Gọi D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$, E là giao điểm của OC và MN.
- Đường tròn (D) có I là trung điểm dây PQ và E là trung điểm của dây MN, suy ra $DI \perp PQ$, $DE \perp MN \Rightarrow DI \parallel OE, DE \parallel OI \Rightarrow$ Tứ giác $OEDI$ là hình bình hành, suy ra $DI = OE = \frac{R}{2}$.

- Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông DIP ta có

$$DP = \sqrt{DI^2 + IP^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{PQ}{2}\right)^2} \geq \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $PQ = AB \Leftrightarrow OC \perp AB$ tương đương với C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).
- Vậy khi C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O) thì đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$ có bán kính nhỏ nhất bằng $\dfrac{R\sqrt{5}}{2}$.

Câu 6. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)} + \frac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)} + \frac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}.$$

Lời giải.

Ta có

$$P = \frac{1}{x\left(\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{y\left(\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{x^2}\right)} + \frac{1}{z\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)}.$$

Đặt $a = \dfrac{1}{x}$; $b = \dfrac{1}{y}$; $c = \dfrac{1}{z}$ thì ta có

$$P = \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 = 3,$$

do đó

$$P = \frac{a}{3-a^2} + \frac{b}{3-b^2} + \frac{c}{3-c^2}.$$

Ta lại có bất đẳng thức

$$\frac{x}{3-x^2} \geq \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2.x.(x+2)}{2(3-x^2)} \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Từ đó suy ra

$$P \geq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 = \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 86

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI BÌNH - VÒNG 2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho a, b là hai số thực bất kì, chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình ẩn x sau vô nghiệm

$$x^2 + 2ax + 2a^2 - b^2 + 1 = 0 \tag{0.52}$$
$$x^2 + 2bx + 3b^2 - ab = 0. \tag{0.53}$$

b) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$ và $xyz \neq 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}.$$

Lời giải.

a) Phương trình (1) có $\Delta_1' = -a^2 + b^2 - 1$.
Phương trình (2) có $\Delta_2' = -2b^2 + ab$.
Xét $\Delta_1' + \Delta_2' = -a^2 + ab - b^2 - 1 = -\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}b^2 - 1 < 0$. Từ đó suy ra phải có ít nhất một trong hai Δ_1', Δ_2' âm, suy ra điều phải chứng minh.

b) Từ giả thiết ta có $y + z = -x \Rightarrow y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$.
Nên ta có

$$P = \sum \frac{x^2}{y^2 + z^2 = x^2} = \sum \frac{x^3}{-2xyz} = -\frac{\sum x^3}{2xyz}$$
$$\Rightarrow P = -\frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz}{2xyz} = -\frac{3}{2}.$$

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x + 1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4xy\left(\dfrac{2}{x - y} - 1\right) = 4(4 + xy) \\ \sqrt{x - y} + 3\sqrt{2y^2 - y + 1} = 2y^2 - x + 3 \end{cases}$.

Lời giải.

a) ĐK: $x \geq -1$.

Nhận thấy $VP = 2x - 4 + \sqrt{x+1} > 2 \Leftrightarrow x > \dfrac{25-\sqrt{65}}{8} > 2$ (*).

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(x-2)^2 + 8(x+1)} = 2(x-2) + \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 8\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 4(x-2)^2 + 4(x-2)\sqrt{x+1} + \left(\sqrt{x+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)^2 + 4(x-2)\sqrt{x+1} - 7\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2-\sqrt{x+1}\right)\left(3(x-2) + 7\sqrt{x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x+1} = 0 \text{ do } (*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

b) ĐK: $x - y > 0$ (**).

Xét phương trình

$$x^2 + y^2 - 4xy\left(\frac{2}{x-y} - 1\right) = 4(4+xy)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 2xy - \frac{8xy}{x-y} - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left((x-y)^2 - 16\right) + 2xy(x-y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-4)\left(x^2 + y^2 + 4(x-y)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y + 4 \text{ do } (**).$$

Thay $x = y + 4$ vào phương trình sau ta được

$$2y^2 - y + 1 - 3\sqrt{2y^2 - y + 1} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2y^2 - y + 1} = -1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{2y^2 - y + 1} = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - y - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ y = 3 \Rightarrow x = 7 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$ và $(7;3)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 3. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $x^3-y^3=6xy+3$.

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương với

$$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+3xy(x-y)-6xy-8=-5$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left((x-y)^2+2(x-y)+4\right)+3xy(x-y-2)=-5$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left((x-y)^2+2(x-y)+4+3xy\right)=-5\ (*)$$

Do $(x-y)^2+2(x-y)+4+3xy=x^2+xy+y^2+2x-2y+4=\dfrac{1}{2}\left((x+y)^2+(x+2)^2+(y-2)^2\right)\geq 0$ nên $(*)$ tương đương với

$$\left[\begin{cases} x-y-2=-5 \\ (x-y)^2+2(x-y)+4+3xy=1 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x;y)=(-2;1)\\(x;y)=(-1;2)\end{array}\right.$$
$$\left.\begin{cases} x-y-2=-1 \\ (x-y)^2+2(x-y)+4+3xy=5 \end{cases}\right.$$

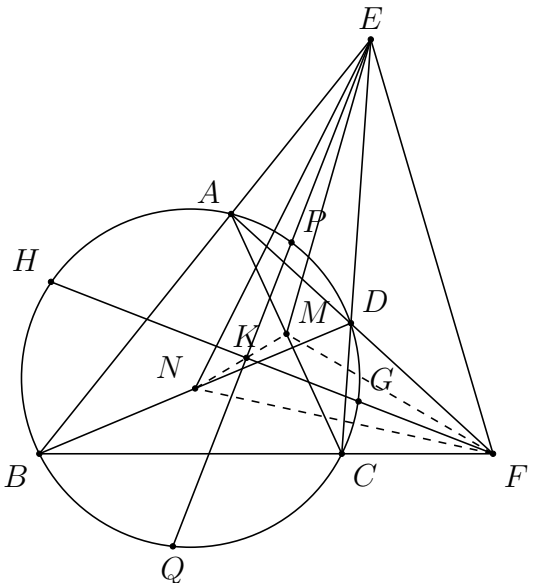
Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có hai tia BA và CD cắt nhau tại E, hai tia AD và BC cắt nhau tại F. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BEC}$ và góc $\widehat{BFA}$ cắt nhau tại K. Chứng minh rằng

a) $\widehat{DEF}+\widehat{DFE}=\widehat{ABC}$ và tam giác EKF là tam giác vuông;

b) $EM.BD=EN.AC$;

c) Ba điểm K,M,N thẳng hàng.

Lời giải.



a)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- Nhận thấy $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$) (1).
  Mặt khác $\widehat{ADE} = \widehat{DEF} + \widehat{DFE}$ (góc ngoài của tam giác) (2).
  Từ (1)(2) suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} + \widehat{DFE}$.
- Chứng minh EFK là tam giác vuông.
  Do EK là phân giác góc $\widehat{BEC}$ nên ta có sđ $\widehat{BQ}$ − sđ $\widehat{AP}$ = sđ $\widehat{CQ}$ − sđ $\widehat{DP}$ (3).
  Tương tự ta có sđ $\widehat{BH}$ − sđ $\widehat{CG}$ = sđ $\widehat{AH}$ − sđ $\widehat{DG}$ (4).
  Từ (3)(4), suy ra

$$\text{sđ}\,\widehat{BQ} + \text{sđ}\,\widehat{BH} + \text{sđ}\,\widehat{DP} + \text{sđ}\,\widehat{DG} = \text{sđ}\,\widehat{AH} + \text{sđ}\,\widehat{AP} + \text{sđ}\,\widehat{CG} + \text{sđ}\,\widehat{CQ} = 180^\circ.$$

  Vậy $\widehat{EKF} = 90^\circ$.

b) Xét cặp tam giác ACE và DBE có góc $\widehat{E}$ chung và $\widehat{ACE} = \widehat{DBE}$ (cùng chắn một cung), suy ra ΔACE đồng dạng với DBE. Từ đó suy ra $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{AC}{DB} = \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{EM}{EN}$ (5) và $EM.BD = EN.AC$.

c) Từ (5) suy ra ΔDNE đồng dạng với ΔAME, suy ra được EK là phân giác góc $\widehat{MEN}$.
Giả sử EK cắt MN tại K_1, suy ra $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{MK_1}{NK_1}$ (6).
Tương tự FK là phân giác góc $\widehat{MFN}$, giả sử FK cắt MN tại K_2, suy ra $\dfrac{FM}{FN} = \dfrac{MK_2}{NK_2}$ (7).
Ta có thể chứng minh tương tự (5) ta được $\dfrac{AF}{DF} = \dfrac{AC}{DB} = \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{FM}{FN}$ (8).
Từ (5)(6)(7)(8) suy ra $\dfrac{MK_1}{NK_1} = \dfrac{MK_2}{NK_2}$, suy ra $K_1 \equiv K_2 \equiv K$. Vậy K, M, N thẳng hàng.

Câu 5.

a) Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}} + \frac{1}{b\sqrt{3b+2c}} + \frac{1}{c\sqrt{3c+2a}} \geq \frac{3}{\sqrt{5abc}}.$$

b) Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong trong lớn hơn tổng của hai số còn lại. Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

Lời giải.

a) Đặt $x = ab, y = bc, z = ca$
Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{5a}\sqrt{3a+2b}} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum \frac{bc}{\sqrt{5ab}\sqrt{2bc+3ca}} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum \frac{bc}{5ab+2bc+3ca} \geq \frac{3}{10}.$$

Viết gọn lại ta có

$$\sum \frac{y}{5x+2y+3z} \geq \frac{3}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{y^2}{y(5x+2y+3z)} \geq \frac{3}{10}.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Đánh giá vế trái ta có

$$\sum y(5x+2y+3z).\sum \frac{y^2}{y(5x+2y+3z)} \geq (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{y^2}{y(5x+2y+3z)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2x^2+2y^2+2z^2+8xy+8yz+8zx}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{y^2}{y(5x+2y+3z)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)^2+\frac{4}{3}(x+y+z)^2} = \frac{3}{10} \text{ (đpcm).}$$

b) Không giảm tính tổng quát, ta giả sử 5 số tự nhiên bài cho là $a<b<c<d<e$.

Suy ra $\begin{cases} b \geq a+1 \\ c \geq b+1 \\ d \geq c+1 \\ e \geq d+1 \end{cases}$ và $\begin{cases} b = a+x_1 \\ c = a+x_2 \\ d = a+x_3 \\ e = a+x_4 \end{cases}$ với $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Từ đó suy ra $x_3 \geq x_1+2$ và $x_4 \geq x_2+2$.

Mà theo giả thiết ta có

$$a+b+c > d+e$$
$$\Leftrightarrow a+a+x_1+a+x_2 > a+x_3+a+x_4$$
$$\Leftrightarrow a > x_3-x_1+x_4-x_2 \geq 4.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh $e>d>c>b>a \geq 5$.

- - - HẾT - - -

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 87

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI - VÒNG 2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng trong 4 số

$$a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\ b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d};\ c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a};\ d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Lời giải.

Giả sử cả 4 số đều nhỏ hơn 3 thì

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<12$$

Mặt khác

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a^2+b^2+c^2+d^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Do

$$4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\geq(a+b+c+d)^2;\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geq\frac{16}{a+b+c+d}$$

Vậy

$$\begin{aligned}P&\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{4}+\frac{16}{a+b+c+d}+\frac{16}{a+b+c+d}\\&\geq3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c+d)^2}{4}.\frac{16}{a+b+c+d}.\frac{16}{a+b+c+d}}=12\end{aligned}$$

Trái với điều giả sử, vậy điều giả sử sai, ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. Giải phương trình

$$\sqrt{\left(x^2+2x\right)^2+4\left(x+1\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(x+1\right)^2+\left(x^2+x\right)^2}=2007.$$

Lời giải.

ĐKXĐ: $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(x^2+2x\right)^2+4\left(x+1\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(x+1\right)^2+\left(x^2+x\right)^2}=2007\\&\Leftrightarrow\sqrt{\left((x+1)^2-1\right)^2+4\left(x+1\right)^2}-\sqrt{1+2(x^2+x)+\left(x^2+x\right)^2}=2007\\&\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2+2x+2\right)^2}-\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^2}=2007\\&\Leftrightarrow x^2+2x+2-x^2-x-1=2007\\&\Leftrightarrow x=2006.\end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 3.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 = b^3, c^3 = d^4$ và $a = d + 98$.

b) Tìm tất cả các số thực x sao cho tron 4 số $x - \sqrt{2}$; $x^2 + 2\sqrt{2}$; $x - \dfrac{1}{x}$; $x + \dfrac{1}{x}$ có đúng một số không phải là số nguyên.

Lời giải.

a) Giả sử p là ước nguyên tố của a, vậy dễ thấy p cũng sẽ là ước nguyên tố của b, Vậy ta có $a^2 \vdots p^3$ vậy trong biểu diễn ước nguyên tố của a thì số mũ của p phải chia hết cho 3, từ đó $a = x^3, b = x^2, x \in \mathbb{N}$. Tương tự ta có $d = y^3, y \in \mathbb{N}$.
Ta có $a = d + 98 \Leftrightarrow x^3 = y^3 + 98 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 98$, ta luôn có $(x - y) \leq (x - y)^2 < x^2 + xy + y^2$ vậy ta sẽ có 2 trường hợp sau:
TH1: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ (y + 1)^2 + (y + 1)y + y^2 = 98 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3y^2 + 3y - 97 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \notin \mathbb{Z}$(Loại)
TH2: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y + 2)^2 + (y + 2)y + y^2 = 49 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 + 2y - 15 = 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ \left[\begin{array}{l} y = -5 < 0 \text{(Loại)} \\ y = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$
Vậy $a = 5^3 = 125; d = 3^3 = 27; b = 25; c = 81$.

b) Nếu $x - \dfrac{1}{x}; x + \dfrac{1}{x}$ là nguyên ta có $x - \dfrac{1}{x} + x + \dfrac{1}{x} = 2x \in \mathbb{Q}$ suy ra $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2}$ đều không phải là số hữu tỷ do vậy một trong hai số $x - \dfrac{1}{x}; x + \dfrac{1}{x}$ không là số nguyên, khi đó $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - \sqrt{2} + x^2 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$
Đặt $x - \sqrt{2} = a; (a \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2} = \left(a + \sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} = a^2 + 2 + 2\sqrt{2}(a + 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\sqrt{2}(a + 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$
Thử lại đúng vậy $x = \sqrt{2} - 1$.

Câu 4. Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm M nằm phía ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn $(O)(A, B$ là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C (C khác A, C khác B). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MA, MC. Đường thẳng KA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D.

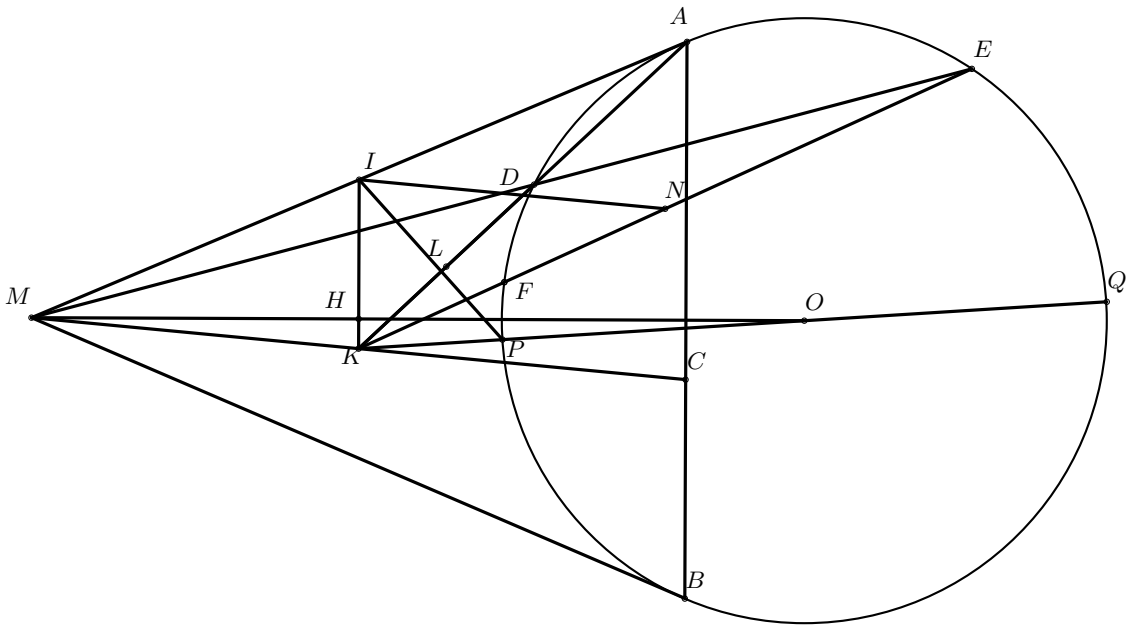
a) Chứng minh $KO^2 - KM^2 = R^2$.

b) Chứng minh tứ giác $BCDM$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O) và N là trung điểm của KE. Đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.



a) Ta có $IM = IA$ và $KM = KC \Rightarrow IK$ là đường trung bình trong $\triangle AMC \Rightarrow IK \parallel AC$.$AC = AB$(2 tiếp tuyến cắt nhau tại M) và $OA = OB = R \Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow IK \perp OM$. Gọi IK cắt OM tại H. Áp dụng định lý pytago ta có cho các tam giác vuông MHI, KHO, MHK, OHI ta có
$MI^2 = MH^2 + HI^2; KO^2 = KH^2 + HO^2; MK^2 = MH^2 + HK^2; OI^2 = KH^2 + HO^2$
suy ra $MI^2 + KO^2 = MK^2 + IO^2 \Rightarrow KO^2 - KM^2 = IO^2 - MI^2 = IO^2 - IA^2 = OA^2 = R^2$(vì $IM = IA$)
Vậy: $KO^2 - KM^2 = R^2$.

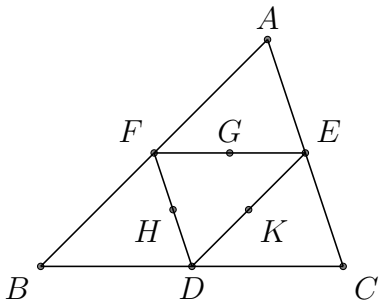
b) Nối KO cắt đường tròn tại $Q; P$. Ta có $KM = KC$ suy ra $KO^2 - KM^2 = R^2 \Leftrightarrow KO^2 - KC^2 = R^2 \Rightarrow KC^2 = KO^2 - OP^2 = (KO + OP)(KO - OP) = KQ.KP$
ta lại có $KQ.KP = KD.KA \Rightarrow KC^2 = KD.KA \Rightarrow \triangle CKD \sim \triangle AKD$(c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{DCK} = \widehat{KAC} = \widehat{DBM}$
Vậy tứ giác $MDCB$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi L là trung điểm của KD ta có $\widehat{AEM} = \widehat{MAK} = \widehat{EMK}$ vì $\triangle MKD \sim \triangle AKM \Rightarrow AE \parallel KM$
Mặt khác ta có $KF.KE = KD.KA \Rightarrow KF.KN = KL.KA \Rightarrow ANFL$ nội tiếp
Suy ra $\widehat{LAF} = \widehat{LNF} = \widehat{MEK} = \widehat{FMK}$(vì $KF.KE = KD.KA = KC^2 = KM^2$) hay $\widehat{KAF} = \widehat{KMF} \Rightarrow$ tứ giác $MKFA$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFN} = \widehat{AMK} = \widehat{AIN}$
$\Rightarrow I, A, N, F$ cùng thuộc một đường tròn.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 5.

Ta viết các số $1, 2, 3, ..., 9$ vào vị trí của 9 điểm trong hình vẽ dưới sao cho mỗi số chỉ xuất hiện đúng một lần và tổng 3 số trên mỗi cạnh của tam giác là như nhau và bằng 18. Hai cách viết được gọi là như nhau nếu bộ số viết ở các điểm $(A; B; C; D; E; F; G; H; K)$ của mỗi cách là trùng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách viết phân biệt? Tại sao?



Lời giải.

Ta thấy có 2 số là 9 và 8 trong dãy $1, 2, 3, 4, ..., 9$ tổng hai số với 1 bằng 18 ta thấy tại hai điểm A(tương tự B, C) không thể điền số 1 được vì nếu trái lại thì B, F phải điền cặp $8; 9$ và tại C, E phải điền cặp $8; 9$.

Tương tự thì tại D, E, F cũng không thể điền số 1 vậy số 1 phải điền tại H, G, K. Không mất tính tổng quát, giả sử 1 được điền tại G khi đó E sẽ điền 8 và F sẽ điền 9 (ta có thể giả sử như vậy). Ta gọi A điền a; C điền c; D điền d; K điền k, khi đó dễ thấy rằng H điền $k+1$; tại B sẽ điền $c+1$. Ta có :

$$\begin{cases} a + c = 9 \\ d + k = 9 \\ d + 2c = 17 \end{cases}$$

Ta thấy d phải là lẻ.

$d = 3$ thì $c = 7 \Rightarrow B$ điền 8 (vô lí)

$d = 5$ thì $k = 4 \Rightarrow H$ sẽ điền 5 (vô lí)

$d = 7$ thì $c = 5; a = 4; k = 2$ khi đó B điền 6; H sẽ điền 3 (thỏa mãn)

Số cách điền sẽ phụ thuộc vào có 3 cách điền 1 và 2 cách điền vị trí cho $9; 8$ tức là có $3.2 = 6$(cách)

.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 88

ĐỀ THI VÀO 10, TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP - VÒNG 1, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức:

$$P=\frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right).$$

Với $a>0, b>0, a\neq b, a+b\neq a^2$.

a) Chứng minh $P=a-b$.

b) Tìm a, b biết rằng $P=1$ và $a^3-b^3=7$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)\\
&= \frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{a}{a^2}+\dfrac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a^2(a+b)+a(a+b)}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)\\
&= \frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{a+b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a(a+1)(a+b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{b}{a-b}\right)\\
&= \frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(\dfrac{a-\sqrt{a+b}}{a}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a(a+1)}{a-b}+\frac{b}{a-b}\right)\\
&= \frac{a^4-a^2-2ab-b^2}{a^2-a-b}:\frac{a^2+a+b}{a-b}=\frac{a^4-(a+b)^2}{a^2-a-b}.\frac{a-b}{a^2+a+b}\\
&= \frac{(a^2-a-b)(a^2+a+b)}{a^2-a-b}.\frac{a-b}{a^2+a+b}=a-b.
\end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a^3-b^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a^2+ab+b^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 3b^2+3b-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

Vậy $(a;b)=(2;1)$.

Câu 2. Giả sử $x;y$ là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}=\dfrac{2}{xy+1}$. Hãy tính $S=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{2}{xy+1}$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1} \\ \Leftrightarrow\ & (y^2+1)(xy+1)+(x^2+1)(xy+1)=2(x^2+1)(y^2+1) \\ \Leftrightarrow\ & xy^3+x^3y-2x^2y^2=x^2-2xy+y^2 \\ \Leftrightarrow\ & xy(x-y)^2=(x-y)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)^2(xy-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=1 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Mặt khác x,y là hai số thực phân biệt nên $(x-y)^2>0 \Rightarrow xy=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x}$.

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2}{x^2+1}+1 \\ &= \frac{2x^2+2}{x^2+1}=2. \end{aligned}$$

Vậy, $S=2$.

Câu 3. Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=-2ax-4a$, với a là tham số.

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) khi $a=\dfrac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 thỏa mãn: $|x_1|+|x_2|=3$.

Lời giải.

a) Với $a=-\dfrac{1}{2}$ ta có phương trình đường thẳng (d) là: $y=x+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Với $x=-1 \Rightarrow y=1$.
Với $x=2 \Rightarrow y=4$.
Vậy khi $a=-\dfrac{1}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt là $A(-1;1)$ và $B(2;4)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2=-2ax-4a \Leftrightarrow x^2+2ax+4a=0 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=a^2-4a>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>4 \\ a<0 \end{array}\right.$.
Với $a>4$ hoặc $a<0$ ta có (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2.
Theo định lý Vi ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-2a \\ x_1x_2=4a \end{cases}$
Theo đề bài:

$$\begin{aligned} & |x_1|+|x_2|=3 \\ \Leftrightarrow\ & (|x_1|+|x_2|)^2=9 \\ \Leftrightarrow\ & x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=9 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|=9 \\ \Leftrightarrow\ & 4a^2-8a+|8a|=9 \quad (2) \end{aligned}$$

TH1: Với $a>4$, phương trình (2) trở thành $4a^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{2} \text{ (loại)} \\ a=-\dfrac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

TH2: Với $a<0$, phương trình (2) trở thành: $4a^2-16a-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ a=\dfrac{9}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy với $a=-\dfrac{1}{2}$ thì đường thẳng (P) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=3$.

Câu 4. Anh Nam đi xe đạp từ A đến (C). Trên quãng đường (AB) ban đầu (B) nằm giữa A và C anh Nam đi với tốc độ không đổi là a (km/h) và thời gian đi từ A tới B là $1,5$ giờ. Trên quãng đường BC còn lại, anh Nam đi chậm dần đều với vận tốc tại thời điểm t (tính bằng giờ) kể từ B là $v=-8t+a$ (km/h). Quãng đường đi được từ B tới thời điểm t đó là $S=-4t^2+at$. Tính quãng đường AB biết rằng đến C xe dừng hẳn và quãng đường BC dài 16 km.

Lời giải.

Vì tại C xe dừng hẳn nên thời gian xe đi từ B tới C thỏa mãn:

$$-8t+a=0 \Leftrightarrow t=\frac{a}{8}.$$

Do đó, quãng đường BC là $16=-4t^2+at=-4.\dfrac{a^2}{64}+\dfrac{a^2}{8} \Leftrightarrow a^2=256 \Leftrightarrow a=16$.
Vậy quãng đường AB là $S=vt=a.1,5=24$ (km).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

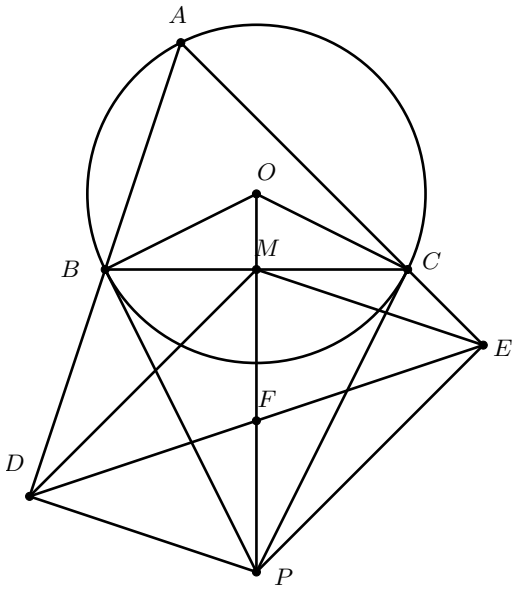
Câu 5. Cho đường tròn (O) bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt nhau tại điểm P. Gọi D, E tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các đường thẳng AB, AC và M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh $\widehat{MEP} = \widehat{MDP}$.

b) Giả sử B, C cố định và A chạy trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều. Hãy tính diện tích tam giác ADE theo R.

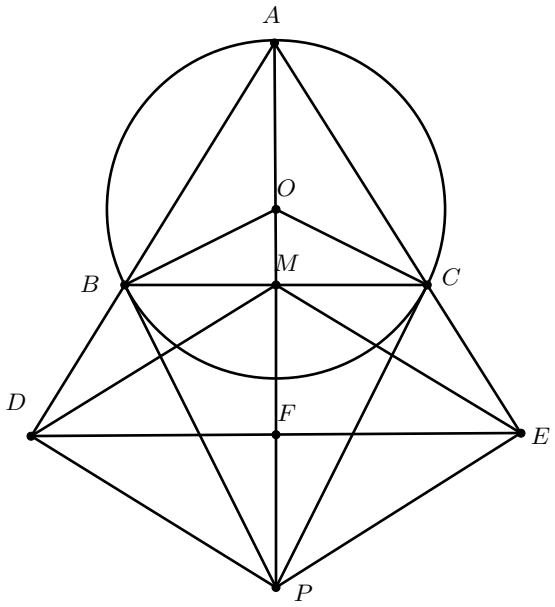
Lời giải.



a) Chứng minh $\widehat{MEP} = \widehat{MDP}$.
Ta có M là trung điểm của $BC \Rightarrow OM \perp BC$.
Mặt khác, $\widehat{BDP} + \widehat{BMP} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BMPD$ nội tiếp. Do vậy, $\widehat{MDP} = \widehat{MBP}$ (1).
Tương tự, tứ giác $MCEP$ nội tiếp nên $\widehat{MEP} = \widehat{MCP}$ (2).
Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, dễ dàng suy ra được ΔBPC cân tại P
$\Rightarrow \widehat{MCP} = \widehat{MBP}$ (3).
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MEP} = \widehat{MDP}$.

b) Chứng minh DE đi qua điểm cố định.
Ta có $\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ \\ \widehat{CBP} + \widehat{ABC} + \widehat{PBD} = 180^\circ \\ \widehat{A} = \widehat{CBP} \text{ (cùng chắn cung BC)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{PBD}.$
Lại có $\widehat{ACB} = \widehat{MPE}$ (cùng bù với $\widehat{ECM}$)
và $\widehat{PBD} = \widehat{PMD}$ (cùng chắn cung PD) nên suy ra $\widehat{MPE} = \widehat{PMD}$
Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $MD \parallel EP$.
Chứng minh tương tự, ta có $ME \parallel PD$.
Vậy tứ giác $EMDP$ là hình bình hành. Do đó DE đi qua trung điểm F của MP (Hiển nhiên F cố định khi BC cố định).

c) Khi ΔABC đều, ta được hình vẽ sau:



Từ giả thiết ΔABC đều, dễ dàng chứng minh hai tứ giác $ABPC, DMEP$ là hình thoi.

Ta có $OA = R \Rightarrow AM = \dfrac{3}{2}OA = \dfrac{3}{2}R \Rightarrow AF = \dfrac{3}{2}R + \dfrac{3}{4}R = \dfrac{9}{4}R.$

Xét ΔAMB có $AB = \dfrac{AM}{\sin 60^\circ} = R\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AM.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2}R.R\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$

Dễ thấy $BM \parallel DF \Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AM}{AF}$

Mặt khác $\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\dfrac{BA}{DA}\right)^2 = \left(\dfrac{AM}{AF}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

Vậy, $S_{\Delta ADE} = \dfrac{9}{4}.\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}R^2.$

Câu 6. Cho các số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_9$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + 9x_9 = 18 \end{cases}.$$

Chứng minh $1.19x_1 + 2.18x_2 + \ldots + 9.11x_9 \geq 270$, đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 10 \quad (1) \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + 9x_9 = 18 \quad (2) \end{cases}$$

Nhân cả hai vế của (1) cho 9 rồi trừ cho (2), ta có:

$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 = 72$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$$\begin{aligned}
\text{Đặt } P &= 1.19x_1 + 2.18x_2 + \ldots + 9.11x_9 \\
&= 8x_1 + 7.2x_2 + 6.3x_3 + \ldots + 8.1x_8 + 11(x_1 + 2x_2 + \ldots + 9x_9) \\
&= 8x_1 + 7.2x_2 + 6.3x_3 + \ldots + 8.1x_8 + 198 \\
&= (8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8) + (7x_2 + 2.6x_3 + \ldots + 6.2x_7 + 7x_8) + 198 \\
&= (7x_2 + 2.6x_3 + 3.5x_4 + 4.4x_5 + 5.3x_6 + 6.2x_7 + 7x_8) + 72 + 198 \\
&= (7x_2 + 2.6x_3 + 3.5x_4 + 4.4x_5 + 5.3x_6 + 6.2x_7 + 7x_8) + 270 \\
&\geq 270
\end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_9 = 1 \\ x_2 = x_3 \ldots = x_8 = 0 \end{cases}$

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 89

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TOÁN, THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ VÒNG 2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Cho các biểu thức $P(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{9-x}{x+3\sqrt{x}}$; $Q(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x>0$.
Tìm số nguyên x nhỏ nhất thỏa mãn $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\le\dfrac{1}{2}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $F=\dfrac{2x^4-21x^3+55x^2-32x-4012}{x^2-10x+20}$ khi $x=5-\sqrt{3}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

Lời giải.

a) Với $x>0$, ta có:
$P(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{9-x}{x+3\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1+3\sqrt{x}-x}{x}$
$\Rightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{1+3\sqrt{x}-x}{x+\sqrt{x}}$
$\dfrac{P(x)}{Q(x)}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1+3\sqrt{x}-x}{x+\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3x-5\sqrt{x}-2\ge 0$
$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-2)(3\sqrt{x}+1)\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{x}-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4$.

b) Thực hiện phép chia đa thức cho đa thức, ta có:
$F=\dfrac{2x^4-21x^3+55x^2-32x-4012}{x^2-10x+20}=2x^2-x+5+\dfrac{38x-4112}{x^2-10x+20}$
Thay $x=5-\sqrt{3}$ vào F. ta được:
$2\left(5-\sqrt{3}\right)^2-\left(5-\sqrt{3}\right)+5+\dfrac{38\left(5-\sqrt{3}\right)-4112}{\left(5-\sqrt{3}\right)^2-10\left(5-\sqrt{3}\right)+20}$
$=2\left(28-10\sqrt{3}\right)-5+\sqrt{3}+5+\dfrac{38\left(5-\sqrt{3}\right)-4112}{\left(28-10\sqrt{3}\right)-50+10\sqrt{3}+20}$
$=56-19\sqrt{3}+\dfrac{-3922-38\sqrt{3}}{-2}=56-19\sqrt{3}+1961+19\sqrt{3}=2017$.
Vậy khi $x=5-\sqrt{3}$ thì $F=2017$.

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$, đường thẳng d có hệ số góc k và đi qua điểm $M(0;1)$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của k, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1, x_2 thỏa điều kiện $|x_1 - x_2| \geq 2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases}$.

Lời giải.

a) Đường thẳng (d) có hệ số góc k nên phương trình có dạng $(d): y = kx + b$
Vì (d) qua $M(0;1)$ nên ta có $[1 = 0k + b \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow (d): y = kx + 1$
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0$ $(*)$
Vì a, c trái dấu nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt. . Nói cách khác, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1, x_2.
Theo định lí Viet, ta có: $S = x_1 + x_2 = k, P = x_1x_2 = -1$
Khi đó: $|x_1 - x_2| \geq 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 4 \Leftrightarrow k^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow k^2 \geq 0$ (hiển nhiên)
Vậy, với mọi giá trị của k, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1, x_2 thỏa điều kiện $|x_1 - x_2| \geq 2$.

b) Ta có: $(2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6y^2 - 3x - 12y = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 6y^2 - 12y = 0 (3)$
Lấy phương trình $(1) - (3)$, vế theo vế ta được: $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3x - 6y^2 + 12y = 9$
$\Leftrightarrow (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (y^3 - 6y^2 + 12y - 8) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^3 + (y-2)^3 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 2 - y \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow x = 3 - y$. Thay $x = 3 - y$ vào phương trình (2) ta có:$(3-y)^2 + 2y^2 + y - 3 - 4y = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 9y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \to x = 2 \\ y = 2 \to x = 1 \end{array}\right.$
Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(2;1); (1;2)$.

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)\sqrt{x^2+1} + m^2 - m - 2 = 0$. (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải.

a) Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 1$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 1 - 2(m+1)t + m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t + m^2 - m - 3 = 0 (2)$
Khi $m = 0$, phương trình (2) trở thành: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 (l) \\ t = 3 (n) \end{array}\right.$
Với $t = 3$, ta có: $\sqrt{x^2+1} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

b) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 > 1, t_2 > 1$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - m - 3) > 0 \\ t_1 - 1 > 0 \\ t_2 - 1 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đưa về tổng tích và áp dụng định lý Vi-ét đối với phương trình (2),ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 4 > 0 \\ (t_1 - 1) + (t_2 - 1) > 0 \Leftrightarrow m > 4. \\ t_1 - 1).(t_2 - 1) > 0 \end{cases}$$

Vậy $m > 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho đường tròn có tâm O và hai điểm C, D trên (O) sao cho ba điểm C, O, D không thẳng hàng. Gọi Ct là tia đối của tia CD, M là điểm tùy ý trên Ct, M khác C. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O), (A và B là các tiếp điểm, B thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$). Gọi I là trung điểm của CD, H là giao điểm của đường thẳng MO và đường thẳng AB.

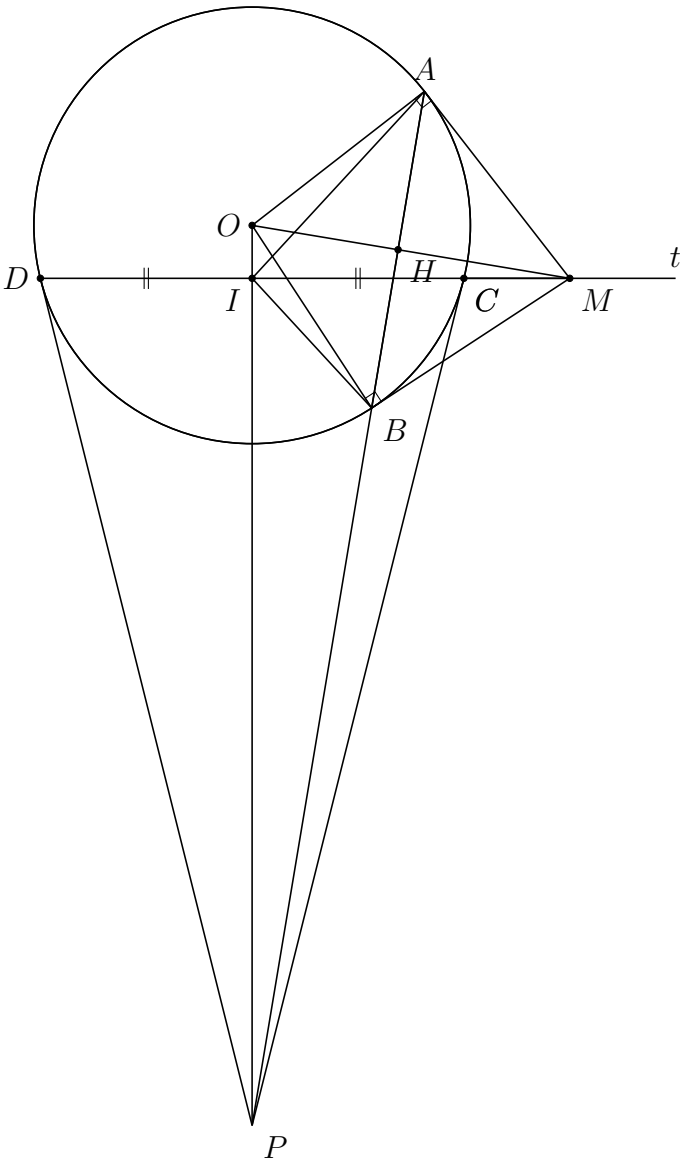
a) Chứng minh tứ giác $MAIB$ nội tiếp.

b) Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên tia Ct.

c) Chứng minh $\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{HA^2}{HC^2}$.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Ta có: $\widehat{MAO} = 90^0$,$\widehat{MIO} = 90^0$ (do I là trung điểm CD),$\widehat{MBO} = 90^0$. Suy ra 5 điểm M, A, O, I, B cùng thuộc một đường tròn. Vậy tứ giác $MAIB$ nội tiếp

b) + Gọi giao điểm của tiếp tuyến tại C và D là P. Ta có $\widehat{OCP} = \widehat{ODP} = 90^0$. Suy ra tứ giác $OCPD$ nội tiếp đường tròn đường kính OP.
+ Do $MH.MO = MA^2 = MC.M$D $\Rightarrow CHO$D nội tiếp $\Rightarrow O, H, C, P, D$ cùng thuộc đường tròn đường kính $OP \Rightarrow \widehat{OHP} = 90^0$ mà $\widehat{OHB} = 90^0$nên 3 điểm A, B, P thẳng hàng.
+ Vậy khi M di động trên tia Ct thì AB luôn đi qua điểm P cố định.

c) Ta có: $MH.MO = MC.MD$ (câu b)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$\Rightarrow \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO} \Rightarrow \Delta MCH \sim \Delta MOD \Rightarrow \dfrac{HC}{OD} = \dfrac{MC}{MO}$

Ta có: $\begin{cases} HC^2 = \dfrac{MC^2.OD^2}{OM^2} \\ HA^2 = MH.OH \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{HA^2}{HC^2} = \dfrac{MH.OH.OM^2}{MC^2.OA^2} = \dfrac{MH.OH.OM^2}{MC^2.OH.OM} = \dfrac{MH.OM}{MC^2} = \dfrac{MC.MD}{MC^2} = \dfrac{MD}{MC}.$

Vậy $\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{HA^2}{HC^2}.$

Câu 5.

a) Cho a, b, c là các số nguyên dương thay đổi và thỏa điều kiện $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $E = \dfrac{a^2}{a+b} + \dfrac{b^2}{b+c} + \dfrac{c^2}{c+a}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 3^n$ là một số chính phương.

Lời giải.

a) Theo bất đẳng thức cô si, ta có:

$\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b+c}.\dfrac{b+c}{4}} = a \Rightarrow \dfrac{a^2}{b+c} \geq a - \dfrac{b+c}{4}$

$\dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{a+c}{4} \geq 2\sqrt{\dfrac{b^2}{a+c}.\dfrac{a+c}{4}} = b \Rightarrow \dfrac{b^2}{a+c} \geq b - \dfrac{a+c}{4}$

$\dfrac{c^2}{a+b} + \dfrac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\dfrac{c^2}{a+b}.\dfrac{a+b}{4}} = c \Rightarrow \dfrac{c^2}{a+b} \geq c - \dfrac{a+b}{4}$

Do đó: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq a+b+c - \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} \geq \dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}}{2} = \dfrac{1}{2}.$

Vậy $E_{\min} = \dfrac{1}{2}.$

b) Giả sử $n^2 + 3^n = m^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 3^n \Rightarrow (m-n)(m+n) = 3^n.$

Đặt $m-n = 3^k$, suy ra $m+n = 3^{n-k}$, mà $m+n > m-n \Rightarrow 3^{n-k} > 3^k \Rightarrow n > 2k \Rightarrow n-2k \geq 1$. + Xét $n-2k = 1$ thì $2n = (m+n) - (m-n) = 3^{n-k} - 3^k = 3^k\left(3^{n-2k} - 1\right) = 2.3^k$

$\Leftrightarrow n = 3^k = 2k+1 \Leftrightarrow k = 0; 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 3 \end{cases}.$

+ Xét $n - 2k \geq 2 \Rightarrow n - k - 2 \geq k.$

Do đó: $2n = 3^{n-k} - 3^k \geq 3^{n-k} - 3^{n-k-2} = 3^{n-k-2}(3^2 - 1) = 8.3^{n-k-2}.$

Theo bất đẳng thức Bernoulli thì $8.3^{n-k-2} = 8.(1+2)^{n-k-2} \geq 8.[1 + 2(n-k-2)] = 16n - 16k - 24.$

Suy ra $2n \geq 16n - 16k - 24 \Rightarrow 8k + 12 \geq 7n.$

$n \geq 2k+2 \Rightarrow 8k + 12 \geq 7n \geq 14k + 14$ (vô lí)

Vậy $n = 1; n = 3$..

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 90

ĐỀ THI VÀO 10 THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ VÒNG 1, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Tìm x để biểu thức $A=\sqrt{x-1}$ có nghĩa.

b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức $B=\sqrt{3^2.2}+\sqrt{2^3}-\sqrt{5^2.2}$.

c) Rút gọn biểu thức $C=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-1}$ với $a\geq 0;\ a\neq 1$.

Lời giải.

a) Biểu thức A có nghĩa khi $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

b) Ta có $B=\sqrt{3^2.2}+\sqrt{2^3}-\sqrt{5^2.2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-5\sqrt{2}=0$

c) Với điều kiện $a\geq 0$ và $a\neq 1$, ta có $C=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-1}=\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)-(a\sqrt{a}-1)}{a-1}=$
$\dfrac{a\sqrt{a}-\sqrt{a}+a-1-a\sqrt{a}+1}{a-1}=\dfrac{a-\sqrt{a}}{a-1}=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$

Câu 2.

a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=4\\3x-y=5\end{cases}$.

b) Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P).

(a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

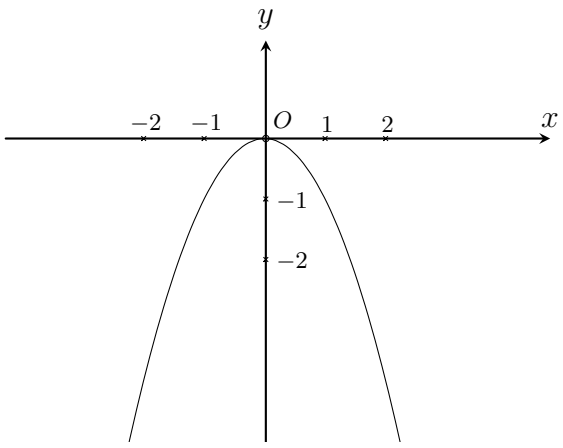
(b) Cho đường thẳng $y=mx+n$ (Δ). Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y=-2x+5$ (d) và có duy nhất môt điểm chung với (P).

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases}x+2y=4\\3x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-2y\\3(4-2y)-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-2y\\-7y=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

b)

(a) Đồ thị (P)



(b) Ta có $\Delta \parallel d$ nên ta có $\begin{cases} m=-2 \\ m \neq 5 \end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (P) là:

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2x + n \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + n = 0 \ (*)$$

Δ tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}n = 0 \Leftrightarrow n = 2$ (thỏa điều kiện).

Vậy $\begin{cases} m=-2 \\ n=2 \end{cases}$

Câu 3. Cho hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 5 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ rồi đóng lại, sau đó mở vòi thứ hai chảy trong 1 giờ thì ta được $\frac{1}{4}$ bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi $x(h)$ là thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể nếu mở riêng $(x > 5)$.

$y(h)$ là thời gian vòi thứ hai chảy đầy bể nếu mở riêng $(y > 5)$.

Trong 1 h:

- Vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể.
- Vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể.
- Cả hai vòi chảy được $\frac{1}{5}$ bể.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5} \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{y}=\frac{3}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=\frac{20}{3} \end{cases}$

Vậy nếu mở riêng từng vòi thì thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể là $20h$, thời gian vòi thứ 2 chảy đầy bể là $\frac{20}{3}h$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 4. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+5=0$ (1), với x là ẩn số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=2$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$$2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$$

Lời giải.

a) Với $m=2$, phương trình (1) trở thành:
$x^2-6x+9=0\Leftrightarrow(x-3)^2=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt
$\Delta'=(m+1)^2-(m^2+5)>0\Leftrightarrow m^2+2m+1-m^2-5>0\Leftrightarrow 2m-4>0\Leftrightarrow m>2$
Khi đó: $\begin{cases}S=x_1+x_2=2(m+1)=2m+2\\P=x_1x_2=m^2+5\end{cases}$
$2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0\Leftrightarrow 2(m^2+5)-5(2m+2)+8=0$
$\Leftrightarrow 2m^2-10m+8=0$ $(a+b+c=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\text{ (loại)}\\m=4\text{ (thỏa)}\end{array}\right.$. Vậy $m=4$.

Câu 5. Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và D là hình chiếu vuông góc của B trên AO sao cho D nằm giữa A và O. Gọi M là trung điểm BC, N là giao điểm của BD và AC, F là giao điểm của MD và AC, E là giao điểm thứ hai của BD với đường tròn (O), H là giao điểm của BF và AD. Chứng minh rằng:

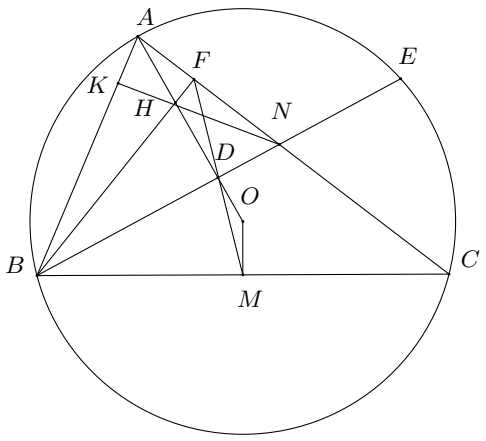
a) Tứ giác $BDOM$ nội tiếp và $\widehat{MOD}+\widehat{NAE}=180^\circ$.

b) DF song song với CE, từ đó suy ra $NE.NF=NC.ND$.

c) CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCE}$.

d) HN vuông góc với AB.

Lời giải.



a) Ta có $BD \perp OD$ nên $\widehat{BDO} = 90°$.
M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$ hay $\widehat{BMO} = 90°$.
Vậy tứ giác $BDOM$ nội tiếp đường tròn (O).
Ta có $\widehat{MBD} + \widehat{MDO} = 180°$.
Mà $\widehat{MBD} = \widehat{NAE}$ (cùng chắn cung $\widehat{EC}$).
Do đó $\widehat{MDO} + \widehat{NAE} = 180°$.

b) Xét tam giác BCE ta có D là trung điểm của BE (do $OD \perp BE$) và M là trung điểm của BC nên MD là đường trung bình tam giác BCE.
Do đó $MD \parallel EC$.
Vậy $DF \parallel CE$.
Ta có ΔNDF đồng dạng với ΔNEC nên $\dfrac{ND}{NE} = \dfrac{NF}{NC} \Leftrightarrow NE.NF = NC.ND$.

c) Ta có $\Delta OBD = \Delta OED$ (do $BD = ED$, $OB = OE$, OD cạnh chung)
Do đó: $\widehat{BOD} = \widehat{EOD}$ nên $\widehat{AB} = \widehat{AE}$. Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ACE}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau). Vậy CA là tia phân giác của $\widehat{BCE}$

d) Ta có $\widehat{DFN} = \widehat{NCE}$ (góc sole trong do $NF \parallel EC$)
Mà $\widehat{NCE} = \widehat{NCM}$ (theo câu trên)
Nên $\widehat{DFN} = \widehat{NCM}$
Do đó ΔFMC cân tại M.
Suy ra $MF = MC = \dfrac{BC}{2}$.
ΔBFC có MF là đường trung tuyến và $MF = MC = \dfrac{BC}{2}$ nên ΔBFC vuông tại F.
Suy ra $BF \perp AN$.
Tam giác ABN có $BF \perp AN$, $AD \perp BN$ nên H là trực tâm của ΔABN.
Vậy $NH \perp AB$.

Câu 6. Một cốc nước có dạng hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, chiều cao bằng 12cm và chứa một lượng nước cao 10 cm. Người ta thả từ từ 3 viên bi làm bằng thủy tinh có cùng đường kính bằng 2 cm vào cốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi h (cm) $(h > 0)$ là chiều cao mực nước tăng thêm.
Tổng thể tích của ba viên bi là: $V_1 = 3.\dfrac{4}{3}.3,14.1^3 = 4.3,14.1 = 12,56cm^3$.
Ta có: $V_1 = 3,14.3^2.h = 12,56 \Leftrightarrow h = \dfrac{4}{9}cm$.
Mực nước trong cốc lúc này cao $10 + \dfrac{4}{9} = \dfrac{94}{9}$ cm.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 91

ĐỀ THI VÀO 10 PTNK HỒ CHÍ MINH, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+2m^2+4m+1=0$ (1) với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Chứng minh rằng $\left|\dfrac{x_1+x_2}{2}\right|<1$.

b) Giả sử các nghiệm x_1, x_2 khác 0, chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{|x_1|}}+\dfrac{1}{\sqrt{|x_2|}}\geq 2\geq |x_1|+|x_2|$.

Lời giải.

a) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta=-m^2-2m>0\Leftrightarrow -2<m<0.$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét ta có $x_1+x_2=2(m+1)$. Suy ra $\left|\dfrac{x_1+x_2}{2}\right|=|m+1|<1$ (do $-2<m<0$).

b) Ta có $m^2+2m+1\geq 0\Rightarrow 2m^2+4m+1\geq -1$. Mặt khác, $m(m+2)<0\Rightarrow 2(m+1)^2\geq 0\Rightarrow 2m^2+4m+1<1$.
Do đó, $|2m^2+4m+1|\leq 1$ (1).
Xét $|x_1|+|x_2|\leq 2\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|\leq 4$
$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|\leq 4$
$\Leftrightarrow 4(m+1)^2-2(2m^2+4m+1)+2|2m^2+4m+1|\leq 4$
$\Leftrightarrow |2m^2+4m+1|\leq 1$ (do (1)).
Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{|x_1|}}+\dfrac{1}{\sqrt{|x_2|}}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{|x_1x_2|}}}\geq 2$ (đúng vì $|x_1x_2|=|2m^2+4m+1|\leq 1$).
Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{|x_1|}}+\dfrac{1}{\sqrt{|x_2|}}\geq 2\geq |x_1|+|x_2|$.

Câu 2. Cho x, y là hai số nguyên với $x>y>0$.

a) Chứng minh rằng nếu x^3-y^3 chia hết cho 3 thì x^3-y^3 chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng nếu x^3-y^3 chia hết cho $x+y$ thì $x+y$ không là số nguyên tố.

c) Tìm tất cả những giá trị k nguyên dương sao cho $x^k\smile y^k$ chia hết cho 9 với mọi x, y mà xy không chia hết cho 3.

Lời giải.

a) Ta có $x^3-y^3=(x-y)^3-3xy(x-y)$ chia hết cho 3 nên $(x-y)^3$ chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên $x-y$ chia hết cho 3. Suy ra $\begin{cases}(x-y)^3\vdots 9\\ 3xy(x-y)\vdots 9\end{cases}\Rightarrow x^3-y^3\vdots 9.$

b) Giả sử ngược lại $x+y$ là số nguyên tố. Ta có

$$x^3-y^3=(x-y)\left[(x+y)^2-xy\right]=(x-y)(x+y)^2-xy(x-y)\vdots(x+y).$$

Suy ra $(x-y)xy\vdots(x+y)$, mà $x+y$ nguyên tố nên $\left[\begin{array}{l}(x-y)\vdots(x+y)\\ x\vdots(x+y)\\ y\vdots(x+y)\end{array}\right.$ (vô lý vì $0<x,y,x-y<x+y$).

c) Cho $x=2,y=1$ suy ra xy không chia hết cho 3.
Ta có $x^k-y^k=2^k-1\vdots 9\Rightarrow 2^k-1\vdots 3$.
Do $2\equiv -1(\text{mod}3)\Rightarrow 2^k-1\equiv(-1)^k-1(\text{mod}3)$ nên k là số chẵn.
Ta chứng minh $k=6n\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$.
Thật vậy,
- Với $k=6n+2\Rightarrow 2^k-1=2^{6n+2}-1\equiv 3(\text{mod}9)$. Suy ra $k=6n+2$ không thỏa mãn.
- Với $k=6n+4\Rightarrow 2^k-1=2^{6n+4}-1\equiv 6(\text{mod}9)$. Suy ra $k=6n+4$ không thỏa mãn.
Vậy $k=6n$.
Ta lại có $x^k\vee y^k=x^{6n}\vee y^{6n}=(x^6)^n\vee(y^6)^n\vdots(x^6\vee y^6)$. Do xy không chia hết cho 3 nên cả x,y đều không chia hết cho 3.
- **TH1.** $x\equiv y(\text{mod}3)\Rightarrow x^3\vee y^3\vdots 3$. Theo câu (1) suy ra $x^3\vee y^3\vdots 9\Rightarrow x^k-y^k\vdots 9$.
- **TH2.** x,y không cùng số dư khi chia chia cho 3.
Không mất tính tổng quát, giả sử $\begin{cases}x=3a+1\\ y=3b+2\end{cases}$.
Ta có $x^3+y^3=(3a+1)^3+(3b+2)^3=27a^3+27a^2+9a+27b^3+27b^2+9b+9\vdots 9$.
Suy ra $x^6-y^6=(x^3-y^3)(x^3+y^3)\vdots 9\Rightarrow x^k-y^k\vdots 9$.
Vậy tập tất cả các số thỏa mãn đề bài là $k=6n$ với n là số tự nhiên.

Câu 3.

a) Cho ba số $a,b,c\geq -2$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=0$. Chứng minh rằng $a=b=c=0$.

b) Trên mặt phẳng Oxy, cho ba điểm A,B,C phân biệt với $OA=OB=OC=1$. Biết rằng $x_A^2+x_B^2+x_C^2+6x_Ax_Bx_C=0$. Chứng minh rằng $\min\{x_A,x_B,x_C\}<-\dfrac{1}{3}$ (ký hiệu x_M là hoành độ của điểm M).

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Trong ba số a, b, c phải có ít nhất 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là a, b. Ta có

$$a^2+b^2+c^2+abc=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+c^2+ab(c+2)=0(*).$$

Do $(a-b)^2, c^2, ab(c+2) \geq 0$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=0 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0.$

b) Giả sử ngược lại $\min\{x_A, x_B, x_C\} \geq -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x_A, x_B, x_C \geq -\dfrac{1}{3}$. Trong 3 số x_A, x_B, x_C có 2 số cùng dấu, giả sử là x_A, x_B.
Ta có

$$x_A^2+x_B^2+x_C^2+6x_Ax_Bx_C=(x_A-x_B)^2+x_C^2+2x_Ax_B(3x_C+1)=0.$$

Suy ra $x_A=x_B=x_C=0$, vậy A, B, C đều thuộc trục tung. Hơn nữa $OA=OB=OC=1$ nên ít nhất có hai điểm trùng nhau (vô lý). Vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với tâm O. Gọi D là điểm thay đổi trên cạnh BC (D khác B, C). Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và ACD lần lượt cắt AC và AB tại E và F (E, F khác A). Gọi K là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AEKF$ nội tiếp.

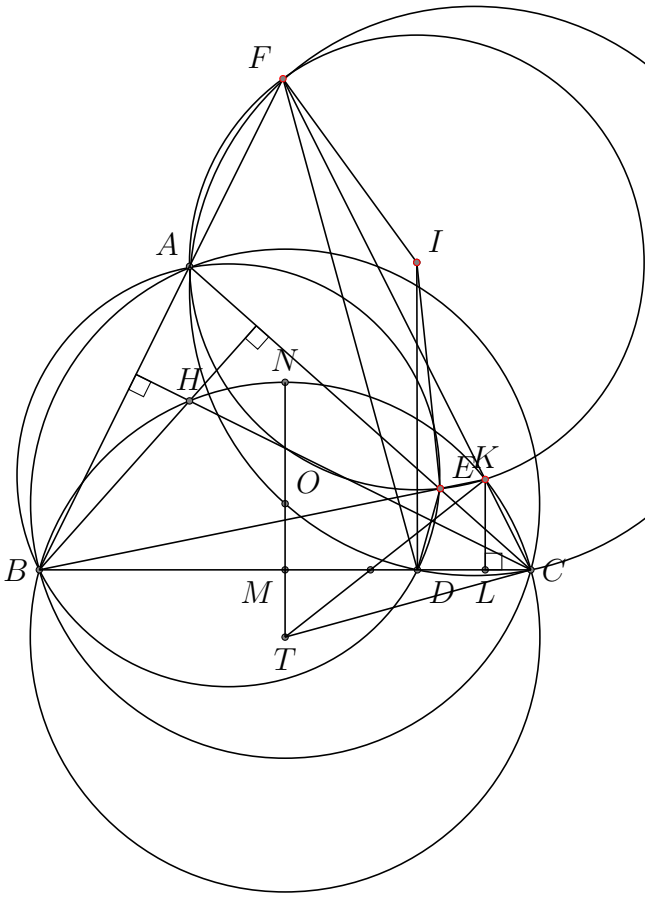
b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu A, O, D thẳng hàng thì HK song song với BC.

c) Ký hiệu S là diện tích tam giác KBC. Chứng minh rằng khi D thay đổi trên cạnh BC ta luôn có $S \leq \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 \tan\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh rằng $BF.BA-CE.CA=BD^2-CD^2$ và ID vuông góc với BC.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Tứ giác $AEDB$ nội tiếp suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ADB}$, tứ giác $AFDC$ nội tiếp suy ra $\widehat{AFC} = \widehat{ADC}$.
Ta có $\widehat{AEK} + \widehat{AFD} = \widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180°$. Vậy tứ giác $AEKB$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{BKC} = \widehat{FKE} = 180° - \widehat{BAC}$ và $\widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$.
Suy ra $\widehat{BKC} = \widehat{BHC} \Leftrightarrow BHKC$ nội tiếp.
Suy ra $\widehat{FKH} = \widehat{HBC} = \widehat{HAC}$ và $\widehat{KCB} = \widehat{BAD}$ (do $AFDC$ nội tiếp).
Khi A, O, D thẳng hàng, ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BAO} = \widehat{HAC}$. Do đó, $\widehat{FKH} = \widehat{KCB}$ suy ra $KH \parallel BC$.

c) Ta có K thuộc cung BHC của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tâm T. Gọi M là trung điểm của BC và N là điểm chính giữa cung BHC và X là giao điểm của TK và BC.
Dựng $KL \perp BC$. Ta có $KL \leq KX = TK \breve{} TD \leq TN \breve{} TM = MN$.
Ta có $\widehat{BNC} = \widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$, suy ra $\widehat{NBM} = 90° - \widehat{BNM} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.
Khi đó, $\frac{MN}{BM} = \tan\frac{\widehat{NBM}}{2} = \tan\frac{\widehat{BAC}}{2}$, suy ra $MN = \tan\frac{\widehat{BAC}}{2}.\frac{BC}{2}$.
Do đó, $S_{BKC} = \frac{1}{2}.KL.BC \leq \frac{BC^2}{4}.\tan\frac{\widehat{BAC}}{2}$.

d) Xét tam giác BCF và tam giác BAD có $\widehat{BCF} = \widehat{BAD}$ và góc $\widehat{B}$ chung.
Suy ra $\Delta BCF \backsim \Delta BAD \Leftrightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BF}{BC} \Rightarrow BF.BA = BD.BC$.
Chứng minh tương tự, ta có $CE.CA = CB.CD$.
Suy ra

$$BF.BA - CE.CA = BC.BD - BC.CD = BC(BD - CD) = (BD + CD)(BD - CD) = BD^2 - CD^2.$$

Ta có
$\widehat{ADF} = \widehat{ACF} = \widehat{AEB} - \widehat{EKC} = \widehat{AEB} - \widehat{A}$ và $\widehat{ADE} = \widehat{ABE} = \widehat{AFC} - \widehat{BAC}$.
Suy ra $\widehat{EDF} = \widehat{ADF} + \widehat{ADE} = \widehat{AEB} + \widehat{AFC} - 2\widehat{A} = 180^\circ - 2\widehat{BAC} = \widehat{EIF}$.
Do đó tứ giác $IEDF$ nội tiếp, hơn nữa $IE = IF$ nên DI là phân giác $\widehat{EDF}$.
Mặt khác $\widehat{FDB} = \widehat{BAC} = \widehat{CDE}$, suy ra DB, DI lần lượt là phân giác ngoài và phân giác trong của $\widehat{EDF}$ nên $ID \perp BC$.

Câu 5. Lớp 9A có 6 học sinh tham gia một kỳ thi toán và nhận được 6 điểm số khác nhau là các số nguyên từ 0 đến 20. Gọi m là trung bình cộng các điểm số của 6 học sinh trên. Ta nói rằng hai học sinh (trong 6 học sinh trên) lập thành một cặp "hoàn hảo" nếu như trung bình cộng điểm số của hai em đó lớn hơn m.

a) Chứng minh rằng không thể chia 6 học sinh trên thành 3 cặp mà mỗi cặp đều "hoàn hảo".

b) Có thể chia được nhiều nhất bao nhiêu cặp "hoàn hảo"?

Lời giải.

a) Giả sử ta có thể chia 6 học sinh thành 3 cặp đều hoàn hảo. Gọi số điểm của các cặp học sinh này lần lượt là $(x_1; x_2), (x_3; x_4), (x_5; x_6)$.
Ta có $\dfrac{x_1 + x_2}{2} > m; \dfrac{x_3 + x_4}{2} > m; \dfrac{x_5 + x_6}{2} > m$. Suy ra

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \frac{x_5 + x_6}{2} > 3m$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{2} > 3.\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} \text{ (vô lý).}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

b) Xét tập $A = \{0, 16, 17, 18, 19, 20\}$ với $m = 15$ có 10 cặp hoàn hảo (1).
Giả sử có nhiều hơn hoặc bằng 11 cặp hoàn hảo. Gọi tên 6 thí sinh là A, B, C, D, E, F.
Với tổng 15 cặp thí sinh, ta chia thành các nhóm như sau
- Nhóm 1. $\{AB; CD; EF\}$
- Nhóm 2. $\{AC; BE; DF\}$
- Nhóm 3. $\{AD; CE; BF\}$
- Nhóm 4. $\{AE; BD; CF\}$
- Nhóm 5. $\{AF; BE; CD\}$

Do có ít nhất 11 cặp hoàn hảo mà chỉ có 5 nhóm nên theo nguyên lý Đi-rích-lê, có ít nhất 1 nhóm đủ 3 cặp thí sinh. Mà theo câu 1 điều này là vô lý (2).
Từ (1) và (2) vậy có ít nhất 10 cặp hoàn hảo.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 92

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải phương trình: $3x+7\sqrt{x-4}=14\sqrt{x+4}-20$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}6x+4y+2=(x+1)^2\\6y+4x-2=(y-1)^2.\end{cases}$

Lời giải.

a) Xét phương trình $3x+7\sqrt{x-4}=14\sqrt{x+4}-20$.
Với điều kiện xác định $x\geq 4$, phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned}&3x+20-7(2\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})=0\\\Leftrightarrow&3x+20-7.\frac{(2\sqrt{x+4})^2-(\sqrt{x-4})^2}{2\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}=0\\\Leftrightarrow&(3x+20)(1-\frac{7}{2\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}})=0\\\Leftrightarrow&2\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=7 \text{ (vì điều kện } x\geq 4 \text{ nên } 3x+20>0)\\\Leftrightarrow&2(\sqrt{x+4}-3)+(\sqrt{x-4}-1)=0\\\Leftrightarrow&(x-5)\left(\frac{2}{\sqrt{x+4}+3}+\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right)=0\\\Leftrightarrow&x=5 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=5$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases}6x+4y+2=(x+1)^2 & (1)\\6y+4x-2=(y-1)^2. & (2)\end{cases}$
Trừ theo vế phương trình (1) cho phương trình (2), ta được:

$$\begin{aligned}&6x+4y+2-6y-4x+2=(x+1)^2-(y-1)^2\\\Leftrightarrow&2x-2y+4=(x+1)^2-(y-1)^2\\\Leftrightarrow&2(x-y+2)=(x+y)(x-y+2)\\\Leftrightarrow&(x-y+2)(x+y-2)=0\\\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}y=x+2\\y=2-x.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

- Trường hợp 1: $y = x + 2$, thay vào (1) ta được:

$$x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 9. \end{array}\right.$$

Với $x = -1$ ta được $y = 1$. Với $x = 9$ ta được $y = 11$.

- Trường hợp 2: $y = 2 - x$, thay vào (1) ta được: $x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Với $x = 3$ ta được $y = -1$. Với $x = -3$ ta được $y = 5$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 1), (9; 11), (3; -1), (-3; 5)$.

Câu 2. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $S(n) = n^2 - 2017n + 10$, với $S(n)$ là tổng các chữ số của n.

Lời giải.

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Với mọi số tự nhiên n ta luôn có $S(n) \leq n$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử số tự nhiên n có $m+1$ chữ số ($m \geq 0$), có dạng $\overline{a_m a_{m-1} \dots a_0}$, trong đó $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0 \in \{0, 1, 2 \dots 9\}, a_m \neq 0$. Ta có:

$$n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_0} = \sum_{i=0}^{m} a_i.10^i \geq \sum_{i=0}^{m} a_i = S(n).$$

Trở lại bài toán. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $n = 0$. Hiển nhiên không thỏa mãn.
- Trường hợp 2: $1 \leq n \leq 2016$. Ta có:

$$S(n) = n^2 - 2017n + 10 < n^2 - 2017n + 2016 = (n-1)(n-2016) \leq 0 \text{ (mâu thuẫn)}.$$

- Trường hợp 3: $n = 2017$. Nhận thấy $S(n) = 10 = 2017^2 - 2017.2017 + 10 = n^2 - 2017n + 10$. Do vậy $n = 2017$ thỏa mãn.
- Trường hợp 4: $n > 2017$. Khi đó $n - 2017 \geq 1 \Leftrightarrow n^2 - 2017n \geq n$. Khi đó

$$S(n) = n^2 - 2017n + 10 > n^2 - 2017n \geq n \text{ (mâu thuẫn với bổ đề)}.$$

Kết luận: $n = 2017$.

Câu 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $c \geq a$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Với $x, y > 0$ và $xy \geq 1$ thì $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}}$. $(*)$

Chứng minh. Thật vậy $(*)$ tương đương:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \\
&\Leftrightarrow (x+y+2)\left(1+\sqrt{xy}\right) \geq 2xy + 2x + 2y + 2 \\
&\Leftrightarrow x + y + (x+y)\sqrt{xy} + 2 + 2\sqrt{xy} \geq 2xy + 2x + 2y + 2 \\
&\Leftrightarrow (x+y)\sqrt{xy} + 2\sqrt{xy} - 2xy - (x+y) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x+y)\left(\sqrt{xy} - 1\right) + 2\sqrt{xy}\left(1 - \sqrt{xy}\right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} - 1\right)\left(x + y - 2\sqrt{xy}\right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} - 1\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \geq 0 \text{ (đúng).}
\end{aligned}$$

Như vậy, bổ đề đã được chứng minh. Đồng thời, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ hoặc $xy = 1$. Trở lại bài toán. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{a}{a+b} \quad (1)$$

$$\left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{b}{b+c} \quad (2)$$

$$\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{c}{c+a}. \quad (3)$$

Từ $(1), (2), (3)$ suy ra:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} - \frac{3}{2}.$$

Áp dụng bổ đề với $x = \dfrac{b}{a}, y = \dfrac{c}{b}$, ta được:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} = \frac{1}{1+\dfrac{b}{a}} + \frac{1}{1+\dfrac{c}{b}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\dfrac{c}{a}}} \text{ (do } c \geq a \text{ nên } \frac{c}{a} \geq 1).$$

Như thế:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} - \frac{3}{2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\dfrac{c}{a}}} + \frac{4}{1+\dfrac{a}{c}} - \frac{3}{2}.$$

Ta còn phải chứng minh:

$$\frac{2}{1+\sqrt{\dfrac{c}{a}}} + \frac{4}{1+\dfrac{a}{c}} - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}. \quad (**)$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{a}{c}}$, điều kiện $0 \leq t \leq 1$. Khi đó bất đẳng thức $(**)$ trở thành:

$$\frac{2t}{1+t} + \frac{4}{1+t^2} - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2t + 2t^3 + 4 + 4t}{(t^2+1)(t+1)} \geq 3$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow 2t^3+6t+4 \geq 3\left(t^3+t^2+t+1\right) \Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+1\right)+3t(t-1) \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+4t+1\right) \leq 0 \text{ (đúng)}.$$

Vậy $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^2+4\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^2 \geq \dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{4c}{c+a}-\dfrac{3}{2} \geq \dfrac{3}{2}$.

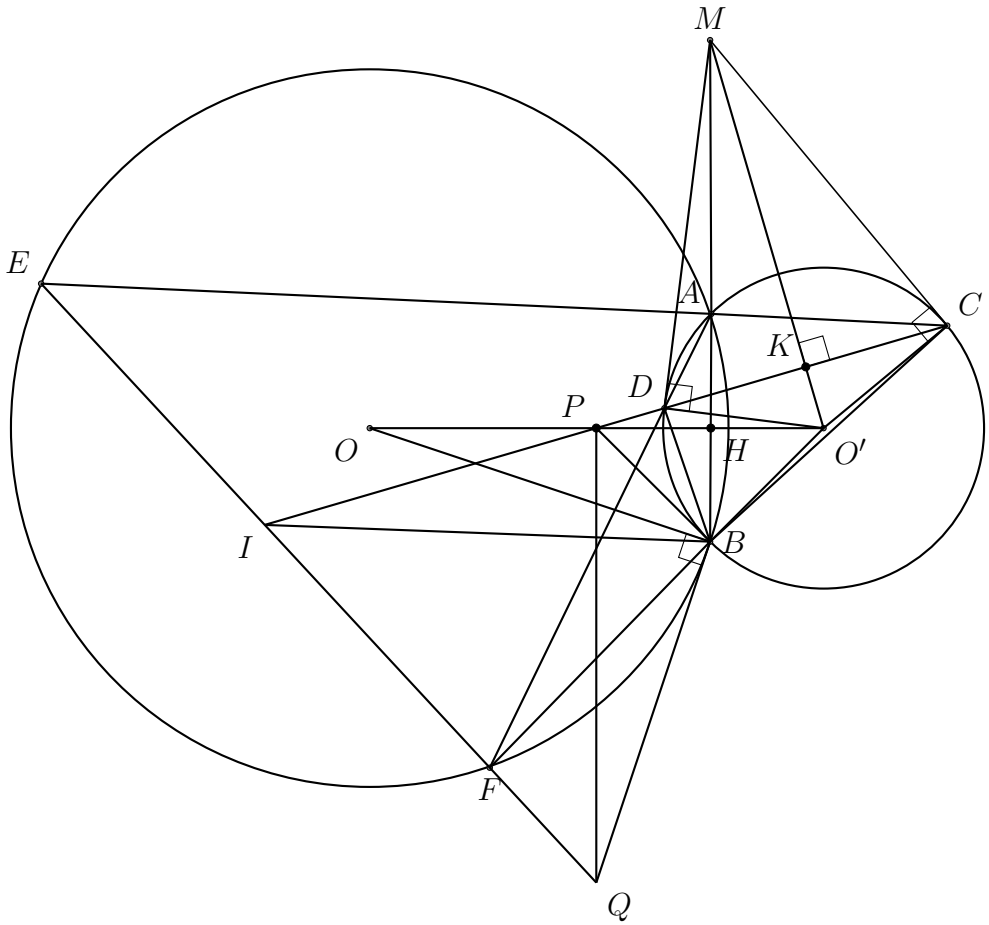
Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M khác A. Qua M kẻ tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (O') (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong (O)).

a) Chứng minh $AD.BC = AC.DB$.

b) Các đường thẳng AC, AD cắt (O) lần lượt tại E, F (E, F khác A). Chứng minh đường thẳng CD đi qua trung điểm của EF.

c) Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

Lời giải.



a) Xét ΔMDA và ΔMBD có chung góc AMD, $\widehat{MDA} = \widehat{MBD}$ (cùng bằng một nửa số đo của cung $\overset{\frown}{AD}$). Do đó $\Delta MDA \sim \Delta MBD$ (g-g). Suy ra $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{MA}{MD}$. (1)

Chứng minh tương tự, ta được $\Delta MCA \sim \Delta MBC \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{MA}{MC}$. (2)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $MD = MC$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$. (4)

Do đó $AC.BD = AD.BC$.

Lưu ý. Tứ giác $ACBD$ được gọi là tứ giác điều hòa (tứ giác được tạo thành bởi hai tiếp tuyến và một cát tuyến cùng đi qua một điểm) và $AC.BD = AD.BC$ là một tính chất cơ bản của tứ giác điều hòa.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng CD và EF. Ta có $ABFE$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{BFE} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Dẫn tới tứ giác $FIDB$ nội tiếp. Như vậy $\widehat{FIB} = \widehat{FDB} = \widehat{ACB}$. Suy ra $\Delta FIB \sim \Delta ACB$ (g-g). Bởi vậy nên $\dfrac{IF}{BI} = \dfrac{CA}{CB}$. (5)

Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BEI}$ (cùng bằng một nửa số đo của cung $\widehat{BF}$), $\widehat{BDA} = \widehat{BIE}$ (cùng bù với $\widehat{BDF} = \widehat{BIF}$), suy ra $\Delta BDA \sim \Delta BIE$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{EI}{BI} = \dfrac{DA}{DB}$. (6)

Từ (4), (5), (6), ta có $\dfrac{IF}{BI} = \dfrac{IE}{BI} \Rightarrow IF = IE$. Vậy CD đi qua trung điểm của EF.

c) Gọi P, H lần lượt là giao điểm của OO' với CD và AB. Gọi K là giao điểm của CD với $O'M$. Do $OO' \perp AB$, $O'M \perp CD$, suy ra $\Delta O'HM \sim \Delta O'KP$ (g-g). Do đó:

$$\frac{O'H}{O'K} = \frac{O'M}{O'P} \Rightarrow O'H.O'P = O'K.O'M = O'C^2 = O'B^2.$$

Suy ra $\dfrac{O'H}{O'B} = \dfrac{O'B}{O'P} \Rightarrow \Delta HO'B \sim BO'P$ (c-g-c). Do đó $\widehat{O'BP} = \widehat{O'HB} = 90^\circ$. Suy ra $BP \perp O'B$ hay PB là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Tương tự, AP cũng là tiếp tuyến của (O'), từ đó suy ra (P) là điểm cố định. Qua B kẻ tiếp tuyến với (O), tiếp tuyến này cắt EF tại Q. Khi đó đường thẳng BQ cố định. Xét hai tam giác BDP và BFQ có $\widehat{BFQ} = \widehat{BDP}$ (do $BFID$ là tứ giác nội tiếp) và $\widehat{QBF} = \widehat{QEB} = \widehat{BAF} = \widehat{PBD}$. Suy ra $\Delta BDP \sim \Delta BFQ$ (g-g). Do đó $\widehat{BPD} = \widehat{BQF}$, dẫn tới tứ giác $BPIQ$ nội tiếp. Như vậy $\widehat{BPQ} = \widehat{BIQ} = \widehat{BDF} = \widehat{BCA} = \widehat{BO'O}$. Dễ chứng minh $\widehat{O'BO} = \widehat{QBP}$, suy ra $\Delta PBQ \sim \Delta O'BO$. (g-g). Do đó $\dfrac{BQ}{BO} = \dfrac{BP}{O'B} \Rightarrow BQ = \dfrac{BP.BO}{O'B}$ (không đổi). Từ đó ta được Q là điểm cố định. Vậy EF đi qua điểm cố định Q.

Câu 5. Trong đường tròn (O) có bán kính bằng 21 đơn vị, cho 399 điểm bất kì $A_1, A_2, \ldots, A_{399}$. Chứng minh rằng tồn tại vô số hình tròn có bán kính bằng 1 đơn vị nằm trong đường tròn (O) và không chứa điểm nào trong 399 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{399}$.

Lời giải.

Vẽ đường tròn (C) tâm (O) có bán kính 20 đơn vị. Ta có diện tích hình tròn (C) là: $S = 400\pi$. Vẽ các đường tròn $(C_1), (C_2), \ldots, (C_{399})$ có tâm $A_1, A_2, \ldots, A_{399}$ với bán kính 1 đơn vị. Khi đó, tổng diện tích của 399 hình tròn này là $S_1 = 399\pi < S$. Do vậy, 399 hình tròn này không phủ hết hình tròn (C). Từ đó suy ra có vô hạn các điểm $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ nằm trong (C) nhưng không thuộc bất kỳ hình tròn nào trong 399 hình tròn $(C_1), (C_2), \ldots, (C_{399})$. Vì thế, các hình tròn tâm $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ bán kính 1 đơn vị luôn nằm trong đường tròn tâm O bán kính 21 nhưng không chứa điểm nào trong 399 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{399}$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 93

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho 3 số $x,\ y,\ z$ đôi một khác nhau và thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=0$. Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{2018(x-y)(y-z)(z-x)}{2xy^2+2yz^2+2zx^2+3xyz}$.

b) Rút gọn biểu thức : $Q=\dfrac{1+ax}{1-ax}\sqrt{\dfrac{1-bx}{1+bx}}$ với $x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}$ và $0<a<b<2a$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}2xy^2+2yz^2+2zx^2+3xyz&=\left(2xy^2+xyz\right)+2yz^2+\left(2zx^2+2xyz\right)\\&=xy\left(2y+z\right)+2yz^2+2xz\left(x+y\right)\\&=xy\left(2y+z\right)+2yz^2-2xz^2\\&=xy(y-x)+2z^2(y-x)=(y-x)(xy+2z^2)\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}(y-x)(xy+2z^2)&=(y-x)(xy+z^2+z^2)\\&=(y-x)[xy+z^2-z\left(x+y\right)]\\&=(y-x)\left(x-z\right)\left(y-z\right)\end{aligned}$$

Suy ra $P=\dfrac{2018(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=2018$.

b) Ta có $ax=\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}$.

Nên

$$\begin{aligned}\frac{1+ax}{1-ax}&=\frac{1+\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{1-\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{2a-b}}{\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}}\\&=\frac{2a+2\sqrt{2ab-b^2}}{2b-2a}=\frac{a+\sqrt{2ab-b^2}}{b-a}.\end{aligned}$$

Tương tự $bx=\dfrac{\sqrt{2ab-b^2}}{a}$.

Do đó

$$\frac{1-bx}{1+bx}=\frac{1-\dfrac{\sqrt{2ab-b^2}}{a}}{1+\dfrac{\sqrt{2ab-b^2}}{a}}=\frac{a-\sqrt{2ab-b^2}}{a+\sqrt{2ab-b^2}}$$
$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{\left(a+\sqrt{2ab-b^2}\right)^2}=\frac{(a-b)^2}{\left(a+\sqrt{2ab-b^2}\right)^2}.$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{1-bx}{1+bx}}=\frac{|a-b|}{a+\sqrt{2ab-b^2}}=\frac{b-a}{a+\sqrt{2ab-b^2}}.$$

Do vậy $Q=\dfrac{a+\sqrt{2ab-b^2}}{b-a}.\dfrac{b-a}{a+\sqrt{2ab-b^2}}=1.$

Câu 2.

a) Giải phương trình: $x\sqrt{2x+3}+3(\sqrt{x+5}+1)=3x+\sqrt{2x^2+13x+15}+\sqrt{2x+3}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+4y-13+(x-3)\sqrt{x^2+y-4}=0\\(x+y-3)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x+y+1}=x+3y-5\end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $\begin{cases}2x+3\geq 0\\x+5\geq 0\\2x^2+13x+15\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3\geq 0\\x+5\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{3}{2}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x+3}\,(x-1)+3\sqrt{x+5}+3-3x-\sqrt{(2x+3)\,(x+5)}=0\\&\Leftrightarrow\sqrt{2x+3}\,(x-1)-3\,(x-1)+\sqrt{x+5}\left(3-\sqrt{2x+3}\right)=0\\&\Leftrightarrow(x-1)\left(\sqrt{2x+3}-3\right)-\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\sqrt{x+5}=0\\&\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+5}-x+1\right)=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+3}=3\\\sqrt{x+5}=x-1\end{array}\right.\end{aligned}.$$

Với $\sqrt{2x+3}=3$ ta có $x=3$.

Với $\sqrt{x+5}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geq 0\\x+5=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\x^2-3x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3,\ x=4$.

b) Điều kiện: $\begin{cases}y\geq 0\\x+y+1\geq 0\\x^2+y-4\geq 0\end{cases}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}&(x+y-3)(\sqrt{y}-1)+(y-1)(\sqrt{x+y+1}-2)=0\\&\Leftrightarrow \frac{(x+y-3)(y-1)}{\sqrt{y}+1}+\frac{(x+y-3)(y-1)}{\sqrt{x+y+1}+2}=0\\&\Leftrightarrow (x+y-3)(y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+y+1}+2}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=3-x\end{array}\right..\end{aligned}$$

Với $y=1$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$(x^2-9)+(x-3)\sqrt{x^2-3}=0,$$

Hay

$$(x-3)(x+3+\sqrt{x^2-3})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=0\\x+3+\sqrt{x^2-3}=0\end{array}\right..$$

Thay $y=3-x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x^2-4x-1+(x-3)\sqrt{x^2-x-1}=0,$$

Hay

$$(x^2-x-1)-(3-x)\sqrt{x^2-x-1}-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x-1}=3\\\sqrt{x^2-x-1}=-x\end{array}\right..$$

Giải các phương trình này ta được $x=\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$ và $x=-1\Rightarrow y=4$.

Vậy nghiệm của hệ là $(3;\ 1)$, $(-1;\ 4)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{41}}{2};\ \dfrac{5+\sqrt{41}}{2}\right)$.

Câu 3.

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+5y^2-4xy+4x-4y+3=0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x,\ y)$ thỏa mãn: x^2+3y và y^2+3x là số chính phương.

Lời giải.

a) Ta viết lại phương trình như sau

$$x^2+4(1-y)x+5y^2-4y+3=0. \qquad (*)$$

Vì (*) có nghiệm x nê $\Delta'=5-(y+2)^2\geq 0\Leftrightarrow (y+2)^2\leq 5$.
Do y nguyên nên $y\in\{0;-1;-2;-3;-4\}$.

+) Với $y=0$ thay vào (*) ta được: $x^2+4x+3=0\Leftrightarrow x=-1;\ x=-3$.

+) Với $y=-1$ thay vào (*) ta được: $x^2+8x+12=0\Leftrightarrow x=-6;\ x=-2$.

+) Với $y=-2$ thay vào (*) ta được: $x^2+12x+31=0\Leftrightarrow x=-6\pm\sqrt{5}$ (loại).

+) Với $y=-3$ thay vào (*) ta được: $x^2+16x+60=0 \Leftrightarrow x=-10;\ x=-6$.

+) Với $y=-4$ thay vào (*) ta được: $x^2+20x+99=0 \Leftrightarrow x=-11;\ x=-9$.

Vậy phương trình có các cặp nghiệm nguyên là:

$(-1;\ 0),\ (-3;\ 0),\ (-6;\ -1),\ (-2;\ -1),\ (-10;\ -3),\ (-6;\ -3),\ (-9;\ -4),\ (-11;\ -4)$.

b) Nếu $x=y$ thì $x^2+3y=y^2+3x=x^2+3x$. Đặt $x^2+3x=a^2$ với $x,\ a\in\mathbb{N}*$.
Ta có:

$$4x^2+12x-4a^2=0 \Leftrightarrow (2x+3)^2-(2a)^2=9 \Leftrightarrow (2x+3-2a)(2x+3+2a)=9=1\cdot 9.$$

Do $2x+3-2a<2x+3+2a$ nên ta có

$$\begin{cases}2x+3-2a=1\\2x+3+2a=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\a=2\end{cases}.$$

Suy ra $x=y=1$ thỏa mãn.
Nếu $x\neq y$, do vai trò của $x,\ y$ như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x<y$.
Khi đó $y^2<y^2+3x<y^2+3y<(y+2)^2$.
Do $x,\ y$ nguyên dương suy ra

$$y^2+3x=(y+1)^2 \Leftrightarrow y^2+3x=y^2+2y+1 \Leftrightarrow y=\frac{3x-1}{2}$$

Ta có: $x^2+3y=\dfrac{2x^2+9x-3}{2}$. Đặt $\dfrac{2x^2+9x-3}{2}=b^2$ với $x,\ b\in\mathbb{N}*$. Ta có

$$\begin{aligned}2x^2+9x-3=2b^2 &\Leftrightarrow 16x^2+72x-24-16b^2=0\\&\Leftrightarrow (4x+9)^2-(4b)^2=105\\&\Leftrightarrow (4x+9-4b)(4x+9+4b)=105=1.105=3.35=5.21=7.15.\end{aligned}$$

Vì $4x+9-4b<4x+9+4b$ nên có các trường hợp sau:

+) $\begin{cases}4x+9-4b=1\\4x+9+4b=105\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=11\Rightarrow y=16\\b=13\end{cases}$ (thỏa mãn).

+) $\begin{cases}4x+9-4b=3\\4x+9+4b=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\2b=2x+3\end{cases}$ (loại).

+) $\begin{cases}4x+9-4b=5\\4x+9+4b=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow y=1\\b=2\end{cases}$ (loại).

+) $\begin{cases}4x+9-4b=7\\4x+9+4b=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\2b=2x+1\end{cases}$ (loại).

Vậy các số nguyên dương $(x;\ y)$ thỏa mãn là $(1;\ 1),\ (11;\ 16),\ (16;\ 11)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

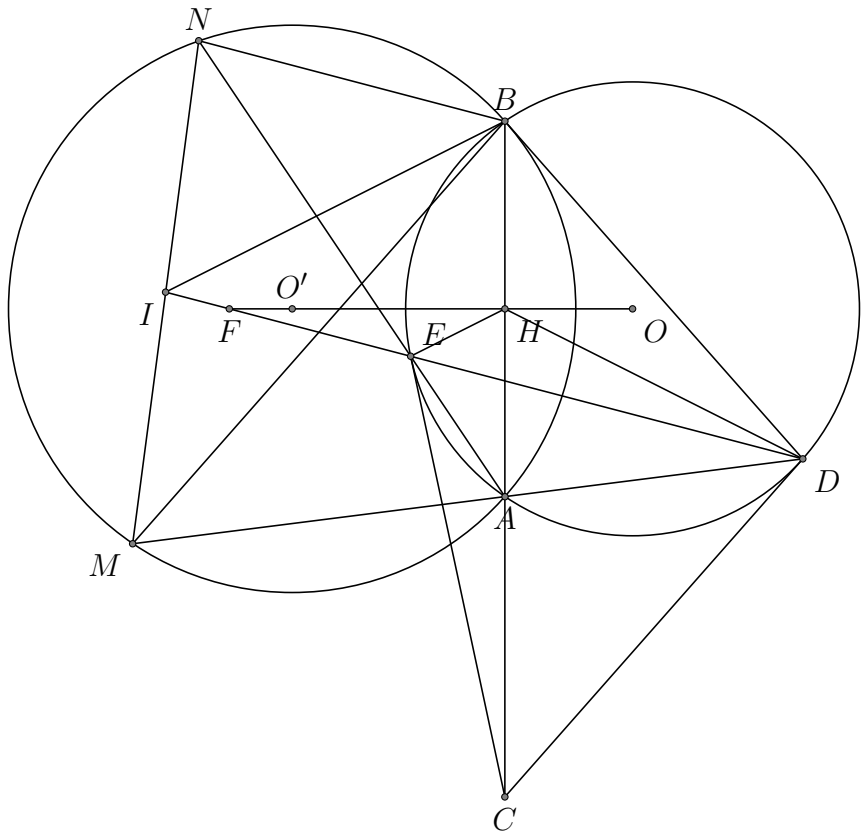
Câu 4. Cho hai đường tròn $(O;\ R)$, $(O';\ R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ ($A,\ O,\ B$ không thẳng hàng). Trên tia đối của tia AB lấy điểm C, kẻ tiếp tuyến CD, CE với (O), trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong (O'). Đường thẳng $AD,\ AE$ cắt (O') lần lượt tại $M,\ N$ ($M,\ N$ khác A). Đường thẳng DE cắt MN tại I, OO' cắt AB và DI lần lượt tại H và F.

a) Chứng minh: $FE.HD = FD.HE$.

b) Chứng minh: $MB.EB.DI = IB.AN.BD$.

c) Chứng minh: $O'I$ vuông góc với MN.

Lời giải.



a) (O) cắt (O') tại $A,\ B$ nên $OO' \perp AB$, do đó $\widehat{CHO} = 90^\circ$. (1)
Mặt khác $CD,\ CE$ là tiếp tuyến của (O) tại $D,\ E$ nên $\widehat{CDO} = \widehat{CEO} = 90^\circ$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $C,\ D,\ O,\ H,\ E$ cùng thuộc đường tròn đường kính CO.
Do đó $\begin{cases} \widehat{CHE} = \widehat{CDE} \\ \widehat{CHD} = \widehat{CED} \end{cases}$.
Mà $CD = CE$ nên $\widehat{CDE} = \widehat{CED}$, hay $\widehat{CHE} = \widehat{CHD}$.
Từ đó, ta có được HC là phân giác của góc $\widehat{DHE}$. Mặt khác $OO' \perp AB$ tại H hay $FH \perp HC$ tại H, suy ra HF là phân giác ngoài tại H của ΔDHE.
Suy ra $\dfrac{FE}{FD} = \dfrac{HE}{HD}$ hay $FE.HD = FD.HE$.

b) Trong (O') có: $\widehat{BMN} = \widehat{BAN}$.
Trong (O) có: $\widehat{BAN} = \widehat{BDE}$ nên $\widehat{BMN} = \widehat{BDE}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Suy ra $BDMI$ là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{MBI} = \widehat{MDI} = \widehat{ABE}$.
Xét hai tam giác ΔMIB và ΔAEB có: $\widehat{MBI} = \widehat{ABE}$, $\widehat{BMI} = \widehat{BAE}$, suy ra

$$\Delta MIB \backsim \Delta AEB \text{ suy ra } \frac{MB}{AB} = \frac{IB}{EB} \tag{3}$$

Xét hai tam giác ΔABN và ΔDBI có: $\widehat{BAN} = \widehat{BDI}$, $\widehat{BNA} = \widehat{BID}$, suy ra

$$\Delta ABN \backsim \Delta DBI \text{ suy ra } \frac{AB}{DB} = \frac{AN}{DI}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4), ta có

$$\frac{MB}{AB}.\frac{AB}{DB} = \frac{IB}{EB}.\frac{AN}{DI} \text{ hay } MB.EB.DI = IB.AN.DB.$$

c) Xét ΔIBN và ΔDBA có: $\widehat{BNI} = \widehat{BAD}$, $\widehat{BIN} = \widehat{BDA}$ (vì $BDMI$ là tứ giác nội tiếp). Suy ra

$$\Delta IBN \backsim \Delta DBA \text{ suy ra } \frac{IN}{IB} = \frac{DA}{DB}. \tag{5}$$

Xét ΔCDA và ΔCBD có: $\widehat{DCB}$ chung và $\widehat{CDA} = \widehat{CBD}$. Suy ra

$$\Delta CDA \backsim \Delta CBD \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{CD}{CB}$$

Mà $CD = CE$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{CE}{CB}$ (6)
Xét ΔCEA và ΔCBE có: $\widehat{BCE}$ chung; $\widehat{CEA} = \widehat{CBE}$. Suy ra

$$\Delta CEA \backsim \Delta CBE \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{EA}{EB}. \tag{7}$$

Mặt khác

$$\Delta MIB \backsim \Delta AEB \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{IM}{IB}. \tag{8}$$

Từ (5), (6), (7), (8) ta có

$$\frac{IN}{IB} = \frac{IM}{IB} \Rightarrow IN = IM \Rightarrow O'I \perp MN.$$

Câu 5. Cho $x,\ y,\ z$ là bộ ba số dương thỏa mãn: $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{x+z} + \dfrac{z^2}{x+y}$.

Lời giải.
Đặt $a = \sqrt{x^2+y^2},\ b = \sqrt{y^2+z^2},\ c = \sqrt{z^2+x^2}$ ta có $a+b+c = 6$.
Ta có $y+z \le \sqrt{2(y^2+z^2)}$ nên

$$\frac{x^2}{y+z} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{y^2+z^2}} - \sqrt{y^2+z^2}\right).$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Tương tự

$$\frac{y^2}{\sqrt{z+x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{z^2+x^2}} - \sqrt{z^2+x^2}\right), \quad \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c).$$

Mặt khác

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}} \geqslant \frac{9}{a+b+c} = \frac{3}{2},$$

và

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \geqslant \frac{1}{6}(a+b+c)^2 = 6.$$

Suy ra $P \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \sqrt{2}$.

Vậy $\min P = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 94

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH - KON TUM, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải phương trình: $x^4+3x^2-\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{3}{x^2}-2=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ x^2y+xy^2=20 \end{cases}$

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $x\neq 0$.

Đặt $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t$ (ĐK: $t\geq 2$).

Phương trình trở thành $t^2-3t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ (loại)} \\ t=4 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Với $t=4$ có $x^2+\dfrac{1}{x^2}=4 \Leftrightarrow x^4-4x^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2+\sqrt{3} \\ x^2=2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ x=\pm\sqrt{2-\sqrt{3}} \end{array}\right.$ (TM).

b) ĐKXĐ: $x\geq 0; y\geq 0$.

Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=6 \\ xy(x+y)=20. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{xy}=u \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=v \end{cases}$ ĐK: $u,v>0$.

Hệ trở thành $\begin{cases} uv=6 \\ u^2(v^2-2u)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{6}{u} \\ u^2\left(\dfrac{36}{u^2}-2u\right)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{6}{u} \\ u^3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3 \\ u=2 \end{cases}$ (TM)

Hay $\begin{cases} \sqrt{xy}=2 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \text{ (TM)} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ (TM).} \end{array}\right.$

Câu 2. Cho biểu thức $M=\dfrac{y}{\sqrt{xy}-x}+\dfrac{x}{\sqrt{xy}+y}-\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}$ $(x>y>0)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Rút gọn M.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $N = x^2 - \dfrac{M}{x+y}$, với $x > y > 0$.

Lời giải.

a) Với $x > y > 0$,

$$M = \frac{y\sqrt{xy} + y^2 + x\sqrt{xy} - x^2}{(y-x)\sqrt{xy}} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{(x+y)(\sqrt{xy}+y-x)}{(y-x)\sqrt{xy}} - \frac{(x+y)(y-x)}{(y-x)\sqrt{xy}} = \frac{x+y}{y-x}.$$

b) Với $x > y > 0$,

$$N = x^2 - \frac{1}{y(y-x)} = x^2 + \frac{1}{y(x-y)} \geq x^2 + \frac{1}{\dfrac{(y+x-y)^2}{4}} = x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2.\frac{4}{x^2}} = 4.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y = x - y \\ x^2 = \dfrac{4}{x^2} \\ x > y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Câu 3. Xét 2020 số thực x_1, x_2, ..., x_{2020} chỉ nhận một trong hai giá trị $2-\sqrt{3}$ và $2+\sqrt{3}$. Hỏi biểu thức $\sum\limits_{k=1}^{1010} x_{2k-1}x_{2k}$ nhận bao nhiêu giá trị nguyên khác nhau?

Lời giải.

Vì các số x_i chỉ nhận một trong hai giá trị $2-\sqrt{3}$ và $2+\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2k-1}.x_{2k} = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1 \\ x_{2k-1}.x_{2k} = (2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3} \\ x_{2k-1}.x_{2k} = (2+\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Do đó để $P = \sum\limits_{k=1}^{1010} x_{2k-1}.x_{2k}$ nhận giá trị nguyên thì chỉ xảy ra 2 trường hợp sau:

- TH1: $x_{2k-1}.x_{2k} = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ với $\forall k$.
  Khi đó $P = 1010$.
- TH2: $\begin{cases} m \text{ giá trị } k \text{ thỏa mãn } x_{2k-1}.x_{2k} = (2-\sqrt{3})^2 \\ m \text{ giá trị } k \text{ thỏa mãn } x_{2k-1}.x_{2k} = (2+\sqrt{3})^2 \\ 1010-2m \text{ giá trị } k \text{ thỏa mãn } x_{2k-1}.x_{2k} = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) \end{cases}$ với $1 \leq m \leq 505$.
  Khi đó $P = 1010 + 12m$ với $1 \leq m \leq 505$.
  Vậy P nhận 506 giá trị nguyên khác nhau.

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC và điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Kẻ đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, ta vẽ nửa đường tròn $(O_1; R_1)$ đường kính HB và nửa đường tròn $(O_2; R_2)$ đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F. Các tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) vẽ từ A và B (A và B là tiếp điểm) cắt nhau tại điểm M.

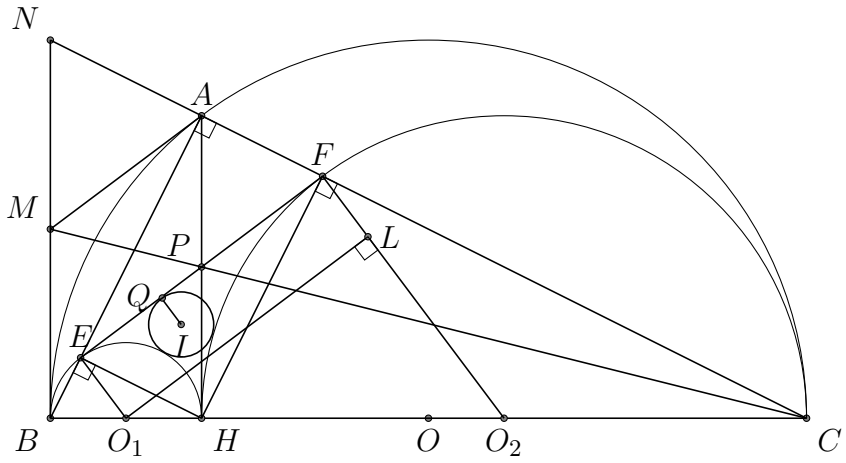
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEFC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng MC, AH và EF đồng quy tại một điểm.

c) Gọi $(I;r)$ là đường tròn tiếp xúc ngoài với các đường tròn (O_1) và (O_2) và tiếp xúc với EF tại điểm D (D thuộc đoạn EF). Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{r}}=\dfrac{1}{\sqrt{R_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$.

Lời giải.



a) Vì A thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BAC}=90^\circ$.
Vì E thuộc đường tròn đường kính BH nên $\widehat{BEH}=90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH}=90^\circ$.
Tương tự $\widehat{AFH}=90^\circ$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{AHF}$.
Mà $\widehat{AHF}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{FHC}$).
Suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BEF}+\widehat{FCB}=180^\circ$.
Vậy tứ giác $BEFC$ nội tiếp đường tròn.

b) Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật nên EF đi qua trung điểm của AH.
Gọi P là giao điểm của AH và MC.
Gọi N là giao điểm của AC và MB.
Xét tam giác vuông BAN có $MA=MB$ (tính chất tiếp tuyến)
Suy ra M là trung điểm NB.
Ta có $AH \parallel NB$, áp dụng định lý Ta-lét: $\dfrac{AP}{MN}=\dfrac{PH}{NB}$.
Vì $MN=MB$ nên $PA=PH$.
Do đó MC đi qua trung điểm AH.
Vậy 3 đường thẳng MC, AH, EF đồng quy tại một điểm.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

c) Ta có $\widehat{O_1EF} = \widehat{AEH} = 90°$.
Tương tự $\widehat{O_1EF} = 90°$.
$\Rightarrow EF$ là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).
Gọi Q là chân đường vuông góc từ I xuống EF.
Gọi L là chân đường vuông góc từ O_1 xuống FO_2.
Ta có $EF = O_1L = \sqrt{O_1O_2^2 - LO_2^2} = \sqrt{(R_1+R_2)^2 - (R_1-R_2)^2} = 2\sqrt{R_1.R_2}$.
Tương tự $QE = 2\sqrt{R_1.r}$; $QF = 2\sqrt{R_2.r}$.
Mà $EF = FQ + QE$ nên suy ra đpcm.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + mx + m - 13$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0$ với $m > 13$. Tìm m thỏa mãn điều kiện

$$|x_1| .f(x_2 - m) + |x_2| .f(x_1 - m) = 104.$$

Lời giải.
$f(x) = x^2 + mx + m - 13$ (với $m > 13$) .
x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của đa thức $f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = m - 13. \end{cases}$
Vì $m > 13$ và $x_1 + x_2 > 0$ nên $x_1 < 0; x_2 < 0$.
Có $f(x - m) = (x - m)^2 + m(x - m) + m - 13 = x^2 - mx + m - 13 = f(x) - 2mx$.
$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1 - m) = -2mx_1 \\ f(x_2 - m) = -2mx_2. \end{cases}$
Theo giả thiết $P = |x_1|f(x_2 - m) + |x_2|f(x_1 - m) = 104$.
$\Leftrightarrow |x_1|.(-2mx_2) + |x_2|.(-2mx_1) = 104$.
$\Leftrightarrow -2mx_2.(-x_1) - 2mx_1.(-x_2) = 104$.
$\Leftrightarrow mx_1x_2 = 26 \Leftrightarrow m(m - 13) = 26 \Leftrightarrow m = \dfrac{13 + \sqrt{273}}{2}$ (vì $m > 13$).

Câu 6. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 6(ab + bc + ca) + a(a - b)^2 + b(b - c)^2 + c(c - a)^2.$$

Lời giải.
Có $0 < a, b, c < 1$.
Do $2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2$
$\Rightarrow 6(ab + bc + ca) = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] + 2(2ab + 2bc + 2ca)$
$= 2(a + b + c)^2 - \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right]$.
Do đó $P = 2 + (a - 1)(a - b)^2 + (b - 1)(b - c)^2 + (c - 1)(c - a)^2$.
Lại có $a < 1$ suy ra $(a - 1)(a - b)^2 \leq 0$.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
Tương tự với $(b - 1)(b - c)^2$ và $(c - 1)(c - a)^2$.
Vậy $P \leq 2$.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ hay $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 95

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG VĂN TUỴ, NINH BÌNH, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho $P=\dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}+\dfrac{5\sqrt{a}+2}{4-a}$ $(a\geq 0,\ a\neq 4)$.

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Tính giá trị biểu thức P khi $a=\sqrt[3]{1+\dfrac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{\sqrt{84}}{9}}$.

Lời giải.

a) $P=\dfrac{3a-6\sqrt{a}+a+3\sqrt{a}+2-5\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}=\dfrac{4a-8\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}=\dfrac{4\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$.

b) Đặt $b=\sqrt[3]{1+\dfrac{\sqrt{84}}{9}}$ và $c=\sqrt[3]{1-\dfrac{\sqrt{84}}{9}}$. Ta có $a^3=b^3+c^3+3bc(b+c)$. Chú ý $b^3+c^3=2$ và $bc=-\dfrac{1}{3}$, ta suy ra $a^3=2-a$ hay $(a-1)(a^2+a+2)=0$. Do đó $a=1$. Thay vào biểu thức rút gọn của P ta được $P=\dfrac{4}{3}$ khi $a=\sqrt[3]{1+\dfrac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{\sqrt{84}}{9}}$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x-4}+1\right)=5$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x=y^3+y & (1)\\ x^2=y^2+3 & (2)\end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x\geq 1$. Đặt $u=\sqrt{x+4}>0$ và $v=\sqrt{x-1}\geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{cases}(u-v)(uv+1)=5 & (1)\\ u^2-v^2=5 & (2)\end{cases}.$$

Thay (2) vào (1) với chú ý $u>v$ ta được $uv+1=u+v$ hay $u=1$ hoặc $v=1$. Tuy nhiên từ (2), ta thấy $u^2>5>1$ nên $v=1$. Thay vào (2) ta được $u=\sqrt{6}$. Do đó ta có

$$\begin{cases}\sqrt{x+4}=\sqrt{6}\\ \sqrt{x-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{2\}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Dễ thấy với $y=0$ khi và chỉ khi $x^2-3=0$ hay $x=\pm\sqrt{3}$. Xét $y\neq 0$. Thay $x^2-3=y^2$ vào (1) ta được $xy=y^2+1$ hay $x-y=\dfrac{1}{y}$ (3). Thay (3) vào (2) với chú ý (2) tương đương $(x-y)(x+y)=3$, ta được $x=2y$. Kết hợp (3) ta được $y=\pm 1$. Do đó $x=\pm 2$.
Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm $\left(\sqrt{3};0\right)$, $\left(-\sqrt{3};0\right)$, $(2;1)$ và $(-2;-1)$.

Câu 3.

a) Cho các số hữu tỉ a, b, c thoả mãn $ab+bc+ca=2017$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\left(a^2+2017\right)\left(b^2+2017\right)\left(c^2+2017\right)}$$

là một số hữu tỉ.

b) Tìm x, y nguyên dương thoả mãn phương trình $7x^2+3y^2=714$.

Lời giải.

a) Ta có $a^2+2017=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$. Tương tự $b^2+2017=(b+c)(b+a)$ và $c^2+2017=(c+a)(c+b)$. Từ đó

$$\sqrt{\left(a^2+2017\right)\left(b^2+2017\right)\left(c^2+2017\right)}=\sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}=|a+b||b+c||c+a|$$

là một số hữu tỉ.

b) Giả sử x và y là hai số nguyên dương thoả mãn đề bài. Do $7\mid 714$ và $7\mid 7x^2$ nên $7\mid 3y^2$. Chú ý $(3,7)=1$ nên $7\mid y^2$ hay $7\mid y$. Lại có $3y^2<714$ nên $y\leq 15$. Do đó $y=7$ hoặc $y=14$.
Nếu $y=7$ thì $7x^2=714-3\cdot 7^2=567$, suy ra $x=9$.
Nếu $y=14$ thì $7x^2=714-3\cdot 14^2=126$, suy ra $x^2=18$ (vô lí).
Vậy có duy nhất một cặp số thoả mãn bài toán là $(x;y)=(9;7)$.

Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B (O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O) và (O') tại C và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt (O) và (O') tại M và N (M, N khác A). Các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Gọi P và Q lần lượt là giao của hai đường thẳng MN với đường thẳng BC và đường thẳng BD. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng AE vuông góc đường thẳng CD.

b) Tứ giác $BCED$ nội tiếp.

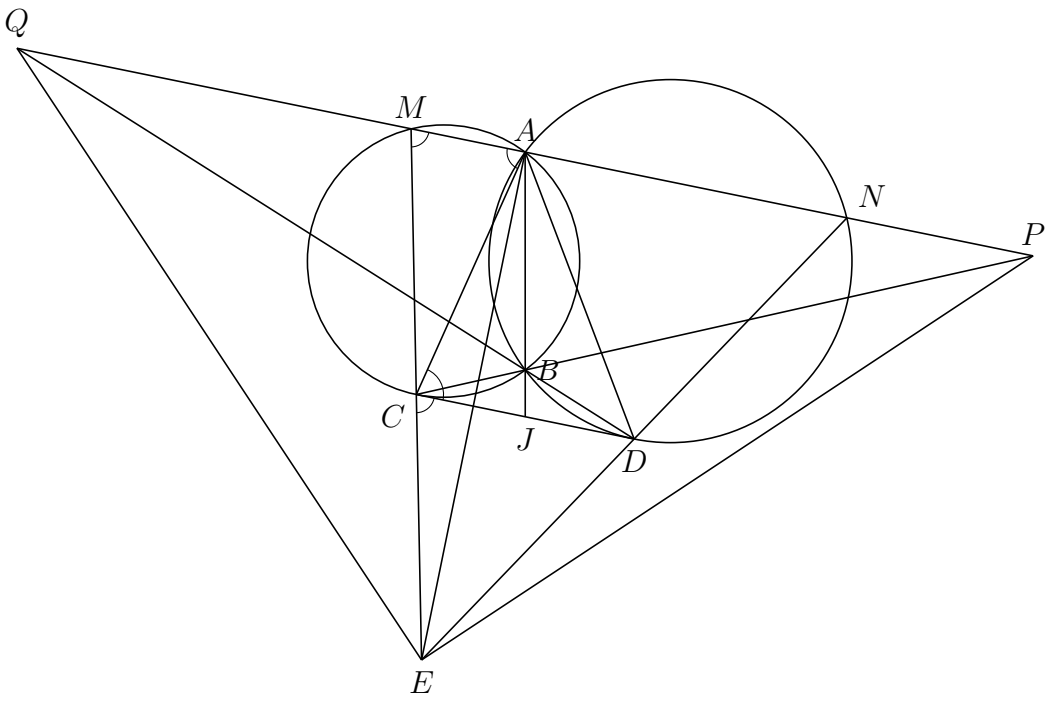
c) Tam giác EPQ là tam giác cân.

Lời giải.

a) Do $AM\parallel CD$ nên $\widehat{AMC}=\widehat{DCE}$ và $\widehat{MAC}=\widehat{ACD}$. Mặt khác do CD là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{AMC}=\widehat{ACD}$, suy ra $\widehat{DCE}=\widehat{ACD}$. Tương tự, ta có $\widehat{CDE}=\widehat{ADC}$. Từ đó $\triangle ECD=\triangle ACD$ (g.c.g), suy ra $AC=EC$ và $AD=ED$. Do đó CD là đường trung trực của AE. Mặt khác $MN\parallel CD$ nên $AE\perp MN$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Ta có $\widehat{BCE}+\widehat{BDE}=180^\circ-\widehat{BAM}+180^\circ-\widehat{BAN}=180^\circ$. Vậy tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.



c) Gọi J là giao điểm của AB và CD. Ta có $JC^2=JA\cdot JB=JD^2$, do đó J là trung điểm của CD. Suy ra $\dfrac{AQ}{AP}=\dfrac{AQ}{JD}\cdot\dfrac{JC}{AP}=\dfrac{AB}{JB}\cdot\dfrac{JB}{AB}=1$ hay A là trung điểm PQ. Tam giác EPQ có EA vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên nó là tam giác cân đỉnh E.

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a+b+c=2018$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{a+\sqrt{2018a+bc}}+\dfrac{b}{b+\sqrt{2018b+ca}}+\dfrac{c}{c+\sqrt{2018c+ab}}$.

Lời giải.

Từ giả thiết và bất đẳng thức Cauchy - Schwartz, ta có

$$2018a+bc=(a+b+c)a+bc=(a+b)(c+a)\geq\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a}{a+\sqrt{2018a+bc}}\leq\frac{a}{a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{b}{b+\sqrt{2018b+ca}}\leq\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\dfrac{c}{c+\sqrt{2018c+ab}}\leq\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Do đó

$$P\leq\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\leq\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$. Vậy $\max P=1$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 96

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{a+\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}+1}+\frac{1}{a+1}\right):\frac{\sqrt{a}-1}{a+1},\ \text{với } a\geq 0,\ a\neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các số tự nhiên a khác 1 sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a+\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}+1}+\frac{1}{a+1}&=\frac{a+\sqrt{a}}{a(\sqrt{a}+1)+(\sqrt{a}+1)}+\frac{1}{a+1}\\&=\frac{\sqrt{a}\,(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)\,(a+1)}+\frac{1}{a+1}\\&=\frac{\sqrt{a}+1}{a+1}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$P=\frac{\sqrt{a}+1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{\sqrt{a}-1}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}.$$

b) Ta có $P=1+\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$. Vì P là số nguyên nên $\sqrt{a}-1$ là số hữu tỉ, mà $a\in\mathbb{N}$ nên $\sqrt{a}-1$ là số nguyên. Từ đó suy ra $(\sqrt{a}-1)|2$. Từ đây ta tìm được $a\in\{0;\ 4;9\}$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-4xy+x+4y=2\\x^2-y^2=-3\end{cases}$.

Lời giải.

a) Phương trình tương đương với

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24.$$

Đặt $t=x^2+5x+4$, ta có phương trình

$$t(t+2)=24 \Leftrightarrow t^2+2t-24=0.$$

Giải phương trình này ta được các nghiệm $t=-6,\ t=4$.
Với $t=4$ ta được $x=0,\ x=-5$. Với $t=-6$ ta thấy phương trình vô nghiệm.
Vậy nghiệm của phương trình là $x=0,\ x=-5$.

b) Ta viết phương trình thứ nhất của hệ như sau

$$x^2+x-2-4xy+4t=0 \text{ hay } (x-1)(x+2)-4y(x-1)=0$$

Suy ra $(x-1)(x+2-4y)=0$, dẫn tới $x=1$ hoặc $x=4y-2$.
Với $x=1$ thay vào phương trình thứ hai ta có $y=\pm 2$.
Với $x=4y-2$ thay vào phương trình thứ hai ta được

$$15y^2-16y+7=0.$$

Ta thấy phương trình này vô nghiệm.
Vậy nghiệm của hệ là $(x;\ y)=(1;\ \pm 2)$.

Câu 3. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-x-5=0$. Lập phương trình bậc hai nhận $2x_1+x_2$ và x_1+2x_2 làm nghiệm.

Lời giải.

Dễ thấy phương trình $x^2-x-5=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Theo định lí Vi - ét ta có $x_1+x_2=1,\ x_1x_2=-5$.
Ta có

$$(2x_1+x_2)+(x_1+2x_2)=3(x_1+x_2)=3$$
$$(2x_1+x_2)(x_1+2x_2)=2\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)+5x_1x_2=-3.$$

Suy ra phương trình bậc hai cần tìm là $x^2-3x-3=0$.

Câu 4.

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn $x^2+2y^2-2xy-4x+8y+7=0$.

b) Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$. Chứng minh rằng

$$ab(b^2+bc+ca)+bc(c^2+ca+ab)+ca(a^2+ab+bc)\le (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2).$$

Lời giải.

a) Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$x^2 - 2(y+2)x + 2y^2 + 8y + 7 = 0. \quad (1)$$

Vì (1) có nghiệm nguyên x nên $\Delta' = -y^2 - 4y - 3$ là số chính phương.
Ta có $-y^2 - 4y - 3 \geq 0$ khi $-3 \leq y \leq -1$, mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-3;\ -2;\ -1\}$.
Từ đây ta tìm được các cặp nghiệm là $(x;\ y) \in \{(-1;\ -3),\ (\pm 1;\ -2),\ (1;\ -1)\}$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2abc(a+b+c) \leq ab(a^2+c^2) + bc(b^2+a^2) + ca(b^2+c^2). \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số thực không âm ta được

$$VP(2) \geq ab \cdot 2ac + bc \cdot 2ba + ca \cdot 2bc = 2abc(a+b+c) = VT(2).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có các đỉnh $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ đều là điểm nguyên (có hoành độ và tung độ là các số nguyên). Chứng minh rằng có ít nhất một điểm nguyên M nằm bên trong hoặc thuộc cạnh của ngũ giác đã cho, với M khác các đỉnh ngũ giác đã cho.

Lời giải.

Khi xét tính chẵn lẻ các tọa độ thì ta chỉ có 4 trạng thái sau:

$$(C;\ C),\ (C;\ L),\ (L;\ L),\ (L;\ C).$$

Mà ta có 5 điểm nên có ít nhất hai điểm có cùng trạng thái. Khi đó trung điểm M của đoạn nối hai điểm có cùng trạng thái sẽ có tọa độ nguyên. Dễ thấy M nằm trong hoặc nằm trên cạnh của ngũ giác và không trùng với đỉnh của ngũ giác. Từ đó, ta có đpcm.

Câu 6. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn tâm O, đường kính BC cắt hai cạnh $AB,\ AC$ tại hai điểm $M,\ N$ với $M \neq B,\ N \neq C$. Hai tia phân giác của hai góc $\widehat{CAB}$ và $\widehat{OMN}$ cắt nhau tại điểm P.

