

CHUYÊN ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ TẬP HỢP

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

I/TẬP HỢP – PHẦN TỬ CỦA TẬP HỢP

1/ Trong toán học và khoa học tính toán, khái niệm tập hợp liên quan đến một nhóm các đối tượng không được sắp thứ tự gọi là phần tử của tập hợp.

Ví dụ 1:

a/ Tập hợp A các phần tử a, b, c, x, y được viết như sau:

$$A = \{a, b, c, x, y\} \text{ hoặc } A = \{b, x, c, y, a\}$$

Trong đó a, b, c, x, y gọi là các phần tử của tập hợp.

b/ Tập hợp B các số tự nhiên nhỏ hơn 100 được như sau:

$$B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$$

2/ Số phần tử của tập hợp

- Một tập hợp có thể không có, có một hay nhiều phần tử.
- Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập hợp rỗng. Kí hiệu $\emptyset$

Ví dụ 2:

- Tập hợp A (ở ví dụ trên) có 5 phần tử.
- Tập hợp B (ở ví dụ trên) có 100 phần tử.
- Tập hợp C các số tự nhiên nhỏ hơn 0 không có phần tử nào. Khi đó ta viết $C \neq \emptyset$.
- Tập hợp các số tự nhiên từ $a \rightarrow b$, hai số kế tiếp cách nhau d đơn vị có
 $(b - a) : d + 1$ (phần tử)

3/. Các kí hiệu $\in, \notin$

Ta viết:

$a \in A$: Đọc là a thuộc A (hoặc a là phần tử của tập hợp A)

$a \notin B$: Đọc là a không thuộc B (hoặc a không phải là phần tử của tập hợp B)

II/TẬP HỢP CON:

1/ Tập hợp D là 1 tập hợp con của tập hợp C nếu mỗi phần tử của D đều thuộc C

2/ Kí hiệu $D \subset C$. Đọc là: D là tập hợp con của C (hoặc D chứa trong C, hoặc C chứa D)

3/ Mỗi tập hợp đều là 1 tập hợp của chính nó.

4/ Tập hợp rỗng là tập hợp con của mọi tập hợp.

$$\text{Ví dụ 3: } C = \{a, b, x, y\}; D = \{x, y\} \Rightarrow D \subset C; D \subset D; C \subset C$$

5/ Nếu 1 tập hợp có n phần tử thì số tập hợp con của nó là 2^n

III/HAI TẬP HỢP BẰNG NHAU:

Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau khi mọi phần tử của A đều thuộc B và mọi phần tử của B đều thuộc A.

Kí hiệu: $A = B$

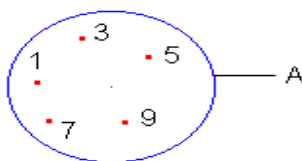
Ví dụ 4: $A = \{a, b, c, x\}; B = \{x, c, b, a\}$

Ta có $A = B$

IV/HỌA TẬP HỢP:

Tập hợp được minh họa bởi một vòng kín, bên trong vòng có các phần tử của tập hợp đó.

Ví dụ 5: Tập hợp $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ được minh họa như sau:



V/CÁCH VIẾT TẬP HỢP: Có hai cách:

1/ Viết bằng cách liệt kê các phần tử

Ví dụ: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

2/ Viết bằng cách chỉ ra các tính chất đặc trưng của các phần tử của nó

Ví dụ: Tập hợp B ở ví dụ 1b có thể viết: $B = \{x / x \in \mathbb{N}; x < 100\}$

Lưu ý: Khi viết các tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử $\rightarrow$ Mỗi phần tử của tập hợp chỉ được viết một lần.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I/ RÈN KĨ NĂNG VIẾT TẬP HỢP, TẬP HỢP CON, DÙNG KÍ HIỆU.

Bài tập 1: Viết tập hợp A các số tự nhiên lớn hơn 7 và nhỏ hơn 12 bằng 2 cách.

Hướng dẫn

- Bằng cách liệt kê các phần tử: $A = \{8; 9; 10; 11\}$

- Bằng cách nêu tính chất đặc trưng: $A = \{x \in \mathbb{N} / 7 < x < 12\}$

Bài tập 2: Viết tập hợp B các chữ cái trong cụm chữ “SÔNG HỒNG”

Hướng dẫn

$B = \{S, O, N, G, H\}$ hoặc $B = \{O, G, N, H, S\}, \dots$ đều đúng.

Bài tập 3: Cho 2 tập hợp $A = \{m, n, p\}; B = \{x, y, z\}$. Điền vào ô vuông:

$n \square A; p \square B; m \in \square$

Hướng dẫn

$n \in A; p \notin B; m \in \boxed{A}$ hoặc $m \in \boxed{B}$

Bài tập 4: Nhìn các hình 1 và 2, viết các tập hợp A, B, C:



Hình 1

Hướng dẫn

$$A = \{m, n, 4\} ; B = \{\text{Bàn}\} ; C = \{\text{Bàn} ; \text{ghế}\}$$

Bài tập 5: Viết các tập hợp sau và cho biết mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử ?

- a/ Tập hợp A các số tự nhiên x mà $x - 5 = 13$
- b/ Tập hợp B các số tự nhiên x mà $x + 8 = 8$
- c/ Tập hợp C các số tự nhiên x mà $0.x = 0$
- d/ Tập hợp D các số tự nhiên x mà $x.0 = 7$

Hướng dẫn

- a/ $A = \{18\} \rightarrow$ có 1 phần tử
- b/ $B = \{0\} \rightarrow$ có 1 phần tử
- c/ $C = \mathbb{N} \rightarrow$ có vô số phần tử
- d/ $A = \emptyset \rightarrow$ không có phần tử nào

Bài tập 6: Cho các tập hợp $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $C = \{0, 5, 10, 15, 20\}$

- a/ Viết tập hợp M các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.
- b/ Viết tập hợp N các phần tử hoặc thuộc B, hoặc thuộc C.
- c/ Viết tập hợp R các phần tử thuộc B nhưng không thuộc C.

Hướng dẫn

- a/ $M = \emptyset$
- b/ $N = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 15, 20\}$
- c/ $R = \{1, 3, 7, 9\}$

Bài tập 7: Viết các tập hợp và cho biết mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử.

- a/ Tập hợp các số tự nhiên không vượt quá 50
- b/ Tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 8 nhưng nhỏ hơn 9

Hướng dẫn

- a/ $A = \{0, 1, 2, \dots, 49, 50\}$ hay $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 50\}$ có 51 phần tử.

b/ Không có số tự nhiên nào nằm giữa 2 số tự nhiên liên tiếp 8 và 9 nên tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 8 nhưng bé hơn 9 là $\emptyset \rightarrow$ số phần tử nào của tập hợp bằng 0

Bài tập 8: Cho $A = \{0\}$ có thể nói $A = \emptyset$ hay không?

Hướng dẫn

$A = \{0\} \rightarrow A$ có phần tử là chữ số 0. còn tập $\emptyset$ không có phần tử nào nên không thể nói $A = \emptyset$ được.

Bài tập 9: Viết tập hợp A các số tự nhiên nhỏ hơn 6 và tập hợp B các số tự nhiên nhỏ hơn 8 rồi dùng kí hiệu $\subset$ để thể hiện mối quan hệ giữa 2 tập hợp trên.

Hướng dẫn

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \subset B \text{ hay } B \supset A$$

Bài tập 10: Cho tập hợp $A = \{8, 10\}$. Điền kí hiệu $\in$ hoặc $\subset$ vào ô vuông

a/ $8 \square A$

b/ $\{10\} \square A$

c/ $\{8, 10\} \square A$

Hướng dẫn

a/ $8 \in A$

b/ $\{10\} \subset A$

c/ $\{8, 10\} \subset A$

Bài tập 11: Cho 2 tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{a, b\}$

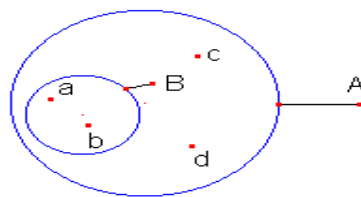
a/ Dùng kí hiệu để $\subset$ thể hiện quan hệ giữa A và B .

b/ Dùng hình vẽ để minh họa 2 tập hợp A, B

Hướng dẫn

a/ $A \supset B$ hay $B \subset A$

b/



Bài tập 12: Tập hợp $M = \{a, b, c\}$. Viết các tập hợp con của tập hợp M sao cho mỗi tập hợp con đó có 2 phần tử.

Hướng dẫn

$$\{a, b\} ; \{a, c\} ; \{b, c\}$$

Bài tập 13: Gọi A là tập hợp số học sinh của lớp 6A có 2 điểm 10 trở lên, B là tập hợp số của học sinh lớp 6A có 3 điểm 10 trở lên, M là tập hợp số của học sinh lớp 6a có 4 điểm 10 trở lên. Dùng kí hiệu để thể hiện quan hệ của 2 trong 3 tập hợp nói trên.

Hướng dẫn

Một học sinh lớp 6A có 3 điểm 10 trở lên cũng là người có 2 điểm 10 trở lên.

Vậy $B \subset A$ hay $A \supset B$

Tương tự ta có $M \subset A; M \subset B$

Bài tập 14: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 4. Trong các cách viết sau đây cách viết nào sai ? Vì sao ?

a/ $A = \{0, 2, 3, 1\}$

b/ $A = \{0, 1, 2, 3, 1\}$

c/ $A = \{0, 1, 2, 3\}$

d/ $A = \{0, 1, 2, 0, 3\}$

Hướng dẫn

Trong tập hợp mỗi phần tử chỉ viết 1 lần nên b và d sai.

Bài tập 15: Dựa vào đâu khi ta viết $A = \{x, y, z\}$ thì ta biết rằng $x \neq y; y \neq z; z \neq x$

Hướng dẫn

Lập luận như bài tập 15

Bài tập 16: Cho $A = \{+, -, ., :\}$, $B = \{x, +, :, -\}$; $C = \{:, -, x, +\}$. Trong các cách viết sau đây, cách nào viết đúng, cách nào viết sai ?

a/ $A \neq B$

b/ $B = C$

c/ $A = C$

Hướng dẫn

a/. Sai

b/. đúng

c/. đúng

Bài tập 17: Cho $R = \emptyset$; $B \neq \emptyset$. Trong các cách viết sau đây cách viết nào đúng, cách viết nào sai ?

a/. $R \subset R$

b/. $R = R$

c/. $R \subset B$

d/. $B \subset R$

e/. $B \in B$

f/. $B = B$

Hướng dẫn

a/. đúng

b/. đúng

c/. đúng

d/. sai

e/. sai

f/. đúng

Bài tập 18: Cho 2 tập hợp $A = \{m, n, p, q, r\}$ và $B = \{m, p\}$

- a/. Viết tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.
- b/. Viết tập hợp các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.
- c/. Viết tập hợp C sao cho $C \subset A$ và $B \subset C$

Hướng dẫn

- a/. $\{n, p, r\}$
- b/. $\{m\}, \{p\}, \{m, p\}$
- c/. $C = \{m, n, p\}$ hay $C = \{m, p, q, r\}$ hay ...

Bài tập 19. Cho hai tập hợp $R = \{a \in \mathbb{N} \mid 75 \leq a \leq 85\}$; $S = \{b \in \mathbb{N} \mid 75 \leq b \leq 91\}$;

- a) Viết các tập hợp trên;
- b) Mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử;
- c) Dùng kí hiệu $\subset$ để thực hiện mối quan hệ giữa hai tập hợp đó.

Hướng dẫn

- a) $R = \{75; 76; 77; 78; 79; 80; 81; 82; 83; 84; 85\}$
 $S = \{75; 76; 77; 78; 79; 80; 81; 82; 83; 84; 85; 86; 87; 88; 89; 90; 91\}$
- b) Tập R có 11 phần tử. Tập S có 17 phần tử
- c) $R \subset S$

Bài tập 20. Viết các tập hợp sau và cho biết mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử:

- a) Tập hợp A các số tự nhiên x mà $17 - x = 5$.
- b) Tập hợp B các số tự nhiên y mà $15 - y = 18$.
- c) Tập hợp C các số tự nhiên z mà $13 : z > 6$.
- d) Tập hợp D các số tự nhiên x, $x \in \mathbb{N}^*$ mà $2.x + 1 < 100$.

Hướng dẫn

- a) $17 - x = 5 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow$ Tập A có một phần tử là 12
- b) $15 - y = 18 \Rightarrow$ Vì $15 < 18 \Rightarrow$ Không có số tự nhiên y thỏa mãn
 $\Rightarrow$ Tập B không có phần tử nào (Tập rỗng)
- c) chỉ có $z = 1$ thỏa mãn $\Rightarrow$ Tập C có một phần tử là 1
- d) Ta có $2.x + 1 < 100 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 47, 48, 49\} \Rightarrow$ Tập D có 49 phần tử

Bài tập 21: Viết các tập hợp sau rồi tìm số phần tử của mỗi tập hợp đó:

- a) Tập hợp A các số tự nhiên x mà $8 : x = 2$
- b) Tập hợp B các số tự nhiên x mà $x + 3 < 5$
- c) Tập hợp C các số tự nhiên x mà $x - 2 = x + 2$
- d) Tập hợp D các số tự nhiên x mà $x : 2 = x : 4$
- e) Tập hợp E các số tự nhiên x mà $x + 0 = x$.

Hướng dẫn

- a) Tập hợp A các số tự nhiên x mà $8 : x = 2$
 $\Rightarrow x = 8 : 2 = 4$
 $\Rightarrow A = \{4\}$.
- b) Tập hợp B các số tự nhiên x mà $x + 3 < 5$
 $\Rightarrow x < 2$
 $\Rightarrow A = \{0; 1\}$.
- c) Tập hợp C các số tự nhiên x mà $x - 2 = x + 2$
 $\Rightarrow 0.x = 4$
 $\Rightarrow A = \emptyset$.
- d) Tập hợp D các số tự nhiên x mà $x : 2 = x : 4$
 $\Rightarrow x = 0$
 $\Rightarrow A = \{0\}$.
- e) Tập hợp E các số tự nhiên x mà $x + 0 = x$
 $\Rightarrow x = x$
 $\Rightarrow A = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Bài tập 22: Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

- a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2.
- b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3.

Hướng dẫn

a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2.

$$A = \{20; 31; 42; 53; 64; 75; 86; 97\}$$

b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3.

$$B = \{102; 120; 111; 201; 210\}.$$

Bài tập 23: Cho các tập hợp: $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$

Viết các tập hợp vừa là tập hợp con của A , vừa là tập hợp con của B .

Hướng dẫn

$$\emptyset; \{3; 4\}; \{3\}; \{4\}.$$

Bài tập 24: Cho tập hợp: $A = \{1; 2; 3; 4\}$

- a) Viết các tập hợp con của A mà mọi phần tử của nó đều là số chẵn.
- b) Viết các tập hợp con của A .

Hướng dẫn

a) Viết các tập hợp con của A mà mọi phần tử của nó đều là số chẵn.

$$B = \{2; 4\}, B_1 = \{2\}, B_2 = \{4\}$$

b) Viết các tập hợp con của A .

$$C = \{1\}; D = \{2\}; E = \{3\}; F = \{4\}$$

$$G = \{1; 2\}; H = \{1; 3\}; I = \{1; 4\}; K = \{2; 3\}; L = \{3; 4\}; M = \{2; 4\}$$

$$N = \{1; 2; 3\}; O = \{1; 3; 4\}; P = \{2; 3; 4\}; T = \{1; 2; 4\}$$

$$Q = \emptyset$$

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

II/ XÁC ĐỊNH SỐ PHẦN TỬ CỦA TẬP HỢP.

Bài tập 25: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

Hướng dẫn

Tập hợp A có $(999 - 100) + 1 = 900$ phần tử.

Bài tập 26: Hãy tính số phần tử của các tập hợp sau:

a/ Tập hợp A các số tự nhiên lẻ có 3 chữ số.

b/ Tập hợp B các số 2, 5, 8, 11, ..., 296, 299, 302

c/ Tập hợp C các số 7, 11, 15, 19, ..., 275, 279

Hướng dẫn

a/ Tập hợp A có $(999 - 101):2 + 1 = 450$ phần tử.

b/ Tập hợp B có $(302 - 2):3 + 1 = 101$ phần tử.

c/ Tập hợp C có $(279 - 7):4 + 1 = 69$ phần tử.

TỔNG QUÁT:

+ Tập hợp các số chẵn từ số chẵn a đến số chẵn b có $(b - a):2 + 1$ phần tử.

+ Tập hợp các số lẻ từ số lẻ m đến số lẻ n có $(n - m):2 + 1$ phần tử.

+ Tập hợp các số từ số c đến số d là dãy số các đều, khoảng cách giữa hai số liên tiếp của dãy là 3 có $(d - c):3 + 1$ phần tử.

Bài tập 27: Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

Hướng dẫn

$$A = \{100; 101; 102; \dots; 998; 999\}$$

Các phần tử của tập A là một dãy số cách đều, có khoảng cách là 1

$$\Rightarrow \text{Số phần tử của tập } A \text{ là } (999 - 100):1 + 1 = 900 \text{ phần tử}$$

Bài tập 28: Cho biết mỗi tập hợp sau có bao nhiêu phần tử

a) Tập hợp A các số tự nhiên x sao cho $x - 30 = 60$

b) Tập hợp B các số tự nhiên y sao cho $y \cdot 0 = 0$

c) Tập hợp C các số tự nhiên a sao cho $2 \cdot a < 20$

d) Tập hợp D các số tự nhiên d sao cho $(d - 5)^2 \neq 0$

e) Tập hợp G các số tự nhiên z sao cho $2.z + 7 > 100$

Hướng dẫn

a) $x - 30 = 60 \Rightarrow x = 90 \Rightarrow$ Tập A có 1 phần tử là 90

b) $y.0 = 0$ với mọi số tự nhiên y $\Rightarrow$ Tập B có vô số phần tử

c) Ta có $2.a < 20 \Rightarrow a < 10$ với a là số tự nhiên $\Rightarrow C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\Rightarrow$ Tập C có 10 phần tử

d) $(d - 5)^2 \neq 0 \Rightarrow d \neq 5 \Rightarrow$ Tập D là tập hợp các số tự nhiên khác 5 $\Rightarrow$ Tập D có vô số phần tử

e) $2.z + 7 > 100 \Rightarrow z > 93/2 \Rightarrow G = \{0, 1, 2, \dots, 45, 46\} \Rightarrow$ Tập G có 47 phần tử

Bài tập 29: Dùng 4 chữ số 1, 2, 3, 4 để viết tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau. Hỏi tập này có bao nhiêu phần tử.

Hướng dẫn

Viết được tất cả 24 số $\Rightarrow$ Tập hợp này có 24 phần tử

Bài tập 30: Cho hai tập hợp $M = \{0, 2, 4, \dots, 96, 98, 100, 102, 104, 106\};$

$$Q = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ là số chẵn }, x < 106\};$$

a) Mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử?

b) Dùng kí hiệu $\subset$ để thực hiện mối quan hệ giữa M và Q.

Hướng dẫn

a) Số phần tử tập M là $(106 - 0) : 2 + 1 = 54$ phần tử

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 104, 106\}$$

$\Rightarrow$ Số phần tử tập Q là $(106 - 2) : 2 + 1 = 53$ phần tử

b) $Q \subset M$

Bài tập 31: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 100, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Hướng dẫn

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

Các số chia hết cho 2: 1; 2; 4; ...; 100

Số các số chia hết cho 2 là: $\frac{(100 - 2)}{2} + 1 = 50$ số.

Các số chia hết cho 2 và 3: 6; 12; 18; 24; ...; 96

Số các số chia hết cho cả 2 và 3 là: $\frac{(96 - 6)}{6} + 1 = 16$ số

Vậy từ 1–100 có $50 - 16 = 34$ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3.

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

Các số chia hết cho 3 là: 3; 6; 9; 12; 15; ...; 99

Số các số chia hết cho 3 là: $\frac{(99-3)}{3} + 1 = 33$ số.

Vậy các số chia cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 là: $50 + 33 - 16 = 67$ số

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Các số không chia hết cho 2 và cho 3 là: $100 - 67 = 33$ số.

Bài tập 32: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 1000, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5?

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Hướng dẫn

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5?

Gọi A, B, C, D, E, G, H là tập hợp các số từ 1 đến 1000 mà theo thứ tự chia hết cho 2, chia hết cho 3, chia hết cho 5, chia hết cho 2 và 3, chia hết cho 2 và 5, chia hết cho 3 và 5, chia hết cho cả 3 số, số phần tử của các tập hợp đó theo thứ tự bằng

$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$.

Ta có:

$$s_1 = 1000 : 2 = 500$$

$$s_2 = [1000 : 3] = 333$$

$$s_3 = 1000 : 5 = 200$$

$$s_4 = [1000 : 6] = 166$$

$$s_5 = 1000 : 10 = 100$$

$$s_6 = [1000 : 15] = 66$$

$$s_7 = [1000 : 30] = 33$$

Các số phải tìm gồm: $s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 - s_6 + s_7 = 734$ số.

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Còn lại $1000 - 734 = 266$ số.

Bài tập 33: Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích học Toán, 60 học sinh thích Văn.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn Văn và Toán?

Hướng dẫn

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x , số học sinh thích Toán mà không thích Văn là $75 - x$.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

Ta có: $75 - x + 60 + 5 = 100$

$$x = 40$$

Vậy có 40 học sinh thích cả hai môn.

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

60 học sinh (nếu tất cả số thích văn thích toán).

b) Có ít nhất bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn Văn và Toán?

$75 - x + 60 \leq 100 \Rightarrow x \geq 35$. Có ít nhất 35 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài tập 34: Một lớp học có 50 HS trong đó có 15 HS giỏi Toán; 20 HS giỏi Văn và có 12 HS vừa giỏi Toán vừa giỏi Văn.

a/ Giáo viên muốn khen thưởng HS giỏi (toán hoặc văn). Hỏi có bao nhiêu HS được khen thưởng.

b/ Hỏi có bao nhiêu HS của lớp không giỏi toán và cũng không giỏi văn.

Hướng dẫn

Gọi E, A, B lần lượt là các HS của lớp, các HS giỏi toán và các HS giỏi Văn.

E, A, B lần lượt có 50 ; 15 ; 20 phần tử .

a/ Số HS được khen thưởng là $15 + 20 - 12 = 23$ (HS).

b/ Có $50 - 23 = 27$ HS không giỏi toán cũng không giỏi văn.

Bài tập 35: Cô giáo chủ nhiệm lớp 6A tổ chức ngoại khóa cho 50 học sinh lớp 6A có 25 học sinh tham gia tổ toán, 30 học sinh tham gia tổ văn, 7 học sinh không tham gia tổ nào cả. Hỏi có bao nhiêu học sinh tham gia cùng một lúc cả 2 tổ toán và văn?

Hướng dẫn

Gọi x là số học sinh tham gia cùng một lúc cả hai tổ toán và văn.

Số học sinh tham gia ngoại khóa là : $50 - 7 = 43$ (học sinh)

Theo đề bài ta có:

$$25 + (30 - x) = 43 \Rightarrow (25 + 30) - x = 43$$

$$\Rightarrow x = 55 - 43 \Rightarrow x = 12$$

Vậy có 12 học sinh tham gia ngoại khóa cùng một lúc cả hai tổ toán và văn.

Bài tập 36: Trong một cuộc đấu bóng bàn, có 16 người tham dự. Nếu mọi người đều phải đấu với nhau và 2 vận động viên chỉ đấu với nhau một trận thôi thì có tất cả bao nhiêu trận đấu?

Hướng dẫn

* Cách 1:

Vận động viên thứ nhất đấu lần lượt với 15 vận động viên còn lại $\rightarrow$ có 15 trận đấu.

Vận động viên thứ hai đã đấu với vận động viên thứ nhất rồi nên chỉ thi đấu 14 trận với 14 vận động viên còn lại $\rightarrow$ có 14 trận đấu.

Vận động viên thứ ba chỉ thi đấu 13 trận với 13 vận động viên còn lại → có 13 trận đấu.

.....

Tổng số trận đấu:

$$S = 15 + 14 + 13 + \dots + 3 + 2 + 1 = 120 \text{ (trận)}$$

* Cách 2:

Mỗi vận động viên phải đấu 15 trận → 16 vận động viên sẽ phải có $15 \cdot 16 = 240$ trận (nếu trong đó 2 vận động viên phải thi đấu với nhau 2 trận)

Theo đề 2 vận động viên chỉ đấu với nhau 1 trận, do đó số trận đấu tất cả là : $240 : 2 = 120$ (trận)

CHUYÊN ĐỀ 2: BÀI TOÁN ĐẾM SỐ. TÌM SỐ TỰ NHIÊN (CHỮ SỐ) DỰA VÀO CẤU TẠO SỐ.

Bài tập 1: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Hướng dẫn giải

Các số phải đếm có dạng $\overline{abc2}$

Chữ số a có 9 cách chọn

Với mỗi cách chọn a , chữ số b có 10 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn (1, 3, 5, 7, 9) để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ số.

Bài tập 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Hướng dẫn giải

Chia ra 3 loại số:

- Số đếm có dạng: $\overline{5ab}$: chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn các số thuộc loại này có: $9 \cdot 9 = 81$ số.

- Số điểm có dạng $\overline{a5b}$: chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn, các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ số.

- Số đếm có dạng $\overline{ab5}$: các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ số.

Vậy số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là $81 + 72 + 72 = 225$ số.

Bài tập 3: Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?

Hướng dẫn giải

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 phải dùng 9 chữ số (viết tắt c/s).

Từ trang 10 đến trang 99 phải dùng $(99 - 10) + 1 = 90$ số có $2c/s = 180c/s$.

Vì còn các trang gồm các số có 3 c/s.

$\Rightarrow$ Còn lại: $1998 - (180 + 9) = 1809$ c/s là đánh dấu các trang có 3 c/s.

$\Rightarrow$ Có: $1809 : 3 = 603$ số có 3 c/s.

$\Rightarrow$ Cuốn sách đó có: $603 + 99 = 702$ (vì trang 1 $\rightarrow$ 99 có 99 trang).

Cuốn sách có 702 trang.

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?

Chữ số thứ 1010 là chữ số 7 của 374.

Bài tập 4: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

- a) Chứa đúng một chữ số 4?
- b) Chứa đúng hai chữ số 4?
- c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?
- d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Hướng dẫn giải

a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

$\overline{4bc}$ có $9.9 = 81$ số

$\overline{a4c}$ có $8.9 = 72$ số

$\overline{ab4}$ có $8.9 = 72$ số

Tất cả có: $81 + 72 + 72 = 225$ số.

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng: $\overline{44c}, \overline{a44}, \overline{4b4}$, có 26 số.

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số, trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8.9 = 72$ số.

Vậy có $180 - 72 = 108$ số phải đếm.

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a + b = 3k$ thì $c = 0; 3; 6; 9$, nếu $a + b = 3k + 1$ thì $c = 2; 5; 8$).

Nếu $a + b = 3k + 2$ thì $c = 1; 4; 7$, có $8.9.3 = 216$ số.

Bài tập 5: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5?

Hướng dẫn giải

Số lớn nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 9975

Số nhỏ nhất có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là 1005

Ta có dãy số: 1005 ; 1035; 1065;; 9975

Khoảng cách của dãy là 30

=> Số số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 3 và có tận cùng bằng 5 là:

$(9975 - 1005) : 30 + 1 = 300$ số

Bài tập 6: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A .

- a) Số A có bao nhiêu chữ số?
- b) Tính tổng các chữ số của số A ?

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Hướng dẫn giải

a) Số A có bao nhiêu chữ số?

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: $1.9 = 9$ chữ số

Từ 10 đến 99 số có 90 số gồm: $90.2 = 180$ chữ số

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900.3 = 2700$ chữ số

Số A có: $9 + 180 + 2700 = 2889$ chữ số.

b) Tính tổng các chữ số của số A ?

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A . B có: $3.1000 = 3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt

$$3000 : 100 = 300 \text{ (lần)}$$

Tổng các chữ số của B (cũng là của A):

$$(0 + 1 + 2 + \dots + 9).300 = 45.300 = 13500$$

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Cần đếm số chữ số 1 trong 1 dãy:

$$1, 2, 3, \dots, 999 \quad (1)$$

$$\text{Ta xét dãy: } 000, 001, 002, \dots, 999 \quad (2)$$

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 0 đến 9) đều có mặt

$$3.1000 : 10 = 300 \text{ (lần)}.$$

Vậy ở đây (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Ở dãy (2) chữ số 0 có mặt 300 lần.

So với dãy (1) thì ở dãy (2) ta viết thêm các chữ số 0:

- Vào hàng trăm 100 lần (chữ số hàng trăm của các số từ 000 đến 099);
- Vào hàng chục 10 lần (chữ số hàng chục của các số từ 000 đến 009);
- Vào hàng đơn vị 1 lần (chữ số hàng đơn vị của 000).

Vậy chữ số 0 ở dãy (1) được viết là: $300 + 111 = 411$ (lần).

Bài tập 7: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, lập tất cả các số tự nhiên mà mỗi chữ số trên đều có mặt đúng một lần. tính tổng các số ấy.

Hướng dẫn giải

Ta lập được $4.3.2.1 = 24$ số tự nhiên bao gồm cả bốn chữ số 1, 2, 3, 4. Mỗi chữ số có mặt 6 lần ở mỗi hàng. Tổng của 24 số nói trên bằng:

$$60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660.$$

Bài tập 8: Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm là: $\overline{abcde}$ (a khác 0)

Theo bài ra ta có: $\overline{abcde}2 = 3.2\overline{abcde}$

$$\Rightarrow 10.\overline{abcde} + 2 = 3.200000 + 3.\overline{abcde}$$

$$\Rightarrow 7.\overline{abcde} = 599998$$

$$\Rightarrow \overline{abcde} = 85714$$

$$\text{Thử lại: } 857142 = 3.285714$$

Vậy số cần tìm là 857142.

Bài tập 9: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

Hướng dẫn giải

Vì rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị nên số tự nhiên cần tìm có 4 chữ số.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc3}$, ($a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{abc3} - 1992 = \overline{abc}$

$$\Rightarrow 10.\overline{abc} + 3 - 1992 = \overline{abc}$$

$$\Rightarrow 9.\overline{abc} = 1989$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 221$$

Vậy số cần tìm là 2213.

Bài tập 10: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

Hướng dẫn giải

Gọi ba chữ số cần tìm là a, b, c ($a > b > c > 0$).

Theo bài ra ta có:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$$

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 1444$$

$$200a + 11b + 11c = 1444$$

$$200a + 11(b + c) = 1400 + 44$$

$$a = 7; b = 3; c = 1.$$

Vậy 3 số cần tìm là: 1; 3; 7.

Bài tập 11: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Hướng dẫn giải

Gọi 2 số đó là a, b ($a > b$)

Theo bài ra ta có: $a - b = 4 \Rightarrow b = a - 4$ (1)

Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60

$$\Rightarrow 3a - b = 60 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có:

$$3a - (a - 4) = 60$$

$$\Rightarrow 3a - a + 4 = 60$$

$$\Rightarrow 2a = 56$$

$$\Rightarrow a = 28$$

$$\Rightarrow b = 24$$

$\Rightarrow$ Vậy số cần tìm là 28; 24.

Bài tập 12: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

Hướng dẫn giải

Theo đầu bài. Nếu biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần.

Số lớn là: $(5 + 1) : 2 = 3$ (phần).

Số bé là: $5 - 3 = 2$ (phần)

Vậy tích sẽ bằng 12 lần số bé.

Ta có:

$$\text{Tích} = \text{Số lớn} \times \text{Số bé}$$

$$\text{Tích} = 12 \times \text{Số bé}$$

Số lớn là 12.

Số bé là: $12 : 3 \times 2 = 8$

Bài tập 13: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Hướng dẫn giải

Gọi thừa số được giảm là a , thừa số còn lại là b .

Theo đề bài ta có:

$$a.b = 6210$$

$$(a - 7).b = 5265$$

$$\Rightarrow a.b - 7.b = 5265$$

$$\Rightarrow 6210 - 7.b = 5265$$

$$\Rightarrow 7.b = 6210 - 5265$$

$$\Rightarrow 7.b = 945$$

$$\Rightarrow b = 945 : 7 = 135$$

$$\Rightarrow a = 6210 : 135 = 46$$

Vậy hai thừa số cần tìm là 46;135.

Bài tập 14: Một học sinh nhân một số với 463. Vì bạn đó viết các chữ số tận cùng của các tích riêng ở cùng một cột nên tích bằng 30524. Tìm số bị nhân?

Hướng dẫn giải

Do đặt sai vị trí các tích riêng nên bạn học sinh đó chỉ nhân số bị nhân với $4+6+3$.

Vậy số bị nhân bằng: $30524 : 13 = 2348$.

Bài tập 15: Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi?

Hướng dẫn giải

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a, b, c, d . Ta có:

$$a : b = c \text{ (dư } d \text{)}$$

$$\Rightarrow a = c.b + d$$

$$(a + 15) : (b + 5) = c \text{ (dư } d \text{)}$$

$$\Rightarrow a + 15 = c.(b + 5) + d$$

$$\Rightarrow a + 15 = c.b + c.5 + d$$

Mà $a = c.b + d$ nên:

$$a + 15 = c.b + c.5 + d$$

$$= c.b + d + 15 = c.b + c.5 + d$$

$$\Rightarrow 15 = c.5$$

$$\Rightarrow c = 3.$$

Bài tập 16: Khi chia một số tự nhiên gồm ba chữ số như nhau cho một số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, ta được thương là 2 và còn dư. Nếu xóa một chữ số ở số bị chia và xóa một chữ số ở số chia thì thương của phép chia vẫn bằng 2 nhưng số dư giảm hơn trước là 100. Tìm số bị chia và số chia lúc đầu.

Hướng dẫn giải

Gọi số bị chia lúc đầu là $\overline{aaa}$, số chia lúc đầu là $\overline{bbb}$ số dư lúc đầu là r .

$$\text{Ta có: } \overline{aaa} = 2.\overline{bbb} + r \quad (1)$$

$$\overline{aa} = 2.\overline{bb} + r - 100 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \overline{aaa} - \overline{aa} = 2.(\overline{bbb} - \overline{bb}) + 100$$

$$\Rightarrow \overline{a00} = 2.\overline{b00} + 100$$

$$\Rightarrow a = 2b + 1$$

Ta có:

b	1	2	3	4
a	3	5	7	9

Thử từng trường hợp ta được 3 đáp số:

555 và 222; 777 và 333; 999 và 444.

Bài tập 17. Một số có 3 chữ số, tận cùng bằng chữ số 7. Nếu chuyển chữ số 7 đó lên đầu thì ta được một số mới mà khi chia cho số cũ thì được thương là 2 dư 21. Tìm số đó

Hướng dẫn giải

Gọi $\overline{ab7}$ số tự nhiên có chữ số 7 là hàng đơn vị.

$\overline{7ab}$ số tự nhiên có chữ số 7 là số hàng trăm.

Theo đề bài ta có: $\overline{7ab} : \overline{ab7} = 2 \text{ dư } 21$

Hay: $\overline{7ab} = 2.\overline{ab7} + 21$

Ta có: $\overline{ab} = 10a + b; \overline{abc} = 100a + 10b + c$

$$\Rightarrow 700 + \overline{ab} = 2(10\overline{ab} + 7) + 21$$

$$\Rightarrow 700 + \overline{ab} = 20\overline{ab} + 14 + 21$$

$$\Rightarrow 700 - 14 - 21 = 20\overline{ab} - \overline{ab}$$

$$\Rightarrow 665 = 19\overline{ab}$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 35.$$

Vậy số tự nhiên có ba chữ số đó là: 357.

Cách 2:

Gọi số phải tìm là $\overline{ab7}$, theo đề bài ta có: $\overline{7ab} = 2.\overline{ab7} + 21$

$$\Rightarrow 2.\overline{ab7} + 21 = \overline{7ab}$$

$$\Rightarrow 2(100a + 10b + 7) = 700 + 10a + b$$

$$\Rightarrow 200a + 20b + 28 = 700 + 10a + b$$

$$\Rightarrow 190a + 19b = 665$$

$$\Rightarrow 10a + b = 35$$

Bài tập 18. Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 7 vào đằng trước số đó thì được một số lớn gấp 4 lần so với số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào sau số đó

Hướng dẫn giải

Gọi số tiền có năm chữ số là: $\overline{abcde}$

Theo đề bài: $\overline{7abcde} = 4.\overline{abcde7}$

Ta có: $\overline{7abcde} = 700000 + \overline{abcde}; 4.\overline{abcde7} = 4.(10.\overline{abcde} + 7)$

$$\Rightarrow \overline{7abcde} = 4.\overline{abcde7}$$

$$\Rightarrow 700000 + \overline{abcde} = 4.(10.\overline{abcde} + 7)$$

$$\Rightarrow 700000 + \overline{abcde} = 40.\overline{abcde} + 28$$

$$\Rightarrow 700000 - 28 = 40.\overline{abcde} - \overline{abcde}$$

$$\Rightarrow 699972 = 39.\overline{abcde}$$

Bài tập 19. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên phải và một chữ số 2 vào bên trái của nó thì số ấy tăng gấp 36 lần

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$. Viết thêm một chữ số 2 vào bên trái và bên phải ta được: $\overline{2ab2}$, số đó tăng lên gấp 36 lần.

$$\Rightarrow \overline{2ab2} = 36.\overline{ab}$$

$$\Rightarrow 2000 + 10.\overline{ab} + 2 = 36.\overline{ab}$$

$$\Rightarrow 26.\overline{ab} = 2002$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 77$$

Bài tập 20. Nếu ta viết thêm chữ số 0 vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số ta được một số mới có 3 chữ số lớn hơn số đầu tiên 7 lần. Tìm số đó

Hướng dẫn giải

Số tự nhiên có hai chữ số có dạng: $\overline{ab}$

Thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số: $\overline{a0b}$

Theo đề bài: $\overline{a0b} = 7.\overline{ab}$

$$\text{Hay } 100a + b = 7.(10a + b)$$

$$\Rightarrow 30a = 6b \Rightarrow 5a = b$$

- Khi $a = 1$, ta được: $b = 5$ (nhận) $\overline{ab}$ là: 15
- Khi $a = 2$, ta được: $b = 10$ (loại)

Đáp số: 15.

Bài tập 21. Nếu xen vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số của chính số đó, ta được một số mới có bốn chữ số và bằng 99 lần số đầu tiên. Tìm số đó

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{ab}$ ($a, b \in \mathbb{N}; a > 0$)

Theo bài ra, ta có: $\overline{aabb} = 99.\overline{ab}$

$$\Leftrightarrow 1100a + 11b = 990a + 99b$$

$$\Leftrightarrow 110a - 88b = 0$$

$$\Leftrightarrow 5a - 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow 5a = 4b$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

Mà $a; b$ là các số có 1 chữ số

$$\Rightarrow a = 4, b = 5.$$

Bài tập 22. Nếu xen vào giữa các chữ số của một số có hai chữ số một số có hai chữ số kém số đó 1 đơn vị thì sẽ được một số có bốn chữ số lớn gấp 91 lần so với số đầu tiên. Hãy tìm số đó

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ (a khác 0), $(ab11)$

Đặt $cd = ab - 1$

Theo bài ra ta có: $\overline{abcd} = 91\overline{ab}$

$$\Rightarrow 1000a + b + 10(\overline{ab} - 1) = 91\overline{ab}$$

$$\Rightarrow 1100a + 11b - 10 = 910a + 91b$$

$$\Rightarrow 190a - 80b - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 19a - 8b - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1+8b}{19}$$

Thử b từ 0 đến 9 ta được $a = 3, b = 7$ thỏa mãn.

Bài tập 23. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số mới viết theo thứ tự ngược lại nhân với số phải tìm thì được 3154; số nhỏ trong hai số thì lớn hơn tổng các chữ số của nó là 27

Hướng dẫn giải

Giả sử $\overline{ab} < \overline{ba}$, theo bài

Số có dạng $\overline{3b}$

Theo bài $\overline{3b.b3} = 3154 \Leftrightarrow (30+b)(10b+3) = 3154$; b là số tự nhiên: $0 < b < 10$

Thế $b = 1$ không phù hợp.

Thế $b = \dots$

Thế $b = 8$ phù hợp

Vậy số cần tìm là: 38 và 83.

Bài tập 24. Cho số có hai chữ số. Nếu lấy số đó chia cho hiệu của chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó thì được thương là 18 và dư 4. Tìm số đã cho

Hướng dẫn giải

Số tự nhiên có 2 chữ số là $\overline{ab}$ ($0 < a \leq 9; a > b; a, b \in \mathbb{N}$).

Ta có $\overline{ab} : (a-b)$ được thương là 18 dư 4.

$$\Rightarrow \overline{ab} = 18(a-b) + 4 \Rightarrow 10a + b = 18a - 18b + 4$$

$$\Rightarrow 8a - 19b + 4 = 0 \Rightarrow 8a + 4 = 19b$$

$8a$ và 4 là hai số chẵn $\Rightarrow b$ chẵn.

Chỉ có $b = 4; a = 9 \Rightarrow \overline{ab} = 94$.

Bài tập 25. Cho hai số có 4 chữ số và 2 chữ số mà tổng của hai số đó bằng 2750. Nếu cả hai số được viết theo thứ tự ngược lại thì tổng của hai số này bằng 8888. Tìm hai số đã cho

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ và $\overline{xy}$

Ta có: $\overline{abcd} + \overline{xy} = 2750$ (1)

$\overline{dcba} + \overline{yx} = 888$ (2)

Cả 2 phép cộng đều không nhớ sang hàng nghìn nên từ (1) ta có $a = 2$, (2) $d = 8$.

Cùng từ (1) ta có $d + y$ có tận cùng $= 0$, mà $d = 8$ nên $y = 2$

Từ (2) ta có $a + x$ có tận cùng $= 8$ mà $a = 2$ nên $x = 6$

Từ (1) ta có $x + c + 1$ có tận cùng là 5 mà $x = 6$ nên $c = 8$

Từ (2) ta có $b + y$ có tận cùng $= 8$ mà $y = 2$ nên $b = 6$.

Vậy số đó là 2688 và 62.

Bài tập 26. Tìm số có bốn chữ số khác nhau, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa hàng nghìn và hàng trăm thì được số mới gấp 9 lần số phải tìm

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$. Số mới là $\overline{a0bcd}$

Ta có $\overline{a0bcd} = \overline{abcd} * 9$

Hay $\overline{a0bcd} = \overline{abcd} * 10 - \overline{abcd}$

Hay $\overline{a0bcd} + \overline{abcd} = \overline{abcd0}$

Vì $d + b$ có tận cùng bằng 0 suy ra $d = 0$ hoặc 5

* Nếu $d = 5$ ta có $c + c + 1 = 0$ có tận cùng là 5 nên $c = 2$ hoặc 7.

- Nếu $c = 2$ thì $b + b = 2$ nên $b = 1$, do đó $0 + a$ có tận cùng bằng 1 nên $a = 1$ (loại vì a khác b).

- Nếu $c = 7$ thì $b + b + 1$ có tận cùng là 7 nên b bằng 3 hoặc 8.

- Nếu $b = 3$ thì $0 + a = 3$ nên a bằng 3 (loại).

- Nếu $b = 8$ thì $0 + a + 1 = 8$ nên $a = 7$ (loại vì a khác c).

* Nếu $d = 0$ suy ra c khác 0 mà $c + c$ có tận cùng là 0 nên $c = 5$. Khi đó $b + b + 1$ có tận cùng là 5 nên $b = 2$ hoặc 7

- Nếu $b = 2$ thì $0 + a$ có tận cùng bằng 2 nên $a = 2$ (loại)

- Nếu $b = 7$ thì $0 + a + 1$ có tận cùng là 7 nên $a = 6$

Vậy số cần tìm là 6750.

Bài tập 27. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại

Hướng dẫn giải

$$\overline{abcd}.4 = \overline{dcba}$$

Ta có $\overline{abcd}$ và $\overline{dcba}$ là số có 4 chữ số

Nên ta có: $a.10^3.4 = d.10^3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow d = 4$ hoặc $a = 2, d = 8$

* Xét $\overline{abcd}$ với $a = 1$ và $d = 4$

$\Rightarrow$ để có được $\overline{abcd}.4 = \overline{dcba}$ thì $d.4$ trước hết phải có chữ số tận cùng là a

$\Rightarrow$ với $d = 4$ thì $d.4 = 4.4 = 16$ có chữ số tận cùng là $6 \neq a = 1$ (loại)

* Xét $\overline{abcd}$ với $a = 2$ và $d = 8$. Do đó $\overline{abcd}.4 = \overline{dcba}$ ta thấy:

+) $d.4$ đã có chữ số tận cùng là $a = 2$ (1)

+) Vì $a = 2 \Rightarrow b.4 < \text{số có hai chữ số} \Rightarrow b = 0, b = 1, b = 2$

- Với $a = 2, d = 8, b = 0$ có: $\overline{20c8}.4 = \overline{8c02} \Rightarrow 60c = 30$ (không thỏa mãn)

- Với $a = 2, d = 8, b = 1$ có: $\overline{21c8}.4 = \overline{8c12} \Rightarrow 60c = 420 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow$ có số 2178

- Với $a = 2, d = 8, b = 2$ có: $\overline{22c8}.4 = \overline{8c22} \Rightarrow 60c = 810$ (không thỏa mãn)

* Vậy số cần tìm là 2178

Bài tập 28. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 9 ta được số gồm bốn chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại

Hướng dẫn giải

$$\overline{abcd}.9 = \overline{dcba}$$

Ta có $\overline{abcd}$ và $\overline{dcba}$ là số có 4 chữ số

Nên ta có: $a.10^3.9 = d.10^3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow d = 9$

Xét $\overline{abcd}$: vì $a = 1 \Rightarrow b.9 < \text{số có 2 chữ số} \Rightarrow b = 1$ hoặc $b = 0$

Với $b = 1$ thì $\overline{11c9}.9 = \overline{9c11}$

Vì $b = 1 \Rightarrow \overline{11c9}.9$ có $c.9$ là số bé hơn 2 chữ số $\Rightarrow c = 1$ hoặc $c = 0 \Rightarrow$ Vô lý.

Với $b = 0$ thì $\overline{10c9}.9 = \overline{9c01} \Rightarrow c = 8$

$\Rightarrow 1089.9 = 9801.$

Bài tập 29. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, sao cho khi nhân số đó với 9 ta được số gồm năm chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại

Hướng dẫn giải

Ta gọi số 5 chữ số là $\overline{ABCDE}$ (A khác 0)

$$\begin{array}{r} \overline{ABCDE} \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline \overline{EDCBA} \end{array}$$

$A=1$ (vì nếu $A>1$ thì tích sẽ có 6 chữ số) $\Rightarrow E=9$

$$\begin{array}{r} \overline{1BCD9} \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline \overline{9DCB1} \end{array}$$

$B=0$ hoặc $B=1$ (vì nếu $B>1$ thì phép nhân ở hàng nghìn $9.B$ sẽ nhớ ít nhất 1 sang hàng chục nghìn $\Rightarrow E$ không thể là 9 được).

*) Xét trường hợp $B=0$

$$\begin{array}{r} \overline{10CD9} \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline \overline{9DC01} \end{array}$$

$\Rightarrow 9.D+8$ có tận cùng là 0 $\Rightarrow D=8$ (vì $9.8+8=80$, tận cùng là 0).

$$\begin{array}{r} \overline{10C89} \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline \overline{98C01} \end{array}$$

Số $\overline{98C01}$ phải chia hết cho 9 $\Rightarrow 9+8+C+0+1=18+C$ chia hết cho 9 $\Rightarrow C=9$

$$\begin{array}{r} 10989 \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline 98901 \end{array}$$

Đúng. Vậy ta được 1 đáp số là 10989.

*) Xét trường hợp $B=1$ (sau khi đã biết $A=1, D=9$)

$$\begin{array}{r} \overline{11CD9} \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline \overline{9DC11} \end{array}$$

$\Rightarrow 9.D+8$ có tận cùng là 1

$\Rightarrow D=7$ (vì $9.7+8=71$, có tận cùng là 1).

$$\begin{array}{r} \overline{11C79} \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline \overline{97C11} \end{array}$$

Số $\overline{97C11}$ phải chia hết cho 9 $\Rightarrow 9+7+C+1+1=18+C$ chia hết cho 9 $\Rightarrow C=0$ hoặc $C=9$.

Thử lại với $C=0$;

$$\begin{array}{r} 11079 \\ \times \quad \quad 9 \\ \hline \end{array}$$

97011 KHÔNG ĐÚNG

Thử lại với $C=9$

11979

$\times \underline{\hspace{1cm}} 9$

97911 KHÔNG ĐÚNG

Vậy có 1 đáp số duy nhất là:

10989

$\times \underline{\hspace{1cm}} 9$

98901.

Bài tập 30. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng trăm thì số ấy giảm 9 lần.

Hướng dẫn giải

Số cần tìm là $\overline{abc}$, xoá chữ số hàng trăm ta có số $\overline{bc}$

Ta có: $\overline{abc} = 9\overline{bc} \Rightarrow 100a + \overline{bc} = 9\overline{bc} \Rightarrow 8\overline{bc} = 100a : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì $\overline{bc}$ có 2 chữ số $\Rightarrow a = 4$ và $\overline{bc} = 50$

$\Rightarrow$ Số cần tìm là 450

Bài tập 31. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu xoá chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.

Hướng dẫn giải

Số cần tìm là $\overline{abcd}$, xoá chữ số hàng trăm ta có số $\overline{bcd}$

Ta có: $\overline{abcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 1000a + \overline{bcd} = 9\overline{bcd} \Rightarrow 8\overline{bcd} = 1000a : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì $\overline{bcd}$ có 3 chữ số $\Rightarrow a = 4$ và $\overline{bcd} = 500$

$\Rightarrow$ Số cần tìm là 4500

Bài tập 32. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng trăm bằng 0 và nếu xoá chữ số 0 đó thì số ấy giảm 9 lần

Hướng dẫn giải

Số cần tìm là $\overline{a0cd}$, xoá chữ số hàng trăm ta có số $\overline{acd}$

Ta có: $\overline{a0cd} = 9\overline{acd} \Rightarrow 1000a + \overline{cd} = 9(100a + \overline{cd})$

$\Rightarrow 100a = 8\overline{cd} : 8 \Rightarrow a = 4$ hoặc $a = 8$

Vì $\overline{cd}$ có 2 chữ số $\Rightarrow a = 4$ và $\overline{cd} = 50$

$\Rightarrow$ Số cần tìm là 4050

Bài tập 33. Một số tự nhiên có hai chữ số tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó. Tìm số ấy

Hướng dẫn giải

Số cần tìm là $\overline{ab}$, viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị ta có số $\overline{a0b}$

Ta có: $\overline{a0b} = 9\overline{ab} \Rightarrow 100a + b = 9(10a + b)$

$$\Rightarrow 10a = 8b : 8 \Rightarrow a = 4 \text{ hoặc } a = 8$$

$$\text{Vì } 0 < b \leq 9 \Rightarrow a = 4 \text{ và } b = 5$$

$$\Rightarrow \text{Số cần tìm là } 45$$

Bài tập 34. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó vừa chia hết cho 5 và chia hết cho 9, hiệu giữa số đó với số viết theo thứ tự ngược lại bằng 297.

Hướng dẫn giải

Số cần tìm là $\overline{abc}$. Số viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{cba}$

Ta có: $\overline{abc} : \{5, 9\} \Rightarrow c = \{0, 5\}$

Vì viết theo thứ tự ngược lại để được số $\overline{cba} \Rightarrow c = 5$

Ta có: $\overline{ab5}$ và $\overline{5ba}$

$$\text{Ta có } \overline{ab5} - \overline{5ba} = 297 \Rightarrow 100a + 10b + 5 - (500 + 10b + a) = 297$$

$$\Rightarrow 99a = 792 \Rightarrow a = 8$$

$$\Rightarrow \text{Có số } \overline{8b5} \text{ mà số này : } 9 \Rightarrow 800 + 10b + 5 = 805 + 10b : 9 \Rightarrow b = 5$$

Vậy số cần tìm là $\overline{855}$

CHUYÊN ĐỀ 3: CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ:

* Lũy thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = \underbrace{a.a.a.a....a}_n$ (n thừa số a với $a \in \mathbb{Q}$).

Qui ước: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) và $a^1 = a$.

* Các phép tính lũy thừa:

- Nhân hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- Chia hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$; $m \geq n$).
- Lũy thừa của một tích: $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$.
- Lũy thừa của một thương: $(a : b)^n = a^n : b^n$ ($b \neq 0$).
- Lũy thừa của lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- Lũy thừa tăng: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

Ví dụ: $3^{2^3} = 3^8$.

- Lũy thừa với số mũ âm: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)

Ví dụ: $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$.

B/ CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH 2 LŨY THỪA

I/ Phương pháp 1:

Cơ sở phương pháp: Để so sánh hai lũy thừa ta thường đưa về so sánh hai lũy thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

- Nếu 2 lũy thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^m > a^n \quad (a > 1) \Leftrightarrow m > n$$

- Nếu 2 lũy thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^n > b^n \quad (n > 0) \Leftrightarrow a > b$$

Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 1.** So sánh các lũy thừa sau:

a) 128^7 và 4^{24} b) 81^8 và 27^{11}

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì 128 và 4 là các cơ số liên quan tới lũy thừa cơ số 2, ở câu b) thì 81 và 27 liên quan tới lũy thừa cơ số 3. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Có: } \left. \begin{array}{l} 128^7 = (2^7)^7 = 2^{49} \\ 4^{24} = (2^2)^{24} = 2^{48} \end{array} \right\} \Rightarrow 128^7 > 4^{24}$$

$$b) \text{ Có } \left. \begin{array}{l} 81^8 = 3^{32} \\ 27^{11} = 3^{33} \end{array} \right\} \Rightarrow 81^8 < 27^{11}$$

★**Thí dụ 2.** So sánh các lũy thừa sau:

a) 5^{36} và 11^{24}

b) 32^{60} và 81^{50}

c) 3^{500} và 7^{300}

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có thể đưa về cùng số mũ 12, ở câu b) và c) các lũy thừa có thể đưa về cùng số mũ 100. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Có } \left. \begin{array}{l} 5^{36} = 125^{12} \\ 11^{24} = 121^{12} \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{36} > 11^{24}$$

$$b) \text{ Có } \left. \begin{array}{l} 32^{60} = 2^{300} = 8^{100} \\ 81^{50} = 3^{200} = 9^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 32^{60} < 81^{50}$$

$$c) \text{ Có } \left. \begin{array}{l} 3^{500} = 243^{100} \\ 7^{300} = 343^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$$

★**Thí dụ 3.** So sánh các lũy thừa:

a) 3^{2n} và 2^{3n} ($n \in \mathbb{N}^*$).

b) 2^{100} và 3^{200} .

c) 5^{100} và 3^{500} .

Hướng dẫn giải

$$a) 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n; 2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$$

$$\text{Vì } 9 > 8 \Rightarrow 3^2 > 2^3 \Rightarrow (3^2)^n > (2^3)^n$$

$$b) 2^{100} = (2^3)^{100} = 8^{100} \text{ và } 3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$$

$$\text{Vì } 8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}.$$

$$c) 5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100} \text{ và } 3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$$

$$\text{Vì } 125^{100} < 243^{100} \Rightarrow 5^{300} < 3^{500}.$$

✎ **Lời bình:** Qua ba ví dụ trên ta thấy rằng, trước khi so sánh hai lũy thừa với nhau trước hết ta cần làm hai việc sau:

- + Kiểm tra cơ số xem các cơ số có biến đổi được về cùng cơ số không.
- + Kiểm tra số mũ của các lũy thừa xem có ước chung lớn nhất không.

Việc làm này sẽ giúp chúng ta lựa chọn đúng phương pháp so sánh.

II/ Phương pháp 2:

Cơ sở phương pháp: Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

$$A > B \text{ và } B > C \text{ thì } A > C$$

$$A.C < B.C \text{ (với } C > 0) \Leftrightarrow A < B$$

C/ Các dạng toán thường gặp.

Dạng 1: So sánh hai số lũy thừa.

★ **Thí dụ 1.** Hãy so sánh:

a) 107^{50} và 73^{75} .

b) 2^{91} và 5^{35} .

Phân tích: Trong câu a) mặc dù số mũ của hai lũy thừa có ước chung là 25, tuy nhiên khi đó cơ số sẽ là 73^3 và 107^2 , các cơ số này khi tính ra sẽ rất lớn, do đó việc đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ sẽ không khả quan. Còn trong câu b) cả số mũ và cơ số đều không có ước chung nên cũng không thể áp dụng các phương pháp trong các ví dụ trên. Như vậy chúng ta chỉ còn cách lựa chọn dùng tính chất bắc cầu (so sánh qua lũy thừa trung gian).

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $107^{50} < 108^{50} = (4 \cdot 27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$

$$73^{75} > 72^{75} = (8 \cdot 9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150}$$

$$\text{Vì } 2^{100} < 2^{225} \Rightarrow 2^{100} \cdot 3^{150} < 2^{225} \cdot 3^{150} \Rightarrow 107^{50} < 73^{75}.$$

b) Ta có: $2^{91} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18}$

$$5^{35} < 5^{36} = (5^2)^{18} = 25^{18}$$

$$\text{Vì } 32^{18} > 25^{18} \Rightarrow 2^{91} > 5^{35}.$$

★ **Thí dụ 2.** Hãy so sánh:

- a) 107^{50} và 73^{75} b) 2^{91} và 5^{35}
c) 54^4 và 21^{12} d) 9^8 và 8^9

Hướng dẫn giải

- a) Ta có : $107^{50} < 108^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$ và $73^{75} > 72^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150}$ nên $107^{50} < 73^{75}$
b) Ta có : $2^{91} = (2^{13})^7 = 8192^7$ và $5^{35} = (5^5)^7 = 3125^7$ nên $2^{91} > 5^{35}$
c) Ta có : $54^4 = (2 \cdot 27)^4 = 2^4 \cdot 3^{12}$ và $21^{12} = 3^{12} \cdot 7^{12}$ nên $54^4 < 21^{12}$
d) Ta có : $9^8 < 10^8 = 100^4 = 100 \cdot 100^3$
Và $8^9 = 512^3 > 500^3 = 5^3 \cdot 100^3 = 125 \cdot 100^3$ nên $9^8 < 8^9$

✎ **Lời bình:** Việc phân tích lũy thừa thành tích các lũy thừa sẽ giúp ta nhìn ra thừa số chung của các lũy thừa, từ đó việc so sánh hai lũy thừa chỉ còn dựa vào việc so sánh các thừa số riêng.

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

* Thu gọn biểu thức lũy thừa bằng cách vận dụng các phép tính lũy thừa, cộng trừ các số theo quy luật

* Vận dụng phương pháp so sánh hai lũy thừa ở phần B.

* Nếu biểu thức lũy thừa là dạng phân thức: Đối với từng trường hợp bậc của lũy thừa ở tử lớn hơn hay bé hơn bậc của lũy thừa ở mẫu mà ta nhân với hệ số thích hợp nhằm tách phần nguyên rồi so sánh từng phần tương ứng.

Với $a, n, m, K \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

- Nếu $m > n$ thì $K - \frac{a}{m} > K - \frac{a}{n}$ và $K + \frac{a}{m} < K + \frac{a}{n}$
- Nếu $m < n$ thì $K - \frac{a}{m} < K - \frac{a}{n}$ và $K + \frac{a}{m} > K + \frac{a}{n}$

(còn gọi là phương pháp so sánh phần bù)

* Với biểu thức là tổng các số $\frac{1}{a^2}$ (với $a \in \mathbb{N}^*$) ta có vận dụng so sánh sau:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$$

★ **Thí dụ 1.** Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$. So sánh S với $5 \cdot 2^8$.