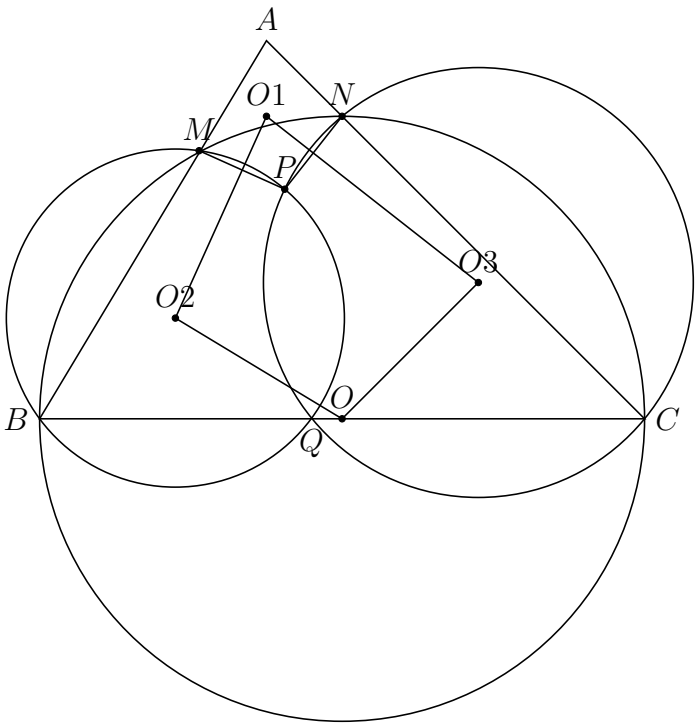
a) Chứng minh rằng $\widehat{OMN} = \widehat{CAB}$ và tứ giác $AMPN$ nội tiếp một đường tròn.

b) Gọi Q là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP với Q khác P. Chứng minh rằng $B,\ Q, C$ thẳng hàng.

c) Gọi $O_1,\ O_2,\ O_3$ là tâm của ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác $AMN,\ BMP,\ CNP$. Chứng minh rằng bốn điểm $O,\ O_1,\ O_2,\ O_3$ cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Vì tứ giác $BMNC$ nội tiếp nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$. Mặt khác ΔBOM cân tại O nên $\widehat{OMB} = \widehat{OBM}$.
Mà $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB} = 180^\circ$, $\widehat{OMN}+\widehat{AMN}+\widehat{OMB} = 180^\circ$. Nên suy ra $\widehat{OMN} = \widehat{BAC}$.
Ta có $\widehat{NAP} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$, $\widehat{NMP} = \dfrac{1}{2}\widehat{OMN}$, mà $\widehat{BAC} = \widehat{OMN}$ nên $\widehat{NMP} = \widehat{NAP}$, hay tứ giác $AMPN$ nội tiếp.

b) Vì các tứ giác $AMPN$, $BMPQ$, $CNPQ$ là các tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{PQB} + \widehat{PQC} = \widehat{AMP} + \widehat{ANP} = 180^\circ.$$

Suy ra $B,\ Q,\ C$ thẳng hàng.

c) Ta có

$$\widehat{MPQ} + \widehat{APM} = \widehat{MPQ} + \widehat{ANM} = \widehat{MPQ} + \widehat{MBQ} = 180^\circ,$$

suy ra $A,\ P,\ Q$ thẳng hàng. Ta có $O_1O_2 \perp PM$ và $O_1O_3 \perp PN$ nên

$$\widehat{O_2O_1O_3} + \widehat{MPN} = 180^\circ,$$

hay

$$\widehat{O_2O_1O_3} = \widehat{BAC}. \quad (1)$$

Mặt khác $OO_2 \perp AB,\ OO_3 \perp AC$ nên

$$\begin{aligned}\widehat{O_2OO_3} &= 180^\circ - \left(\widehat{O_2OB} + \widehat{O_3OC}\right) = 180^\circ - \left(90^\circ - \widehat{B} + 90^\circ - \widehat{C}\right)\\ &= \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{APM} + \widehat{APN} = \widehat{MPN}. \quad (2)\end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\widehat{O_2O_1O_3} + \widehat{O_2OO_3} = \widehat{BAC} + \widehat{MPN} = 180^\circ,$$

hay bốn điểm $O,\ O_1,\ O_2,\ O_3$ nằm trên một đường tròn. Bài toán được chứng minh.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 97

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU V2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$ với $a>0;a\neq 1$.

b) Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-3}=3x-6$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy-2y^2=0\\3x+2y=5xy\end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}P&=\frac{(\sqrt{a}+1)^2-(\sqrt{a}-1)^2+4\sqrt{a}(a-1)}{a-1}.\frac{a-1}{\sqrt{a}}\\&=\frac{4\sqrt{a}+4\sqrt{a}(a-1)}{a-1}.\frac{a-1}{\sqrt{a}}\\&=4+4(a-1)=4a.\end{aligned}$$

b) Điều kiện: $x\geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-2)(\sqrt{x-3}-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\text{ (loại)}\\\sqrt{x-3}-3=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-3}=3\Leftrightarrow x-3=9\Leftrightarrow x=12.$$

c) Phương trình đầu của hệ tương đương với

$$x^2-y^2+xy-2y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(x+2y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=-2y\end{array}\right..$$

TH1. $x=y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$3y+2y=5y^2\Leftrightarrow 5y(y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=0,\\y=1\Rightarrow x=1.\end{array}\right.$$

TH2. $x=-2y$. Thay vào phương trình thứ 2 của hệ, ta được

$$-6y+2y=-10y^2\Leftrightarrow 10y^2-4y=0\Leftrightarrow 2y(5y-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=0,\\y=\dfrac{2}{5}\Rightarrow x=\dfrac{-4}{5}.\end{array}\right.$$

Vậy hệ có các nghiệm $(0;0),(1;1),\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{-4}{5}\right)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 2.

a) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Biết $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng $\dfrac{5a + b + 3c}{a - b + c} > 1$.

b) Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $A = n^4 + 4n^{p-1}$ là số chính phương.

Lời giải.

a) Ta có $P(-1) = a - b + c > 0$, nên BĐT cần chứng minh tương đương với $5a + b + 3c > a - b + c \Leftrightarrow 4a + 2b + 2c > 0$.
Mà $P(2) = 4a + 2b + c, P(0) = c$ nên $4a + 2b + 2c = P(2) + P(0) > 0$.

b) Với $n = 0, 1$, dễ thấy A không phải là số chính phương. Do đó $n \geq 2 \Rightarrow 2n^2 + 1 > 4n$.

- Nếu $p = 2$, thì $A = n^4 + 4n$. Và từ $(n^2)^2 < n^4 + 4n < (n^2 + 1)^2$, ta suy ra A không phải là số chính phương.
- Nếu $p = 3$, giả sử $A = n^4 + 4n^2$ là số chính phương. Do $(n^2)^2 < n^4 + 4n^2 < (n^2 + 2)^2$ nên $n^4 + 4n^2 = (n^2 + 1)^2 \Rightarrow 2n^2 = 1$ (vô lí). Vậy A không phải là số chính phương.
- Với $p \geq 5$. Giả sử $A = n^4 + 4n^{p-1} = n^4(1 + 4n^{p-5})$ là số chính phương.
$\Rightarrow 1 + 4n^{p-5} = m^2 (m \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 1 = \left(m - 2n^{\frac{p-5}{2}}\right)\left(m + 2n^{\frac{p-5}{2}}\right) \Rightarrow 2n^{\frac{p-5}{2}} = 0$ (vô lí)
$\Rightarrow A$ không phải là số chính phương.
Vậy không tồn tại n để A là số chính phương.

Câu 3. Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

Lời giải.
Áp dụng BĐT $\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq x + y$, ta suy ra

$$P \geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{4}\frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{3}{4}\frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 \geq 1 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{2}.$$

Vậy, GTNN của P bằng $\dfrac{9}{2}$, đạt được khi $x = y$.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt (O) tại J khác A. Đường thẳng JO cắt BC tại E, và cắt (O) tại K khác J.

a) Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và $JE.JK = JI^2$.

b) Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $SJ.EK = SK.EJ$.

c) Đường thẳng SA cắt (O) tại D khác A, đường thẳng DI cắt (O) tại M khác D. Chứng minh rằng JM đi qua trung điểm của đoạn thẳng IE.

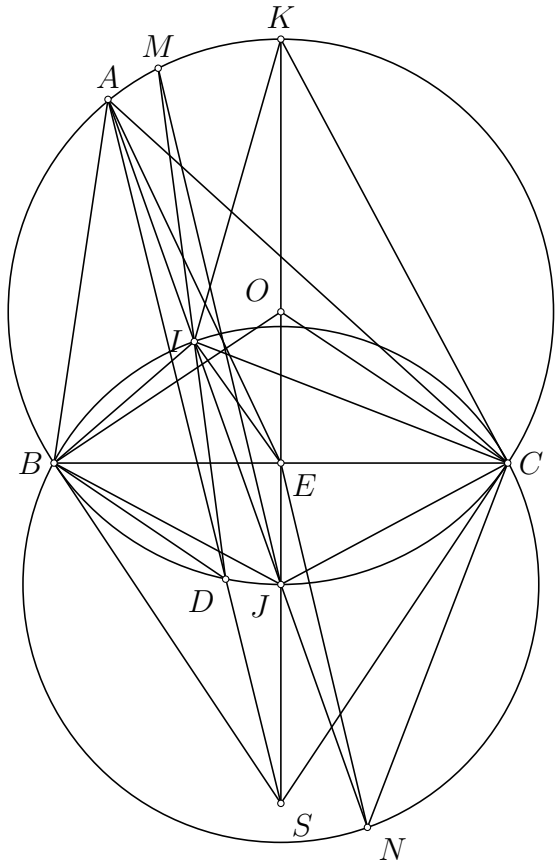
Lời giải.

a) Dễ thấy J là điểm chính giữa của cung BC nên E là trung điểm của BC, và JK chính là một đường kính của đường tròn (O).

Trong tam giác AIB, góc $\angle BIJ$ là góc ngoài đỉnh I nên $\angle BIJ = \angle BAI + \angle ABI = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Lại có $\angle IBJ = \angle IBC + \angle CBJ = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Nên tam giác JIB cân tại J, hay $JI = JB$. Chứng minh tương tự ta cũng có $JI = JC$. Do đó, J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.

Từ đó, áp dụng thêm hệ thức lượng trong tam giác vuông JCK, ta dễ dàng thu được $JI^2 = JC^2 = JE \cdot JK$.

b) Do SO là đường trung trực của BC nên S nằm trên đường thẳng JK. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\dfrac{SJ}{SK} = \dfrac{EJ}{EK}$. Mà $\dfrac{SJ}{SK} = \dfrac{SJ}{SC} \cdot \dfrac{SC}{SK} = \left(\dfrac{CJ}{CK}\right)^2 = \dfrac{JC^2}{KC^2} = \dfrac{JE \cdot JK}{KE \cdot KJ} = \dfrac{EJ}{EK}$, nên ta có điều cần chứng minh.



c) Trước hết, ta có $SE \cdot SO = SD \cdot SA (= SB^2)$ suy ra tứ giác $AOED$ nội tiếp. Nên $\angle DAE = \angle DOE = \angle DOJ = 2\angle DAJ$. Dẫn đến AJ là phân giác của góc $\angle EAS$, hay $\angle BAD = \angle EAC$. Từ đây, cùng với $\angle ADB = \angle ACE (= \angle ACB)$, ta suy ra các tam giác ABD và ACE đồng dạng với nhau. Dẫn đến $AE \cdot AD = AB \cdot AC$. (1)

Gọi N là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC. Dễ thấy hai tam giác AIB và ACN đồng dạng với nhau, nên $AI \cdot AN = AB \cdot AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE \cdot AD = AI \cdot AN$. Cùng với $\angle DAI = \angle NAE$, ta suy ra các tam giác AID và AEN đồng dạng với nhau. Suy ra $\angle ENA = \angle IDA = \angle MDA = \angle MJA$. Hay EN song song với JM. Mà rõ ràng J là trung điểm của IN, nên MJ cũng đi qua trung điểm của IE.

Câu 5. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD; AF cắt DE tại P; BF cắt CE tại Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

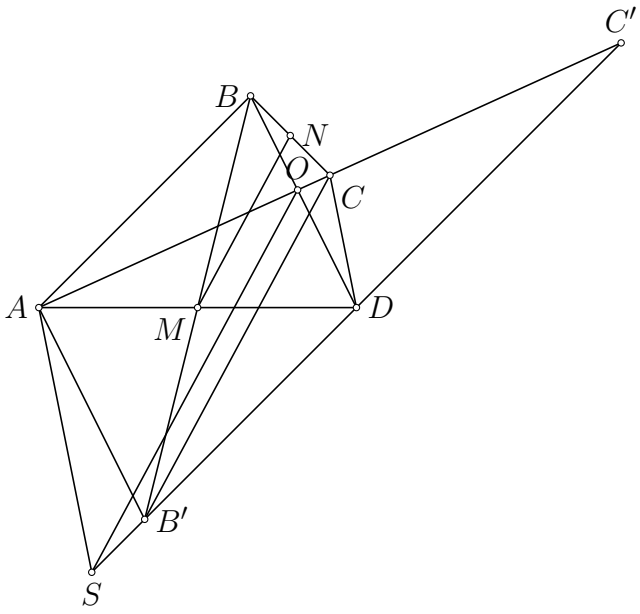
$$T = \frac{FA}{FP} + \frac{FB}{FQ} + \frac{ED}{EP} + \frac{EC}{EQ}.$$

Lời giải.

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Bổ đề. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đường thẳng qua A và song song với CD cắt đường thẳng qua D và song song với AB tại S. Khi đó SO song song (hoặc trùng) với MN.



Chứng minh. Gọi B' đối xứng với B qua M. Khi đó MN song song với $B'C$. Ta chứng minh SO cũng song song với $B'C$.

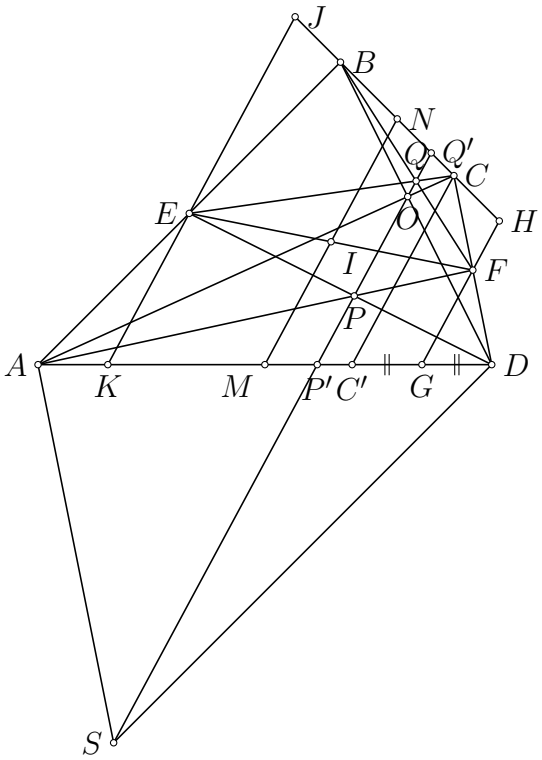
Thật vậy, gọi C' là giao của AC và SD. Để ý rằng tứ giác $ABDB'$ là hình bình hành, nên

$$\frac{C'B'}{C'S} = \frac{C'B'}{C'A} \cdot \frac{C'A}{C'S} = \frac{C'D}{C'O} \cdot \frac{C'C}{C'D} = \frac{C'C}{C'O}.$$

Ta có điều cần chứng minh.

Trở lại bài toán.

Áp dụng bổ đề trên với các tứ giác $ABCD$ và $AEFD$, ta suy ra S, O, P thẳng hàng, suy ra OP song song với MN. Tương tự, ta cũng có OQ song song với MN. Do đó, O, P, Q thẳng hàng và $PQ \parallel MN$.



Gọi I là giao điểm của FE và MN, P', Q' là giao điểm của PQ với AD, BC. Qua F, kẻ đường thẳng song song với PQ, cắt đoạn AD tại G và cắt tia đối của tia CB tại H. Các điểm J, K được định nghĩa tương tự (xem hình vẽ).

Theo trên, IM là đường trung bình của hình thang $EFGK$ nên M là trung điểm của KG. Suy ra $GA = KD$.

Áp dụng định lí Thales và BĐT Cauchy-Schwartz, ta thu được

$$\frac{FA}{FP} + \frac{ED}{EP} = \frac{GA}{GP'} + \frac{KD}{KP'} = DK\left(\frac{1}{GP'} + \frac{1}{KP'}\right) \geq DK \cdot \frac{4}{GP' + KP'} = 4\frac{DK}{GK}.$$

Tương tự, ta cũng thu được $\dfrac{FB}{FQ} + \dfrac{EC}{EQ} \geq 4\dfrac{CJ}{HJ}$. Suy ra $T \geq 4\left(\dfrac{DK}{GK} + \dfrac{CJ}{HJ}\right)$.

Cuối cùng, ta chứng minh $\dfrac{DK}{GK} + \dfrac{CJ}{HJ} = 2$, và do đó, GTNN của T bằng 8.

Thật vậy, gọi C' là điểm trên AD sao cho CC' song song với HG. Khi đó, do F là trung điểm CD nên G là trung điểm $C'D$. Do đó $\dfrac{DK}{GK} + \dfrac{CJ}{HJ} = \dfrac{DK}{GK} + \dfrac{C'K}{GK} = \dfrac{KD + KC'}{KG} = 2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 98

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU VÒNG 1, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải phương trình $x^2-7x-8=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x-2y=7\\ x+3y=-5\end{cases}$.

c) Rút gọn biểu thức $A=\frac{1}{2}\sqrt{48}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{3}$.

Lời giải.

a) Ta có $a=1$, $b=-7$ và $c=-8$. Vì $a-b+c=1-(-7)-8=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1$; $x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{-8}{1}=8$.

Vậy phương trình có nghiệm $x_1=-1$; $x_2=8$.

b) Ta có $\begin{cases}3x-2y=7\\ x+3y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=7\\ 3x+9y=-15\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-11y=22\\ x=-5-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2\\ x=-5-3.(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2\\ x=1\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;-2)$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\sqrt{48}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{3}=\frac{1}{2}\sqrt{2^4.3}+|2-\sqrt{3}|-\sqrt{3}\\&=\frac{1}{2}.2^2\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}\\&=2\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-\sqrt{3}=2.\end{aligned}$$

Câu 2. Cho hàm số $y=\frac{3}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y=mx-m+2$ (m là tham số).

a) Vẽ (P).

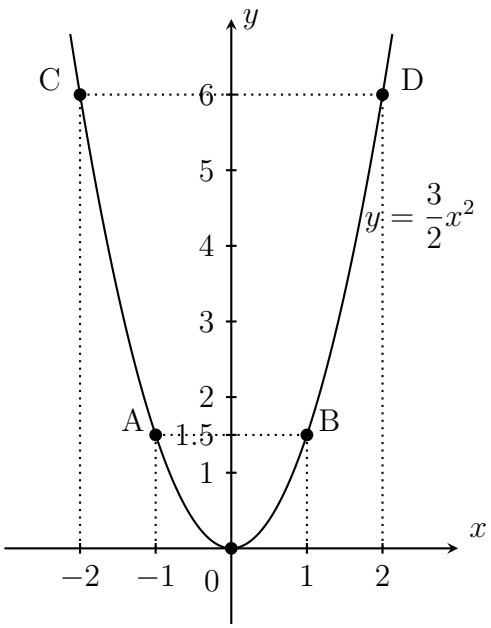
b) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

Lời giải.

a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y=\frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

Trên mặt phẳng tọa độ lấy các điểm $O(0;0$, $A\left(-1;\frac{3}{2}\right)$, $B\left(1;\frac{3}{2}\right)$, $C(-2;6)$ và $D(2;6)$. Parabol cần vẽ là đường cong đi qua năm điểm O, A, B, C, D.



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$\frac{3}{2}x^2=mx-m+2\Leftrightarrow\frac{3}{2}x^2-mx+m-2=0\ (1).$$

Ta có $\Delta=(-m)^2-4.\frac{3}{2}.(m-2)=m^2-6m+12=m^2-2.m.3+3^2-3^2+12=(m-3)^2+3$.
Vì $(m-3)^2\geq 0$ với mọi m nên $(m-3)^2+3>0$ với mọi m. Do đó $\Delta>0$ với mọi m hay phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m.
Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

Câu 3.

a) Cho phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-2m-1=0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=4$.

b) Giải phương trình $\sqrt{(x+1)^4+3}=x^2+2x+2$.

Lời giải.

a) Phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-2m-1=0\ (1)$.
Xét $\Delta=[-(2m-1)]^2-4.1.(m^2-2m-1)=4m+5$.
Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, $x_2\Leftrightarrow\Delta\geq 0\Leftrightarrow 4m+5\geq 0\Leftrightarrow m\geq-\frac{5}{4}$.
Áp dụng hệ thức Vi-ét, $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\ x_1x_2=m^2-2m-1\end{cases}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta có

$$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=4$$
$$\Leftrightarrow (2m-1)^2-3(m^2-2m-1)=4$$
$$\Leftrightarrow m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \text{ (loại} \end{array}\right. .$$

Vậy $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Dễ thấy $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ với mọi số thực x. Bình phương hai vế của phương trình, ta có:

$$(x+1)^4+3=\left[(x+1)^2+1\right]^2 \Leftrightarrow (x+1)^4+3=(x+1)^4+2(x+1)^2+1$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2=2 \Leftrightarrow (x+1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. .$$

Vậy $x=0$; $x=-2$ là nghiệm của phương trình.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ AH vuông góc với BC tại H; AO cắt (O) tại N khác A. Gọi E là hình chiếu của B trên đường thẳng AN.

a) Chứng minh tứ giác $AEHB$ nội tiếp.

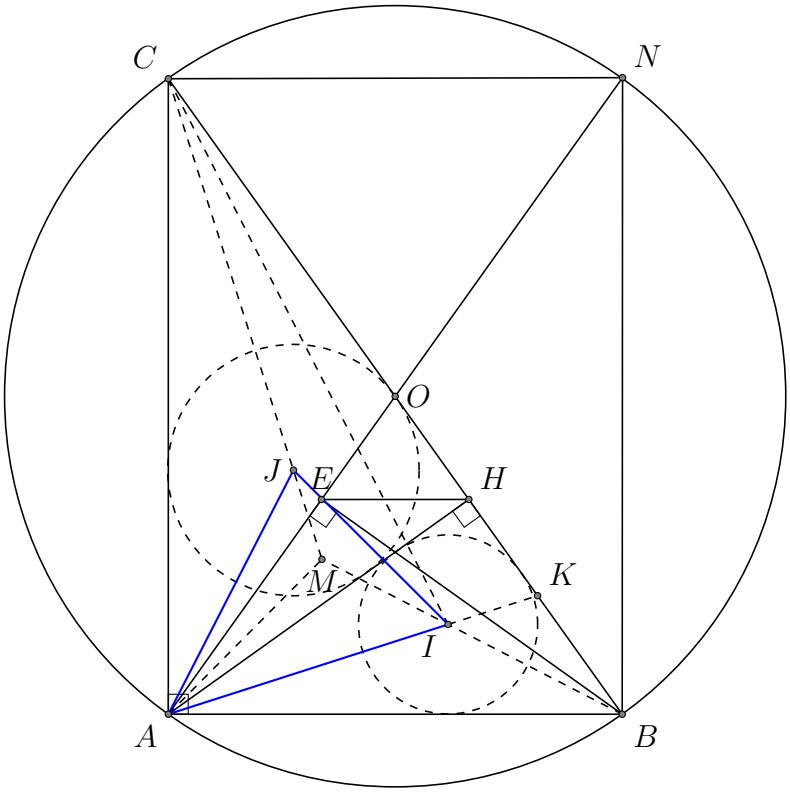
b) Chứng minh $BH.AN=AB.NC$.

c) Chứng minh HE song song với CN.

d) Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC; BI cắt CJ tại M. Chứng minh AM vuông góc với IJ.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Vì $\widehat{AEB} = \widehat{BHA} = 90^\circ$ (giả thiết) nên E và H cùng nhìn cung $\overset{\frown}{AB}$ dưới một góc 90°. Do đó E và H cùng nằm trên đường tròn đường kính AB. Vậy bốn điểm E, H, A, B cùng nằm trên một đường tròn hay tứ giác $AEHB$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{ACN}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O nên $\widehat{ACN} = 90^\circ$. Do đó tam giác ACN là tam giác vuông tại C.

Xét hai tam giác vuông ACN và AHB, ta có

$\widehat{ACN} = \widehat{AHB} = 90^\circ$.

$\widehat{ANC} = \widehat{ABH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$.

Nên $\Delta ACN \sim \Delta AHB$. Do đó $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{NC}{BH}$ hay $BH.AN = AB.NC$.

c) Vì tứ giác $ABNC$ là hình chữ nhật ($\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{N} = 90^\circ$) nên $CN \parallel AB$ (1).

Vì tứ giác $AEHB$ nội tiếp nên $\widehat{BAH} = \widehat{BEH}$. Mà $\widehat{BAH} = \widehat{NAC}$ (vì $\Delta ACN \sim \Delta AHB$) nên $\widehat{BEH} = \widehat{NAC}$ (2).

Xét tam giác ABE vuông tại E, ta có $\widehat{ABE} + \widehat{BAE} = 90^\circ$. Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có $\widehat{NAC} + \widehat{BAE} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{ABE} = \widehat{NAC}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{BEH} = \widehat{ABE}$, hay $HE \parallel AB$ (hai góc bằng nhau ở vị trí so le trong) (4).

Từ (1) và (4) suy ra $HE \parallel CN$.

d) Kéo dài AI cắt BC tại K. Xét tam giác AKB có góc $\widehat{AKC}$ là góc ngoài nên ta có:

$$\widehat{AKC} = \widehat{KAB} + \widehat{HBA} = \frac{\widehat{HAB}}{2} + \widehat{HBA}.$$

Mặt khác $\widehat{CAK} = \widehat{CAH} + \widehat{HAK} = \widehat{HBA} + \dfrac{\widehat{HAB}}{2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Do đó $\widehat{AKC} = \widehat{CAK}$ hay tam giác ACK cân tại C.
Mà CM là phân giác góc $\widehat{ACK}$ nên CM cũng là đường cao của tam giác ACK. Do đó $CM \perp AI$.
Chứng minh tương tự, ta có $BM \perp AJ$. Nên M là trực tâm của tam giác AIJ. Vậy $AM \perp IJ$.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Lời giải.
Với mọi $a, b, c > 0$ ta chứng minh bất đẳng thức:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) \ (*).$$

Ta có: $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = (a^3 + ab^2) + (b^3 + bc^2) + (c^3 + ca^2) + a^2b + b^2c + c^2a$.
Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases} a^3 + ab^2 \geq 2a^2b \\ b^3 + bc^2 \geq 2b^2c \\ c^3 + ca^2 \geq 2c^2a \end{cases}.$$

Suy ra $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a + a^2b + b^2c + c^2a = 3(a^2b + b^2c + c^2a)$.
Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. Vậy bất đẳng thức $(*)$ đã được chứng minh.
Khi đó từ bất đẳng thức $(*)$, ta có

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Hơn nữa, $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1} \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.
Do đó

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{a + b + c}{3} - \frac{(a + b + c)^2}{9} \\ &= -\frac{1}{9}\left[(a + b + c)^2 - 2.(a + b + c).\frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right] \\ &= -\frac{1}{9}\left(a + b + c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$.
Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 99

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, QUẢNG TRỊ, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Lời giải.

$$A=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

Câu 2. Cho biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{1}{x+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P trong các trường hợp sau.

a) x, y là các số thực dương.

b) x, y là các số nguyên dương.

Lời giải.

a) Ta có: $\dfrac{x^2}{y}+y\geq 2x$ suy ra $\dfrac{x^2}{y}\geq 2x-y$. Từ đó ta có $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\geq x+y$ hay $P\geq x+y+\dfrac{1}{x+y}\geq 2$.
Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

b) Từ giả thiết ta có $x+y\geq 2$. Vậy $P\geq x+y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}(x+y)+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{3}{4}(x+y)\geq\dfrac{5}{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $2\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=5$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3+1=3xy\\x^2+2xy+2y^2=5\end{cases}$.

Lời giải.

a) Đặt $t=\sqrt{2+x}$, ta được phương trình theo t: $t^2-2t+1=0 \Rightarrow t=1$. Đối chiếu điều kiện thấy $t=1$ thỏa mãn, do đó $t=1 \Leftrightarrow x=-1$.

b) Ta có: $x^3+y^3+1=3xy \Leftrightarrow (x+y+1)\left[(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x=y=1 \end{array}\right.$.

+ Rõ ràng $x=y=1$ là một nghiệm của hệ.

+ Với $x+y+1=0$ ta có $y=-x-1$ thay vào phương trình còn lại ta được $x^2+2x-3=0$. Giải ra ta được $x=1$ và $x=-3$.

Vậy hệ có 3 nghiệm $(1;1)$, $(1;-2)$, $(-3,2)$.

Câu 4.

a) Tìm chữ số tận cùng của $a=2017^{6^4}$.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $7(x+y)=3(x^2+xy+y^2)$.

Lời giải.

a) $2017^{6^4} \equiv 7^{6^4} \equiv 3^{6^4} \equiv 81^{4\cdot 81} \equiv 1 \pmod{10}$.

b) $7(x+y)=3(x^2+xy+y^2) \Rightarrow 3 \mid x+y$. Từ giả thiết suy ra $0 \le x+y \le 3$ do đó $x+y=0$ hoặc $x+y=3$.

+ Với $x+y=0$ ta được $x=y=0$.

+ Với $x+y=3$ suy ra $y=3-x$ thay vào phương trình ta được $x^2-3x+2=0$. Giải ra ta được $x=1$, $x=2$.

Vậy ta được 3 nghiệm nguyên $(0;0)$, $(1;2)$, $(2;1)$.

Câu 5. Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. Gọi A là điểm thuộc đường tròn (A khác B,C), H là hình chiếu của A lên BC. Vẽ đường tròn (I) đường kính AH cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn (O), gọi E là trung điểm của HK. Chứng minh rằng $EM=EN$.

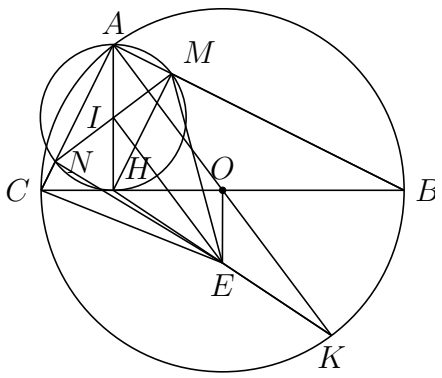
Lời giải.

a) $\angle ANM=\angle AHM=\angle ABH=\angle ABC$, nên tứ giác $BMNC$ nội tiếp được.

b) EO là đường trung bình của tam giác KHA nên $EO \parallel HA$. Suy ra $EO \perp BC$.

$\angle OAB+\angle NMA=\angle OBA+\angle ACB=90^\circ$, nên $MN \perp AO$. Suy ra $MN \perp IE$.

Từ đó, $EM^2=EI^2+IM^2=OA^2+IA^2=OB^2+OE^2=EB^2$, hay $EM=EB$. Tương tự ta cũng có $EN=EB$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

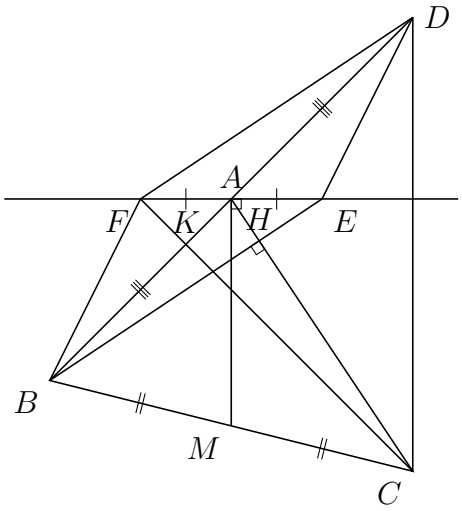


Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Gọi M là trung điểm của BC, kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$), đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt BH tại E, gọi F là điểm đối xứng với E qua A, K là gia điểm của CF và AB. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK.

Lời giải.

Lấy D đối xứng với B qua A. Dễ thấy $BEDF$ là hình bình hành. Suy ra $CA \perp FD$. Cũng dễ thấy $CD \parallel MA$ nên $FA \perp CD$. Do đó, A là trực tâm tam giác FCD. Suy ra $DA \perp CF$. Từ đó, $MK = MB = MC = MH$, ta có điều phải chứng minh.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 100

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÍ ĐÔN NINH THUẬN, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right).\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2$

b) Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $M=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) ĐK: $x\geq 0, x\neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}P&=\left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}-\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2}\right]\frac{(x-1)^2}{2}\\&=\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)}.\frac{(x-1)^2}{2}\\&=\frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)}.\frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2}\\&=-x+\sqrt{x}\end{aligned}$$

b) Ta có: $M=x+1+\dfrac{2}{x-1}$

M nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow x-1$ là ước của $2\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x-1=\pm 1\\&x-1=\pm 2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0\\&x=2\\&x=3\\&x=-1\end{aligned}\right.$

Câu 2.

a) Tìm m để đường thẳng $(a): y=x+2m$ cắt đường thẳng $(b): y=2x-4$ tại một điểm trên trục hoành.

b) Cho phương trình $x^2+2(m+1)x+2m-11=0$ (x là ẩn,m là tham số). Tìm m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1, một nghiệm lớn hơn 1.

Lời giải.

1) Đường thẳng $(b): y=2x-4$ cắt trục hoành tại điểm $A(2;0)$
Ycbt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $(a): y=x+2m$ đi qua A, từ đó tìm được $m=-1$.

2) Ta có $\Delta' = m^2 + 12 > 0, \forall m$.

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, gọi hai nghiệm đó là x_1 và x_2. Theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m - 11 \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 2$

Câu 3. Trên quãng đường AB dài 60 km, người thứ nhất đi xe máy từ A đến B, người thứ hai đi xe đạp từ B đến A. Họ khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại C sau khi khởi hành được 1 giờ 20 phút. Từ C người thứ nhất đi tiếp đến B và người thứ hai đi tiếp đến A. Kết quả người thứ nhất đến nơi sớm hơn người thứ hai là 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng trên suốt quãng đường cả hai người đều đi với vận tốc không đổi.

Lời giải.

Gọi vận tốc của người thứ nhất là x (km/h, $x > 0$).

Gọi vận tốc của người thứ hai là y (km/h, $y > 0$).

Đổi 1 giờ 20 phút $= \dfrac{4}{3}$ giờ.

Theo bài ra ta có : $\dfrac{4}{3}(x + y) = 60 \Leftrightarrow x + y = 45$ Mặt khác do người thứ nhất đến sớm hơn người thứ hai 2 giờ nên ta có phương trình : $\dfrac{60}{x} + 2 = \dfrac{60}{y}$ Từ đó giải ra được $x = 30, y = 15$.

Vậy vận tốc của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là : $x = 30(km/h), y = 15(km/h)$.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo $AC > BD$. Kẻ$CH \perp AD, CK \perp AB$.

a) Chứng minh ΔCKH và ΔBCA đồng dạng.

b) Chứng minh $HK = AC.\sin \widehat{BAD}$

c) Tính diện tích tứ giác $AKCH$ biết $\widehat{BAD} = 60^0$, $AB = 6$cm, $AD = 8$cm.

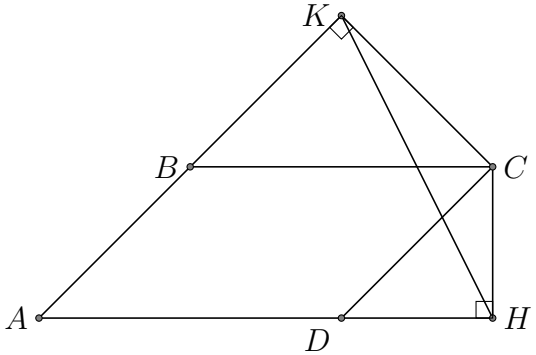
Lời giải.

1)

Vì $\widehat{AKC} = \widehat{AHC} = 90°$ nên tứ giác $AKCH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{KHC}$ và $\widehat{CKH} = \widehat{CAH}$.

Mặt khác $\widehat{CAH} = \widehat{ACB}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{CKH} = \widehat{ACB}$ nên ΔCKH đồng dạng với ΔBCA (g-g).



2) Ta có $\sin \widehat{BAD} = \sin \widehat{KBC} = \dfrac{KC}{BC}$. Mà ΔCKH đồng dạng $\Delta BCA \Rightarrow \dfrac{CK}{BC} = \dfrac{HK}{AC}$ nên $\dfrac{HK}{AC} = \sin \widehat{BAD} \Rightarrow HK = AC.\sin \widehat{BAD}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

3) Trong tam giác KBC vuông tại K có $\widehat{KBC} = 60^\circ$ và $BC = 8$cm nên $KC = 4\sqrt{3}$cm, $BK = 4$cm.
Trong tam giác CHD vuông tại H có $\widehat{CDH} = 60^\circ$ và $DC = 6$cm nên $CH = 3\sqrt{3}$cm, $HD = 3$cm. $\Rightarrow S_{\Delta ACK} = \dfrac{1}{2}AK.CK = 20\sqrt{3}(cm^2) \Rightarrow S_{\Delta ACH} = \dfrac{1}{2}AH.CH = \dfrac{33\sqrt{3}}{2}(cm^2)$
Vậy $S_{AKCH} = \dfrac{73\sqrt{3}}{2}(cm^2)$.

Câu 5. Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 - x + \dfrac{1}{x} + 2013$

Lời giải.

Ta có $A = x^2 - x + \dfrac{1}{x} + 2013 = (x-1)^2 + (x + \dfrac{1}{x}) + 2012 \Rightarrow A \geq 0 + 2 + 2012 = 2014$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$
Vậy $A_{\min} = 2014$ khi $x = 1$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 101

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - ĐÀ NẴNG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Giải bất phương trình: $\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}\geq 2017+\sqrt{2017}.$ (1)

b) Cho các số dương x,y thỏa mãn $x=4y+\sqrt{2xy}$. Tính $P=\dfrac{\sqrt[3]{xy}\left(3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt{2xy}}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x>0$.
Ta có:

$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}(x+1)+1-(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}.\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$$
$$=x+\sqrt{x}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow x+\sqrt{x}\geq 2017+\sqrt{2017}\\&\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{2017}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2017}+1\right)\geq 0\\&\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{2017}\geq 0 \text{ vì } \sqrt{x}+\sqrt{2017}+1>0\forall x>0\\&\Leftrightarrow x\geq 2017.\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}x=4y+\sqrt{2xy}&\Leftrightarrow x-2\sqrt{2xy}+\sqrt{2xy}-4y=0\\&\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{2y}\right)=0\\&\Leftrightarrow x=8y \text{ vì } \sqrt{x}+\sqrt{2y}>0\ \forall x,y>0.\end{aligned}$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt[3]{xy}\left(3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt{2xy}}=\dfrac{\sqrt[3]{8y^2}\left(3\sqrt[3]{8y}-2\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt{16y^2}}=\dfrac{8y}{4y}=2.$

Câu 2.

a) Cho phương trình $x^2+2(2m-1)x-3m=0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 sao cho biểu thức $Q=\dfrac{2(x_1^2+x_2^2)}{x_1+x_2}$ đạt giá trị nguyên.

b) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ với a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a\neq 0$ và $2a+b+c=0$. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Tìm các nghiệm đó khi biểu thức $T=(x_1-x_2)^2+2(x_1+x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta=(2m-1)^2+3m=4m^2-m+1=\left(2m-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}>0\ \forall m$. Do đó với mọi m phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.
Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-4m+2\\ x_1x_2=-3m\end{cases}$.
Từ đó $Q=\dfrac{2(x_1^2+x_2^2)}{x_1+x_2}=\dfrac{-16m^2+10m-4}{2m-1}=-8m+1-\dfrac{3}{2m-1}$.
Vậy với $m\in\mathbb{Z}$ thì $Q\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(2m-1)|3\Leftrightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$.

b) Ta có $\Delta=(2a+c)^2-4ac=4a^2+c^2>0$ vì $a\neq 0$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.
Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{2a+c}{c}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$.
$T=(x_1-x_2)^2+2(x_1+x_2)=(x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2)-4x_1x_2=\left(\dfrac{c}{a}\right)^2+2\dfrac{c}{a}+8=\left(\dfrac{c}{a}+1\right)^2+7\geq 7$.
Vậy T nhỏ nhất khi và chỉ khi $b=c=-a$, khi đó phương trình trở thành $x^2-x-1=0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $(x+1)^3=(x^4+3x^3)\sqrt{x+3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+xy=1\\ 2x^6-1=xy(2x^2y^2-3)\end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x\geq -3$.
Ta có $(x+1)^3=(x^4+3x^3)\sqrt{x+3}\Leftrightarrow(x+1)^3=\left(x\sqrt{x+3}\right)^3\Leftrightarrow x+1=x\sqrt{x+3}$.
Bình phương hai vế suy ra: $x^2+2x+1=x^2(x+3)\Leftrightarrow x^3+2x^2-2x-1=0$ (*)
Ta có $(*)\Leftrightarrow(x-1)(x^2+3x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.
Thử lại ta chọn được hai nghiệm $x_1=1,x_2=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Ta có

$$\begin{aligned}
2x^6-1=xy(2x^2y^2-3) &\Leftrightarrow 2x^6=2xy\left(x^2y^2-1\right)-xy+1\\
&\Leftrightarrow 2x^6=(xy-1)\left(2x^2y^2+2xy-1\right)\\
&\Leftrightarrow 2x^6=(xy-1)\left[3x^2y^2-(xy-1)^2\right]\\
&\Leftrightarrow 2x^6=(-x^2-y^2)\left[3x^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^2\right] \text{ do } x^2+y^2+xy=1\\
&\Leftrightarrow 2x^6=x^6+y^6\\
&\Leftrightarrow x^6=y^6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=-y.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

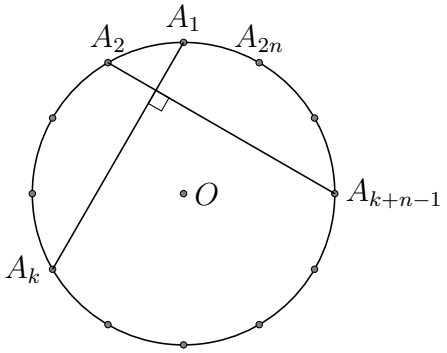
Với $x=y$ ta có $3x^2=1$ nên hệ phương trình có hai nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
Với $x=-y$ ta có $x^2=1$ nên hệ phương trình có hai nghiệm $(1;-1)$ và $(-1;1)$.

Câu 4. Các điểm $A_1,A_2,\ldots,A_{2n}(n\geq 2)$ được sắp xếp theo thứ tự đó trên đường tròn (O) và chia đường tròn thành $2n$ cung tròn bằng nhau. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện $2<k\leq n+1$ ta đều có hai dây cung A_1A_k và A_2A_{k+n-1} vuông góc với nhau.

Lời giải.

Ký hiệu $\overset{\frown}{AB}$ là số đo của cung nhỏ AB. Theo giả thiết bài ra ta có:

$$\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\cdots=\overset{\frown}{A_{2n}A_1}=\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$



Với $2<k\leq N+1$, gọi B là gia điểm của A_1A_k và A_2A_{k+n-1}. Khi đó ta có:

$$\widehat{A_1BA_2}=\frac{\overset{\frown}{A_1A_2}+\overset{\frown}{A_kA_{k+n-1}}}{2}=\frac{\left(\dfrac{180}{n}\right)^\circ+\left(\dfrac{180(n-1)}{n}\right)^\circ}{2}=90^\circ$$

Từ đó suy ra A_1A_k luôn vuông góc với A_2A_{k+n-1} với mọi $2<k\leq n+1$.

Câu 5.

a) Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD. Hai đoạn thẳng BC và AD cắt nhau tại I. Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng CI, (M khác C và I). Đường thẳng qua M song song với CD cắt BD tại Q. Chứng minh rằng AM vuông góc với QK.

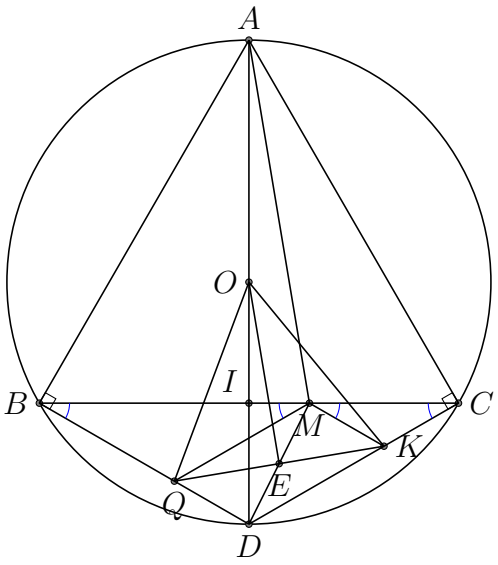
b) Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC<BC$, nội tiếp đường tròn tâm O và có trực tâm H. Đường thẳng AH cắt BC,CO tại D,E. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và CEH tiếp xúc nhau.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a)

Ta có $MQDK$ là hình bình hành (vì $MK \parallel BD$; $MQ \parallel CD$) nên MD và QK cắt nhau tại trung điểm E của mỗi đường và $KM = DQ$.



Tam giác DBC cân tại D, suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{CBD}$

Ta có $MK \parallel BD$, suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CMK}$ (đồng vị). Từ đó suy ra $\widehat{KMC} = \widehat{MCK} \Rightarrow \Delta MKC$ cân tại K, do đó $KC = KM = DQ$. (1)

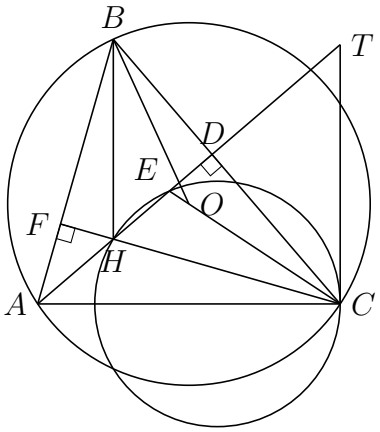
ΔODC cân nên $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$, mà $\widehat{ODC} = \widehat{ODB} \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODB}$. (2)

Từ (1) và (2) và do $OD = OC$ nên ta có $\Delta OQD = \Delta OKC$, suy ra $OQ = OK \Rightarrow \Delta OQK$ cân tại $O \Rightarrow OE \perp QK$.

Mà OE là đường trung bình của tam giác ADM nên $AM \parallel OE \Rightarrow AM \perp QK$.

b)

Gọi F là chân đường cao hạ từ C của $\Delta ABC \Rightarrow \widehat{HCA} = 90^\circ - \widehat{BAC}$.



Ta có $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$ và do tam giác OBC cân tại O nên

$$\widehat{BCO} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{BOC}\right) = 90^\circ - \widehat{BAC}$$

Từ đó suy ra $\widehat{HCA} = \widehat{BCO}$.

Gọi CT là tiếp tuyến của đường tròn (ADC) (với T thuộc đường thẳng AD), suy ra $\widehat{TAC} = \widehat{DCT}$.

Mà $\widehat{THC} = \widehat{TAC} + \widehat{HCA}$ (góc ngoài ΔHAC).

Lại có $\widehat{ECT} = \widehat{DCT} + \widehat{BCO} = \widehat{TAC} + \widehat{HCA} = \widehat{THC}$.

Bằng cách vẽ tiếp tuyến CT' của đường tròn (CEH) ta chứng minh được CT cũng là tiếp tuyến của đường tròn (CEH). Do đó hai đường tròn (ACD) và (CEH) tiếp xúc nhau.

Câu 6. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $5^x.3^y + 1 = z(3z + 2)$.

Lời giải.

Ta có $5^x.3^y = (z + 1)(3z - 1)$, mà $3(z + 1) - (3z - 1) = 4 \Rightarrow (z + 1), (3z - 1)$ là 2 số nguyên dương lớn hơn 1 và không có ước chung lẻ khác 1.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lại có $(3z-1)$ không chia hết cho 3 nên ta có $3z-1=5^x$ và $z+1=3^y$ (do 3 và 5 là nguyên tố).

Khử z hai phương trình trên ta được: $3^{y+1}=4+5^x$. (1)

Từ (1) suy ra 3^{y+1} chia 4 dư 1 (vì 5^x chia cho 4 dư 1). (2)

Nếu $y+1$ là số lẻ thì $y=2k$ (k nguyên dương), suy ra $3^{y+1}=3^{2k+1}=3.9^k$. Do đó 3^{y+1} chia cho 4 dư 3. Điều này mâu thuẫn với (2) nên $y+1$ phải là số chẵn, từ đó $y+1=2h$ với h là số nguyên dương. Từ (1) ta có $(3^h-2)(3^h+2)=5^x$. Mà $(3^h+2)-(3^h-2)=4$ nên $(3^h-2),(3^h+2)$ không có ước chung lẻ khác 1.

Lại có $3^h+2>3^h-2\geq 1$ nên $3^h-2=1$ (do 5 là số nguyên tố). Từ đó suy ra $h=1\Rightarrow y=1$.

Từ (1) suy ra $x=1$ và $z=2$. Vậy $(x,y,z)=(1,1,2)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 102

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH, VÒNG 1, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A=4$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x>0$ và $x\neq 1$.

$$A=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $A=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) $A=4\Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1=4\sqrt{x}\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện).

Câu 2. Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=(2m-1)x-m+2$ (m là tham số.)

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1y_1+x_2y_2=0$.

Lời giải.

a) Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình

$x^2=(2m-1)x-m+2\Leftrightarrow x^2-(2m-1)x+m-2=0.(*)$

$\Delta=4m^2-8m+9=(2m-2)^2+1>0$ với mọi m. Vậy với mọi m, (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Theo bài ta ta có x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ và có $y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$. Khi đó $x_1y_1+x_2y_2=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]$.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\x_1x_2=m-2\end{cases}$.

Do đó, yêu cầu đề bài tương đương với

$(2m-1)\left[(2m-1)^2-3(m-2)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-1=0\\4m^2-7m+7=0\text{ (Phương trình vô nghiệm)}\end{array}\right.$.

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 3. Hai thành phố A và B cách nhau 450 km. Một ô-tô đi từ A đến B với vận không đổi trong một thời gian dự định. Khi đi, ô-tô tăng vận tốc hơn dự kiến 5 km/h nên đã đến B sớm hơn 1 giờ so với thời gian dự định. Tính vận tốc dự kiến ban đầu của ô-tô.

Lời giải.

Gọi vận tốc dự kiến ban đầu của ô-tô là x (km/h). Điều kiện: $x > 0$.

Thời gian ô tô dự định đi từ A đến B là $\dfrac{450}{x}$ (giờ).

Thời gian ô tô thực tế đi từ A đến B là: $\dfrac{450}{x+5}$ (giờ).

Vì ô-tô đến B sớm hơn dự định 1 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2250 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 45 \\ x = -50 \text{ (Không thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc dự kiến ban đầu của ô-tô là 45 km/h.

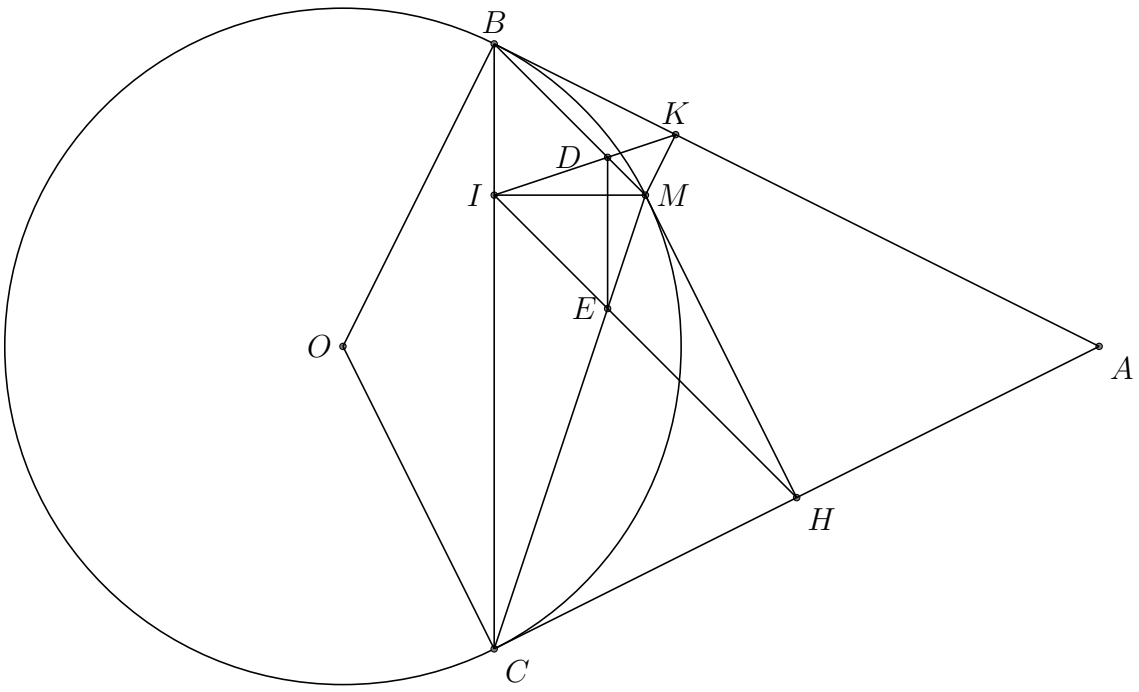
Câu 4. Cho đường tròn (O), dây cung BC không phải là đường kính. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau ở A. Lấy điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C), gọi I, H, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA và AB. Chứng minh

a) Các tứ giác $BKMI, CHMI$ nội tiếp.

b) $MI^2 = MK.MH$.

c) BM cắt IK tại D, CM cắt IH tại E. Chứng minh $DE \parallel BC$.

Lời giải.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Theo giả thiết ta có $\widehat{MKB} = 90°, \widehat{MIB} = 90°$. Suy ra $\widehat{MKB} + \widehat{MIB} = 180°$. Suy ra tứ giác $BKMI$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta có tứ giác $CHMI$ nội tiếp.

b) Vì tứ giác $MKBI$ nội tiếp, nên $\widehat{DIM} = \widehat{DBK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MK).

$\widehat{MCB} = \widehat{DBK}$ (góc nội tiếp với góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BM)

Vì tứ giác $MHCI$ nội tiếp, nên $\widehat{MCB} = \widehat{MHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MI)

Suy ra $\widehat{DIM} = \widehat{MHI}$.

Tương tự ta có $\widehat{EIH} = \widehat{ECH}$ $\widehat{ECH} = \widehat{MBC}$ $\widehat{MBC} = \widehat{MKI}$. Suy ra $\widehat{EIH} = \widehat{MKI}$.

Do đó tam giác MIK đồng dạng với tam giác MHI. Suy ra $\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MK}{MI} \Leftrightarrow MI^2 = MK.MH$.

c) Ta có $\widehat{DIM} = \widehat{MCB}$ (vì cùng bằng $\widehat{MHI}$) và $\widehat{EIH} = \widehat{MBC}$ (vì cùng bằng $\widehat{MKI}$).

Do đó $\widehat{DIE} + \widehat{DME} = \widehat{DIM} + \widehat{EIH} + \widehat{DME} = \widehat{MCB} + \widehat{MBC} + \widehat{DME} = 180°$ (tổng ba góc trong tam giác). Suy ra tứ giác $MDIE$ nội tiếp, nên $\widehat{DEM} = \widehat{DIM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MD) mà $\widehat{DIM} = \widehat{MCB}$, suy ra $\widehat{DEM} = \widehat{MCB}$, hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DE \parallel BC$.

Câu 5. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$.

Lời giải.

Vì $a, b, c \in [0; 1]$, nên $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0 \Leftrightarrow a + b + c - ab - bc - ca + abc \leq 1$. Cũng vì $a, b, c \in [0; 1]$, nên $b \geq b^2$, $c \geq c^3, abc \geq 0$.

Vậy $a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq a+b+c-ab-bc-ca+abc \leq 1$. Dấu " = " khi $b = c = 1, a = 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 103

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Giải phương trình $(x-1)(x+2)+2\sqrt{x^2+x+1}=0$.

b) Cho x, y là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|.$$

Đẳng thức trên còn đúng hay không trong trường hợp x, y là các số thực âm? Tại sao?

Lời giải.

a) Do $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ nên phương trình đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có:

$$(x-1)(x+2)+2\sqrt{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow x^2+x+1+2\sqrt{x^2+x+1}-3=0. \quad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1}$, $t>0$. Thay vào (1), ta được: $t^2+2t-3=0$. (2)
Giải (2) được nghiệm $t=1$ (nhận) hoặc $t=-3$ (loại).
Vậy $t=1$ hay $x^2+x+1=1$. Giải phương trình này ta được các nghiệm $x=-1$, $x=0$.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$ và $x=-1$.

b) Với $x>0$ và $y>0$, ta có:

$$\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=\left|\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}\right|+\left|\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{2}\right|$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2}=x+y=|x|+|y|.$$

Trong trường hợp $x<0$, $y<0$. Đặt $a=-x$, $b=-y$. Ta có $a>0$, $b>0$. Khi đó:

$$\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=\left|\frac{-x-y}{2}+\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{-x-y}{2}-\sqrt{xy}\right|$$
$$=\left|\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\right|+\left|\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right|=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$$
$$=a+b=|x|+|y|.$$

Vậy đẳng thức vẫn đúng trong trường hợp x, y là các số thực âm.

Câu 2.

a) Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện n^2+n+3 là số nguyên tố. Chứng minh rằng n chia 3 dư 1 và $7n^2+6n+2017$ không phải là số chính phương.

b) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$2x^2+4y^2-4xy+2x+1=2017.$$

Lời giải.

a) Vì n là số nguyên dương nên $n^2+n+3>3$. Gọi r là số dư khi chia n cho 3, $r\in\{0,1,2\}$. Nếu $r=0$ hoặc $r=2$ thì n^2+n+3 chia hết cho 3, mâu thuẫn với giả thiết n^2+n+3 là số nguyên tố. Do đó $r=1$ hay n chia 3 dư 1. Khi đó $7n^2+6n+2017$ chia 3 dư 2. Vì một số chính phương có số dư khi chia cho 3 là 0 hoặc 1 nên $7n^2+6n+2017$ không phải là một số chính phương.

b) Ta có:

$$2x^2+4y^2-4xy+2x+1=2017\Leftrightarrow(x-2y)^2+(x+1)^2=2017.$$

Ta có $2017=9^2+44^2$. Như vậy có các trường hợp sau:

$x-2y$	9	9	-9	-9	44	44	-44	-44
$x+1$	44	-44	44	-44	9	-9	9	-9
x	43	-45	43	-45	8	-10	8	-10
y	17	-27	26	-18	-18	-27	26	17

Câu 3.

a) Cho đa thức $P(x)=x^3-6x^2+15x-11$ và các số thực a, b thỏa mãn $P(a)=1$, $P(b)=5$. Tính giá trị của $a+b$.

b) Giả sử x, y là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x(xy+1)=2y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=\dfrac{y^4}{1+y^2+y^4\left(x^4+x^2\right)}$.

Lời giải.

a) Vì $P(a)=1$ nên

$$a^3-6a^2+15a-11=1\Leftrightarrow(a-2)^3+3(a-2)=-2. \quad (1)$$

Vì $P(b)=5$ nên

$$b^3-6b^2+15b-11=5\Leftrightarrow(b-2)^3+3(b-2)=2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$(a-2)^3+3(a-2)+(b-2)^3+3(b-2)=0$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow (a+b-4)\left[(a-2)^2-(a-2)(b-2)+(b-2)^2+3\right]=0$$
$$\Leftrightarrow a+b-4=0 \ (\text{do } \ (a-2)^2-(a-2)(b-2)+(b-2)^2\geq 0).$$

Như vậy $a+b=4$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\begin{aligned}1+y^2+y^4\left(x^4+x^2\right)&=\left(1+y^4x^2\right)+\left(y^2+y^4x^4\right)\\&\geq 2xy^2+2x^2y^3=2xy^2(1+xy)=4y^4.\end{aligned}$$

Do đó $H=\dfrac{y^4}{1+y^2+y^4\left(x^4+x^2\right)}\leq\dfrac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$. Vậy nên giá trị lớn nhất của H là $\dfrac{1}{4}$, đạt được khi $x=y=1$.

Câu 4.

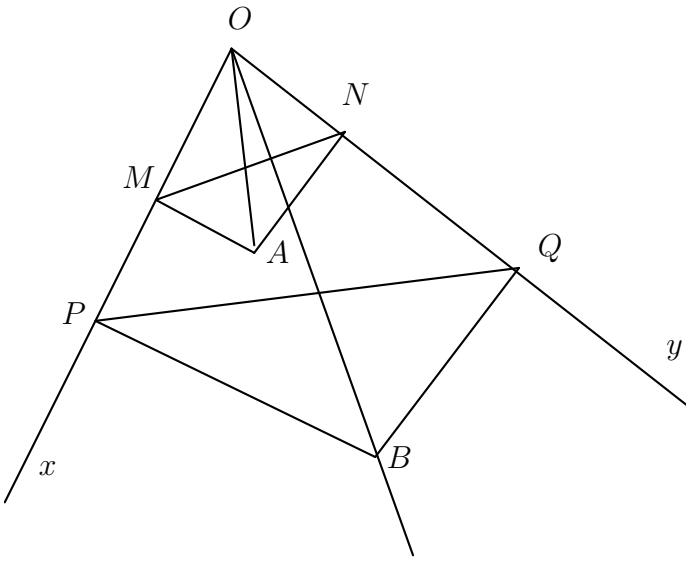
a) Cho hai điểm A,B phân biệt nằm trong góc nhọn xOy sao cho $\widehat{xOA}=\widehat{yOB}$. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên các tia Ox,Oy. Giả sử M,N,P,Q đôi một phân biệt. Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên một đường tròn.

b) Cho tam giác ABC không cân, có ba góc nhọn. Một đường tròn qua B,C cắt các cạnh AC,AB lần lượt tại D,E. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BD,CE.

b_1) Chứng minh rằng các tam giác ABD,ACE đồng dạng với nhau và $\widehat{MAB}=\widehat{NAC}$.

b_2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AB, K là hình chiếu vuông góc của N lên AC và I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng tam giác IHK cân.

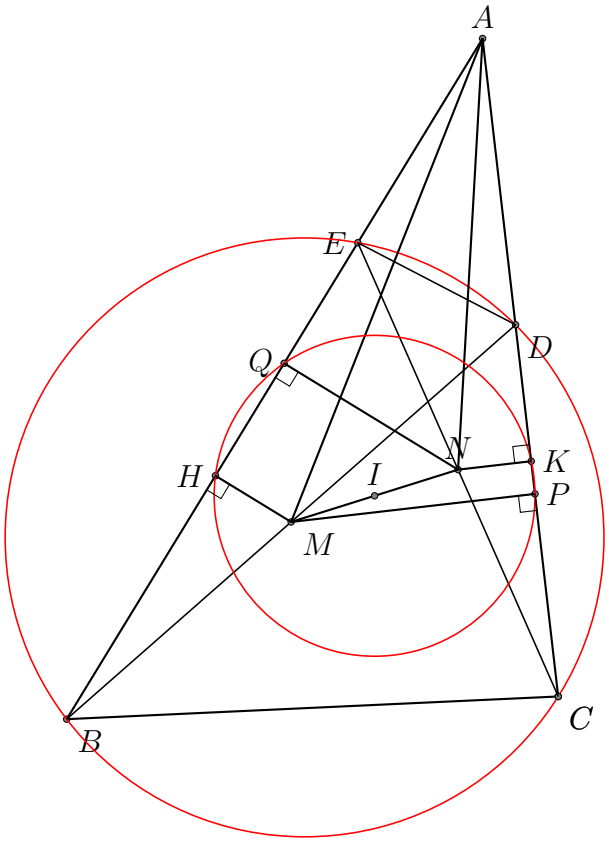
Lời giải.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Tứ giác $OMAN$ nội tiếp nên $\widehat{ONM} = \widehat{OAM}$. Tứ giác $OPBQ$ nội tiếp nên $\widehat{OPQ} = \widehat{OBQ}$. Mà các tam giác OAM, OBQ đồng dạng nên $\widehat{OAM} = \widehat{OBQ}$. Suy ra $\widehat{ONM} = \widehat{OPQ}$. Do đó bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Các tam giác ABD, ACE có góc A chung và $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ nên là các tam giác đồng dạng. M, N lần lượt là trung điểm BD, CE nên các tam giác ABM, ACN cũng đồng dạng.



Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. Gọi P là hình chiếu vuông góc của M lên AC; Q là hình chiếu vuông góc của N lên AB. Theo câu a), bốn điểm H, K, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Hơn nữa, tâm của đường tròn đó là giao điểm các đường trung trực của các đoạn thẳng PK, QH nên tâm đường tròn đó chính là trung điểm I của MN. Do đó, tam giác IHK cân tại I.

Câu 5. Cho 9 số nguyên dương đôi một phân biệt, các số đó đều chỉ chứa các ước số nguyên tố gồm 2, 3, 5. Chứng minh rằng trong 9 số đã cho, tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải.

Theo đề, tất cả 9 số đã cho đều có dạng $2^x.3^y.5^z$ $(x, y, z \in \mathbb{N})$. Xét tính chẵn - lẻ của các bộ số (x, y, z), ta có tất cả 8 trường hợp. Theo nguyên lý Dirichlet, phải có ít nhất 2 số trong 9 số

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

đã cho có bộ số mũ trong phân tích nguyên tố là cùng tính chẵn - lẻ. Do đó, tích của hai số đó có dạng $2^{2a}.3^{2b}.5^{2c}$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$. Suy ra, tích của hai số đó là số chính phương.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 104

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LHP NAM ĐỊNH VÒNG 2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-1\right)\geq 1$

b) Với a,b,c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=3$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=(a-3)^{2017}.(b-3)^{2017}.(c-3)^{2017}$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x\geq 2$.
BPT $\iff \frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\geq 1 \iff \frac{1}{\sqrt{x}-1}\geq 1 \iff \sqrt{x}\leq 2 \iff x\leq 4 \Longrightarrow x=2,3,4$.

b) Ta có $(a-3)(b-3)(c-3)=abc+9(a+b+c)-3(ab+bc+ca)-27=abc-3(ab+bc+ca)$, mặt khác $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3} \iff abc=3(ab+bc+ca)$, cho nên $P=0$

Câu 2.

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+6x+5}+1\right)=4$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2}\\ x^2-3x-4\sqrt{y}+10=0\end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x\geq -1$.
PT $\iff \sqrt{x^2+6x+5}+1=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1} \iff \left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$
$\iff x=0$ hoặc $x=-4$ (loại).

b) Điều kiện xác định: $x\geq -2, y\geq 0$.
Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có $\sqrt{3}.\sqrt{3y}+\sqrt{x+2}\leq\sqrt{(3+1)(3y+x+2)}$, cho nên phương trình thứ nhất tương đương với $\sqrt{y}=\sqrt{x+2}$, thay vào phương trình thứ hai ta được $x^2-3x-4\sqrt{x+2}+10=0 \iff (x-2)^2+\frac{(x-2)^2}{x+6+4\sqrt{x+2}}=0 \iff (x-2)^2=0$ hoặc $1+\frac{1}{x+6+4\sqrt{x+2}}=0$ (vô nghiệm do $x+2\geq 0$). Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(2;4)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

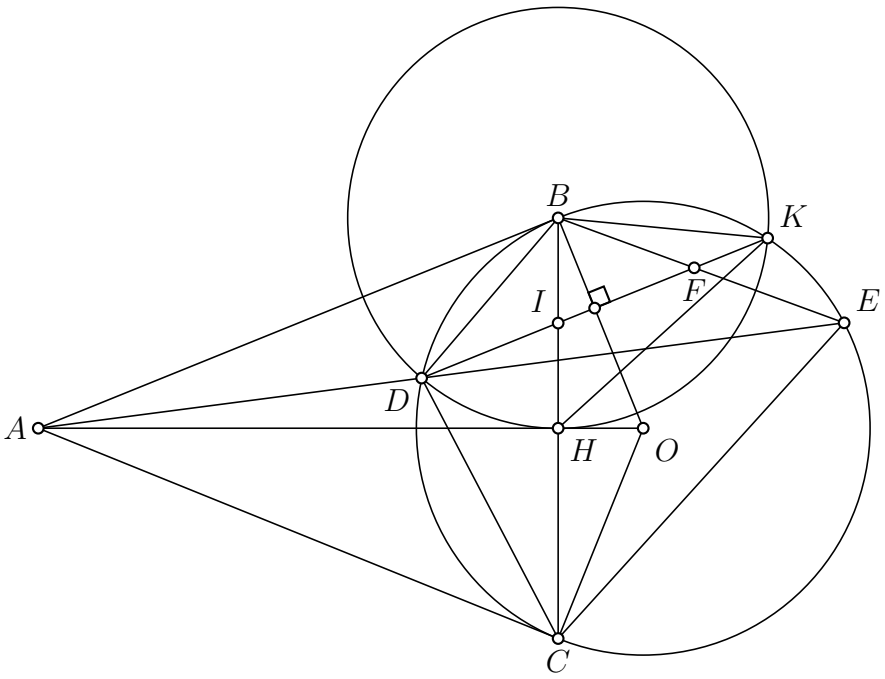
Câu 3. Cho đường tròn (O), từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, I là trung điểm của BH. Đường thẳng qua I vuông góc với OB cắt (O) tại hai điểm D, K (D thuộc cung nhỏ BC). Tia AD cắt đường (O) tại thứ hai E, DK cắt BE tại F.

a) Chứng minh tứ giác $ICEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH}$.

c) Chứng minh rằng: $BD.CE = BE.CD$ và $BF.CE^2 = BE.CD^2$.

Lời giải.



a) Ta có $AB \parallel DK$ cho nên $\widehat{ABC} = \widehat{BIK}$, mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{BEC}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây), suy ra $\widehat{BIK} = \widehat{BEC}$ cho nên tứ giác $ICEF$ nội tiếp.

b) Dễ thấy hai tam giác BCD và BDI đồng dạng cho nên $\dfrac{BD}{BI} = \dfrac{BC}{BD} \Longrightarrow BD^2 = BI.BC = BH^2 \Longrightarrow BD = BH$, suy ra D, H, K thuộc đường tròn tâm B bán kính BD kéo theo $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH}$.

c) Dễ thấy các cặp tam giác ABE, ADB và ACE, ADC đồng dạng cho nên $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{AE}{AB}$, $\dfrac{CE}{CD} = \dfrac{AE}{AC}$, kéo theo $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{CE}{CD} \Longrightarrow BD.CE = BE.CD$

Tứ giác $ICEF$ nội tiếp cho nên $BF.BE = BI.BC = BD^2 \Longrightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{CD}{CE} \Longrightarrow BD.CD = BF.CE \iff BD.CD.CE = BF.CE^2 \iff BF.CE^2 = BE.CD^2$.

Câu 4.

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^3+1=4y^2$.

b) Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $B=x^4-x^2-10x-25$ là số nguyên tố.

Lời giải.

a) $x^3+1=4y^2 \iff x^3=(2y-1)(2y+1)$, $(2y-1,2y+1)=1$ cho nên $2y+1=a^3, 2y-1=b^3$ $(a>b)$, $a^3-b^3=2 \iff (a-b)(a^2+ab+b^2)=2$.
Nếu $a-b=1$ thì $a^2+b^2+ab=2$, hệ không có nghiệm nguyên.
Nếu $a-b=2$ thì $a^2+b^2+ab=1$, hệ có nghiệm $a=1$, $b=-1$.
Vậy nghiệm của phương trình $x=-1$, $y=0$.

b) $B=(x^2+x+5)(x^2-x-5)$, $x^2+x+5>0$ cho nên $x^2-x-5=1 \iff x=3, x=-2$, nếu $x=3$, $B=17$ (thỏa mãn).

Câu 5.

a) Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a+bc}+\dfrac{1}{b+ac}+(a+b)(4+5c)$.

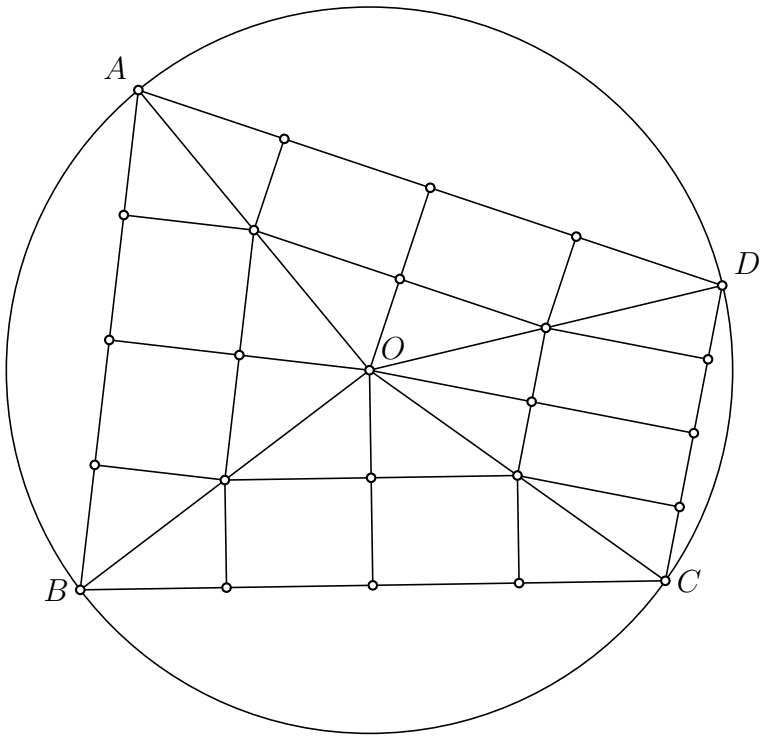
b) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính bằng $R=4$cm (O nằm trong tứ giác $ABCD$). Xét 33 điểm phân biệt nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong 33 điểm đó luôn tìm được 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$cm^2.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{1}{a+bc}+\dfrac{1}{b+ac}\geq\dfrac{4}{a+b+bc+ac}=\dfrac{4}{(a+b)(c+1)}$, kéo theo $P\geq\dfrac{4}{(a+b)(c+1)}+4(a+b)(1+c)+(a+b)c$. Áp dụng AM-GM $\dfrac{4}{(a+b)(c+1)}+4(a+b)(1+c)\geq 2\sqrt{\dfrac{4}{(a+b)(c+1)}.4(a+b)(1+c)}=8$, a, b, c không âm cho nên $(a+b)c\geq 0$. Vậy $P_{\min}=8$ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$ và $c=0$.

b) Bổ đề: Trong các tam giác nội tiếp đường tròn bán kính R, tam giác đều có diện tích lớn nhất và diện tích lớn nhất đó bằng $\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Chia tứ giác $ABCD$ thành 16 tứ giác bởi các điểm chia các cạnh AB, BC, CD, DA thành 4 phần bằng nhau và các trung điểm các cạnh OA, OB, OC, OD, dễ thấy mỗi tứ giác nhỏ là các tứ giác nội tiếp đường tròn có bán kính 1cm. Theo nguyên lý Dirichlet có một tứ giác chứa ít nhất 3 điểm, 3 điểm này tạo nên tam giác thuộc hình tròn bán kính 1cm cho nên có diện tích lớn nhất bằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 105

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH (VÒNG 1), 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}-\dfrac{5}{x-1}$.

b) Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng $y=2x+3$ với trục Oy.

c) Với những giá trị nào của m thì hàm số $y=(1-m^2)x+2017m$ đồng biến?

d) Tam giác đều ABC có diện tích hình tròn ngoại tiếp bằng 3π cm^2. Tính độ dài cạnh.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của biểu thức là $\begin{cases}2-x>0\\x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x\neq 1\end{cases}$.

b) $x=0\Rightarrow y=3\Rightarrow M(0;3)$.

c) Để hàm số đồng biến thì $1-m^2>0\Leftrightarrow |m|<1\Leftrightarrow -1<m<1$.

d) Diện tích hình tròn là 3π cm^2 nên bán kính đường tròn là $R=\sqrt{3}$ (cm).
Kẻ trung tuyến AM, gọi G là trọng tâm của ΔABC. Vì ΔABC đều nên $GA=\dfrac{2}{3}AM$ cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
$\Rightarrow \dfrac{2}{3}AM=\sqrt{3}$ (cm) $\Rightarrow AM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.
Mà ΔAMB vuông tại M nên $\sin B=\dfrac{AM}{AB}\Leftrightarrow AB=\dfrac{AM}{\sin 60^\circ}=3$ cm.

Câu 2. Cho biểu thức $A=\dfrac{x-1}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}:\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}}$ (Với $x>0$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $\dfrac{1}{A}$ là một số nguyên.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x>0$.

$$A=\frac{(x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)=x-1.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Do $x \in \mathbb{Z}$ nên để $\dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{x-1}$ là số nguyên thì $(x-1)$ là các ước nguyên của 1.
$\Rightarrow (x-1) \in \{\pm 1\} \Rightarrow x = 2$ (Vì $x > 0$).

Câu 3.

1) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1) (Với m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \le 0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{x+3} = 7 - \sqrt{x^2+3} \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{7-y} = y^2 - 6y + 13 \end{cases}$.

Lời giải.

1)

a) Với $m = 2$ phương trình trở thành $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

b) $\Delta' = m - 1$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$.
Khi đó theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m + 1 \end{cases}$.
Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên $x_1^2 - 2mx_1 + m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2mx_1 - m^2 + m - 1$.
Do đó

$$\begin{aligned} & x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2mx_1 - m^2 + m - 1 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2m(x_1 + x_2) - 4m^2 + 2m - 6 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2m.2m - 4m^2 + 2m - 6 \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & m \le 3 \end{aligned}$$

Vậy $1 < m \le 3$.

2) Điều kiện: $x \ge 0$, $y \le 7$, $x + y \ge 0$.
Giải phương trình thứ nhất

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} + 2\sqrt{x+3} = 7 - \sqrt{x^2+3} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x+3} - 4 + \sqrt{x^2+3} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \qquad \text{(Thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Thế $x = 1$ giải phương trình thứ hai

$$\begin{aligned}
&\sqrt{y+1} + \sqrt{7-y} = y^2 - 6y + 13 \\
\Leftrightarrow\ &(y-3)^2 + 4 - \sqrt{y+1} - \sqrt{7-y} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(y-3)^2 + \frac{1}{2}\left(8 - 2\sqrt{y+1} - 2\sqrt{7-y}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(y-3)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{y+1} - 2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{7-y} - 2\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &y = 3 \qquad \text{(Thỏa mãn).}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm hệ là $(x; y) = (1; 3)$.

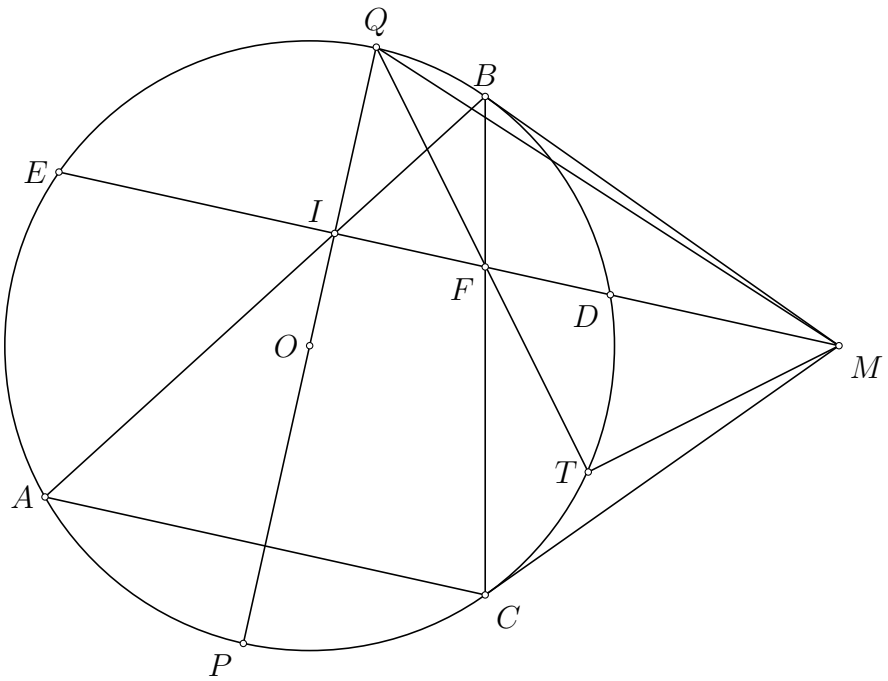
Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhòn nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại M. Đường thẳng qua M song song với AB cắt đường tròn (O) tại D và E (D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F, cắt AC tại I.

a) Chứng minh 5 điểm M, B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{FI}{FE} = \dfrac{FD}{FM}$.

c) Đường thẳng OI cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB), đường thẳng QF cắt (O) tại T (T khác Q). Tính tỉ số $\dfrac{TQ^2 + TM^2}{MQ^2}$.

Lời giải.



a) Ta có: $\widehat{OBM} = \widehat{OCM} = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến).
$\Rightarrow B, C, M, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM (1).
Lại có: $ME \parallel AC \Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BAC}$ (cặp góc đồng vị).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BCM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn $\widehat{BC}$).
$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BCM} \Rightarrow$ tứ giác $BMCI$ nội tiếp.
$\Rightarrow B, C, I, M$ cùng thuộc một đường tròn (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow B, M, O, I, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

b) Theo a) thì tứ giác $BMCI$ nội tiếp nên $\Delta FBI \backsim \Delta FMC$ (g.g).
$\Rightarrow \dfrac{FI}{FC} = \dfrac{FB}{FM} \Leftrightarrow FI.FM = FB.FC$ (3).
Lại dễ chứng minh được $\Delta FBE \backsim \Delta FDC$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{FB}{FD} = \dfrac{FE}{FC} \Leftrightarrow FD.FE = FB.FC$ (4).
Từ (3) và (4) $\Rightarrow FI.FM = FD.FE \Leftrightarrow \dfrac{FI}{FE} = \dfrac{FD}{FM}$.

c) Ta dễ chứng minh được $\Delta FBQ \backsim \Delta FTC$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{FB}{FT} = \dfrac{FQ}{FC} \Leftrightarrow FT.FQ = FB.FC$ (5).
Từ (3) và (5) $\Rightarrow FI.FM = FT.FQ \Leftrightarrow \dfrac{FI}{FT} = \dfrac{FQ}{FM}$.
Từ đó ta được $\Delta FIQ \backsim \Delta FTM$ (c.g.c).
$\Rightarrow \widehat{FIQ} = \widehat{FTM} = 90^o \Rightarrow \Delta QTM$ vuông tại T.
$\Rightarrow MQ^2 = TQ^2 + TM^2 \Leftrightarrow \dfrac{TQ^2 + TM^2}{MQ^2} = 1$.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq -2$, $b \geq -2$ và $a + b + 2c = 6$. Chứng minh rằng

a) $a^2 + b^2 + 4ab + 16 \geq 4c^2 - 16c + 20$.

b) $\dfrac{4 - b^2}{4\left[(c-2)^2 + 1\right]} - \dfrac{a^2}{(a-b)^2 + 6ab + 16} + 5 \geq 0$.

Lời giải.
(Thực hiện bởi viet9a14124869 - VMF's Member)

a) Ta có $a + b = 6 - 2c$ và $(a+2)(b+2) \geq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + 4ab + 16 = (a+b)^2 + 2(a+2)(b+2) - 4(a+b) + 8 \\ &\geq \quad (a+b)^2 - 4(a+b) + 8 = (6-2c)^2 - 4(6-2c) + 8 = 4c^2 - 16c + 20. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = -2$ hoặc $b = -2$.

b) Theo câu a) ta có $(a-b)^2 + 6ab + 16 \geq 4c^2 - 16c + 20$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{4 - b^2}{4c^2 - 16c + 20} - \frac{a^2}{(a-b)^2 + 6ab + 16} + 5 \\ &\geq \frac{4 - b^2 - a^2}{4c^2 - 16c + 20} + 5 = \frac{4 - (a+b)^2 + 2(a+2)(b+2) - 4(a+b) - 8}{4c^2 - 16c + 20} + 5 \\ &\geq \frac{4 - (a+b)^2 - 4(a+b) - 8}{4c^2 - 16c + 20} + 5 = \frac{4 - (6-2c)^2 - 4(6-2c) - 8}{4c^2 - 16c + 20} + 5 \\ &= \frac{4(2c-3)^2}{4c^2 - 16c + 20} \geq 0 \end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Dấu bằng xảy ra khi $(a,b,c) \in \left\{\left(-2,5,\frac{3}{2}\right);\left(5,-2,\frac{3}{2}\right)\right\}$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 106

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $A=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Rút gọn biểu thức A.

$$\begin{aligned}A&=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{1}{\sqrt{x}-2}\\&=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.\end{aligned}$$

b) $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=1-\dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}$. Để A nhận giá trị nguyên khi $\dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}$ đạt giá trị nguyên. Hay $-3\vdots(\sqrt{x}+1)\Leftrightarrow\sqrt{x}+1$ là ước của -3.

Nên $\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn).

$\sqrt{x}+1=-1\Leftrightarrow\sqrt{x}=-2$ (không thỏa mãn).

$\sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn).

$\sqrt{x}+1=-3\Leftrightarrow\sqrt{x}=-4<0$ (không thỏa mãn).

Vậy $x=0$ hoặc $x=4$ thì A nhận giá trị nguyên.

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $(d_1)\colon y=-5(x+1)$, $d_2\colon y=3x-13$ và $(d_3)\colon y=mx+3$ (với m là tham số). Tìm tọa độ giao điểm I của (d_1) và (d_2). Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d_3) qua I?

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x-1|+2\sqrt{y+2} &= 5 \\ 3\sqrt{y+2}-|x-1| &= 5 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Tọa độ giao điểm I của hai đường (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y &= -5x-5 \\ y &= 3x-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-13 &= -5x-5 \\ y &= 3x-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x &= 8 \\ y &= 3x-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 3-13=-10 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm I của hai đường (d_1) và (d_2) là $I(1;-10)$.
Đường thẳng (d_3) đi qua giao điểm I khi tọa độ của I là $x=1$ và $y=-10$ thỏa mãn công thức $y=mx+3$ thay vào ta có: $-10=m.1+3 \Leftrightarrow m=-13$.
Vậy với $m=-13$ thì đường thẳng (d_3) đi qua điểm I.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x-1|+2\sqrt{y+2} &= 5 \\ 3\sqrt{y+2}-|x-1| &= 5 \end{cases}$.

Đặt $A=|x-1|\geq 0$; $B=\sqrt{y+2}\geq 0$.

Ta có: $\begin{cases} A+2B &= 5 \\ 3B-A &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+2B &= 5 \\ -A+3B &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 2 \end{cases}$.

Do đó: $\begin{cases} |x-1| &= 1 \\ \sqrt{y+2} &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| &= 1 \\ y+2 &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x-1 &= 1 \\ x-1 &= -1 \end{array}\right. \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right. \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy $(x;y)=\{(2;2),(0;2)\}$ là nghiệm của hệ.

Câu 3.

a) Tìm m để phương trình: $(m-1)x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn hệ thức: $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{5}{2}=0$.

b) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-2}=9-5x$.

Lời giải.

a) Phương trình $(m-1)x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-(m-1)(m-2)>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{2}{3} \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{2}{3}$$

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m+2}{m-1} \end{cases}$

Mà $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{5}{2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}+\dfrac{5}{2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}+\dfrac{5}{2}=0$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{2m}{m-1}\right)^2 - 2\cdot\frac{m+2}{m-1}}{\frac{m+2}{m-1}} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{4m^2}{(m-1)^2} - 2\cdot\frac{2m^2-2m+4}{(m-1)^2}}{\frac{m+2}{m-1}} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{4m^2-2m^2-2m+4}{(m-1)^2}}{\frac{m+2}{m-1}} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{2m^2-2m+4}{(m-1)^2}}{\frac{m+2}{m-1}} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2m^2-2m+4)}{(m-1)(m+2)} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4m^2-4m+8)+5(m^2+m-2)}{2(m-1)(m+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{9m^2+m-2}{2(m-1)(m+2)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{-1+\sqrt{73}}{18} \\ m_2 = \dfrac{-1-\sqrt{73}}{18} \end{array}\right.$$

b) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-2} = 9-5x$.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Đặt $t = \sqrt{2x-2}$, $t \geq 0$. Ta có:$t^2 = 2x-2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2+2}{2} = \dfrac{1}{2}t^2+1$.

Phương trình trở thành:

$$\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)t = 9-5\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t^3+t = 9-\frac{5}{2}t^2-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t^3+\frac{5}{2}t^2+t-4 = 0 \Leftrightarrow t^3+5t^2+2t-8 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \text{(nhận)} \\ t = -2 & \text{(loại)} \\ t = -4 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $t = 1$, ta có: $\sqrt{2x-2} = 1 \Leftrightarrow 2x-2 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ (nhận).

Câu 4. Cho đường tròn (O) với tâm O, bán kính R đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (O) sao cho M không trùng với các điểm A và B. Lấy C là điểm đối xứng với O qua A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N. Đường thẳng BN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F.

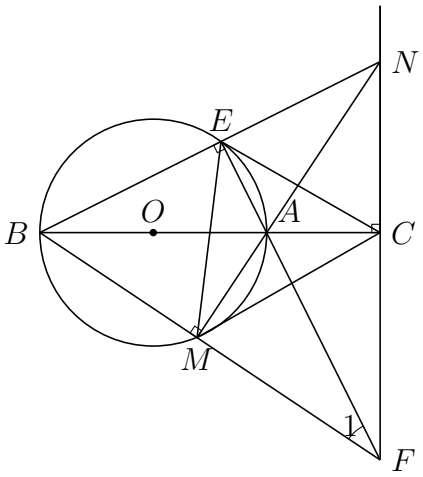
a) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng và tứ giác $MENF$ nội tiếp.

b) Chứng minh : $AM.AN = 2R^2$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên đường tròn (O) để tam giác BNF có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) *Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.*
Xét tam giác BNF có: $\widehat{BMA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
$\Rightarrow \widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow NM \perp BF$ nên MN là đường cao.
$BC \perp NF$ (gt) nên BC là đường cao, mà BC cắt MN tại A nên A là trực tâm. FA thuộc đường cao thứ ba nên $FA \perp BN$ mà $\widehat{BEA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EA \perp BN$, theo tiên đề Euclide (Ơ-cờ-lít) thì qua A kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với BN nên ba điểm A, E, F thẳng hàng.

Chứng minh tứ giác $MENF$ nội tiếp.
Ta có: $\widehat{FEN} = 90^\circ$ $(FE \perp BN)$.
$\widehat{FMN} = 90^\circ$ $(MN \perp BF) \Rightarrow \widehat{FEN} = \widehat{FMN} = 90^\circ$.
Mà E và M nằm về nửa mặt phẳng bờ là NF. Vậy bốn điểm N, E, M, F cùng thuộc đường tròn đường kính MN hay *tứ giác $MENF$ nội tiếp.*

b) *Chứng minh: $AM.AN = 2R^2$.*
Xét $\triangle BAN$ và $\triangle MAC$ ta có:
$\widehat{N_1} = \widehat{F_1}$ (góc nội tiếp của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $NEMF$ cùng chắn cung EM). (1)
$\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CAMF$ cùng chắn cung AM) (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{N_1} = \widehat{C_1} (= \widehat{F_1})$ (*)
Mà $\widehat{BAN} = \widehat{MAC}$ (đối đỉnh) (**)
Từ (*) và (**) ta có hai tam giác: $\triangle BAN$ và $\triangle MAC$ đồng dạng với nhau.
$\Rightarrow \dfrac{MA}{AB} = \dfrac{AC}{AN} \Rightarrow AM.AN = AB.AC = 2R.R = 2R^2$.

c) Theo câu a) thì A là trọng tâm của $\triangle BNF$ mà $BC = AB + AC = 2R + R = 3R$.
Vì $S_{\triangle BNF} = \dfrac{1}{2}BC.NF = \dfrac{1}{2} \cdot 3R.(NC + CF)$ (1)
Mà NC và $NF > 0$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có: $NC+CF \geq 2\sqrt{NC.CF}$. (2)
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $CN=CF$. Vậy BC là trung tuyến của $\triangle BNF$.
Điểm $A \in BC$ có $AB=2R$; $BC=3R$ nên $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$. Suy ra A là trọng tâm tam giác BNF.
Điểm A vừa là trọng tâm, vừa là trực tâm tam giác BNF nên suy ra tam giác BNF là tam giác đều $\Rightarrow BC$ là phân giác góc $\widehat{FBN} \Rightarrow \widehat{MBA}=30^\circ$; $\widehat{MAB}=60^\circ$
hay $\begin{cases} M \in AB \\ \widehat{MAB}=60^\circ; \widehat{MBA}=30^\circ \end{cases}$ thì dấu bằng xảy ra.
Xét $\triangle CNA$ và $\triangle CBF$ ta có: $\widehat{NCA}=\widehat{FCB}=90^\circ$; $\widehat{CNA}=\widehat{CBM}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMCN$).
Do đó $\triangle CNA$ và $\triangle CBF$ đồng dạng (g.g).
$\Rightarrow \dfrac{CN}{CB}=\dfrac{AC}{CF} \Rightarrow CN.CF=AC.CB=R.3R=3R^2$ (3)
Thay (2) và (3) và (1) ta có:
$S_{\triangle BNF}=\dfrac{1}{2}BC.NF=\dfrac{1}{2}\cdot 3R(NC+CF) \geq \dfrac{3R}{2}\cdot 2\sqrt{CN.CF}=3R\sqrt{AC.BC}=3R\sqrt{R.3R}=3R^2\sqrt{3}$.
Vậy $\min S_{\triangle BNF}=3R^2\sqrt{3}$ khi $\begin{cases} M \in AB \\ \widehat{MAB}=60^\circ; \widehat{MBA}=30^\circ \end{cases}$.

Câu 5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}>1.$$

Lời giải.
Ta có:
$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}>1$$
$$\Leftrightarrow \left[c(a^2+b^2-c^2)+2abc\right]+\left[a(b^2+c^2-a^2)-2abc\right]+\left[b(a^2+c^2-b^2)-2abc\right]>0$$
$$\Leftrightarrow c\left[(a+b)^2-c^2\right]+a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(a-c)^2-b^2\right]>0$$
$$\Leftrightarrow c(a+b-c)(a+b+c)+a(b-c-a)(b-c+a)+b(a-c-b)(a-c+b)>0$$
$$\Leftrightarrow c(a+b-c)(a+b+c)+a(b-c-a)(a+b-c)+b(a-c-b)(a+b-c)>0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[c.(a+b+c)+a(b-c-a)+b(a-c-b)\right]>0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[ca+cb+c^2+ab-ac-a^2+ba-bc-b^2\right]>0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[c^2-a^2+2ba-b^2\right]>0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[c^2-(a^2-2ba+b^2)\right]>0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[c^2-(a-b)^2\right]>0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0$$
Đẳng thức cuối cùng đúng vì với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, ta có: $a+b>c$ suy ra $a+b-c>0$; tương tự ta có: $c+b-a>0$ và $c+a-b>0$.
Nhân ba bất đẳng thức này vế theo vế ta có: $(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0$.
Vậy bất đẳng thức ban đầu đúng.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 107

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC LÂM ĐỒNG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho $x=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt{9-4\sqrt{5}}-2}$. Tính giá trị biểu thức $P=(x^2+x+1)^{2017}$.

Lời giải.

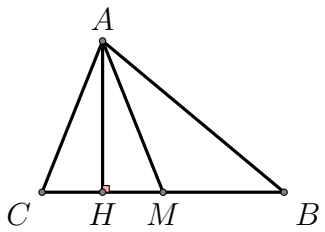
Có $x=\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)(\sqrt{5}-2)-2}=\dfrac{1}{5-4-2}=-1\Rightarrow P=(1-1+1)^{2017}=1.$

Câu 2. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC. Tính $\dfrac{\tan B}{\tan C}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của CM, do $AM=AC$ nên $\triangle AMC$ cân tại A, suy ra $AH\perp CM$

Ta có: $\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{AH}{BH}:\dfrac{AH}{CH}=\dfrac{CH}{BH}=\dfrac{1}{3}$.



Câu 3. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a^{2014}+b^{2015}+c^{2016}$ chia hết cho 6 thì $a^{2016}+b^{2017}+c^{2018}$ chia hết cho 6.

Lời giải.

Đặt $A=a^{2014}+b^{2015}+c^{2016}$, $B=a^{2016}+b^{2017}+c^{2018}$.

Ta có: $B-A=a^{2014}(a^2-1)+b^{2015}(b^2-1)+c^{2016}(c^2-1)$.

Nhận thấy rằng $a(a^2-1)=(a-1)a(a+1)\vdots 6\Rightarrow a^{2014}(a^2-1)\vdots 6$.

Tương tự ta có $b^{2014}(b^2-1)\vdots 6$, $c^{2014}(c^2-1)\vdots 6$ nên ta suy ra $B-A\vdots 6$.

Mà $A\vdots 6$ nên $B\vdots 6$.

Câu 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y}\\ 2x^2-xy=1\end{cases}$.

Lời giải.

$x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow(x-y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ y=-\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x=y$, $(2)\Leftrightarrow 2x^2-x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=y=-1\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $y=-\dfrac{1}{x}$, $(2)\Leftrightarrow 2x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$ (loại)

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Giải phương trình $\dfrac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \sqrt{3x+1} - 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{3}$.

$\text{pt} \Leftrightarrow \dfrac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \dfrac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{3x+10} = \sqrt{3x+1}+1 (*) \end{array}\right.$

$(*) \Leftrightarrow 3x+10 = 3x+2+2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 4 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 5$.

Câu 6. Cho hai số dương x, y. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{y^2}} + \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{x^2}}$.

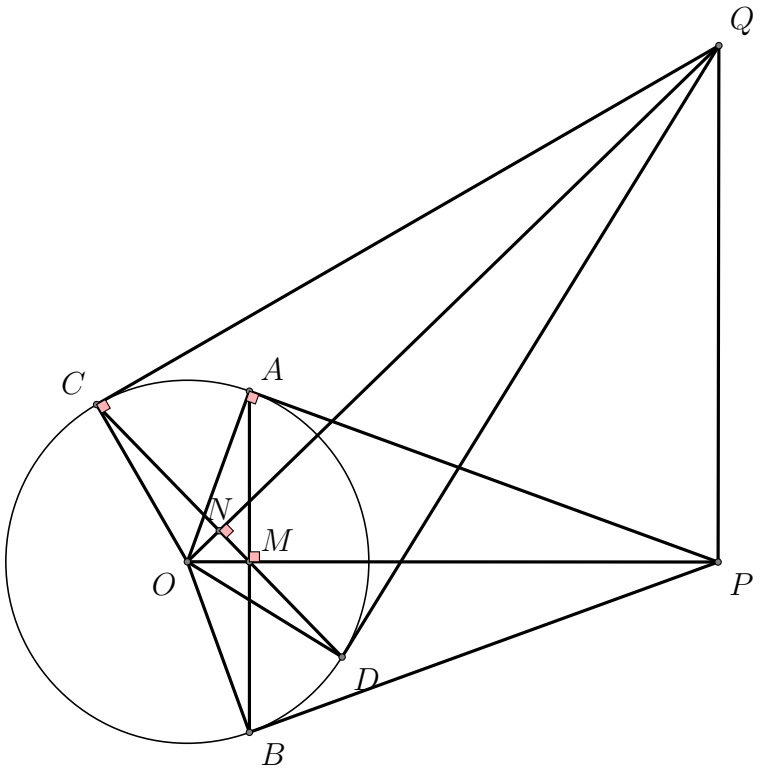
Lời giải.

Ta có: $A \geq 2\sqrt[4]{\left(x^2 + \dfrac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = 2\sqrt[4]{x^2y^2 + \dfrac{1}{x^2y^2} + \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}} \geq 2\sqrt[4]{2+2} = 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. Vậy $\min A = 2\sqrt{2}$.

Câu 7. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với dường tròn (A, B là các tiếp điểm). Gọi M là giao điểm của OP và AB. Kẻ dây cung CD đi qua M (CD không đi qua O và không trùng với AB). Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng OP vuông góc với PQ.

Lời giải.



Gọi N là giao điểm của CD và OQ, ta có $ON.OQ = OC^2$.

Mặt khác ta có $OM.OP = OA^2$, vậy ta có $OM.OP = ON.OQ \Rightarrow \dfrac{OM}{OQ} = \dfrac{ON}{OP}$.

Vậy $\triangle OMN \backsim \triangle OQP$ nên ta có $\widehat{OQP} = \widehat{ONM} = 90^\circ \Rightarrow PQ \perp OP$.

Câu 8. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì $2^n - 1$ không thể là số chính phương.

Lời giải.

Giả sử $2^n - 1$ là một số chính phương, do $2^n - 1$ là số nguyên lẻ nên $2^n - 1 = (2k+1)^2 \Leftrightarrow 2^n = 2(2k^2 + 2k + 1) \Leftrightarrow 2k^2 + 2k + 1 = 2^{n-1}$, đây là điều vô lý vì 2^{n-1} là một số nguyên chẵn. Vậy ta có điều phải chứng minh, nghĩa là $2^n - 1$ không thể là một số chính phương.

Câu 9. Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$, trong đó m, n là các tham số thỏa mãn $m + n = 6$. Tìm giá trị của m, n để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 = x_2^2 + x_2 + 2$.

Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta = m^2 - 4n \geq 0$.

Có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^2 + 2x_2 + 2 = -m \\ x_2^3 + x_2^2 + 2x_2 = n \end{cases}$

$\Rightarrow x_2^3 - 2 = n + m = 6 \Leftrightarrow x_2^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = -10 \\ n = 16 \end{cases}$ (nhận).

Câu 10. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + \sqrt{2abc} = 2$. Chứng minh rằng $\sqrt{a(2-b)(2-c)} + \sqrt{b(2-c)(2-a)} + \sqrt{c(2-a)(2-b)} = \sqrt{8} + \sqrt{abc}$.

Lời giải.

Ta có: $a(2-b)(2-c) = a(4 - 2(b+c) + bc) = a(2a + 2\sqrt{2abc} + bc) = a\left(\sqrt{2a} + \sqrt{bc}\right)^2$.

Vậy $VT = \sqrt{a}\left(\sqrt{2a} + \sqrt{bc}\right) + \sqrt{b}\left(\sqrt{2b} + \sqrt{ca}\right) + \sqrt{c}\left(\sqrt{2c} + \sqrt{ab}\right) = \sqrt{2}(a+b+c) + 3\sqrt{abc}$

$= \sqrt{2}\left(2 - \sqrt{2abc}\right) + 3\sqrt{abc} = 2\sqrt{2} + \sqrt{abc} = VP$.

Câu 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) với đường cao $AH = R\sqrt{2}$. Gọi D, K lần lượt là hình chiếu của H lên AB và AC. Chứng mình rằng $S_{ADK} = \dfrac{1}{2} S_{ABC}$, với S_{ADK} và S_{ABC} lần lượt là diện tích của hai tam giác ADK và ABC.

Lời giải.

Ta có $AD.AB = AH^2 = AK.AC \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AK}{AB}$

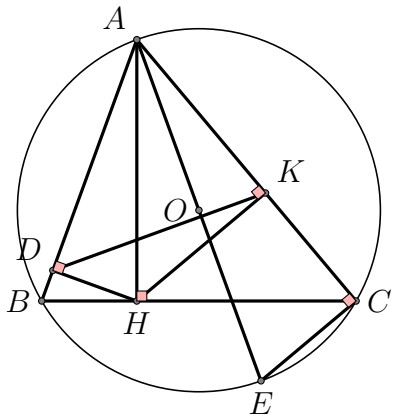
Vậy $\triangle ADK \backsim \triangle ACB \Rightarrow \dfrac{S_{ADK}}{S_{ACB}} = \left(\dfrac{AD}{AC}\right)^2$.

Kẻ đường kính AE, ta có $\widehat{AHD} = \widehat{ABH} = \widehat{AEC}$

Nên $\triangle ADH \backsim \triangle ACE$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{ADK}}{S_{ACB}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{ADK}$.



Câu 12. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O), kẻ CH vuông góc với AB (C khác A, B và H thuộc đoạn AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E. Gọi N là giao điểm của DE với CH. Chứng minh rằng N là trung điểm của CH.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Gọi M, F lần lượt là giao điểm thứ hai của CH, CO với đường tròn (O), gọi K là giao điểm của CF với DE.

Ta có: CF là đường nối tâm của hai đường tròn nên $CF \perp DE$ tại K.

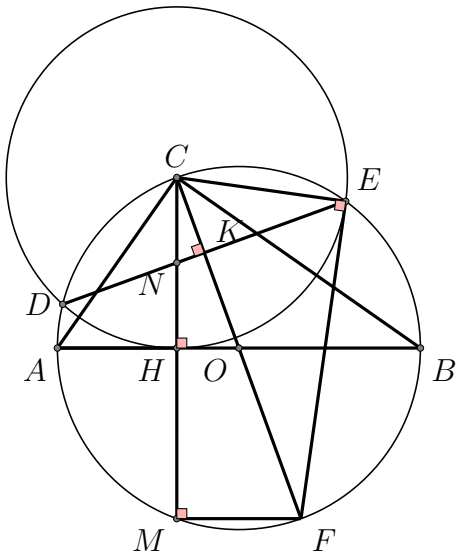
Vậy ta có $\triangle CKN \backsim \triangle CMF$

$\Rightarrow \dfrac{CK}{CM} = \dfrac{CN}{CF} \Rightarrow CN.CM = CK.CF.$

Mặt khác ta có $CK.CF = CE^2$ nên $CN.CM = CE^2$.

$\Leftrightarrow CH.2CH = CH^2 \Leftrightarrow CN = \dfrac{1}{2}CH.$

Vậy N là trung điểm của CH.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 108

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHTN, HÀ NỘI, V2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=\sqrt{x+3y} \\ x^2+y^2+xy=3. \end{cases}$

2) Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

Lời giải.

1) Điều kiện xác định : $x+y\geq 0, x+3y\geq 0$.

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{x+3y} \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+2xy=x+3y \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)(y-1)=0 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$$

+ Với $x=3$, $y^2+3y+6=0$ (vô nghiệm).

+ Với $y=1$, $x^2+x-2=0 \iff x=1, x=-2$, ta loại nghiệm $x=-2$ do $x+y=-2+1<0$. Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;1)$.

2) Do a, b dương và $ab+a+b=1$ cho nên $0<a,b<1$ và $ab+a+b=1 \iff (a+b)^2=(1-ab)^2$.

$$\begin{aligned} &\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} \\ \iff &(a+b+ab^2+ab^2+1)\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}=(1+ab)(1+a^2)(1+b^2) \\ \iff &(a+b)(1+ab)\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}=(1+ab)(1+a^2)(1+b^2) \\ \iff &2(a+b)^2=(1+a^2)(1+b^2) \\ \iff &a^2+b^2+4ab=1+a^2b^2 \\ \iff &(a+b)^2=(1-ab)^2 \text{ (ĐPCM)} \end{aligned}$$

Câu 2.

1) Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức

$$p(p-1)=q(q^2-1) \quad (*)$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq, q^2-1=kp$.
b. Tìm tất cả các số nguyên tố p,q thỏa mãn đẳng thức (*).

2) Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+2}{b^2+2b+2}+\frac{c+2}{c^2+2c+2}$$

Lời giải.

1) a. Dễ thấy $p>q\geq 2$ và $(p,q)=1$ cho nên tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1=kq$, (*) $\iff pkq=q(q^2-1) \iff q^2-1=kp$.
b. Theo a ta có $q^2-1=k(1+kq) \iff q^2-k^2q-1-k=0$ (1), giả sử q_1,q_2 là các nghiệm của phương trình (1), theo định lý vi-ét ta có $q_1q_2=-1-k$, $q_1+q_2=-k^2$ do $|q_1|,|q_2|$ là các số nguyên lớn hơn 1 nên $|q_1q_2|\geq |q_1|+|q_2|$ suy ra $1+k\geq k^2 \iff \frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq k\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, k nguyên dương cho nên $k=1\Longrightarrow q=2$ và $p=3$.

2) Đặt $x=a+1,y=b+1,z=c+1$, $ab+bc+ca+abc=2 \iff (x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)+(x-1)(y-1)(z-1)=2 \iff x+y+z=xyz$ với $x,y,z>1$ (*). Khi đó $M=\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$, tiếp tục ta đặt $u=\frac{1}{x},v=\frac{1}{y},w=\frac{1}{z}$, (*) $\iff uv+vw+wu=1; 0<u,v,w<1$ và

$$\begin{aligned}M&=\frac{u}{1+u^2}+\frac{v}{1+v^2}+\frac{w}{1+w^2}\\&=\frac{u}{uv+vw+wu+u^2}+\frac{v}{uv+vw+wu+v^2}+\frac{w}{uv+vw+wu+w^2}\\&=\frac{u}{(u+v)(u+w)}+\frac{v}{(u+v)(v+w)}+\frac{w}{(u+w)(v+w)}\\&=\frac{u(v+w)}{(u+v)(v+w)(u+w)}+\frac{v(u+w)}{(u+v)(v+w)(u+w)}+\frac{w(u+w)}{(u+v)(v+w)(u+w)}\\&=\frac{2}{(u+v)(v+w)(u+w)}\end{aligned}$$

Ta có $(u+v)(v+w)(u+w)=(u+v+w)(uv+vw+uw)-uvw=u+v+w-uvw$, $(u+v+w)^2\geq 3(uv+vw+wu)=3$, $uv+vw+wu\geq 3\sqrt[3]{(uvw)^2}\Longrightarrow uvw\leq \frac{1}{3\sqrt{3}}\Longrightarrow -uvw\geq \frac{1}{3\sqrt{3}}\Longrightarrow (u+v)(v+w)(u+w)\geq \sqrt{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\Longrightarrow M\leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
Vậy $M_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, khi $a=b=c=\sqrt{3}-1$.

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$. E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh CA,AB. Trung trực của đoạn thẳng EF cắt BC tại D. Giả sử có điểm P nằm trong $\widehat{EAF}$ và nằm ngoài tam giác AEF sao cho $\widehat{PEC}=\widehat{DEF}$ và $\widehat{PFB}=\widehat{DFE}$. Đường thẳng PA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P.

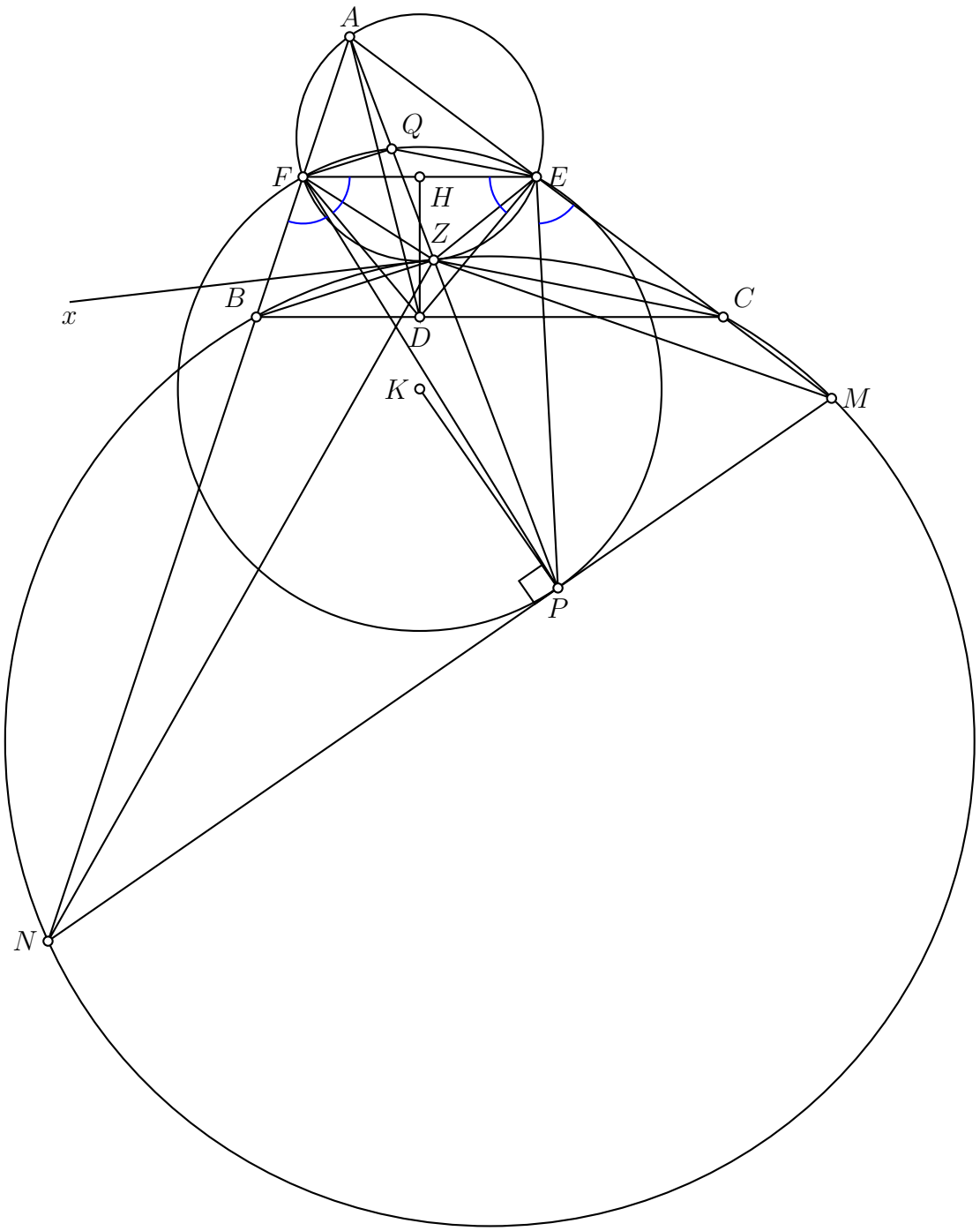
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

1) Chứng minh rằng $\widehat{EQF} = \widehat{BAC} + \widehat{EDF}$.

2) Tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF cắt các đường thẳng CA, AB lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm C, M, N, B cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là đường tròn (K).

3) Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Lời giải.



1) Ta có $\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 180^\circ - \left(180^\circ - \widehat{EFB} + 180^\circ - \widehat{CEF}\right) = \widehat{EFB} + \widehat{CEF} - 180^\circ$ (i). Tam giác DEF cân tại D cho nên $\widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{DEF} - \widehat{DFE}$ (ii). Lấy

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

(i)+(ii) ta được

$$\begin{aligned}\widehat{BAC}+\widehat{EDF}&=\widehat{EFB}+\widehat{CEF}-\widehat{DEF}-\widehat{DFE}\\&=\widehat{EFB}-\widehat{PFB}+\widehat{CEF}-\widehat{PEC}\\&=\widehat{PFE}+\widehat{PEF}\\&=\widehat{PQE}+\widehat{PQF}\\&=\widehat{EQF}\end{aligned}$$

2) Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{EMP}&=180^\circ-\widehat{EPM}-\widehat{MEP}\\&=180^\circ-\widehat{PFE}-\widehat{PFB}\\&=\widehat{ABC}\end{aligned}$$

Cho nên tứ giác $BCMN$ nội tiếp.

3) **Lời giải thứ nhất:**

Bổ đề : Cho tam giác ABC, P là một điểm bất kì khác A, B, C. Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng đối xứng với PA, PB, PC qua các đường phân giác trong của các góc A, B, C tương ứng. Khi đó d_1, d_2, d_3 song song hoặc đồng quy.

Gọi Z là giao điểm của AP và đường tròn (AEF). Áp dụng bổ đề cho tam giác AEF, DE, PE đối xứng qua phân giác góc $\widehat{AFE}$, DF, PF đối xứng qua phân giác góc $\widehat{AEF}$, DA, PA đối xứng qua phân giác góc $\widehat{EAF}$ cho nên $\widehat{DAC}=\widehat{ZAF}$, mặt khác $\widehat{DCA}=\widehat{AEF}=\widehat{AZF}$ suy ra tam giác DAC đồng dạng với tam giác FAZ (1).

Tứ giác $FPEQ$ nội tiếp cho nên $\widehat{FQP}=\widehat{FEP}=\widehat{DEC}$ mà $\widehat{DCA}=\widehat{AEF}=\widehat{AZF}$ cho nên tam giác DEC và FQZ đồng dạng (2). Ta có E là trung điểm của AC đồng thời (1) và (2) suy ra Q là trung điểm của AZ kéo theo $FQ \parallel BZ$, $\widehat{QFE}=\widehat{ZBC}$ (3).

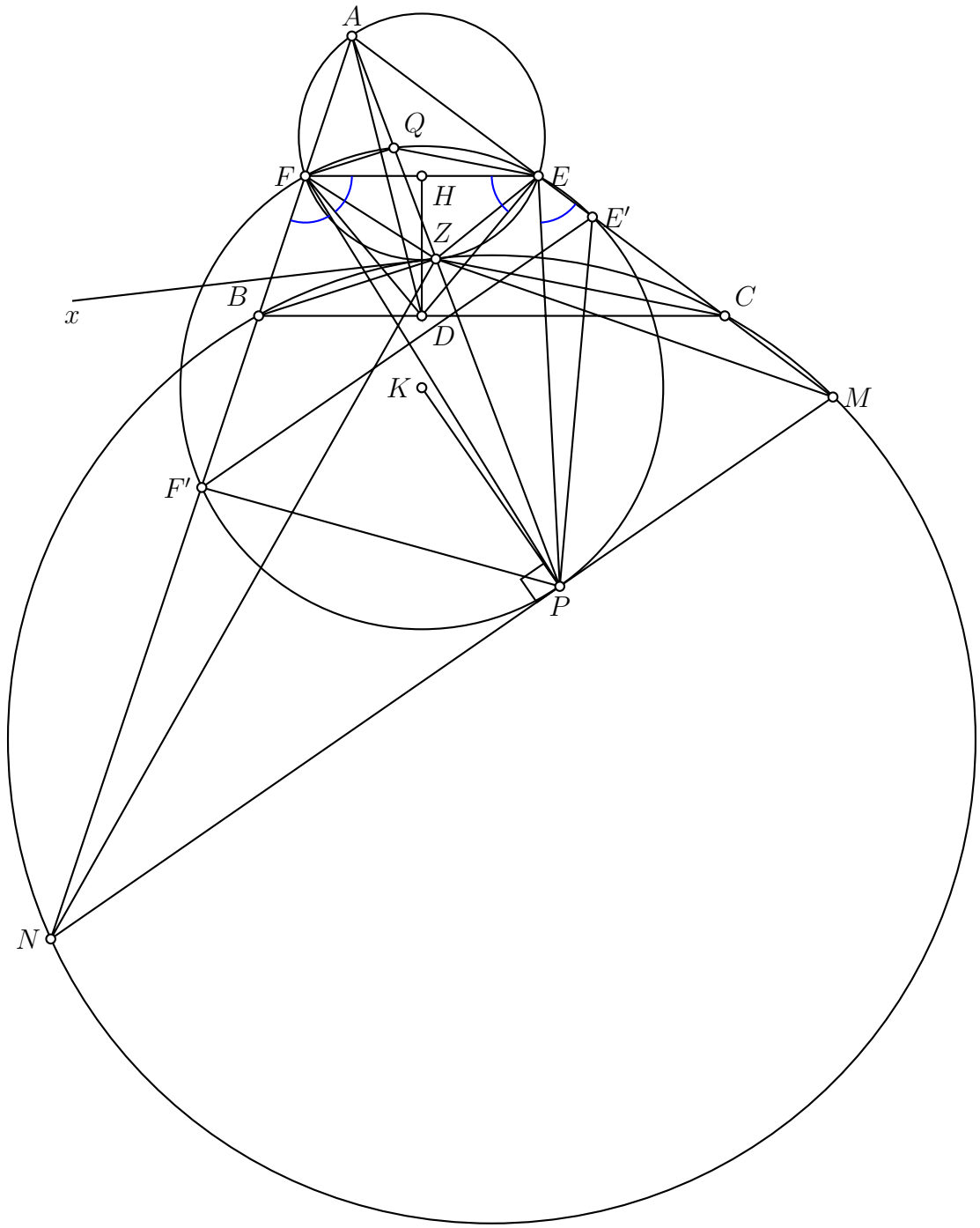
Dễ thấy các tứ giác $PMEZ$, $PNFZ$ nội tiếp $\Longrightarrow \widehat{QFE}=\widehat{QPE}=\widehat{ZME}$ (4). Từ (3) và (4) ta có $\widehat{ZBC}=\widehat{ZME}$ cho nên tứ giác $BMCZ$ nội tiếp kéo theo Z thuộc đường tròn (K).

Tứ giác $PNFZ$ nội tiếp cho nên $\widehat{FZN}=\widehat{FPN}=\widehat{FEP}$ (5)(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). $\widehat{FEP}=\widehat{FEZ}+\widehat{FEZ}=\widehat{PMZ}+\widehat{FAZ}$ (6). Từ (5) và (6) ta có $\widehat{FZN}=\widehat{PMZ}+\widehat{FAZ}$ (*).

Nếu Zx là tiếp tuyến của đường tròn (AFE) thì $\widehat{FAZ}=\widehat{FZx}$ kết hợp với (*) suy ra $\widehat{PMZ}=\widehat{NZx}$ cho nên Zx cũng là tiếp tuyến của (K). Vậy đường tròn (AEF) tiếp xúc với (K).

Lời giải thứ hai: (**Thầy Trần Vinh Hợp - Vinhhop Tran**)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



+ Gọi E', F' là các giao điểm của đường tròn (PEF) và các đường thẳng AC, AB. Ta có $\widehat{PFF'} = \widehat{PE'F'} = \widehat{PEE'} = \widehat{PF'E'}$ cho nên tam giác $PE'F'$ cân tại P và đồng dạng với tam giác DEF, $MN \parallel E'F'$ (1).

+ Ta có tam giác AFE đồng dạng với tam giác $AE'F'$ suy ra $\dfrac{AF}{AE'} = \dfrac{EF}{E'F'} = \dfrac{FD}{E'P}$, do (1). Mặt khác $\widehat{AFD} = \widehat{AE'P}$ cho nên tam giác AFD đồng dạng với tam giác $AE'P$ kéo theo $\widehat{FAD} = \widehat{PAE'}$.

+ Ta có tam giác BDF đồng dạng tam giác MPE', ABD đồng dạng với tam giác APM và F là trung điểm của AB cho nên E' là trung điểm của AM, $E'F' \parallel MN$ cho nên F' là trung điểm của AN.

+ Hai tứ giác $FZPN$ và $FQPF'$ nội tiếp suy ra $AZ.AP = AF.AN = 2.AF.AF' = 2.AQ.AP \Longrightarrow AZ = 2AQ$ hay Q là trung điểm của AZ.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

+ Q là trung điểm của AZ kéo theo $FQ \parallel BZ$, $\widehat{QFE} = \widehat{ZBC}$ (2). Dễ thấy các tứ giác $PMEZ$, $PNFZ$ nội tiếp $\Longrightarrow \widehat{QFE} = \widehat{QPE} = \widehat{ZME}$ (3).
+ Từ (2) và (3) ta có $\widehat{ZBC} = \widehat{ZME}$ cho nên tứ giác $BMCZ$ nội tiếp kéo theo Z thuộc đường tròn (K). Tứ giác $PNFZ$ nội tiếp cho nên $\widehat{FZN} = \widehat{FPN} = \widehat{FEP}$ (4)(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). $\widehat{FEP} = \widehat{FEZ} + \widehat{FEZ} = \widehat{PMZ} + \widehat{FAZ}$ (5). Từ (4) và (5) ta có $\widehat{FZN} = \widehat{PMZ} + \widehat{FAZ}$ (*).
+ Nếu Zx là tiếp tuyến của đường tròn (AFE) thì $\widehat{FAZ} = \widehat{FZx}$ kết hợp với (*) suy ra $\widehat{PMZ} = \widehat{NZx}$ cho nên Zx cũng là tiếp tuyến của (K). Vậy đường tròn (AEF) tiếp xúc với (K).

Câu 4. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 5$. Xét một đa giác lồi n cạnh. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác mà các đường chéo này chia đa giác đã cho thành đúng k miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kỳ không có điểm trong chung).

a. Chứng minh rằng ta có thể thực hiện được với $n = 2018, k = 672$.

b. Với $n = 2017, k = 672$ ta có thể thực hiện được không? Hãy giải thích.

Lời giải.

a. Giả sử đa giác lồi là $A_1A_2 \dots A_{2018}$, ta kẻ các đường chéo A_1A_5, A_1A_{5+3i} với $1 \leq i \leq 671$, khi đó ta có được đúng 672 miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi.

b. Giả sử ta có thể thực hiện được, 672 ngũ giác lồi có tất cả $5 \times 672 = 3360$ cạnh, trong các cạnh này có 2017 cạnh của đa giác. Bởi vì cạnh nào của một ngũ giác không phải là cạnh của đa giác sẽ được tính 2 lần, cho nên $3360 = 2017 + 2m$ với m là số nguyên dương , phương trình này không có nghiệm nguyên dương, cho nên không thể thực hiện được việc chia đa giác.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 109

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHTN HÀ NỘI VÒNG 1 , 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x+x^2y=2y^3. \end{cases}$$

2) Giải phương trình:

$$2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right).$$

Lời giải.

1) Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 & (1) \\ x.1+x^2y=2y^3. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra:
$x(x^2+y^2-xy)+x^2y=2y^3 \Leftrightarrow x^3-2y^3+xy^2=0.$
Với $y=0 \Rightarrow x=0$: không thỏa mãn hệ.
Với $y\neq 0$, chia cả hai vế cho y^3 ta được $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-2+\dfrac{x}{y}=0.$
Đặt $t=\dfrac{x}{y}$ ta có: $t^3+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=y.$
Do đó ta có: $\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2-xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm 1.$

2) ĐKXĐ: $-1\leq x\leq 1.$
Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+1} \\ v=\sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2=2 \\ 2u^3=(u+v)(2-uv) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=2 \\ 2u^3=(u+v)(u^2+v^2-uv) \end{cases}$
$\Rightarrow 2u^3=u^3+v^3 \Leftrightarrow u=v$
$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x=0$(thỏa mãn).

Câu 2.

1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$12x^2+26xy+15y^2=4617.$$

2) Với a, b là các số thực dương, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = (a+b)\left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{b^3+a}\right) - \frac{1}{ab}.$$

Lời giải.

1) Đẳng thức đã cho được viết lại:
$x^2 + 4y^2 + 4xy + 11x^2 + 11y^2 + 22xy = 4617$
$\Leftrightarrow (x+2y)^2 + 11(x+y)^2 = 4617 \quad (1)$
Ta có $VT(1) \equiv 0, 1, 3, 5, 9 (\text{mod } 11)$
mà $4617 \equiv 8 (\text{mod } 11)$
Vậy không có số nguyên x, y nào thỏa mãn đẳng thức đã cho.

2) Theo BĐT Bunhiacopsky ta có:
$$\left(\sqrt{a^3}\sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{b}\sqrt{b}\right)^2 \le (a^3+b)\left(\frac{1}{a}+b\right)$$
$$(a+b)^2 \le (a^3+b)(\frac{1}{a}+b) \Rightarrow \frac{a+b}{a^3+b} \le \frac{\frac{1}{a}+b}{a+b}$$
Tương tự ta cũng có:
$$\frac{a+b}{a+b^3} \le \frac{\frac{1}{b}+a}{a+b}$$
$$\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{a+b^3}\right) \le \frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+a\right)$$
$$\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{a+b^3}\right) \le 1 + \frac{1}{ab}$$
$\Rightarrow M \le 1.$
Vậy $MaxM = 1$ khi $a = b = 1$.

Câu 3. Cho hình thoi $ABCD$ với $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BD, BA lần lượt tại J, L. Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song với ID.

1) Chứng minh rằng $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$.

2) Chứng minh rằng $CK \perp KB$.

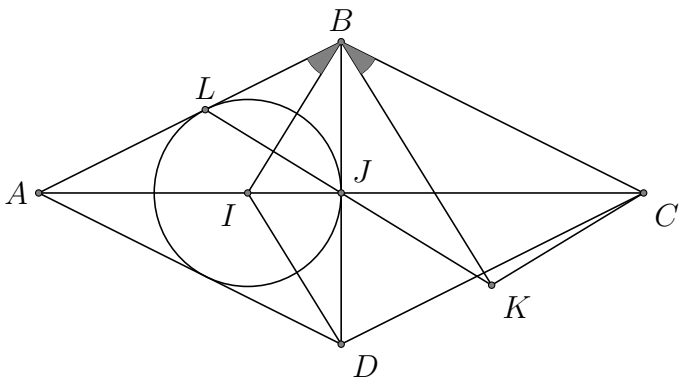
3) Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I, L cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

1)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta có: $\widehat{ABI} = \widehat{IBD} = \widehat{ADI} = \widehat{DBK}$
mà $\widehat{CBD} = \widehat{ADB}$(so le trong)
$\Rightarrow \widehat{CBD} - \widehat{DBK} = \widehat{ADB} - \widehat{IDB}$
$\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ADI} = \widehat{ABI}$



2) Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $BJIL$ nội tiếp nên $\widehat{CBK} = \widehat{IBA} = \widehat{CJK}$. Từ đó ta có tứ giác $BCKJ$ nội tiếp nên $\widehat{CKB} = \widehat{CJB} = 90°$

3) Ta có tứ giác $BCKJ$ nội tiếp nên $\widehat{CKB} = \widehat{JBK} = \widehat{JBI} = \widehat{JLI}$ từ đó tứ giác $CKIL$ nội tiếp.

Câu 4. Tìm hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại một cách sắp xếp các số $1, 2, \ldots, n$ thành $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mà khi chia các số $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2 \ldots a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau.

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau: Với n là hợp số và $n > 4$ thì $(n-1)! \vdots n$.
Thật vậy, ta có: Với n là hợp số và $n > 4$ thì $n = a.b$ với a, b là các số nguyên khác 1 và n.
Vậy với $2 \leq a; b \leq n-1$ thì $(n-1)! \vdots n$.
Từ giả thiết ta có a_n phải bằng n, vì nếu $a \neq n; a_i = n (i \in [1; n-1])$ thì:

$$\begin{cases} a_1a_2 \ldots a_i \vdots n \\ a_1a_2 \ldots a_n \vdots n \end{cases}$$

điều này trái với giả thiết.
Do đó $a_n = n$, nếu n là một số lớn hơn 4 và n là hợp số, theo bổ đề trên ta có:

$$a_1a_2 \ldots a_{n-1} = (n-1)! \vdots n.$$

Mà $a_1a_2 \ldots a_n \vdots n$ do đó hai số này chia cho n có cùng số dư là 0, điều này mâu thuẫn với giả thiết.
Như vậy $n \leq 4 \Rightarrow n = 4$ (vì n là hợp số).
Xét với $n = 4$ thì tồn tại dãy số:$1; 3; 2; 4$ có $1; 1.3; 1.3.2; 1.3.2.4$ khi chia cho 4 có số dư lần lượt là $1; 3; 2; 0$ thỏa mãn đề bài.
Vậy $n = 4$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 110

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT, KIÊN GIANG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức sau:

$$P = a + \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}$$

b) Chứng minh hằng đẳng thức sau:

$$\left(a^2x + b^2y\right)\left(c^2x + d^2y\right) = (acx + bdy)^2 + (ad - bc)^2xy$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= a + \sqrt{a^2+1} + \frac{a - \sqrt{a^2+1}}{\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(a-\sqrt{a^2+1}\right)} \\ &= a + \sqrt{a^2+1} + \frac{a-\sqrt{a^2+1}}{-1} \\ &= 2\sqrt{a^2+1} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} VT &= a^2c^2x^2 + b^2d^2y^2 + \left(a^2d^2 + b^2c^2\right)xy \\ &= a^2c^2x^2 + 2acx.bdy + b^2d^2y^2 + \left(a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2\right)xy \\ &= (acx + bdy)^2 + (ad - bc)^2xy \end{aligned}$$

Câu 2. Cho $m > 2$. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0$ có hai nghiệm dương, phân biệt x_1, x_2 và $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2m}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m(m-2) > 0$ với mọi $m > 2$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $x_1x_2 = 1$.

Do $m > 2$ nên $x_1 + x_2 > 0, x_1x_2 > 0$ nên x_1, x_2 đều dương.

Ta có $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 2(m-1) + 2 = 2m$.

Mặt khác, vì $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ nên $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2m}$.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x+\sqrt{x+12}-2y=-2 \quad (1) \\ 2x+6\sqrt{x+12}+3y=-3 \quad (2) \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -12$.

Nhân 3 vào hai vế của (1) và nhân 2 vào hai vế của (2) rồi cộng lại, ta được

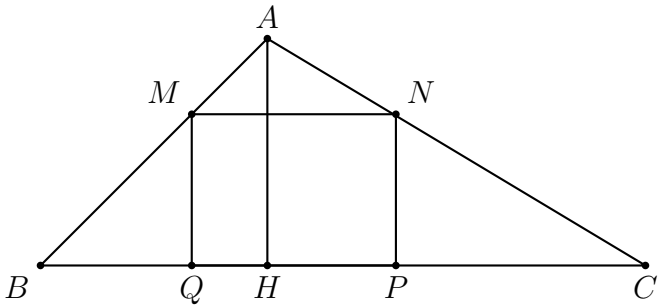
$$19x+15\sqrt{x+12}+12=0$$

Đặt $t=\sqrt{x+12} \geq 0$ ta được phương trình $19t^2+15t-216=0 \Leftrightarrow t=3, t=-\dfrac{72}{19}$.

Ta nhận $t=1 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow y=-5$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(-3;-5)$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có $AB=10$ cm, $BC=12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và $\sin\widehat{ABC}=\dfrac{4}{5}$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB, AC và P, Q là các điểm trên các cạnh BC sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình vuông. Tính độ dài của cạnh hình vuông $MNPQ$.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao đỉnh A của tam giác ABC và x là độ dài cạnh của hình vuông $MNPQ$. Ta có $AH=AB\sin\widehat{ABC}=8$ cm.

Theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{x}{AH}=\dfrac{BM}{BA}$ và $\dfrac{x}{BC}=\dfrac{AM}{AB}$.

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được $\dfrac{x}{AH}+\dfrac{x}{BC}=1 \Rightarrow x=\dfrac{BC.AH}{BC+AH}=1$ cm.

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A. Đường thẳng đi qua B và song song với Δ cắt đường thẳng AO tại điểm E và cắt đoạn AC tại điểm D (O là tâm của đường tròn (O)).

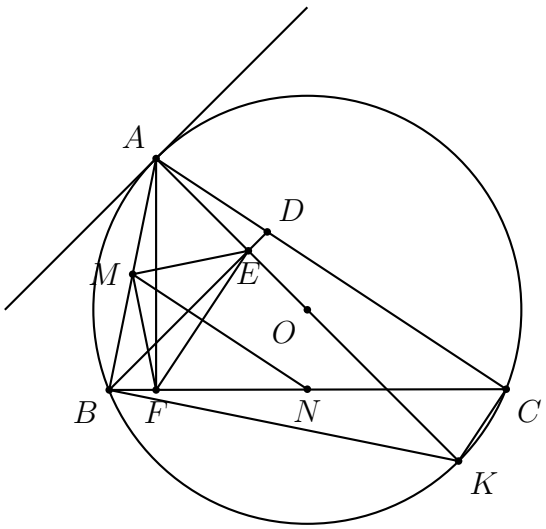
a) Chứng minh rằng $AB^2=AD.AC$.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và K là điểm đối xứng của điểm A qua điểm O. Chứng minh rằng B, I, K thẳng hàng.

c) Gọi F là chân đường cao đỉnh A của tam giác ABC và M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Chứng minh rằng đường thẳng MN là đường trung trực của đoạn EF.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BAt}$ (so le trong) và $\widehat{BAt} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.
Mặt khác, $\widehat{BAD} = \widehat{CAB}$ nên $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$. Vì vậy $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AC$.

b) Vì AK là đường kính của đường tròn (O) nên $KB \perp AB$.
Trong đường tròn (I) ta có $\widehat{DCB} = \dfrac{1}{2}\widehat{DIB}$ phụ với $\widehat{DIB}$.
Mặt khác theo chứng minh trên thì $\widehat{ABD} = \widehat{DCB}$ nên $\widehat{ABI} = \widehat{ABD} + \widehat{DBI} = 90^\circ$.
Vì vậy $IB \perp AB$.
Từ các kết quả trên cho ta B, I, K thẳng hàng.

c) Ta có $ME = \dfrac{1}{2}AB = MF$ nên M thuộc đường trung trực của EF.
Vì $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$ nên tứ giác $ABFE$ nội tiếp. Do đó $\widehat{EFC} = \widehat{BAK}$.
Mặt khác, $\widehat{BAK} = \widehat{BCK}$ (cùng chắn cung $\widehat{BK}$) nên $\widehat{EFC} = \widehat{FCK}$.
Từ đó ta được $EF \parallel CK$ (2 góc ở vị trí so le trong bằng nhau).
Do AK là đường kính của đường tròn (O) nên $CK \perp AC$.
Từ đó ta được $AC \perp EF$.
Vì $MN \parallel AC$ nên $MN \perp EF$.
Vậy MN là đường trung trực của đoạn EF.

Câu 6.

a) Tìm số nguyên dương A nhỏ nhất có tính chất: A có nhiều hơn một chữ số thập phân và nếu xóa đi chữ số đầu tiên bên trái của A thì ta được một số nguyên dương bằng $\dfrac{A}{73}$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi nào?

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

a) Theo giả thiết ta có

$$A=\overline{aa_na_{n-1}\dots a_1}=10^n\cdot a+a_na_{n-1}\dots a_1=10^n\cdot a+\frac{A}{73}$$

Với $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và $n\in\mathbb{N}^*$.

Từ đó ta được $72A=73\cdot 10^n\cdot a$. Suy ra $73\cdot 10^n a\vdots 9$.

Vì $(73\cdot 10^n,9)=1$ nên $a\vdots 9$. Vì vậy $a=9$. Do đó, $73\cdot 10^n=2^3A$.

Vì $(73,8)=1$ nên $10^n\vdots 8$. Từ đó suy ra $n\geq 3$.

Vì vậy, $A=73\cdot 125\cdot 10^{n-3}\geq 73\cdot 125=9125$.

Mặt khác $A=9125$ thỏa mãn bài toán nên $\min A=9125$.

b) Ta có $a+\dfrac{1}{a}=a+\dfrac{ab+bc+ca}{a}=a+b+c+\dfrac{bc}{a}$ (1).

Vì $a,b,c>0$ nên $a+\dfrac{bc}{a}\geq 2\sqrt{bc}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $a+\dfrac{1}{a}\geq b+c+2\sqrt{bc}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\Rightarrow\sqrt{a+\dfrac{1}{a}}\geq\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Tương tự, ta được $\sqrt{b+\dfrac{1}{b}}\geq\sqrt{c}+\sqrt{a}$ và $\sqrt{c+\dfrac{1}{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Cộng ba bất đẳng thức cuối cùng, vế với vế, ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a^2=bc,b^2=ca,c^2=ab$ và $ab+bc+ca=1$. Điều này tương đương với $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 111

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HƯNG YÊN, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x\geq 0, x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị x để $P=\dfrac{3}{4}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=(\sqrt{x}-4)(x-1)P$.

Lời giải.

Với điều kiện $x>0, x\neq 1$.

a) $P=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)-(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$.

b) Giải phương trình:

$$P=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{x-1}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 3x-8\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-3)(3\sqrt{x}+1)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$$

c) Biểu thức $A=(\sqrt{x}-4)(x-1)P=2\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)=2(\sqrt{x}-2)^2-8\geq -8$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -8, khi chỉ khi $x=4$.

Câu 2. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=3x+m-2$. Tìm tham số m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2=3x+m-2\Leftrightarrow x^2-3x+2-m=0\quad(1)$.

Yêu cầu bài toán tương đương (1) có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}$.

Mà ta có $\Delta=9-4(2-m)=1+4m$ và $\begin{cases}S=3\\P=2-m\end{cases}$.

Vậy $\begin{cases}1+4m>0\\2-m>0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<m<2$.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy=2y-x \\ x^2+2x=9-y \end{cases}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}=\dfrac{3x+x^2}{x^2+1}$.

Lời giải.

a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$x^2+x-2xy-2y=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2y \end{array}\right.$$

Xét $x=-1$ thay vào phương trình còn lại ta thu được $y=10$.

Xét $x=2y$ thay vào phương trình còn lại ta thu được $4y^2+5y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=-\dfrac{9}{4} \Rightarrow x=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm $(x;y)$ là $(-1;10),(2;1),\left(-\dfrac{9}{2};-\dfrac{9}{4}\right)$.

b) Điều kiện $\dfrac{1-2x}{x}\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

$$\sqrt{\frac{1-2x}{x}}=\frac{3x+x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-2x}{x}}-1=\frac{3x+x^2}{x^2+1}-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{1-2x}{x}-1}{\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}+1}=\frac{3x-1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x\left(\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}+1\right)}=\frac{3x-1}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow (1-3x)\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}+1\right)}+\frac{1}{1+x^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}. \text{ Vì } \frac{1}{x\left(\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}+1\right)}+\frac{1}{1+x^2}>0, \forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$$

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), kẻ đường kính AN. Lấy điểm M trên cung nhỏ BN(M khác B,N). Kẻ MD vuông góc với đường thẳng BC tại D. ME vuông góc với đường thẳng AC tại E, MF vuông góc với AB tại F.

a) Chứng minh ba điểm F,D,E thẳng hàng.

b) Chứng minh $\dfrac{AB}{MF}+\dfrac{AC}{ME}=\dfrac{BC}{MD}$.

c) Chứng minh $\dfrac{FB}{FA}+\dfrac{EA}{EC}+\dfrac{DC}{DB}\geq 3$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lời giải.

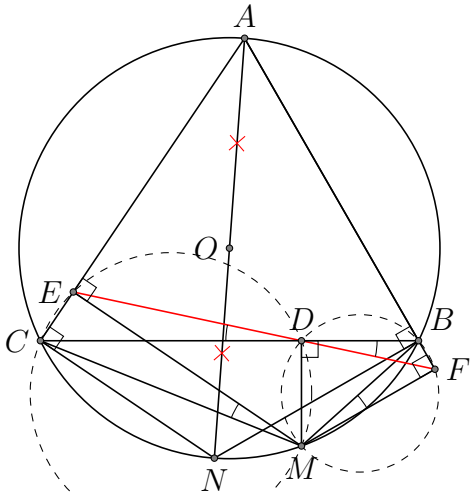
a) Ta có $MFBD, MDEC, MBAC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{BMF} = 90^\circ - \widehat{FBM}$ và $\widehat{EDC} = \widehat{EMC} = 90^\circ - \widehat{CEM}$.

Hơn nữa $\widehat{FBM} = \widehat{CEM}$(góc ngoài bằng góc đối trong).

Do đó $\widehat{BDF} = \widehat{EDC}$, hai góc ở vị trí đối đỉnh.

Vậy D, E, F thẳng hàng.



b) Gọi $P \in BC$ sao cho $\widehat{BPM} = \widehat{ACM}$.

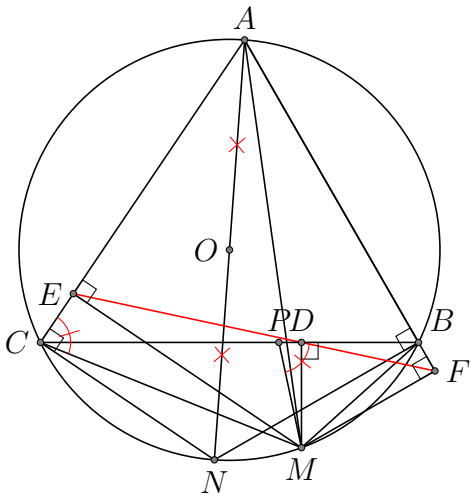
Suy ra $\Delta BPM \sim \Delta ACM$, từ đó có $\dfrac{BP}{BM} = \dfrac{AC}{AM}$.

Hơn nữa $\Delta AME \sim \Delta BMD$ suy ra $\dfrac{AM}{ME} = \dfrac{BM}{DM}$.

Vậy $\dfrac{AC}{ME} = \dfrac{BP}{DM}$.

Tương tự từ $\begin{cases} \Delta CPM \sim \Delta ABM \\ \Delta AMF \sim \Delta CMD \end{cases}$ suy ra $\dfrac{AB}{MF} = \dfrac{CP}{MD}$.

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta có đpcm.



c) Từ câu **a)** áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với cát tuyến là D, E, F thu được $\dfrac{FB}{FA}.\dfrac{EA}{EC}.\dfrac{DC}{DB} = 1$.

Áp dụng BĐT $AM-GM$ ta có: $\dfrac{FB}{FA}+\dfrac{EA}{EC}+\dfrac{DC}{DB} \geq 3$.

Câu 5. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $y^3 - 2x - 2 = x(x+1)^2$.

Lời giải.

Ta có $y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$. Rõ ràng $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} \geq \dfrac{7}{8} > 0$. Do đó $y^3 > x^3$.

Mặt khác, xét $|x| > 1$.

Khi đó $y^3 = (x+1)^3 + 1 - x^2 \leq (x+1)^3$, mẫu thuẫn vì $x^3 < y^3 < (x+1)^3$.

Vậy $|x| \leq 1$. Khi đó $x = \pm 1$ hoặc $x = 0$.

TH1. $x = -1$. Thay vào pt được $y = 1$.

TH2. $x = 1$. Thay vào pt được $y = 2$.

TH3. $x = 0$. Thay vào pt được $y = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Z}$, loại.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(-1; 1), (1; 2)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 6. Cho a, b, c dương và $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 3a^4b^4c^4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} + \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} + \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

Lời giải.

Cách 1. Từ điều kiện đề bài ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = 3$.

Trước hết ta chứng minh BĐT sau: Với $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

BĐT trên tương đương với $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$. BĐT này đúng theo $AM - GM$ như sau:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} > 0$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} > 0$$

Từ đó áp dụng vào ta có:

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b + 1} + \frac{1}{2c^2}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b} + 1\right) + \frac{1}{2c^2}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b} + \frac{2}{c^2} + 1\right)$$

Mà theo $AM - GM$ ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{4}{a^3b}$ và $\frac{1}{c^4} + 1 \geq \frac{2}{c^2}$.

Nên $\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4a^4} + \frac{1}{4b^4} + \frac{1}{c^4} + 2\right)$.

Tương tự ta có $\begin{cases} \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4b^4} + \frac{1}{4c^4} + \frac{1}{a^4} + 2\right) \\ \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4c^4} + \frac{1}{4a^4} + \frac{1}{b^4} + 2\right) \end{cases}$.

Cộng theo vế các BĐT trên lại ta có $VT \leq \frac{1}{16}\left(2\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}\right) + 6\right) = \frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2. Từ điều kiện ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = 3$. Mặt khác: $3 = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} \Rightarrow abc \geq 1$.

Ta có $a^3b + 2c^2 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^3bc^4} \geq 4\sqrt[4]{a^2c^3} = 4\sqrt{ac}\sqrt[4]{c}$. Do đó

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{4\sqrt{ac}\sqrt[4]{c}} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

Tương tự ta có $\begin{cases} \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{ba} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\ \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \end{cases}$.

Cộng theo vế các BĐT trên lại ta có $VT \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$.

Mà theo BĐT BCS thì

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2 \geq \frac{1}{27}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^4 \geq \frac{1}{243}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^8$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\le 3$. Tương tự:

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)^2$$

Suy ra $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\le 3$. Từ đó ta có $VT\le\dfrac{3+3}{8}=\dfrac{3}{4}$.
Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 112

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ, VÒNG 2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Cho các số a, b thỏa mãn $2a^2+11ab-3b^2=0, b\neq 2a, b\neq -2a$. Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{a-2b}{2a-b}+\dfrac{2a-3b}{2a+b}$.

b) Cho các số nguyên dương x, y, z và biểu thức $P=\dfrac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz}$. Chứng minh rằng P là số nguyên chia hết cho 6.

Lời giải.

a) Ta có:
$T=\dfrac{a-2b}{2a-b}+\dfrac{2a-3b}{2a+b}=\dfrac{(a-2b)(2a+b)+(2a-3b)(2a-b)}{(2a-b)(2a+b)}=\dfrac{6a^2-11ab+b^2}{4a^2-b^2}$.
Từ giả thiết suy ra $11ab=-2a^2+3b^2$, thay vào T ta được:
$T=\dfrac{6a^2-11ab+b^2}{4a^2-b^2}=\dfrac{6a^2+2a^2-3b^2+b^2}{4a^2-b^2}=\dfrac{2(4a^2-b^2)}{4a^2-b^2}=2$.

b) Ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.
Suy ra nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$.
Vì $(x^2-y^2)+(y^2-z^2)+(z^2-x^2)=0$ nên ta có :
$TT=(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3=3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$
$=3(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)$.
$MT=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$
$=(x^2y+y^2x)+z^2(x+y)+(2xyz+y^2z+x^2z)$
$=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+zx+zy)$
$=(x+y)[x(y+z)+z(y+z)]=(x+y)(y+z)(z+x)$.
Suy ra $P=\dfrac{TT}{MT}=3(x-y)(y-z)(z-x)\in\mathbb{Z}$.
Trong ba số nguyên dương x, y, z luôn có hai số cùng tính chẵn lẻ, giả sử đó là $x, y \Rightarrow (x-y)\vdots 2$. Vì $P=3(x-y)(y-z)(z-x)$ nên $P\vdots 6$.

Câu 2.

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^3+2x^2y+x^2+2xy=x+10$.

b) Cho 19 điểm phân biệt nằm trong một tam giác đều có cạnh bằng 3, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 19 điểm đã cho mà có diện tích không lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Lời giải.

a) Ta có:
$(1) \Leftrightarrow 2x^2(x+y)+2x(x+y)-(x^2+x)=10$
$\Leftrightarrow 2(x+y)(x^2+x)-(x^2+x)=10$
$\Leftrightarrow (x^2+x)\left[2(x+y)-1\right]=10$
Nhận xét: +) $10=1.10=2.5=(-1)(-10)=(-2)(-5)$; +) $x^2+x=x(x+1)$ là số chẵn; $2(x+y)-1$ là số lẻ; +) $x^2+x=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}>-1 \Rightarrow x^2+x\geq 0$.
Từ các nhận xét trên ta thấy chỉ có các trường hợp (TH) sau:
$\begin{cases} x^2+x=10 \\ 2(x+y)-1=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2+x=2 \\ 2(x+y)-1=5 \end{cases}$.
*TH1 $\begin{cases} x^2+x=10 \\ 2(x+y)-1=1 \end{cases}$.
Phương trình $x^2+x=10$ không có nghiệm nguyên.
*TH2 $\begin{cases} x^2+x=2 \\ 2(x+y)-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$.
Vậy có hai bộ số $(x;y)$ thỏa mãn là: $(1;2)$, $(-2;5)$.

b) Giả sử 19 điểm nằm trong tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Chia tam giác ABC thành 9 tam giác đều, có cạnh bằng 1 (gọi là tam giác nhỏ) như hình vẽ.
Mỗi tam giác nhỏ có diện tích là $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$ Vì có 19 điểm nằm trong 9 tam giác nhỏ nên có ít nhất 3 điểm cùng thuộc một hình tam giác nhỏ. Giả sử 3 điểm đó là I_1, I_2, I_3. Khi đó tam giác $\triangle I_1I_2I_3$ nằm trong một tam giác nhỏ nên $S_{\triangle I_1I_2I_3}\leq \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+x^2y+2x^2+xy+6=0 \\ x^2+3x+y=1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x\geq 3$, ta có:
$(1)\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-3}+2$
$\Leftrightarrow 2x+1=x-3+4\sqrt{x-3}+4$
$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-3}=x$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$\Leftrightarrow 16(x-3)=x^2 \Leftrightarrow x^2-16x+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=12 \end{array}\right.$ Cả hai nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện. Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x=4; x=12$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3+x^2y+2x^2+xy+6=0 \\ x^2+3x+y=1 \end{cases}$ (I) Ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(2x+y)=-6 \\ (x^2+x)+(2x+y)=1 \end{cases}$

Đặt $u=x^2+x; v=2x+y$. Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} uv=-6 \\ u+v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=-2 \end{cases} \end{array}\right.$ Với $\begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x=-2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$. Hệ PT này vô nghiệm. Với $\begin{cases} u=3 \\ v=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x=3 \\ 2x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-3=0 \\ y=-2x-2 \end{cases}$ Giải hệ này được 2 nghiệm: $\begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ y=\sqrt{13}-1 \end{cases}; \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ y=-\sqrt{13}-1 \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}; \sqrt{13}-1); (\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}; -\sqrt{13}-1)$.

Câu 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABDE$, $ACFG$ và hình bình hành $AEKG$.

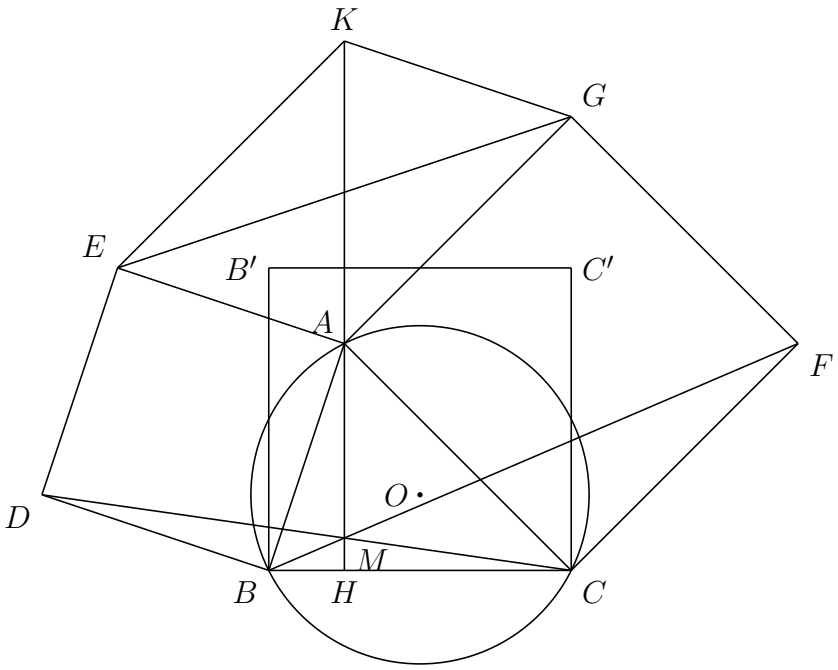
a) Chứng minh rằng $AK=BC$ và $AK \perp BC$.

b) DC cắt BF tại M. Chứng minh rằng A, K, M thẳng hàng.

c) DC cắt BF tại M. Chứng minh rằng A, K, MA thay đổi trên cung lớn BC của $(O;R)$ thì luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Ta có $\widehat{KEA}+\widehat{EAG}=180°$, $\widehat{BAC}+\widehat{EAG}=180°\Rightarrow\widehat{KEA}=\widehat{BAC}$. Lại có: $EK=AG=AC; EA=AB\Rightarrow\Delta AEK=\Delta BAC\Rightarrow AK=BC$.
Ta có $\Delta AEK=\Delta BAC\Rightarrow\widehat{EAK}=\widehat{ABC}$. Gọi H là giao điểm của KA và BC, ta có: $\widehat{BAH}+\widehat{ABC}=\widehat{BAH}+\widehat{EAK}=90°\Rightarrow AH\perp BC$. Vậy $AK\perp BC$.

b) Vì $\widehat{KAC}=\widehat{KAG}+90°;\widehat{BCF}=\widehat{ACB}+90°$ mà $\widehat{KAG}=\widehat{ACB}\Rightarrow\widehat{KAC}=\widehat{BCF}$. Vì $KA=BC; AC=CF;\widehat{KAC}=\widehat{BCF}\Rightarrow\Delta KAC=\Delta BCF\Rightarrow\widehat{CKH}=\widehat{FBC}$. Ta lại có $\widehat{CKH}+\widehat{KCH}=90^0\Rightarrow\widehat{FBC}+\widehat{KCH}=90^0\Rightarrow BF\perp KC(1)$. Tương tự ta có $KB\perp CD$ (2). Từ (1)(2) suy ra M là trực tâm ΔKBC, suy ra $M\in KH$.
Vậy A, K, M thẳng hàng.

c) Dựng hình vuông $BCC'B'$ trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa cung lớn BC, suy ra $B'C'$ cố định. Ta có $AKB'B$ là hình bình hành (vì BB', KA cùng vuông góc BCsuy ra $BB'\ //\ KA$; $BB'=KA=BC$). Do đó $B'K\ //\ BA\Rightarrow\widehat{B'KA}=\widehat{BAH}$ Tương tự ta có $AKC'C$ là hình bình hành suy ra $KC'\ //\ AC\Rightarrow\widehat{AKC'}=\widehat{HAC}$ Suy ra $\widehat{B'KC'}=\widehat{B'KA}+\widehat{AKC'}=\widehat{BAH}+\widehat{HAC}=\widehat{BAC}$Vì khi A thay đổi trên cung lớn BC của đường tròn $(O;R)$ thì K luôn nhìn đoạn $B'C'$ cố định dưới một góc không đổi $\alpha=\widehat{BAC}$. Do đó K thuộc quỹ tích cung chứa góc α dựng trên đoạn $B'C'$ cố định.

Câu 5. Cho các số dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :
$$P=\frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1}+\frac{2}{\sqrt{(x+2y)^3+1}-1}+\frac{(2x+y)(x+2y)}{4}-\frac{8}{3(x+y)}$$
Lời giải.
Đặt $2x+y=a;\ 2y+x=b;\ a,b>0$ thì $P=\dfrac{2}{\sqrt{a^3+1}-1}+\dfrac{2}{\sqrt{b^3+1}-1}+\dfrac{ab}{4}-\dfrac{8}{a+b}$
Ta có $\sqrt{a^3+1}=\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}\le\dfrac{a+1+a^2-a+1}{2}=\dfrac{a^2+2}{2}\Rightarrow\sqrt{a^3+1}-1\le\dfrac{a^2}{2}$
Tương tự $\sqrt{b^3+1}=\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}\le\dfrac{b+1+b^2-b+1}{2}=\dfrac{b^2+2}{2}\Rightarrow\sqrt{b^3+1}-1\le\dfrac{b^2}{2}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Mặt khác $\dfrac{4}{a+b} \le \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Rightarrow -\dfrac{8}{a+b} \ge -\dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b}$

Vậy :

$P \ge \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} + \dfrac{ab}{4} - \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b} = (\dfrac{4}{a^2} + 1) + (\dfrac{4}{b^2} + 1) + \dfrac{ab}{4} - \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b} - 2 \ge \dfrac{4}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{ab}{4} - \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b} - 2 = Q$

$P \ge Q = \dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{ab}{4} - 2 \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{a}.\dfrac{2}{b}.\dfrac{ab}{4}} - 2 = 1$

$$Min(P) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = a^2 - a + 1 \\ b+1 = b^2 - b + 1 \\ \dfrac{4}{b^2} = \dfrac{4}{a^2} = 1 \\ \dfrac{2}{a} = \dfrac{2}{b} = \dfrac{ab}{4} \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 113

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, PHÚ THỌ, VÒNG 1, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho các số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=(a+b-1)(b+c-1)(c+a-1).$$

b) Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt $x^2+3mx+2m^2=\dfrac{x^4+x^3}{2}$

Lời giải.

a) Ta có $a^2+b=b^2+c \Leftrightarrow (a-b)(a+b)=c-b \Leftrightarrow a+b=\dfrac{c-b}{a-b}$.

Suy ra $a+b-1=\dfrac{c-a}{a-b}$.

Tương tự, ta có $b+c-1=\dfrac{a-b}{b-c}$ và $c+a-1=\dfrac{b-c}{c-a}$.

Thay vào biểu thức T thu được $T=1$.

b) Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}&x^4+x^3-2x^2-6mx-4m^2=0\\&\Leftrightarrow (x^2+2x+2m)(x^2-x-2m)=0\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+2x+2m=0(1)\\x^2-x-2m=0(2)\end{array}\right..\end{aligned}$$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt và không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases}\Delta_1'=1-2m>0\\ \Delta_2=1+8m>0\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{8}<m<\dfrac{1}{2}$.

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình (1). Để x_0 không là nghiệm của phương trình (2) thì

$$\begin{aligned}&x_0^2-x_0-2m\neq 0\\&\Leftrightarrow (x_0^2+2x_0+2m)-3x_0-4m\neq 0\\&\Leftrightarrow x_0\neq -\frac{4m}{3}.\end{aligned}$$

Thay $x_0 = -\dfrac{4m}{3}$ vào phương trình (1) thì $26m^2 - 6m \neq 0$ suy ra $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{3}{8} \end{cases}$.

Vậy phương trình có 4 nghiệ phân biệt khi $\begin{cases} -\dfrac{1}{8} < m < \dfrac{1}{2} \\ m \neq 0; m \neq \dfrac{3}{8} \end{cases}$

Câu 2.

a) Tìm các số nguyên m sao cho $m^2 + 12$ là số chính phương.

b) Chứng minh rằng trong 11 số nguyên tố phân biệt, lớn hơn 2 bất kỳ luôn chọn được hai số gọi là a, b sao cho $a^2 - b^2$ chia hết cho 60.

Lời giải.

a) Để $m^2 + 12$ là số chính phương thì tồn tại số nguyên k sao cho

$$\begin{aligned} & m^2 + 12 = k^2 \\ \Leftrightarrow\ & (k-m)(k+m) = 12. \end{aligned}$$

Suy ra $k - m$ và $k + m$ là ước của 12. Mà $k - m$ và $k + m$ cùng tính chẵn, lẻ nên ta có bảng sau

$k - m$	-2	2	-6	6
$k + m$	-6	6	-2	2
m	-2	2	2	-2

Vậy $m \in \{2; -2\}$.

b) Do chỉ có số 3 và số 5 là hai số nguyên tố lần lượt chia hết cho 3 và 5 nên trong 11 số nguyên tố lớn hơn 2 ta luôn chọn được ra hai số nguyên tố a, b không chia hết cho 3 và có cùng số dư khi chia cho 5.

Do đó, $a^2 - b^2 \vdots 5$.

Mặt khác, a, b không chia hết cho 3 nên a^2, b^2 chia 3 dư 1, do đó $a^2 - b^2 \vdots 3$.

Ta có, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \vdots 4$.

Vậy tồn tại a, b nguyên tố để $a^2 - b^2 \vdots 60$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $4x^2 + 5 + \sqrt{3x+1} = 13x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 6 \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+9} = 8 \end{cases}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lời giải.

a) Đặt $2t+3=\sqrt{3x+1}$. Ta có hệ

$$\begin{cases}4t^2+12t+9=3x+1\\4x^2+5+2t+3=13x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4t^2+12t-3x+8=0(1)\\4x^2-13x+2t+8=0(2)\end{cases}.$$

Trừ vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned}&4t^2-4x^2+10x+10t=0\\&\Leftrightarrow(t+x)(4t-4x+10)=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-x\\t=x-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\cdot\end{aligned}$$

TH1. $t=-x$ suy ra

$$\begin{aligned}&-2x+3=\sqrt{3x+1}\\&\Leftrightarrow 4x^2-15x+8=0(x\le\frac{3}{2})\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{15+\sqrt{97}}{8}\ \text{(loại)}\\x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}\end{array}\right.\cdot\end{aligned}$$

TH2. $t=x-\dfrac{5}{2}$ suy ra

$$\begin{aligned}&2x-2=\sqrt{3x+1}\\&\Leftrightarrow 4x^2-11x+3=0(x\ge 1)\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}\\x=\dfrac{11-\sqrt{73}}{8}\ \text{(loại)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $x\in\left\{\dfrac{15-\sqrt{97}}{8};\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}\right\}$.

b) Đặt $\sqrt{2x}=a\ge 0;\sqrt{2y}=b\ge 0$ ta có hệ $\begin{cases}a+b=6(1)\\\sqrt{a^2+5}+\sqrt{b^2+9}=8(2)\end{cases}$.

Thay $a=6-b$ từ (1) vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&\sqrt{(6-b)^2+5}=8-\sqrt{b^2+9}\\&\Leftrightarrow(6-b)^2+5=64-16\sqrt{b^2+9}+b^2+9\\&\Leftrightarrow 4\sqrt{b^2+9}=8+3b\\&\Leftrightarrow 7b^2-48b+80=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=4\\b=\dfrac{20}{7}\end{array}\right.\cdot\end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Suy ra $\left[\begin{array}{l}(a;b)=(2;4)\\(a;b)=\left(\dfrac{22}{7};\dfrac{20}{7}\right)\end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l}(x;y)=(2;8)\\(x;y)=\left(\dfrac{242}{49};\dfrac{200}{49}\right)\end{array}\right.$.

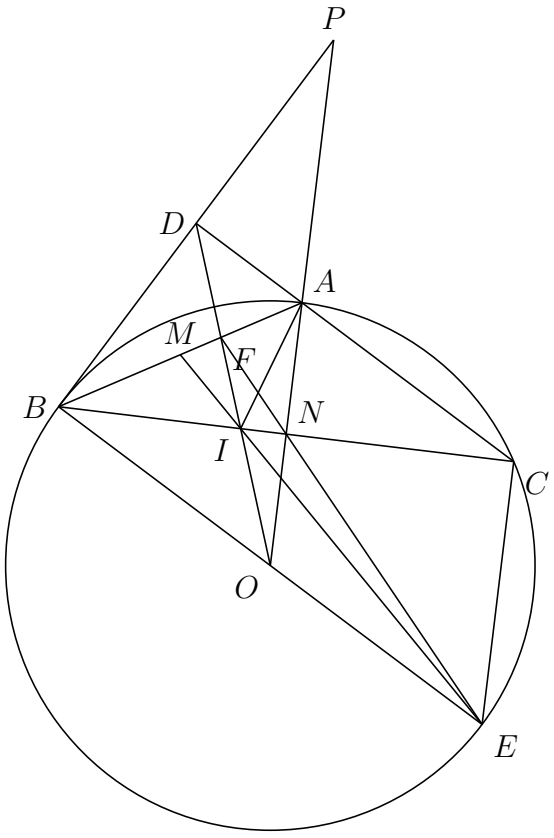
Câu 4. Cho tam giác ABC cân với $\widehat{BAC}=120^\circ$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến của (O) tại B; E là giao điểm của đường thẳng BO với đường tròn (O) $(E\neq B)$; F,I lần lượt là giao điểm của DO với AB,BC; M,N lần lượt là trung điểm của AB,BC.

a) Chứng minh tứ giác $ADBN$ nội tiếp.

b) Chứng minh F,N,E thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng các đường thẳng MI,BO,FN đồng quy.

Lời giải.



a) Tam giác ABC cân tại A, N là trung điểm của BC suy ra $OA\perp BC$ tại N.
Ta có $\widehat{BCA}=\widehat{ABC}=30^\circ$, $\widehat{BCE}=90^\circ$ suy ra $\widehat{CBE}=30^\circ$. Do đó, $AC\parallel BE$ (so le trong). Suy ra $\widehat{ADB}=90^\circ$.
Tứ giác $ADBN$ có $\widehat{ADB}+\widehat{ANB}=180^\circ$, D,N là hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $ADBN$ nội tiếp.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Gọi P đối xứng với B qua D. Dễ chứng minh $BD = BN$ suy ra $BP = BC$, suy ra tam giác BPC đều. Do đó, P, A, N thẳng hàng.
Tam giác $BPO \backsim CBE$ có hai trung tuyến lần lượt là OD, EN nên $\widehat{BOD} = \widehat{NEC}$.
Mặt khác, $\widehat{FNA} = \widehat{FDA}$ (do $\Delta DAF = \Delta NAF$),$\widehat{FAD} = \widehat{BOD}$ (so le), $\widehat{NEC} = \widehat{ONE}$ (so le) suy ra $\widehat{FNA} = \widehat{ONE}$.
Vậy F, N, E thẳng hàng.

c) Xét $\Delta ADB : \widehat{ABD} = 30^\circ$ nên dễ dàng suy ra $AD = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BO}{2}$.
Do $AD \parallel BO$ nên $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AD}{BO} = \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác ABN và cát tuyến FIO ta có

$$\frac{FA}{FB}.\frac{IB}{IN}.\frac{ON}{OA} = 1.$$

Suy ra $\dfrac{IB}{IN} = 4$.
Áp dụng định lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác ABN và cát tuyến MIG ta có

$$\frac{GA}{GN}.\frac{IN}{IB}.\frac{MB}{MA} = 1.$$

Suy ra $GA = 4GN$. Do đó, $\dfrac{GO}{GA} = \dfrac{1}{2}$.
Xét tam giác ABO, ta có đẳng thức

$$\frac{MA}{MB}.\frac{EB}{EO}.\frac{GO}{GA} = 1.$$

Theo định lý Mê-nên-la-uýt đảo suy ra M, G, E thẳng hàng. Vậy MI, BO, FN đồng quy.

Câu 5. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{2}xyz.$$

Lời giải.

a) **Tìm giá trị nhỏ nhất**
Do x, y, z có vai trò như nhau nên giả sử $x = \min\{x, y, z\}$, suy ra $x \geq \dfrac{1}{3}$. Từ $x + y + z = 1$ suy ra $y + z = 1 - x$.
Ta có

$$\begin{aligned} &P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{2}xyz \\ \Leftrightarrow\ &P = x^2 + (y+z)^2 + \left(\frac{9}{2}x - 2\right)yz \\ \Leftrightarrow\ &P = x^2 + (1-x)^2 + \left(\frac{9}{2}x - 2\right)yz. \end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Do $x \geq \dfrac{1}{3}$ suy ra $\dfrac{9}{2}x - 2 \geq 0$ và $yz \geq \dfrac{(y+z)^2}{4}$ nên $\left(\dfrac{9}{2}x - 2\right) yz \geq \left(\dfrac{9}{2}x - 2\right) \dfrac{(y+z)^2}{4}$.

Thay vào P ta có

$$\begin{aligned} & P \geq x^2 + (1-x)^2 + \left(\frac{9}{2}x - 2\right) \frac{(y+z)^2}{4} \\ \Leftrightarrow\ & P \geq x^2 + (1-x)^2 + \left(\frac{9}{2}x - 2\right) \frac{(1-x)^2}{4} \\ \Leftrightarrow\ & P \geq \frac{1}{8}(9x^3 - 6x^2 + x + 4) \\ \Leftrightarrow\ & P \geq \frac{1}{8}\left[x(1-3x)^2 + 4\right] \\ \Leftrightarrow\ & P \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\min P = \dfrac{1}{2}$ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ hoặc $x = 0; y = z = \dfrac{1}{2}$ và các hoán vị.

b) **Tìm giá trị lớn nhất**

Không giảm tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$, suy ra $z \leq \dfrac{1}{3}$.Ta chứng minh được

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{2}xyz \leq (x+y)^2 + z^2 \Leftrightarrow z \leq \frac{4}{9}.$$

Điều này đúng do $z \leq \dfrac{1}{3}$. Mặt khác,

$$(x+y)^2 + z^2 \leq (x+y+z)^2 = 1.$$

Suy ra $P \leq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1, y = z = 0$ và các hoán vị. Vậy $\max P = 1$ khi $x = 1, y = z = 0$ và các hoán vị.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 114

ĐỀ THI VÀO LỚP 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG-GIA LAI, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{2x-18}{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}$ $\left(\text{với } x\geq 18\right)$.

b) Tìm tất cả các số nguyên n để biểu thức $B=\dfrac{n-1}{2n+2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Đặt $t=\sqrt{x-9}$. Do $x\geq 18$ nên $t\geq \sqrt{18-9}=3$. Ta có $x=t^2+9$. Như vậy:

$$A=\frac{2(t^2+9)-18}{\sqrt{t^2+6t+9}+\sqrt{t^2-6t+9}}=\frac{2t^2}{\sqrt{(t+3)^2}+\sqrt{(t-3)^2}}$$
$$=\frac{2t^2}{|t+3|+|t-3|}=\frac{2t^2}{t+3+t-3}=\frac{2t^2}{2t}=t=\sqrt{x-9}.$$

b) Ta có $2B=\dfrac{2n-2}{2n+2}=\dfrac{n-1}{n+1}=1-\dfrac{2}{n+1}$.
Vì B nguyên nên $2B$ nguyên. Mà $n\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $n+1\in\{1;2;-1;-2\}$.
Do đó $n\in\{0;1;-2;-3\}$. Thử lại, ta nhận các giá trị nguyên của n là $n=1$, $n=-3$.

Câu 2.

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2-24n-15$ là một số chính phương.

b) Cho hai phương trình $ax^2+bx+c=0$ và $cx^2+bx+a=0$, với $a.c<0$. Gọi α và β lần lượt là hai nghiệm lớn của hai phương trình. Chứng minh $\alpha+\beta\geq 2$.

Lời giải.

a) Giả sử $n^2-24n-15$ là một số chính phương. Khi đó tồn tại số tự nhiên k sao cho

$$n^2-24n-15=k^2\Leftrightarrow (n+k-12)(n-k-12)=159.$$

Do $159=53.3$ và $n+k-12>n-k-12$ nên ta xét các trường hợp sau

$n+k-12$	53	-3	159	-1
$n-k-12$	3	-53	1	-159
n	40	-16	92	-168
k	25	25	79	79

Vậy có hai số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu là $n = 92$, $n = 40$.

b) Vì $a.c < 0$ nên hai phương trình đã cho đều có hai nghiệm trái dấu. Vì α và β là các nghiệm lớn nên α và β là hai số dương. Ta có

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Leftrightarrow c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + b\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a = 0.$$

Vì α là số dương nên $\dfrac{1}{\alpha}$ cũng là số dương, do đó $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$. Như vậy $\alpha + \beta = \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$. Dấu bằng xảy ra khi $\alpha = \beta = 1$.

Câu 3.

a) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m+4)x + 3(m+1) = 0$ có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông, biết độ dài cạnh còn lại là 5.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2(x-y) \end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = (m-2)^2 \geq 0, \forall m$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 3$, $x = m+1$. Ta xét hai trường hợp sau.
Trường hợp 1: $m+1$ và 3 là độ dài hai cạnh góc vuông. Khi đó

$$\begin{cases} (m+1)^2 + 9 = 25 \\ 0 < m+1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Trường hợp 2: 5 và 3 là độ dài hai cạnh góc vuông. Khi đó

$$\begin{cases} (m+1)^2 = 25 + 9 \\ m+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = \sqrt{34} - 1.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = 3$, $m = \sqrt{34} - 1$.

b) Điều kiện $x \geq 1$, $y \geq 0$. Ta có:

$$xy + x + y = x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1) = 0. \quad (1)$$

Do điều kiện $x \geq 1$, $y \geq 0$ nên $x + y > 0$, vì vậy $(1) \Leftrightarrow x = 2y + 1$. Do đó

$$x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2(x-y) \Leftrightarrow (y+1)(\sqrt{2y} - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 2. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$, $y \geq 0$, ta được nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (5; 2)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

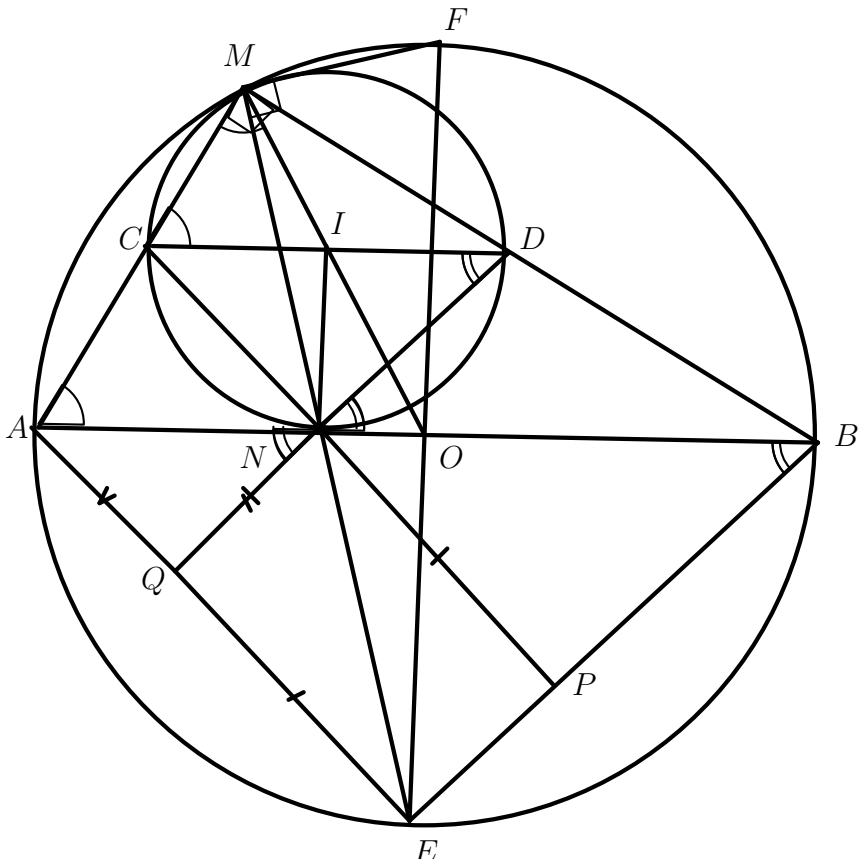
Câu 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và một điểm M di động trên nửa đường tròn (M không trùng với A và B). Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) tại M, tiếp xúc với AB tại N, cắt AM tại C, cắt BM tại D.

a) Chứng minh $CD \parallel AB$.

b) Gọi E là giao điểm thứ hai của (O) với đường thẳng MN. Chứng minh $EM.EN = 2R^2$.

c) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của CN với BE, DN với AE. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác NPQ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



a) Ta có (I) tiếp xúc trong với (O) nên OM qua I. Do $\widehat{CMD} = 90^0$ nên CD là đường kính của (I). Ta có $\widehat{ICM} = \widehat{IMC}$ (do ΔIMC cân tại I). Ta có $\widehat{IMC} = \widehat{MAO}$ (do ΔOMA cân tại O). Vậy $\widehat{ICM} = \widehat{MAO}$. Suy ra $CD \parallel AB$.

b) Nếu EM là đường kính của (O) thì ta có điều cần chứng minh. Giả sử EM không là đường kính của (O). Kẻ EF là đường kính của (O). Ta có $\widehat{BOE} = 2\widehat{BME} = \widehat{DIN} = 90^0$. Hai tam giác vuông EON và EMF có góc E chung nên đồng dạng với nhau. Suy ra:

$$\frac{EO}{EM} = \frac{EN}{EF} \Rightarrow EM.EN = EO.EF = 2R^2.$$

c) Ta có:

$$\widehat{ABE} = \widehat{AME} = \widehat{CDN} = \widehat{DNB} = \widehat{ANQ} \Rightarrow DQ \parallel BE.$$

Suy ra $DQ \perp AE$. Lại có: $\widehat{NAQ} = \widehat{EMB} = \widehat{DCN} = \widehat{DNB} = \widehat{ANQ}$. Như vậy tam giác ANQ vuông cân tại Q nên $NQ = AQ$. Tứ giác $EPNQ$ là hình chữ nhật nên $NP = EQ$. Ta có:

$$S_{NPQ} = \frac{1}{2}NP.NQ \leq \frac{1}{2}\left(\frac{NP+NQ}{2}\right)^2 = \frac{AE^2}{8} = \frac{R^2}{4}.$$

Vậy S_{NPQ} đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{R^2}{4}$, đạt được khi $NP = NQ$, hay tam giác NPQ vuông cân tại N. Khi đó M trùng với F, hay M là điểm chính giữa cung AB.

Câu 5. Cho ba số a, b, c thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$ và $0 \leq a, b, c \leq 2$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 9.$$

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &= 27 - 9(ab+bc+ca) + 3abc. \end{aligned}$$

Vì $0 \leq a,\ b,\ c \leq 2$ nên $(2-a)(2-b)(2-c) \geq 0$. Suy ra

$$-9(ab+bc+ca) \leq \frac{-9}{2}abc - 18.$$

Do đó $a^3+b^3+c^3 \leq 27 - \dfrac{9}{2}abc - 18 + 3abc = 9 - \dfrac{3}{2}abc$.
Vì $0 \leq a, b, c \leq 2$ do đó $abc \geq 0$, vậy $a^3+b^3+c^3 \leq 9$. Dấu " $=$ " xảy ra khi $a=2, b=1, c=0$ và các hoán vị.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 115

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ, HÒA BÌNH, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Rút gọn các biểu thức sau

(a) $\sqrt{5}-\sqrt{125}+3\sqrt{45}$.

(b) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức sau $C=(x-1)\sqrt{\dfrac{2x}{x^2-2x+1}}$.

Lời giải.

a) Rút gọn các biểu thức sau

(a) $\sqrt{5}-\sqrt{125}+3\sqrt{45}=\sqrt{5}-5\sqrt{5}+9\sqrt{5}=5\sqrt{5}$.

(b) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)=4$.

b) Điều kiện xác định là $x\geq 0$ và $x\neq 1$

Với điều kiện trên, ta có:

$$\begin{aligned}C&=(x-1)\sqrt{\frac{2x}{x^2-2x+1}}\\&=(x-1)\frac{\sqrt{2x}}{|x-1|}\\&=\begin{cases}\sqrt{2x} & \text{với } x>1\\ -\sqrt{2x} & \text{với } 0\leq x<1\end{cases}\end{aligned}$$

Câu 2.

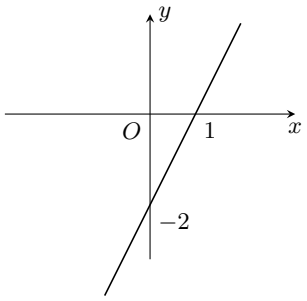
a) Trong hệ trục tọa độ Oxy hãy vẽ đồ thị hàm số $y=2x-2$.

b) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $BC=5cm$; $AH=\dfrac{12}{5}cm$. Tính độ dài cạnh AB và AC.

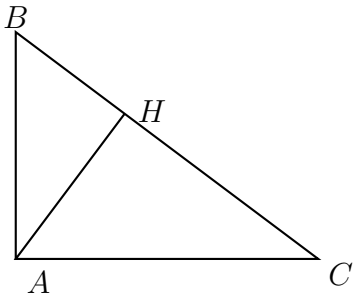
c) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}\sqrt{x+y-5}=20-y^2\\ xy=5+x^2\end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có đường thẳng $(d): y = 2x - 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0, -2)$ và $(1, 0)$.
Đồ thị



b) Giả sử $AC > AB$, ta có
$AH.BC = AB.AC$ và $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Suy ra $AB = 3$cm và $AC = 4$cm.



c) Điều kiện: $x + y \geq 5$ $(*)$, ta có $\begin{cases} \sqrt{x+y-5} = 20 - y^2 & (1) \\ xy = 5 + x^2 & (2) \end{cases}$
Phương trình (2) tương đương với $4x^2 - 4xy + 20 = 0$
$\Leftrightarrow (2x - y)^2 - (y^2 - 20) = 0$
$\Leftrightarrow (2x - y)^2 = y^2 - 20$
Phương trình (1) tương đương với $\sqrt{x+y-5} + y^2 - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x+y-5} + (2x - y)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (2x - y)^2 = y^2 - 20$
Do đó
$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$
suy ra $x = \dfrac{10}{3}$ và $y = \dfrac{5}{3}$ (không thỏa mãn điều kiện $(*)$). Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 3. Hai vật chuyển động với vận tốc không đổi trên một đường tròn bán kính 20m, xuất phát cùng một lúc từ cùng một điểm. Nếu chúng chuyển động cùng chiều thì cứ sau 20 giây lại gặp nhau, nếu chúng chuyển động ngược chiều thì cứ sau 4 giây lại gặp nhau. Hãy tính vận tốc của mỗi vật?

Lời giải.

Gọi vận tốc của mỗi vậy tương ứng là x, y m/s (giả sử $x > y > 0$)
Nếu chuyển động cùng chiều, tại thời điểm gặp nhau thì vật đi với vận tốc x đi hơn vật đi với vận tốc y đúng một vòng, ta có phương trình $20(x - y) = 40\pi$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nếu chuyển động ngược chiều, tại thời điểm gặp nhau tổng quãng đường hai vật đi được là đúng 1 vòng, ta có phương trình $4(x+y)=40\pi$.

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} 20(x-y)=40\pi \\ 4(x+y)=40\pi \end{cases}$

Giải hệ ta được $x=6\pi; y=4\pi$.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính MN và dây cung PQ vuông góc với MN tại I (I khác M, I khác N). Trên cung nhỏ NP lấy điểm J (J khác N, J khác P), nối M với J cắt PQ tại H. Gọi giao điểm của PN với MJ là G, giao điểm của JQ với MN là K. Chứng minh rằng:

a) Ttứ giác $GKNJ$ là tứ giác nội tiếp.

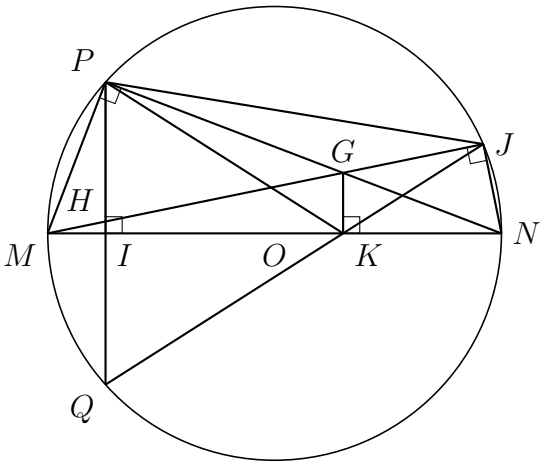
b) KG song song với PQ.

c) Điểm G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PKJ.

Lời giải.

a) Xét tứ giác $GKNJ$ có
$\widehat{MJQ}=\widehat{MNP}$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)
suy ra $\widehat{GJK}=\widehat{GNK}$ và cùng chắn đoạn GK nên tứ giác $GKNJ$ nội tiếp.

b) Ta có tứ giác $GKNJ$ nội tiếp, suy ra $\widehat{GJN}+\widehat{GKN}=180^\circ$. Mà $\widehat{MJN}=\widehat{GJN}=90^\circ$.
Suy ra $\widehat{GKN}=90^\circ$ hay $GK \parallel PQ$.



c) Ta có $\widehat{MJP}=\widehat{MJQ}$,
(góc nội tiếp chắn cung bằng nhau)
suy ra JG là tia phân giác góc $\widehat{PJK}$
Mặt khác, $\widehat{JPN}=\widehat{JMN}$,
(góc nội tiếp cùng chắn cung JN (1)
$\widehat{MPK}=\widehat{MQK}$ (do MN là trung trực đoạn PQ) .
Ta lại có $\widehat{MNJ}=\widehat{MQK}$,
(do góc nội tiếp cùng chắn cung MJ)
và $\widehat{JMN}+\widehat{MNJ}=90^\circ$;
$\widehat{JMN}+\widehat{MNJ}=90^\circ$
Từ đó suy ra $\widehat{JMN}=\widehat{NPK}$ (2)
Từ (1) và (2) ta có PG là phân giác góc $\widehat{KPJ}$ của tam giác KPJ. Vậy G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PKJ.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Cho x, y, z là các số tự nhiên thỏa mãn $x+y+z=2017$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=xyz$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm x, y, z, ta có

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

suy ra

$$P=xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27} = \frac{2017^3}{27}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{2017^3}{27}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{2017}{3}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 116

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HOÀNG LÊ KHA, TÂY NINH, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải phương trình $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = 25 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ hoặc $x = \dfrac{1}{3}$

Câu 2. Rút gọn biểu thức $K = (2-\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}} + (2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Lời giải.

$K = (2-\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}} + (2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$= \sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$
$= (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$
Bình phương hai về ta được $K^2 = 6 \Rightarrow K = \sqrt{6}$

Câu 3. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $T = x_1^2 + x_2^2 - (m-1)(x_1+x_2) + m^2 - 3m$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3m \end{cases}$

$T = x_1^2 + x_2^2 - (m-1)(x_1+x_2) + m^2 - 3m$
$= (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - (m-1)(x_1+x_2) + m^2 - 3m$
$= 4(m-1)^2 - 2(m^2-3m) - 2(m-1)(m-1) + m^2 - 3m$
$= m^2 + m + 2$
$= \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4}$

Dấu " = " xảy ra khi $m = -\dfrac{1}{2}$

Vậy khi $m = -\dfrac{1}{2}$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{3}{5}$. Tính $\tan \widehat{ABC}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \widehat{ACB} = \cos \widehat{ABC} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \dfrac{4}{5}$ (góc trong tam giác vuông là góc nhọn)

Vậy $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{4}{3}$

Câu 5. Chứng minh $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ luôn chia hết cho 24, với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Ta có $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120 = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ là tích 4 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho $3; 8$ mà $3; 8 \geq 1$ nên chia hết cho 24 (đpcm)

Câu 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 4x + y^3 + 3 = 0 \\ x^2y^3 + y = 2x \end{cases}$.

Lời giải.

$\begin{cases} 2x^2 + 4x + y^3 + 3 = 0 \ (1) \\ x^2y^3 + y = 2x \ (2) \end{cases}$.

Nhân hai vế của phương trình (2) rồi cộng vế theo vế vào phương trình (1) ta được phương trình

$2x^2 + 2x^2y^3 + 2y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2(1+y)(y^2 - y + 1) + (y+1)(y^2 - y + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)[2x^2(y^2 - y + 1) + (y^2 - y + 3)] = 0$

$\Leftrightarrow y = -1$

Thay $y = -1$ vào (2) ta được

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

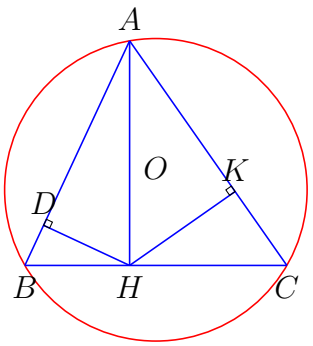
Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(-1; -1)$

Câu 7. Cho A là điểm cố định trên đường tròn (O), bán kính R. Hai dây cung thay đổi AB, AC của đường tròn (O), thỏa; $AB.AC = 2\sqrt{2}R^2$ (B khác C), kẻ AH vuông góc BC (H thuộc BC).

a) Chứng minh $AH = R\sqrt{2}$.

b) Gọi D và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Chứng minh diện tích tam giác ABC bằng hai lần diện tích tam giác ADK.

Lời giải.



a) Ta có $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} = 2R$

Theo giả thiết $AB.AC = 2\sqrt{2}R^2$ suy ra $\sin B.\sin C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AC}.\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow AH = R\sqrt{2}$ (đpcm)

b) Ta có $AD.AB = AH^2 = AK.AC$ Suy ra $\triangle ADK \sim \triangle ACB$ với tỉ số $k^2 = \dfrac{AD}{AC}.\dfrac{AK}{AB}$

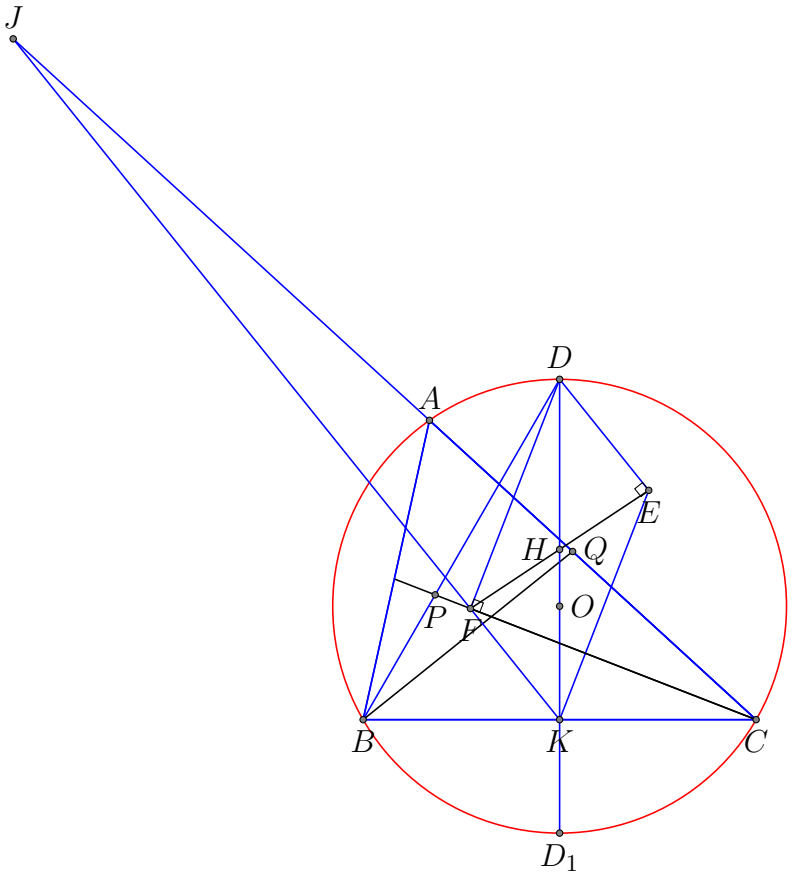
$\Rightarrow k^2 = \dfrac{AD}{AC}\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{S_{ADK}}{S_{ABC}}$

Mặt khác $AD.AB.AK.AC = AH^2 \Rightarrow \dfrac{AD.AK}{AC.AB} = \dfrac{AH^4}{(AC.AB)^2} = \dfrac{4R^2}{8R^2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{S_{ADK}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow S_{ABC} = 2S_{ADK}$ (đpcm)

Câu 8. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi D là điểm chính giữa cung lớn BC. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến đường phân giác trong góc B và đường phân giác trong góc C của tam giác ABC. Chứng minh trung điểm H của EF cách đều B và C.

Lời giải.



Gọi P là giao điểm BD và phân giác trong góc C. Q là giao điểm của AC và phân giác trong của góc B, K là trung điểm BC, J là giao điểm của FK và AC, D_1 là điểm đối xứng với D qua O.

Ta có $\widehat{BDD_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Mà $\dfrac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 90^\circ$

Mặt khác $\widehat{BDQ} + \widehat{BDD_1} + \widehat{FDK} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{BDQ} + \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} + \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} = 90^\circ$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Suy ra $\widehat{DBQ} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$

Mà $DFKB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DKF} = \widehat{DBQ} = \frac{1}{2}\widehat{BCA}$

Ta có: $\widehat{DKF} + \widehat{JKC} = \widehat{KJC} + \widehat{JCP} (= 90^\circ)$

Suy ra $\widehat{JKC} = \widehat{KJC}$

Suy ra tam giác JKC cân tại C có CP là phân giác cũng là đường cao

Vì CP vuông góc với FK, CP vuông góc DE

$\Rightarrow DE \parallel EK$

Chứng minh tương tự ta được $DF \parallel EK$

Từ đó suy ra $DFKE$ là hình bình hành

Mà H là trung điểm EF

$\Rightarrow H$ là trung điểm DK

$\Rightarrow D, H, K$ thẳng hàng

Lại có DK là đường trung trực đoạn BC

Nên H cũng nằm trên trung trực đó

Vậy H cách đều B và C.

Câu 9. Cho x, y là các số thực dương bé hơn 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$$

.

Lời giải.

Xét $x + y \geq 1 \Rightarrow Q \leq 0$

Xét $x + y < 1$, đặt $z = 1 - x - y \Rightarrow z > 0$

Khi đó $Q = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} \leq \frac{1}{8}$ (Theo AM-GM)

Dấu " = " xảy ra khi $x = y = \frac{1}{3}$

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 117

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HÀ TĨNH, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Lời giải.

Từ giả thiết có

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$$

Lại có

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Nên

$$a^3+b^3+c^3=0-3(-c)(-a)(-b)=3abc.$$

Câu 2.

a) Giải phương trình $4x^2=(3x-2)\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2=xy+x+y \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=4x-4y. \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &4x^2=(3x-2)\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 \\ \Leftrightarrow &\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2=(3x-2)\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 \\ \Leftrightarrow &\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2\left[\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2-3x+2\right]=0 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+1}=1 \\ 2\sqrt{2x+1}=x-4 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải từng phương trình và kết hợp điều kiện ta được nghiệm là $x=0; x=8+2\sqrt{13}$.

b) Điều kiện $x \geq 1; y \geq 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ tương đương với

$$x^2-xy-2y^2-(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=2y+1 \end{array}\right.$$

◇ Trường hợp 1: $x=-y$

Từ điều kiện của bài toán $x\geq 1\Rightarrow -y\geq 1\Leftrightarrow y\leq -1$. Mặt khác $y\geq 0$. Do đó hệ vô nghiệm.

◇ Trường hợp 2: $x=2y+1$, thay vào phương trình thứ 2 trong hệ ta được

$$\begin{aligned}&(2y+1)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=4(2y+1)-4y\\ \Leftrightarrow&(y+1)\sqrt{2y}=4(y+1)\\ \Leftrightarrow&\sqrt{2y}=4(\text{do } y+1>0)\Leftrightarrow y=8\end{aligned}$$

Khi đó hệ có nghiệm $(x;y)=(17;8)$.

Câu 3.

a) Cho phương trình $(x-a)^2\left[a(x-a)^2-a-1\right]+1=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình có số nghiệm dương nhiều hơn số nghiệm âm.

b) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2017}{2017+b}+\dfrac{2018}{2018+c}\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[(x-a)^2-1\right]\left[a(x-a)^2-1\right]=0\begin{bmatrix}(x-a)^2=1 & (1)\\ a(x-a)^2=1 & (2)\end{bmatrix}$$

◇ Nếu $a\leq 0$ thì (2) vô nghiệm nên phương trình có nghiệm là $x=a-1<0$ hoặc $x=a+1$. Suy ra số nghiệm âm không ít hơn số nghiệm dương.

◇ Nếu $a>0$ thì tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{a+1,a-1,a+\dfrac{1}{\sqrt{a}},a-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right\}$ trong đó đã có 2 nghiệm dương là $x=a+1$ và $x=a+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. Vì vậy để số nghiệm dương nhiều hơn số nghiệm âm thì

$$\begin{bmatrix}a-1\geq 0\\ a-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\geq 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow a\geq 1$$

b) Từ giả thiết suy ra

$$1-\frac{2018}{2018+c}\geq\frac{1}{a+1}+\frac{2017}{2017+b}$$

hay

$$\frac{c}{2018+c}\geq\frac{1}{a+1}+\frac{2017}{2017+b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a+1}.\frac{2017}{2017+b}}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{a}{a+1}\geq 2\sqrt{\frac{2017}{b+2017}.\frac{2018}{c+2018}}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\frac{b}{2017+b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{1+a}.\frac{2018}{c+2018}}$$

Nhân vế với vế của ba bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$P = abc \geq 8.2017.2018$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 4034; c = 4036$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a, M là một điểm bất kì thuộc cạnh AB(M khác A, B). Gọi E là giao điểm của tia CM và tia DA. Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho $BF = DE$. Gọi N là trung điểm của đoạn EF.

a) Chứng minh hai tam giác EAC và NBC đồng dạng.

b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho diện tích tứ giác $ACFE$ gấp sáu lần diện tích hình vuông $ABCD$.

Lời giải.

a)

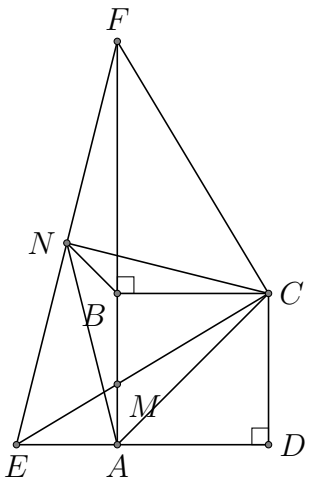
Dễ thấy $\triangle EDC = \triangle FBC$. Suy ra $FC = CE$ và

$$\widehat{FCB} = \widehat{ECD} \Rightarrow \widehat{FCE} = \widehat{BCD} = 90^\circ$$

Do đó tam giác CEF vuông cân tại C.
Lại có N là trung điểm của EF nên

$$\widehat{ECN} = 45^\circ = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{ECA} \quad (1)$$

Mặt khác, tứ giác $NFCB$ nội tiếp nên $\widehat{CEA} = \widehat{CFB} = \widehat{CNB}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác EAC và NBC đồng dạng.



b) Đặt $AE = x, (x > 0)$. Ta có $EC^2 = ED^2 + CD^2 = (x+a)^2 + a^2$. Do đó

$$S_{ECF} = \frac{1}{2}EC^2 = \frac{(a+x)^2 + a^2}{2}.$$

Mặt khác $S_{EAC} = \frac{1}{2}CD.AE = \frac{ax}{2}$ nên

$$S_{ACFE} = S_{ECF} + S_{CEA} = \frac{(a+x)^2 + a^2 + ax}{2}.$$

Từ giả thiết suy ra

$$S_{ACFE} = 6S_{ABCD} \Leftrightarrow (a+x)^2 + a^2 + ax = 12a^2 \Leftrightarrow 3ax + x^2 = 10a^2 \Leftrightarrow x = 2a.$$

Theo định lí Thalet ta có $\frac{AM}{DC} = \frac{EA}{ED}$ nên $AM = \frac{ax}{a+x} = \frac{2a}{3}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Trên một đường tròn cho 16 điểm phân biệt, dùng ba màu xanh, đỏ, vàng để tô các điểm ấy (mỗi điểm chỉ tô một màu). Mỗi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong 16 điểm trên được tô màu nâu hoặc màu tím. Chứng minh rằng mỗi cách tô màu luôn tồn tại ít nhất một tam giác có các đỉnh cùng màu và các cạnh cũng cùng màu.

Lời giải.

Theo nguyên tắc Dirichlet ta có ít nhất 6 điểm cùng màu. Gọi các điểm đó là A, B, C, D, E, F và giả sử chúng cùng được tô màu đỏ. Xét 5 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF, theo nguyên tắc Dirichlet ta có ít nhất 3 đoạn thẳng cùng màu, giả sử đó là AB, AC, AD và cùng có màu nâu. Xét tam giác BCD

- Nếu BC, CD, BD cùng có màu tím thì tam giác BCD thỏa mãn yêu cầu.
- Nếu BC, CD, BD không cùng có màu tím thì có ít nhất một đoạn màu nâu, giả sử là BC. Suy ra tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 118

ĐỀ THI VÀO CHUYÊN TOÁN 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ NỘI, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Giải phương trình $\sqrt{6x-x^2}+2x^2-12x+15=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2=y+\dfrac{3}{y} \\ 4y^2=x+\dfrac{3}{x} \end{cases}$.

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $6x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 6$.
Đặt $\sqrt{6x-x^2}=t$. Ta có $6x-x^2=9-(x-3)^2\leq 9$ nên $0\leq t\leq 3$.
Phương trình đã cho có dạng $-2t^2+t+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \text{ (tmđk)} \\ t=-\dfrac{3}{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$
Với $t=3$, ta có $\sqrt{6x-x^2}=3 \Leftrightarrow 6x-x^2=9 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3$ (tmđk).
Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

b) ĐKXĐ: $x,y\neq 0$.
Hệ phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} 4x^2y=y^2+3 \ (1) \\ 4y^2x=x^2+3 \ (2) \end{cases}$.
Trừ hai phương trình cho nhau ta có:

$$\begin{aligned} 4x^2y-4y^2x=y^2-x^2 &\Leftrightarrow 4xy(x-y)+(x-y)(x+y)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y+4xy)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y+4xy=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

TH1: $x=y$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$4x^3=x^2+3 \Leftrightarrow 4x^3-x^2-3=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2+3x+3)=0$$

Vì $4x^2+3x+3=\left(2x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{39}{16}>0$ nên ta có $x=1$.
Hệ có nghiệm $(x,y)=(1,1)$.
TH2: $x+y+4xy=0 \Rightarrow 4xy=-x-y$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$x(-x-y)=y^2+3 \Leftrightarrow x^2+xy+y^2+3=0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)=(1,1)$.

Câu 2.

a) Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $2017 - p^2$ chia hết cho 24.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.

c) Cho a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh $a+b+2\sqrt{ab+c^2}$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải.

a) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ. Đặt $p = 2k + 1$.
Ta có $2017 - p^2 = 2017 - (2k+1)^2 = 2016 - 4k(k+1)$.
Một trong hai số k, $k+1$ là số chẵn nên $4k(k+1) \vdots 8$. Do đó $(2017 - p^2) \vdots 8$ (1).
Ta có $2017 - p^2 = (44^2 - p^2) + 81 = (44 - p)(44 + p) + 81$.
Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3.

- Nếu p chia 3 dư 1 thì $44 + p$ chia hết cho 3.
- Nếu p chia 3 dư 2 thì $44 - p$ chia hết cho 3.

Vậy $(44 - p)(44 + p) \vdots 3$. Do đó $(2017 - p^2) \vdots 3$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $(2017 - p^2) \vdots 24$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 9xy = 0 &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 27 - 9xy = 27 \\ &\Leftrightarrow (x+y+3)(x^2+y^2+9-3x-3y-xy) = 27 \\ &\Leftrightarrow (x+y+3)\left[(x+y)^2 - 3(x+y) - 3xy + 9\right] = 27 \ (*) \end{aligned}$$

Vì vậy $x + y + 3 \mid 27$. Mà $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x + y + 3 \geq 5$.
Vì vậy ta có $\begin{bmatrix} x+y+3 = 9 \\ x+y+3 = 27 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+y = 6 \\ x+y = 24 \end{bmatrix}$
TH1: Nếu $x + y = 6$ thay vào $(*)$ suy ra $xy = 8$.
Do đó x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} (x,y) = (2,4) \\ (x,y) = (4,2) \end{bmatrix}$.
TH2: Nếu $x + y = 24$ thay vào $(*)$ ta có $xy = \dfrac{512}{3}$ (loại).

c) TH1: Nếu $\sqrt{ab+c^2} \notin \mathbb{Q}$ thì $(a+b+2\sqrt{ab+c^2}) \notin \mathbb{Q}$.
TH2: Nếu $\sqrt{ab+c^2} \in \mathbb{Q}$ thì $\sqrt{ab+c^2} \in \mathbb{N}$.
Đặt $a + b + 2\sqrt{ab+c^2} = x$ $(x \in \mathbb{N}^*)$.
Từ đây ta có

$$\begin{aligned} (a+b-x)^2 = 4(c^2+ab) &\Leftrightarrow (a+b)^2 + x^2 - 2x(a+b) = 4c^2 + 4ab \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 - 4c^2 + x(x-2a-2b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b-2c)(a-b+2c) = x(x-2a-2b) \end{aligned}$$

Ta có $x = a + b + 2\sqrt{ab + c^2} \geq a + b + 2c$ nên $x \geq a - b + 2c \geq a - b - 2c$.
Mặt khác $x \mid (a - b - 2c)(a - b + 2c)$ nên x không là số nguyên tố.

Câu 3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{x}{3 - yz} + \frac{y}{3 - xz} + \frac{z}{3 - xy} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

- Trước tiên, ta chứng minh: Với $a, b, c > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$.
Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

Nhân hai bất đẳng thức ta có: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$.

- Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2} \Rightarrow \frac{x}{3 - yz} \leq \frac{x}{3 - \frac{y^2 + z^2}{2}}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P = \frac{x}{3 - yz} + \frac{y}{3 - xz} + \frac{z}{3 - xy} &\leq \frac{x}{3 - \frac{y^2 + z^2}{2}} + \frac{y}{3 - \frac{x^2 + z^2}{2}} + \frac{z}{3 - \frac{y^2 + x^2}{2}} \\ &= \frac{x}{3 - \frac{3 - x^2}{2}} + \frac{y}{3 - \frac{3 - y^2}{2}} + \frac{z}{3 - \frac{3 - z^2}{2}} \\ &= \frac{2x}{x^2 + 3} + \frac{2y}{y^2 + 3} + \frac{2z}{z^2 + 3} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $2x \leq x^2 + 1, 2y \leq y^2 + 1, 2z \leq z^2 + 1$.
Từ đó suy ra

$$P \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3} + \frac{y^2 + 1}{y^2 + 3} + \frac{z^2 + 1}{z^2 + 3} = 3 - \left(\frac{2}{x^2 + 3} + \frac{2}{y^2 + 3} + \frac{2}{z^2 + 3}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ ta có

$$\frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 3} \geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2 + 9} = \frac{3}{4}$$

Do đó $P \leq 3 - 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

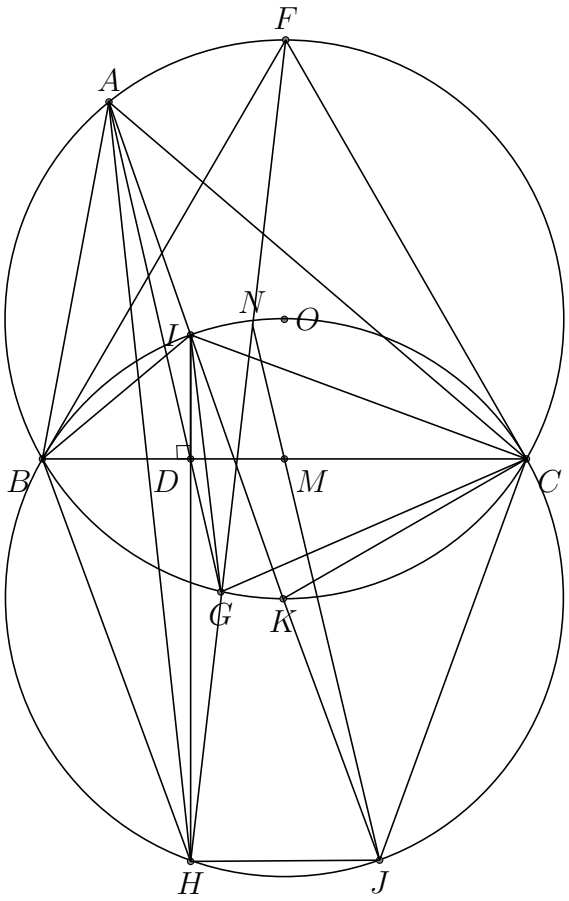
Câu 4. (3,0 điểm)
Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. D là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng BC và G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn (O). Gọi F điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O). Đường thẳng FG cắt đường thẳng ID tại điểm H.

a) Chứng minh tứ giác $IBHC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi J là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh $BH = CJ$.

c) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng FH với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh đường thẳng NJ đi qua trung điểm của cạnh BC.

Lời giải.



a. Gọi K là giao điểm của AI và (O).
Ta có $KF \perp BC$, $IH \perp BC \Rightarrow KF \parallel IH \Rightarrow \widehat{HIK} = \widehat{AKF}$ (1).
Mà $\widehat{AKF} = \widehat{AGF}$ (hai góc nội tiếp chắn cung AF của (O)) (2).
Lại có $\widehat{AIH} + \widehat{HIK} = 180°$, $\widehat{AGH} + \widehat{AGF} = 180°$ (3).
Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AIH} = \widehat{AGH} \Rightarrow$ tứ giác $AIGH$ nội tiếp.
$\Delta DIA \sim \Delta DGH$ (g.g) nên $DI.DH = DG.GA$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\Delta DAB \sim \Delta DCG$ (g.g) nên $DA.DG = DC.DB$.
Vì vậy ta có $DI.DH = DC.DB \Rightarrow \dfrac{DI}{DB} = \dfrac{DC}{DH}$.
Ta lại có $\widehat{IDC} = \widehat{BDH}$ (đối đỉnh) nên suy ra $\Delta DBH \sim \Delta DIC$ (c.g.c).
Vì vậy $\widehat{DBH} = \widehat{DBC} \Rightarrow$ tứ giác $IBHC$ nội tiếp.

b. Ta có: $\widehat{KIC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)$.
$\widehat{KCI} = \widehat{KCB} + \widehat{BCI} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)$.
Do đó $\widehat{KCI} = \widehat{KIC}$ nên ΔKIC cân tại K. Tương tự suy ra $KI = KC = KB$.
Vậy K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBIC.
Do đó IJ là đường kính của đường tròn $(K) \Rightarrow \widehat{IHJ} = 90^\circ \Rightarrow HI \perp HJ$.
Mặt khác $IH \perp BC$ nên $HJ \parallel BC$.
Do tứ giác $BCHJ$ nội tiếp nên $\overset{\frown}{BH} = \overset{\frown}{CJ} \Rightarrow BH = CJ$.

c. Gọi M là giao điểm của NJ và BC.
Ta có FK là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{FBK} = \widehat{FCK} = 90^\circ$.
Mà KB, KC là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔBIC nên FB, FC là các tiếp tuyến.
Lại có FNH là cát tuyến nên $\Delta FBN \sim \Delta FHB \Rightarrow \dfrac{FN}{FB} = \dfrac{BN}{BH} = \dfrac{FB}{FH}$.
Do đó $\dfrac{FN}{FH} = \dfrac{FN}{FB}\dfrac{FB}{FH} = \left(\dfrac{BN}{BH}\right)^2$. Tương tự $\dfrac{FN}{FH} = \left(\dfrac{CN}{CH}\right)^2$.
Suy ra $\dfrac{CN}{CH} = \dfrac{BN}{BH} \Rightarrow \dfrac{CN}{BJ} = \dfrac{BN}{CJ}$ (3) (do $BCJH$ là hình thang cân).
Mặt khác $\Delta MCN \sim \Delta MBJ$ (g.g) nên ta có $\dfrac{CM}{MJ} = \dfrac{CN}{BJ}$ (4).
$\Delta MBN \sim \Delta MCJ$ (g.g) nên ta có $\dfrac{BN}{CJ} = \dfrac{MB}{MJ}$ (5).
Từ (3), (4), (5) ta có $\dfrac{MC}{MJ} = \dfrac{MB}{MJ} \Rightarrow M$ là trung điểm BC.

Câu 5. Xét tập hợp S gồm các số nguyên dương có tính chất: với hai phần tử phân biệt bất kì x, y thuộc S, ta luôn có $30|x-y| \geq xy$. Hỏi tập S có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải.

Ta có nhận xét A chỉ chứa nhiều nhất một phần tử lớn hơn hoặc bằng 30.
Giả sử $x, y \in A$ sao cho $x > y > 30$. Theo đề bài ta có $x - y = |x-y| \geq \dfrac{xy}{30} \geq x$ (vô lý).
Giả sử A có n phần tử $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.
Với $x_i > x_j$, theo giả thiết ta có $x_i - x_j \geq \dfrac{x_i x_j}{30} \Rightarrow x_i \geq \dfrac{30x_j}{30 - x_j}$ $\forall i > j$.
Suy ra $x_i \geq -30 + \dfrac{900}{30 - x_j}$ $\forall i > j$.
Áp dụng BĐT trên ta có: $x_2 \geq -30 + \dfrac{900}{30-1} \geq 2$.
Tiếp tục áp dụng BĐT trên ta có:

$$x_3 \geq 3, x_4 \geq 4, x_5 \geq 5, x_6 \geq 6, x_7 \geq 8, x_8 \geq 11, x_9 \geq 18, x_{10} \geq 45$$

Vì vậy S có nhiều nhất 10 phần tử. Ví dụ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 18, 45\}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 119

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN HẠ LONG, SỞ GIÁO DỤC QUẢNG NINH, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức:

$$A=\left(\frac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\frac{3}{x^3-\sqrt{27}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{x}+1\right) \text{ với } x\neq 0; x\neq \sqrt{3}.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

Lời giải.

1. Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\frac{3}{x^3-\sqrt{27}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{x}+1\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\frac{3}{(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)}\right)\left(\frac{x^2+x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}x}\right)\\&=\left(\frac{(x-\sqrt{3})\sqrt{3}+3}{(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)}\right)\left(\frac{x^2+x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}x}\right)=\frac{1}{x-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2. Ta có:

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}}\\&=\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}=\sqrt{3}+1\end{aligned}$$

Thay $x=\sqrt{3}+1$ vào A ta có $A=\dfrac{1}{x-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}=1$

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^3-x^2-x\sqrt{x-1}-2=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy-2y^2=0\\xy+3y^2+x=3\end{cases}$

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

1. ĐK: $x \geq 1$. Biến đổi về phương trình $x^2(x-1) - x\sqrt{x-1} - 2 = 0$.
Đặt $t = x\sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x^2(x-1)$. Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $t = 2$.
Với $t = 2 \Rightarrow x\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \quad (1) \\ xy + 3y^2 + x = 3 \quad (2) \end{cases}$
Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + y(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = 0$, ta được $x = y$ hoặc $x = -2y$

- Với $x = y$, từ (2) ta có: $4x^2 + x - 3 = 0$, ta được $x_1 = -1, x_2 = \dfrac{3}{4}$. Khi đó, $x_1 = y_1 = -1, x_2 = y_2 = \dfrac{3}{4}$.
- Với $x = -2y$, từ (2) ta có $y^2 - 2y - 3 = 0$, ta được $y_1 = -1, y_2 = 3$ Nếu $y = -1 \Rightarrow x = 2$. Nếu $y = 3 \Rightarrow x = -6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là: $(-1;-1); \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{4}\right); (2;-1); (-6;)$.

Câu 3. Tìm các số tự nhiên n để $A = n^{2018} + n^{2008} + 1$ là số nguyên tố.
Lời giải.
Tìm số tự nhiên để $A = n^{2018} + n^{2008} + 1$ là số nguyên tố.

- Xét $n = 0$ thì $A = 1$ không là số nguyên tố;
- Xét $n = 1$ thì $A = 3$ là số nguyên tố.
- Xét $n > 1$, ta thấy $A > n^2 + n + 1$

$$\begin{aligned} A &= n^{2018} - n^2 + n^{2008} - n + n^2 + n + 1 \\ &= n^2((n^3)^{672} - 1) + n.((n^3)^{669} - 1) + (n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

mà $(n^3)^{672} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1$, suy ra $(n^3)^{672} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$.
Tương tự: $(n^3)^{669}$˘1 chia hết cho $n^2 + n + 1$
Khi đó A chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$ và $A > n^2 + n + 1$ nên A là hợp số.
Tóm lại số tự nhiên cần tìm là $n = 1$.

Câu 4. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB, M là một điểm tùy ý thuộc đường tròn (M khác A và B). Qua A và B lần lượt kẻ các đường thẳng d và d' là tiếp tuyến với đường tròn. Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt d và d' lần lượt tại C và D. Đường thẳng BM cắt d tại E.

a) Chứng minh $CM = CA = CE$.

b) Chứng minh $AD \perp OE$.

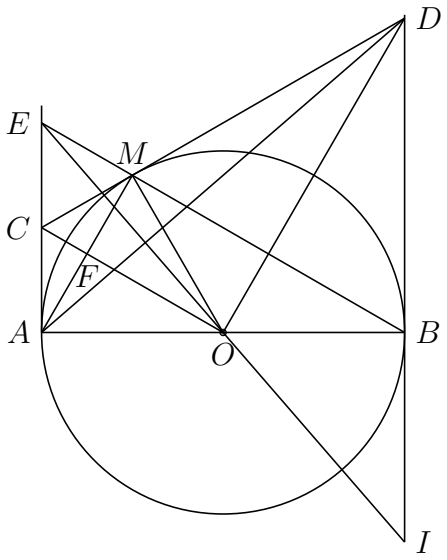
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

c) Tính độ dài đoạn AM theo R, nếu $AE = BD$.

Lời giải.

1. Gọi F là giao điểm của OC và AM, ta có $OC \perp AM$.
Ta có, $CM = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
Hai tam giác vuông AME và AFC đồng dạng, nên $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AM}{AF} = 2 \Rightarrow AE = 2AC \Rightarrow AC = CE$.
Vậy $CM = CA = CE$.

2. Gọi giao điểm của EO với d' là I, Chứng minh được $AEBI$ là hình bình hành $\Rightarrow BE \parallel AI$.
Ta có, $OD \perp BE$, $OD \perp AI$ mà $AB \perp DI \Rightarrow$ O là trực tâm của $\Delta ADI \Rightarrow OI \perp AD \Rightarrow OE \perp AD$ (đpcm).



3. Tam giác COD vuông tại O (vì OC, OD là hai phân giác của hai góc kề bù), có OM là đường cao nên $OM^2 = CM.MD$.
Theo phần 1, ta có $EC = CA = CM \Rightarrow 2CM = AE$,
mà $BD = MD v AE = BD(gt) \Rightarrow 2CM = MD$.
$\Rightarrow 2CM^2 = R^2$ (do $MO = R$ và $OM^2 = CM.MD$)
$\Rightarrow CM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AE = R\sqrt{2}$ (do $AE = 2CM$).

Do trong giác vuông AEB tại A, ta có $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AM = \dfrac{AE.AB}{\sqrt{AE^2 + AB^2}} = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5. Cho $a;\ b$ thoả mãn $|a| \geq 2;\ |b| \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1) \geq (a+b)(ab+1) + 5$$

Lời giải.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} M &= (a^2+1)(b^2+1) - (a+b)(ab+1) - 5 \\ &= (a^2b^2 - a^2b - ab^2 + ab) + (a^2 + b^2 - a - b - ab) - 4 \\ &= ab(a-1)(b-1) + \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + a(a-2) + b(b-2)\right] - 4 \end{aligned}$$

Chỉ ra với $|a| \geq 2$ thì $a(a-1) \geq 2$ và $a(a-2) \geq 0$ $|b| \geq 2$ thì $b(b-1) \geq 2$ và $b(b-2) \geq 0$ nên $ab(a-1)(b-1) \geq 4$; $\dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2 + a(a-2) + b(b-2)\right] \geq 0 \Rightarrow M \geq 0$ hay $(a^2+1)(b^2+1) \geq (a+b)(ab+1) + 5$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 120

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC ĐỒNG THÁP, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. (1,5 điểm)

a. Cho biểu thức $Q=\dfrac{(x^2-x-6)(x^2+2x-3)}{(x^2-9)(x+2)^2}$ với $x\neq -2, x\neq \pm 3$. Rút gọn Q và tính giá trị biểu thức Q khi $x=\dfrac{3}{2}$.

b. Giải phương trình $3\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{1}{2}(2x^3+x^2+2x+1)$.

Lời giải.

a. Ta có $Q=\dfrac{(x+2)(x-3)(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+2)^2}=\dfrac{x-1}{x+2}$.

Khi $x=\dfrac{3}{2}$ thì $Q=\dfrac{\dfrac{3}{2}-1}{\dfrac{3}{2}+2}=\dfrac{1}{7}$.

b. $3\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{1}{2}(2x^3+x^2+2x+1)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}}=\dfrac{1}{2}(x^2+1)(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\geq 0\\ 3\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}+x+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}(x^2+1)(2x+1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{1}{2}\\ 3\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}=(x^2+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{1}{2}\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x^2+1-3)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-\dfrac{1}{2}; x=\sqrt{2}$.

Câu 2. (1,5 điểm)

a. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+y+xy=11\\ x^2+y^2+xy=19\end{cases}$.

b. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y - 2m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để (P) cắt d tại hai điểm A và B sao cho tam giá AOB đều và tính diện tích tam giác đó.

Lời giải.

a. $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+y^2+xy=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=11 \\ (x+y)^2-xy=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=11 \\ (x+y)^2+x+y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=11 \\ \left[\begin{array}{l} x+y=-6 \\ x+y=5 \end{array}\right. \end{cases}$.

Với $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=17 \end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Với $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $x^2 = 2m - 1$. d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$.

Giả sử $A\left(-\sqrt{2m-1}; 2m-1\right)$ và $B\left(\sqrt{2m-1}; 2m-1\right)$.

Ta có: $OA = \sqrt{2m-1+(2m-1)^2} = \sqrt{4m^2-2m}, OB = \sqrt{4m^2-2m}, AB = 2\sqrt{2m-1}$.

Dễ thấy $OA = OB$, nên tam giác AOB đều khi $OA^2 = AB^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 2m = 4(2m-1) \Leftrightarrow 4m^2 - 10m + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ thỏa mãn} \\ m = \dfrac{1}{2} \text{ loại} \end{array}\right.$.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. (2,0 điểm)

a. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x - 3 = 0$ (m là tham số). Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m và $H = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của H.

b. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2$$

Lời giải.

a. Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 1$ và $x_1x_2 = -3$.

Từ $H = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 = (2m+1)^2 - 8(-3) = (2m+1)^2 + 24 \geq 24$.

Vậy $\min H = 24$ khi $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

b. Từ giả thiết ta có $0 < x, y, z < 1$. Do đó, theo bất đẳng tức Cô-si ta có:

$\sqrt{x^2(1-x^2)} \leq \dfrac{x^2+1-x^2}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Nên $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2(1-x^2)}} \geq 2x^3$. Chứng minh tương tự ta cũng có:

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \geq 2y^3$ và $\dfrac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2z^3$.
Cộng vế theo vế ta được:
$\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2(x^3+y^3+z^3) = 2$. Ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. (2,0 điểm)

a. Để tạo sân chơi cho học sinh tham gia các hoạt động tìm hiểu về hình ảnh và con người Đồng Tháp, Đoàn Thanh Niên Cộng Sản Hồ Chí Minh của một trường đã tổ chức hội thi Đồng Tháp trong trái tim tôi với các nội dung về hoạt động khởi nghiệp, du lịch trải nghiệm những địa danh, nét văn hóa đặc trưng làng nghề, các món ăn, cây trái ...của tỉnh. Sau hai vòng thi Ban Tổ Chức đã chọn ra ba đội xuất sắc là Hoa Sen, Hoa Súng, Hoa Tràm vào thi chung kết. Theo qui định của Ban Tổ Chức Hội Thi, mỗi đội phải trả lời 12 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được cộng 10 điểm, mỗi câu trả lời sai trừ 3 điểm, mỗi câu không trả lời thì không được điểm. Trải qua các câu hỏi thì, đội Hoa Sen được 61 điểm. Hỏi đội Hoa Sen đã trả lời đúng, sai và không trả lời bao nhiêu câu hỏi?

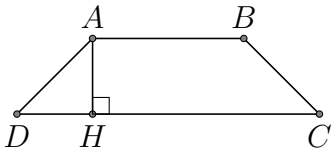
b. Thực hiện đổi mới phương pháp dạy học, đổi mới kiểm tra đánh giá theo hướng phát triển năng lực học sinh, trong một tiết dạy hình học, một giáo viên đã ứng dụng công nghệ thông tin, sử dụng phần mềm biểu diễn cho học sinh quan sát trực quan. Cụ thể: Hình thang cân $ABCD$ (AB song song với CD), có $AB = 30$ cm, $CD = 54$ cm và đường cao $AH = 9$ cm. Cho hình thang này quay quanh cạnh đáy CD. Em hãy giúp bạn tính:

- Thể tích của hình tạo thành.
- Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành.

Lời giải.

a. Mỗi câu trả lời đúng được 10 điểm và sai bị trừ 3 điểm.
Trải qua các vòng đấu đội Hoa Sen được 61 điểm nên số câu trả lời đúng của đội là 7 câu, bị sai 3 câu và không trả lời 2 câu.

b. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình khi quanh xung quanh cạnh CD.



- Thể tích của hình tạo thành.
Ta có $V = \dfrac{2}{3}DH.\pi.AH^2 + AB.\pi.AH^2 = \dfrac{2}{3}.12.9^2\pi + 30.9^2\pi = 3078\pi$ (đvtt)

- Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành.
Ta có: $AD = \sqrt{HD^2 + AH^2} = \sqrt{235}$.
$S_{xq} = 2.\pi.AH.AD + 2\pi.AH.AB = 2\pi.AH(AD+AB) = 18\pi(30+\sqrt{235})$ (đvdt)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại đỉnh A có phân giác trong AM (M thuộc BC) và $\widehat{ABC} = 60°$. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với cạnh BC cắt đoạn thẳng AC tại N, cắt đường thẳng AB tại P.

a) Chứng minh tứ giác $PAMC$ nội tiếp trong một đường tròn và tam giác PMC vuông cân.

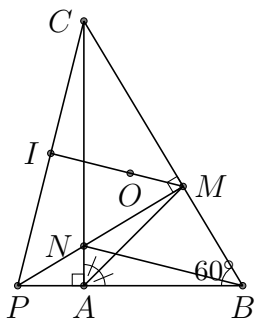
b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, I là trung điểm của đoạn PC. Chứng minh ba điểm M, O, I thẳng hàng và MO song song với BN.

c) Chứng minh $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$.

d) Khi $AB = 3$ cm. Hãy tính diện tích tam giác PBC.

Lời giải.

a) Chứng minh tứ giác $PAMC$ nội tiếp trong một đường tròn và tam giác PMC vuông cân.



Cách 1:Xét hai tam giác PMB và CAB có $\widehat{PMB} = \widehat{CAB} = 90°$. (1)
Lại có $\widehat{ACB} = 90° - 60° = 30°$, mà $\widehat{MNC} = \widehat{ANP} = 60° \Rightarrow \widehat{NPA} = 30° = \widehat{ACB}$. (2)
Góc B chung. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta có $\Delta PMB \backsim \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BM}{BA} \Leftrightarrow BM.BC = BP.BA$.
Suy ra: Tứ giác $PAMC$ nội tiếp đường tròn.
Cách 2: Ta có $\widehat{PMC} = \widehat{PAC} = 90°$. Do đó tứ giác $PAMC$ nội tiếp đường tròn tâm I là trung điểm của PC. Suy ra $\widehat{PCM} = \widehat{MAB} = 45°$.
Vậy tam giác PMC vuông cân tại M.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, I là trung điểm của đoạn PC. Chứng minh ba điểm M, O, I thẳng hàng và MO song song với BN.
Theo câu trên ΔMPC vuông cân tại M và I là trung điểm PC nên có ngay MI là đường trung trực của CP. Suy ra I, M, O thẳng hàng.
Mặt khác: $\begin{cases} CA \perp PB \\ PM \perp BC \\ CA \cap PM = N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BN \perp PC \\ MO \perp PC \end{cases} \Rightarrow MO \parallel BN.$

c) Chứng minh $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$.
Ta có:$\widehat{PCN} = 15° \Rightarrow \widehat{PNC} = 180° - (\widehat{PCN} + \widehat{CPN}) = 120°$. (4)
Mặt khác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, nên $\widehat{PBC} = \dfrac{1}{2}\widehat{POC} \Rightarrow \widehat{POC} = 2\widehat{PBC} = 120°$. (5)
Từ (4) và (5) ta có $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$.

d) Khi $AB = 3$ cm. Hãy tính diện tích tam giác PBC.

Ta có $CA = AB \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$ và $BC = \dfrac{AB}{\cos 60^\circ} = 6$.

Theo giả thiết thì AM là đường phân giác nên

$\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{MC}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{BC - MB}{AC} \Leftrightarrow MB(AC + AB) = BC.AB$

$\Leftrightarrow MB = \dfrac{AB.BC}{AB + AC} = \dfrac{3.6}{3\sqrt{3} + 3} = \dfrac{6}{1 + \sqrt{3}} = 3(\sqrt{3} - 1)$.

Lại có $BP = \dfrac{BM}{\cos 60^\circ} = 6(\sqrt{3} - 1)$.

Vậy $S_{PBC} = \dfrac{1}{2}.3\sqrt{3}.6(\sqrt{3} - 1) = 9(3 - \sqrt{3})$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 121

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC ĐẮK LẮK, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $f(x)=x^2-(2m+3)x+m^2-1$ (m là tham số).

1. Tìm giá trị của m để phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.
2. Tìm giá trị của x để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $\dfrac{2017}{4}$.

Lời giải.

1. Phương trình: $x^2-(2m+3)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases}\Delta>0\\ P=\dfrac{c}{a}>0\\ S=-\dfrac{b}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12m+13>0\\ 2m+3>0\\ m^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ -\dfrac{13}{12}<m<-1\end{array}\right.$$
2. Ta có:
$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-(2m+3)x+m^2-1=x^2-2x.\frac{2m+3}{2}+\left(\frac{2m+3}{2}\right)^2-\frac{12m+13}{4}\\&=\left(x-\frac{2m+3}{2}\right)^2-\frac{12m+13}{4}\geq-\frac{12m+13}{4}\end{aligned}$$
Do đó GTNN của $f(x)$ là $\dfrac{2017}{4}\Leftrightarrow-\dfrac{12m+13}{4}=\dfrac{2017}{4}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1015}{6}$.

Câu 2.

1. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}-x-1+\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x^2+2x}}=0$.
2. Giải phương trình: $\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+2}\right)\left(1+\sqrt{9x^2+18x+8}\right)=2$.

Lời giải.

1. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>0\end{array}\right.$. Khi đó:
$$\sqrt{x^2+2x}-x-1+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2+2x}}=0\Leftrightarrow x^2+2x-(x+1)\sqrt{x^2+2x}+2(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-(x-1)\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+2x}+2(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x}\left(\sqrt{x^2+2x}-x+1\right)-2\left(\sqrt{x^2+2x}-x+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+2x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+2x}-x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x}=2\\ \sqrt{x^2+2x}=x-1\end{array}\right.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

- $\sqrt{x^2+2x}=2 \Leftrightarrow x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{5} \\ x=-1+\sqrt{5} \end{array}\right.$ (TMĐK).
- $\sqrt{x^2+2x}=x-1\ (x\geq 1) \Leftrightarrow x^2+2x=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (Loại).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1-\sqrt{5};-1+\sqrt{5}\right\}$.

2. Điều kiện: $x\geq -\dfrac{2}{3}$. Khi đó:
$\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+2}\right)\left(1+\sqrt{9x^2+18x+8}\right)=2$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+2}\right)\left(1+\sqrt{9x^2+18x+8}\right)=\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+2}\right)\left(\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x+2}\right)$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+2}=0 \\ 1+\sqrt{9x^2+18x+8}=\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x+2} \end{array}\right.$.

- $\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x+2}}=0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.
- $1+\sqrt{9x^2+18x+8}=\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x+2}$
$\Leftrightarrow 1+\sqrt{(3x+4)(3x+2)}-\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+2}=0$
$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{3x+4}\right)\left(1-\sqrt{3x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x+4}=1 \\ \sqrt{3x+2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (loại)} \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 3.

1. Tìm các số nguyên tố p sao cho $13p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.
2. Tìm hai số x,y nguyên dương sao cho $(x+2)^2-6(y-1)^2+xy=24$.

Lời giải.

1. Giả sử $13p+1=a^3\ (a\in\mathbb{N}, a\geq 3)$.
Phương trình $\Leftrightarrow 13p=(a-1)(a^2+a+1)$.
Do 13 và p đều là các số nguyên tố, nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:
$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a-1=13 \\ a^2+a+1=p \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a-1=p \\ a^2+a+1=13 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a=14 \\ p=211 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a-1=p \\ (a-3)(a+4)=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p=2 \\ a=3 \end{array}\right.$.
Vậy $p=2$ hoặc $p=211$.

2. Ta có:
$(x+2)^2-6(y-1)^2+xy=24 \Leftrightarrow x^2+4x-6y^2+12y+xy=26$
$\Leftrightarrow \left(x^2-2xy+4x\right)+\left(3xy-6y^2+12y\right)=26 \Leftrightarrow x(x-2y+4)+3y(x-2y+4)=26$
$\Leftrightarrow (x-2y+4)(x+3y)=2.13=1.26$
Vì x,y nguyên dương do đó $x+3y$ nguyên dương nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- $\begin{cases} x+3y=1 \\ x-2y+4=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ x-2y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{68}{5} \\ y=-\dfrac{21}{5} \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} x+3y=26 \\ x-2y+4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=26 \\ x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{43}{5} \\ y=\dfrac{29}{5} \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} x+3y=2 \\ x-2y+4=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ x-2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{31}{5} \\ y=\dfrac{7}{5} \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} x+3y=13 \\ x-2y+4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=13 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ (nhận).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất: $(x;y)=(4;3)$.

Câu 4.

1. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{4c}{a+b}>2$.
2. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=11 \\ ab+bc+ca=7 \end{cases}$.

   Chứng minh: $\dfrac{1}{3}\le a,b,c\le 3$.

Lời giải.

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz dạng Engel và bất đẳng thức Cô-si ta có:
$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}&=\frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{4c^2}{ca+bc}\ge\frac{(a+b+2c)^2}{2(ab+bc+ca)}\\&=\frac{(a+b)^2+4c(a+b)+4c^2}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{4ab+4ac+4bc+4c^2}{2(ab+bc+ca)}\\&=2+\frac{c^2}{ab+bc+ca}>2\ (\text{do c>0}).\end{aligned}$$

2. Từ giả thiết ta có:
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\Rightarrow a+b+c=5$

$\Rightarrow b+c=5-a\Rightarrow bc\le\dfrac{(5-a)^2}{4}$

$\circ\ ab+bc+ca=7\Rightarrow a(b+c)=7-bc\Rightarrow a(5-a)=7-bc$

$\Rightarrow a(5-a)\ge 7-\dfrac{(5-a)^2}{4}\Leftrightarrow -3a^2+10a-3\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le a\le 3$

Do vai trò của a,b,c là bình đẳng và đối xứng nên ta có: $\dfrac{1}{3}\le a,b,c\le 3$.