Phân tích: Trước khi so sánh biểu thức S với $5 \cdot 2^8$ ta cần dùng phương pháp tính tổng theo quy luật để tính S . Để làm việc này ta cần nhân 2 vào hai vế của biểu thức S , sau đó tính hiệu $2S - S$ thì sẽ triệt tiêu được các số hạng giống nhau và tính được S .

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$

$$2.S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10}$$

$$\Rightarrow 2.S - S = S = 2^{10} - 1$$

$$\text{Mà } 2^{10} - 1 < 2^{10} = 2^8 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^8$$

$$\Rightarrow S < 5 \cdot 2^8.$$

✎ **Lời bình:** Để tính tổng S ta cần dùng phương pháp tính tổng của biểu thức tổng quát sau: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

★ **Thí dụ 2.** So sánh 2 biểu thức A và B trong từng trường hợp:

$$\text{a) } A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \text{ và } B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}.$$

$$\text{b) } C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \text{ và } D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1}.$$

Phân tích:

- Ở câu a, biểu thức A và B có chứa lũy thừa cơ số 10, nên ta so sánh $10A$ và $10B$.

- Ở câu b, biểu thức C và D có chứa lũy thừa cơ số 2 nên ta so sánh $\frac{1}{2}C$ và $\frac{1}{2}D$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$$

$$\Rightarrow 10A = 10 \cdot \left(\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \right) = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}.$$

$$B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$$

$$\Rightarrow 10B = 10 \cdot \left(\frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \right) = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = \frac{10^{17} + 1 + 9}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}.$$

$$\text{Vì } 10^{16} + 1 < 10^{17} + 1 \text{ nên } \frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{16} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}$$

$$\Rightarrow 10A > 10B \text{ hay } A > B.$$

b) Ta có:

$$C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \left(\frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \right) = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2008} - 2} = \frac{2^{2008} - 2 - 1}{2^{2008} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2}.$$

$$D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \left(\frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \right) = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2007} - 2} = \frac{2^{2007} - 2 - 1}{2^{2007} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}.$$

Vì $2^{2008} - 2 > 2^{2007} - 2$ nên $\frac{1}{2^{2008} - 2} < \frac{1}{2^{2007} - 2}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2} > 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C > \frac{1}{2}D \text{ hay } C > D.$$

Lời bình: Đôi khi để so sánh hai biểu thức với nhau, ta cần biến đổi hai biểu thức về dạng tổng hai số hạng, trong đó có một số hạng chung và khi đó ta chỉ cần so sánh số hạng riêng.

Dạng 3: Từ việc so sánh lũy thừa, tìm cơ số (số mũ) chưa biết.

* Với các số tự nhiên m, x, p và số dương a .

+ Nếu $a > 1$ thì:

$$a^m < a^x < a^p \Rightarrow m < x < p.$$

+ Nếu $a < 1$ thì:

$$a^m < a^x < a^p \Rightarrow m > x > p.$$

* Với các số dương a, b và số tự nhiên m , ta có:

$$a^m < b^m \Rightarrow a < b.$$

★ **Thí dụ 1.** Tìm các số nguyên n thỏa mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Hướng dẫn giải

Ta giải từng bất đẳng thức $3^{64} < n^{48}$ và $n^{48} < 5^{72}$.

$$\text{Ta có: } n^{48} > 3^{64} \Rightarrow (n^3)^{16} > (3^4)^{16} \Rightarrow (n^3)^{16} > 81^{16} \Rightarrow n^3 > 81$$

$$\Rightarrow n > 4 \text{ (với } n \in \mathbb{Z}) \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } n^{48} < 5^{72} \Rightarrow (n^2)^{24} < (5^3)^{24} \Rightarrow (n^2)^{24} < 125^{24} \Rightarrow n^2 < 125$$

$$\Rightarrow -11 \leq n \leq 11 \quad (\text{với } n \in \mathbb{Z}) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4 < n \leq 11$.

Vậy n nhận các giá trị nguyên là: 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

Lời bình: Từ bài toán trên có thể thay đổi câu hỏi để được các bài toán sau:

Bài số 1: Tìm tổng các số nguyên n thỏa mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thỏa mãn là:

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 56.$$

Bài số 2: Tìm tất cả các số nguyên có một chữ số sao cho: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thỏa mãn là: 5; 6; 7; 8; 9.

Bài số 3: Tìm tất cả các số nguyên có 2 chữ số sao cho $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thỏa mãn là: 10; 11.

★**Thí dụ 2.** Tìm x thuộc $\mathbb{N}$. Biết:

a) $16^x < 128^4$.

b) $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$.

Hướng dẫn giải

a) $16^x < 128^4 \Rightarrow (2^4)^x < (2^7)^4 \Rightarrow 2^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7$

$$\Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

b) $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$

$$\Rightarrow 5^{3x+3} \leq 10^{18} : 2^{18} \Rightarrow 5^{3x+3} \leq 5^{18} \Rightarrow 3x+3 \leq 18 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Dạng 4: Một số bài toán khác.

★**Thí dụ 1.** Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng ba chữ số 1 ; 2 ; 3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần ?

Hướng dẫn giải

Bài toán xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Không dùng lũy thừa thì số lớn nhất viết được là 321.

Trường hợp 2: Dùng lũy thừa để viết: (Bỏ qua trường hợp cơ số hoặc số mũ bằng 1 và các lũy thừa tăng vì các giá trị này quá nhỏ so với 321)

* Xét các lũy thừa có số mũ là một chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $13^2, 31^2, 12^3, 21^3$, trong các số này số lớn nhất là 21^3 .

* Xét các lũy thừa mà số mũ có hai chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $2^{13}, 2^{31}, 3^{12}, 3^{21}$, nhận xét các số này như sau:

$$3^{21} = 3 \cdot 3^{20} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10},$$

$$2^{31} = 2 \cdot 2^{30} = 2 \cdot (2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10},$$

do đó trong các số này thì số lớn nhất là 3^{21} .

So sánh 3^{21} và 21^3 :

$$3^{21} > 3^9 = (3^3)^3 = 27^3 > 21^3$$

Vậy số lớn nhất viết được là số 3^{21} .

★Thí dụ 2.

a) Số 5^8 có bao nhiêu chữ số ?

b) Hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau được số có bao nhiêu chữ số?

Phân tích: So sánh lũy thừa với một số lũy thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$5^8 = (5^4)^2 = 625^2 > 600^2 = 360000$$

$$5^8 = \frac{10^8}{2^8} = \frac{100000000}{256} < \frac{100000000}{250} = 400000$$

$$\Rightarrow 360000 < 5^8 < 400000.$$

Do đó 5^8 có 6 chữ số.

b) Giả sử 2^{2003} có a chữ số và 5^{2003} có b chữ số thì khi viết 2 số này liền nhau ta được (a + b) chữ số.

$$\text{Vì } 10^{a-1} < 2^{2003} < 10^a \text{ và } 10^{b-1} < 5^{2003} < 10^b$$

$$\Rightarrow 10^{a-1} \cdot 10^{b-1} < 2^{2003} \cdot 5^{2003} < 10^a \cdot 10^b$$

$$\Rightarrow 10^{a+b-2} < 10^{2003} < 10^{a+b}.$$

Do đó: $2003 = a + b - 1 \Rightarrow a + b = 2004$.

Vậy số đó có 2004 chữ số.

★**Thí dụ 2.** Tìm số 5 các chữ số của các số n và m trong các trường hợp sau:

a) $n = 8^3 \cdot 15^5$.

b) $m = 4^{16} \cdot 5^{25}$.

Phân tích: Nhóm các lũy thừa thích hợp nhằm làm xuất hiện lũy thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} n &= 8^3 \cdot 15^5 = (2^3)^3 \cdot (3 \cdot 5)^5 = 2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^5 \\ &= 2^4 \cdot 3^5 \cdot (2 \cdot 5)^5 = 16 \cdot 243 \cdot 10^5 = 3888 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Số $3888 \cdot 10^5$ gồm 3888 theo sau là 5 chữ số 0 nên số này có 9 chữ số.

Vậy số n có 9 chữ số.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} m &= 4^{16} \cdot 5^{25} = (2^2)^{16} \cdot 5^{25} \\ &= 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^7 \cdot (2^{25} \cdot 5^{25}) = 128 \cdot 10^{25}. \end{aligned}$$

Số $128 \cdot 10^{25}$ gồm 128 theo sau là 25 chữ số 0 nên số này có tất cả 28 chữ số.

Vậy số m có 28 chữ số.

C/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1. So sánh:

a) 243^5 và $3 \cdot 27^5$.

c) 625^5 và 125^7 .

Bài 2: So sánh:

e) 99^{20} và 9999^{10} .

b) 3^{500} và 7^{300} .

d) 202^{303} và 303^{202} .

e) 11^{1979} và 37^{1320} .

Bài 3: So sánh:

c) 8^5 và $3 \cdot 4^7$.

f) 10^{10} và $48 \cdot 50^5$.

i) $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và $3 \cdot 24^{10}$.

g) $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10} .

Bài 4: So sánh các số sau: 199^{20} và 2003^{15} .

Bài 5: So sánh:

a) $78^{12} - 78^{11}$ và $78^{11} - 78^{10}$.

b) $A = 72^{45} - 72^{44}$ và $B = 72^{44} - 72^{43}$.

Bài 6: So sánh các số sau: 3^{39} và 11^{21} .

Bài 7: Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Bài 8: Chứng minh rằng: $2^{1995} < 5^{863}$.

Bài 9: Chứng minh rằng: $2^{1999} < 7^{714}$.

Bài 10: So sánh: 3^{200} và 2^{300} .

Bài 11: So sánh: 71^{50} và 37^{75} .

Bài 12: So sánh các số:

a) 50^{20} và 2550^{10} .

b) 999^{10} và 999999^5 .

Bài 13: Viết theo từ nhỏ đến lớn: 2^{100} ; 3^{75} và 5^{50} .

Bài 14: So sánh 2 số: 1234^{56789} và 56789^{1234} .

Bài 15: Gọi m là số các số có 9 chữ số mà trong cách ghi của nó không có chữ số 0. Hãy so sánh m với 10.9^8 .

Bài 16: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B.

Bài 17: So sánh hai biểu thức: $B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4}$ và $C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$.

Bài 18: So sánh: $M = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ và $N = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$.

Bài 19: So sánh M và N biết: $M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$ và $N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$.

Bài 20: So sánh $\frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{104^2} + \frac{1}{105^2}$ và $\frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}$.

Bài 21: So sánh $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ và $-\frac{1}{2}$.

Bài 22: Tìm các số tự nhiên n sao cho:

a) $3 < 3^n \leq 234$.

b) $8 \cdot 16 \geq 2^n \geq 4$.

Bài 23: Tìm số tự nhiên n biết rằng: $4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16}$.

Bài 24: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Tìm số tự nhiên n , biết $2A + 3 = 3^n$.

Bài 25: Tìm các số nguyên dương m và n sao cho: $2^m - 2^n = 256$.

Bài 26: Tìm số nguyên dương n biết:

a) $64 < 2^n < 256$.

b) $243 > 3^n \geq 9$.

Bài 27: Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho: $n^{200} < 6^{300}$.

Bài 28: Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết:

a) $32 < 2^n < 512$.

b*) $3^{18} < n^{12} \leq 20^8$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Định hướng tư duy: Nhận thấy, ở câu a) thì 243 và 27 là các cơ số liên quan tới lũy thừa cơ số 3, ở câu b) thì 625 và 125 liên quan tới lũy thừa cơ số 5. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

Lời giải:

a) Ta có: $243^5 = (3^5)^5 = 3^{25}$; $3 \cdot 27^5 = 3 \cdot (3^3)^5 = 3 \cdot 3^{15} = 3^{16}$

Vì $3^{16} < 3^{25} \Rightarrow 3 \cdot 27^5 < 243^5$.

b) $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}$; $125 = (5^3)^7 = 5^{21}$

Vì $5^{21} > 5^{20} \Rightarrow 125^7 > 625^5$.

Bài 2:

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có chung số mũ 10, ở câu b) thì các lũy thừa có chung số mũ 100, ở câu c) thì các lũy thừa có chung số mũ 101, ở câu d) các lũy thừa có chung số mũ 660. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

Lời giải:

a) Ta thấy: $99^{20} = (99^2)^{10} = (99.99)^{10}$; $9999^{10} = (99.101)^{10}$

Vì $(99.99)^{10} < (99.101)^{10} \Rightarrow 99^{20} < 9999^{10}$.

b) Ta có: $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$, $7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$.

Vì $243^{100} < 343^{100}$ nên $3^{500} < 7^{300}$.

c) Ta có:

$$202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101)^{101}$$

$$303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$$

Vì $808.101^2 > 9.101^2$ nên $202^{303} > 303^{202}$.

d) Ta có:

$$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660} \quad (1)$$

$$37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $11^{1979} < 37^{1320}$.

Bài 3:

a) Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14}$, $3.4^7 = 3.2^{14}$

Vì $2 < 3 \Rightarrow 2.2^{14} < 3.2^{14} \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$.

b) Ta có :

$$10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}, 48 \cdot 50^5 = (3 \cdot 2^4) \cdot (2^5 \cdot 5^{10}) = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$$

Vì $2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} < 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} \Rightarrow 10^{10} < 48 \cdot 50^5$.

c) Ta có: $4^{30} = (2^2)^{30} = (2.2)^{30} = 2^{30} \cdot 2^{30} = (2^3)^{10} \cdot (2^2)^{15} = 8^{10} \cdot 4^{15}$,

$$24^{10} \cdot 3 = (8.3)^{10} \cdot 3 = 8^{10} \cdot 3^{10} \cdot 3 = 8^{10} \cdot 3^{11}$$

Vì $3^{11} < 4^{15} \Rightarrow 8^{10} \cdot 3^{11} < 8^{10} \cdot 4^{15} \Rightarrow 4^{30} > 3.24^{10}$

$$\Rightarrow 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3.24^{10}.$$

d) Ta có :

$$1990^{10} + 1990^9 = 1990^9 \cdot (1990 + 1) = 1991 \cdot 1990^9$$

$$1991^{10} = 1991 \cdot 1991^9$$

Vì $1990^9 < 1991^9$ nên $1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$.

Bài 4:

Biến đổi a^n về dạng: $c.d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e . Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m .

$$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$$

$$\text{Vì } 5^{45} > 5^{40} \Rightarrow 2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}.$$

Bài 5:

Biến đổi a^n về dạng: $c.d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e . Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m .

a) Ta có: $78^{12} - 78^{11} = 78^{11} \cdot (78 - 1) = 78^{11} \cdot 77$

$$78^{11} - 78^{10} = 78^{10} \cdot (78 - 1) = 78^{10} \cdot 77$$

$$\text{Vì } 78^{11} > 78^{10} \Rightarrow 78^{11} \cdot 77 > 78^{10} \cdot 77 \Rightarrow 78^{12} - 78^{11} > 78^{11} - 78^{10}.$$

b) Ta có

$$A = 72^{44} (72 - 1) = 72^{44} \cdot 71 \text{ và } B = 72^{43} (72 - 1) = 72^{43} \cdot 71$$

$$72^{44} > 72^{43} \Rightarrow 72^{44} \cdot 71 > 72^{43} \cdot 71 \Rightarrow A > B.$$

Bài 6:

Dùng tính chất bắc cầu: So sánh hai số với số lũy thừa 10.

Ta có: $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$$11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10} < 11^{21}$$

$$\text{Vì } 81^{10} < 121^{10} \Rightarrow 3^{39} < 11^{21}.$$

Bài 7.

Với bài này, học sinh lớp 6 sẽ không định hướng được cách làm, giáo viên có thể gợi ý học sinh so sánh: $2^{63} > 5^{27}$ và $2^{63} < 5^{28}$.

$$\text{Ta có: } 2^{63} = (2^7)^9 = 128^9, 5^{27} = (5^3)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 2^{63} = (2^9)^7 = 512^7, 5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}.$$

Bài 8:

Xét: a^n biến đổi được về dạng: $c^q.d^k$

b^m biến đổi được về dạng: $e^p \cdot g^h$

Nếu $c^q < e^p$ và $d^k < g^h$ thì $c^q \cdot d^k < e^p \cdot g^h$.

Ta có: $2^{1995} = 2^{1990} \cdot 2^5$; $5^{863} = 5^{860} \cdot 5^3$

Nhận xét: $2^5 = 32 < 5^3 = 125$ nên cần so sánh 2^{1990} và 5^{860} .

Có: $2^{10} = 1024$, $5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$.

Có: $2^{1990} = 2^{1720} \cdot 2^{270}$, cần so sánh $2^{1720} \cdot 2^{270}$ với số $2^{1720} \cdot 3^{172}$ như sau:

$$3^7 = 2187; 2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}.$$

$$3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11})^{24} > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270}.$$

Do đó: $2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$

Mà $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$.

Bài 9:

Ta có: $2^{10} = 1025$; $7^3 = 343$

$$\Rightarrow 2^{10} < 3 \cdot 7^3 \Rightarrow (2^{10})^{238} < 3^{238} \cdot (7^3)^{238}$$

$$\Rightarrow 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714} \quad (1)$$

Xét: $3^{238} = 3^3 \cdot 3^{235} = 3^3 \cdot (3^5)^{47} < 3^3 \cdot (2^8)^{47} < 2^5 \cdot 2^{376} = 2^{381}$ (vì $3^5 < 2^8$)

$$\Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $2^{2380} < 2^{381} \cdot 7^{714}$

$$\Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$$

Bài 10.

Đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ.

Ta có: $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$; $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ mà $8^{100} < 9^{100}$

$$\Rightarrow 2^{300} < 3^{200}.$$

Bài 11:

Biến đổi a^n về dạng: $c \cdot d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e \cdot d^k$ rồi so sánh hai số c và e . Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m .

$$\text{Ta có: } 71^{50} < 72^{50} = (8 \cdot 9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (1)$$

$$37^{75} > 36^{75} = (4.9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

$$\text{Mà } 2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (3)$$

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $37^{75} > 71^{50}$.

Bài 12:

$$\text{a) Ta có: } 50^{20} = \left[(50)^2 \right]^{10} = 2500^{10} < 2550^{10} \Rightarrow 5^{20} < 2550^{10}.$$

$$\text{b) Ta có: } 999^{10} = \left[(999)^2 \right]^5 < 998001^5 < 999999^5 \Rightarrow 999^{10} < 999999^5.$$

Bài 13:

$$2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50} < 5^{50} \quad (1).$$

$$3^{75} = (3^3)^{25} = 27^{25} = 3^{75} > 5^{50} \quad (2).$$

$$5^{50} = (5^5)^{10} = 25^{10} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow 2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$.

Bài 14:

$$\text{Ta có: } A = 1234^{56789} > 1000^{50000} = (10^3)^{50000} = 10^{150000}$$

$$B = 56789^{1234} < 100000^{2000} = (10^5)^{2000} = 10^{10000}$$

$$\text{Vì } 10^{10000} < 10^{150000} \Rightarrow 56789^{1234} < 1234^{56789}.$$

Bài 15:

Số có 9 chữ số là $\overline{a_1 a_2 \dots a_8 a_9}$ trong đó các chữ số $a_i \neq 0$ ($i = \overline{1; 9}$) và có thể giống nhau.

Từ tập hợp số $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ mỗi chữ số a_i có 9 cách chọn. Do đó ta có số các số có 9 chữ số thỏa mãn bài toán là $m = 9^9$ số.

$$\text{Từ đó: } m = 9^9 = 9 \cdot 9^8 < 10 \cdot 9^8.$$

Bài 16:

$$\text{Ta có: } A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$$

$$2012.A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{73}$$

$$\Rightarrow 2012.A - A = 2011A = 2012^{73} - 1$$

$$\Rightarrow A = (2012^{73} - 1) : 2011 < 2012^{73} - 1.$$

Vậy $A < B$.

Bài 17:

$$B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{3^{10}(11+5)}{3^9 \cdot 16} = 3.$$

$$C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^{10}(13+65)}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^2 \cdot 78}{104} = 3.$$

Vậy $B = C$.

Bài 18:

Ta có: $\frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{4}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^4}.$

$$\frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3}.$$

$$\text{Vì } \frac{4}{8^4} < \frac{4}{8^3} \Rightarrow \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^4} < \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3}$$

$$\Rightarrow M < N.$$

Bài 19:

$$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} \text{ nên } 19M = \frac{19 \cdot (19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \frac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{31} + 5}.$$

$$N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5} \text{ nên } 19N = \frac{19 \cdot (19^{31} + 5)}{19^{32} + 5} = \frac{19^{32} + 95}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}.$$

$$\text{Vì } \frac{90}{19^{31} + 5} > \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$1 + \frac{90}{19^{31} + 5} > 1 + \frac{90}{19^{32} + 5} \text{ hay } 19M > 19N \Rightarrow M > N.$$

Bài 20:

Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-n+1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{101^2} &< \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \\ \frac{1}{102^2} &< \frac{1}{101} - \frac{1}{102} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{105^2} &< \frac{1}{104} - \frac{1}{103} \\ \Rightarrow \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \dots + \frac{1}{105^2} &< \frac{1}{100} - \frac{1}{105} \\ &= \frac{105-100}{100 \cdot 105} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7} \end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{102^2} + \dots + \frac{1}{105^2} < \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7}$.

Bài 21:

A là tích của 99 số âm. Do đó:

$$\begin{aligned} -A &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right) \\ &= \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{9999}{100^2} \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{99 \cdot 101}{100^2} \end{aligned}$$

Để dễ rút gọn ta viết tử dưới dạng tích các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$-A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots 98 \cdot 99}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 99 \cdot 100} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 100 \cdot 101}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 99 \cdot 100} = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{1}{2}$$

Vậy $A < -\frac{1}{2}$.

Bài 22:

Đưa các số về các lũy thừa có cùng cơ số.

a) $3 < 3^n \leq 234 \Rightarrow 3^1 < 3^n \leq 3^5 \Rightarrow 1 < n \leq 5$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: 2, 3, 4, 5.

b) $8 \cdot 16 \geq 2^n \geq 4 \Rightarrow 2^3 \cdot 2^4 \geq 2^n \geq 2^2 \Rightarrow 2^7 \geq 2^n \geq 2^2 \Rightarrow 7 \geq n \geq 2$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Bài 23:

$$4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16} \Rightarrow (4 \cdot 9)^{15} < (2 \cdot 3)^n < (18 \cdot 2)^{16}$$

$$\Rightarrow 36^{15} < 6^n < 36^{16}$$

$$\Rightarrow (6^2)^{15} < 6^n < (6^2)^{16}$$

$$\Rightarrow 6^{30} < 6^n < 6^{32}$$

$$\Rightarrow 30 < n < 32$$

$$\Rightarrow n = 31.$$

Bài 24:

$$\text{Có } A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$$

$$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$$

$$\Rightarrow 3A - A = 2A = 3^{101} - 3$$

$$\Rightarrow 2A + 3 = 3^{101}$$

$$\text{Mà theo đề bài ta có } 2A + 3 = 3^n$$

$$\Rightarrow 3^{101} = 3^n \Rightarrow n = 101.$$

Bài 25:

$$\text{Ta có: } 2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8 \quad (1).$$

Dễ thấy $m \neq n$, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - n = 1$ thì từ (1) ta có:

$$2^n.(2 - 1) = 2^8 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8 \text{ và } m = 9.$$

Trường hợp 2: Nếu $m - n \geq 2$

$\Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tách ra thừa số nguyên tố, còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2, do đó hai vế của (1) mâu thuẫn nhau.

Vậy $n = 8$ và $m = 9$ là đáp số duy nhất.

Bài 26:

$$\text{a) Ta có: } 64 < 2^n < 256 \Rightarrow 2^6 < 2^n < 2^8 \Rightarrow 6 < n < 8, \text{ mà } n \text{ nguyên dương, nên } n = 7.$$

$$\text{b) Ta có: } 243 > 3^n \geq 9 \Rightarrow 3^5 > 3^n \geq 3^2 \Rightarrow 5 > n \geq 2, \text{ mà } n \text{ nguyên dương nên } n \text{ nhận các giá trị là: } 4; 3; 2.$$

Bài 27:

$$\text{Ta có: } n^{200} = (n^2)^{100}; 6^{300} = (6^3)^{100} = 216^{100}$$

$$n^{200} < 6^{300} \Rightarrow (n^2)^{100} < 216^{100} \Rightarrow n^2 < 216 \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Số nguyên lớn nhất thỏa mãn (*) là $n = 14$.

Bài 28:

a) Với $n \in \mathbb{N}$, ta xét:

$$32 < 2^n \Leftrightarrow 2^5 < 2^n \Rightarrow 5 < n$$

$$2^n < 512 \Leftrightarrow 2^n < 2^9 \Rightarrow n < 9$$

Do đó: $5 < n < 9 \Rightarrow n \in \{6; 7; 8\}$.

b) Với $n \in \mathbb{N}$, ta xét:

$$3^{18} < n^{12} \Leftrightarrow (3^3)^6 < (n^2)^6 \Leftrightarrow 3^3 < n^2 \Leftrightarrow 27 < n^2$$

Nhận thấy: $5^2 < 27 < 6^2$, nên $6^2 \leq n^2 \Rightarrow 6 \leq n$.

$$n^{12} \leq 20^8 \Leftrightarrow (n^3)^4 < (20^2)^4 \Leftrightarrow n^3 < 20^2 \Leftrightarrow n^3 < 400$$

Nhận thấy: $7^3 < 400 < 8^3$, nên $n^3 \leq 7^3 \Rightarrow n \leq 7$

Do đó: $6 \leq n \leq 7 \Rightarrow n \in \{6; 7\}$.

CHUYÊN ĐỀ 4: CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ:

Định nghĩa: Cho hai số tự nhiên a và b , trong đó $b \neq 0$. Ta nói a chia hết cho b nếu tồn tại số tự nhiên q sao cho $a = bq$. Khi đó ta còn nói: a là bội của b , hoặc b là ước của a .

Các tính chất chung:

- 1) Bất cứ số nào khác 0 cũng chia hết cho chính nó
- 2) Tính chất bắc cầu: nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì a chia hết cho c .
- 3) Số 0 chia hết cho mọi số b khác 0
- 4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

Tính chất chia hết của một tổng và hiệu

- 5) Nếu a và b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m , $a - b$ chia hết cho m .

Hệ quả: Nếu tổng của hai số chia hết cho m và một trong hai số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .

- 6) Nếu một trong hai số a và b chia hết cho m , số kia không chia hết cho m thì $a + b$ không chia hết cho m , $a - b$ không chia hết cho m

Tính chất chia hết của một tích

- 7) Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m
- 8) Nếu a chia hết cho m và b chia hết cho n thì ab chia hết cho $m.n$

Hệ quả: Nếu a chia hết cho b thì a^n chia hết cho b^n

Một số dấu hiệu chia hết

Đặt $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, với $a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0$ là các chữ số. Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau:

- $A : 2 \Leftrightarrow a_0 : 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$
- $A : 3 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) : 3$.
- $A : 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 4$
- $A : 5 \Leftrightarrow a_0 : 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 5\}$.

- $A:8 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0}:8$
- $A:9 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n):9$.
- $A:11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_2 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)]:11$.
- $A:25 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0}:25$
- $A:125 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0}:125$

Dạng 1: Chứng minh chia hết

Bài 1: Chứng minh rằng:

- a, $\overline{ab} + \overline{ba}:11$ b, $\overline{ab} - \overline{ba}:9$ ($a > b$) c, $\overline{abcabc}:7,11,13$

Hướng dẫn giải

- a, Ta có : $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b:11$
 b, Ta có : $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b:9$
 c, Ta có : $\overline{abcabc} = \overline{abc}.1001 = \overline{abc}.7.11.13:7,11,13$

Bài 2: Chứng minh rằng:

- a, $(n+10)(n+15):2$ b, $n(n+1)(n+2):2,3$ c, $n^2 + n + 1$ không : 4,2,5

Hướng dẫn giải

- a, Ta có: Nếu n là số lẻ thì $n+15:2$
 Nếu n là số chẵn thì $n+10:2$, Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì :
 $(n+10)(n+15):2$
 b, Ta có: Vì $n(n+1)(n+2)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có 1 số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3
 c, Ta có : $n(n+1)+1$ là 1 số lẻ nên không chia hết cho 4,2 và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

Bài 3: Chứng minh rằng:

- a, $(n+3)(n+6):2$ b, $n^2 + n + 6$ không : 5 c, $\overline{aaabbb}:37$

Hướng dẫn giải

- a, Ta có: Nếu n là số chẵn thì $n+6:2$
 Nếu n lẻ thì $n+3:2$, Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì $(n+3)(n+6):2$
 b, Ta có : $n^2 + n + 6 = n(n+1) + 6$, Vì $n(n+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên chỉ có chữ số tận cùng là : 0, 2, 6, do đó : $n(n+1) + 6$ sẽ có tận cùng là 6, 8, 2 nên không : 5
 c, Ta có : $\overline{aaabbb} = \overline{aaa000} + \overline{bbb} = a.11100 + b.111 = a.300.37 + b.3.37$ chia hết cho 37

Bài 4: Chứng minh rằng:

- a, $\overline{aaa}:a, 37$ b, $ab(a+b):2$ c, $\overline{abc} - \overline{cba}:99$

Hướng dẫn giải

- a, Ta có : $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$ chia hết cho a và chia hết cho 37
 b, Ta có: Vì a, b là hai số tự nhiên nên a, b có các TH sau:
 TH1: a, b cùng tính chẵn lẻ thì $(a + b)$ là 1 số chẵn như vậy $a + b$ chia hết cho 2

TH2: a, b khác tính chẵn lẻ thì 1 trong 2 số phải có 1 số chẵn khi đó số đó chia hết cho 2

$$c, \text{ Ta có: } \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) : 99$$

Bài 5: Chứng minh rằng : $\overline{ab} + 8\overline{ba} : 9$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \overline{ab} + 8\overline{ba} = 10a + b + 8(10b + a) = 18a + 18b = 18(a + b) : 9$$

Bài 6: Cho $a, b \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $(4a + b) : 5 \Leftrightarrow (a + 4b) : 5$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (4a + b) : 5 \Rightarrow 4(4a + b) : 5 \Rightarrow (16a + 4b) : 5 \Rightarrow 15a + (a + 4b) : 5 \Rightarrow (a + 4b) : 5 \text{ (dpcm)}$$

Bài 7: Chứng minh rằng số có dạng : $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\begin{aligned} \overline{abcabc} &= a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + b.10 + c = a.10^2(10^3 + 1) + b.10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1) \\ &= (10^3 + 1)(a.10^2 + b.10 + c) = 1001(a.10^2 + b.10 + c) = 11.91.\overline{abc} : 11 \end{aligned}$$

Bài 8: Tìm n là số tự nhiên để: $A = (n + 5)(n + 6) : 6n$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = 12n + n(n - 1) + 30, \text{ Để } A : 6n \Rightarrow n(n - 1) + 30 : 6n$$

$$\text{Ta có: } n(n - 1) : n \Rightarrow 30 : n \Rightarrow n \in U(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

$$\text{Và } n(n - 1) : 6 \Rightarrow n(n - 1) : 3 \Rightarrow n \in \{1; 3; 6; 10; 15; 30\}$$

Thử vào ta thấy $n \in \{1; 3; 10; 30\}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài

Bài 9: Chứng minh rằng: $3a + 2b : 17$ khi và chỉ khi $10a + b : 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) và ngược lại có đúng không?

Hướng dẫn giải

$$* 3a + 2b : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$$

$$\text{Ta có: } 3a + 2b : 17 \Rightarrow 9.(3a + 2b) : 17 \Rightarrow 27a + 18b : 17 \Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$$

$$* 10a + b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

$$\text{Ta có: } 10a + b : 17 \Rightarrow 2(10a + b) : 17 \Rightarrow 20a + 2b : 17 \Rightarrow 17a + 3a + 2b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Bài 10: Chứng minh rằng:

a, Nếu $\overline{ab} + \overline{cd} : 11$ thì $\overline{abcd} : 11$

b, Cho $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ cmr $\overline{abcdeg} : 7$

Hướng dẫn giải

a, Thật vậy $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd})$, chia hết cho 11.

$$\text{b, Ta có } \overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$$

mà $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ và $1001 : 7$ nên $\overline{abcdeg} : 7$

Bài 11: Chứng minh rằng:

a, Chứng minh nếu $\overline{ab} = 2\overline{cd}$ với a, b, c, d là các chữ số khác 0 thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 67.

b, Cho số $\overline{abc}$ chia hết cho 27. Chứng minh rằng $\overline{bca}$ chia hết cho 27

Hướng dẫn giải

a, Ta có $\overline{ab} = 2\overline{cd}$

và $\overline{abcd} = \overline{ab}.100 + \overline{cd} = 2\overline{cd}.100 + \overline{cd} = \overline{cd}.201 = \overline{cd}.67.3$

Vậy $\overline{abcd}$ chia hết cho 67

b, Ta có :

$$\overline{abc}:27 \Rightarrow \overline{abc0}:27 \Rightarrow 1000a + \overline{bc0}:27 \Rightarrow 999a + a + \overline{bc0}:27 \Rightarrow 27.37a + \overline{bca}:27$$

Do $27.37a:27$ nên $\overline{bca}:27$.

Bài 12: Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcdeg}:23, 29$ nếu $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$

b, Cmr nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}):11$ thì $\overline{abcdeg}:11$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1000.2\overline{deg} + \overline{deg} = 2001\overline{deg} = \overline{deg}.23.29.3$

b, Ta có : $\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg} = 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}):11$

Bài 13: Chứng minh rằng:

a, Cho $\overline{abc} + \overline{deg}:37$ cmr $\overline{abcdeg}:37$

b, Nếu $\overline{abcd}:99$ thì $\overline{ab} + \overline{cd}:99$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg}):37$

b, Ta có : $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd}):99 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd}:9$

Bài 14: Chứng minh rằng: Nếu $\overline{abcd}:101$ thì $\overline{ab} - \overline{cd}:101$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\overline{abcd}:101 \Rightarrow 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - \overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - (\overline{ab} - \overline{cd}):101 \Rightarrow \overline{ab} - \overline{cd}:101$

Bài 15: Chứng minh rằng: $a - 11b + 3c:17$ thì $2a - 5b + 6c:17$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)

Hướng dẫn giải

Ta có: $a - 11b + 3c:17 \Rightarrow 2a - 22b + 6c:17 \Rightarrow (2a - 5b + 6c) - 17b:17 \Rightarrow 2a - 5b + 6c:17$

Bài 16: Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcd}:29$ thì $a + 3b + 9c + 27d:29$

b, $\overline{abc}:21$ thì $a - 2b + 4c:21$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d:29 \Rightarrow 2000a + 200b + 20c + 2d:29$

$\Rightarrow 2001a - a + 203b - 3b + 29c - 9c + 29d - 27d:29$

$\Rightarrow (2001a + 203b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d):29$

$\Rightarrow a + 3b + 9c + 27d:29$

b, Ta có: $\overline{abc}:21 \Rightarrow 100a + 10b + c:21 \Rightarrow 4(100a + 10b + c):21$

$\Rightarrow (a - 2b + 4c) + (399a + 42b):21$

$\Rightarrow (a - 2b + 4c) + 21(19a + 2b):21$

$\Rightarrow (a - 2b + 4c):21$

Bài 17: Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

$\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100 \times \overline{cd} + \overline{eg} = 9999 \times \overline{ab} + 99 \times \overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg})$ chia hết cho 11.

Bài 18: Với a, b là các số nguyên, chứng tỏ rằng: $a + 4b : 13$ khi và chỉ khi $10a + b : 13$

Hướng dẫn giải

Ta có: $a + 4b : 13 \Rightarrow 10(a + 4b) : 13$ (1)

Lại có: $10(a + 4b) = 10a + 40b = 10a + b + 39a$

Mà $39a : 13$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 10a + b : 13$.

Bài 19: a) Cho $\overline{abc} + \overline{deg}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 37

b) Cho $\overline{abc} - \overline{deg}$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng chia hết cho 7

Hướng dẫn giải

a) $\overline{abcdeg} = 1000 \times \overline{abc} + \overline{deg} = 999 \times \overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg}) : 37$

b) $\overline{abcdeg} = 1000 \times \overline{abc} + \overline{deg} = 1001 \times \overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$ chia hết cho 7.

Bài 20: Tìm chữ số a biết rằng $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} n = \overline{20a20a20a} &= \overline{20a20a}.1000 + \overline{20a} = (\overline{20a}.1000 + \overline{20a}).1000 + \overline{20a} \\ &= 1001. \overline{20a}.1000 + \overline{20a}. \end{aligned}$$

Theo đề bài n chia hết cho 7, mà 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{20a}$ chia hết cho 7.

Ta có $\overline{20a} = 196 + (4 + a)$, chia hết cho 7 nên $4 + a$ chia hết cho 7. Vậy $a = 3$.

Bài 21: Cho ba chữ số khác nhau và khác 0. Lập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy. Chứng minh rằng tổng của chúng chia hết cho 6 và 37

Hướng dẫn giải

Gọi ba chữ số là a, b, c .

Các số tự nhiên có 3 chữ số gồm 3 số ấy là: $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bca}, \overline{bac}, \overline{cba}, \overline{cab}$

Tổng các số theo đề bài bằng: $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cba} + \overline{cab} = 222(a + b + c)$

chia hết cho 6 và 37.

Bài 22: Có hai số tự nhiên x và y nào mà $(x + y)(x - y) = 1002$ hay không?

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại các số tự nhiên x và y mà

$$(x + y)(x - y) = 1002 \quad (1).$$

Không thể xảy ra trường hợp trong x và y có một số chẵn, một số lẻ vì nếu xảy ra thì $x + y$ và $x - y$ đều lẻ nên tích $(x + y)(x - y)$ là số lẻ, trái với (1).

Vậy x và y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Khi đó $x + y$ và $x - y$ đều chẵn nên tích $(x + y)(x - y)$ chia hết cho 4, trong khi đó 1002 không chia hết cho 4, vô lí.

Vậy không tồn tại các số tự nhiên x và y mà $(x + y)(x - y) = 1002$.

Bài 23: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu viết nó tiếp sau số 1999 thì ta được một số chia hết cho 37

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$.

$$\text{Ta có: } \overline{1999ab} : 37 \Rightarrow 199900 + \overline{ab} : 37 \Rightarrow 5402.37 + 26 + \overline{ab} : 37 \Rightarrow 26 + \overline{ab} : 37$$

$$\text{Vậy } \overline{ab} \in \{11; 48; 85\}.$$

Bài 24: Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng:

- $(n + 10)(n + 15)$ chia hết cho 2
- $n(n + 1)(n + 2)$ chia hết cho 2 và cho 3
- $n(2n + 7)(7n + 1)$ chia hết cho 6

Hướng dẫn giải

- Nếu n là số lẻ thì $n + 15$ chia hết cho 2 nên $(n + 10)(n + 15)$ chia hết cho 2.
- Nếu n là số chẵn thì $n + 10$ chia hết cho 2 nên $(n + 10)(n + 15)$ chia hết cho 2.
- Trong 2 số n và $(7n + 1)$ phải có một số chẵn nên $n(2n + 1)(7n + 1) : 2$

$$\text{Mà } (3, 2) = 1 \text{ nên ta chỉ cần chứng minh } n(2n + 1)(7n + 1) : 3$$

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ thì $n(2n + 1)(7n + 1) = 3k(6k + 1)(21k + 1) : 3$
- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ thì $2n + 7 = (6k + 9) : 3 \Rightarrow n(2n + 7)(7n + 1) : 3$
- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì $7n + 1 = (21k + 15) : 3 \Rightarrow n(2n + 7)(7n + 1) : 3$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n(2n + 7)(7n + 1)$ chia hết cho 6.

Bài 25: Tìm tất cả các chữ số x, y sao cho $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2, 3 và 5.

Hướng dẫn giải

Tìm tất cả các chữ số x, y sao cho $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2, 3 và 5.

Ta có $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2 và 5 $\Rightarrow y = 0$.

Lại có $\overline{2019xy} : 3$ nên $(2+0+1+9+x+0):3 \Rightarrow (12+x):3$.

$$\Rightarrow x \in \{0; 3; 6; 9\}$$

Vậy $(x; y) \in \{(0; 0); (3; 0); (6; 0); (9; 0)\}$.

Bài 26: Cho hai số nguyên a và b không chia hết cho 3, nhưng khi chia cho 3 thì có cùng số dư:

Chứng minh rằng: $(ab-1):3$

Hướng dẫn giải

Ta có: $a = 3p + r, b = 3q + r$ ($p, q, r \in \mathbb{Z}, r = 1, 2$) khi đó

$$ab - 1 = (3p + r)(3q + r) - 1 = 3p(3q + r) + r(3p + r) - 1 = 9pq + 3pr + 3qr + r^2 - 1$$

Nếu $r = 1$ thì $r^2 - 1 = 1 - 1 = 0 : 3$

Nếu $r = 2$ thì $r^2 - 1 = 4 - 1 = 3 : 3$

Vậy $(ab-1)$ luôn chia hết cho 3.

Bài 27: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, chia hết cho 5 và cho 27 biết rằng hai chữ số giữa của số đó là 97

Hướng dẫn giải

Gọi n là số phải tìm, n phải tận cùng bằng 0 hoặc 5 và n phải chia hết cho 9. Xét $n = \overline{*975}$ chia hết cho 9 nên $*$ = 6. Thử lại: 6975 không chia hết cho 27

Xét $n = \overline{*970}$ chia hết cho 9 nên $*$ = 2. Thử lại: 2970 chia hết cho 27.

Số phải tìm là 2970

Bài 28: Hai số tự nhiên a và $2a$ đều có tổng các chữ số bằng k . Chứng minh rằng a chia hết cho 9

Hướng dẫn giải

Ta biết rằng một số và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 9, do đó hiệu của chúng chia hết cho 9.

$$\text{Như vậy: } 2a - k : 9$$

$$\text{Và } a - k : 9$$

$$\text{Suy ra: } (2a - k) - (a - k) : 9$$

$$\text{Do đó } a : 9$$

Bài 29: Cho số tự nhiên $\overline{ab}$ bằng 3 lần tích các chữ số của nó

- a) Chứng minh rằng b chia hết cho a
- b) Giả sử $b = ka$ ($k \in \mathbb{N}$), chứng minh rằng k là ước của 10
- c) Tìm các số $\overline{ab}$ nói trên

Hướng dẫn giải

a) Theo đề bài: $\overline{ab} = 3ab$

$$\Rightarrow 10a + b = 3ab \quad (1)$$

$$\Rightarrow 10a + ba : a$$

$$\Rightarrow b : a$$

b) Do $b = ka$ nên $k < 10$. Thay $b = ka$ vào (1):

$$10a + ka = 3a \cdot ka$$

$$\Rightarrow 10 + k = 3ak \quad (2)$$

$$\Rightarrow 10 : k$$

c) Do $k < 10$ nên $k \in \{1; 2; 5\}$

Với $k = 1$, thay vào (2): $11 = 3a$, loại

Với $k = 2$, thay vào (2): $12 = 6a \Rightarrow a = 2$;

$$b = ka = 2 \cdot 2 = 4. \text{ Ta có } \overline{ab} = 24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$$

Với $k = 5$, thay vào (2): $15 = 5a \Rightarrow a = 1$;

$$b = ka = 5 \cdot 1 = 5. \text{ Ta có } \overline{ab} = 15 = 3 \cdot 1 \cdot 5.$$

Đáp số: 24 và 15

Chú ý. Cách giải câu c không thông qua câu a và b

$$\overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \Rightarrow 10a = 3ab - b \Rightarrow 10a = b(3a - 1)$$

Ta thấy $10a$ chia hết cho $3a - 1$, mà a và $3a - 1$ nguyên tố cùng nhau (thật vậy, nếu a và $3a - 1$ cùng chia hết cho d thì $3a - (3a - 1)$ chia hết cho d , tức là $1 : d$, vậy $d = 1$) nên

$$10 : 3a - 1$$

$3a - 1$	1	2	5	10
$3a$	2	3	6	11
a	Loại	1	2	Loại
b		5	4	

Đáp số: 15 và 24

Bài 30: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó chia hết cho tích các chữ số của nó

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$, ta có $10a + b : ab$ (1)

Suy ra $b : a$. Đặt $b = ka$ (2) thì $k < 10$ ($k \in \mathbb{N}$)

Thay $b = ka$ vào (1) ta có $10a + ka : akb$

$$\Rightarrow 10a : ka \Rightarrow 10 : k \Rightarrow k \in \{1, 2, 5\}$$

Nếu $k = 1$ thì $b = a$. Thay vào (1) ta được $11a : a^2 \Rightarrow 11 : a \Rightarrow a = 1$

$$\text{Vậy } \overline{ab} = 11$$

Nếu $k = 2$ thì $b = 2a$. Xét các số 12, 24, 36, 48 ta có các số 12, 24, 36 thỏa mãn đề bài

Nếu $k = 5$ thì $b = 5a \Rightarrow \overline{ab} = 15$ thỏa mãn đề bài

Kết luận: Có 5 số thỏa mãn đề bài là 11, 12, 15, 24, 36

Bài 31: Tìm số tự nhiên n sao cho $18n + 3$ chia hết cho 7

Hướng dẫn giải

Cách 1.

$$\begin{aligned} 18n + 3 & : 7 \\ \Leftrightarrow 14n + 4n + 3 & : 7 \\ \Leftrightarrow 4n + 3 & : 7 \\ \Leftrightarrow 4n + 3 - 7 & : 7 \\ \Leftrightarrow 4n - 4 & : 7 \\ \Leftrightarrow 4(n - 1) & : 7 \end{aligned}$$

Ta lại có $(4, 7) = 1$ nên $n - 1 : 7$

$$\text{Vậy } n = 7k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Cách 2.

$$\begin{aligned} 18n + 3 & : 7 \\ \Leftrightarrow 18n + 3 - 21 & : 7 \\ \Leftrightarrow 18n - 18 & : 7 \\ \Leftrightarrow (18n - 18) & : 7 \end{aligned}$$

Ta lại có $(18, 7) = 1$ nên $n - 1 : 7$

$$\text{Vậy } n = 7k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Nhận xét: Việc thêm bớt các bội của 7 trong hai cách giải trên nhằm đi đến một biểu thức chia hết cho 7 mà ở đó hệ số của n bằng 1.

Bài 32: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia 9 dư 5, chia 7 dư 4, chia 5 dư 3.

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là a

$$\text{Vì } a \text{ chia 9 dư 5 nên } a + 4 : 9 \Rightarrow a + 4 + 153 : 9 \Rightarrow a + 157 : 9$$

Vì a chia 7 dư 4 nên $a+3 \vdots 7 \Rightarrow a+3+154 \vdots 7 \Rightarrow a+157 \vdots 7$

Vì a chia 5 dư 3 nên $a+2 \vdots 5 \Rightarrow a+2+155 \vdots 5 \Rightarrow a+157 \vdots 5$

Suy ra $a+157 \in BC(9,5,7)$

$$BCNN(9,5,7) = 315$$

$$\Rightarrow a+157 = 315k \text{ vì } a \text{ nhỏ nhất nên } k=1 \Rightarrow a=158$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là : 158.

Bài 33: Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi số đã cho là A . Theo bài ra ta có: $A = 7a + 3 = 17b + 12 = 23c + 7$

$$\text{Mặt khác: } A + 39 = 7a + 3 + 39 = 17b + 12 + 39 = 23c + 7 + 39$$

$$= 7(a+6) = 17(b+3) = 23(c+2)$$

Như vậy $A+39$ đồng thời chia hết cho 7, 17 và 23.

$$\text{Nhưng } \text{ƯCLN}(7,17,23) = 1 \Rightarrow (A+39) \vdots 7, 17, 23 \Rightarrow A+39 \vdots 2737 \Rightarrow A = 2698.$$

Do $2698 < 2737$ nên $A : 2737$ có số dư là 2698.

Bài 34: Cho số $\overline{abc} : 37$. chứng minh rằng $\overline{cab} : 37$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } \overline{abc} : 37 \text{ nên } 100.\overline{abc} : 37 \Rightarrow 10000a + 1000b + 100c : 37$$

$$\Rightarrow 100c + 10a + b + 9990a + 999b : 37 \Rightarrow \overline{cab} + 37.270a + 27b : 37$$

$$\Rightarrow \overline{cab} : 37$$

Bài 35: Chứng tỏ rằng trong 27 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 50.

Hướng dẫn giải

TH1: Nếu 27 số tự nhiên trên có 2 số có cùng số dư khi chia cho 50 thì hiệu của chúng chia hết cho 50.

TH2: Nếu 27 số tự nhiên trên không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 50

Số dư khi chia cho 50 gồm: 0; 1; 2; ...; 49 chia làm 26 nhóm:

$$(0), (1; 49), (2; 48), \dots, (24; 26), (25)$$

Chia 27 số dư khác nhau vào 26 nhóm trên, tồn tại ít nhất 2 số cùng một nhóm.

Suy ra tổng của chúng chia hết cho 50.

Vậy trong 27 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 50.

Bài 36: Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a - b = 6$. và $n : 9$. Tìm a, b .

Hướng dẫn giải

$$\text{Do } n : 9 \Rightarrow \overline{7a5} + \overline{8b4} : 9 \Rightarrow 700 + 10a + 5 + 800 + 10b + 4 : 9 \Rightarrow 1509 + 10a + 10b : 9$$

$$\Rightarrow 1503 + 9a + 9b + 6 + a + b : 9 \Rightarrow 6 + a + b : 9 \Rightarrow a + b \in \{3; 12\}$$

+ Với $a + b = 3$ thì $a; b$ khác tính chẵn lẻ và $a - b = 6$ thì $a; b$ cùng tính chẵn lẻ. Do đó không tồn tại $a; b$.

+ Với $a + b = 12$ và $a - b = 6$ suy ra $a = 9; b = 3$.

Vậy $a = 9; b = 3$.

Bài 37: Tìm các chữ số a, b sao cho:

a) $a - b = 4$ và $\overline{7a5b1}$ chia hết cho 3

b) $a - b = 6$ và $\overline{4a7} + \overline{1b5}$ chia hết cho 9

Hướng dẫn giải

a) Số $\overline{7a5b1} : 3 \Rightarrow 7 + a + 5 + b + 1 : 3 \Rightarrow 13 + a + b : 3 \Rightarrow a + 3$ chia cho 3 dư 2 (1) .

Ta có $a - b = 4$ nên:

$$4 \leq a \leq 9$$

$$0 \leq b \leq 5$$

Suy ra $4 \leq a + b \leq 14$ (2).

Mặt khác $a - b$ là số chẵn nên $a + b$ là số chẵn (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $a + b \in \{8; 14\}$.

Với $a + b = 8$; $a - b = 4$ ta được $a = 6$; $b = 2$.

Với $a + b = 14$; $a - b = 4$ ta được $a = 9$; $b = 5$.

b) $\overline{4a7} + \overline{1b5} : 9 \Rightarrow 512 + 10(a + b) : 9$

$$\Rightarrow 504 + 8 + 9(a + b) + a + b : 9 \Rightarrow a + b \text{ chia cho } 9 \text{ dư } 1$$

Do $a + b \geq a - b = 6$ nên $a + b = 10$. Từ đó tìm được: $a = 8$; $b = 2$.

Bài 38: Chứng minh rằng:

a) $2n + \underbrace{11\dots111}_n$ chia hết cho 3

b) $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27

c) $10^n + 72n - 1$ chia hết cho 81

Hướng dẫn giải

Chú ý rằng số n và số có tổng các chữ số bằng n có cùng số dư trong phép chia cho 9, do đó $\underbrace{111\dots1}_{n \text{ chữ số}} - n$ chia hết cho 9.

a) $2n + \underbrace{111\dots1}_{n \text{ chữ số}} = 3n + \left(\underbrace{111\dots1}_{n \text{ chữ số}} - n \right)$ chia hết cho 3.

b) $10^n + 18n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 27n = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ chữ số}} - 9n + 27n = 9 \cdot \left(\underbrace{111\dots1}_{n \text{ chữ số}} - n \right) + 27n$ chia hết cho 27.

c) $10^n + 72n - 1 = 10^n - 1 - 9n + 81n = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ chữ số}} - 9n + 81n = 9 \cdot \left(\underbrace{111\dots1}_{n \text{ chữ số}} - n \right) + 81n$ chia hết cho 81.

Bài 39: Cho số tự nhiên $\overline{ab}$ bằng ba lần tích các chữ số của nó, chứng minh rằng $b \vdots a$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \Rightarrow 10a + b : a \Rightarrow b : a$

Bài 40: Cho $A = 11^9 + 11^8 + 11^7 + \dots + 11 + 1$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5

Hướng dẫn giải

A tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 5.

Bài 41: Tìm a, b biết: $a - b = 3$ và $(\overline{14a3} + \overline{35b2}) : 9$

Hướng dẫn giải

Ta có: Để $\overline{14a3} + \overline{35b2} : 9 \Rightarrow 1 + 4 + a + 3 + 3 + 5 + b + 2 = a + b + 18 : 9 \Rightarrow a + b : 9$

mà a và b là số có 1 chữ số nên $a + b = 0, a + b = 9, a + b = 18$

kết hợp với $a - b = 3$ để tìm a và b

Bài 42: Tìm số tự nhiên có ba chữ số như nhau, biết rằng số đó có thể viết được dưới dạng tổng các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 1.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{aaa}$, số đó viết được dưới dạng $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Ta có: $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 111a$, do đó: $n(n+1) = 2.3.37.a$

Vì $n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37 nên tồn tại một trong hai thừa số $n, n+1$ chia hết cho 37. Chú ý rằng n và $n+1$ đều nhỏ hơn 74 (vì $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ là số có ba chữ số) nên ta xét hai trường hợp:

a) $n = 37$ thì $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{37 \cdot 38}{2} = 703$, loại.

b) $n+1=37$ thì $\frac{36.37}{2} = 666$, thỏa mãn bài toán. Vậy số phải tìm là 666, viết được dưới dạng $1+2+3+\dots+36$.

Bài 43: Cho biết $a+4b$ chia hết cho 13, $(a, b \in \mathbb{N})$. Chứng minh rằng $10a+b$ chia hết cho 13.

Hướng dẫn giải

Đặt $a+4b = x$; $10a+b = y$. Ta biết $x \vdots 13$, ta cần chứng minh $y \vdots 13$.

Cách 1: Xét biểu thức:

$$10x - y = 10(a+4b) - (10a+b) = 10a+40-10a-b = 39b$$

Như vậy, $10x - y \vdots 13$.

Do $x \vdots 13$ nên $10x \vdots 13$. Suy ra $y \vdots 13$.

Cách 2: Xét biểu thức:

$$4y - x = 4(10a+b) - (a+4b) = 40a+4b-a-4b = 39a.$$

Như vậy $4y - x \vdots 13$.

Do $x \vdots 13$ nên $4y \vdots 13$. Ta lại có $(4, 13) = 1$ nên $y \vdots 13$.

Cách 3: Xét biểu thức:

$$3x + y = 3(a+4b) + (10a+b) = 3a+12b+10a+b = 13a+13b.$$

Như vậy $3x + y \vdots 13$.

Do $x \vdots 13$ nên $3x \vdots 13$. Suy ra $y \vdots 13$.

Cách 4: Xét biểu thức:

$$x + 9y = a + 4b + 9(10a+b) = a + 4b + 90a + 9b = 91a + 18b.$$

Như vậy $x + 9y \vdots 13$

Do $x \vdots 13$ nên $9y \vdots 13$. Ta lại có $(9, 13) = 1$ nên $y \vdots 13$.

Nhận xét: Trong các cách giải trên, ta đã đưa ra các biểu thức mà sau khi rút gọn có một số hạng là bội của 13, khi đó số hạng thứ hai (nếu có) cũng là bội của 13.

Hệ số của a ở x là 1, hệ số của a ở y là 10 nên xét biểu thức $10x - y$ nhằm khử a (tức là làm cho hệ số của a bằng 0), xét biểu thức $3x + y$ nhằm tạo ra hệ số của a bằng 13.

Hệ số của b ở x là 4, hệ số của b ở y là 1 nên xét biểu thức $4y - x$ nhằm khử b , xét biểu thức $x + 9y$ nhằm tạo ra hệ số của b bằng 13.

Bài 44: Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi chia số đó cho các số 25; 28; 35 thì được các số dư lần lượt là 4; 7; 14

Hướng dẫn giải

Ta gọi $x = \overline{abc}$ ($0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$) là số tự nhiên có 3 chữ số cần tìm

Theo giả thiết x khi chia cho 25; 28; 35 ta được các số dư lần lượt là 4; 7; 14

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 25m + 4 \\ x = 28n + 7 \\ x = 35p + 14 \end{cases} \quad (m, n, p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} x + 21 : 25 \\ x + 21 : 28 \\ x + 21 : 35 \end{cases}$$

Như thế $x + 21$ là bội chung 25; 28; 35 mà BCNN 25; 28; 35 = 700 $\Rightarrow x + 21 : 700$

Do $100 \leq x \leq 999 \Rightarrow 121 \leq x + 21 \leq 1020 \Rightarrow x + 21 = 700 \Rightarrow x = 679$

Bài 45: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5 thì dư 1, chia cho 7 thì dư 5.

Hướng dẫn giải

Gọi n là số chia cho 5 dư 1, chia cho 7 dư 5.

Cách 1. Vì n không chia hết cho 35 nên n có dạng $35k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, r < 35$), trong đó r chia 5 dư 1, chia 7 dư 5.

Số nhỏ hơn 35 chia cho 7 dư 5 là 5, 12, 19, 26, 33, trong đó chỉ có 26 chia cho 5 dư 1. Vậy $r = 26$.

Số nhỏ nhất có dạng $35k + 26$ là 26.

Cách 2. Ta có $n - 1 : 5 \Rightarrow n - 1 + 10 : 5 \Rightarrow n + 9 : 5$ (1)

Ta có $n - 5 : 7 \Rightarrow n - 5 + 14 : 7 \Rightarrow n + 9 : 7$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $n + 9 : 35$.

Số n nhỏ nhất có tính chất trên là $n = 26$.

Cách 3: $n = 5x + 1 = 7y + 5 \Rightarrow 5x = 7y + 4 \Rightarrow 2(y + 2) : 5 \Rightarrow y + 2 : 5$

Giá trị nhỏ nhất của y bằng 3, giá trị nhỏ nhất của n bằng $7.3 + 5 = 26$.

Bài 46: Tìm số tự nhiên n có bốn chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112, chia n cho 132 thì dư 98.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $131x + 112 = 132y + 98 \Rightarrow$

$\Rightarrow 131x = 131y + y - 14 \Rightarrow y - 14 : 131 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 131k + 14$ ($k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow n = 132.(131k + 14) + 98 = 132.131k + 1946$

Do n có bốn chữ số nên $k = 0, n = 1946$.

Cách 2: Từ $131x = 131y + y - 14$ suy ra

$131(x - y) = y - 14$. Nếu $x > y$ thì $y - 14 \geq 131 \Rightarrow y \geq 145 \Rightarrow n$ có nhiều hơn bốn chữ số.