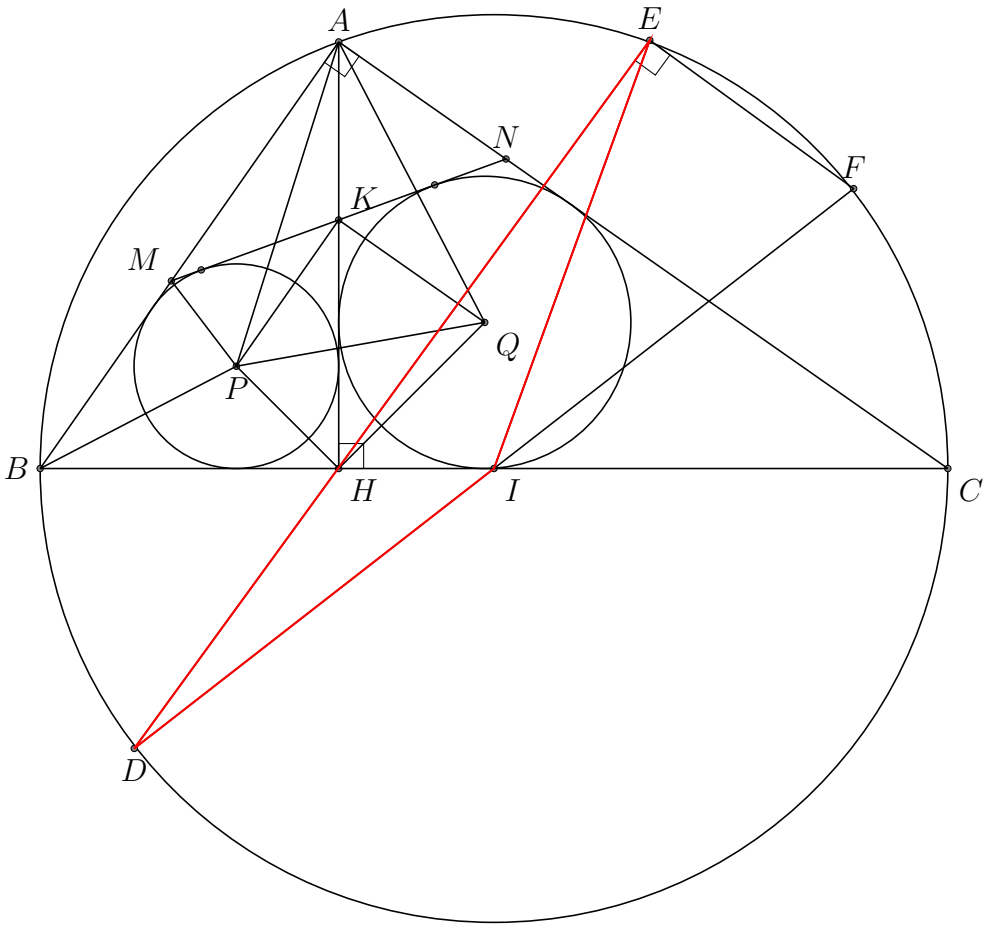
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi (P) và (Q) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp của tam giác AHB và tam giác AHC. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài (khác BC) của hai đường tròn (P) và (Q), cắt AB, AH, AC theo thứ tự ở M, K, N.

1. Chứng minh tam giác HPQ đồng dạng với tam giác ABC.
2. Chứng minh $PK \parallel AB$ và tứ giác $BMNC$ là tứ giác nội tiếp.
3. Chứng minh năm điểm A, M, P, Q, N cùng nằm trên một đường tròn.
4. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $AB = a, AC = 3a$. Một đường thẳng thay đổi đi qua H cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D và E. Tính giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IDE theo a.

Lời giải.



1. Do P, Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH, AHC
$\Rightarrow HP, HQ$ lần lượt là các đường phân giác của góc $\widehat{BHA}, \widehat{CHA} \Rightarrow \widehat{PHQ} = 90^\circ$ (1).
Ta có: $\Delta ABH \backsim \Delta CBA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{AC}{AB}$ (2).

Mặt khác: $\widehat{ABH} = \widehat{HAC} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{PBH} = \widehat{HAQ} \\ \widehat{BHP} = \widehat{AHQ} = 45^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta PBH \backsim \Delta QAH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{QH}{PH}$ (3).

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \Delta HPQ \backsim \Delta ABC$.

2. MN, AH là các tiếp tuyến chung của $(P), (Q) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MKP} = \widehat{PKH} \\ \widehat{HKQ} = \widehat{QKN} \end{cases} \Rightarrow \widehat{PKQ} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $PKQH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PKH} = \widehat{PQH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{PH}$).

Theo chứng minh trên: $\widehat{PQH} = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{PKH} = \widehat{BCA}$.

Suy ra: $\widehat{PKH} = \widehat{BAH}$. Do hai góc bằng nhau và ở vị trí sole trong nên: $PK \parallel AB$.

$\circ$ Ta có: $\widehat{BMN} + \widehat{ACB} = \widehat{MAK} + \widehat{MKA} + \widehat{ACB} = \widehat{MKP} + \widehat{MKA} + \widehat{PKH} = 180^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

3. AB, MN là các tiếp tuyến của đường tròn (P).

Ta có: $\begin{cases} \widehat{PMK} = \dfrac{\widehat{BMN}}{2} \\ \widehat{MAP} = \dfrac{\widehat{MAH}}{2} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2} \end{cases}$.

Mà $\widehat{BMN} + \widehat{BCA} = 180^\circ$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{PMK} + \widehat{MAP} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra: $\widehat{PAN} = \widehat{PMN}$ hay tứ giác $MPNA$ nội tiếp một đường tròn.

Chứng minh tương tự ta cũng có tứ giác $AMQN$ nội tiếp một đường tròn.

Vậy 5 điểm A, M, Q, N, P cùng thuộc một đường tròn.

4. Kẻ đường kính DF của (I).

Ta có: $DF^2 = BC^2 = 10a^2$ và $\widehat{DEF} = 90^\circ$.

$S_{\Delta IDE} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta DEF} = \dfrac{1}{4} ED.EF \le \dfrac{1}{4} \dfrac{ED^2 + EF^2}{2} = \dfrac{DF^2}{8} = \dfrac{5a^2}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IDE là $\dfrac{5a^2}{4}$.

Dấu "=" xảy ra$\Leftrightarrow ED = EF \Leftrightarrow \Delta DEF$ vuông cân tại $E \Leftrightarrow \Delta DIE$ vuông cân tại I.

Khi đó E, D là giao điểm của quỹ tích cung chứa góc 45° dựng trên IH (cố định) và đường tròn tâm (I).

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 122

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, VÒNG 2, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải phương trình

a) $(x-1)^2+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{5}{2}$.

b) $3x\sqrt{x^2+x+1}=3x^2+x+1$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình $x^2-2x+1+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{5}{2}$. Đặt $t=x^2-2x+3\geq 2$. Phương trình trở thành $t^2-\dfrac{9}{2}t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4,\\ t=\dfrac{1}{2}\ \text{(không thỏa mãn)}\end{array}\right.$.

Suy ra $x^2-2x+3=4\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$.

b)

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3x\sqrt{x^2+x+1}=2x^2+(x^2+x+1)$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)^2-3\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}+1=0.$

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$, phương trình trở thành $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta có $x=\sqrt{x^2+x+1}$ (Vô nghiệm).

Với $t=\dfrac{1}{2}$, ta có $2x=\sqrt{x^2+x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0\\ 4x^2=x^2+x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=2y+\dfrac{1}{y}\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1\end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq 1, y\leq 2, y\neq 0$. Phương trình đầu tương đương với

$$x^2y+2y=2y^2+x\Leftrightarrow (x-2y)(xy-1)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0\\ xy-1=0\end{cases}.$$

Với $x=2y$, thay vào phương trình còn lại ta được

$$\sqrt{2y-1}+\sqrt{2-y}=1\Leftrightarrow 2\sqrt{(2y-1)(2-y)}=-y\ \text{(Vô nghiệm)}.$$

Với $y=\dfrac{1}{x}$, thay vào phương trình còn lại ta được $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}=1$. Vì $x\geq 1$ nên $VT\geq 1=VP$, do đó $x=1$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Câu 3. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn $a<b<c$ sao cho đa thức $P(x)=x(x+a)(x+b)(x+c)+1$ là bình phương của một đa thức có hệ số nguyên.

Lời giải.

Do đa thức $P(x)$ có bậc cao nhất là 4 và hệ số của nó là 1, nên ta có thể giả sử $P(x)=(x^2+mx+n)^2$ với $m,n\in\mathbb{Z}$.

Từ $P(0)=1$, suy ra $n=\pm1$.

Với $n=1$, ta có $x(x+a)(x+b)(x+c)+1=(x+mx+1)^2\Leftrightarrow x(x+a)(x+b)(x+c)=x(x+m)(x^2+mx+2)$. Suy ra $m>0$ và phương trình $x^2+mx+2=0$ có hai nghiệm nguyên âm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=m^2-8=k^2,k\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow(m+k)(m-k)=8$. Do $m>k>0$ và cùng chẵn nên

$\begin{cases}m+k=4\\m-k=2\end{cases}$. Suy ra $m=3$. Vậy $P(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$.

Với $n=-1$, tương tự ta có

$$x(x+a)(x+b)(x+c)=x(x+m)(x^2+mx-2)$$

Vì phương trình $x^2+mx-2=0$ có nghiệm nguyên âm nên trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy $(a;b;c)=(1;2;3)$.

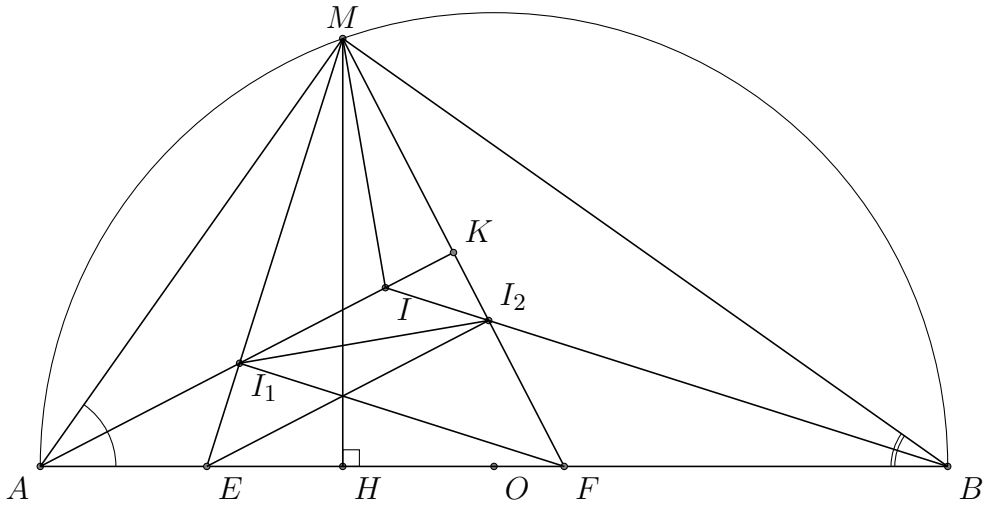
Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và điểm M nằm trên nửa đường tròn đó (M khác A và B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AB. Gọi I,I_1,I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác MAB,MAH,MBH. Các đường thẳng MI_1,MI_2 cắt AB tương ứng tại E và F.

a) Chứng minh rằng $AI_1\perp MI_2$ và $MI\perp I_1I_2$.

b) Chứng minh rằng EFI_2I_1 là tứ giác nội tiếp đường tròn và các đường thẳng MH,EI_2,FI_1 đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của I_1I_2 theo R khi M thay đổi trên nửa đường tròn đã cho.

Lời giải.



Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Gọi $K = AI_1 \cap MF$. Vì $\widehat{MAB} = \widehat{BMH}$ (cùng phụ với $\widehat{MBA}$), suy ra $\widehat{MAK} = \widehat{BMF}$. Mà $\widehat{BMF} + \widehat{AMF} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{MAK} + \widehat{AMF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$ hay $AI_1 \perp MI_2$.

Tương tự $BI_2 \perp MI_1$, suy ra I là trực tâm của tam giác MI_1I_2 hay $MI \perp I_1I_2$.

b) Vì có AK vừa là đường cao vừa là phân giác nên tam giác AMF cân tại A. Suy ra K là trung điểm của MF. Vì $\widehat{EMF} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMB} = 45^\circ$ và $\widehat{I_1KM} = 90^\circ$ nên tam giác MI_1F vuông cân tại K.

Suy ra $MI_1 = \sqrt{2}MK = \dfrac{MF}{\sqrt{2}}$. Tương tự ta có $MI_2 = \dfrac{ME}{\sqrt{2}}$. Suy ra $\dfrac{MI_1}{MF} = \dfrac{MI_2}{ME} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta MI_1I_2 \backsim \Delta MFE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MI_1I_2} = \widehat{MFE} \Rightarrow$ tứ giác EFI_2I_1 nội tiếp.

Vì $\dfrac{MI_1}{MF} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $\widehat{I_1MF} = 45^\circ$ nên tam giác MI_1F vuông cân tại $I_1 \Rightarrow \widehat{MI_1F} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FI_1E} = 90^\circ$. Tương tự ta cũng có $\widehat{EI_2F} = 90^\circ$. Suy ra MH, EI_2, FI_1 là các đường cao của tam giác MEF, nên MH, EI_2, FI_1 đồng quy.

c) Vì tam giác AMF cân tại A nên $AF = AM$. Tương tự $BE = BM$. Suy ra $EF = AF + BE - AB = AM + BM - AB \le \sqrt{2(AM^2 + BM^2)} - AB = \sqrt{2AB^2} - AB = 2R(\sqrt{2} - 1)$.

Từ câu b) ta có $\dfrac{I_1I_2}{EF} = \dfrac{MI_1}{MF} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $I_1I_2 = \dfrac{EF}{\sqrt{2}} \le \dfrac{2R(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = (2 - \sqrt{2})R$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $AM = BM$ hay M là điểm chính giữa AB. Vậy giá trị lớn nhất của I_1I_2 là $(2 - \sqrt{2})R$.

Câu 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \le a, b, c \le 2$. Tìm giá trị lơn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{(a + b + c)^3}{3(a^3 + b^3 + c^3)}.$$

Lời giải.

Ta có $3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = (a-b)(a^2-b^2)+(b-c)(b^2-c^2)+(c-a)(c^2-a^2) \ge 0$. Suy ra $3(a^3 + b^3 + c^3) \ge (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$. Do đó

$$\begin{aligned} P &\le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{(a + b + c)^3}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 1 \end{aligned}$$

Đặt $t = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}, t \ge 1$, khi đó $P \le t + \dfrac{2}{t} + 1$.

Vì $a, b, c \in [1, 2]$, nên $a + b \ge c, b + c \ge a, c + a \ge b$. Suy ra $c(a + b) + a(b + c) + b(c + a) \ge a^2 + b^2 + c^2$, hay $t \le 2$. Từ $t \in [1; 2]$ ta nhận được $(t - 1)(t - 2) \le 0 \Leftrightarrow t + \dfrac{2}{t} + 1 \le 4$. Dấu đẳng thức khi $a = b = c$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 123

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, VÒNG 1, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=5$, $ab=2$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}A&=\left(a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b+\sqrt{ab}\right)\\&=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\\&=(a-b)^2=(a+b)^2-4ab.\end{aligned}$$

Thay $a+b=5$, $ab=2$ vào A ta được $A=17$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2mx+m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2(x_1+x_2)+x_1^2x_2^2=0$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-m+1>0$. Vì $m^2-m+1>0$ với mọi $m\in\mathbb{R}$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, kí hiệu x_1, x_2.

Áp dụng định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m,\\x_1x_2=m-1.\end{cases}$

Do đó, $2(x_1+x_2)+x_1^2x_2^2=0\Leftrightarrow 4m+(m-1)^2=0\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy=36\\y^2+yx=45.\end{cases}$

b) Giải phương trình $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{2x^2+11x-2}$.

Lời giải.

a) Cộng hai phương trình theo vế của hệ ta được $x^2+2xy+y^2=81\Leftrightarrow(x+y)^2=81$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=9\\x+y=-9.\end{array}\right.$

* Với $x+y=9\Leftrightarrow y=9-x$ thay vào phương trình $x^2+xy=36$ ta được $x^2+x(9-x)=36\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=5$.

* Tương tự, với $x+y=-9$ ta được $x=-4, y=-5$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là $(4;5)$ và $(-4;-5)$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1, \\ 2x^2+11x-2 \geq 0. \end{cases}$ Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương

$$4\sqrt{2x^2+5x+3} = 2x^2+5x-9 \Leftrightarrow t^2-4t-12 = 0 \, (t = \sqrt{2x^2+5x+3} \geq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = -2 (\text{loại}) \end{array}\right. .$$

Với $t = 6 \Leftrightarrow 2x^2+5x-33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{11}{2} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x = 3$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, vẽ hình bình hành $BHCQ$.

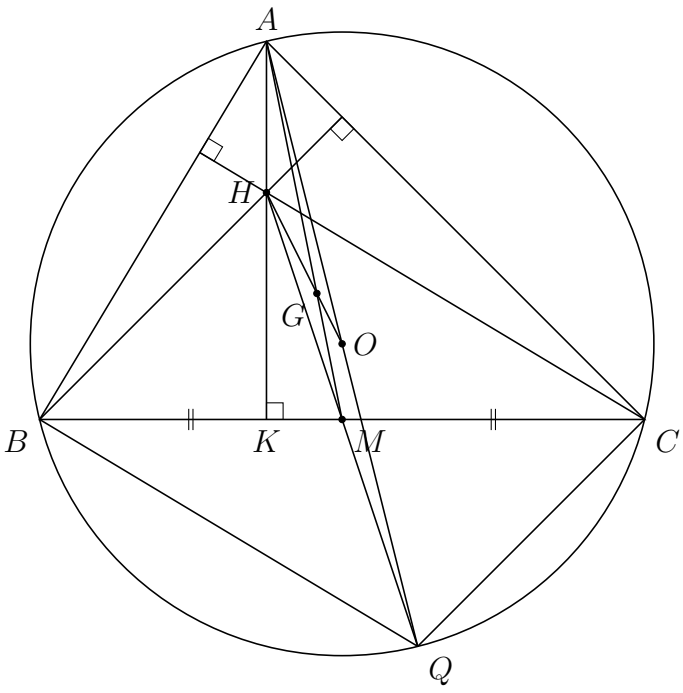
a) Chứng minh rằng $ABQC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$.

c) Gọi M là giao điểm của HQ và BC, G là giao điểm của AM với OH. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

d) Chứng minh rằng nếu OG song song với BC thì $\tan \widehat{AQB} \cdot \tan \widehat{AQC} = 3$.

Lời giải.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Vì tứ giác $BHCQ$ là hình bình hành nên $BH \parallel QC$, $CH \parallel BQ$ do đó, $AC \perp CQ$, $AB \perp BQ$. Từ đó suy ra $ABQC$ nội tiếp đường tròn đường kính AQ hay A, B, C, Q nằm trên đường tròn (O).

b) Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{AQC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$) mà $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = \widehat{CAO} + \widehat{AQC} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$.

c) Vì $BHCQ$ là hình bình hành nên M là trung điểm BC và HQ. Tam giác AHQ có M là trung điểm HQ, O là trung điểm AQ, OH cắt AM tại G nên nhận G làm trọng tâm. Suy ra $AG = \dfrac{2}{3}AM$ mà M là trung điểm BC do đó G cũng là trọng tâm tam giác ABC.

d) Ta có: $\tan\widehat{AQB} = \tan\widehat{ACB} = \dfrac{AK}{KC}$, $\tan\widehat{AQC} = \tan\widehat{ABC} = \dfrac{AK}{KB}$.

Lại có, $\Delta HBK \backsim \Delta CAK$ (g.g) nên $\dfrac{HB}{AC} = \dfrac{HK}{CK} = \dfrac{BK}{AK}$ suy ra $AK.HK = BK.CK$.

Do đó, $\tan\widehat{AQB} \cdot \tan\widehat{AQC} = \dfrac{AK}{HK} = \dfrac{AM}{GM} = 3$.

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$5(x + y + z) + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \geq 18.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được $x + \dfrac{1}{x^3} \geq \dfrac{2}{x}$. Ta chỉ cần chứng minh $4x + \dfrac{2}{x} \geq x^2 + 5$.

Thật vậy, $4x + \dfrac{2}{x} - x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) \leq 0$ (đúng, vì $x^2 < 3$ nên $x < 2$).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

ĐỀ SỐ 124

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BÌNH DƯƠNG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. (3 **điểm**)

a/ Giải phương trình: $x^2-3x+1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

b/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-|x| =|yz| \\ y^2-|y| =|xz| \\ z^2-|z| =|yx| \end{cases}$

Lời giải.

a/ Ta có: $x^2-3x+1=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1} \Leftrightarrow (x^2-x+1)-2x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

Đặt $a=x^2-x+1, b=x^2+x+1 \Leftrightarrow 2a-b=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{ab} \Rightarrow (2a-b)^2=\dfrac{ab}{3} \Rightarrow 12a^2-13ab+3b^2=$

$$0 \Rightarrow (4a-3b)(3a-b)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4a=3b \\ 3a=b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7x+1=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

b/ $\begin{cases} x^2-|x| =|yz| \\ y^2-|y| =|xz| \\ z^2-|z| =|yx| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|(|x|-1) =|yz| \\ |y|(|y|-1) =|xz| \\ |z|(|z|-1) =|yx| \end{cases} \Rightarrow |xyz|=(|x|-1)(|y|-1)(|z|-1)(xyz\neq 0)$(vô lý).

Lại có $(x,y,z)=(0,0,0)$ là một nghiệm của hệ. Với mọi $(x,y,z)=(0,a,b)$ hoặc $(x,y,z)=(0,0,b)$ đều không thoả mãn hệ; vai trò của x,y,z như nhau.

Kết luận: hệ có nghiệm duy nhất $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Câu 2. (1,5 **điểm**)

Với x,y là các số dương thoả mãn diều kiện $x\geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

Lời giải.

$$M=\frac{x^2+4y^2-3y^2}{xy} \geq \frac{4xy}{xy}-\frac{3y}{x} \neq 4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Kết luận: giá trị nhỏ nhất của $M=\dfrac{5}{2}$

Câu 3. (2 **điểm**)

a/ Cho a, b, c, d là các số thực thoả mãn: $b+d \neq 0; \dfrac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh phương trình $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=0$ ẩn x luôn có nghiệm.

b/ Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn: $x^2-y^2=xy+8$.

Lời giải.

a) Giả sử phương trình đã cho vô nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} a^2-4b<0 \\ c^2-4d<0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a^2+c^2}{b+d}<4$ mà $\dfrac{a^2+c^2}{b+d} \geq 4$.

Suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) $x^2-y^2=xy+8 \Rightarrow x^2-xy-(y^2+6)=0 \Rightarrow \Delta=y^2+4(y^2+8)=5y^2+32$. Để (x, y) là cặp số ngyên suy ra $\Delta=a^2$. a^2 là số chính phương nên chia cho 5 dư $0, 1, 4$ mà theo Δ, a^2 chia 5 dư 2. Vậy không có cặp số nào thoả mãn.

Câu 4. (3,5 **điểm**)

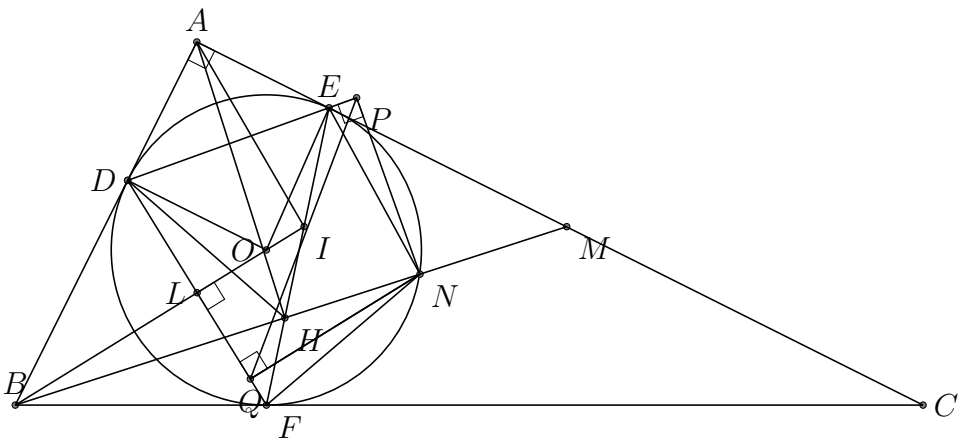
Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB<AC)$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của O với các cạnh AB, AC, BC; I là giao điểm của BO với EF, M là điểm di động trên đoạn CE.

a/ Tính số đo góc $\widehat{BIF}$.

b/ Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM=AB$ thì tứ giác $ABHI$ là tứ giác nội tiếp.

c/ Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ $\widehat{EF}$ của O; P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của N lên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của M để độ dài PQ lớn nhất.

Lời giải.



a/ Gọi L là giao của BO và $DF \Rightarrow \widehat{ILF}=90^\circ$

Dễ thấy $DAEO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{DFI}=\dfrac{1}{2}\widehat{DOE}=45^\circ$

Do đó: $\widehat{BIF}=45^\circ$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b/ $\triangle ABM$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABD} = 45^\circ$
Do đó: $\widehat{DBH} = \widehat{DFH} = 45^\circ \Rightarrow DBFH$ nội tiếp. Mà $ODBF$ nội tiếp $\Rightarrow B, D, O, H, F$ cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{OHB} = 90^\circ$.
Mà: $AO \perp BM$ nên $\widehat{BAH} = 45^\circ = \widehat{BIH} \Rightarrow ABHI$ nội tiếp.

c/ $NQDP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NPQ} = \widehat{NDQ} = \widehat{NDF} = \widehat{NEF}$.
Tương tự ta có: $\widehat{NQP} = \widehat{NFE} \Rightarrow \triangle NPQ \backsim \triangle NEF \Rightarrow \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NP}{NE} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$.
Đẳng thức xảy ra: $\Leftrightarrow P$ trùng E, Q trùng $F \Leftrightarrow PQ$ là đường kính của $(O) \Leftrightarrow M$ là giao của đường kính DN của O và AC.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 125

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BẮC NINH, BẮC NINH, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho các biểu thức $P=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0; x\neq 4$.

a) Rút gọn các biểu thức P và Q.

b) Tìm tất cả giá trị của x để $P=Q$.

Lời giải.

a) Ta có

$$P=\frac{(2x-4\sqrt{x})+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=2\sqrt{x}+1$$

và

$$Q=\frac{(x\sqrt{x}+2x)-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=x-1.$$

b) $P=Q\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-1)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1+\sqrt{3}\\ \sqrt{x}=1-\sqrt{3}\,(\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4+2\sqrt{3}.$

Câu 2.

a) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{4a+6b+2017c}{4a-6b+2017c}.$$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2y=xy+4\\ x^2-x+3-x\sqrt{6-x}=(y-3)\sqrt{y-3}\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

a) Áp dụng tích chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=\frac{a+b+c}{b+c+a}=1\Rightarrow a=b=c$$

Do đó

$$P=\frac{4a+6a+2017a}{4a-6a+2017a}=\frac{2027}{2015}.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Điều kiện $x \le 6; y \ge 3$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-2)(x+2-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ y=x+2 \end{array}\right.$$

◇ Với $x=2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $1=\sqrt{(y-3)^3} \Leftrightarrow y=4$.
◇ Với $y=x+2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^2-x+3=(x-1)\sqrt{x-1}+x\sqrt{6-x}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số thực dương ta có

$$(x-1)\sqrt{x-1}+x\sqrt{6-x} \le \frac{(x-1)^2+(x-1)}{2}+\frac{x^2+6-x}{2}=x^2-x+3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1=\sqrt{x-1} \\ x=\sqrt{6-x} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=4$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(2;4)$
Chú ý: Có thể trình bày lời giải phương trình trên bằng cách phân tích thành tổng của các bình phương.

Câu 3.

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}+\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}+\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}$$

b) Cho tam giác vuông có số đo các cạnh là các số tự nhiên có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đo cạnh huyền ta đươc số đo một cạnh góc vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Lời giải.

a) Ta có $\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}=\frac{(a^2+a)+(3a+3)+2a}{a(a+1)}=1+\frac{3}{a}+\frac{2}{a+1}$. Biến đổi tương tự với các biểu thức còn lại và cộng vế với vế ta được

$$M=3+3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+2\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}, \forall x, y, z>0$ suy ra

$$M \ge 3+\frac{27}{a+b+c}+\frac{18}{a+b+c+3}$$

Lại có $0<a+b+c \le 3$ nên $M \ge 3+\frac{27}{3}+\frac{18}{6}=15$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Vậy $\min M=15$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Giả sử tam giác đã cho là ABC vuông tại A, có $BC = \overline{ab}, AC = \overline{cd}, AB = \overline{ba}$ với $0 < b < a \leq 9; 1 \leq c \leq a; 0 \leq d \leq 9$. Theo định lí Pytagore thì

$$\overline{ab}^2 = \overline{cd}^2 + \overline{ba}^2 \Leftrightarrow \overline{cd}^2 = 99(a^2 - b^2)\ (*)$$

Suy ra

$$\overline{cd}^2 \vdots 33 \Rightarrow \begin{cases} \overline{cd}^2 \vdots 3 \\ \overline{cd}^2 \vdots 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{cd} \vdots 3 \\ \overline{cd} \vdots 11 \end{cases} \Rightarrow \overline{cd} \vdots 33 \Rightarrow \overline{cd} \in \{33, 66, 99\}$$

Mặt khác $\overline{cd} < \overline{ab} \leq 99$ nên $\overline{cd} = 33$ hoặc $\overline{cd} = 66$.
$\diamond$ Nếu $\overline{cd} = 66$ thì thay vào $(*)$ được $(a-b)(a+b) = 44$. Do $a-b; a+b$ cùng tính chẵn lẻ và $0 < a-b < a+b < 18$ nên không tồn tại a, b thỏa mãn.
$\diamond$ Nếu $\overline{cd} = 33$ thì thay vào $(*)$ suy ra $(a-b)(a+b) = 11$. Do $0 < a-b < a+b < 18$ nên $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=5 \end{cases}$.
Khi đó $AB = 56; AC = 33; AB = 65$, suy ra $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{AB.AC}{AB + BC + CA} = 12$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M. Kẻ đường cao BF của tam giác $ABC (F \in AC)$. Từ F kẻ đường thẳng song song với MA cắt AB tại E. Gọi H là giao điểm của CE và BF; D là giao điểm của AH và BC.

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MB.MC$ và $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$.

b) Chứng minh rằng AH vuông góc với BC tại D.

c) Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, D, I cùng nằm trên một đường tròn.

d) Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng H là trung điểm của PQ.

Lời giải.

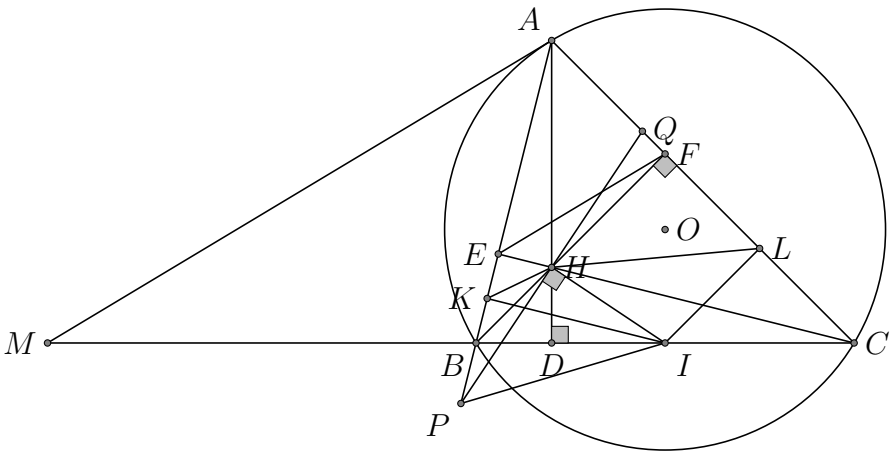
a) Ta có $\triangle MAB \backsim \triangle MCA$ (g.g) nên

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$$

và

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{MC^2}{MA^2} = \frac{MC^2}{MB.MC} = \frac{MC}{MB}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



b) Do $\widehat{MAE} = \widehat{AEF}$ (vì $AM \parallel EF$) và $\widehat{ACB} = \widehat{MAE}$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$) nên $\widehat{ACB} = \widehat{AEF}$, suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp.
Mà $\widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$ hay $CE \perp AB$. Do đó H là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

c) Vì $\triangle BFC$ vuông tại F nên $FI = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle BFI$ cân tại I. Do đó $\widehat{FIC} = 2\widehat{IBF}$.
Tứ giác $BEHD$ nội tiếp nên $\widehat{HBD} = \widehat{DEH}$ (1).
Tứ giác $AEHF$ nội tiếp nên $\widehat{HAF} = \widehat{HEF}$ (2).
Măt khác, $\widehat{HAF} = \widehat{HBD}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) (3).
Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{HBD} = \dfrac{1}{2}\widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{DEF}$.
Vậy bốn điểm E, F, I, D cùng thuộc một đường tròn.

d) Gọi K, L lần lượt là trung điểm của BE, FC. Suy ra IK là đường trung bình của tam giác $BEC \Rightarrow IK \parallel EC \Rightarrow IK \perp BE$.
Mặt khác $IH \perp HP$ nên tứ giác $PKHI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HPI} = \widehat{HKI}$.
Chứng minh tương tự được $\widehat{HQI} = \widehat{HLI}$.
Ta có $\widehat{HKE} + \widehat{HKE} = 90^\circ$ và $\widehat{HLI} + \widehat{HLF} = 90^\circ$ (4).
Lại có $\triangle HBE \backsim \triangle HCF \Rightarrow \dfrac{HE}{HF} = \dfrac{BE}{CF} \Rightarrow \dfrac{HE}{HF} = \dfrac{KE}{LF}$.
Mặt khác $\widehat{HEK} = \widehat{HFL}$ nên $\triangle HKE \backsim \triangle HLF$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{HKE} = \widehat{HLF}$. Kết hợp với (4) suy ra $\widehat{HKI} = \widehat{HLI} \Rightarrow \widehat{HPI} = \widehat{HQI}$, do đó $\triangle IPQ$ cân tại I. Mà $IH \perp PQ$ nên H là trung điểm PQ.

Câu 5. Cho $2n + 1$ số nguyên, trong đó có đúng một số 0 và các số $1, 2, 3, ..., n$ mỗi số xuất hiện hai lần. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn sắp xếp được $2n + 1$ số nguyên trên thành một dãy sao cho với mọi $m = 1, 2, ..., n$ có đúng m số nằm giữa hai số m.
Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Để ý rằng, với hai tập, mỗi tập gồm các số lẻ từ 1 đến $2k+1$ ta có thể sắp xếp sao cho thỏa mãn yêu cầu bài toán với một ô trống ở giữa, như sau:

$$2k+1; 2k-1; ...; 3; 1; \square; 1; 3; ...; 2k-1; 2k+1$$

Với hai tập, mỗi tập gồm các số chẵn từ 2 đến $2k$, ta có thể sắp xếp sao cho thỏa mãn yêu cầu bài toán với hai ô trống ở giữa, như sau:

$$2k; 2k-2; ...; 4; 2; \square; \square; 2; 4; ...; 2k-2; 2k$$

Như vậy, có hai trường hợp

- Với $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ cách xếp sau sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$2k+1; 2k-1; ...; 3; 1; 2k; 1; 3; ...; 2k-1; 2k+1; 2k-2; ...; 4; 2; 2k; 0; 2; 4; ...; 2k-2.$$

- Với $n = 2k, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ cách xếp sau sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$2k-1; ...; 3; 1; 2k; 1; 3; ...; 2k-1; 2k-2; ...; 4; 2; 0; 2k; 2; 4; ...; 2k-2.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 126

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẠC LIÊU, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho $n = 2018.2017^{2016} - 11^{2017} - 6^{2016}$. Chứng minh n chia hết cho 17.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

Lời giải.

a) Ta có $2017 \equiv 11 \mod 17 \Rightarrow 2017^{2016} \equiv 11^{2016} \mod 17$.
Mặt khác: $2018 \equiv 12 \mod 17$.
Suy ra $2018.2017^{2016} \equiv 12.11^{2016} \mod 17$.
Hay $2018.2017^{2016} \equiv (11+1).11^{2016} \equiv 11^{2017} + 11^{2016} \mod 17$.
Suy ra $2018.2017^{2016} - 11^{2017} \equiv 11^{2016} \mod 17$.
Suy ra $n = 2018.2017^{2016} - 11^{2017} - 6^{2016} \equiv 11^{2016} - 6^{2016} \mod 17$.
Ta lại có:

- $11^2 \equiv 2 \mod 17$, suy ra $11^{2016} = (11^2)^{1008} \equiv 2^{2008} \mod 17$.
- $6^2 \equiv 2 \mod 17$, suy ra $6^{2016} = (6^2)^{1008} \equiv 2^{2008} \mod 17$.

Do đó ta có $n \equiv 2^{1008} - 2^{1008} = 0 \mod 17$.
Vậy n chia hết cho 17.

b) **Cách 1.**

$$x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = -5x^2y^2 + 35xy - 60$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 = 5(-x^2y^2 + 7xy - 12). \qquad (*)$$

Vì $(x-y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ nên $-x^2y^2 + 7xy - 12 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. (1)
Đặt $t = xy, (t \in \mathbb{Z})$. Từ (1) ta có $-t^2 + 7t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 4$.
Mà $t \in \mathbb{Z}$ nên ta có $t = 3 \vee t = 4$ hay $xy = 3 \vee xy = 4$.
Khi đó $5(-x^2y^2 + 7xy - 12) = 0$ nên từ $(*)$ ta cũng có $(x-y)^2 = 0$ hay $x = y$.

- $\begin{cases} xy = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x = y \end{cases}$ (không tồn tại $x \in \mathbb{N}$).
- $\begin{cases} xy = 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$.

Vậy cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình trên là: $(2;2),(-2;-2)$.

Cách 2. Xét trường hợp $x,y\geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm x^2,y^2 ta có:

$$\begin{aligned}
&37xy\geqslant 2xy+5x^2y^2+60\\
\Leftrightarrow\ &35xy\geqslant 5x^2y^2+60\\
\Leftrightarrow\ &7xy\geqslant x^2y^2+12\\
\Rightarrow\ &8xy\geqslant x^2y^2+12\\
\Leftrightarrow\ &4\geqslant (xy-4)^2\\
\Leftrightarrow\ &2\geqslant xy-4\geqslant -2\\
\Leftrightarrow\ &6\geqslant xy\geqslant 2.
\end{aligned}$$

Suy ra, $xy\in\{2;3;4;5;6\}$.

Mặt khác, phương trình ban đầu tương đương với:

$$(x+y)^2=39xy-5x^2y^2-60. \qquad (*)$$

Ta xét các trường hợp:

- TH1: $xy=2$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2=-6$ (vô lí).
- TH2: $xy=3$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2=12$ (loại vì $(x+y)^2$ là số chính phương).
- TH3: $xy=4$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2=16$. Giải ra ta được $x=y=2$.
- TH4: $xy=5$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2=10$ (loại vì $(x+y)^2$ là số chính phương).
- TH5: $xy=6$. Từ $(*)$ suy ra $(x+y)^2=-6$ (vô lí).

Thử lại ta thấy $(x;y)=(2;2)$ là nghiệm của phương trình.

Do xy và $(-x).(-y)$ có vai trò như nhau trong phương trình ban đầu nên nghiệm của phương trình là $(2;2),(-2;-2)$.

Câu 2.

a) Cho $a=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}$. Chứng minh $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+2y^2-2y=x-3xy\\2x^2+y^2-17=3xy-x\end{cases}$.

Lời giải.

a) Đặt $b=\sqrt[3]{x^2}\geq 0, c=\sqrt[3]{y^2}\geq 0$. Bài toán trở thành:

Cho $a=\sqrt{b^3+b^2c}+\sqrt{c^3+bc^2}$ với b, c là hai số thực không âm. Chứng minh: $b+c=\sqrt[3]{a^2}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
a&=\sqrt{b^3+b^2c}+\sqrt[3]{c^3+bc^2}\\
&=\sqrt{b^2(b+c)}+\sqrt{c^2(b+c)}\\
&=b\sqrt{b+c}+c\sqrt{b+c}\quad (\text{do } b,c\geq 0)\\
&=(b+c)\sqrt{b+c}.
\end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Suy ra $a^2=(b+c)^3$ hay $b+c=\sqrt[3]{a^2}$.

b) Phương trình thứ nhất tương đương $(x+y-1)(x+2y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+y-1=0 & (1) \\ x+2y=0 & (2) \end{array}\right.$.

- $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$, thay vào phương trình (2), ta có:

$$3x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & \Rightarrow y=-1 \\ x=\dfrac{-4}{3} & \Rightarrow y=\dfrac{7}{3} \end{array}\right. .$$

- $x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$, thay vào phương trình (2), ta có:

$$15y^2-2y-17=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=\dfrac{17}{15} & \Rightarrow x=\dfrac{-34}{15} \\ y=-1 & \Rightarrow x=2 \end{array}\right. .$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là $(2;-1), \left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{7}{3}\right), \left(\dfrac{-34}{15};\dfrac{17}{15}\right)$.

Câu 3.

a) Cho phương trình: $x^4+2(m-3)x^2+3m+9=0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

b) Cho các số a,b,c thỏa mãn: $a\geq 1; b\geq 4; c\geq 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{bc\sqrt{a-1}+ac\sqrt{b-4}+ab\sqrt{c-9}}{abc}$$

Lời giải.

a) Đặt $t=x^2$ $(t\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2+2(m-3)t+3m+9=0. \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt. Điều này đồng nghĩa với:

$$\begin{cases} \Delta'=(m-3)^2-3m-9>0 \\ S=t_1+t_2=-2(m-3)>0 \\ P=t_1.t_2=3m+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>9 \\ m<0 \end{array}\right. \\ m<3 \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<0.$$

Vậy với $-3<m<0$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm dương phân biệt.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Ta có

$$M=\frac{\sqrt{a-1}}{a}+\frac{\sqrt{b-4}}{b}+\frac{\sqrt{c-9}}{c}$$

Do $a\geq 1; b\geq 4$ và $c\geq 9$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM với các cặp số không âm,ta có:

$$\begin{cases} a=(a-1)+1\geq 2\sqrt{a-1} & \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a-1}}{a}\leq \dfrac{1}{2}. \\ b=(b-4)+4\geq 4\sqrt{b-4} & \Rightarrow \dfrac{\sqrt{b-4}}{b}\leq \dfrac{1}{4}. \\ c=(c-9)+9\geq 6\sqrt{c-9} & \Rightarrow \dfrac{\sqrt{c-9}}{c}\leq \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Do đó $M\leq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{11}{12}$.

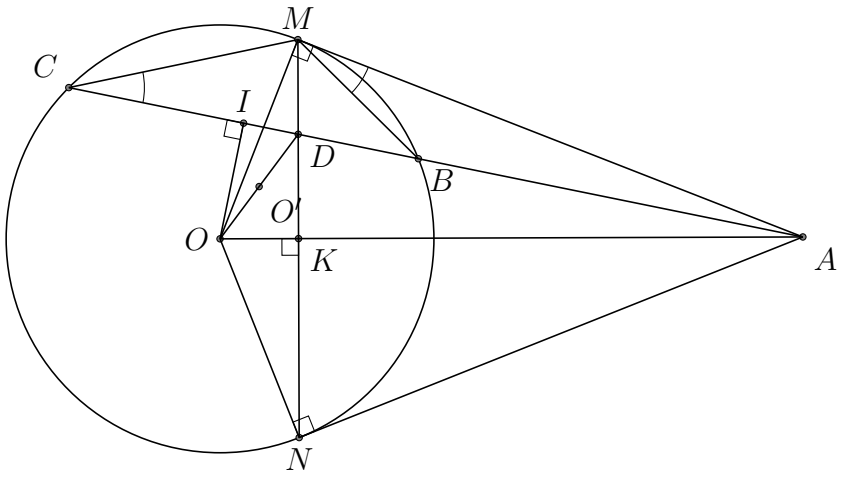
Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a-1=1 \\ b-4=4 \\ c-9=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \\ c=18 \end{cases}$.

Câu 4. Cho 3 điểm A, B, C cố định thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn $(O;R)$ bất kì đi qua B, C ($BC\neq 2R$). Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến $(O;R)$ (M, N là các tiếp điểm). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và MN, MN cắt BC tại D. Chứng minh:

a) $AM^2=AB.AC$.

b) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OID. Chứng minh O' thuộc đường thẳng cố định khi đường tròn $(O;R)$ thay đổi.

Lời giải.



a) Xét ΔABM và ΔAMC, ta có:

$\left.\begin{array}{l} \widehat{MAC}: \text{ góc chung} \\ \widehat{AMB}=\widehat{ACM} \text{ (cùng chắn } \overset{\frown}{MB}) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \Delta ABM\backsim \Delta AMC$ (g-g)

Suy ra $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AC}{AM}$ hay $AM^2=AB.AC$ (đpcm).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

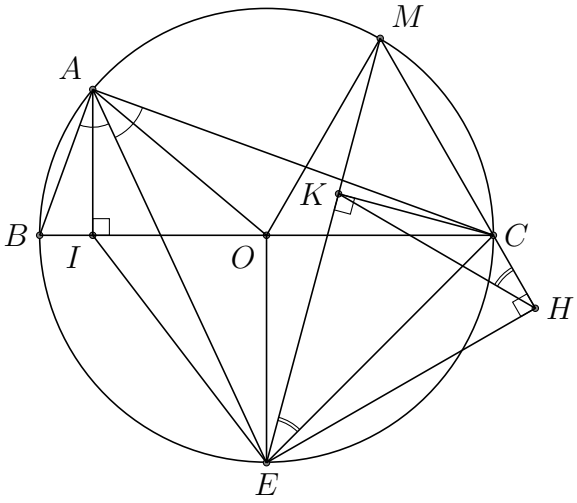
b) Do B, C cố định nên trung điểm I của BC cố định.
Ta có: OA và OK cùng vuông góc với MN nên O, K, A thẳng hàng. Mặt khác, do tứ giác $IDKO$ nội tiếp nên $AD.AI = AK.AO = AM^2 = const$ (tính chất phương tích).
Do đó, D cố định.
Ta có ΔOID vuông tại I, nên tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác OID là trung điểm của cạnh huyền OD.
Khi đó, $O'I = O'D$ và I, D cố định nên O' di động trên đường trung trực của đoạn thẳng ID khi đường tròn $(O; R)$ thay đổi.

Câu 5. Cho đường tròn (O) đường kính BC, trên đường tròn lấy điểm A $(A \neq B, C)$. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại E, AI là đường cao của tam giác ABC.

a) Xác định vị trí của điểm A trên đường tròn để tam giác AIE có diện tích lớn nhất.

b) Trên đường tròn lấy điểm M sao cho góc $\widehat{MCE}$ là góc tù; kẻ EH, CK lần lượt vuông góc với MC, ME tại H và K. Chứng minh MO vuông góc với HK.

Lời giải.



a) Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Đặt $IO = x$ $(0 \leq x \leq R)$.
Ta có: $AI = \sqrt{R^2 - x^2}$.
Do AE là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên E là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$, suy ra $OE \perp BC$.
Từ đó ta có $IE = \sqrt{R^2 + x^2}$.
Ta có $S_{AIE} = \dfrac{1}{2}AI.IE.\sin\widehat{AIE} = \dfrac{1}{2}AI.IE.\sin(90^\circ + \widehat{OIE}) = \dfrac{1}{2}AI.IE.\cos\widehat{OIE}$
$= \dfrac{1}{2}AI.IE.\dfrac{OI}{IE} = \dfrac{1}{2}AI.OI = \dfrac{1}{2}\sqrt{R^2 - x^2}.x \leq \dfrac{1}{4}(R^2 - x^2 + x^2) = \dfrac{R^2}{4}$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{R^2 - x^2} = x \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.
Từ đó ta có $AI = \sqrt{R^2 - x^2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.
Vậy điểm A thuộc đường tròn (O) sao cho khoảng cách từ A đến BC bằng $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Ta có $\widehat{EMC} = \frac{1}{2}\widehat{EOC} = \frac{1}{2}90^\circ = 45^\circ$, suy ra ΔMEH vuông cân tại H.

Tứ giác $KCHE$ nội tiếp nên $\widehat{CHK} = \widehat{CEK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{KC}$).

Ta lại có $\widehat{OMH} = \widehat{OME} + \widehat{EMH} = \widehat{OEM} + 45^\circ$.

(vì ΔOME cân tại M nên $\widehat{OME} = \widehat{OEM}$).

Suy ra $\widehat{MHK} + \widehat{OMH} = \widehat{OEM} + 45^\circ + \widehat{KEC} = \widehat{OEC} + 45^\circ = 90^\circ$.

(vì ΔOEC vuông cân tại O nên $\widehat{OEC} = 45^\circ$).

Suy ra $OM \perp HK$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 127

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẮC GIANG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

1) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x\sqrt{x}+x-2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+3\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}-1}{2x+\sqrt{x}-3}$, với $x\geq 0; x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $\dfrac{x}{4}=\sqrt{\dfrac{1009+\sqrt{2017}}{2}}-\sqrt{\dfrac{1009-\sqrt{2017}}{2}}$.

2) Cho phương trình $x^2-2x-(2m+1)=0$ (1), (với x là ẩn, m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{x_1^3+(2m+5)x_2+2m}{2}+\frac{2}{x_2^3+(2m+5)x_1+2m}=\frac{122}{11}.$$

Lời giải.

1) a) Ta có $A=\left(\dfrac{x\sqrt{x}+x-2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+3\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}-1}{2x+\sqrt{x}-3}$

$=\left(\dfrac{x\sqrt{x}+x-2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}\right).\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+3)}$

$=\left(\dfrac{x\sqrt{x}+x-2}{x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right).\dfrac{1}{2\sqrt{x}+3}=\dfrac{x\sqrt{x}+x-2-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}+3}$

$=\dfrac{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}+3}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}+3}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+3}.$

b) Ta có $\dfrac{x}{4}=\sqrt{\dfrac{1009+\sqrt{2017}}{2}}-\sqrt{\dfrac{1009-\sqrt{2017}}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{2018+2\sqrt{2017}}{4}}-\sqrt{\dfrac{2018-2\sqrt{2017}}{4}}$

$=\dfrac{\sqrt{2017}+1}{2}-\dfrac{\sqrt{2017}-1}{2}=1$. Suy ra $x=4$ (thoả mãn).

Thay $x=4$ vào biểu thức A ta được $A=\dfrac{\sqrt{4}+1}{2\sqrt{4}+3}=\dfrac{3}{7}$.

Vậy giá trị của biểu thức A bằng $\dfrac{3}{7}$ khi $\dfrac{x}{4}=\sqrt{\dfrac{1009+\sqrt{2017}}{2}}-\sqrt{\dfrac{1009-\sqrt{2017}}{2}}$.

2) Phương trình $x^2-2x-(2m+1)=0$ (1).

Điều kiện $\Delta'=2(1+m)>0\Leftrightarrow m>-1$.

Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2$.
Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên
$x_1^2 - 2x_1 - (2m+1) = 0 \Rightarrow x_1^2 = 2x_1 + (2m+1)$
$\Rightarrow x_1^3 = 2x_1^2 + (2m+1)x_1 = 2\left(2x_1 + (2m+1)\right) + (2m+1)x_1 = (5+2m)x_1 + 2(2m+1)$.
Khi đó $\dfrac{x_1^3 + (2m+5)x_2 + 2m}{2} = \dfrac{(2m+5)(x_1+x_2) + 2(3m+1)}{2} = 6 + 5m$.
Tương tự có $\dfrac{2}{x_2^3 + (2m+5)x_1 + 2m} = \dfrac{1}{6+5m}$.
Theo bài toán ta có

$$6 + 5m + \frac{1}{6+5m} = \frac{122}{11} \Leftrightarrow 11(6+5m)^2 - 122(6+5m) + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6+5m = 11 \\ 6+5m = \dfrac{1}{11} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{13}{11}. \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện và thử lại ta được kết quả $m = 1$.

Câu 2.

1) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 + 4 = 2y^2 \\ (xy+2)(y-x) = x^3y^2. \end{cases}$

Lời giải.

1) Phương trình $\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.
Điều kiện $\begin{cases} 4 - 3x \geq 0 \\ 2x^2 - x \geq 0. \end{cases}$
Bình phương hai vế ta được phương trình tương đương

$$2x^2 - 4x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - x)(4 - 3x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - x) - 2\sqrt{(2x^2 - x)(4 - 3x)} + (4 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2 - x} - \sqrt{4 - 3x}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x} = \sqrt{4 - 3x} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $\{-2; 1\}$.

2) Nhận thấy $y = 0$ không thoả mãn. Chia hai vế của hai phương trình cho y^2 ta được

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{4}{y^2} = 2 \\ \left(x + \dfrac{2}{y}\right)\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) = x^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{4}{y^2} = 2 \\ \left(x + \dfrac{2}{y}\right)\left(2 - \dfrac{2x}{y}\right) = 2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{4}{y^2} = 2 & (1^*) \\ \left(x + \dfrac{2}{y}\right)\left(x^2 + \dfrac{4}{y^2} - \dfrac{2x}{y}\right) = 2x^3 & (2^*) \end{cases}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Biến đổi (2^*) ta được $x^3+\dfrac{8}{y^3}=2x^3 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{y}$.

Thế $x=\dfrac{2}{y}$ vào (1^*) ta được $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ (thoả mãn).

Kết luận nghiệm $(x;y)=(1;2),(x;y)=(-1;-2)$.

Câu 3.

1) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ thoả mãn $\dfrac{x+y\sqrt{2017}}{y+z\sqrt{2017}}$ là số hữu tỉ, đồng thời $(y+2)(4xz+6y-3)$ là số chính phương.

2) Trong hình vuông cạnh 1 dm đặt một số hình vuông nhỏ có tổng chu vi bằng 9 dm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất ba hình vuông nhỏ (không kể hình vuông bao ngoài).

Lời giải.

1) Giả sử $\dfrac{x+y\sqrt{2017}}{y+z\sqrt{2017}}=\dfrac{m}{n};m,n\in\mathbb{Z}_+$. Biến đổi được $xn-ym=(zm-yn)\sqrt{2017}$
Từ $x,y,z,m,n\in\mathbb{Z}$, suy ra $xn-ym=zm-yn=0\Rightarrow xz=y^2$
Thay vào ta được $(y+2)(4y^2+6y-3)=(y+2)\left[(y+2)(4y-2)+1\right]$
Vì $(y+2,(y+2)(4y-2)+1)=1$ nên $y+2$ và $4y^2+6y-3$ đều là các số chính phương.
Ta có $(2y+1)^2\le 4y^2+6y-3<(2y+2)^2\Rightarrow y=2$ (thoả mãn $y+2$ là số chính phương).
Tính được các bộ số $(x,y,z)\in\{(1,2,4),(4,2,1),(2,2,2)\}$.

2) Chiếu các hình vuông nhỏ lên một cạnh hình vuông bên ngoài (cạnh AB).
Độ dài nhỏ nhất của hình chiếu một hình vuông cạnh a là a. Do đó độ dài nhỏ nhất tổng hình chiếu của tất cả các hình vuông nhỏ là $\dfrac{9}{4}$.
Ta có $\dfrac{9}{4}>2=2AB$ nên tồn tại 3 điểm thuộc ba hình vuông có cùng hình chiếu xuống cạnh AB. Đường thẳng đi qua 3 điểm đó là đường thẳng cần tìm.

Câu 4. Cho tam giác OAI vuông tại A, B là điểm đối xứng với A qua đường thẳng OI. Gọi H, E lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BI; D là giao điểm của đường thẳng AE và đường tròn (C) tâm O bán kính OA (D khác A).

1) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp.

2) Gọi J là giao điểm của đường thẳng ID và đường tròn (C) (J khác D). Chứng minh tam giác ABJ cân.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng DH và đường tròn (C) (K khác D). Chứng minh rằng

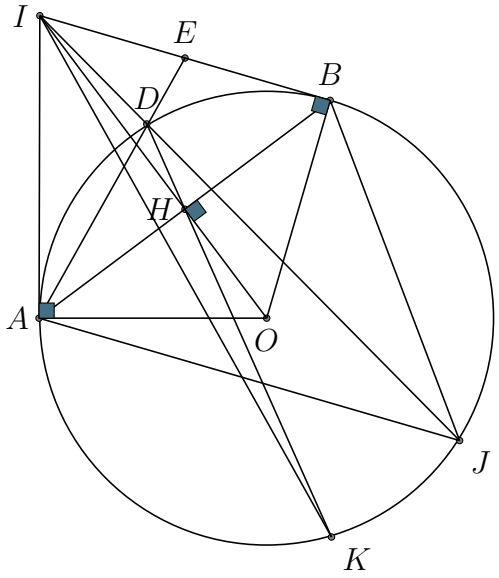
$$IH^2=ID.IK-DH.HK.$$

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

1) Ta có IA, IB là hai tiếp tuyến của đường tròn (C).
Từ $\widehat{BAE} = \widehat{DBE}$ ta có hai tam giác ABE, BDE đồng dạng, suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{BDE}$ (1)
Ta có $\triangle BHE$ cân tại E nên $\widehat{ABE} = \widehat{BHE}$ (2)
Từ (1), (2) ta có $\widehat{BDE} = \widehat{BHE}$, suy ra tứ giác $BHDE$ nội tiếp.

2) Ta có hai tam giác ABE và BDE đồng dạng.
Do đó $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{AE}{BE} \Rightarrow \dfrac{EI}{DE} = \dfrac{AE}{EI}$,
suy ra hai tam giác DEI và IEA đồng dạng.
Từ đó ta có $\widehat{EID} = \widehat{EAI}$.
Lại có $\widehat{EAI} = \widehat{AJI} \Rightarrow \widehat{AJI} = \widehat{EID} \Rightarrow JA \parallel BI$.
Ta có $\begin{cases} \widehat{AJB} = \widehat{ABI} \\ \widehat{ABI} = \widehat{JAB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AJB} = \widehat{JAB}$.
Vậy tam giác ABJ cân tại B.



3) Ta có $OAIB$ là tứ giác nội tiếp nên $HO.HI = HA.HB$.
$AKBD$ là tứ giác nội tiếp nên $HA.HB = HD.HK \Rightarrow HO.HI = HD.HK$.
Suy ra tứ giác $IDOK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DIO} = \widehat{DKO}$ (cùng chắn cung DO) và $\widehat{OIK} = \widehat{ODK}$ (cùng chắn cung OK).
Mặt khác: $\widehat{ODK} = \widehat{OKD}$.
Do đó $\widehat{DIO} = \widehat{OIK}$ hay IO là đường phân giác góc $\widehat{JIK}$.
Qua J kẻ đường thẳng vuông góc với OI, cắt lại đường tròn (C) tại K', dễ thấy $\triangle IOK'$ cân tại I nên IO cũng là đường phân giác góc $\widehat{JIK'}$.
Mà K, K' cùng thuộc cung lớn $\widehat{AB}$ nên $K \equiv K'$.
Do đó $IJ = IK$ hay $ID.IK = ID.IJ$ (3).
Ta có $\triangle ADI \backsim \triangle JAI \Rightarrow ID.IJ = IA^2$.
Mà $IA^2 = IH^2 + HA^2 = IH^2 + HA.HB$ nên $ID.IJ = IH^2 + HA.HB$ (4)
Lại có $\triangle HAD \backsim \triangle HKB \Rightarrow HA.HB = HD.HK$ (5)
Kết hợp (3), (4), (5) ta có điều phải chứng minh.

Câu 5. Cho hai số thực dương x, y thoả mãn $2\sqrt{xy} + \sqrt{\dfrac{x}{3}} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y}{x} + \frac{4x}{3y} + 15xy.$$

Lời giải.
Ta có $P = \left(\dfrac{y}{3x} + \dfrac{x}{3y}\right) + \left(\dfrac{2y}{3x} + 6xy\right) + \left(\dfrac{x}{y} + 9xy\right)$
Sử dụng bất đẳng thức Cô-si ta được ta có $P \geq \dfrac{2}{3} + 4y + 6x$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lại có $\frac{2}{3}+4y+6x=4(x+y)+2\left(x+\frac{1}{3}\right)\geq 4\left(2\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{x}{3}}\right)=4$; dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{y}{3x}=\frac{x}{3y},\frac{2y}{3x}=6xy,\frac{x}{y}=9xy\\ 2\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{x}{3}}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4 khi $x=y=\frac{1}{3}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 128

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC AN GIANG, 2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho $x=\dfrac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $A=x^2-8x+15$.

Lời giải.

Ta có $19+8\sqrt{3}=16+2.4\sqrt{3}+3=(4+\sqrt{3})^2$.

$\Rightarrow x=\dfrac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}=\dfrac{13}{\sqrt{(4+\sqrt{3})^2}}=\dfrac{13}{4+\sqrt{3}}=\dfrac{13(4-\sqrt{3})}{16-3}=4-\sqrt{3}$.

$\Rightarrow x^2=(4-\sqrt{3})^2=19-8\sqrt{3}$.

Thay vào A ta được:

$A=19-8\sqrt{3}-8(4-\sqrt{3})+15\Rightarrow A=2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=ax+b\quad(a\neq 0)$ có đồ thị là đường thẳng (d) trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Viết theo a và b phương trình đường thẳng (d'). Biết rằng (d) và (d') vuông góc với nhau đồng thời cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

Lời giải.

Ta có: $(d):y=ax+b\quad(a\neq 0)$.

Giả sử $(d'):y=a'x+b'$

Do $(d)\perp(d')\Rightarrow a.a'=-1\Rightarrow a'=\dfrac{1}{a}\quad(a\neq 0)$.

Ta lại có: (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{b}{a}$ và (d') cắt Ox tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{b'}{a'}$.

Theo đề bài (d) và (d') cắt nhau tại cùng một điểm thuộc Ox nên:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'}\Leftrightarrow b'=\frac{a'b}{a}=-\frac{b}{a^2}.$$

Vậy đường thẳng (d') cần tìm có phương trình là: $y=-\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a^2}$.

Câu 3. Tìm x,y,z biết:

$$\begin{cases}x^2+(y-z+1)^2=0\\5y-3z-9=0\end{cases}.$$

Lời giải.

Do $x^2\geq 0;(y-z+1)^2\geq 0$ nên hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}x=0\\y-z+1=0\\5y-3z-9=0\end{cases}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

.

Xét hệ $\begin{cases} y-z+1=0 \\ 5y-3z-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-3z+3=0 \\ 5y-3z-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z+1=0 \\ -2y+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-z+1=0 \\ y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ z=7 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $x=0; y=6; z=7$.

Câu 4. Cho hai phương trình bậc hai (m là tham số):

$$2x^2+(m-1)x-3=0; \quad 4x^2-(m-7)x-9=0.$$

a. Tìm m để cả hai phương trình đều có nghiệm.

b. Tìm m để hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung.

Lời giải.

a. Dễ thấy cả hai phương trình đều có các hệ số a, c trái dấu. Do đó cả hai phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m.

b. Giả sử cả hai phương trình có nghiệm chung là x_0 khi đó:

$$\begin{cases} 2x_0^2+(m-1)x_0-3=0 \\ 4x_0^2-(m-7)x_0-9=0 \end{cases} \Rightarrow 6x_0^2+6x_0-12=0 \Rightarrow x_0=1; x_0=-2.$$

Với $x_0=1 \Rightarrow 2+(m-1)-3=0 \Rightarrow m=2$.

$x_0=-2 \Rightarrow 8-2(m-1)-3=0 \Rightarrow m=\dfrac{7}{2}$.

Vậy $m=2; m=\dfrac{7}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết $\widehat{A}=60^\circ$; $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc nhọn có số đo khác nhau. Vẽ các đường cao BE, CF của tam giác ABC (E, F lần lượt thuộc AC, AB).

a. Chứng minh rằng $\widehat{BCF}=\widehat{BEF}$.

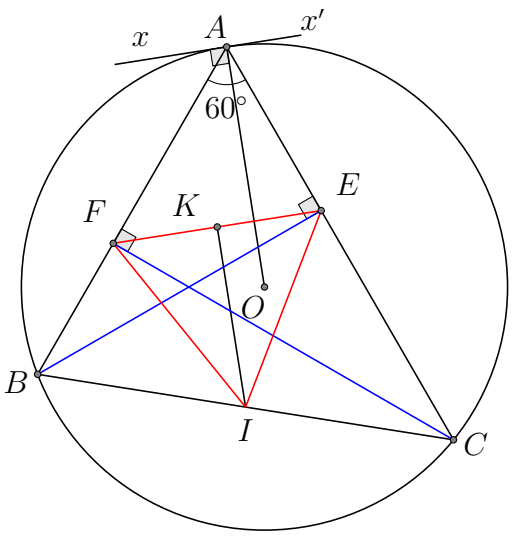
b. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh tam giác IEF là tam giác đều.

c. Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng IK song song OA.

Lời giải.

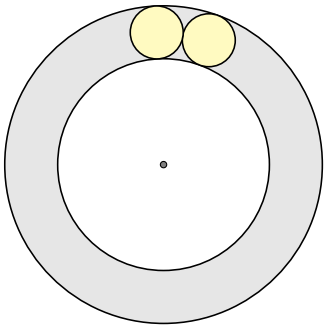
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a. Ta có BE là đường cao. $\Rightarrow BE \perp EC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$
CF là đường cao $\Rightarrow BF \perp FC \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^2$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.
$\Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BEF}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung).
b. Ta có tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính BC (theo câu a).
$\Rightarrow \widehat{EIF} = 2\widehat{ECF} = 60^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung).

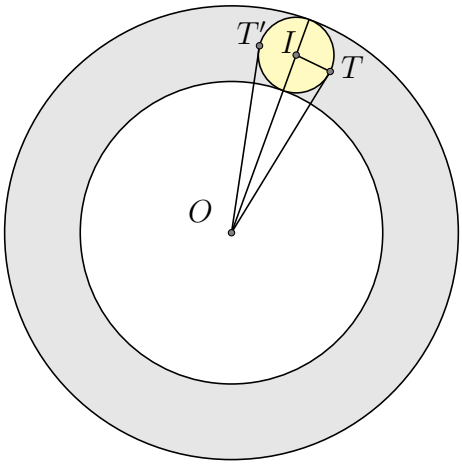


Mặt khác ta có $IE = IF = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow$ Tam giác IEF đều.
c. Kẻ tiếp tuyến xAx' của đường tròn (O) tại A.
$\Rightarrow xx' \perp OA \quad (1)$
Ta lại có: $\begin{cases} \widehat{AFE} + \widehat{BFE} = 180^\circ \text{ (kề bù)} \\ \widehat{ACB} + \widehat{BFE} = 180^\circ \text{ (Tứ giác } BFEC \text{ nội tiếp)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AFE}.$
Mà $\widehat{BAx} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến cùng chắn cung AB).
$\Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{AFE} \Rightarrow xx' \parallel EF. \quad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra: $OA \perp EF$.
Mặt khác $IK \perp EF$ ($\triangle ABC$ đều).
$\Rightarrow IK \parallel OA$.

Câu 6.
Trong một hình vành khăn với các bán kính đường tròn là 10R và 8R. Xếp các hình tròn bán kính R tiếp xúc với cả hai đường tròn này không chồng lấn nhau. Hỏi xếp được nhiều nhất bao nhiêu hình tròn như thế?



Lời giải.



Xét hình tròn tâm I tiếp xúc với hai đường tròn tâm O của hình vành khăn.

Từ O kẻ hai tiếp tuyến OT và OT' tiếp xúc với đường tròn tâm I.

Ta có $IT = R; OI = 9R$.

Tam giác OIT vuông tại T

$\Rightarrow \sin IOT = \dfrac{IT}{OI} = \dfrac{R}{9R} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \widehat{IOT} \approx 6°23'$

Vậy $\widehat{TOT'} = 2\widehat{IOT} \approx 12°46'$

Do đó hình tròn xếp được trong hình vành khăn là:

$360° : 12°46' \approx 28,1984$

Vậy có thể xếp nhiều nhất 28 hình tròn bán kính R tiếp xúc với hai đường tròn của hình vành khăn.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 129

ĐỀ THI VÀO 10, PTNK, TPHCM 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

1. Cho hệ phương trình $\begin{cases}(x-2y)(x+my)=m^2-2m-3\\(y-2x)(y+mx)=m^2-2m-3.\end{cases}$

   a) Giải hệ phương trình khi $m=-3$;

   b) Tìm m để hệ phương trình có ít nhất một nghiệm $(x_0;y_0)$ thỏa mãn $x_0>0$, $y_0>0$.

2. Tìm $a\geq 1$ để phương trình $ax^2+(1-2a)x+1-a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_2^2-ax_1=a^2-a-1$.

Lời giải.

1.

   a) Khi $m=-3$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=12\\y^2-5xy+6x^2=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=12\\x=\pm y.\end{cases}$

   b) Hệ phương trình viết lại $\begin{cases}x^2+(m-2)xy-2my^2=m^2-2m-3\\y^2+(m-2)xy-2mx^2=m^2-2m-3\end{cases}$

   Trừ theo vế hai phương trình hệ trên ta thu được $(2m+1)(y^2-x^2)=0$. Đến đây, xét từng trường hợp cho m ta có kết quả $m=\dfrac{-1}{2}$, $m=-1$, $m<3$.

2. Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $a(x_1+x_2)=2a-1$. Suy ra $ax_1=2a-1-ax_2$, do đó $ax_2^2+a^2x_2-a^3-a^2+2a=0$. Mặt khác $ax_2^2+(1-2a)x_2+1-a=0$ nên ta có $x_2=a-1$. Thay vào phương trình ban đầu thu được $a=1$, $a=3$.

Câu 2. Cho x, y là hai số nguyên dương mà x^2+y^2+10 chia hết cho xy.

   a) Chứng minh rằng x, y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

   b) Chứng minh rằng $k=\dfrac{x^2+y^2+10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k\geq 12$.

Lời giải.

a) Giả sử x là số chẵn. Vì x^2+y^2+10 chia hết cho xy nên y là số chẵn. Từ đó ta có, x^2+y^2 chia hết cho 4 và x^2+y^2+10 chia hết cho 4, suy ra 10 chia hết cho 4 (vô lí). Vậy x, y là hai số lẻ. Bây giờ, ta giả sử $(x,y)=d$, $d\neq 1$. Suy ra $d^2 \mid (x^2+y^2)$ và theo giả thiết thì $d^2 \mid 10$ (vô lí). Tóm lại, x, y là hai số lẻ và $(x,y)=1$.

b) Đặt $x=2a+1$, $y=2b+1$ suy ra $k=\dfrac{4(a^2+b^2+a+b+3)}{(2a+1)(2b+1)}$. Do đó, k chia hết cho 4. Giả sử x chia hết cho 3. Lúc này, $3 \mid (y^2+10)$ (vô lí). Vậy x và y cùng không chia hết cho 3. Ta có: $3 \mid x^2+y^2+10=kxy$ suy ra k chia hết cho 3. Từ đó ta có $k \geq 12$.

Câu 3. Biết $x \geq y \geq z$, $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=6$.

a) Tính $S=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $P=|(x-y)(y-z)(z-x)|$.

Lời giải.

a) Từ giả thiết suy ra $xy+yz+zx=-3$. Vậy $S=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=9$.

b) Áp dụng bất đẳng thức $a^2+ab+b^2 \geq 3ab$, ta có $P \leq 3|x-z|$. Mặt khác $|x-z| \leq \sqrt{2(x^2+z^2)} \leq \sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}=\sqrt{12}$. Suy ra $P \leq 3\sqrt{12}=6\sqrt{3}$. Dấu "="khi $x=\sqrt{3}$, $y=0$, $z=-\sqrt{3}$.

Câu 4. Tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC}>45^\circ$. Dựng các hình vuông $ABMN$, $ACPQ$ (M và C nằm khác phía với AB, B và Q khác phía với AC). Đường thẳng AQ cắt đoạn BM tại E và AN cắt đoạn CP tại F.

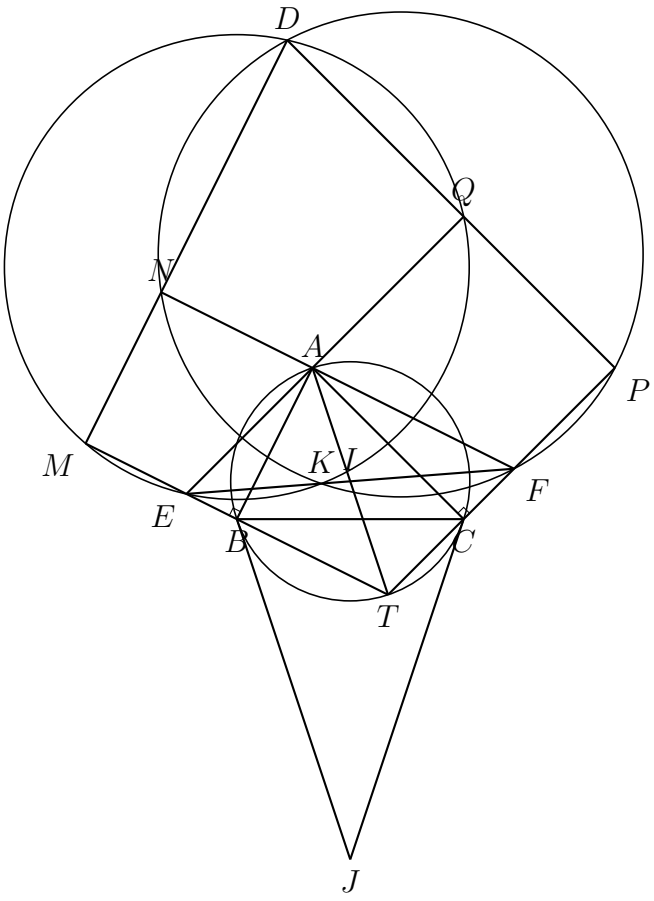
a) Chứng minh rằng $\triangle ABE \backsim \triangle ACF$ và tứ giác $EFQN$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) MN cắt PQ tại D, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K ($K \neq D$), các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J. Chứng minh các điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có $\widehat{EAB} + \widehat{BAC} = 90°$, $\widehat{FAC} + \widehat{BAC} = 90°$. Suy ra $\widehat{EAB} = \widehat{FAC}$. Mặt khác, ta có $\angle ABE = \angle ACF = 90°$. Vậy $\triangle ABE \backsim \triangle ACF$ (g.g).

Ta có: $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ mà $AC = AQ$, $AB = AN$ suy ra $AE \cdot AQ = AN \cdot AF$. Do đó, tứ giác $QNEF$ nội tiếp.

b) Cách 1: Gọi T là giao điểm của MB và CP. Ta có tứ giác $ABTC$ nội tiếp và AT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt khác ta có $AF \parallel ET$, $AE \parallel FT$ nên $AETF$ là hình bình hành. Suy ra trung điểm EF cũng là trung điểm AT. Do đó trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cách 2: Xét hình thang $AEBF$, gọi X là trung điểm của AB khi đó IX thuộc đường trung bình của hình thang, suy ra $IX \parallel BE$ hay IX vuông góc AB. Vậy IX là đường trung trực của đoạn AB. Chứng minh tương tự thì I cũng thuộc trung trực đoạn AC. Vậy I là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC.

c) Giả sử DA cắt EF tại H. Ta có $\angle NFH = \angle NQA$ (vì $NQFE$ nội tiếp). Mà $\angle NQA = \angle NDA$ (vì $AQDN$ nội tiếp). Suy ra $\angle NDA = \angle AFH$. Suy ra $NDFH$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta có $DQHE$ nội tiếp. Do đó H là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DQM và DPN. Vậy H trùng K. Suy ra D, A, K thẳng hàng.
Ta có $\angle BKE = \angle EAB = \angle CAF = \angle CKF$. Suy ra $\angle BKC = 180° - 2\angle BKE = 2(90° - \angle EAB) = 2\angle BAC = \angle BIC$. Suy ra $BKIC$ nội tiếp. Mà $IBJC$ nội tiếp và $JB = JC$ nên $\angle BKJ = \angle CKJ$. Hay KJ là phân giác $\angle BKC$. Mặt khác $\angle BKA =$

$180^\circ - \angle AEB = 180^\circ - \angle AFC = \angle AKC$. Suy ra tia đối của tia KA cũng là phân giác của $\angle BKC$. Do đó A, K, J thẳng hàng. Vậy 4 điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Câu 5. Với mỗi số nguyên dương $m > 1$, kí hiệu $s(m)$ là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m. Cho số tự nhiên $n > 1$, đặt $n_0 = n$ và lần lượt tính các số $n_1 = n_0 - s(n_0)$, $n_2 = n_1 - s(n_1)$, $\cdots$, $n_{i+1} = n_i - s(n_i)$, $\cdots$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k để $n_k = 1$ và tính k khi $n = 2^{16} \cdot 14^{17}$.

Lời giải.

Ta có: $n_{i+1} = n_i - s(n_i) > 0$ suy ra $n_{i+1} \geq 1 \forall i = 0, 1, \cdots$ hay $n_i \geq 1 \forall i = 1, 2, \cdots$. Ta lại có $n_i > n_{i+1}$ do đó ta có dãy số nguyên dương giảm $(n_i) \forall i = 0, 1, 2 \cdots$ được sắp xếp như sau

$$n = n_0 > n_1 > n_2 > \cdots > \cdots$$

Vì vậy, tồn tại k để $n_k = 1$.

Khi $n = 2^{16} \cdot 14^{17} = 2^{33} \cdot 7^{17}$ ta có $n_1 = 2^{32} \cdot 7^{17}$, $n_2 = 2^{31} \cdot 7^{17}$. Tiếp tục quá trình cho đến $n_{33} = 7^{17}$ rồi thực hiện tiếp ta thu được $n_{101} = 1$. Vậy $k = 101$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 130

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC VŨNG TÀU, VÒNG 1, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$

c) Giải phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Lời giải.

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} + \dfrac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 2.$

b) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 11 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

c) Ta có: $\Delta' = 1^2 - 1.(-8) = 9 > 0$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-1+3}{1} = 2$, $x_2 = \dfrac{-1-3}{1} = -4$.

Câu 2. Cho parabol $(P) : y = -x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 4x - m$.

a) Vẽ parabol (P).

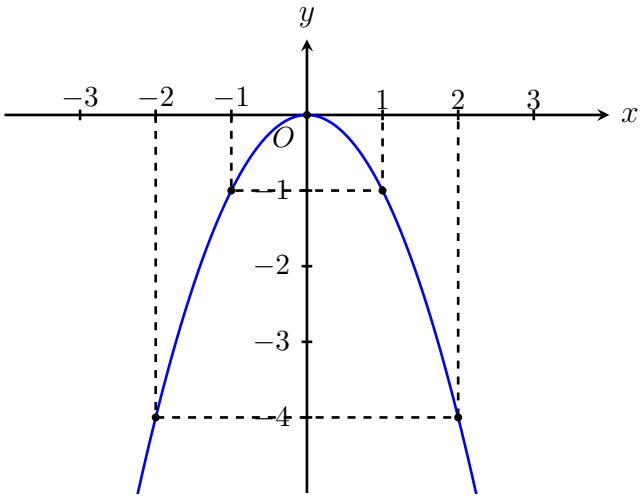
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) và (P) có đúng một điểm chung.

Lời giải.

a) Bảng giá trị của hàm số $y = -x^2$ là:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị:



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $-x^2 = 4x - m \Leftrightarrow x^2 + 4x - m = 0$ $(*)$.
(d) và (P) có đúng một điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 3.

a) Cho phương trình $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^2 - x_2^2| = 15$.

b) Giải phương trình $(x-1)^4 = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4(3m+1) = 21 - 12m$.
Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, $x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 21 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{7}{4}$.
Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 5$ và $x_1.x_2 = 3m + 1$.
Ta có: $|x_1^2 - x_2^2| = 15 \Leftrightarrow |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = 15 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 3$
$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$
$\Leftrightarrow 5^2 - 4(3m+1) = 9 \Leftrightarrow 21 - 12m = 9 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

b) Ta có: $(x-1)^4 = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow (x-1)^4 = (x-1)^2 + 2$.
Đặt $t = (x-1)^2 (t \geq 0)$, ta được phương trình: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$
Với $t = 2$, ta có: $(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{2}$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \pm 2\sqrt{2}$.

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. CD là dây cung thay đổi của nửa đường tròn sao cho $CD = R$ và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). AD cắt BC tại H; hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F.

a) Chứng minh rằng tứ giác $CFDH$ nội tiếp.

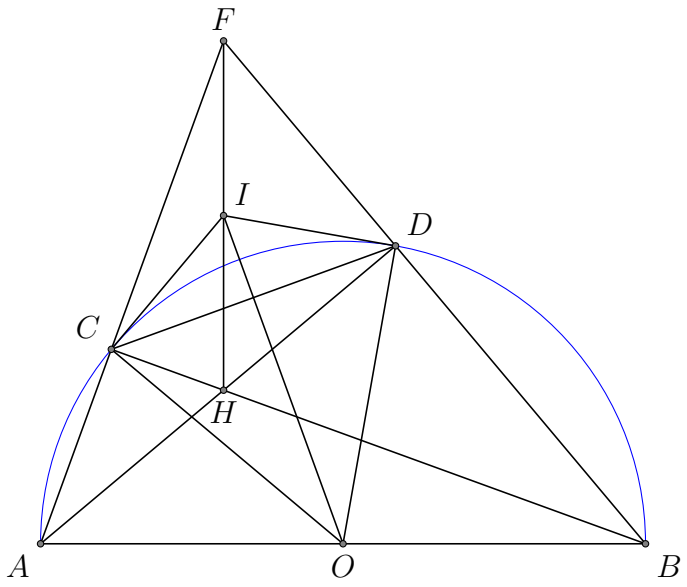
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Chứng minh $CF.CA = CH.CB$.

c) Gọi I là trung điểm của HF. Chứng minh tia OI là tia phân giác của góc $\widehat{COD}$.

d) Chứng minh điểm I thuộc một đường tròn cố định khi CD thay đổi.

Lời giải.



a) Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{FCH} = 90^\circ$.
Lại có: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{FDH} = 90^\circ$.
Tứ giác $CFDH$ có $\widehat{FCH} + \widehat{FDH} = 180^\circ$.
Suy ra tứ giác $CFDH$ nội tiếp đường tròn đường kính FH.

b) Tứ giác $CFDH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{CDH}$.
Mà $\widehat{CDH} = \widehat{CBA}$ (cùng chắn cung AC trong đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{CBA}$.
Hai tam giác CHF và CAB có $\widehat{HCF} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ và $\widehat{CFH} = \widehat{CBA}$.
$\Rightarrow \triangle CHF \backsim \triangle CAB \Rightarrow \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CF}{CB} \Rightarrow CF.CA = CH.CB$.

c) Ta có I là trung điểm của HF nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CFDH$ $\Rightarrow IC = ID$.
Hai tam giác OIC và OID có $OC = OD$, $IC = ID$ và OI là cạnh chung.
Suy ra $\triangle OIC = \triangle OID \Rightarrow \widehat{COI} = \widehat{DOI}$.
Vậy tia OI là tia phân giác của góc $\widehat{COD}$.

d) Ta có $\widehat{ICF} = \widehat{IFC} = \widehat{CBA} = \widehat{BCO}$.
$\Rightarrow \widehat{ICO} = \widehat{BCO} + \widehat{BCI} = \widehat{ICF} + \widehat{BCI} = \widehat{BCF} = 90^\circ$.
Tam giác OCD có $OC = CD = OD = R$ nên $\triangle OCD$ đều $\Rightarrow \widehat{COI} = 30^\circ$.
Tam giác COI vuông tại C có $\widehat{COI} = 30^\circ$ nên $OI = \dfrac{OC}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.
Vậy điểm I thuộc một đường tròn cố định khi CD thay đổi.

Câu 5. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\leq\frac{3}{2}.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$a^2+bc\geq 2a\sqrt{bc}\Rightarrow\dfrac{a}{a^2+bc}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{bc}}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

Tương tự, ta có: $\dfrac{b}{b^2+ca}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$; $\dfrac{c}{c^2+ab}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.

Do đó, ta có: $\dfrac{a}{a^2+bc}+\dfrac{b}{b^2+ca}+\dfrac{c}{c^2+ab}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{3}{2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 131

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN VĨNH PHÚC - V2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho phương trình $x^4+3x^3-mx^2+9x+9=0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m=-2$.

b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm dương.

Lời giải.

a) Với $m=-2$, phương trình đã cho trở thành

$$x^4+3x^3+2x^2+9x+9=0.$$

Ta thấy ngay $x\neq 0$, ta chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$x^2+\frac{9}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0.$$

Đặt $t=a+\dfrac{3}{x}$, ta được phương trình: $t^2+3t-4=0\Leftrightarrow t=1;t=-4$.
Với $t=1$ thì $x+\dfrac{3}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x+3=0$(vô nghiệm).
Với $t=-4$ thì $x+\dfrac{3}{x}=-4\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow x=-1;x=-3$.
Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1;x=-3$.

b) Trong trường hợp tổng quát ta cũng đặt $x+\dfrac{x}{3}=t$ (Với $x>0$ thì $t\geq 2\sqrt{x.\dfrac{x}{3}}=2\sqrt{3}$) thì ta có phương trình: $t^2+3t-6-m=0(1)$. Ta cần tìm điều kiện để phương trình (1) có nghiệm $t\geq 2\sqrt{3}$.
Xét $\Delta=4m+33\geq 0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{-33}{4}$ khi đó (1) có nghiệm là $t_{1;2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{4m+33}}{2}$.
Do đó (1) có nghiệm $t\geq 2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-3+\sqrt{4m+33}}{2}\geq 2\sqrt{3}\Leftrightarrow m\geq 6(1+\sqrt{3})$.
Vậy giá trị cần tìm của m là $m\geq 6(1+\sqrt{3})$.

Câu 2.

a) Giải phương trình: $3x^2-4x\sqrt{4x-3}+4x-3=0$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2)$.

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{3}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương: $\left(x - \sqrt{4x-3}\right)\left(3x - \sqrt{4x-3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{4x-3} = x \\ \sqrt{4x-3} = 3x\end{array}\right.$.

$\sqrt{4x-3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = 3.$

$\sqrt{4x-3} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 3 = 9x^2 \end{cases}$ (VN).

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x = 1; x = 3$.

b) Ta có $x^2 = y^2\left(x + y^4 + 2y^2\right) \Leftrightarrow x^2 - y^2x - y^4(y^2 + 2) = 0(1)$.
Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x, ta có $\Delta = y^4(4y^2 + 9) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = y^2\sqrt{4y^2 + 9}$.
(1) có nghiệm nguyên nên $4y^2 + 9$ phải là số chính phương, đặt $4y^2 + 9 = k^2 (k \in \mathbb{Z})$.
Khi đó ta có $(k - 2y)(k + 2y) = 9$.
Xét các trường hợp và chú ý $k \in \mathbb{Z}$ ta được các bộ $(k, y) \in \{(5; 2); (5; -2); (3; 0)\}$.
Vậy các nghiệm cần tìm là $(x; y) \in \{(0; 0); (12; 2); (12; -2); (-8; 2); (-8; -2)\}$.

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$4(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 9.$$

Lời giải.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$4(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 27$$

$\Leftrightarrow 4(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$
$\Leftrightarrow (a^3 + b^3 + c^3) + 4(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq (a + b = c)^3(1)$.
Ta có đẳng thức $(a + b + c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc$.
Do đó (1) tương đương với $a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc$.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có
$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$
$\geq 2a^2\sqrt{bc} + 2b^2\sqrt{ca} + 2c^2\sqrt{ab} \geq 6abc$.
Vậy BĐT(1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

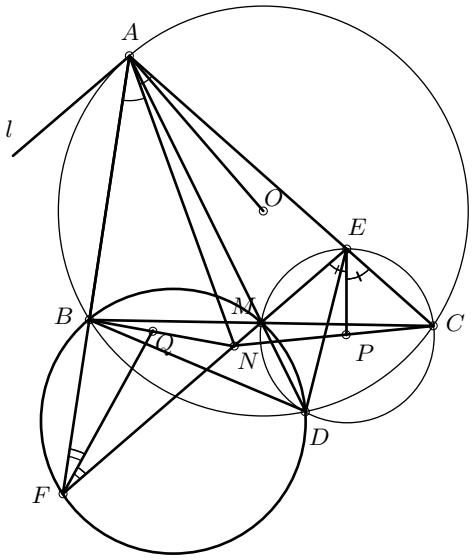
Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. AM cắt (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B.

a) Chứng minh hai tam giác BDF, CDE đồng dạng và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $OA \perp EF$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

c) Phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt EF tại điểm N. Phân giác của các góc $\widehat{CEN}, \widehat{BFN}$ lần lượt cắt CN, BN tại P, Q. Chứng minh rằng PQ song song với BC.



Lời giải.

a) Do các tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $\widehat{DEC} = \widehat{DMC} = \widehat{DFB}(1)$.
Tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $\widehat{DCE} = \widehat{DCA} = \widehat{DBF}$ (2)
Từ (1);(2) suy ra $\triangle BDF \sim \triangle CDE(g-g)$.
Từ đó ta có $\widehat{EDC} = \widehat{BDF}$. Mà $\widehat{EMC} = \widehat{EDC}; \widehat{BMF} = \widehat{BDF}$.
Suy ra $\widehat{EMC} = \widehat{BMF}$. Vậy E, M, F là thẳng hàng.

b) Từ hai tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $AB.AF = AM.AD = AE.AC$, suy ra tứ giác $BECF$ nội tiếp. Do đó $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.
Vẽ tiếp tuyến Al của (O) thì $\widehat{ACB} = \widehat{BAl}$. Do đó $\widehat{BAl} = \widehat{AFE}$, suy ra $Al \parallel EF$.
Vậy $OA \perp EF$.

c) Ta có $\triangle BDF \sim \triangle CDE$ nên $\dfrac{S_{BDF}}{S_{CDE}} = \dfrac{BF^2}{CE^2}$.
Ta có $1 = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \dfrac{S_{DAB}}{S_{BDF}}.\dfrac{S_{BDF}}{S_{CDE}}.\dfrac{S_{CDE}}{S_{DAC}} = \dfrac{AB}{BF}.\dfrac{BF^2}{CE^2}.\dfrac{CE}{AC} = \dfrac{AB.BF}{CE.AC}$.
Từ đó $\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{NF}{NE} \Rightarrow \dfrac{EN}{EC} = \dfrac{FN}{FB}$.(3)
Theo tính chất phân giác ta có $\dfrac{PN}{PC} = \dfrac{EN}{EC}$ và $\dfrac{QN}{QB} = \dfrac{FN}{FB}$ (4).
Từ (3);(4) suy ra $\dfrac{PN}{PC} = \dfrac{QN}{QB}$. Do đó PQ song song với BC.

Câu 5. Tập hợp $A = \{1; 2; 3; ...; 3n-1; 3n\}$ với n là số nguyên dương được gọi là tập **cân đối** nếu có thể chia A thành n tập con $A_1; A_2; ...; A_n$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

i Mỗi tập hợp $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ gồm 3 số phân biệt và có một số bằng tổng của hai số còn lại.

ii Các tập hợp $A_1; A_2; ...; A_n$ đôi một không có phần tử chung.

Chứng minh rằng:

a) Tập $A = \{1; 2; 3; ...; 92; 93\}$ không là tập hợp **cân đối**.

b) Tập $A = \{1; 2; 3; ...; 830; 831\}$ là tập hợp **cân đối**.

Lời giải.

a) Giả sử tập $A = \{1; 2; 3; ...; 92; 93\}$ là tập **cân đối**, khi đó mỗi tập $A_i (i = \overline{1, 31})$ có dạng $\{x_i; y_i; x_i + u_i\}$, như vậy tổng ba phần tử trong A_i là số chẵn. Do đó tổng các phần tử của A là số chẵn.
Mặt khác tổng các phần tử của A là: $1 + 2 + 3 + ... + 93 = \dfrac{93.94}{2} = 93.47$ là số lẻ.
Mẫu thuẫn này chỉ ra A là tập không **cân đối**.

b) **Nhận xét**: Nếu tập $S_n = \{1; 2; 3; ..; n\}$, với n chia hết cho 3 là tập hợp **cân đối** thì tập $S_{4n} = \{1; 2; 3; ...; 4n\}$ và $S_{4n+3} = \{1; 2; 3; ...; 4n + 3\}$ cũng là tập hợp **cân đối**.
Chứng minh. Từ tập S_{4n} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau:
$\{1; 2n + n; 2n + n + 1\}; \{3; 2n + n - 2; 2n + n + 2\}; \{5; 2n + n - 2; 2n + n + 3\}; ...; \{2n - 1; 2n + 1; 4n\}$.
Rõ ràng các tập con này đều thỏa mãn có một phần tử bằng tổng hai phần tử còn lại.
Còn lại các số sau trong tập S_{4n} là $2, 4, 6, ..., 2n$. Tuy nhiên vì tập S_n là **cân đối** nên tập $\{2; 4; 6; ...; 2n\}$ cũng **cân đối**. Vậy tập S_{4n} là tập **cân đối**.
Tương tự từ tập S_{4n+3} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau:

$$\{1; 2n + n + 2; 2n + n + 3\}; \{3; 2n + n + 2; 2n + n + 4\}; ...; \{2n + 1; 2n + 2; 4n + 3\}.$$

Và còn lại các số là $2; 4; 6; ...; 2n$ vậy S_{4n+3} là tập **cân đối**.
Trở lại bài toán. Ta có

$$\begin{aligned} 831 &= 4.207 + 3 \\ 207 &= 4.51 + 3 \\ 51 &= 4.12 + 3 \\ 12 &= 4.3 \end{aligned}$$

Chú ý là tập $\{1; 2; 3\}$ la **cân đối** nên theo nhận xét trên ta xây dựng được các tập hợp **cân đối** theo quy trình sau:
$\{1; 2; 3\} \to \{1; 2; ...; 12\} \to \{1; 2; ...; 51\} \to \{1; 2; ...; 207\} \to \{1; 2; ...; 831\}$.
Do đó tập $A = \{1; 2; 3; ...; 831\}$ là tập hợp **cân đối**.(đpcm)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 132

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN VĨNH PHÚC, VÒNG 1, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho phương trình:

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

a) Với $m = 2$ phương trình được viết lại là
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$
$\Rightarrow S = \{2\}$.

b) Ta có $\Delta' = m^2 - m - 2$.
Phương trình có nghiệm duy nhất khi
$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 2$.

Câu 2. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \quad (x > 0; x \neq 1).$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{A}{\sqrt{x}} > 3$.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}+1)^2}{x-1}.\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= \frac{-4\sqrt{x}}{x-1}.\frac{(1-x)^2}{4x} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b) Ta có $\dfrac{A}{\sqrt{x}}>3 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}>3 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}-3>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-4x}{x}>0 \Leftrightarrow 1-4x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$.
Vậy $0<x<\dfrac{1}{4}$.

Câu 3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}(m+1)x-2y=-1\\ x+my=5\end{cases}, \quad \text{với } m \text{ là tham số.}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho $5x+y$ lớn nhất.

Lời giải.

a) Với $m=2$ ta có
$\begin{cases}3x-2y=-1\\ x+2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x=4\\ x+2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2.\end{cases}$
Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;2)$.

b) Ta có $\begin{cases}(m+1)x-2y=-1\\ x=5-my\end{cases}$
Thế phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được
$y=\dfrac{5m+6}{m_m^2+2} \Rightarrow x=\dfrac{10-m}{m^2+m+2}$.
Suy ra $5x+y=\dfrac{56}{m^2+m+2}$.
Ta thấy $m^2+m+2=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\geq\dfrac{7}{4}$.
Suy ra $5x+y\leq 32$. Dẳng thức xảy ra khi $m=\dfrac{1}{2}$.
Vậy $5x+y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 32 khi $mm=\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho nữa đường tròn (O) có tâm là O và đường kính $AB=2R$ (R là một số dương cho trước). Gọi M,N là hai điểm di động trên nữa đường tròn (O) sao cho M thuộc cung $\overset{\frown}{AN}$ và tổng khoảng cách từ A và B đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng AN và BM; K là giao điểm của các đường thẳng AM và BN.

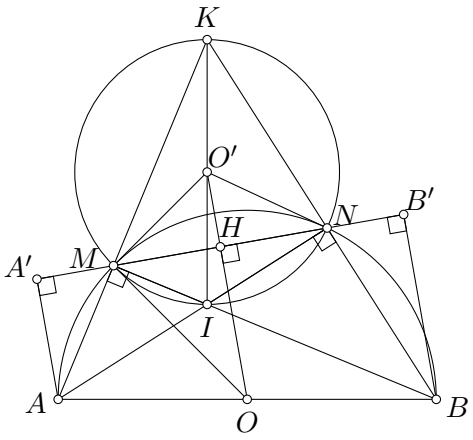
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Chứng minh rằng bốn điểm K, M, I, N cùng nằm trên một đường tròn (C).

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN và bán kính đường tròn (C) theo R.

c) Xác định vị trí của M, N sao cho tam giác KAB có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90°$(góc nội tiếp chắn nữa đường tròn), suy ra $\widehat{KMI} = \widehat{KNI} = 90°$.
Vậy bốn điểm K, M, I, N cùng nằm trên đường tròn (C) đường kính KI.

b) Gọi A', B', H lần lượt là hình chiếu của A, B, O lên MN. Khi đó H là trung điểm của MN và OH là đường trung bình của hình thang vuông $AA'B'B$.
Ta có $OH = \dfrac{1}{2}(AA' + BB') = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, suy ra
$MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \dfrac{R}{2} \Rightarrow MN = R$.
Do $MN = R$ nên $\triangle OMN$ đều, suy ra $\widehat{AKB} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{MN}) = 60°$.
Gọi O' là trung điểm của IK thì O' là tâm của đường tròn (C), suy ra
$\widehat{MO'N} = 2\widehat{MKN} = 120°$.
Từ đó $O'M = \dfrac{MH}{\sin 60°} = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.
Vậy bán kính của đường tròn (C) bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

c) Vì $\widehat{AKB} = 60°$ nên điểm K nằm trên cung chứa góc $60°$ dựng trên đoạn $AB = 2R$.
Suy ra S_{KAB} lớn nhất khi $\triangle KAB$ đều.
Khi đó M, N là các điểm chia nửa đường tròn (O) thành 3 cung bằng nhau.
Do đó $S_{KAB} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho x, y, z là các số thực không âm thõa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Lời giải.

Ta chứng minh $P \geq 2$. (1)

Thật vậy : $P \geq 2 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz \geq xyz$.

Từ giả thiết suy ra $0 \leq x, y, z \geq 2$, do đó $2xy + 2yz + 2xz \geq 2xy \geq xyz$.

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x; y; z) = (2; 0; 0)$ và các hoán vị.

Do đó $minP = 2$.

Ta chứng minh $P \leq 3$. Thật vậy, theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}(2-x)(2-y)(2-z) &= 8 - xyz - 4P + 2(xy+yz+zx) \\ &= 8 - 4P + (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx) \\ &= 4 - 4P + P^2\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Caychy ta được

$$(2-x)(2-y)(2-z) \leq \left(\frac{6-(x+y+z)}{3}\right)^3 = \left(\frac{6-P}{3}\right)^3.$$

Do đó $\left(\frac{6-P}{3}\right)^3 \geq P^2 - 4P + 4 \Leftrightarrow P^3 + 9P^2 - 108 \leq 0$

$\Leftrightarrow (P-3)(P^2+12P+36) \leq 0 \Leftrightarrow P \leq 3$.

Vậy $P \leq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Do đó $maxP = 3$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 133

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VĨNH LONG, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$, với $x\geq 0, x\neq 1$. Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

b) Cho biểu thức $B=\dfrac{2}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}-\dfrac{9}{\sqrt[3]{243}}$. Chứng minh rằng B là số nguyên.

Lời giải.

a) Với $x\geq 0, x\neq 1$, ta có
$A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$
$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{4(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$
$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{-2}{x-1}$.
Ta có A nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{-2}{x-1}$ nguyên.
Suy ra $x-1$ là ước của -2 , từ đó suy ra

$$\begin{cases} x-1=-2 \\ x-1=-1 \\ x-1=1 \\ x-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ (Không thoả điều kiện)} \\ x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}.$$

Vậy x nhận các giá trị $x=0, x=2, x=3$.

b) Ta có $(\sqrt[3]{3}-1)(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=(\sqrt[3]{3})^3-1^3=2$
$\Rightarrow \dfrac{2}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{2}=\sqrt[3]{3}-1.$
Ta có $\dfrac{9}{\sqrt[3]{243}}=\dfrac{\sqrt[3]{3^6}}{\sqrt[3]{3^5}}=\sqrt[3]{3}$
$B=\sqrt[3]{3}-1-\sqrt[3]{3}=-1.$
Vậy B là số nguyên.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 2. Cho phương trình: $x^2-(m+2)x+(m+1)=0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$.

Lời giải.

Ta có $a+b+c=0 \Rightarrow$phương trình có hai nghiệm $x_1=1, x_2=m+1$.

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1\geq 0 \\ \sqrt{1}+\sqrt{m+1}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq -1 \\ \sqrt{m+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq -1 \\ m=3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3.$

Câu 3.

a) Giải phương trình $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2x+y}=4 \\ x^2+1+y=-(x-1)^2(2x+y). \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x\geq 1$

Ta có: $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(3x-2)}=x+2$

$\Leftrightarrow \left\{x\geq -2 \quad 11x^2-24x+4=0 \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{2}{11} \end{array}\right. \end{cases}.$

So với điều kiện ta nhận nghiệm $x=2$.

b) Điều kiện: $x\neq 1; y\neq -2x$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2x+y}=4 \\ (x-1)^2+2x+y=-(x-1)^2(2x+y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2x+y}=4 \\ 2x+y+(x-1)^2=-(x-1)^2(2x+y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2x+y}=4 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{2x+y}=-1 \end{cases}.(*)$

Đặt $\dfrac{1}{(x-1)^2}=a; \dfrac{1}{2x+y}=b$ ta có:$(*)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b=4 \\ a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2}=1 \\ \dfrac{1}{2x+y}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{2x+y}=-2 \end{cases}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2} \\ x=2 \Rightarrow y=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right);\left(2;-\dfrac{9}{2}\right)$.

Câu 4.

a) Chứng minh rằng $2(1^{2017}+2^{2017}+...+99^{2017})$ chia hết cho 9900.

b) Cho $a_1,a_2,...,a_{2017}$ là các số nguyên và $b_1,b_2,...,b_{2017}$ là các số nguyên đó lấy theo thứ tự khác ($b_1,b_2,...,b_{2017}$ gọi là một hoán vị của $a_1,a_2,...,a_{2017}$. Chứng minh rằng tích $(a_1-b_1)(a_2-b_2)...(a_{2017}-b_{2017})$ là một số chẵn.

Lời giải.

a) Nhận xét: Nếu a,blà hai số nguyên dương thì $a^{2017}+b^{2017}\vdots(a+b)$.
Khi đó ta có
$2(1^{2017}+2^{2017}+...+99^{2017})=(1^{2017}+99^{2017})+(2^{2017}+98^{2017})+...+(99^{2017}+1^{2017})\vdots 100$ (1).
Mặt khác $2(1^{2017}+2^{2017}+...+99^{2017})=(1^{2017}+98^{2017})+(2^{2017}+97^{2017})+...+(98^{2017}+1^{2017})+2.99^{2017}\vdots 99$ (2).
Do $(99,100)=1$ và kết hợp với (1), (2) ta được $2(1^{2017}+2^{2017}+...+99^{2017})$ chia hết cho 9900.

b) Ta có: $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+...+(a_{2017}-b_{2017})$
$=(a_1+a_2+...+a_{2017})-(b_1+b_2+...+b_{2017})=0$.
Số thừa số của tích là số lẻ và tổng của chúng bằng 0 là số chẵn nên tất cả các thừa số không thể cùng lẻ (vì tổng các số lẻ là số lẻ) nên có ít nhất một thừa số a_i-b_i chẵn suy ra tích $(a_1-b_1)(a_2-b_2)...(a_{2017}-b_{2017})$ là một số chẵn.

Câu 5. Cho đường tròn $(O;R)$. Lấy điểm A nằm ở ngoài đường tròn sao cho $OA>2R$, từ A kẻ cát tuyến ABC với đường tròn (B nằm giữa A vàC). Các tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại B và C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO cắt AO tại H và cắt đường tròn $(O;R)$ tại E và F (E nằm giữa K và F). Gọi M là giao điểm của OKvà BC, I là trung điểm OA. Chứng minh rằng:

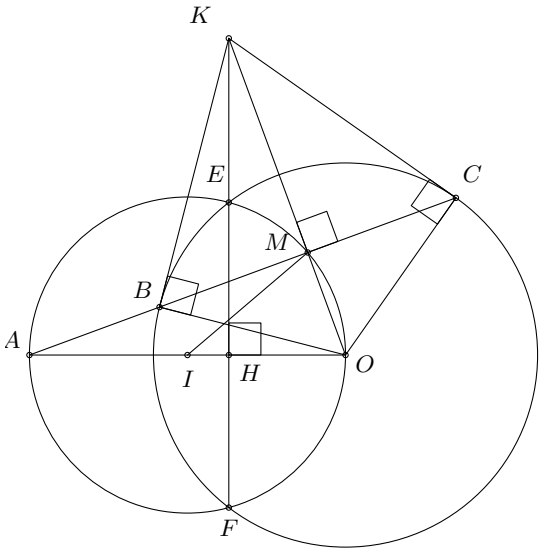
a) $KE.KF=KM.KO$.

b) Tam giác IEF cân.

c) Tứ giác $AEMO$ nội tiếp.

Lời giải.

Ta có hình vẽ:



a) Xét ΔKCE và ΔKFC, ta có:
$\widehat{FKC}$ chung.
$\widehat{KCE} = \widehat{KFC}$ ($\widehat{KCE}$ là góc hợp bởi tiếp tuyến và dây cung CE).
$\Rightarrow \Delta KCE \backsim \Delta KFC$.
$\Rightarrow \dfrac{KC}{KF} = \dfrac{KE}{KC} \Leftrightarrow KC^2 = KE.KF$ (1)
Mặt khác :
$KB = KC; OB = OC \Rightarrow$ OK là đường trung trực của BC $\Rightarrow OK \perp BC$ tại M.
Xét tam giác vuông OKC có : $KC^2 = KM.KO$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra : $KE.KF = KM.KO$. Ta có: $KE.KF = KM.KO \Rightarrow \dfrac{KE}{KO} = \dfrac{KM}{KF}$.
Xét ΔKEM và ΔKOF, ta có:
$\begin{cases} \dfrac{KE}{KO} = \dfrac{KM}{KF} \\ \widehat{FKO} \text{ chung} \end{cases}$
$\Rightarrow \Delta KEM \backsim \Delta KOF \Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{KFO} \Rightarrow$ Tứ giác $EMOF$ nội tiếp.

b) Xét ΔOEF ta có $OE = OF$ nên ΔOEF cân tại O và $OH \perp EF \Rightarrow OH$ là đường cao cũng là đường trung trực của EF.

c) Điểm I thuộc OH cân tại I. Ta có: I thuộc đường trung trực của EF.
Xét tam giác AMO vuông tại M có: $IM = IO = IA \Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của MO.
Mà tứ giác $EMOF$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EMOF$ đường kính là AO.
Vậy tứ giác $AEMO$ nội tiếp.

Câu 6. Với x, y là hai số thực dương và $xy \geq 6$.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{9}{9+x^2} + \dfrac{4}{4+y^2} \geq \dfrac{12}{6+xy}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\dfrac{9}{9+x^2}+\dfrac{4}{4+y^2}+\dfrac{1}{3}xy$.

Lời giải.

a) Đặt $x=3a; y=2b \Rightarrow ab\geq 1$.
Ta có : $\dfrac{9}{9+x^2}+\dfrac{4}{4+y^2}\geq\dfrac{12}{6+xy}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geq\dfrac{2}{1+ab}$.
Ta cần chứng minh: với $ab\geq 1$ ta có:
$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geq\dfrac{2}{1+ab}$.
$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geq\dfrac{2}{1+ab}\Leftrightarrow\dfrac{1+ab}{1+a^2}+\dfrac{1+ab}{1+b^2}\geq 2$.
$\Leftrightarrow\dfrac{1+ab}{1+a^2}-1+\dfrac{1+ab}{1+b^2}-1\geq 0$
$\Leftrightarrow(b-a)(\dfrac{a}{1+a^2}-\dfrac{b}{1+b^2})\geq 0$
$\Leftrightarrow(b-a)^2(\dfrac{(ab-1)}{(1+a^2)})(1+b^2))\geq 0$ (đúng.)

b) $\begin{cases}T=\dfrac{9}{9+x^2}+\dfrac{4}{4+y^2}+\dfrac{1}{3}xy=\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}+2ab\\ T\geq\dfrac{2}{1+ab}+2ab\end{cases}$.
$T\geq(\dfrac{2}{1+ab}+\dfrac{2(1+ab)}{4})+\dfrac{3ab}{2}-\dfrac{1}{2}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{1+ab}.\dfrac{2(1+ab)}{4}}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=3$.
Khi $a=b=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ y=2\end{array}\right.$ do đó $T=3$.
Vậy $\min T=3$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 134

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với a, b là các số dương khác nhau. Thu gọn rồi tính giá trị của biểu thức P biết $(a-1)(b-1)+2\sqrt{ab}=1$.

b) Cho phương trình $x^2-x+b=0$ có các nghiệm là x_1, x_2 và phương trình $x^2-97x+a=0$ có các nghiệm là x_1^4, x_2^4. Tìm giá trị của a.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}P&=\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}+\frac{-a\sqrt{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{b-a}\\&=\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}+\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{b-a}+\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}\\&=\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.\end{aligned}$$

Theo giả thiết ta $ab-a+2\sqrt{ab}-b=0\Leftrightarrow ab=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{ab}=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|$.

Từ đó $P=\begin{cases}1 & \text{nếu } a>b\\ -1 & \text{nếu } a<b\end{cases}$.

b) Theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=b\end{cases}\quad\text{và}\quad\begin{cases}x_1^4+x_2^4=97\\x_1^4x_2^4=a\end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}97&=x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2\\&=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2=(2b-1)^2-2b^2\\&=2b^2-4b+1.\end{aligned}$$

Suy ra $b=8$ hoặc $b=-6$.

Với $b=8$ thì phương trình $x^2-x+b=0$ vô nghiệm.

Với $b=-6$ thì phương trình $x^2-x+b=0$ có hai nghiệm phân biệt, khi đó, $a=b^4=1296$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $(9x^2-18x+5)(3x^2-4x)-7=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+3y}+\sqrt{2x-3y}=3\sqrt{2y}\\ 2\sqrt{2x+3y}-\sqrt{2x-3y}=6\end{cases}$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}&3x(3x-5)(3x-1)(3x-4)-21=0\\ \Leftrightarrow&(9x^2-15x)(9x^2-15x+4)-21=0.\end{aligned}$$

Đặt $t=9x^2-15x+2$ phương trình trở thành $t^2-4-21=0$ hay $t=\pm5$.

Với $t=5$ ta có $9x^2-15x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{3}$.

Với $t=-5$, ta có $9x^2-15x+7=0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{3}$.

b) Điều kiện của phương trình là $\begin{cases}2x+3y\geq0\\ 2x-3y\geq0\\ y\geq0\end{cases}$.

Đặt $a=\sqrt{2x+3y}\geq0$, $\sqrt{2x-3y}\geq0$. Khi đó ta có

$$\begin{cases}a+b=3\sqrt{2y} & (1)\\ 2a-b=6 & (2)\end{cases}.$$

Ta có $(a-b)(a+b)=a^2-b^2=6y$, suy ta $3\sqrt{2y}(a-b)=6y$. Từ hệ phương trình ta thấy $y\neq0$, suy ra $a-b=\sqrt{2y}$, suy ra $a-b=\dfrac{1}{3}(a+b)$ hay $a=2b$. Thay vào (2) ta được $b=2$, suy ra $a=4$. Từ đó

$$\begin{cases}2x+3y=16\\ 2x-3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(5;2)$.

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB<AC$, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H (D thuộc AC, E thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia MH cắt đường tròn (O) tại N.

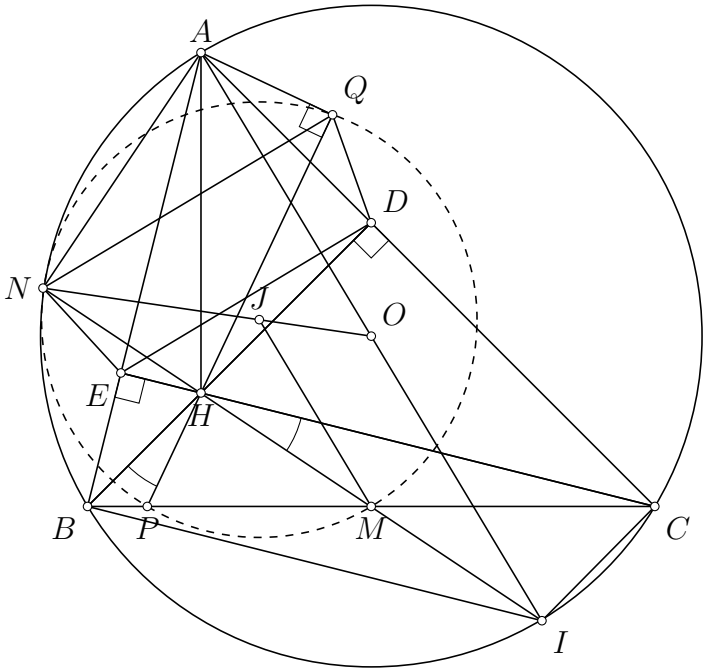
a) Chứng minh rằng năm điểm A, D, H, E, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $\widehat{BHP}=\widehat{CHM}$, Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng HP. Chứng minh rằng tứ giác $DENQ$ là hình thang cân.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Gọi I là điểm đối xứng với A qua O. Khi đó $\begin{cases} IB \parallel CE \text{ (cùng vuông góc với } AB) \\ IC \parallel BD \text{ (cùng vuông góc với } AC) \end{cases}$, suy ra $HBIC$ là hình bình hành, do đó H, I, M thẳng hàng, kéo theo $\widehat{ANH} = 90^\circ$. Mặt khác $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$ nên năm điểm A, D, E, H, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.

b) Dễ thấy Q cũng thuộc đường tròn đường kính AH và $\widehat{QHD} = \widehat{BHP} = \widehat{MHC} = \widehat{NHE}$ nên $NE = QD$. Hai dây cung NE và QD bằng nhau nên tứ giác $NQDE$ là hình thang cân.

c) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ.
Hai góc $\widehat{NAH}$ và $\widehat{NMP}$ có các cạnh đôi một vuông góc nên $\widehat{NMP} = \widehat{NAH}$. Mà $\widehat{NAH} = \widehat{NQH}$ nên $\widehat{NMP} = \widehat{NQP}$ hay tứ giác $MPNQ$ nội tiếp đường tròn (J).
Ta có $\triangle MEN = \triangle MDQ$ (c.g.c) nên $MN = MQ$, do đó MJ là đường trung trực của NQ mà $NQ \parallel DE$ nên $MJ \perp DE$.
Lại có $\widehat{BAI} + \widehat{DEA} = \widehat{BCI} + \widehat{BCA} = 90^\circ$ nên $AO \perp DE$. Suy ra $MJ \parallel OI$. Do đó $\widehat{JNM} = \widehat{JMN} = \widehat{OIN} = \widehat{ONI}$. Từ đó N, I, O thẳng hàng.
Vậy đường tròn (O) và đường tròn (J) tiếp xúc với nhau tại N.

Câu 4. Cho a, b, $c > 0$, $a + b + c \geq 9$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 2\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5}} + 3\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{25}{c}}.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}\geq\frac{(a+b+c)^2}{9}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}\geq\frac{(1+3+5)^2}{a+b+c}=\frac{81}{a+b+c}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}A&\geq 2\cdot\frac{a+b+c}{3}+3\cdot\frac{9}{\sqrt{a+b+c}}\\&\geq\frac{a+b+c}{3}+\frac{a+b+c}{3}+\frac{9}{\sqrt{a+b+c}}+\frac{9}{\sqrt{a+b+c}}+\frac{9}{\sqrt{a+b+c}}\\&\geq 5\sqrt[5]{\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{9}{\sqrt{a+b+c}}\cdot\frac{9}{\sqrt{a+b+c}}\cdot\frac{9}{\sqrt{a+b+c}}}\\&\geq 5\sqrt[5]{81\sqrt{a+b+c}}\\&\geq 15.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=1$, $b=3$, $c=5$.

Vậy $\min A=15$.

Câu 5.

a) Tìm tất cả các số nguyên $m\geq n\geq 0$ sao cho $(m+2n)^3$ là ước của $9n(m^2+mn+n^2)+16$.

b) Trong dãy 2016 số thực a_1, a_2, a_3, …, a_{2016}, ta đánh dấu tất cả các số dương và số mà có ít nhất một tổng của nó với một số các số liên tiếp ngay sau nó là một số dương (ví dụ trong dãy -6, 5, -3, 3, 1, -1, -2, -3, …, -2011 ta đánh dấu các số $a_2=5$, $a_3=-3$, $a_4=3$, $a_5=1$). Chứng minh rằng nếu trong dãy đã cho có ít nhất một số dương thì tổng tất cả các số được đánh dấu là một số dương.

Lời giải.

a) Từ giả thiết suy ra

$$0\leq 9n(m^2+mn+n^2)+16-(m+2n)^3=16-(m-n)^3.$$

Đặt $A=16-(m-n)^3$. Do $m\geq n$ nên ta có ba trường hợp sau:

Trường hợp 1. $m=n$.

Khi đó $A\vdots(m+2n)^3$, suy ra $16\vdots 27n^3$. Không tồn tại n thoả mãn.

Trường hợp 2. $m=n+1$.

Khi đó $A\vdots(m+2n)^3$, suy ra $15\vdots(3n+1)^3$. Từ đó, ta có $n=0$ và $m=1$.

Trường hợp 3. $m=n+2$.

Khi đó $8\vdots(3n+2)^3$, suy ra $n=0$ và $m=2$.

Vậy các cặp (m,n) cần tìm là $(1,0)$ và $(2,0)$.

b) Nếu các số được đánh dấu gồm toàn số không âm thì bài toán hiển nhiên. Giả sử có ít nhất một số được đánh dấu là số âm, kí hiệu là a_i. Gọi j là chỉ số nhỏ nhất $(j>i)$ sao cho $A=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j>0$ và $a_j>0$. Khi đó với mọi $i\leq k<j$ ta đều có $A_k=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_k\leq 0$.

Suy ra $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_j=A-A_k>0$ hay a_{k+1} cũng là số được đánh dấu. Do đó các

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

số a_i, a_{i+1}, ..., a_j đều được đánh dấu.
Vậy tổng tất cả các số được đánh dấu phải là một số dương.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 135

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI NGUYÊN 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y(x^2-y^2)=3x & (1) \\ x(x^2+y^2)=10y & (2) \end{cases}$ với x, y cùng dấu.

Lời giải.

+ Nếu $y=0$ thì $x=0 \Rightarrow (0;0)$ là nghiệm của hệ.

+ Nếu $y \neq 0$ thì đặt $x=ky$ $(k>0)$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y(k^2y^2-y^2)=3ky \\ ky(k^2y^2+y^2)=10y \end{cases} \Rightarrow \frac{2(k^2-1)}{k(k^2+1)}=\frac{3k}{10} \Rightarrow 3k^4-17k^2+20=0$$

$$\Rightarrow k=\pm 2 \vee k=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Do $k>0$ nên $k=2$ hoặc $k=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

- Với $k=2 \Rightarrow x=2y$, thay vào (1) ta được $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$.
  $\Rightarrow (2;1) \vee (-2;-1)$ là nghiệm của hệ

- Với $k=\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{5}{3}}y$, thay vào (1) ta được

$$2y\left(\frac{5}{3}y^2-y^2\right)=15y \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{3\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5\sqrt{15}}{4}}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm: $(2;1), (-2,-1), \left(\sqrt{\frac{5\sqrt{15}}{4}};\sqrt{\frac{3\sqrt{15}}{4}}\right), \left(-\sqrt{\frac{5\sqrt{15}}{4}};-\sqrt{\frac{3\sqrt{15}}{4}}\right)$

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 9 \\ x \geq 6\sqrt{x-9} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 9.$

Ta có $P=\sqrt{(3+\sqrt{x-9})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{x-9})^2}=|3+\sqrt{x-9}|+|3-\sqrt{x-9}|$.

Do tính chất $|A|+|B| \geq |A+B|$. Dấu " = " xảy ra khi $AB \geq 0$ nên

$$P=|3+\sqrt{x-9}|+|3-\sqrt{x-9}| \geq |3+\sqrt{x-9}+3-\sqrt{x-9}|=6$$

Dấu "=" xảy ra khi $(3+\sqrt{x-9})(3-\sqrt{x-9}) \geq 0 \Leftrightarrow 9-(x-9) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 18$.

Vậy $\min P=6$ khi $9 \leq x \leq 18$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 3. Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình:

$$2xy+x+y=87.$$

Lời giải.

Ta có $2xy+x+y=83 \Leftrightarrow 4xy+2x+2y=166 \Leftrightarrow (2x+1)(2y+1)=167$.

Do 167 là số nguyên tố nên $2x+1$ chỉ có thể là một trong 4 số $\pm 1, \pm 167$.

- Với $2x+1=1$ ta được $x=0, y=83$.
- Với $2x+1=-1$ ta được $x=-1, y=-84$.
- Với $2x+1=167$ ta được $x=83, y=0$.
- Với $2x+1=-167$ ta được $x=-84, y=-1$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên (x,y) là $(0;83), (-1;-84), (83;0), (-84;-1)$.

Câu 4. Tìm tất cả các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\sqrt[3]{\overline{abcde}}=\overline{ab}$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{abcde}=1000\overline{ab}+\overline{cde}$.

Ta lại có $1000\overline{ab}+\overline{cde}=(\overline{ab})^3$. Đặt $m=\overline{ab}, n=\overline{cde}$ ta được

$$1000m+n=m^3 \Rightarrow m^3 \geq 1000m \Rightarrow m^2 \geq 1000 \Rightarrow m \geq 32 \ (1)$$

Vì $n<1000$ nên $m^3<1000m+1000 \Rightarrow m(m^2-1000)<1000$.

Nếu $m \geq 33$ thì $m(m^2-1000) \geq 33.89=2937 \geq 1000$ (vô lý).

Do đó $m<33$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $m=32$.

Vậy $\overline{abcde}=32^3=32768$.

Câu 5. Cho ba số a, b, c nguyên dương, nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Chứng minh $a+b$ là số chính phương.

Lời giải.

Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ suy ra $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow c(a+b)=ab \Leftrightarrow ab-ac-bc=0 \ (1)$

Cộng hai vế của (1) với c^2 ta được $(a-c)(b-c)=c^2 \quad (2)$

Nếu d là ước nguyên dương của $a-c$ và $b-c$ thì $c^2 \vdots d^2$

Do đó $c \vdots d$, mà $a-c$ và $b-c$ cùng chia hết cho d nên d là ước của a, b, c. Theo giả thiết a, b, c nguyên tố cùng nhau nên $d=1$.

Vậy $a-c$ và $b-c$ không có ước chung lớn hơn 1, mà $(a-c)(b-c)$ là số chính phương nên $a-c$ và $b-c$ là số chính phương khác nhau.

Đặt $a-c=k^2, b-c=m^2 \Rightarrow c^2=(a-c)(b-c)=k^2m^2 \Rightarrow c=km$

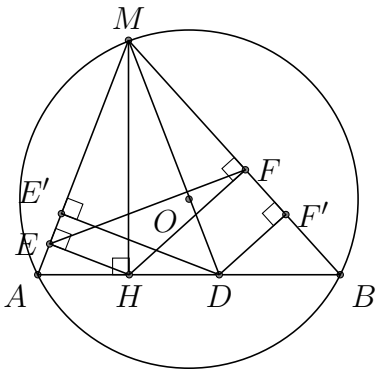
$\Rightarrow a+b=(a-c)+(b-c)+2c=k^2+m^2+2km=(k+m)^2$

Vậy $a+b$ là số chính phương.

Câu 6. Cho đường tròn tâm O và dây cung AB. Từ một điểm M bất kỳ trên đường tròn (M khác A và B), kẻ $MH \perp AB$ tại H. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF, cắt dây cung AB tại D. Chứng minh rằng: $\frac{MA^2}{MB^2}=\frac{AH}{BD}.\frac{AD}{BH}$.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



Gọi E', F' lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên MA, MB.
Ta có:

$$\frac{AH}{BD}=\frac{S_{MAH}}{S_{MBD}}=\frac{HE.MA}{DF'.MB};\ \frac{AD}{BH}=\frac{S_{MAD}}{S_{MBH}}=\frac{DE'.MA}{HF.MB}$$

$$\frac{AD}{BD}.\frac{AH}{BH}=\frac{MA^2}{MB^2}.\frac{HE.DE'}{DF'.HF}\ (1)$$

Ta có: $\widehat{EHF}=\widehat{E'DF'}$ (vì cùng bù với góc $\widehat{AMB}$)
Ta lại có $\widehat{HFE}=\widehat{E'DF'}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)
Mà $\widehat{DMF'}=\widehat{DE'F'}$ (cùng chắn cung DF')
$\Rightarrow \widehat{HFE}=\widehat{DE'F}$.
Suy ra hai tam giác HEF và $DF'E'$ đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{HE}{HF}=\frac{DF'}{DE'}\Rightarrow HE.DE'=HF.DF'\Rightarrow \frac{HE.DE'}{HF.DF'}=1\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\dfrac{MA^2}{MB^2}=\dfrac{AH}{BD}.\dfrac{AD}{BH}$.

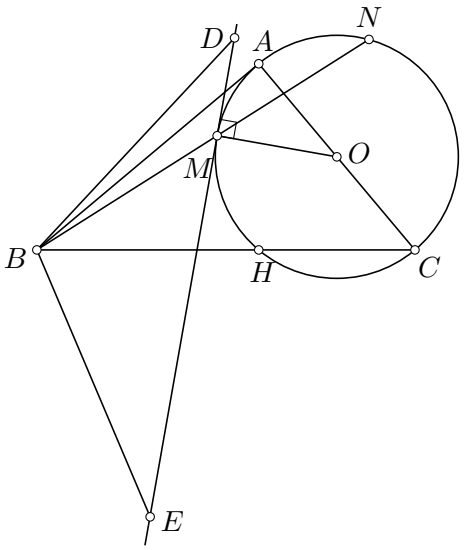
Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC. Trên cung nhỏ AH của (O) lấy điểm M bất kỳ khác A và H. Trên tiếp tuyến của M tại (O) lấy hai điểm D, E sao cho $BD = BE = BA$. Đường thẳng BM cắt (O) tại điểm thứ hai N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BDNE$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDNE$ và đường tròn (O) tiếp xúc nhau.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a. Vì $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$. Suy ra AC là đường kính của đường tròn (O). Mà ΔABC vuông tại A nên AB là tiếp tuyến của (O).
Xét các tam giác BAM và BNA có: $\widehat{ABN}$ chung và $\widehat{BAM} = \widehat{BNA}$ (có số đo bằng nửa số đo cung AM). Vậy $\triangle BAM$ và $\triangle BNA$ đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BA}{BN} \Rightarrow BM.BN = BA^2$.
Theo giả thiết $BA = BD \Rightarrow BM.BN = BD^2 \Rightarrow \dfrac{BM}{BD} = \dfrac{BD}{BN}$.
Mặt khác $\widehat{DBN}$ là góc chung của $\triangle BDM$ và $\triangle BND$.
Vậy nên $\triangle BDM \backsim \triangle BND \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{BND}$.
Ta có $BD = BE \Rightarrow \triangle BDE$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{BND} = \widehat{BED}$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $BDNE$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b. Kí hiệu đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDNE$ là (O').
Giả sử (O) và (O') không tiếp xúc nhau. Vì (O) và (O') có điểm chung N nên chúng điểm chung thứ hai là N' và BN' cắt DE tại điểm M' khác M.
Các tam giác BDM' và $BN'D$ có: $\widehat{DBN'}$ chung, $\widehat{BN'D} = \widehat{BED}$ (hai góc nội tiếp cung chắn cung DB của (O')), $\widehat{BED} = \widehat{BDE} \Rightarrow \widehat{BN'D} = \widehat{BDE}$
Vậy nên các tam giác BDM' và $BN'D$ đồng dạng
$\Rightarrow \dfrac{BM'}{BD} = \dfrac{BD}{BN'} \Rightarrow BM'.BN' = BD^2$.
Ta có $BM.BN = BD^2$ nên $BM'.BN' = BM.BN \Rightarrow \dfrac{BM}{BN'} = \dfrac{BM'}{BN}$.
Hai tam giác BMM' và $BN'N$ có $\widehat{NBN'}$ chung và $\dfrac{BM}{BN'} = \dfrac{BM'}{BN}$ nên chúng đồng dạng
$\Rightarrow \widehat{BMM'} = \widehat{BN'N} \Rightarrow \widehat{BN'N} + \widehat{M'MN} = 180^\circ$
$\Rightarrow$ Tứ giác $M'MNN'$ nội tiếp đường tròn.
Đường tròn ngoại tiếp $M'MNN'$ và (O) có chung nhau ba điểm M, N, N' nên chúng trùng nhau $\Rightarrow M'$ là điểm chung thứ hai của (O) và tiếp tuyến DE. Điều này vô lý nên giả sử sai.
Vậy đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDNE$ và đường tròn (O) tiếp xúc nhau.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 136

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI BÌNH - VÒNG 2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải phương trình $5x-(x+3)\sqrt{2x-1}-1=0$.

b) Cho hai số thực a, b bất kì. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$x^2+2ax+3ab=0 \tag{0.54}$$
$$x^2+2bx-8ab=0. \tag{0.55}$$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x\geq\dfrac{1}{2}$.
Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}&4(x-1)-(x+3)(\sqrt{2x-1}-1)=0\\ \Leftrightarrow\ &4(x-1)-\frac{2(x+3)(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-1)\left(4-\frac{2(x+3)}{\sqrt{2x-1}+1}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-1)\frac{(1-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x-1}-3)}{\sqrt{2x-1}+1}=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=1\text{ (thỏa mãn)}\\ x=5\text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$ và $x=5$.

b) Phương trình (1) có $\Delta_1=4a^2-12ab$ (3)
Phương trình (2) có $\Delta_2'=b^2+8ab$ (4)
Từ (3), (4) ta có $\Delta_1+\Delta_2'=4a^2-4ab+b^2=(2a-b)^2\geq 0$.
Từ đó suy ra ít nhất một phương trình phải có nghiệm.

Câu 2.

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $9x^2+3y^2+6xy-6x+2y-35=0$.

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và thỏa mãn $P(2016)=2016$, $P(2016)=2018$. Tính giá trị của biểu thức $-3P(2018)+P(2019)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

a) Ta có

$$9x^2+3y^2+6xy-6x+2y-35=0$$
$$\Leftrightarrow 9x^2+y^2+1+6xy-6x-y+2y^2+4y+2=38$$
$$(3x+y-1)^2+2(y+1)^2=38$$

Từ đó suy ra $(3x+y-1)^2$ là số chính phương chẵn và nhỏ hơn 38, nên ta có

- $(3x+y-1)^2=0\Rightarrow (y+1)^2=19$ (loại),
- $(3x+y-1)^2=4\Rightarrow (y+1)^2=17$ (loại),
- $(3x+y-1)^2=16\Rightarrow (y+1)^2=11$ (loại),
- $(3x+y-1)^2=36\Rightarrow (y+1)^2=1$ (thỏa mãn).

Giải hệ $\begin{cases}(3x+y-1)^2=36\\(y+1)^2=1\end{cases}$ ta được các cặp nghiệm nguyên: $(-1;-2);(3;-2)$.

b) Đặt $Q(x)=P(x)-x-1$.
Ta có $Q(2016)=Q(2017)=0$ nên $Q(x)=(x-2016)(x-2017)(x-a)$.
Suy ra

$$P(x)=(x-2016)(x-2017)(x-a)+x+1.$$

Từ đó ta có

$$-3P(2018)+P(2019)=-4031.$$

Câu 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}y^3+\sqrt{8x^4-2y}=2(2x^4+3)\\\sqrt{2x^2+x+y}+2\sqrt{x+2y}=\sqrt{9x-2x^2+19y}.\end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $a=2x^2$, $b=x+y$, $c=x+2y$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{a+b}+2\sqrt{c}=\sqrt{10c-a-b}\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{c(a+b)}=3c$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a+b}+\sqrt{c}\right)^2=\left(2\sqrt{c}\right)^2\Leftrightarrow a+b=c.$$

Từ đó suy ra $y=2x^2\geq 0\,(*)$, thay vào phương trình thứ nhất ta có

$$y^3+\sqrt{2y^2-2y}=y^2+6$$
$$\Leftrightarrow y^3-y^2-4+\sqrt{2y^2-2y}-2=0$$
$$\Leftrightarrow (y-2)\left(y^2+y+2+\frac{2(y+1)}{\sqrt{2y^2-2y}+2}\right)=0\,(**)$$

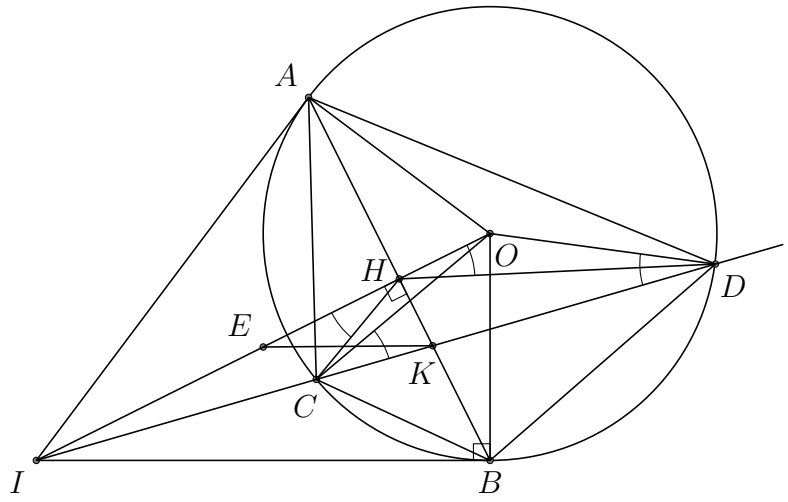
Do $(*)$ nên $(**)\Leftrightarrow y=2$. Từ đó suy ra $x=\pm 1$.

Câu 4. Từ một điểm I nằm bên ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến IA, IB (A, B là các tiếp điểm) và vẽ cát tuyến ICD (không qua tâm O) với đường tròn (C nằm giữa I và D).

a) Chứng minh rằng $AC.BD=AD.BC$.

b) Gọi K là giao điểm của CD và AB, E là trung điểm của OI. Chứng minh rằng $KA.KB = OE^2 - EK^2$.

c) Gọi H là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $\widehat{ADH} = \widehat{IDB}$.



Lời giải.

a) Ta có
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BIC} = \widehat{DIB}\\ \widehat{IBC} = \widehat{IDB}\ (\text{cùng chắn cung } \widehat{BC})\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle IBC \backsim \triangle IDB\ (\text{g-g}) \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IB} = \frac{BC}{DB}. \quad (1)$$
Ta lại có
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AIC} = \widehat{DIA}\\ \widehat{IAC} = \widehat{IDA}\ (\text{cùng chắn cung } \widehat{AC})\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle IAC \backsim \triangle IDA\ (\text{g-g}) \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{DA}. \quad (2)$$
Từ (1)(2) suy ra $\dfrac{AC}{DA} = \dfrac{BC}{DB} \Rightarrow AC.BD = AD.BC$ (do $IA = IB$).

b) Ta có
$$\begin{aligned} KA.KB =& (AH + HK)(BH - HK) = AH^2 - HK^2\\ =& (AE^2 - EH^2) - (EK^2 - EH^2) = AE^2 - EK^2 = OE^2 - EK^2. \end{aligned}$$

c) Dễ thấy tam giác OBI vuông tại B và có BH là đường cao, suy ra $IB^2 = IH.IO$. (3)
Từ (1)(3) ta được $IH.IO = IC.ID$, suy ra tứ giác $CDOH$ nội tiếp. Từ đó suy ra
$$\widehat{OHD} = \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \widehat{CHI} \Rightarrow \widehat{CHK} = \widehat{DHK}.$$
Vậy HB là phân giác góc $\widehat{CHD}$ suy ra $\widehat{DHB} = \dfrac{1}{2}\widehat{DHC}$. (4)
Cũng do tứ giác $CDOH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{COD} = \widehat{DHC}$. (5)
Từ (4)(5) suy ra $\widehat{CAD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD} = \dfrac{1}{2}\widehat{CHD} = \widehat{DHB}$. Mặt khác $\widehat{DHB} + \widehat{DHA} = 180^\circ$ và $\widehat{CBD} + \widehat{CAD} = 180^\circ$ nên $\widehat{CBD} = \widehat{AHD}$. (6)
Mà theo bài ra, tứ giác $ACBD$ nội tiếp nên $\widehat{HAD} = \widehat{BCD}$. (7)
Từ (6)(7) ta có $\triangle BCD \backsim \triangle HAD$ (g-g), suy ra $\widehat{ADH} = IDB$.

Câu 5. Cho các số thực $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ và thỏa mãn $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 52$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + y + z$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lời giải.

Ta có $5(x^2+y^2+z^2)=52+2x^2+y^2\geq 52+2+1=55$ suy ra $x^2+y^2+z^2\geq 11$. (1)

Ta lại có $(x-1)(y-1)\geq 0\Leftrightarrow xy+1\geq x+y$.

Tương tự ta có $yz+1\geq y+z$; $xz+1\geq x+z$.

Từ đó suy ra $xy+yz+zx+3\geq 2x+2y+2z\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)+6\geq 4(x+y+z)$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra

$$(x+y+z)^2+6\geq 4(x+y+z)+11$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2-4(x+y+z)-5\geq 0$$

Giải ra ta được $F=x+y+z\geq 5$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1,z=3$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 137

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC TÂY NINH, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Tính $T = \sqrt{8} + \sqrt{49} - 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $T = \sqrt{8} + \sqrt{49} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 7 - 2\sqrt{2} = 7$.

Câu 2. Giải phương trình $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4.2.2 = 9$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{-(-5) - 3}{4} = \dfrac{1}{2}$ và $x_2 = \dfrac{-(-5) + 3}{4} = 2$.

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc cạnh BC), cho $BH = 2$ và $CH = m$. Xác định m để đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn có tâm là điểm A và có bán kính $R = 4$. Khi đó tính độ dài các cạnh AB và AC.

Lời giải.

Để BC tiếp xúc với đường tròn $(A, R = 4)$ thì $AH = 4$.

Mặt khác tam giác ABC vuông tại A nên ta có $AH^2 = BH.CH \Leftrightarrow 4^2 = 2.m \Leftrightarrow m = 8$.

Câu 4. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 2 = 0$ có nghiệm x_1, x_2 sao cho $T = x_1 + x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta' = (m-1)^2 - m^2 - 2 = -2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{1}{2}$.(1)

Theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$. (2)

Ta có $T = (x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) - ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) = -2(m - \dfrac{5}{2})^2 + \dfrac{21}{2} \leq \dfrac{21}{2}$ (theo (2)).

Vậy $T_{\max} = \dfrac{21}{2}$ khi $m = \dfrac{5}{2}$.

Câu 5. Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có $\Delta_1 = m^2 - 4n$.

Phương trình $x^2 + nx + m = 0$ có $\Delta_2 = n^2 - 4m$.

Theo bài ra ta có $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow mn = 2(m+n)$. (∗)

Thay (∗) vào $\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + n^2 - 4(m+n)$ ta được

$$\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + n^2 - 2mn = (m+n)^2 \geq 0.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Vậy ít nhất một trong hai Δ_1, Δ_2 phải lớn hơn hoặc bằng 0, có nghĩa là phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2x=y^3-8y \\ 3(x^2+1)=y^2-3. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x(x^2+2)=y(y^2-8) & (1) \\ 3(x^2+2)=y^2. & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta thấy $y\neq 0$, nên chia tương ứng hai vế phương trình (1) cho hai vế phương trình (2) ta được

$$\frac{x}{3}=y-\frac{8}{y}\Leftrightarrow xy=3y^2-24\Leftrightarrow y(3y-x)=24. \quad (3)$$

Từ đó ta cũng có

$$9(x^2+2)=3y^2=24+xy\Rightarrow 9x^2-xy=6\Leftrightarrow x(9x-y)=6. \quad (4)$$

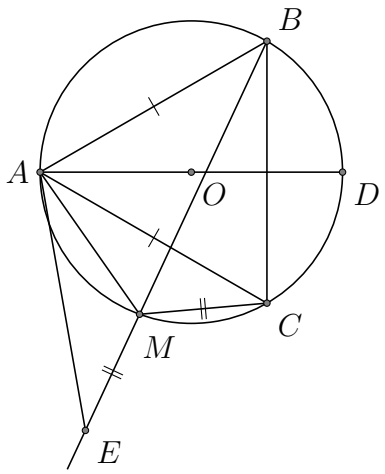
Từ (4) ta thấy $x\neq 0$ và $9x-y\neq 0$, nên chia (3) cho (4) ta được

$$\frac{3y^2-xy}{9x^2-xy}=4\Leftrightarrow 36x^2-3xy-3y^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=-4x. \end{array}\right.$$

- Với $y=3x$, thay vào phương trình (2) ta có $3x^2+6=9x^2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1. \end{array}\right.$
- Với $y=-4x$, thay vào phương trình (2) ta có $3x^2+6=16x^2\Leftrightarrow x^2=\dfrac{6}{13}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ x=\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{array}\right.$

Câu 7. Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD. Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ của đường tròn (O) (M khác A và C), trên tia BM lấy một điểm E sao cho $ME=MC$ (E ở ngoài đoạn BM). Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AE luôn đi qua B và C.

Lời giải.



Nhận thấy sđ $\overset{\frown}{ABC}$ = sđ $\overset{\frown}{ACB}$ = suy ra góc $\overset{\frown}{AMC}=\overset{\frown}{AME}$. (1)

Xét hai tam giác AMC và AME có

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

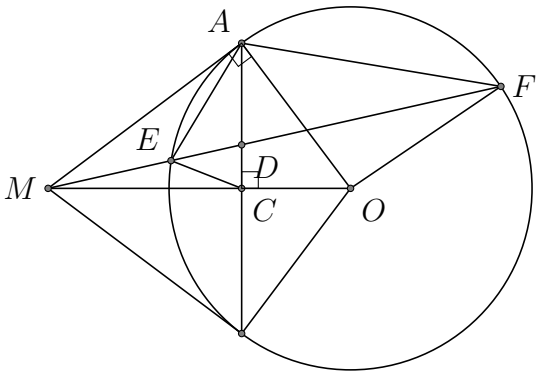
AM chung,
$\widehat{AMC} = \widehat{AME}$ (theo (1)),
$MC = ME$ (gt)
Suy ra $\triangle AMC = \triangle AME \Rightarrow AE = AC = AB$.
Vậy đường tròn tâm A bán kính AE luôn đi qua B và C.

Câu 8. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là giao điểm của MO và AB, lấy D thuộc đoạn thẳng AC (D khác A và C). Đường thẳng MD cắt (O) tại hai điểm E và F ($ME < MF$).

a) Chứng minh rằng $MA^2 = ME.MF$.

b) Chứng minh rằng bốn điểm E, C, O, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



a) Xét hai tam giác AME và FMA có
$\widehat{AME} = \widehat{FMA}$
$\widehat{MAE} = \widehat{MFA}$ (cùng chắn cung $\widehat{AE}$)
Vậy $\triangle AME \backsim \triangle FMA$ (g-g), suy ra $\dfrac{AM}{FM} = \dfrac{ME}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = ME.MF.$ (1)

b) Do tam giác MAO vuông tại A nên ta có $MA^2 = MC.MO.$ (2)
Xét hai tam giác MCE và MFO có
$\widehat{CME} = \widehat{FMO}$
$\dfrac{ME}{MO} = \dfrac{MC}{MF}$ (do (1) và (2))
Vậy $\triangle MCE \backsim \triangle MFO$ (c-g-c), suy ra $\widehat{MCE} = \widehat{MFO}$, suy ra tứ giác $COFE$ nội tiếp.

Câu 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{9}{1-(ab+bc+ca)} + \dfrac{1}{4abc}$.

Lời giải.
Ta có
$$1-(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$P = \frac{9}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{\sum a}{4abc} = \frac{9}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{ab}$$
$$\geq \frac{9}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{1}{4}\frac{9}{\sum ab} = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{1}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{1}{2\sum ab}\right) \geq \frac{9}{2}.\left(\frac{9}{2\left(\sum a\right)^2}\right)$$
$$= \frac{81}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 138

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐHSP HCM, VÒNG 2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Quảng đường từ A đến B dài 50 km. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, do xe bị hỏng nên người ấy phải dừng lại 30 phút để sửa xe. Vì vậy muốn đến B đúng thời gian đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quảng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp.

b) Giải phương trình $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+25}=0$.

Lời giải.

a) Gọi vận tốc ban đầu của người đi xe đạp là x km/h. Theo bài ra ta có phương trình
$$(x+2)\left(\frac{50}{x}-\frac{5}{2}\right)=50-2x \Leftrightarrow x=10.$$

b) ĐKXĐ: $x\geq -4$. Phương trình ban đầu tương đương với
$$\begin{cases} x\geq -4 \\ 2\sqrt{(x+4)(x+9)}=12-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\leq x\leq 12 \\ 3x^2+76x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Câu 2.

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta luôn có n^7-n chia hết cho 42.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\dfrac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên.

Lời giải.

a) Ta có $n^7-n=n(n+1)(n-1)$ suy ra $6\mid n^7-n$. Ngoài ra, theo định lí Fermat nhỏ thì $7\mid n^7-n$. Vì $(6,7)=1$ nên $42\mid n^7-n$.

b) $x\in\mathbb{Z}, \dfrac{x-3}{x^2+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow (x^2+1)\mid (x-3)(x+3)\Rightarrow (x^2+1)\mid 10\Rightarrow x\in\{-2;-1;0;1;3\}$.

Câu 3.

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng
$$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\geq 2(a+b+c).$$

b) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\geq\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases}\sqrt{2(a^2+b^2)}\geq a+b\\ \sqrt{2(b^2+c^2)}\geq b+c\\ \sqrt{2(a^2+c^2)}\geq a+c\end{cases}$. Cộng theo vế các bất đẳng thức ta được điều cần chứng minh.

b) Áp dụng BĐT Cauchy ta được

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}}+\left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)\geq\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}.$$

Câu 4. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=6$.

a) Tính giá trị của $xy+yz+zx$ và chứng minh rằng $\dfrac{2}{3}\leq z\leq 2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+z^3$.

Lời giải.

a) Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=5$

Ta có $\begin{cases}x+y=4-z\\ xy=5-4z+z^2\end{cases}$ do đó x,y là hai nghiệm của phương trình $X^2-(4-z)X+5-4z+z^2$. Điều kiện phương trình có nghiệm là $3z^2-8z+4\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\leq z\leq 2$.

b) Chứng minh tương tự: $\dfrac{2}{3}\leq x\leq 2$, $\dfrac{2}{3}\leq y\leq 2$.

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz+4$

+ Từ $x,y,z\leq 2$ suy ra $(x-2)(y-2)(z-2)\leq 0\Leftrightarrow P\leq 10$ $(x=2,y=z=1)$.

+ Từ $x,y,z\geq\dfrac{2}{3}$ suy ra $P\geq\dfrac{86}{9}$ $(x=\dfrac{2}{3},y=z=\dfrac{5}{3})$.

Câu 5. Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính vuông góc với nhau là AB và CD. Trên cung nhỏ BC lấy điểm E (khác B, C), AE cắt CD tại F. Gọi giao điểm của CB và AE là G, giao điểm của ED và AB là H.

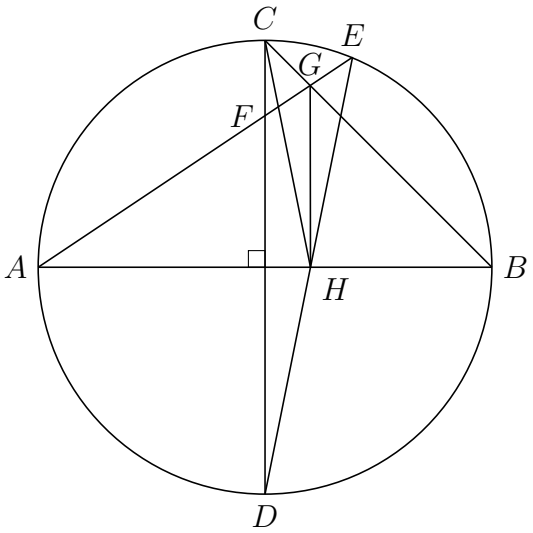
a) Chứng minh rằng AE là phân giác của góc CED và tứ giác $FOBE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $GH\parallel CD$.

c) Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{DEA}$. Suy ra AE là tia phân giác $\widehat{CED}$. Tứ giác $EFOB$ nội tiếp.

b) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \widehat{HBG} = \widehat{HEG} \Rightarrow GEBH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{GHO} = \widehat{GEB} = 90^\circ \Rightarrow GH \parallel CD$.

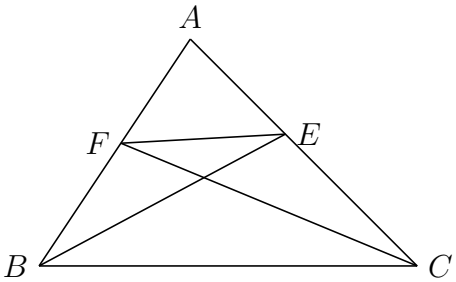
c) $GH \parallel CD \Rightarrow \widehat{GHE} = \widehat{CDH}$, $\widehat{CHG} = \widehat{DCH} \Rightarrow HG$ là phân giác $\widehat{CHE}$. Hay G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE.

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Gọi BE và CF là các phân giác trong của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng tam giác AEF có ba góc nhọn.

b) Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng EF. Gọi H, D, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng $MH = MD + MK$.

Lời giải.



a) Ta có $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{CE}{BC} = \dfrac{AC}{AB+BC} \Rightarrow AE = \dfrac{AB \cdot AC}{AB+BC}$. Tương tự $AF = \dfrac{AB \cdot AC}{AC+BC}$. Vì $AB < AC$ nên $AE > AF$.

$\triangle AEF$ có $AE > AF$ suy ra $\widehat{AFE} > \widehat{AEF}$. Vẽ $FL \parallel BC$ $(L \in AC)$ suy ra $\dfrac{LC}{LA} = \dfrac{FB}{FA} = \dfrac{BC}{AC} < \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{EC}{EA} \Rightarrow \dfrac{LC}{LA} < \dfrac{EC}{EA} \Rightarrow \dfrac{AC}{LA} < \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow LA > AE \Rightarrow \widehat{AFE} < \widehat{AFL} = \widehat{ABC} < 90^\circ$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Gọi N, V lần lượt là hình chiếu của E trên BC, AB. Gọi G, J lần lượt là hình chiếu của F trên BC, AC. P là giao điểm của MH và NF. Ta có $EN = EV$, $FJ = FG$.
$\dfrac{MD}{FJ} = \dfrac{EM}{EF} = \dfrac{NP}{NF} = \dfrac{PH}{FG} \Rightarrow MD = PH$; $\dfrac{MK}{EV} = \dfrac{FM}{EF} = \dfrac{MP}{EN} \Rightarrow MK = MP$.
Do đó, $MH = PH + MP = MD + MK$.

Câu 7. Cho các số tự nhiên a, b, c, d bất kì. Chứng minh rằng tích của 6 số $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$, $a-c$, $b-d$ là một số nguyên chia hết cho 12.

Lời giải.

Đặt $M = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$. Các số a, b, c, d chia cho 3 dư 0,1 hoặc 2 suy ra tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 3. Do đó, $3 \mid M$.

Ngoài ra, ta cũng dễ chứng minh được $4 \mid M$ mà $(3, 4) = 1$ nên $12 \mid M$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 139

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TOÁN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI VÒNG 2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của n:

$$P=\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}$$

Lời giải.

Xét với n nguyên dương, chú ý rằng $\sqrt{n^2+(n+1)^2}.\sqrt{(n-1)^2+n^2}=\sqrt{4n^4+1}$. Ta có:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)^2&=n^2+(n+1)^2+2\sqrt{4n^4+1}+(n-1)^2+n^2\\&=4n^2+2+2\sqrt{4n^4+1}\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}P&=\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}\\&=\sqrt{4n^2+2+2\sqrt{4n^4+1}}.\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}\\&=\sqrt{(4n^2+2)^2-(2\sqrt{4n^4+1})^2}\\&=\sqrt{16n^4+16n^2+4-(16n^4+4)}=4n\end{aligned}$$

Vì n nguyên dương nên P nguyên dương, ta có điều phải chứng minh.

Câu 2.

a) Tìm số nguyên dương x,y thỏa mãn : $x^3-y^3=95(x^2+y^2)$.

b) Tìm các số thực x,y thỏa mãn:

$$\frac{x^2-4}{x}+\frac{y^2-4}{y}+8=4\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)$$

Lời giải.

a) Trước tiên ta chứng minh (x^2+xy+y^2) chia hết cho 5 khi và chỉ khi x và y cùng chia hết cho 5.

Thật vậy, nếu $(x^2+xy+y^2)\vdots 5$ thì $(x^3-y^3)\vdots 5$. Xét các số dư của x và y khi chia cho 5, ta thấy chỉ có $x\equiv y\pmod 5$ thỏa mãn. Cho $x\equiv y\equiv k\pmod 5$, ta có $(x^2+xy+y^2)\equiv 3k^2\equiv 0\pmod 5$. Vậy $k=0$ và nhận xét được chứng minh.

Quay trở lại bài toán, vì vế phải dương nên $x>y$. Xét $(x;y)=d$ thì $x_1=\dfrac{x}{d}$; $y_1=\dfrac{y}{d}$ nguyên tố cùng nhau và $95(x_1^2+y_1^2)\vdots(x_1^2+x_1y_1+y_1^2)$.

Giả sử tồn tại q nguyên tố thỏa mãn $(x_1^2+y_1^2,x_1^2+x_1y_1+y_1^2)\vdots q$ thì $x_1y_1\vdots q$. Vậy $x_1\vdots q$ hoặc

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$y_1 \vdots q$. Lại có $(x_1^2+y_1^2) \vdots q$ nên x_1, y_1 cùng chia hết cho q (vô lý).
Vậy $(x_1^2+y_1^2, x_1^2+x_1y_1+y_1^2)=1$, suy ra $95 \vdots (x_1^2+x_1y_1+y_1^2)$. Lại theo nhận xét đã chứng minh và từ $(x_1,y_1)=1$, ta có $(x_1^2+x_1y_1+y_1^2)$ không chia hết cho 5. Vậy $19 \vdots (x_1^2+x_1y_1+y_1^2)$.
Vì $x>y$ nên $x_1>y_1$. Xét các trường hợp:
Nếu $y_1=1$ thì không có x_1 thỏa mãn.
Nếu $y_1=2$ thì $x_1=3$ (thỏa mãn).
Nếu $y_1>2$ thì $19<3^2+3.4+4^2=37\le (x_1^2+x_1y_1+y_1^2)$.
Đặt $x=3d$, $y=2d$, ta có $19d^3=95.13d^2 \Rightarrow d=65$. Vậy $(x,y)=(195,130)$.

b) Điều kiện xác định: $x\ge 1$, $y\ge 1$. Ta có:

$$\frac{x^2-4}{x}+\frac{y^2-4}{y}+8=4\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2-4}{x}-4\sqrt{x-1}+4\right)+\left(\frac{y^2-4}{y}-4\sqrt{y-1}+4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x-4-4x\sqrt{x-1}}{x}+\frac{y^2+4y-4-4y\sqrt{y-1}}{y}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2\sqrt{x-1})^2}{x}+\frac{(y-2\sqrt{y-1})^2}{y}=0$$

Vì $x\ge 1, y\ge 1$ nên $\dfrac{(x-2\sqrt{x-1})^2}{x}+\dfrac{(y-2\sqrt{y-1})^2}{y}\ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=2$.
Vậy $x=y=2$.

Câu 3. Cho S là tập hợp các số nguyên dương n có dạng $n=x^2+3y^2$ trong đó x,y là các số nguyên. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a,b\in S$ thì $ab\in S$.

b) Nếu $N\in S$ và N chẵn thì N chia hết cho 4 và $\frac{N}{4}\in S$.

Lời giải.

a) Nếu $a,b\in S$ thì $a=m^2+3n^2$ và $b=p^2+3q^2$.
Ta có $ab=(m^2+3n^2)(p^2+3q^2)=(mp+3nq)^2+3(mq-pn)^2$.
Vậy $ab\in S$.

b) Nếu $N\in S$ thì $N=x^2+3y^2$. Dĩ nhiên nếu $2\mid x$ thì từ N chẵn, ta có $2\mid y$, trường hợp này hiển nhiên $\frac{N}{4}\in \mathbb{S}$.
Xét x,y đều lẻ, ta có $x^2-9y^2\equiv 1-9\equiv 0 \pmod 8$, do đó $4\mid x-3y$ hoặc $4\mid x+3y$. Giả sử $4\mid x-3y$ (trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Khi đó:

$$\frac{N}{4}=\left(\frac{x-3y}{4}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{4}\right)^2$$

Vậy $\dfrac{N}{4}\in S$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn $AB<AC$. Kẻ đường cao AH. Đường tròn (O) đường kính AH cắt cạnh AB, AC tương ứng tại D, E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại S.

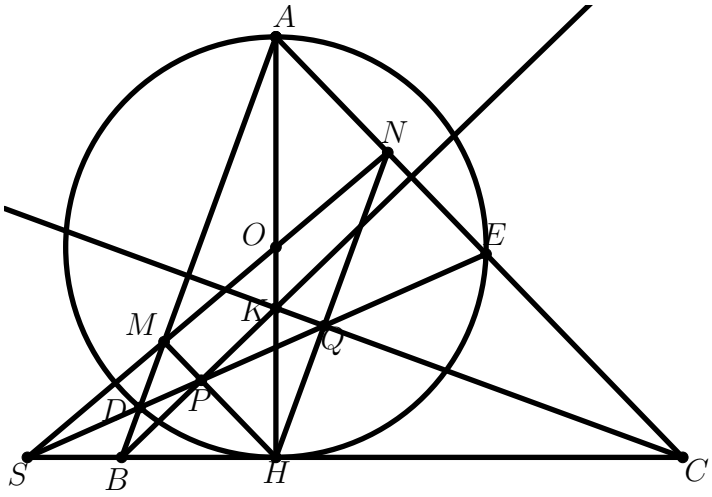
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Chứng minh rằng $BDEC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $SB.SC = SH^2$.

c) Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M, N, đường thẳng DE cắt HM, HN tương ứng tại P, Q .Chứng minh rằng: BP, CQ và AH đồng quy.

Lời giải.



a) Ta có $ADHE$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{AED} = \widehat{AHD} = \widehat{ABH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$)
$\Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{DEC} = \widehat{AED} + \widehat{DEC} = 180^\circ$
$\Rightarrow BDEC$ là tứ giác nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°) (đpcm).

b) Ta có O là tâm đường tròn đường kính AH nên O là trung điểm AH. Vì AH vuông góc với SH tại H nên SH là tiếp tuyến của đường tròn tâm O. Khi đó $\widehat{SHD} = \widehat{DEH}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{DH}$).
Xét $\triangle SDH$ và $\triangle SHE$ có $\widehat{DSH}$ chung và $\widehat{SHD} = \widehat{DEH}$
$\Rightarrow \triangle SDH \backsim \triangle SHE$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{SD}{SH} = \dfrac{SH}{SE} \Rightarrow SH^2 = SD.SE$ (1)
Xét $\triangle SBD$ và $\triangle SEC$ có $\widehat{DSB}$ chung và $\widehat{SBD} = \widehat{SEC}$ (cùng bù với $\widehat{CDB}$)
$\Rightarrow \triangle SBD \backsim \triangle SEC$ (g.g).
$\Rightarrow \dfrac{SB}{SD} = \dfrac{SE}{SC} \Rightarrow SD.SE = SB.SC$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $SH^2 = SB.SC$ (đpcm).

c) Gọi K là giao điểm của BP và CQ. Áp dụng định lý Menelauyt cho các tam giác, ta có:
$\triangle SBM$ với A, N, C thẳng hàng nên $\dfrac{AM}{AB}.\dfrac{NS}{NM}.\dfrac{CB}{CS} = 1$.
$\triangle SBP$ với K, Q, C thẳng hàng nên $\dfrac{KB}{KP}.\dfrac{QP}{QS}.\dfrac{CS}{CB} = 1$.
$\triangle SMP$ với H, Q, N thẳng hàng nên $\dfrac{HP}{HM}.\dfrac{QS}{QP}.\dfrac{NM}{NS} = 1$.
Nhân theo vế ta có: $\dfrac{AM}{AB}.\dfrac{KB}{KP}.\dfrac{HP}{HM} = 1$.
Áp dụng Định lí Menelauyt đảo vào $\triangle BPM$ với ba điểm A, K, H. Ta được A, K, H thẳng hàng (đpcm).

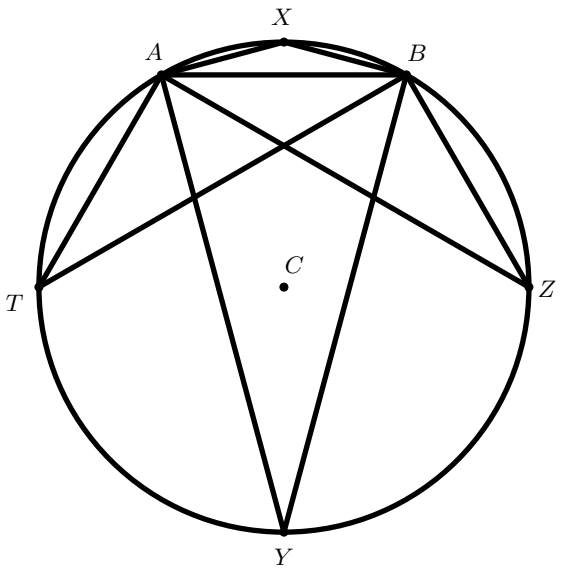
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 5. Giả sử mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm cùng màu là ba đỉnh của một tam giác cân.

Lời giải.

Giả sử không tồn tại tam giác cân nào có 3 điểm cùng màu. Dễ thấy trên mặt phẳng tồn tại ít nhất 2 điểm cùng màu. Giả sử là 2 điểm A, B màu xanh. Dựng tam giác đều ABC thì C không thể màu xanh nên không mất tính tổng quát ta giả sử rằng C màu đỏ. Dựng đường tròn tâm C đi qua A, B như sau:

Trên đường tròn xét 4 điểm X, Y, Z, T là điểm chính giữa cung nhỏ, cung lớn AB và điểm chính giữa hai cung XY. Dễ thấy các tam giác ABX, ABY, ABZ, ABT đều là những tam giác cân. Do đó X, Y, Z, T đều không thể có màu xanh. Mặt khác nếu trong 4 điểm đó có 2 điểm màu đỏ thì cùng với C tạo thành tam giác cân, vô lý. Vậy nhiều nhất chỉ có 1 điểm màu đỏ và điểm còn lại là ít nhất 3 điểm vàng. 3 điểm đó tạo thành tam giác cân, trái với giả sử. Vậy điều giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 140

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI - VÒNG 1, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$$

với $0<a<1$. Chứng minh rằng $P=-1$.

Lời giải.

Với $0<a<1$ ta có:

$$\begin{aligned}
P&=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-\left(\sqrt{1-a}\right)^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)\\
&=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)\left(\frac{\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}}{a}-\frac{1}{a}\right)\\
&=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\frac{2\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}-(1-a)-(1+a)}{2a}\\
&=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\frac{\left[-\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)^2\right]}{2a}\\
&=-\frac{\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}{2a}\\
&=-\frac{(1+a-(1-a))}{2a}\\
&=-1.
\end{aligned}$$

Câu 2. Cho parabol $(P):y=-x^2$ và đường thẳng $d:y=2mx-1$ với m là tham số.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và P khi $m=1$.

b) Chứng minh rằng với mọi m, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B. Gọi y_1,y_2 là tung độ của A và B. Tìm m sao cho $|y_1^2-y_2^2|=3\sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Khi $m=1$ ta có $d:y=2x-1$ và $(P):y=-x^2$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$-x^2=2x-1\Leftrightarrow x^2+2x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{2}\\x=-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Với $x=-1-\sqrt{2}\Rightarrow y=-3-2\sqrt{2}$;
Với $x=-1+\sqrt{2}\Rightarrow y=-3+2\sqrt{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Vậy các giao điểm của d và (P) là $\left(-1-\sqrt{2},-3-2\sqrt{2}\right)$; $\left(-1+\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}\right)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $-x^2=2mx-1\Leftrightarrow x^2+2mx-1=0$ (1)

Ta có $\Delta'=m^2+1>0\ \forall m$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 phân biệt với mọi m hay d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ với $\begin{cases}y_1=2mx_1-1\\y_2=2mx_2-1\end{cases}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}|y_1^2-y_2^2|&=|(y_1-y_2)(y_1+y_2)|\\&=|(2mx_1-1-2mx_2+1)(2mx_1-1+2mx_2-1)|\\&=|4m(x_1-x_2)\left[m(x_1+x_2)-1\right]|\end{aligned}$$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\x_1x_2=-1\end{cases}$.

Ta có $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4m^2+4}=2\sqrt{m^2+1}$.

Vậy $|y_1^2-y_2^2|=4|m|(2m^2+1).2\sqrt{m^2+1}$, do đó

$|y_1^2-y_2^2|=3\sqrt{5}\Leftrightarrow 64m^2(2m^2+1)^2(m^2+1)=45\Leftrightarrow 64(4m^4+4m^2+1)(m^4+m^2)=45$

Đặt $t=m^4+m^2,t\geq 0$ ta được phương trình $64t(4t+1)=45\Leftrightarrow 256t^2+64t-45=0.(2)$

Giải (2), kết hợp với điều kiện $t\geq 0$ ta được $t=\dfrac{5}{16}$

Từ đó suy ra $m^4+m^2=\dfrac{5}{16}\Leftrightarrow 16m^4+16m^2-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=\dfrac{1}{4}\\m^2=-\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 3. Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km. Vận tốc trên $\dfrac{3}{4}$ quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên $\dfrac{1}{4}$ quãng đường AB còn lại bằng $\dfrac{1}{2}$ vận tốc trên $\dfrac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B người đó nghỉ lại 30 phút rồi trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\dfrac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10 km/h. Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là $8,5$ giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A.

Lời giải.

Gọi vận tốc của xe máy trên $\dfrac{3}{4}$ quãng đường AB đầu là $x(\text{ km/h}),x>0$.

Vận tốc của xe máy trên $\dfrac{1}{4}$ quãng đường sau là $0,5x(\text{ km/h})$.

Vận tốc của xe máy khi đi quay trở lại từ B về A là $x+10(\text{ km/h})$.

Tổng thời gian của chuyến đi là $\dfrac{90}{x}+\dfrac{30}{0,5x}+\dfrac{120}{x+10}+\dfrac{1}{2}=8,5$ (1)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{90}{x}+\frac{60}{x}+\frac{120}{x+10}=8\\
&\Leftrightarrow \frac{150}{x}+\frac{120}{x+10}=8\\
&\Leftrightarrow 75(x+10)+60x=4x(x+10)\\
&\Leftrightarrow 4x^2-95x-750=0\\
&\Leftrightarrow x=30 \text{ (do } x>0).
\end{aligned}
$$

Vậy vận tốc của xe máy trên quãng đường đi từ B về A là $30+10=40(\text{ km/h})$.

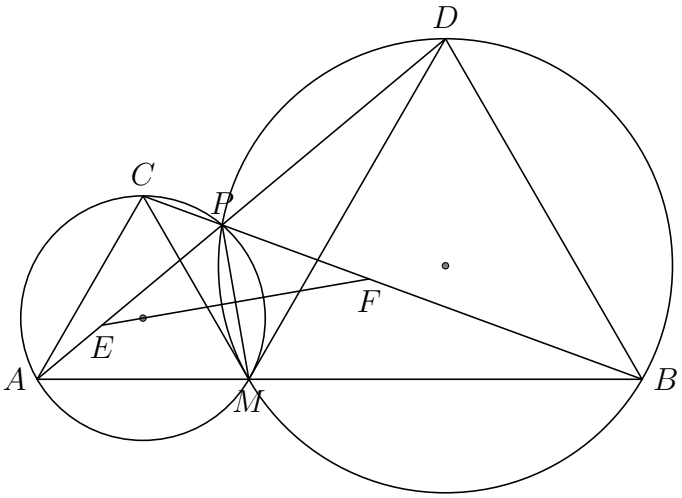
Câu 4. Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\sqrt{CP.CB}+\sqrt{DP.DA}=AB$.

c) Đường nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ cắt PA và PB tại E và F. Chứng minh $CDEF$ là hình thang.

Lời giải.



a) Vì $\widehat{CMA}=\widehat{DMB}=60^\circ$ nên $\widehat{CMB}=\widehat{DMA}=120^\circ$. Xét ΔCMB và ΔAMD ta có

$$\begin{cases} CM=AM \\ \widehat{CMB}=\widehat{DMA} \\ MB=MD \end{cases} \Rightarrow \Delta CMB=\Delta AMD$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} \widehat{MCB}=\widehat{MAD} \\ \widehat{MBC}=\widehat{MDA} \end{cases}$.

Do đó $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Vì $AMPC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CPM} = 180^\circ - \widehat{CAM} = 120^\circ = \widehat{CMB}$.
Từ đó suy ra $\Delta CPM \backsim \Delta CMB \Rightarrow \dfrac{CP}{CM} = \dfrac{CM}{CB} \Rightarrow CP.CB = CM^2 \Rightarrow CM = \sqrt{CP.CB}$.
Tương tự ta chứng minh được $DM = \sqrt{DP.DA}$.
Vậy $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = CM + DM = AM + BM = AB$.

c) Ta có EF là đường trung trực của PM suy ra $EP = EM$, do đó ΔEPM cân tại E.
Mặt khác $\widehat{EPM} = \widehat{ACM} = 60^\circ$ (do $AMPC$ là tứ giác nội tiếp). Từ đó suy ΔEPM đều, do đó $PE = PM$. Tương tự chứng minh được $PF = PM$.
Ta có $CM \parallel DB$ nên $\widehat{PCM} = \widehat{PBD}$.
Mà $BMPD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{PBD} = \widehat{PMD} \Rightarrow \widehat{PCM} = \widehat{PMD}$.
Ta lại có $\widehat{CPM} = \widehat{DPM} = 120^\circ \Rightarrow \Delta CPM \backsim \Delta MPD \Rightarrow \dfrac{CP}{MP} = \dfrac{PM}{PD} \Rightarrow \dfrac{CP}{PF} = \dfrac{PE}{PD}$.
Theo định lý Ta-lét đảo ta có $CE \parallel DF \Rightarrow CDEF$ là hình thang.

Câu 5. Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq 7.$$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \geq 0 \\ b(1-b) \geq 0 \\ c(1-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^2 \\ b \geq b^2 \\ c \geq c^2 \end{cases}$.

Suy ra $\sqrt{5a+4} \geq \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} \Rightarrow \sqrt{5a+4} \geq a + 2$. (1)

Tương tự ta có $\begin{cases} \sqrt{5b+4} \geq b+2 \\ \sqrt{5c+4} \geq c+2 \end{cases}$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} &\geq a + 2 + b + 2 + c + 2 \\ &\geq a + b + c + 6 \\ &\geq 7. \end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 141

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC SƠN LA, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{x-2+\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

b) Tìm x để $P = \sqrt{x} + \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

a) Điều kiện : $x > 0$

Ta có $P = \dfrac{(\sqrt{x}-1).(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} . \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Với điều kiện $x > 0$.

$P = \sqrt{x} + \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Trong trường hợp phương trình (1) có hai nghiệm là x_1 và x_2. Tìm m để biểu thức $C = 2(x_1 + x_2) - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải.

a) Ta có: $\Delta = (m+1)^2 - (m^2+4) = 2m - 3$.

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ P = x_1x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 > 0 \\ m^2 + 4 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{3}{2} \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Với $m \geq \dfrac{3}{2}$.

Theo hệ thức Vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$.

Suy ra $C = 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 4(m+1) - (m^2+4) = -m^2 + 4m = 4 - (m-2)^2 \leq 4$.

Dấu $=$ có khi $m = 2$ (thoả mãn).

Vậy khi $m = 2$ thì C đạt giá trị lớn nhất là 4.

Câu 3. Gải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$

Lời giải.

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}, t \geq 0$. Ta có

$$t^2 = 1 + 2\sqrt{x(1-x)} \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = \frac{t^2-1}{2}.$$

Thay vào phương tình đã cho ta được

$$t + \frac{t^2-1}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 - +2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -3.$$

So với điều kiện ta được $t = 1$. Khi đó, $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB có bán kính R, Ax là tiếp tuyến với đường tròn tại A. Trên Ax lấy điểm F, BF cắt đường tròn tại C, tia phân giác của góc ABF cắt Ax tại E và cắt đường tròn tại D.

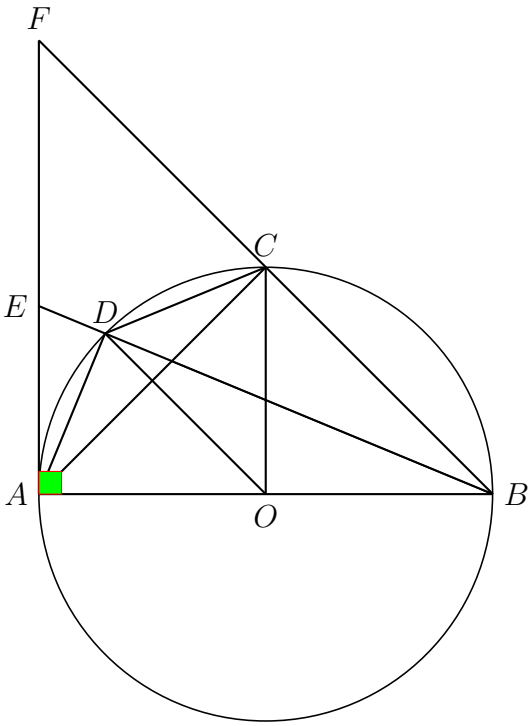
a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh hệ thức: $BD.BE = BC.BF$.

c) Xác định số đo của góc ABC để tứ giác $AOCD$ là hình thoi. Tính diện tích hình thoi $AOCD$ theo R.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
Ta có: $\widehat{CDB} = \widehat{CAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BC}$).
$\widehat{CAB} = \widehat{CFA}$ (cùng phụ $\widehat{FAC}$).
$\Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{CFE}$. Nên $\widehat{CDE} + \widehat{CFE} = \widehat{CDE} + \widehat{CDB} = 180°$. Do đó tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh hệ thức: $BD.BE = BC.BF$.
$\widehat{ADB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O), $\Rightarrow AD \perp BE$.
$\triangle EAB$ vuông ở A có $AD \perp BE$ nên: $AB^2 = BD.BE$, (1).
$\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $(O) \Rightarrow AC \perp BF$.
$\triangle FAB$ vuông ở A có $AC \perp BF$ nên $AB^2 = BC.BF$, (2).
Từ (1) và (2) suy ra: $BD.BE = BC.BF$. (Cách khác: chứng minh $\triangle BCD \backsim \triangle BEF$)

c) Xác định số đo của góc $\widehat{ABC}$ để tứ giác $AOCD$ là hình thoi.
Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ (do BD là phân giác $\widehat{ABC}$)
$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CD}$. Tứ giác $AOCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow OA = AD = DC = OC \Leftrightarrow AD = DC = R$.
$\Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{DC} = 60° \Leftrightarrow \widehat{AC} = 120° \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 60°$.
Vậy $\widehat{ABC} = 60°$ thì tứ giác $AOCD$ là hình thoi.
Tính diện tích hình thoi $AOCD$ theo R:
$\widehat{BAC} = 60° \Rightarrow AC = R\sqrt{3}$. Suy ra $S_{AODC} = \dfrac{1}{2}OD.AC = \dfrac{1}{2}.R.R\sqrt{3} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5.

a) Chứng minh rằng trong 27 số tự nhiên khác nhau tùy ý nhỏ hơn 100 có thể chọn được hai số có ước số chung lớn nhất khác 1.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) .Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq 1.$$

Lời giải.

a) Từ 0 đến 100 có 26 số nguyên tố. Mỗi số tự nhiên đều biểu diễn được thành tích các thừa số nguyên tố với các số mũ tương ứng (dạng phân tích tiêu chuẩn). Khi phân tích 27 số đã cho ra thừa số nguyên tố dạng tiêu chuẩn sẽ có ít nhất hai số cùng chứa một thừa số nguyên tố với số mũ nào đó. Hai số này có ước chung khác 1.

b) Với $a, b>0$ ta có

$$\begin{aligned} a^2+b^2\geq 0 &\Leftrightarrow (a+b)^2\geq 4ab \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a+b}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. Áp dụng kết quả này ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right) \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Tương tự,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2y+z} &\leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right); \\ \frac{1}{x+y+2z} &\leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{3}{4}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 142

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ, VÒNG 2, NĂM 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

Cho biểu thức $P=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm x để $P(x)$ xác định và rút gọn $P(x)$.

b) Tìm các giá trị của x để biểu thức $Q(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{P(x)}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x>0; x\neq 1$

Ta có

$$P=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$
$$=x-\sqrt{x}+1.$$

b) Với $Q=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

Với $x>0; x\neq 1$ suy ra $\begin{cases}2\sqrt{x}>0\\ x-\sqrt{x}+1>0\end{cases}\Rightarrow Q>0.$

Ta có $Q=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1}.$

Vì $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1>1$ (với $x>0; x\neq 1$) suy ra $Q<1$

Vậy $0<Q<1$ mà $Q\in\mathbb{Z}\Rightarrow Q=1$

Với $Q=1$ thay vào ta được $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Câu 2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=mx^2$ $(m>0)$ và đường thẳng $(d): y=2x-m^2$.

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó chứng minh A và B cùng nằm về một phía với trục tung.

b) Với m tìm được ở câu a). Gọi x_A, x_B theo thứ tự là hoành độ các điểm A và B. Tìm m để biểu thức $K = \dfrac{2}{x_A + x_B} + \dfrac{1}{4x_Ax_B + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P), ta được $mx^2 - 2x + m^2 = 0$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta = 1 - m^3 > 0 \Rightarrow m < 1$.

Kết hợp điều kiện $m > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$ thì d cắt P tại hai điểm phân biệt

Áp dụng hệ thức vi-ét $x_1.x_2 = m > 0$.

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm cùng 1 phía với trục tung.

b) Ta có $K = m + \dfrac{1}{4m+1} = \dfrac{1}{4}(4m+1) + \dfrac{1}{4m+1} - \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{3}{4}$.

Dấu $=$ xảy ta khi $m = \dfrac{1}{4}$

Câu 3.

a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-1} + 6 = 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x-1}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Đặt $a = \sqrt{x+1}; b = \sqrt{x+2}; c = \sqrt{x-1}$ $(x > 1)$.

Phương trình tương đương với $ab + ac + 6 = 3a + 2b + 2c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} a = 2 \\ b + c - 3 = 0 \end{array}\right.$.

suy ra $\left[\begin{array}{r} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2. \end{array}\right.$

b) Phương trình tương đương với $x^3 + 2xy^2 + 8y^3 + x^2y = 0$.

Vì $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{x^2}{y^2} + 2\frac{x}{y} + 8 = 0.$$

$\Rightarrow x = -2y$, thay vào ta được $(x, y) = (-2; 1)$ hoặc $(2; -1)$.

Câu 4.

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính khác nhau, cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho O_1, O_2 thuộc hai nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác BO_1O_2 cắt (O_1) và (O_2) lần lượt tại K và L khác A, B. Đường thẳng AO cắt (O_1) và (O_2) lần lượt tại M và N (khác A). Hai đường thẳng MK và NL cắt nhau tại P sao cho P và B thuộc hai nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng KL. Chứng minh rằng

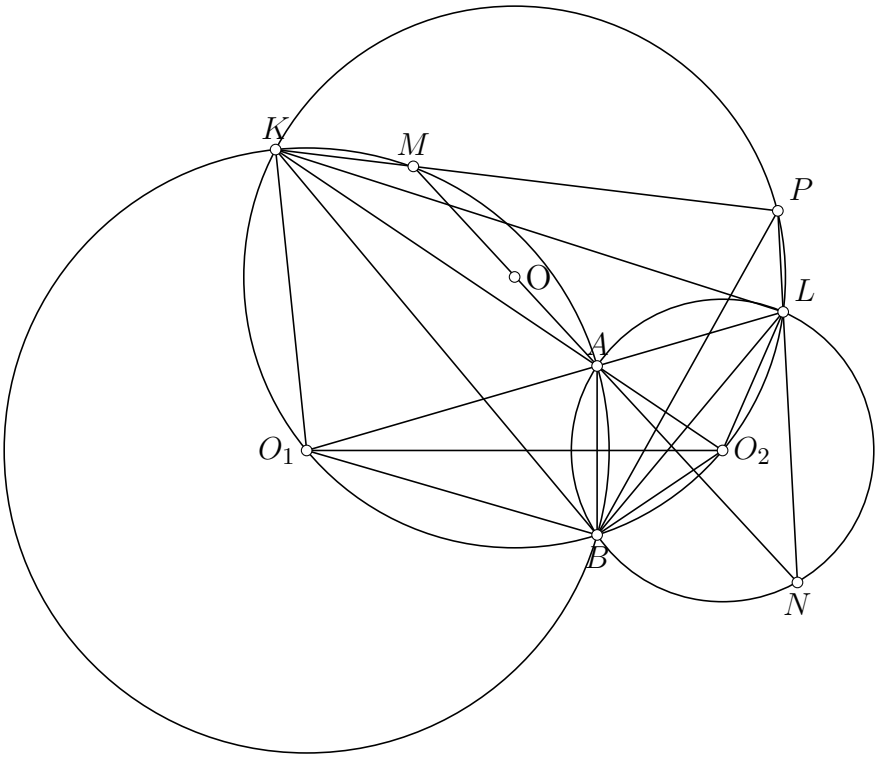
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Tứ giác $BKPL$ nội tiếp đường tròn.

b) Điểm A cách đều hai đường thẳng BK và BL.

c) Điểm P thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi tam giác PKL cân.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{PKB} = 180^\circ - \widehat{MAB} = \widehat{BAN} = \widehat{BLN} = 180^\circ - \widehat{BLP}$

$\Rightarrow \widehat{PKB} + \widehat{BLP} = 180^\circ$ suy ra tứ giác $BLKP$ nội tiếp.

b) Ta có

$\widehat{BKO_2} = \widehat{BO_1O_2}$ (chắn cung $\widehat{BO_2}$)

$= \dfrac{1}{2}\widehat{BOA} = \widehat{BKA}$

$\Rightarrow K, A, O_2$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta được L, A, O_1 thẳng hàng.

Do đó $\widehat{KBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{KO_1A} = \dfrac{180^\circ - \widehat{KAO_1}}{2} = \dfrac{180^\circ - \widehat{LAO_2}}{2} = \dfrac{\widehat{LO_2A}}{2} = \widehat{LBA}.$

Suy ra BA là phân giác $\widehat{KBL}$ hay A cách đều BK và BK.

c) Ta có

$\widehat{PMN} = \widehat{KBA}\left(= \dfrac{1}{2}\text{ sđ }\widehat{KA}\right)$

$= \widehat{LBA} = \widehat{PNM}\left(= \dfrac{1}{2}\text{ sđ }\widehat{AL}\right)$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Suy ra $\triangle PMN$ cân tại P.

Nếu $P \in AB \Rightarrow \widehat{PMA} = \widehat{PBK} \left(= \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{AK}\right)$

$\Rightarrow \triangle PMA \backsim \triangle PBK \Rightarrow PM.PK = PA.PB.$

Chứng minh tương tự $PA.PB = PN.PM$

Suy ra $PM.PK = PA.PB = PN.PM \Rightarrow \triangle PKL \backsim \triangle PNM \Rightarrow \triangle PKL$ cân.

Nếu $PK = PL \Rightarrow PK.PM = PL.PN$

Gọi A' và A" là giao điểm của PB với (O_1) và (O_2).

Suy ra $PK.PM = PA'.PB = PL.PN = PA".PB$

Suy ra A' trùng A" trùng $A \Rightarrow P \in AB$.

Câu 5.

a) Cho $x, y > 0$ và $x+y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 6x^2+4y^2+10xy+\frac{4x}{y}+\frac{3y}{x}+2016$.

b) Tìm các bộ số nguyên dương (x, y, z) biết $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$ và $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$M = (x+y)\left(6x+4y+\frac{4}{y}+\frac{3}{x}\right)+2009$$
$$\geq 3(3x+\frac{3}{x}+y+\frac{4}{y}+3x+3y)+2009$$
$$\geq 3(6+4+9)+2009 = 2066$$

Dấu $=$ xảy ra khi $x = 1; y = 2$.

b) $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z} \Leftrightarrow y-\sqrt{xy}-\sqrt{yz}+\sqrt{zx} = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}-\sqrt{z}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = z \\ y = x \end{array}\right.$

TH1: $x = y = z$ suy ra $(x, y, z) = (3; 3; 3)$.

TH2: $y = z \neq x$ ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-2) = 2$ suy ra $(x, y, z) = (2; 4; 4)$.

TH3: $x = y \neq z$ tìm được $(x, y, z) = (4; 4; 2)$.

Vậy có 3 bộ thỏa mãn $(3; 3; 3)(2; 4 : 4)(4; 4; 2)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 143

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC QUẢNG BÌNH, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{a}-4}{a-2\sqrt{a}} + \dfrac{3}{\sqrt{a}-2}\right)(a-\sqrt{a}-2)$ với $a>0$, $a\neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $a = \dfrac{\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$.

Lời giải.

a) $P = \dfrac{\sqrt{a}-4+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}\,(\sqrt{a}-2)}(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1) = \dfrac{4(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} = \dfrac{4(a-1)}{\sqrt{a}}$.

b) $a = \dfrac{\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(3+2\sqrt{2})\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(3+2\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{3}-1} = 3+2\sqrt{2}$.

Khi đó $P = \dfrac{4(3+2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \dfrac{8(1+\sqrt{2})}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = 8$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2} + \sqrt{2x+2017} = \dfrac{1}{x} + \sqrt{3x+2016}$.

b) Cho phương trình $x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 8 = 0$ (1) (m là tham số). Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\left[x_1^2 - (4m+1)x_1 + m^2\right]\left[x_2^2 - (4m+1)x_2 + m^2\right] = 25.$$

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $x \geq -672$; $x \neq 0$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\frac{1}{x^2}+\sqrt{2x+2017}=\frac{1}{x}+\sqrt{3x+2016}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\sqrt{3x+2016}-\sqrt{2x+2017}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x^2}=\frac{x-1}{\sqrt{3x+2016}+\sqrt{2x+2017}}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ -\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+2016}+\sqrt{2x+2017}} \end{array}\right. \quad (\text{vô nghiệm vì } VT<0; VP>0)$$
$\Leftrightarrow x=1$ (TM ĐKXĐ).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

b) $\Delta'=(-2m-1)^2-(m^2+8)=3m^2+4m-7$.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta'>0$ hay $3m^2+4m-7>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-\dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$

Khi đó áp dụng Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2(2m+1) \\ x_1.x_2=m^2+8. \end{cases}$

Theo giả thiết $[x_1^2-(4m+1)x_1+m^2][x_2^2-(4m+1)x_2+m^2]=25$

$\Leftrightarrow (x_1x_2)^2-(4m+1)x_1x_2(x_1+x_2)+m^2(x_1^2+x_2^2)+(4m+1)^2x_1x_2-(4m+1)m^2(x_1+x_2)+m^4=25$

Hay

$(m^2+8)^2-2(m^2+8)(4m+1)(2m+1)+m^2\left[4(2m+1)^2-2(m^2+8)\right]+(m^2+8)(4m+1)^2-2(4m+1)m^2(2m+1)+m^4=25$

$\Leftrightarrow m^2-32m+31=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1(\text{loại}) \\ m=31(\text{TM}). \end{array}\right.$

Vậy $m=31$.

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

Có $\sqrt{a^3+b}\ge\sqrt{2\sqrt{a^3b}}=\sqrt{2}\sqrt[4]{a^3b}$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3b}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{b^3c}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{c^3a}}\right)$.

Mặt khác $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3b}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{ab}\sqrt{a}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{2a}\le\dfrac{1}{4a}+\dfrac{1}{4b}+\dfrac{1}{2a}$.

(Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\le\dfrac{a+b}{2ab}$).

Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

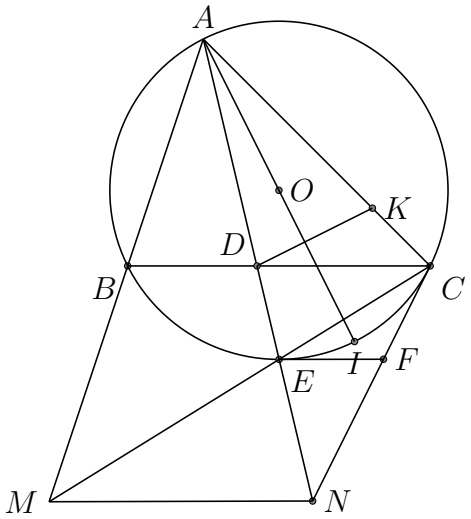
Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác của góc BAC cắt BC tại D, cắt đường tròn (O) tại E. Gọi M là giao điểm của AB và CE. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AD tại N và tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt CN tại F.

a) Chứng minh tứ giác $MACN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Gọi K là điểm trên cạnh AC sao cho $AB = AK$. Chứng minh $AO \perp DK$.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{CF} = \dfrac{1}{CN} + \dfrac{1}{CD}$.

Lời giải.



a) AE là phân giác $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$.
Vì CN là tiếp tuyến tại C của đường tròn suy ra $\widehat{MCN} = \widehat{EAC}$.
Do đó $\widehat{MCN} = \widehat{BAE}$.
Tứ giác $MACN$ có $\widehat{MAN} = \widehat{MCN}$ nên nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Gọi AI là đường kính của đường tròn (O).
Có $\widehat{CAO} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{CI}$.
Mà $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC}$.
Suy ra $\widehat{ABC} + \widehat{CAO} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AI} = 90°$.
Có $\Delta ABD = \Delta AKD$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{AKD} + \widehat{CAO} = 90°$.
Vậy $AO \perp KD$.

c) Vì EF là tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) nên $\widehat{CEF} = \widehat{ECF}$.
Do đó ΔCEF cân tại F, suy ra $FE = FC$.
Mặt khác $\widehat{CEF} = \widehat{BAE} = \widehat{BCE}$ nên $EF \parallel DC$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Suy ra $\dfrac{NF}{CN}=\dfrac{EF}{DC}\Rightarrow\dfrac{CF}{CN}=1-\dfrac{EF}{CD}=1-\dfrac{CF}{CD}$.

Hay $\dfrac{1}{CF}=\dfrac{1}{CN}+\dfrac{1}{CD}$.

Câu 5. Trong 100 số tự nhiên từ 1 đến 100 hãy chọn n số ($n>2$) sao cho hai số phân biệt bất kỳ được chọn có tổng chia hết cho 6. Hỏi có thể chọn n số thỏa mãn điều kiện trên với n lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Để hai số phân biệt bất kỳ trong các số được chọn có tổng chia hết cho 6 thì có 2 trường hợp xảy ra:

+ TH1: Mỗi số được chọn đều chia hết cho 6.

Do $100:6=16$ dư 4 nên có 16 số như vậy.

+ TH2: Mỗi số được chọn đều thỏa mãn chia cho 6 dư 3.

Có 17 số như vậy.

Vậy n lớn nhất bằng 17.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 144

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải phương trình $\sqrt{5-3x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x^2-4x+4}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2xy+4x+3y+6=0\\4x^2+y^2+12x+4y+9=0\end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $-1\le x\le\dfrac{5}{3}$.

BÌnh phương hai vế và rút gọn ta thu được phương trình

$$2\sqrt{-3x^2+2x+5}=3x^2-2x-2.$$

Đặt $t=\sqrt{-3x^2+2x+5},\ t\ge 0$ ta có phương trình

$$2t=-t^2+3\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=1\ (\text{do } t\ge 0).$$

Suy ra $\sqrt{-3x^2+2x+5}=1\Leftrightarrow 3x^2-2x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

b) Ta có

$$2xy+4x+3y+6=0\Leftrightarrow 2x(y+2)+3(y+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(2x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\\x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

- $x=-\dfrac{3}{2}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$y^2+4y=0\Leftrightarrow y=0,\ y=-4.$$

- $y=-2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$4x^2+12x+5=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2},\ x=-\frac{5}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;\ y)=\left(-\dfrac{3}{2};0\right),\ \left(-\dfrac{3}{2};-4\right),\ \left(-\dfrac{1}{2};-2\right),\ \left(-\dfrac{5}{2};-2\right)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;\ y)$ sao cho $(x^2-2)\vdots(xy+2)$.

Lời giải.

Ta có $x^2-2=x^2+xy-(xy+2)$, nên

$$x^2-2\vdots(xy+2)\Leftrightarrow x(x+y)\vdots(xy+2),\ \text{hay}\ k=\frac{x(x+y)}{xy+2}\in\mathbb{Z}.$$

- $x=2u,\ u\in\mathbb{Z}^+$, ta có $k=\dfrac{u(2u+y)}{uy+1}$.

  Do $(u,uy+1)=1$ nên $2u+y\vdots uy+1$, suy ra

  $$2u+y\geq uy+1\Leftrightarrow(u-1)(y-2)\leq 1. \tag{1}$$

  Vì $u,\ y$ là các số nguyên dương nên từ (1) ta có các trường hợp sau

  + $u=1$, khi đó $\dfrac{2u+y}{uy+1}=\dfrac{y+2}{y+1}=1+\dfrac{1}{y+1}$. Vì $y+1\geq 2$ nên ta loại trường hợp này.
  + $y=1$, khi đó $\dfrac{2u+y}{uy+1}=\dfrac{2u+1}{u+1}=2-\dfrac{1}{u+1}$ (loại).
  + $y=2$, ta có $\dfrac{2u+y}{uy+1}=\dfrac{2u+2}{2u+1}=1+\dfrac{1}{2u+1}$ (loại).
  + $\begin{cases}u=2\\y=3\end{cases}$, khi đó $\dfrac{2u+y}{uy+1}=\dfrac{4+3}{2.3+1}=1$ (thỏa).

- x lẻ, khi đó $(x,xy+2)=1$ nên $x+y\vdots xy+2$, suy ra

  $$x+y\geq xy+2\Leftrightarrow(x-1)(y-1)+1\leq 0\ \text{(vô lí)}.$$

Vậy $(x;\ y)=(4;\ 3)$.

Câu 3. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c}{4a}.$$

Lời giải.

Ta có

$$P=\frac{1}{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\dfrac{c}{b}\right)^2}+\frac{c}{4a}.$$

Đặt $x=\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{c}{b}$ ta có $\dfrac{c}{a}=xy$ và

$$P=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{xy}{4}.$$

Ta chứng minh

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\geq\frac{1}{1+xy}. \tag{1}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow(2+2x+2y+x^2+y^2)(1+xy)\geq(1+2x+x^2)(1+2y+y^2)\\&\Leftrightarrow 1-2xy-x^2y^2+x^3y+xy^3\geq 0\\&\Leftrightarrow(1-xy)^2+xy(x-y)^2\geq\ \text{(đúng)}.\end{aligned}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Suy ra

$$P \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{xy}{4} = \left(\frac{1}{1+xy} + \frac{xy+1}{4}\right) - \frac{1}{4} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$, hay $a = b = c$. Vậy $P_{\min} = \frac{3}{4}$.

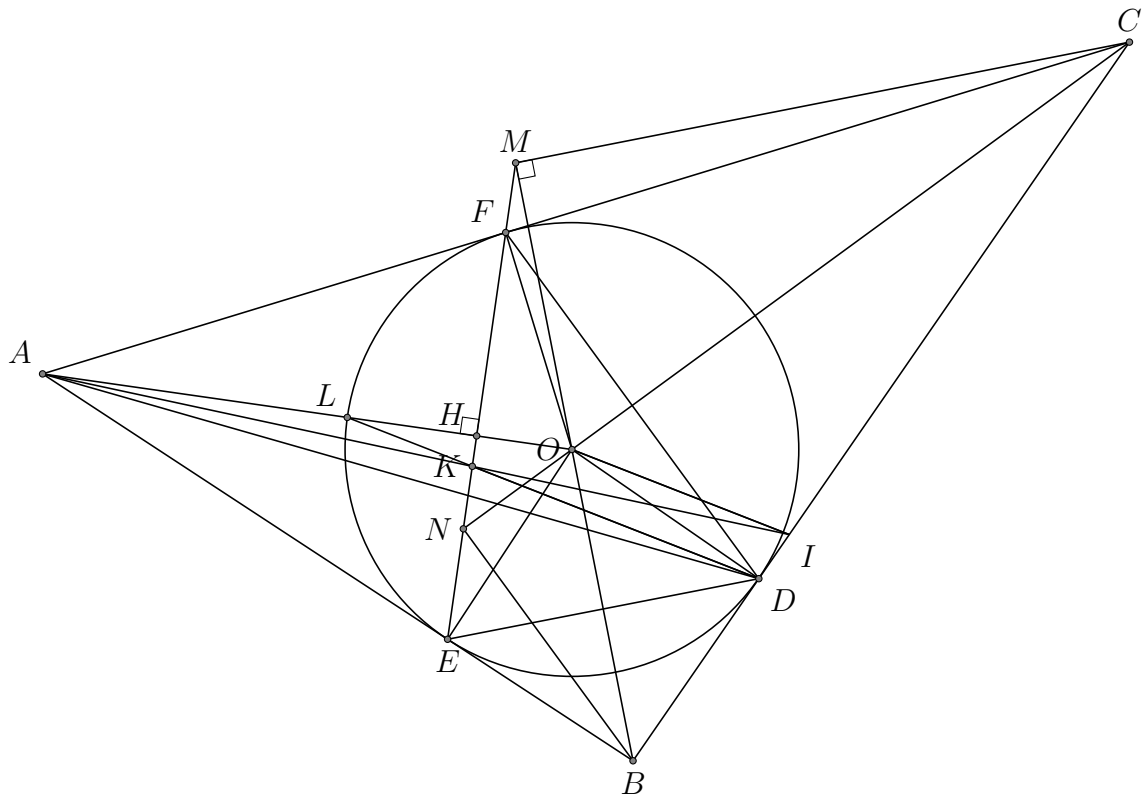
Câu 4. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AE, AF của (O) (E, F là các tiếp điểm). Điểm D di động trên cung lớn EF sao cho $DE < DF$, D không trùng với E và tiếp tuyến tại D của (O) lần lượt cắt tia AE, AF lần lượt tại B, C.

a) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng OB, OC. Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp một đường tròn.

b) Kẻ các tia phân giác DK của góc $\widehat{EDF}$, OI của góc $\widehat{BOC}$ (K thuộc EF, I thuộc BC). Chứng minh $OI \parallel DK$.

c) Chứng minh đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Ta có OB, OC lần lượt là phân giác của các góc B và C của tam giác ABC. Do đó

$$\widehat{NOB} = 180^\circ - \widehat{BOC} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2}. \quad (1)$$

Mặt khác, tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{AEF} = \frac{1}{2}(180^\circ - A) = \frac{B+C}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AEN} = \widehat{NOB}$, hay tứ giác $BENO$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ONB} = \widehat{OEB} = 90^\circ$,

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

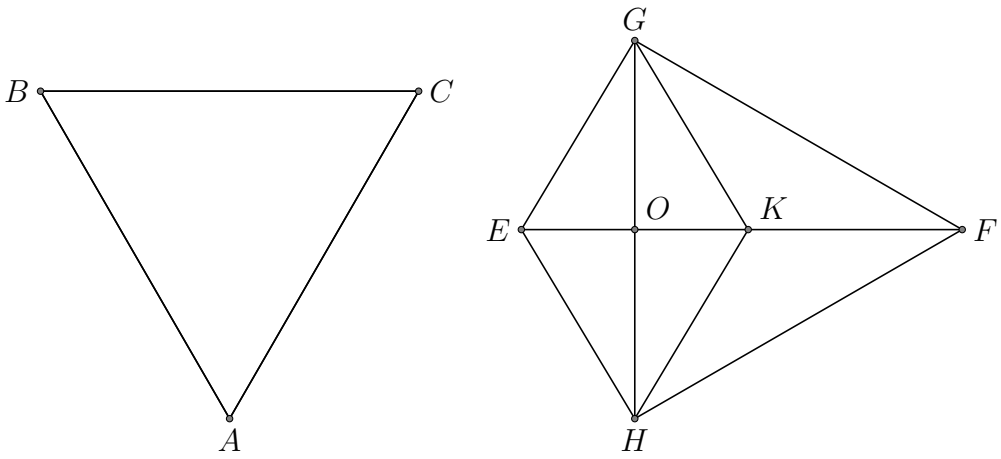
hay $\widehat{CNB} = 90^\circ$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{BNC} = 90^\circ$. Từ đó ta có $BCMN$ nội tiếp.

b) Ta có
$$\widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{EDB} - \widehat{FDC} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \frac{B+C}{2}.$$
Do đó
$$\widehat{KDC} = \widehat{KDF} + \widehat{FDC} = \frac{1}{2}\widehat{EDF} + \widehat{FDC} = \frac{B}{4} + \frac{C}{4} + 90^\circ - \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{B}{4} - \frac{C}{4}.$$
và
$$\widehat{IOC} = \frac{B}{2} + \widehat{BOI} = \frac{B}{2} + \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{B}{2} + \frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) = 90^\circ + \frac{B}{4} - \frac{C}{4}.$$
Từ đó suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{IOC}$, nên $OI \parallel DK$.

c) Gọi L, H lần lượt là giao điểm của AO với (O) và EF. Ta có A, L, O thẳng hàng; L, K, D thẳng hàng; $AO \perp EF$ tại H.
Vì $DK//OI$ nên $\widehat{DOI} = \widehat{ODK}$. Mà $\widehat{KLO} = \widehat{ODK}$ nên $\widehat{DOI} = \widehat{KLH}$.
Kết hợp với $\widehat{ODI} = \widehat{LHK} = 90^\circ$ ta có
$$\Delta LHK \backsim \Delta ODI \Rightarrow \frac{LK}{OI} = \frac{LH}{OD}. \tag{3}$$
ΔOFA vuông tại F, $FH \perp OA$ tại H nên $OA \cdot OH = OF^2$. Suy ra
$$\frac{OF}{OA} = \frac{OH}{OF} \Rightarrow \frac{OL}{OA} = \frac{OH}{OL} \Rightarrow \frac{AL}{AO} = \frac{LH}{OL} = \frac{LH}{OD}. \tag{4}$$
Từ (3) và (4) ta có $\dfrac{AL}{AO} = \dfrac{LK}{OI}$. Kết hợp với $LK \parallel OI$ ta có A, K, I thẳng hàng, hay KI luôn đi qua một điểm cố định A.

Câu 5. Mỗi điểm trong mặt phẳng được gắn với một trong hai màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác đều có ba đỉnh cùng màu và có độ dài cạnh bằng $\sqrt{3}$ hoặc 3.

Lời giải.



Dựng tam giác đều ABC có cạnh bằng $\sqrt{3}$.

- Nếu A, B, C cùng màu thì ta có đpcm.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- Nếu $A,\ B,\ C$ được tô hai màu. Giả sử $A,\ B$ được tô khác màu.
  Dựng tam giác cân ABD với $DB = DA = 2\sqrt{3}$ và D có màu khác với một trong hai điểm $A,\ B$. Do đó tồn tại một đoạn thẳng có độ dài bằng $2\sqrt{3}$ và hai điểm mút khác màu. Ta giả sử đoạn đó là EF. Gọi K là trung điểm của EF, khi đó K cùng màu với một trong hai điểm $E,\ F$. Giả sử $E,\ K$ màu xanh và F màu đỏ.
  Dựng hình thoi $EGKH$ với $\widehat{EGK} = 60^\circ$, khi đó các tam giác $EGK,\ EHK$ đều cạnh $\sqrt{3}$. Ta có $GH = 3$ và $FG = FH = 3$. Do đó nếu $G,\ H$ có 1 điểm cùng màu với E thì tam giác EKG hoặc EKH thỏa yêu cầu bài toán. Còn nếu $G,\ H$ không có điểm nào cùng màu với E, khi đó $G,\ H$ cùng màu với F nên tam giác GHF thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy bài toán được chứng minh.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 145

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY NINH BÌNH, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{2x-11\sqrt{x}+15}{(x-4\sqrt{x}+3)}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=11+6\sqrt{2}$.

Lời giải.

a) Ta có điều kiện xác định: $x\geq 0; x\neq 1; x\neq 9$

$$\begin{aligned}P&=\frac{(\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}+\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}\\&=5-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}\\&=\frac{4\sqrt{x}-14}{\sqrt{x}+3}.\end{aligned}$$

b) Với $x=11+6\sqrt{2}=(3+\sqrt{2})^2$ ta có

$$P=\frac{4(3+\sqrt{2})-14}{3+\sqrt{2}-3}=\frac{4\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=4-\sqrt{2}.$$

Câu 2. Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2mx-2m+3$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $2(x_1^2+x_2^2)+3(x_1+x_2)=18$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d là: $x^2-2mx-2m+3=0$

Ta có $\Delta'=m^2+2m-3>0$ suy ra $m>1$ hoặc $m<-3$.

Theo định lí Vi-et: $x_1+x_2=2m$ và $x_1.x_2=-2m+3$ nên $2(x_1^2+x_2^2)+3(x_1+x_2)=18$ $\Leftrightarrow 4m^2+7m-15=0\Leftrightarrow m=-3$(loại) và $m=\dfrac{5}{4}$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+2y+4=2z(x+3)\\3y^2+2z+4=2x(y+3)\\3z^2+2x+4=2y(z+3).\end{cases}$

Lời giải.

a) Phương trình tương đương $(\sqrt{x^2+12}-4)-(\sqrt{x^2+5}-3)=3x-6$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}=3(x-2)$

$\Leftrightarrow (x-2).\left[\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0 \text{ phương trình này vô nghiệm.}\end{array}\right.$

Vậy pt đã cho có 1 nghiệm duy nhất $x=2$.

b) Cộng vế-vế của 3 phương trình, ta được

$3x^2+3y^2+3z^2+2x+2y+2z+12=2xz+2yz+2xy+6x+6y+6z$

$\Leftrightarrow (x-z)^2+(y-z)^2+(x-y)^2+(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=0$

$\Leftrightarrow x=y=z=2.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y,z)=(2,2,2)$.

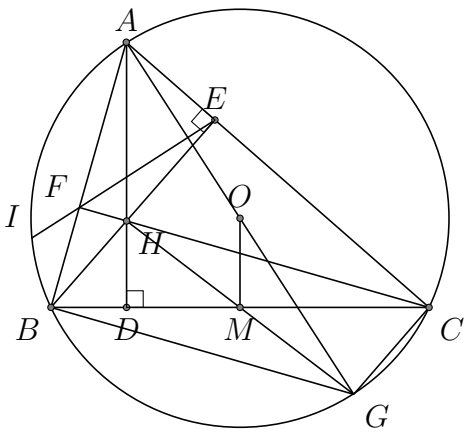
Câu 4. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R, dây cung BC cố định khác đường kính, A là một điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BF, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp và $AO \perp EF$.

b) Tia EF cắt đường tròn tâm O tại I, tia AO cắt đường tròn tâm (O) tại G. Gọi M là trung điểm BC, D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh $AI^2=2AD.OM$.

c) Trong trường hợp ΔABC cân tại A, gọi x là khoảng cách từ O đến đường thẳng BC. Tìm x để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải.



a) Xét tứ giác $BCEF$ có

$\widehat{BEC}=90^\circ\ (gt)$

$\widehat{BFC}=90^\circ\ (gt)$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Mà hai góc cùng nhìn cạnh BC nên $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.
Ta có $\widehat{GAC} = \widehat{GBC}$ (góc nội tiếp chắn cung GC)
$\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp)
suy ra $\widehat{GAC} + \widehat{AEF} = 90^\circ$ hay $AO \perp EF$.

b) Ta có $\begin{cases} EB \perp AC \\ GC \perp AC \end{cases} \Rightarrow EB \parallel GC$, tương tự $GB \parallel CF$ suy ra tứ giác $BHCG$ là hình bình hành, do đó M là trung điểm HG.
Ta có OM là đường trung bình tam giác AGH, suy ra $2OM = AH$
Suy ra $AI^2 = 2AD.OM \Leftrightarrow AI^2 = AD.AH$
Ta lại có $\Delta AFH \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Leftrightarrow \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH.AD = AF.AB$ (2)
Ta chứng minh $AF.AB = AI^2$ (1).
Thật vậy, $\Delta AFI \backsim \Delta AIB$ (g.g) vì:
$\begin{cases} \widehat{IAF} \text{chung} \\ \widehat{AIB} = \widehat{AFI} \end{cases}$
Từ (1) và (2) suy ra $AI^2 = AD.AH = 2AD.OM$.

c) Ta có Gọi N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, đặt $EB = EC = m$, áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $ABNC$, ta có: $AB.NC + AC.NB = AN.BC$ suy ra $AB + AC = AE.\dfrac{BC}{m}$. Do đó $AB + AC$ lớn nhất khi AN lớn nhất, suy ra AN là đường kính, suy ra tam giác ABC cân. Vậy tam giác ABC có chu vi lớn nhất khi ABC cân tại A.
Khi đó $x = OM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}R = \dfrac{R}{2}$.

Câu 5.

a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$.

Lời giải.

a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Ta có
$$\frac{4}{ab+a+2} = \frac{4}{ab+1+a+1} + \frac{4}{ab+abc+a+1} = \frac{4}{ab(c+1)+(a+1)}$$
Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{4}{x+y} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, ta có
$$\frac{4}{ab(c+1)+(a+1)} \leq \frac{1}{ab(a+1)} + \frac{1}{a+1} = \frac{abc}{ab(c+1)} + \frac{1}{a+1} = \frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} \ (1)$$
Tương tự ta có
$$\frac{4}{bc+b+2} = \frac{4}{bc(a+1)+(b+1)} \leq \frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1} \ (2)$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$$\frac{4}{ac+c+2}=\frac{4}{ac(b+1)+(c+1)}\le\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ (3)$$

Cộng vế theo vế của (1),(2) và (3) ta được

$$\frac{4}{ab+a+2}+\frac{4}{bc+b+2}+\frac{4}{ca+c+2}\le\frac{a+1}{a+1}+\frac{b+1}{b+1}+\frac{c+1}{c+1}=3$$

$$\Rightarrow\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $1+x+x^2+x^3+x^4=y^2$

Ta có $4+4x+4x^2+4x^3+4x^4=(2y)^2\Rightarrow 4+4x+4x^2+4x^3+4x^4=(2x^2+x)^2+2x^2+(x+2)^2$

$\Rightarrow(2x^2+x)^2<(2y)^2$.

Với $x=0$ ta được $y=1$ ta được cặp nghiệm nguyên $(0;1),(0;-1)$.

Với $x\neq 0$, ta có $4+4x+4x^2+4x^3+4x^4\le 4+4x+4x^2+4x^3+4x^4+4x^2=(2x^2+x+2)^2$.

Do đó $(2x^2+x)^2\le(2y)^2\le(2x^2+x+2)^2$

$\Rightarrow(2y)^2=(2x^2+x+1)^2$

$\Rightarrow 4+4x+4x^2+4x^3+4x^4=(2x^2+x+1)^2$

$\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=-1$ hoặc $x=3$. Do đó, ta được các cặp nghiệm nguyên là $(-1,1);(-1,-1);(3,11);(3,-11)$.

Vậy các cặp nghiệm nguyên cần tìm là: $(0,1);(0,-1);(-1,1);(-1,-1);(3,11);(3,-11)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 146

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

Cho biểu thức $A=\dfrac{x}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$, với $x\geq 0,\ x\neq 4$.

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $A=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$A=\frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{x+2\sqrt{x}}{x-4}$$
$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$$

b) Ta có

$$A=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 4\sqrt{x}=5\sqrt{x}-10$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x}=10\Leftrightarrow x=100.$$

Vậy $x=100$ là giá trị cần tìm.

Câu 2.

Cho phương trình $x^2-mx+m-2=0$, trong đó m là tham số.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa $x_1-x_2=2\sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta=m^2-4\left(m-2\right)=\left(m-2\right)^2+4>0\ \forall m$. Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=m,\ x_1x_2=m-2$.

Từ $\begin{cases}x_1-x_2=2\sqrt{5}\\x_1+x_2=m\end{cases}$ ta có $\begin{cases}x_1=\dfrac{m+2\sqrt{5}}{2}\\x_2=\dfrac{m-2\sqrt{5}}{2}\end{cases}$.

Thay vào tích của hai nghiệm ta được

$$\frac{\left(m-2\sqrt{5}\right)\left(m+2\sqrt{5}\right)}{4}=m-2$$
$$\Leftrightarrow m^2-20=4m-8$$
$$\Leftrightarrow m^2-4m-12=0\Leftrightarrow m=6,\ m=-2.$$

Vậy $m=6,\ m=-2$ là những giá trị cần tìm.

Câu 3. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực không âm thỏa $a+b+c=3$.

a) Chứng minh rằng: $ab+bc+ca\le 3$.

b) Chứng minh rằng: $a^2b+b^2c+c^2a\le 4$.

Lời giải.

a) Ta có: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$. Suy ra $3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2=9\Rightarrow ab+bc+ca\le 3$.

b) Không mất tính tổng quát ta giả sử a nằm giữa b và c. Khi đó

$$b(a-b)(a-c)\le 0\Leftrightarrow b\left(a^2-ab-ac+bc\right)\le 0\Rightarrow a^2b+b^2c\le ab(b+c)$$
$$\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a\le ab(b+c)+c^2a=a\left(b^2+bc+c^2\right)$$
$$\le a(b+c)^2=\frac{1}{2}2a(b+c).(b+c)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^3=4.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 4.

Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp r và độ dài các đường cao là $x,\ y,\ z$.

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}$.

b) Cho biết $r=1$ và $x,\ y,\ z$ là các số nguyên dương. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

a) Đặt độ dài 3 cạnh tam giác $a,\ b,\ c$ và độ dài 3 đường cao tương ứng là $x,\ y,\ z$ thì ta có

$$ax=by=cz=(a+b+c).r.$$

Suyra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}$.

b) Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Giả sử $x\le y\le z$, khi đó $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{x}\Rightarrow x\le 3\Rightarrow x\in\{1,2,3\}$.

+) $x=1$ ta có $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ (vô nghiệm).

+) $x=2$ ta có $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{y}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow 2\le y\le 4$. Thử lại ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

+) $x=3$ ta có $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{2}{y}\geq\dfrac{2}{3}\Rightarrow y\leq 3\Rightarrow y=3\Rightarrow z=3$.

Do $x=y=z=3$ nên ΔABC đều.

Câu 5. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (ω) tâm O, vẽ đến (ω) hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD, C nằm giữa M và D. Gọi H là giao điểm MO và AB.

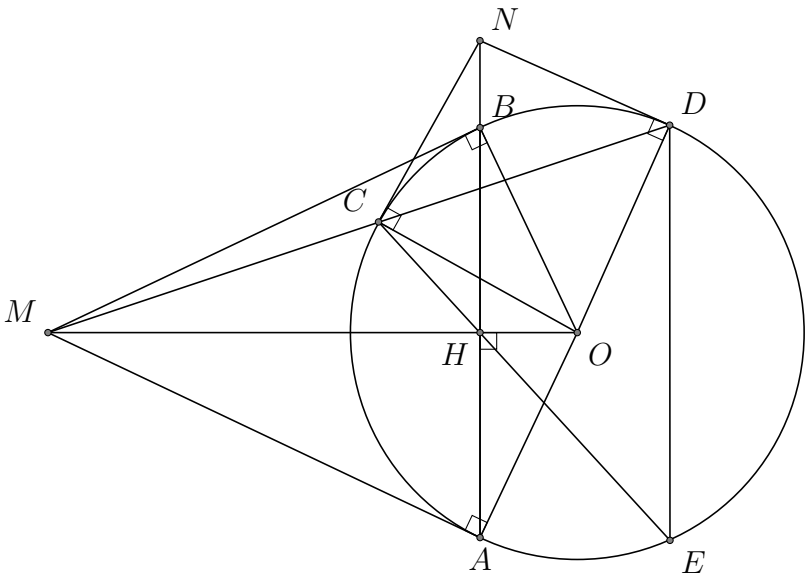
a) Chứng minh: $MA^2=MC.MD$

b) Chứng minh: Tứ giác $CDOH$ nội tiếp.

c) Chứng minh: Đường thẳng AB và hai tiếp tuyến của (ω) tại C và D đồng qui.

d) Đường thẳng CH cắt (ω) tại điểm thứ hai $E\neq C$. Chứng minh: $AB\parallel DE$

Lời giải.



a) Xét hai tam giác MAC và MAD ta có $\widehat{M}$ là góc chung, $\widehat{MAC}=\widehat{MDA}$ nên $\Delta MAC\backsim\Delta MDA$. Suy ra $MA^2=MC.MD$

b) Ta có MA là tiếp tuyến nên $MA\perp AO$, $MA=MB$ và $OA=OB$ nên $MO\perp AB$.
Trong tam giác MAO, $MH.MO=MA^2$ do đó $MH.MO=MC.MD$.
Suy ra $\Delta MCH\backsim\Delta MOD$. Do đó $\widehat{MCH}=\widehat{MOD}$ suy ra $CDOH$ là tứ giác nội tiếp.

c) Giả sử tiếp tuyến của (ω) tại C cắt AB tại N $\widehat{NCO}=\widehat{NHO}=90^\circ$ nên tứ giác $NCHO$ nội tiếp. Mà $CDOH$ cũng nội tiếp nên C, H, O, D, N cùng nằm trên một đường tròn.
Trong tứ giác $NHOD$ nội tiếp, $NH\perp HO$ nên $ND\perp DO$ Do đó ND là tiếp tuyến của (ω). Hay hai tiếp tuyến của (ω) tại C và D cùng với AB đồng qui.

d) Ta có $\widehat{DEC}=\widehat{CDN}$ và $\widehat{CDN}=\widehat{CHN}$. Suy ra AB và DE song song.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 147

ĐỀ THI VÀO LỚP 10, CHUYÊN LONG AN, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{10}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5}{2x+3\sqrt{x}+1}$ với điều kiện $x\geq 0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên x để P là số nguyên tố.

Lời giải.

a) Ta có $P=\dfrac{2\sqrt{x}+1+10\left(\sqrt{x}+1\right)-5}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{12\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{6}{\sqrt{x}+1}$.

b) Vì P là số nguyên tố nên $\sqrt{x}+1=2$ hoặc $\sqrt{x}+1=3$. Vậy $x=1, x=4$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x-2m+5=0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1+x_2+2x_1x_2=26$.

Lời giải.

Ta có $\Delta'=m^2-2m+1+2m-5=m^2-4$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\geq 0\Leftrightarrow m^2-4\geq 0 \quad (*)$

Với $m^2-4\geq 0$, theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m-2\\ x_1x_2=-2m+5\end{cases}$

$x_1+x_2+2x_1x_2=26\Leftrightarrow 2m-2-4m+10=26\Leftrightarrow m=-9$.

So với $(*)$ thì $m=-9$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 3. Giải phương trình: $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$.

Lời giải.

$2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}\Leftrightarrow 2(x^2-x+1+x+1)=5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{x+1}{x^2-x+1}-5\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=2\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

- $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=2\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$ (vô nghiệm).
- $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-5x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\\ x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}\end{array}\right.$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

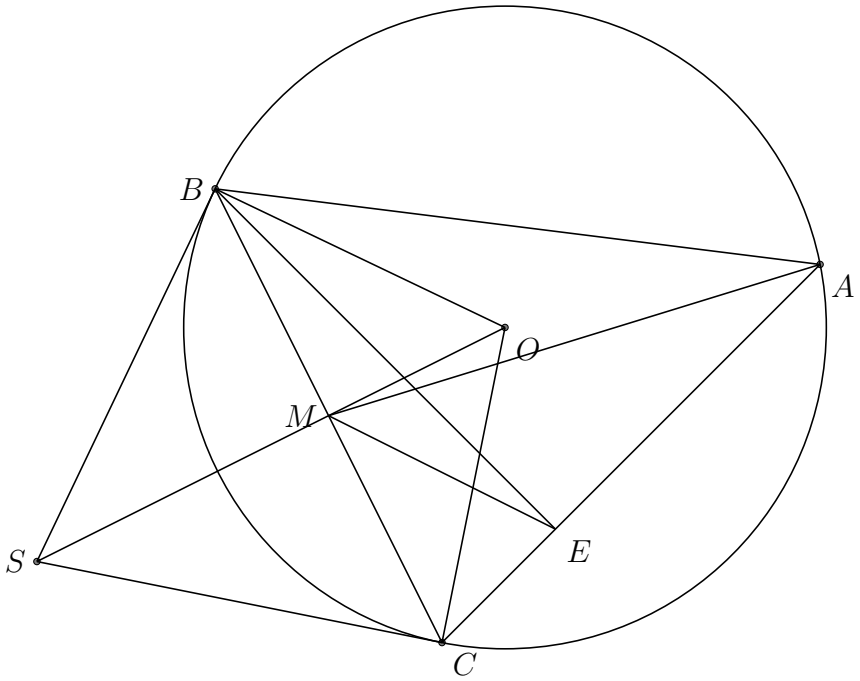
Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{5-\sqrt{37}}{2}, x = \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao BE và nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S, BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh: $AB.BM = AE.BS$.

b) Chứng minh: $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$.

Lời giải.



a) Ta có :$\widehat{AEB} = 90°, \widehat{BMS} = 90°$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
$\widehat{BAE} = \widehat{SBM}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$ số đo $\widehat{BC}$).
Suy ra: tam giác ABE đồng dạng tam giác BSM.
Suy ra $\dfrac{AB}{BS} = \dfrac{AE}{BM}$ hay $AB.BM = AE.BS$.

b) Vì $\dfrac{AB}{BS} = \dfrac{AE}{BM}; MB = ME = \dfrac{BC}{2}$ nên $\dfrac{AB}{BS} = \dfrac{AE}{ME}$ (1)
$\widehat{ABS} = \widehat{ABO} + 90°; \widehat{AEM} = \widehat{BEM} + 90°$ (2).
Vì tam giác ABE đồng dạng tam giác BSM nên $\widehat{ABE} = \widehat{BSM} = \widehat{OBM}$.
Suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{EBM} = \widehat{BEM}$ (3).
Từ (2), (3) suy ra $\widehat{ABS} = \widehat{AEM}$ (4).
Từ (1), (4) ta có tam giác ABS đồng dạng tam giác AEM.
Suy ra: $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Số A được tạo thành bởi các chữ số viết liền nhau gồm các số nguyên dương từ 1 đến 60 theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $A = 12345678910\cdots585960$. Ta xóa 100 chữ số của số A sao cho số tạo thành bởi các chữ số còn lại là số nhỏ nhất(không thay đổi trật tự các chữ số ban đầu). Hãy tìm số nhỏ nhất được tạo thành đó.

Lời giải.

Số chữ số của A là $9 + (60 - 10 + 1).2 = 111$ chữ số.

Suy ra xóa 100 chữ số thì còn lại 11 chữ số.

Để số mới có 11 chữ số nhỏ nhất thì ta phải chọn 5 chữ số đầu tiên bên trái là chữ số 0 (nghĩa là xóa hết các chữ số khác 0 từ 1 đến 50).

11 chữ số còn lại sau khi xóa 100 chữ số là 00000123450.

Vậy số cần tìm là: 123450.

Câu 6. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \dfrac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \le \dfrac{1}{2}(b+c-a+c+a-b) = c$.

Tương tự: $\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \le a, \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \le b$.

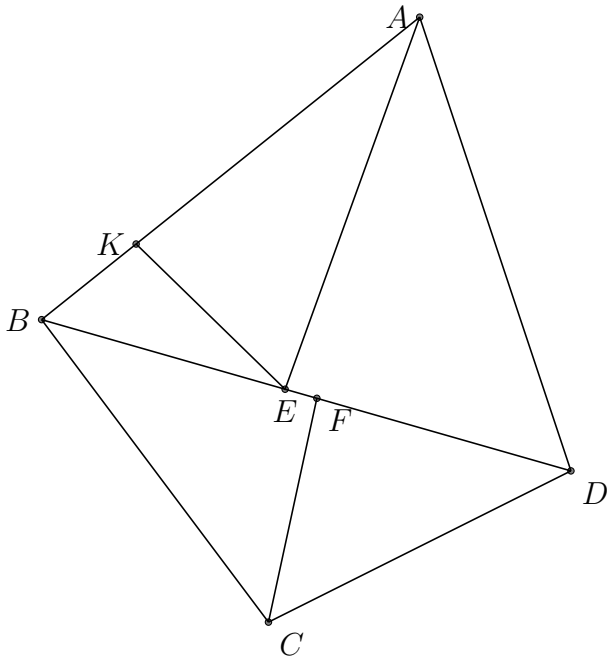
Suy ra $Q = \dfrac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \ge 1$.

Giá trị nhỏ nhất của Q là 1. Khi đó $a = b = c$

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60°, \widehat{BCD} = 90°$. Đường phân giác trong của $\widehat{BAD}$ cắt BD tại E. Đường phân giác trong của $\widehat{BCD}$ cắt BD tại F.

Chứng minh: $\dfrac{\sqrt{3}}{AE} + \dfrac{\sqrt{2}}{CF} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CD} + \dfrac{1}{DA}$.

Lời giải.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của E lên AB.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$S_{\triangle ABE} = \dfrac{KE.AB}{2} = \dfrac{AE.\sin 30^\circ.AB}{2} = \dfrac{AE.AB}{4}$.

$S_{\triangle ADE} = \dfrac{AE.AD}{4}$.

$S_{\triangle ABD} = \dfrac{AB.\sin 60^\circ.AD}{2} = \dfrac{\sqrt{3}AB.AD}{4}$.

Ta có : $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABD}$.

Suy ra: $\dfrac{\sqrt{3}}{AE} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD}$ (1).

Tương tự như trên ta tìm được $\dfrac{\sqrt{2}}{CF} = \dfrac{1}{CB} + \dfrac{1}{CD}$ (2).

Từ (1), (2) ta có: $\dfrac{\sqrt{3}}{AE} + \dfrac{\sqrt{2}}{CF} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CD} + \dfrac{1}{DA}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 148

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, VŨNG TÀU, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 + \sqrt{4x-3+4\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$.

b) Giải phương trình $x + \sqrt{x^2+3x+2} = x\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y = 3+\sqrt{xy} \\ x^2+y^2 = 18. \end{cases}$

Lời giải.

a) Với $x \geq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 + \sqrt{4x-3+4\sqrt{x-1}} \\ &= x-1-2\sqrt{x-1}+1+\sqrt{\left(2\sqrt{x-1}+1\right)^2} \\ &= x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+1 \\ &= x+1. \end{aligned}$$

Vậy $A = x+1$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -1$. Ta có:

$$\begin{aligned} & x+\sqrt{x^2+3x+2} = x\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow\ & x+\sqrt{x+1}.\sqrt{x+2}-x\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=0 \\ \Leftrightarrow\ & x\left(1-\sqrt{x+2}\right)-\sqrt{x+1}\left(1-\sqrt{x+2}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(1-\sqrt{x+2}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{x+2}=0 \\ x-\sqrt{x+1}=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=1 \\ \sqrt{x+1}=x \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm: $S = \left\{-1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

c) Điều kiện xác định: $xy \geq 0$.

Ta có: $\begin{cases} x+y = 3+\sqrt{xy} \\ x^2+y^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3+\sqrt{xy} \\ (x+y)^2 - 2xy = 18. \end{cases}$

Đặt $a = x+y$; $b = \sqrt{xy}$ $(b \geq 0)$, ta được hệ phương trình mới: $\begin{cases} a = b+3 \\ a^2 - 2b^2 = 18. \end{cases}$

Thế $a = b+3$ từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai, ta được phương trình:

$$(3+b)^2 - 2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow a = 6.$$

Do đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y = 6 \\ \sqrt{xy} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $(x;y) = (3;3)$.

Câu 2.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $p^2 - 5q^2 = 4$.

b) Cho đa thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Biết b, c là các hệ số dương và $f(x)$ có nghiệm. Chứng minh $f(2) \geq 9\sqrt[3]{c}$.

Lời giải.

a) Ta có $p^2 - 5q^2 = 4 \Leftrightarrow p^2 - 4 = 5q^2 \Leftrightarrow (p-2)(p+2) = 5q^2$.

Vì $0 < p-2 < p+2$ và q nguyên tố nên $p-2$ chỉ có thể nhận các giá trị 1, 5, q, q^2.

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$p-2$	$p+2$	p	q
1	$5q^2$	3	1
5	q^2	7	3
q	$5q$	3	1
q^2	5	3	1

Do p, q là các số nguyên tố nên chỉ có cặp $(p;q) = (7;3)$ thỏa mãn.

b) Vì $f(x)$ có nghiệm nên ta có $\Delta = b^2 - 4c \geq 0 \Rightarrow b \geq 2\sqrt{c}$.

Ta có: $f(2) = 4 + 2b + c \geq 4 + 4\sqrt{c} + c = (\sqrt{c}+2)^2$.

Mà $\sqrt{c} + 2 = \sqrt{c} + c + c \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{c}}$. (Bất đẳng thức Cauchy).

Do đó, ta có: $f(2) \geq \left(3\sqrt[3]{\sqrt{c}}\right)^2 = 9\sqrt[3]{c}$.

Câu 3. Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{y+2} + \frac{y^2}{z+2} + \frac{z^2}{x+2} \geq 1.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta được:

$$\frac{x^2}{y+2}+\frac{y+2}{9}\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+2}.\frac{y+2}{9}}=\frac{2}{3}x\Rightarrow \frac{x^2}{y+2}\geq \frac{6x-y-2}{9}.$$

Tương tự, ta có: $\frac{y^2}{z+2}\geq \frac{6y-z-2}{9}$; $\frac{z^2}{x+2}\geq \frac{6z-x-2}{9}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được: $\frac{x^2}{y+2}+\frac{y^2}{z+2}+\frac{z^2}{x+2}\geq \frac{5(x+y+z)-6}{9}$.

Lại có $(x+y+z)^3\geq 27xyz$ và $x^2+y^2+z^2\geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

Từ giả thiết $x^2+y^2+z^2=3xyz$, suy ra $\frac{(x+y+z)^3}{9}\geq 3xyz=x^2+y^2+z^2\geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$ $\Leftrightarrow x+y+z\geq 3$.

Do đó, ta có: $\frac{x^2}{y+2}+\frac{y^2}{z+2}+\frac{z^2}{x+2}\geq 1$.

Câu 4. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A và B $(OO'>R>R')$. Trên nửa mặt phẳng bờ là OO' có chứa điểm A, kẻ tiếp tuyến chung MN của hai đường tròn trên (với M thuộc (O) và N thuộc (O')). Biết BM cắt (O') tại điểm E nằm trong đường tròn (O) và đường thẳng AB cắt MN tại I.

a) Chứng minh $\widehat{MAN}+\widehat{MBN}=180^\circ$ và I là trung điểm của MN.

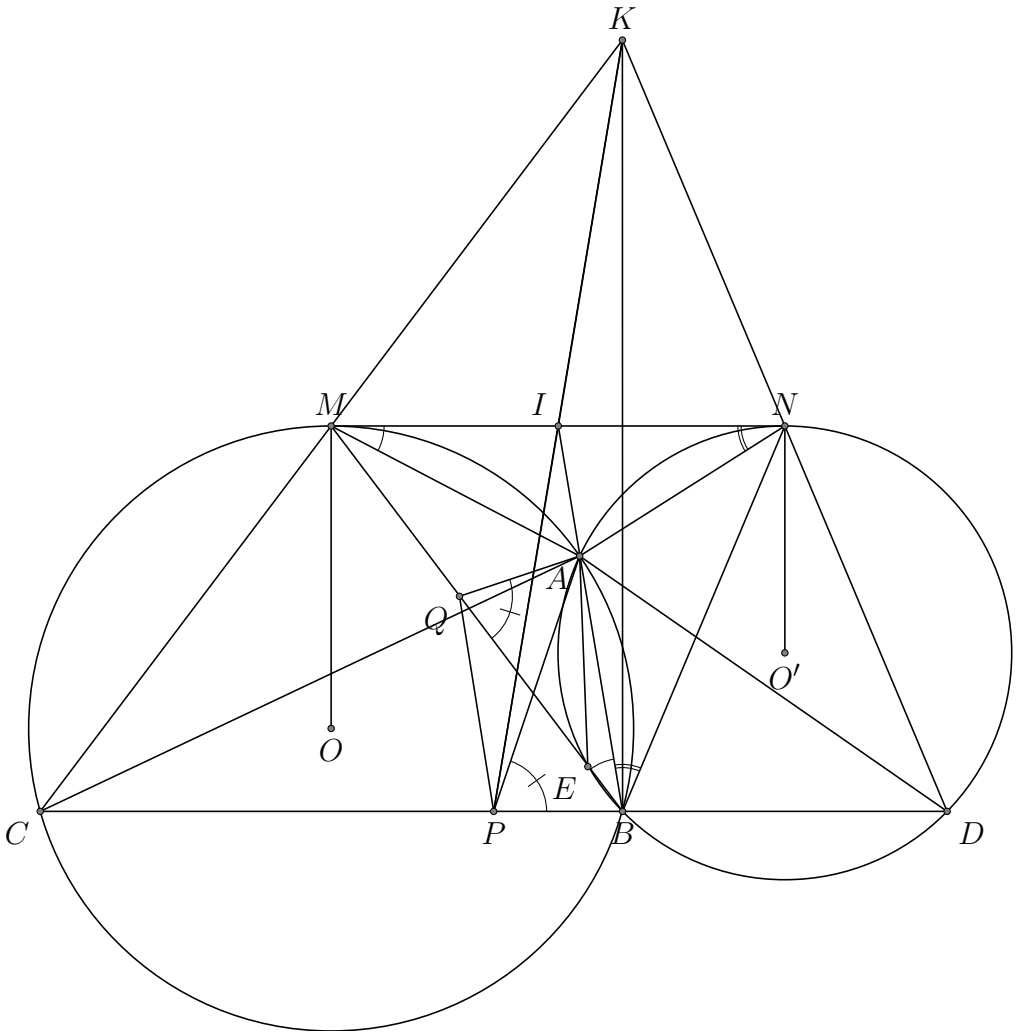
b) Qua B, kẻ đường thẳng (d) song song với MN, (d) cắt (O) tại C và cắt (O') tại D (với C, D khác B). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CD và EM. Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACD và các điểm A, B, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh tam giác BIP cân.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



a) Ta có: $\widehat{IMA} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn cung AM trong đường tròn (O)); $\widehat{INA} = \widehat{ABN}$ (cùng chắn cung AN trong đường tròn (O')).
Suy ra $\widehat{MAN} + \widehat{MBN} = \widehat{MAN} + \widehat{ABM} + \widehat{ABN} = \widehat{MAN} + \widehat{IMA} + \widehat{INA} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác).
Hai tam giác IMA và IBM có $\widehat{IMA} = \widehat{ABM}$ (cmt) và $\widehat{BIM}$ chung.
$\Rightarrow \triangle IMA \backsim \triangle IBM \Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IA}{IM} \Rightarrow IM^2 = IA.IB.$
Tương tự, ta có: $\triangle INA \backsim \triangle IBN \Rightarrow IN^2 = IA.IB.$
Do đó, ta có: $IM = IN$ hay I là trung điểm của MN.