Vậy $x = y$, do đó $y = 14, n = 1946$

Cách 3: Ta có $n = 131x + 112$ nên

$$132n = 131 + 132x + 14784 \quad (1)$$

Mặt khác $n = 132y + 98$ nên

$$131n = 131.132y + 12838 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $132n - 131n = 131.132(x - y) + 1946$

$$\Rightarrow n = 131.132(x - y) + 1946$$

Vì n có bốn chữ số nên $n = 1946$

Bài 47: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Hướng dẫn giải

Ta có $(p-1)p(p+1) : 3$ mà $(p, 3) = 1$ nên

$$(p-1)(p+1) : 3 \quad (1)$$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích của chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(p-1)(p+1)$ chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

$$\text{Vậy } (p-1)p(p+1) : 24$$

Bài 48: Chứng minh nếu $\overline{ab} = \overline{2cd}$ với a, b, c, d là các chữ số khác 0 thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 67.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{ab} = \overline{2cd}$

$$\text{và } \overline{abcd} = \overline{ab.100} + \overline{cd} = \overline{2cd.100} + \overline{cd} = \overline{cd.201} = \overline{cd.67.3}$$

Vậy $\overline{abcd}$ chia hết cho 67

Bài 49: Chứng minh rằng: $A = n^2 + n + 1$ không chia hết cho 2 và 5, với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Vì $n.(n+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp, trong 2 số liên tiếp luôn luôn có 1 số chẵn nên $n.(n+1)$ là số chẵn, cộng thêm 1 sẽ là số lẻ $\Rightarrow n.(n+1) + 1$ là số lẻ, không chia hết cho 2.

Để chứng minh $n.(n+1)+1$ không chia hết cho 5 ta thấy hai số n và $n+1$ có thể có các chữ số tận cùng sau:

n tận cùng là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; tương ứng số tận cùng của $n+1$ như sau:
 $n+1$ tận cùng là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

nên tích của $n.(n+1)$ tận cùng là:

$$0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0$$

Hay là $n.(n+1)$ tận cùng là 0, 2, 6

Nên $n.(n+1)+1$ tận cùng là: 1, 3, 7 không chia hết cho 5

Bài 50: Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên sao cho $(7x+3y):13$ thì $(5x+4y)$ cũng chia hết cho 13 và ngược lại

Hướng dẫn giải

Ta có: $5x+4y:13 \Rightarrow 4(5x+4y):13 \Rightarrow 20x+16y:13 \Rightarrow 7x+3y:13$. Từ đó ta đi ngược lại là ra.

Bài 51: Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng : $(a-1)(b-1):192$

Hướng dẫn giải

Ta có: Vì a, b là số lẻ nên $(a-1)(b-1):4$

$$\text{Đặt } a = (2k-1)^2, b = (2k+1)^2 \Rightarrow (a-1) = 4k(k-1), (b-1) = 4k(k+1)$$

$$\text{Khi đó : } (a-1)(b-1) = 16k^2(k-1)(k+1), \text{ Mà } k(k+1)(k+2):3$$

Và $k(k-1), k(k+1)$ đều chia hết cho 2

$$\text{Nên } k^2(k-1)(k+1):12 \Rightarrow (a-1)(b-1) = 16k^2(k-1)(k+1):192,$$

Khi a, b là số chính phương lẻ liên tiếp

Bài 52: Cho 4 số nguyên phân biệt a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$A = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d):12$$

Hướng dẫn giải

Theo nguyên lý **Dirichlet** trong 3 số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số nguyên tùy ý có cùng số dư khi chia hết cho 3 suy ra $A:3$

Trường hợp 1: cả 4 số đều là số chẵn nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 2: cả 4 số đều là số lẻ nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 3: 2 số chẵn và hai số lẻ nên tồn tại 4 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 4: 3 số chẵn và một số lẻ, từ 3 số chẵn đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 5: 3 số lẻ và một số chẵn, từ 3 số lẻ đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Do đó A cũng chia hết cho 4 mà $(3, 4) = 1$ nên A chia hết cho 12.

Bài 53: Tìm các số nguyên dương x và y lớn hơn 1 sao cho $x+3$ chia hết cho y và $y+3$ chia hết cho x .

Hướng dẫn giải

Giải sử $2 \leq x \leq y$.

a) Xét $y = 2$ thì $x = 2$, không thỏa mãn $x + 3$ chia hết cho y .

b) Xét $y \geq 3$. Đặt $x + 3 = ky$ ($k \in \mathbb{N}$) (1) thì $ky = x + 3 \leq y + 3 \leq y + y = 2y$ nên $k \leq 2$.

Với $k = 1$, từ (1) có $x + 3 = y$. Thay vào: $y + 3 : x$ được $x + 6 : x$ nên lại có $x > 1$ nên $x \in \{2; 3; 6\}$.

x	2	3	6
y	5	6	9

Với $k = 2$, từ (1) có $x + 3 = 2y$. Thay vào: $y + 3 : x$ được $2y + 6 : x \Rightarrow x + 9 : x \Rightarrow 9 : x$

do $x > 1$ nên $x \in \{3; 9\}$.

Khi $x = 3$ thì $y = 3$, thử lại đúng.

Khi $x = 9$ thì $y = 6$, loại vì trái với $x \leq y$.

Các cặp số (x, y) phải tìm là $(2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3), (6; 9), (9; 6), (3; 3)$.

Bài 54: Cho 10 số tự nhiên bất kì $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{10}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy chia hết cho 10

Hướng dẫn giải

Xét 10 tổng sau : $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$;:

$$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$$

Nếu trong 10 tổng trên tồn tại 1 tổng nào đó chia hết cho 10 thì bài toán được chứng minh

Ta đi xét trường hợp : cả 10 tổng $S_1; S_2; \dots; S_{10}$ đều không chia hết cho 10

Do vậy số dư trong phép chia $S_1; S_2; S_3; \dots; S_{10}$ cho 10 chỉ có thể thuộc tập hợp

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ gồm 9 phần tử do vậy theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất 2 tổng $S_i; S_j$ $i < j; 1 \leq i < j \leq 10$ có cùng số dư khi chia cho 10

$$\Rightarrow S_j - S_i : 10 \Rightarrow a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j : 10 \text{ ta có điều cần chứng minh.}$$

Bài 55: Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì $n(n+1)+2019$ không chia hết cho 2020.

Hướng dẫn giải

Vì n là số tự nhiên nên $n(n+1):2 \Rightarrow n(n+1)$ là số chẵn $\Rightarrow n(n+1)+2019$ là số lẻ

Do đó $n(n+1)+2019$ không chia hết cho 2020.

Bài 56:

a) Cho $A = 1999 + 1999^2 + 1999^3 + \dots + 1999^{1998}$. Chứng minh rằng $A : 2000$.

b) Tìm số tự nhiên n lớn nhất có 3 chữ số thỏa mãn điều kiện: n chia cho 8 dư 7, chia cho 31 dư 28.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Có: } A &= (1999 + 1999^2) + (1999^3 + 1999^4) + \dots + (1999^{1997} + \dots + 1999^{1998}) \\ &= 1999 \cdot (1 + 1999) + 1999^3 (1 + 1999) + \dots + 1999^{1997} (1 + 1999) \\ &= 1999 \cdot 2000 + 1999^3 \cdot 2000 + \dots + 1999^{1997} \cdot 2000 \\ &= 2000 \cdot (1999 + 1999^3 + \dots + 1999^{1997}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A : 2000 \text{ (đpcm)}$$

$$\text{b) Ta có: } \Rightarrow \begin{cases} n = 8x + 7 \\ n = 31y + 28 \end{cases} (x, y \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} n - 7 : 8 \\ n - 28 : 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - 7 + 72 : 8 \\ n - 28 + 93 : 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 65 : 8 \\ n + 65 : 31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n + 65 \in BCNN(8, 31) = \{248; 496; 744; 992\}$$

$$\Rightarrow n \in \{183; 431; 679; 927\} \Rightarrow n = 927 \text{ (vì } n \text{ lớn nhất có 3 chữ số)}$$

Vậy số cần tìm là: 927.

Bài 57: Tìm x, y biết $\overline{124xy} : 45$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } A = \overline{124xy}$$

Để $A : 45$ thì $A : 5$ và $A : 9$.

Để $A : 5$ thì $y = 0$ hoặc $y = 5$.

Với $y = 0$, để $A : 9$ thì $(1 + 2 + 4 + x + 0) : 9 \Rightarrow x = 2$.

Với $y = 5$, để $A : 9$ thì $(1 + 2 + 4 + x + 5) : 9 \Rightarrow x = 6$.

Vậy $y = 0, x = 2$ hoặc $y = 5, x = 6$.

Bài 58: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 10, biết rằng số đó chia cho 5; 6; 7 có số dư lần lượt là 3; 2; 1.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là a ($a \in \mathbb{N}, a > 10$).

Theo đề bài, ta có:

a chia cho 5 dư 3 $\Rightarrow (a - 3) : 5 \Rightarrow (a - 3) - 5 : 5$ hay $a - 8 : 5$

a chia cho 6 dư 2 $\Rightarrow (a - 2) : 6 \Rightarrow (a - 2) - 6 : 6$ hay $a - 8 : 6$.

a chia cho 7 dư 1 $\Rightarrow (a - 1) : 7 \Rightarrow (a - 1) - 7 : 7$ hay $a - 8 : 7$.

Do đó $a - 8 \in BC(5, 6, 7)$.

Để a nhỏ nhất lớn hơn 10 thì $a - 8 = BCNN(5, 6, 7) = 210$

$$\Rightarrow a - 8 = 210 \Rightarrow a = 218.$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 218.

Bài 59: Cho $S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{2019}$. Chứng tỏ S chia hết cho 21.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{2019} = (5 + 5^2 + 5^3) + (5^4 + 5^5 + 5^6) + \dots + (5^{2017} + 5^{2018} + 5^{2019}) \\ &= 5(1 + 5 + 5^2) + 5^4(1 + 5 + 5^2) + \dots + 5^{2017}(1 + 5 + 5^2) \\ &= (1 + 5 + 5^2)(5 + 5^4 + \dots + 5^{2017}) \\ &= 31(5 + 5^4 + \dots + 5^{2017}) : 31. \end{aligned}$$

Bài 60: Tìm số có ba chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9$)

Ta có $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c = 98a + 7b + (a + b + c) + (a + 2b)$

$$\text{Vì } \begin{cases} \overline{abc} : 7 \\ 98a + 7b : 7 \Rightarrow a + 2b : 7 \\ a + b + c : 7 \end{cases}$$

Mà $a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9 \Rightarrow 1 \leq a + 2b \leq 27$

Suy ra $a + 2b \in \{7; 14; 21\}$

Trường hợp 1: $a + 2b = 7$

Ta có $2b$ là số chẵn suy ra a lẻ và $a < 7 \Rightarrow a = \{1; 3; 5\}$ và khi đó tương ứng $b = \{3; 2; 1\}$

$$\text{với } \begin{cases} a = 1, b = 3 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 3 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 133$$

$$\text{với } \begin{cases} a = 3, b = 2 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 2 \text{ hoặc } c = 9 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 322 \text{ hoặc } \overline{abc} = 329$$

$$\text{với } \begin{cases} a = 5, b = 1 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 1 \text{ hoặc } c = 8 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 511 \text{ hoặc } \overline{abc} = 518$$

Trường hợp 2: $a + 2b = 14$

Ta có $2b$ là số chẵn suy ra a chẵn và $a < 8 \Rightarrow a = \{2; 4; 6; 8\}$ và khi đó tương ứng $b = \{6; 5; 4; 3\}$

$$\text{với } \begin{cases} a = 2, b = 6 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 6 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 266$$

$$\text{với } \begin{cases} a = 4, b = 5 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 5 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 455$$

$$\text{với } \begin{cases} a = 6, b = 4 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 4 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 644$$

$$\text{với } \begin{cases} a = 8, b = 3 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 3 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 833$$

Trường hợp 3: $a + 2b = 21$

Ta có $2b$ là số chẵn suy ra a lẻ và $a \leq 9 \Rightarrow a = \{3; 5; 7; 9\}$ và khi đó tương ứng $b = \{9; 8; 7; 6\}$

với $\begin{cases} a = 3, b = 9 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 2 \text{ hoặc } c = 9 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 392 \text{ hoặc } \overline{abc} = 399$

với $\begin{cases} a = 5, b = 8 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 1 \text{ hoặc } c = 8 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 581 \text{ hoặc } \overline{abc} = 588$

với $\begin{cases} a = 7, b = 7 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \text{ hoặc } c = 7 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 770 \text{ hoặc } \overline{abc} = 777$

với $\begin{cases} a = 9, b = 6 \\ a + b + c : 7 \end{cases} \Rightarrow c = 6 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow \overline{abc} = 966$

Vậy các số tự nhiên cần tìm là:

133; 266; 322; 329; 392; 399; 455; 511; 518; 581; 588; 644; 770; 777; 833; 966

Bài 61: Tìm các chữ số $x; y$ để $A = \overline{x183y}$ chia cho 2; 5 và 9 đều dư 1.

Hướng dẫn giải

Do $A = \overline{x183y}$ chia cho 2 và 5 đều dư 1 nên $y = 1$.

Ta có $A = \overline{x183y}$

Vì $A = \overline{x183y}$ chia cho 9 dư 1 $\Rightarrow \overline{x183y} - 1 : 9$

$$\Rightarrow \overline{x1830} : 9$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + 8 + 3 + 0 : 9$$

$$\Leftrightarrow x + 3 : 9, \text{ mà } x \text{ là chữ số nên } x = 6$$

Vậy $x = 6; y = 1$

Bài 62: Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$, thỏa mãn số $M = (9a + 11b)(5b + 11a)$ chia hết cho 19, Hãy giải thích vì sao M chia hết cho 361

Hướng dẫn giải

Ta có: $M = (9a + 11b)(5b + 11a) : 19$ mà 19 là số nguyên tố nên $9a + 11b : 19$ hoặc $5b + 11a : 19$

$$\text{Xét } M = 3(9a + 11b) + (5b + 11a) = 27a + 33b + 5b + 11a = 38a + 38b = 19(2a + 2b) : 19$$

$$+ \text{ Nếu } 9a + 11b : 19 \Rightarrow 3(9a + 11b) : 19 \text{ mà } N : 19 \Rightarrow 5b + 11a : 19 \quad (1)$$

$$+ \text{ Nếu } 5b + 11a : 19, \text{ mà } N : 19 \Rightarrow 3(9a + 11b) : 19 \Rightarrow 9a + 11b : 19 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } (9a + 11b) : 19 \text{ và } (5b + 11a) : 19 \Rightarrow M : 19^2 = 361$$

Bài 63: Cho hai số tự nhiên a và b thỏa mãn : $m = (16a + 17b)(17a + 16b)$ là 1 bội số của 11.

Chứng minh rằng : Số m cũng là một bội số của 121

Hướng dẫn giải

Vì 11 là số nguyên tố: mà $m = (16a + 17b)(17a + 16b) : 11 \Rightarrow 16a + 17b : 11$ hoặc $17a + 16b : 11$

Không mất tính tổng quát: giả sử: $16a + 17b : 11$, ta cần chứng minh $(17a + 16b) : 11$

Thật vậy: $16a + 17b : 11 \Rightarrow 2(16a + 17b) : 11 \Rightarrow 33(a + b) + b - a : 11 \Rightarrow b - a : 11 \Rightarrow a - b : 11$

Lại có: $2(17a + 16b) = 33(a + b) - a + b : 11 \Rightarrow (17a + 16b) : 11$

Vậy $(16a + 17b)(17a + 16b) : 11.11 = 121$

Bài 64: Chứng minh rằng : $A = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 5) + 25$ chia hết cho 4^{2019} .

Hướng dẫn giải

Đặt $M = 4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 5 = 4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1$

$4M = 4.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) = 4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4$

$4M - M = (4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1)$

$3M = 4^{2019} - 1 \Rightarrow M = (4^{2019} - 1) : 3$

$A = 75.(4^{2019} - 1) : 3 + 25 = 25.(4^{2019} - 1) + 25$

$= 25.4^{2019} - 25 + 25 = 25.4^{2019}$

chia hết cho 4^{2019} .

Bài 65: Cho $N = \overline{155*710*4*16}$ là số tự nhiên có 12 chữ số. Chứng tỏ rằng nếu thay các dấu * bởi các chữ số khác nhau trong ba chữ số 1; 2; 3 một cách tùy ý thì N luôn chia hết cho 396.

Hướng dẫn giải

Ta có $396 = 4.9.11$

+ N có hai chữ số tận cùng là 16 chia hết cho 4 suy ra N chia hết cho 4

+ Tổng các chữ số của N bằng

$1 + 5 + 5 + * + 7 + 1 + 0 + * + 4 + * + 1 + 6 = 30 + * + * + * = 30 + 6 = 36$ chia hết cho 9 suy ra

N chia hết cho 9.

+ Tổng các chữ số hàng chẵn của N – Tổng các chữ số hàng lẻ của $N = 18 - 18 = 0$ chia hết cho 11 suy ra N chia hết cho 11.

Vậy N chia hết cho 4, 9, 11 suy ra N chia hết cho 396.

Bài 66: Chứng minh rằng từ 52 số nguyên bất kì luôn tồn tại 2 số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Hướng dẫn giải

Chia 52 số nguyên tùy ý cho 100, ta có thể có các số dư từ $0, 1, 2, 3, \dots, 99$. Ta phân các số dư thành các nhóm sau: 0 ; $1, 99$; ... ; $49, 51$, 50 . Ta có tất cả 51 nhóm và khi chia 52 số cho 100 ta có 52 số dư. Theo nguyên lý Dirichlet sẽ có 2 số dư cùng thuộc một nhóm. Ta có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Hai số dư giống nhau, suy ra hiệu hai số có 2 số dư tương ứng đó sẽ chia hết cho 100.

Trường hợp 2: Hai số dư khác nhau, suy ra tổng của hai số dư có hai số dư tương ứng đó sẽ chia hết cho 100

Ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 67. Chứng minh rằng: $10^{28} + 8 : 72$.

Hướng dẫn giải

Ta có $72 = 8 \cdot 9$

$$10^{28} + 8 = 100 \dots 008 \text{ (27 chữ số 0)}$$

+) $10^{28} + 8 = 100 \dots 008$ có ba chữ số tận cùng là 008 chia hết cho 8 nên $10^{28} + 8 : 8$

(1)

+) Tổng các chữ số của $100 \dots 008$ (27 chữ số 0) là: $1 + 27 \cdot 0 + 8 = 9 : 9 \Rightarrow 10^{28} + 8 : 9$ (2)

Mà $\text{ƯCLN}(8; 9) = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $10^{28} + 8 : 72$ (đpcm).

Dạng 2: Chữ số tận cùng của một số**I/ PHƯƠNG PHÁP.***** Tính chất 1:**

a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.

d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.

Chú ý: Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a .

- Nếu chữ số tận cùng của a là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.

- Nếu chữ số tận cùng của a là 3, 7, 9:

Phân tích: $a^m = a^{4n+r} = a^{4n} \cdot a^r$ với $r = 0, 1, 2, 3$

Từ **tính chất 1c** $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r .

- Nếu chữ số tận cùng của a là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên

Từ **tính chất 1d** $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6 \cdot a^r$.

*** Tính chất 2:**

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 1$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

*** Tính chất 3:**

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

*** Phương pháp dùng cấu tạo số để tìm chữ số tận cùng của số $A = n^k$ với $n, k \in N$.**

- Nếu $A = 10a + b = \overline{ab} \Rightarrow b$ là chữ số cuối cùng của A .

Ta viết: $A = n^k = (10q + r)^k = 10^t + r^k$ với $r \in N; 0 \leq r \leq 9$

Chữ số cuối cùng của A chính là chữ số cuối cùng của số r^k

- Nếu $A = 100a + \overline{bc} = \overline{abc}$ thì $\overline{bc}$ là hai chữ số cuối cùng của A .

- Nếu $A = 1000a + \overline{bcd} = \overline{abcd}$ thì $\overline{bcd}$ là ba chữ số cuối cùng của A .

- Nếu $A = 10^m \cdot a_m + \overline{a_{m-1} \dots a_0} = \overline{a_m \dots a_1 a_0}$ thì $\overline{a_{m-1} \dots a_0}$ là m chữ số cuối cùng của A .

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của các số:

- a) 7^{99}
- b) 14^{1414}
- c) 4^{567}

Hướng dẫn

a) Xét $99 = 4k + 3$ (với $k = 24$) $\Rightarrow 7^{99} = 7^{4k+3} = 7^{4k} \cdot 7^3$

Theo **tính chất 1c** $\Rightarrow 7^{4k}$ có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 7^{99}$ có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của 7^3 .

Mà $7^3 = 343$ có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow 7^{99}$ có chữ số tận cùng là 3.

b) Dễ thấy $1414 = 4k + 2$ (với $k = 353$) $\Rightarrow 14^{1414} = 14^{4k+2} = 14^{4k} \cdot 14^2$

Theo **tính chất 1d** $\Rightarrow 14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.

$\Rightarrow 14^{1414}$ có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của $6 \cdot 14^2$

Mà $6 \cdot 14^2 = 1176$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow 14^{1414}$ có chữ số tận cùng là 6.

c) Ta có $567 = 4k + 3$ (với $k = 141$) $\Rightarrow 4^{567} = 4^{4k+3} = 4^{4k} \cdot 4^3$

Theo **tính chất 1d** $\Rightarrow 4^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.

$\Rightarrow 4^{567}$ có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của $6 \cdot 4^3$

Mà $6 \cdot 4^3 = 384$ có chữ số tận cùng là 4

$\Rightarrow 4^{567}$ có chữ số tận cùng là 4.

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$.

Hướng dẫn

Nhận thấy: lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(k-2)+1}$, k thuộc $\{2, 3, \dots, 2004\}$).

Theo **tính chất 2** $\Rightarrow$ Mọi lũy thừa trong S đều có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của cơ số tương ứng:

$\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng:

$$(2 + 3 + \dots + 9) + 199 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4$$

$$= 200(1 + 2 + \dots + 9) + 9 = 9009.$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Bài 3: Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$.

Hướng dẫn

Nhận thấy Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc $\{2, 3, \dots, 2004\}$).

Theo tính chất 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8 ; 3^7 có chữ số tận cùng là 7 ; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4 ; ...

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 \\ = 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019.$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.

Bài 4: Tìm chữ số tận cùng của 187^{324}

Hướng dẫn

Ta thấy các số có tận cùng bằng 7 nâng lên lũy thừa bậc 4 thì được số có tận cùng bằng 1. Các số có tận cùng bằng 1 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 1.

$$\text{Do đó } 187^{324} = (187^4)^{81} = (\dots 1)^{81} = (\dots 1)$$

Vậy chữ số tận cùng của 187^{324} là 1

Bài 5. Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

Hướng dẫn

Cách 1 : Chứng minh rằng $A:5$ bằng cách nhóm A thành từng nhóm 4 số.

Ta lại có $A : 2$ nên $A : 10$ vậy A tận cùng bằng 0.

Cách 2 : Hãy chứng minh rằng $A = 2^{21} - 2$

$$A = 2^{21} - 2 = (2^4)^5 \cdot 2 - 2 = 16^5 \cdot 2 - 2 = \overline{\dots 6} \cdot 2 - 2, \text{ tận cùng bằng 0.}$$

Bài 6: Tìm chữ số cuối cùng của số: $A = 9^{9^9}$

Hướng dẫn

Xem số $M = 9^k; k \in \mathbb{N}$

- Nếu k chẵn $\Leftrightarrow k = 2m$ ta có:

$$M = 9^{2m} = 81^m = (80+1)^m = (10q+1)^m = 10t + 1 \text{ (với } m, q, t \in \mathbb{N} \text{)}$$

Vậy: M có chữ số cuối cùng là 1 nếu k chẵn.

- Nếu k lẻ $\Leftrightarrow k=2m+1$ ta có:

$$M = 9^{2m+1} = 9^{2m} \cdot 9 = (10t + 1) \cdot 9 = 10q + 9 \text{ (với } m, t, q \in \mathbb{N} \text{)}$$

Vậy: M có chữ số cuối cùng là 9 nếu k lẻ, ta có 9^9 là một số lẻ.

Do đó: $A = 9^{9^9}$ có chữ số cuối cùng là 9.

Bài 7: Tìm chữ số cuối cùng của số: $B = 2^{3^4}$

Hướng dẫn

$$B = 2^{3^4} = 2^{81} = (2^5)^{16} \cdot 2 = 32^{16} \cdot 2 = (30+2)^{16} \cdot 2 = 10q + 2^{17} \\ = 10q + (2^5)^3 \cdot 2^2 = 10q + (10q + 2)^3 \cdot 2^2 \\ = 10t + 2^5 = 10t + 2$$

Vậy B có chữ số cuối cùng là 2.

Bài 8: Tìm chữ số cuối cùng của số $A = 9^{9^9}$

Hướng dẫn

Ta có: 9^{2m} tận cùng là 1

9^{2m+1} tận cùng là 9

Suy ra: 9^9 tận cùng là 9, (9 là số lẻ.)

Vậy $A=9^9$ tận cùng là 9.

Bài 9: Tìm chữ số tận cùng của: $C = 6^{2002}$, $D = 2^{2001}$.

Hướng dẫn

Ta có: 6^1 tận cùng là 6

6^2 tận cùng là 6

6^3 tận cùng là 6

Vậy 6^n tận cùng là 6 suy ra 6^{2002} tận cùng là 6

Ta có: $2^4 = 16$ tận cùng là 6

Suy ra $2^{2002} = (2^4)^{500} \cdot 2^2 = (\overline{a6}) \cdot 4 = \overline{k4}$ với $a, k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^{2002}$ tận cùng là 4

Bài 10: Tìm chữ số cuối cùng của số: $M = 7^{1999}$, $G = 18^{177}$

Hướng dẫn

*Ta có $7^4 = 2401$ tận cùng là 1

$M = 7^{1999} = (7^4)^{499} \cdot 7 = (\overline{n1}) \cdot 7 = \overline{c3} \Rightarrow$ tận cùng là 3

Vậy $M = 7^{1999}$ tận cùng là 3

*Ta có $18^4 = \overline{n6}$ tận cùng là 6

Suy ra: $G = 18^{177} = (18^4)^{44} \cdot 18^1 = \overline{t6} \cdot 18 = \overline{k8}$

Vậy $G = 18^{177}$ tận cùng là 8.

Bài 11: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a/ 7^{9^9}

b/ $14^{14^{14}}$

c/ $3^{5^{6^7}}$

Hướng dẫn

a/ Có: $9^9 = (8+1)^9 = 4k + 1$

$\Rightarrow 7^{9^9} = 7^{4k+1} = 7 \cdot 7^{4k} = 7 \cdot 49^{2k}$ có chữ số tận cùng là $7 \cdot 1 = 7$

b/ Ta có $14^{14} = 196^7 = (49 \cdot 4)^7 = 4k$

$\Rightarrow 14^{14^{14}} = 2^{4k} \cdot 7^{4k} = 16^k \cdot 2401^k$ nên tận cùng của nó là 6

c/ Có $5^{6^7} = (4+1)^{6^7} = 4k+1$

$\Rightarrow 3^{5^{6^7}} = 3^{4k+1} = 3 \cdot 3^{4k} = 3 \cdot 81^k$ có tận cùng là $3 \cdot 1 = 3$.

Bài 12: Tìm chữ số tận cùng của tổng: $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$

Hướng dẫn

Nhận xét rằng các số mũ của các số hạng trong tổng trên đều có dạng $4(n-2)+3$ với $n \geq 2$

Vậy nên ta đi tìm quy luật của chữ số tận cùng của số a^{4k+3} với $a = \{0, \dots, 9\}$

Ta có : các số có tận cùng là : 0; 1; 5; 6. thì a^k cũng có tận cùng là 0; 1; 5; 6

xét $2^{4k+3} = 8 \cdot 2^{4k} = 8 \cdot 16^k$ có tận cùng là 8

$3^{4k+3} = 27 \cdot 81^k$ có tận cùng là 7

$4^{4k+3} = 64 \cdot 2^{8k} = 64 \cdot 16^{2k}$ có tận cùng là 4

$7^{4k+3} = 343 \cdot 2401^k$ có tận cùng là 3

$8^{4k+3} = 512 \cdot 16^{2k}$ có tận cùng là 2.

Vậy chữ số tận cùng của T cũng là chữ số tận cùng của

$$T' = (8+7+4+5+6+3+2+9) + 199(1+8+7+4+5+6+3+2+9) + 1+8+7+4 = 9019$$

Vậy chữ số tận cùng của T là 9.

Bài 13: Cho $M = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2018^{8065} + 2019^{8069}$. Tìm chữ số tận cùng của M

Hướng dẫn giải

Tất cả số hạng tổng trên đều có dạng $a^{4n+1} = a \cdot a^{4n}$

Nếu a tận cùng là 0, 1, 5, 6 thì a^{4n+1} tận cùng giống tận cùng của a

Nếu a tận cùng là 7, 9 suy ra a^2 có tận cùng là 1 suy ra a^{4n} tận cùng là 1 suy ra $a^{4n} \cdot a$ có tận cùng giống a.

Nếu a tận cùng là 3 suy ra a^2 tận cùng là 9 suy ra 1 suy ra a^{4n} tận cùng là 1 suy ra $a^{4n} \cdot a$ có tận cùng giống a

Nếu a tận cùng là 2 suy ra a^{4n} tận cùng là 6 suy ra $a^{4n} \cdot a$ tận cùng giống 6.2 $\Rightarrow$ tận cùng là 2 $\Rightarrow$ giống a

Chứng minh tương tự ta có các số tận cùng là 4, 8 thì $a^{4n} \cdot a$ có tận cùng giống a

Vậy a^{4n+1} có chữ số tận cùng giống a với mọi a

$\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của M giống chữ số tận cùng của N với N là tổng

$$N = 2 + 3 + 4 + \dots + 2019 = \frac{2019 \cdot 2020}{2} - 1 = 2019 \cdot 1010 - 1$$

Do $2019 \cdot 1010$ có tận cùng là 0 $\Rightarrow$ N tận cùng là 9 $\Rightarrow$ M tận cùng là 9.

III/ BÀI TẬP THAM KHẢO THÊM.

Bài tập 13: Tìm chữ số tận cùng của X, Y:

$$X = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + \dots + 2004^{8010}$$

$$Y = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \dots + 2004^{8016}$$

Bài tập 14: Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau:

$$U = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2005^{8013}$$

$$V = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2005^{8015}$$

Bài tập 15: Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn:

$$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 2004.$$

B/ TÌM HAI CHỮ SỐ TẬN CÙNG.

Nếu $x \in \mathbb{N}$ và $x = 100k + y$, trong đó $k, y \in \mathbb{N}$ thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y.

⇒ Phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau:

Trường hợp 1: Nếu a chẵn thì $x = a^m \div 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \div 25$.

Viết $m = p^n + q$ ($p, q \in \mathbb{N}$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q \div 4$ ta có:

$$x = a^m = a^q(a^{p^n} - 1) + a^q.$$

Vì $a^{n-1} \div 25 \Rightarrow a^{p^n} - 1 \div 25$. Mặt khác, do $(4, 25) = 1$ nên $a^q(a^{p^n} - 1) \div 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^q .

Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^q .

Trường hợp 2: Nếu a lẻ, gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \div 100$.

Viết $m = u^n + v$ ($u, v \in \mathbb{N}, 0 \leq v < n$) ta có:

$$x = a^m = a^v(a^{u^n} - 1) + a^v.$$

Vì $a^{n-1} \div 100 \Rightarrow a^{u^n} - 1 \div 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^v .

Tìm hai chữ số tận cùng của a^v .

Trong hai trường hợp để giải được bài toán chúng ta phải tìm được số tự nhiên n . Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của a^q và a^v .

MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP CỤ THỂ VỀ 2 CHỮ SỐ TẬN CÙNG

- Các số có tận cùng bằng 01, 25, 76 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 01, 25, 76

- Các số 3^{20} (hoặc 81^5), 7^4 , 51^2 , 99^2 có tận cùng bằng 01

- Các số 2^{20} , 6^5 , 18^4 , 24^2 , 68^4 , 74^2 có tận cùng bằng 76

- Số 26^n ($n > 1$) có tận cùng bằng 76

Bài tập 16: Tìm hai chữ số tận cùng của 7^{1991}

Hướng dẫn

Ta thấy : $7^4 = 2401$, số có tận cùng bằng 01 nâng lên lũy thừa nào cũng tận cùng bằng 01.

Do đó :

$$7^{1991} = 7^{1988} \cdot 7^3 = (7^4)^{497} \cdot 343 = (\dots 01)^{497} \cdot 343 = (\dots 01) \cdot 343 = \dots 43$$

Vậy 7^{1991} có hai chữ số tận cùng bằng 43

Bài tập 17: Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{100}

Hướng dẫn

Chú ý rằng : $2^{10} = 1024$, bình phương của số có tận cùng bằng 24 thì tận cùng bằng 76, số có tận cùng bằng 76 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 76.

$$\text{Do đó } (2)^{100} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10} = (1024^2)^5 = (\dots 76)^5 = \dots 76$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{100} là 76

Bài tập 18. Tìm hai chữ số tận cùng của:

a) 51^{51} ;

b) $99^{99^{99}}$;

c) 6^{666} ;

d) $14^{101} \cdot 16^{101}$.

Hướng dẫn

a) $15^{51} = (51^2)^{25} \cdot 51 = (\overline{...01})^{25} \cdot 51 = (\overline{...01}) \cdot 51 = \overline{...51}$.

b) $99^{99^{99}} = 99^{2k+1} = (99^2)^k \cdot 99 = (\overline{...01})^k \cdot 99 = (\overline{...01}) \cdot 99 = \overline{...99}$.

c) $6^{666} = (6^5)^{133} \cdot 6 = (\overline{...76})^{133} \cdot 6 = (\overline{...76}) \cdot 6 = \overline{...56}$.

d) $14^{101} \cdot 16^{101} = (14 \cdot 16)^{101} = 224^{101} = (224^2)^{50} \cdot 224 = (\overline{...76})^{50} \cdot 224 = (\overline{...76}) \cdot 224 = \overline{...24}$

Bài toán 19: Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) a^{2003}

b) 7^{99}

Hướng dẫn

a) Do 2^{2003} là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 \vdots 25$.

Ta có $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 \vdots 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) \vdots 25$

$\Rightarrow 2^3(2^{20} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác: $2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3((2^{20})^{100} - 1) + 2^3 = 100k + 8 \ (k \in \mathbb{N})$.

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

b) Do 7^{99} là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho $7^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $7^4 = 2401 \Rightarrow 7^4 - 1 \vdots 100$.

Mặt khác: $99 - 1 \vdots 4 \Rightarrow 99 = 4k + 1 \ (k \in \mathbb{N})$

Vậy $7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7 \ (q \in \mathbb{N})$ tận cùng bởi hai chữ số 07.

Bài tập 20: Tìm hai chữ số tận cùng của số: $C=2^{999}$, $D=3^{999}$

Hướng dẫn

*Ta có: 2^{20} có 2 chữ số tận cùng là 76.

Suy ra: $C=2^{999}=(2^{20})^{49} \cdot 2^{19}=(\overline{y76}) \cdot \overline{n88}$ (với $y, n, q \in \mathbb{N}$)

Vậy $C=2^{999}$ có 2 chữ số tận cùng là 88

*Ta có: $3D = 3^{1000} = (3^{20})^{50} = (\overline{k01})^{50} = \overline{z01}$

Nên $3D$ tận cùng là 01, mà $3 \cdot 3^{999} \vdots 3 \Rightarrow$ chữ số hàng trăm của 3^{1000} là 2

$\Rightarrow 3^{1000}$ tận cùng là 201

Vậy 3^{999} có hai chữ số tận cùng là 67

Bài tập 21: Tìm hai chữ số tận cùng của số

a) $M = 7^{8966}$

b) $N = 24^{7561}$

c) $Q = 81^{6251}$

Hướng dẫn

a) Ta có 7^4 có hai chữ số tận cùng là 01

Suy ra $M = 7^{8966} = (7^4)^{2241} \cdot 7^2 = (\overline{a01})^{2241} \cdot 49 = \overline{c01} \cdot 49 = \overline{n49}$ (với $a, c, n \in \mathbb{N}$)

Suy ra $M = 7^{8966}$ có hai chữ số tận cùng là 49

b) Ta có 24^2 tận cùng là 76

Suy ra $N = 24^{7561} = (24^2)^{3765} \cdot 24 = (\overline{m76})^{3765} \cdot 24 = \overline{k76} \cdot 24 = \overline{n24}$ (với $m, k, n \in \mathbb{N}$)

Vậy $N = 24^{7561}$ có hai chữ số tận cùng là 24

c) Ta có 81^5 có hai chữ số tận cùng là 01

Nên $Q = 81^{6251} = (81^5)^{1250} \cdot 81 = (\overline{k01})^{1250} \cdot 81 = \overline{m81}$ (Với $k, t, m \in \mathbb{N}$)

Vậy $Q = 81^{6251}$ có hai chữ số tận cùng là 81.

Bài tập 22: Tìm hai chữ số tận cùng của số.

a) $Z = 26^{854}$

b) $C = 68^{194}$

Hướng dẫn

a) Ta có 26^4 có hai chữ số tận cùng là 76

$\Rightarrow Z = 26^{854} = (26^4)^{213} \cdot 26^2 = (\overline{n76})^{213} \cdot 676 = \overline{k76} \cdot 676 = \overline{c76}$ (Với $n, k, t \in \mathbb{N}$)

Vậy $Z = 26^{854}$ có hai chữ số tận cùng là 76

b) Ta có 68^4 có hai chữ số tận cùng là 76

Suy ra $C = 68^{194} = (68^4)^{48} \cdot 68^2 = (\overline{n76})^{48} \cdot 4624 = \overline{k76} \cdot 4624 = \overline{t24}$ (với $n, k, t \in \mathbb{N}$)

Vậy $C = 68^{194}$ có hai chữ số tận cùng là 24.

Bài tập 23: Tìm hai chữ số cuối cùng của số: $C = 2^{999}$

Hướng dẫn

Ta có: $2^{10} + 1 = 1024 + 1 = 1025 : 25$ suy ra $2^{10} - 1 : 25$

Ta lại có $2^{1000} - 1 = (2^{20})^{50} - 1 : 2^{20} - 1$ suy ra $2^{1000} - 1 : 25$

Do đó 2^{1000} chữ số tận cùng là 26 ; 51 ; 76 nhưng $2^{1000} : 4$

Suy ra 2^{1000} tận cùng là 76 $\Rightarrow 2^{999}$ tận cùng là 38 hoặc 88 vì $2^{999} : 4$

$\Rightarrow 2^{999}$ tận cùng là 88

Vậy $C = 2^{999}$ có hai chữ số tận cùng là 88.

Bài tập 24: Tìm hai chữ số tận cùng của số: $D = 3^{999}$

Hướng dẫn

Ta có: 9^{2m} tận cùng là 1 ; 9^{2m+1} tận cùng là 9

Ta hãy tìm số dư của phép chia $9^5 + 1$ cho 100

Ta có: $9^5 + 1 = 10(9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1)$

Số: $9^4 + 9^2 + 1$ tận cùng là 3

$9^3 + 9$ tận cùng là 8

Suy ra $(9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1)$ tận cùng là 5

$\Rightarrow 9^4 - 9^3 - 9^2 - 9 + 1 = 10q + 5$

$\Rightarrow 9^5 + 1 = 100q + 50$

$\Rightarrow 9^{10} - 1 = (9^5 + 1)(9^5 - 1) = 100^t$

Ta lại có: $3^{1000} - 1 = 9^{500} - 1 = (9^{10})^{50} - 1$ suy ra $3^{1000} - 1 \vdots 100$

$\Rightarrow 3^{1000}$ tận cùng là 01. Mặt khác $3^{1000} \vdots 3$

Suy ra chữ số hàng trăm của 3^{1000} phải là 2 (để 201 chia hết cho 3)

$\Rightarrow 3^{1000}$ chữ số tận cùng là 201

Do đó 3^{999} tận cùng là 67.

Bài tập 25: Tìm hai chữ số tận cùng của số $A = 9^{9^9}$

Hướng dẫn

$A = 9^{9^9} = (10 - 1)^{9^9}$ có dạng: $(10 - 1)^n$ với $n = 9^9$ ta lại có

$$A = C_n^0 \cdot 10^n - C_n^1 \cdot 10^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} \cdot 10 - C_n^n$$

Suy ra A có hai chữ số cuối cùng

Với $a = C_n^{n-1} \cdot 10 - C_n^n = 10n - 1$ Số $n = 9^9$ tận cùng là 9

Suy ra $10n$ tận cùng là 90 $\Rightarrow a = 10n - 1$ tận cùng là 89

Vậy số $A = 9^{9^9}$ có hai chữ số cuối cùng là 89

Bài tập 26: Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng:

a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + \dots + 2004^{2002}$

b) $S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + \dots + 2004^{2003}$

Hướng dẫn

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ ta có $a^{100} - 1 \vdots 25$.

Vậy với mọi $a \in \mathbb{N}$ ta có $a^2(a^{100} - 1) \vdots 100$.

Do đó $S_1 = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$.

$\Rightarrow$ Hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$.

Ta có: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 2004^2 = 2005 \times 4009 \times 334 = 2684707030$, tận cùng là 30.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a,

$S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 + 2004^3$.

$\Rightarrow$ Hai chữ số tận cùng của tổng S_2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2004^3$.

Áp dụng công thức: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + 2004^3 = (2005 \times 1002)^2 = 4036121180100$, tận cùng là 00.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_2 là 00.

C/ TÌM BA CHỮ SỐ TẬN CÙNG TRỞ LÊN.

I/ PHƯƠNG PHÁP.

Việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.

Nếu $x = 1000k + y$, trong đó $k, y \in \mathbb{N}$ thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y ($y \leq x$).

Do $1000 = 8 \cdot 125$ mà $(8, 125) = 1$ nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau:

Trường hợp 1: Nếu a chẵn thì $x = a^m$ chia hết cho 2^m . Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 125.

Viết $m = p^n + q$ ($p, q \in \mathbb{N}$), trong đó q là số nhỏ nhất để a^q chia hết cho 8 ta có:

$$x = a^m = a^q(a^{p^n} - 1) + a^q.$$

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 125 $\Rightarrow a^{p^n} - 1$ chia hết cho 125.

Mặt khác, do $(8, 125) = 1$ nên $a^q(a^{p^n} - 1)$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^q .

$\Rightarrow$ Tìm ba chữ số tận cùng của a^q .

Trường hợp 2: Nếu a lẻ, gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 1000.

Viết $m = u^n + v$ ($u, v \in \mathbb{N}, 0 \leq v < n$) ta có:

$$x = a^m = a^v(a^{u^n} - 1) + a^v.$$

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 1000 $\Rightarrow a^{u^n} - 1$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^v .

$\Rightarrow$ Tìm ba chữ số tận cùng của a^v .

Tính chất 4 $\Rightarrow$ Tính chất 6: Nếu $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 125.

Chứng minh:

Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

$\Rightarrow a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5. Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$ chia hết cho 125.

MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP CỤ THỂ VỀ 3 CHỮ SỐ TẬN CÙNG

- Các số có tận cùng bằng 001, 376, 625 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 001, 376, 625

- Các số có tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0625.

Bài tập 27: Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1992}

Hướng dẫn

$$5^{1992} = (5^4)^{498} = 625^{498} = 0625^{498} = (\dots 0625)$$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1992} là 0625

Bài tập 28: Tìm ba chữ số tận cùng của số $T = 5^{946}$

Hướng dẫn

Ta có 5^3 có ba chữ số tận cùng là 125

$$\text{Suy ra } T = 5^{946} = (5^3)^{315} \cdot 5 = (\overline{n125})^{315} \cdot 5 = \overline{m125} \cdot 5 = \overline{t625}$$

(Với $n, m, t \in \mathbb{N}$)

Vậy $T = 5^{946}$ có ba chữ số tận cùng là 125.

Bài tập 29: Tìm 4 chữ số tận cùng của số: $P = 5^{1994}$

Hướng dẫn

Ta có: $5^4 = 0625$ tận cùng là 0625

5^5 tận cùng là 3125

5^6 tận cùng là 5625

5^7 tận cùng là 8125

5^8 tận cùng là 0625

5^9 tận cùng là 3125

5^{10} tận cùng là 5625

5^{11} tận cùng là 8125

5^{12} tận cùng là 0625

Chu kỳ lặp là 4

Suy ra: 5^{4m} tận cùng là 0625

5^{4m+1} tận cùng là 3125

5^{4m+2} tận cùng là 5625

5^{4m+3} tận cùng là 8125

Mà 1994 có dạng $4m+2$.

Do đó $M = 5^{1994}$ có 4 chữ số tận cùng là 5625.

Bài tập 30: Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101} .

Hướng dẫn

Theo tính chất 6, do $(123, 5) = 1 \Rightarrow 123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác: $123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1) \Rightarrow 123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra: $123^{100} - 1$ chia hết cho 1000

$\Rightarrow 123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123$ ($k \in \mathbb{N}$).

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài tập 31: Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$.

Hướng dẫn

Theo tính chất 6, do $(9, 5) = 1 \Rightarrow 9^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Tương tự bài 11, ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra: $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000

$\Rightarrow 3^{399 \dots 98} = 9^{199 \dots 9} = 9^{100p + 99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99}$ ($p, q \in \mathbb{N}$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99} .

Lại vì $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 $\Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9$

$\Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (để kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó

dựa vào phép nhân $??9 \times 9 = \dots 001$ để xác định $??9 = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ là 889.

Trường hợp 3: Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước:

B1: Tìm dư của phép chia số đó cho 125

B2: Suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng

B3: Kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.

Bài tập 32: Tìm ba chữ số tận cùng của 2004^{200} .

Hướng dẫn

Do $(2004, 5) = 1$ (tính chất 6)

$\Rightarrow 2004^{100}$ chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200} = (2004^{100})^2$ chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200}$ chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876.

Do 2004^{200} chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

Bài tập 33: Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1992}

Hướng dẫn

$5^{1992} = (5^4)^{498} = 625^{498} = 0625^{498} = (\dots 0625)$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1992} là 0625

II/ BÀI TẬP THAM KHẢO THÊM

Bài tập 34: Chứng minh $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài tập 35: Chứng minh $9^{20002003}, 7^{20002003}$ có chữ số tận cùng giống nhau.

Bài tập 36: Tìm hai chữ số tận cùng của:

a) 3^{999}

b) 11^{1213}

Bài tập 37: Tìm hai chữ số tận cùng của: $S = 2^3 + 2^{23} + \dots + 2^{40023}$

Bài tập 38: Tìm ba chữ số tận cùng của: $S = 1^{2004} + 2^{2004} + \dots + 2003^{2004}$

Bài tập 39: Cho $(a, 10) = 1$. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a .

Bài tập 40: Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Hãy tìm ba chữ số tận cùng của A^{200} .

Bài tập 41: Tìm ba chữ số tận cùng của số: $1993^{19941995 \dots 2000}$

Bài tập 42: Tìm sáu chữ số tận cùng của 5^{21} .

D/ VẬN DỤNG TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG ĐỂ CHỨNG MINH CHIA HẾT CHO MỘT SỐ.

Bài tập 43: Chứng minh rằng $8^{102} - 2^{102}$ chia hết cho 10

Hướng dẫn

Ta thấy các số có tận cùng bằng 2 hoặc 8 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng là 6. Một số có tận cùng bằng 6 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 6.

Do đó ta biến đổi như sau:

$$8^{102} = (8^4)^{25} \cdot 8^2 = (\dots 6)^{25} \cdot 64 = (\dots 6) \cdot 64 = \dots 4$$

$$2^{102} = (2^4)^{25} \cdot 2^2 = 16^{25} \cdot 4 = (\dots 6) \cdot 4 = \dots 4$$

Vậy $8^{102} - 2^{102}$ tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 10

Bài tập 44: Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Hướng dẫn

Theo tính chất 1a $\Rightarrow 1995^{2000}$ tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5.

Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không ?

Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

$\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6

$\Rightarrow n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7

$\Rightarrow n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Bài tập 45: Chứng minh rằng 26^{1570} chia hết cho 8

Hướng dẫn

Ta thấy $26^5 = 11881376$, số có tận cùng bằng 376 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng có tận cùng bằng 376. Do đó:

$$26^{1570} = (26^5)^{314} = (\dots 376)^{314} = (\dots 376)$$

Mà 376 chia hết cho 8

Một số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 thì chia hết cho 8

Vậy 26^{1570} chia hết cho 8

Bài tập 46: Chứng tỏ rằng $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ chia hết cho 10.

Hướng dẫn

Tìm chữ số tận cùng của $17^5 ; 24^4 - 13^{21} \Rightarrow$ Chữ số tận cùng của $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ là 0.

$\Rightarrow 17^5 + 24^4 - 13^{21} : 10$

Bài tập 47: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n .

a) $7^{4n} - 1$ chia hết cho 5;

b) $3^{4n+1} + 2$ chia hết cho 5;

c) $2^{4n+1} + 3$ chia hết cho 5;

d) $2^{4n+2} + 1$ chia hết cho 5;

e) $9^{2n+1} + 1$ chia hết cho 10.

Hướng dẫn

a) $7^{4n} - 1 = (7^4)^n - 1 = 2401^n - 1 = \dots = \overline{\dots 1} - 1$, tận cùng bằng 0.

Vậy $7^{4n} - 1 : 5$.

b) $3^{4n+1} + 2 = (3^4)^n \cdot 3 + 2 = 81^n \cdot 3 + 2 = \overline{\dots 1} \cdot 3 + 2$, tận cùng bằng 5.

Vậy $3^{4n+1} + 2 : 5$.

c) $2^{4n+1} + 3 = (2^4)^n \cdot 2 + 3 = 16^n \cdot 2 + 3 = \overline{\dots 6} \cdot 2 + 3$, tận cùng bằng 5.

Vậy $2^{4n+1} + 3 \vdots 5$.

d) $2^{4n+2} + 1$ tận cùng bằng 5 nên chia hết cho 5.

e) $9^{2n+1} + 1 = (9^2)^n \cdot 9 + 1 = 81^n \cdot 9 + 1 = \overline{...1}9 + 1$, tận cùng bằng 0.

Vậy $9^{2n+1} + 1$ chia hết cho 10.

Bài tập 48. Chứng minh rằng 26^{1570} chia hết cho 8

Hướng dẫn

Ta thấy $26^5 = 11881376$, số có tận cùng bằng 376 nâng lên lũy thừa

Nào (khác 0) cũng có tận cùng bằng 376. Do đó:

$$26^{1570} = (26^5)^{314} = (\dots 376)^{314} = (\dots 376)$$

Mà 376 chia hết cho 8

Một số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 thì chia hết cho 8

Vậy 26^{1570} chia hết cho 8

Bài tập 49: Chứng minh rằng $1991^{1997} - 1997^{1996} \vdots 10$

Hướng dẫn

Là chứng minh 2 số có cùng chữ số tận cùng:

Ta có 1991^{1997} và 1997^{1996} có cùng chữ số tận cùng là 1

Suy ra $1991^{1997} - 1997^{1996} \vdots 10$

Bài tập 50: Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho số $n^2 + n + 1$ chia hết cho 2005^{2005}

Hướng dẫn

Số 2005^{2005} có tận cùng là 5. nên nó chia hết cho 5

Ta có $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ chỉ có thể có các chữ số tận cùng là 1, 3, 7. nên nó không chia hết cho 5

Vậy không tồn tại n .

Bài tập 51: Cho P là số nguyên tố lớn hơn 5. chứng minh rằng $(P^{8n} + 3P^{4n} - 4) \vdots 5$.

Hướng dẫn

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên tận cùng của p chỉ có thể là các chữ số: 1; 3; 7; 9

Nếu P có tận cùng là 1 thì $P^{8n} + 3P^{4n} - 4$ có tận cùng là 0 nên nó chia hết cho 5

Nếu P có tận cùng là 3 thì $p^{4n} = 10k + 3^{4n} = 10k + 81^n$ có tận cùng là 1. p^{8n} có tận cùng là 1. nên: $P^{8n} + 3P^{4n} - 4$ có tận cùng là 0. nên nó chia hết cho 5

Nếu p có tận cùng là 7 thì tương tự. tận cùng của p^{4n} và p^{8n} cũng có tận cùng là 1. nên tổng chia hết cho 5

Nếu p có tận cùng là 9 thì: $p^{4n} = 10k + 9^{4n} = 10k + 81^{2n}$ có tận cùng là 1 và $p^{8n} = (p^{4n})^2$ có tận cùng là 1

Nên tổng trên cũng chia hết cho 5.

Tóm lại với p nguyên tố lớn hơn 5 thì tổng luôn chia hết cho 5

Nhận xét chung về phương pháp:

1. Tách a^n dưới dạng $(10k + a_1)^n$ với $a_1 = \{0, 1, \dots, 9\}$

2. Viết n dưới dạng $n = 4q + r$ ($r = 0, 1, 2, 3$)

3. Sử dụng nhận xét 1, 2, 3 đã chứng minh ở trên.

Bài tập 52: Chứng minh rằng n^5 và n có chữ số tận cùng giống nhau

Hướng dẫn

Để chứng minh n^5 và n có cùng chữ số tận cùng là đi chứng minh $n^5 - n \vdots 10$

Ta có: $A = n^5 - n = n(n^4 - 1) = (n-1).n(n+1).(n^2+1)$

Ta có $10 = 2.5$ và $(2.5) \mid A$

$(n-1), n, n+1$ là các số tự nhiên liên tiếp

Suy ra $A \vdots 2$

Chứng minh $A \vdots 5$ nếu $n \vdots 5$ thì $A \vdots 5$

Nếu $n \vdots 5$ dư 1 suy ra $n-1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

$n \vdots 5$ dư 2 suy ra $n^2+1 = (5k+2)^2+1 = (5k)^2+20k+4+1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

$n \vdots 5$ dư 3 suy ra $n^2+1 = (5k+3)^2+1 = (5k)^2+30k+9+1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

$n \vdots 5$ dư 4 suy ra $n+1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

Vậy $A \vdots 2$ và $A \vdots 5 \Leftrightarrow A \vdots 10$

Vậy n^5 và n có cùng chữ số tận cùng.

Bài tập 53: Tìm số dư của phép chia 3^{517} cho 25.

Hướng dẫn

Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 3^{517} . Do số này lẻ $\Rightarrow$ Ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $3^{10} = 9^5 = 59049 \Rightarrow 3^{10} + 1 \vdots 50 \Rightarrow 3^{20} - 1 = (3^{10} + 1)(3^{10} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác: $5^{16} - 1 \vdots 4 \Rightarrow 5(5^{16} - 1) \vdots 20$

$\Rightarrow 5^{17} = 5(5^{16} - 1) + 5 = 20k + 5$

$\Rightarrow 3^{517} = 3^{20k+5} = 3^5(3^{20k} - 1) + 3^5 = 3^5(3^{20k} - 1) + 243$, có hai chữ số tận cùng là 43.

Vậy số dư của phép chia 3^{517} cho 25 là 18.

*** Chú ý:** Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp:

B1: Tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng.

B2: Dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.

Bài 54 : Cho $Q = \frac{1}{2}(7^{2020^{2018}} - 3^{2008^{2007}})$. Chứng minh Q là số tự nhiên chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải

Vì $2020; 2008$ đều là bội của 4 nên 2020^{2018} và 2008^{2007} cũng là bội của 4.

Đặt $2020^{2018} = 4m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) ; $2008^{2007} = 4n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó $7^{2020^{2018}} - 3^{2008^{2007}} = 7^{4m} - 3^{4n} = (7^4)^m - (3^4)^n = 2401^m - 81^n$.

Ta thấy 2401^m và 81^n có tận cùng là 1 nên $2401^m - 81^n$ có tận cùng là 0.

Suy ra $Q = \frac{1}{2}(7^{2020^{2018}} - 3^{2008^{2007}})$ có tận cùng là 0 hoặc 5.

Vậy Q là số tự nhiên chia hết cho 5.

Dạng 3: Nhóm hợp lý

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\ &= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \end{aligned}$$

Vì $10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$ chia hết cho 10 với mọi n nguyên dương nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 2: Chứng minh rằng:

a, $8 \cdot 2^n + 2^{n+1} : 10$

b, $3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} : 6$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $8 \cdot 2^n + 2^{n+1} = 8 \cdot 2^n + 2^n \cdot 2 = 2^n(8 + 2) = 10 \cdot 2^n : 10$

b, Ta có: $VT = 3^n \cdot 27 + 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 8 + 2^n \cdot 4 = 3^n \cdot 30 + 2^n \cdot 12 : 6$

Bài 3: Chứng minh rằng: $3^{2n+1} + 2^{2n+2} : 7$

Hướng dẫn giải

Ta có : $A = 3 \cdot 3^{2n} + 4 \cdot 2^{2n} = 3(7 + 2)^n + 4 \cdot 2^n = 7 \cdot M + 7 \cdot 2^n : 7$

Bài 4: Chứng minh rằng:

a, $10^n + 18n - 1 : 27$

b, $D = 10^n + 72n - 1 : 81$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $VT = (10^n - 1) + 18n = 999...9 + 18n$ (có n chữ số 9)

$VT = 9.111...1 + 9.2n = 9(111...1 + 2n) : 9$

mặt khác: $111...1 + 2n$ (có n chữ số 1) $= (1111...1 - n) + 3n$

Xét: $111...1 - n$ có tổng các chữ số là $1 + 1 + 1 + ... + 1 - n = 0$ nên chia hết cho 3

vậy $111...1 + 2n$ chia hết cho 3 suy ra VT chia hết cho 27

b, Ta có:

$D = 10^n - 1 + 72n = 9.111...1 - 9n + 81n = 9(111...1 - n) + 81n$

Xét $111\dots 1 - n$ chia hết cho 9 $\Rightarrow D$ chia hết cho 81

Bài 5: Chứng minh rằng : $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$ chia hết cho 13 với mọi n

Hướng dẫn giải

Ta có: $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} = 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 9 + 3^n \cdot 27 = 3^n \cdot 3(1+3+9) = 3^{n+1} \cdot 13 : 13$

Bài 6: Chứng minh rằng:

a, $5^5 - 5^4 + 5^3 : 7$

b, $7^6 + 7^5 - 7^4 : 11$

c, $10^9 + 10^8 + 10^7 : 222$ và $: 555$

d, $10^6 - 5^7 : 59$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $= 5^3(5^2 - 5 + 1) = 5^2 \cdot 21 : 7$

b, Ta có: $= 7^4(7^2 + 7 - 1) = 7^4 \cdot 55 : 11$

c, Ta có : $= 10^7(10^2 + 10 + 1) = 10^7 \cdot 111 : 222$ và $: 555$

d, Ta có : $= (2.5)^6 \cdot 5^7 = 5^6(2^6 - 1) = 5^6 \cdot 59 : 59$

Bài 7 : Chứng minh rằng : $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$

Hướng dẫn giải

Ta có : $= (3^4)^7 - (3^3)^9 - (3^2)^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26}(3^2 - 3 - 1) = 3^{26} \cdot 5 : 9 \cdot 5 = 45$

Bài 8 : Chứng minh rằng: $Q = n^5 - n$ chia hết cho 10 với mọi n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Ta có $Q = n^5 - n = n(n^4 - 1) = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1)$

Trong 2 số $(n-1)$ và n luôn có 1 số chẵn nên Q chia hết cho (1).

Do n là số tự nhiên nên n có 1 trong các dạng sau: $n = 5k \pm 1, n = 5k \pm 2, n = 5k$

Nếu $n = 5k$ thì Q chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k + 1$ thì $n - 1 = 5k$ chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k - 1$ thì $n + 1 = 5k$ chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 = 5q + 4$ nên $n^2 + 1$ chia hết cho 5.

Do đó ta luôn có Q chia hết cho 5 (2)

Từ (1) và (2) suy ra Q luôn chia hết cho 10.

Bài 9 : Chứng minh: $M = 2^{a+3} + 2^{a+5} + 2^{a+7}$ ($a \in \mathbb{N}$) chia hết cho 42 .

Hướng dẫn giải

$M = 2^{a+3} + 2^{a+5} + 2^{a+7} = 2^{a+2} \cdot (2 + 2^3 + 2^5) = 2^{a+2} \cdot (2 + 8 + 32) = 2^{a+2} \cdot 42 .$

Ta có: $2^{a+2} \cdot 42 : 42$ nên $M : 42$ (đpcm).

Bài 10: Cho $10^k - 1 : 19$ ($k > 1$). Chứng minh rằng: $10^{2k} - 1 : 19$

Hướng dẫn giải

Ta có: $10^{2k} - 1 = 10^{2k} - 10^k + 10^k - 1 = 10^k(10^k - 1) + (10^k - 1)$

Nhận thấy: $10^k - 1 \vdots 19$

Bài 11: Chứng minh rằng: $n^2 + n + 1 \nmid 4$

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$, mà $n(n+1)$ là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp nên chẵn

Mà $VP + 1$ nên là số lẻ vậy không chia hết cho 4

Bài 12: Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 6 \nmid 5$

Hướng dẫn giải

Vì $n^2 + n + 6 = n(n+1) + 6$,

Vì $n(n+1)$ là tích 2 số tự nhiên liên tiếp nên có chữ số tận cùng là 0; 2; 6

Khi đó: $n(n+1) + 6$ sẽ có tận cùng là 6; 8; 2 nên không chia hết cho 5

Bài 13: Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 ($x \in \mathbb{N}$)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots \\ & \quad + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120 (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \end{aligned}$$

Bài 14: Chứng minh rằng: $n^2 + n + 1 \nmid 2$ với mọi số tự nhiên n

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ là số lẻ nên không chia hết cho 2

Bài 15: Chứng minh rằng:

a, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} : 4$

b, $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8 : 30$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10} + 3^{11} = (1+3) + 3^2(1+3) + \dots + 3^{10}(3+1)$

$A = 4 + 3^2 \cdot 4 + 3^4 \cdot 4 + \dots + 3^{10} \cdot 4 : 4$

b, Ta có: $B = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^8 = (5+5^2) + (5^3+5^4) + \dots + (5^7+5^8)$

$B = 30 + 5^2 \cdot 30 + \dots + 5^6 \cdot 30$

Bài 16: Chứng minh rằng:

a, $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} : 15$

b, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{119} : 13$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + \dots + 2^8) + \dots + (2^{57} + \dots + 2^{60})$

$C = 2(1+2+4+8) + 2^5(1+2+4+8) + \dots + 2^{57}(1+2+4+8) \Rightarrow C = 15 \cdot (2 + 2^5 + \dots + 2^{57})$

b, Ta có: $D = (1+3+3^2) + (3^3+3^4+3^5) + \dots + (3^{17}+3^{18}+3^{19})$

$$D = 13 + 3^3 \cdot 13 + \dots + 3^{17} \cdot 13 = 13(1 + 3^3 + \dots + 3^{17}) : 13$$

Bài 17: Chứng minh rằng:

a, $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} : 3, 7, 15$

b, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991} : 13, 41$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60})$

$$A = 2(1 + 2) + 2^3(1 + 2) + \dots + 2^{59}(1 + 2) \Rightarrow A : 3$$

lại có: $A = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$

$$A = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58}(1 + 2 + 2^2) : 7$$

Lại có: $A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \dots + (2^{57} + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$

$$A = 2 \cdot 15 + 2^5 \cdot 15 + \dots + 2^{57} \cdot 15 : 15$$

b, Ta có: $B = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + \dots + (3^{1989} + 3^{1990} + 3^{1991})$

$$B = 13 + 3^3 \cdot 13 + \dots + 3^{1989} \cdot 13 : 13$$

Lại có: $B = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7) + \dots + (3^{1984} + 3^{1986} + 3^{1988} + 3^{1990})$

$$+ (3^{1985} + 3^{1987} + 3^{1989} + 3^{1991}) = 820(1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1095}) : 41$$

Bài 18: Chứng minh rằng:

a, $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} : 31$

b, $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1998} : 12, 39$

Hướng dẫn giải

a, Ta có:

$$A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$$

$$A = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31 : 31$$

b, Ta có: $S = (3 + 3^2) + (3^3 + 3^4) + \dots + (3^{1997} + 3^{1998})$

$$S = 12 + 3^2 \cdot 12 + \dots + 3^{1996} \cdot 12 : 12$$

mặt khác: $S = (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots + (3^{1996} + 3^{1997} + 3^{1998})$

$$S = 39 + 3^3 \cdot 39 + \dots + 3^{1995} \cdot 39 : 39$$

Bài 19: Chứng minh rằng:

a, $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000} : 120$

b, $11 + 11^2 + 11^3 + \dots + 11^8 : 12$

Hướng dẫn giải

a, Ta thấy ngay tổng B chia hết cho 3, ta cần chứng minh tổng B chia hết cho 40

$$B = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + (3^{997} + 3^{998} + 3^{999} + 3^{1000})$$

$$= 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{1997}(1 + 3 + 3^2 + 3^3) : 40$$

Như vậy $A : 120$

b, Ta có: $C = (11 + 11^2) + (11^3 + 11^4) + \dots + (11^7 + 11^8)$

$$C = 11(1 + 11) + 11^3(1 + 11) + \dots + 11^7(1 + 11)$$

$$C = 11 \cdot 12 + 11^3 \cdot 12 + \dots + 11^7 \cdot 12 : 12$$

Bài 20: Chứng minh rằng:

a, $4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{210} : 210$

b, $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{404} : 31$

Hướng dẫn giải

a, Tổng A hiển nhiên chia hết cho 2 (1)

Nên ta cần chứng minh tổng A chia hết cho $105=5.21$

$$A = (4+4^2) + (4^3+4^4) + \dots + (4^{209}+4^{210})$$

$$A = 4(1+4) + 4^3(1+4) + \dots + 4^{209}(1+4) = 4.5 + 4^3.5 + 4^{209}.5 : 5 \quad (2)$$

$$A = (4+4^2+4^3) + (4^4+4^5+4^6) + \dots + (4^{208}+4^{209}+4^{210})$$

$$A = 4(1+4+16) + 4^4(1+4+16) + \dots + 4^{208}(1+4+16) : 21 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta thấy: $A : 210$

$$b, \text{ Ta có : } B = (1+5+5^2) + (5^3+5^4+5^5) + \dots + (5^{402}+5^{403}+5^{404})$$

$$B = 31 + 5^3(1+5+5^2) + \dots + 5^{402}(1+5+5^2) : 31$$

Bài 21: Chứng minh rằng:

$$a, 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100} : 3$$

$$b, 3^{21} + 3^{22} + 3^{23} + \dots + 3^{29} : 13$$

Hướng dẫn giải

$$a, \text{ Ta có : } A = (2+2^2) + (2^3+2^4) + \dots + (2^{99}+2^{100})$$

$$A = 2(1+2) + 2^3(1+2) + \dots + 2^{99}(1+2) = 2.3 + 2^3.3 + \dots + 2^{99}.3 : 3$$

$$b, \text{ Ta có : } B = (3^{21}+3^{22}+3^{23}) + (3^{24}+3^{25}+3^{26}) + (3^{27}+3^{28}+3^{29})$$

$$B = 3^{21}(1+3+3^2) + 3^{24}(1+3+3^2) + 3^{27}(1+3+3^2)$$

$$B = 3^{21}.13 + 3^{24}.13 + 3^{27}.13 : 13$$

Bài 22: Chứng minh rằng $A = 75.(4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 : 100$

Hướng dẫn giải

Đặt $B = 4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4^2 + 4 + 1$, Tính B rồi thay vào A ta được :

$$A = 75.(4^{2005} - 1) : 3 + 25 = 25(4^{2005} - 1) + 25 = 25(4^{2005} - 1 + 1) = 25.4^{2005} : 100$$

Bài 23: Chứng minh rằng: $M = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + \dots + 2012^{2010} : 2013$

Hướng dẫn giải

$$M = (2012 + 2012^2) + (2012^3 + 2012^4) + \dots + (2012^{2009} + 2012^{2010})$$

$$M = 2012(1+2012) + 2012^3(1+2012) + \dots + 2012^{2009}(1+2012)$$

$$M = 2012.2013 + 2012^3.2013 + \dots + 2012^{2009}.2013 : 2013$$

Bài 24: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2008}$, Tìm dư của A khi chia cho 7

Hướng dẫn giải

$$A = 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots + (2^{2006} + 2^{2007} + 2^{2008})$$

$$A = 3 + 2^2(1+2+2^2) + 2^5(1+2+2^2) + \dots + 2^{2006}(1+2+2^2)$$

$$A = 3 + 2^2.7 + 2^5.7 + 2^{2006}.7, \text{ Nhận thấy ngay A chia 7 dư 3}$$

Bài 25: Chứng minh rằng : $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{5n-3} + 2^{5n-2} + 2^{5n-1}$ chia hết cho 31 nếu n là số nguyên dương bất kỳ

Hướng dẫn giải

$$A = (1+2+2^2+2^3+2^4) + (2^5+2^6+2^7+2^8+2^9) + \dots + (2^{5n-5}+2^{5n-4}+2^{5n-3}+2^{5n-2}+2^{5n-1})$$

$$A = 31 + 2^5.(1+2+2^2+2^3+2^4) + \dots + 2^{5n-5}(1+2+2^2+2^3+2^4)$$

$$A = 31 + 2^5.31 + \dots + 2^{5n-5}.31 : 31$$

Bài 26: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng : $3^n + 1$, là bội của 10 thì $3^{n+4} + 1$ cũng là bội của 10

Hướng dẫn giải

Nếu $3^n + 1$, Là bội của 10 thì $3^n + 1$ có tận cùng là số 0 $\Rightarrow 3^n$ có tận cùng là 9

Mà $3^{n+4} + 1 = 3^n \cdot 3^4 + 1 = \overline{9.81} + 1 = \overline{9} + 1 = \overline{0} : 10$ (đpcm)

Bài 27: Chứng minh rằng : $N = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2012}$ là bội của 30

Hướng dẫn giải

$$N = (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + \dots + (5^{2011} + 5^{2012})$$

$$N = 30 + 5^2(5 + 5^2) + \dots + 5^{2010}(5 + 5^2) = 30 + 5^2 \cdot 30 + \dots + 5^{2010} \cdot 30 : 30$$

Bài 28: Cho $S = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2004}$, Chứng minh rằng S chia hết cho 10 và $3S+4$ chia hết cho 4^{2004}

Hướng dẫn giải

$$S = (4 + 4^2) + (4^3 + 4^4) + \dots + (4^{2003} + 4^{2004})$$

$$S = 4 \cdot (1 + 4) + 4^3(1 + 4) + \dots + 4^{2003}(1 + 4) = 4 \cdot 5 + 4^3 \cdot 5 + \dots + 4^{2003} \cdot 5 \Rightarrow S : 5, S : 2 \Rightarrow S : 10$$

$$\text{Mặt khác: } 4S = 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{2005}$$

$$\Rightarrow 4S - S = 3S = 4^{2005} - 4 \Rightarrow 3S + 4 = 4^{2005} : 4^{2004}$$

Bài 29: Cho $N = 0,7(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng: N là 1 số nguyên

Hướng dẫn giải

$$N = \frac{7}{10} \cdot (2007^{2009} - 2013^{1999}),$$

Để chứng minh N là 1 số nguyên thì N chia hết cho 10 hay:

$$\begin{aligned} 2007^{2009} - 2013^{1999} &= 2007^{2008} \cdot 2007 - 2013^{1996} \cdot 2013^3 = \overline{1}2007 - \overline{1} \dots \overline{1} \dots \overline{7} \\ &= \overline{7} - \overline{7} = \overline{0} : 10 \end{aligned}$$

Vậy N chia hết cho 10.

Do đó N là 1 số nguyên

Bài 30: Cho $A = 1.2.3 \dots 2018 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$, chứng tỏ rằng A là số tự nhiên chia hết cho 2019.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018} = \left(1 + \frac{1}{2018}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2017}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1009} + \frac{1}{1010}\right)$$

$$= 2019 \left(\frac{1}{1 \cdot 2018} + \frac{1}{2 \cdot 2017} + \dots + \frac{1}{1009 \cdot 1010} \right)$$

$$= 2019 \cdot \frac{2.3 \dots 2016 \cdot 2017 + 1.3.4 \dots 2016 \cdot 2018 + \dots + 1.2 \dots 1008 \cdot 1011 \dots 2017 \cdot 2018}{1.2.3 \dots 2017 \cdot 2018}$$

$$\text{Do đó: } A = 1.2.3 \dots 2018 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right) =$$

$$= 1.2.3 \dots 2018 \cdot 2019 \cdot \frac{2.3 \dots 2016 \cdot 2017 + 1.3.4 \dots 2016 \cdot 2018 + \dots + 1.2 \dots 1008 \cdot 1011 \dots 2017 \cdot 2018}{1.2.3 \dots 2017 \cdot 2018}$$

$$= 2019 \cdot (2.3 \dots 2016 \cdot 2017 + 1.3.4 \dots 2016 \cdot 2018 + \dots + 1.2 \dots 1008 \cdot 1011 \dots 2017 \cdot 2018) : 2019$$

Vậy A là số tự nhiên chia hết cho 2019.

Bài 31: Chứng minh rằng : $B = 5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006} : 31$

Hướng dẫn giải

Ta có : $B = 5^{2006} (5^2 + 5 + 1) = 31 \cdot 5^{2006} : 31$

Bài 32: Chứng minh rằng : $8^8 + 2^{20} : 17$

Hướng dẫn giải

Ta có: $C = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20} (2^4 + 1) = 2^{20} \cdot 17 : 17$

Bài 33: Chứng minh rằng: $D = 313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36 : 7$

Hướng dẫn giải

Ta có: $D = 313^5 (299 - 313 \cdot 36) = 313^5 \cdot (-1567) : 7$

Bài 34: Chứng minh rằng: $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{4n-1} + 7^{4n} : 400$

Hướng dẫn giải

Ta có: $400 = 1 + 7 + 7^2 + 7^3$, vậy nhóm 4 số hạng của tổng A

Bài 35: Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Hướng dẫn giải

Đặt $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots$$

$$+ (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}) \text{ (có 20 nhóm)}$$

$$D = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31$$

$$D = 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96}) \text{ chia hết cho 31}$$

Vậy $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Bài 36: Cho $S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^8$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307

Hướng dẫn giải

$$S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^8.$$

$$= 17(1 + 17 + 17^2) + 17^4(1 + 17 + 17^2) + \dots + 17^{16}(1 + 17 + 17^2)$$

$$= 17 \cdot 307 + 17^4 \cdot 307 + \dots + 17^{16} \cdot 307$$

$$= 307 \cdot (17 + 17^4 + \dots + 17^{16}) : 307$$

Vậy $S : 307$

Bài 37: Chứng minh rằng : Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n) \end{aligned}$$

Ta thấy :

$$133 \cdot 11^n : 133$$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy: số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Bài 38: Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có:

$$4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n \text{ chia hết cho } 300$$

Hướng dẫn giải

Với mọi n nguyên dương, ta có:

$$\begin{aligned} 4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n &= 4^n \cdot (4^3 + 4^2 - 4 - 1) \\ &= 4^n \cdot 75 = 4^{n-1} \cdot 4 \cdot 75 = 300 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

Mà $300 \cdot 4^{n-1}$ chia hết cho 300 (với mọi n nguyên dương)

Nên $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300.

Bài 39: Cho biểu thức $E = 2018! + \frac{2018!}{2} + \frac{2018!}{3} + \dots + \frac{2018!}{2017} + \frac{2018!}{2018}$

Chứng minh rằng: $E : 2019$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } 2019 = 3 \cdot 673$$

mà 3 và 673 là hai số nguyên tố

Để Chứng minh $E : 2019$ ta chứng minh $E : 3$ và $E : 673$

Ta xét từng số hạng của E

$2018! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2018$ có chứa thừa số 3 và 673. Do đó $2018! : 3 \cdot 673$

$\frac{2018!}{2}$ có chứa thừa số 3 và 673. Do đó $\frac{2018!}{2} : 3 \cdot 673$

$\frac{2018!}{3}$ có chứa thừa số 6 và 673. Do đó $\frac{2018!}{3} : 3 \cdot 673$

Lần lượt như vậy ta thấy tất cả các số hạng còn lại (trừ $\frac{2018!}{673}$) đều chứa thừa số 3 và 673 nên các số hạng đều chia hết cho 3 và 673

Số $\frac{2018!}{673}$ có chứa thừa số 3 và thừa số 1346 chia hết cho 673. Nên $\frac{2018!}{673} : 3.673$

Vậy tất cả các số hạng của E đều chia hết cho 3.673. Do đó: $E : 2019$

Bài 40: Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng :
 $A = ab - a - b + 1$ chia hết cho 48 .

Hướng dẫn giải

Vì a, b là bình phương hai số nguyên lẻ liên tiếp nên : $a = (2n-1)^2$; $b = (2n+1)^2$ ($n \in \mathbb{Z}$)

Ta có : $ab - a - b + 1 = (ab - a) - (b - 1) = a(b - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$. Do đó:

$$A = (a-1)(b-1) = \left[(2n-1)^2 - 1 \right] \left[(2n+1)^2 - 1 \right] = 4n(n-1).4n(n+1) = 16n^2(n-1)(n+1)$$

mà $n(n-1)(n+1) : 3$ (tích 3 số nguyên liên tiếp) $\Rightarrow A : (16.3) \Rightarrow A : 48$ (dpcm)

Bài 41: Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 với mọi x là số tự nhiên

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x . 120 + 3^{x+4} . 120 + \dots + 3^{x+96} . 120 \\ &= 120 (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \end{aligned}$$

CHUYÊN ĐỀ 5: ƯỚC CHUNG VÀ BỘ CHUNG

A. Kiến thức cần nhớ

I. Ước và bội

1) Định nghĩa về ước và bội

Ước: Số tự nhiên $d \neq 0$ được gọi là ước của số tự nhiên a khi và chỉ khi a chia hết cho d . Ta nói d là ước của a .

Nhận xét: Tập hợp các ước của a là $U(a) = \{d \in \mathbb{N} : d \mid a\}$

Bội: Số tự nhiên m được gọi là bội của $a \neq 0$ khi và chỉ khi m chia hết cho a hay a là một ước số m .

Nhận xét: Tập hợp các bội của $a (a \neq 0)$ là $B(a) = \{0; a; 2a; \dots; ka\}, k \in \mathbb{Z}$

2) Tính chất:

- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.
- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.
- Nếu $U(a) = \{1; a\}$ thì a là số nguyên tố.
- Số lượng các ước của một số: Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots$ thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1) \dots$

Thật vậy ước của A là số có dạng $mnp \dots$ trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1, a, a^2, \dots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1, b, b^2, \dots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1, c, c^2, \dots, c^z$),...

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

II. Ước chung và bội chung

1) Định nghĩa

Ước chung (ƯC): Nếu hai tập hợp $U(a)$ và $U(b)$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là ước số chung của a và b . Kí hiệu $ƯC(a; b)$

Nhận xét: Nếu $ƯC(a; b) = \{1\}$ thì a và b nguyên tố cùng nhau.

Ước chung lớn nhất (ƯCLN): Số $d \in \mathbb{N}$ được gọi là ước số chung lớn nhất của a và $b (a; b \in \mathbb{Z})$ khi d là phần tử lớn nhất trong tập hợp $ƯC(a; b)$. Kí hiệu ước chung lớn nhất của a và b là $ƯCLN(a; b)$ hoặc $(a; b)$ hoặc $\gcd(a; b)$.

Bội chung (BC): Nếu hai tập hợp $B(a)$ và $B(b)$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là bội số chung của a và b . Kí hiệu $BC(a; b)$

Bội chung nhỏ nhất (BCNN): Số $m \neq 0$ được gọi là bội chung nhỏ nhất của a và b khi m là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp $BC(a; b)$. Kí hiệu bội chung nhỏ nhất của a và b là $BCNN(a; b)$ hoặc $[a; b]$ hoặc $lcm(a; b)$.

2) Cách tìm ƯCLN và BCNN

a) Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện các bước sau :

1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố
 - 2.- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung
 - 3.- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó
- Tích đó là ƯCLN phải tìm .

Ví dụ: $30 = 2.3.5, \quad 20 = 2^2.5 \Rightarrow \text{ƯCLN}(30; 20) = 2.5 = 10.$

Chú ý :

- Nếu các số đã cho không có thừa số nguyên tố chung thì ƯCLN của chúng là 1.
- Hai hay nhiều số có ƯCLN là 1 gọi là các số nguyên tố cùng nhau.
- Trong các số đó cho, nếu số nhỏ nhất là ước của số còn lại thì ƯCLN của các số đó chính là số nhỏ nhất ấy.

b) Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau :

- 1- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố .
 - 2- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng .
 - 3- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của chúng
- Tích đó là BCNN phải tìm .

Ví dụ: $30 = 2.3.5, \quad 20 = 2^2.5 \Rightarrow \text{BCNN}(30; 20) = 2^2.3.5 = 60$

Chú ý:

- Nếu các số đã cho từng đôi một nguyên tố cùng nhau thì BCNN của chúng là tích các số đó. Ví dụ : $\text{BCNN}(5; 7; 8) = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$
- Trong các số đã cho, nếu số lớn nhất là bội của các số còn lại thì BCNN của các số đã cho chính là số lớn nhất đó . Ví dụ : $\text{BCNN}(12; 16; 48) = 48$

3) Tính chất

Một số tính chất của ước chung lớn nhất:

- Nếu $(a_1; a_2; \dots; a_n) = 1$ thì ta nói các số $a_1; a_2; \dots; a_n$ nguyên tố cùng nhau.
- Nếu $(a_m; a_k) = 1, \forall m \neq k, \{m, k\} \in \{1; 2; \dots; n\}$ thì ta nói các số $a_1; a_2; \dots; a_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.
- $c \in \text{ƯC}(a; b)$ thì $\left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right) = \frac{(a; b)}{c}$.
- $d = (a; b) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right) = 1$.
- $(ca; cb) = c(a; b)$.
- $(a; b) = 1$ và $(a; c) = 1$ thì $(a; bc) = 1$
- $(a; b; c) = ((a; b); c)$
- Cho $a > b > 0$
- Nếu $a = b.q$ thì $(a; b) = b$.
- Nếu $a = bq + r (r \neq 0)$ thì $(a; b) = (b; r)$.

Một số tính chất của bội chung nhỏ nhất:

- Nếu $[a; b] = M$ thì $\left(\frac{M}{a}; \frac{M}{b}\right) = 1$.
- $[a; b; c] = [[a; b]; c]$
- $[ka; kb] = k[a; b];$
- $[a; b].(a; b) = a.b$

4) Thuật toán Euclid trong việc tính nhanh ƯCLN và BCNN

“**Thuật toán Euclid**” là một trong những thuật toán cổ nhất được biết đến, từ thời Hy Lạp cổ đại, sau đó được Euclid (Ơ-clit) hệ thống và phát triển nên thuật toán mang tên ông. Về số học, “Thuật toán Euclid” là một thuật toán để xác định ước số chung lớn nhất (GCD – Greatest Common Divisor) của 2 phần tử thuộc vùng Euclid (ví dụ: các số nguyên). Khi có ƯCLN ta cũng tính nhanh được BCNN. Thuật toán này không yêu cầu việc phân tích thành thừa số 2 số nguyên.

Thuật toán Oclit – dùng để tìm ƯCLN của 2 số nguyên bất kỳ.

Để tìm ƯCLN của hai số nguyên a và b bất kỳ ta dùng cách chia liên tiếp hay còn gọi là “vòng lặp” như sau:

- **Bước 1:** Lấy a chia cho b:

Nếu a chia hết cho b thì $\text{ƯCLN}(a, b) = b$.

Nếu a không chia hết cho b (dư r) thì làm tiếp bước 2.

- **Bước 2:** Lấy b chia cho số dư r:



Euclid
(325–265 BC)

Nếu b chia hết cho r thì $ƯCLN(a, b) = r$

Nếu b chia r dư r_1 ($r_1 \neq 0$) thì làm tiếp bước 3.

- **Bước 3:** Lấy r chia cho số dư r_1 :

Nếu r chia cho r_1 dư 0 thì $ƯCLN(a, b) = r_1$

Nếu r chia r_1 dư r_2 ($r_1 \neq 0$) thì làm tiếp bước 4.

Bước 4: Lấy r_1 chia cho số dư r_2 :

Nếu r_1 chia hết cho r_2 thì $ƯCLN(a, b) = r_2$.

Nếu r_1 chia cho r_2 dư r_3 ($r_3 \neq 0$) thì làm tiếp như trên đến khi số dư bằng 0.

Số dư cuối cùng khác 0 trong dãy chia liên tiếp như trên là $ƯCLN(a, b)$.

Ví dụ: Tính ước số chung lớn nhất của 91 và 287.

- Trước hết lấy 287 (số lớn hơn trong 2 số) chia cho 91:

$287 = 91 \cdot 3 + 14$ (91 và 14 sẽ được dùng cho vòng lặp kế)

Theo thuật toán Euclid, ta có $ƯCLN(91, 287) = ƯCLN(91, 14)$.

Suy ra bài toán trở thành tìm $ƯCLN(91, 14)$. Lặp lại quy trình trên cho đến khi phép chia không còn số dư như sau:

$91 = 14 \cdot 6 + 7$ (14 và 7 sẽ được dùng cho vòng lặp kế)

$14 = 7 \cdot 2$ (không còn số dư suy ra **kết thúc**, nhận 7 làm kết quả)

Thật vậy: $7 = ƯCLN(14, 7) = ƯCLN(91, 14) = ƯCLN(287, 91)$

Cuối cùng $ƯCLN(287, 91) = 7$

Tính BCNN nhanh nhất

Để việc giải toán về BCNN và $ƯCLN$ được nhanh, Nếu biết áp dụng "**Thuật toán Euclid**":

Biết rằng: hai số nguyên a, b có BCNN là $[a, b]$ và $ƯCLN$ là (a, b) thì

$$|a \cdot b| = [a, b] \cdot (a, b) \Rightarrow [a, b] = \frac{|a \cdot b|}{(a, b)}, (a, b) = \frac{|a \cdot b|}{[a, b]}$$

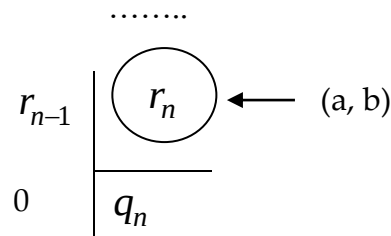
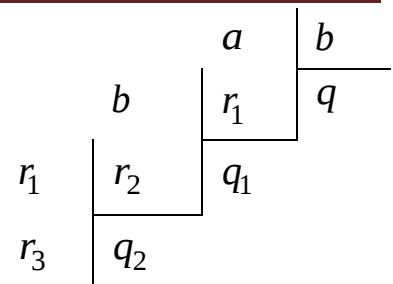
Nghĩa là: Tích 2 số nguyên $|a \cdot b| = ƯCLN(a, b) \times BCNN(a, b)$

Ví dụ: có $a = 12$; $b = 18$ suy ra $ƯCLN(12, 18) = 6$ thì:

$BCNN(12, 18) = (12 \times 18) : 6 = 36$

Nếu làm theo cách phân tích thừa số nguyên tố thì phải tính:

$12 = 2^2 \times 3$; $18 = 2 \times 3^2$ suy ra $BCNN(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$



Nhận xét: Với cặp số nguyên có nhiều chữ số thì việc phân tích ra thừa số nguyên tố mất nhiều thời gian; trong khi lấy tích số có thể bấm máy tính cầm tay khá nhanh và dễ hơn.

5) Phân số tối giản

$\frac{a}{b}$ là phân số tối giản khi và chỉ khi $(a, b) = 1$.

Tính chất:

- i) Mọi phân số khác 0 đều có thể đưa về phân số tối giản.
- ii) Dạng tối giản của một phân số là duy nhất.
- iii) Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

 **Dạng 1:** Các bài toán liên quan tới số ước của một số

*** Cơ sở phương pháp:** Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots$ thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1) \dots$

Thật vậy ước của A là số có dạng $mnp \dots$ trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1, a, a^2, \dots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1, b, b^2, \dots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1, c, c^2, \dots, c^z$),...

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số ước của số 18^{96}

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } 18^{96} = (3^2 \cdot 2)^{96} = 3^{192} \cdot 2^{96}.$$

$$\text{Vậy số ước của số } 18^{96} \text{ là } (96+1)(192+1) = 97 \cdot 193 = 18721.$$

Bài toán 2. Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 0 là số chính phương khi và chỉ khi số ước số của nó là số lẻ.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ với p_i nguyên tố và $a_i \in \mathbb{N}^*$.

n là số chính phương khi và chỉ khi $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số chẵn khi đó

$(a_1+1)(a_2+1) \dots (a_k+1)$ là số lẻ.

Mặt khác $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ là số các số ước của n , do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Một số tự nhiên n là tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n không thể có đúng 17 ước số.

Hướng dẫn giải

Tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp có dạng :

$$n = (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = 3m^2 + 2 \text{ không thể là số chính phương.}$$

Nếu n có đúng 17 ước số thì n là số chính phương (bài toán 1), vô lí. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 2: Tìm số nguyên n để thỏa mãn điều kiện chia hết

*** Cơ sở phương pháp:** Tách số bị chia thành phần chứa ẩn số chia hết cho số chia và phần nguyên dư, sau đó để thỏa mãn chia hết thì số chia phải là ước của phần số nguyên dư, từ đó ta tìm được số nguyên n thỏa mãn điều kiện.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên n để $(5n + 14)$ chia hết cho $(n + 2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $5n + 14 = 5.(n + 2) + 4$.

Mà $5.(n + 2)$ chia hết cho $(n + 2)$.

Do đó $(5n + 14)$ chia hết cho $(n + 2) \Leftrightarrow 4$ chia hết cho $(n + 2) \Leftrightarrow (n + 2)$ là ước của 4.

$$\Leftrightarrow (n + 2) \in \{1; 2; 4\}$$

$$\Rightarrow n \in \{0; 2\}.$$

Vậy với $n \in \{0; 2\}$ thì $(5n + 14)$ chia hết cho $(n + 2)$.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì $(n + 15)$ chia hết cho $(n + 3)$.

$$\Rightarrow [(n + 15) - (n + 3)] \text{ chia hết cho } (n + 3).$$

$$\Leftrightarrow 12 \text{ chia hết cho } (n + 3).$$

$$\Leftrightarrow (n + 3) \text{ là } U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

$$\Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3; 9\}.$$

Vậy với $n \in \{0; 1; 3; 9\}$ thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 3n + 6 : n + 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^2 + 3n + 6 : n + 3$

Suy ra: $n(n+3) + 6 : n + 3 \Leftrightarrow 6 : n + 3$

$\Rightarrow n + 3 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow n = 0; n = 3$.

Bài toán 4. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = \frac{n(2n-1)+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$

Vì n nguyên nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $\frac{7}{2n-1}$ nguyên

$\Rightarrow 2n - 1 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$

$\Leftrightarrow 2n \in \{-6; 0; 2; 8\} \Leftrightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Vậy với $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên:

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2} = \frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2} = \frac{4n+19}{n+2} \\ &= \frac{4(n+2)+11}{n+2} = 4 + \frac{11}{n+2} \end{aligned}$$

Để B là số tự nhiên thì $\frac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow 11 : (n+2) \Rightarrow n+2 \in U(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$

Do $n+2 > 1$ nên $n+2 = 11 \Rightarrow n = 9$

Vậy $n = 9$ thì $B \in \mathbb{N}$

Bài toán 6. Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số $n = \frac{(k+1)^2}{k+23}$ là một số nguyên dương

Hướng dẫn giải

Ta có: $n = \frac{(k+1)^2}{k+23} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k+23} = \frac{(k+23)(k-21) + 484}{k+23} = k-1 + \frac{484}{k+23}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ n là một số nguyên dương khi và chỉ khi $k+23 \mid 484$, $k+23 > 23$

$$\text{Ta có } 484 = 22^2 = 4.121 = 44.21 \Rightarrow \begin{cases} k+23=121 \\ k+23=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=98 \\ k=21 \end{cases}$$

Với $k=98$, ta có $n=81$

Với $k=21$, ta có $n=11$

Vậy giá trị k lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 98.

📁 Dạng 3: Tìm số biết ƯCLN của chúng

*** Cơ sở phương pháp:**

* Nếu biết $\text{ƯCLN}(a, b) = K$ thì $a = K.m$ và $b = K.n$ với $\text{ƯCLN}(m, n) = 1$ (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b .

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm hai số tự nhiên a, b , biết rằng: $a + b = 162$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 18$

Hướng dẫn giải

Giả sử $a \leq b$

Ta có: $a + b = 162$, $(a, b) = 18$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 18m \\ b = 18n \end{cases} \text{ với } (m, n) = 1, m \leq n$$

$$\text{Từ } a + b = 162 \Rightarrow 18(m + n) = 162 \Rightarrow m + n = 9$$

Do $(m, n) = 1$, lập bảng:

m	1	2	3	4
n	8	7	6	5
a	18	36	loại	72
b	144	126		90

Kết luận: Các số cần tìm là: $(18; 144); (36; 126); (72; 90)$

Bài toán 2. Tìm hai số nhỏ hơn 200, biết hiệu của chúng bằng 90 và ƯCLN là 15

Hướng dẫn giải

Gọi hai số cần tìm là a, b ($a, b \in \mathbb{N}; a, b < 200$)

Ta có: $a - b = 90; (a, b) = 15$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 15m \\ b = 15n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = 1 \\ 15(m - n) = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = 1 \\ m - n = 6 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } a, b < 200 \Rightarrow \begin{cases} 15m < 200 \\ 15n < 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 13 \\ n \leq 13 \end{cases}$$

m	n	a	b
13	7	195	105
11	5	65	75
7	1	85	15

Vậy: $(a, b) = (195; 105), (65; 75), (85; 15)$.

Bài toán 3. Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 432 và ƯCLN bằng 6

Hướng dẫn giải

Ta có: $ab = 432; (a, b) = 6$ ($a \leq b$)

$$\text{Đặt } a = 6m, b = 6n \text{ với } (m, n) = 1 \text{ và } m \leq n \Rightarrow 36mn = 432 \Rightarrow mn = 12$$

Ta được:

m	n	a	b
1	12	6	72
3	4	18	24

Vậy $(a, b) = (6; 72), (18, 24)$

Bài toán 4. Tìm hai số a, b biết $7a = 11b$ và $\text{ƯCLN}(a; b) = 45$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra $a > b$

$$\text{Từ } \text{ƯCLN}(a; b) = 45 \Rightarrow \begin{cases} a = 45a_1 \\ b = 45b_1 \end{cases} \quad (a_1; b_1) = 1, (a_1 \geq b_1)$$

$$\text{Mà: } \frac{a}{b} = \frac{11}{7} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{11}{7} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 \\ b_1 = 7 \end{cases} \text{ vì } (a_1; b_1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 45.11 = 495 \\ b = 45.7 = 315 \end{cases}$$

Vậy hai số a, b cần tìm là $a = 495$ và $b = 315$

📁 Dạng 4: Các bài toán phối hợp giữa BCNN của các số với ƯCLN của chúng*** Cơ sở phương pháp:**

* Nếu biết BCNN $(a, b) = K$ thì ta gọi $ƯCLN(a; b) = d$ thì $a = m.d$ và $b = n.d$ với $ƯCLN(m; n) = 1$ (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b .

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $a = 1980, b = 2100$.

a) Tìm (a, b) và $[a, b]$.

b) So sánh $[a, b].(a, b)$ với ab . Chứng minh nhận xét đó đối với hai số tự nhiên a và b khác 0 tùy ý.

(Nâng cao và phát triển lớp 6 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

$$a) 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11, \quad 2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

$$ƯCLN(1980, 2100) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$BCNN(1980, 2100) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 69300.$$

b) $[1980, 2100].(1980, 2100) = 1980 \cdot 2100$ (đều bằng 4158000). Ta sẽ chứng minh rằng $[a, b].(a, b) = ab$

Cách 1. Trong cách giải này, các thừa số riêng cũng được coi như các thừa số chung, chẳng hạn a chứa thừa số 11, b không chứa thừa số 11 thì ra coi như b chứa thừa số 11 với số mũ bằng 0. Với cách viết này, trong ví dụ trên ta có:

$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 11.$$

$$2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^0.$$

$$(1980, 2100) \text{ là tích các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 60.$$

$$[1980, 2100] \text{ là tích các thừa số chung với số mũ lớn nhất } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 69300.$$

Bây giờ ta chứng minh trong trường hợp tổng quát:

$$[a, b].(a, b) = ab \quad (1)$$

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, các thừa số nguyên tố ở hai vế của (1) chính là các thừa số nguyên tố có trong a và b . Ta sẽ chứng tỏ rằng hai vế chứa các thừa số nguyên tố như nhau với số mũ tương ứng bằng nhau.

Gọi p là thừa số nguyên tố tự ý trong các thừa số nguyên tố như vậy. Giả sử số mũ của p trong a là x , số mũ của p trong b là y trong đó x và y có thể bằng 0. Khụng mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \geq y$. Khi đó vế phải của (1) chứa p với số mũ $x+y$. Cũn ở vế trái, $[a, b]$ chứa p với số mũ x , (a, b) chứa p với số mũ y nên vế trái cũn chứa p với số mũ $x+y$.

Cỏch 2. Gọi $d = (a, b)$ thỡ $a = da', b = db'$ (1), trong đó $(a', b') = 1$.

Đặt $\frac{ab}{d} = m$ (2), ta cần chứng minh rằng $[a, b] = m$.

Để chứng minh điều này, cần chứng tỏ tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho $m = ax$, $m = by$ và $(x, y) = 1$.

Thật vậy từ (1) và (2) suy ra $m = a \cdot \frac{b}{d} = ab'$,

$m = b \cdot \frac{a}{d} = ba'$. Do đó, ta chọn $x = b', y = a'$, thế thỡ $(x, y) = 1$ vỡ $(a', b') = 1$.

Vậy $\frac{ab}{d} = [a, b]$, tức là $[a, b] \cdot (a, b) = ab$.

Bài toán 2. Tỡm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chỳng bằng 10, BCNN của chỳng bằng 900.

Hướng dẫn giải

Gọi các số phải tỡm là a và b , giả sử $a \leq b$. Ta cú $(a, b) = 10$ nên $a = 10a', b = 10b'$, $(a', b') = 1, a' \leq b'$. Do đó $ab = 100a'b'$ (1). Mặt khỏc $ab = [a, b] \cdot (a, b) = 900 \cdot 10 = 9000$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a'b' = 90$. Ta cú các trường hợp :

a'	1	2	3	4
b'	90	45	18	10

Suy ra:

a	10	20	50	90
b	900	450	180	100

Bài toán 3. Tỡm hai số tự nhiên a, b sao cho tổng của ƯCLN và BCNN là 15

Hướng dẫn giải

Giả sử $a < b$

Gọi $d = \text{ƯCLN}(a; b) \Rightarrow \begin{cases} a = d \cdot a_1 \\ b = d \cdot b_1 \end{cases} (a_1 < b_1), (a_1; b_1) = 1, \text{ và } d < 15$

Nên $\text{BCNN}(a; b) = a_1 \cdot b_1 \cdot d$

Theo bài ra ta có: $d + a_1.b_1.d = 15 \Rightarrow d(1 + a_1.b_1) = 15 \Rightarrow d \in U(15) = \{1; 3; 5; 15\}$, Mà $d < 15$,
Nên

$$\text{TH1 : } d = 1 \Rightarrow a_1.b_1 = 14 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ b_1 = 14 \Rightarrow b = 14 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 2 \\ b_1 = 7 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$

$$\text{TH2 : } d = 3 \Rightarrow a_1.b_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ b_1 = 4 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

$$\text{TH3 : } d = 5 \Rightarrow a_1.b_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 5 \\ b_1 = 2 \Rightarrow b = 10 \end{cases}$$

Vậy các cặp số $(a; b)$ cần tìm là: $(1; 14)$, $(2; 7)$, $(3; 12)$, $(5; 10)$ và đảo ngược lại.

Dạng 5: Các bài toán liên quan đến hai số nguyên tố cùng nhau

* **Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh hai số là nguyên tố cùng nhau, ta chứng minh chúng có ƯCLN = 1.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

- Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.
- Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.
- $2n + 1$ và $3n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $d \in \text{ƯC}(n, n+1) \Rightarrow (n+1) - n : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$. Vậy n và $n + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $d \in \text{ƯC}(2n + 1, 2n + 3) \Rightarrow (2n + 3) - (2n + 1) : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$.

Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy $d = 1$.

Vậy $(2n + 1)$ và $(2n + 3)$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Gọi $d \in \text{ƯC}(2n+1, 3n+1) \Rightarrow 3(2n+1) - 2(3n+1) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$.

Vậy $2n + 1$ và $3n + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài toán 2. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

- a và $a + b$
- a^2 và $a + b$
- ab và $a + b$.

Hướng dẫn giải

- a) Gọi $d \in \text{ƯC}(a, a+b) \Rightarrow (a+b) - a : d \Rightarrow b : d$ Ta lại có: $a : d \Rightarrow d \in \text{ƯC}(a, b)$, do đó $d = 1$ (vì a và b là hai số nguyên tố cùng nhau). Vậy $(a, a+b) = 1$.
- b) Giả sử a^2 và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d , do đó b cũng chia hết cho d . Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d , trái với giả thiết $(a, b) = 1$.
 Vậy a^2 và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau.
- c) Giả sử ab và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d . Tồn tại một trong hai thừa số a và b , chẳng hạn là a , chia hết cho d , do đó b cũng chia hết cho d , trái với $(a, b) = 1$.
 Vậy $(ab, a+b) = 1$.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n để các số: $9n+24$ và $3n+4$ là các số nguyên tố cùng nhau?

Hướng dẫn giải

Giả sử $9n+24$ và $3n+4$ cùng chia hết cho số nguyên tố d .

Ta có $(9n+24) - 3(3n+4) : d \Rightarrow 12 : d \Rightarrow d \in \{2, 3\}$. Điều kiện để $(9n+24, 3n+4) = 1$ là $d \neq 2, d \neq 3$. Ta dễ thấy $d \neq 3$ vì $3n+4$ không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ thì ít nhất một trong hai số $9n+24$ hoặc $3n+4$ không chia hết cho 2.

Ta thấy $9n+24$ là số lẻ suy ra n lẻ, $3n+4$ lẻ suy ra n lẻ.

Vậy để $(9n+24, 3n+4) = 1$ thì n phải là số lẻ.

Bài toán 4. Tìm n để $18n+3$ và $31n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Hướng dẫn giải

Gọi $\text{ƯCLN}(18n+3; 31n+7) = d, d \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} 18n+3 : d \\ 31n+7 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n+3) : d \\ 6(31n+7) : d \end{cases} \Rightarrow (126n+42) - (186n+42) : d \Rightarrow 21 : d$$

$$\Rightarrow d \in U(21) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21\}$$

Do $31n+7 : d$, Mà $31n+7$ không chia hết cho 3, nên $d=1$ hoặc $d=7$

Để hai số $18n+3$ và $31n+7$ là hai số nguyên tố thì d khác 7 hay

$$18n+3 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n+3-21 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n-18 \not\vdots 7 \Rightarrow 18(n-1) \not\vdots 7 \Rightarrow n-1 \not\vdots 7$$

$$\Rightarrow n-1 \neq 7k \Rightarrow n \neq 7k+1$$

Vậy $n \neq 7k+1$ với k là số tự nhiên thì $18n+3$ và $31n+7$ là hai số nguyên tố

** Dạng 6: Các bài toán về phân số tối giản**

* **Cơ sở phương pháp:** Một phân số là tối giản khi tử số và mẫu số có ước chung lớn nhất bằng 1.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $\frac{2n+3}{3n+4}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn giải

Gọi d là ước chung của $(2n+3)$ và $(3n+4)$. Suy ra:

$$\begin{cases} 2n+3:d \\ 3n+4:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+3):d \\ 2(3n+4):d \end{cases} \Rightarrow 3(2n+3) - 2(3n+4):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d \in U(1)$$

Mà $U(1) = \{-1; 1\} \Rightarrow d \in \{-1; 1\}$

Vậy $\frac{2n+3}{3n+4}$ là phân số tối giản.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $(2n+4, 14n+3) = d \Rightarrow \begin{cases} 21n+4:d & (1) \\ 14n+3:d & (2) \end{cases} \Rightarrow 7n+1:3 \Rightarrow 14n+2:3 \quad (3)$

Từ (1) và (3) suy ra $1:d \Rightarrow d=1$

Vậy $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Cách 2: Giả sử phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ chưa tối giản

Suy ra $21n+4$ và $14n+3$ có một ước số chung nguyên tố d .

$$\Rightarrow (21n+4) - (14n+3) = 7n+1:d$$

$$\Rightarrow 14n+2:d$$

Do đó: $(14n+3) - (14n+1) = 1:d$, vô lý

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn giải

Ta viết lại: $\frac{2n+3}{n^2+3n+2} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

Do $n+1$ và $n+2$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (n+1, n+2) = 1$

Suy ra tổng của chúng là $(n+1) + (n+2) = 2n+3$ và tích của chúng là $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Vậy phân số $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}, n \in \mathbb{N}$ là phân số tối giản.

Bài toán 4. Định n để $\frac{n+8}{2n-5}$ là phân số tối giản với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để $\frac{n+8}{2n-5}$ là phân số tối giản thì $(n+8, 2n-5) = 1$

Giả sử d là một ước nguyên tố của $2n-5$ và $n+8$. Suy ra: $\begin{cases} d \mid n+8 & (1) \\ d \mid 2n-5 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra: $d \mid 2(n+8) = (2n-5) + 21 \quad (3)$

Do đó $d \mid 21 \Rightarrow d = 3, 7$

Muốn cho phân số tối giản thì điều kiện cần và đủ là $(n+8)$ không chia hết cho 3 và 7.

Do đó: $n \neq 3k+1, n \neq 7m-1$ với $k, m \in \mathbb{N}$

Vậy $n \neq 3k+1$ và $n \neq 7m-1$ là điều kiện cần tìm để phân số $\frac{n+8}{2n-5}$ tối giản.

Dạng 7: Tìm ƯCLN của các biểu thức số

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm ƯCLN của $2n-1$ và $9n+4$ ($n \in \mathbb{N}$).

Hướng dẫn giải

Gọi $d \in \text{ƯC}(2n-1, 9n+4) \Rightarrow 2(9n+4) - 9(2n-1) : d \Rightarrow 17 : d \Rightarrow d \in \{17; 1\}$

Vì $2n-1 : 17 \Rightarrow 2n-18 : 17 \Leftrightarrow 2(n-9) : 17 \Leftrightarrow n-9 : 17 \Leftrightarrow n=17k+9$ với $k \in \mathbb{N}$

Nếu $n=17k+9$ thì $2n-1 : 17$ và $9n+4 = 9(17k+9)+4 = 153k+85 : 17$

do đó $(2n - 1, 9n + 4) = 17$.

Nếu $n \neq 17k + 9$ thì $2n - 1$ không chia hết cho 17 do đó $(2n - 1, 9n + 4) = 1$

Bài toán 2. Tìm ƯCLN của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Hướng dẫn giải

Gọi $d \in \text{ƯC}\left(\frac{n(n+1)}{2}, 2n+1\right)$ thì $n(n+1):d$ và $2n+1:d$

Suy ra $n(2n+1) - n(n+1):d$ tức là $n^2:d$.

Từ $n(n+1):d$ và $n^2:d$ suy ra $n:d$. Ta lại có $2n+1:d$, do đó $1:d$ nên $d = 1$

Vậy ƯCLN của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n+1$ bằng 1.

Dạng 8: Liên hệ giữa phép chia có dư với phép chia hết, ƯCLN, BCNN

*** Cơ sở phương pháp:**

* Nếu số tự nhiên a chia cho số tự nhiên b được số dư là $k \Rightarrow a - k : b$

* Nếu $a : b$ và $a : c$ mà $\text{ƯCLN}(a, b) = 1 \Rightarrow a$ chia hết cho tích $b.c$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

* Nếu $a : b$ và $a : c$ mà a là số nhỏ nhất $\Rightarrow a = \text{BCNN}(a, b)$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

* Nếu $a : b$ và $m : b$ mà b lớn nhất $\Rightarrow b = \text{ƯCLN}(a, m)$ ($a, b, m \in \mathbb{N}$)

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Bạn Nam nghĩ 1 số có 3 chữ số, nếu bớt số đó đi 8 thì được 1 số $: 7$, nếu bớt số đó đi 9 thì được 1 số $: 8$, nếu bớt số đó đi 10 thì được 1 số $: 9$, Hỏi bạn Nam nghĩ số nào?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số bạn Nam đã nghĩ, Điều kiện: $99 < x < 1000$

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} x-8:7 \\ x-9:8 \\ x-10:9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1:7 \\ x-1:8 \\ x-1:9 \end{cases} \Rightarrow x-1:7;8;9 \Rightarrow x-1 \in \text{BC}(7;8;9)$$

$$x-1 \in \{0; 504; 1008; \dots\} \Rightarrow x \in \{1; 505; 1009; \dots\}, \text{ Mà } 99 < x < 1000 \text{ nên } x = 505$$

Vậy số có ba chữ số mà bạn Nam nghĩ là 505

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho chia a cho 3, cho 5, cho 7 được các số dư theo thứ tự là 2, 3, 4

Hướng dẫn giải

Theo bài ra ta có:
$$\begin{cases} a = 3m + 2 \\ a = 5n + 3 \\ a = 7p + 4 \end{cases} (m, n, p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 6m + 4 \\ 2a = 10n + 6 \\ 2a = 14p + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 : 3 \\ 2a - 1 : 5 \\ 2a - 1 : 7 \end{cases} \Rightarrow 2a - 1 \in BC(3; 5; 7)$$

Vì a nhỏ nhất nên $2a - 1$ nhỏ nhất khác 0 hay $2a - 1 = BCNN(3; 5; 7) = 105 \Rightarrow 2a = 106 \Rightarrow a = 53$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 53

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5, 7, 9 có số dư theo thứ tự là 3, 4, 5

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a. Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} a = 5m + 3 \\ a = 7n + 4 \\ a = 9p + 5 \end{cases} (m, n, p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 10m + 6 \\ 2a = 14n + 8 \\ 2a = 18p + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 : 5 \\ 2a - 1 : 7 \\ 2a - 1 : 9 \end{cases} \Rightarrow 2a - 1 \in BC(5; 7; 9)$$

Vì a nhỏ nhất nên $2a - 1$ nhỏ nhất khác 0 hay $2a - 1 = BCNN(5; 7; 9) = 315 \Rightarrow 2a = 316 \Rightarrow a = 158$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 158

Bài toán 4. Linh và Mai cùng mua một số hộp bút chì màu, số bút đựng trong mỗi hộp bằng nhau và lớn hơn 1. Kết quả Linh có 15 bút chì màu và Mai có 18 bút chì màu hỏi mỗi hộp có bao nhiêu chiếc bút?

Hướng dẫn giải

Gọi số bút trong mỗi hộp là a. Điều kiện: $a \in \mathbb{N}, a < 15$ và $a > 1$

Theo bài ra ta có : $15 : a$ và $18 : a$, Nên a là 1 ước chung của 15 và 18

Và a phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn 15 $\Rightarrow$ kết quả được $a=3$

Bài toán 5. Hai lớp 6A và 6B tham gia phong trào tết trồng cây, mỗi em trồng 1 số cây như nhau, kết quả lớp 6A trồng được 132 cây và 6B được 135 cây. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh.

Hướng dẫn giải

Gọi số cây mỗi em trồng được là a, Điều kiện: $a \in \mathbb{N}, a < 132, a > 1$

Theo bài ra ta có: $132 : a$ và $135 : a$ khi đó ta thấy $a \in UC(132; 135) = \{1; 3\}$

Vậy $a = 3$, Khi đó lớp 6A có $132 : 3 = 44$ học sinh và lớp 6B có $135 : 3 = 45$ học sinh.

Bài toán 6. Trong cuộc thi HSG cấp tỉnh có ba môn Toán Văn Anh ,số học sinh tham gia như sau:Văn có 96 học sinh, Toán có 120 học sinh và Anh có 72 học sinh.Trong buổi tổng kết các bạn được tham gia phân công đứng thành hàng dọc sao cho mỗi hàng có số bạn thi

mỗi môn bằng nhau. Hỏi có thể phân học sinh đứng thành ít nhất bao nhiêu hàng?

Hướng dẫn giải

Gọi số học sinh đứng ở mỗi hàng là a . Điều kiện : $a \in \mathbb{N}, a < 72$ và $a > 1$

Vì mỗi hàng có số học sinh mỗi môn bằng nhau nên ta có:

$$96 : a ; 120 : a \text{ và } 72 : a ,$$

Để có ít nhất bao nhiêu hàng thì số học sinh phải là lớn nhất hay a lớn nhất

Hay $a = \text{ƯCLN} (96 ; 120 ; 72) = 24$, Vậy số hàng cần tìm là : $(96 + 120 + 72) : 24 = 12$ hàng

Dạng 9: Tìm ƯCLN của hai số bằng thuật toán O-clit

*** Cơ sở phương pháp:**

a) Trường hợp $b \mid a$ thì $(a, b) = b$

b) Trường hợp $b \nmid a$ giả sử $a = bq + c$ thì $(a, b) = (b, c)$.

Thuật toán Euclid.

Giả sử:

$$a = bq + r_1, 0 < r_1 < b$$

$$b = r_1q_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2$$

....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_nq_n$$

Thuật toán Euclid phải kết thúc với số dư

$$r_{n+1} \neq 0$$

Theo b) ta có

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Vậy ƯCLN(a, b) là số dư cuối cùng khác 0 trong thuật toán Euclid.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Dùng thuật toán Euclid để chứng minh : $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

Hướng dẫn giải

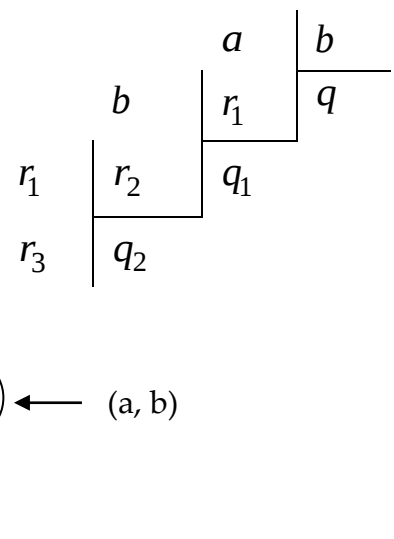
$$\text{Ta có } n^4 + 3n^2 + 1 = (n^3 + 2n)n + n^2 + 1$$

$$n^3 + 2n = (n^2 + 1)n$$

$$n^2 + 1 = n.n + 1$$

$$n = 1.n + 0$$

$$\text{Vậy } (n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1.$$



Bài toán 2. Cho hai số tự nhiên a và b ($a > b$).

a) Chứng minh rằng nếu a chia hết cho b thì $(a, b) = b$.

b) Chứng minh rằng nếu a không chia hết cho b thì ƯCLN của hai số bằng ƯCLN của số nhỏ và số dư trong phép chia số lớn cho số nhỏ.

c) Dùng các nhận xét trên để tìm ƯCLN(72, 56)

(Nâng cao và phát triển lớp 6 tập 1)

Hướng dẫn giải

a) Mọi ước chung của a và b hiển nhiên là ước của b . Đảo lại, do a chia hết cho b nên b là ước chung của a và b . Vậy $(a, b) = b$.

b) Gọi r là số dư trong phép chia a cho b ($a > b$). Ta có $a = bk + r$ ($k \in \mathbb{N}$), cần chứng minh rằng $(a, b) = (b, r)$.

Thật vậy, nếu a và b cùng chia hết cho d thì r chia hết cho d , do đó ước chung của a và b cũng là ước chung của b và r (1). Đảo lại nếu b và r cùng chia hết cho d thì a chia hết cho d , do đó ước chung của b và r cũng là ước chung của a và b (2). Từ (1) và (2) suy ra tập hợp các ước chung của a và b và tập hợp các ước chung của b và r bằng nhau. Do đó hai số lớn nhất trong hai tập hợp đó cũng bằng nhau, tức là $(a, b) = (b, r)$.

c) 72 chia 56 dư 16 nên $(72, 56) = (56, 16)$;

56 chia 16 dư 8 nên $(56, 16) = (16, 8)$;

16 chia hết cho 8 nên $(16, 8) = 8$. Vậy $(72, 56) = 8$.

Nhận xét : Giả sử a không chia hết cho b và a chia cho b dư r_1 , b chia cho r_1 dư r_2 , r_1 chia cho r_2 dư $r_3, \dots, r_{n-2}$ chia cho r_{n-1} dư r_n , r_{n-1} chia cho r_n dư 0 (dãy số $b, r_1, r_2, \dots, r_n$ là dãy số tự nhiên giảm dần nên số phép chia là hữu hạn do đó quá trình kết thúc với một số dư bằng 0). Theo chứng minh ở ví dụ trên ta có $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \dots (r_{n-1}, r_n) = r_n$ vì r_{n-1} chia hết cho r_n

Như vậy $UCLN(a, b)$ là số chia cuối cùng trong dãy các phép chia liên tiếp a cho b , b cho r_1 , r_1 cho $r_2, \dots$, trong đó $r_1, r_2, \dots$ là số dư trong các phép chia theo thứ tự trên.

Trong thực hành người ta đặt tính như sau :

$$\begin{array}{r}
 72 \overline{) 56} \\
 \underline{56} \\
 16 \\
 16 \overline{) 16} \\
 \underline{16} \\
 0
 \end{array}$$

Việc thực hiện
là thuật toán Ơ clit.

một dãy phép chia liên tiếp như trên được gọi

Trường hợp tìm ƯCLN của ba số, ta tìm ƯCLN của hai số rồi tìm ƯCLN của kết quả với số thứ ba.

Bài toán 3. Tìm ƯCLN(a, b) biết a là số gồm 1991 chữ số 2; b là số gồm 8 chữ số 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: 1991 chia 8 dư 7, còn 8 chia 7 dư 1

Theo thuật toán Ô- Clít:

$$(a, b) = (\underbrace{22 \dots 2}_{1991 \text{ số } 2}, \underbrace{22 \dots 2}_8) = (\underbrace{22 \dots 2}_8, \underbrace{22 \dots 2}_{7 \text{ số } 2}) = (\underbrace{22 \dots 2}_{7 \text{ số } 2}, 2) = 2.$$

Bài toán 4. Tìm ƯCLN của

a) $\underbrace{11 \dots 1}_{2004 \text{ số } 1}$ và $\underbrace{11 \dots 1}_8$

b) 123456789 và 987654321.

(Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS phần số học- Nguyễn Vũ Thanh)

Hướng dẫn giải

a) Gọi $a = \underbrace{11 \dots 1}_{2004 \text{ số } 1}$ $b = \underbrace{11 \dots 1}_8$. Ta có $2000 : 8 \Rightarrow \underbrace{11 \dots 111 \dots 1}_{2000 \text{ số } 1} = \underbrace{11 \dots 111 \dots 1}_{8 \text{ số } 1} \cdot \underbrace{11 \dots 111 \dots 1}_{8 \text{ số } 1} = b \cdot \underbrace{11 \dots 111 \dots 1}_{2000 \text{ số } 1}$.

Do đó $a = \underbrace{11 \dots 1}_{2000 \text{ số } 1} 0000 + 1111 = bq + 1111 \Rightarrow (a, b) = (b, 1111) = 1111$ (do $b : 1111$).

b) Gọi $a = 987654321$; $b = 123456789$. Ta có:

$$a = 8b + 9 \Rightarrow (a, b) = (b, 9) = 9 \text{ (do } b : 9 \text{)}.$$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Tìm số chia và thương của một phép chia có số bị chia bằng 145, số dư bằng 12 biết rằng thương khác 1 (số chia và thương là các số tự nhiên).