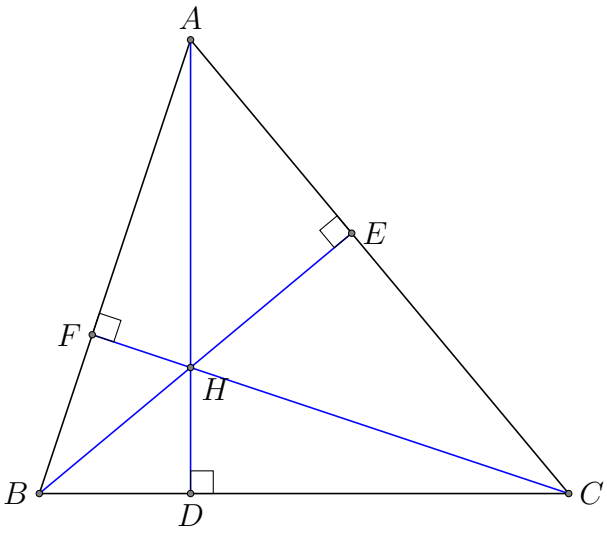
b) Hai tam giác AME và ACD có $\widehat{AME} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn cung AB trong đường tròn (O)) và $\widehat{AEM} = \widehat{ADC}$ (vì tứ giác $AEBD$ nội tiếp đường tròn (O')).
$\Rightarrow \triangle AME \backsim \triangle ACD$ (đpcm).
Ta có: $\triangle AME \backsim \triangle ACD \Rightarrow \widehat{AEQ} = \widehat{ADP}$ và $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{EM}{DC} = \dfrac{EQ}{DP}$.
$\Rightarrow \triangle AQE \backsim \triangle APD \Rightarrow \widehat{AQE} = \widehat{APD}$.
Suy ra tứ giác $ABPQ$ nội tiếp được trong một đường tròn hay các điểm A, B, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi K là giao điểm CM và DN. Vì $CDNM$ là hình thang nên ba điểm P, I, K thẳng hàng.

$MN \parallel BC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow \triangle BMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MCB} = \widehat{MBC}$.
Do $MN \parallel BC$ nên $\widehat{MCB} = \widehat{KMN}$ (hai góc đồng vị); $\widehat{MBC} = \widehat{BMN}$ (hai góc sole trong).
Suy ra $\widehat{KMN} = \widehat{BMN}$.
Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{KNM} = \widehat{BNM}$. Do đó, ta có: $\triangle BMN = \triangle KMN$.
$\Rightarrow MB = MK$, $NB = NK$. Suy ra MN là đường trung trực của $KB \Rightarrow BK \perp CD$, $IK = IB$.
Tam giác KBP vuông tại B có $IK = IB$ nên I là trung điểm của KP.
Vậy tam giác BIP cân tại I.

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Chứng minh rằng
$$\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{CA} + \frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}.$$

Lời giải.



Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao tương ứng kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.
Đặt $x = \dfrac{HA}{BC}$, $y = \dfrac{HB}{CA}$, $z = \dfrac{HC}{AB}$.
Hai tam giác BHD và ACD có $\widehat{BDH} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ và $\widehat{HDB} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$).
$\Rightarrow \triangle BHD \backsim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{HB}{AC} = \dfrac{BD}{AD} \Rightarrow xy = \dfrac{HA}{BC}.\dfrac{HB}{AC} = \dfrac{HA}{BC}.\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{HA.BD}{BC.AD} = \dfrac{S_{AHB}}{S_{ABC}}$.
Tương tự, ta có: $yz = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$; $zx = \dfrac{S_{CHA}}{S_{ABC}}$.
Suy ra $xy + yz + zx = \dfrac{S_{AHB} + S_{BHC} + S_{CHA}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$.
Lại có $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ nên $(x + y + z)^2 \geq 3 \Rightarrow x + y + z \geq \sqrt{3}$.
Vậy $\dfrac{HA}{BC} + \dfrac{HB}{CA} + \dfrac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 149

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN NINH THUẬN, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Giải bất phương trình và hệ phương trình sau:

a) Giải bất phương trình $4x-3>2(x-1)$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có: $4x-3>2(x-1) \Leftrightarrow 4x-2x>3-2 \Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Nghiệm của bất phương trình là: $x>\dfrac{1}{2}$

b) Ta có: $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3(3x-5)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-5 \\ 11x=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{23}{11} \\ y=\dfrac{14}{11} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{23}{11};\dfrac{14}{11}\right)$.

Câu 2. Cho biểu thức $P=\sqrt{x(x-6)+9}$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x=\sqrt{7}$.

Lời giải.

a) Ta có :

$P=\sqrt{x(x-6)+9}=\sqrt{x^2-6x+9}$

$=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$

b) Với $x=\sqrt{7}$ ta có : $P=\left|\sqrt{7}-3\right|=3-\sqrt{7}$

Câu 3. Cho hàm số bậc hai :$y=ax^2$ (1).

a) Xác định hệ số a biết đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm $A(2;2)$

b) Vẽ đồ thị hàm số (1) khi $a = \dfrac{1}{2}$

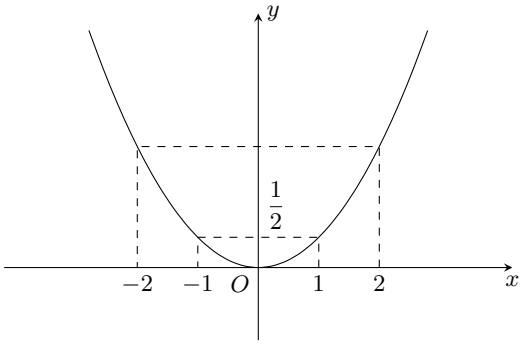
Lời giải.

a) Vì đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm $A(2;2)$ nên ta có : $2 = a.2^2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

b) Khi $a = \dfrac{1}{2}$ thì hàm số trở thành $y = \dfrac{1}{2}x^2$. Ta có bảng giá trị của hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị của hàm số:



Câu 4. Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ đường thẳng đi qua tâm O cắt đường tròn (O) tại điểm A và B $(MA < MB)$. Tiếp tuyến MC (C là tiếp điểm) với đường tròn (O) cắt tiếp tuyến tại B với đường tròn (O) ở D; BC và OD cắt nhau tại H; AD cắt đường tròn (O) tại E $(E \neq A)$.

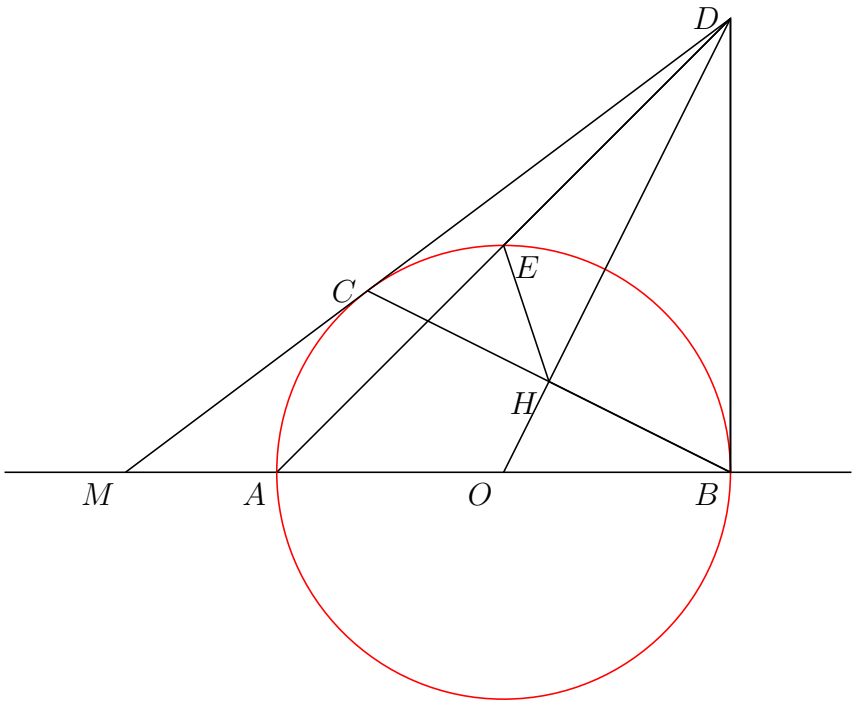
a) Chứng minh rằng tứ giác $BDEF$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh $AE.AD = 4R^2$.

c) Tính diện tích tam giác BCD theo R khi $\widehat{BMD} = 30^\circ$

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $DB = DC$; $OB = OC = R$. Suy ra OD là đường trung trực của BC nên $OD \perp BC \Rightarrow \widehat{BHD} = 90^\circ$.
Lại có: $\widehat{AEB} = \widehat{BED} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nữa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BED} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $BDEF$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Trong tam giác ABD ($\widehat{ABD} = 90^\circ$) có $BD \perp AE$ nên ta có:
$AD.AE = AB^2 \Leftrightarrow AD.AE = 4R^2$

c) Ta có: $\widehat{BMD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MOC} = 60^\circ$ (do tam giác MOC vuông) $\Rightarrow \triangle OAC$ đều $\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CBD} = 60^\circ$. Suy ra tam giác BCD đều.
Mặt khác: $\triangle ABC$ vuông tại C, ta có:
$BC = AC.\sin 60^\circ = 2R.2R.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.
Vậy diện tích tam giác BCD là:
$S = \dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(R\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Câu 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 - x^2 - 7y^2 = 4xy$

Lời giải.

Ta có: $x^2y^2 - x^2 - 7y^2 = 4xy \Leftrightarrow x^2y^2 - 3y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow y^2(x^2 - 3) = (x + 2y)^2$ (1).

- Nếu $y = 0 \Rightarrow y = 0$ nên $(0, 0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
- Nếu $y \neq 0$ thì $x^2 - 3$ phải là số chính phương. Giả sử $x^2 - 3 = k^2 (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x-k)(x+k) = 3 = 1.3 = -1.(-3)$.
  Vì $x - k < x + k$ suy ra:

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$$\left[\begin{cases} x-k=1 \\ x+k=3 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=2 \\ k=1 \end{cases} \right. .$$
$$\left.\begin{cases} x-k=1 \\ x+k=3 \end{cases} \right. \left.\begin{cases} x=-2 \\ k=1 \end{cases} \right.$$

Lần lượt thay $x=2$ và $x=-2$ vào phương trình (1) ta được $y=-2$ và $y=2$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên: $(0,0)$, $(2,-2)$ và $(-2,2)$

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 150

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{a}{a+1}+\sqrt{1+a^2+\dfrac{a^2}{(a+1)^2}}$ với $a\neq -1$.

Rút gọn biểu thức P và tính giá trị của P khi $a=2016$.

Lời giải.

Ta có:

$$P=\frac{a}{a+1}+\sqrt{1+a^2+\frac{a^2}{(a+1)^2}}=\frac{a}{a+1}+\sqrt{(1+a^2+2a)-2a+\frac{a^2}{(a+1)^2}}$$

$$=\frac{a}{a+1}+\sqrt{(1+a)^2-2(a+1)\frac{a}{a+1}+\frac{a^2}{(a+1)^2}}=\frac{a}{a+1}+\sqrt{\left[(a+1)-\frac{a}{a+1}\right]^2}$$

$$=\frac{a}{a+1}+\left|(a+1)-\frac{a}{a+1}\right|.$$

Nhận xét: $a+1-\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{a^2+a+1}{a+1}>0\Leftrightarrow a+1>0\Leftrightarrow a>-1$ do $a^2+a+1=(a+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$.

* Với $a>-1$ thì $P=\dfrac{a}{a+1}+(a+1)-\dfrac{a}{a+1}=a+1$.

* Với $a<-1$ thì $P=\dfrac{a}{a+1}-(a+1)+\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{-(a^2+1)}{a+1}$.

Vậy $a=2016$ thì $P=2017$.

Câu 2.

a) Tìm các số nguyên dương k và số thực x sao cho $(k-1)x^2+2(k-3)x+k-2=0$.

b) Tìm các số nguyên dương x và số nguyên tố p sao cho $x^5+x^4+1=p^2$.

Lời giải.

a) * Nếu $k=1$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{-1}{4}$.

* Nếu $0\leq k\neq 1$ thì phương trình đã cho là phương trình bậc hai. Phương trình có nghiệm khi $\Delta\geq 0\Leftrightarrow (k-3)^2-(k-1)(k-2)\geq 0\Leftrightarrow 0\leq k\leq \dfrac{7}{3}$.

Khi đó $x=\dfrac{3-k\pm\sqrt{7-3k}}{k-1}$.

Với $k=0\Rightarrow x=3\pm\sqrt{7}$.

Với $k=2\Rightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

b) Ta có $x^5+x^4+1=p^2\Leftrightarrow (x^2+x+1)(x^3-x+1)=p^2$.

Vì p là số nguyên tố, x nguyên dương nên chỉ có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: xét $x^2+x+1=x^3-x+1=p$ giải được 1 nghiệm nguyên dương $x=2$ thế vào $p=7$ thoả mãn yêu cầu bài toán.
Trường hợp 2: xét $x^3-x+1=1$ được $x=1$ suy ra $p=\sqrt{3}$ (loại).
Trường hợp 3: xét $x^2+x+1=1 \Leftrightarrow x(x+1)=0$ không có nghiệm dương.
Vậy có một cặp $(x;p)=(2;7)$.

Câu 3. Giải các phương trình sau:

a) $(17-6x)\sqrt{3x-5}+(6x-7)\sqrt{7-3x}=2+8\sqrt{36x-9x^2-35}$.

b) $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{10x-20}-\sqrt{x-3}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $\dfrac{5}{3}\le x\le\dfrac{7}{3}$.
Ta có: $\begin{cases}a=\sqrt{3x-5}\ge 0\\ b=\sqrt{7-3x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=2(*)$.
Phương trình đã cho trở thành:
$(2b^2+3)a+(2a^2+3)b=a^2+b^2+8ab \Leftrightarrow 2ab(a+b)+3(a+b)=(a+b)^2+6ab$
$\Leftrightarrow 2ab(a+b-3)=(a+b)(a+b-3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=3\\ a+b=2ab\end{array}\right.$.
- Với $a+b=2$ kết hợp với (*) ta có $ab=\dfrac{7}{3}$.
Khi đó a,b là nghiệm phương trình $X^2-2X+\dfrac{7}{3}=0$ (Vô nghiệm).
- Với $a+b=2ab$ kết hợp với (*) ta có $2+2ab=4a^2b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}ab=1+\sqrt{3}\\ ab=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.
Chỉ có $ab=1+\sqrt{3}$ thỏa mãn, từ đó suy ra $a+b=1+\sqrt{3}$.
Do đó a,b là nghiệm phương trình $X^2-(1+\sqrt{3})X+1+\sqrt{3}=0$ (Vô nghiệm).
Kết luận: phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện: $x\ge 3$. Bình phương hai vế phương trình đã cho ta có: $x^2-3x+2==11x-23-2\sqrt{10(x^2-3x+2)} \Rightarrow 2\sqrt{10(x^2-3x+2)}=-x^2+14x-25$
$\Rightarrow 40(x^2-3x+2)=(x^2-14x+25)^2 \Rightarrow x^4-28x^3+206x^2-500x+385=0$
$\Rightarrow (x^2-8x+11)(x^2-20x+35)=0$.
Với $x^2-8x+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4+\sqrt{5}\\ x=4-\sqrt{5}\end{array}\right.$ (Thử lại thỏa mãn).
Với $x^2-20x+35=0$ có nghiệm không thỏa mãn điều kiện.
Kết luận: phương trình đã cho có nghiệm $x=4+\sqrt{5}$ và $x=4-\sqrt{5}$.

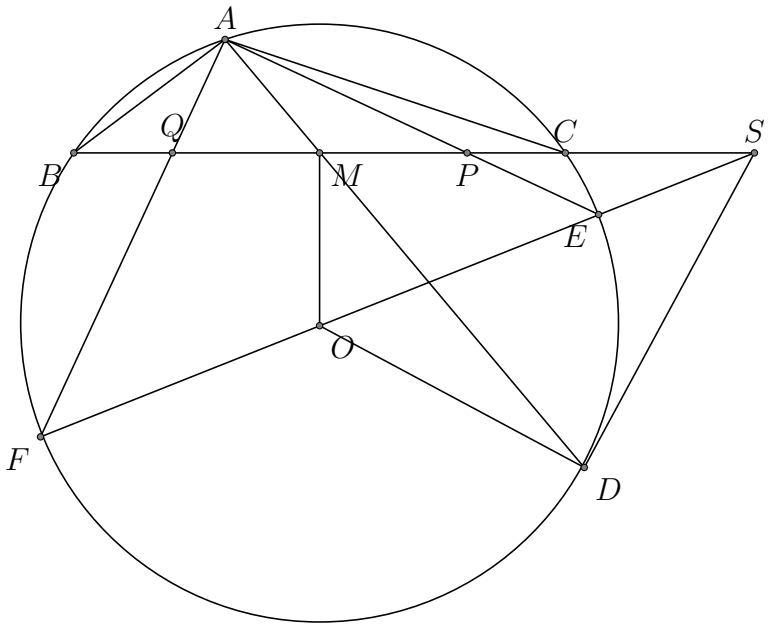
Câu 4. Cho ΔABC có $\widehat{BAC}>90^0$, AB $<$ AC và nội tiếp đường tròn tâm (O). Trung tuyến AM của ΔABC cắt (O) tại điểm thứ hai D. Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường thẳng BC tại S. Trên cung nhỏ DC của (O) lấy điểm E, đường thẳng SE cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AE,AF với BC.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Chứng minh rằng $MODS$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $QB = PC$.

Lời giải.



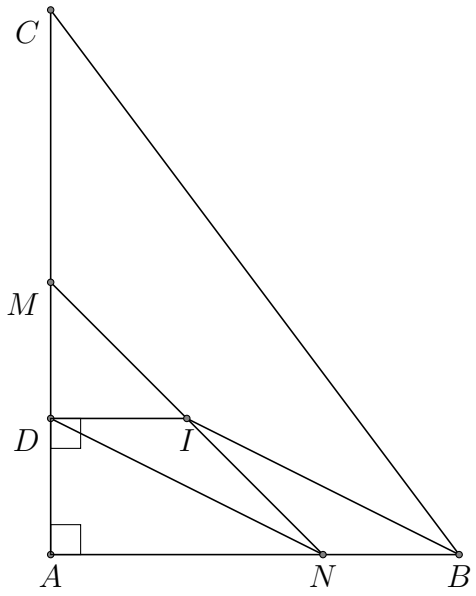
a) Vì (O) có M là trung điểm dây cung BC nên $\widehat{OMS} = 90°$.
Mà (O) có DS là tiếp tuyến nên $\widehat{ODS} = 90°$.
Vậy $\widehat{OMS} + \widehat{ODS} = 180°$ nên tứ giác $MODS$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi N là trung điểm EF thì N cũng nằm trên đường tròn đường kính OS.
Khi đó $\widehat{END} = \widehat{SND} = \widehat{AMQ}$.
Theo tính chất góc chắn cung trong (O) ta có: $\widehat{QAM} = \widehat{NED}$.
Từ đó suy ra $\Delta QAM \backsim \Delta DEN \Rightarrow \dfrac{QM}{ND} = \dfrac{AM}{NE} \Rightarrow QM = \dfrac{AM.ND}{NE}$ (1).
Chứng minh tương tự ta có $PM = \dfrac{AM.ND}{NF}$ (2).
Từ (1), (2) kết hợp với $NE = NF$ suy ra ta có:
$QM = MP \Rightarrow BM - QB = CM - PC \Rightarrow QB = PC$ (Do $BM = MC$).

Câu 5. Cho ΔABC vuông tại A có $AB < AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC và tiếp xúc với cạnh AC tại D. Gọi M là trung điểm của AC, đường thẳng IM cắt AB tại N. Chứng minh rằng tứ giác $IBND$ là hình bình hành

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



Ta có $ID \perp AC \Rightarrow ID \parallel BN$ (1).
Gọi r, S lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, diện tích của ΔABD.
Ta có: $2r = AB + AC - BC$ và $2S = r(AB + BC + AC) = AB.AC$.
Ta cần chứng minh $BN = ID = r$.
Thật vậy ta có:
Do $ID \parallel AB \Rightarrow \dfrac{ID}{NA} = \dfrac{MD}{MA} \Rightarrow NA = \dfrac{ID.MA}{MD} = \dfrac{r.\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}AC - r} = \dfrac{r.AC}{AC - 2r}$.
Do $BN = AB - NA = AB - \dfrac{r.AC}{AC - 2r} = \dfrac{AB.AC - 2AB.r - r.AC}{AC - 2r}$.
Xét đẳng thức $\dfrac{AB.AC - 2AB.r - r.AC}{AC - 2r} = r \Leftrightarrow AB.AC - 2AB.r - r.AC = AC.r - 2r^2$
$\Leftrightarrow AB.AC - 2r(AB + AC) + 2r^2 = 0 \Leftrightarrow AB.AC - 2r(2r - BC) + 2r^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2S - 2r(AB + BC + AC) + 2r.BC + 2r^2 = 0 \Leftrightarrow 2S - 4S + 2r(BC + r) = 0$
$\Leftrightarrow S = r(BC + r) \Leftrightarrow \dfrac{2S}{r} = 2BC + 2r \Leftrightarrow AB + BC + AC = 2BC + AB + AC - BC$
$\Leftrightarrow AB + BC + AC = AB + BC + AC$ (mệnh đề đúng).
Vậy $BN = r = ID$ (2).
Từ (1), (2) suy ra tứ giác $IBND$ là hình bình hành.

Câu 6. Người ta dùng một số quân cờ hình *tetromino* gồm 4 ô vuông kích thước 1 x 1, hình chữ L, có thể xoay hoặc lật ngược như hình 1 để ghép phủ kín một bàn cờ hình vuông kích thước n x n (n là số nguyên dương) gồm n^2 ô vuông kích thước 1 x 1 như hình 2 theo quy tắc sau: i) Với mỗi quân cờ sau khi ghép vào bàn cờ, các ô vuông của nó phải trùng với các ô vuông của bàn cờ. ii) Không có hai quân cờ nào mà sau khi ghép vào bàn cờ chúng kê lên nhau.

a) Khi $n = 4$, hãy chỉ ra một cách ghép phủ kín bàn cờ (có thể minh họa bằng hình vẽ).

b) Tìm tất cả các giá trị của n để có thể ghép phủ kín bàn cờ.

Lời giải.

a) Hình vuông 4 x 4 được phủ bởi 4 ô *tetromino* (các ô đánh số 1 là ô *tetromino* thứ nhất, ..., các ô đánh số 1 là ô *tetromino* thứ tư).

1	4	4	4
1	4	3	3
1	1	2	3
2	2	2	3

Bảng 1: 4 x 4

b) Ta sẽ chứng minh chỉ có hình vuông $4n$ x $4n$ mới được phủ bởi các *tetromino*. Thật vậy:
* Nếu hình vuông có cạnh lẻ, suy ra số ô là số lẻ, không chia hết cho 4. Vậy không thể nào có thể phủ hết bằng các ô *tetromino*.
* Ta xét trường hợp $(4n+2)$ x $(4n+2) = 16n^2+16n+4$. Ta sẽ cần $4n^2+4n+1$ ô *tetromino*. Đánh số ô vuông $(4n+2)$ x $(4n+2)$ bằng các số 1 và -1 xen kẽ theo hàng.
Ví dụ với $n=6$: Vậy sẽ có $8n^2+8n+2$ số 1 và $8n^2+8n+2$ số -1.

1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1

Bảng 2: 6 x 6

Nhận xét:
Ô *tetromino* khi phủ lên bàn sẽ phủ ba số 1, một số -1 hoặc ba số -1, một số 1.
Gọi x là số ô *tetromino* phủ ba số 1, một số -1; y là số ô *tetromino* phủ ba số -1, một số 1.
Ta có $3x+y = 8n^2+8n+2$ (số số 1) là số chẵn, suy ra $x+y$ chẵn (do $2x$ chẵn). Lại có tổng số ô *tetromino* là $4n^2+4n+1$ là lẻ, vậy $x+y$ là lẻ (mâu thuẫn). Vậy với hình vuông cạnh $4n+2$ không thể phủ hết các ô *tetromino*.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 151

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH, VÒNG 1, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $T = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right).\left(x\sqrt{x} - \dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức T.

b) Tìm giá trị của x thỏa mãn $\dfrac{1}{2}T = 2\sqrt{x} + 13$.

Lời giải.

Cho biểu thức $T = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right).\left(x\sqrt{x} - \dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức T: Với $x > 0$; $x \neq 1$.

$T = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{x-1}.(x\sqrt{x} - \sqrt{x}) = \dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}.\sqrt{x}.(x-1) = 4x.$

Vậy $T = 4x$.

b) Với $x > 0$; $x \neq 1$, ta có: $\dfrac{1}{2}T = 2\sqrt{x} + 13 \Leftrightarrow 2x = 2\sqrt{x} + 13 \Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x} - 13 = 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t \geq 0$, ta được:$2t^2 - 2t - 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t_2 = \dfrac{1-3\sqrt{3}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{28+6\sqrt{3}}{4} = \dfrac{14+3\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x = \dfrac{14+3\sqrt{3}}{2}$ thì $\dfrac{1}{2}T = 2\sqrt{x} + 13$.

Câu 2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + y^2 + xy$.

Lời giải.

$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + y^2 + xy \Leftrightarrow x^2 - 2y^2x + xy + 2y^2 - x - y = 1$

$\Leftrightarrow x\left(-2y^2 + y + x\right) - \left(-2y^2 + y + x\right) = 1 \Leftrightarrow (-2y^2 + y + x)(x-1) = 1$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\-2y^2+x+y=1\end{cases}\\\begin{cases}x-1=-1\\-2y^2+x+y=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\-2y^2+x+y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=0\\-2y^2+x+y=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=21\\2y^2-y-1=0\end{cases}\\\begin{cases}x=0\\2y^2-y-1=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\\left[\begin{array}{l}y=1\\y=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x=0\\\left[\begin{array}{l}y=1\\y=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}\\\begin{cases}x=0\\y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(0;1)$ và $(2;1)$.

Câu 3. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được $\dfrac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Lời giải.

Gọi thời gian làm riêng xong công việc của người thợ thứ nhất là x (giờ), của người thợ thứ hai là y(giờ) . Điều kiện: x, $y>16$.

Trong 1 giờ người thợ thứ nhất làm được: $\dfrac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 giờ người thợ thứ hai làm được: $\dfrac{1}{y}$ (công việc).

Trong 1 giờ cả hai người thợ làm được: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ (công việc).

Ta được phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16}(1)$.

Người thợ thứ nhất làm trong 3 giờ được $\dfrac{3}{x}$ (công việc).

Người thợ thứ hai làm trong 6 giờ được $\dfrac{6}{y}$ (công việc).

Theo đề ta có phương trình: $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{4}(2)$.

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16}\\\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Giải hệ ta được: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{24}\\\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{48}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=24\\y=48.\end{cases}$

Vậy thời gian làm riêng xong công việc của người thợ thứ nhất là 24 giờ, của người thứ hai là 48 giờ.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O và dây AB không phải là đường kính. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB tại K (D thuộc cung nhỏ AB). M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M không trùng với B và C). DM cắt AB tại F.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Chứng minh tứ giác $CKFM$ nội tiếp.

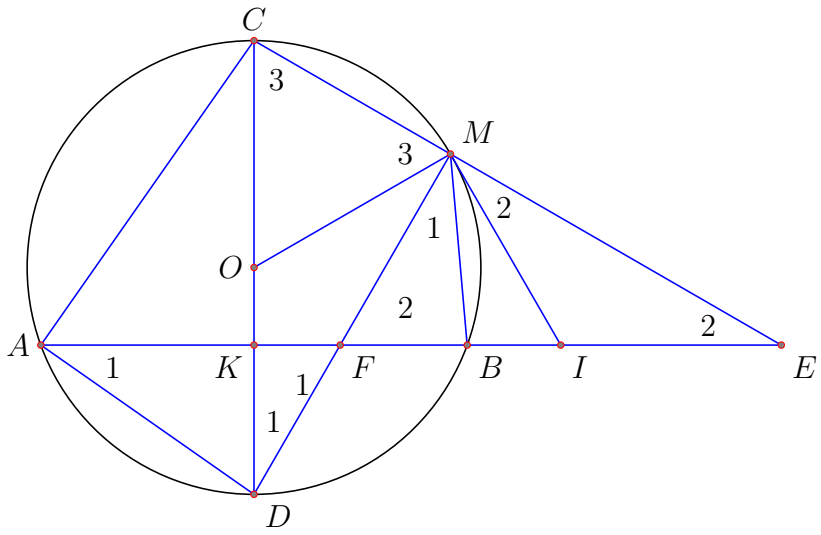
b) Chứng minh $DF.DM = AD^2$.

c) Tia CM cắt đường thẳng AB tại E. Chứng tỏ rằng tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) đi qua trung điểm của EF.

d) Chứng minh $\dfrac{FB}{EB} = \dfrac{KF}{KA}$.

Lời giải.

a) Chứng minh tứ giác $CKFM$ nội tiếp.
$CD \perp AB \Rightarrow \widehat{CKF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Lại có $\widehat{CMF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Suy ra $\widehat{CKF} + \widehat{CMF} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABEF$ nội tiếp.



b) Chứng minh $DF.DM = AD^2$.
Xét $\triangle DKF$ và $\triangle DMC$ có:
$\widehat{DKF} = \widehat{DMC} = 90^\circ$
$\widehat{CKM} = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle DKF \backsim \triangle DMC$ (g.g).
$\Rightarrow \dfrac{DF}{DK} = \dfrac{CD}{DM}$
$\Rightarrow DF.DM = DK.CD$ (1).
Lại có: $\widehat{DAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $\widehat{AKC} = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại A có đường cao AK nên $AK^2 = DK.CD$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $DF.DM = AD^2$.

c) Chứng minh tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) đi qua trung điểm của EF.
Gọi giao điểm của tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M với AE là I.
Ta có: $\widehat{M_2} + \widehat{M_3} = 90^\circ$ (vì $\widehat{OMI} = 90^\circ$).
$\widehat{E_2} + \widehat{C_3} = 90^\circ$ (vì $\widehat{CKE} = 90^\circ$), mà $\widehat{C_3} = \widehat{M_3}$ (vì $OC = OM$ nên $\triangle OMC$ cân tại C).
suy ra $\widehat{E_2} = \widehat{M_2} \Rightarrow \triangle IME$ cân tại I suy ra $IM = IE$ (3).
Ta có: $\widehat{M_2} + \widehat{IMF} = \widehat{DME} = 90^\circ$, $\widehat{E_2} + \widehat{F_2} = 90^\circ$ (vì $\widehat{DME} = 90^\circ$), mà $\widehat{E_2} = \widehat{M_2}$ (cmt)
suy ra $\widehat{IMF} = \widehat{F_2} \Rightarrow \triangle IMF$ cân tại I suy ra $IM = IF$ (4).
Từ (3) và (4) suy ra $IE = IF$.
Vậy tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) đi qua trung điểm của EF.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

d) Chứng minh $\dfrac{FB}{EB}=\dfrac{KF}{KA}$.

Ta có: $\widehat{A_1}=\widehat{M_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DB) và $\widehat{F_1}=\widehat{F_2}$ (đối đỉnh)

suy ra $\triangle ADF\backsim\triangle MBF$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{FB}{FM}=\dfrac{FD}{FA}\Rightarrow FB.FA=FM.FD$ (5).

Ta có: $\widehat{DKF}=\widehat{EMF}=90^\circ$ và $\widehat{F_1}=\widehat{F_2}$ (đối đỉnh)

suy ra $\triangle FDK\backsim\triangle FME$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{FM}{FE}=\dfrac{FK}{FD}\Rightarrow FE.FK=FM.FD$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra

$FB.FA=FE.FK\Rightarrow\dfrac{FB}{FE}=\dfrac{FK}{FA}\Rightarrow\dfrac{FB}{FE-FB}=\dfrac{FK}{FA-FK}\Rightarrow\dfrac{FB}{EB}=\dfrac{FK}{KA}$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x-2016}}{x+1}+\dfrac{\sqrt{x-2017}}{x-1}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq 2017$.

$A=\dfrac{\sqrt{x-2016}}{x+1}+\dfrac{\sqrt{x-2017}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{(x-2016).2017}}{(x+1).\sqrt{2017}}+\dfrac{\sqrt{(x-2017).2016}}{(x-1).\sqrt{2016}}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$A\leq\dfrac{x-2016+2017}{2(x+1).\sqrt{2017}}+\dfrac{x-2017+2016}{2(x-1).\sqrt{2016}}=\dfrac{x+1}{2(x+1).\sqrt{2017}}+\dfrac{x-1}{2(x-1).\sqrt{2016}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2016}}+\dfrac{1}{\sqrt{2017}}\right)$.

$A\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2016}}{2016}+\dfrac{\sqrt{2017}}{2017}\right)=\dfrac{2017.\sqrt{2016}+2016.\sqrt{2017}}{2.2016.2017}=\dfrac{2017.\sqrt{2016}+2016.\sqrt{2017}}{8132544}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}2017=x-2016\\2016=x-2017\end{cases}\Leftrightarrow x=4033$ (thỏa điều kiện).

Vậy $A_{max}=\dfrac{2017.\sqrt{2016}+2016.\sqrt{2017}}{8132544}$ khi $x=4033$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 152

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH VÒNG 2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 1.

a) Đơn giản biểu thức $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ với $x>0$.

b) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$ và $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{47}{60}$.
Tính giá trị biểu thức: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

Lời giải.

a) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}=\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1=2$

b) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+3=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)=\dfrac{47}{10}\Longrightarrow\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{17}{10}$.

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{1-3x}=2\sqrt{x^2+1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+3y^2-3x-1=0\\x^2-y^2-x-4y+5=0\end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x\le\dfrac{1}{3}$.
PT $\iff\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{1-3x}=2(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-3x})\iff\dfrac{2(x^2+3x)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{1-3x}}=\dfrac{2(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-3x}}$
PT $\iff x^2+3x=0\iff x=0$ hoặc $x=-3$.

b) Cộng hai phương trình của hệ ta có $2(x-1)^2+2(y-1)^2=0\iff x=1,y=1$.

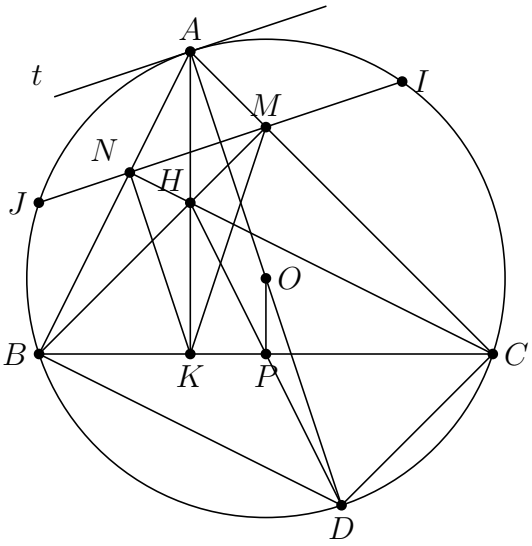
Câu 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AK,BM,CN của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\widehat{NKH} = \widehat{MKH}$.

b) Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm I, J. Chứng minh AO đi qua trung điểm của IJ.

c) Gọi P là trung điểm BC, diện tích tứ giác $AMHN$ là S. Chứng minh $2OP^2 > S$.

Lời giải.



a) Các tứ giác $BNHK$, $CMHK$ nội tiếp và $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$, cho nên $\widehat{NKH} = \widehat{ABM} = \widehat{ACN} = \widehat{MKH}$.

b) Ta cần chứng minh $IJ \perp AO$. Gọi At là tiếp tuyến tại A của (O), ta có $\widehat{tAB} = \widehat{ACB}$, mặt khác tứ giác $BCMN$ nội tiếp cho nên $\widehat{ACB} = \widehat{ANM} \Longrightarrow \widehat{tAB} = \widehat{ANM} \Longrightarrow At \parallel IJ$ mà $At \perp AO \Longrightarrow IJ \perp AO$. (ĐPCM)

c) Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, dễ thấy tứ giác $HBDC$ là hình bình hành và OP là đường trung bình của tam giác AHD cho nên $AH = 2OP$.
Tam giác ANH vuông tại N, $S_{ANH} = \dfrac{AN.NH}{2} \le \dfrac{AN^2 + NH^2}{4} = \dfrac{AH^2}{4} = OP^2$, chứng minh tương tự $S_{AMH} \le OP^2 \Longrightarrow 2OP^2 \ge S$, tam giác ABC nhọn nên dấu bằng không thể xảy ra, ta có ĐPCM.

Câu 4.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $xyz \neq 0$ và $x^5 + 8y^3 + 7z^2 = 0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên không âm a, b, c thỏa mãn $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc$ và $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ chia hết $a + b + c + 1$.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Xét bộ ba các số nguyên có dạng $(t^6, -t^{10}, t^{15})$ với $t \in \mathbb{Z}$, ta có $(t^6)^5+8(-t^{10})^3+7(t^{15})^2 = 0$. Vậy phương trình tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên (x, y, z).

b) Ta có $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 6abc \Longrightarrow (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) = 3abc$.
$a^3+b^3+c^3+1 = (a+b+c)^3+1-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$
$= \underbrace{(a+b+c)^3+1}_{\text{chia hết cho } a+b+c+1} -3(a+b+c+1)(ab+bc+ca)+(a+b+c)^2$, cho nên $(a+b+c)^2$ chia hết cho $a+b+c+1 \Longrightarrow a+b+c+1 = 1$ hoặc $a+b+c+1 = -1$, mặt khác a, b, c không âm cho nên $a+b+c = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$.

Câu 5.

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $(x-y)(x-z) = 1$ và $y \neq z$. Chứng minh: $\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2} \geq 4$.

b) Trên bảng ban đầu ghi số 2 và số 4. Ta thực hiện cách viết thêm các số lên bảng như sau: nếu trên bảng đã có hai số, giả sử là a, b, $a \neq b$, ta viết thêm lên bảng số có giá trị là $a+b+ab$. Hỏi với cách thực hiện như vậy có thể xuất hiện số 2016 được không? Giải thích.

Lời giải.

a) Đặt $a = x-y$, $b = x-z$, ta có $ab = 1$, BĐT tương đương với $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-2}+\dfrac{1}{b^2} \geq 4 \iff a^2+b^2+\dfrac{1}{a^2+b^2-2} \geq 4 \iff a^2+b^2-2+\dfrac{1}{a^2+b^2-2} \geq 2$. (ĐPCM)

b) Dễ thấy tất cả các số ghi trên bảng là các số nguyên dương. Giả sử xuất hiện 2016, ta có $a+b+ab = 2016 \iff (a+1)(b+1) = 2017$, do 2017 nguyên tố và $a, b > 0$ suy ra $a+1 = 1$ hoặc $b+1 = 1$ (vô lý).

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 153

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH (VÒNG 1), 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $A=\sqrt{x-1}+\dfrac{2}{3-x}$.

b) Tính giá trị biểu thức $B=\sqrt{x^2-6x+9}$ với $x=3-\sqrt{3}$.

c) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông có cạnh bằng 5 cm.

d) Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng $y=-x+2$ với parabol $y=x^2$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của biểu thức là $\begin{cases}x-1\geq 0\\3-x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\x\neq 3.\end{cases}$

b) Với $x=3-\sqrt{3}$ thì $B=\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=|3-\sqrt{3}-3|=\sqrt{3}$.

c) Gọi $ABCD$ là hình vuông $AB=5$ cm. Đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ có tâm là điểm $O=AC\cap BD$. Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tiếp $ABCD$ là $R=OA=\dfrac{AC}{2}$.
Mà $AC^2=AB^2+AD^2=5\sqrt{2}\Rightarrow R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

d) Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-x+2=x^2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2.\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ các giao điểm là $A(1;1)$, $B(-2;4)$.

Câu 2. Cho biểu thức $P=\dfrac{3(x+2\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ (Với $x\geq 0;\ x\neq 1$).

a) Chứng minh rằng $P=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$.

b) Chứng minh rằng nếu $x\geq 0;\ x\neq 1$ thì $P\leq\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq 0$, $x \neq 1$.

$$P = \frac{3(x+2\sqrt{x}) - (\sqrt{x}+2)^2 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3x+6\sqrt{x}-x-4\sqrt{x}-4-x+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \frac{x+2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}.$$

b) Do $\sqrt{x}+2 > 0$, $\forall x \geq 0$, $x \neq 1$ nên

$$P \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}+3) \leq 3(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \quad \text{(luôn đúng)}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 3.

1) Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + 2m - 2 = 0$ (1) (Với m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 4 + x_1x_2$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm lớn hơn 2.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + x - y = 0 \\ \sqrt{2x+y-2} + 2 - 2x = 0. \end{cases}$

Lời giải.

1) $\Delta = m^2 + 3 > 0$ $\forall m \in \mathbb{R}$. Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1x_2 = 2m-2. \end{cases}$

a) Theo giả thiết ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 + x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3. \end{array}\right.$$

b) Xét hai trường hợp

- Chỉ có đúng một nghiệm lớn hơn 2. Nghĩa là
$$(x_1-2)(x_2-2) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < 0 \quad \text{(Vô lý)}.$$
- Cả hai nghiệm đều lớn hơn 2. Nghĩa là
$$\begin{cases} (x_1-2)(x_2-2) > 0 \\ x_1 + x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m+1 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

2) Điều kiện: $2x + y - 2 \geq 0$.

Biến đổi phương trình thứ nhất

$$2x^2 - y^2 - xy + x - y = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x^2 - 2xy) + (xy - y^2) + (x - y) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(2x+y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -2x - 1. \end{array}\right.$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

- Với $y = x$ phương trình thứ hai trở thành
$$\sqrt{3x-2} = 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2.$$
- Với $y = -2x - 1$ thì $2x + y - 2 = -3 < 0$ (Không thỏa mãn điều kiên).

Vậy nghiệm hệ là $(x; y) = (2; 2)$.

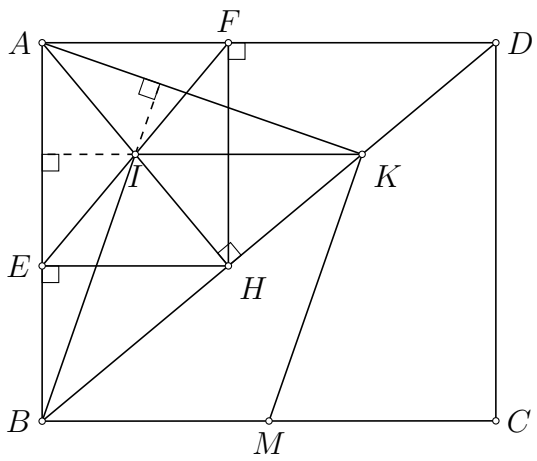
Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $AH \perp BD$ tại H và $HE \perp AB$ tại E và $HF \perp AD$ tại F. Gọi K, M lần lượt là trung điểm của HD, BC và I là giao điểm của AH với EF.

a) Chứng minh rằng I là trực tâm của $\triangle ABK$.

b) Chứng minh rằng $ABMK$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh rằng $AH^3 = BE.BD.DF$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{EAE} = \widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ nên $AFHE$ là hình chữ nhật.
$\Rightarrow I$ là trung điểm AH, do đó IK là đường trung bình của $\triangle AHD$. Tức là $IK \parallel AD$.
$\Rightarrow KI \perp AB$. Mà $AI \perp BK$ nên I là trực tâm $\triangle ABK$.

b) Do IK là đường trung bình của $\triangle AHD$ nên $IK = \dfrac{1}{2}AD \Rightarrow IK = BM$ và $IK \parallel BM$.
$\Rightarrow KIBM$ là hình bình hành, nên $BI \parallel MK$.
Mà I là trực tâm $\triangle ABK$ nên $BI \perp AK$.
$\Rightarrow MK \perp AK \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$, mà $\widehat{ABM} = 90^\circ$ nên $ABMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM.

c) Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được
$$\begin{aligned} BE.BD.DF.AH &= (BD.AH).BE.DF \\ &= (AB.AD).BE.DF = (AB.BE)(AD.DF) \\ &= HB^2.HD^2 = (HB.HD)^2 = AH^4. \end{aligned}$$
$\Rightarrow BE.BD.DF = AH^3$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4x^2 - yz + 2} + \frac{1}{4y^2 - zx + 2} + \frac{1}{4z^2 - xy + 2}.$$

Lời giải.

Vì $xy + yz + zx = 1$ nên

$$4x^2 - yz + 2 = 4x^2 - yz + 2(xy + yz + zx) = 4x^2 + 2xy + yz + 2xz = (2x + y)(2x + z).$$

Tương tự cũng có

$$4y^2 - zx + 2 = (2y + x)(2y + z); \qquad 4z^2 - xy + 2 = (2z + x)(2z + y).$$

Do đó, theo BĐT Cô si ta có các biến đổi sau

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(2x + y)(2x + z)} + \frac{1}{(2y + x)(2y + z)} + \frac{1}{(2z + x)(2z + y)} \\ &= \frac{yz}{(2xz + yz)(2xy + yz)} + \frac{xz}{(2yz + xz)(2xy + xz)} + \frac{xy}{(2yz + xy)(2xz + xy)} \\ &\geq \frac{4yz}{(2xz + 2xy + 2yz)^2} + \frac{4xz}{(2yz + 2xy + 2xz)^2} + \frac{4xy}{(2yz + 2xz + 2xy)^2} \\ &= \frac{4(yz + xz + xy)}{4} = 1. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 154

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC LÀO CAI, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x\geq 0, x\neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tính giá trị của P với $x=4-2\sqrt{3}$.
3. Tìm x để $P<\dfrac{5}{2}$.
4. Tìm x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

1. Với $x\geq 0, x\neq 4$, ta có:
$$\begin{aligned}P=&\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}\\=&\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)+2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\\=&\frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.\end{aligned}$$

2. Khi $x=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{3}-1$.
Ta có: $P=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}=3\left(2-\sqrt{3}\right)=6-3\sqrt{3}$.

3. Với $x\geq 0, x\neq 4$, ta có:
$P<\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}>\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 6\sqrt{x}<5\sqrt{x}+10\Leftrightarrow\sqrt{x}<10\Leftrightarrow x<100$.
Kết hợp với điều kiện ta có: $P<\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 0\leq x<100$ và $x\neq 4$.

4. Với $x\geq 0, x\neq 4$, ta có: $P=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=3-\dfrac{6}{\sqrt{x}+2}$.
P nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow\dfrac{6}{\sqrt{x}+2}$ nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+2 \text{ là ước của } 6\\ \sqrt{x}+2\geq 2\end{cases}$.
Do đó: $\sqrt{x}+2\in\{2;3;6\}\Leftrightarrow\sqrt{x}\in\{0;1;4\}\Leftrightarrow x\in\{0;1;16\}$.
Vậy P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $x\in\{0;1;16\}$.

Câu 2.

1. Cho phương trình $x^2+4x-m=0$ (1) (x là ẩn). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $\dfrac{1}{\sqrt{x_1^4+x_2^4}}$ đạt giá trị lớn nhất.

2. Cho đường thẳng $(d): y=3x+6$ và đường thẳng $(d'): y=(m^2-2m)x+2m$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) song song với (d').

Lời giải.

1. Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16+4m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$.
Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ x_1.x_2=-m \end{cases}$.
Ta có: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16+2m$.
$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2=(16+2m)^2-2(-m)^2=2m^2+64m+256$.
$\dfrac{1}{\sqrt{x_1^4+x_2^4}}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x_1^4+x_2^4$ đạt giá trị nhỏ nhất
$\Leftrightarrow 2m^2+64m+256$ đạt giá trị nhỏ nhất.
Ta có với $m \geq -4$, $2m^2+64m+256=2(m+4)^2+48(m+4)+32 \geq 32$.
Suy ra $2m^2+64m+256$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $m=-4$.
Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{x_1^4+x_2^4}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ khi $m=-4$.

2. (d) song song với $(d') \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m-3=0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$.
Vậy với $m=-1$ hai đường thẳng (d) và (d') song song.

Câu 3.

1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ 2x-y=m+5 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho $x^3-y^3=64$.

2. Quãng đường AB dài 150 km. Một ô tô đi từ A đến B rồi dừng lại nghỉ 15 phút và đi tiếp 50 km nữa để đến C với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi từ A đến B là 15 km/h. Tính vận tốc của ô tô khi đi trên quãng đường AB. Biết tổng thời gian kể từ khi ô tô xuất phát từ A đến khi tới C là 3 giờ 25 phút.

Lời giải.

1. $\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ 2x-y=m+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ y=2x-m-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x=(m+1)^3 \ (*) \\ y=2x-m-5 \end{cases}$.
Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq -1$.
Với $m \neq -1$, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(m+1;m-3)$.
Ta có: $x^3-y^3=64 \Leftrightarrow (m+1)^3-(m-3)^3=64 \Leftrightarrow 12m^2-24m-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$.
Kết hợp với điều kiện ta được $m=3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

2. Gọi x (km/h) là vận tốc ô tô khi đi từ A đến B ($x > 0$).
Vận tốc ô tô khi đi từ B đến C: $x + 15$ (km/h). Thời gian ô tô đi từ A đến B: $\dfrac{150}{x}$ (giờ).
Thời gian ô tô đi từ B đến C: $\dfrac{50}{x+15}$ (giờ). Theo đề bài ta có phương trình:
$\dfrac{150}{x} + \dfrac{50}{x+15} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{41}{12} \Leftrightarrow 19x^2 - 915x - 13500 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 60 \\ x = -\dfrac{225}{19} \end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện ta có vận tốc ô tô đi từ A đến B là 60 (km/h).

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = 2$.
Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{8a^2+1} + \dfrac{1}{8b^2+1} + \dfrac{1}{8c^2+1} \geq 1$.

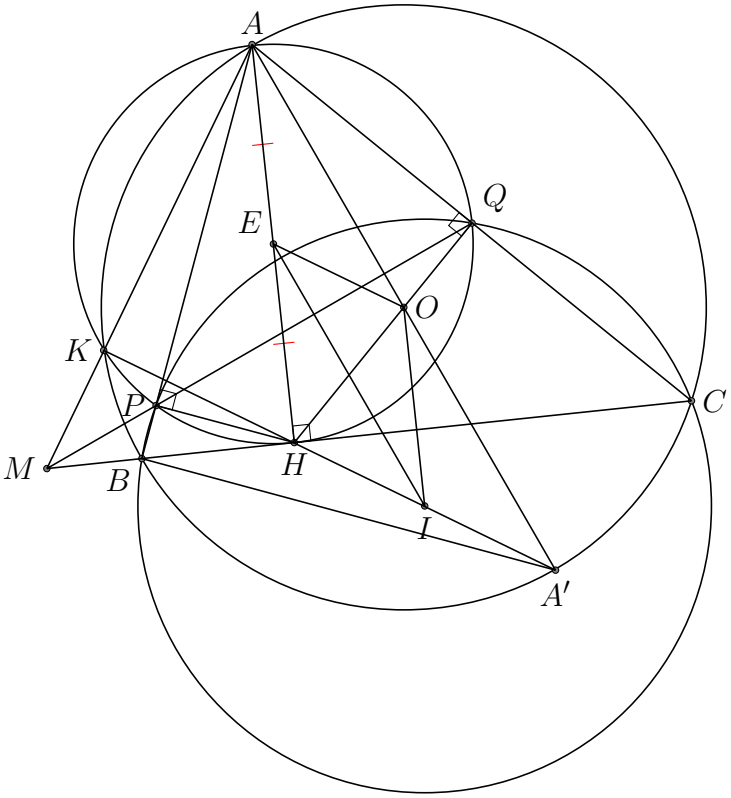
Lời giải.
Với $x > 0$, $\dfrac{1}{8x^2+1} \geq 2\dfrac{1}{x+1} - 1$ (1).
Thật vậy (1) $\Leftrightarrow 2x(2x-1)^2 \geq 0$ đúng với $\forall x > 0$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng (1) ta có:
$\dfrac{1}{8a^2+1} \geq 2\dfrac{1}{a+1} - 1$ (2)
$\dfrac{1}{8b^2+1} \geq 2\dfrac{1}{b+1} - 1$ (3).
$\dfrac{1}{8c^2+1} \geq 2\dfrac{1}{c+1} - 1$ (4)
Cộng vế với vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) ta được:
$\dfrac{1}{8a^2+1} + \dfrac{1}{8b^2+1} + \dfrac{1}{8c^2+1} \geq 2\left(\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1}\right) - 3 = 2.2 - 3 = 1.$
Ta có điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh BC. Gọi P, Q lần lượt là chân đường cao kẻ từ H đến các cạnh AB, AC. Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M, đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP.

1. Chứng minh rằng tứ giác $OADI, BPQC$ nội tiếp.
2. Chứng minh rằng $MP.MQ = MB.MC$ và $MB.MC = MK.MA$.
3. Chứng minh tứ giác $AKPQ$ nội tiếp.
4. Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/



1. Xét tứ giác $APHQ$ có $\widehat{APH} = \widehat{AQH} = 90°$.
   $\Rightarrow$ Tứ giác $APHP$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.
   Vì tứ giác $APHQ$ nội tiếp nên $\widehat{AQP} = \widehat{AHP}$.
   Mặt khác $\widehat{AHP} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$).
   Từ đó suy ra: $\widehat{AQP} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{AQP} = \widehat{PBC}$.
   Mà $\widehat{AQP} + \widehat{PQC} = 180°$ nên $\widehat{PBC} + \widehat{PQC} = 180°$ hay tứ giác $BPQC$ nội tiếp.

2. Vì tứ giác $BPQC$ nội tiếp nên $\widehat{MBP} = \widehat{MQC}$ (cùng bù với $\widehat{PBC}$).
   Xét hai tam giác ΔMBP và ΔMQC có:
   $\begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \widehat{MBP} = \widehat{MQC} \end{cases} \Rightarrow \Delta MBP \backsim \Delta MQC$ (g-g).
   $\Rightarrow \dfrac{MB}{MQ} = \dfrac{MP}{MC} \Leftrightarrow MB.MC = MP.MQ.$
   Chứng minh tương tự ta cũng có $\Delta MBK \backsim \Delta MAC$ (g-g).
   $\Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MK}{MC} \Leftrightarrow MB.MC = MK.MA.$

3. Theo chứng minh trên ta có: $MB.MC = MP.MQ = MK.MA \Rightarrow \dfrac{MK}{MQ} = \dfrac{MP}{MA}$.
   Xét hai tam giác ΔMPQ và ΔMAQ có: $\begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \dfrac{MK}{MQ} = \dfrac{MP}{MA} \end{cases} \Rightarrow \Delta MPK \backsim \Delta MAQ$ (c-g-c).
   Suy ra $\widehat{KAQ} + \widehat{KPQ} = 180° \Rightarrow$ Tứ giác $AKPQ$ nội tiếp.

4. Vì tứ giác $APHQ$ nội tiếp đường tròn đường kính AH nên $AKQP$ nội tiếp đường tròn

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

đường kính $AH \Rightarrow \widehat{AKH} = 90^\circ$.
Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O ta có: $\widehat{A'KA} = 90^\circ \Rightarrow K, H, A'$ thẳng hàng.
Gọi I' là trung điểm HA'. Ta chứng minh I' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BPQC$.
Thật vậy:
OI' là đường trung bình của tam giác $A'HA$ nên $OI' \parallel AH \Rightarrow OI' \perp BC$
$\Rightarrow OI'$ là trung trực đoạn BC (1) .
Gọi E là trung điểm $AH \Rightarrow EI' \parallel AO$.
Vì tứ giác $BPQC$ nội tiếp ta có $\begin{cases} \widehat{APQ} = \widehat{ACB} \\ \widehat{ACB} = \widehat{AA'B} \end{cases} \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{AA'B} \Rightarrow \widehat{APQ} + \widehat{PAA'} = 90^\circ$.
Suy ra $AO \perp PQ \Rightarrow EI \perp PQ$ nên EI' là trung trực đoạn PQ (2).
Mà $BPQC$ nội tiếp. Kết hợp với (1) và (2) ta có I' là tâm đường tròn ngoại tiếp $BPQC$.
Suy ra I' trùng I. Khi đó I là trung điểm HA'.
Từ đó K, H, I thẳng hàng.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 155

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA, VÒNG 2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{2015\sqrt{2014}}+\frac{1}{2016\sqrt{2015}}>\frac{1931}{1975}$.

b) Với $a\geq\frac{3}{8}$, chứng minh rằng $\sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}}+\sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}}=1$.

Lời giải.

a) $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{2015\sqrt{2014}}+\frac{1}{2016\sqrt{2015}}>\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2015.2016}=\frac{2015}{2016}>\frac{1931}{1975}$.

b) Đặt $A=\sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}}+\sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}}$.

$$A^3=6a-2+3A\sqrt[3]{(3a-1)^2-a^2(8a-3)}=6a-2+3A\sqrt[3]{-8a^3+12a^2-6a+1}$$
$$=6a-2+3A\sqrt[3]{(1-2a)^3}=6a-2+3A(1-2a)$$
$$\Rightarrow A^3-1=3(2a-1)(1-A)\Rightarrow(A-1)[A^2+A+1+3(2a-1)]=0$$

Xét $A^2+A+1+3(2a-1)=A^2+A+6a-2\geq A^2+A+\frac{18}{8}-2>0\Rightarrow A=1$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^8y^8+y^4=2x\\1+x=x(1+y)\sqrt{xy}\end{cases}$

Lời giải.

a) Nhận xét: $x=0$ không thỏa mãn phương trình. Ta có

$$\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{4}{x+\frac{3}{x}+1}+\frac{5}{x+\frac{3}{x}-5}=-\frac{3}{2}$$

Đặt $t=x+\frac{3}{x}-2\Rightarrow x+\frac{3}{x}+1=t+3$ và $x+\frac{3}{x}-5=t-3$. Phương trình trở thành

$$\frac{4}{t+3}+\frac{5}{t-3}=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow t^2+6t-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-7\end{array}\right.$$

- Với $t=1\Rightarrow x^2-3x+3=0$ (vô nghiệm).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

- Với $t=-7 \Rightarrow x^2+5x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

b) Điều kiện $xy \geq 0$.
$1+x=x(1+y)\sqrt{xy} \Rightarrow (1+x)^2=x^2(1+y)^2xy \Rightarrow (xy-1)(x^2y^2+2x^2y+xy+x^2+2x+1)=0$.
Vì $x^8y^8+x^4=2x \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow xy=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{y}$. Ta có
$$x^8y^8+x^4=2x \Leftrightarrow \frac{1}{y^4}+1=\frac{2}{y} \Leftrightarrow (y-1)(y^4+y^3+y^2+y+2)=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=1$$
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Câu 3.

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+1)(x+2)(x+8)(x+9)=y^2$.

b) Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $2016^x+2017^y=2018^z$.

Lời giải.

a) $(x+1)(x+2)(x+8)(x+9)=y^2 \Leftrightarrow (x^2+10x+9)(x^2+10x+16)=y^2$.
Đặt $x^2+10x+\dfrac{25}{2}=a \Rightarrow a^2-\dfrac{49}{2}=y^2 \Rightarrow (y-a)(y+a)=\dfrac{49}{4} \Rightarrow (2y-2a)(2y+2a)=49$
$\Rightarrow 2y-2a$ và $2y+2a$ thuộc ước của 49. Ta xét các trường hợp:

- $\begin{cases}2y-2a=1\\2y+2a=49\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=2a+1\\y=\dfrac{25}{2}\end{cases}$ (vô lí).
- $\begin{cases}2y-2a=-1\\2y+2a=-49\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=2a-1\\y=-\dfrac{25}{2}\end{cases}$ (vô lí).
- $\begin{cases}2y-2a=49\\2y+2a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=2a+49\\y=\dfrac{25}{2}\end{cases}$ (vô lí).
- $\begin{cases}2y-2a=-49\\2y+2a=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=2a-49\\y=-\dfrac{25}{2}\end{cases}$ (vô lí).
- $\begin{cases}2y-2a=-7\\2y+2a=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=2a-7\\y=0\end{cases}$
Xét $2a-7=0 \Leftrightarrow 2x^2+20x+18=0 \Leftrightarrow x=-1$, $x=-9$ (thỏa mãn).
- $\begin{cases}2y-2a=7\\2y+2a=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=2a+7\\y=0\end{cases}$.
Xét $2a+7=0 \Leftrightarrow 2x^2+20x+32=0 \Leftrightarrow x=-2$, $x=-8$ (thỏa mãn).

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y) \in \{(-1;0),(-9;0),(-2;0),(-8;0)\}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Xét $x \geq 1$: vì $2016^x \equiv 0 (\text{mod } 4)$ và $2017^y \equiv 1 (\text{mod } 4)$ nên $2018^z \equiv 1 (\text{mod } 4)$ (vô lí).
Xét $x = 0$: vì $2016^x + 2017^y = 1 + 2017^y \equiv 2 (\text{mod } 4) \Rightarrow 2018^z \equiv 2 (\text{mod } 4) \Rightarrow z = 1$.
Vậy các số tự nhiên cần tìm là $(x; y; z) = (0; 1; 1)$.

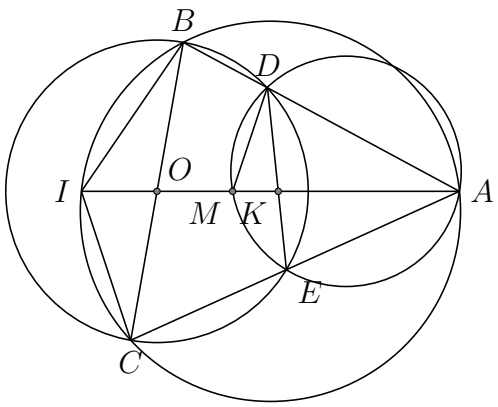
Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định sao cho $OA = 2R$. Gọi BC là đường kính quay quanh O sao cho BC không đi qua A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt AO tại I (I khác A). Các đường thẳng AB, AC lần lượt cắt (O) tại D, E. Gọi K là giao điểm của DE và AO.

a) Chứng minh bốn điểm K, E, C, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn AI theo R.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A khi BC quay quanh O.

Lời giải.



a) Có $\widehat{ABC} = \widehat{AIC}$ và $\widehat{ABC} + \widehat{DEC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KIC} + \widehat{KEC} = 180^\circ$ (đpcm).

b) Ta có $R^2 = OB.OC = OA.OI \Rightarrow OI = \dfrac{R}{2} \Rightarrow AI = \dfrac{5}{2}R$.

c) Gọi M là giao điểm của đường tròn (ADE) và AI. Ta có $\widehat{AMD} = \widehat{AED} = \widehat{AIC} = \widehat{ABO} \Rightarrow DMOB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow AD.AB = AM.AO = AO^2 - R^2$ không đổi $\Rightarrow AM$ không đổi $\Rightarrow M$ cố định $\Rightarrow (ADE)$ luôn qua M cố định.

Câu 5. Một số tự nhiên gọi là *số thú vị* nếu số đó có 10 chữ số khác nhau và là bội của số 11111. Hỏi có bao nhiêu số thú vị?

Lời giải.

Gọi A là số thú vị $\Rightarrow$ tổng các chữ số của A bằng $45 \Rightarrow A \vdots 99999$. Gọi $A = 99999k$ (với k là số tự nhiên) $\Rightarrow 10235 \leq k \leq 98766$. Như vậy, ta đi tìm số k sao cho khi nhân k với 99999 thì các chữ số từ 0 đến 9, mỗi số có mặt đúng một lần.
Mặt khác ta có kết quả: khi lấy $k = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ nhân với 99999 thì ta thu được tích bằng giá trị của $k - 1$ và viết thêm phần bù 9 của $k - 1$ vào sau số $k - 1$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Ví dụ: với $k = 10235 \Rightarrow k-1 = 10234 \Rightarrow$ bù 9 của $k-1$ là $89765 \Rightarrow 10235.99999 = 1023489765$.
Chú ý rằng với $k = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ thì $k-1$ là số mà không tồn tại hai chữ số có tổng bằng 9.
Như vậy, bài toán được quy về việc đi tìm số các số tự nhiên k thỏa mãn $10235 \leq k \leq 98766$ và $k-1$ là số tự nhiên không tồn tại hai chữ số có tổng bằng 9.
Vì $k-1$ là số tự nhiên không tồn tại hai chữ số có tổng bằng 9 nên nếu chữ số a_i xuất hiện trong $k-1$ thì chữ số $9-a_i$ không thể xuất hiện trong $k-1$, do vậy ta xét các cặp số $(0;9)$, $(1;8)$, $(2;7)$, $(3;6)$, $(4;5)$.
Ta lập số $k-1$ bằng cách duy nhất mỗi chữ số trong mỗi cặp (giả sử xét luôn chữ số 0 là chữ số hàng chục nghìn) $\Rightarrow$ số lượng số $k-1$ là $2^5.5! = 3840$. Vì số lượng các số có chữ số hàng chục nghìn tương ứng với 0, 1, 2, .., 9 là bằng nhau $\Rightarrow$ số lượng số có số 0 đứng đầu là $384 \Rightarrow$ số lượng số $k-1$ cần tìm là $3840 - 384 = 3456$ số.
Vậy có 3456 số thú vị.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 156

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LAM SƠN, 2016 - V1

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.
Cho biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ với $x\geq 0$, $x\neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để có: $A\geq 0$.

Lời giải.

a) Với $x\geq 0$ và $x\neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned}A&=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\frac{11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\\&=\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)+11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\\&=\frac{2x-6\sqrt{x}+x+4\sqrt{x}+3+11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\\&=\frac{3x+9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$A\geq 0\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\sqrt{x}-3>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x>9\end{array}\right.$$

Vậy $x=0$ hoặc $x>9$.

Câu 2.

a) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng (d_1): $y=(m^2-1)x+2m$ (m là tham số) và (d_2): $y=3x+4$. Tìm các giá trị của tham số m để các đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b) Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đó có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $(x_1^2-2mx_1+2m-1)(x_2-2)\leq 0$.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) (d_1) và (d_2) song song với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2-1=3 \\ 2m\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 2 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy $m=-2$.

b) Ta có $\Delta'=(m-1)^2-2m+5=m^2-4m+6=(m-2)^2+2>0$ với mọi m, nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo Định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=2m-2 \\ x_1.x_2=2m-5. \end{cases}$$

Ta có $\left(x_1^2-2mx_1+2m-1\right)(x_2-2)\leq 0$

$\Leftrightarrow \left[x_1^2-2(m-1)x_1+2m-5-2x_1+4\right](x_2-2)\leq 0$

$\Leftrightarrow (4-2x_1)(x_2-2)\leq 0$

$\Leftrightarrow (2-x_1)(x_2-2)\leq 0$

$\Leftrightarrow 2x_2-4-x_1x_2+2x_1\leq 0$

$\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)-x_1x_2-4\leq 0$

$\Leftrightarrow 2(2m-2)-(2m-5)-4\leq 0 \Leftrightarrow 4m-4-2m+5-4\leq 0 \Leftrightarrow 2m-3\leq 0 \Leftrightarrow m\leq \dfrac{3}{2}$.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x}+y^2=3 \\ 3\sqrt{x}-2y^2=1 \end{cases}$

b) Giải phương trình: $x^2+4x-7=(x+4)\sqrt{x^2-7}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x\geq 0$.

$$\text{Hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x}+2y^2=6 \\ 3\sqrt{x}-2y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{x}=7 \\ 3\sqrt{x}-2y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ 3-2y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=1 \\ y=-1. \end{cases}$$

b) Điều kiện: $x\geq\sqrt{7}$ hoặc $x\leq -\sqrt{7}$.

Pt $\Leftrightarrow (x^2-7)+4(x+4)-16=(x+4)\sqrt{x^2-7}$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2-7}=a\geq 0 \\ x+4=b. \end{cases}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Phương trình trở thành

$$a^2+4b-16=ab$$

$$\Leftrightarrow a^2-16+4b-ab=0$$

$$\Leftrightarrow (a+4)(a-4)-b(a-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)(a+4-b)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=b-4. \end{cases}$$

Do đó $\begin{bmatrix} \sqrt{x^2-7}=4 \\ \sqrt{x^2-7}=x+4-4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{x^2-7}=4 \\ \sqrt{x^2-7}=x \end{bmatrix} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{23}.$

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ với góc $\widehat{BAD}<90^\circ$. Tia phân giác góc $\widehat{BCD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O (khác C). Kẻ đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với CO. Đường thẳng (d) cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{OBM}=\widehat{ODC}$.

b) Chứng minh $\triangle OBM=\triangle ODC$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

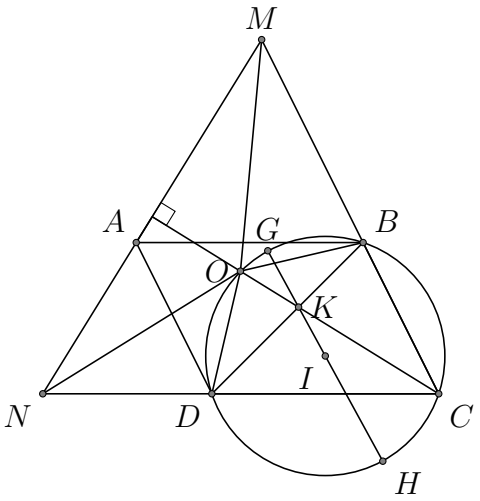
c) Gọi K là giao điểm của OC và BD; I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh rằng: $\dfrac{ND}{MB}=\dfrac{IB^2-IK^2}{KD^2}$.

Lời giải.

a) Ta có tứ giác $OBCD$ nội tiếp nên $\widehat{OBC}+\widehat{ODC}=180^\circ$
Ta lại có $\widehat{OBC}+\widehat{OBM}=180^\circ$.
Suy ra $\widehat{OBM}=\widehat{ODC}$.

b) Xét hai tam giác $\triangle OBM$ và $\triangle ODC$ ta có
$$\begin{cases} OB=OD \\ \widehat{OBM}=\widehat{ODC} \\ BM=DC. \end{cases}$$
Suy ra $\triangle OBM=\triangle ODC$.
Xét hai tam giác $\triangle OCM$ và $\triangle OCN$ ta có
$$\begin{cases} OC \text{ là cạnh chung} \\ \widehat{C_1}=\widehat{C_2} \\ CM=CN. \end{cases}$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Suy ra $\triangle OCM = \triangle OCN$. Do đó $MO = ON$ nên $OM = ON = OC$. Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle CMN$.

c) Gọi giao điểm của IK với đường tròn tâm I là G và H. Ta có

$$\frac{IB^2 - IK^2}{KD^2} = \frac{(IB - IK)(IB + IK)}{KD^2} = \frac{(IG - IK)(IH + IK)}{KD^2} = \frac{KG.KG}{KD^2}.$$

Do $KG.KH = KD.KB$ nên

$$\frac{IB^2 - IK^2}{KD^2} = \frac{KD.KB}{KD^2} = \frac{KB}{KD}.$$

Mặt khác $ND = AD = BC$ và $MB = CD$ nên

$$\frac{ND}{MB} = \frac{BC}{CD}.$$

Ta lại có $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{KB}{HK}$. Suy ra

$$\frac{ND}{MB} = \frac{IB^2 - IK^2}{KD^2}.$$

Câu 5. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z \le \dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \dfrac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)} + \dfrac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}$.

Lời giải.

$$P = \frac{\dfrac{(yz+1)^2}{z^2}}{\dfrac{(zx+1)}{x}} + \frac{\dfrac{(zx+1)^2}{x^2}}{\dfrac{(xy+1)}{y}} + \frac{\dfrac{(xy+1)^2}{y^2}}{\dfrac{(yz+1)}{z}}$$

$$= \frac{\left(y + \dfrac{1}{z}\right)^2}{z + \dfrac{1}{x}} + \frac{\left(z + \dfrac{1}{x}\right)^2}{x + \dfrac{1}{y}} + \frac{\left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2}{y + \dfrac{1}{z}}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$$\geq \frac{\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}{\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$$
$$\geq x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$.

Suy ra $P \geq x+y+z+\frac{9}{x+y+z} = \left[x+y+z+\frac{9}{4(x+y+z)}\right]+\frac{27}{4(x+y+z)}$.

Ta lại có $\left[x+y+z+\frac{9}{4(x+y+z)}\right] \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3$; $\frac{27}{4(x+y+z)} \geq \frac{27}{4\cdot\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}$.

Do đó $P \geq 3+\frac{9}{2} = \frac{15}{2}$.

Vậy GTNN của P là $\frac{15}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 157

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC LÂM ĐỒNG, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $A=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$.

Lời giải.

$$A=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{4+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}$$
$$=\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)=4.$$

Câu 2. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $(2x-y-4)^{2016}+(3x+2y-13)^{2016}=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=(x-y)^{2016}+2016$.

Lời giải.

Vì $(2x-y-4)^{2016}\geq 0;(3x+2y-13)^{2016}\geq 0$ với mọi x,y nên

$$(2x-y-4)^{2016}+(3x+2y-13)^{2016}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-4=0\\3x+2y-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}.$$

Khi đó: $A=(3-2)^{2016}+2016=2017$.

Câu 3. Cho $\tan\alpha=2$, (α là góc nhọn). Tính giá trị biểu thức $A=\cot\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

Lời giải.

Ta có: $\tan\alpha=2\Rightarrow\begin{cases}\cot\alpha=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\Rightarrow\sin\alpha=2\cos\alpha\end{cases}$.

Khi đó: $A=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\cos\alpha}{2\cos\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{6}$.

Câu 4. Giải phương trình $36x^2+\dfrac{1}{x^2}+21x+\dfrac{7}{2x}-18=0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(6x)^2+2.6x.\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2+7\left(3x+\frac{1}{2x}\right)-18-2.6x.\frac{1}{x}=0$$
$$\left(6x+\frac{1}{x}\right)^2+\frac{7}{2}\left(6x+\frac{1}{x}\right)-30=0$$

Đặt $t=6x+\dfrac{1}{x}$, $|t|\geq 3$. Ta được phương trình:

$$t^2+\frac{7}{2}t-30=0\Leftrightarrow 2t^2+7t-60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-\dfrac{15}{2}\end{array}\right.$$

∘ Với $t = 4 \Rightarrow 6x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

∘ Với $t = -\dfrac{15}{2} \Rightarrow 12x^2 + 15x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{24}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{24}\right\}$.

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x^2 = 2 \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

$\begin{cases} xy + x^2 = 2 \ (1) \\ 2x^2 - y^2 = 1 \ (2) \end{cases}$.

Từ $(2) \Rightarrow 4x^2 - 2y^2 = 2 \ (3)$.

Trừ vế với vế của (3) và (1) ta được: $3x^2 - xy - 2y^2 = 0 \ (4)$.

Dễ thấy $y = 0$ thì hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (vô lý).

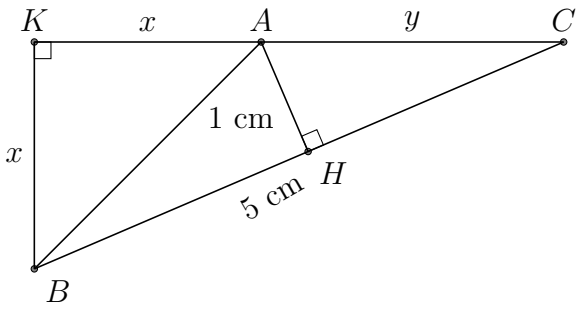
Với $y \neq 0$ khi đó $(4) \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -\dfrac{2}{3}y \end{array}\right.$.

Thế vào $(1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y^2 = 2 \\ 2\left(-\dfrac{2}{3}y\right)^2 - y^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 1 \\ y^2 = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S = \{(1;1), (-1;-1)\}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135°, BC = 5$ cm, đường cao $AH = 1$ cm. Tính độ dài các cạnh AB, AC.

Lời giải.



Kẻ $BK \perp AC$ ở K. Chứng minh được ΔAKB vuông cân ở K.

Đặt $AK = BK = x; AC = y$. Ta có: $x^2 + (x+y)^2 = 5^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + y^2 = 25 \ (*)$.

Lại có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BK = \dfrac{1}{2}AH.BC \Rightarrow xy = 5$ thế vào $(*)$

$\Rightarrow 2x^2 + 10 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 + \left(\dfrac{5}{x}\right)^2 = 15 \Leftrightarrow 2x^4 - 15x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 5 \\ x^2 = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{5} \\ x = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB = x\sqrt{2} = \sqrt{10} \Rightarrow AC = y = \dfrac{5}{x} = \sqrt{5} \\ AB = x\sqrt{2} = \sqrt{5} \Rightarrow AC = y = \dfrac{5}{x} = \sqrt{10} \end{array}\right.$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Vậy $\begin{bmatrix} AB=\sqrt{10}; AC=\sqrt{5} \\ AB=\sqrt{5}; AC=\sqrt{10} \end{bmatrix}$.

Câu 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+y)^2=(x-1)(y+1)$.

Lời giải.

Ta có: $(x+y)^2=(x-1)(y+1) \Leftrightarrow (x-1+y+1)^2=(x-1)(y+1)$.

Đặt $\begin{cases} x-1=a \\ y+1=b \end{cases}$. Ta có phương trình:

$$(a+b)^2=ab \Leftrightarrow a^2+ab+b^2=0 \Leftrightarrow \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{(1;-1)\}$.

Câu 8. Cho x, y là các số dương. Chứng minh rằng $x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

Lời giải.

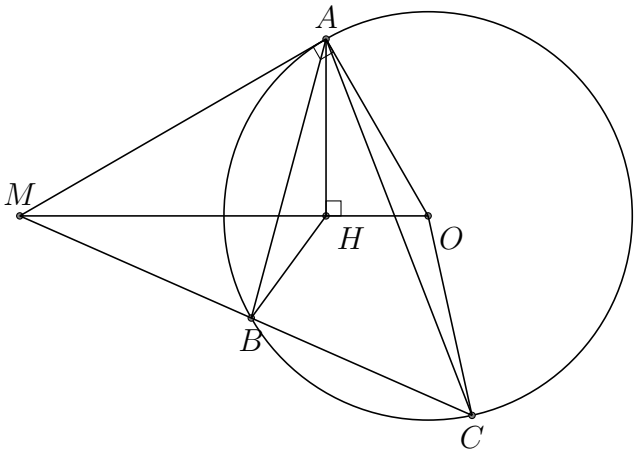
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có:

$$\begin{cases} x^2+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x} \\ y^2+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{x} \\ y^2=\frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Câu 9. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến MA (với A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC (cát tuyến MBC không đi qua tâm O và điểm B nằm giữa hai điểm M và C) đến đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên OM. Chứng minh rằng tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

Lời giải.



Ta có: MA là tiếp tuyến $\Rightarrow OA \perp MA \Rightarrow MA^2=MH.MO$ (1).

Xét hai tam giác ΔMAB và ΔMAC có $\begin{cases} \widehat{AMB} \text{ chung} \\ \widehat{MAB}=\widehat{ACM} \end{cases} \Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta MCA$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH.MO = MB.MC \Rightarrow \dfrac{MH}{MB} = \dfrac{MC}{MO}$.

Lại có $\widehat{HMB}$ là góc chung của ΔMBH và $\Delta MOC \Rightarrow \Delta MBH \backsim \Delta MOC$ (g-c-g)

$\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{BHM} \Rightarrow BHOC$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 10. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 3 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 4\sqrt{3}$.

Lời giải.

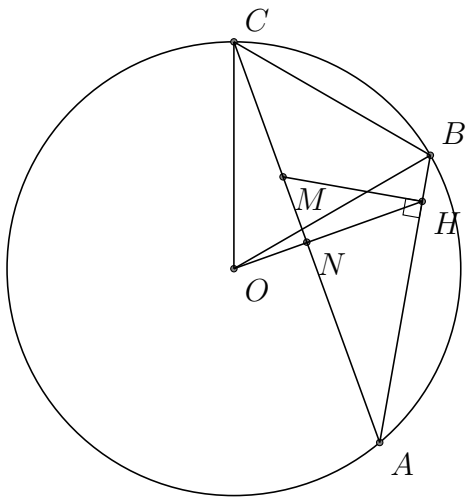
Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 + 3 > 0,\ \forall m$, suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = -3 \end{cases}$. Từ $|x_1| + |x_2| = 4\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 48$

$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 12 = 48 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Câu 11. Cho BC là dây cung của đường tròn $(O;R)$ và $BC = R$. Gọi A là một điểm trên cung lớn BC sao cho AC không là đường kính (A không trùng với B, C). Trên dây cung AC lấy các điểm M, N sao cho $AC = 2AN = \dfrac{3}{2}AM$. Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng ba điểm H, N, O thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có: $2AN = \dfrac{3}{2}AM \Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{4}{3}$.

Đặt $AM = 4x \Rightarrow AN = 3x$ ($x > 0$). Khi đó $MN = x$.

Tam giác OBC đều $\Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ$.

$MH = MA.\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}MA = 2x$.

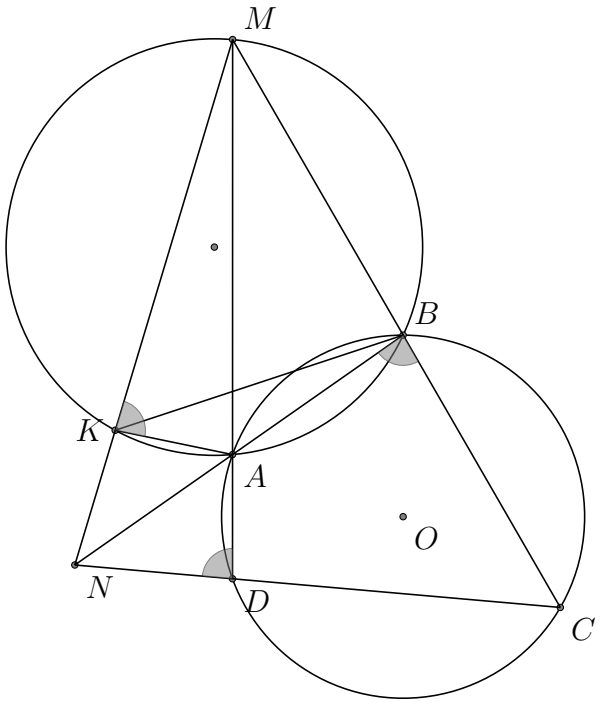
Ta có: $\dfrac{MN}{MH} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}; \dfrac{MH}{MA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{MN}{MH} = \dfrac{MH}{MA}$.

Lại có $\widehat{NMH}$ là góc chung của ΔMNH và $\Delta MHA \Rightarrow \Delta MNH \backsim \Delta MHA$ (c-g-c)

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$\Rightarrow \widehat{MNH} = \widehat{MHA} = 90^\circ$.
Mặt khác $ON \perp AC \Rightarrow \widehat{ONM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ONM} + \widehat{MNH} = 180^\circ \Rightarrow O, N, H$ thẳng hàng.

Câu 12. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại M, hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại N. Chứng minh $MA.MD = MN^2 - NA.NB$.
Lời giải.



Gọi K là giao điểm đường tròn ngoại tiếp ΔABM với MN.
ΔNKB và ΔNAM có: $\begin{cases} \widehat{KNA} \text{ chung} \\ \widehat{KBN} = \widehat{AMN} \text{ cùng chắn cung } AK \end{cases}$.
$\Rightarrow \Delta NKB \backsim \Delta NAM$ (g-g)
$\Rightarrow \dfrac{NB}{NM} = \dfrac{NK}{NA} \Rightarrow NA.NB = MN.NK$ (1).
Lại có $ABCD$ và $ABMK$ là các tứ giác nội tiếp.
$\Rightarrow \widehat{NDA} = \widehat{ABC}$; $\widehat{ABC} = \widehat{AKM}$
$\Rightarrow \widehat{NDA} = \widehat{AKM}$
Mặt khác $\widehat{AMK}$ là góc chung của ΔMAK và ΔMND.
$\Rightarrow \Delta MAK \backsim \Delta MND$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MN} = \dfrac{MK}{MD} \Rightarrow MA.MD = MN.NK$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA.MD + NA.NB = MN.MK + MN.NK = MN^2$
$\Rightarrow MA.MD = MN^2 - NA.NB \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 158

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KIÊN GIANG, 2016, V2

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1+\sqrt{\sqrt{y}+1}}+\dfrac{\sqrt{x}+1-\sqrt{\sqrt{y}+1}}{\sqrt{y}+1-\sqrt{\sqrt{y}+1}}$ với $x,y>0$.

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt{x}+1>0, b=\sqrt{\sqrt{y}+1}>0, b^2=\sqrt{y}+1$, thay vào biểu thức và thực hiện phép tính rút gọn ta được kết quả $P=\dfrac{2(a-1)}{b^2-1}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ ($a-1=\sqrt{x}$ và $b^2-1=\sqrt{y}$).

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m phương trình $6x^2-2(m-2)x-m-1=0$ luôn có hai nghiệm x_1,x_2 và giá trị của biểu thức $Q=(2x_1+1)(2x_2+1)$ không phụ thuộc vào giá trị của m.

Lời giải.

Tính $\Delta'=(m+1)^2+9>0$. Ta có $S=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{m-2}{3}, P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-m-1}{6}$. Thực hiện phép tính trên Q ta được $Q=4P+2S+1=\dfrac{-5}{3}$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2+x-2}+\dfrac{1}{x^2+7x+10}+\dfrac{1}{x^2+x-20}+\dfrac{1}{x^2-5x+4}=\dfrac{-2}{7}$.

b) Cho a,b,c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\geq\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right)+\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2}{2016}.$$

Lời giải.

a) Tách các mẫu thành nhân tử rồi đưa về hiệu:

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right),$$
$$\frac{1}{x^2+x-20}=\frac{1}{(x-4)(X+5)}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+5}\right).$$

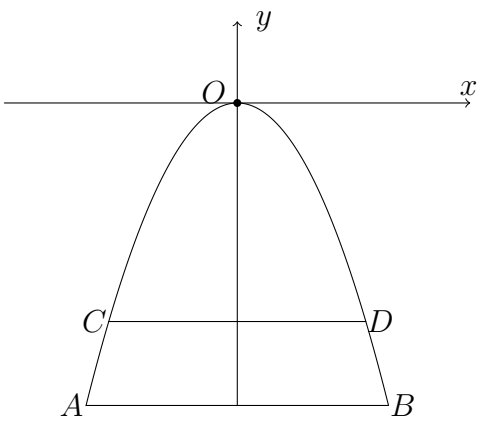
Thay vào phương trình và giản ước các hạng tử đối nhau, thu gọn ta được phương trình bậc hai $9x^2+9x-116=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,82\\x=-4,8.\end{array}\right.$

b) Do $a,b,c>0$, đặt $\sqrt{a}=x,\sqrt{b}=y,\sqrt{c}=z$. Suy ra $\sqrt{ab}=xy, a=x^2, b=y^2$. Thay vào biểu thức và rút gọn ta được $2014\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)\geq 0$. Biểu thức luôn đúng vì $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 4. Cho parabol có dạng bên dưới với $AB \parallel CD \parallel Ox$, biết $AB = 18,90\text{m}$, $CD = 17,70\text{m}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD bằng $7,55\text{m}$. Tính khoảng cách từ O đến AB.



Lời giải.

Phương trình parabol này có dạng $y = ax^2$. Ta có $y_B = ax_B^2$ và $y_D = ax_D^2$.

Ta có $x_B = 9,45$ và $x_D = 8.85$.

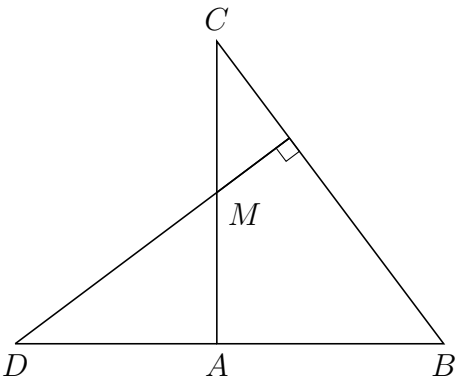
Vì $y_D - y_D = 7,55$ nên $a = \dfrac{y_D - y_B}{x_D^2 - x_D^2} \approx -0,688$.

Vậy khoảng cách từ O đến AB là $|y_B| = |a|x_B^2 \approx 61,44\text{m}$.

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A với trung điểm cạnh AC là M. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại điểm D. Cho biết chu vi $\triangle ABC$ bằng 36cm và $2BC = 3MD$. Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.

Gọi ba cạnh của tam giác là a, b, c. Ta có $a+b+c = 36$ và $2BC = 3MA$ hay $\dfrac{MD}{BC} = \dfrac{2}{3}$. Vì $\triangle MAD \sim \triangle BAC$ nên $\dfrac{MA}{c} = \dfrac{MD}{BC} = \dfrac{2}{3}$, thay $AM = \dfrac{b}{2}$, ta tính được $b = \dfrac{4c}{3}$. Áp dụng định lý Pytago ta tính được $a = \dfrac{5c}{3}$, kết hợp với trên ta được kết quả $a = 15, b = 12, c = 9$.



Câu 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M và đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm L ($L \neq A$). Chứng minh rằng:

a) H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

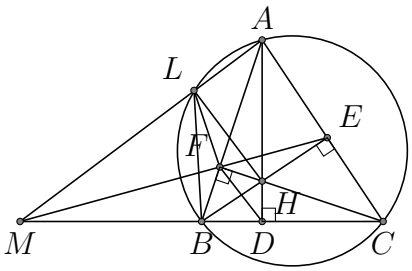
b) L thuộc đường tròn đường kính AH.

c) $\dfrac{MF}{ME}=\dfrac{AC^2.DB}{AB^2.DC}$.

Lời giải.

a) Dùng tứ giác nội tiếp ($BFHD$, $CEHD$, $BFEC$) chứng minh AD là tia phân giác của góc FDE, CF là tia phân giác của góc EFD. Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

b) Do tứ giác $ALBC$ nội tiếp (O) nên ta chứng minh được $\triangle MLB \sim \triangle MCA$. Suy ra $MB.MC = ML.MA$ (1). Tương tự tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên ta có $MB.MC = MF.ME$ (2). Từ (1) và (2) ta có $MF.ME = ML.MA$ hay $\triangle MFL \sim \triangle MAE$ nên tứ giác $ALFE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH hay L thuộc đường tròn đường kính AH.



c) Do AD là phân giác trong của góc FDE. Mà $AD \perp BC$ nên DM là phân giác ngoài của $\triangle DEF$. Ta có $\dfrac{MF}{ME}=\dfrac{DF}{DE}$ (*). Vì $\triangle BFD \sim \triangle BCA$ nên ta tính được $DF=\dfrac{AC.BD}{AB}$. Tương tự $\triangle CED \sim \triangle CBA$ nên ta có $DE=\dfrac{AB.DC}{AC}$. Thay DE, DF vào (*) ta được $\dfrac{MF}{ME}=\dfrac{AC^2.DB}{AB^2.DC}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 159

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHTN HÀ NỘI, V2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4x^2y+8xy^2+5x+10y=1 \end{cases}$

2) Giải phương trình $\sqrt{5x^2+6x+5}=\dfrac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6}$

Lời giải.

1) Đặt $z=2y$, $a=x+z$, $b=xz$, hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} a^2-2b=5 \\ 2ab+5a=1 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 2b=a^2-5 \\ a^3=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=1 \\ xz=-2 \end{cases}$
Giải hệ ta được nghiệm của hệ phương trình $(x;y)=(-1;1)$ hoặc $(x;y)=(2;-\frac{1}{2})$.

2) $\sqrt{5x^2+6x+5}=\dfrac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6} \iff \sqrt{5x^2+6x+5}-4x=\dfrac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6}-4x$
$\iff -\dfrac{(x-1)(11x+5)}{\sqrt{5x^2+6x+5}+4x}=\dfrac{4x(11x+5)(x-1)}{5x^2+6x+6}$
$\iff x=1$, $x=-\dfrac{5}{11}$ (loại), hoặc $\dfrac{-1}{\sqrt{5x^2+6x+5}+4x}=\dfrac{4x}{5x^2+6x+6}$ (vô nghiệm do $x>0$). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 2.

1) Với x,y là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{y^2-1}{3}$. Chứng minh rằng x^2-y^2 chia hết cho 40.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^4+2x^2=y^3$.

Lời giải.

1) Ta có $\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{y^2-1}{3}=\dfrac{x^2-y^2}{-1}=\dfrac{x^2+y^2-2}{5}$ và x,y là các số lẻ, $x=2k+1, y=2m+1 \Longrightarrow x^2-y^2=4(k-m)(k+m+1)\vdots 8$, $x^2\equiv 0,1,4 (\mathrm{mod}\ 5)$, $y^2\equiv 0,1,4 (\mathrm{mod}\ 5)$, mặt khác $x^2+y^2\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$ cho nên $x^2\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$, $y^2\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5) \Longrightarrow x^2-y^2\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$.

2) Ta có $(x^2+1)^2=(y+1)(y^2-y+1)=(y+1)((y+1)^2-3(y+1)+3)$. Gọi d là ước chung của $y+1$ và $(y+1)^2-3(y+1)+3$, dễ thấy $d=1$ hoặc $d=3$, x^2+1 không chia hết cho 3 cho nên $d=1$. Ta có $y+1=a^2$, $y^2-y+1=b^2$ (*).
(*) $\iff y^2-y+1=b^2 \iff (2b-2y+1)(2b+2y-1)=3$, ta có hai trường hợp
i) $\begin{cases}2b+2y-1=3\\2b-2y+1=1\end{cases}\Longrightarrow y=1\Longrightarrow a^2=2$ (loại)
ii) $\begin{cases}2b+2y-1=1\\2b-2y+1=3\end{cases}\Longrightarrow y=0\Longrightarrow x=0.$
Vậy nghiệm của phương trình $x=0$, $y=0$.

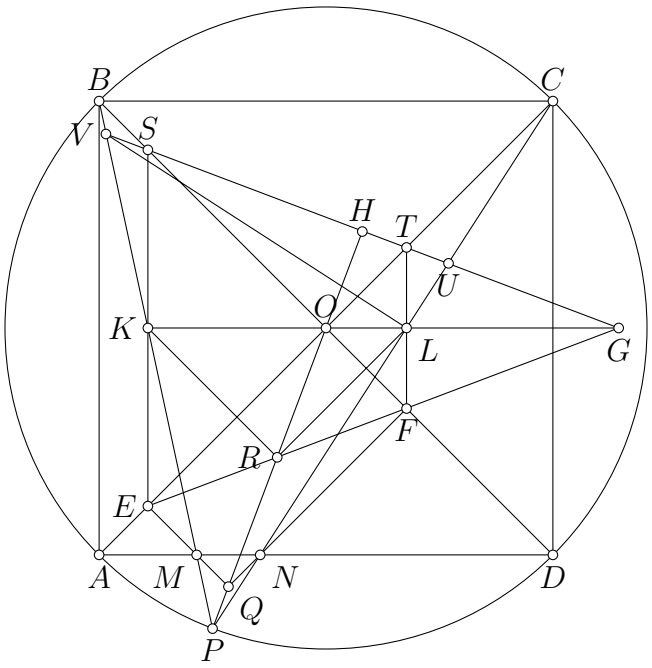
Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D. Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt đường thẳng AD tại M, N. Đường trung trực của AM cắt các đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K. Đường trung trực của DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L.

1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.

2) Chứng minh rằng đường thẳng PO đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng BD tại S, đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T, đường thẳng ST cắt các đường thẳng PC, PB tại U và V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



1) Vì tam giác CND vuông tại D nên L là trung điểm của NC và O là trung điểm của AC suy ra $OL \parallel AD$, tương tự $OK \parallel AD$, vậy O, K, L thẳng hàng.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

2) Gọi Q là giao điểm của EM và PO. Ta có tam giác EAM vuông cân tại E nên $\widehat{EMA} = 45^\circ$. Do đó $\widehat{EMA} = \widehat{BDA} = 45^\circ$ suy ra $MQ \parallel BO$. Tương tự $NF \parallel CO$. Ta có $\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{PQ}{PO}$. Mặt khác $MN \parallel BC$ nên $\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{PN}{PC}$ suy ra $\dfrac{PN}{PC} = \dfrac{PQ}{PO}$ hay $QN \parallel OC$. Vậy Q, N, F thẳng hàng. Từ đó tứ giác $OFQE$ là hình chữ nhật nên PO đi qua trung điểm R của EF.

3) Theo tính chất đối xứng thì ST, EF, KL đồng quy tại G (trường hợp P là điểm chính giữa cung AD thì ST, EF, KL song song với nhau nên dễ suy ra U, V, K, L cùng thuộc một đường tròn). Gọi H là giao điểm của PO và ST. Theo 2) thì $RO = RF$ và $LO = LF$ nên RL là phân giác của $\widehat{FRO}$ mà GL là phân giác của $\widehat{TGR}$. Từ đó L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác GHR mà $\widehat{RLG} = 135^\circ$ suy ra $\widehat{RHG} = 90^\circ$. Vậy $UV \perp PO$.
Ta có tam giác OPC cân tại O nên $\widehat{OPC} = \widehat{OCP} = \widehat{ABP} = \widehat{VKS}$. Mà $\widehat{HPU} + \widehat{VUL} = 90^\circ$ và $\widehat{SKO} = 90^\circ$ nên $\widehat{VUL} + \widehat{VKL} = 180^\circ$, do đó K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ luôn tồn tại một các sắp xếp bộ n số $1, 2, \ldots, n$ thành $x_1, x_2, \ldots x_n$ sao cho $x_j \neq \dfrac{x_i + x_k}{2}$ với mọi bộ chỉ số (i, j, k) mà $1 \leq i < j < k \leq n$.

Lời giải.

Dãy $x_1, x_2, \ldots x_s$ $(s \geq 3)$ được gọi là dãy tốt nếu $x_j \neq \dfrac{x_i + x_k}{2}$ với mọi bộ chỉ số (i, j, k) mà $1 \leq i < j < k \leq s$. Nếu dãy $x_1, x_2, \ldots x_s$ $(s \geq 3)$ là dãy tốt dãy $2x_1, 2x_2, \ldots 2x_s$ và $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \ldots 2x_s - 1$ cũng là dãy tốt.

Từ nhận xét trên nếu $x_1, x_2, \ldots x_s$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3, \ldots, s$ $(s \geq 3)$ thì dãy $2x_1, 2x_2, \ldots 2x_s$, $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \ldots 2x_s - 1$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3, \ldots, 2s$ (chú ý rằng $\dfrac{2x_k + 2x_m - 1}{2}$ không là số nguyên)

- $1, 3, 2$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3$.
- Với $n \geq 3$ luôn tồn tại k để $3.2^{k-1} < n \leq 3.2^k$.

Theo nhận xét trên, ta xây dựng được dãy tốt từ các số $1, 2, 3, \ldots, 3.2^k$ sau đó bỏ đi các số $n+1, n+2, n+3, \ldots 3.2^k$ ta nhận được dãy tốt từ các số $1, 2, 3, \ldots, n$. (chú ý dãy vẫn tốt nếu bỏ đi các số hạng bất kì).

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 160

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI, VÒNG 1, NĂM 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải hệ: $\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=4 \\ (xy+1)(x^2+y^2)=4 \end{cases}$

b) Giải phương trình: $\sqrt{7x+2}-\sqrt{5-x}=\dfrac{8x-3}{5}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=4 & (1) \\ (xy+1)(x^2+y^2)=4 & (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)+xy(x+y) & =4 \\ (xy+1)(x^2+y^2) & =4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) & =4 \quad (3) \\ (xy+1)(x^2+y^2) & =4 \quad (4) \end{cases}$

$(3)-(4) \Leftrightarrow [(x+y)-(xy+1)](x^2+y^2)=0$

Vì $(x+y)(x^2+y^2)=4\neq 0$ nên $(x^2+y^2)\neq 0$

Vậy $x+y=xy+1 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x=1$

$(1) \Leftrightarrow 1+y^3+y(1+y)=4 \Leftrightarrow y=1.$

Trường hợp 2: $y=1$

$(1) \Leftrightarrow x^3+x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x=1.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;1)$

b) Điều kiện $\dfrac{-2}{7}\leq x\leq 5$

Phương trình đã cho $\sqrt{7x+2}-\sqrt{5-x}=\dfrac{7x+2-(5-x)}{5}$

$\Leftrightarrow 5(\sqrt{7x+2}-\sqrt{5-x})=(\sqrt{7x+2}-\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x})$

$\Leftrightarrow 5(\sqrt{7x+2}-\sqrt{5-x})(\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}-5)=0$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x+2}=\sqrt{5-x} & (1) \\ \sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}=5 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 7x+2=5-x \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{8}(tm)$

$(2)\sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x}=5$

Ta có hệ $\begin{cases} \sqrt{7x+2}-\sqrt{5-x} = \dfrac{8x-3}{5} \\ \sqrt{7x+2}+\sqrt{5-x} = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{7x+2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8x-3}{5}+5\right)$

$\Rightarrow \sqrt{7x+2}=\dfrac{4x+11}{5}$ đk: $x \geq -\dfrac{11}{4}$

Khi đó phương trình $\Rightarrow 7x+2=\dfrac{1}{25}(16x^2+88x+121)$

$\Rightarrow 16x^2-87x+71=0 \Leftrightarrow (x+1)(16x-71)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{71}{16} \end{array}\right.$ (tmdk)

Thử lại $x=\dfrac{71}{16}$ không phải là nghiệm của phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{1;\dfrac{3}{8}\right\}$

Câu 2.

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2+mxy^2=3m \\ 2+m(x^2+y^2)=6m \end{cases}$$

b) Với x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $0<x\leq y\leq 2;\ 2x+y\geq 2xy$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)$.

Lời giải.

a) $\begin{cases} 2+mxy^2=3m \\ 2+m(x^2+y^2)=6m \end{cases} \Rightarrow m(x^2+y^2-xy^2=3)=3m$

Dễ thấy $m\neq 0 \Rightarrow x^2+y^2-xy^2=3$

$\Leftrightarrow x^2-1+y^2(1-x)=2$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1-y^2)=2$

Để x, y nguyên $\Leftrightarrow (x-1)$ và $(x+1-y^2)$ là ước của 2.

TH1: $\begin{cases} x-1=1 \\ x+1-y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1;-1 \end{cases}$ (tm)

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TH2: $\begin{cases} x-1=2 \\ x+1-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\sqrt{3};-\sqrt{3} \end{cases}$ (loại)

TH3: $\begin{cases} x-1=-1 \\ x+1-y^2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3};-\sqrt{3} \end{cases}$ (loai)

TH4: $\begin{cases} x-1=-2 \\ x+1-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1;-1 \end{cases}$ (tm)

Với $(x;y)=(2;1) \Rightarrow m=2$

Với $(x;y)=(-1;1);(-1;-1) \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$

Vậy với $m=2$ hoặc $m=\dfrac{1}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm (x,y) nguyên.

b) $P=x^4+y^4+x^2+y^2$

Ta có bất đẳng thức $a^2+b^2 \geq \dfrac{1}{2}(a+b)^2 \quad (*)$

Ta có $2x+y \geq 2xy \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y} \geq 2$ (vì x,y dương)

Áp dụng $(*) \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{y^2} \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)^2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} \geq 2-\dfrac{4}{y^2} \quad (1)$

Áp dụng $(*) \Rightarrow \dfrac{1}{x^4}+\dfrac{16}{y^4} \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{y^2}\right)^2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^4} \geq 2-\dfrac{16}{y^4} \quad (2)$

Có $x \leq y \leq 2$ nên $\left(1-\dfrac{x^2}{y^2}\right)(y^2-4) \leq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 4+x^2-\dfrac{4x^2}{y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4+2x^2-\dfrac{4x^2}{y^2}=4+x^2\left(2-\dfrac{4}{y^2}\right) \leq 4+x^2\,\dfrac{1}{x^2}=5$ do (1)

Tương tự $\left(1-\dfrac{x^4}{y^4}\right)(y^4-4) \leq 0 \Leftrightarrow y^4 \leq 16+x^4-\dfrac{16x^4}{y^4}$

$\Leftrightarrow y^4+x^4 \leq 16+x^4\left(2-\dfrac{16}{y^4}\right) \leq 16+x^4.\dfrac{1}{x^4}=17$ (do 2)

$\Rightarrow P \leq 17+5=22$

Dấu $=$ xảy ra khi $x=1;y=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=22$ khi $x=1$ và $y=2$.

Câu 3.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) với $AB<AC$. Phân giác của góc BAC cắt BC tại D và cắt (O) tại E khác A. M là trung điểm của đoạn thẳng AD. Đường thẳng BM cắt (O) tại P khác B. Giả sử các đường thẳng EP và AC cắt nhau tại N.

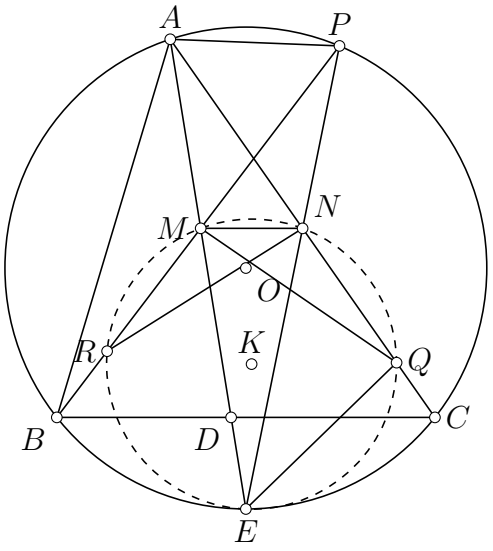
a) Chứng minh tứ giác $APNM$ nội tiếp và N là trung điểm của cạnh AC.

b) Giả sử đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác EMN cắt đường thẳng AC tại Q khác N. Chứng minh rằng B và Q đối xứng với nhau qua AE.

c) Giả sử (K) cắt đường thẳng BM tại R khác M. Chứng minh rằng RA vuông góc với RC.

Lời giải.

a)



Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{ECA}$ (AD là phân giác $\widehat{BAC}$)
Lại có $\widehat{BPE} = \widehat{BAE}$ (cùng chắn cung BE).
Từ đó suy ra $\widehat{ECA} = \widehat{BPE} \Leftrightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MPN}$
$\Rightarrow$ Tứ giác $APMN$ nội tiếp.
Ta có $\widehat{APM} = \widehat{ANM}$ (cùng chắn $\widehat{AM}$)
Mặt khác $\widehat{APM} = \widehat{APB} = \widehat{ACB}$
$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ACB} \Rightarrow MN \parallel BC$
Vì M là trung điểm của AD
$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ADC$
$\Rightarrow N$ là trung điểm của AC.

b) Vì tứ giác $MNQE$ nội tiếp (K) suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{MEQ}$
Mà $\widehat{ANM} = \widehat{APB} \Rightarrow \widehat{AEQ} = \widehat{APB}$
Xét (O) có $\widehat{APB} = \widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{AEQ} = \widehat{AEB}$.
Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AEQ$ có

$$\left.\begin{array}{l} AE \text{ chung} \\ \widehat{AEQ} = \widehat{AEB} \text{ (cmt)} \\ \widehat{BAE} = \widehat{QAE} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AEB = \triangle AEQ \text{ (g-c-g)}$$

$\Rightarrow AB = AQ$ và $BE = EQ \Rightarrow AE$ là trung trực của BQ hay B, Q đối xứng qua AE.

c) Vì tứ giác $ENMR$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ENR} = \widehat{EMR}$
Ta lại có $\widehat{EMR} = \widehat{AMR} = \widehat{ANP} = \widehat{QNE}$.
Suy ra $\widehat{ENR} = \widehat{ENQ}$ (1)
Ta có $\widehat{REN} = \widehat{PMN} = \widehat{PAN} = \widehat{PEC}$ hay $\widehat{REN} = \widehat{QEN}$.
Từ đó ta chứng minh được $\triangle REN = \triangle CEN$ (g-c-g).
Suy ra $RN = NC = NA \Rightarrow ARC$ vuông tại R hay $AR \perp RC$

Câu 4.

Số nguyên a được gọi là số "đẹp" nếu với mọi cách sắp xếp theo thứ tự tùy ý của 100 số 1, 2, 3,..., 100 luôn tồn tại 10 số liên tiếp có tổng không nhỏ hơn a. Tìm số đẹp lớn nhất.

Lời giải.

Tổng của 100 số tự nhiên từ 1 tới 100 là 5050.
Chia 100 số thành 10 bộ 10 số liên tiếp thì trung bình tổng của 10 bộ này là 505.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Nên tồn tại ít nhất 1 bộ 10 số nguyên tố liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 505.
Ta chứng minh số a lớn nhất có thể bằng 505 bằng cách chọn ra ví dụ mà tổng 10 số liên tiếp bất kì nhỏ hơn hoặc bằng 505, khi đó mọi số a lớn hơn 505 đều không thỏa mãn.

Thật vậy, xét cách sắp xếp sau:

100, 1, 99, 2, 98, 3, . . . ,51,50 (chia thành các cặp có tổng bằng 101, viết số lớn đứng trước rồi xếp các cặp bằng nhau theo thứ tự giảm dần của số lớn hơn).
Nếu 10 số liên tiếp gồm 5 cặp số như vậy thì tổng 10 số này là 505. Nếu không 10 số này sẽ gồm số đầy là số nhỏ hơn trong 1 cặp và kết thúc là 1 số lớn hơn trong 1 cặp khác.
Các số này thuộc 6 cặp khác nhau là $x, 101-x, x-1, 102-x, \ldots x-4, 105-x, x-5, 106-x$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 161

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HƯNG YÊN VÒNG 2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Đặt $a=\sqrt{2}, b=\sqrt[3]{2}$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1.$$

b) Cho $x=\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}+2$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^3-6x^2+21x+2016$.

Lời giải.

a) Ta có: $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 \Leftrightarrow (a-b)\left(\frac{1}{b}+a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)=1.$

$VT=\frac{a}{b}-1+a^2-b^2+\frac{a^2}{b}-a+b-\frac{b^2}{a}+a-b=\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-b^2+a^2-1.$

Với $a=\sqrt{2}, b=\sqrt[3]{2}$, ta thấy $\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{b^2}{a}\\ \frac{a^2}{b}=b^2\end{cases} \Rightarrow VT=a^2-1=2-1=1=VP$(đpcm).

b) Ta thấy:

$x-2=\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}$

$\Leftrightarrow (x-2)^3=(\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1})^3$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=\sqrt{28}+1-3\sqrt[3]{(\sqrt{28}+1)(\sqrt{28}-1)}(\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1})-\sqrt{28}+1.$

$\Rightarrow x^3-6x^2+12x-8=2-9(x-2)$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+21x=28.$

$\Rightarrow P=2044.$

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho ba đường thẳng:

$$(d_1): y=-3x+3;\ (d_2): y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2};\ (d_3): y=-ax+a^3-a^2-\frac{1}{3}.$$

Tìm a để ba đường thẳng đồng quy.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x,y,z) của phương trình

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=2015$$

thỏa mãn $x\geq y\geq z\geq 8$.

Lời giải.

a) Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), khi đó hoành độ của điểm A là nghiệm của phương trình

$$-3x+3=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=1.$$

Suy ra $y_A=0$. Vậy $A(1;0)$. Để ba đường thẳng đồng quy thì điểm $A(1,0)\in(d_3)$. Khi đó

$$-a+a^3-a^2-\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow 4a^3=a^3+3a^2+3a+1$$

$$\Leftrightarrow 4a^3=(a+1)^3\Leftrightarrow \sqrt[3]{4}a=a+1\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}&xyz+xy+yz+zx+x+y+z=2015\\ \Leftrightarrow&xy(z+1)+y(z+1)+x(z+1)+z+1=2016\\ \Leftrightarrow&(z+1)(xy+y+x+1)=2016\\ \Leftrightarrow&(x+1)(y+1)(z+1)=16.14.9.\end{aligned}$$

Do $x\geq y\geq z\geq 8$ nên (x,y,z) cần tìm là $(15,13,8)$.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0\\ 2x^2-4x+3=-y^3.\end{cases}$

b) Giải phương trình $(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+2})(1+\sqrt{4x^2+14x+10})=3$.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0\\ 2x^2-4x+3=-y^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=\dfrac{2x}{x^2+1}\\ y^3=-2(x-1)^2-1.\end{cases}$

Ta thấy $\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1\Rightarrow y^2\leq 1\Rightarrow -1\leq y\leq 1.$ (1)

Mặt khác $-2(x-1)^2-1\leq -1\Rightarrow y^3\leq -1\Rightarrow y\leq -1.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y=-1\Rightarrow x=1$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;-1)$.

b) Điều kiện: $x\geq -1$. Đặt $u=\sqrt{2x+5}$, $v=\sqrt{2x+2}$ $(u,v\geq 0)$. Khi đó:

$$\begin{aligned}&(u-v)(1+uv)=3 \text{ và } u^2-v^2=3\\ \Rightarrow&(u-v)(1+uv)=u^2-v^2\Leftrightarrow(u-v)(1-u)(1-v)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}u-v=0\\ 1-u=0\\ 1-v=0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Khi $u-v=0\Rightarrow\sqrt{2x+5}=\sqrt{2x+2}\Rightarrow 2x+5=2x+2$ (vô nghiệm).

Khi $1-u=0\Rightarrow\sqrt{2x+5}=1\Rightarrow x=-2$ (loại).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Khi $1-v=0 \Rightarrow \sqrt{2x+2}=1 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=1$cm, $\widehat{ABC}=60^\circ$. Tính thể tích của hình tạo được khi cho tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh BC.

Lời giải.

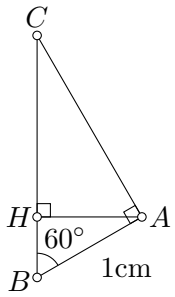
Gọi H là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC.

Khi đó AH đường cao của $\triangle ABC$.

Ta có $AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$cm và $BC=2$cm.

Vậy thể tích của khối tròn xoay sẽ là:

$V=\dfrac{1}{3}\cdot BC\cdot \pi \cdot AH^2=\dfrac{\pi}{2}$ (cm^3).



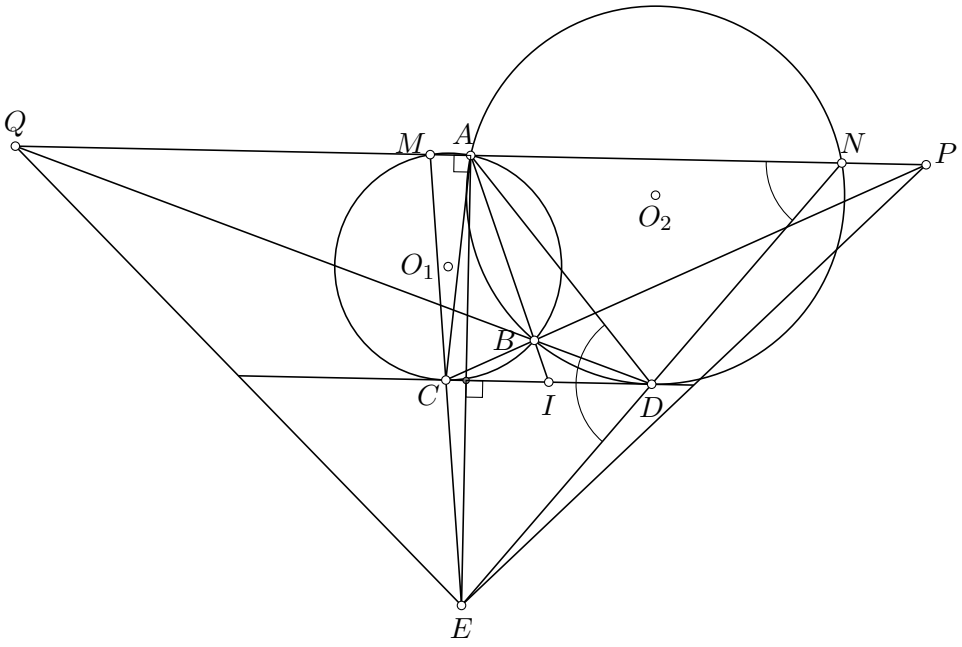
Câu 5. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại C và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD, lần lượt cắt (O_1) và (O_2) tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Gọi P là giao điểm của BC với MN, gọi Q là giao điểm vủa BD với MN. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD.

b) $\dfrac{BD}{BQ}+\dfrac{BC}{BP}=\dfrac{MN}{PQ}$.

c) Tam giác EPQ là tam giác cân.

Lời giải.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

a) Do $MN \parallel CD$ nên $\widehat{EDC} = \widehat{ENA}$.
Mặt khác $\widehat{CDA} = \widehat{DNA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DA}$).
Suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{CDA}$ hay DC là đường phân giác của $\widehat{EDA}$.
Tương tự, CD cũng là đường phân giác của $\widehat{ACE}$.
Từ đó $\triangle ACD = \triangle ECD$ (g.c.g).
Suy ra $DA = DE \Rightarrow \triangle DAE$ cân tại D, từ đó $AE \perp CD$.

b) Ta có CD là đường trung trực của AE và $CD \parallel MN$, suy ra CD là đường trung bình của $\triangle MNE$, từ đó $CD = \dfrac{1}{2}MN$. Ta lại có $CD \parallel PQ$, suy ra

$$\frac{BC}{BP} = \frac{BD}{BQ} = \frac{CD}{PQ} \Rightarrow \frac{BC}{BP} + \frac{BD}{BQ} = \frac{2CD}{PQ} = \frac{MN}{PQ}.$$

c) Do $PQ \parallel CD$ nên $AE \perp PQ$. (1)
Gọi $I = AB \cap CD$.
Xét $\triangle AID$ và $\triangle DIB$ có

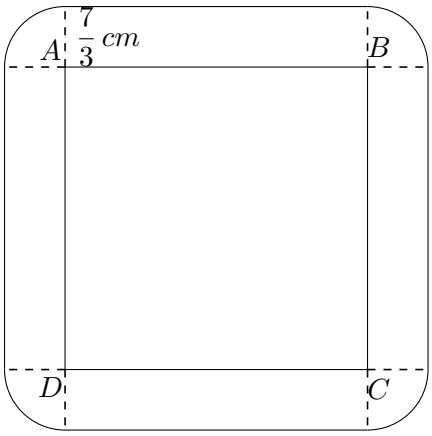
$$\begin{cases} \widehat{I} \text{ chung}, \\ \widehat{IAD} = \widehat{IDB} \quad (\text{ cung chắn } \overset{\frown}{DB}) \end{cases} \Rightarrow \triangle AID \backsim \triangle DIB(\text{g.g}).$$

Suy ra $\dfrac{ID}{IA} = \dfrac{IB}{ID} \Rightarrow ID^2 = IA.IB$.
Tương tự ta cũng có: $IC^2 = IA.IB$.
Như vậy $IC^2 = ID^2 \Rightarrow IC = ID$.
Mà $CD \parallel PQ$ nên theo định lí Ta-lét ta có: $\dfrac{ID}{AQ} = \dfrac{IB}{AB} = \dfrac{IC}{AP} \Rightarrow AP = AQ$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EQP$ cân tại E.