Câu 2. Hãy viết số 108 dưới dạng tổng các số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 0.

Câu 3. Tìm số tự nhiên n để $3n + 4$ chia hết cho $n - 1$.

Câu 4. Tìm $a \in \mathbb{N}$ để $a + 1$ là bội của $a - 1$

Câu 5. Tìm số tự nhiên sao cho $4n - 5$ chia hết cho $2n - 1$

Câu 6. Tìm số nguyên n để: $5 + n^2 - 2n$ chia hết cho $n - 2$

Câu 7. Tìm số nguyên n để: $n^2 + 4$ chia hết cho $n + 2$

Câu 8. Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Câu 9. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nó tăng gấp n lần nếu cộng mỗi chữ số của nó với n (n là số tự nhiên, có thể gồm một hoặc nhiều chữ số)

Câu 10. Tìm số tự nhiên a biết rằng 264 chia cho a dư 24, còn 363 chia cho a dư 43.

Câu 11. Tìm số tự nhiên a biết rằng 398 chia cho a thì dư 38, còn 450 chia cho a thì dư 18.

Câu 12. Có 100 quyển vở và 90 bút chì được thưởng đều cho một số học sinh, còn lại 4 quyển vở và 18 bút chì không đủ chia đều. Tính số học sinh được thưởng.

Câu 13. Phần thưởng cho học sinh của một lớp học gồm 128 vở, 48 bút chì, 192 nhãn vở. Có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu phần thưởng như nhau, mỗi phần thưởng gồm bao nhiêu vở, bút chì, nhãn vở?

Câu 14. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự là 2, 3, 4

Câu 15. Một cuộc thi chạy tiếp sức theo vòng tròn gồm nhiều chặng. Biết rằng chu vi đường tròn là $330m$, mỗi chặng dài $75m$, địa điểm xuất phát và kết thúc cùng một chỗ. Hỏi cuộc thi có ít nhất mấy chặng?

Câu 16. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, sao cho chia nó cho 17, cho 25 được các số dư theo thứ tự là 8 và 16.

Câu 17. Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia cho 8 thì dư 7, chia cho 31 thì dư 28.

Câu 18. Nếu xếp một số sách vào từng túi 10 cuốn thì vừa hết, vào từng túi 12 cuốn thì thừa 2 cuốn, vào từng túi 18 cuốn thì thừa 8 cuốn. biết rằng số sách trong khoảng từ 715 đến 1000. Tính số sách đó?

Câu 19. Hai lớp 6A, 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Trong lớp 6A, một bạn thu được $25kg$, còn lại mỗi bạn thu $10kg$. Tính số học sinh mỗi lớp, biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng từ $200kg$ đến $300kg$.

Câu 20. Có hai chiếc đồng hồ (có kim giờ và kim phút). Trong một ngày, chiếc thứ nhất chạy nhanh 2 phút, chiếc thứ hai chạy chậm 3 phút. Cả hai đồng hồ được lấy lại giờ chính xác. Hỏi sau ít nhất bao lâu, cả hai đồng hồ lại chạy chính xác?

Câu 21. Tìm hai số tự nhiên biết rằng:

- a) Hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN bằng 28, các số đó trong khoảng từ 300 đến 440.
- b) Hiệu của chúng bằng 48, ƯCLN bằng 12.

Câu 22. Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 36 và tổng của chúng bằng 432

Câu 23. Tìm hai số tự nhiên biết rằng tích của chúng bằng 864 và ƯCLN của nó là 6

Câu 24. Chứng minh rằng $14n+3$ và $21n+4$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 25. Chứng minh rằng $2n+1$ và $6n+5$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 26. BCNN của 2 số tự nhiên bằng 770, một số bằng 14. Tìm số kia.

Câu 27. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

- a) b và $a-b$ ($a > b$);
- b) $a^2 + b^2$ và ab .

Câu 28. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng nhau với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab .

Câu 29. Tìm số tự nhiên n sao cho:

- a) $4n - 5$ chia hết cho 13;
- b) $5n + 1$ chia hết cho 7;
- c) $25n + 3$ chia hết cho 53.

Câu 30. Tìm số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau:

- a) $4n + 3$ và $2n + 3$;
- b) $7n + 13$ và $2n + 4$;
- c) $9n + 24$ và $3n + 4$;
- d) $18n + 3$ và $21n + 7$.

Câu 31. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để $n + 15$ và $n + 72$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 32. Cho $(a, b) = 1$. Tìm :

- a) $(a + b, a - b)$
- b) $(7a + 9b, 3a + 8b)$

Câu 33. Tìm a, b biết:

- a) $[a, b] + (a, b) = 55$;
- b) $[a, b] - (a, b) = 5$;
- c) $[a, b] + (a, b) = 35$.

Câu 34. Tìm ƯCLN của các số sau bằng thuật toán O-clit:

- a) $(187231, 165148)$;
- b) $(\underbrace{11 \dots 1}_{100 \text{ chu so}}, \underbrace{11 \dots 1}_{8 \text{ chu so}})$.

Câu 35. Tìm $[n; n + 1; n + 2]$

Câu 36. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ biết $n < 30$ để các số $3n + 4$ và $5n + 1$ có ước chung lớn hơn 1.

Câu 37. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên.

Câu 38. Ba xe buýt cùng khởi hành lúc 6 giờ sáng từ một bến xe và đi theo 3 hướng khác nhau. Xe thứ nhất quay về bến sau 1 giờ 5 phút và sau 10 phút lại đi. Xe thứ hai quay về bến sau 56 phút và lại đi sau 4 phút. Xe thứ ba quay về bến sau 48 phút và sau 2 phút lại đi. Hỏi ba xe lại cùng xuất phát từ bến lần thứ hai vào lúc mấy giờ?

Câu 39. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phân số $\frac{2n+1}{6n+5}$ luôn tối giản.

Câu 40. Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$).

- a) Chứng tỏ rằng phân số P là phân số tối giản.
- b) Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất?

Câu 41. Tìm hai số nguyên dương biết $a + 2b = 48$ và $\text{ƯCLN}(a; b) + 3 \cdot \text{BCNN}(a; b) = 114$

Câu 42. Cho $(a, b) = 1$, tìm $(11a + 2b, 18a + 5b)$.

Câu 43. Chứng minh rằng $(a, b) = (5a + 3b, 13a + 8b)$

Câu 44. Cho ba số tự nhiên a, b, c nguyên tố cùng nhau đôi một.

Chứng minh rằng $(ab + bc + ca, abc) = 1$

Câu 45. Tìm tất cả các số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau biết rằng:

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73}$$

Câu 46. Cho $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$. Chứng minh rằng: $(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1$

Câu 47. Cho $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$. Tìm $(2^m - 1, 2^n - 1)$

Câu 48. Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$ và $\text{BCNN}(a, b) = 300$;

Câu 49. Cho $a \in \mathbb{Z}$, tìm $(a, a+2)$

Câu 50. Cho a, m là các số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng :

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^{m-1}, a - 1) = (m, a - 1).$$

Câu 51. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số lẻ thì $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = (a, b, c)$.

Câu 52. Tổng các số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ bằng 999. Hỏi ước số chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

Câu 53. Cho $(a, b) = 1$, tìm $(11a + 2b, 18a + 5b)$

Câu 54. Cho $(m, n) = 1$. Tìm $(m + n, m^2 + n^2)$.

Câu 55. Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

$$a) \frac{21n+4}{14n+3}; \quad b) \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

Câu 56. Tìm số nguyên n để các phân số sau tối giản.

$$a) \frac{18n+3}{21n+7}; \quad b) \frac{2n+3}{n+7}.$$

Câu 57. Tìm hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $a + b = 128$ và $(a, b) = 16$.

Câu 58. Tìm ƯCLN của $\overline{ab} + \overline{ba}$ và 33 với $a + b$ không chia hết cho 3

Câu 59. Chứng minh rằng một số tự nhiên có ba chữ số tận cùng là 136 thì ít nhất có 4 ước số dương.

Câu 60. Chứng minh rằng nếu $|kn - lm| = 1$ thì $(ma + nb, ka + lb) = (a, b)$.

Câu 61. Tìm ƯCLN của tất cả các số có 9 chữ số được viết bởi các chữ số 1, 2, 3, ..., 9 và trong các số đó các chữ số đều khác nhau.

Câu 62. Cho $(a, b) = 1$ tìm ƯCLN của $2a + b$ và $a(a + b)$

Câu 63. Chứng minh các phân số sau tối giản với n là số nguyên

$$a) \frac{12n+1}{30n+2}; \quad b) \frac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}.$$

Câu 64. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{13+n}{n-2}$ tối giản.

Câu 65. Chứng minh rằng nếu $5n^2 + 1 \vdots 6$ thì $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{3}$ tối giản.

Câu 66. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất để các phân số sau tối giản : $\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \dots, \frac{31}{n+33}$.

Câu 67. Tìm số tự nhiên a, b biết $ab = 360, [a, b] = 60$.

Câu 68. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có số dư lần lượt là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Câu 69. Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a, b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a, b là 1.

ii) Số $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

Câu 70. Xác định các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 - pq + 2q^2$ và $2p^2 + pq + q^2$ là các số nguyên tố cùng nhau.

Câu 71. Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0: a và b , sao cho: $(a, b) = 1$ và $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{7}{25}$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm 1992 – 1993)

Câu 72. Cho m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Tìm ước chung lớn nhất của $m+n$ và $m^2 + n^2$.

Câu 73. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b thỏa mãn $4a+1$ và $4b-1$ nguyên tố cùng nhau, đồng thời $a+b$ là ước của $16ab+1$.

Câu 74. Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a, b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a, b là 1.

ii) Số $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

(Trích đề học sinh giỏi toán Đắk Lắk năm học 2017-2018)

Câu 75. Cho hai số tự nhiên m và n thỏa mãn $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là số nguyên.

Chứng minh ước chung lớn nhất của m và n không lớn hơn $\sqrt{m+n}$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 Hải Dương năm học 2004-2005)

Câu 76. Cho ba số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau và đồng thời thỏa mãn các điều kiện:

i) a là ước của $b+c+bc$,

ii) b là ước của $a+c+ac$,

iii) c là ước của $a+b+ab$,

a) Hãy chỉ ra bộ ba số (a, b, c) thỏa mãn các điều kiện trên.

b) Chứng minh rằng a, b, c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

(Trích đề vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2007-2008)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Gọi x là số chia, a là thương, ta có $145 = ax + 12 (x > 12)$. Như vậy x là ước của $145 - 12 = 133$

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $133 = 7 \cdot 19$

Ước của 133 mà lớn hơn 12 là 19 và 133

Nếu số chia bằng 19 thì thương bằng 7. Nếu số chia bằng 133 thì thương bằng 1, trái với đề bài.

Vậy số chia bằng 19, thương bằng 7.

Câu 2. Giả sử số 108 viết dưới dạng tổng của k số tự nhiên liên tiếp là $n+1, n+2, \dots, n+k$ với $k, n \in \mathbb{N}, k \geq 2, n+1 \geq 1$. Ta có:

$$(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) = 108$$

$$\frac{(2n+k+1) \cdot k}{2} = 108$$

$$(2n+k+1) \cdot k = 216$$

Bài toán đưa đến việc tìm các ước của 216. Ta đưa ra hai nhận xét sau để giảm bớt số trường hợp phải xét:

$$1) \quad 2n+k+1 > k \geq 2$$

2) Hiệu $(2n+k+1) - k = 2n+1$ là số lẻ nên trong hai số $2n+k+1$ và k có một số chẵn, một số lẻ.

Do đó ta chỉ cần tìm ước lẻ của 216, đồng thời trong hai số $2n+k+1$ và k có tích bằng 216, chọn k là số nhỏ hơn.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $216 = 2^3 \cdot 3^3$. Ước lẻ của 216 lớn hơn 1 là 3, 9, 27

Với $k = 3$ thì $2n+k+1 = 72$ ta được $n = 34$, do đó $108 = 35 + 36 + 37$

Với $k = 9$ thì $2n+k+1 = 24$ ta được $n = 7$, do đó $108 = 8 + 9 + \dots + 16$

Với $2n + k + 1 = 27$ thì $k = 8$, ta được $n = 9$, do đó $108 = 10 + 11 + \dots + 17$

Câu 3. Để $3n + 4 \vdots n - 1 \Leftrightarrow 1.(3n + 4) - 3.(n - 1) \vdots n - 1 \Leftrightarrow 7 \vdots n - 1$ hay $n - 1 \in U(7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n - 1 = 1 \\ n - 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 8 \end{cases}$$

Vậy với $n = 2$ hoặc $n = 8$ thì $3n + 4 \vdots n - 1$

Câu 4. Để $a + 1$ là bội của $a - 1$ nên thì $\frac{a+1}{a-1}$ là số nguyên $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$

$$\Rightarrow a - 1 \in U(2) = \{-1, 1, 2\}$$

$$\Rightarrow a = \{0, 2, 3\} \text{ (thỏa mãn } a \in \mathbb{N})$$

Câu 5. Ta có $4n - 5 = 2(2n - 1) - 3$

Để $4n - 5$ chia hết cho $2n - 1$ thì 3 chia hết cho $2n - 1$

$$\text{Với } 2n - 1 = 1 \Rightarrow n = 1$$

$$\text{Với } 2n - 1 = 3 \Rightarrow n = 2$$

Vậy $n = 1; 2$

Câu 6. Ta có $5 + n^2 - 2n = 5 + n(n - 2)$

$$\Rightarrow 5 + n^2 - 2n \vdots (n - 2) \text{ khi } 5 \vdots (n - 2)$$

$$\Rightarrow n - 2 \in U(5) = \{-5, -1, 1, 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-3, 1, 3, 7\}$$

Câu 7. $n^2 + 4 \vdots n + 2 \Rightarrow n(n + 2) - 2(n + 2) + 8 \vdots n + 2 \Rightarrow 8 \vdots n + 2$.

Tìm được: $n = 0, 2; 6$.

Câu 8. Ta có $\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1) \vdots n-2$

$$\text{Ta có: } n+1 = [(n-2)+3]$$

$$\text{Vậy } (n+1) \vdots n-2 \text{ khi } 3 \vdots n-2 \Rightarrow n-2 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

Câu 9. Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta có $\overline{abc} + 1001 + 10n + n = \overline{abc}.n$ Suy ra $\overline{abc} \vdots n$.

Đặt $\overline{abc} = n.k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $nk + 111n = nkn$.

Chia hai vế cho $n \neq 0$ ta được $k + 111 = nk$ tức là $111 = k(n - 1)$. Như vậy k và $n - 1$ là ước của 111.

Bài toán có 4 đáp số:

k	$n - 1$	n	$\overline{abc}$
1	111	112	112
3	37	38	114
37	3	4	148
111	1	2	222

Câu 10.

Số 264 chia cho a dư 24 nên a là ước của $264 - 24 = 240$, $a > 24$

Số 363 chia cho a dư 43 nên a là ước của $363 - 43 = 320$, $a > 43$

Do a là ước chung của 240 và 320, đồng thời $a > 43$.

ƯCLN $(240, 320) = 80$ ước chung lớn hơn 43 là 80.

Vậy $a = 80$

Câu 11. Ta thấy : $398 - 38 = 360 : a$; $a > 38$.

$450 - 18 = 432 : a$; $a > 18$.

Vậy a là ước chung của 360 và 420, đồng thời $a > 38$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $432 = 2^4 \cdot 3^3$.

ƯCLN $(360, 432) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Ước chung của 360 và 432 mà lớn hơn 38 là 72.

Vậy $a = 72$.

Câu 12. Số học sinh là ước chung của $100 - 4 = 96$ và $90 - 18 = 72$, đồng thời lớn hơn 18.

Tìm được: 24 học sinh.

Câu 13. Số phần thưởng lớn nhất là ƯCLN $(128, 48, 192)$.

Đáp số: Chia được nhiều nhất thành 16 phần thưởng, mỗi phần gồm 8 vở, 3 bút chì, 12 nhãn vở.

Câu 14. $a = 3m + 2$ ($m \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 2a = 6m + 4$, chia cho 3 dư 1

$a = 5n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 2a = 10n + 6$ chia cho 5 dư 1

$a = 7p + 4$ ($p \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 2a = 14p + 8$, chia cho 7 dư 1

Do đó: $2a - 1 \in BC(3, 5, 7)$. Để a nhỏ nhất thì $2a - 1$ là BCNN $(3, 5, 7)$

BCNN $(3, 5, 7) = 1$

$2a - 1 = 105$

$2a = 106$

$a = 53$

Câu 15. Chiều dài ngắn nhất của đường chạy tính bằng mét là BCNN $(330, 75) = 1650$ gồm $1650 : 75 = 22$ chặng.**Câu 16.** Gọi số phải tìm là n .

$n + 9 \in BC(17, 25)$. Từ đó $b = 425k - 9$.

Đáp số: 416 và 841.

Câu 17. $n + 1 : 8 \Rightarrow n + 1 + 64 : 8 \Rightarrow n + 65 : 8$ (1).

$n + 3 : 31 \Rightarrow n + 3 + 62 : 31 \Rightarrow n + 65 : 31$ (2).

Từ (1) và (2): $n + 65 : BCNN(8, 31)$

$\Rightarrow n + 65 : 248$

$$\Rightarrow n = 248k - 65 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

Với $k = 3$ thì $n = 679$;

Với $k = 4$ thì $n = 927$;

Với $k = 5$ thì $n = 1175$.

Để n là số lớn nhất có ba chữ số, ta chọn $n = 927$.

Câu 18. Gọi số sách là x thì $x + 10 \in BC(10, 12, 18)$ và $715 < x < 1000$.

Đáp số: $x = 890$.

Câu 19. Gọi số giấy mỗi lớp thu được là x (kg) thì $x - 26 : 11$; $x - 25 : 10$ do đó $x - 15 \in BC(11, 10)$ ngoài ra $200 < x < 300$. Ta tìm được $x = 235$, do đó lớp 6A có 20 học sinh, lớp 6B có 22 học sinh.

Câu 20. Đồng hồ thứ nhất lấy lại giờ chính xác khi nó chạy nhanh được 12 giờ, tức là 720 phút, như vậy nó lại chỉ đúng giờ sau: $720 : 2 = 360$ (ngày).

Đồng hồ thứ hai lấy lại giờ chính xác khi nó chạy chậm được 12 giờ, tức là 720 phút, như vậy nó lại chỉ đúng giờ sau: $720 : 3 = 240$ (ngày).

Số ngày ít nhất để cả hai đồng hồ cùng chỉ giờ đúng là $BCNN(360, 240) = 720$.

Đáp số: 720 ngày.

Câu 21. a) Gọi hai số phải tìm là a và b , ta có: $a - b = 84, a = 28a', b = 28b'$ trong đó $(a', b' = 1)$, suy ra $a' - b' = 3$.

Do $300 \leq b < a \leq 400$ nên $11 \leq b' < a' \leq 15$.

Trường hợp $a' = 15, b' = 12$ loại vì trái với $(a', b') = 1$.

Trường hợp $a' = 14, b' = 11$ cho $a = 392, b = 308$.

b) Có vô số đáp số: $a = 12a', b = 12b'$ với $a' = 2n + 5, b' = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$)

Câu 22.

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b , ta có:

$$\text{Vì } UCLN(a; b) = 36 \text{ nên } \begin{cases} a = 36a_1 \\ b = 36b_1 \end{cases} \text{ và } (a_1; b_1) = 1, \text{ Mà:}$$

$$a + b = 432 \Rightarrow 36a_1 + 36b_1 = 432 \Rightarrow 36(a_1 + b_1) = 432 \text{ Nên } a_1 + b_1 = 12 \text{ Mà } (a_1; b_1) = 1 \text{ Nên}$$

ta có bảng sau:

a_1	1	5	7	11
a	36	180	252	396
b_1	11	7	5	1
b	396	252	180	36

Vậy các cặp số tự nhiên $(a; b)$ cần tìm là: $(36; 396), (180; 252), (252; 180)$, và $(396; 36)$

Câu 23. Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b , ta có:

$$\text{Vì } \text{UCLN}(a; b) = 6 \text{ nên } \begin{cases} a = 6a_1 \\ b = 6b_1 \end{cases} \text{ và } (a_1; b_1) = 1, \text{ Mà:}$$

$ab = 864 \Rightarrow 6a_1 \cdot 6b_1 = 864 \Rightarrow 36 \cdot a_1 \cdot b_1 = 864$ Nên $a_1 \cdot b_1 = 24$ Mà $(a_1; b_1) = 1$ Nên ta có bảng sau:

a_1	1	3	8	24
a	6	18	48	144
b_1	24	8	3	1
b	144	48	18	6

Câu 24. Gọi $d = \text{UCLN}(14n+3; 21n+4) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 14n+3:d \\ 21n+4:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(14n+3):d \\ 2(21n+4):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42n+9:d \\ 42n+8:d \end{cases} \Rightarrow (42n+9) - (42n+8):d \Rightarrow 1:d$$

Vậy hai số $14n+3$ và $21n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 25. Gọi $d = \text{UCLN}(2n+1; 6n+5), \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 2n+1:d \\ 6n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1):d \\ 6n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3:d \\ 6n+5:d \end{cases} \Rightarrow (6n+5) - (6n+3):d \Rightarrow 2:d \Rightarrow d \in U(2) = \{1; 2\}$$

Do $2n+1 \vdots d$, mà $2n+1$ lại là số lẻ nên $d=2$ loại, do đó $d=1$

Vậy hai số $14n+3$ và $21n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 26. Gọi số phải tìm x , thì $[14, x] = 770$.

Ta có: $770 = x \cdot k$ ($k \in \mathbb{N}$), $770 = 14 \cdot 55$, $(k, 55) = 1$, do đó k là ước của 14.

Vậy k bằng: 1, 2, 7, 14, tương ứng x bằng 770, 385, 110, 55.

Câu 27. a) Gọi $d \in \text{ƯC}(b, b-a)$ thì $a-b \vdots d, b \vdots d$, do đó $a \vdots d$. Ta có $(a, b) = 1$ nên $d = 1$.

b) Giả sử $a^2 + b^2$ và ab cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Câu 28. Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Câu 29. a) $4n-5 \vdots 13$

$$\Rightarrow 4n-5+13 \vdots 13$$

$$\Rightarrow 4n+8 \vdots 13$$

$$\Rightarrow 4(n+2) \vdots 13$$

Do $(4, 13) = 1$ nên $n+2 \vdots 13$

Đáp số: $n = 13k - 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

b) Đáp số: $n = 7k - 3 (k \in \mathbb{N}^*)$

c) $(25n+3) : 53 \Rightarrow (25n+3-53) : 53$.

Đáp số: $n = 53k + 2 (k \in \mathbb{N})$

Câu 30.

a) n không chia hết cho 3.

b) n là số chẵn.

c) n là số lẻ.

d) Giả sử $18n+3$ và $21n+7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$6(21n+7) - 7(18n+3) : d \Rightarrow 21 : d$$

Vậy $d \in \{3; 7\}$.

Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $21n+7$ không chia hết cho 3. Như vậy $(18n+3, 21n+7) \neq 1$

$$\Leftrightarrow (18n+3) : 7 \text{ (còn } 21n+7 \text{ luôn chia hết cho 7)} \Leftrightarrow (18n+3-21) : 7 \Leftrightarrow 18(n-1) : 7$$

$$\Leftrightarrow (n-1) : 7.$$

Vậy nếu $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{N})$ thì $(18n+3, 21n+7) = 1$.

Câu 31. Bài toán không yêu cầu tìm mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $(n+5, n+72) = 1$. Do đó ngoài cách giải như ở bài trên, có thể giải như sau:

Gọi $d \in \text{ƯC}(n+5, n+72)$ thì $57 : d$. Do $(n+15) : d$, $57 : d$ nên nếu tồn tại n sao cho $n+15 = 57k+1$ thì $d=1$. Nếu ta chọn $n = 57k - 14 (k=1, 2, 3, \dots)$ thì $(n+15, n+72) = 1$, rõ ràng có vô số giá trị của n .

Câu 32. a) $\text{ƯCLN}(a+b, a-b)$ bằng 2 nếu a và b cùng lẻ, bằng 1 nếu trong a và b có một số chẵn và một số lẻ.

b) 1 hoặc 29.

Câu 33.

a) Gọi $a = da'$, $b = db'$, $(a', b') = 1$. Ta có:

$$[a, b] = \frac{ab}{d} = da'b'. \text{ Theo đề bài, ta có: } da'b' + d = 55 \text{ hay } d(a'b' + 1) = 55. \text{ Như vậy } a'b' + 1$$

là ước của 55, mặt khác $a'b' + 1 \geq 2$.

Ta có lần lượt

d	$a'b'+1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
11	5	$4 = 2^2$	1	4	11	44
5	11	$10 = 2.5$	1 2	10 5	5 10	50 25
1	55	$54 = 2.3^3$	1 2	54 27	1 2	54 27

b) Giải tương tự câu a) ta được: $d(a'b'-1)=5$. Từ đó:

d	$a'b'-1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
1	5	6	6	1	6	1
			3	2	3	2
5	1	2	2	1	10	5

c) Có 6 cặp số $(1, 36), (4, 9), (5, 40), (7, 42), (14, 21), (35, 70)$.

Câu 34. a) 1; b) 1111

Câu 35.

Đặt $A=[n, n+1]$ và $B=[A, n+2]$. Áp dụng tính chất $[a, b, c] = [[a, b], c]$, ta có $B=[n, n+1, n+2]$.

Để thấy $(n, n+1)=1$, suy ra $[n, n+1]=n(n+1)$. (do $[a, b] \cdot (a, b) = ab$)

Lại áp dụng tính chất $[a; b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)}$ thế thì $[n, n+1, n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1), n+2)}$

Gọi $d=(n(n+1), n+2)$. Do $(n+1, n+2)=1$ nên $d=(n, n+2)=(n, 2)$

Xét hai trường hợp:

- Nếu n chẵn thì $d=2$, suy ra $[n, n+1, n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

- Nếu n lẻ thì $d=1$, suy ra $[n, n+1, n+2] = n(n+1)(n+2)$.

Câu 36. Gọi d là một ước chung của $3n+4$ và $5n+1$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

Ta có $3n+4:d$ và $5n+1:d$ nên $5(3n+4)-3(5n+1):d \Leftrightarrow 17:d \Rightarrow d \in \{1; 17\}$

Để $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung lớn hơn 1, ta phải có $3n+4:17$

hay $3(n-10):17$ mà $UCLN(3; 17)=1$ nên $(n-10):17$

$n-10=17k$ ($k \in \mathbb{N}$). Vì $n \in \mathbb{N}$, $n < 30 \Rightarrow -10 \leq n-10 < 20$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Với $k=0 \Rightarrow n=10$, khi đó $3 \cdot 10+4:17$ và $5 \cdot 10+1:17$ (thỏa mãn)

Với $k=1 \Rightarrow n=27$, khi đó $3 \cdot 27+4:17$ và $5 \cdot 27+1:17$ (thỏa mãn)

Vậy $n \in \{10; 27\}$.

Câu 37. Để $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên thì $2n+1:n+2$ (1)

Vì $n+2:n+2$ nên $2(n+2):n+2$ (2)

Từ (1) và (2) $[2(n+2)-(2n+1)]:n+2$

$\Rightarrow 3:n+2$

Vì $n+2$ nguyên nên $n+2 \in \{-1; -3; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-3; -5; -1; 1\}$

Vậy với $\Rightarrow n \in \{-3; -5; -1; 1\}$ thì phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là số nguyên.

Câu 38. Giả sử sau a phút (kể từ lúc 6h) thì 3 xe lại cùng xuất phát tại bến lần thứ 2. Lập luận để suy ra a là BCNN (75, 60, 50).

Tìm được $\text{BCNN}(75, 60, 50) = 300$ (phút) = 5 giờ.

Sau 5h thì 3 xe lại cùng xuất phát, lúc đó là 11h cùng ngày.

Câu 39. Giả sử $d \in \text{UCLN}(2n+1, 6n+5) \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ 6n+5 : d \end{cases} \Rightarrow 6n+5 - 3(2n+1) : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$

Vì n là số nguyên dương nên $2n+1 \not\vdots 2 \Rightarrow d \neq 2 \Rightarrow d = 1$

Vậy với mọi số nguyên dương n thì phân số $\frac{2n+1}{6n+5}$ luôn tối giản.

Câu 40. Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) Chứng tỏ rằng phân số P là phân số tối giản.

Gọi $d = \text{ƯC}(6n+5, 3n+2)$ (với $d \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow 6n+5 : d \text{ và } 3n+2 : d$$

$$\Rightarrow (6n+5) - (3n+2) \cdot 2 : d \Leftrightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số P là phân số tối giản.

b) Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất?

$$\text{Ta có: } P = \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{2(3n+2)+1}{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$$

$$\text{Với } n \in \mathbb{N} \text{ thì } 3n+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3n+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{3n+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow n = 0$

Vậy $n = 0$ thì phân số P có giá trị lớn nhất bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 41. Gọi $\text{UCLN}(a; b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = d \cdot a_1 \\ b = d \cdot b_1 \end{cases} (a_1; b_1) = 1$

$$\text{Mà : } a + 2b = 48 \Rightarrow da_1 + 2db_1 = 48 \Rightarrow d(a_1 + 2b_1) = 48 \Rightarrow d \in U(48) \quad (1)$$

Ta lại có: $3 \cdot \text{BCNN}(a; b) + \text{UCLN}(a; b) = 114$

$$\Rightarrow d + 3 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot d = 114 \Rightarrow d(1 + 3a_1 \cdot b_1) = 114 \Rightarrow d \in U(114) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d \in \text{UC}(48; 114) = \{1; 2; 3; 6\}$

$$\text{Mà : } d(1 + 3a_1 \cdot b_1) = 114 = 3 \cdot 38 \Rightarrow d : 3 \Rightarrow d = 3 \text{ hoặc } d = 6$$

$$\text{TH1 : } d = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 16 \\ 1 + 3a_1 \cdot b_1 = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 16 \\ 3a_1 \cdot b_1 = 37 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2 : } d = 6 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 8 \\ 1 + 3a_1 \cdot b_1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 8 \\ a_1 \cdot b_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 12 \\ b_1 = 3 \Rightarrow b = 18 \end{cases}$$

Vậy $a = 12$ và $b = 18$

Câu 42. Đặt $(11a + 2b, 18a + 5b) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 55a + 10b : d \\ 36a + 10b : d \end{cases} \Rightarrow 19a : d$$

$$\text{Và } \begin{cases} 198a + 36b : d \\ 198a + 55b : d \end{cases} \Rightarrow 19b : d$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 19a : d \\ 19b : d \end{cases} \Rightarrow 19 : d \text{ (vì } (a, b) = 1)$$

Vậy $d \in \{1; 9\}$

Câu 43. Ta có

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a, a + b) \\ &= (a + a + b, a + b) = (2a + b, a + b) \\ &= (2a + b, 3a + 2b) = (5a + 3b, 3a + 2b) \\ &= (5a + 3b, 2(5a + 3b) + 3a + 2b) \\ &= (5a + 3b, 13a + 8b) \end{aligned}$$

Câu 44. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $\begin{cases} (ab + bc + ca) : p \\ abc : p \end{cases}$

$$\text{Từ } abc : p \Rightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \\ c : p \end{cases}$$

$$\text{Giả sử } a : p \Rightarrow ab + ac : p \Rightarrow bc : p \Rightarrow \begin{cases} b : p \\ c : p \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với $(a, b) = 1$ hoặc $(a, c) = 1$.

Câu 45. Ta có $(a + b, a^2 - ab + b^2) = (a + b, (a + b)^2 - (a^2 - ab + b^2)) = (a + b, 3ab)$

Do $(a, b) = 1$ nên $(a + b, ab) = 1$

Vì vậy $(a + b, a^2 - ab + b^2) = (a + b, 3ab) = (a + b, 3) \Rightarrow d \in \{1; 3\}$

* Xét $d = 1$

$$\text{Khi đó } \frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ a^2-ab+b^2=73 \end{cases} \Leftrightarrow 3ab=-9$$

Điều này không xảy ra vì $a, b \in \mathbb{N}$

* Xét $d = 3$

$$\text{Khi đó } \frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=24 \\ a^2-ab+b^2=219 \end{cases} \Leftrightarrow 3ab=-9 \Leftrightarrow \begin{cases} (a;b)=(17;7) \\ (a;b)=(7;17) \end{cases}$$

Thử lại ta được hai cặp số trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 46. Đặt $d = (2^{2^n} + 1, 2^{2^n} - 1) \Rightarrow d$ lẻ.

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \dots (2^{2^m} + 1)(2^{2^m} - 1) : d \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (2^{2^n} + 1) - (2^{2^n} - 1) = 2 : d \Rightarrow d = 1 \text{ (vì } d \text{ lẻ)}$$

$$\text{Vậy } (2^{2^n} + 1, 2^{2^n} - 1) = 1$$

Câu 47. Đặt $d = (m, n)$. Khi đó tồn tại các số tự nhiên r, s sao cho $rn - sm = d$.

$$\text{Đặt } d_1 = (2^m - 1, 2^n - 1) \Rightarrow d_1 \text{ lẻ.}$$

Ta có:

$$2^n - 1 : 2^d - 1 \text{ (vì } n : d)$$

$$2^m - 1 : 2^d - 1 \text{ (vì } m : d)$$

$$\text{Do đó } d_1 : 2^d - 1$$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} 2^n - 1 : d_1 \Rightarrow 2^m - 1 : d_1 \\ 2^m - 1 : d_1 \Rightarrow 2^{sm} - 1 : d_1 \end{cases} \Rightarrow 2^m - 2^{sm} = 2^{sm} (2^{m-sm} - 1) = 2^{sm} (2^d - 1) : d_1$$

$$\text{Mà } (2, d_1) = 1 \Rightarrow 2^d - 1 : d_1$$

$$\text{Từ đó suy ra } d_1 = 2^d - 1$$

$$\text{Vậy } (2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$$

Câu 48. Giả sử $a \leq b$

$$\text{Do } \text{ƯCLN}(a, b) = 15 \Rightarrow \begin{cases} a = 15.m \\ b = 15.n \end{cases} \quad (m \leq n), (m, n) = 1,$$

$$\text{Khi đó } \text{BCNN}(a; b) = 15.m.n.$$

Do đó:

$$\text{ƯCLN}(a; b). \text{BCNN}(a; b) = (15.m.n).15 = (15m).(15n) = a.b \Rightarrow ab = 300.15 = 4500$$

$$\Rightarrow 15m.15n = 4500 \Rightarrow \begin{cases} mn = 20 \\ m \leq n \end{cases}$$

Ta có bảng:

m	n	a	b
1	20	15	300
4	5	60	75

Vậy các cặp số $(a; b)$ cần tìm là: $(15; 60)$, $(300; 75)$ và đảo ngược lại.

Câu 49. Giả sử $d = (a, a+2) \Rightarrow d \mid a$ và $d \mid a+2 \Rightarrow d \mid a+2-a \Rightarrow d \mid 2$ hoặc $d = 1$ hoặc $d = 2$.

Với a lẻ thì $(a, a+2) = 1$.

Với a chẵn thì $(a, a+2) = 2$.

Câu 50. Giả sử $d \mid (1+a+\dots+a^{m-1})$ và $d \mid (a-1)$, suy ra:

$$d \mid (a^{m-1}-1) + (a^{m-2}-1) + \dots + (a-1) + m \Rightarrow d \mid m.$$

Vậy $d \mid m$ và $d \mid a-1$.

Ngược lại, nếu $d \mid a$ và $d \mid a-1$ thì $d \mid (a^{m-1} + \dots + a + 1)$

$$\text{Vậy } (1+a+\dots+a^{m-1}, a-1) = (m, a-1)$$

Câu 51. Giả sử $d \mid a, b \mid d, c \mid d$ thì d lẻ.

$$\text{Ta có } a+b \vdots d \text{ và } a+b \vdots 2 \Rightarrow a+b \vdots 2d \text{ (do } (2, d)=1) \Rightarrow \frac{a+b}{2} \vdots d.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b+c}{2} \vdots d \text{ và } \frac{c+a}{2} \vdots d$$

$$\text{Vậy } d \text{ là ước của } \frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}.$$

$$\text{Ngược lại, giả sử } d \text{ là ước của } \frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2} \text{ thì } d \text{ là ước của } \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2} = a.$$

Tương tự $d \mid b$ và $d \mid c$.

$$\text{Vậy: } \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2} \right) = (a, b, c).$$

Câu 52. Giả sử $d = (a_1, a_2, \dots, a_{49})$, khi đó $a_1 + a_2 + \dots + a_{49} = 999 : d$, suy ra d là ước của $999 = 3^3 \cdot 37$

Vì $d \mid a_k$ ($k = 1, 2, \dots, 49$) nên $a_k \geq d, \forall k \Rightarrow 999 = a_1 + a_2 + \dots + a_{49} \geq 49d$
 $\Rightarrow d \leq \frac{99}{29} < 21$. Vậy d chỉ có thể nhận các giá trị 1, 3, 9.

Giá trị d lớn nhất bằng 9 khi $a_1 = a_2 = \dots = a_{48} = 9; a_{49} = 567$ (vì $9 \cdot 48 + 567 = 999$)

Câu 53. Giả sử $d = (11a + 2b, 18a + 5b)$, khi đó $d \mid 18a + 5b$ và $d \mid 11a + 2b$, suy ra
 $d \mid 11(18a + 5b) - 18(11a + 2b) = 19b \Rightarrow d \mid 19$ hoặc $d \mid b$.

- Nếu $d \mid b$ thì từ
 $d \mid 5(11a + 2b) - 3(18a + 5b) = a - 5b \Rightarrow d \mid a \Rightarrow d \mid (a, b) = 1 \Rightarrow d = 1$.

- Nếu $d \mid 19$ thì $d = 1$ hoặc $d = 19$.

Vậy $(11a + 2b, 18a + 5b)$ bằng 1 hoặc bằng 19.

Câu 54. Giả sử $d = (m + n, m^2 + n^2)$ khi đó $d \mid m + n$ và $d \mid m^2 + n^2$ suy ra
 $d \mid (m + n)^2 - (m^2 + n^2) = 2mn$.

$d \mid m + n$ và $d \mid 2mn$ suy ra $d \mid 2m(m + n) - 2mn = 2m^2$ và $d \mid 2n(m + n) - 2mn = 2n^2$.

Do đó $d \mid (2m^2, 2n^2) = 2(m^2, n^2) = 2 \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 2$.

Nếu m, n cùng lẻ thì $d = 2$.

Nếu m, n khác tính chẵn lẻ thì $d = 1$.

Câu 55. a) Giả sử $d = (21n + 4, 14n + 3)$, khi đó $d \mid 21n + 4$ và $d \mid 14n + 3$ suy ra
 $d \mid 2(21n + 4)$ và $d \mid 3(14n + 3) \Rightarrow d \mid 3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1 \Rightarrow d = 1$.

Vậy $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ là phân số tối giản.

b) Giả sử $d = (2n + 1, 2n^2 + 2n)$ suy ra $d \mid 2n^2 + 2n - n(2n + 1) = n$.

Từ $d \mid 2n + 1$ và $d \mid n$ suy ra $d \mid 2n + 1 - 2n = 1 \Rightarrow d = 1$.

Vậy $\frac{2n + 1}{2n^2 + 2n}$ là phân số tối giản.

Câu 56. a) Ta có: $\frac{18n+3}{21n+7} = \frac{3(6n+1)}{7(3n+1)}$. Mà $(3,7) = (3,3n+1) = (6n+1,3n+1) = 1$ nên để là phân số tối giản ta phải có $(6n+1,7) = 1$.

Mặt khác, $6n+1 = 7n - (n-1)$, do đó :

$$(6n+1,7) = 1 \Leftrightarrow (n-1,7) = 1 \Leftrightarrow n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy, với n chia cho 7 không dư 1 thì $\frac{18n+3}{21n+7}$ là phân số tối giản.

$$\text{b) Ta có } \frac{2n+3}{n+7} = 2 - \frac{11}{n+7} \text{ tối giản } \Leftrightarrow (n+7,11) = 1 \Leftrightarrow n \neq 11k-7 (k \in \mathbb{Z}),$$

Câu 57. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \leq b$.

Vì $(a,b) = 16$ nên $a = 16a_1, b = 16b_1$ với $(a_1,b_1) = 1$.

Từ $a+b=128$ suy ra $16(a_1+b_1) = 128 \Leftrightarrow a_1+b_1 = 8$. Với điều kiện $a_1 \leq b_1$ và $(a_1,b_1) = 1$ ta có $a_1 = 1, b_1 = 8$ hoặc $a_1 = 3, b_1 = 5$. Từ đó ta có $a = 16, b = 112$ hoặc $a = 48, b = 80$.

Câu 58. Ta có $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a+b); 33 = 11.3$. Vì $(a+b)$ không chia hết cho 3 nên $(\overline{ab} + \overline{ba}, 33) = 11$

Câu 59. Số có 3 chữ số tận cùng là 136 chia hết cho 8 nên có ít nhất 4 ước số dương là 1, 2, 4, 8.

Câu 60. $d \mid a, d \mid b$ thì $d \mid ma + nb, d \mid ka + lb$;

$$d \mid ma + nb, d \mid ka + lb \text{ thì } d \mid k(ma + nb) - m(ka + lb) = \pm b \Rightarrow d \mid b.$$

Tương tự : $d \mid a$.

Câu 61. Ta có $123456798 - 123456789 = 9$ nên ƯCLN phải tìm chỉ có thể là 1, 3 hoặc 9, mà tất cả các số đã cho đều chia hết cho 9 nên ƯCLN phải tìm là 9.

Câu 62.

$$d = (2a-b, a^2+ab) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a(2a+b) - (a^2+ab) = a^2 \\ d \mid b(2a+b) - 2(a^2+ab) = b^2 - 2a \end{cases} \Rightarrow d \mid (a^2, b^2) = 1 \Rightarrow d = 1$$

Câu 63.

$$a) d = (12n+1, 30n+2) \Rightarrow d \mid 5(12n+1) - 2(30n+2) = 1 \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

$$\begin{aligned} \text{b) } d &= (15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13) \Rightarrow d \mid 2(15n^2 + 8n + 6) - (30n^2 + 21n + 13) = 1 \Rightarrow d \mid 5n + 1 \\ &\Rightarrow d \mid 3n(5n + 1) - (15n^2 + 8n + 6) \Rightarrow d \mid 5n + 6 \Rightarrow d \mid (5n + 6) - (5n + 1) \Rightarrow d \mid 5 \\ &\begin{cases} d \mid 5n + 6 \\ d \mid 5 \end{cases} \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1. \end{aligned}$$

Vậy phân số $\frac{15n^2 + 8n + 6}{30n^2 + 21n + 13}$ là phân số tối giản.

Câu 64. $\frac{n+13}{n-2} = 1 + \frac{15}{n-2}$ tối giản $(15, n-2) = 1$.

Do đó $n-2$ không chia hết cho 3 và 5.

Do đó để phân số $\frac{n+13}{n-2}$ tối giản thì $n \neq 3k + 2, n \neq 5l + 2$

Câu 65. Chứng minh n lẻ là không chia hết cho 3.

Câu 66. Các số đã cho có dạng $\frac{k}{k+(n+2)}$ ($k = 7, 8, \dots, 31$). Mà $\frac{k+(n+2)}{k} = 1 + \frac{n+2}{k}$ tối giản $\Leftrightarrow (n+2, k) = 1 \Leftrightarrow n+2$ nguyên tố cùng nhau với $7, 8, \dots, 31$ và $n+2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow n+2 = 37 \Leftrightarrow n = 35$.

Câu 67. a) $a = 6, b = 60$ hoặc $a = 12, b = 30$ ($a \leq b$);

b) Các cặp số (a, b) với $a \leq b$ cần tìm là $(1; 54), (2; 27), (5; 50), (10; 25)$ và $(11; 44)$

Câu 68. $n+1: [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] = 5.7.8.9 = 2520$. Vậy $n = 2519$.

Câu 69. Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số: $1; a; b(ab+1)(2ab+1); b; a(ab+1)(2ab+1); ab+1; ab(2ab+1); 2ab+1; ab(ab+1); N; ab; (ab+1)(2ab+1); b(ab+1); a(2ab+1); a(ab+1); b(2ab+1)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì $a; b; ab+1; 2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a, b > 1 \Rightarrow ab+1 > 2$

Nếu $a; b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a = 2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1 = 4b+1$ và $ab+1 = 2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow b = 3$.

Vậy $a = 2; b = 3$.

Câu 70. Đặt $A = p^2 - pq + 2q^2$ và $B = 2p^2 + pq + q^2$. Xét các trường hợp:

+) $p = q = 2$, không thoả mãn.

+) $p = 2, q \geq 3$, khi đó

$$(A, B) = (4 - 2q + 2q^2, 8 + 2q + q^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= (2 - q + q^2, 8 + 2p + q^2) \quad (\text{vì } 8 + 2p + q^2 : 2) \\
 &= (6 + 3q, 8 + 2q + q^2) \\
 &= (2 + q, 8 + (2 + q)q), \quad (\text{vì } 8 + 2p + q^2 : 3) \\
 &= d.
 \end{aligned}$$

Suy ra d lẻ và $d \mid 8$. Do đó $d = 1$.

+) $q = 2, p \geq 3$, khi đó

$$\begin{aligned}
 (A, B) &= (p^2 - 2p + 8, 2p^2 + 2p + 4) \\
 &= (p^2 - 2p + 8, p^2 + p + 2), \quad (\text{vì } p^2 - 2p + 8 : 2) \\
 &= (3p - 6, p^2 + p + 2) \\
 &= (p - 2, p^2 + p + 2), \quad (\text{vì } p^2 + p + 2 : 3) \\
 &= (p - 2, p^2 + 4) \\
 &= (p - 2, (p - 2)^2 + 4p) \\
 &= d.
 \end{aligned}$$

Suy ra $d \mid 4p$, d lẻ và $d < p$. Do đó $d = 1$.

+) $p, q \geq 3$. Vì p, q đều là số lẻ nên $p + q$ và $p - q$ là các số chẵn. Suy ra

$A = p(p - q) + 2q^2 : 2$ và $B = 2p^2 + q(q + p) : 2$. Vậy A và B không nguyên tố cùng nhau.

Tóm lại: $p = 2, q \geq 3, q$ nguyên tố hoặc $q = 2, p \geq 3, p$ nguyên tố.

Câu 71. Gọi $(a + b, a^2 + b^2) = d \Rightarrow a + b : d$ và $a^2 + b^2 : d$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 : d \Rightarrow 2ab : d \quad \text{vì } (a, b) = 1$$

$$\Rightarrow (ab, a + b) = 1 \Rightarrow (2ab, a + b) = (2, a + b)$$

$$\Rightarrow d \text{ là ước số của } (2ab, a + b) \Rightarrow d \text{ là ước số của } (2, a + b)$$

$$\Rightarrow d \text{ là ước số của } 2 \Rightarrow d = 1 \text{ hoặc } d = 2.$$

$$\text{Nếu } d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Nếu } d = 2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 14 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Tóm lại } (a, b) = (3, 4), (4, 3)$$

Câu 72. Đặt $A = m + n$ và $B = m^2 + n^2$. Gọi d là ước chung lớn nhất của A và B với $d \geq 1$.

Khi đó ta có $A:d; B:d$ hay ta được $m+n:d; m^2+n^2:d$.

Ta lại có $A^2 - B = (m+n)^2 - (m^2+n^2) = 2mn$. Mà $(A^2 - B):d$ nên suy ra $2mn:d$.

Lại có $m+n:d$ nên $2n(m+n):d \Rightarrow 2mn+2n^2:d$

Kết hợp với $2mn:d$ ta được $2n^2:d$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $2m^2:d$.

Theo bài ra thì m và n nguyên tố cùng nhau nên m và n không cùng tính chẵn. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Trong hai số m và n có một số chẵn và một số lẻ, khi đó $m+n$ là số lẻ nên từ $m+n$ chia hết cho d ta suy ra được d là số lẻ. Từ đó ta được m^2 và n^2 cùng chia hết cho d . Mà ta lại có m và n nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d=1$.

- Trường hợp 2: Cả hai số m và n đều là số lẻ, khi đó từ $m+n$ là số chẵn nên từ $m+n$ chia hết cho d với d lớn nhất ta suy ra được d là số chẵn.

Đặt $d=2d'$, khi đó từ $2m^2:d$ và $2n^2:d$ ta được $m^2:d'$ và $n^2:d'$.

Do m và n nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d'=1$, do đó $d=2$.

Vậy ta có hai kết quả như sau:

+ Nếu trong hai số m và n có một số chẵn và một số lẻ thì $(m+n, m^2+n^2)=1$

+ Nếu cả hai số m và n cùng lẻ thì $(m+n, m^2+n^2)=2$.

Câu 73. Giả sử các số nguyên dương a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó ta có

$(4a+1, 4b-1)=1$ và $16ab+1:(a+b)$.

Ta có $(4a+1)(4b+1)=16ab+1+4(a+b):(a+b)$.

Lại có $4a+1+4b-1=4(a+b):(a+b)$. Mà $(4a+1, 4b-1)=1$.

Nếu cả hai số $4a+1$ và $a+b$ cùng chia hết cho một số nguyên tố p nào đó, thì từ $4a+1+4b-1$ chia hết cho $(a+b)$ ta suy ra được $4b-1:p$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $(4a+1, 4b-1)=1$. Từ đó suy ra $(4a+1, a+b)=1$.

Ta có $(4a+1)(4b+1):(a+b)$ và $(4a+1, a+b)=1$ nên suy ra $4b+1:(a+b)$.

Ngược lại giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $4b+1:(a+b)$

Khi đó từ $(4a+1)(4b+1):(a+b)$ ta suy được $16ab:(a+b)$.

Nếu hai số $4a+1$ và $4b-1$ cùng chia hết cho p thì p là số nguyên tố lẻ.

Ta lại có $4a+1+4b-1=4(a+b):(a+b)$, suy ra $4b+1:p$.

Do đó ta được $4b+1-(4b-1)=2:p$, điều này mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta được $(4a+1, 4b-1)=1$.

Như vậy hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $(4a+1, 4b-1)=1$ và $16ab:(a+b)$ tương đương với hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $4b+1:(a+b)$.

Chú ý là $4b+1$ là số lẻ và $4b+1 < 4(a+b)$ nên từ $4b+1:(a+b)$ ta suy ra được

$$\begin{cases} 4b+1=a+b \\ 4b+1=3(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b+1 \\ b=3a-1 \end{cases}$$

Như vậy cặp số nguyên dương $(a; b)$ là $(c; 3c-1), (3c+1; c)$ với $c \in \mathbb{N}^*$.

Câu 74. Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số: $1; a; b(ab+1)(2ab+1); b; a(ab+1)(2ab+1); ab+1; ab(2ab+1); 2ab+1; ab(ab+1); N; ab; (ab+1)(2ab+1); b(ab+1); a(2ab+1); a(ab+1); b(2ab+1)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì $a; b; ab+1; 2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a, b > 1 \Rightarrow ab+1 > 2$

Nếu $a; b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a=2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow b=3$.

Vậy $a=2; b=3$.

Câu 75. Gọi d là UCLN(m, n) suy ra m^2, n^2, mn cùng chia hết cho d^2 .

Do $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m} = \frac{m^2 + n^2 + m + n}{mn}$ là số nguyên nên $m^2 + n^2 + m + n$ cũng chia hết cho d^2 .

Suy ra $m+n$ chia hết cho $d^2 \Rightarrow m+n \geq d^2 \Rightarrow \sqrt{m+n} \geq d$.

Câu 76.a) Dễ thấy bộ số $(a, b, c) = (1, 3, 7)$ thỏa mãn đề bài

b) Đặt $S = a+b+c+ab+bc+ac$.

Từ giả thiết suy ra S chia hết cho a, b, c .

Vì a, b, c đôi một khác nhau, do đó a, b, c đồng thời là các số nguyên tố thì $S:abc$ hay $S = kabc (k \in \mathbb{N})$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b < c$.

Nếu $a=2$ thì b, c đều lẻ $\Rightarrow b+c+bc$ lẻ nên không chia hết cho 2.

Do đó $a \geq 3$ nên $b \geq 5, c \geq 7$. Từ $S = kabc (k \in \mathbb{N})$ suy ra

$$0 < k = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$$

Vậy a, b, c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Câu 77. Thay $x = 2n+1 \Rightarrow A = 4n(n+3) = 4n(n+1+2) = 4n(n+1) + 8n$

Câu 78. Ta cần tìm $\overline{ab}$; cho biết $\overline{ab} : ab$ với $1 \leq a, b \leq 9$.

$$\Leftrightarrow \overline{ab} = nab \text{ với } n \text{ là số tự nhiên khác } 0.$$

$$\Leftrightarrow 10a + b = nab \Leftrightarrow 10a = b(na - 1) \Rightarrow 10a : (na - 1)$$

Nếu $a = 1 \Rightarrow b(n-1) = 10 \Rightarrow$ có thể lập bảng để chọn:

b	1	2	5
$n-1$	10	5	2
n	11	6	3

Nếu $a \neq 1 \Rightarrow (an-1) = 1 \Rightarrow an-1$ là ước số của 10.

$$\Rightarrow an-1 \in \{1; 2; 5\} \Rightarrow an \in \{2; 3; 6\}$$

$$\Rightarrow (an-1, n) = (2; 1), (3; 1), (2; 3), (3; 2)$$

Thay (a, n) vào ta tính được b .