Câu 6. Trong hình vuông cạnh 10cm, người ta đặt ngẫu nhiên 8 đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng có độ dài 2cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm nằm trên 2 đoạn thẳng khác nhau trong 8 đoạn thẳng đó mà khoảng cách của chúng không vượt quá $\dfrac{14}{3}$cm.

Lời giải.

Với mỗi đoạn thẳng và hình vuông đã cho, xét các hình bao như hình vẽ.



Tổng diện tích của 8 hình bao quanh đoạn thẳng là

$$S_1 = 8\left[\frac{28}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \pi\right] \approx 211,50(\text{cm}^2).$$

Diện tích hình bao hình vuông là

$$S_2 = 100 + \frac{280}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \pi \approx 210,44(\text{cm}^2).$$

Do $S_1 > S_2$ mà các hình bao đoạn thẳng nằm hoàn toàn trong hình bao hình vuông nên tồn tại 2 đoạn thẳng d_1, d_2 có hình bao giao nhau.
Gọi I là điểm thuộc phần giao đó thì trên d_1, d_2 tồn tại hai điểm E, F thuộc hai đoạn thẳng sao cho $IE \le \dfrac{7}{3}$cm, $IF \le \dfrac{7}{3}$cm. Khi đó $EF \le IE + IF \le \dfrac{14}{3}$cm.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 162

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HƯNG YÊN, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $A=3\sqrt{3}-4\sqrt{3}+\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=-\sqrt{3}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=-1$.

Câu 2. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-m+2$ (m là tham số).

a) Với $m=2$. Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 đều lớn hơn $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

a) Với $m=2$ ta có $(d): y=2x$.
Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình: $x^2=2x$.
+ Với $x=0$ thì tọa độ giao điểm là $(0;0)$.
+ Với $x=2$ thì tọa độ giao điểm là $(2;4)$.

b) Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình:
$x^2=mx-m \Leftrightarrow x^2-mx+m=0(1)$.
Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2
$\Leftrightarrow$ PT (1) có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m^2-4(m-2)>0 \Leftrightarrow m^2-4m+8>0 \Leftrightarrow (m-2)^2+4>0$ đúng với mọi m.
Theo định lý Viét $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1.x_2=m-2 \end{cases}$
Ta có $\begin{cases} x_1>\dfrac{1}{2} \\ x_2>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right)>0 \\ \left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right)>0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2-\dfrac{1}{2}\left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}>0 \\ x_1+x_2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{7}{2} \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{7}{2}$.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2=y+1 \\ y^2=x+1 \end{cases}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x+3}=4x^2+5x-1$.

Lời giải.

a) Trừ theo vế PT thứ nhất cho PT thứ hai của hệ ta được:
$x^2-y^2=y-x \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0$.
Hệ phương trình có 4 nghiệm $(x;y)$ là $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$;
$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $(-1;0)$ và $(-0;-1)$.

b) Điều kiện: $x\geq -3$ PT $\Leftrightarrow x+3+\sqrt{x+3}+\frac{1}{4}=4x^2+6x+\frac{9}{4}$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2$.
Trường hợp 1: $\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}=2x+\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2x+1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2+3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$.
Trường hợp 2: $\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}=-2x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=-2x-2$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\leq x\leq -1 \\ 4x^2+7x+1=0= \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-7+\sqrt{33}}{8}$.
Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, x=\frac{-7+\sqrt{33}}{8}$.

Câu 4. Hai người thợ cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong vòng 4 giờ. Nếu mỗi người làm riêng, để hoàn thành công việc thì thời gian người thứ nhất ít hơn người thứ hai là 6 giờ. Hỏi làm riêng thì mỗi người làm trong bao lâu để hoàn thành công việc.

Lời giải.
Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là $x(h)$ với $x>4$.
Khi đó thời gian người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là $x+6(h)$.
Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2-2x-24=0\Leftrightarrow x=6$.
Vậy thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là $6(h)$;
Thời gian người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là $12(h)$.

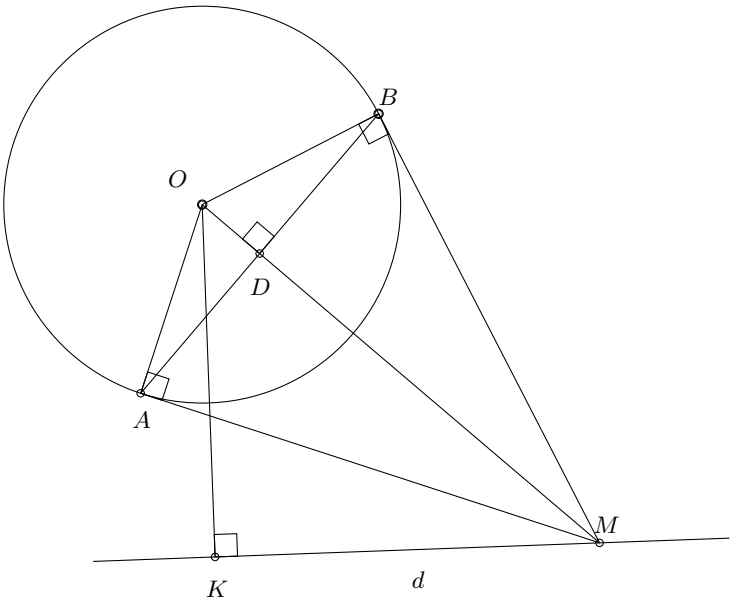
Câu 5. Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng d cố định, khoảng cách từ O đến đường thẳng d là $2R$. Điểm M thuộc đường thẳng d, qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh các điểm O, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm của d với đường tròn (O). Chứng minh D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM.

c) Điểm M di động trên đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M sao cho diện tích tam giác AMB đạt giá trị nhỏ nhất.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Lời giải.

a) Bốn điểm O, A, M, B cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

b) Do MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên MO là phân giác của $\widehat{AMB}$ và $BD = AD$. Lại có $\widehat{MBD} = \widehat{ABD}$, suy ra BD là phân giác của $\widehat{ABM}$.
Từ đó D là tâm đường tròn nội tiếp ΔABM.

c) Gọi H là giao điểm của AB và MO, K là hình chiếu của O trên đường thẳng d.
Ta có $MH \perp AB, H$ là trung điểm của $AB, OK = 2R$.
$AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{OM^2 - R^2}$;
$AH = \dfrac{AM.AO}{OM} = \dfrac{R\sqrt{OM^2 - R^2}}{OM}$;
$MH = \dfrac{AM^2}{OM} = \dfrac{OM^2 - R^2}{OM}$.
Khi đó $S_{\Delta MAB} = \dfrac{1}{2}.MH.AB = MH.HA = \dfrac{(OM^2 - R^2)R\sqrt{OM^2 - R^2}}{OM^2}$
$= R\left[1 - \left(\dfrac{R}{OM}\right)^2\right] OM\sqrt{1 - \left(\dfrac{R}{OM}\right)^2}$
$= R.OM\left(\sqrt{1 - \left(\dfrac{R}{OM}\right)^2}\right)^3$.
Ta luôn có $OM \geq OK = 2R \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1 - \left(\dfrac{R}{OM}\right)^2 \geq \dfrac{3}{4}$.
$\Rightarrow S_{\Delta MAB} = R.OM\left(\sqrt{1 - \left(\dfrac{R}{OM}\right)^2}\right)^3 \geq R.2R\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.
Vậy $S_{\Delta MAB}$ nhỏ nhất khi M trùng K.

Câu 6. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc \geq 1$.
Chứng minh $\dfrac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \dfrac{1}{b^5 + c^2 + a^2} + \dfrac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \dfrac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$

Lời giải.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Do $abc \geq 1$ nên $\dfrac{1}{a^5+b^2+c^2} \leq \dfrac{1}{\dfrac{a^5}{abc}+b^2+c^2}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{a^4}{bc}+b^2+c^2} \leq \dfrac{1}{\dfrac{2a^4}{b^2+c^2}+b^2+c^2} = \dfrac{b^2+c^2}{2a^4+(b^2+c^2)^2}$.

Ta lại có: $2a^4+(b^2+c^2)^2 \geq \dfrac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$ (dùng định nghĩa hoặc biến đổi tương đương)

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^5+b^2+c^2} \leq \dfrac{3(b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2}$ (1).

Tương tự $\dfrac{1}{b^5+c^2+a^2} \leq \dfrac{3(c^2+a^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2}$ (2).

$\dfrac{1}{c^5+a^2+b^2} \leq \dfrac{3(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2}$ (3).

Từ $(1),(2),(3)$ ta có: $\dfrac{1}{a^5+b^2+c^2}+\dfrac{1}{b^5+c^2+a^2}+\dfrac{1}{c^5+a^2+b^2} \leq \dfrac{3}{a^2+b^2+c^2}$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 163

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, SỞ GIÁO DỤC PHÚ THỌ, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. **(2,0 điểm)**

a Cho các số a, b thỏa mãn $2a^2+11ab-3b^2=0, b\neq 2a, b\neq -2a$. Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{a-2b}{2a-b}+\dfrac{2a-3b}{2a+b}$.

b Cho các số nguyên dương x, y, z và biểu thức

$$P=\frac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz}$$

Chứng minh rằng P là số nguyên chia hết cho 6.

Lời giải.

a) Ta có

$T=\dfrac{(a-2b)(2a+b)+(2a-3b)(2a-b)}{(2a-b)(2a+b)}=\dfrac{6a^2-11ab+b^2}{4a^2-b^2}$

Từ giả thiết suy ra $11ab=3b^2-2a^2$, thay vào T ta được:

$T=\dfrac{6a^2+2a^2-3b^2+b^2}{4a^2-b^2}=\dfrac{2(4a^2-b^2)}{4a^2-b^2}=2.$

b) Ta có: $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Suy ra nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Vì $(x^2-y^2)+(y^2-z^2)+(z^2-x^2)=0$ nên theo trên ta có:

$(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3=3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$ (1)

và $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz=x^2y+xy^2+z^2(x+y)+(2xyz+y^2z+x^2z)$

$=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+zx+zy)$

$=(x+y)(y+z)(z+x).$ (2)

Thay (1) và (2) vào P ta được:

$P=\dfrac{3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=3(x-y)(y-z)(z-x)\in\mathbb{Z}.$

Trong ba số nguyên x, y, z luôn có hai số cùng tính chẵn lẻ, giả sử đó là $x, y \Rightarrow (x-y)\vdots 2$.

Do đó $P\vdots 6$.

Câu 2. **(2,0 điểm)**

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^3+2x^2y+x^2+2xy=x+10$.

b) Cho 19 điểm phân biệt nằm trong một tam giác đều có cạnh bằng 3, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 19 điểm đã cho mà có diện tích không lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

a) Ta có
$2x^3+2x^2y+x^2+2xy=x+10 \Leftrightarrow 2x^2(x+y)+2x(x+y)-(x^2+x)=10$
$\Leftrightarrow 2(x+y)(x^2+x)-(x^2+x)=10 \Leftrightarrow (x^2+x)(2(x+y)-1)=10.$ (1)
Mà $x^2+x=x(x+1)$ là số chẵn; $2(x+y)-1$ là số lẻ và $x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}>-1 \Rightarrow$ $x^2+x\geq 0$ (vì $x\in\mathbb{Z}$)
Do đó từ (1) ta có $\begin{cases}x^2+x=10\\2(x+)-1=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x^2+x=2\\2(x+y)-1=5\end{cases}$.
Trường hợp $\begin{cases}x^2+x=10\\2(x+)-1=1\end{cases}$. Phương trình $x^2+x=10$ không có nghiệm nguyên.
Trường hợp $\begin{cases}x^2+x=2\\2(x+)-1=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=-2\\y=5\end{array}\right.\end{cases}$.
Vậy có hai bộ số $(x;y)$ thỏa mãn là: $(1;2),(-2;5)$.

b) Chia tam giác đều ABC thành 9 tam giác đều, có cạnh bằng 1.
Suy ra mỗi tam giác nhỏ có diện tích là $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$.
Vì có 19 điểm nằm trong 9 tam giác nhỏ nên có ít nhất 3 điểm cùng thuộc một hình tam giác nhỏ. Giả sử ba điểm đó là M,N,P.
Khi đó tam giác MNP nằm trong một tam giác nhỏ nên $S_{\triangle MNP}\leq\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3. (**2,0 điểm**)

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+x^2y+2x^2+xy+6=0\\x^2+3x+y=1\end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x\geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với
$\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 2x+1=4+x-3+4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-3}=x$
$\Leftrightarrow 16(x-3)=x^2 \Leftrightarrow x^2-16x+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=12\end{array}\right.$.
Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) $\begin{cases} 2x^3+x^2y+2x^2+xy+6=0 \\ x^2+3x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(2x+y)=-6 \\ (x^2+x)+(2x+y)=1 \end{cases}$.

Đặt $u=x^2+x; v=2x+y$.

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} uv=-6 \\ u+v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} =3 \\ v=-2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x=-2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$. Hệ này vô nghiệm.

Với $\begin{cases} u=3 \\ v=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x=3 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$.

Giải hệ này được hai nghiệm $\begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ y=\sqrt{13}-1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ y=-\sqrt{13}-1 \end{cases}$.

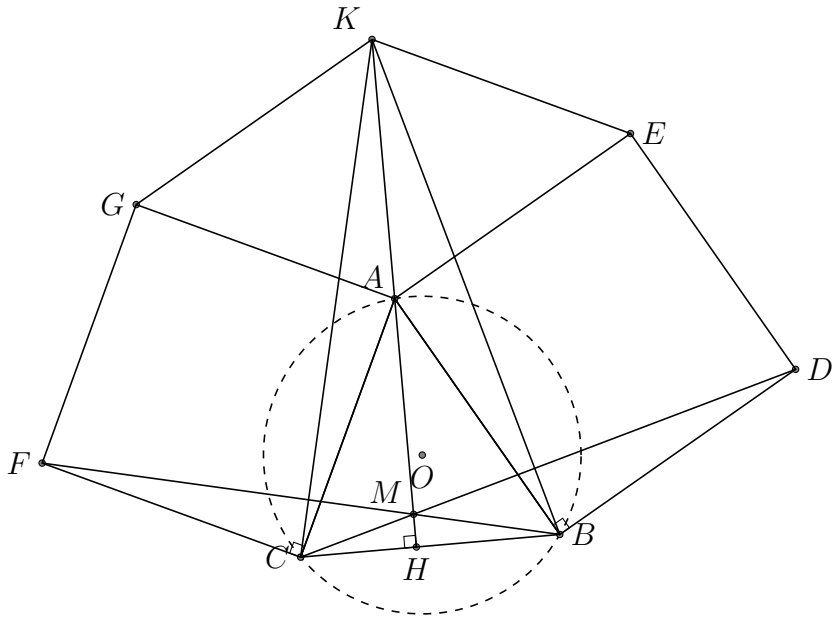
Câu 4. (**3,0 điểm**) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABDE, ACFG$ và hình bình hành $AEKG$.

a) Chứng minh rằng $AK=BC$ và $AK \perp BC$.

b) DC cắt BF tại M. Chứng minh rằng A, K, M thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng khi A thay đổi trên cung lớn BC của $(O;R)$ thì K luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.



a. Ta có $\widehat{KEA}+\widehat{EAG}=180^\circ, \widehat{BAC}+\widehat{EAG}=180^\circ \Rightarrow \widehat{KEA}=\widehat{BAC}$.

Lại có $EK=AG=AC; EA=AB \Rightarrow \triangle AEK=\triangle BAC \Rightarrow AK=BC$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta có $\triangle AEK = \triangle BAC \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{ABC}$. Gọi H là giao điểm của KA và BC, ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = \widehat{BAH} + \widehat{EAK} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$. Vậy $AK \perp BC$.

b. Vì $\widehat{KAC} = \widehat{KAG} + 90^\circ; \widehat{BCF} = \widehat{ACB} + 90^\circ$ mà $\widehat{KAG} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{BCF}$.

Vì $KA = BC; AC = CF; \widehat{KAC} = \widehat{BCF} \Rightarrow \triangle KAC = \triangle BCF \Rightarrow \widehat{CKH} = \widehat{FBC}$.

Ta lại có $\widehat{CKH} + \widehat{KCH} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp KC$. (1)

Tương tự, ta có $KB \perp CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là trực tâm của $\triangle KBC$, suy ra $M \in KH$. Vậy A, K, M thẳng hàng.

c. Dựng hình vuông $BCC'B'$ trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa cung lớn BC, suy ra $B'C'$ cố định.

Ta có $AKB'B$ là hình bình hành (vì BB', KA cùng vuông góc BC suy ra $BB' \parallel KA; BB' = KA = BC$). Do đó $B'K \parallel BA \Rightarrow \widehat{B'KA} = \widehat{BAH}$.

Tương tự, ta có $AKC'C$ là hình bình hành, suy ra $KC' \parallel AC \Rightarrow \widehat{AKC'} = \widehat{HAC}$.

Suy ra $\widehat{B'KC'} = \widehat{B'KA} + \widehat{AKC'} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC} = \widehat{BAC}$. Vì khi A thay đổi trên cung lớn BC của đường tròn $(O;R)$ thì K luôn nhìn đoạn $B'C'$ cố định một góc không đổi $\alpha = \widehat{BAC}$. Do đó K thuộc quỹ tích cung chứa góc α dựng trên đoạn $B'C'$ cố định.

Câu 5. (**1,0 điểm**) Cho các số dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{(x+2y)^3+1}-1} + \frac{(2x+y)(x+2y)}{4} - \frac{8}{3(x+y)}$$

Lời giải.

Đặt $2x+y=a; 2y+x=b; a,b>0$ thì $P = \dfrac{2}{\sqrt{a^3+1}-1} + \dfrac{2}{\sqrt{b^3+1}-1} + \dfrac{ab}{4} - \dfrac{8}{a+b}$

Ta có $\sqrt{a^3+1} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \le \dfrac{a+1+a^2-a+1}{2} = \dfrac{a^2+2}{2} \Rightarrow \sqrt{a^3+1}-1 \le \dfrac{a^2}{2}$.

Tương tự $\sqrt{b^3+1}-1 \le \dfrac{b^2}{2}$.

Mặt khác $\dfrac{4}{a+b} \le \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Rightarrow -\dfrac{8}{a+b} \ge -\dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b}$.

Vậy $P \ge \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} + \dfrac{ab}{4} - \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b} = \left(\dfrac{4}{a^2}+1\right) + \left(\dfrac{4}{b^2}+1\right) + \dfrac{ab}{4} - \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b} - 2 \ge \dfrac{4}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{ab}{4} - \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{b}$

Hay $P \ge \dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{ab}{4} - 2 \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{a}.\dfrac{2}{b}.\dfrac{ab}{4}} - 2 = 1$.

Do đó $\min P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = a^2-a+1 \\ b+1 = b^2-b+1 \\ \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{4}{b^2} = 1 \\ \dfrac{2}{a} = \dfrac{2}{b} = \dfrac{ab}{4} \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow x = y = \dfrac{2}{3}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 164

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN, VÒNG 2, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Không sử dụng máy tính:

a) Tính tổng $S = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots - 2014^2 + 2015^2$.

b) Tính giá trị của biểu thức $P = (5x^3 - 30x + 21)^{2016}$ với $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} S &= 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots - 2014^2 + 2015^2 \\ &= 1 + \left(3^2 - 2^2\right) + \left(5^2 - 4^2\right) + \cdots + \left(2015^2 - 2014^2\right) \\ &= 1 + (3-2)(2+3) + (5-4)(4+5) + \cdots + (2015-2014)(2014+2015) \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 2014 + 2015 \\ &= \frac{(1+2015)\,2015}{2} = 2031120. \end{aligned}$$

Vậy $S = 2031120$.

b) Ta có

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \sqrt{2} + 1;$$

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2} - 1.$$

Do đó $x = \left(\sqrt{2}+1\right) - \left(\sqrt{2}-1\right) = 2$.

Như vậy $P = (5.2^3 - 30.2 + 21)^{2016} = 1^{2016} = 1$.

Câu 2.

a) Tìm các số nguyên x, y sao cho $x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y$.

b) Chứng minh rằng $(2^{2m+1} + 5^{2n})$ chia hết cho 3, với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} & x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y \\ \Leftrightarrow & (x^3 - 1)y = x^3 + 1 + 2x(x+1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)y = (x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)y = (x+1)(x^2+x+1). \quad (1)$$

Vì $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0, \forall x\in\mathbb{Z}$ nên $(1)\Leftrightarrow (x-1)y=x+1$. (2)

Ta thấy $x=1$ không thỏa phương trình (2). Xét $x\in\mathbb{Z}$ và $x\neq 1$. Khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}.$$

Ta có $y\in\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $(x-1)$ là ước của 2. Do đó $x-1=2$ hoặc $x-1=-2$ hoặc $x-1=1$ hoặc $x-1=-1$. Như vậy $x=3$ hoặc $x=-1$ hoặc $x=2$ hoặc $x=0$. Vậy các cặp $(x;y)$ với x, y là những số nguyên cần tìm là $(0;-1)$, $(-1;0)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

b) Ta có $2^{2m+1}=2.2^{2m}=2.4^m=2(3+1)^m=2(3k+1)=6k+2, k\in\mathbb{N}^*$ Suy ra 2^{2m+1} chia cho 3 dư 2, với mọi $m\in\mathbb{N}^*$. (1)

Mặt khác $5^{2n}=25^n=(24+1)^n=(3.8+1)^n=3p+1, p\in\mathbb{N}^*$. Suy ra 5^{2n} chia cho 3 dư 1, với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $(2^{2m+1}+5^{2n})$ chia hết cho 3.

Câu 3.

a) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2\le x_1<x_2\le 5$.

b) Giải phương trình: $2+\sqrt{2+\sqrt{x}}=x$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0, \forall m\in\mathbb{R}$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1<x_2$ là:

$$x_1=\frac{2m+1-1}{2}=m,\ x_2=\frac{2m+1+1}{2}=m+1.$$

Từ giả thiết bài toán suy ra $2\le m<m+1\le 5\Leftrightarrow 2\le m\le 4$.

Vậy $2\le m\le 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Phương trình đã cho trở thành :

$$\sqrt{2+\sqrt{x}}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 2 & (1)\\ 2+\sqrt{x}=x^2-4x+4. & (2)\end{cases}$$

Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow x^2-4x-\left(\sqrt{x}-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-4)-\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)=0. \quad (3)$$

Vì $x\ge 2$ nên $x-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}>0$. Do đó $(3)\Leftrightarrow x-4=0\Leftrightarrow x=4$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 4. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định. M và N là hai điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $\widehat{MAN}=30^\circ$ (M, N nằm về hai phía của AB). Đường thẳng MB cắt tia AN tại F, đường thẳng NB cắt tia AM tại E. Gọi I là trung điểm của EF.

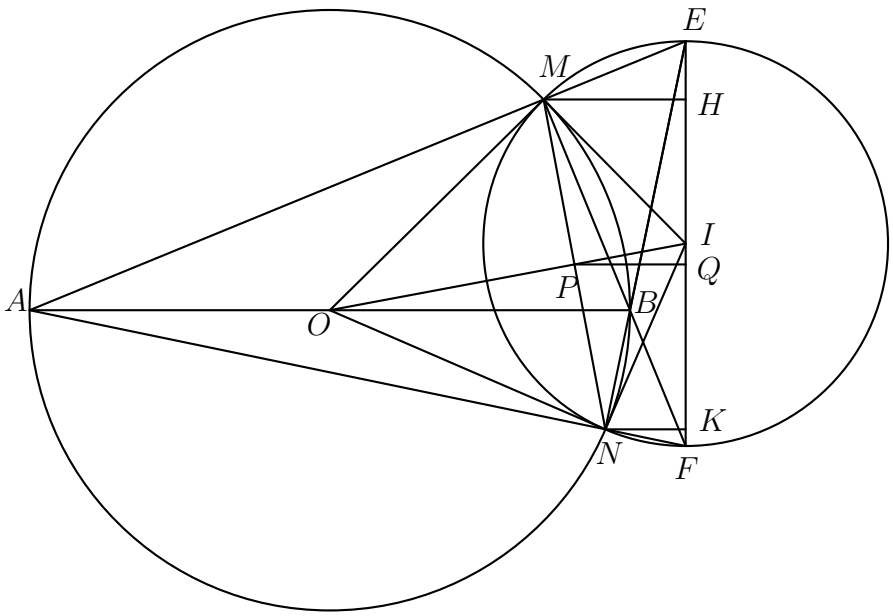
a) Chứng minh tứ giác $MNFE$ nội tiếp một đường tròn.

b) Tính $OI.EF$ theo R.

c) Giả sử diện tích của tứ giác $MNFE$ là S. Tìm giá trị lớn nhất của S theo R.

Lời giải.

a) M và N thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=90^\circ$. Suy ra $\widehat{EMF}=\widehat{FNE}=90^\circ$. Do đó tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn đường kính EF.



b) Do I là trung điểm của EF nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EMNF$. Ta có $IM=IN$ và $OM=ON$ nên đường thẳng OI là đường trung trực của đoạn MN đồng thời là đường phân giác của các góc $\widehat{MIN}$ và $\widehat{MON}$. Ta có $\widehat{MON}$ và $\widehat{MAN}$ là góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung MN của (O), suy ra $\widehat{MOI}=\dfrac{1}{2}\widehat{MON}=\widehat{MAN}=30^\circ$.
Tam giác ENA vuông tại N nên

$$\widehat{AEN}=90^\circ-\widehat{EAN}=90^\circ-30^\circ=60^\circ.$$

Hay $\widehat{MEN}=60^\circ\Rightarrow\widehat{MIN}=120^\circ$ ($\widehat{MEN}$ và $\widehat{MIN}$ là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN của (I)), suy ra $\widehat{MIO}=\dfrac{1}{2}\widehat{MIN}=60^\circ$.
Tam giác MOI có $\widehat{MOI}+\widehat{MIO}=30^\circ+60^\circ=90^\circ\Rightarrow\widehat{OMI}=90^\circ$.
Suy ra: $MI=\dfrac{OM}{\sqrt{3}}=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$; $EF=2.MI=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.
Ta có: $OI=\sqrt{MO^2+MI^2}=\sqrt{R^2+\dfrac{R^2}{3}}=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}=EF$.
Vậy $OI.EF=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2R}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{3}R^2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

c) Đặt $S_1; S_2; S_3$ theo thứ tự là diện tích các tam giác IMN, IME và INF. Gọi P là giao điểm của MN và OI thì $OP \perp MN$. Tam giác MON là tam giác đều (vì có $OM = ON = R$ và $\widehat{MON} = 60^\circ$), suy ra $MN = R$. Tam giác MIP vuông tại P và $\widehat{MIP} = 60^\circ$, suy ra:

$$IP = \frac{1}{2}IM = \frac{R}{2\sqrt{3}}.$$

Kẻ $MH \perp EF$ và $NK \perp EF$ ($H, K \in EF$). Ta có:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot IP \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot R = \frac{R^2}{4\sqrt{3}}$$
$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot IE \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot MH = \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot MH$$
$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot IF \cdot NK = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot NK = \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot NK.$$

Do đó:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot MH + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot NK$$
$$= \frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot (MH + NK).$$

Do R không đổi nên S lớn nhất khi $MH + NK$ lớn nhất. Kẻ $PQ \perp EF$ (Q thuộc EF). Ta có $MH \parallel NK$ (cùng vuông góc với EF) nên $MHKN$ là hình thang. Từ $PQ \perp EF$ suy ra $PQ \parallel MH$. Mà P là trung điểm của MN nên PQ là đường trung bình của hình thang $MHKN$. Suy ra $MH + NK = 2PQ$. Tam giác IPQ vuông tại Q nên $PQ \le PI = \frac{R}{2\sqrt{3}}$.

Xảy ra đẳng thức khi $PI \perp EF$ hay $OI \perp EF$. Mặt khác FM và EN là các đường cao của tam giác AEF nên B là trực tâm, suy ra $AB \perp EF$, suy ra A, I, B thẳng hàng hay AB là phân giác của góc $\widehat{MAN}$. Vậy khi AB là phân giác của góc $\widehat{MAN}$ thì S đạt giá trị lớn nhất là:

$$\frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot IP = \frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{R}{2\sqrt{3}} = \frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R^2}{6} = \frac{2+\sqrt{3}}{12} \cdot R^2.$$

Câu 5. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn: $a + b = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{b+2a}} \ge 2.$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, với mọi $x > 0$, $y > 0$, ta có:

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \ge 2\sqrt{xy} \cdot \frac{2}{\sqrt{xy}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}.$$

Do đó $\frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{b+2a}} \ge \frac{4}{\sqrt{a+2b} + \sqrt{b+2a}}$. (1)

Mà $\sqrt{(a+2b) \cdot 1} \le \frac{a+2b+1}{2}$; $\sqrt{b+2a} \le \frac{b+2a+1}{2}$.

Suy ra $\sqrt{a+2b} + \sqrt{b+2a} \le \frac{1}{2}(3(a+b)+2) = 2$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{b+2a}} \ge 2$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{2}{3} \\ a+2b=b+2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{3}.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 165

ĐỀ THI VÀO 10, THPT CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Cho hai số thực a, b sao cho $|a| \neq |b|$ và $ab \neq 0$ thỏa mãn điều kiện
$$\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{a^2-ab} = \frac{3a-b}{a^2-b^2}.$$
Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a^3+2a^2b+3b^3}{2a^3+ab^2+b^3}$.

b) Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $5m+n$ chia hết cho $5n+m$. Chứng minh rằng m chia hết cho n.

Lời giải.

a) Điều kiện đã cho tương đương với
$$\frac{(a-b)^2}{a(a+b)(a-b)} + \frac{(a+b)^2}{a(a+b)(a-b)} = \frac{a(3a-b)}{a(a+b)(a-b)}$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a+b)^2 = a(3a-b) \Leftrightarrow 2a^2+2b^2 = 3a^2-ab$$
$$\Leftrightarrow a^2-ab-2b^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 - 2\frac{b}{a} = 0. \quad (*)$$
Đặt $t = \dfrac{a}{b}$. Thay vào $(*)$, ta được:
$$t - 1 - \frac{2}{t} = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2. \end{array}\right.$$
Nếu $t = -1$ thì $a = -b$, loại. Vậy $t = 2$ hay $\dfrac{a}{b} = 2$. Khi đó:
$$P = \frac{a^3+2a^2b+3b^3}{2a^3+ab^2+b^3} = \frac{\dfrac{a^3}{b^3} + 2\dfrac{a^2}{b^2} + 3}{2\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{a}{b} + 1} = \frac{t^3+2t^2+3}{2t^3+t+1} = \frac{19}{19} = 1.$$

b) Ta có:
$$5m+n \vdots 5n+m$$
$$\Leftrightarrow 5m+n = (5n+m)a \ \ (\text{với } a \in \mathbb{N}^*)$$
$$\Leftrightarrow 5m+n = 5na+ma$$
$$\Leftrightarrow 5m-am = 5na-n$$
$$\Leftrightarrow m(5-a) = n(5a-1). \quad (i)$$
Do m, n, a là những số nguyên dương nên
$$n(5a-1) > 0 \Rightarrow 5-a > 0 \Rightarrow a < 5 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4\}.$$

- Khi $a=1$, thay vào (i) ta được $4m=4n \Rightarrow m=n \Rightarrow m \vdots n$.
- Khi $a=2$, thay vào (i) ta được $3m=9n \Rightarrow m=3n \Rightarrow m \vdots n$.
- Khi $a=3$, thay vào (i) ta được $2m=14n \Rightarrow m=7n \Rightarrow m \vdots n$.
- Khi $a=4$, thay vào (i) ta được $m=19n \Rightarrow m \vdots n$.

Vậy ta luôn có m chia hết cho n, điều phải chứng minh.

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^2-6x+4+2\sqrt{2x-1}=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=9(x+y) \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương:

$$(x-2)^2=2x-2\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{2x-1}-1 \\ x-2=1-\sqrt{2x-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{2x-1} \\ 3-x=\sqrt{2x-1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^2=2x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 3 \\ (3-x)^2=2x-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-4x+2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-8x+10=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{2} \\ x=4-\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=2+\sqrt{2}, x=4-\sqrt{6}$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=9(x+y) & (1) \\ x^2-y^2=3. & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $x-y \neq 0$ và $x+y \neq 0$. Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)=9(x+y) & (3) \\ (x-y)(x+y)=3. & (4) \end{cases}$$

Từ đây ta "đẳng cấp hóa" bằng cách thay (4) vào (3):

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=3(x-y)(x+y)(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^2+xy+y^2=3(x+y)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+5xy=0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2}{y^2}+5\frac{x}{y}+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{y}=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2x \\ x=-2y. \end{array}\right.$$

Khi $x=-2y$, thay vào (2), ta được: $3y^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1. \end{array}\right.$

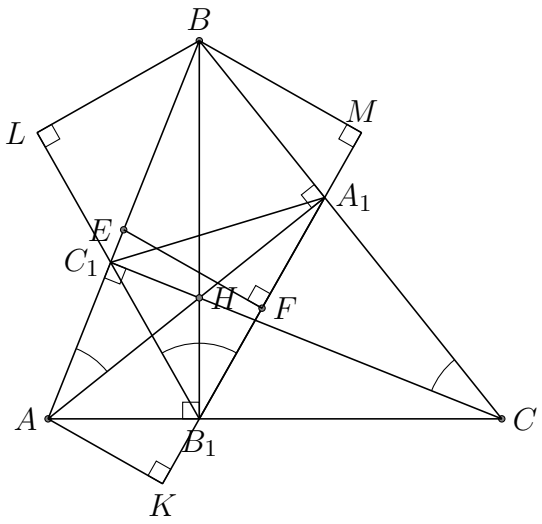
Khi $y=-2x$, thay vào (2), ta được: $-3x^2=3$. Phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ là $(2;-1)$, $(-2;1)$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi K là hình chiếu của A trên A_1B_1; L là hình chiếu của B trên B_1C_1. Chứng minh rằng $A_1K = B_1L$.

Lời giải.



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta có tứ giác AB_1HC_1 nội tiếp, suy ra $\widehat{HB_1C_1} = \widehat{HAC_1}$. (1)

Tứ giác CA_1HB_1 nội tiếp nên $\widehat{HB_1A_1} = \widehat{HCA_1}$. (2)

Tứ giác AC_1A_1C nội tiếp nên $\widehat{HAC_1} = \widehat{HCA_1}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra tia B_1H là tia phân giác của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$. Kẻ BM vuông góc với đường thẳng B_1A_1 tại M. Ta có $B_1L = B_1M$. (4)

Mặt khác tứ giác AB_1A_1B nội tiếp đường tròn đường kính AB, tâm là trung điểm E của AB. Gọi F là trung điểm của A_1B_1 thì EF vuông góc với A_1B_1. (5).

Mặt khác, AK song song với BM nên $ABMK$ là hình thang. Do đó $EF \parallel AK \parallel BM$. Suy ra EF là đường trung bình của hình thang $ABMK$, do đó $FM = FK$. (6)

Từ (5), (6) suy ra $B_1M = A_1K$. (7)

Từ (4), (7) suy ra $B_1L = A_1K$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x+y} - \dfrac{x+y}{2} \le \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $x + y \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y} \le \dfrac{1}{2}$. Do đó:

$$\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x+y} = \frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{x+y} \le \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}. \quad (1)$$

Lại có:

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \le 2\left(x + y\right) \Rightarrow -\frac{x+y}{2} \le -\frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2}{4}. \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x+y} - \frac{x+y}{2} &\le \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} - \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2}{4} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} \\ &= \frac{2t - t^2}{4} = \frac{-(t-1)^2 + 1}{4} \le \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 5. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có AC cắt BD tại E. Tia AD cắt BC tại F. Dựng hình bình hành $AEBG$.

a) Chứng minh rằng $FD.FG = FB.FE$.

b) Gọi H là điểm đối xứng của E qua AD. Chứng minh bốn điểm F, H, A, G cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

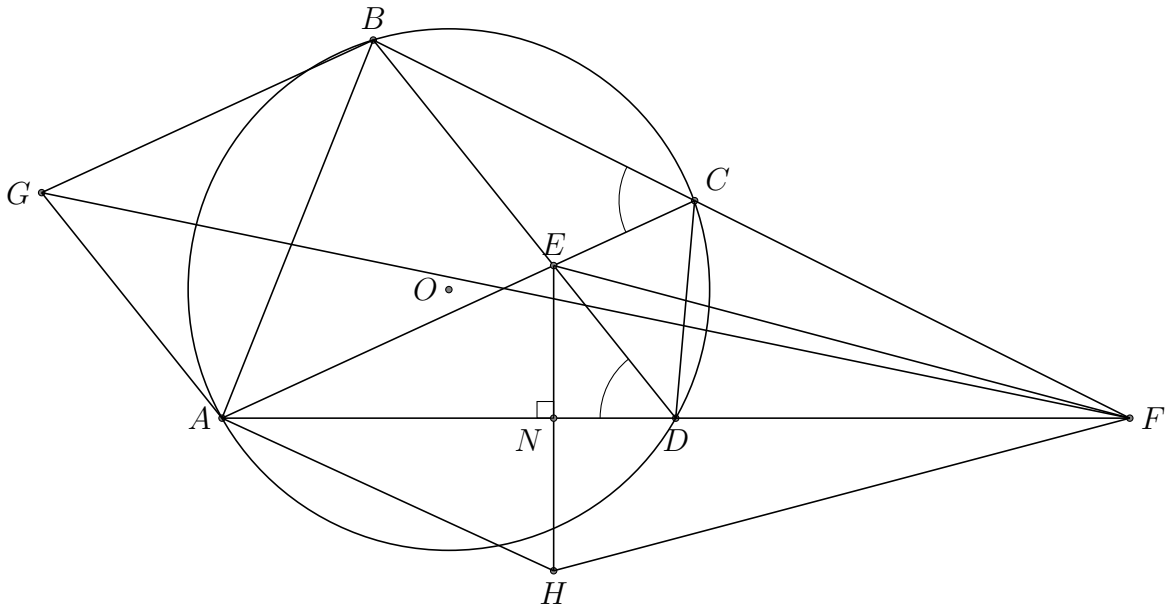
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. (1)

Ta có $AG \parallel BD$, suy ra $\widehat{ADB} + \widehat{FAG} = 180^\circ$. (2)

Ta có $\widehat{ACB} + \widehat{FCE} = 180^\circ$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FCE} = \widehat{FAG}$. (∗)



a) Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{FCD} = \widehat{BAC}$.

Từ đó $\triangle FCD \sim \triangle FAB$ (g-g), suy ra $\dfrac{FA}{FC} = \dfrac{FB}{FD} = \dfrac{AB}{CD}$. (4)

Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{EBA} = \widehat{ECD}$.

Từ đó $\triangle EAB \sim \triangle EDC$ (g-g), suy ra $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{EA}{ED} = \dfrac{EB}{EC}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{FA}{FC} \Leftrightarrow \dfrac{FC}{EC} = \dfrac{FA}{EB}$.

Mặt khác $EB = AG$ nên $\dfrac{FC}{EC} = \dfrac{FA}{AG}$. (∗∗)

Kết hợp (∗) và (∗∗) ta được $\triangle FCE \sim \triangle FAG$ (c-g-c), suy ra $\dfrac{FG}{FE} = \dfrac{FA}{FC}$. (6)

Từ (4) và (6) ta thu được $\dfrac{FB}{FD} = \dfrac{FG}{FE} \Leftrightarrow FD.FG = FB.FE$.

b) Ta có E và H đối xứng qua AD nên $\widehat{AEF} = \widehat{AHF}$. (7)

Ta có $\triangle FCE \sim \triangle FAG$ (theo chứng minh trên), suy ra $\widehat{AGF} = \widehat{CEF}$. (8)

Mặt khác $\widehat{CEF} + \widehat{AEF} = 180^\circ$. (9)

Từ (7), (8), (9) suy ra $\widehat{AHF} + \widehat{AGF} = 180^\circ$. Do đó tứ giác $AHFG$ nội tiếp.

Câu 6. Nam cắt một tờ giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng, rồi lấy một số miếng nhỏ đó cắt ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng nhỏ hơn và Nam cứ tiếp tục thực hiện việc cắt như thế nhiều lần. Hỏi với việc cắt như vậy, Nam có thể cắt được 2016 miếng lớn, nhỏ hay không? Vì sao?

Lời giải.

Gọi x là số miếng giấy Nam có được sau k lần cắt ($x; k \in \mathbb{N}^*$). Vì lúc đầu Nam có 1 miếng giấy và mỗi lần cắt một miếng giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng nhỏ hơn nên sau mỗi lần cắt, số

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

miếng giấy tăng thêm 3 miếng hoặc 7 miếng, do đó ta có $x \equiv 1 \pmod 3$ hoặc $x \equiv 1 \pmod 7$. Vì $2016 \equiv 0 \pmod 3$ và $2016 \equiv 0 \pmod 7$ nên $x \neq 2016$. Vậy sau một số lần cắt, số miếng giấy Nam có được không thể bằng 2016.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 166

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÒA BÌNH, CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

1. Giải các phương trình sau:
   (a) $3x+5=2x-1$.
   (b) $(x-1)(x-3)=2x-5$.
2. Rút gọn biểu thức sau: $A=\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}$.

Lời giải.

1.
   (a) $3x+5=2x-1 \Leftrightarrow 3x-2x=-1-5 \Leftrightarrow x=-6$.
   Vậy $x=-6$ là nghiệm của phương trình.
   (b) $(x-1)(x-3)=2x-5 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.
   Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=2$ và $x=4$.
2. $A=\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{3(3-\sqrt{3})+3(3+\sqrt{3})}{6}=3$.

Câu 2.

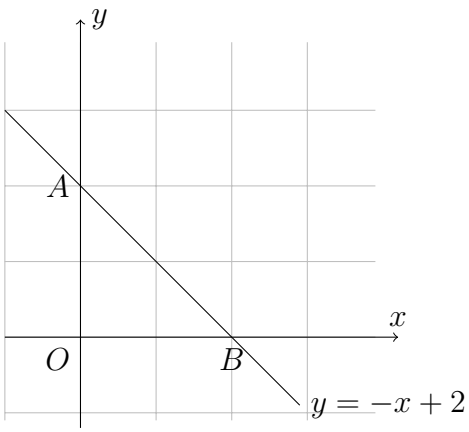
a) Cho đường thẳng $(d): y=ax+b$, tìm a và b để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(4;-2)$ và song song với đường thẳng $(\Delta): y=-x+3$. Khi đó hãy vẽ đường thẳng (d) trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Giải hệ phương trình sau (*không dùng máy tính bỏ túi*): $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ x+3y+6=0 \end{cases}$.

c) Cho phương trình: $x^2-2(m+3)x+2m+14=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $2x_1+x_2=12$.

Lời giải.

a) (d) song song với (Δ) suy ra $a=-1$.
$(d): y=-x+b$ đi qua điểm $M(4;-2)$ nên thay $x=4; y=-2$ vào công thức ta được $-2=-4+b \Leftrightarrow b=2$.
Vậy $(d): y=-x+2$.
Vẽ đồ thị $(d): y=-x+2$: Đi qua 2 điểm $A(0;2); B(2;0)$.



b) $\begin{cases}2x-y+5=0\\x+3y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x+5\\x+3(2x+5)+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x+5\\7x+21=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x+5\\x=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\x=-3\end{cases}$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ duy nhất là $(-3;-1)$.

c) Phương trình có nghiệm khi:
$\Delta=(m+3)^2-(2m+14)=m^2+4m-5\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq 1\\m\leq -5\end{array}\right.$.
Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases}x-1+x_2=2m+6 & (1)\\x_1.x_2=2m+14. & (2)\end{cases}$
Mà ta lại có $2x_1+x_2=12$. (3)
Kết hợp (1) và (3) ta có $x_1=6-2m, x_2=4m$ thay vào (2) ta được:
$4m^2-11m+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}m=1 & \text{(thỏa mãn)}\\m=\dfrac{7}{4} & \text{(thỏa mãn)}.\end{array}\right.$
Vậy $m=1$ hoặc $m=\dfrac{7}{4}$.

Câu 3. Một người đi từ A đến B trong một khoảng thời gian và vận tốc dự định. Nếu người đó đi nhanh hơn dự định trong mỗi giờ là 9 km thì sẽ đến đích sớm hơn dự định là 1 giờ. Tính vận tốc dự định và khoảng thời gian dự định đi của người đó.

Lời giải.

Gọi vận tốc dự định là x km/h. (ĐK: $x>6$).
Gọi thời gian dự định là y giờ. (ĐK: $y>1$).
Quãng đường AB dài: xy km.
Nếu người đó đi nhanh hơn dự định 9 km/h thì đến đích sớm hơn 1 giờ nên ta có phương trình

$$(x+9)(y-1)=xy \Leftrightarrow -x+9y=9$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Nếu người đó đi chậm hơn dự định 6 km/h thì đến đích sớm hơn 1 giờ nên ta có phương trình:

$$(x-6)(y+1)=xy \Leftrightarrow x-6y=6$$

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} -x+9y=9 \\ x-6y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=36 \\ y=5 \end{cases}$ (thỏa mãn).

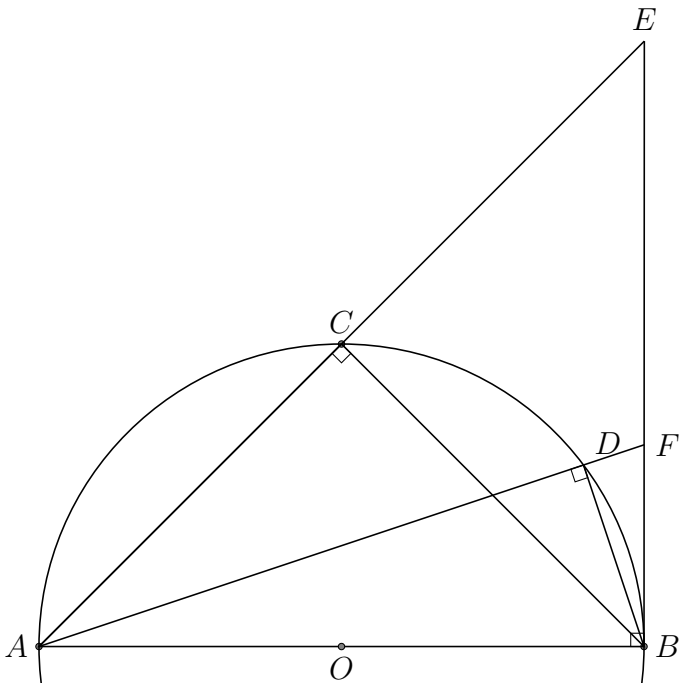
Vậy vận tốc dự định của người đó là 36 km/h. Thời gian dự định là 5 giờ.

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ có Bx là tiếp tuyến với nửa đường tròn và C là điểm chính giữa của cung AB. Lấy điểm D tùy ý trên cung BC (D khác C,D khác B). Các tia AC, AD cắt tia Bx theo thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh rằng: $FB^2=FD.FA$.

b) Chứng minh rằng: Tứ giác $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Khi AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, hãy tính diện tích của tứ giác $CDEF$ theo R.



Lời giải.

a) $Bx \perp AB$ (Tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{ABF}=90^\circ$
mà $\widehat{ADB}=90^c irc$ (Vì góc nội tiếp chắc nửa đường tròn) $\Rightarrow BD \perp FA$.
Trong tam giác ABF vuông tại B, có BD là đường cao, ta có: $FB^2=FD.FA$.

b) Ta có $\widehat{CDA}=\widehat{CBA}$ (vì là góc nội tiếp cùng chắn cung AC)
$\widehat{FEC}=\widehat{CBA}$ (vì cùng phụ với $\widehat{EBC}$)
$\Rightarrow \widehat{CEF}=\widehat{CDA}$.
$\widehat{CDA}+\widehat{CDF}=180^\circ \Rightarrow \widehat{CDF}+\widehat{CEF}=180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

c) Ta có $\triangle ADC \sim \triangle AEF(g.g) \Rightarrow \dfrac{S_{ADC}}{S_{AEF}}=\left(\dfrac{AC}{AF}\right)^2$; $\widehat{CAB}=45^\circ \Rightarrow AC=R\sqrt{2}$.
$\triangle ABE$ vuông cân tại B nên $AB=BE \Rightarrow AE=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}BE=2\sqrt{2}R$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

AF là đường phân giác trong của tam giác ABE nen ta có
$\dfrac{FE}{FB}=\dfrac{AE}{AB}=\sqrt{2}\Rightarrow FE=\sqrt{2}BF$ mà $BF+FE=2R\Rightarrow BF=\dfrac{2R}{1+\sqrt{2}};FE=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$
$S_{AEF}=\dfrac{1}{2}FE.AB=\dfrac{2\sqrt{2}R^2}{1+\sqrt{2}}.$
Tính được $AF=\dfrac{2R\sqrt{4+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}\Rightarrow\dfrac{S_{ADC}}{S_{AEF}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2(4+2\sqrt{2})}\Rightarrow S_{ADC}=\dfrac{1}{2}R^2.$
$\Rightarrow S_{CDEF}=S_{AEF}-S_{ADC}=\dfrac{(3\sqrt{2}-1)R^2}{2(1+\sqrt{2})}.$

Câu 5. Cho x,y là các số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2}}\geq\dfrac{x+y}{2}.$

Lời giải.
$\sqrt[3]{\dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2}}\geq\dfrac{x+y}{2}\Leftrightarrow\dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2}\geq\dfrac{(x+y)^3}{8}.$
Ta có $x^2+y^2\geq\dfrac{(x+y)^2}{2}\Rightarrow x^4+y^4\geq\dfrac{(x+y)^4}{8}\Rightarrow\dfrac{x^4+y^4}{x+y}\geq\dfrac{(x+y)^3}{8}(x+y>0).$ (1)
Xét biểu thức:
$(x^5+y^5)(x+y)-(x^4+y^4)(x^2+y^2)=x^5y+y^5x-x^4y^2-y^4x^2$
$=xy(x-y)^2(x^2+xy+y^2)=xy(x-y)^2\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2\right]\geq 0,\forall x,y>0$
$\Rightarrow\dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2}\geq\dfrac{x^4+y^4}{x+y}.$ (2)
Từ $(1);(2)\Rightarrow\dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2}\geq\dfrac{(x+y)^3}{8}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 167

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HÒA BÌNH, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Rút gọn các biểu thức sau:
$A = \sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$; $B = \dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} + \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

b) Giải phương trình sau: $3x^4+5x^2-2=0$.

Lời giải.

a) $A = \sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+3} = \sqrt{9} = 3$.
$B = \dfrac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} + \dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y} = 2\sqrt{x}$.

b) Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Thay vào phương trình đã cho ta được:
$$3t^2+5t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-2 & \text{(loại)} \\ t=\dfrac{1}{3} & \text{(nhận)}. \end{array}\right.$$
Vậy $x^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 2.

a) Chứng minh rằng nếu a và b là các số tự nhiên lẻ thì a^2+b^2 không phải là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^2+xy-x-2y-5=0$.

c) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} + \dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y} = 3 \\ 6\sqrt{x} = y+9. \end{cases}$

Lời giải.

a) Do a và b là các số tự nhiên lẻ nên ta đặt $a = 2k+1$, $b = 2\ell+1$, với k, $\ell \in \mathbb{N}$.
Khi đó ta có $a^2+b^2 = (2k+1)^2+(2\ell+1)^2 = 4(k^2+\ell^2+k+\ell)+2$.
Từ đó ta có a^2+b^2 là số chẵn và không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

b) Xét phương trình $x^2+xy-x-2y-5=0$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow y(x-2)=-x^2+x+5 \Leftrightarrow y=\dfrac{-x^2+x+5}{x-2}$ (vì $x=2$ không thỏa mãn (1)).

Khi đó ta có:

$$y=\frac{-x^2+x+5}{x-2}=\frac{-x^2+x+2}{x-2}+\frac{3}{x-2}=-x-1+\frac{3}{x-2}.$$

Do $x,\ y\in\mathbb{Z}$ nên $x-2$ là ước của 3, tức là:

$$\begin{bmatrix} x-2=3 \\ x-2=1 \\ x-2=-1 \\ x-2=-3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=3 & (\Rightarrow y=-1) \\ x=5 & (\Rightarrow y=-5) \\ x=1 & (\Rightarrow y=-5) \\ x=-1 & (\Rightarrow y=-1). \end{bmatrix}$$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là: $(3;-1),(5;-5),(1;-5),(-1;-1)$.

c) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y}=3 & (1) \\ 6\sqrt{x}=y+9. & (2) \end{cases}$

Điều kiện $x>0,\ y>0$. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}=3 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}=3 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{xy}-2+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}=3. \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $t=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}$. Do $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ nên $t\geq 2$. Khi đó (3) trở thành:

$$t^2-2+\frac{2}{t}=3\Leftrightarrow t^3-5t+2=0\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t-1)=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=2 \\ t^2+2t-1=0. \quad (*) \end{bmatrix}$$

Do $t\geq 2$ nên $t^2+2t-1>0$, vậy $(*)$ vô nghiệm. Do đó $t=2$, hay:

$$x+y=2\sqrt{xy}\Leftrightarrow x=y.$$

Khi đó: $(2)\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=3 \\ y=3. \end{cases}$

Câu 3. Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24km. Cùng lúc đó một bè nứa cũng trôi từ A đến B với vận tốc dòng nước là 4km/h. Khi đến B, ca nô quay lại ngay và gặp bè nứa tại địa điểm C cách A là 8km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Lời giải.

Gọi vận tốc thực của ca nô là $x$km/h, $x>4$.

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x+4$. Thời gian ca nô xuôi dòng là $\dfrac{24}{x+4}$.

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là $x-4$. Thời gian ca nô ngược dòng là từ B đến C là $\dfrac{16}{x-4}$.

Thời gian mà bè đã trôi là $\dfrac{8}{4}=2$h. Vậy ta có $\dfrac{24}{x+4}+\dfrac{16}{x-4}=2\Leftrightarrow x^2-20x=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=20 \end{bmatrix}$.

Vậy vận tốc ca nô là 20km/h.

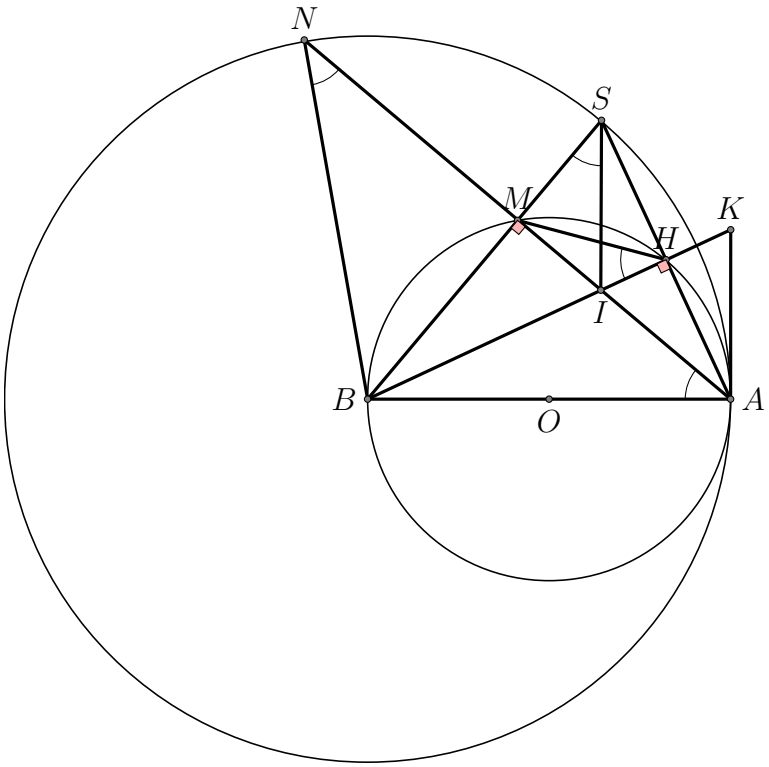
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Một điểm M nằm trên cung AB, M khác A và B. Gọi H là điểm chính giữa của cung AM. Tia BH cắt AM tại I và cắt tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn (O) tại K. Các tia AH, BM cắt nhau tại S.

a) Chứng minh rằng điểm S nằm trên một đường tròn cố định.

b) Kéo dài AM cắt đường tròn (B, BA) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh tứ giác $BISN$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BSA} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{HM}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{HA}\right) = \widehat{AKB}$.
Mặt khác ta có: $\widehat{AKB} = \widehat{SAB}$ vì cùng phụ với góc $\widehat{KAH}$.
Do đó $\widehat{ASB} = \widehat{SAB}$. Vậy $\triangle SAB$ cân tại B.
Suy ra $SB = AB$ hay S nằm trên đường tròn tâm B, bán kính BA.

b) Ta có tứ giác $SHIM$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BSI} = \widehat{MHB}$. Mặt khác $\widehat{MHB} = \widehat{MAB}$ và $\widehat{MAB} = \widehat{BNI}$ nên $\widehat{BSI} = \widehat{BNI}$.
Vậy tứ giác $BISN$ là tứ giác nội tiếp.

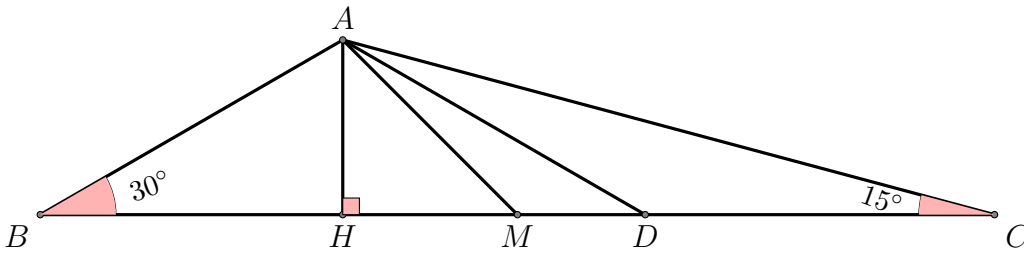
Câu 5.

a) Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 15°$, đường trung tuyến AM. Tính số đo của góc $\widehat{AMB}$.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.
Chứng minh rằng $\dfrac{a^3 + ab^2}{a^2 + b + b^2} + \dfrac{b^3 + bc^2}{b^2 + c + c^2} + \dfrac{c^3 + ca^2}{c^2 + a + a^2} \geq 2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.



a) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.
Đặt $AH = a$. Khi đó $AB = 2a$ và $BH = a\sqrt{3}$.
Lấy D đối xứng với B qua H, suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 15^\circ$. Khi đó $DC = DA = AB = 2a$.
Ta có $BC = BH + DH + DC = 2a + 2a\sqrt{3}$. Từ đó $BM = \dfrac{BC}{2} = a + a\sqrt{3}$. Suy ra $HM = BM - BH = a = AH$, do đó $\triangle AHM$ vuông cân tại H. Vậy $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\left(a - \frac{a^3 + ab^2}{a^2 + b + b^2}\right) + \left(b - \frac{b^3 + bc^2}{b^2 + c + c^2}\right) + \left(c - \frac{c^3 + ca^2}{c^2 + a + a^2}\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a^2 + b + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a + a^2} \le 1.$$

Ta có $\dfrac{ab}{a^2 + b + b^2} \le \dfrac{ab}{3\sqrt[3]{a^2b^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{3} \le \dfrac{a + 1 + 1}{9} = \dfrac{a + 2}{9}$.

Vậy $\dfrac{ab}{a^2 + b + b^2} + \dfrac{bc}{b^2 + c + c^2} + \dfrac{ca}{c^2 + a + a^2} \le \dfrac{a + 2 + b + 2 + c + 2}{9} = 1$ (đpcm).

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 168

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HẬU GIANG, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, với $x>0$ và $x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị x để $P^2=P$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để $\dfrac{16}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Ta có: $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2+4\sqrt{x}(x-1)}{x-1}=\dfrac{4x\sqrt{x}}{x-1}$.

Ta có: $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

nên $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{4x\sqrt{x}}{x-1}.\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}=4x$.

b) $P^2=P\Leftrightarrow 16x^2=4x\Leftrightarrow 16x^2-4x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ hoặc $x=0$ (loại).

c) $\dfrac{16}{P}=\dfrac{4}{x}$ nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $x=2$ hoặc $x=4$.

Câu 2. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(x^2-5x+3)^2+4(x^2-5x-3)+27=0$.

b) $x^2+8x-96=4x\sqrt{2x+1}$.

c) $\begin{cases}(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=\dfrac{25}{4}\\(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Lời giải.

a) $(x^2-5x+3)^2+4(x^2-5x-3)+27=0$

$\Leftrightarrow (x^2-5x+3)^2+4(x^2-5x+3)+3=0$.

Đặt $t=x^2-5x+3$, ta được $t^2+4t+3=0\Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=-3$.

* $t=-1$, ta có $x^2-5x+3=-1\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=4$ hoặc $x=1$.

* $t=-3$, ta có $x^2-5x+3=-3\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=2$.

b) Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Ta có $x^2 + 8x - 96 = 4x\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2.x.2\sqrt{2x+1} + 4(2x+1) = 100$

$\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2x+1})^2 = 100$

$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{2x+1} = 10$ hoặc $\Leftrightarrow x - 2\sqrt{2x+1} = -10$.

Với $x - 2\sqrt{2x+1} = 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = x - 10 \quad (1)$.

Điều kiện $x \geq 10$.

$(1) \Leftrightarrow 4(2x+1) = x^2 - 20x + 100$

$\Leftrightarrow x^2 - 28x + 96 = 0 \Leftrightarrow x = 24$ hoặc $x = 4$ (loại).

Với $x - 2\sqrt{2x+1} = -10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = x + 10 \quad (2)$.

Điều kiện $x \geq -10$.

$(2) \Leftrightarrow 4(2x+1) = x^2 + 20x + 100$

$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 96 = 0$ (Phương trình vô nghiệm).

c) $\begin{cases} (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right) = \dfrac{25}{4} \\ (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2+y^2} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{25}{4} \\ x + \dfrac{1}{y} + y + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} X = x + \dfrac{1}{x} \\ Y = y + \dfrac{1}{y} \end{cases}$

Ta được $\begin{cases} X^2 + Y^2 - 4 = \dfrac{25}{4} \\ X + Y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X+Y)^2 - 2XY = \dfrac{41}{4} \\ X + Y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = -\dfrac{1}{2} \\ XY = -5 \end{cases}$ Ta có: X và Y là nghiệm của phương trình $t^2 + \dfrac{1}{2}t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\begin{cases} X = 2 \\ Y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} X = -\dfrac{5}{2} \\ Y = 2 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} X = 2 \\ Y = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ y + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 + \dfrac{5}{2}y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} X = -\dfrac{5}{2} \\ Y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{5}{2} \\ y + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{5}{2}x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = -5x = 6$.

a) Vẽ đồ thị (P). Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng d.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

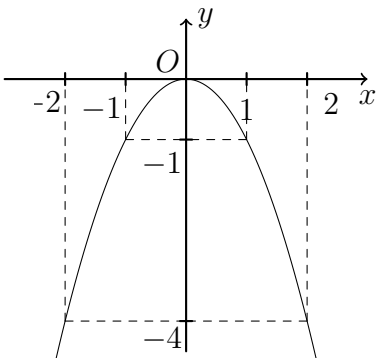
b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng $D: y = mx - 1$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2. Tìm giá trị của m để biểu thức: $T = x_1^2(1 + x_2) + x_2^2(1 + x_1)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Cho một số giá trị : $x = 0 \Rightarrow y = 0; x = \pm 1 \Rightarrow y = -1; x = \pm 2 \Rightarrow y = -4$ Đồ thị
Bảng giá trị giữa x và y:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	-1	0	-1	4

Vẽ đồ thị:



Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 = -5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$.
Vậy, tọa độ giao điểm là $A(2; -4)$ và $B(3; -9)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 = mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$ (*) Ta có: $\Delta = m^2 + 4 > 0$, với mọi m.
Do đó, đường thẳng D luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2.
Khi đó, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1.x_2 = -1 \end{cases}$.
Ta có: $T = x_1^2(1 + x_2) + x_2^2(1 + x_1) = (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2 - 2). = m^2 + m + 2 = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4}$, với mọi m.
$\Rightarrow T_{\min} = \dfrac{7}{4}$ khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$. Tính $xy + yz + xz$ và xyz.

Lời giải.
Ta có $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$
$\Rightarrow xy + yz + xz = \dfrac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \dfrac{36 - 14}{2} = 11.$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta có $(x+y+z)^3=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$
$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2z+6xyz+3y^2z+3xz^2+3yz^2+z^3$
$=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)++3yz(x+y+z)+3zx(x+y+z)-3xyz$
$=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz$
$\Rightarrow xyz=\dfrac{x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+xz)-(x+y+z)^3}{3}=6.$

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC>AB)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BC, D là điểm đối xứng của B qua H, E là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng AC, K là trung điểm của đoạn thẳng CD. Gọi M là trung điểm của cạnh AD, G là trọng tâm của tam giác ABM, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

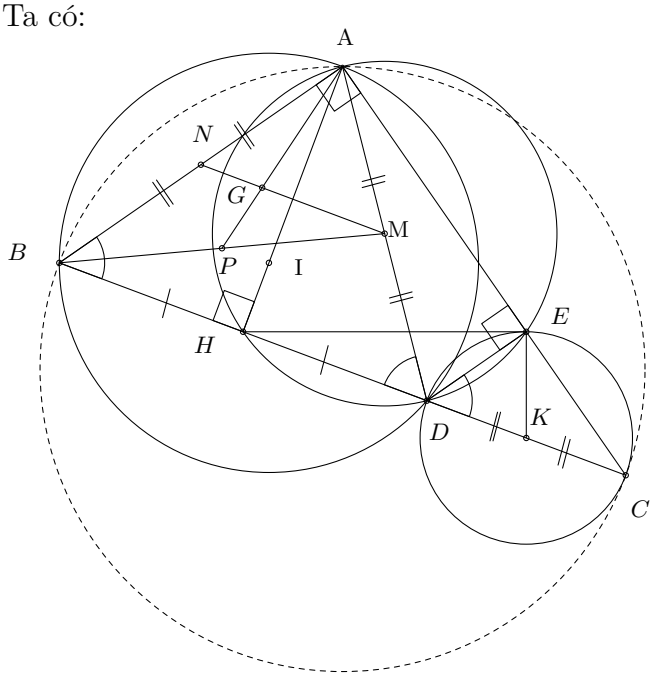
a) Chứng minh tứ giác $AHDE$ nội tiếp. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHDE$.

b) Chứng minh HE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEC.

c) Chứng minh IG vuông góc với BM.

Lời giải.

Ta có:



a) Ta có $\widehat{AHD}=\widehat{AED}=90^\circ$ Suy ra tứ giác $AHDE$ nội tiếp.
Vì $\widehat{AHD}=90^\circ$ và M là trung điểm của $AD\Rightarrow MA=MD=MH$ (1)
Vì $\widehat{AED}=90^\circ$ và M là trung điểm của $AD\Rightarrow MA=MD=ME$ (2)
Từ (1) và (2), suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHDE$.

b) Vì $HB=HD$ và $AH\perp BD$ nên tam giác ABD cân tại A. Do đó $\widehat{ABD}=\widehat{ADB}$.
Do $AB\perp AC$ và $DE\perp AC\Rightarrow AB\parallel DE\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{EDC}=\widehat{ADB}$.
Ta có $\widehat{ECD}=90^\circ-\widehat{EDC}=90^\circ-\widehat{ADH}$.(3)
Do tứ giác $AHDE$ nội tiếp nên $\widehat{HED}=\widehat{HAD}$
Ta có $\widehat{HED}=\widehat{HAD}=90^0-\widehat{ADH}$.(4)
Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{HED}=\widehat{ECD}$ nên $HE\perp EK$nên HE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEC.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

c) Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AB, BM; G là giao điểm của AP và MN. Gọi Q là giao điểm BM và AI.

Vì G là trọng tâm tam giác ABM nên $\dfrac{MG}{MN} = \dfrac{2}{3}$ (5)

Vì Q là trọng tâm tam giác ABD nên $\dfrac{MQ}{MB} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{2}{3}$ (6)

Từ (5) và (6), suy ra $\dfrac{MG}{MN} = \dfrac{MQ}{MP} \Rightarrow GQ//NP$ (7)

Mà $NP \parallel AM$(do NP là đường trung bình của tam giác ABM) nên $NP//AD$ (8)

Từ (7) và (8), suy ra $GQ//AD$ (9)

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD nên $IM \perp AD$ (10)

Từ (9) và (10), suy ra $IM \perp GQ$ (11)

Vì $MN \parallel BD$ và $AI \perp BD$ nên $MN \perp AI \Rightarrow MN \perp IQ$ hay $MG \perp IQ$ (12).

Từ (11) và (12), suy ra Q là trực tâm của tam giác IMG.

Do đó $IG \perp MQ$ hay $IG \perp BM$ (đpcm).

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 169

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HÀ TĨNH, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $c^2 + 2(ab - bc - ca) = 0, b \neq c, a + b \neq c$. Chứng minh rằng
$$\frac{2a^2 - 2ac + c^2}{2b^2 - 2bc + c^2} = \frac{a - c}{b - c}.$$

Lời giải.

Ta có
$$c^2 + 2(ab - bc - ca) = 0 \Leftrightarrow a^2 = a^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac = (a - c)(a - c + 2b)$$
Suy ra
$$2a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2 + a^2 = (a - c)^2 + (a - c)(a - c + 2b) = 2(a - c)(a + b - c)$$
Tương tự thì $2b^2 - 2bc + c^2 = 2(b - c)(a + b - c)$.
Vậy
$$\frac{2a^2 - 2ac + c^2}{2b^2 - 2bc + c^2} = \frac{2(a - c)(a + b - c)}{2(b - c)(a + b - c)} = \frac{a - c}{b - c}$$

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{3x - 1} - \sqrt{x + 1} = 3x^2 - 2x - 1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x + \dfrac{3}{x + y} = 13 \\ 12\left(x^2 + xy + y^2\right) + \dfrac{9}{(x + y)^2} = 85. \end{cases}$

Giải phương trình

Lời giải.

a) Với điều kiện $x \geq \dfrac{1}{3}$ thì phương trình đã cho tương đương với
$$\frac{2(x - 1)}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} = (x - 1)(3x + 1)$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(\frac{2}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} - 3x - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} - 3x - 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$
Do $x \geq \dfrac{1}{3}$ nên $\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1} > 1 \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} < 2$.
Mặt khác $3x + 1 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} - 3x - 1 < 0$. Do đó, phương trình (1) vô

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

b) Với điều kiện $x+y\neq 0$ thì hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}3(x-y)+3(x+y)+\dfrac{3}{x+y}=13\\ 9(x+y)^2+3(x-y)^2+\dfrac{9}{(x+y)^2}=85.\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}x+y=a\neq 0\\ x-y=b\end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases}3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)=13-3b \quad (1)\\ 9\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=103-3b^2. \quad (2)\end{cases}$

Từ $(1),(2)$ suy ra $(13-3b)^2=103-3b^2\Leftrightarrow 2b^2-13b+11=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=1\\ b=\dfrac{11}{2}.\end{array}\right.$

Với $b=\dfrac{11}{2}$, thay vào (1) ta có $6a^2+7a+6=0$ (vô nghiệm).

Với $b=1$, thay vào (1) ta có $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow 3a^2-10a+3=0\Leftrightarrow a=3$ hoặc $a=\dfrac{1}{3}$.

Với $\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}$ thì $\begin{cases}x+y=3\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1.\end{cases}$

Với $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=1\end{cases}$ thì $\begin{cases}x+y=\dfrac{1}{3}\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

Thử lại ta thấy hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;1)$ và $(x;y)=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 3.

a) Tìm các bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn $\begin{cases}x+y-z=0\\ x^3+y^3-z^2=0.\end{cases}$

b) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=2016$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2016b+ac}}+\frac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases}x+y-z=0\\ x^3+y^3-z^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=z\\ x^3+y^3=z^2\end{cases}\Rightarrow (x^3+y^3)=(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)-(x+y)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2-x-y=0 \text{ (do } x+y>0)$$

$$\Leftrightarrow x^2-x(y+1)+y^2-y=0.(*)$$

Coi $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn x có $\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y)$. Do $(*)$ có nghiệm nên $\Delta\geq 0\Leftrightarrow (y-1)^2\leq\dfrac{4}{3}$, mặt khác $y\in\mathbb{N}^*$ nên $(y-1)^2=0$ hoặc $(y-1)^2=1$, giải ra và kết

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

hợp điều kiện nguyên dương của y ta được $y=1$ hoặc $y=2$.

$\diamond$ Với $y=1$ thay vào $(*)$ được $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow x=2$ (do $x\in\mathbb{N}^*$) $\Rightarrow z=3$.

$\diamond$ Với $y=2$, thay vào $(*)$ được $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$.

Khi $x=1$ thì $z=3$ và khi $x=2$ thì $z=4$.

Thử lại ta được các bộ số $(x;y;z)$ thỏa mãn là $(1;2;3),(2;1;3),(2;2;4)$.

b) Ta có $a+\sqrt{2016a+bc}=a+\sqrt{(a+b)(a+c)}$.

Áp dụng bất đẳng thức **Bunyakovsky** ta được

$$(a+b)(a+c)=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\right].\left[\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}\right)^2\right]\geq\left(\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\right)^2$$

Suy ra

$$a+\sqrt{(a+b)(a+c)}\geq a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}\leq\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b}{b+\sqrt{2016b+ac}}\leq\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

$$\frac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}\leq\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên suy ra $P\leq\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=672$.

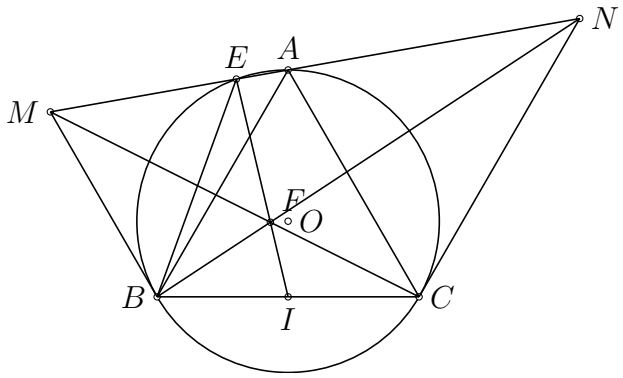
Vậy $\max P=1$.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm E thay đổi trên cung nhỏ $AB,(E\neq A,E\neq B)$. Từ B,C lần lượt kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O), các tiếp tuyến này cắt đường thẳng AE theo thứ tự tại M,N. Gọi F là giao điểm của BN và CM.

a) Chứng minh $MB.NC=BC^2$

b) Khi E thay đổi trên cung nhỏ AB, chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Ta có MB là tiếp tuyến của đường tròn (O), suy ra $MB \perp OB$. Mặt khác $\triangle ABC$ đều nên $AC \perp OB \Rightarrow MB \parallel AC \Rightarrow \overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{NAC}$. Tương tự, $\overset{\frown}{MAB} = \overset{\frown}{ANC}$. Do đó $\triangle ABM \backsim \triangle NCA$ (g.g). Suy ra $\dfrac{MB}{BA} = \dfrac{AC}{CN} \Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{BC}{CN} \Rightarrow MB.CN = BC^2$.

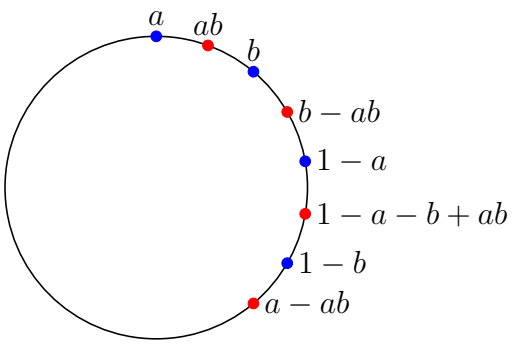
b) Ta có $BM \parallel AC \Rightarrow \overset{\frown}{MBC} + \overset{\frown}{ACB} = 180^\circ$, do $\overset{\frown}{ACB} = 60^\circ$ nên $\overset{\frown}{MBC} = 120^\circ$.
Tương tự, $\overset{\frown}{BCN} = 120^\circ$. Do đó $\overset{\frown}{MBC} = \overset{\frown}{BCN}$.
Theo câu trên thì $\dfrac{MB}{BC} = \dfrac{BC}{CN}$ nên $\triangle BCM \backsim \triangle CNB$ (c.g.c), suy ra $\overset{\frown}{FBC} = \overset{\frown}{FMB}$.
Lại có $\overset{\frown}{MFB} = \overset{\frown}{FBC} + \overset{\frown}{FCB}$ mà $\overset{\frown}{FBC} = \overset{\frown}{FMB}$ nên
$$\overset{\frown}{MFB} = \overset{\frown}{FMB} + \overset{\frown}{FCB} = 180^\circ - \overset{\frown}{MBC} = 60^\circ.$$
Mặt khác $\overset{\frown}{MEB} = \overset{\frown}{ACB} = 60^\circ$ (vì tứ giác $ACBE$ nội tiếp). Do đó $\overset{\frown}{MFB} = \overset{\frown}{MEB} \Rightarrow$ $MEFB$ là tứ giác nội tiếp.
Gọi $I = EF \cap BC$.
Vì $\overset{\frown}{FBI} = \overset{\frown}{FMB}$ nên IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MFB hay IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MEFB \Rightarrow IB^2 = IF.IE$. (1)
Tương tự, tứ giác $EFCN$ nội tiếp, đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFCN$. Suy ra $IC^2 = IF.IE$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $IB = IC$. Vậy đường thẳng EF đi qua điểm I cố định.

Câu 5. Trên một đường tròn lấy 1000 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Mỗi điểm được gán với một giá trị là một số thực khác 0, giá trị của mỗi điểm màu xanh bằng tổng giá trị của hai điểm màu đỏ kề với nó. Giá trị của mỗi điểm màu đỏ bằng tích giá trị của hai điểm màu xanh kề với nó. Tính tổng giá trị của 1000 điểm trên.

Lời giải.

Gọi a là giá trị của một điểm màu xanh ($a \neq 0$), khi đó giá trị của điểm màu đỏ đứng cạnh nó theo chiều kim đồng hồ được viết dưới dạng ab (b là giá trị của điểm màu xanh) với $b \neq 0$ như hình bên. Theo quy luật điểm màu xanh và màu đỏ, ta suy ra giá trị của 6 điểm tiếp theo theo chiều kim đồng hồ thứ tự sẽ là:

$$b, b-ab, 1-a, 1-a-b+ab, -b, a-ab.$$



Khi đó, tổng của 8 số trên là
$$a + ab + b + b - ab + 1 - a + 1 - a - b + ab + 1 - b + a - ab = 3$$
Mặt khác, theo quy luật đó, giá trị của điểm thứ 9 theo chiều kim đồng hồ là a. Như vậy, 1000 số trên được chia thành 125 nhóm, mỗi nhóm gồm 8 số theo quy luật trên. Suy ra tổng giá trị của 1000 điểm trên bằng $125.3 = 375$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 170

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÀ NỘI, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y - 4x = 0 \\ 4x^2 - 4xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện $x \le 0$; $x \ge 1$.
Phương trình tương đương $(x^2-x)^2-(x^2-x)-\sqrt{2(x^2-x)}=0$. Đặt $t = \sqrt{x^2 - x}$ $(t \ge 0)$.
Ta có

$$t^4 - t^2 - \sqrt{2}t = 0 \Leftrightarrow t(t^3 - t - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

- $t = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ (TM).
- $t = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$ (TM).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-1; 0; 1; 2\}$.

b) Xét $4x^2-4xy^2+y^4-2y+4=0 \Leftrightarrow (2x-y^2)^2+(x-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$.

- Thay $x = 2$, $y = 2$ vào phương trình còn lại ta thấy thỏa mãn.
- Thay $x = 2$, $y = -2$ vào phương trình còn lại ta thấy không thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (2; 2)$.

Câu 2.

a) Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \ne 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \dfrac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \dfrac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$.

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^x.x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

Lời giải.

a) Ta có $a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0 \Rightarrow a+b+c=0$ (do a, b, c khác nhau).
$\Rightarrow \dfrac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}=\dfrac{ab^2}{b^2+(a-c)(a+c)}=\dfrac{ab^2}{b^2-b(a-c)}=\dfrac{ab}{b-a+c}=-\dfrac{b}{2}$.
Tương tự $\dfrac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}=-\dfrac{c}{2}$ và $\dfrac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}=-\dfrac{a}{2} \Rightarrow P=-\dfrac{a+b+c}{2}=0$.

b) Ta có $2^x.x^2=(3y+1)^2+15$.
Do x, $y\in\mathbb{N}$ và $\begin{cases}3y+1\equiv 1(\text{mod }3)\\ 15\equiv 0(\text{mod }3)\end{cases} \Rightarrow (3y+1)^2+15\equiv 1(\text{mod }3)$.
Vì $x\in\mathbb{N}$ nên x^2 là số chính phương $\Rightarrow x^2\equiv 1(\text{mod }3)$ hoặc $x^2\equiv 0(\text{mod }3)$.
Do $2^x.x^2\equiv 1(\text{mod }3)$ nên $x^2\equiv 1(\text{mod }3) \Rightarrow 2^x\equiv 1(\text{mod }3) \Rightarrow x=2k$ $(k\in\mathbb{N})$.
Vậy ta có $2^{2k}.(2k)^2-(3y+1)^2=15 \Leftrightarrow (2^k.2k-3y-1)(2^k.2k+3y+1)=15$. Vì k, $y\in\mathbb{N}$ nên $2^k.2k+3y+1>0 \Rightarrow 2^k.2k-3y-1>0$ nên ta có các trường hợp sau:

- $\begin{cases}2^k.2k+3y+1=15\\ 2^k.2k-3y-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y+1=7\\ 2^k.k=4\end{cases}$ (vô lí).
- $\begin{cases}2^k.2k+3y+1=5\\ 2^k.2k-3y-1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y+1=1\\ 2^k.k=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ k=1\end{cases}$.

Vậy $(x;y)=(2;0)$.

Câu 3.

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng
$$\frac{2a^2}{a+b^2}+\frac{2b^2}{b+c^2}+\frac{2c^2}{c+a^2}\geq a+b+c.$$

b) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số chính phương.

Lời giải.

a) Ta có $3=a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow a+b+c\leq 3$. Vì $a^2-2a+1\geq 0 \Rightarrow a^4+a^2\geq 2a^3$.
Do đó
$$\begin{aligned}&\frac{2a^2}{a+b^2}+\frac{2b^2}{b+c^2}+\frac{2c^2}{c+a^2}=\frac{4a^4}{2a^3+2a^2b^2}+\frac{4b^4}{2b^3+2b^2c^2}+\frac{4c^4}{2c^3+2c^2a^2}\\ &\geq\frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^3+2a^2b^2+2b^3+2b^2c^2+2c^3+2c^2a^2}\\ &\geq\frac{36}{a^4+a^2+b^4+b^2+c^4+c^2++2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}\\ &=\frac{36}{(a^2+b^2+c^2)^2+(a^2+b^2+c^2)}=3\geq a+b+c.\end{aligned}$$

b) Vì $2+2\sqrt{12n^2+1}\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 2\sqrt{12n^2+1}\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{12n^2+1}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{12n^2+1}=m\in\mathbb{Q}$
$\Rightarrow 12n^2=m^2-1\vdots 4 \Rightarrow m=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$.
Ta có $12n^2=(2k+1)^2-1=4k(k+1) \Rightarrow k(k+1)=3n^2\vdots 3 \Rightarrow k\vdots 3$ hoặc $k+1\vdots 3$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

- Xét $k=3p$ $(p\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow 3n^2=3p(3p+1)\Rightarrow n^2=p(3p+1)$.
  Vì $(p,3p+1)=1\Rightarrow\begin{cases}p=a^2\\3p+1=b^2\end{cases}$ (với $a,\,b\in\mathbb{N}^*$).
  Mà $2+2\sqrt{12n^2+1}=2+2m=2+2(2k+1)=4+4k=4(k+1)=4(3p+1)=4b^2$ (đpcm).
- Xét $k=3q-1$ $(q\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow 3n^2=3q(3q-1)\Rightarrow n^2=q(3q-1)$.
  Vì $(q,3q-1)=1\Rightarrow\begin{cases}q=a^2\\3q-1=b^2\end{cases}$ (với $a,\,b\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow b^2=3a^2-1$ (vô lí vì số chính phương chia cho 3 có dư là 0 hoặc 1).

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại P.

a) Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.

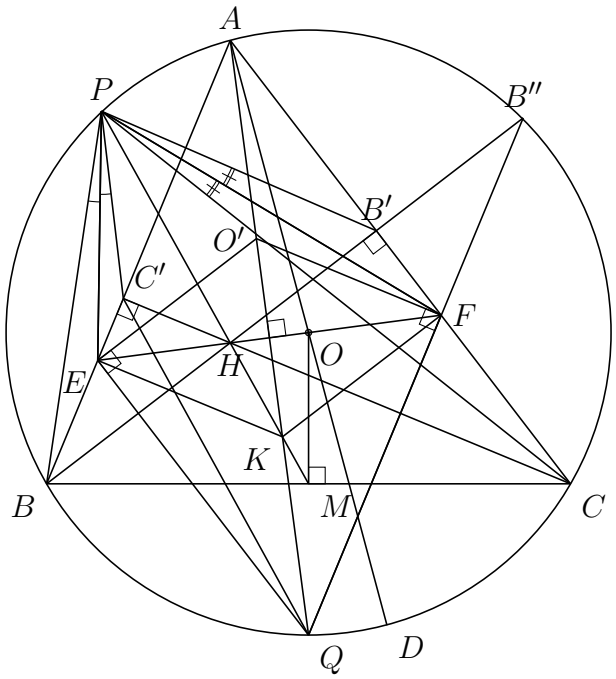
b) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB, AC tại các điểm E, F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và K là giao điểm của HM với AO'.

(a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ là tứ giác nội tiếp.

(b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Lời giải.

a) Giả sử tia AO cắt (O) tại $D\Rightarrow AD$ là đường kính của đường tròn (O)
$\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^\circ\Rightarrow BD\parallel CH$ và $CD\parallel BH\Rightarrow$ tứ giác $HBDC$ là hình bình hành
$\Rightarrow DH$ cắt BC tại trung điểm của mỗi đoạn $\Rightarrow D$, M, H, P thẳng hàng
$\Rightarrow \widehat{APD}=90^\circ$ hay $\widehat{APH}=90^\circ\Rightarrow P$ nằm trên đường tròn đường kính AH.
Lại có $\widehat{AB'H}=\widehat{AC'H}=90^\circ\Rightarrow B'$, C' nằm trên đường tròn đường kính AH
$\Rightarrow A$, P, B', C', H nằm trên đường tròn đường kính $AH\Rightarrow \widehat{AB'P}=\widehat{AC'P}$.
Mà $\widehat{PC'B}+\widehat{PC'A}=90^\circ$ và $\widehat{PB'C}+\widehat{PB'A}=180^\circ$ nên $\widehat{PC'B}=\widehat{PB'C}$.
Xét đường tròn (O) có $\widehat{PCB'}=\widehat{PBC'}$ (cùng chắn cung $\widehat{AP}$) và $\widehat{PC'B}=\widehat{PB'C}$
$\Rightarrow \Delta PB'C\backsim\Delta PC'B$.



b) Vì PE, PF lần lượt là phân giác $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ nên $\begin{cases}\widehat{EPC'}=\dfrac{1}{2}\widehat{BPC'}\\ \widehat{FPB'}=\dfrac{1}{2}\widehat{CPB'}\end{cases}$.

(a) Vì $\Delta BPC' \backsim \Delta CPB' \Rightarrow \widehat{BPC'}=\widehat{CPB'} \Rightarrow \widehat{EPC'}=\widehat{FPB'}$.

Xét tam giác PEC' và tam giác PFB' có $\begin{cases}\widehat{EPC'}=\widehat{FPB'}\\ \widehat{PC'E}=\widehat{PB'F}\end{cases}$

$\Rightarrow \Delta PEC' \backsim \Delta PFB' \Rightarrow \widehat{PEC'}=\widehat{PFB'} \Rightarrow$ tứ giác $APEF$ là tứ giác nội tiếp.

Vì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF nên O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APEF$.

Gọi K' là giao của AO' với $(O') \Rightarrow AK'$ là đường kính của đường tròn $(O') \Rightarrow \widehat{APK'}=90^\circ \Rightarrow K \in PD$ (vì $\widehat{APD}=90^\circ$) $\Rightarrow K$ là giao điểm của PD và AO' hay K' là giao điểm của MH và $AO' \Rightarrow K \equiv K' \Rightarrow K \in (O) \Rightarrow PEKF$ là tứ giác nội tiếp.

(b) Gọi Q là giao điểm của hai tiếp tuyến của đường tròn (O') tại E, F và B'' là giao điểm của BH, QF. Ta có:

$\widehat{B''QA}=90^\circ-\widehat{FO'Q}=90^\circ-\widehat{BAC}=\widehat{B''BA} \Rightarrow ABQB''$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FB''H}=\widehat{BAQ}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=\dfrac{\widehat{CHB'}}{2}=\widehat{FHB''} \Rightarrow B''$ đối xứng với H qua AC.

Do đó B'' nằm trên $(O) \Rightarrow Q$ nằm trên (O).

Câu 5. Cho 2017 số hữu tỷ dương được viết trên một đường tròn. Chứng minh tồn tại hai số được viết cạnh nhau trên đường tròn sao cho khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số mỗi nhóm bằng nhau.

Lời giải.

Ta có thể đưa về bài toán mà 2017 số đã cho là các số nguyên dương, bằng cách quy đồng các số hữu tỷ ta được tử số là các số nguyên dương.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Ta gọi ước chung lớn nhất của 2017 số nguyên dương này là d, ta chia tất cả các số này cho d ta đưa bài toán về việc xét 2017 số nguyên dương mà ước chung lớn nhất của chúng là 1.

- Trường hợp 1: tổng của 2017 số này là lẻ.
  Nếu tất cả các cặp số đứng cạnh nhau là các số chẵn - lẻ (hoặc lẻ - chẵn) thì số cặp số như thế sẽ là một số chẵn, mà 2017 là số lẻ nên sẽ tồn tại hai số chẵn (hoặc hai số lẻ) đứng cạnh nhau. Khi ta bỏ hai số này (có tổng là một số chẵn) thì 2015 số còn lại sẽ có tổng là một số lẻ nên không thể chia 2015 số còn lại thành hai phần mà có tổng bằng nhau.

- Trường hợp 2: tổng của 2017 số này là chẵn $\Rightarrow$ các số này không thể đều chẵn (1).
  Vì ước chung lớn nhất của 2017 số này là 1 nên các số này không thể đều chẵn, do đó tồn tại ít nhất một số là lẻ (2).
  Từ (1) và (2) ta thấy tồn tại một số chẵn và một số lẻ đứng cạnh nhau. Khi bỏ hai số này thì sẽ còn 2015 số có tổng là một số lẻ. Do vậy không thể chia 2015 số còn lại thành hai phần có tổng các số bằng nhau.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 171

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG, V2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{\dfrac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\dfrac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}$, với $a>0$ và $x>0$.

b) Tính giá trị của biểu thức $P=(x-y)^3+3(x-y)(xy+1)$ biết

$$x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}, y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

a) $A=\sqrt{\dfrac{(x-\sqrt{a})^2}{x}}+\sqrt{\dfrac{(x+\sqrt{a})^2}{x}}=\dfrac{|x-\sqrt{a}|+x+\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

Nếu $x\geq\sqrt{a}$ thì $A=\dfrac{x-\sqrt{a}+x+\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}$.

Nếu $0<x<\sqrt{a}$ thì $A=\dfrac{-x+\sqrt{a}+x+\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

b) Ta có $x^3=3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}.(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}})$. Suy ra $x^3=4\sqrt{2}-3x\Leftrightarrow x^3+3x=4\sqrt{2}$ (1). Tương tự ta có $y^3+3y=24\sqrt{2}$ (2). Trừ (1) và (2) vế với vế ta được: $x^3-y^3+3(x-y)=-20\sqrt{2}\Leftrightarrow(x-y)^3+3(x-y)(xy+1)=-20\sqrt{2}$. Vậy $P=-20\sqrt{2}$

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^2+6=4\sqrt{x^3-2x^2+3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\x^2-3xy-y^2=3\end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\leq-1$. Phương trình đã cho tương đương với

$(x^2-3x+3)+3(x+1)=4\sqrt{(x+1)(x^2-3x+3)}$ (1).

Do $x^2-3x+3>0$, nên

$(1)\Leftrightarrow1+\dfrac{3(x+1)}{x^2-3x+3}=4\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-3x+3}}$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-3x+3}}$, $t\geq0$. Phương trình trở thành

$1+3t=4t^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta có $x=2\pm\sqrt{2}$.

Với $t=\dfrac{1}{3}$, ta có $x=6\pm\sqrt{42}$.

b) $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1(1)\\ x^2-3xy-y^2=3(2)\end{cases}$.

Do $\sqrt{y^2+1}-y\neq 0$ với mọi y, nên nhân hai vế của (1) với $\sqrt{y^2+1}-y$ ta được

$\Leftrightarrow\ x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}$

$\Leftrightarrow\ x+y+1+\dfrac{(x+1)^2-y^2}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0$

$\Leftrightarrow\ (x+y+1)\left(1+\dfrac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)$

$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x+y+1=0\\ \sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)+\sqrt{y^2+1}-y=0(3)\end{array}\right.$

Do $\sqrt{(x+1)^2+1}\geq -x-1$ với mọi x và $\sqrt{y^2+1}\geq y$ với mọi y nên (3) vô nghiệm.

Với $y=-x-1$ thay vào (2) ta được $x=1\Rightarrow y=-2$ hoặc $x=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$.

Câu 3.

a) Tìm dạng tổng quát của số nguyên dương n biết $M=n.4^n+3^n$ chia hết cho 7.

b) Tìm các cặp số $(x;y)$ nguyên dương thoả mãn

$$(x^2+4y^2+28)^2-17(x^4+y^4)=238y^2+833.$$

Lời giải.

a)

- $n=2k$ (k nguyên dương): $M=2k.16^k+9^k$. Do $16^k,9^k$ có cùng số dư với 2^k khi chia cho 7, nên M cùng dư với $2k.2^k+2^k=(2k+1)2^k$ khi chia cho 7. Do đó, $M\vdots 7\Leftrightarrow 2k+1\vdots 7\Leftrightarrow k=7q+3$,

  suy ra $n=14q+6$ ($q\in\mathbb{N}$).

- $n=2k+1$ (k nguyên dương): $M=4(2k+1).16^k+3.9^k$ cùng dư với $(k+4).2^k+3.2^k=(k+7)2^k$ khi chia cho 7. Do đó, $M\vdots 7\Leftrightarrow k+7\vdots 7\Leftrightarrow k=7p$,

  suy ra $n=14p+1$ ($n=14p+1.$)

Vậy $n=14q+6$ hoặc $n=14p+1$ ($p,q\in\mathbb{N}.$)

b)

$(x^2+4y^2+28)^2-17(x^4+y^4)=238y^2+833$

$\Leftrightarrow\ [x^2+4(y^2+7)]^2=17[x^4+(y^2+7)^2]$

$\Leftrightarrow\ [4x^2-(y^2+7)]^2=0\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0$

$\Leftrightarrow\ (2x+y)(2x-7)=7(1)$

Vì $x,y\in\mathbb{N}^*$ nên $2x+y>2x-y$ và $2x+y>0$. Từ (1) suy ra $\begin{cases}2x+y=7\\ 2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính BC, A là điểm di chuyển trên đường tròn (O) (A khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC tại H. M là điểm đối xứng của điểm A qua điểm B.

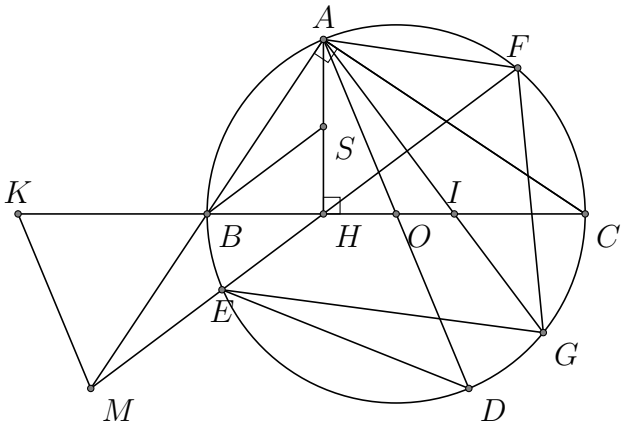
a) Chứng minh điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Đường thẳng MH cắt (O) tại E và F (E nằm giữa M và F). Gọi I là trung điểm của HC, đường thẳng AI cắt (O) tại G (G khác A). Chứng minh $AF^2+FG^2+GE^2+EA^2=2BC^2$

c) Gọi P là hình chiếu vuông góc của H lên AB. Tìm vị trí của điểm A sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



a) Lấy K là điểm đối xứng của O qua B, vì B và O cố định nên K cố định. Tứ giác $OAKM$ là hình bình hành nên $KM=OA$. $OA=\dfrac{BC}{2}$ không đổi. Do đó, M nằm trên đường tròn tâm K, bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

b)

Xét tam giác AHB và tam giác CHA có $\widehat{BHC}=\widehat{BHA}=90^\circ$, $\widehat{BAH}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$). Suy ra tam giác AHB đồng dạng với tam giác CHA. Gọi S là trung điểm của AH, I là trung điểm của HC nên tam giác ABS đồng dạng với tam giác CAI, suy ra $\widehat{ABS}=\widehat{CAI}$.

Ta lại có BS là đường trung bình của tam giác AMH, nên

$$BS\parallel MH\Rightarrow\widehat{ABS}=\widehat{AMH}\Rightarrow\widehat{AMH}=\widehat{CAI}.$$

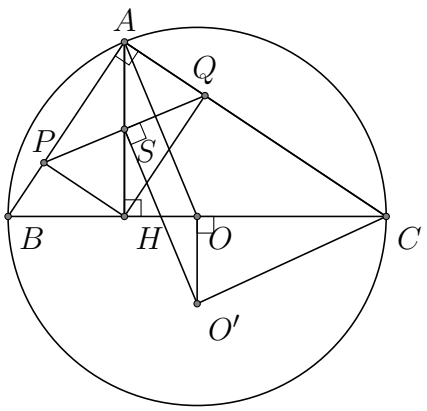
Mặt khác $\widehat{CAI}.+\widehat{MAI}=90^\circ$, hay $AI\perp MF$

Xét tứ giác nội tiếp $AEGF$ nội tiếp (O) có $AG\perp EF$

Kẻ đường kính AD, do $GD\perp AG$ và $EF\perp AG$ nên $EF\parallel GD$, do đó tứ giác nội tiếp $EFGD$ là hình thang cân, suy ra $FG=ED\Rightarrow AE^2+FG^2=AE^2+ED^2=AD^2=BC^2$.

Chứng minh tương tự ta có $AF^2+EG^2=BC^2$. Vậy $AF^2+FG^2+GE^2+EA^2=2BC^2$.

c)



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Gọi Q là hình chiếu của H trên AC. Khi đó, tứ giác $APHQ$ là hình chữ nhật (S là tâm). Do đó $\widehat{AQP} = \widehat{AHP} = \widehat{ABC}$, nên tứ giác $BPQC$ nội tiếp

Đường trung trực của các đoạn thẳng PQ, BC, QC cắt nhau tại O' thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP. Ta có $OO' \parallel AH$ vì cùng vuông góc với BC. $OA \perp PQ$ và $O'S \perp PQ$, nên $O'S // OA$, do đó tứ giác $ASO'O$ là hình bình hành. Từ đó ta nhận được $OO' = AS = \dfrac{AH}{2}$.

Tam giác $OO'S$ vuông tại O nên $O'C = \sqrt{OC^2 + \dfrac{AH^2}{4}}$. Do OC không đổi nên $O'C$ lớn nhất khi và chỉ khi A nằm chính giữa cung BC.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = 14(a^2+b^2+c^2) + \frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \\ &= a^3+b^3+c^3+ab^2+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$a^3+ab^2 \geq 2a^2b; b^3+bc^2 \geq 2b^2c; c^3+ca^2 \geq 2c^2a.$$

Suy ra

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3(a^2b+b^2c+c^2a).$$

Do đó $P \geq 14(a^2+b^2+c^2) + \dfrac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$.

Đặt $t = a^2+b^2+c^2$. $\left(t \geq \dfrac{1}{3}.\right)$

Khi đó $P \geq 14t + \dfrac{3(1-t)}{2t} = \dfrac{t}{2} + \dfrac{27t}{2} + \dfrac{3}{2t} - \dfrac{3}{2} \geq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} + 2\sqrt{\dfrac{27t}{2}\dfrac{3}{2t}} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{23}{3}$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 172

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐỒNG THÁP, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{2}{\sqrt{xy}}:\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)^2-\dfrac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$ (với $x,y>0;x\neq y$).

b) Giải phương trình $(x-2)^4+(x-3)^4=1$.

Lời giải.

a) Ta có

$$P=\frac{2}{\sqrt{xy}}\cdot\frac{xy}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}-\frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\frac{2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}-\frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$$
$$=-\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=-1.$$

b) Đặt $t=x-2\Leftrightarrow x=t+2$ thế vào phương trình đã cho ta được:

$t^4+(t-1)^4=1\Leftrightarrow 2t^4-4t^3+6t^2-4t=0\Leftrightarrow t(t-1)(t^2-t+2)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&t=0\\&t-1=0\\&t^2-t+2=0\text{ (vô nghiệm).}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=2\\&x=3.\end{aligned}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=2,x=3$.

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{2}\\y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3}.\end{cases}$

b) Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho đường thẳng d: $y=mx+n$ (m,n là tham số) và parabol (P): $y=2x^2$. Trên đồ thị (P) lấy hai điểm M,N có hoành độ tương ứng là 1 và 2. Xác định các giá trị m,n để đường thẳng d tiếp xúc với parabol (P) và song song với đường thẳng MN.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x,y\neq 0$. Ta có

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{2}\\y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{xy+1}{y}=\dfrac{7}{2}&(1)\\\dfrac{xy+1}{x}=\dfrac{7}{3}.&(2)\end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) ta được: $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$, kết hợp với hệ phương trình ban đầu ta được :

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{2} \\ x=\dfrac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{2} \\ x=\dfrac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2-7y+2=0 \\ x=\dfrac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2\Rightarrow x=3 \\ y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$ (Thoả điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(3;2), \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$.

b) Phương trình đường thẳng $MN: y=6x-4$, vì d song song MN nên $m=6$.
Để d tiếp xúc (P) thì phương trình hoành độ giao điểm $2x^2=6x+n$ hay $2x^2-6x-n=0$ có nghiệm kép.
Tức là, $\Delta'=0\Leftrightarrow 9+2n=0\Leftrightarrow n=-\dfrac{9}{2}$.
Vậy $m=6, n=-\dfrac{9}{2}$.

Câu 3.

a) Cho a,b,c,d là các số thực phân biệt. Biết rằng a,b là hai nghiệm của phương trình $x^2+mx+1=0$ và c,d là hai nghiệm của phương trình $x^2+nx+1=0$. Chứng minh hệ thức sau: $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)=(m-n)^2$.

b) Cho a,b,c là ba số dương bất kì thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}.$$

Lời giải.

a) Theo Viet, ta có: $a+b=-m, ab=1; c+d=-n, cd=1$.
Do đó,$(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)=[a^2-a(c+d)+cd]\cdot[b^2-b(c+d)+cd]$
$=(a^2+an+1)(b^2+bn+1)=[a^2+am+1+a(n-m)]\cdot[b^2+bm+1+b(n-m)]$
$=ab(m-n)^2=(m-n)^2$ (đpcm).

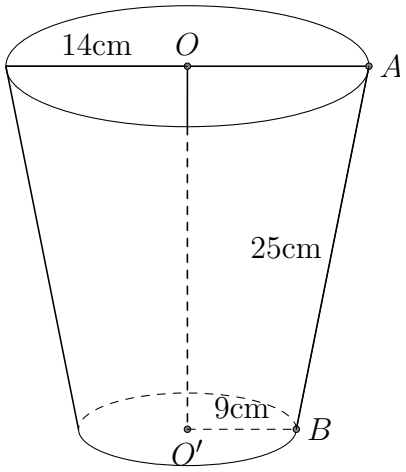
b) Do $a^2+b^2+c^2=1$ nên $\dfrac{a}{b^2+c^2}=\dfrac{a}{1-a^2}=\dfrac{a^2}{a(1-a^2)}$.
Ta có:
$a^2(1-a^2)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 2a^2(1-a^2)(1-a^2)\overset{Cauchy}{\leq}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3=\dfrac{4}{27}$
$\Leftrightarrow a(1-a^2)\leq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{a(1-a^2)}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.
Tương tự: $\dfrac{b^2}{b(1-b^2)}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}b^2; \dfrac{c^2}{c(1-c^2)}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}c^2$.
Vậy $P=\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 4.

a) Một ca nô chạy trên sông xuôi dòng 81 km và ngược dòng 108 km với tổng thời gian là 8 giờ. Một lần khác, ca nô ấy cũng chạy trên sông vừa nêu trên, xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km với tổng thời gian là 4 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước. Biết rằng, vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước không đổi.

b) Người thợ cần làm một cái xô bằng nhôm hình nón cụt *(hình vẽ bên)*, có bán kính đường tròn miệng xô là 14 cm, bán kính đáy xô là 9 cm và chiều dài đường sinh là 25 cm. Gọi S là tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của xô. Tính S và thể tích của xô (tính theo đơn vị lít). *(Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).*



Lời giải.

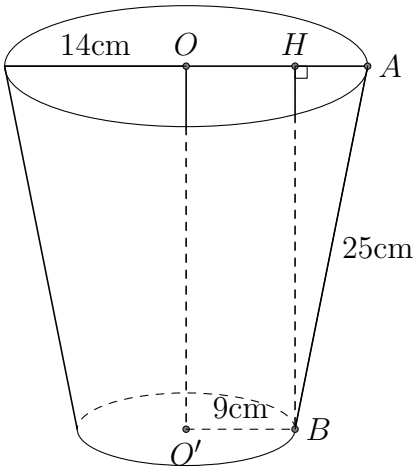
a) Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$); vận tốc riêng của dòng nước là y (km/h, $y > 0$), $(x > y)$.

Suy ra vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô tương ứng là $(x + y)$ và $(x - y)$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{81}{x+y} + \dfrac{105}{x-y} = 8 \\ \dfrac{54}{x+y} + \dfrac{42}{x-y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{27} \\ \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases}$. Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h, vận tốc riêng của dòng nước là 3 km/h.

b)



Diện tích xung quanh của chiếc xô là $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2).l = \pi(14 + 9).25 = 575\pi$ cm^2.

Diện tích đáy của chiếc xô là $S_{đ} = \pi R_2^2 = \pi.9^2 = 81\pi$ cm^2.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của xô là $S = 575\pi + 81\pi = 656\pi \approx 2059,84$ cm^2.

Trong mặt phẳng $(OABO')$ dựng BH vuông góc OA, ta được: $OH = O'B = 9$ cm, $AH = 5$ cm, $OO' = BH$.

Ta có $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 600 \Rightarrow BH = 10\sqrt{6}$ cm.

Thể tích của xô:

$V = \dfrac{1}{3}\pi.h(R_1^2 + R_2^2 + R_1.R_2) = \dfrac{4030\pi\sqrt{6}}{3} \approx 10332,11$ cm$^3 \approx 10,33$ dm$^3 \approx 10,33$ lít.

Vậy thể tích của xô là $10,33$ lít.

Câu 5.

a) Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm và $BC = 18$ cm. Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC (D thuộc cạnh BC).

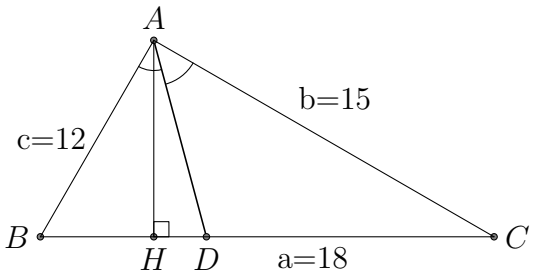
b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $\widehat{ABC} = 30°, \widehat{ACB} = 15°$. Gọi M, N, P, I lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CA, AB và OC.

(i) Tính $\widehat{BON}$. Chứng minh ba điểm A, M, I thẳng hàng.

(ii) Chứng minh P là trực tâm của tam giác OMN.

Lời giải.

a)



Theo tính chất phân giác trong tam giác, ta có:

$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow BD = \dfrac{18.4}{9} = 8$ cm.

Đặt $BH = x$, ta có: $AB^2 - x^2 = AC^2 - (BC - x)^2 \Leftrightarrow c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 \Leftrightarrow 2ax = a^2 + c^2 - b^2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \dfrac{27}{4} = 6,75$ cm. $HD = BD - BH = 8 - 6,75 = 1,25$ cm.

Trong tam giác vuông ADH và AHB, áp dụng định lý Pytago có:

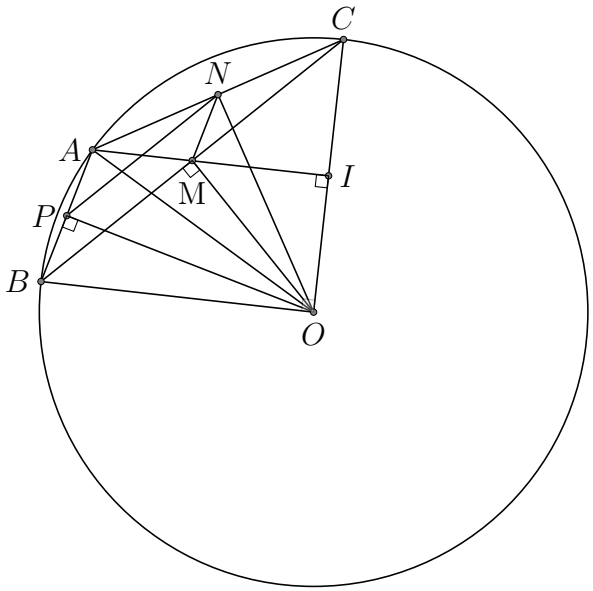
$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = 12^2 - (6,75)^2$,

$AD^2 = AH^2 + HD^2 = 12^2 - (6,75)^2 + (1,25)^2 = 100$.

Vậy $AD = 10$ cm.

b)

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



(i) Ta có:

$\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AC} = 2.\widehat{ABC} = 60^\circ.$

$\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 2.\widehat{ACB} = 30^\circ.$

Suy ra $\widehat{BON} = \widehat{BOA} + \widehat{AON} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$

Ta có $\text{sđ}\overset{\frown}{BC} = \text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = \text{sđ}\overset{\frown}{BC} = 90^\circ.$

Tam giác OAC cân tại O $(OA = OC = R)$, $\widehat{AOC} = \text{sđ}\overset{\frown}{AC} = 60^\circ$ nên tam giác đều.

Mà AI là đường trung tuyến nên AI là đường cao.

Ta có: $\begin{cases} BO \perp OC \text{ (do } \widehat{BOC} = 90^\circ) \\ AI \perp OC \end{cases} \Rightarrow AI \parallel BO.$ (3)

Mặt khác, vì MI là đường trung bình của tam giác OBC nên $MI \parallel BO$. (4)

Từ (3), (4) theo tiên đề Ơclit thì A, M, I thẳng hàng.

(ii) Ta có:

$\begin{cases} OM \perp BC \text{ (vì } M \text{ là trung điểm } BC) \\ NP \parallel BC \text{ (vì } NP \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC) \end{cases} \Rightarrow NP \perp OM.$

$\begin{cases} OP \perp AB \text{ (vì } P \text{ là trung điểm } AB) \\ MN \parallel AB \text{ (vì } MN \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC) \end{cases} \Rightarrow OP \perp MN.$

Tam giác OMN có NP và OP là hai đường cao cắt nhau tại $P \Rightarrow P$ là trực tâm của tam giác OMN.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 173

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC ĐĂK LĂK, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

1) Cho đa thức $P(x)=x^9-17x^8+m$. Tìm m biết rằng $a=\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{13-2\sqrt{12}}}$ là một nghiệm của $P(x)$.

2) Cho 2016 số dương $a_1,a_2,\ldots,a_{2015},a_{2016}$ thỏa mãn $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\ldots=\dfrac{a_{2016}}{a_1}$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2016}^2}{(a_1+a_2+\ldots+a_{2016})^2}$.

Lời giải.

1) Ta có $a=\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{13-2\sqrt{12}}}=\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}}=\sqrt{3}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=1$.
Vì $a=1$ là một nghiệm của $P(x)$, nên ta có: $P(1)=0\Leftrightarrow 1^9-17.1^8+m=0\Leftrightarrow m=16$.

2) Ta có $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\ldots=\dfrac{a_{2016}}{a_1}\Rightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\ldots=\dfrac{a_{2016}}{a_1}=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{201}}{a_1+a_2+\ldots+a_{201}}=1$
$\Rightarrow a_1=a_2=\ldots=a_{2016}=k>0$.
Do đó $A=\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2016}^2}{(a_1+a_2+\ldots+a_{2016})^2}=\dfrac{2016k^2}{(2016k)^2}=\dfrac{1}{2016}$.

Câu 2.

1) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+x^2-5x+5=0$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2(x+y)=3xy\\6(y+z)=5yz\\3(x+z)=4xz.\end{cases}$

3) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x\geq y\geq z$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}+3y$.

Lời giải.

1) Điều kiện: $\begin{cases}2x-3\geq 0\\-x^2+5x-5\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{3}{2}\\-x^2+5x-5\geq 0\end{cases}$ (*)
$\sqrt{2x-3}+x^2-5x+5=0\Leftrightarrow\sqrt{2x-3}=-x^2+5x-5\Leftrightarrow 2x-3=x^4+25x^2+25-10x^3+10x^2-50x$

$\Leftrightarrow x^4-10x^3+35x^2-52x+28=0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x^2-6x+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3-\sqrt{2} \\ x=3+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Nhận thấy chỉ có $x=2$ và $x=3-\sqrt{2}$ thỏa mãn (*).

2) Rõ ràng $x=0, y=0, z=0$ là một nghiệm của hệ.

Với $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$, ta có

$$\begin{cases} 2(x+y)=3xy \\ 6(y+z)=5yz \\ 3(x+z)=4xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{11}{3} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=1 \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}.$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(0;0;0)$ và $(1;2;3)$.

3) Vì $x\geq y\geq z>0 \Rightarrow (x-z)(y-z)\geq 0 \Rightarrow xy+z^2\geq xz+yz \Rightarrow \dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}\geq \dfrac{x}{y}+1$ (do $yz>0$).

Do đó $P\geq \dfrac{x}{y}+3y+1=\dfrac{x+2y}{y}+3y-1\geq 2\sqrt{3(x+2y)}-1\geq 2\sqrt{3(x+y+z)}-1=2\sqrt{3^2}-1=5$.

Vậy $\min P=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq y\geq z>0 \\ x+y+3=3 \\ (x-z)(y-z)=0 \\ \dfrac{x+2y}{y}=3y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 3.

1) Tìm cặp số nguyên tố (m,n) sao cho: $m^2-2n^2-1=0$.

2) Cho hai số tự nhiên a, b sao cho a^2+b^2+ab chia hết cho 10. Chứng minh rằng a^2+b^2+ab chia hết cho 100.

Lời giải.

1) Ta có $m^2-2n^2-1=0 \Rightarrow (m-1)(m+1)=2n^2\vdots 2 \Rightarrow m$ lẻ, suy ra $(m-1)(m+1)\vdots 4$
$\Rightarrow 2n^2\vdots 4 \Rightarrow n\vdots 2 \Rightarrow n=2$. Do n là số nguyên tố.
Khi đó $m^2=2.2^2+1 \Rightarrow m=3$. Vậy cặp số nguyên tố cần tìm là $(m,n)=(3,2)$.

2) Ta có $a^2+b^2+ab\vdots 10 \Rightarrow (a-b)(a^2+b^2+ab)=(a-b)^3\vdots 10 \Rightarrow a^3\equiv b^3 (mod\, 10)$
suy ra $a\equiv b (mod\, 10) \Rightarrow ab\equiv a^2 (mod 10), a^2\equiv b^2 (mod\, 10) \Rightarrow a^2+b^2+ab\equiv 3a^2 (mod\, 10)$
$\Rightarrow 3a^2\equiv 0 (mod 10) \Rightarrow a^2\vdots 10$ (vì $(3;10)=1$), suy ra $a\vdots 10$.
Suy ra $a^2\vdots 100 \Rightarrow a^2+b^+ab\equiv 3a^2 (mod\, 100)$.
Vậy a^2+b^2+ab chia hết cho 100.

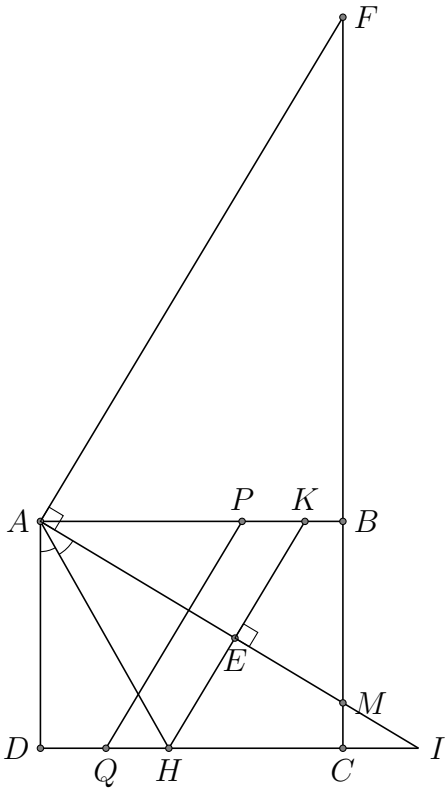
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$, biết $AD = \dfrac{2}{3}AB$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại I. Lấy điểm P thuộc cạnh AB, điểm Q thuộc cạnh CD sao cho PQ vuông góc với AM. Đường phân giác của góc $\widehat{MAD}$ cắt CD tại H. Chứng minh rằng:

a) $PQ = \dfrac{2}{3}BM + DH$.

b) $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{2}{9AI^2}$.

Lời giải.



a) Chứng minh $PQ = \dfrac{2}{3}BM + DH$

Kẻ $HK \parallel PQ, (K \in AB), PK \parallel HQ, (AB \parallel CD)$

$\Rightarrow PQ = HK$.

Lại có $HK \parallel PQ, PQ \perp AI$ (giả thiết)

Suy ra $HK \perp AI$ (tại E, E là giao điểm của HK và AI)

$\triangle ADH = \triangle AEH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

suy ra $AD = AE, DH = EH$

Lại có $\triangle AEK \backsim \triangle ABM$ (g-g).

Suy ra $\dfrac{EK}{BM} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AB}$, mà $AD = \dfrac{2}{3}AB$,

suy ra $EK = \dfrac{2}{3}BM$.

Do đó $PQ = HK = EK + EH = \dfrac{2}{3}BM + DH$.

b) Chứng minh $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{4}{9AI^2}$.

Kẻ $AF \perp AM$ (F thuộc đường thẳng BC).

Xét $\triangle ABF$ và $\triangle ADI$, ta có: $\widehat{ABF} = \widehat{ADI} = 90^\circ$, $\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$ (cùng phụ với $\widehat{BAM}$).

Vậy $\triangle ABF \backsim \triangle ADI \Rightarrow \dfrac{AI}{AF} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{4}{9AI^2}$.

Xét $\triangle AMF$: $\widehat{MAF} = 90^\circ\,(gt), AB \perp MF \Rightarrow \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{4}{9AI^2}$ (đpcm)

Câu 5. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP $(MP < MN)$, đường thẳng vuông góc với MI tại I cắt NP kéo dài tại Q. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên MQ.

a) Chứng minh $\widehat{PIQ} = \widehat{INP}$.

b) Chứng minh điểm H nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Lời giải.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

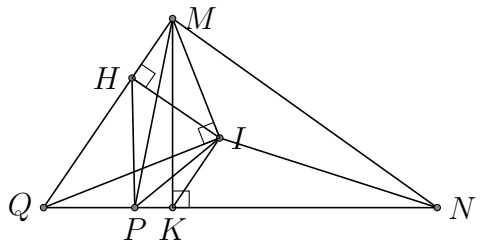
a) Chứng minh $\widehat{PIQ} = \widehat{INP}$

Kẻ $MK \perp NP\,(K \in NP)$.

Tứ giác $MIKQ$ có: $\widehat{MIQ} = \widehat{MKQ} = 90°$, nên tứ giác $MIKQ$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{IQK} = \widehat{IMK} = \widehat{IMP} - \widehat{KMP}$

$= \dfrac{\widehat{NMP}}{2} - \left(90° - \widehat{MPN}\right)$.



Lại có $\dfrac{\widehat{MPN}}{2} = \widehat{IPN} = \widehat{PIQ} + \widehat{IQK}$ (góc ngoài $\triangle IPQ$)

Suy ra $\widehat{PIQ} = \dfrac{\widehat{MPN}}{2} - \widehat{IQK} = \dfrac{\widehat{MPN}}{2} - \left[\dfrac{\widehat{NMP}}{2} - \left(90° - \widehat{MPN}\right)\right]$

$= 90° - \dfrac{\widehat{MPN} + \widehat{NMP}}{2} = \dfrac{\widehat{MNP}}{2} = \widehat{INP}$ (đpcm)

b) Chứng minh H nằm trên đường tròn ngọa tiếp tam giác MNP.

Xét $\triangle PIQ$ và $\triangle INQ$, ta có $\widehat{PIQ} = \widehat{INQ}, \widehat{Q}$ chung.

Vậy $\triangle PIQ \backsim \triangle INP \Rightarrow \dfrac{QI}{QN} = \dfrac{QP}{QI} \Rightarrow QI^2 = QP.QN$.

Xét $\triangle MIQ : \widehat{MIQ} = 90°, IH \perp MQ \Rightarrow QI^2 = QH.QM$.

Do đó $QP.QN = QH.QM \Rightarrow \dfrac{QP}{QH} = \dfrac{QM}{QN}$, nên $\triangle QPH \backsim \triangle QMN$ (c-g-c)/

Suy ra $\widehat{QPH} = \widehat{QMN}$

Vậy tứ giác $MNPH$ là tứ giác nội tiếp, nên H nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 174

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH VÒNG 2, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=\frac{2015}{2016}$$

Lời giải.

Với mọi số nguyên dương n ta có $1+\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{(k+1)^2}{k(k+2)}$. Suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\\&=\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

Từ đó ta có $\dfrac{n+1}{n+2}=\dfrac{2015}{2016}\Rightarrow n=2014$

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^4-x^3-8x^2-2x+4=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2xy+3x+4y=-2\\x^2+4x+4y^2+12y=4\end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $x\neq 0$, ta chia cả 2 vế của phương trình cho x^2, được

$$x^2-x-8-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=0$$

Đặt $t=x+\dfrac{2}{x}$, phương trình tương đương với $t^2-t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=4\end{array}\right.$

Với $t=-3$ suy ra $x=-2$ và $x=-1$

Với $t=4$ suy ra $x=2\pm\sqrt{2}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x=-2$ và $x=-1$; $x=2\pm\sqrt{2}$.

b) Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases}(x+2)(2y+3)=4\\(x+2)^2+(2y+3)^2=17\end{cases}$

Đặt $u=x+2; v=2y+3$, ta được $\begin{cases}uv=4\\u^2+v^2=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv=4\\u+v=\pm 5\end{cases}$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Với $uv=4$ và $u+v=5$, giải ra ta được $(x;y)=\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ hoặc $(x;y)=(2;-1)$.

Với $uv=4$ và $u+v=-5$, giải ra ta được $(x;y)=\left(-3;-\dfrac{7}{2}\right)$ hoặc $(x;y)=(-6;-2)$.

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là $(x;y)=\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$, $(x;y)=(2;-1)$, $(x;y)=\left(-3;-\dfrac{7}{2}\right)$, $(x;y)=(-6;-2)$.

Câu 3.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm $(a;b)$ thỏa mãn
$$(a^3+b)(a+b^3)=(a+b)^4$$

b) Cho tập hợp A gồm 678 số phân biệt thuộc tập hợp số $\{1,2,3,...,2016\}$. Chứng minh rằng luôn chọn được hai số thuộc A có tổng chia hết cho 3.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với $ab(a^2b^2+1)=ab(4a^2+6ab+4b^2)$
Với $ab=0$ ta được nghiệm $(0;m),(m;0)$ trong đó m là số tự nhiên bất kì.
Với $ab>0$ phương trình đã cho trở thành $a^2b^2+1=4a^2+6ab+4b^2\Leftrightarrow(ab+1)^2=4(a+b)^2$
$\Leftrightarrow ab+1=2(a+b)\Leftrightarrow(a-2)(b-2)=3$.
Từ đó giải ra ta được nghiệm $(3;5)$ và $(5;3)$.
Vậy các cặp số nguyên không âm cần tìm là $(0;m),(m;0),(5;3),(3;5)$ trong đó m là số tự nhiên bất kì.

b) Đặt $A_1=\{1,4,7\cdots,2014\}$, $A_2=\{2,5,8,\cdots,2015\}$ và $A_3=\{3,6,9,\cdots2016\}$. Ba tập trên đôi một rời nhau, mỗi tập có 672 số, mỗi số của tập A chỉ thuộc 1 trong ba tập trên.
Xét 2 trường hợp sau cho các số thuộc A:
+) Có ít nhất hai số cùng thuộc A_3. Khi đó lấy 2 số bất kì trong các số đó thì tổng của chúng chia hết cho 3.
+) Không có 2 số cùng thuộc A_3. Khi đó có ít nhất 677 số của A thuộc A_1 và A_2, nhưng mỗi tập A_1 và A_2 có 672 số nên có ít nhất hai số thuộc hai tập khác nhau, chẳng hạn $a\in A_1,b\in A_2$. Rõ ràng $a+b$ chia hết cho 3.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O và điểm M ở ngoài đường tròn (O). Từ M kẻ hai tiếp tuyến tới O có tiếp điểm là A,B. Đoạn thẳng MO cắt (O) và AB lần lượt tại K và I. Trên cung nhỏ AK lấy điểm $C(C\neq A,C\neq K)$, tia MC cắt (O) tại $D(D\neq C)$. Chứng minh rằng

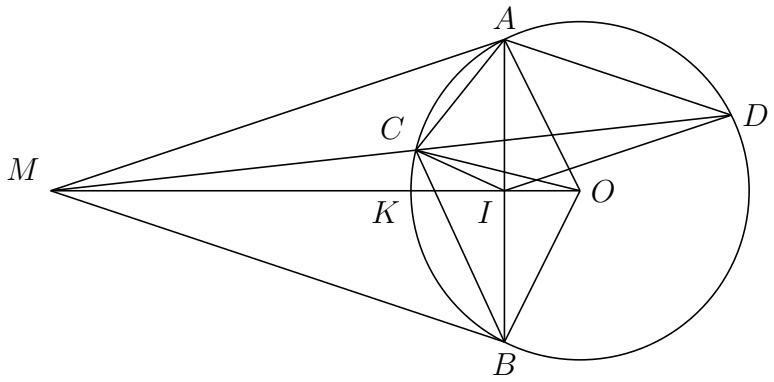
a) $MD\cdot MC=MI\cdot MO$.

b) $\widehat{AIC}=\widehat{CBD}$.

c) $\left(\dfrac{IB}{ID}\right)^2=\dfrac{MC}{MD}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.



a) Ta có $\triangle MAC \backsim \triangle MDA$ (g.g)
Suy ra $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$
Mặt khác, $\triangle AMO$ vuông tại A, có AI là đường cao nên $MA^2 = MI.MO$
Do đó $MD \cdot MC = MI \cdot MO$.

b) Theo ý a) ta có $MD \cdot MC = MI \cdot MO$ nên $\triangle MCI \backsim \triangle MOD$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{MIC} = \widehat{MDO}$ nên tứ giác $CIOD$ nội tiếp.
Do đó $\widehat{MIC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{OID}$
Kết hợp với $AI \perp MO$ ta có $\widehat{AIC} = \widehat{AID} = \dfrac{1}{2}\widehat{CID} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD} = \widehat{CBD}$

c) Theo chứng minh trong ý b) ta có AI là phân giác góc $\widehat{CID}$, mà $AI \perp MI$ suy ra MI là phân giác ngoài góc $\widehat{CID}$, do đó

$$\frac{MC}{MD} = \frac{IC}{ID} \ (1)$$

Vì $IA = IB$ nên

$$\left(\frac{IB}{ID}\right)^2 = \left(\frac{IA}{ID}\right)^2 \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh tương đương với $IA^2 = IC \cdot ID$ hay $IM \cdot IO = IC \cdot ID$ (3).
Vì tứ giác $CIOD$ nội tiếp nên $\widehat{MCI} = \widehat{IOD}$. Kết hợp với $\widehat{MIC} = \widehat{OID}$ ta có $\triangle MIC \backsim \triangle DIO$ (g.g). Suy ra

$$\frac{MI}{DI} = \frac{IC}{IO} \Leftrightarrow IM.IO = IC.ID$$

. Vậy (3) được chứng minh.

Câu 5. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $0 \le x, y, z \le 3; x + y + z = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.

Lời giải.

Giả sử $x \le y \le z$. Kết hợp với giả thiết suy ra $0 \le x \le 2 \le z \le 3$. Khi đó

$$P = x^2 + (y + z)^2 + (x - 2)yz$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\geq x^2 + (y+z)^2 + (x-2)\cdot\frac{(y+z)^2}{4}$$
$$= x^2 + (6-x)^2 + (x-2)\cdot\frac{(6-x)^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}x(x^2-6x+12) + 18 \geq 18$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0, y = z = 3$

Mặt khác do $2 \leq z \leq 3$ nên ta có

$$P = (x+y)^2 + z^2 + (z-2)xy$$
$$\leq (x+y)^2 + z^2 + (z-2)\cdot\frac{(x+y)^2}{4}$$
$$= z^2 + (6-z)^2 + (z-2)\cdot\frac{(6-z)^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(z-3)(z^2-3z+3) + \frac{81}{4} \leq \frac{81}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \dfrac{3}{2}, z = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của P tương ứng là 18 và $\dfrac{81}{4}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 175

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BÌNH PHƯỚC, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} + \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-1}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, với $x > 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị của biểu thức P tại $x = \sqrt{46-6\sqrt{5}} - 3\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right]$$
$$= \frac{x+\sqrt{x}+2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x+\sqrt{x}+2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2}{x-1}$$

b) Ta có:

$$x = \sqrt{46-6\sqrt{5}} - 3\left(\sqrt{5}-1\right) = \sqrt{45-2.3\sqrt{5}+1} - 3\sqrt{5}+3$$
$$= \sqrt{\left(3\sqrt{5}-1\right)^2} - 3\sqrt{5}+3 = \left|3\sqrt{5}-1\right| - 3\sqrt{5} - 3 = 3\sqrt{5}-1-3\sqrt{5}+3 = 2.$$

Suy ra $P = \dfrac{2}{2-1} = 2$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4m - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm khi $\Delta \geq 0$.

Do đó $(-m)^2 - (m^2 - 4m - 3) = 4m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{3}{4}$ (1)

Theo định lí Vi-ét thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m^2 - 4m + 3 \end{cases}$.

Ta có: $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2 = 4m^2 - 3(m^2 - 4m - 3) = m^2 + 12m + 9$.

Xét hàm số $y = m^2 + 12m + 9$ ta có $a = 1$, $b = 12$, $c = 9$.

Vì $a = 1 > 0$ và $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{2.1} = -6$ nên hàm số đồng biến khi $m > -6$ và hàm số nghịch biến khi $m < -6$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Suy ra $m \geq -\dfrac{3}{4}$ thì $m^2+12m+9$ luôn đồng biến. Do đó $m^2+12m+9 \geq \dfrac{9}{16}$.

Hay giá trị nhỏ nhất của T là $T=\dfrac{9}{16}$ đạt được khi $m=-\dfrac{3}{4}$.

Câu 3. Giải phương trình: $4\left(x^2+1\right)=3\sqrt{2x^2-7x+3}+14x$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x^2-7x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$ hoặc $x \geq 3$.

Ta có $4\left(x^2+1\right)=3\sqrt{2x^2-7x+3}+14x$

$\Leftrightarrow 2\left(2x^2-7x+3\right)-3\sqrt{2x^2-7x+3}-2=0 \quad (1)$.

Đặt $t=\sqrt{2x^2-7x+3} \geq 0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow 2t^2-3t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $t=-\dfrac{1}{2} / <0$ không thỏa mãn.

Với $t=2 \Rightarrow \sqrt{2x^2-7x+3}=2 \Rightarrow 2x^2-7x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta suy ra $x=\dfrac{7+\sqrt{57}}{4}$ thỏa mãn.

Câu 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-y^2=\sqrt{3y-1}-\sqrt{x+2y-1} & (1) \\ x^3y-4xy^2+7xy-5x-y+2=0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 3y-1 \geq 0 \\ x+2y-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \dfrac{1}{3} \\ x+2y \geq 1 \end{cases}$.

Ta có: $xy-y^2=\sqrt{3y-1}-\sqrt{x+2y-1}$

$\Leftrightarrow y(x-y)+\sqrt{x+2y-1}-\sqrt{3y-1}=0$

$\Leftrightarrow y(x-y)+\dfrac{x-y}{\sqrt{x+2y-1}+\sqrt{3y-1}}=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(y+\dfrac{1}{\sqrt{x+2y-1}+\sqrt{3y-1}}\right) \quad (*)$

Trường hợp 1: Với $y=\dfrac{1}{3}$ và $x+2y-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ ta thấy không thỏa mãn (2).

Trường hợp 2: $y>\dfrac{1}{3}$ và $x \neq \dfrac{1}{3} \Rightarrow y+\dfrac{1}{\sqrt{x+2y-1}+\sqrt{3y-1}}>0$ đo đó $(*)$ có nghiệm khi $x=y$ thế vào (2) ta được:

$x^4-4x^3+7x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2-2x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x+2=0 \end{array}\right.$.

Với $x^2-2x+2=0$ ta có: $\Delta'=(-1)^2-2.1=-1<0$ (vô nghiệm).

Với $x=1$ thì $y=1$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;1)$.

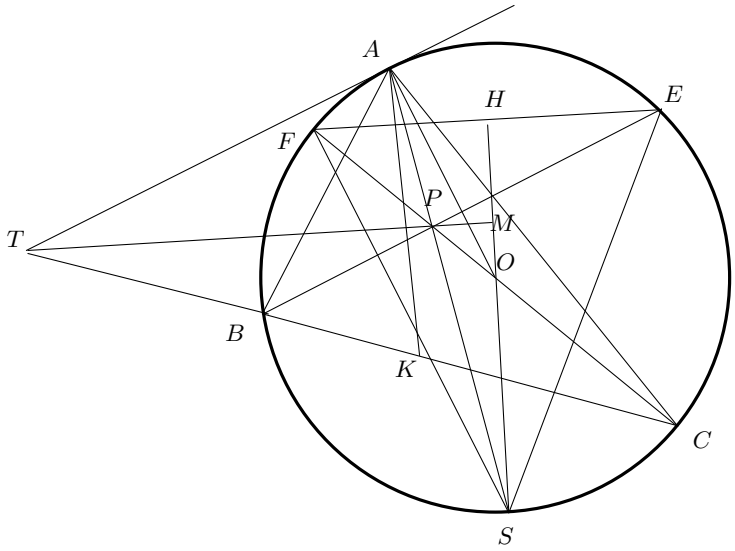
Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại T. Gọi (T) là đường tròn tâm T bán kính TA. Đường tròn (T) cắt đoạn thẳng BC tại K.

a) Chứng minh rằng $TA^2=TB.TC$ và AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

b) Lấy điểm P trên cung nhỏ AK của đường tròn (T). Chứng minh TP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.



a) Chứng minh: $TA^2 = TB.TC$ và AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
- Xét hai tam giác $\triangle TAB$ và $\triangle TAC$ có: $\widehat{ATB} = \widehat{ATC}$ (góc chung). $\widehat{TAB} = \widehat{TCA}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$).
Suy ra hai tam giác $\triangle TAB$ và $\triangle TAC$ đồng dạng. Do đó ta có $\dfrac{TA}{TB} = \dfrac{TC}{TA} \Rightarrow TA^2 = TB.TC$.
- Vì AK là bán kính của đường tròn (T) nên $\triangle ATK$ cân tại T nên $\widehat{TAK} = \widehat{TKA}$ (1)
Ta có: $\widehat{TAK} = \widehat{TAB} + \widehat{BAK}$, $\widehat{TKA} = \widehat{KAC} + \widehat{KCA}$ (góc ngoài) mà $\widehat{TAB} = \widehat{KCA} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{KAC}$ hay AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

b) Ta chứng minh $\widehat{TPB} = \widehat{PCB}$ theo quan hệ góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung với cung bị chắn của một đường tròn).
Ta có P thuộc đường tròn (T) nên $TA = TP \Rightarrow \dfrac{TA}{TB} = \dfrac{TC}{TA} \Rightarrow \dfrac{TP}{TB} = \dfrac{TC}{TP}$.
Xét hai tam giác $\triangle TPB$ và $\triangle TPC$ có $\widehat{PTB} = \widehat{PTC}$ (góc chung) và $\dfrac{TP}{TB} = \dfrac{TC}{TP}$
$\Rightarrow \triangle TPB$ và $\triangle TPC$ đồng dạng $\Rightarrow \widehat{TPB} = \widehat{PCB} \Rightarrow TP$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC.

c) Gọi M là giao điểm của SO và TP. Ta chứng minh $SP \perp TP$ và $TP \parallel EF$.
Ta có $\widehat{TPB} = \widehat{PCB}$ và $\widehat{FEB} = \widehat{PCB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BF}$) $\Rightarrow \widehat{TPB} = \widehat{FEB}$ (so le)
$\Rightarrow TP \parallel EF$ (3)
Vì $\triangle SOA$ cân tại O, $\triangle PTA$ cân tại T nên $\widehat{TPA} = \widehat{TAP} = \widehat{MPS}$ và $\widehat{OAS} = \widehat{OSA} = \widehat{MSP}$
$\Rightarrow \widehat{MPS} + \widehat{MSP} = \widehat{TPA} + \widehat{PAO} = \widehat{TAP} + \widehat{PAO} = 90^\circ$ hay $SO \perp TP$ (4)
Từ (3) và (4) ta suy ra $SO \perp EF$.

Câu 6. Cho biểu thức $Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để Q chia hết cho 16.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Lời giải.

$Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15 = (a^4 + 2a^3 - 2a - 1) - 16(a^2 - 1) = (a-1)(a+1)^3 - 16(a^2-1)$.

Với a lẻ, $a = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $(a-1)(a+1)^3 = 2k(2k+2)^3 = 16k(k+1) \vdots 16 \Rightarrow Q \vdots 16$

Với k chẵn, $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $(a-1)(a+1)^3 = (2k-1)(2k+1)^3$ là một số lẻ nên không chia hết cho 16. Do đó Q không chia hết cho 16.

Vậy khi a là một số lẻ thì Q chia hết cho 16.

Câu 7. Từ 2016 số: 1, 2, 3, ... 2016 ta lấy ra 1009 số bất kì. Chứng minh rằng trong các số lấy ra có ít nhất hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải.

Chia các số đã cho thành 1008 cặp sau: $(1;2)$, $(3;4)$,...,$(2015;2016)$.

Chọn 1009 số trong 1008 cặp trên nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một cặp. Mà hai số thuộc cùng một cặp là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 8. Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} \geq \frac{11}{2}$$

Lời giải.

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{b-1} \leq \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow a\sqrt{b-1} \leq \frac{ab}{2} \tag{0.56}$$

Tương tự:

$$\sqrt{a-1} \leq \frac{a-1+1}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2} \tag{0.57}$$

Từ (0.56) và (0.57) ta được:

$$\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} \leq \frac{6}{ab} + \sqrt{3ab+4} = \frac{18}{3ab} + \sqrt{3ab+4}$$

Đặt $t = \sqrt{3ab+4} \Rightarrow t^2 - 4 = 3ab \Leftrightarrow (t-2)(t+2) = 3ab$. Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{18}{(t-2)(t+2)} + t = \frac{18}{(t-2)(t+2)} + \frac{3}{4}(t-2) + \frac{1}{4}(t+2) + 1 \\ &\leq 3\sqrt[3]{\frac{18}{(t-2)(t+2)} \cdot (t-2) \cdot (t+2)} + 1 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $t = 4 \Rightarrow a = b = 2$.

Cách 2: Ta có:

$$a\sqrt{b-1} = \sqrt{a}.\sqrt{ab-a} \leq \frac{a+ab-a}{2} = \frac{ab}{2} \tag{0.58}$$

Tương tự:

$$b\sqrt{a-1} = \sqrt{b}.\sqrt{ab-b} \leq \frac{b+ab-b}{2} = \frac{ab}{2} \tag{0.59}$$

Từ (0.58) và (0.59) suy ra $\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} \geq \frac{6}{ab}$

Lại có: $\sqrt{3ab+4} = \frac{3ab+4}{\sqrt{3ab+4}} = \frac{4(3ab+4)}{4\sqrt{3ab+4}} \geq \frac{8(3ab+4)}{20+3ab}$.

Ta chứng minh $\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} - \frac{11}{2} \geq 0$

Thật vậy ta có: $\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} - \frac{11}{2} \geq \frac{6}{ab} + \frac{8(3ab+4)}{20+3ab} - \frac{11}{2}$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$\dfrac{6}{ab}+\dfrac{8(3ab+4)}{20+3ab}-\dfrac{11}{2}=\dfrac{12(20+3ab)+8(3ab+4)-11ab(20+3ab)}{2ab(20+3ab)}=\dfrac{15ab(ab-4)^2}{2ab(20+3ab)}\geq 0$ luôn đúng với mọi $a,b>1$. (đpcm)

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 176

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BIÊN HÒA HÀ NAM, NĂM HỌC 2016-2017

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{10x+4}{5\sqrt{5x^3}-8}-\frac{\sqrt{5x}}{5x+2\sqrt{5x}+4}\right)\cdot\left(\frac{1+5\sqrt{5x^3}}{1+\sqrt{5x}}-\sqrt{5x}\right)\cdot\left(\frac{6\sqrt{5x}-3}{\sqrt{5x}-1}-6\right)$$

$\left(\text{với} x\geq 0, x\neq\frac{1}{5}, x\neq\frac{4}{5}\right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm các số tự nhiên x lớn hơn 10 để $P>\frac{7}{2}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}P&=\frac{10x+4-5x+2\sqrt{5x}}{\left(5x+2\sqrt{5x}+4\right)\left(\sqrt{5x}-2\right)}\left(5x-\sqrt{5x}+1-\sqrt{5x}\right)\cdot\frac{6\sqrt{5x}-3-6\sqrt{5x}+6}{\sqrt{5x}-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{5x}-2}\cdot\left(\sqrt{5x}-1\right)^2\frac{3}{\sqrt{5x}-1}\\&=\frac{3\left(\sqrt{5x}-1\right)}{\sqrt{5x}-2}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$P>7\Leftrightarrow\frac{3\left(\sqrt{5x}-1\right)}{\sqrt{5x}-2}>\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{8-\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}-2}>0\Leftrightarrow 2<\sqrt{5x}<8\Leftrightarrow\frac{4}{5}<x<\frac{64}{5}.$$

Do $x\in\mathbb{N}$ và $x>10$ nên $x\in\{11;12\}$.

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2-4x-2}+(x-1)^2\sqrt{12-4x}=(8-x)\sqrt{3-x}$.

b) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-6=0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn

$$(x_1^2+2x_1+2m-5)(x_2^2+2x_2+2m-5)=-15.$$

Lời giải.

a) Điều kiện của phương trình $x \le 1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3} \le x \le 3$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x^2-4x-2}-\sqrt{3-x}+(2x^2-3-5)\sqrt{3-x}=0\\ \Leftrightarrow&\frac{2x^2-3x-5}{\sqrt{2x^2-4x-2}+\sqrt{3-x}}+(2x^2-3x-5)\sqrt{3-x}=0\\ \Leftrightarrow&(2x^2-3x-5)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-4x-2}+\sqrt{3-x}}+\sqrt{3-x}\right)=0.\end{aligned}$$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-4x-2}+\sqrt{3-x}}+\sqrt{3-x}>0$ nên phương trình tương đương $2x^2-3x-5=0$ hay $x=-1$ hoặc $x=\dfrac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;\dfrac{5}{2}\right\}$.

b) Phương trình đã cho có $\Delta'=m^2-4m+7=(m-2)^2+3>0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lí Viète ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\ x_1x_2=2m-6\end{cases}$.

Lại có $x^2-2(m-1)x+2m-6=x^2-2x+2m-5=2mx+1$ mà x_1, x_2 là nghiệm của phương trình nên

$$\begin{aligned}&(x_1^2+2x_1+2m-5)(x_2^2+2x_2+2m-5)=-15\\ \Leftrightarrow&(2mx_1+1)(2mx_2+1)=-15\\ \Leftrightarrow&4m^2x_1x_1+2m(x_1+x_2)+1=-15\\ \Leftrightarrow&2m^3-5m^2-m+4=0\Leftrightarrow(m-1)(2m^2-3m-4)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\\ m=\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\end{array}\right..\end{aligned}$$

Vậy các giá trị cần tìm của m là 1, $\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}$, $\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}$.

Câu 3. Cho các số nguyên dương a và b thoả mãn $\dfrac{a+2}{b}+\dfrac{b+3}{a}$ là một số nguyên. Gọi d là ước chung lớn nhất của a và b. Chứng minh rằng $d^2 \le 2a+3b$.

Lời giải.

Do $\dfrac{a+2}{b}+\dfrac{b+3}{a}$ là số nguyên nên $ab \mid a^2+b^2+2a+3b$. Mà $d^2 \mid ab$ và $d^2 \mid a^2+b^2$ nên suy ra $d^2 \mid 2a+3b$. Vậy $d^2 \le 2a+3b$.

Câu 4. Cho đường tròn (O,R) và dây BC không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

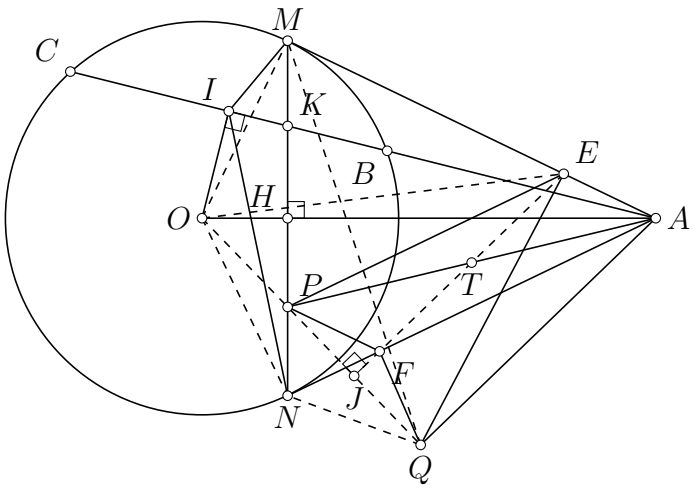
a) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của $\widehat{MIN}$.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{2}{AK}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

c) Lấy các điểm E, P, F lần lượt trên các đoạn AM, AN, NA sao cho tứ giác $AEPF$ là hình bình hành. Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường thẳng FE. Chứng minh rằng O, P, Q thẳng hàng.

Lời giải.



a) Dễ thấy năm điểm O, A, M, N, I nằm trên đường tròn đường kính OA. Do đó $\widehat{MIA} = \widehat{ANM} = \widehat{AMN} = \widehat{NIA}$.
Vậy IA là tia phân giác góc $\widehat{MIN}$.

b) Ta có tứ giác $OIKH$ nội tiếp đường tròn đường kính OK. Suy ra $AK \cdot AI = AH \cdot AO$.
Trong tam giác vuông AMO ta có $AM^2 = AH \cdot AO$.
Do AM là tiếp tuyến ta có $AM^2 = AB \cdot AC$.
Từ đó ta có

$$\begin{aligned} &AK \cdot AI = AB \cdot AC \\ \Rightarrow &AK \cdot \frac{AB + AC}{2} = AB \cdot AC \\ \Rightarrow &\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}. \end{aligned}$$

c) Gọi J là giao điểm của EF và PQ, T là trung điểm AP. Khi đó TJ là đường trung bình của tam giác APQ, suy ra $AQ \parallel EF$.
Do tính chất của phép đối xứng nên $\widehat{EQF} = \widehat{EPF} = \widehat{EAF}$, suy ra tứ giác $AEFQ$ nội tiếp, mà $AQ \parallel EF$ nên $AEFQ$ là hình thang cân. Suy ra $\widehat{QFA} = \widehat{QEA} \Rightarrow \widehat{QFN} = \widehat{QEM}$.
Dễ thấy $EM = EP = AF = QE$ và $FN = FP = FQ$, kết hợp với chứng minh trên ta có $\triangle FAQ \backsim \triangle EMQ$ (c.g.c), suy ra $\widehat{FNQ} = \widehat{EMQ}$, do đó tứ giác $AMNQ$ nội tiếp. Suy ra $OQ \parallel AQ$, do đó $OQ \parallel EF$.
Vậy O, P, Q thẳng hàng.

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{z+x} = 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+3y+3z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{3x+3y+2z} \leq 3.$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{y+z}\geq\frac{16}{2x+3y+3z}$$
$$\frac{1}{y+z}+\frac{1}{y+x}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{16}{3x+2y+3z}$$
$$\frac{1}{z+x}+\frac{1}{z+y}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{16}{3x+3y+2z}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{16}{2x+3y+3z}+\frac{16}{3x+2y+3z}+\frac{16}{3x+3y+2z}\leq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)$$

Suy ra

$$\frac{1}{2x+3y+3z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{3x+3y+2z}\leq\frac{4\cdot 12}{16}=3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{8}$.

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 177

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BIÊN HÒA HÀ NAM VÒNG 1, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 2\sqrt{12} + 3\sqrt{\dfrac{1}{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} - 1.$

b) $B = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}.$

Lời giải.

a) $A = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) - 1 = 4\sqrt{3}.$

b) $B = \dfrac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{2}{\sqrt{x}+2}.$

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) có phương trình $y = \dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$. Xác định a, b để (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -2.

b) Giải phương trình $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Lời giải.

a) Gọi $A = d \cap Oy \Rightarrow A(0;2) \in d \Rightarrow 2 = a.0 + b \Leftrightarrow b = 2.$
Gọi $B = d \cap (P) = B(-2; y_B) \Rightarrow y_B = \dfrac{1}{4} \cdot (-2)^2 = 1.$
$\Rightarrow B(-2;1) \in d \Rightarrow 1 = a.(-2) + 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}.$
Vậy $(a,b) = \left(\dfrac{1}{2}; 2\right).$

b) Ta có phương trình tương đương

$$4x^4 - 4x^2 - (x^2-1) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(4x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\pm 1; \pm\dfrac{1}{2}\right\}.$

Câu 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$ (m là tham số $m \neq 0$).

a) Giải hệ phương trình với $m = -2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x + y = -1$.

Lời giải.

a) Với $m = -2$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} -2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 1 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 5 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy nghiệm hệ phương trình là $(x; y) = (0; -1)$.

b) Ta có $x + y = -1 \Leftrightarrow y = -1 - x$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} mx - (-1 - x) = 1 \\ x + m(-1 - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + x = 0 \\ (1 - m)x = m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ m = -1 \end{array}\right. \\ (1 - m)x = m + 2. \end{cases}$$

- Với $x = 0 \Rightarrow m = -2$, hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; -1)$ (thỏa mãn).
- Với $m = -1$, hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-2; -1\}$.

Câu 4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{27a^2}{2} + 4b^2 + c^2 = 1 - 2bc$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3a + 2b + c$.

Lời giải.

Đặt $3a = x$, $2b = y$ và $c = z$ ta được

$$\frac{27a^2}{2} + 4b^2 + c^2 = 1 - 2bc \Leftrightarrow \frac{3(3a)^2}{2} + (2b + c)^2 = 1 + 2bc$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2(y + z)^2 = 2 + 2yz \leq 2 + \frac{(y + z)^2}{2} \Rightarrow 6x^2 + 3(y + z)^2 \leq 4.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopsky lại có

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\left[6x^2 + 3(y + z)^2\right] \geq (x + y + z)^2 = P^2 \Leftrightarrow |P| \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}.$$

Vậy $\min P = -\sqrt{2}$ khi $x = y = z = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ hay $(a; b; c) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{9}; -\frac{\sqrt{2}}{6}; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

$\max P = \sqrt{2}$ khi $x = x = z = \frac{\sqrt{2}}{3}$ hay $(a; b; c) = \left(\frac{\sqrt{2}}{9}; \frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Câu 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn (O). Trên Ax lấy điểm M sao cho $AM > AB$. Gọi N là giao điểm của đoạn thẳng AB và nửa đường tròn (O). Qua trung điểm P của đoạn thẳng AM dựng đường thẳng vuông góc với AM cắt đoạn thẳng BM tại Q.

a) Chứng minh tứ giác $APQN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

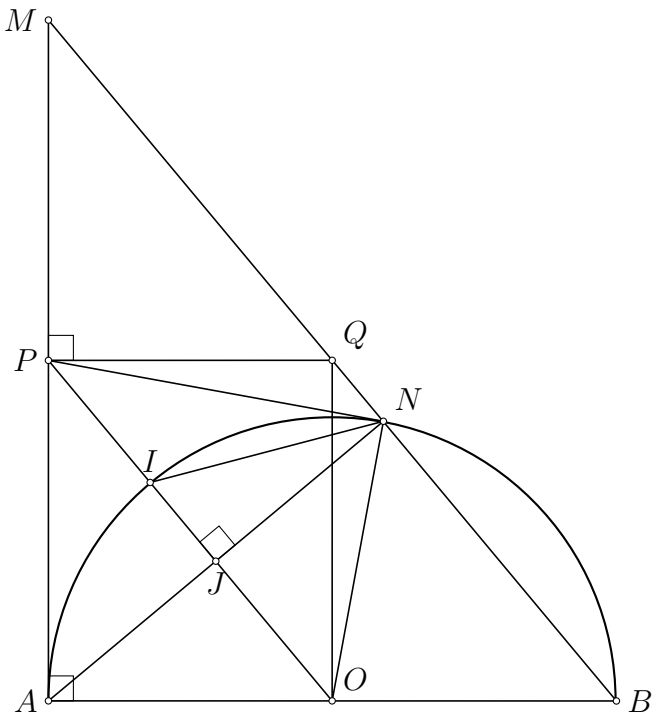
Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Chứng minh $\widehat{BAN} = \widehat{OQB}$.

c) Chứng minh PN là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

d) Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác ANP có độ dài đường kính bằng R. Tính diện tích $\triangle ABM$ theo R.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{APQ} = \widehat{ANQ} = 90^\circ$ nên $APQN$ nội tiếp đường tròn đường kính AQ.

b) Ta có $PQ \parallel AB$ (cùng vuông góc với AM) và P là trung điểm AM nên Q là trung điểm BM. Do đó $OQ \parallel AM$ và $OQ \perp AB$, suy ra $\widehat{BAN} = \widehat{OQN}$ (cùng phụ với $\widehat{ABM}$).

c) Ta có $\triangle OAP = \triangle ONP$ (c.c.c) nên $\widehat{ONP} = \widehat{OAP} = 90^\circ$. Do đó PN là tiếp tuyến của (O).

d) Gọi $I = PO \cap \widehat{AN}$, $J = PO \cap AN$.
Ta có PO là phân giác $\widehat{AON}$ nên $\widehat{AI} = \widehat{IN}$. Suy ra IN là phân giác $\widehat{PNA}$.
Mà PI là phân giác $\widehat{APN}$. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ANP$.
Lại có $\triangle ANP$ cân tại P nên AJ là phân giác đồng thời là đường cao.
$\Rightarrow IJ$ là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ANP$. Suy ra $IJ = \dfrac{R}{2} \Rightarrow JO = \dfrac{R}{2}$.
$\Rightarrow \sin\widehat{JAO} = \dfrac{JO}{AO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{JAO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABM} = 60^\circ \Rightarrow AM = AB.\tan 60^\circ = 2\sqrt{3}R$.
$\Rightarrow S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AB.AM = 2\sqrt{3}R^2$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 178

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẾN TRE, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Cho $a=\sqrt{1-2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$
Chứng minh a là một nghiệm của phương trình $x=x^3+2x^2$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $A=n^2+n+2$ là một số chính phương.

Lời giải.

a) Ta có: $a=\sqrt{1-2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{1-2\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}=\sqrt{1-2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}-1\neq 0$
$a=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow a+1=\sqrt{2}\Leftrightarrow (a+1)^2=2\Leftrightarrow a^2+2a=1\Leftrightarrow a^3+2a^2=a$
Do đó a là một nghiệm của phương trình $x=x^3+2x^2$

b) $A=n^2+n+2$ là một số chính phương

$$\Leftrightarrow n^2+n+2=k^2(k\in\mathbb{N})$$
$$\Leftrightarrow 4n^2+4n+8=4k^2$$
$$\Leftrightarrow (2n+1)^2-4k^2=-7$$
$$\Leftrightarrow (2n+1+2k)(2n+1-2k)=-7$$

Vì $k,n\in\mathbb{N}$ và $2n+1+2k>2n+1-2k$ nên ta có các trường hợp sau:

- $\begin{cases}2n+1+2k=1\\2n+1-2k=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-2\\k=2\end{cases}$ (không thỏa điều kiện)
- $\begin{cases}2n+1+2k=7\\2n+1-2k=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=1\\k=2\end{cases}$

Vậy $n=1\Rightarrow A=4$ là số chính phương

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P):y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d):y=2x-\dfrac{2}{3}$. Gọi A,B là giao điểm của (P) và (d). Tìm trên trục Oy điểm C sao cho tổng khoảng cách $(BC+CA)$ nhỏ nhất.

b) Cho hai phương trình $x^2 - mx + 2 = 0$ và $x^2 - 4x + m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm chung.

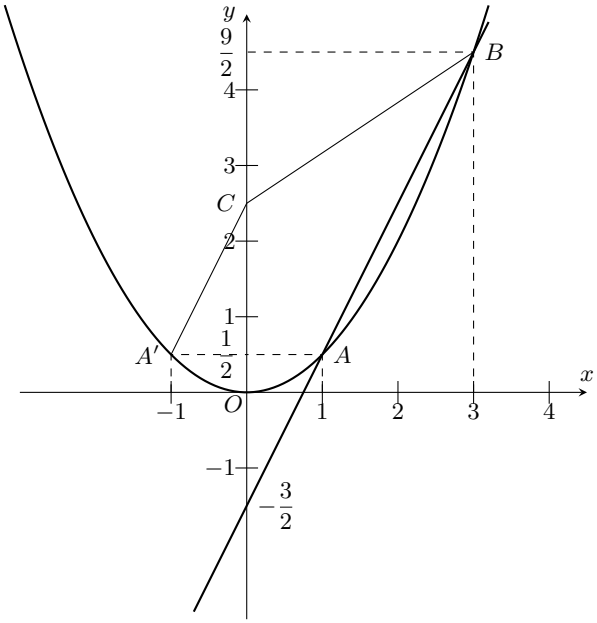
Lời giải.

a) Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ y = 2x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{9}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Giao điểm của (P) và (d) là $A\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$ và $B\left(3; \dfrac{9}{2}\right)$



Lấy A' đối xứng với A qua $Oy \Rightarrow A'\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$. Theo tính chất đối xứng, ta có: $CA' = CA$

Suy ra: $CA + CB = CA' + CB \geq A'B$ (không đổi)

$CA + CB$nhỏ nhất $\Leftrightarrow CA' + CB = A'B$

$\Leftrightarrow A', C, B$ thẳng hàng và $C \in Oy$

$\Leftrightarrow C$ là giao điểm của đường thẳng$A'B$ và trục Oy

Phương trình đường thẳng $A'B$ có dạng $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} -a + b = \dfrac{1}{2} \\ 3a + b = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Suy ra $A'B : y = x + \dfrac{3}{2}$

Tọa độ giao điểm C của hai đường thẳng $A'B$ và Oy là nghiệm của hệ phương trình:

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$\begin{cases} x=0 \\ y=x+\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy khi $C\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ thì tổng khoảng cách $(BC+CA)$ nhỏ nhất

b) Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình $x^2-mx+2=0$ và $x^2-4x+m=0$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_0^2-mx_0+2=0 \\ x_0^2-4x_0+m=0 \end{cases} \Rightarrow (m-4)x_0+m-2=0\ (*)$

+ Nếu $m=4$: $(*) \Rightarrow 2=0$:vô nghiệm

+ Nếu $m\neq 4$: $(*) \Rightarrow x_0=\dfrac{2-m}{m-4}$, thay vào phương trình $x_0^2-mx_0+2=0$, ta được:

$m^3-3m^2-12m+36=0 \Leftrightarrow (m-3)(m^2-12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\pm 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

- Với $m=3$ ta có hai phương trình $x^2-3x+2=0$ và $x^2-4x+3=0$ có nghiệm chung là $x=1$
- Với $m=2\sqrt{3}$ ta có hai phương trình $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ và $x^2-4x+2\sqrt{3}=0$ không có nghiệm chung
- Với $m=-2\sqrt{3}$ ta có hai phương trình $x^2+2\sqrt{3}x+2=0$ và $x^2-4x-2\sqrt{3}=0$ có một nghiệm chung là $x=1-\sqrt{3}$

Vậy có hai giá trị cần tìm là $m=3$ và $m=-2\sqrt{3}$

Câu 3.

a) Giải phương trình : $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x+2}\right)=1$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3y^3+7y^3=8 \\ x^y+y^2=2x \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện của phương trình : $x\geq -1$

Đặt $a=\sqrt{x+2}, b=\sqrt{x+1}$ (điều kiện $a>b>0$) $\Rightarrow a^2=x+2, b^2=x+1 \Rightarrow a^2-b^2=1$

Từ $(*) \Rightarrow (a-b)(1+ab)=1$ ta được hệ phương trình:

$\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ (a-b)(1+ab)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=1 \\ a^2-b^2-(a-b)(1+ab)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=1 \\ (a-b)(a-1)(b-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ \left[\begin{array}{l} a=b(\text{loại}) \\ a=1 \\ b=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-b^2=1 \\ a=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2-b^2=1 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+1}=0 \\ \sqrt{x+2}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+2}=\sqrt{2} \\ \sqrt{x+1}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1, x=0$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

b) Dễ thấy $(x,y)=(0,0)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình, nên xét trường hợp $x\neq 0, y\neq 0$, ta có:

$$\begin{cases} x^3y^3+7y^3=8 \\ x^2y+y^2=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3(x^3+7)=8 \\ xy\left(x+\dfrac{y}{x}\right)=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+7=\dfrac{8}{y^3} \\ x+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-\dfrac{8}{y^3}=-7 \\ x-\dfrac{2}{y}+\dfrac{y}{x}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{2}{y}\right)^3+6\dfrac{x}{y}\left(x-\dfrac{2}{y}\right)=-7 \\ \left(x-\dfrac{2}{y}\right)+\dfrac{y}{x}=0 \end{cases}$$

Đặt $a=x-\dfrac{2}{y}, b=\dfrac{x}{y}$ (điều kiện $b\neq 0$), ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^3+6ab=-7 \\ a+\dfrac{1}{b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+6ab=-7 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3=-1 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\dfrac{2}{y}=-1 \\ \dfrac{x}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{2}{y}=-1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{2}{x}=-1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+2=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ x=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1,1)$ và $(-2;-2)$

Câu 4.

a) Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x+y=2$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\leq 2$

b) Cho số thực x thỏa : $0<x<2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{2+x}{x}+\dfrac{4-x}{2-x}$

Lời giải.

a) Đặt $a=\sqrt[3]{x}, b=\sqrt[3]{y}\Rightarrow a^3=x, b^3=y$
Khi đó $a^3+b^3=2$, ta cần phải chứng minh : $a+b\leq 2$
Đặt $a=1+t\Rightarrow b^3=2-a^3=2-(1+t)^3=1-3t-3t^2-t^3\leq 1-3t+3t^2-t^3=(1-t)^3$
Suy ra $b\leq 1-t$, ta lại có $a=1+t$, nên $a+b\leq 1-t+1+t=2$ (điều phải chứng minh)

b) Ta có $P=\dfrac{2+x}{x}+\dfrac{4-x}{2-x}=\left(\dfrac{2+x}{x}-2\right)+\left(\dfrac{4-x}{2-x}-2\right)+4=\dfrac{2-x}{x}+\dfrac{x}{2-x}+4$
Vì $0<x<2\Rightarrow 2-x>0$, nên áp dụng bất đẳng thức Cô - si, ta có:

$$\dfrac{2-x}{x}+\dfrac{x}{2-x}\geq 2\sqrt{\dfrac{2-x}{x}.\dfrac{2}{2-x}}=2\Rightarrow P\geq 2+4=6$$

Dấu "=" xãy ra $\Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x}=\dfrac{x}{2-x}\Leftrightarrow (2-x)^2=x^2\Leftrightarrow x=1$ (thỏa điều kiện)
Vậy $\min P=6$ khi $x=1$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 5. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và điểm A nằm ngoài đường tròn. Gọi d là đường thẳng vuông góc với OA tại A và M là điểm di dộng trên d (M khác A). Vẽ tiếp tuyến MC với đường tròn (C là tiếp điểm, C khác phía với M đối với đường thẳng OA). Đường thẳng AC cắt đường tròn tại B (B khác C). tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng MC tại E và cắt d tại D.

a) Chứng minh tứ giác $OMDE$ nội tiếp

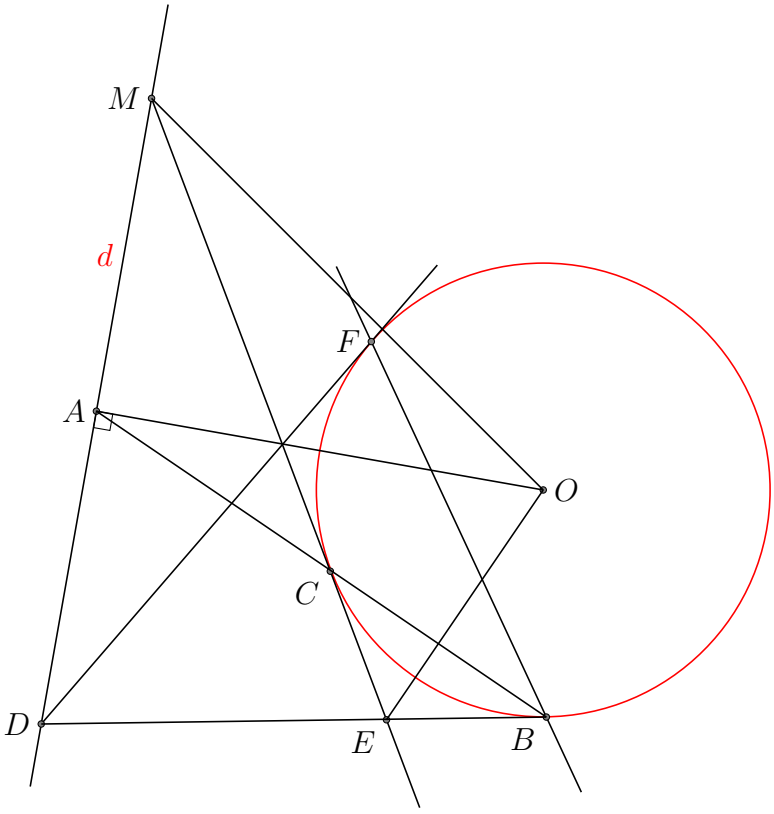
b) Chứng minh tam giác DOM cân

c) Chứng minh $OA.ME = OM.AB$

d) Kẻ tiếp tuyến DF với đường tròn (F là tiếp điểm, F khác B). Chứng minh đường thẳng BF luôn đi qua một điểm cố định khi M di độngtrên d.

e) Cho $OA = R\sqrt{3}$ và $AM = R\sqrt{2}$. Tính DE theo R.

Lời giải.



a) Tứ giác $OMAC$ nội tiếp ($\widehat{OAM} = \widehat{OCM} = 90°$) $\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OCB}$ (cung bù với góc $\widehat{OCA}$)
Tứ giác $OBEC$ nội tiếp ($\widehat{OBE} + \widehat{OCE} = 90° + 90° = 180°$)
$\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OCB}$ (cùng chắn cung OB)$\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OMA}$
Do đó tứ giác $OMDE$ nội tiếp

b) Tứ giác $OMDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OEB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{OEM} = \widehat{OMA}$(chứng minh trên)
$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OAM}$. Suy ra $\triangle DOM$ cân tại O

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

c) Tứ giác $OMAC$ nội tiếp ($\widehat{OAM} = \widehat{OCM} = 90°$) $\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OCB}$ (cung bù với góc $\widehat{OCA}$)
Tứ giác $OBEC$ nội tiếp ($\widehat{OBE} + \widehat{OCE} = 90° + 90° = 180°$)
$\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OCB}$ (cùng chắn cung OB)$\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OMA}$
Do đó tứ giác $OMDE$ nội tiếp

d) Tứ giác $OMDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OEB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{OEM} = \widehat{OMA}$(chứng minh trên)
$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OAM}$. Suy ra $\triangle DOM$ cân tại O

e) $\triangle OBA$ và $\triangle OEM$ có:
$\widehat{OBC} = \widehat{OEC}$ (tứ giác $OBEC$ nội tiếp)
$\widehat{OAC} = \widehat{OMC}$(tứ giác $OMAC$ nội tiếp)
$\Rightarrow \triangle OBA \sim \triangle OEM \Rightarrow \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{AB}{ME} \Rightarrow OA.ME = OM.AE$

f) Gọi giao điểm của BF với OD, OA lần lượt là H, I. Ta có $DB = DF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
$OB = OF$(bán kính)
$\Rightarrow OD$ là đường trung trực của đoạn thẳng BF
$OD \perp BF$ tại $H \Rightarrow \triangle OHI \sim \triangle OAD$(g-g)
$\Rightarrow \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{OI}{OD} \Rightarrow OI.OA = OH.OD$
$\triangle OBD$ vuông tại B có đường cao $BH \Rightarrow OH.OD = OB^2 = R^2$
$\Rightarrow OI.OA = R^2 \Rightarrow OI = \dfrac{R^2}{OA}$ (1)
Ta có đường tròn (O, R) và đường thẳng d cố định nên đoạn thẳng OA cố định và có độ dài không đổi (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ khoảng cách OI không đổi và I thuộc OA cố định.
Suy ra I cố định
Do đó đường thẳng BF luôn đi qua một điểm I cố định khi M di động trên d

g) $\triangle DOM$ cân tại O có OA là đường cao $\Rightarrow OA$ cũng là trung tuyến $\Rightarrow AD = AM = R\sqrt{2}$
$\triangle OAD$ vuông tại A có $OA = R\sqrt{3}, AD = R\sqrt{2}, OD = \sqrt{OA^2 + AD^2} = R\sqrt{5} \Rightarrow OM = OD = R\sqrt{5}$
$\triangle OBD$ vuông tại $B \Rightarrow BD = \sqrt{OD^2 - OB^2} = 2R$
$\triangle OBA \sim \triangle OEM \Rightarrow \dfrac{OB}{OE} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{R\sqrt{3}}{R\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow OE = OB.\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = R\dfrac{\sqrt{15}}{3}$
$\triangle OBE$ vuông tại $B \Rightarrow BE = \sqrt{OE^2 - OB^2} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$
Vậy $DE = BD - BE = R\left(2 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 179

THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẮC NINH, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

(a) Phân tích đa thức $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$ thành nhân tử.

(b) Rút gọn $Q=\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$ với $x>1$ và $x\neq 2$.

Lời giải.

(a) Ta có $P(x)=(x-1)(x^3+6x^2+11x+6)=(x-1)(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x-1)(x+2)(x+3)$.

(b) Ta có

$$Q=\frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}}.\frac{x-2}{x-1}$$
$$=\frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\sqrt{x-1}+1}{|x-1|}.\frac{x-2}{x-1}.$$

Với $x>2$ thì $Q=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Với $0<x<1$ thì $Q=\dfrac{-2}{x-1}$.

Câu 2.

(a) Giải phương trình $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$.

(b) Cho bốn số thực a,b,c,d khác 0 thỏa mãn các điều kiện sau: a,b là hai nghiệm của phương trình $x^2-10cx-11d=0$; c,d là hai nghiệm của phương trình $x^2-10ax-11b=0$. Tính giá trị của $S=a+b+c+d$.

Lời giải.

(a) Điều kiện $x\geq\dfrac{8}{3}$.

Phương trình tương đương với

$$8x-4-6\sqrt{5x-6}-2\sqrt{3x-8}=0$$
$$\Leftrightarrow 5x-6-6\sqrt{5x-6}+9+3x-8-2\sqrt{3x-8}+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x-6}-3\right)^2+\left(\sqrt{3x-8}-1\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{5x-6}-3=0\\ \sqrt{3x-8}-1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=3.$$

(b) Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases}a+b=10c\\ ab=-11d\end{cases}$ và $\begin{cases}c+d=10a\\ cd=-11b\end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases}ac=121\\ b+d=9(a+c)\end{cases}$. Ta có

$$(a^2-10ca-11d)+(c^2-10ac-11b=0\Leftrightarrow (a+c)^2-99(a+c)-2662=0).$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}a+c=121\\ a+c=-22\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}a+b+c+d=10(a+c)=1210\\ a+b+c+d=10(a+c)=-220\end{array}\right.$

Câu 3. Cho $a,b,c>0$. Tìm GTNN của $M=\dfrac{3a^4+3b^4+c^3+2}{(a+b+c)^3}$.

Lời giải.

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\begin{cases}3a^4+1=a^4+a^4+a^4+1\geq 4a^3\\ 3b^4+1=b^4+b^4+b^4+1\geq 4b^3\end{cases}$$

Suy ra $M\geq \dfrac{4(a^3+b^3)+c^3}{(a+b+c)^3}$. Áp dụng bất đẳng thức $(x^3+y^3)\geq \dfrac{1}{2}(x+y)^3$ với $x,y>0$, ta có

$$4(a^3+b^3)+c^3\geq (a+b)^3+c^3\geq \frac{1}{4}(a+b+c)^3.$$

Suy ra $M\geq \dfrac{1}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a=b=1\\ c=2\end{cases}$. Vậy GTNN của M là $\dfrac{1}{4}$.

Câu 4. Trên đường tròn (C) tâm O, bán kính R vẽ dây cung $AB<2R$. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax, By với đường tròn (C). Lấy điểm M bất kỳ thuộc cung nhỏ AB (M khác A và B). Gọi H,K và I lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống AB,Ax và By.

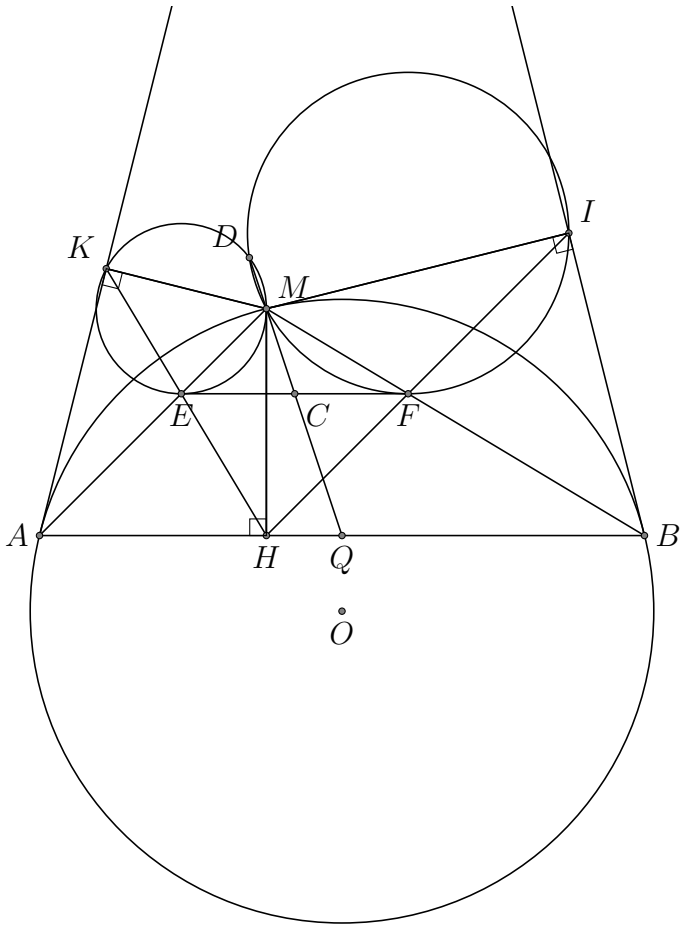
(a) Chứng minh rằng $MH^2=MK.MI$.

(b) Gọi E là giao điểm của AM và KH, F là giao điểm của BM và HI. Chứng minh rằng đường thẳng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI.

(c) Gọi D là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cung nhỏ AB thì đường thẳng DM luôn đi qua một điểm cố định.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Lời giải.



(a) Ta có tứ giác $AKMH$ và $BIMH$ là các tứ giác nội tiếp.
Do góc $\widehat{KAH} = \widehat{IBH}$ (cùng chắn cung AB) suy ra $\widehat{KMH} = \widehat{IMH}$. (1)
Ta có $\widehat{MIH} = \widehat{MBH} = \widehat{KAM} = \widehat{KHM}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MHI \backsim \triangle MKH$ suy ra $MH^2 = MK.MI$.

(b) Ta có $\begin{cases} \widehat{MHE} = \widehat{MAK} = \widehat{MBA} \\ \widehat{MHF} = \widehat{MBI} = \widehat{MAB} \end{cases}$ suy ra $\widehat{FHE} + \widehat{FME} = \widehat{MBA} + \widehat{MAB} + \widehat{BMA} = 180°$.
Suy ra tứ giác $FMEH$ nội tiếp.
Ta có $\widehat{MFE} = \widehat{MHE} = \widehat{MAK} = \widehat{MBA}$ suy ra $EF \parallel AB$.
Ta có $\widehat{MKE} = \widehat{MAH} = \widehat{MEF}$ suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEK. Tương tự, suy ra EF là tiếp tiếp chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MEK và MFI.

(c) Gọi C là giao điểm của DM và EF, Q là giao điểm của DM và AB.
EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MEK và MFI nên

$$\begin{cases} CE^2 = CM.CD \\ CF^2 = CM.CD \end{cases} \Rightarrow CE = CF.$$

Mà $\dfrac{CE}{QA} = \dfrac{MC}{MQ}$ suy ra $QA = QB$. Vậy Q là trung điểm của AB cố định.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 5.

(a) Tìm ba số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a < b < c, (bc - 1)$ chia hết cho a, $(ca - 1)$ chia hết cho b và $(ab - 1)$ chia hết cho c.

(b) Các nhà khoa học gặp nhau tại một hội nghị. Một số người là bạn của nhau. Tại hội nghị không có hai nhà khoa học nào có số bạn bằng nhau lại có bạn chung. Chứng minh rằng có một nhà khoa học chỉ có đúng một người bạn.

Lời giải.

(a) Ta có $\begin{cases} bc - 1 \vdots a \\ a(b + c) \vdots a \end{cases} \Rightarrow ab + bc + ca - 1 \vdots a.$

Tương tự với b, c. Do a, b, c nguyên tố nên $ab + bc + ca - 1 \vdots abc$.

Với $a = 2$ ta có $2b + 2c + bc - 1 \vdots 2bc \Rightarrow 4b + 4c - 2 \vdots 2bc$.

Suy ra $4b + 4c - 2 \geq 2bc \Rightarrow 3 \geq (b - 2)(c - 2)$. Suy ra $b = 3; c = 5$.

Với $a \geq 3$ ta có $abc \geq 3bc > ab + bc + ca > ab + bc + ca - 1$ trái với $ab + bc + ca - 1 \vdots abc$.

Vậy không có a, b, c thỏa mãn trường hợp này.

(b) Gọi k là số bạn của nhà khoa học có nhiều nhất tại hội nghị. Nếu có hai hoặc nhiều hơn nhà khoa học có số lượng bạn bằng k thì ta lấy một người bất kỳ. Giả sử đó là nhà khoa học A. Gọi các bạn của nhà khoa học A là $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Tất cả các nhà khoa học $A_1, A_2, \ldots, A_k$ không ai nhiều hơn k người bạn vì ta giả thiết k lớn nhất và ai cũng có ít nhất một bạn là A, cũng không có người nào trong số $A_1, A_2, \ldots, A_k$ có số bạn bằng nhau vì theo giả thiết có bạn chung A thì không có số bạn bằng nhau.

Suy ra $A_1, A_2, \ldots, A_k$ có số bạn là $1, 2, 3, \ldots, k$. Tức là một người trong số $A_1, A_2, \ldots, A_k$ có đúng 1 người bạn (đó chính là A).

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 180

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẠC LIÊU, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

a) Chứng minh tích của 4 số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2 - xy = x^2 + 3y^2$.

Lời giải.

a) Giả sử có 4 số nguyên dương liên tiếp là n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Ta có: $A = n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)$
$\Rightarrow (n^2+3n)^2 < A < (n^2+3n+1)^2$.
Vậy A không thể là số chính phương.

b) Ta có $x^2y^2 - xy = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow (x^2-3)y^2 - xy - x^2 = 0$. (1)
Vì $x^2-3 \neq 0$ nên (1) là phương trình bậc hai đối với y, có $\Delta = x^2+4x^2(x^2-3) = x^2(4x^2-11)$.
Phương trình (1) có nghiệm nguyên khi Δ là số chính phương.
Nếu $x = 0$ thì $y = 0$. Nếu $x \neq 0$ thì $4x^2 - 11$ phải là số chính phương.
Đặt $4x^2 - 11 = z^2$ ($z \in \mathbb{N}$) ta được:

$$4x^2 - z^2 = 11 \Leftrightarrow (2x-z)(2x+z) = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z = 11 \\ 2x-z = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x+z = -1 \\ 2x-z = -11 \end{cases}.$$

Suy ra $x = 3$ hoặc $x = -3$.
Với $x = 3$, ta được $2y^2 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = \dfrac{3}{2}$. (loại)
Với $x = -3$, ta được $2y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -\dfrac{3}{2}$. (loại)
Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(0;0)$, $(3;-1)$ và $(-3;1)$.

Câu 2.

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y + 2 = 0 \\ y^2 - xy - 3x - 5y = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có $A=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}-\dfrac{\sqrt{6}}{2-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}$
$=\dfrac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=-\sqrt{2}$

b) Ta có $\begin{cases}x^2+3xy+2y+2=0(1)\\ y^2-xy-3x-5y=0(2)\end{cases}$.
Lấy (1) cộng (2) ta được $(x+y)^2-3(x+y)+2=0\Leftrightarrow x+y=1$ hoặc $x+y=2$.
* $x+y=1\Leftrightarrow y=1-x$, thay vào (1) được $2x^2-x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$.
* $x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$, thay vào (1) được $x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=3$.
Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm $(-1;3)$, $(3;-1)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{4};\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{33}}{4};\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$.

Câu 3.

a) Cho phương trình $x^2-2mx+m^2-m-6=0$ (m là tham số). Xác định giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{18}{7}$.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=2$. Chứng minh: $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\geq\dfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm khi $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow m\geq -6$. (*)
Khi đó, theo định lí Vi-ét, ta có: $x_1+x_2=2m$; $x_1x_2=m^2-m-6$.
Do đó, $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{18}{7}\Leftrightarrow\begin{cases}7(x_1+x_2)^2-32x_1x_2=0\\ x_1x_2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-8m-48=0\\ m^2-m-6\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=12\end{array}\right.$
(thỏa (*))
Vậy $m=-4$ và $m=12$ là các giá trị cần tìm.

b) Ta có: $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\geq\dfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)$ (1) $\Leftrightarrow(x+y+x)\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\right)\geq 3(x^2+y^2+y^2)$
$\Leftrightarrow\dfrac{x^2(x+z)}{y}+\dfrac{y^2(y+x)}{z}+\dfrac{z^2(z+y)}{x}\geq 2(x^2+y^2+y^2)$.
Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có: $\dfrac{x^2(x+z)}{y}+(x+z)y\geq 2x(x+z)$; $\dfrac{y^2(y+x)}{z}+(y+x)z\geq 2y(y+x)$; $\dfrac{z^2(z+y)}{x}+(z+y)x\geq 2z(z+y)$.
Cộng vế theo vế ta được: $\dfrac{x^2(x+z)}{y}+\dfrac{y^2(y+x)}{z}+\dfrac{z^2(z+y)}{x}\geq 2(x^2+y^2+y^2)$.
Do đó, bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{2}{3}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

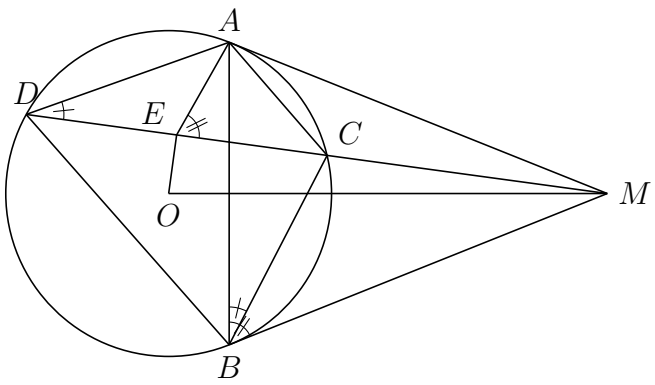
Câu 4. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD của đường tròn đó (C nằm giữa M và D, dây CD không đi qua O). Gọi E là trung điểm của dây CD. Chứng minh:

a) $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$.

b) $AC.BD = BC.DA = \dfrac{1}{2}.AB.CD$.

Lời giải.

Ta có hình vẽ:



a) Vì $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = \widehat{OEM} = 90^0$ nên năm điểm O, M, A, B, E cùng thuộc đường tròn đường kính OM, suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$).
Mà $\widehat{ADE} + \widehat{DAE} = \widehat{AEM}$, $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ nên suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$.

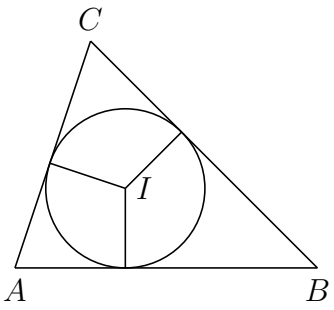
b) Xét ΔABC và ΔADE, có $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$ (chứng minh trên) và $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ (chắn $\overset{\frown}{AC}$).
Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta ADE \Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} \Rightarrow AD.BC = AB.DE = \dfrac{1}{2}.AB.CD$. (1)
Tương tự, chứng minh được: $\Delta ABD \backsim \Delta ACE \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CE} \Rightarrow AC.BD = AB.CE = \dfrac{1}{2}.AB.CD$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5. Cho điểm M nằm trong tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và diện tích là S. Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh BC, AC, AB lần lượt là x, y, z. Xác định vị trí của điểm M trong tam giác ABC sao cho biểu thức $Q = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ.

Lời giải.

Ta có hình vẽ:

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên



Ta có $S = S_{MBC} + S_{MAB} + S_{MAC} = \dfrac{1}{2}(ax + by + cz) \Rightarrow 2SQ = (ax + by + cz)\left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z}\right)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + bc\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) + ca\left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x}\right)$.

Mà $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$;

$\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y} \geq 2$;

$\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} \geq 2$.

$\Rightarrow 2SQ \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$

$\Rightarrow Q \geq \dfrac{(a + b + c)^2}{2S}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow M$là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Vậy Q nhỏ nhất khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 181

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BẮC GIANG, 2016

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

1) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}+1\right):\left(\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-1\right)$.

a) Tìm điều kiện của a, b để biểu thức A có nghĩa, từ đó hãy rút gọn biểu thức A.

b) Cho $\sqrt{ab}+1=4\sqrt{b}$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

2) Tìm giá trị của m để phương trình $2x^2-4mx+2m^2-1=0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1^2+4mx_2+2m^2<2017$.

Lời giải.

1) $A=\left(\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}+1\right):\left(\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-1\right)$.

a) Đặt $B=\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}+1$; $C=\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-1$.

Vậy $A=B:C$. Điều kiện của B,C có nghĩa là $a\geq 0;b\geq 0;a\neq b$.

$B=\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}+1=\dfrac{-2b(\sqrt{a}+1)}{a-b}$.

$C=\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-1=\dfrac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+1)}{a-b}$.

Điều kiện của A có nghĩa là $a>0;b>0;a\neq b$.

Vậy $A=\dfrac{-2b(\sqrt{a}+1)}{a-b}:\dfrac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+1)}{a-b}=\dfrac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ với $a>0,b>0,a\neq b$.

b) Ta có $\sqrt{ab}+1=4\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}=4$.

Theo bất đẳng thức Cô si ta có

$4=\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}\geq 2\sqrt{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leq 4\Rightarrow\sqrt{\dfrac{b}{a}}\geq\dfrac{1}{4}$.

Vậy $A=\dfrac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\leq\dfrac{-1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=4;b=\dfrac{1}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $A=\dfrac{-1}{4}$ khi $a=4;b=\dfrac{1}{4}$.

2) $2x^2-4mx+2m^2-1=0$ (1)

Ta có: $\Delta'=4m^2-2(2m^2-1)=2>0$.

Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.
Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1+x_2=2m$.
Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên $2x_1^2-4mx_1+2m^2-1=0 \Rightarrow 2x_1^2=4mx_1-2m^2+1$.
Ta có $2x_1^2+4mx_2+2m^2<2017 \Leftrightarrow 4mx_1-2m^2+1+4mx_2+2m^2<2017 \Leftrightarrow 4m(x_1+x_2)<2016$
$\Leftrightarrow 4m.2m<2016 \Leftrightarrow m^2<252 \Leftrightarrow -6\sqrt{7}<m<6\sqrt{7}$.
Vậy $-6\sqrt{7}<m<6\sqrt{7}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Câu 2.

1) Giải phương trình $x(2x^2+13x-6)=(x^2+8x-6)\sqrt{x^2+6x}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x-1}+x^2-6y+10=0\\ x^2-6y^2+xy+2x+11y-3=0.\end{cases}$

Lời giải.

1) $x(2x^2+13x-6)=(x^2+8x-6)\sqrt{x^2+6x}$ $(*)$
Điều kiện $x^2+6x\geq 0$.
Phương trình $(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+6x}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+6x}-x^2-6x+6\right)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+6x}-2x=0\\ \sqrt{x^2+6x}-x^2-6x+6=0.\end{array}\right.$
Xét $\sqrt{x^2+6x}-2x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+6x}=2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ x^2+6x=4x^2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2.\end{array}\right.$
Xét $\sqrt{x^2+6x}-x^2-6x+6=0 \Leftrightarrow x^2+6x-\sqrt{x^2+6x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+6x}-3)(\sqrt{x^2+6x}+2)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+6x}-3=0 \Leftrightarrow x^2+6x=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3-3\sqrt{2}\\ x=-3+3\sqrt{2}\end{array}\right.$ (điều kiện thỏa mãn).
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $\left\{-3-3\sqrt{2};-3+3\sqrt{2};0;2\right\}$.

2) $\begin{cases}\sqrt{2x-1}+x^2-6y+10=0 & (1)\\ x^2-6y^2+xy+2x+11y-3=0 & (2)\end{cases}$
ĐK: $x\geq \dfrac{1}{2}$.
Từ (2) suy ra $\left[\begin{array}{l}x=2y-3\\ x=1-3y.\end{array}\right.$
Với $x=1-3y \Leftrightarrow 3y=1-x$ thay vào (1) ta được $\sqrt{2x-1}+x^2-2(1-x)+10=0$
$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+(x+1)^2+7=0$ (vô nghiệm).
Với $x=2y-3 \Leftrightarrow 2y=x+3$ thay vào (1) ta được $\sqrt{2x-1}+x^2-3(x+3)+10=0$
$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0(3)$.
Đặt $t=\sqrt{2x-1}$ $(t\geq 0)$, phương trình (3) trở thành
$t+x^2-x-t^2=0 \Leftrightarrow (t-x)(1-t-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=x\\ t=1-x.\end{array}\right.$
Với $t=x$ ta có $x=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2$.
Với $t=1-x$ ta có $1-x=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x=2-\sqrt{2}$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Khi $x = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow y = \dfrac{5 - \sqrt{2}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện và kết luận hệ có các nghiệm $(1; 2)$, $\left(2 - \sqrt{2}; \dfrac{5 - \sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 3.

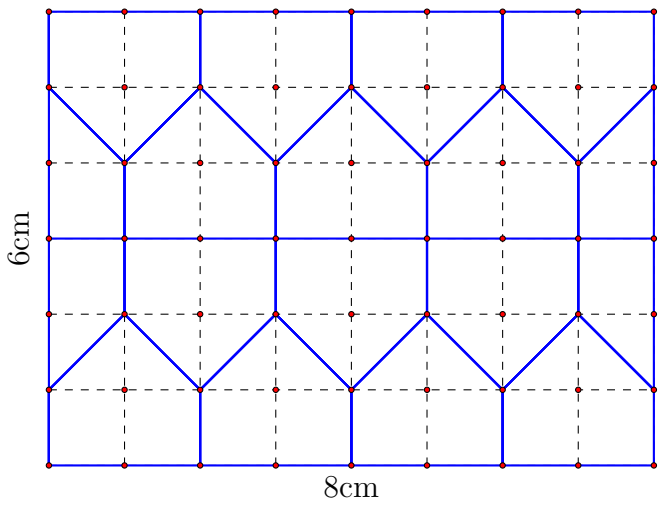
1) Tìm số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng khi chia số đó cho 120 được số dư là 88 và khi chia cho 61 được số dư là 39.

2) Trong một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài 8 m và chiều rộng 6 m người ta trồng 19 cây. Chứng minh rằng trong mọi cách trồng 19 cây đó, có ít nhất hai cây mà khoảng cách vị trí trồng giữa chúng không lớn hơn $\sqrt{5}$ m.

Lời giải.

1) Gọi số tự nhiên có 4 chữ số phải tìm là $x, 1000 \le x \le 9999$.
Theo giả thiết ta có $x = 120n + 88 = 61k + 39$ với $n, k \in \mathbb{N}$.
Từ đó ta có $120n - 60k = k - 49$ suy ra $k - 49$ chia hết cho 60.
Mặt khác ta có:
$1000 \le x \le 9999 \Rightarrow 1000 \le 61k + 39 \le 9999 \Rightarrow \dfrac{961}{61} \le k \le \dfrac{9960}{61}$
$\Rightarrow 15 < k < 164 \Rightarrow -34 < k - 49 < 115$.
Mà $k - 49$ chia hết cho 60 nên $k - 49$ chỉ có thể là $0; 60$.
Với $k = 49 \Rightarrow x = 3028$ (chia 120 dư 28).
Với $k = 109 \Rightarrow x = 6688$ (chia 120 dư 88).
Vậy số cần tìm là 6688.

2) Chia khu vườn hình chữ nhật thành 18 phần như hình vẽ.



Chỉ ra được khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trên cùng một phần nhỏ hơn bằng $\sqrt{5}$ m.
Vì có 19 cây được trồng trong một hình có 18 phần như hình vẽ nên có ít nhất một phần được trồng ít nhất hai cây.
Khẳng định hai cây đó có khoảng cách không lớn hơn $\sqrt{5}$ m.
Kết luận điều phải chứng minh.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 4.

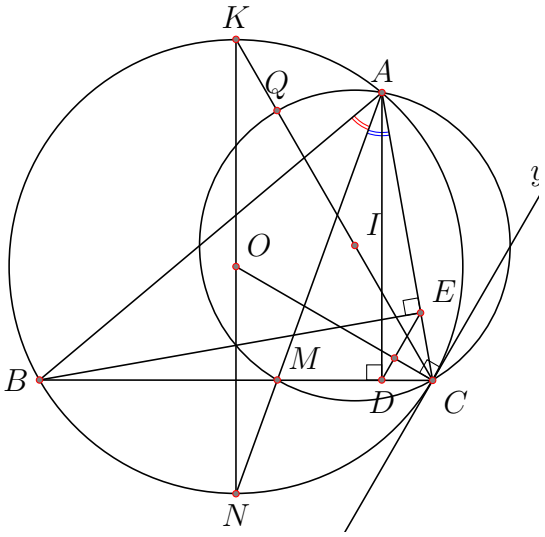
1) Cho đường tròn (O) có dây BC cố định, A là điểm thay đổi trên cung lớn BC (điểm A không trùng với B và C; AB không là đường kính). Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BC và E là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC.

   a) Chứng minh OC vuông góc với DE.

   b) Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại M, cắt đường tròn (O) tại N ($N \neq A$). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$. Chứng minh NO và CI cắt nhau tại một điểm cố định khi A di chuyển trên cung lớn BC của đường tròn (O).

2) Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Chứng minh $AB^3 + BC^3 = 3AB^2.BC$.

Lời giải.



1) a) Ta có $\begin{cases} AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ \\ BE \perp AC \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow E, D$ cùng nhìn cạnh AB dưới một góc vuông nên tứ giác $AEDB$ nội tiếp từ đó suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{DEC}$ (1).
Vẽ tiếp tuyến tại C của đường tròn (O), từ đó suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ACy}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DEC} = \widehat{ACy} \Rightarrow DE \parallel Cy$ (Hai góc ở vị trí so le trong)
Do $OC \perp Cy, DE \parallel Cy \Rightarrow OC \perp DE$.

   b) Đường thẳng CI cắt đường tròn (I) tại Q, đường thẳng NO cắt CQ tại K.
Vì $\widehat{BAN} = \widehat{NAC}$ (vì AN là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$) nên $BN = CN$.
Mặt khác: $OB = OC$ (cùng bằng bán kính) suy ra ON là đường trung trực của BC hay $NK \perp BC$.
$\widehat{QMC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính QC) suy ra $QM \perp BC$.
Từ đó suy ra $QM \parallel KN \Rightarrow \widehat{MQC} = \widehat{NKC}$ (Hai góc ở vị trí đồng vị) (3).
Trong (I): $\widehat{MQC} = \widehat{MAC}$ (Hai góc nội tiếp chắn cung MC) (4).
Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{NKC} = \widehat{MAC}$ hay $\widehat{NKC} = \widehat{NAC}$.
Từ đó suy ra bốn điểm N, A, K, C cùng thuộc đường tròn (O).
Mà đường kính NK của (O) vuông góc với BC nên K cố định.

2) Đặt $BC = a$; $AB = AC = b$, ta phải chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.
Vẽ tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = 60^\circ$ và tia Bx cắt AC tại D. Hạ $AE \perp Bx$ tại E.
Suy ra $BE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{b}{2}$.
Tam giác BCD cân đỉnh B suy ra $BD = a$.
Chỉ ra hai tam giác $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ suy ra $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow CD = \dfrac{BC.BD}{AC} = \dfrac{a^2}{b}$.
Suy ra $AD = b - \dfrac{a^2}{b}$.
Ta có $AE^2 = AB^2 - BE^2 = \dfrac{3b^2}{4}$; $DE = BE - BD = \dfrac{b}{2} - a$.
Thay vào hệ thức $AE^2 = AD^2 - DE^2 \Rightarrow \dfrac{3b^2}{4} = \left(b - \dfrac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2} - a\right)^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$.
Điều phải chứng minh.

Câu 5. Cho hai số thực $a \neq 0; b \neq 0$ thoả mãn $a(ab+1) = a^2b^2 - ab + 1$. Chứng minh rằng $a^3b^3 + 1 \leq 16a^3$.

Lời giải.
Đặt $\dfrac{1}{a} = c$ khi đó $a(ab+1) = a^2b^2 - ab + 1 \Rightarrow b + c = b^2 - bc + c^2$ (4).
Từ $a^3b^3 + 1 \leq 16a^3$ ta được $b^3 + c^3 \leq 16$.
Ta có $T = b^3 + c^3 = (b+c)(b^2 - bc + c^2) = (b+c)^2$.
Mặt khác từ (4) ta có $b + c = (b+c)^2 - 3bc \geq (b+c)^2 - \dfrac{3}{4}(b+c)^2 = \dfrac{1}{4}(b+c)^2 \Rightarrow (b+c)^2 \leq 4(b+c)$. Khẳng định được $0 \leq b + c \leq 4$.
Suy ra $T = (b+c)^2 \leq 16$. Điều phải chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi $a = \dfrac{1}{2}; b = 2$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 182

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI VÒNG 2, 2015

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Câu 1.

a) Cho $a \geq 0, a \neq 1$. Rút gọn biểu thức

$$S = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1\right].$$

b) Cho x, y thỏa mãn: $0 < x < 1, 0 < y < 1$ và

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1.$$

Tính giá trị biểu thức $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.

Lời giải.

1) $S_1 = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$
$= \sqrt{4-4\sqrt{2}+2}.\sqrt[3]{8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}}$
$= \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}.\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}$
$= (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 2$
$S_2 = \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1\right]$
$= \sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1} : \left[\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{2(\sqrt{a}-1)} - 1\right]$
$= \sqrt[3]{(\sqrt{a}-1)^3} : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{2} - 1\right)$ (vì $a \neq 1$ nên $\sqrt{a}-1 \neq 0$
$= (\sqrt{a}-1) : \left(\frac{\sqrt{a}-1}{2}\right) = 2$
Vậy $S = 2 + 2 = 4$
2)
Theo giả thiết $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$
$\Rightarrow x(1-y) + y(1-x) = 1 + xy - x - y$
$\Rightarrow 2x + 2y - 3xy - 1 = 0$
$\Rightarrow -xy = -2(x+y) + 2xy + 1.$
Do đó, $x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2$.
Vậy $P = x + y + \sqrt{(x+y-1)^2} = x + y + |x+y-1|$.
Từ giả thiết ta lại có $\frac{x}{1-x} < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$.

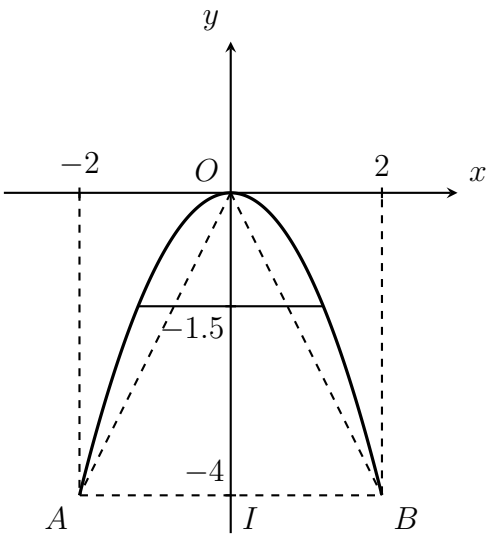
Tương tự $\dfrac{y}{1-y} < 1 \Rightarrow y < \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $0 < x + y < 1$, ta có $P = x + y + 1 - x - y = 1$

Câu 2. Một xe tải có chiều rộng là $2,4$ m và chiều cao là $2,5$ m muốn qua một cái cổng có hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh Parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dầy của cổng).

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi Parabol (P): $y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

2. Hỏi xe tải có qua cổng được không? Tại sao?

Lời giải.
1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, do đã gọi Parabol (P): $y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua nên $O(0;0)$ là tọa độ đỉnh cổng. Gọi A, B là vị trí hai chân cổng và I là trung điểm AB (các điểm A, B, I đều có tung độ âm do (P) nằm dưới trục hoành).
Khi đó $OA = OB = 2\sqrt{5}$, $AB = 4$, $IA = IB = 2$ và A, B là hai điểm đối xứng của nhau qua Oy.
Do $\triangle OAB$ cân tại O và I là trung điểm AB nên $OI \perp AB$ hay $\triangle AOI$ vuông tại I.
Áp dụng định lý Pythago, ta có $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{20 - 4} = 4$.
Do $OI = 4$ và $IA = 2$ nên ta suy ra tọa độ $A(-2,-4), B(2,-4), I(0,-4)$.
Do A thuộc (P) nên tọa độ A thỏa $y = ax^2$ hay $-4 = a.(-2)^2 \Leftrightarrow a = -1$.



2. Để biết xe có qua được cổng hay không ta cần so sánh chiều rộng của xe và chiều rộng của cổng ở độ cao $2,5$ m tức là ở vị trí $y = -1,5$.
Ta sẽ tìm hoành độ giao điểm của đường thẳng (d): $y = -\dfrac{3}{2}$ và đồ thị (P): $y = -x^2$.
Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $-x^2 = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right.$.
Suy ra chiều rộng của cổng ở độ cao $2,5$ m bằng $x_2 - x_1 = 2.\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \sqrt{6}$ m.
Ta có $(\sqrt{6})^2 = 6 > (2,4)^2 = 5,76$ nên $\sqrt{6} > 2,4$.
Vậy xe tải có thể đi qua cổng.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 3. Cho hai số nguyên a, b thỏa mãn $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh rằng a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra $a^2+b^2+1-2ab-2a+2b=4b \Leftrightarrow (b-a+1)^2=4b$

Suy ra $b=\dfrac{(b-a+1)^2}{4}=\left(\dfrac{b-a+1}{2}\right)^2$

Do đó b là số chính phương.

Tương tự, ta có $a^2+b^2+1-2ab-2b+2a=4a \Leftrightarrow (b-a-1)^2=4a$

Suy ra $a=\dfrac{(b-a-1)^2}{4}=\left(\dfrac{b-a-1}{2}\right)^2$

Do đó a là số chính phương.

Mà $\dfrac{b-a+1}{2}-\dfrac{b-a-a}{2}=1$ nên a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Câu 4. Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$, M là trung điểm của cạnh BC, O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO. Chứng minh rằng:

a) $MX \perp BF$.

b) Hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

c) $\dfrac{EF}{FY}=\dfrac{BC}{CD}$.

Lời giải.

a) Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn $(M, \dfrac{BC}{2})$

Ta có: $\angle ACB=\angle XFB$ (cùng bù với $\angle EFB$)

$\angle XBF=\angle ACB$ (cùng chắn cung AB)

nên $\angle XFB=\angle XBF$ suy ra $\triangle XFB$ cân tại X nên $XF=XB$

Mặt khác: $FM=BM(=\dfrac{1}{2}BC)$ nên XM là đường trung trực của FB. Vậy $XM \perp BF$

b) Ta có: $\angle BFD=\angle ACB$ (cùng bù với $\angle AFD$)

mà $\angle ACB=\angle XFB$ (cùng chắn cung AB)

nên $\angle BFD=\angle XFB=\angle XBF$

mà ta có: $\angle BXM+\angle XBF=90^\circ$ và $\angle DFH+\angle BFD=90^\circ$

suy ra $\angle BXM=\angle DFH$

Ta có: $\angle BAC=\angle BOS\left(=\dfrac{1}{2}\angle BOC\right)$

mà $\angle BAC+\angle ABE=90^\circ$ và $\angle BOS+\angle BSO=90^\circ$

Suy ra $\angle ABE=\angle BSO=\angle FDH$

Xét $\triangle FDH$ và $\triangle XMS$:

$\angle BXM=\angle DFH$

$\angle FDH=\angle BSO$

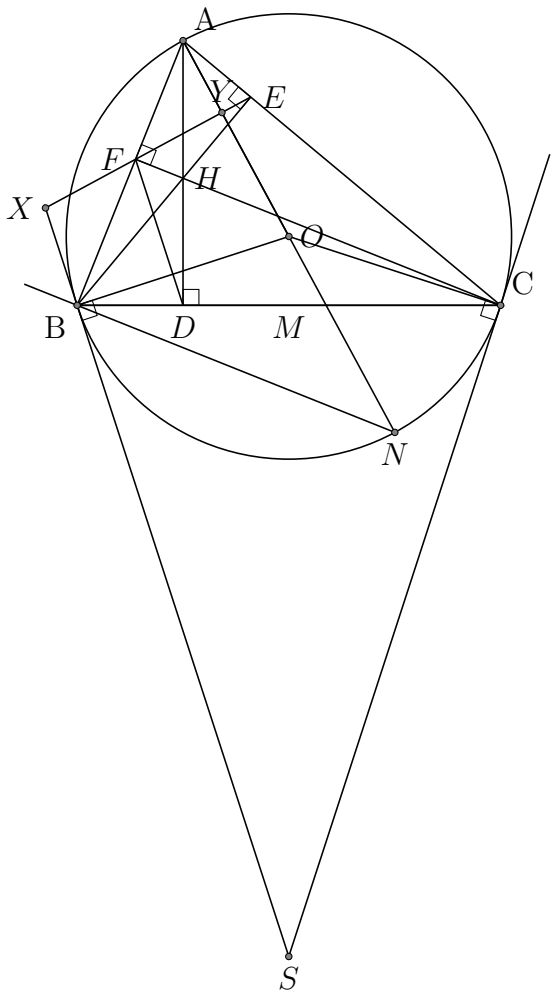
Suy ra: $\triangle FHD \backsim \triangle SMX$(g.g) c) Kéo dài AO cắt (O) tại N

Ta có: $\angle NBC=\angle NAC, \angle AEF=\angle ABC$

Suy ra: $\angle NAC+\angle AEF=\angle ABC+\angle NBC=90^\circ$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Suy ra: $AD \perp EF$
Do đó: $\triangle AYF \backsim \triangle ADC$
Nên $\dfrac{YF}{DC} = \dfrac{AF}{AC}$
$\triangle ABC \backsim \triangle AEF$
Suy ra: $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$



Vậy $\dfrac{EF}{FY} = \dfrac{BC}{DC}$

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh là các điểm nguyên (một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của các điểm đó là các số nguyên). Chứng minh rằng hai lần diện tích của tam giác ABC là một số nguyên.

Lời giải.

Đặt $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2); C(x_3, y_3)$ thì $D(x_1, 0), E(x_2, 0), F(x_3, 0), I(0, y_2), H(0, y_1), K(0, y_3)$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

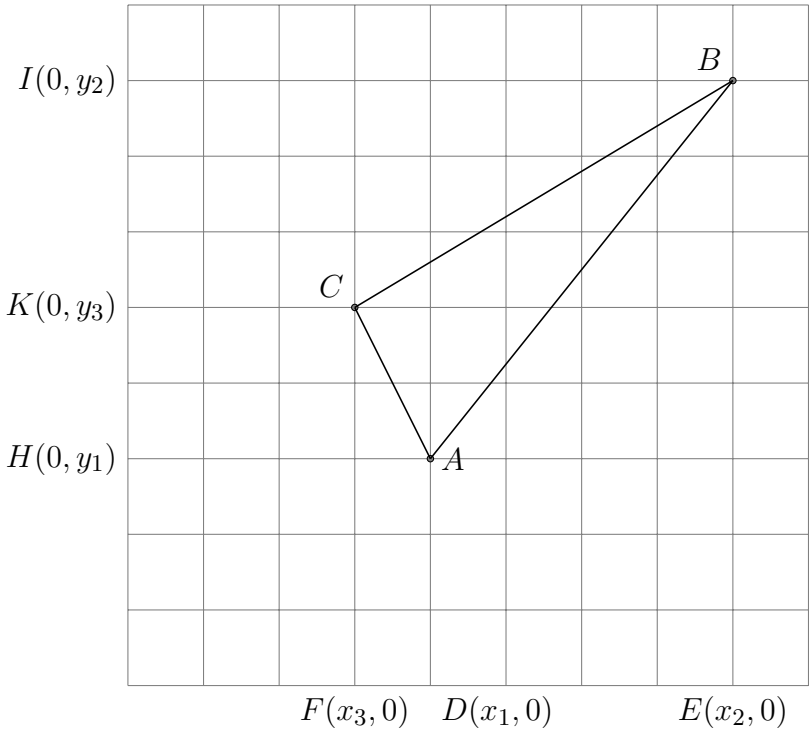
Ta có: $S_{ABC} = S_{BEFC} - S_{ADFC} - S_{ADEB}$

$= \dfrac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - \dfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_1 - x_3) - \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$

$= \dfrac{1}{2}(y_1x_3 + y_2x_1 + y_3x_2 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1)$

$2S_{ABC} = -y_2x_3 + y_3x_2 + y_1x_3 - y_3x_1 - y_1x_2 + y_2x_1$

Vì các tọa độ là các số nguyên nên hai lần diện tích tam giác ABC là một số nguyên.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 183

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN, VÒNG 1, 2015

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1.

1) Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2+3a=b^2+3b=2$

a) Chứng minh rằng $a+b=-3$.

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3=-45$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=5xy \\ 4x^2+y^2=5xy \end{cases}$.

Lời giải.

1) a) Ta có hệ

$$\begin{cases} a^2+3b=2 \\ b^2+3a=2 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2+3(a-b)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+3)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 (\text{loại}) \\ a+b=-3. \end{array}\right.$$

b) Ta có $(a+b)^3=-27 \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-27$
$\Leftrightarrow a^3+b^3-9ab=-27$

Theo giả thiết, $a^2+3a+b^2+3b=4 \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab+3(a+b)=4 \Leftrightarrow ab=-2$.

Vậy $a^3+b^3=-45$.

2) Ta có $x=y=0$ là nghiệm của hệ. Với $y\neq 0$, nhân hai vế của phương trình đầu với y ta được

$$\begin{cases} 2xy+3y^2=5xy^2 \\ 4x^2+y^2=5xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+3y^2=5xy^2 \\ 4x^2-2xy-2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5xy \\ (x-y)(2x+y)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3y=5xy \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3y=5xy \\ 2x+y=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=-\dfrac{4}{5} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Câu 2.

1) Tìm các số nguyên x, y không nhỏ hơn 2 sao cho $xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

2) Với x, y là những số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2+2y+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{3y+1}$.

Lời giải.

1 Ta có $xy-1 \vdots (x-1)(y-1)$ suy ra $xy-1 \vdots xy+1-x-y$. Mặt khác, $xy+1-x-y \vdots xy+1-x-y$. Suy ra $(x-1)+(y-1) \vdots (x-1)(y-1)$, suy ra $x-1 \vdots y-1$ và $y-1 \vdots x-1$. Dẫn đến $x=y$. Ta có $x^2-1 \vdots (x-1)^2$, suy ra $x+1 \vdots x-1 \Rightarrow 2 \vdots x-1 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=3$.

2 Ta có $x^3y^3+2y+1=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{-x^2y^2-1}{2}$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{xy}{3(-x^2y^2-1)+2} = \frac{xy}{-3x^2y^2-1} \\ &\Leftrightarrow 3p^2x^2y^2+2xy+p=0. \end{aligned}$$

Ta có, $\Delta = 4-12p^2$. Phương trình trên có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4-12p^2 \geq 0 \Rightarrow p \leq \sqrt{3}$. Vậy $p_{max}=\sqrt{3}$ khi $xy=-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. Suy ra $y=-\dfrac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\dfrac{27}{52\sqrt{3}}$

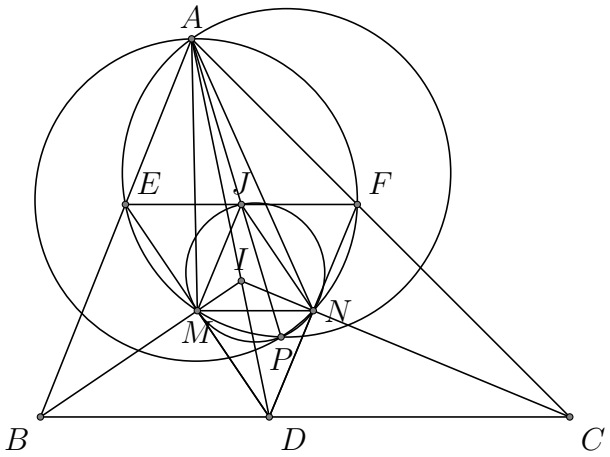
Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC không cân có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I. Đường thẳng AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC, IB.

1) Chứng minh EF song song với BC.

2) Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DE, DF, EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN tại P khác A. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, J cùng nằm trên một đường tròn.

3) Chứng minh rằng ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Lời giải.



Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

1 Vì AD là phân giác, nên $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$ mà ΔBED và ΔCDF cân, suy ra $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{AB}{AC}\Rightarrow BC\parallel EF$.

2 Từ $BC\parallel EF$, suy ra $\widehat{FED}=\widehat{EDB}=\widehat{BED}$ mà $\widehat{APM}=180^\circ-\widehat{AEM}=\widehat{BED}\Rightarrow\widehat{APM}=\widehat{DEF}$. Tương tự ta có $\widehat{DFE}=\widehat{APN}\Rightarrow\widehat{APN}+\widehat{APM}=\widehat{DFE}+\widehat{FED}=\widehat{MPN}$. Mặt khác $\widehat{MJN}=\widehat{MDN}=\widehat{EDF}\Rightarrow\widehat{MJN}+\widehat{MPN}=180^\circ\Rightarrow MPNJ$ nội tiếp.

3 Ta có $\widehat{APM}=\widehat{DEF}$ và $\widehat{JPM}=\widehat{JNM}=\widehat{JEM}\Rightarrow\widehat{JPM}=\widehat{APM}$. Vậy A,P,J thẳng hàng.

Câu 4.

a) Cho bảng ô vuông 2015×2015. Kí hiệu ô (i,j) là ô ở hàng thứ i, cột thứ j. Ta viết các số nguyên dương từ 1 đến 2015 vào các ô của bảng theo quy tắc sau:

i) Số 1 được viết vào ô $(1,1)$.

ii) Nếu số k được viết vào ô (i,j), $(i>1)$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(i-1,j+1)$.

iii) Nếu số k được viết vào ô $(1,j)$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(i-1,j+1)$ như hình dưới đây:

1	3	6	10	...
2	5	9	...	
4	8	...		
7	...			
...				

Khi đó số 2015 được viết vào ô (m,n). Hãy xác định m và n.

b) Giả sử a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ac+abc\le 4$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ac).$$

Lời giải.

1) Theo đề bài, các số nguyên dương được sắp xếp theo từng hàng chéo của bảng: Hàng chéo thứ nhất có 1 số, hàng chéo thứ hai có 2 số, ... Giả sử số x nằm ở hàng chéo thứ k thì ta có: $\dfrac{k(k-1)}{2}<x\le\dfrac{k(k+1)}{2}\Rightarrow\dfrac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\le k<\dfrac{1+\sqrt{1+8x}}{2}\Rightarrow k=\left[\dfrac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\right]$. Áp dụng $x=2015$ ta có $k=\left[\dfrac{-1+\sqrt{1+8.2015}}{2}\right]=63$.

Số đầu tiên ở hàng chéo thứ $k=63$ là $\dfrac{k(k-1)}{2}+1=1954$.

Như vậy số 2015 nằm ở vị trí thứ $2015-1954+1=62$ của hàng chéo thứ 63 (Vị trí áp chót), tạo độ của nó là $(2,62)$.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

2) Theo bất đẳng thức Cauchy cho 4 số ta có $4 \geq abc+ab+bc+ac \geq 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Rightarrow abc \leq 1$ $\Leftrightarrow a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab+bc+ac)$ (1)

Đặt $x=\sqrt[3]{a^2}, y=\sqrt[3]{b^2}, z=\sqrt[3]{c^2}$ $(a,b,c>0)$

(1) $\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \geq 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$

Ta nhận thấy

$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)$

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y) \geq 0$ với mọi số thực không âm x,y,z.

Ta cần chứng minh $x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y) \geq 0$ với mọi số thực không âm x,y,z.

Do vai trò x,y,z như nhau, giả sử $x \geq y \geq z \Leftrightarrow z(z-x)(z-y) \geq 0$.

Ta xét

$$\begin{aligned} x(x-z)-y(y-z) &= x^2-xz+yz-y^2=(x-y)(x+y-z) \geq 0 \\ &\Rightarrow x(x-z)(x-y)-y(y-z)(x-y) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-z)(x-y)+y(y-z)(y-x) \geq 0. \\ &\Rightarrow x(x-z)(x-y)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y) \geq 0. \end{aligned}$$

Do đó

$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z) \geq 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$.

Dấu bằng khi và chỉ khi $x=y=z=0 \Rightarrow a=b=c=1$.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 184

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HƯNG YÊN, 2015

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{x-1}$ với $x\geq 0; x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để $\dfrac{1}{A}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}A&=\left[\frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right]\cdot(x-1)\\&=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}\cdot(x-1)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot(x-1)=\left(\sqrt{x}+1\right)^2\end{aligned}$$

b) Vì $\left(\sqrt{x}+1\right)^2\geq 1$ với mọi $x\geq 0$ suy ra $0<\dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\leq 1$.

Mặt khác $\dfrac{1}{A}\in\mathbb{N}$ nên $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)^2=1\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn).

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P):y=x^2$. Xác định tọa độ các điểm A,B trên (P) để tam giác OAB đều.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $(x+2)^2(y-2)+xy^2+26=0$.

Lời giải.

a) Vì $A,B\in(P):y=x^2$ và $OA=OB$ nên A,B đối xứng nhau qua Oy.
Gọi $A\left(a;a^2\right),B\left(-a;a^2\right),a\neq 0$. Từ giả thiết ta có

$$OA=AB\Leftrightarrow\sqrt{a^2+a^4}=2|a|\Leftrightarrow a^2+a^4=4a^2$$

$$\Leftrightarrow a^4=3a^2\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=0\\&a=\pm\sqrt{3}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{3}.$$

Từ đó ta được $A\left(\sqrt{3};3\right),B\left(-\sqrt{3};3\right)$ hoặc $A\left(-\sqrt{3};3\right),B\left(\sqrt{3};3\right)$.

b) Đặt $z=y-2$, phương trình đã cho trở thành

$$(x+2)^2z+(z+2)^2x+26=0$$

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+4)z+(z^2+4z+4)x+26=0$$
$$\Leftrightarrow (x+z+8)(xz+4)=6$$

Do $x+z+8$ và $xz+4$ là các số nguyên nên chỉ có các trường hợp $(x+z+8;xz+4)$ bằng

$$(6;1),(1;6),(-6;-1),(-1;-6),(3;2),(2;3),(-3;-2),(-2;-3)$$

Sử dụng định lí Viet đảo ta được x,z, từ đó ta có các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình đã cho là

$$(1;-1),(-3;3),(-10;3),(1;-8).$$

Câu 3.

a) Giải phương trình với $x^2+\dfrac{8x^3}{\sqrt{9-x^2}}=9$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3y=y^3+3x \\ x^2+2y^2=1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Với điều kiện $-3<x<3$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{8x^3}{\sqrt{9-x^2}}=9-x^2 \Leftrightarrow 8x^3=\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow 2x=\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 4x^2=9-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

b) Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3-y^3-3(x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-3)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=y & (1) \\ x^2+xy+y^2=3. & (2) \end{bmatrix}$$

Từ phương trình $x^2+2y^2=1$ suy ra $x^2\leq 1, y^2\leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow xy<1 \Rightarrow x^2+y^2+xy<3$. Bởi vậy, phương trình (2) vô nghiệm.

Với $x=y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $3x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và $AB>AC$. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D (D khác A) và cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại điểm E. Gọi F là giao điểm của BD và AC.

a) Chứng minh $EF \parallel BC$.

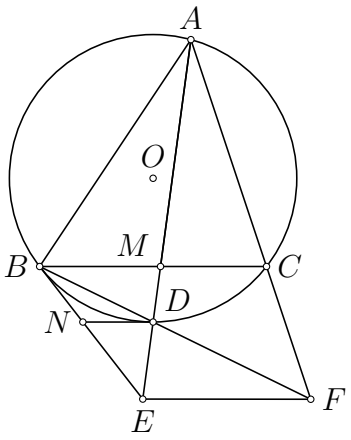
Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

b) Gọi M là giao điểm của AD và BC. Các tiếp tuyến tại B, D của đường tròn (O) cắt nhau tại N. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{BN}=\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{BM}$.

Lời giải.

a)

Do AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên D là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$, suy ra $\text{sđ}\overset{\frown}{BD}=\text{sđ}\overset{\frown}{CD}$.
Theo tính chất của góc có đỉnh ở ngoài đường tròn ta có: $\widehat{AFB}=\dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB}-\text{sđ}\overset{\frown}{DC}\right)$ và $\widehat{AEB}=\dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB}-\text{sđ}\overset{\frown}{BD}\right)$, suy ra $\widehat{AFB}=\widehat{AEB}$, do đó tứ giác $ABEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BAE}=\widehat{BFE}$.
Lại có $\widehat{BAE}=\widehat{CBD}$ (tính chất nội tiếp)$\Rightarrow\widehat{CBF}=\widehat{BFE}$.
Vậy $BC\parallel EF$.



b) Do $\widehat{CBD}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}=\widehat{BDN}=\widehat{DBE}$ nên $DN\parallel BC$ và BD là phân giác của $\widehat{MBE}$, suy ra $\dfrac{DE}{DM}=\dfrac{NE}{NB}$ và $\dfrac{DE}{DM}=\dfrac{BE}{BM}$. Do đó

$$\frac{NE}{NB}=\frac{BE}{BM}\Leftrightarrow\frac{NE+NB}{NB}=\frac{BE+BM}{BM}\Leftrightarrow\frac{BE}{BN}=\frac{BE+BM}{BM}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{BN}=\frac{BE+BM}{BE.BM}\Leftrightarrow\frac{1}{BN}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{BM}.$$

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng $\dfrac{HB}{HC}+\dfrac{MB}{MC}\geq 2\dfrac{AB}{AC}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

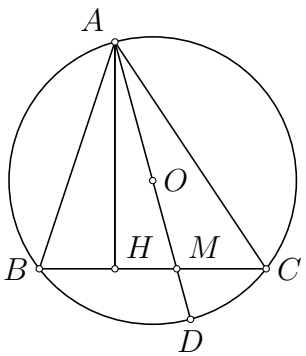
Lời giải.

Gọi AD là đường kính của đường tròn (O), ta có $\widehat{HBA}=\widehat{CDA}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) và $\widehat{AHB}=\widehat{ACD}=90^\circ$. Suy ra $\triangle HBA\backsim\triangle CDA$ (g-g) và $\triangle HCA\backsim\triangle BDA$ (g-g). Do đó

$$\frac{HB}{CD}=\frac{BA}{DA};\frac{HC}{BD}=\frac{CA}{DA}\Rightarrow\frac{HB}{HC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{DC}{DB}.(1)$$

Lại có $\triangle AMB\backsim\triangle CMD$ (g-g); $\triangle AMC\backsim\triangle BMD$ (g-g) suy ra

$$\frac{MB}{MD}=\frac{AB}{CD};\frac{MC}{MD}=\frac{AC}{BD}\Rightarrow\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{DB}{DC}.(2)$$



Cộng vế với vế của $(1),(2)$ và áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta được

$$\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}=\left(\frac{DC}{DB}+\frac{DB}{DC}\right)\cdot\frac{AB}{AC}\geq 2\frac{AB}{AC}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $DB=DC\Leftrightarrow AB=AC\Leftrightarrow\triangle ABC$ cân tại A.

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Câu 6. Trong hình vuông cạnh 5cm, đặt 2015 đường tròn có đường kính $\frac{1}{20}$cm. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất 20 đường tròn trong 2015 đường tròn trên.

Lời giải.

Dựng 106 đường thẳng cùng song song với một cạnh của hình vuông, chia hình vuông thành 107 hình chữ nhật bằng nhau, mỗi hình có chiều rộng là $\frac{5}{107}$cm. Do $\frac{5}{107} < \frac{1}{20}$ nên mỗi đường tròn đều bị cắt bởi ít nhất một đường thẳng đã dựng.

Có 106 đường thẳng, nếu mỗi đường thẳng cắt nhiều nhất 19 đường tròn đã cho thì có nhiều nhất 2014 đường tròn bị cắt.

Vì có 2015 đường tròn, nên tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất 20 đường tròn đã cho.

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
ĐỀ SỐ 185

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI , 2014

Họ và tên thí sinh: ..... *Lớp:* .....

Câu 1. Cho các số thực a, b với $a \neq b$. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{\dfrac{(a-b)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}=0.$$

Lời giải.

Đặt $\sqrt{a}=x;\sqrt{b}=y(x,y>0)$. Khi đó $a=x^2;b=y^2(x^2,y^2>0)$ và $x^2+xy+y^2>0;x+y>0;x-y\neq 0$.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{\frac{\left(x^2-y^2\right)^3}{(x-y)^3}-y^3+2x^3}{x^3-y^3}+\frac{3x^2+3xy}{y^2-x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^3-y^3+2x^3}{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}+\frac{3x^2+3xy}{y^2-x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x\left(x^2+xy+y^2\right)}{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}+\frac{3x(x+y)}{(y-x)(y+x)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{x-y}+\frac{3x}{-(x-y)}=0$$

$\Leftrightarrow 0=0$(luôn đúng).

Vậy đẳng thức đã cho được chứng minh.

Câu 2. Cho quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng, một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại sửa mất 10 phút rồi đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đầu 10 km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu không thay đổi và vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không thay đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ.

Lời giải.

Gọi v_1(km/h) là vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu.

Khi đó (v_1-10)(km/h) là vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại.

Điều kiện : $v_1-10>0$ hay $v_1>10$

Thời gian để xe máy đi hết $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu là $\frac{90}{v_1}$(h)

Thời gian để xe máy đi hết $\frac{1}{4}$ quãng đường đầu là $\frac{30}{v_1-10}$(h)

Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

Thời gian xe máy dừng lại để sửa là : $\frac{1}{6}$(h)

Theo đề bài, tổng thời gian xe máy đi từ A đến B, tính cả thời gian dừng lại để sửa là : $\frac{14}{3}$(h)

Ta có phương trình :

$$\frac{90}{v_1}+\frac{30}{v_1-10}+\frac{1}{6}=\frac{14}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{90v_1-900+30v_1}{v_1(v_1-10)}=\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow 9v_1^2-330v_1+1800=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v_1=30 \\ v_1=\frac{20}{3}\end{array}\right.$$

Do điều kiện $v_1>10$ nên chỉ nhận ngiệm $v_1=30$

Vậy $v_1=30$(km/h)

Thời gian để xe máy đi hết $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu là : $\frac{90}{v_1}=\frac{90}{30}=3$(h)

Vì thời điểm xe máy bị hỏng cũng là thời điểm xe máy đi hết $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu nên xe máy bị hỏng lúc $7h+3h=10$ h

Vậy xe máy bị hỏng lúc 10 h cùng ngày.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) : $y=x^2$ và đường thẳng d : $y=-\frac{2}{3}(m+1)x+\frac{1}{3}$(với m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Gọi x_1,x_2 là hoành độ giao điểm của d và (P), đặt $f(x)=x^3+(m+1)x^2-x$. Chứng minh đẳng thức $f(x_1)-f(x_2)=-\frac{1}{2}(x_1-x_2)^3$.

Lời giải.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$x^2=-\frac{2}{3}(m+1)x+\frac{1}{3}(1)$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{2}{3}(m+1)x-\frac{1}{3}=0$

$\Leftrightarrow 3x^2+2(m+1)x-1=0$

Xét $\Delta'=(m+1)^2-3(-1)=(m+1)^2+3>0$ với mọi m

$\Rightarrow pt(1)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

$\Rightarrow$ Đường thẳng (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt với mọi m (đccm).

b) Xét

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= 7x_1^3+(m+1)x_1^2-x_1-x_2^3-(m+1)x_2^2+x_2 \\ &= (x_1^3-x_2^3)-(x_1-x_2)+(m+1)(x_1^2-x_2^2) \\ &= (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_x^2-1+(m+1)(x_1+x_2)) \\ &= (x_1-x_2)\left[x_1^2+x_1x_2+x_2^2-1+(m+1)(x_1+x_2)\right] \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Vi-ét cho pt(1) với 2 nghiệm $x_1;x_2$, ta được:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-2(m+1)}{3}(2) \\ x_1x_2=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

Từ (2) suy ra: $m+1=\dfrac{-3}{2}(x_1+x_2)$

Ta có: $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-1+(m+1)(x_1+x_2)$

$=(x_1+x_2)^2-x_1x_2-1-\frac{3}{2}(x_1+x_2)^2$

$=-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)^2-\dfrac{2}{3}$

$=-\dfrac{1}{2}\left[(x_1-x_2)^2+4x_1x_2\right]-\dfrac{2}{3}$

$=-\dfrac{1}{2}\left[(x_1-x_2)^2-\dfrac{4}{3}\right]-\dfrac{2}{3}$

$=-\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)^2$

Do đó

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= -\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2(x_1-x_2) \\ &= -\frac{1}{2}(x_1-x_2)^3(\text{đccm}) \end{aligned}$$

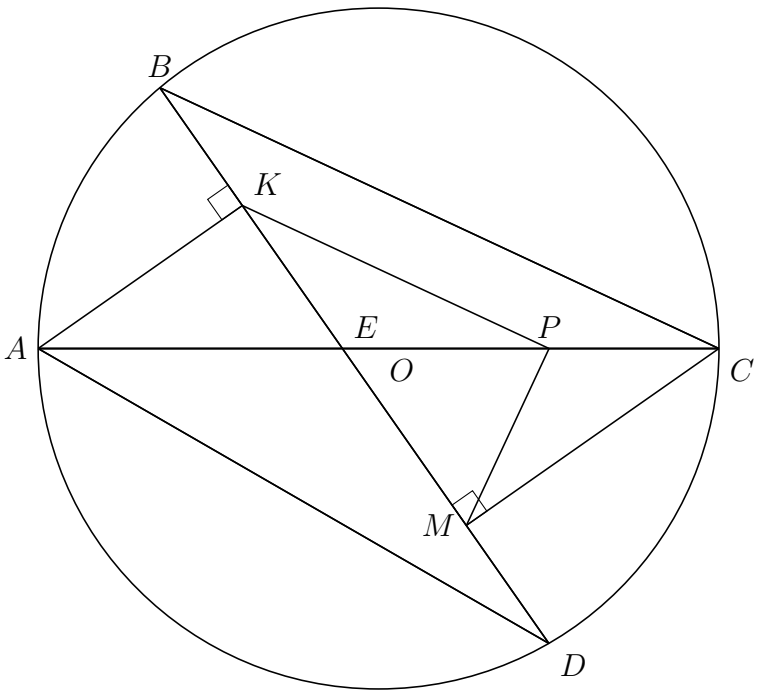
Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC=2R$. Gọi K và M lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn $BE(K\neq B, K\neq E)$. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AC tại P.

a) Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $KP\perp PM$.

c) Biết $\widehat{ABD}=60^\circ$ và $AK=x$. Tính BD theo R và x.

Lời giải.



Tuyển tập đề thi vào lớp 10 chuyên

a) Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.
Xét tứ giác $AKPD$ có $\widehat{APK} = \widehat{ACB}$ (2 góc ở vị trí đồng vị)
Mặt khác: $\widehat{ACB} = \widehat{ADK}$(góc nội tiếó cùng chắn cung AB)
$\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{APK}$
$\Rightarrow ADPK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $KP \perp PM$.
Theo câu a), tứ giác $AKPD$ nội tiếp nên $\widehat{APD} = \widehat{AKD} = 90^\circ$ và $\widehat{DKP} = \widehat{DAP}$
Xét tứ giác $DMPC$ có $\widehat{DMC} = \widehat{DPC} = 90^\circ$
$\Rightarrow DMPC$ nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{DCA}$
mà $\widehat{DCA} + \widehat{DAC} = 90^\circ$ và $\widehat{PMK} + \widehat{PKM} = 90^\circ$
$\Rightarrow KP \perp PM$ (đccm)

c) Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x .
Xét tam giác ADC vuông tại D có $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 60^\circ$ nên:
$AD = 2R.\sin 60 = R\sqrt{3}$ và $CD = 2R.\cos 60 = R$
Xét tam giác vuông AKB có $AB = \dfrac{AK}{\sin 60} = \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}$
Xét tam giác ABC vuông tại C có $BC = \sqrt{4R^2 - \dfrac{4x^2}{3}}$
Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, ta có:
$AC.BD = AD.BC + AB.CD$
$\Leftrightarrow 2R.BD = R\sqrt{3}\sqrt{4R^2 - \dfrac{4x^2}{3}} + \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}.R$
$\Leftrightarrow BD = \sqrt{3R^2 - x^2} + \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

Câu 5. Giải phương trình:
$$\frac{x(x^2-56)}{4-7x} - \frac{21x+22}{x^3+2} = 4.$$

Lời giải.
Điều kiện : $\begin{cases} x \neq \dfrac{4}{7} \\ x \neq -2 \end{cases}$
$pt \Leftrightarrow \dfrac{x(x^2-56)}{4-7x} - 5 - \dfrac{21x+22}{x^3+2} + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x^3-56x-20+35x}{4-7x} - \dfrac{21x+22-x^3-2}{x^3+2} = 0$
$\Leftrightarrow (x^3-21x-20)(\dfrac{1}{4-7x} + \dfrac{1}{x^3+2})$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-5)(x+4)\dfrac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(4-7x)(x^3+2)} = 0$

Nhóm: https://www.facebook.com/groups/GeoGebraPro/

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \\ x = -4 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$