Ta có: $(a; b) = (2; 4), (3; 6)$

Đáp số: $\overline{ab} \in \{11; 12; 15; 24; 36\}$

CHUYÊN ĐỀ 6: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ:

1) Một số tính chất của lũy thừa:

- Nhân, chia hai lũy thừa cùng cơ số

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; m \geq n)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$$

- Lũy thừa của một lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa của một tích: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa tầng: $a^{m^n} = a^{(m^n)} \quad (m, n \in \mathbb{N})$

2) Một số công thức đặt thừa số chung

- $ab + ac + ad + \dots + ak = a(b + c + d + \dots + k)$
- $\frac{a}{x_1} + \frac{a}{x_2} + \dots + \frac{a}{x_n} = a \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$

DẠNG 1: LŨY THỪA, PHỐI HỢP CÁC PHÉP TÍNH

Bài 1: Thực hiện phép tính:

$$a, A = \frac{3^{11} \cdot 11 + 3^{11} \cdot 21}{3^9 \cdot 2^5} \cdot b, B = \frac{75 \cdot 5^4 + 175 \cdot 5^4}{20 \cdot 25 \cdot 125 - 625 \cdot 75} \quad c, C = \frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9};$$

Hướng dẫn giải

$$a, \text{ Ta có: } A = \frac{3^{11} \cdot 11 + 3^{11} \cdot 21}{3^9 \cdot 2^5} = \frac{3^{11} (11 + 21)}{3^9 \cdot 2^5} = \frac{3^{11} \cdot 32}{3^9 \cdot 32} = \frac{3^2}{1} = 9.$$

$$b, \text{ Ta có: } B = \frac{75 \cdot 5^4 + 175 \cdot 5^4}{20 \cdot 25 \cdot 125 - 625 \cdot 75} = \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 5^4 + 5^2 \cdot 7 \cdot 5^4}{2^2 \cdot 5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 - 5^4 \cdot 3 \cdot 5^2} = \frac{3 \cdot 5^6 + 7 \cdot 5^6}{2^2 \cdot 5^6 - 3 \cdot 5^6} = \frac{5^6 \cdot 10}{5^6} = 10$$

$$c, \text{ Ta có: } C = \frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{11 \cdot 2^{35} - 2^{36}} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{2^{35} (11 - 2)} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{2^{35} \cdot 9} = 2$$

Bài 2: Thực hiện phép tính:

$$a, A = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6} \quad b, B = \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} \quad c, C = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2^{16}^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 4^9 \cdot 2^{18}}$$

Hướng dẫn giải

$$a, \text{Ta có: } \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} = \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^{28}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} = \frac{2^{29}.3^{18}(10-9)}{2^{28}.3^{18}(15-14)} = \frac{2^{29}.3^{18}}{2^{28}.3^{18}} = 2$$

$$b, \text{Ta có: } B = \frac{5^{10}.7^3 - 25^5.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3} = \frac{5^{10}.7^3 - 5^{10}.7^4}{5^9.7^3 + 5^9.7^3.2^3} = \frac{5^{10}.7^3(1-7)}{5^9.7^3(1+2^3)} = \frac{5.(-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

$$c, \text{Ta có: } C = \frac{3.4.2^{16}{}^2}{11.2^{13}.4^{11} - 4^9.2^{18}} = \frac{3^2.2^{36}}{2^{35} 11 - 2} = 2$$

Bài 3: Thực hiện phép tính:

$$a, A = \frac{5.7^{11} + 7^{12}}{7^9.5^2 - 13.7^9} \quad b, B = \frac{2^{15}.7 - 2^{16}}{5.2^{15}} \quad c, C = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$$

Hướng dẫn giải

$$a, \text{Ta có: } A = \frac{5.7^{11} + 7^{12}}{7^9.5^2 - 13.7^9} = \frac{7^{11}(5+7)}{7^9 5^2 - 13} = \frac{7^{11}.12}{7^9.12} = 7^2 = 49$$

$$b, \text{Ta có: } B = \frac{2^{15}.7 - 2^{16}}{5.2^{15}} = \frac{2^{15}(7-2)}{5.2^{15}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$c, \text{Ta có: } A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} = \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^9.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} = \frac{2^{29}.3^{18}(5.2-3^2)}{2^{28}.3^{18}(5.3-7.2)} = \frac{2.1.1}{1.1.1} = 2$$

$$\text{Bài 4. Tính: } 1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24} = \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - \frac{79}{60}\right) \cdot \frac{24}{47} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1$$

$$\text{Bài 5: Tính biểu thức: } B = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{176}{187}\right).$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$B = \left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{176}{187}\right) = \frac{15}{16} + \frac{1}{17} - \frac{15}{16} + \frac{16}{17} = 1.$$

$$\text{Bài 6: Thực hiện phép tính: } A = 2^4.5 - [131 - (13-4)^2]$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = 2^4.5 - [131 - (13-4)^2] = 16.5 - (131 - 9^2) = 80 - (131 - 81) = 80 - 50 = 30.$$

Bài 7: Thực hiện phép tính:

$$a) (-8)^2 : \{25 - 18 : [(5^2 + 2^2) : 11 - 2018^0]\} \quad b) (11 \cdot 3^7 \cdot 9^7 - 9^{15}) : (2 \cdot 3^{14})^2$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a) & (-8)^2 : \{25 - 18 : [(5^2 + 2^2) : 11 - 2018^0]\} & b) & (11 \cdot 3^7 \cdot 9^{11} - 9^{15}) : (2 \cdot 3^{14})^2 \\ & = 64 : \{25 - 18 : [33 : 11 - 1]\} & & = (11 \cdot 3^7 \cdot 3^{22} - 3^{30}) : (2^2 \cdot 3^{28}) \\ & = 64 : \{25 - 18 : 2\} & & = (11 \cdot 3^{29} - 3^{30}) : (2^2 \cdot 3^{28}) \\ & = 64 : 16 = 4. & & = 3^{29} \cdot 8 : (2^2 \cdot 3^{28}) \\ & & & = 3^{29} \cdot 2^3 : (2^2 \cdot 3^{28}) = 3 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Bài 8: Thực hiện phép tính: $2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } 2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2 = 16 + 8 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 + 4 = 27$$

Bài 9: Rút gọn : $B = \frac{25^5 + 25^7 + 25^9}{5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + 5^{17} + 5^{19} + 5^{21}}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{25^5 + 25^7 + 25^9}{5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + 5^{17} + 5^{19} + 5^{21}} = \frac{5^{10} + 5^{14} + 5^{18}}{(5^{11} + 5^{15} + 5^{19}) + (5^{13} + 5^{17} + 5^{21})} = \frac{5^{10} (1 + 5^4 + 5^8)}{(1 + 5^4 + 5^8)(5^{11} + 5^{13})} \\ &= \frac{5^{10}}{5^{11} + 5^{13}} = \frac{1}{5 + 125} = \frac{1}{130} \end{aligned}$$

Bài 10: Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right)^3 : \frac{2013}{2014}$

Hướng dẫn giải

$$A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right)^3 : \frac{2013}{2014}$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right)^3 : \frac{2013}{2014}$$

$$= \left[\frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}{7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)} \right]^3 : \frac{2013}{2014} = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right)^3 : \frac{2013}{2014} = 0$$

DẠNG 2 : TÍNH ĐƠN GIẢN

Bài 1: Rút gọn : $A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{1943}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{1943}} : \frac{4 - \frac{4}{19} + \frac{4}{41} - \frac{4}{2941}}{5 - \frac{5}{19} + \frac{5}{41} - \frac{5}{2941}}$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$A = \frac{2\left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943}\right)}{3\left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943}\right)} : \frac{4\left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{41} - \frac{1}{2941}\right)}{5\left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{41} - \frac{1}{2941}\right)}$$

$$= \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}.$$

Bài 2: Thực hiện phép tính: $M = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2014}{2015}$

Hướng dẫn giải

$$M = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2014}{2015}$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2014}{2015} = \left(\frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}{7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)} \right) : \frac{2014}{2015}$$

$$= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2014}{2015} = 0$$

Bài 3: Thực hiện phép tính: $M = \frac{-1,2 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25\right)}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\left(5\frac{5}{9} - \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{36}{17}} + 0,6 \cdot 0,5 : \frac{2}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$M = \frac{-1,2 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25\right)}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\left(5\frac{5}{9} - \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{36}{17}} + 0,6 \cdot 0,5 : \frac{2}{5}$$

$$= \frac{-1,2 : 2}{0,6} + \frac{\frac{7}{4}}{\frac{119}{36} \cdot \frac{36}{17}} + 0,75 = -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

Bài 4: Thực hiện phép tính: $A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right]$

Hướng dẫn giải

Ta có:

a)
$$\left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] = \frac{2}{193} \cdot \frac{193}{17} - \frac{3}{386} \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{17} - \frac{2}{34} + \frac{33}{34} = 1$$

$$\left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right] = \frac{7}{1931} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{11}{3862} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{2} = 5 =$$

$$\Rightarrow A = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

Bài 5: Thực hiện phép tính: $M = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2014}{2015}$

Hướng dẫn giải

1)
$$M = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2014}{2015}$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2014}{2015} = \left(\frac{2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)}{7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right)} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) : \frac{2014}{2015}$$

$$= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2014}{2015} = 0$$

Bài 6: Thực hiện phép tính:
$$\frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,265 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{53}{100} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{5} - \frac{5}{4}} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)}{\frac{-53}{100} - 5\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)} + \frac{3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)}{5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{3\left(\frac{165 - 132 + 120 + 110}{1320}\right)}{\frac{-53}{100} - 5\left(\frac{-66 + 60 + 55}{660}\right)} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-53}{100} - 5 \cdot \frac{49}{660}} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-1749 - 1225}{3300}} + \frac{3}{5} = \frac{3945}{-5948} + \frac{3}{5} = \frac{-1881}{29740} \end{aligned}$$

Bài 7: Tính biểu thức:
$$B = \frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35} \end{aligned}$$

Bài 8: Thực hiện phép tính:
$$\frac{(1+2+3+\dots+100)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)(63.1,2 - 21.3,6)}{1-2+3-4+\dots+99-100}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $63.1,2 - 21.3,6 = 0 \Rightarrow \frac{(1+2+3+\dots+100)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)(63.1,2 - 21.3,6)}{1-2+3-4+\dots+99-100} = 0$

DẠNG 3 : TÍNH TỔNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN ĐƯỢC LẬP TỪ MỘT CHỮ SỐ

Tính tổng: $S = a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \dots + \underbrace{\overline{aaa\dots a}}_n$

Phương pháp:

Ta có:

$$S = a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \dots + \underbrace{\overline{aaa\dots a}}_n = a \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_n \right)$$

$$\Rightarrow 9S = a \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_n \right)$$

$$\text{Đặt } A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_n$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^n-1) \\ &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n = \underbrace{111\dots 1}_n 10 - n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a \left(\underbrace{111\dots 1}_n 10 - n \right)}{9}.$$

Bài 1: Tính tổng tự nhiên

$$\text{a, } A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{10}$$

$$\text{b, } B = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{10}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } A &= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^{10}-1) \\ &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10 = \underbrace{111\dots 1}_{10} 10 - 10 = \underbrace{111\dots 1}_9 100. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } 9B &= 9 + 99 + 999 + \dots + 9999\dots 99 \text{ (10 số 9).} \\ A &= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^{10}-1) \\ &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10 = \underbrace{111\dots 1}_{10} 10 - 10 = \underbrace{111\dots 1}_9 100. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = \frac{A}{9} = \frac{\underbrace{111\dots 1}_9 100}{9}.$$

Bài 2: Tính tổng tự nhiên

$$C = C = 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555\dots 5}_{10}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a, Ta có: } C = 5 \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{10} \right) \quad (\text{ 10 số 1})$$

$$9C = 5 \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{10} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^{10}-1) \\ &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10 = \underbrace{111\dots 1}_9 10 - 10 = \underbrace{111\dots 1}_8 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = \frac{5 \cdot \underbrace{111\dots 1}_8 100}{9} = \frac{555\dots 500}{9}$$

DẠNG 4 : TÍNH TỔNG DÃY PHÂN SỐ CÓ QUY LUẬT

1) Tính tổng: $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$

* Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = 1$

Phương pháp:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2} &= \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \\ \frac{1}{a_2 a_3} &= \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{a_{n-1} a_n} &= \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Do đó:

$$S = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}$$

Bài 1: Tính tổng : $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2004.2005}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots\dots\dots \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên ta được.

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2004} \right) - \frac{1}{2005} = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$$

Bài 2: Tính tổng : $S = \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \dots + \frac{1}{2004.2005}$

Hướng dẫn giải

Ta thấy tổng này giống hệt như tổng ở bài 1 ta dùng cách tách các số hạng như ở bài 1:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{2005} = \frac{1996}{18045} \end{aligned}$$

Nhận xét : Nếu số hạng tổng quát có dạng: $\frac{1}{n(n+1)}$

Thì ta tách như sau: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Từ đó ta có công thức tổng quát để tính tổng như sau:

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2) Tính tổng: $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$

* Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = k > 1$ thì:

Phương pháp:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{k}{a_1 a_2} &= \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \\ \frac{k}{a_2 a_3} &= \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{k}{a_{n-1} a_n} &= \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Do đó:

$$S = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right)$$

Bài 1: Tính tổng : $A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{99.101}$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2}{1.3} &= \frac{3-1}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3.5} &= \frac{5-3}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{2}{99.101} &= \frac{101-99}{99.101} = \frac{1}{99} - \frac{1}{101} \end{aligned}$$

Do đó : $B = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$

Bài 2: Tính tổng : $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2003.2005}$

Hướng dẫn giải

Cách 1

Học sinh phải nhận dạng được các số hạng đều có dạng

- Tử số của các số hạng đó là 1
- Mẫu là tích của hai số tự nhiên hơn kém nhau hai đơn vị.

Ta có thể tách như sau: $\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1.3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3-1}{1.3} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$

Tương tự: $\frac{1}{3.5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$

.....

$$\frac{1}{2003.2005} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} \right)$$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên ta được:

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2005} \right) = \frac{1002}{2005}$$

Nhận xét kết quả:

- Thừa số nhỏ nhất, lớn nhất của mẫu các số hạng là 1; 2005
- Kết quả bằng tích của hiệu các nghịch đảo thừa số nhỏ nhất và thừa số lớn nhất của mẫu với nghịch đảo đơn vị kém hơn.

Cách 2: Ta có: $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2003.2005}$

Ta thấy: $\frac{a-b}{b.a} = \frac{a}{b.a} - \frac{b}{b.a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \quad (a, b \in \mathbb{N}, a > b)$

Ta phải biến đổi sao cho tử số của tất cả các số hạng phải là khoảng cách hai thừa số dưới mẫu thì tất cả các hạng tử đều tách ra được:

$$\frac{2}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

.....

$$\frac{2}{2003.2005} = \frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2003.2005} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} \right) = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$$

Mà $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2003.2005} \Rightarrow 2S = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2003.2005} = \frac{2004}{2005}$

$$\Rightarrow S = \frac{2004}{2005} : 2 = \frac{1002}{2005}$$

Chú ý: Thông qua ví dụ trên cần phải khắc phục cho học sinh sai hay gặp:

$$\frac{1}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \quad \text{là sai}$$

Nhận xét tổng quát: $\frac{m}{b.a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ với $a - b = m$.

Bài toán tổng quát.

$$S_n = \frac{1}{a(a+m)} + \frac{1}{(a+m)(a+2m)} + \dots + \frac{1}{\{a+(n-1)m\}\{a+nm\}} \quad \text{với } m=1;2;3.. \quad n=1;2;3.$$

$$S_n = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+nm} \right)$$

Bài 3: Tính nhanh tổng sau:

a, $A = \frac{3^2}{2.5} + \frac{3^2}{5.8} + \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17}$

b, $B = \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : $A = \frac{3^2}{2.5} + \frac{3^2}{5.8} + \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17}$
 $= 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} \right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{17} \right) = 3 \cdot \frac{15}{34} = \frac{45}{34}$
 Vậy $A = \frac{45}{34}$.

b, Ta có:

$$B = 4 \left(\frac{1}{11.16} + \frac{1}{16.21} + \frac{1}{21.26} + \dots + \frac{1}{61.66} \right) \Rightarrow 5B = 4 \left(\frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + \dots + \frac{5}{61.66} \right)$$

$$5B = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{66} \right) = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{66} \right) \Rightarrow 5B = 4 \cdot \frac{55}{11.66} \Rightarrow B = \frac{4}{66} = \frac{2}{33}$$

Bài 4: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(\frac{3}{1.8} + \frac{3}{8.15} + \frac{3}{15.22} + \dots + \frac{3}{106.113} \right) - \left(\frac{25}{50.55} + \frac{25}{55.60} + \dots + \frac{25}{95.100} \right)$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $B = \frac{3}{1.8} + \frac{3}{8.15} + \frac{3}{15.22} + \dots + \frac{3}{106.113} \Rightarrow 7B = 3 \left(\frac{7}{1.8} + \frac{7}{8.15} + \frac{7}{15.22} + \dots + \frac{7}{106.113} \right)$
 $\Rightarrow 7B = 3 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{106} - \frac{1}{113} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{113} \right) = 3 \cdot \frac{112}{113} \Rightarrow B = \frac{3.112}{7.113} = \frac{48}{113}$
 và $C = \frac{25}{50.55} + \frac{25}{55.60} + \dots + \frac{25}{95.100} \Rightarrow \frac{1}{5}C = \frac{5}{50.55} + \frac{5}{55.60} + \dots + \frac{5}{95.100}$
 $\Rightarrow \frac{1}{5}C = \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow C = \frac{1}{20}$. Khi đó : $A = B - C = \frac{48}{113} - \frac{1}{20} = \frac{847}{2260}$

Bài 5: Tính nhanh: $\frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009} = A \Rightarrow A = \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$
 $\Rightarrow 10A = 9 \left(\frac{10}{9.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{10}{29.39} + \dots + \frac{10}{1999.2009} \right) = 9 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2009} \right)$
 $10A = 9 \cdot \frac{2000}{9.2009} = \frac{2000}{2009} \Rightarrow A = \frac{200}{2009}$

Bài 6: Thực hiện phép tính: $A = 3 \cdot \frac{1}{1.2} - 5 \cdot \frac{1}{2.3} + 7 \cdot \frac{1}{3.4} - \dots + 15 \cdot \frac{1}{7.8} - 17 \cdot \frac{1}{8.9}$

Hướng dẫn giải

Ta có : $A = 3 \cdot \frac{1}{1.2} - 5 \cdot \frac{1}{2.3} + 7 \cdot \frac{1}{3.4} - \dots + 15 \cdot \frac{1}{7.8} - 17 \cdot \frac{1}{8.9} = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots + \frac{15}{7.8} - \frac{17}{8.9}$
 $= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \dots + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Bài 7: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết : $A = \frac{1}{1.300} + \frac{1}{2.301} + \frac{1}{3.302} + \dots + \frac{1}{101.400}$ và

$$B = \frac{1}{1.102} + \frac{1}{2.103} + \frac{1}{3.104} + \dots + \frac{1}{299.400}$$

Hướng dẫn giải

$$299A = \frac{299}{1.300} + \frac{299}{2.301} + \dots + \frac{299}{101.400} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{300}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{301}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{302}\right) + \dots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{400}\right)$$

$$\Rightarrow 299A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{400}\right)$$

$$101B = \frac{101}{1.102} + \frac{101}{2.103} + \frac{101}{3.104} + \dots + \frac{101}{299.400}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{103}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{104}\right) + \dots + \left(\frac{1}{299} - \frac{1}{400}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{299}\right) - \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{400}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{400}\right)$$

$$\text{Khi đó : } 299A = 101B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{101}{299}$$

Bài 8: Rút gọn $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

Hướng dẫn giải

$$1.1) A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1}\right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}\right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{-49}{50}$$

3) Mẫu là các số tự nhiên liên tiếp

a) Tính tổng sau: $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Nhận xét đề bài:

- Tử các số đều là 1
- Mẫu các số hạng đều là 3 tích số tự nhiên liên tiếp.
- Số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Ta có:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right)$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right)$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được.

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Nhận xét kết quả: Nếu mẫu có 3 số tự nhiên liên tiếp thì tổng bằng tích nghịch đảo của (3-1) với hiệu nghịch đảo của tích 2 thừa số có giá trị nhỏ nhất và tích 2 thừa số có giá trị

lớn nhất: $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$

Bài 1: Tính tổng : $B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{37.38.39}$.

Hướng dẫn giải

Ta xét : $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}$; $\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}$; ; $\frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} = \frac{2}{37.38.39}$.

Tổng quát : $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1)(n+2)}$.

Do đó : $2B = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{37.38.39}$

$$= \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} \right)$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{38.39} = \frac{740}{38.39} = \frac{370}{19.19}$$

Suy ra $B = \frac{185}{741}$.

Bài 2: Tính nhanh tổng sau: $P = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{10.11.12}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } 2P = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{10.11.12} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10.11} - \frac{1}{11.12}\right)$$

$$2P = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{11.12} = \frac{65}{132} \Rightarrow P = \frac{65}{264}$$

$$\text{Tổng quát: } A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) : 2.$$

$$2) \text{ Tính tổng sau: } S_n = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Nhận xét đề bài

- Tử các số hạng là 1
- Mẫu các số hạng đều là 4 tích số tự nhiên liên tiếp.
- Số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(k+3) - k}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right] \end{aligned}$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} \right)$$

$$\frac{1}{2.3.4.5} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} \right)$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Bài 1: Tính tổng: } \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \dots + \frac{1}{27.28.29.30}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Nhận xét: } \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} = \frac{3}{1.2.3.4}, \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} = \frac{3}{2.3.4.5}, \dots,$$

$$\frac{1}{27.28.29} - \frac{1}{28.29.30} = \frac{3}{27.28.29.30}.$$

Gọi biểu thức phải tính bằng A , ta được:

$$3A = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{4059}{28 \cdot 29 \cdot 30}.$$

Vậy $A = \frac{1353}{8120}.$

c) Bài toán tổng quát

$$S_n = \frac{1}{1.2.3..m} + \frac{1}{2.3.4..(m+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)..(n+m-1)}$$

Ta có ngay $S_n = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{1.2.3..(m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)..(n+m-1)} \right)$

với $m=2;3;4;\dots$ $n=1; 2; 3;\dots$

Chú ý: Ví dụ 1: Có thể khai thác cho học sinh thấy trong tổng

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Thì $3-1=4-2=\dots=n+2-n=2$

$$\Rightarrow 2S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2S_n = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Như vậy:

$$* \frac{2m}{a(a+m)(a+2m)} = \frac{1}{a(a+m)} - \frac{1}{(a+m)(a+2m)}$$

$$* \frac{3m}{a(a+m)(a+2m)(a+3m)} = \frac{1}{a(a+m)(a+2m)} - \frac{1}{(a+m)(a+2m)(a+3m)}$$

DẠNG 5: TÍNH TỔNG TỰ NHIÊN DẠNG TÍCH

Bài 1:a) Tính tổng $A=1.2+2.3+3.4+\dots+98.99$

b) Sử dụng kết quả của câu a, hãy tính: $B=1^2+2^2+3^2+\dots+97^2+98^2$

c) Sử dụng kết quả của câu a, hãy tính: $C=1.99+2.98+3.97+\dots+98.2+99.1$

Hướng dẫn giải

a) Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của A với 3. Thừa số 3 này được viết dưới dạng $3-0$ ở số hạng thứ nhất, $4-1$ ở số hạng thứ hai, $5-2$ ở số hạng thứ ba, ..., $100-97$ ở số hạng cuối cùng. Ta có:

$$\begin{aligned} 3A &= 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 97.98.(99-96) + 98.99(100-97) \\ &= (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 97.98.99 + 98.99.100) - (0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 96.97.98 + 97.98.99) \\ &= 98.99.100 \end{aligned}$$

Suy ra $A = 323400$.

Tổng quát ta có: $1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n.(n+1)(n+2)}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 97^2 + 98^2 \\ &= 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 97(98-1) + 98(99-1) \\ &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 97.98 + 98.99) - (1 + 2 + 3 + \dots + 97.98) \\ &= A - \frac{98.99}{2} = 323400 - 4851 = 318549. \end{aligned}$$

Tổng quát: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 97^2 + 98^2$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 98.2 + 99.1 \\ &= 1.99 + 2.(99-1) + 3.(99-2) + \dots + 98.(99-97) + 99.(99-98) \\ &= (1.99 + 2.99 + 3.99 + \dots + 98.99 + 99.99) - (1.2 + 2.3 + \dots + 97.98 + 98.99) \\ &= 99.(1 + 2 + 3 + \dots + 99) - A \\ &= 99. \frac{99.100}{2} - \frac{98.99.100}{3} = \frac{99.100.101}{6} = 166650. \end{aligned}$$

Tổng quát: $1.n + 2(n-1) + 3.(n-2) + \dots + (n-1).2 + n.1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Bài 2: Tính tổng: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + 17.18.19$

Hướng dẫn giải

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + 17.18.19.(20-16)$$

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + \dots + 17.18.19.20 - 16.17.18.19$$

$$4B = 17.18.19.20$$

$$B = 17.18.19.5 = 29070.$$

Bài 3: Tính nhanh các tổng sau

a, $D = 1.4 + 2.5 + 3.6 + \dots + 100.103$

b, $E = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + 97.99 + 98.100$

Hướng dẫn giải

a, Ta có:

$$D = 1.(1+3) + 2.(2+3) + 3.(3+3) + \dots + 100.(100+3)$$

$$D = (1.1+1.3) + (2.2+2.3) + (3.3+3.3) + \dots + (100.100+100.3)$$

$$D = (1.1+2.2+3.3+\dots+100.100) + 3(1+2+3+\dots+100)$$

Đặt, $A = 1.1+2.2+3.3+\dots+100.100$ và $B = 1+2+3+4+\dots+100$

$$\text{Ta có : } A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$$

$$\Rightarrow A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 100(101-1).$$

$$\Rightarrow A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 100.101) - (1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

$$\Rightarrow D = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 100.101) + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

Đặt $C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 100.101$, Tính tổng C ta được :

$$3C = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 100.101.(102-99)$$

$$3C = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + (3.4.5 - 2.3.4) + \dots + (100.101.102 - 99.100.101)$$

$$3C = 100.101.102 - 0.1.2 = 100.101.102 \Rightarrow C = 100.101.34$$

$$B = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = (100 + 1) \cdot \frac{100}{2} = 101.50 = 5050.$$

$$\text{Vậy } D = C + B = 100.101.34 + 5050 = 348450.$$

b, Ta có:

$$E = 1(1+2) + 2(2+2) + 3(3+2) + \dots + 97(97+2) + 98(98+2)$$

$$E = (1.1+1.2) + (2.2+2.2) + (3.3+3.2) + \dots + (97.97+97.2) + (98.98+98.2)$$

$$E = (1.1+2.2+3.3+\dots+97.97+98.98) + 2(1+2+3+4+\dots+97+98)$$

Đặt $A = 1.1+2.2+3.3+\dots+98.98$ và $B = 1+2+3+4+\dots+97+98$

Tính rồi tương tự câu a rồi thay vào E.

Bài 4: Tính:
$$\frac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{3.4+6.8+9.12+12.16+15.20}$$

Hướng dẫn giải

$$3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20 = 6.1.2 + 6.2.4 + 6.3.6 + 6.4.8 + 6.5.10 = 6(1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10)$$

$$\frac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{3.4+6.8+9.12+12.16+15.20} = \frac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{6(1.2+2.4+3.6+4.8+5.10)} = \frac{1}{6}.$$

Bài 5: Biết rằng : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$. Tính tổng: $S = 2^2 + 4^2 + \dots + 20^2$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$S = (2.1)^2 + (2.2)^2 + \dots + (2.10)^2$$

$$= 2^2.1^2 + 2^2.2^2 + \dots + 2^2.10^2 = 2^2.(1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) = 2^2.385 = 1540$$

Bài 6: Không sử dụng máy tính hãy so sánh:

$$A = 2.1 + 2.3 + 2.5 + \dots + 2.99 \text{ và } B = 2.2 + 2.4 + 2.6 + \dots + 2.98 + 100$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$B = 2.2 + 2.4 + 2.6 + \dots + 2.98 + 100$$

$$A = 2.1 + 2.3 + 2.5 + \dots + 2.99$$

$$B - A = 2 + 2 + 2 + 2 + \dots + 2 + 2(50 - 99) = 2.49 + 2.(-49) = 0$$

$$\Rightarrow A = B$$

DẠNG 6: TÍNH TỔNG CÔNG THỨC

Bài 1: Tính tổng: $A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+\dots+16)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16.17}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1+2+3+4+\dots+17-1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{17.18}{2} - 1 \right) = 76. \end{aligned}$$

Bài 2: Tính tổng:

$$P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012)$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} 1) P &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{2012} \cdot \frac{2012.2013}{2} \\ &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2013}{2} = \frac{1}{2}(2+3+4+\dots+2013) \\ &= \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+2013-1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2012.2013}{2} - 1 \right) = \frac{2025077}{2} \end{aligned}$$

Bài 3: Tính: $\frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+59}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } &\frac{1}{(1+3).3} + \frac{1}{(1+4).4} + \frac{1}{(1+5).5} + \dots + \frac{1}{(1+59).59} \\ &= \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \frac{2}{5.6} + \dots + \frac{2}{59.60} = 2 \left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{59.60} \right) = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{60} \right) = 2 \left(\frac{19}{60} \right) = \frac{19}{30} \end{aligned}$$

Bài 4: Tính: $50 + \frac{50}{3} + \frac{25}{3} + \frac{20}{4} + \frac{10}{3} + \frac{100}{6.7} + \dots + \frac{100}{98.99} + \frac{1}{99}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(50 + \frac{50}{3} + \frac{25}{3} + \frac{20}{4} + \frac{10}{3} \right) + \left(\frac{100}{6.7} + \frac{100}{7.8} + \dots + \frac{100}{98.99} + \frac{100}{99.100} \right) \\ A &= 100 \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} \right) + 100 \left(\frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) \end{aligned}$$

$$A = 100 \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{100} \right) = 99$$

Bài 5: Tính: $C = -\frac{1}{3}(1+2+3) - \frac{1}{4}(1+2+3+4) - \dots - \frac{1}{50}(1+2+3+\dots+50)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{3}(1+2+3) - \frac{1}{4}(1+2+3+4) - \dots - \frac{1}{50}(1+2+3+\dots+50) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3) \cdot 3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+4) \cdot 4}{2} - \dots - \frac{1}{50} \cdot \frac{(1+50) \cdot 50}{2} \\ &= -\frac{1+3+1+4+\dots+1+50}{2} = -\frac{\left(\underbrace{1+1+\dots+1}_{48 \text{ chữ số } 1} \right) + (3+4+\dots+50)}{2} \\ &= -\frac{48 + \frac{(3+50) \cdot 48}{2}}{2} = -24 + 53.12 = 612. \end{aligned}$$

DẠNG 7: TÍNH TÍCH

Bài 1: Tính tích

a, $A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{20^2}{19.21}$

b, $B = \frac{1^2}{1.2} \cdot \frac{2^2}{2.3} \cdot \frac{3^2}{3.4} \dots \frac{10^2}{10.11}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $A = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{20.20}{19.21} = \frac{(2.3.4 \dots 20)(2.3.4 \dots 20)}{(1.2.3 \dots 19)(3.4.5 \dots 21)} = \frac{20.2}{21} = \frac{40}{21}$

b, Ta có: $B = \frac{1.1}{1.2} \cdot \frac{2.2}{2.3} \cdot \frac{3.3}{3.4} \dots \frac{10.10}{10.11} = \frac{(1.2.3 \dots 10)(1.2.3 \dots 10)}{(1.2.3 \dots 10)(2.3.4 \dots 11)} = \frac{1}{11}$

Bài 2: Tính tổng $C = \left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3+4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+2016} \right)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C &= \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2) \cdot 2}{2}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+4) \cdot 4}{2}} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2016) \cdot 2016}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{2017 \cdot 2016 - 2}{2016 \cdot 2017} = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \dots \frac{2016 \cdot 2017 - 2}{2016 \cdot 2017} \\ C &= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \dots \frac{2015 \cdot 2018}{2016 \cdot 2017} = \frac{1004}{3009} \end{aligned}$$

Bài 3: Tính: $A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) \dots \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{99} \right)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{3}{2.5} \cdot \frac{5}{2.7} \dots \frac{97}{2.99} = \frac{(1.3.5 \dots 97)}{2^{49} \cdot (3.5.7 \dots 99)} = \frac{1}{2^{49} \cdot 99}$

Bài 4: Tính:
$$\frac{\left(1 + \frac{1999}{1}\right)\left(1 + \frac{1999}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1999}{1000}\right)}{\left(1 + \frac{1000}{1}\right)\left(1 + \frac{1000}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1000}{1999}\right)}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$A = \left(\frac{2000}{1} \cdot \frac{2001}{2} \cdot \frac{2002}{3} \dots \frac{2999}{1000}\right) : \left(\frac{1001}{1} \cdot \frac{1002}{2} \cdot \frac{1003}{3} \dots \frac{2999}{1999}\right)$$

$$A = \left(\frac{2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \dots 2999}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 1000}\right) \cdot \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 1999}{1001 \cdot 1002 \dots 2999}\right) = \frac{1001 \cdot 1002 \dots 1999}{1001 \cdot 1002 \dots 1999} = 1$$

Bài 5: Tính:
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{400}\right)$$

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \dots \frac{399}{400} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \dots \frac{19 \cdot 21}{20 \cdot 20} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 19)(3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 21)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 20)(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 20)} = \frac{21}{20 \cdot 2} = \frac{21}{40}$$

Bài 6: Tính:
$$\left(1 - \frac{1}{1+2}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+n}\right)$$

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$A = \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2) \cdot 2}{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+n) \cdot n}{2}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{2 \cdot 3}\right) \left(1 - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) \left(1 - \frac{2}{4 \cdot 5}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{10}{3 \cdot 4} \cdot \frac{18}{4 \cdot 5} \dots \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \dots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1))(4 \cdot 5 \dots (n+2))}{(2 \cdot 3 \dots n)(3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+1))} = \frac{n+2}{n \cdot 3} = \frac{n+2}{3n}$$

Bài 7: Tính:

a/ $C = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right)\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2018 \cdot 2020}\right)$ b/ $B = \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$

Hướng dẫn giải

a, Ta có:

$$C = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right)\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2018 \cdot 2020}\right) = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \dots \frac{2019^2}{2018 \cdot 2019}$$

$$= \frac{(2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2019) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2019)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2019) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2018)} = 2 \cdot 2019 = 4038.$$

b, Ta có:
$$B = \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \left(\frac{5-1}{5}\right)\left(\frac{6-1}{6}\right) \dots \left(\frac{99-1}{99}\right)\left(\frac{100-1}{100}\right)$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{25}$$

Bài 8: Tính tích

$$a, D = \frac{2^2}{3} \cdot \frac{3^2}{8} \cdot \frac{4^2}{15} \cdot \frac{5^2}{24} \cdot \frac{6^2}{35} \cdot \frac{7^2}{48} \cdot \frac{8^2}{63} \cdot \frac{9^2}{80}$$

$$b, E = \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdots \frac{2499}{2500}$$

Hướng dẫn giải

$$a, D = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdots \frac{8.8}{7.9} \cdot \frac{9.9}{8.10} = \frac{(2.3.4 \dots 8.9)(2.3.4 \dots 8.9)}{(1.2.3 \dots 7.8)(3.4.5 \dots 9.10)} = \frac{9.2}{10} = \frac{9}{5}$$

$$b, E = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdots \frac{49.51}{50.50} = \frac{(2.3.4 \dots 49)(4.5.6 \dots 51)}{(3.4.5 \dots 50)(3.4.5 \dots 50)} = \frac{2.51}{50.3} = \frac{17}{25}$$

Bài 9: Tính tích:

$$a, B = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{9} - 1\right) \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{400} - 1\right)$$

$$b, C = \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{2}{7}\right) \left(1 - \frac{3}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{10}{7}\right)$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a, \text{Ta có: } B &= \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{9} - 1\right) \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{400} - 1\right) \\ &= \frac{-3}{4} \cdot \frac{-8}{9} \cdot \frac{-15}{16} \cdots \frac{-399}{400} = -\frac{3.8.15 \dots 399}{2^2.3^2.4^2 \dots 20^2} = -\frac{1.3.2.4.3.5 \dots 19.21}{2.2.3.3.4.4 \dots 20.20} \\ &= -\frac{1.2.3 \dots 19}{2.3.4 \dots 20} \cdot \frac{3.4.5 \dots 21}{2.3.4 \dots 20} = -\frac{1}{20} \cdot \frac{21}{2} = -\frac{21}{40} \end{aligned}$$

$$b, \text{Ta có: } C = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{0}{7} \cdot \frac{-1}{7} \cdot \frac{-2}{7} \cdot \frac{-3}{7} = 0$$

$$\text{Bài 10: Tính } A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2018}\right) \left(1 - \frac{1}{2019}\right)$$

Hướng dẫn giải

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2018}\right) \left(1 - \frac{1}{2019}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2017}{2018} \cdot \frac{2018}{2019} = \frac{1}{2019}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{2019}$$

Bài 11: Tính tích

$$a, A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{121} - 1\right)$$

$$b, M = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{4} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{999} + 1\right)$$

Hướng dẫn giải

$$a, \text{Ta có: } A = \frac{-3}{4} \cdot \frac{-8}{9} \cdot \frac{-15}{16} \cdots \frac{-99}{100} \cdot \frac{-120}{121} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdots \frac{9.11}{10^2} \cdot \frac{10.12}{11^2}$$

$$= \frac{1.2.3.4...10.3.4.5.6...11.12}{2^2.3^2.....11^2} = \frac{1.2.11.12}{2^2.11^2} = \frac{12}{22}.$$

$$\text{b, Ta có: } M = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{1000}{2} = 500$$

Bài 12: Tính tích

$$\text{a, } F = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdot \frac{99}{10^2}$$

$$\text{b, } N = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{1000} - 1\right)$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a, } F = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{9.11}{10.10} = \frac{(1.2.3...9)(3.4.5...11)}{(2.3.4...10)(2.3.4...10)} = \frac{1.11}{10.2}$$

$$\text{b, } N = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \cdot \frac{-999}{1000} = -\frac{1}{1000}$$

Bài 13: Tính tích

$$\text{a, } C = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{9999}{10000}$$

$$\text{b, } A = \left(\frac{1-2^2}{2^2}\right) \left(\frac{1-3^2}{3^2}\right) \left(\frac{1-4^2}{4^2}\right) \dots \left(\frac{1-2012^2}{2012^2}\right)$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a, Ta có: } C = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{99.101}{100.100} = \frac{(1.2.3...99)(3.4.5...101)}{(2.3.4...100)(2.3.4...100)} = \frac{1.101}{100.2}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } A &= \frac{-3}{2.2} \cdot \frac{-8}{3.3} \cdot \frac{-15}{4.4} \cdot \frac{1-2012^2}{2012.2012} = \frac{-1.3}{2.2} \cdot \frac{-2.4}{3.3} \cdot \frac{-3.5}{4.4} \cdot \frac{-2011.2013}{2012.2012} \\ &= -\frac{(1.2.3...2011)(3.4.5...2013)}{(2.3.4...2012)(2.3.4...2012)} = -\frac{2013}{2012.2} \end{aligned}$$

Bài 14: Tính giá trị của biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017}\right)$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \dots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \dots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017}\right) = \frac{2016}{2017} \end{aligned}$$

Bài 15: Cho $E = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+n}\right)$ và $F = \frac{n+2}{n}$, Tính $\frac{E}{F}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } E = \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2) \cdot 2}{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+n) \cdot n}{2}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \left(1 - \frac{2}{4.5}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{4}{2.3} \cdot \frac{10}{3.4} \cdot \frac{18}{4.5} \dots \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \dots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{(1.2.3 \dots (n-1))(4.5 \dots (n+2))}{(2.3 \dots n)(3.4.5 \dots (n+1))} = \frac{n+2}{n.3} = \frac{n+2}{3n}$$

Mà $\frac{n+2}{n} > \frac{n+2}{3n} \Rightarrow F > E$

Bài 16: So sánh : $V = \frac{1}{2^{20}-1}$ và $U = \frac{1.3.5 \dots 39}{21.22.23 \dots 40}$

Hướng dẫn giải

$$U = \frac{1.3.5 \dots 37.39}{(21.23.25 \dots 39)(22.24.26 \dots 40)} = \frac{1.3.5.7 \dots 37.39}{(21.23.25 \dots 39)2^{10}(11.12.13 \dots 20)}$$

$$U = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{10}(21.23 \dots 39)(11.13 \dots 19)(12.14.16.18.20)} = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{10} \cdot (11.13 \dots 39)2^5(6.7.8.9.10)}$$

$$U = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{15}(7.9.11 \dots 39) \cdot (6.8.10)} = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{15} \cdot (7.9 \dots 39) \cdot 2^5 \cdot 3.5} = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{20} \cdot 3.5.7 \dots 39} = \frac{1}{2^{20}}$$

Mà $\frac{1}{2^{20}} < \frac{1}{2^{20}-1} \Rightarrow U < V$

Bài 17: Tính nhanh:

$$C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2016.2018}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right) \left(1,08 - \frac{2}{25}\right)$$

Hướng dẫn giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

Từ đó

$$C = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdot \frac{5^2}{4.6} \dots \frac{2018^2}{2017.2019} \cdot \left(\frac{27}{25} - \frac{2}{25}\right)$$

$$= \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \dots 2018^2}{1.2.3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \dots 2017^2 \cdot 2018.2019}$$

$$= \frac{2}{2019}.$$

Bài 18: Cho $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{631}{632}$. Chứng minh rằng: $M < 0,04$.

Hướng dẫn giải

Đặt $N = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{632}{633}$.

$$\Rightarrow M \cdot N = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{631}{632}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{632}{633}\right) = \frac{1}{633}$$

Mà $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \dots; \frac{631}{632} < \frac{633}{632}$ nên $M^2 < M \cdot N \Rightarrow M < 0,39$

Vậy $M < 0,04$ (đpcm).

Bài 19. Thực hiện phép tính:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50} \right) \cdot \frac{4-3-5-7-\dots-49}{217}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1.8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50} \right) \cdot \frac{4-3-5-7-\dots-49}{217} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{43} - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5-(1+3+5+7+\dots+49)}{217} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5-(12.50+25)}{217} = \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{5-625}{7.31} = \frac{7.7.2.2.5.31}{7.2.5.5.7.31} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

DẠNG 8 : TÍNH TỔNG CÙNG SỐ MŨ

Bài 1: Tổng cùng số mũ:

a, $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2$

b, $B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 19^2 + 20^2$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : $A = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 98.98$

$$\Rightarrow A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 98(99-1)$$

$$\Rightarrow A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) - (1 + 2 + 3 + \dots + 98)$$

Đặt $B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$, Tính tổng B ta được :

$$3B = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 98.99(100-97)$$

$$3B = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + (3.4.5 - 2.3.4) + \dots + (98.99.100 - 97.98.99)$$

$$3B = 98.99.100 - 0.1.2 = 98.99.100 \Rightarrow B = \frac{98.99.100}{3}$$

$$\text{Thay vào A ta được : } A = B + \frac{98.99}{2} = \frac{98.99.100}{3} + \frac{98.99}{2}$$

b, Ta có : $B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 19^2 + 20^2 \Rightarrow B = -(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 19^2 - 20^2)$

$$B = -\left[(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 19^2 + 20^2) - 2(2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2) \right]$$

$$B = -\left[\left(\frac{20.21.22}{3} + \frac{20.21}{2} \right) - 2.2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \right]$$

$$B = -20.22.7 - 20.7 - 8\left(\frac{10.11.12}{3} + \frac{10.11}{2} \right) = -20.7.23 - 8(10.11.4 + 5.11)$$

Bài 2 : Tổng cùng số mũ :

a, $D = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$

b, $E = 11^2 + 13^2 + 15^2 + \dots + 199^2$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : $D = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{100.101.102}{3} + \frac{100.101}{2} \right) - 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2)$$

Đặt $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2 \Rightarrow A = \frac{50.51.52}{3} + \frac{50.51}{2}$, Thay vào D ta được :

$$D = 100.101.34 + 50.101 - 4(50.52.17 + 25.51)$$

b, Ta có : $E = 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + \dots + 199^2 + 200^2 - (12^2 + 14^2 + \dots + 200^2)$

Đặt $A = 11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 200^2, B = 12^2 + 14^2 + \dots + 200^2$

Tính ta được :

$$A = 11.11 + 12.12 + 13.13 + \dots + 200.200 = 11.(12-1) + 12.(13-1) + \dots + 200.(201-1)$$

$$\Rightarrow A = (11.12 - 11) + (12.13 - 12) + (13.14 - 13) + \dots + (200.201 - 200)$$

$$A = (11.12 + 12.13 + 13.14 + \dots + 200.201) - (11 + 12 + 13 + \dots + 200)$$

$$A = \left(\frac{200.201.202}{3} - \frac{10.11.12}{2} \right) - \left(\frac{211.190}{2} \right)$$

$$\text{Và } B = 2^2(6^2 + 7^2 + 8^2 + \dots + 100^2) = 4 \left(\frac{100.101.102}{3} - \frac{5.6.7}{2} \right) - \left(\frac{106.95}{2} \right)$$

Vậy $E = A - B$

Bài 3 : Tổng cùng số mũ :

a, $C = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$

b, $F = 1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + 100^2$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : $C = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)$

$$\text{Đặt } A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 10.10$$

$$A = 1.(2-1) + 2.(3-1) + 3.(4-1) + \dots + 10.(11-1)$$

$$A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 10.11) - (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = \frac{10.11.12}{3} - \frac{10.11}{2}$$

b, Ta có : $F = 1.1 + 4.4 + 7.7 + 10.10 + \dots + 100.100$

$$F = 1(4-3) + 4(7-3) + 7(10-3) + 10(13-3) + \dots + 100(103-3)$$

$$F = (1.4 - 1.3) + (4.7 - 3.4) + (7.10 - 3.7) + (10.13 - 10.3) + \dots + (100.103 - 100.3)$$

$$F = (1.4 + 4.7 + 7.10 + 10.13 + \dots + 100.103) - 3(1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 100)$$

Đặt $A = 1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots + 100.103, B = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 100$

$$\text{Tính } 9A = 1.4(9-0) + 4.7(10-1) + 7.10(13-4) + \dots + 100.103(106-97)$$

$$9A = (1.4.9 - 0.1.4) + (4.7.10 - 1.4.7) + (7.10.13 - 4.7.10) + \dots + (100.103.106 - 97.100.103)$$

$$9A = 1.4.9 + (100.103.106 - 1.4.7) \Rightarrow A = \frac{100.103.106 + 8}{9}$$

Tính B rồi thay vào F ta được : $F = A - 3B$

Bài 4 : Cho biết : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = 650$, Tính nhanh tổng sau : $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + \dots + 12^2) = 4.650$$

Bài 5 : Tổng cùng số mũ :

a, $G = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$

b, $K = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots + 99.100^2$

Hướng dẫn giải

a, Ta có :

$$G = 1.1 + 3.3 + 5.5 + 7.7 + \dots + 99.99$$

$$G = 1.(3-2) + 3.(5-2) + 5.(7-2) + 7.(9-2) + \dots + 99.(101-2)$$

$$G = (1.3-1.2) + (3.5-2.3) + (5.7-2.5) + (7.9-2.7) + \dots + (99.101-2.99)$$

$$G = (1.3+3.5+5.7+7.9+\dots+99.101) - 2(1+3+5+7+\dots+99)$$

$$\text{Đặt } A = 1.3+3.5+5.7+\dots+99.101, B = 1+3+5+7+\dots+99$$

$$\text{Tính } A \Rightarrow 6A = 1.3(6-0) + 3.5(7-1) + 5.7(9-3) + \dots + 99.101(103-97)$$

$$6A = (1.3.6-0.1.3) + (3.5.7-1.3.5) + (5.7.9-3.5.7) + \dots + (99.101.103-97.99.101)$$

$$6A = 1.3.6 + (99.101.103-1.3.5) = 99.101.103+3 \Rightarrow A = \frac{99.101.103+3}{6}$$

Tính tổng B rồi thay vào G

b, Ta có :

$$K = 1.2.2 + 2.3.3 + 3.4.4 + \dots + 99.100.100$$

$$K = 1.2(3-1) + 2.3(4-1) + 3.4(5-1) + \dots + 99.100(101-1)$$

$$K = (1.2.3-1.2) + (2.3.4-2.3) + (3.4.5-3.4) + \dots + (99.100.101-99.100)$$

$$K = (1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+99.100.101) - (1.2+2.3+3.4+\dots+99.100)$$

$$\text{Đặt } A = 1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+99.100.101, B = 1.2+2.3+3.4+\dots+99.100$$

$$\text{Tính } A \Rightarrow 4A = 1.2.3(4-0) + 2.3.4(5-1) + 3.4.5(6-2) + \dots + 99.100.101(102-98)$$

$$4A = (1.2.3.4-0.1.2.3) + (2.3.4.5-1.2.3.4) + (3.4.5.6-2.3.4.5) + \dots + (99.100.101.102-98.99.100.101)$$

$$4A = 99.100.101.102 \Rightarrow A = \frac{99.100.101.102}{4}$$

Tính B tương tự rồi thay vào K

Bài 6 : Tổng cùng số mũ :

$$\text{a, } H = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2$$

$$\text{b, } I = 1.3^2 + 3.5^2 + 5.7^2 + \dots + 97.99^2$$

Hướng dẫn giải

a, Ta có :

$$H = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2) = 4.A$$

$$A = 1.1+2.2+3.3+4.4+\dots+50.50$$

$$A = 1.(2-1) + 2.(3-1) + 3.(4-1) + 4.(5-1) + \dots + 50.(51-1)$$

$$A = (1.2-1) + (2.3-2) + (3.4-3) + \dots + (50.51-50)$$

$$A = (1.2+2.3+3.4+\dots+50.51) - (1+2+3+\dots+50)$$

$$\text{Tính tổng A ta được : } A = \frac{50.51.51}{3} - \frac{50.51}{2}, \text{ Thay vào H ta được}$$

b, Ta có :

$$I = 1.3^2 + 3.5^2 + 5.7^2 + \dots + 97.99^2 \Rightarrow I = 1.3.3+3.5.5+5.7.7+\dots+97.99.99$$

$$I = 1.3(5-2) + 3.5(7-2) + 5.7(9-2) + \dots + 97.99(101-2)$$

$$I = (1.3.5-1.3.2) + (3.5.7-3.5.2) + (5.7.9-5.7.2) + \dots + (97.99.101-97.99.2)$$

$$I = (1.3.5+3.5.7+5.7.9+\dots+97.99.101) - 2(1.3+3.5+5.7+\dots+97.99)$$

$$\text{Đặt } A = 1.3.5+3.5.7+5.7.9+\dots+97.99.101, B = 1.3+3.5+5.7+\dots+97.99$$

Ta có :

$$8A = 1.3.5.8+3.5.7(9-1)+5.7.9(11-3)+\dots+97.99.101(103-95)$$

$$8A = 1.3.5.8 + (3.5.7.9 - 1.3.5.7) + (5.7.9.11 - 3.5.7.9) + \dots + (97.99.101.103 - 95.97.99.101)$$

$$8A = 1.3.5.8 + 97.99.101.103 - 1.3.5.7 = 97.99.101.103 - 15 \Rightarrow A = \frac{97.99.101.103 - 15}{8}$$

Tương tự tính B rồi thay vào I

Bài 7: Biết : $1^3 + 2^3 + \dots + 10^3 = 3025$, Tính $A = 2^3 + 4^3 + \dots + 20^3$

Hướng dẫn giải

$$A = 2^3 (1^3 + 2^3 + \dots + 10^3)$$

Bài 8: Cho biết: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = 650$, Tính nhanh tổng sau: $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2 = 2^2 (1^2 + 2^2 + \dots + 12^2) = 4.650$$

DẠNG 9: TỔNG CÙNG CƠ SỐ

Để giải các bài toán thuộc dạng này chúng ta dùng phương pháp giải phương trình (làm trôi).

Tính tổng dạng: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ (1)

Phương pháp:

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số **a** ta được.

$$aS = a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{n+1}. \quad (2)$$

Bước 2: Lấy (2) trừ (1) vế theo vế được:

$$aS - S = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

1) Tính tổng dãy có cơ số lớn hơn 1.

Bài 1: Tổng cùng cơ số:

a, $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100}$

b, $B = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2009}$

Hướng dẫn giải

a, Ta thấy mỗi số hạng sau gấp số hạng liền trước nó "3" lần .

Ta có :

$$\begin{aligned} 3S &= 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100} + 3^{101} \\ \Rightarrow 3A - A &= 2A = (3 - 3) + (3^2 - 3^2) + \dots + (3^{2000} - 3^{2000}) + (3^{2001} - 1) \\ \Rightarrow 2S &= 3^{101} - 1 \\ \Rightarrow S &= \frac{3^{101} - 1}{2} \end{aligned}$$

b, Ta có : $2^2 B = 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2009} + 2^{2011}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4B - B &= 3B = (2^3 - 2^3) + (2^5 - 2^5) + \dots + (2^{2009} - 2^{2009}) + (2^{2011} - 2) \\ \Rightarrow 3B &= 2^{2011} - 2 \Rightarrow B = \frac{2^{2011} - 2}{3} \end{aligned}$$

Bài 2: Tổng cùng cơ số:

a) $M = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2018} + 5^{2019}$.

b) $C = 5 + 5^3 + 5^5 + 5^7 + \dots + 5^{101}$

Hướng dẫn giải

a, $M = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2018} + 5^{2019}$

$$5M = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2019} + 5^{2020}$$

$$5M - M = (5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2019} + 5^{2020})$$

$$-(5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2018} + 5^{2019})$$

$$4M = 5^{2020} - 1 \Rightarrow M = \frac{5^{2020} - 1}{4}$$

b, Ta có : $5^2 C = 5^3 + 5^5 + 5^7 + \dots + 5^{101} + 5^{103}$

$$\Rightarrow 25C - C = 24C = (5^3 - 5^3) + (5^5 - 5^5) + \dots + (5^{101} - 5^{101}) + (5^{103} - 5)$$

$$\Rightarrow 24C = 5^{103} - 5 \Rightarrow C = \frac{5^{103} - 5}{24}$$

Bài 3: Tổng cùng cơ số:

a, $B = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2018} + 7^{2019}$

b, $F = 1 + 5^2 + 5^4 + 5^6 + \dots + 5^{2016}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : Ta có $B = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2018} + 7^{2019}$ và $7B = 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2019} + 7^{2020}$

Khi đó $7B - B = 7^{2020} - 7$ suy ra $B = \frac{7^{2020} - 7}{6}$.

b, Ta có : $5^2 F = 5^2 + 5^4 + 5^6 + \dots + 5^{2016} + 5^{2018}$

$$25F - F = 24F = (5^2 - 5^2) + (5^4 - 5^4) + \dots + (5^{2016} - 5^{2016}) + (5^{2018} - 1)$$

$$24F = 5^{2018} - 1 \Rightarrow F = \frac{5^{2018} - 1}{24}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính: $A = 2^{100} - 2^{99} - 2^{99} - \dots - 2^2 - 2 - 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A = 2^{100} - (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$

$$B = 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1 \Rightarrow 2B = 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2$$

$$\Rightarrow 2B - B = (2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2) - (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

$$\Rightarrow B = 2^{100} - 1$$

$$\text{Vậy } A = 2^{100} - B = 2^{100} - (2^{100} - 1) = 2^{100} - 2^{100} + 1 = 1$$

Bài 4: Tổng cùng cơ số: $G = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2016}$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$2^2 G = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2016} + 2^{2018}$$

$$4G - G = 3G = (2^2 - 2^2) + (2^4 - 2^4) + \dots + (2^{2016} - 2^{2016}) + (2^{2018} - 1) \Rightarrow 3G = 2^{2018} - 1 \Rightarrow G = \frac{2^{2018} - 1}{3}$$

Bài 5: Tổng cùng cơ số:

a, $M = 2^{50} - 2^{49} - 2^{48} - \dots - 2^2 - 2$

b, $N = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3^1 + 1$

Hướng dẫn giải

a, Ta có :

$$M = 2^{50} - (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{48} + 2^{49})$$

Đặt $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{48} + 2^{49}$, Tính A ta được :

$$A = 2^{50} - 2, \text{ Thay vào M ta được :}$$

$$M = 2^{50} - A = 2^{50} - (2^{50} - 2) = 2$$

b, Ta có :

$$N = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 9^{98} - 9^{99} + 3^{100}$$

$$\Rightarrow 3N = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100} + 3^{101}$$

$$\Rightarrow N + 3N = (3 - 3) + (3^2 - 3^2) + (3^3 - 3^3) + \dots + (3^{100} - 3^{100}) + 3^{101} + 1$$

$$4N = 3^{101} + 1 \Rightarrow N = \frac{3^{101} + 1}{4}$$

Bài 6: Tổng cùng cơ số : $I = 1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 2I &= 2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{64} \\ \Rightarrow 2I - I &= (2^3 - 2^2) + (2^4 - 2^3) + \dots + (2^{64} - 2^{63}) + (2^{64} + 2 - 1) \Rightarrow I = 2^{64} + 1 \end{aligned}$$

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức: $B = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } B &= 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008} \Rightarrow 2B = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2009} \\ \Rightarrow 2B + B &= 3B = 1 + 2^{2009} \Rightarrow B = \frac{2^{2009} + 1}{3} \end{aligned}$$

Bài 8: Tính $A = 2000(2001^9 + 2001^8 + \dots + 2001^2 + 2001) + 1$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt : } B &= 2001 + 2001^2 + 2001^3 + \dots + 2001^9 \Rightarrow 2001B = 2001^2 + 2001^3 + \dots + 2001^{10} \\ \Rightarrow 2001B - B &= 2000B = 2001^{10} - 2001, \text{ Khi đó :} \\ A &= 2000B + 1 = 2001^{10} - 2001 + 1 = 2001^{10} - 2000 \end{aligned}$$

Bài 9: Cho $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$, Tính 2010^H

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } H = 2^{2010} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008} + 2^{2009}). \text{ Đặt : } A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2009}$$

Tính tổng A ta được : $A = 2^{2010} - 1$, Thay vào H ta được :

$$H = 2^{2010} - (2^{2010} - 1) = 1 \Rightarrow 2010^H = 2010$$

Bài 10: Tổng cùng cơ số : $H = 1 + 2.6 + 3.6^2 + 4.6^3 + \dots + 100.6^{99}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 6H &= 6 + 2.6^2 + 3.6^3 + 4.6^4 + \dots + 100.6^{100} \\ H - 6H &= -5H = (2.6 - 6) + (3.6^2 - 2.6^2) + (4.6^3 - 3.6^3) + \dots + (100.6^{99} - 99.6^{99}) + (1 - 100.6^{100}) \\ -5H &= 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{99} + (1 - 100.6^{100}) \\ \text{Đặt } A &= 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{99}, \text{ Tính A ta được :} \\ A &= \frac{6^{100} - 6}{5}, \text{ Thay vào H ta được :} \\ -5H &= A + (1 - 100.6^{100}) = \frac{6^{100} - 6}{5} + 1 - 100.6^{100} = \frac{6^{100} - 6 + 5 - 500.6^{100}}{5} = -\frac{499.6^{100} + 1}{5} \\ \Rightarrow H &= \frac{499.6^{100} + 1}{25} \end{aligned}$$

2) Tính tổng dãy có cơ số bé hơn 1.

Bài 1. Tính tổng sau $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2005}} \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta thấy mỗi số hạng liên sau của tổng đều kém số hạng liên trước của nó "2" lần

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} \quad (2)$$

Trừ vế với vế của (2) cho (1) ta được: $S = 1 - \frac{1}{2^{2005}} = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2005}}$

Cách 2: Ta có: $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2006}} \quad (3)$

Trừ vế với vế của (1) cho (3) ta được:

$$S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2006}} \Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2006}} \Rightarrow S = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2005}}.$$

Bài 2. Tính nhanh: $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $3A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7} \quad (1)$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}. \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) được: $2A = 1 - \frac{1}{3^8} = 1 - \frac{1}{6561} = \frac{6560}{6561}.$

Do đó: $A = \frac{3280}{6561}.$

Bài 3: Tính tổng cơ số: $A = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{100}}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $\frac{1}{7}A = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{101}}$

$$A - \frac{1}{7}A = \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^2}\right) + \left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{7^{100}} - \frac{1}{7^{100}}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7^{101}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{6}{7}A = \frac{7^{100} - 1}{7^{101}} \Rightarrow A = \frac{7^{100} - 1}{6 \cdot 7^{100}}$$

Bài 4: Tính tổng cơ số: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{20}}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{3}B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{3^{21}}$

$$B - \frac{1}{3}B = \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^{20}} - \frac{1}{3^{20}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{21}}\right) \Rightarrow \frac{2}{3}B = \frac{3^{20} - 1}{3^{21}} \Rightarrow B = \frac{3^{20} - 1}{2 \cdot 3^{20}}$$

Bài 5: Tính tổng cơ số

a, $D = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2017}$

b, $E = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $D = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{2016}} - \frac{1}{7^{2017}}$

$$\frac{1}{7}D = \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{2017}} - \frac{1}{7^{2018}}$$

$$D + \frac{1}{7}D = \left(\frac{-1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7^2} + \frac{-1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{7^{2017}} + \frac{1}{7^{2017}}\right) + \left(1 - \frac{1}{7^{2018}}\right)$$

$$\frac{8}{7}D = \frac{7^{2018} - 1}{7^{2018}} \Rightarrow D = \frac{7^{2018} - 1}{8 \cdot 7^{2018}}$$

b, Ta có: $\frac{1}{3}E = \frac{-1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{51}} - \frac{1}{3^{52}}$

$$E + \frac{1}{3}E = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{-1}{3^2}\right) + \left(\frac{-1}{3^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{3^{51}} + \frac{1}{3^{51}}\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{-1}{3^{52}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3}E = -\frac{3^{51} + 1}{3^{52}} \Rightarrow E = -\frac{3^{51} + 1}{4 \cdot 3^{51}}$$

Bài 6: Tính tổng cơ số $G = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^7} + \dots + \frac{3}{5^{100}}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $G = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^7} + \dots + \frac{3}{5^{100}} \quad G = 3 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \right)$

Đặt $A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \Rightarrow \frac{1}{5^3}A = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^{10}} + \dots + \frac{1}{5^{103}}$

$$A - \frac{1}{125}A = \left(\frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^4}\right) + \left(\frac{1}{5^7} - \frac{1}{5^7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{5^{100}} - \frac{1}{5^{100}}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{103}}\right)$$

$$\frac{124A}{125} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^{103}} = \frac{5^{102} - 1}{5^{103}} \Rightarrow A = \frac{5^{102} - 1}{5^{100} \cdot 124}$$

Bài 7: Tính tổng cơ số

a, $K = \frac{200 - \left(3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{100}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}} = 2$

b, $I = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $TS = \left(2 - \frac{2}{3}\right) + \left(2 - \frac{2}{4}\right) + \left(2 - \frac{2}{5}\right) + \dots + \left(2 - \frac{2}{100}\right) + 1$

$$TS = \frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{8}{5} + \dots + \frac{198}{100} + \frac{2}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} \right) = 2 \cdot MS \Rightarrow K = \frac{TS}{MS} = \frac{2MS}{MS} = 2$$

b, Ta có: $I = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow \frac{1}{2}I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{101}}$

$$\Rightarrow I - \frac{1}{2}I = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^{101}}\right)$$

$$\frac{1}{2}I = \frac{2^{101} - 1}{2^{101}} \Rightarrow I = \frac{2^{101} - 1}{2^{100}}$$

Bài 8: Tính tổng cơ số: $C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có : $\frac{1}{2^2}C = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{101}}$

$$C - \frac{1}{4}C = \frac{3}{4}C = \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5}\right) + \left(\frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{101}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}C = \frac{2^{100} - 1}{2^{101}} \Rightarrow C = \frac{2^{100} - 1}{3 \cdot 2^{99}}$$

Bài 9: Tính tổng cơ số: $H = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2017}{3^{2017}}$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{1}{3}H = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \dots + \frac{2016}{3^{2017}} + \frac{2017}{3^{2018}}$

$$H - \frac{1}{3}H = \left(\frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{3}{3^3} - \frac{2}{3^3}\right) + \left(\frac{4}{3^4} - \frac{3}{3^4}\right) + \dots + \left(\frac{2017}{3^{2017}} - \frac{2016}{3^{2017}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2017}{3^{2018}}\right)$$

$$\frac{2}{3}H = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} + \frac{1}{3} - \frac{2017}{3^{2018}}$$

Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$, Tính A rồi thay vào H

Bài 10: Tính tổng cơ số: $F = 1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{2}F = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{5}{2^6} + \dots + \frac{99}{2^{100}} + \frac{100}{2^{101}}$

$$F - \frac{1}{2}F = \left(\frac{4}{2^4} - \frac{3}{2^4}\right) + \left(\frac{5}{2^5} - \frac{4}{2^5}\right) + \dots + \left(\frac{100}{2^{100}} - \frac{99}{2^{100}}\right) + \left(1 + \frac{3}{2^3} - \frac{1}{2} - \frac{100}{2^{101}}\right)$$

$$\frac{1}{2}F = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{100}{2^{101}}\right)$$

Đặt $A = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$. Tính A rồi thay vào F

DẠNG 10: TÍNH ĐƠN GIẢN

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = -37 + 54 + (-70) + (-163) + 246.$

b) $B = 125 \cdot (-61) \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

c) $C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - \dots + 2014 - 2015 - 2016 + 2017 + 2018.$

Hướng dẫn giải

a) $A = -37 + 54 + (-70) + (-163) + 246 = (54 + 246) + [(-37) + (-163)] + (-70)$
 $= 300 + (-200) + (-70) = 30.$

Vậy $A = 30.$

b) $B = 125 \cdot (-61) \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$$= 125.(-8).(-61).1 = 61000.$$

Vậy $B = 61000$.

c) $C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - \dots + 2014 - 2015 - 2016 + 2017 + 2018$

$$= 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (2014 - 2015 - 2016 + 2017) + 2018$$

$$= 1 + 2018 = 2019.$$

Vậy $C = 2019$.

Bài 2: Tính hợp lí: $B = \frac{51.125 - 51.42 - 17.150}{3 + 6 + 9 + \dots + 99}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $A = 51.125 - 51.42 - 17.150$; $C = 3 + 6 + 9 + \dots + 99$.

$$\begin{aligned} A &= 51.125 - 51.42 - 17.150 = 51.125 - 51.42 - 17.3.50 \\ &= 51.125 - 51.42 - 51.50 = 51.(125 - 42 - 50) = 51.33. \end{aligned}$$

$$C = 3 + 6 + 9 + \dots + 99$$

Số các hạng tử của C : $(99 - 3) : 3 + 1 = 33$.

$$\text{Do đó: } C = 3 + 6 + 9 + \dots + 99 = 33. \left(\frac{99 + 3}{2} \right) = 33.51.$$

$$\text{Vậy } B = \frac{51.125 - 51.42 - 17.150}{3 + 6 + 9 + \dots + 99} = \frac{A}{C} = \frac{51.33}{33.51} = 1.$$

Bài 3: Tính bằng cách hợp lý nhất nếu có thể

a) $78. -23 + 37. -78 + 40. -78$

b) $-1\frac{5}{7}.15 + \frac{2}{7}. -15 + -105. \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} \right)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} 78. -23 + 37. -78 + 40. -78 &= -78.23 + -78.37 + -78.40 = -78.23 + 37 + 40 \\ &= -78.100 = -7800 \end{aligned}$$

b) $-1\frac{5}{7}.15 + \frac{2}{7}. -15 + -105. \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} \right)$

$$= -15. \frac{12}{7} + -15. \frac{2}{7} + -105. \frac{1}{105} = -15. \left(\frac{12}{7} + \frac{2}{7} \right) + -1 = -15.2 - 1 = -31$$

Bài 3: Tính bằng cách hợp lý nhất nếu có thể

$$B = 40. \left(\frac{171717}{303030} + \frac{1717171}{424242} + \frac{1717171}{565656} \right)$$

Hướng dẫn giải

$$B = 40. \left\{ \frac{171717}{303030} + \frac{1717171}{424242} + \frac{1717171}{565656} \right\}$$

$$B = 40. \left\{ \frac{17.10101}{30.10101} + \frac{17.10101}{42.10101} + \frac{17.10101}{56.10101} \right\}$$

$$B = 40. \left(\frac{17}{30} + \frac{17}{42} + \frac{17}{56} \right)$$

$$B = 40.17 \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} \right)$$

$$B = 40.17 \left(\frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} \right)$$

$$B = 40.17 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right)$$

$$B = 40.17. \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right)$$

$$B = 40.17. \frac{3}{40}$$

$$B = 51$$

Bài 4: Rút gọn $B = \frac{25^5 + 25^7 + 25^9}{5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + 5^{17} + 5^{19} + 5^{21}}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{25^5 + 25^7 + 25^9}{5^{11} + 5^{13} + 5^{15} + 5^{17} + 5^{19} + 5^{21}} = \frac{5^{10} + 5^{14} + 5^{18}}{(5^{11} + 5^{15} + 5^{19}) + (5^{13} + 5^{17} + 5^{21})} = \frac{5^{10}(1 + 5^4 + 5^8)}{(1 + 5^4 + 5^8)(5^{11} + 5^{13})} \\ &= \frac{5^{10}}{5^{11} + 5^{13}} = \frac{1}{5 + 125} = \frac{1}{130} \end{aligned}$$

Bài 5: Thực hiện phép tính: $A = \frac{2.3.5 + 4.9.25 + 6.9.35 + 10.21.40}{2.3.7 + 4.9.35 + 6.9.49 + 10.21.56}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2.3.5 + 4.9.25 + 6.9.35 + 10.21.40}{2.3.7 + 4.9.35 + 6.9.49 + 10.21.56} \\ &= \frac{2.3.5 + 2.3.5.2.3.5 + 2.3.5.3.3.7 + 2.3.5.5.7.8}{2.3.7 + 2.3.7.2.3.5 + 2.3.7.3.3.7 + 2.3.7.5.7.8} \\ &= \frac{2.3.5(1 + 2.3.5 + 3.3.7 + 5.7.8)}{2.3.7(1 + 2.3.5 + 3.3.7 + 5.7.8)} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Bài 6: Thực hiện phép tính:

a, $\frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35}$

b, $\frac{1.7.9 + 3.21.27 + 5.35.45 + 7.49.63}{1.3.5 + 3.9.15 + 5.15.25 + 7.21.35}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $\frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35} = \frac{1.2.3(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)}{1.3.5(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)} = \frac{1.2.3}{1.3.5} = \frac{2}{5}$

$$b, \text{Ta có: } \frac{1.7.9+3.21.27+5.35.45+7.49.63}{1.3.5+3.9.15+5.15.25+7.21.35} = \frac{1.7.9(1+3.3.3+5.5.5+7.7.7)}{1.3.5(1+3.3.3+5.5.5+7.7.7)} = \frac{1.7.9}{1.3.5} = \frac{21}{5}$$

Bài 7: Thực hiện phép tính: $\frac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{3.4+6.8+9.12+12.16+15.20}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1.2+2.4+3.6+4.8+5.10}{3.4+6.8+9.12+12.16+15.20} = \frac{1.2(1+2.2+3.3+4.4+5.5)}{3.4(1+2.2+3.3+4.4+5.5)} = \frac{1.2}{3.4} = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{2.3+4.6+6.9+8.12}{3.4+6.8+9.12+12.16}$$

Bài 8: Tính giá trị của biểu thức sau: $B = \frac{2a}{5b} + \frac{5b}{6c} + \frac{6c}{7d} + \frac{7d}{2a}$ biết $\frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a}$

và $a, b, c, d \neq 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } B = \frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a} = k \Rightarrow \frac{2a}{5b} \cdot \frac{5b}{6c} \cdot \frac{6c}{7d} \cdot \frac{7d}{2a} = k^4 = 1 \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow B = \pm 4. 1 \Rightarrow B =$$

± 4

Bài 9: Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{a^2m - a^2n - b^2n + b^2m}{a^2 + b^2}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{a^2(m-n) + b^2(m-n)}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)(m-n)}{(a^2 + b^2)} = m - n$$

Bài 10: Thực hiện phép tính: $\frac{(ab+bc+cd+da)abcd}{(c+d)(a+b)+(b-c)(a-d)}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } MS = ca + cb + da + bd + ab - bd - ca + cd = (ab + bc + cd + da)$$

$$\text{Khi đó: } \frac{TS}{MS} = \frac{(ab+bc+cd+da)abcd}{(ab+bc+cd+da)} = abcd$$

Bài 8: Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+bx)}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\ &= \frac{a(-x-y) + b(-x-y) - a(b-x) + y(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\ &= \frac{-ax - ay - bx - by - ab + ax + by - xy}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\ &= \frac{-ay - bx - ab - xy}{abxy(xy+ay+ab+by)} = \frac{-xy + ay + ab + by}{abxy(xy+ay+ab+by)} = \frac{-1}{abxy} \end{aligned}$$

Bài 9: Tính tổng

$$a, A = \frac{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2004}}{1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{2000}}$$

$$b, B = \frac{1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}}{1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100}}$$

Hướng dẫn giải

a, Ta có:

$$A = \frac{(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9) + \dots + (2^{2000} + 2^{2001} + 2^{2002} + 2^{2003} + 2^{2004})}{1 + 2^5 + 2^{10} + 2^{15} + \dots + 2^{2000}}$$

$$A = \frac{(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{2000}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)}{1 + 2^5 + 2^{10} + 2^{15} + \dots + 2^{2000}}$$

$$A = \frac{(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{2000})}{(1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{2000})} = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

b, Ta có: $M = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$

$$\Rightarrow 5M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{101} \Rightarrow 5M - M = 4M = 5^{101} - 1 \Rightarrow M = \frac{5^{101} - 1}{4}$$

và $N = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100}$

$$\Rightarrow 4N = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{101} \Rightarrow 4N - N = 3N = 4^{101} - 1 \Rightarrow N = \frac{4^{101} - 1}{3}$$

Khi đó: $B = \frac{M}{N}$

Bài 11: Tính tổng: $A = \frac{101 + 100 + 99 + \dots + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots - 2 + 1}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $TS = \frac{(1 + 101) \cdot 101}{2} = 101 \cdot 51 = 5151$

$$MS = (101 - 100) + (99 - 98) + \dots + (3 - 2) + 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = 51.$$

Khi đó: $A = \frac{TS}{MS} = \frac{51 \cdot 101}{51} = 101$

Bài 12: Cho x là tổng của tất cả các số nguyên có hai chữ số, y là số nguyên âm lớn nhất. Hãy tính giá trị của biểu thức: $A = 2020 \cdot x^{2018} - 2019 \cdot y^{2017}$.

Hướng dẫn giải

Vì x là tổng của tất cả các số nguyên có hai chữ số nên:

$$x = (-10) + (-11) + \dots + (-99) + 10 + 11 + \dots + 99$$

$$= [(-10) + 10] + [(-11) + 11] + \dots + [(-99) + 99] = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

y là số nguyên âm lớn nhất nên: $y = -1$. Do đó:

$$A = 2020 \cdot x^{2018} - 2019 \cdot y^{2017} = 2020 \cdot 0^{2018} - 2019 \cdot (-1)^{2017} = 0 - 2019 \cdot (-1) = 2019.$$

DẠNG 11: TÍNH TỈ SỐ CỦA HAI TỔNG

Bài 1: Thực hiện phép tính: $C = \frac{\frac{2010}{1} + \frac{2009}{2} + \frac{2008}{3} + \dots + \frac{1}{2010}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\frac{2010}{1} + \frac{2009}{2} + \frac{2008}{3} + \dots + \frac{1}{2010}$
 $= \left(\frac{2009}{2} + 1\right) + \left(\frac{2008}{3} + 1\right) + \left(\frac{2007}{4} + 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{2010} + 1\right) + 1$
 $= \frac{2011}{2} + \frac{2011}{3} + \frac{2011}{4} + \dots + \frac{2011}{2010} + \frac{2011}{2011}$
 $= 2011 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2011} \right)$

Do đó $C = \frac{\frac{2010}{1} + \frac{2009}{2} + \frac{2008}{3} + \dots + \frac{1}{2010}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011}} = \frac{2011 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2011} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011}} = 2011$

Bài 2: Tính giá trị các biểu thức :

a) $A = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}}{\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}}$; b) $B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \dots + \frac{1}{99}}$

Hướng dẫn giải

a) Ghép các phân số ở số bị chia thành từng cặp để MC giống mẫu của các phần số tương ứng ở số chia. Biến đổi số bị chia : cộng từng cặp các phân số cách đều hai đầu ta được :

$$\left(1 + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{97}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{95}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{51}\right) = \frac{100}{1.99} + \frac{100}{3.97} + \frac{100}{5.95} + \dots + \frac{100}{49.51}.$$

Biểu thức này gấp 50 lần số chia. Vậy $A = 50$.

b) Biến đổi số chia : viết các phần tử thành hiệu : $100 - 1, 100 - 2, \dots, 100 - 99$.

số chia bằng : $\frac{100-1}{1} + \frac{100-2}{2} + \frac{100-3}{3} + \dots + \frac{100-99}{99}$

$$= \left(\frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{99} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{99}{99} \right)$$

$$= 100 + 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) - 99$$

$$1 + 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) = 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right).$$

Biểu thức này bằng 100 lần số bị chia. Vậy $B = \frac{1}{100}$.

Bài 3:a) Tính $D = \frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+98)}{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}$

b*) Chứng minh rằng biểu thức E có giá trị bằng $\frac{1}{2}$.

$$E = \frac{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}{1.2+2.3+3.4+\dots+98.99}$$

Hướng dẫn giải

a) Số bị chia gồm 98 tổng, số 1 có mặt ở 98 tổng, số 2 có mặt ở 97 tổng, số 3 có mặt ở 96 tổng..., số 97 có mặt ở 2 tổng, số 98 có mặt ở 1 tổng.

Như vậy số bị chia bằng $1.98+2.97+3.96+\dots+97.2+98.1$, bằng số chia. Vậy $D = 1$.

b) Theo câu a, số bị chia bằng:

$1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+98)$. Theo công thức tính tổng các số tự nhiên liên tiếp, biểu thức này bằng: $\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \dots + \frac{98.99}{2}$, bằng $\frac{1}{2}$ số chia.

Vậy $E = \frac{1}{2}$.

Bài 4: Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $B = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$

Chứng minh rằng $\frac{A}{B}$ là một số nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} b) A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{37} - \frac{1}{38} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{37}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38}\right) \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$$

$$\Rightarrow 58B = \frac{1}{20} + \frac{1}{38} + \frac{1}{21} + \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{38} + \frac{1}{20} = 2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \right) = 2A$$

$$B = \frac{2}{58}A \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{58}{2} = 29 \in \mathbb{Z}$$

Bài 5: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$.

$$\text{Biết } A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.11} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57} \text{ và } B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}.$$

Hướng dẫn giải

$$\frac{A}{5} = \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{35} + \frac{1}{35} - \frac{1}{41} + \frac{1}{41} - \frac{1}{50} + \frac{1}{50} - \frac{1}{57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{7}{38.31} + \frac{5}{38.43} + \frac{3}{46.43} + \frac{11}{46.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{38} + \frac{1}{38} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{46} + \frac{1}{46} - \frac{1}{57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{5} = \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{5}{2}$$

Bài 6: Tính giá trị của biểu thức sau một cách hợp lý:

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9120} + \frac{1}{9506} + \frac{1}{9900}}{50 - \frac{50}{51} - \frac{51}{52} - \frac{52}{53} - \dots - \frac{97}{98} - \frac{98}{99} - \frac{99}{100}}.$$

Hướng dẫn giải

Xét tử:

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9120} + \frac{1}{9506} + \frac{1}{9900}$$

$$T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{95.96} + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{99.100}$$

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$T = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{100} \right)$$

$$T = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50} \right)$$

$$T = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \quad (1)$$

Xét mẫu:

$$M = 50 - \frac{50}{51} - \frac{51}{52} - \frac{52}{53} - \dots - \frac{97}{98} - \frac{98}{99} - \frac{99}{100}$$

$$M = \left(1 - \frac{50}{51}\right) + \left(1 - \frac{51}{52}\right) + \dots + \left(1 - \frac{98}{99}\right) + \left(1 - \frac{99}{100}\right)$$

$$M = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: tử bằng mẫu. Do đó: $A = 1$

Bài 7. Tính $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$

$$\Rightarrow 2.A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$$

$$2.A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$$

Xét hiệu:

$$2.A - A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$$

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right) = 1$$

Vậy $A = 1$

Bài 8: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \frac{2012}{53} + \dots + \frac{2012}{100}$ và

$$B = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $A = 2012 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}\right)$

$$B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$$

Khi đó : $\frac{A}{B} = \frac{2012}{1} = 2012$

Bài 9: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{199.200}$

$$\text{và } B = \frac{1}{101.200} + \frac{1}{102.199} + \dots + \frac{1}{200.101}$$

Hướng dẫn giải

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{200}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{200}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$$

$$A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{199}\right) + \dots + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{151}\right) = \frac{301}{101.200} + \frac{301}{102.199} + \dots + \frac{301}{150.151}$$

$$\text{Và } B = \left(\frac{1}{101.200} + \frac{1}{200.101}\right) + \left(\frac{1}{102.199} + \frac{1}{199.102}\right) + \dots + \left(\frac{1}{150.151} + \frac{1}{151.150}\right)$$

$$B = \frac{2}{101.200} + \frac{2}{102.199} + \dots + \frac{2}{150.151}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{A}{B} = \frac{301}{2}$$

Bài 10: Tính giá trị $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{101.102}$ và

$$B = \frac{1}{52.102} + \frac{1}{53.101} + \frac{1}{54.100} + \dots + \frac{1}{102.52} + \frac{2}{77.154}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{102}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{102}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{51}\right) = \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}$$

$$A = \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{101}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{78}\right) + \frac{1}{77} = \frac{154}{52.102} + \frac{154}{53.101} + \dots + \frac{154}{76.78} + \frac{154}{77.154}$$

$$\text{và } B = \left(\frac{1}{52.102} + \frac{1}{102.52}\right) + \left(\frac{1}{53.101} + \frac{1}{101.53}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76.78} + \frac{1}{78.76}\right) + \frac{2}{77.154}$$

$$B = \frac{2}{52.102} + \frac{2}{53.101} + \dots + \frac{2}{76.78} + \frac{2}{77.154} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{154}{2} = 77$$

Bài 11: Chứng minh rằng: $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } VT = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$VT = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} = VP$$

Bài 12: Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ và

$$P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}. \text{ Tính } (S - P)^{2016}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } P &= \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = S \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (S - P)^{2016} = 0$$

Bài 13: Chứng minh rằng: $100 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } VT = (1-1) + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} = VP \text{ (đpcm)}$$

Bài 14: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết : $A = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}$ và $B = \frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$A = \left(1 - \frac{1}{9} \right) + \left(1 - \frac{2}{10} \right) + \left(1 - \frac{3}{11} \right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100} \right) = \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \dots + \frac{8}{100} = 8 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

$$B = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100} \right). \text{ Khi đó : } \frac{A}{B} = \frac{8}{\frac{1}{5}} = 40$$

DẠNG 12: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài 1: Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(1 + \frac{a}{c} \right) \left(1 + \frac{c}{b} \right)$

Hướng dẫn giải

+Nếu $a+b+c \neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

+Nếu $a+b+c=0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \cdot \left(\frac{c+a}{c}\right) \cdot \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$$

Bài 2: Cho biểu thức $A = \frac{3x^3 - x^2 - 3x + 2005}{3x^4 - x^3 + 3x + 2014}$. Tính giá trị của biểu thức với $x = \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{3} &\Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow 3x - 1 = 0 \\ \Rightarrow A &= \frac{x^2(3x-1) - (3x-1) + 2014}{x^3(3x-1) + (3x-1) + 2015} = \frac{2014}{2015} \end{aligned}$$

Bài 2: Cho $(a+3)(b-4) - (a-3)(b+4) = 0$. Chứng minh: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(a+3)(b-4) - (a-3)(b+4) = 0 \Rightarrow ab - 4a + 3b - 12 - ab - 4a + 3b + 12 = 0$$

$$\text{Tính được } 6a = 8b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4}$$

Bài 3: Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+y+yz} = \frac{x}{x+xy+xyz} = \frac{x}{1+x+xy};$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{1+z+zx} = \frac{xy}{xy+xyz+x^2.yz} = \frac{xy}{1+x+xy}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} \\ &= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{xy}{1+x+xy} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 4: Cho $abc=2$, Tính $B = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2c}{ac+2c+2}$

Hướng dẫn giải

$$B = \frac{a}{ab+a+abc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{abc^2}{ac+abc^2+abc} = \frac{a}{a(b+1+bc)} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{abc^2}{ac(1+bc+b)} = 1$$

Bài 5: Cho $xyz=2010$, Chứng minh rằng: $\frac{2010x}{xy+2010x+2010} + \frac{y}{yz+y+2010} + \frac{z}{xz+z+1} = 1$

Hướng dẫn giải

$$VT = \frac{x^2yz}{xy+x^2yz+xyz} + \frac{y}{yz+y+xyz} + \frac{z}{xz+z+1} = 1$$

Bài 8: Tính giá trị của biểu thức : $A = 10a + 16b + 4a - 2b$ với $a+b=50$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } A = (10a + 4a) + (16b - 2b) = 14a + 14b = 14(a + b) = 14.50 = 700$$

Bài 9: Tính giá trị của biểu thức: $5x^2 + 6x - 2$ khi $|x-1|=2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : Khi } |x-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\text{Khi } x=3 \Rightarrow A = 5x^2 + 6x - 2 = 5.9 + 6.3 - 2 = 61. \quad \text{Khi } x=0 \Rightarrow A = 5x^2 + 6x - 2 = -2$$

Bài 10: Tính giá trị của biểu thức: $P = x^{2020} + y^{2020}$ khi $|x-1| + (x+y-2)^{2020} = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } \begin{cases} |x-1| \geq 0 \\ (x+y-2)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x-1| + (x+y-2)^{2020} \geq 0$$

$$\text{Do đó để } |x-1| + (x+y-2)^{2020} = 0 \text{ thì } \begin{cases} |x-1|=0 \\ (x+y-2)^{2020}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

$$\text{Vậy : } P = x^{2020} + y^{2020} = 1^{2020} + 1^{2020} = 2.$$

Bài 11: Tính giá trị của biểu thức: $x^4 - 5y^3 + 4$, biết $(x-1)^{2020} + (y+2)^{2022} = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : Vì } \begin{cases} (x-1)^{2020} \geq 0 \\ (y+2)^{2022} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^{2020} + (y+2)^{2022} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}, \text{ Thay}$$

$$\text{vào ta được : } A = 1^4 - 5.(-2)^3 + 4 = 1 + 40 + 4 = 45.$$

Bài 12: Cho a, b, c khác 0 và đôi 1 khác nhau thỏa mãn : $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2013$, Tính $A = c^2(a+b)$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\begin{aligned} a^2(b+c) &= b^2(a+c) = 2013 \Rightarrow a^2b + a^2c - b^2a - b^2c = 0 \Leftrightarrow ab(a-b) + c(a-b)(a+b) = 0 \\ (a-b)(ab+bc+ca) &= 0 \Rightarrow ab+bc+ca = 0 \text{ vì } a \neq b \end{aligned}$$

Khi đó : $(ab + bc + ca)b = 0 \Rightarrow b^2(a + c) = -abc \Rightarrow -abc = 2013$

tương tự : $(ab + bc + ca)c = 0 \Rightarrow c^2(a + b) = -abc = 2013$

Bài 13: Cho $A = \frac{1,11+0,19-1,3.2}{2,06+0,54} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : 2$ và $B = \left(5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - 0,5\right) : 2\frac{23}{26}$

a, Rút gọn A và B

b, Tìm x nguyên sao cho: $A < x < B$

Hướng dẫn giải

a, Ta có :

$$A = \frac{-1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right) : 2 = \frac{-1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{-11}{12}, \text{ và } B = \frac{25}{8} : \frac{75}{26} = \frac{13}{12}$$

b, Ta có :

$$A < x < B \Rightarrow \frac{-11}{12} < x < \frac{13}{12} \Rightarrow \frac{-11}{12} < \frac{12x}{12} < \frac{13}{12} \Rightarrow -11 < 12x < 13 \Rightarrow \begin{cases} 12x = 0 \\ 12x = 12 \end{cases}$$

Bài 14: Cho $P = |2a - 1| - (a - 5)$

a, Rút gọn P

b, Có giá trị nào của a để $P=4$ không?

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$a, P = \begin{cases} 2a - 1 - a + 5, \text{ vs } \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \\ 1 - 2a - a + 5, \left(a < \frac{1}{2}\right) \end{cases} = \begin{cases} a + 4 \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \\ 6 - 3a \left(a < \frac{1}{2}\right) \end{cases} \text{ b, Để}$$

$$P = 4 \Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 4 \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \\ 6 - 3a = 4 \left(a < \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0(l) \\ a = \frac{2}{3}(l) \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nào của a để $P=4$

Bài 15: Cho biểu thức: $C = \frac{2(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2 + 2}$

- Chứng tỏ rằng với mọi x , biểu thức C luôn có giá trị là một số dương.
- Tìm tất cả các số nguyên x , để C có giá trị là một số nguyên
- Với giá trị nào của x thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn giải

a) Ta thấy: $2(x-1)^2 + 1 > 0$ và $(x-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall x,$

Vậy biểu thức C luôn dương.

$$b) C = \frac{2[(x-1)^2 + 2] - 3}{(x-1)^2 + 2} = 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2}$$

Để C nguyên, ta phải có $(x-1)^2 + 2$ là ước dương của 3

$$\text{Vì } (x-1)^2 + 2 \geq 2, \text{ nên } (x-1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$$

c) C nhỏ nhất khi $\frac{3}{(x-1)^2 + 2}$ lớn nhất

$$\text{Vì } (x-1)^2 + 2 \geq 2 \text{ nên } \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \geq 2 - \frac{3}{2} \text{ hay } C \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$$

Bài 16: Cho 2 biểu thức: $A = \frac{4x-7}{x-2}; B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3}$

- Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên
- Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x-2 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Để } A \text{ nguyên thì } \frac{1}{x-2} \text{ nguyên} \Rightarrow x-2 \in U(1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

$$B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} = \frac{3x(x-3)+2}{x-3} = 3x + \frac{2}{x-3}$$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Để } B \text{ nguyên thì } \frac{2}{x-3} \text{ nguyên} \Rightarrow x-3 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

Do đó $x=5, x=1, x=4, x=2$

Vậy để B nguyên thì $x \in \{5; 1; 4; 2\}$

b) Từ câu a suy ra để A, B cùng nguyên thì $x=1$.

Bài 17: Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

Hướng dẫn giải

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a} \Leftrightarrow \frac{abc}{(a+b)c} = \frac{bca}{(b+c)a} = \frac{cab}{(c+a)b}$$

$$\frac{abc}{ac+bc} = \frac{abc}{ab+ac} \Leftrightarrow ac+bc = ab+ac \Leftrightarrow bc = ab \Leftrightarrow a = c$$

Tương tự, chứng minh được $a = b = c \Rightarrow M = 1$

CHUYÊN ĐỀ 7: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Toán tìm x là một trong các chủ đề thường gặp trong các kì thi HSG. Để giải toán tìm x học sinh phải có kĩ năng cộng, trừ, nhân, chia các phân số, lũy thừa để giúp cho việc biến đổi đưa đẳng thức chứa x về dạng $A.x = B$ từ đó suy ra được $x = B : A$

Bài toán tìm x đôi khi còn kết hợp phép tính tổng các số, tổng các phân số, tổng các tích, tổng các lũy thừa theo quy luật nên HS cần nắm vững và luyện thật chắc các bài toán tính tổng theo quy luật.

Dạng 1. Tìm x thông thường

Bài 1: Tìm x biết:

a) $720 : [41 - (2x - 5)] = 2^3 \cdot 5$

b) $6(x + 11) - 7(2 - x) = 26$

c) $\left(x - \frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $\left|2x - \frac{1}{6}\right| + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $720 : [41 - (2x - 5)] = 2^3 \cdot 5$

$$720 : [46 - 2x] = 40$$

$$\Rightarrow 46 - 2x = 18$$

$$\Rightarrow 2x = 46 : 18 = \frac{23}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23}{18}$$

b) Ta có:

$$6x + 66 - 14 + 7x = 26$$

$$\Rightarrow 13x = -26 \Rightarrow x = -2$$

c) Ta có

$$\left(x - \frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow x - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$

d) Ta có:

$$\left|2x - \frac{1}{6}\right| + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left|2x - \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

$$\text{TH1: } 2x - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$\text{TH2: } 2x - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{0; \frac{1}{6}\right\}.$$

Bài 2: Tìm x biết: $7 - 5.(x - 2) = 3 + 2.(4 - x)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $7 - 5.(x - 2) = 3 + 2.(4 - x)$

$$7 - 5.2 - 5.(-2) = 3 + 2.4 + 2.(-x)$$

$$7 - 5x + 10 = 3 + 8 - 2x$$

$$-5x + 2x = 3 + 8 - 7 - 10$$

$$-3x = -6$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Bài 3: Tìm x biết:

$$a, \frac{2x-3}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{5-3x}{6} - \frac{1}{3}$$

$$b, \frac{2}{3x} - \frac{3}{12} = \frac{4}{5} - \left(\frac{7}{x} - 2\right)$$

Hướng dẫn giải

$$a, \frac{2x-3}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{5-3x}{6} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4x-6+(-9)}{6} = \frac{5-3x-2}{6}$$

$$\Rightarrow 4x - 15 = 3 - 3x \Rightarrow 7x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{7}$$

$$b, \frac{2}{3x} - \frac{3}{12} = \frac{4}{5} - \left(\frac{7}{x} - 2\right) \Rightarrow \frac{2}{3x} - \frac{1}{4} = \frac{4}{5} - \frac{7}{x} + 2 \Rightarrow \frac{2}{3x} + \frac{7}{x} = \frac{4}{5} + \frac{1}{4} + 2 \Rightarrow \frac{23}{3x} = \frac{61}{20}$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{460}{61} \Rightarrow x = \frac{460}{183}$$

Bài 4: Tìm x biết:

$$a, \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right) = \frac{5}{2-2x}$$

$$b, \frac{9}{17}x + 15\frac{13}{17}x - 20\frac{5}{17}x = 16$$

Hướng dẫn giải

$$a, \frac{1}{x-1} + \frac{3}{10} = \frac{5}{2-2x} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2(x-1)} = \frac{-3}{10} \Rightarrow \frac{7}{2(x-1)} = \frac{-3}{10}$$

$$\Rightarrow 2(x-1) = -\frac{70}{3} \Rightarrow x-1 = \frac{-35}{3} \Rightarrow x = \frac{-32}{3}$$

$$b, \frac{9}{17}x + 15\frac{13}{17}x - 20\frac{5}{17}x = 16 \Rightarrow \left(\frac{9}{17} + 15\frac{13}{17} - 20\frac{5}{17}\right)x = 16 \Rightarrow -4x = 16 \Rightarrow x = -4$$

Bài 5: Tìm số tự nhiên x biết: $19x + 22.3^2 : 14 = 11 - 6^2$

Hướng dẫn giải

$$19x + 22.3^2 : 14 = 11 - 6^2$$

$$19x + 198 = 350$$

$$19x = 152$$

$$x = 8$$

Bài 6: Tìm x biết:

$$a) 121 - 115 + x = 3x - 25 - 9 - 5x - 8$$

$$b) x^2 - 4 \left(3x + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2019}\right)$$

Hướng dẫn giải

$$a) 121 - 115 + x = 3x - 25 - 9 - 5x - 8$$

$$\Rightarrow 121 - 115 - x = 3x - 16 - 5x - 8$$

$$\Rightarrow 6 - x = 3x - 16 + 5x - 8$$

$$\Rightarrow 6 - x = 8x - 24$$

$$\Rightarrow 9x = 30$$

$$\Rightarrow x = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{10}{3}.$$

$$b) x^2 - 4 \left(3x + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2019} \right)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \left(3x + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} - \frac{1}{12} \right) \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2019} \right)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \left(3x + \frac{1}{2} \right) = 0 \cdot \left(\frac{2016}{2017} - \frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2019} \right)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \left(3x + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \text{ hoặc } 3x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Với } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2^2 = (-2)^2 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

$$\text{Với } 3x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 3x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ 2; -2; -\frac{1}{6} \right\}.$$

Bài 7: Tìm x biết: $\frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999} \right) = -5.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999} \right) = -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{780}{11} : \left(\frac{13}{15} + \frac{13}{35} + \frac{13}{63} + \frac{13}{99} \right) = -5.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{780}{11} : \left[\frac{13}{2} \left(\frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} \right) \right] = -5.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{780}{11} : \left[\frac{13}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) \right] = -5.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{780}{11} : \left(\frac{13}{2} \cdot \frac{8}{33} \right) = -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 45 = -5.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 40.$$

$$\Leftrightarrow x = 60.$$

Vậy $x = 60$.

Bài 8: Tìm x biết:

$$a) \frac{1}{2016} : 2015x = \frac{-1}{2015} \quad b) \frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$$

Hướng dẫn giải

$$a) \frac{1}{2016 \cdot 2015} x = \frac{-1}{2015} \Rightarrow x = \frac{-1}{2015} : \frac{1}{2016 \cdot 2015} = -2016$$

$$b) \text{ Từ gt bài toán ta có: } (x-1)^2 = 900 \Rightarrow x-1 = \pm 30 \Rightarrow \begin{cases} x = 31 \\ x = 29 \end{cases}$$

Câu 9. Tìm x biết: $\frac{x-2}{4} = \frac{5+x}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\frac{x-2}{4} = \frac{5+x}{3} \Leftrightarrow 3(x-2) = 4(5+x) \Leftrightarrow 3x-6 = 20+4x \Leftrightarrow x = -26$$

Vậy $x = -26$.

Bài 10. Tìm x biết

$$a) 7x - 11^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200$$

$$b) \frac{x-1}{12} + \frac{x-1}{20} + \frac{x-1}{30} + \frac{x-1}{42} + \frac{x-1}{56} + \frac{x-1}{72} = \frac{16}{9}$$

Hướng dẫn giải

$$a) 7x - 11^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200 \Rightarrow 7x - 11^3 = 32 \cdot 25 + 200 = 1000 = 10^3$$

$$\Rightarrow 7x - 11 = 10 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$$

$$b) \text{ Ta chú ý: } \frac{1}{n \cdot n+1} = \frac{n+1-n}{n+1 \cdot n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$$

Ta đi xét tổng sau

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow x-1 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} \right) = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x-1 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow x-1=8 \Leftrightarrow x=9$$

Bài 11. Tìm x biết:

$$\text{a) } (19|x-1|+2.5^2):14=(13-8)^2-4^2 \quad \text{b) } \frac{x-2019}{4} = \frac{1}{x-2019}$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$(19|x-1|+2.5^2):14=(13-8)^2-4^2$$

$$(19|x-1|+2.25):14=25-16$$

$$19|x-1|+50=9.14$$

$$19|x-1|=76$$

$$|x-1|=76:19=4.$$

$$\text{Vậy } x-1=4 \text{ hoặc } x-1=-4.$$

$$\text{Do đó } x=5 \text{ hoặc } x=-3.$$

b) Ta có:

$$\frac{x-2019}{4} = \frac{1}{x-2019}$$

$$(x-2019)^2=4$$

$$(x-2019)^2=2^2$$

$$x-2019=2$$

$$x=2+2019$$

$$x=2021.$$

$$\text{Bài 12. Tìm } x \text{ biết: } 1\frac{3}{5} + \left(\frac{\frac{2}{7} + \frac{2}{17} + \frac{2}{37}}{\frac{5}{7} + \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} \right) x = \frac{16}{5}$$

Hướng dẫn giải

$$1\frac{3}{5} + \left(\frac{\frac{2}{7} + \frac{2}{17} + \frac{2}{37}}{\frac{5}{7} + \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} \right) x = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{17} + \frac{1}{37}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{17} + \frac{1}{37}} \right) x = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}x = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow x=4$$

$$\text{Vậy } x=4$$

$$\text{Bài 13.a) Tìm } x \text{ biết: } x^2 - 2(x+3) = x-6 \quad \text{b) Tìm } x \text{ biết: } \left| \frac{39}{2} - 3x^2 \right| = \frac{15}{2}$$

Hướng dẫn giải

$$a) x^2 - 2(x + 3) = x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$b) \frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2} \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Bài 14. Tìm x biết: a) $(2x - 1)^4 = 16$ b) $(2x + 1)^4 = (2x + 1)^6$ c) $||x + 3| - 8| = 20$

Hướng dẫn giải

$$a) (2x - 1)^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b) (2x + 1)^4 = (2x + 1)^6 \Rightarrow x = -0,5; x = 0; x = -1,5$$

$$c) ||x + 3| - 8| = 20 \Rightarrow \begin{cases} |x + 3| = 20 + 8 \\ |x + 3| = -20 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 3| = 28 \\ |x + 3| = -12(VN) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 28 \\ x + 3 = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -31 \end{cases}$$

Bài 15. Tìm x biết: $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$

Hướng dẫn giải

$$\text{Tính được } \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 16. Tìm x , biết:

$$a) \frac{3(x-1)}{2} = \frac{8}{27(x-1)} \quad b) x - 3\sqrt{x} = 0 (x \geq 0) \quad c) |2x - 7| = |5x + 2|$$

Hướng dẫn giải

$$a) 81(x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{4}{9} \\ x-1 = -\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ x = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$b) \sqrt{x}(\sqrt{x}-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$c) |2x-7| = |5x+2| \Rightarrow \begin{cases} 2x-7 = 5x+2 \\ 2x-7 = -5x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0

Bài 1: Tìm x biết: $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} &= \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1\right) &= \left(\frac{x+4}{2005} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1\right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1\right) \\ \Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} - \frac{x+2009}{2005} - \frac{x+2009}{2004} - \frac{x+2009}{2003} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2009 \end{aligned}$$

Bài 2: Tìm x, biết:

$$a, \frac{29-x}{21} + \frac{27-x}{23} + \frac{25-x}{25} + \frac{23-x}{27} + \frac{21-x}{29} = -5 \quad b, \frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a, \quad \frac{29-x}{21} + \frac{27-x}{23} + \frac{25-x}{25} + \frac{23-x}{27} + \frac{21-x}{29} &= -5 \\ \Rightarrow \left(\frac{29-x}{21} + 1\right) + \left(\frac{27-x}{23} + 1\right) + \left(\frac{25-x}{25} + 1\right) + \left(\frac{23-x}{27} + 1\right) + \left(\frac{21-x}{29} + 1\right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{50-x}{21} + \frac{50-x}{23} + \frac{50-x}{25} + \frac{50-x}{27} + \frac{50-x}{29} &= 0 \\ \Rightarrow (50-x) \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} \right) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 50 \\ b, \quad \frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{x-10}{30}-3\right)+\left(\frac{x-14}{43}-2\right)+\left(\frac{x-5}{95}-1\right)+\left(\frac{x-148}{8}+6\right)=0 \\ &\Rightarrow \frac{x-100}{30}+\frac{x-100}{43}+\frac{x-100}{95}+\frac{x-100}{8}=0 \\ &\Rightarrow (x-100)\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{43}+\frac{1}{95}+\frac{1}{8}\right)=0 \Rightarrow x=100. \end{aligned}$$

Bài 3. Tìm x, biết:

$$a, \frac{x-5}{100}+\frac{x-4}{101}+\frac{x-3}{102}=\frac{x-100}{5}+\frac{x-101}{4}+\frac{x-102}{3} \quad b, \frac{x-2}{7}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-4}{5}+\frac{x-3}{6}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a, \quad &\frac{x-5}{100}+\frac{x-4}{101}+\frac{x-3}{102}=\frac{x-100}{5}+\frac{x-101}{4}+\frac{x-102}{3} \\ &\Rightarrow \left(\frac{x-5}{100}-1\right)+\left(\frac{x-4}{101}-1\right)+\left(\frac{x-3}{102}-1\right)=\left(\frac{x-100}{5}-1\right)+\left(\frac{x-101}{4}-1\right)+\left(\frac{x-102}{3}-1\right) \\ &\Rightarrow \frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}=\frac{x-105}{5}+\frac{x-105}{4}+\frac{x-105}{3} \\ &\Rightarrow x-105=0 \Rightarrow x=105 \\ b, \quad &\frac{x-2}{7}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-4}{5}+\frac{x-3}{6} \\ &\Rightarrow \left(\frac{x-2}{7}-1\right)+\left(\frac{x-1}{8}-1\right)=\left(\frac{x-4}{5}-1\right)+\left(\frac{x-3}{6}-1\right) \\ &\Rightarrow \frac{x-9}{7}+\frac{x-9}{8}=\frac{x-9}{5}+\frac{x-9}{6} \\ &\Rightarrow x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{aligned}$$

Bài 4. Tìm x, biết:

$$a, \frac{x+1}{94}+\frac{x+2}{93}+\frac{x+3}{92}=\frac{x+4}{91}+\frac{x+5}{90}+\frac{x+6}{89} \quad b, \frac{2x+19}{21}-\frac{2x+17}{23}=\frac{2x+7}{33}-\frac{2x+5}{35}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a, \quad &\frac{x+1}{94}+\frac{x+2}{93}+\frac{x+3}{92}=\frac{x+4}{91}+\frac{x+5}{90}+\frac{x+6}{89} \\ &\Rightarrow \left(\frac{x+1}{94}+1\right)+\left(\frac{x+2}{93}+1\right)+\left(\frac{x+3}{92}+1\right)=\left(\frac{x+4}{91}+1\right)+\left(\frac{x+5}{90}+1\right)+\left(\frac{x+6}{89}+1\right) \\ &\Rightarrow \frac{x+95}{94}+\frac{x+95}{93}+\frac{x+95}{92}=\frac{x+95}{91}+\frac{x+95}{90}+\frac{x+95}{89} \\ &\Rightarrow x+95=0 \Rightarrow x=-95 \\ b, \quad &\frac{2x+19}{21}-\frac{2x+17}{23}=\frac{2x+7}{33}-\frac{2x+5}{35} \\ &\Rightarrow \left(\frac{2x+19}{21}+1\right)-\left(\frac{2x+17}{23}+1\right)=\left(\frac{2x+7}{33}+1\right)-\left(\frac{2x+5}{35}+1\right) \\ &\Rightarrow \frac{2x+40}{21}+\frac{2x+40}{35}=\frac{2x+40}{33}+\frac{2x+40}{23} \\ &\Rightarrow 2x+40=0 \Rightarrow x=-20 \end{aligned}$$

Bài 5. Tìm x, biết:

$$a, \frac{x-1}{59} + \frac{x-2}{58} + \frac{x-3}{57} = \frac{x-4}{56} + \frac{x-5}{55} + \frac{x-6}{54} \quad b, \frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{14} = \frac{x+3}{13} + \frac{x+4}{12}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a, \quad & \frac{x-1}{59} + \frac{x-2}{58} + \frac{x-3}{57} = \frac{x-4}{56} + \frac{x-5}{55} + \frac{x-6}{54} \\ \Rightarrow & \left(\frac{x-1}{59} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{58} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{57} - 1\right) = \left(\frac{x-4}{56} - 1\right) + \left(\frac{x-5}{55} - 1\right) + \left(\frac{x-6}{54} - 1\right) \\ \Rightarrow & \frac{x-60}{59} + \frac{x-60}{58} + \frac{x-60}{57} = \frac{x-60}{56} + \frac{x-60}{55} + \frac{x-60}{54} \\ \Rightarrow & x-60 = 0 \Rightarrow x = 60 \\ b, \quad & \frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{14} = \frac{x+3}{13} + \frac{x+4}{12} \\ \Rightarrow & \left(\frac{x+1}{15} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{14} + 1\right) = \left(\frac{x+3}{13} + 1\right) + \left(\frac{x+4}{12} + 1\right) \\ \Rightarrow & \frac{x+16}{15} + \frac{x+16}{14} = \frac{x+16}{13} + \frac{x+16}{12} \\ \Rightarrow & x+16 = 0 \Rightarrow x = -16 \end{aligned}$$

Bài 6. Tìm x, biết:

$$a, \frac{x-5}{1990} + \frac{x-15}{1980} = \frac{x-1990}{5} + \frac{x-1980}{15} \quad b, \frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} a, \quad & \frac{x-5}{1990} + \frac{x-15}{1980} = \frac{x-1990}{5} + \frac{x-1980}{15} \\ \Rightarrow & \left(\frac{x-5}{1990} - 1\right) + \left(\frac{x-15}{1980} - 1\right) = \left(\frac{x-1990}{5} - 1\right) + \left(\frac{x-1980}{15} - 1\right) \\ \Rightarrow & \frac{x-1995}{1990} + \frac{x-1995}{1980} = \frac{x-1995}{5} + \frac{x-1995}{15} \\ \Rightarrow & x-1995 = 0 \\ \Rightarrow & x = 1995 \\ b, \quad & \frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009} \\ \Rightarrow & \left(\frac{x-1}{2015} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{2013} - 1\right) = \left(\frac{x-5}{2011} - 1\right) + \left(\frac{x-7}{2009} - 1\right) \\ \Rightarrow & \frac{x-2016}{2015} + \frac{x-2016}{2013} = \frac{x-2016}{2011} + \frac{x-2016}{2009} \\ \Rightarrow & x-2016 = 0 \\ \Rightarrow & x = 2016 \end{aligned}$$

Bài 7. Tìm x, biết:

$$a, \frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14} \quad b, \frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$$

Hướng dẫn giải

$$a, \quad \frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$$

$$\Rightarrow (x+1)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0$$

$$\Rightarrow x=-1$$

$$b, \frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{315-x}{101} + 1\right) + \left(\frac{313-x}{103} + 1\right) + \left(\frac{311-x}{105} + 1\right) + \left(\frac{309-x}{107} + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{416-x}{101} + \frac{416-x}{103} + \frac{416-x}{105} + \frac{416-x}{107} = 0$$

$$\Rightarrow 416-x=0$$

$$\Rightarrow x=416$$

Bài 8. Tìm x, biết:

$$a, \frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$$

$$b, \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

Hướng dẫn giải

$$a, \frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{2009} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2008} - 1\right) = \left(\frac{x-3}{2007} - 1\right) + \left(\frac{x-4}{2006} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-2010}{2009} + \frac{x-2010}{2008} = \frac{x-2010}{2007} + \frac{x-2010}{2006}$$

$$\Rightarrow x-2010=0$$

$$\Rightarrow x=2010$$

$$b, \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{59-x}{41} + 1\right) + \left(\frac{57-x}{43} + 1\right) + \left(\frac{55-x}{45} + 1\right) + \left(\frac{53-x}{47} + 1\right) + \left(\frac{51-x}{49} + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{100-x}{41} + \frac{100-x}{43} + \frac{100-x}{45} + \frac{100-x}{47} + \frac{100-x}{49} = 0$$

$$\Rightarrow 100-x=0$$

$$\Rightarrow x=100$$

Bài 9: Tìm x, biết: $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1\right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2\right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3\right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x)\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19}\right) = 0 \Leftrightarrow 123-x=0 \Leftrightarrow x=123$$

$$S = \{123\}$$

Bài 10. Tìm x, biết: $\frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{x-3}{2011} = \frac{x-4}{2010}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 &= \frac{x-4}{2010} - 1 + \frac{x-3}{2011} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} &= \frac{x-2014}{2010} + \frac{x-2014}{2011} \\ \Leftrightarrow (x-2014) \left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2014 \end{aligned}$$

Bài 11. Tìm x, biết: $\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} &= \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} &= \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} &= \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) &= (x+7)(x+4) \\ \Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 12. Tìm x, biết: $\frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} &= \frac{x}{(x+2)(x+14)} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+8} \right) + \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+14} \right) &= \frac{x}{(x+2)(x+14)} \\ \Rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+14} &= \frac{x}{(x+2)(x+14)} \\ \Rightarrow \frac{12}{(x+2)(x+14)} &= \frac{x}{(x+2)(x+14)} \\ \Rightarrow x &= 12 \end{aligned}$$

Bài 13: Giải phương trình: $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 258 \end{aligned}$$

Bài 14: Tìm x biết: $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} + \frac{x-3}{2010} + \dots + \frac{x-2012}{1} = 2012$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{2012} - 1 + \frac{x-2012}{2011} - 1 + \frac{x-3}{2010} - 1 + \dots + \frac{x-2012}{1} - 1 + 2012 = 2012 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-2013}{2012} + \frac{x-2013}{2011} + \frac{x-2013}{2010} + \dots + \frac{x-2013}{1} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2013) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \dots + \frac{1}{1} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2013 \end{aligned}$$

Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa

Bài 1: Tìm x biết:

a, $(3x-1)^{10} = (3x-1)^{20}$

b, $x(6-x)^{2003} = (6-x)^{2003}$

c, $5^x + 5^{x+2} = 650$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a, } & (3x-1)^{10} = (3x-1)^{20} \Rightarrow (3x-1)^{20} - (3x-1)^{10} = 0 \\ \Rightarrow & (3x-1)^{10} \left[(3x-1)^{10} - 1 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ (3x-1)^{10}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ 3x-1=\pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b, } & x(6-x)^{2003} = (6-x)^{2003} \Rightarrow x(6-x)^{2003} - (6-x)^{2003} = 0 \\ \Rightarrow & (6-x)^{2003} (x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6-x=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{c, } 5^x + 5^x \cdot 5^2 = 650 \Rightarrow 5^x (1+25) = 650 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$$

Bài 2: Tìm x biết: $3^{3x+3} - 2 \cdot 3^{3x+1} = 567$

Hướng dẫn giải

$$3^{3x+3} - 2 \cdot 3^{3x+1} = 567 \Rightarrow 3^{3x} \cdot 27 - 2 \cdot 3^{3x} \cdot 3 = 567 \Rightarrow 3^{3x} \cdot (27-6) = 567$$

$$\Rightarrow 3^{3x} \cdot 21 = 567 \Rightarrow 3^{3x} = 567 : 21 \Rightarrow 3^{3x} = 3^3$$

$$\text{Vậy } 3x = 3 \Rightarrow x = 1.$$

Bài 3: Tìm x , biết: $5^{2x-3} - 2.5^2 = 5^2.3$.

Hướng dẫn giải

$$5^{2x-3} - 2.5^2 = 5^2.3 \Rightarrow 5^{2x-3} = 5^2.3 + 2.5^2 \Rightarrow 5^{2x-3} = 5^2.(3+2) \Rightarrow 5^{2x-3} = 5^3 \Rightarrow 2x-3=3$$

$$\Rightarrow 2x = 3+3 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3$.

Bài 4: Tìm x , biết: $2^x.2^{x+1}.2^{x+2}.5^{18} = 1000...0$ (18 chữ số 0)

Hướng dẫn giải

$$2^x.2^{x+1}.2^{x+2}.5^{18} = 1000...0$$

$$\Rightarrow 2^{3x+3}.5^{18} = 10^{18} \Rightarrow 2^{3x+3}.5^{18} = 2^{18}.5^{18} \Rightarrow 2^{3x+3} = 2^{18} \Rightarrow 3x+3=18 \Rightarrow x=5$$

Vậy $x = 5$.

Bài 5: Tìm x biết: $2^{x-1} + 5.2^{x-2} = \frac{7}{32}$

Hướng dẫn giải

$$2^{x-1} + 5.2^{x-2} = \frac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1} \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1} = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Rightarrow x = -3$$

Bài 9: Tìm x biết:

a, $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

b, $2^{x+2}.3^{x+1}.5^x = 10800$

c,

$(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

Hướng dẫn giải

a, Ta có:

$$(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0 \Rightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-7=0 \\ (x-7)^{10}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x-7=\pm 1 \end{cases}$$

$$b, 2^{x+2}.3^{x+1}.5^x = 10800 \Rightarrow 2^x.4.3^x.3.5^x = 10800 \Rightarrow 2^x.3^x.5^x = \frac{10800}{12} = 900$$

$$\Rightarrow (2.3.5)^x = 900 \Rightarrow 30^x = 900 = 30^2 \Rightarrow x = 2$$

$$c, (2x-15)^5 = (2x-15)^3 \Rightarrow (2x-15)^5 - (2x-15)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 [(2x-15)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-15=0 \\ 2x-15=\pm 1 \end{cases}$$

Bài 10: Tìm x biết:

a, $(x-5)^2 = (1-3x)^2$

b, $x^2 + x = 0$

c, $3^4.3^n = 3^7$

Hướng dẫn giải

$$a, (x-5)^2 = (1-3x)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-5=1-3x \\ x-5=3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=6 \\ 2x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-2 \end{cases}$$

$$b, x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

c, $3^4 \cdot 3^n = 3^7 \Rightarrow 3^n = 3^7 : 3^4 = 3^3 \Rightarrow n = 3$

Bài 11: Tìm x biết:

a, $(4x-3)^4 = (4x-3)^2$

b, $(x-1)^3 = 125$

c, $2^{x+2} - 2^x = 96$

Hướng dẫn giải

a, $(4x-3)^4 = (4x-3)^2 \Rightarrow (4x-3)^4 - (4x-3)^2 = 0$

$$\Rightarrow (4x-3)^2 [(4x-3)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x-3=0 \\ 4x-3=\pm 1 \end{cases}$$

b, $(x-1)^3 = 125 \Rightarrow (x-1)^3 = 5^3 \Rightarrow x-1=5 \Rightarrow x=6$

c, $2^{x+2} - 2^x = 96 \Rightarrow 2^{x+2} - 2^x = 96 \Rightarrow 2^x (4-1) = 96 \Rightarrow 2^x = 32 = 2^5 \Rightarrow x=5$

Bài 12: Tìm số nguyên x biết: $(3|x|-2^4) \cdot 7^{2018} = 2 \cdot 7^{2019} \cdot \frac{1}{2019^0}$

Hướng dẫn giải

$$(3|x|-2^4) \cdot 7^{2018} = 2 \cdot 7^{2019} \cdot \frac{1}{2019^0} \Rightarrow (3|x|-2^4) \cdot 7^{2018} = 2 \cdot 7^{2019} \Rightarrow 3|x|-2^4 = 2 \cdot 7^{2019} : 7^{2018}$$

$$\Rightarrow 3|x|-16=14 \Rightarrow 3|x|=14+16 \Rightarrow 3|x|=30 \Rightarrow |x|=10 \Rightarrow x=\pm 10 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 13: Tìm x biết:

a, $(9x^2-1)^2 + \left|x-\frac{1}{3}\right| = 0$

b, $\frac{1}{9} \cdot 3^4 \cdot 3^n = 3^7$

c, $\frac{1}{9} \cdot 27^n = 3^n$

Hướng dẫn giải

a, Vì $(9x^2-1) \geq 0, \left|x-\frac{1}{3}\right| \geq 0$, để $(9x^2-1)^2 + \left|x-\frac{1}{3}\right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 9x^2-1=0 \\ \left|x-\frac{1}{3}\right|=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

b, $\frac{1}{9} \cdot 3^4 \cdot 3^n = 3^7 \Rightarrow 3^n \cdot \frac{1}{9} = 3^7 : 3^4 = 3^3 \Rightarrow 3^n = 3^3 \cdot 3^2 = 3^5$

c, $\frac{1}{9} \cdot 27^n = 3^n \Rightarrow \frac{3^n}{27^n} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^2} \Rightarrow n=2$

Bài 14: Tìm x, biết: $2 \cdot 3^x = 10 \cdot 3^{12} + 8 \cdot 27^4$

Hướng dẫn giải

$$2 \cdot 3^x = 10 \cdot 3^{12} + 8 \cdot 27^4$$

$$3^x = 5.3^{12} + 4.27^4$$

$$3^x = 5.3^{12} + 4.(3^3)^4$$

$$3^x = 5.3^{12} + 4.3^{12}$$

$$3^x = 3^{12}(5+4)$$

$$3^x = 3^{12}.3^2 = 3^{14}$$

$$x = 4$$

Bài 15: Tìm x biết:

a, $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 486$

b, $x^{200} = x$

c, $(2^2 : 4).2^n = 4$

Hướng dẫn giải

a, $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 486 \Rightarrow 3^{x-1}(1+5) = 486 \Rightarrow 3^{x-1} = 81 = 3^4 \Rightarrow x-1 = 4 \Rightarrow x = 5$

b, $x^{200} = x \Rightarrow x(x^{199} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

c, $(2^2 : 4).2^n = 4 \Rightarrow 2^n = 4 = 2^2 \Rightarrow n = 2$

Bài 16: Tìm x biết:

a, $(x-1)^{x+2} = (x-1)^{x+4}$

b, $5^n + 5^{n+2} = 650$

c, $2008^n = 1$

Hướng dẫn giải

a, $(x-1)^{x+2} = (x-1)^{x+4} \Rightarrow (x-1)^{x+2}[(x-1)^{x+2} - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^{x+2} = 0 \\ (x-1)^{x+2} = 1 \end{cases}$

b, $5^n + 5^{n+2} = 650 \Rightarrow 5^n(1+5^2) = 650 \Rightarrow 5^n = 25 = 5^2 \Rightarrow n = 2$

c, $2008^n = 1 \Rightarrow 2008^n = 1 = 2008^0 \Rightarrow n = 0$

Bài 17: Tìm x biết:

a, $\frac{1}{2}.2^n + 4.2^n = 9.5^n$

b, $\left(\frac{y}{3} - 5\right)^{2000} = \left(\frac{y}{x} - 5\right)^{2008}$

Hướng dẫn giải

a, $\frac{1}{2}.2^n + 4.2^n = 9.5^n \Rightarrow 2^n\left(\frac{1}{2} + 4\right) = 9.5^n \Rightarrow 2^n \cdot \frac{9}{2} = 9.5^n \Rightarrow 2^{n-1}.9 = 9.5^n \Rightarrow 2^{n-1} = 5^n$ Vô

lý

b, $\left(\frac{y}{3} - 5\right)^{2000} = \left(\frac{y}{x} - 5\right)^{2008} \Rightarrow \left(\frac{y}{3} - 5\right)^{2000} \left[\left(\frac{y}{3} - 5\right)^8 - 1\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{3} - 5 = 0 \\ \frac{y}{3} - 5 = \pm 1 \end{cases}$

Bài 18: Tìm x biết:

a, $32^{-n}.16^n = 1024$

b, $3^{-1}.3^n + 5.3^{n-1} = 162$

c,

$2^{n+3}.2^n = 128$

Hướng dẫn giải

$$a, \quad 32^{-n} \cdot 16^n = 1024 \Rightarrow 2^{-5n} \cdot 2^{4n} = 1024 \Rightarrow 2^{-n} = 2^{10} \Rightarrow n = -10$$

$$b, \quad 3^{-1} \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} = 162 \Rightarrow 3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} = 162 \\ \Rightarrow 3^{n-1} \cdot 6 = 162 \Rightarrow 3^{n-1} = 27 = 3^3 \Rightarrow n-1 = 3 \Rightarrow n = 4$$

$$c, \quad 2^{n+3} \cdot 2^n = 128 \Rightarrow 2^{2n+3} = 128 = 2^7 \Rightarrow 2n+3 = 7 \Rightarrow n = 2$$

Bài 19: Tìm x biết: $3^x + 3^{x+2} = 810$

Hướng dẫn giải

$$3^x + 3^{x+2} = 810$$

$$10 \cdot 3^x = 810$$

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Vậy $x = 4$

Bài 20: Tìm x biết:

$$a, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = 3^5$$

$$b, \quad 2^{x+\frac{1}{2}} = 8$$

Hướng dẫn giải

$$a, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = 3^5 \Rightarrow 3^{1-2n} = 3^5 \Rightarrow 1-2n = 5 \Rightarrow n = -2$$

$$b, \quad 2^{x+\frac{1}{2}} = 8 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^3 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Bài 21: Tìm x biết:

$$a, \quad 4^{x-2} + 4^{x+1} = 1040$$

$$b, \quad (2x-1)^3 = -8$$

$$c, \quad (x-1)^{x+2} = (x-1)^{x+4}$$

Hướng dẫn giải

$$a, \quad 4^{x-2} + 4^{x+1} = 1040 \Rightarrow 4^{x-2} + 4^{x-2} \cdot 4^3 = 1040$$

$$\Rightarrow 4^{x-2} \cdot 65 = 1040 \Rightarrow 4^{x-2} = 16 = 4^2 \Rightarrow x-2 = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$b, \quad (2x-1)^3 = -8 \Rightarrow (2x-1)^3 = (-2)^3 \Rightarrow 2x-1 = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$c, \quad (x-1)^{x+2} = (x-1)^{x+4} \Rightarrow (x-1)^{x+2} \left[(x-1)^2 - 1 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^{x+2} = 0 \\ (x-1)^{x+2} = \pm 1 \end{cases}$$

Bài 22: Tìm n biết:

$$a, \quad 2^{-1} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5$$

$$b, \quad 3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} = 162$$

Hướng dẫn giải

$$a, \quad 2^{-1} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5 \Rightarrow 2^n \left(\frac{1}{2} + 4 \right) = 9 \cdot 2^5 \Rightarrow 2^n \cdot \frac{9}{2} = 9 \cdot 2^5 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^5 \Rightarrow n = 6$$

$$b, \quad 3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} = 162 \Rightarrow 3^{n-1} \cdot 6 = 162 \Rightarrow 3^{n-1} = 27 = 3^3 \Rightarrow n = 4$$

Bài 23: Tìm x biết:

a, $(n^{54})^2 = n$

b, $8^{x+3} + 2^{3x} - 2^9 = 2^{18}$.

Hướng dẫn giải

a, $(n^{54})^2 = n \Rightarrow n^{108} = n \Rightarrow n(n^{107} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$

b, $8^{x+3} + 2^{3x} - 2^9 = 2^{18} \Rightarrow 8^x \cdot 8^3 + 8^x - 8^3 - 8^6 = 0$
 $\Rightarrow 8^x(8^3 + 1) - 8^3(8^3 + 1) = 0 \Rightarrow (8^3 + 1)(8^x - 8^3) = 0$
 $\Rightarrow 8^x - 8^3 = 0$ (vì $8^3 + 1 > 0$) $\Rightarrow 8^x = 8^3$
 $\Rightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$.

Bài 24: Tìm x biết:

a, $2^{x+2} - 2^x = 96$

b, $(2x-1)^{50} = 2x-1$

Hướng dẫn giải

a, $2^{x+2} - 2^x = 96 \Rightarrow 2^x \cdot 4 - 2^x = 96 \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 96 \Rightarrow 2^x = 32 = 2^5 \Rightarrow x = 5$

b, $(2x-1)^{50} = 2x-1 \Rightarrow (2x-1)[(2x-1)^{49} - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 0 \\ 2x-1 = 1 \end{cases}$

Bài 25: Tìm x biết:

a, $(x-5)^2 = (1-3x)^2$

b, $32^{-n} \cdot 16^n = 1024$

Hướng dẫn giải

a, $(x-5)^2 = (1-3x)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-5 = 1-3x \\ x-5 = 3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 6 \\ 2x = -4 \end{cases}$

b, $32^{-n} \cdot 16^n = 1024 \Rightarrow 2^{-5n} \cdot 2^{4n} = 2^{10} \Rightarrow 2^{-n} = 2^{10} \Rightarrow n = -10$

Bài 26: Tìm x biết:

a, $10^x : 5^y = 20^y$

b, $|x-5| + x - 8 = 6$ (với $x > 5$)

c, $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

Hướng dẫn giải

a, $10^x : 5^y = 20^y \Rightarrow 10^x = 20^y \cdot 5^y = 100^y = 10^{2y} \Rightarrow x = 2y$

b, Vì $x > 5 \Rightarrow |x-5| = x-5$, Khi đó ta có: $x-5 + x-8 = 6 \Rightarrow 2x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{2}$

c, $2^{x+1} \cdot 3^y = 2^{2x} \cdot 3^x \Rightarrow 2^{2x} : 2^{x+1} = 3^y : 3^x \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$

Bài 27: Tìm x biết:

a, $(x-2)^6 = (x-2)^8$

b, $\frac{7}{3}x + \left(\frac{-11}{12}\right)^2 = \left(\frac{29}{12}\right)^2 - x = y^2$

Hướng dẫn giải

a, $(x-2)^6 = (x-2)^8 \Rightarrow (x-2)^6[(x-2)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ x-2 = \pm 1 \end{cases}$

b, $\frac{7}{3}x + \left(\frac{-11}{12}\right)^2 = \left(\frac{29}{12}\right)^2 - x = y^2 \Rightarrow \frac{7}{3}x + x = \left(\frac{29}{12}\right)^2 - \left(\frac{11}{12}\right)^2 \Rightarrow \frac{10}{3}x = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Thay vào ta được: $y^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{121}{144} = \frac{7}{2} + \frac{121}{144} = \frac{625}{144} \Rightarrow y = \pm \frac{25}{12}$.

Bài 28: Tìm x, y, z biết: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{5} \right) + \left(\frac{y^2}{3} - \frac{y^2}{5} \right) + \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{15}y^2 + \frac{1}{20}z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Bài 29: Tìm x biết: $\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131} \Rightarrow \frac{7^x(49 + 7 + 1)}{57} = \frac{5^{2x}(1 + 5 + 125)}{131} \Rightarrow 7^x = 25^x \Rightarrow x = 0$$

Bài 30: Tìm x thỏa mãn: $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} & \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} \\ &= \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{6^5}{3^5} \cdot \frac{6^5}{2^5} = \left(\frac{6}{3} \right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2} \right)^6 = 2^{12} \Rightarrow 2^2 = 2^{12} \Rightarrow x = 12. \end{aligned}$$

Bài 31: Tìm x biết: $(2^3)^{1^{2005}} \cdot x + 2005^0 \cdot x = 994 - 15 : 3 + 1^{2005}$

Hướng dẫn giải

$$(2^3)^{1^{2005}} \cdot x + 2005^0 \cdot x = 994 - 15 : 3 + 1^{2005} \Rightarrow 8 \cdot x + x = 990 \Rightarrow 9x = 990 \Rightarrow x = 110$$

Bài 32: Tìm số nguyên x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2015} = 2^{2019} - 8$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2015} = 2^{2019} - 8$

$$\Leftrightarrow 2^x (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2015}) = 2^{2019} - 2^3$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot (2^{2016} - 1) = 2^3 (2^{2016} - 1) \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Bài 33: Tìm x sao cho $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

Hướng dẫn giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = 17$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^4 \Leftrightarrow x = -4$$

Bài 34: Tìm m, n thỏa mãn: $(-7x^4y^m) \cdot (-5x^n y^4) = 35x^9 y^{15}$

Hướng dẫn giải

$$\Rightarrow 35.x^{n+4}.y^{m+4} = 35.x^9.y^{15} \Rightarrow \begin{cases} n+4=9 \\ m+4=15 \end{cases}$$

Bài 35: Tìm x, y nguyên biết : $2012^{|x-1|+y^2-1}.3^{2012} = 9^{1006}$

Hướng dẫn giải

$$2012^{|x-1|+y^2-1}.3^{2012} = 9^{1006} \Rightarrow 2012^{|x-1|+y^2-1}.3^{2012} = 3^{2012} \Rightarrow 2012^{|x-1|+y^2-1} = 1 \Rightarrow |x-1| + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow |x-1| + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|=0 \\ y^2=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} |x-1|=1 \\ y^2=0 \end{cases}$$

Bài 36: Tìm x biết: $\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5} \cdot \frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5} = 8^x$

Hướng dẫn giải

$$\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5} \cdot \frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5} = 8^x \Rightarrow \frac{4.4^5}{3.3^5} \cdot \frac{6^5.6}{2.2^5} = 2^{3n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{24}{6}\right)^5 \cdot \frac{24}{6} = 2^{3n} \Rightarrow 4^5.4 = 2^{3n} \Rightarrow 4^6 = 2^{3n} \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2$$

Bài 37: Tìm x, biết: $(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$

Hướng dẫn giải

$$(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{x+1} [1 - (x-5)^{12}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-5)^{12} = 0 \end{cases}$$

$$(x-5)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

$$1 - (x-5)^{12} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{12} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=1 \\ x-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy $x=4, x=5, x=6$

Bài 38: Tìm x biết: $|3x-2^4|.7^{2018} = 2.7^{2019} \cdot \frac{1}{2019^0}$

Hướng dẫn giải

$$|3x-2^4|.7^{2018} = 2.7^{2019} \cdot \frac{1}{2019^0}$$

$$|3x-2^4|.7^{2018} = 2.7^{2019} \cdot \frac{1}{2019^0} \Leftrightarrow |3x-2^4|.7^{2018} = 2.7^{2019} \Leftrightarrow |3x-16| = 14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-16=14 \\ 3x-16=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=30 \\ 3x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{10; \frac{2}{3}\right\}.$$

Bài 39: Tìm số tự nhiên x biết: $2^x.2^{x+1}.2^{x+2} = \underbrace{100\dots00}_{15 \text{ chữ số } 0} : 5^{15}$

Hướng dẫn giải

Ta có $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = \underbrace{100 \dots 00}_{15 \text{ chữ số } 0} : 5^{15}$

$$2^x \cdot 2^x \cdot 2^x \cdot 2^2 = 10^{15} : 5^{15}$$

$$2^{3x} \cdot 2^3 = 2^{15} \cdot 5^{15} : 5^{15}$$

$$2^{3x} = 2^{15} : 2^3$$

$$2^{3x} = 2^{12}$$

$$\Rightarrow 3x = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 : 3$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Bài 40: Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

Hướng dẫn giải

$$2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800 \Rightarrow 2^x \cdot 4 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800 \Rightarrow 30^x = 10800 : 12 = 900 \Rightarrow 30^x = 30^2 \Rightarrow x = 2$$

Bài 41: Trong ba số a, b, c có 1 số dương, 1 số âm, và 1 số bằng 0, Tìm 3 số đó biết:

$$|a| = b^2(b-c)$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét } a = 0 \Rightarrow b^2(b-c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = c \end{cases} (VL)$$

$$\text{Xét } a \neq 0 \Rightarrow |a| = b^2(b-c) > 0 \Rightarrow \begin{cases} b > c \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0, b > 0, a < 0$$

Bài 42: Tìm số tự nhiên x, y sao cho $10^x = y^2 - 143$.

Hướng dẫn giải

$$10^x = y^2 - 143 \Rightarrow 10^x + 143 = y^2$$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 12$ thỏa mãn.

Nếu $x > 0 \Rightarrow 10^x$ có chữ số tận cùng là 0 $\Rightarrow 10^x + 143$ có chữ số tận cùng là 3.

Mà y^2 là số chính phương nên không thể có tận cùng bằng 3. Do đó không tồn tại $x, y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn.

Vậy $x = 0; y = 12$.

Bài 43: Tìm x, y biết: $x(x-y) = \frac{3}{10}$ và $y(x-y) = \frac{-3}{50}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Trừ theo vế ta được: } (x-y)(x-y) = \frac{9}{25} \Rightarrow (x-y)^2 = \left(\pm \frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow x-y = \pm \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{3}{10} : \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \pm \frac{1}{2}; \quad y = \frac{-3}{50} : \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \mp \frac{1}{10}.$$

Bài 44: Tìm các số nguyên dương a, b, c biết rằng: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2(b+c)$

Hướng dẫn giải

Vì $a^2 = 2(b+c)$ nên a^2 là 1 số chẵn suy ra a chẵn, mà a, b, c nguyên dương nên từ
 $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \Rightarrow a > b$ và $a > c \Rightarrow 2a > b+c \Rightarrow 4a > 2(b+c) \Rightarrow 4a > a^2 \Rightarrow a < 4$
 Suy ra $a = 2$ và $b = c = 1$

Bài 45:

- a) Trong ba số a, b, c có một số dương, một số âm và một số bằng 0, ngoài ra còn biết: $|a| = b^2(b-c)$. Hỏi số nào dương, số nào âm, số nào bằng 0
 b) Tìm hai số x và y sao cho $x+y=xy=x:y$ ($y \neq 0$)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $|a| \geq 0, b^2 \geq 0$ nên từ $|a| = b^2(b-c) \Rightarrow b-c \geq 0 \Rightarrow c \leq b$

+Nếu $b=0 \Rightarrow |a|=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ có hai số a và b bằng 0, vô lý

+Nếu $b < 0 \Rightarrow c \leq b < 0 \Rightarrow$ có hai số âm b và c , vô lý

+Nếu $b > 0$, ta xét $a=0 \Rightarrow b-c=0 \Rightarrow b=c > 0 \Rightarrow$ có hai số dương b và c , vô lý
 $\Rightarrow a < 0$

Vậy $a < 0, b > 0, c = 0$

b) Từ $x+y=xy \Rightarrow x=xy-y=y(x-1) \Rightarrow x:y=x-1$

Ta lại có: $x:y=x+y \Rightarrow x+y=x-1 \Rightarrow y=-1$

$$\Rightarrow x=xy-y=-x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy hai số cần tìm là $x=\frac{1}{2}; y=-1$

Bài 46: Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a+3b+1)(2008^a+2008a+b)=225$

Hướng dẫn giải

Theo đề bài $\Rightarrow 2008a+3b+1$ và $2008^a+2008a+b$ là hai số lẻ

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow 2008^a+2008a$ là số chẵn

Để $2008^a+2008a+b$ lẻ $\Rightarrow b$ lẻ, nếu b lẻ $\Rightarrow 3b+1$ chẵn, do đó $2008a+3b+1$ chẵn (không thỏa mãn), vậy $a=0$

$$\text{Với } a=0 \Rightarrow (3b+1)(b+1)=225$$

$$\text{Vì } b \in \mathbb{N} \Rightarrow (3b+1)(b+1)=3.75=5.45=9.25$$

$$3b+1 \text{ không chia hết cho 3 và } 3b+1 > b+1 \Rightarrow \begin{cases} 3b+1=25 \\ b+1=9 \end{cases} \Rightarrow b=8$$

Vậy $a=0, b=8$

Bài 47: Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: $3.(5^x-1)-2=70$;

Hướng dẫn giải

$$3.(5^x - 1) - 2 = 70 \Rightarrow 3.(5^x - 1) = 72 \Rightarrow 5^x - 1 = 24 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 5.$$

Vậy $x = 5$.

Bài 49: Tìm tất cả các cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn $x^2 + x = 3^{2020y} + 1$

Hướng dẫn giải

Xét trường hợp $y = 0$ Khi đó : $x^2 + x = 2 \Rightarrow x(x + 1) = 2 \Rightarrow x = 1; x = -2$ vậy cặp

$x; y$ thỏa là

$1; 0 ; -2; 0$

Xét trường hợp $y > 0$ khi đó

$3^{2020y} + 1$ chia 3 dư 1 còn $x(x + 1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 2 nên không xảy ra

Vậy cặp $x; y$ thỏa là : $1; 0 ; -2; 0$

Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức

Bài 1: Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow xy - 617(x+y) = 0 \Leftrightarrow xy - 617x - 617y + 617^2 = 617^2$$

$$\Leftrightarrow (x-617)(y-617) = 617^2$$

Vì x, y nguyên dương nên $x - 617$ và $y - 617$ là ước lớn hơn -617 của 617^2 .

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\begin{cases} x-617=617 \\ y-617=617 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1234 \\ x=618; y=381306 \\ x=381306; y=618 \end{cases}$$

Vậy tất cả các cặp $(x; y)$ nguyên dương cần tìm là

$(1234; 1234), (618; 381306), (381306; 618)$

Bài 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6xy} = \frac{1}{6}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 6y + 6x + 1 = xy \Leftrightarrow x(y-6) - 6(y-6) = 37 \Leftrightarrow (x-6)(y-6) = 37$

Do vai trò của x, y bình đẳng giả sử: $x \geq y \geq 1 \Rightarrow x-6 \geq y-6 \geq -5$

Chỉ có một trường hợp là $\begin{cases} x-6=37 \\ y-6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=43 \\ y=7 \end{cases}$

Bài 3: Tìm cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $\frac{x}{4} - \frac{5}{y} = \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{x}{4} - \frac{5}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{xy-20}{4y} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2xy-40=12y \Rightarrow xy-6y=20 \Rightarrow y.(x-6)=20$

TH1: $y=1 \Rightarrow x-6=20 \Rightarrow x=26$

Vậy: $y=1, x=26$ (thỏa mãn).

TH2: $y=20 \Rightarrow x-6=1 \Rightarrow x=7$

Vậy: $y=20, x=7$ (thỏa mãn).

TH3: $y=2 \Rightarrow x-6=10 \Rightarrow x=16$

Vậy: $y=2, x=16$ (thỏa mãn).

Th4: $y=10 \Rightarrow x-6=2 \Rightarrow x=8$

Vậy: $y=10, x=8$ (thỏa mãn).

TH5: $y=4 \Rightarrow x-6=5 \Rightarrow x=11$

Vậy: $y=4, x=11$ (thỏa mãn).

TH6: $y=5 \Rightarrow x-6=4 \Rightarrow x=10$

Vậy: $y=5, x=10$ (thỏa mãn).

Bài 4: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $\frac{2x}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{2x}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow (2x-1)y = 6$$

Ta có: $2x-1; y$ là các số nguyên mà $2x-1$ là số nguyên lẻ.

Mà $U(6) = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$

Nê ta có bảng:

$2x-1$	1	3	-1	-3
y	6	2	-6	-2
x	1	2	0	-1

$$\text{Vậy } (x; y) = \{(1; 6), (0; -6), (-1, -2)\}$$

Dạng 5: Phương pháp chặn

Bài 1: Tìm số tự nhiên x, y biết: $7(x-2004)^2 = 23 - y^2$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta thấy $7(x-2004)^2 \geq 0$ nên $23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Mà 7 là số nguyên tố nên $23 - y^2 : 7 \Rightarrow y \in \{3; 4\}$. Thay y vào ta tìm được x

Bài 2: Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

Hướng dẫn giải

Viết được $(x+1)^2 = 42 + 8y^2$

Suy ra $(x+1)^2$ là số chẵn, để có $(x+1)^2$ chia hết cho 4 nên $42 + 8y^2$ không chia hết cho 4

Vậy không có số nguyên x, y thỏa mãn đề bài

Bài 3: Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x-2010)^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $36 - y^2 = 8(x-2010)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x-2010)^2 = 36$

Vì $y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x-2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x-2010)^2 \leq \frac{36}{8}$

Vì $0 \leq (x-2010)^2$ và $x \in \mathbb{N}$, $(x-2010)^2$ là số chính phương nên

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2010)^2 = 4 \\ (x-2010)^2 = 1 \\ (x-2010)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-2010| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ x = 2008 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2(ktm) \end{cases} \\ x-2010 = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 28(ktm) \\ x-2010 = 0 \Rightarrow x = 2010 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = -6(ktm) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (2012; 2); (2008; 2); (2010; 6)$

Bài 4: Tìm 3 số nguyên dương x, y, z : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Hướng dẫn giải

Do x, y, z có vai trò như nhau nên ta giả sử: $x \leq y \leq z$

$$\text{Khi đó: } 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\} \quad (\text{do } x \in \mathbb{Z}^+)$$

Với $x = 1$ phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{Với } x = 2 \text{ ta có: } 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 4. \text{ Mặt khác } y \geq x = 2 \Rightarrow y \in \{2, 3, 4\}$$

+) $y = 2$ thì phương trình vô nghiệm.

+) $y = 3$ thì $z = 6$

+) $y = 4$ thì $z = 4$

$$\text{Với } x = 3 \text{ ta có: } 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 3. \text{ Mặt khác } y \geq x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow z = 3$$

Vậy phương trình có nghiệm là $(x, y, z) = (2, 3, 6); (2, 4, 4); (3, 3, 3)$.

Bài 5: Tìm nghiệm nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $2xyz = x + y + z$

Hướng dẫn giải

Giả sử $x \leq y \leq z$. Ta có: $2xyz = x + y + z \leq 3z$

Chia 2 vế cho z dương ta được $2xy \leq 3 \Rightarrow xy \leq 1 \Rightarrow xy = 1$

Do đó $x = y = 1$. Thay vào phương trình ban đầu ta được: $2z = z + 2$ hay $z = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $(x, y, z) = (1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 1)$.

Bài 6: Tìm các số nguyên $a, b, c \neq 0$, biết: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = a + b + c = 3$

Hướng dẫn giải

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = a + b + c = 3 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3 = 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + 1\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c} + 1\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1\right) = 9$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{a} = 9 \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3, \text{ do } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ nên } \frac{1}{a} \leq 1, \frac{1}{b} \leq 1, \frac{1}{c} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow a = b = c = 1$$

Bài 7: Tìm số nguyên x, y biết: $42 - 3|y - 3| = 4(2012 - x)^4$

Hướng dẫn giải

$$\Rightarrow 42 = 3|y - 3| + 4(2012 - x)^4, \text{ Do } 3|y - 3| \geq 0, \forall y \in \mathbb{Z} \text{ nên } 4(2012 - x)^4 \leq 42$$

$$\Rightarrow (2012 - x)^4 \leq 11 < 2^4 \Rightarrow 2012 - x = 0 \text{ hoặc } 2012 - x = \pm 1, \text{ Vì } 2012 - x \text{ là số nguyên nên}$$

$$+ \text{ Nếu } 2012 - x = \pm 1 \text{ suy ra } x = 2011 \text{ hoặc } x = 2013 \text{ thì } 38 = 3|y - 3| \Rightarrow |y - 3| = \frac{38}{3} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Nếu: } 2012 - x = 0 \text{ suy ra } x = 2012 \text{ và } 42 = 3|y - 3| \Rightarrow |y - 3| = 14 \text{ nên } y = 17 \text{ hoặc } y = -11$$

Bài 8: Chứng minh rằng không tìm được hai số x, y nguyên dương sao khác nhau sao cho $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y}$

Hướng dẫn giải

Quy đồng chéo ta được : $(y-x)(x-y) = xy$, Vì $x-y$ và $y-x$ là hai số đối nhau nên $VT < 0$,

Và nếu x, y nguyên dương thì $VP > 0$ suy ra mâu thuẫn

Vậy không tồn tại hai số x, y nguyên dương

Bài 9: Tìm bộ ba số tự nhiên khác 0 sao cho: $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b+c} = 1$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a} \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a \in \{1; 2\}$$

$$\text{TH1 : Với } a=1 \Rightarrow \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+c+1} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+c+1} = 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2 : Với } a=2 \Rightarrow \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+c+2} < \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{2}{b+2} \\ \Rightarrow b+2 < 4 \Rightarrow b < 2 \Rightarrow b=1$$

$$\text{Với } b=1 \text{ thì } \frac{1}{3} + \frac{1}{c+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{c+3} = \frac{1}{6} \Rightarrow c=3$$

Vậy $(a, b, c) = (2, 1, 3)$.

Bài 10: Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi thành: $xyz = x + y$.

Do đối xứng của x và y nên có thể giả thiết rằng $x \leq y$. Ta có

$$xyz = x + y \leq y + y = 2y \Rightarrow xz \leq 2.$$

Ta lựa chọn nghiệm trong các trường hợp sau: $x=1, z=1$; $x=2, z=1$; $x=1, z=2$

Ta suy ra nghiệm (x, y, z) là $(1, 1, 2)$ và $(2, 2, 1)$.

Nhận xét: Ở bài toán này do vai trò của x, y, z là không bình đẳng nên ta không có thể giải sử $x \leq y \leq z$ ta chỉ có thể giả sử $x \leq y$

Bài 11: Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $3^x + 4^x = 5^x$

Hướng dẫn giải

Với $x=0, x=1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x=2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (luôn đúng), vậy $x=2$ thỏa mãn

$$\text{+) } x > 2, \text{ ta có: } 3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1(*)$$

Với $x > 2$ ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow x > 2 \dots ktm$$

Vậy $x = 2$

Bài 12: Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

Hướng dẫn giải

$$\text{Do } a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 > a + 3 = 5^c$$

$$\Rightarrow 5^b > 5^c \Rightarrow b > c \Rightarrow 5^b : 5^c$$

$$\Rightarrow (a^3 + 3a^2 + 5) : (a + 3) \Rightarrow a^2(a + 3) + 5 : (a + 3)$$

$$\text{Mà } a^2(a + 3) : (a + 3) \Rightarrow 5 : (a + 3) \Rightarrow a + 3 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\} \quad (1)$$

$$\text{Do } a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a + 3 \geq 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^5; 25 = 5^b \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow 2 + 3 = 5^c \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Vậy } a = 2; b = 2; c = 1$$

Bài 13: Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$

Hướng dẫn giải

$$\text{Nhận xét : với } x \geq 0 \text{ thì } |x| + x = 2x$$

$$\text{Với } x < 0 \text{ thì } |x| + x = 0. \text{ Do đó } |x| + x \text{ luôn là số chẵn với } b \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Suy ra } 2^a + 37 \text{ là số chẵn} \Leftrightarrow 2^a \text{ lẻ} \Leftrightarrow a = 0$$

$$\text{Khi đó } |b - 45| + b - 45 = 38$$

$$\text{Nếu } b < 45, \text{ ta có: } -(b - 45) + b - 45 = 38 \Leftrightarrow 0 = 38(ktm)$$

$$\text{Nếu } b \geq 45, \text{ ta có: } 2(b - 45) = 38 \Leftrightarrow b = 64(tm)$$

$$\text{Vậy } (a, b) = (0; 64)$$

Bài 14. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $x + y + z = xyz$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } x, y, z \text{ nguyên dương nên ta giả sử } 1 \leq x \leq y \leq z$$

$$\text{Theo bài ra } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Thay vào đầu bài ta có: } 1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$$

$$Th1: y-1=1 \Rightarrow y=2 \text{ và } z-1=2 \Rightarrow z=3$$

$$Th2: y-1=2 \Rightarrow y=3 \text{ và } z-1=1 \Rightarrow z=2$$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1,2,3); (1,3,2)$

Bài 15: Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho : $2^a + 7 = |b-5| + b - 5$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Áp dụng nhận xét trên thì $|b-5| + b - 5$ là số chẵn với $b-5 \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$

$$\text{Khi đó } |b-5| + b - 5 = 8$$

$$\text{Nếu } b < 5 \Rightarrow -(b-5) + b - 5 = 8 \Leftrightarrow 0 = 8 \text{ (ktm)}$$

$$\text{Nếu } b \geq 5 \Rightarrow 2(b-5) = 8 \Leftrightarrow b = 9 \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } (a, b) = (0, 9)$$

Bài 16: Cho $A = \frac{5}{17} + \frac{-4}{9} - \frac{20}{31} + \frac{12}{17} - \frac{11}{31}$ và $B = \frac{-3}{7} + \frac{7}{15} + \frac{-4}{7} + \frac{8}{15} - \frac{2}{3}$. Tìm số nguyên x sao

$$\text{cho } A < \frac{x}{9} \leq B$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Tính A ta có : } A = \frac{-4}{9} \text{ và } B = \frac{2}{3}$$

Theo bài ra ta có :

$$\frac{-4}{9} < \frac{x}{9} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-4}{9} < \frac{x}{9} \leq \frac{6}{9} \Rightarrow -4 < x \leq 6 \Rightarrow x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Bài 17: Tìm số nguyên x sao cho : $(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 7)(x^2 - 10) < 0$

Hướng dẫn giải

Vì tích của 4 số : $(x^2 - 1), (x^2 - 4), (x^2 - 7), (x^2 - 10)$ là 1 số âm, nên phải có 1 số âm hoặc 3 số âm

Ta có : $x^2 - 10 < x^2 - 7 < x^2 - 4 < x^2 - 1$, ta xét 2 trường hợp sau :

Trường hợp 1: Có 1 số âm suy ra:

$$x^2 - 10 < x^2 - 7 \Rightarrow x^2 - 10 < 0 < x^2 - 7 \Rightarrow 7 < x^2 < 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Trường hợp 2 : Có 3 số âm và 1 số dương :

$$\Rightarrow x^2 - 4 < 0 < x^2 - 1 \Rightarrow 1 < x^2 < 4, \text{ Do } x \text{ là số nguyên nên không tồn tại } x$$

Vậy $x = \pm 3$ là số cần tìm

Bài 18: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $6x^2 + 5y^2 = 74$

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ } 6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow 6x^2 \leq 74 \Rightarrow x^2 \leq \frac{74}{6} \text{ mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$$

Mặt khác ta lại có: $x^2 + 1 = 75 - 5x^2 - 5y^2 : 5 \Rightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = 9$

Với $x^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 10$ (loại) vì y không là số nguyên

Với $x^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow (x; y) \in \{(3; 2); (3; -2); (-3; 2); (-3; -2)\}$

Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng

Bài 1: Tìm số tự nhiên x , biết: $1+3+5+7+9+\dots+(2x-1)=225$

Hướng dẫn giải

$$1+3+5+7+9+\dots+(2x-1)=225$$

$$\frac{[(2x-1)-1]:2+1}{2}[(2x-1)+1]=225$$

$$\frac{(2x-2):2+1}{2}.2x=225$$

$$\frac{x}{2}.2x=225$$

$$x^2=225$$

$$x=15$$

Bài 2: Tìm x biết: $1+5+9+13+17+\dots+x=501501$

Hướng dẫn giải

Ta có $5=2+3$; $9=4+5$; $13=6+7$; $17=8+9$...

Do vậy $x=a+(a+1)$ ($a \in \mathbb{N}$)

Nên $1+5+9+13+17+\dots+x=1+2+3+4+5+6+7+\dots+a+(a+1)=501501$

Hay $(a+1)(a+1+1):2=501501$

$$(a+1)(a+2)=1003002=1001.1002 \Rightarrow a=1000$$

Do đó $x=1000+(1000+1)=2001$.

Bài 3: Tìm x , biết: $x+2x+3x+\dots+2011x=2012.2013$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } x(1+2+3+\dots+2011)=2012.2013 \Rightarrow x \cdot \frac{(1+2011).2011}{2}=2012.2013$$

$$x.2012.2011=2.2012.2013 \Rightarrow x=\frac{4026}{2011}$$

Bài 4. Tìm x , biết: $x+(x+1)+(x+2)+\dots+(x+30)=1240$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x+(x+1)+(x+2)+\dots+(x+30)=1240$

$$x+30.x+\frac{(30+1).30}{2}=1240$$

$$31.x+465=1240$$

$$31.x=775$$

$$x = 25$$

Vậy $x = 25$

Bài 5. Tìm x biết: $(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+100)=5070$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(x+x+x+\dots+x)+(1+2+3+\dots+100)=5070$

$$\Rightarrow 100x + 5050 = 5070 \Rightarrow 100x = 20 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

Bài 6. Tìm x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1}$

Hướng dẫn giải

Ta có: Tách $\frac{9}{1}$ thành 9 số 1= suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1} &= \left(\frac{1}{9} + 1\right) + \left(\frac{2}{8} + 1\right) + \left(\frac{3}{7} + 1\right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1\right) + 1 \\ &= \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \frac{10}{7} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{10} = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right) \end{aligned}$$

Khi đó $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)x = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right) \Rightarrow x = 10$

Bài 7: Tìm x biết: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (x+1)^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = (1+2)^2$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 9 + 27 = 36 = (1+2+3)^2$$

....

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1+2+3+\dots+10)^2 = (x+1)^2 = 45^2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 45 \\ x+1 = -45 \end{cases}$$

Bài 8: Tìm x biết: $1+3+5+7+\dots+99 = (x+1)^2$

Hướng dẫn giải

$$\left[\frac{99-1}{2} + 1\right] \left[\frac{1+99}{2}\right] = 50^2 = (x+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 50 \\ x+1 = -50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 49 \\ x = -51 \end{cases}$$

Bài 9: Tìm x biết: $x-3x+5x-7x+\dots+2013x-2015x=3024$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x-3x+5x-7x+\dots+2013x-2015x=3024$$

$$\Rightarrow (x-3x)+(5x-7x)+\dots+(2013x-2015x)=3024$$

$$\Rightarrow (-2x)+(-2x)+\dots+(-2x)=3024 \Rightarrow (-2x).504=3024 \Rightarrow -2x=6 \Rightarrow x=-3$$

Bài 10: Tìm x biết: $\frac{2}{1^2} \cdot \frac{6}{2^2} \cdot \frac{12}{3^2} \cdot \frac{20}{4^2} \dots \frac{110}{10^2} \cdot x = -20$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1.2}{1.1} \cdot \frac{2.3}{2.2} \cdot \frac{3.4}{3.3} \cdot \frac{4.5}{4.4} \dots \frac{10.11}{10.10} \cdot x = -20 \Rightarrow \frac{(1.2.3\dots 10)(2.3\dots 11)}{(1.2\dots 10)(1.2\dots 10)} \cdot x = -20$$

$$\Rightarrow 11x = -20 \Rightarrow x = \frac{-20}{11}$$

Bài 11: Tìm x biết: $\frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{x(x+2)} \right) = \frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{24}{35} \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} = \frac{24}{35} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{16}{35} = \frac{1}{x+2} = \frac{-9}{35} \Rightarrow x+2 = \frac{-35}{9} \Rightarrow x = \frac{-35}{9} - 2 = \frac{-53}{9}$$

Bài 12: Tìm x biết:

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$

b) $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{1}{2.2} \cdot \frac{2}{2.3} \cdot \frac{3}{2.4} \cdot \frac{4}{2.5} \cdot \frac{5}{2.6} \dots \frac{30}{2.31} \cdot \frac{31}{2^6} = 2^x$

$$\frac{1.2.3.4.5\dots 30.31}{1.2.3.4\dots 30.31.2^{30}.2^6} = 2^x \Rightarrow \frac{1}{2^{36}} = 2^x \Rightarrow x = -36$$

b) $\frac{4.4^5}{3.3^5} \cdot \frac{6.6^5}{2.2^5} = 2^x \Rightarrow \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^x$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{3} \right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2} \right)^6 = 2^x \Rightarrow 2^{12} = 2^x \Rightarrow x = 12$$

Bài 13: Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{x(x+3)} = \frac{101}{618}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{x(x+3)} = \frac{101}{618}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \dots + \frac{3}{x(x+3)} \right) = \frac{101}{618}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{101}{618} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{101}{618} : \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{101}{618} : \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{x+3} = \frac{101}{206} \Rightarrow \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} - \frac{101}{206} \\ &\Rightarrow \frac{1}{x+3} = \frac{103-101}{206} \Rightarrow \frac{1}{x+3} = \frac{1}{103} \Rightarrow x+3=103 \Rightarrow x=100 \end{aligned}$$

Vậy $x=100$.

Bài 14: Tìm x biết: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991} \\ &\Rightarrow 2 + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991} \\ &\Rightarrow 2 + 2 \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = 1\frac{1989}{1991} \\ &\Rightarrow 2 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = 1\frac{1989}{1991} \Rightarrow 2 \left(\frac{x-1}{2(x+1)} \right) = \frac{-2}{1991} \\ &\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{1991} \Rightarrow 1991(x-1) = -2(x+1) \Rightarrow 1991x - 1991 = -2x - 2 \\ &\Rightarrow 1991x + 2x = -2 + 1991 \Rightarrow 1993x = 1989 \Rightarrow x = \frac{1989}{1993} \end{aligned}$$

Bài 15: Tìm x biết: $1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + (-3)^x = \frac{9^{1006} + 1}{4}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} &\text{Đặt } A = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + (-3)^x. \text{ Khi đó: } 3A = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + (-3)^{x+1} \\ &\Rightarrow 3A + A = 4A = 1 + (-3)^{x+1} \Rightarrow A = \frac{(-3)^{x+1} + 1}{4} \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{(-3)^{x+1} + 1}{4} = \frac{3^{2012} + 1}{4}$

$$\Rightarrow x+1=2012 \Rightarrow x=2011$$

Bài 16: Tìm x biết: $3 + |x-3|^{12} = 2^{17} - 2^{16} - 2^{15} - \dots - 2^2$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} &\text{Đặt: } A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{16}. \text{ Tính } A \text{ ta có: } 2A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{17} \\ &\Rightarrow 2A - A = 2^{17} - 2^2 = A \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có: $3 + |x-3|^{12} = 2^{17} - A = 2^{17} - (2^{17} - 2^2) = 4 \Rightarrow |x-3|^{12} = 1^{12} \Rightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{cases}$

Bài 17: Tìm x biết: $(x-20) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{1}{198} + \dots + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2000}$

Hướng dẫn giải

Đặt $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{1}{198} + \dots + \frac{1}{1}}$. Ta có mẫu của

$$A = \left(\frac{1}{199} + 1\right) + \left(\frac{2}{198} + 1\right) + \dots + \left(\frac{198}{2} + 1\right) + 1 = \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + \frac{200}{200}$$

Khi đó $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{200 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{200}\right)} = \frac{1}{200}$

Như vậy ta có: $(x-20) \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{2000} \Rightarrow x-20 = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{10} - 20 = \frac{-199}{10}$

Bài 18: Tìm x biết: $\frac{4}{3.5} + \frac{8}{5.9} + \frac{12}{9.15} + \dots + \frac{32}{n(n+16)} = \frac{16}{25}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{4}{3.5} + \frac{8}{5.9} + \frac{12}{9.15} + \dots + \frac{32}{n(n+16)} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{2}{3.4} + \frac{4}{5.9} + \frac{6}{9.15} + \dots + \frac{16}{n(n+16)} \right) = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+16} \right) = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{n+16} = \frac{8}{25} \Rightarrow \frac{1}{n+16} = \frac{1}{3} - \frac{8}{25} = \frac{1}{75} \Rightarrow n+16 = 75$$

Bài 19: Tìm x biết: $x : \frac{1}{2} + x : \frac{1}{4} + x : \frac{1}{8} + \dots + x : \frac{1}{512} = 511$

Hướng dẫn giải

$$x : \frac{1}{2} + x : \frac{1}{4} + x : \frac{1}{8} + \dots + x : \frac{1}{512} = 511$$

$$\Rightarrow 2x + 4x + 8x + \dots + 512x = 511 \Rightarrow x(2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 512) = 511$$

Đặt $A = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 512$

$$\Rightarrow 2A = 4 + 8 + 16 + \dots + 1024 \Rightarrow 2A - A = 1024 - 2 = 1022$$

Khi đó ta có: $xA = 511 \Rightarrow x \cdot 1022 = 511 \Rightarrow x = \frac{511}{1022} = \frac{1}{2}$

Bài 20: Tìm x biết: $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + \dots + 2^{x-49} = 2^{49} - 1$

Hướng dẫn giải

Đặt: $A = 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + \dots + 2^{x-49}$

$$\Rightarrow 2A = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots + 2^{x-48} \Rightarrow 2A - A = A = 2^x - 2^{x-49}$$

Theo bài ra ta có: $2^x - 2^{x-49} = 2^{49} - 1 \Rightarrow 2^x \left(1 - \frac{1}{2^{49}}\right) = 2^{49} - 1 \Rightarrow 2^x \cdot \frac{2^{49} - 1}{2^{49}} - (2^{49} - 1) = 0$

$$\Rightarrow \frac{2^x}{2^{49}} - 1 = 0 \Rightarrow 2^{x-49} = 1 = 2^0 \Rightarrow x - 49 = 0 \Rightarrow x = 49$$

Bài 21: Tìm x biết: $x + x - 1 + x - 2 + x - 3 + \dots + x - 50 = 255$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} x + x - 1 + x - 2 + x - 3 + \dots + x - 50 &= 255 \\ \Rightarrow (x + x + x + \dots + x) - (1 + 2 + 3 + \dots + 50) &= 255 \\ \Rightarrow 51x - 1275 &= 255 \Rightarrow 51x = 1530 \Rightarrow x = 30 \end{aligned}$$

Bài 22. Tìm x, biết: $x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+30) = 1240$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+30) = 1240$$

$$x + 30.x + \frac{(30+1).30}{2} = 1240$$

$$31.x + 465 = 1240$$

$$31.x = 775$$

$$x = 25$$

$$\text{Vậy } x = 25$$

Bài 23: Tìm x biết: $2 + 4 + 6 + \dots + 2x = 210$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+30) &= 1240 \\ \Rightarrow 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x) &= 210 \Rightarrow 2 \cdot \frac{(x+1).x}{2} = 210 \Rightarrow x(x+1) = 210 = 14.15 \end{aligned}$$

Bài 24: Tìm x biết: $(x+1) + (2x+3) + (3x+5) + \dots + (100x+199) = 30200$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} (x+1) + (2x+3) + (3x+5) + \dots + (100x+199) &= 30200 \\ \Rightarrow (x + 2x + 3x + \dots + 100x) + (1 + 3 + 5 + \dots + 199) &= 30200 \\ \Rightarrow x.5050 + 10000 &= 30200 \Rightarrow 5050x = 20200 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Bài 25: Tìm x biết: $\frac{1}{14} + \frac{1}{35} + \frac{1}{65} + \dots + \frac{2}{x^2 + 3x} = \frac{1}{9}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{14} + \frac{1}{35} + \frac{1}{65} + \dots + \frac{2}{x^2 + 3x} &= \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \frac{2}{28} + \frac{2}{70} + \frac{2}{130} + \dots + \frac{2}{x(x+3)} &= \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \frac{2}{10.13} + \dots + \frac{2}{x(x+3)} &= \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{x(x+3)} \right) &= \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow x = 9 \end{aligned}$$

Bài 26: Tìm x biết: $\frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{x(x+2)} \right) = \frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{24}{35} \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} = \frac{24}{35} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{16}{35} = \frac{1}{x+2} = \frac{-9}{35} \Rightarrow x+2 = \frac{-35}{9} \Rightarrow x = \frac{-35}{9} - 2 = \frac{-53}{9}$$

Bài 27: Tìm x biết: $1+3+5+7+\dots+99=(x-2)^2$

Hướng dẫn giải

$$1+3+5+7+\dots+99=(x-2)^2 \Rightarrow \frac{(1+99)50}{2} = 50^2 = (x-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-2=50 \\ x-2=-50 \end{cases}$$

Bài 28: Tìm x biết: $\frac{(1.2+2.3+3.4+\dots+98.99).x}{26950} = 12\frac{6}{7} : \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt : $A=1.2+2.3+3.4+\dots+98.99$

Tính A ta được : $3A=1.2(3-0)+2.3(4-1)+3.4(5-2)+\dots+98.99(100-97)$

$$3A=(1.2.3-0.1.2)+(2.3.4-1.2.3)+\dots+(98.99.100-97.98.99)=98.99.100$$

$$A=\frac{98.99.100}{3}$$

Thay vào ta có : $\frac{98.99.100.x}{3.26950} = 12\frac{6}{7} : \frac{3}{2} \Rightarrow 12x = \frac{60}{7} \Rightarrow x = \frac{5}{7}$

Bài 29: Tìm x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} \right) x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1}$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1} = \left(\frac{1}{9} + 1 \right) + \left(\frac{2}{8} + 1 \right) + \left(\frac{3}{7} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1 \right) + 1$

$$\Rightarrow \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \frac{10}{7} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{1} = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right)$$

Khi đó : $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} \right) . x = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) \Rightarrow x = 10$

Bài 30: Tìm x biết: $2x + \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \frac{31}{31} + \frac{43}{42} + \frac{57}{56} + \frac{73}{72} + \frac{91}{90} = 10$

Hướng dẫn giải

Ta có : $2x + \left(1 + \frac{1}{6} \right) + \left(1 + \frac{1}{12} \right) + \left(1 + \frac{1}{20} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{90} \right) = 10$

$$\Rightarrow 2x + 8 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10} = 10$$

$$\Rightarrow 2x + 8 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = 10 \Rightarrow 2x = \frac{8}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

Bài 31: Tìm x thỏa mãn: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}$

Hướng dẫn giải

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} \right) x = \frac{22}{45}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{9.10} \right) x = \frac{22}{45}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{45} \cdot x = \frac{22}{45}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Bài 32: Tìm x biết: $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}\right)x = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \dots + \frac{2012}{100}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$$

$$\text{Khi đó: } \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \right) \cdot x = 2012 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} \right) \Rightarrow x = 2012$$

Bài 33: Tìm x biết: $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013}\right)x + 2013 = \frac{2014}{1} + \frac{2015}{2} + \dots + \frac{4025}{2012} + \frac{4026}{2013}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{2014}{1} + \frac{2015}{2} + \dots + \frac{4025}{2012} + \frac{4026}{2013} - 2013$$

$$= \left(\frac{2014}{1} - 1 \right) + \left(\frac{2015}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{4025}{2012} - 1 \right) + \left(\frac{4026}{2013} - 1 \right)$$

$$= \frac{2013}{1} + \frac{2013}{2} + \frac{2013}{3} + \dots + \frac{2013}{2012} + \frac{2013}{2013} = 2013 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} \right)$$

$$\text{Khi đó: } \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} \right) \cdot x = 2013 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2013} \right) \Rightarrow x = 2013$$

Bài 34: Tìm x biết: Cho $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{50} + x_{51} = 1$ và $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \dots = x_{49} + x_{50} = 1$,

Tính x_{51} ?

Hướng dẫn giải

$$\text{Thay vào ta có: } (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{49} + x_{50}) + x_{51} = 1$$

$$\Rightarrow 1+1+1+\dots+1+x_{51}=1 \Rightarrow 25+x_{51}=1 \Rightarrow x_{51}=-24$$

Bài 35: Cho biểu thức $C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$. Tìm x để $2^{2x-1} - 2 = C$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100} \\ \Rightarrow 2C &= 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{101} \\ \Rightarrow C &= 2C - C = 2^{101} - 2 \\ \text{Mà } 2^{2x-1} - 2 &= C \\ \Rightarrow 2^{2x-1} - 2 &= 2^{101} - 2 \\ \Rightarrow 2x-1 &= 101 \\ \Rightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

Bài 36: Tìm x biết: $\frac{2019^{100} + 2019^{96} + \dots + 2019^4 + 1}{|x - 2019|} = \frac{2019^{104} - 1}{2019^4 - 1}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{2019^{100} + 2019^{96} + \dots + 2019^4 + 1}{|x - 2019|} = \frac{2019^{104} - 1}{2019^4 - 1} \quad (*)$$

ĐK: $x \neq 2019$

Đặt $A = 2019^{100} + 2019^{96} + \dots + 2019^4 + 1$

$$\Rightarrow 2019^4 \cdot A = 2019^{104} + 2019^{100} + \dots + 2019^8 + 2019^4$$

$$\Rightarrow (2019^4 - 1) \cdot A = 2019^{104} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{2019^{104} - 1}{2019^4 - 1}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{|x - 2019|} \cdot \frac{2019^{104} - 1}{2019^4 - 1} = \frac{2019^{104} - 1}{2019^4 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x - 2019|} = 1$$

$$\Rightarrow |x - 2019| = 1$$

$$\Rightarrow x - 2019 = 1 \text{ hoặc } x - 2019 = -1$$

$$\Rightarrow x = 2020 \text{ (thỏa đk) hoặc } x = 2018 \text{ (thỏa đk).}$$

Vậy $x = 2020$ hoặc $x = 2018$.

Bài 37: Tìm x biết $(x+2)+(x+7)+(x+12)+\dots+(x+42)+(x+47)=655$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(x+2)+(x+7)+(x+12)+\dots+(x+42)+(x+47)=655$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{47-2}{5}+1\right)x + (47+2)\left(\frac{47-2}{5}+1\right):2 = 655$$

$$\Leftrightarrow 10x+245=655 \Leftrightarrow x=41$$

Vậy $x=41$

Bài 38: Cho $x = 2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010} - \dots - 2 - 1$, Tính 2010^x

Hướng dẫn giải

Đặt : $A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2010} + 2^{2011}$

Tính A ta có : $2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012} \Rightarrow 2A - A = 2^{2012} - 1 = A$

Khi đó ta có : $x = 2^{2012} - A = 2^{2012} - (2^{2012} - 1) = 1$

Vậy $2010^x = 2010^1 = 2010$

Bài 40: Tìm x biết: $\frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} &= \frac{x}{(x+2)(x+14)} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+8}\right) + \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+14}\right) &= \frac{x}{(x+2)(x+14)} \\ \Rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+14} = \frac{x}{(x+2)(x+14)} &\Rightarrow \frac{12}{(x+2)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)} \Rightarrow 12 = x \end{aligned}$$

Bài 41: Tìm x, biết : $\left(1+\frac{8}{10}\right) \cdot \left(1+\frac{8}{22}\right) \cdot \left(1+\frac{8}{36}\right) \dots \left(1+\frac{8}{8352}\right) \cdot x = 1 - \frac{8}{10}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{8}{10}\right) \cdot \left(1+\frac{8}{22}\right) \cdot \left(1+\frac{8}{36}\right) \dots \left(1+\frac{8}{8352}\right) &= \frac{18.30.44\dots 8360}{10.22.36\dots 8352} = \frac{2.9.3.10.4.11\dots 88.95}{1.10.2.11.3.12\dots 87.96} \\ &= \frac{(2.3.4\dots 88) \cdot (9.10.11\dots 95)}{(1.2.3\dots 87) \cdot (10.11.12\dots 96)} = \frac{88.9}{96} = \frac{33}{4} \end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{8}{10}\right) \cdot \left(1+\frac{8}{22}\right) \cdot \left(1+\frac{8}{36}\right) \dots \left(1+\frac{8}{8352}\right) \cdot x = 1 - \frac{8}{10} \Rightarrow \frac{33}{4} \cdot x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5} : \frac{33}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{165}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{4}{165}.$$

Bài 42: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện:

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34}$$

Hướng dẫn giải

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34} \quad (1)$$

Đặt

$$B = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n$$

$$\Rightarrow 2B = 2.(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n)$$

$$2B = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1).2^n + n.2^{n+1}$$

$$2B - B = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1).2^n + n.2^{n+1})$$

$$- (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n)$$

$$B = -2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n.2^{n+1} - 2.2^2$$

$$= - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n.2^{n+1} - 2^3$$

Đặt

$$C = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$$

$$\Rightarrow 2C = 2.(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) = 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}$$

$$2C - C = (2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}) - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$C = 2^{n+1} - 2^3$$

Khi đó $B = - (2^{n+1} - 2^3) + n.2^{n+1} - 2^3$

$$= -2^{n+1} + 2^3 + n.2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n.2^{n+1} = (n-1).2^{n+1}$$

Vậy từ (1) ta có: $(n-1).2^{n+1} = 2^{n+34}$

$$2^{n+34} - (n-1).2^{n+1} = 0$$

$$2^{n+1}.[2^{33} - (n-1)] = 0 \Rightarrow 2^{33} - n + 1 = 0 \Rightarrow n = 2^{33} + 1$$

Vậy $n = 2^{33} + 1$

Bài 43: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+11}$

Hướng dẫn giải

Đặt $S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$

$$S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

Đặt $T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$. Tính được: $T = 2T - T = 2^{n-1} - 2^3$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1).2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1).2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$$

Dạng 7 : Tổng các biểu thức không âm bằng 0

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

Hướng dẫn giải

Ta có 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x - y + 7)^{2012} \geq 0$

Và $|x - 3| \geq 0 \Rightarrow |x - 3|^{2013} \geq 0$

Do đó, từ $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$ suy ra: $(2x - y + 7)^{2012} = 0$ & $|x - 3|^{2013} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 13 \end{cases}$$

Bài 2: Tìm x, y, z biết: $\sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} + |x + y + z| = 0$

Hướng dẫn giải

Vì $\sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} \geq 0, \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} \geq 0, |x + y + z| \geq 0$ nên để

$$\sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} + |x + y + z| = 0 \text{ thì: } \begin{cases} x - 3\sqrt{5} = 0 \\ y + 3\sqrt{5} = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{5} \\ y = -3\sqrt{5} \\ z = 0 \end{cases}$$

Bài 3: Tìm a, b, c biết: $(x - 13 + y)^2 + (x - 6 - y)^2 = 0$

Hướng dẫn giải

Vì $(x - 13 + y)^2 \geq 0, (x - 6 - y)^2 \geq 0$ Nên để: $(x - 13 + y)^2 + (x - 6 - y)^2 = 0$ Thì:

$$\begin{cases} x - 13 + y = 0 \\ x - 6 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Bài 4. Tìm x, y biết $|3 + y| + |2x + y| = 0$

Hướng dẫn giải

Vì $|3 + y| \geq 0, |2x + y| \geq 0 \Rightarrow |3 + y| + |2x + y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3 + y| = 0 \\ |2x + y| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 5: Tìm x, y biết rằng: $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2x - 5)^{2012} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \geq 0$$

$$(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$$

$$\text{Mà } \Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2012} = 0 \\ (3y+4)^{2014} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 6: Tìm x, y biết: $42 - 3|y-3| = 4(2012-x)^4$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có: $42 = 3|y-3| + 4(2012-x)^4$,

Do $3|y-3| \geq 0 \Rightarrow 4(2012-x)^4 \leq 42 \Rightarrow (2012-x)^4 \leq 11 < 2^4 \Rightarrow 2012-x = 0$ hoặc

$2012-x = \pm 1$

Bài 7: Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Hướng dẫn giải

$\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$, áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \\ \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x+z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 8: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(9x^2-1)^2 + \left|x - \frac{1}{3}\right| = 0$

Hướng dẫn giải

Vì $(9x^2-1)^2 \geq 0, \left|x - \frac{1}{3}\right| \geq 0$ nên để:

$$(9x^2-1)^2 + \left|x - \frac{1}{3}\right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 9x^2-1=0 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bài 9: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(7b-3)^4 + (21a-6)^4 + (18c+5)^6 \leq 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì: } \begin{cases} (7b-3)^4 \geq 0 \\ (21a-6)^4 \geq 0 \\ (18c+5)^6 \geq 0 \end{cases} \text{ Nên để: } (7b-3)^4 + (21a-6)^4 + (18c+5)^6 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} 7b-3=0 \\ 21a-6=0 \\ 18c+5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{6}{21}, b = \frac{3}{7}, c = -\frac{5}{18}.$$

Bài 10: Giải phương trình: $y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4} \Leftrightarrow (y^2 - 2y + 3)(x^2 + 2x + 4) = 6$$

$$\Leftrightarrow [(y-1)^2 + 2] \cdot [(x+1)^2 + 3] = 6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (y-1)^2 + 3(y-1)^2 + 2(x+1)^2 + 6 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (y-1)^2 + 3(y-1)^2 + 2(x+1)^2 = 0$$

$$\text{Vì } (x+1)^2 \geq 0; (y-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Bài 11: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x+2)^2 + 2(y-3)^2 < 4$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } \begin{cases} (x+2)^2 \geq 0 \\ (y-3)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ nên ta có các TH sau :}$$

$$\text{TH1 : } \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ (y-3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{TH2 : } \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ (y-3)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{TH3 : } \begin{cases} (x+2)^2 = 1 \\ (y-3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{TH4 : } \begin{cases} (x+2)^2 = 1 \\ (y-3)^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 12: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(2x-1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì: } (2x-1)^{2008} \geq 0, \text{ và } \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0 \text{ và } |x+y-z| \geq 0$$

$$\text{nên để: } (2x-1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0 \text{ thì } \begin{cases} (2x-1) = 0 \\ y - \frac{2}{5} = 0 \\ x+y-z = 0 \end{cases}$$

Bài 13: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(4x-7)^2 - 5|7-4x| = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt: } |4x-7| = t \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |4x-7|=0 \\ |4x-7|=5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}, x=3, x = \frac{1}{2}.$$

Bài 14: Tìm x, y thỏa mãn: $2.x^{2k} + \left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} = 0 \ (k \in \mathbb{N})$

Hướng dẫn giải

Vì: $2^{2k} \geq 0$ và $\left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} \geq 0$ nên để: $2.x^{2k} + \left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} = 0$ thì:

$$\begin{cases} x^{2k} = 0 \\ y - \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = \frac{2}{3}.$$

Bài 15: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x-13+y)^2 + (x-6-y)^2 = 0$

Hướng dẫn giải

Vì: $\begin{cases} (x-13+y)^2 \geq 0 \\ (x-6-y)^2 \geq 0 \end{cases}$ Nên để: $(x-13+y)^2 + (x-6-y)^2 = 0$ thì $\begin{cases} x+y-13=0 \\ x-y-6=0 \end{cases}$

Bài 16: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(2x+3)^2 + (3x-2)^4 = 0$

Hướng dẫn giải

Vì: $\begin{cases} (2x+3)^2 \geq 0 \\ (3x-2)^4 \geq 0 \end{cases}$ Nên để: $(2x+3)^2 + (3x-2)^4 = 0$ thì $\begin{cases} 2x+3=0 \\ 3x-2=0 \end{cases}$

Bài 17: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $|x+5| + (3y-4)^{2010} = 0$

Hướng dẫn giải

Vì $|x+5| \geq 0$ và $(3y-4)^{2010} \geq 0$ Nên để: $|x+5| + (3y-4)^{2010} = 0$ Thì $\begin{cases} x+5=0 \\ 3y-4=0 \end{cases}$

Bài 18: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $42 - 3|y-3| = 4(2012-x)^4$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} 42 - 3|y-3| &= 4(2012-x)^4 \\ \Rightarrow 42 &= 3|y-3| + 4(2012-x)^4. \text{ Do } 3|y-3| \geq 0 \Rightarrow 4(2012-x)^4 \leq 42 \\ \Rightarrow (2012-x)^4 &\leq 11 \leq 2^4 \Rightarrow 2012-x=0 \text{ hoặc } 2012-x=\pm 1 \end{aligned}$$

Bài 19: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

Hướng dẫn giải

Vì $\begin{cases} (3x-5)^{2006} \geq 0 \\ (y^2-1)^{2008} \geq 0 \\ (x-z)^{2010} \geq 0 \end{cases}$ Nên để: $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$ thì $\begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

Bài 20: Tìm các số x, y, z biết: $(x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(x-1)^{2016} \geq 0 \forall x; (2y-1)^{2016} \geq 0 \forall y; |x+2y-z|^{2017} \geq 0 \forall x, y, z$

$$\Rightarrow (x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0. \text{ Dấu "=" xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^{2016} = 0 \\ (2y-1)^{2016} = 0 \\ |x+2y-z|^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ 1+2\cdot\frac{1}{2}-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

Bài 21: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(2x-1)^2 + |2y-x| - 8 = 12 - 5.2^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(2x-1)^2 + |2y-x| = 0$, Vì $\begin{cases} (2x-1)^2 \geq 0 \\ |2y-x| \geq 0 \end{cases}$,

Nên để: $(2x-1)^2 + |2y-x| = 0$ thì $\begin{cases} 2x-1=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{4}.$

Bài 22: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(|x+2|-2)(x^2-4)=0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(|x+2|-2)(x^2-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} |x+2|-2=0 \\ (x^2-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+2|=2 \\ x^2=4 \end{cases}$

Bài 23: Tìm x và y thỏa mãn $|2x-2011| + (3y+2012)^{2012} = 0$

Hướng dẫn giải

Nhận xét $\begin{cases} |2x-2011| \geq 0 \forall x \\ (3y+2012)^{2012} \geq 0 \forall y \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2x-2011=0 \\ 3y+2012=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2011}{2} \\ y=-\frac{2012}{3} \end{cases}$

Bài 24: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x+1)^{2016} + (y-1)^2 \leq 0$

Hướng dẫn giải

Vì: $\begin{cases} (x+1)^{2016} \geq 0 \\ (y-1)^2 \geq 0 \end{cases}$, Nên để: $(x+1)^{2016} + (y-1)^2 \leq 0$ thì: $\begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

Bài 25: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x-2y)^2 + (y-2001)^{2016} \leq 0$

Hướng dẫn giải

Vì: $\begin{cases} (x-2y)^2 \geq 0 \\ (y-2001)^{2016} \geq 0 \end{cases}$, Nên để: $(x-2y)^2 + (y-2001)^{2016} \leq 0$ thì: $\begin{cases} x-2y=0 \\ y-2001=0 \end{cases}$

Bài 26: Tìm a, b, c hoặc x, y, z thỏa mãn: $(x-2)^{10} + |y-x| + 3 \leq 3$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có : $(x-2)^{10} + |y-x| = 0$,

$$\text{Vì } \begin{cases} (x-2)^{10} \geq 0 \\ |y-x| \geq 0 \end{cases}, \text{ Nên để : } (x-2)^{10} + |y-x| = 0 \quad \text{Thì : } \begin{cases} x-2 = 0 \\ y-x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 2$$

Bài 27: Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{1.2}\right| + \left|x + \frac{1}{2.3}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{99.100}\right| = 100x$

Hướng dẫn giải

Vì vế trái không âm nên vế phải không âm, do đó $100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\text{Khi đó: } x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + \dots + x + \frac{1}{99.100} = 100x$$

Bài 28: Tính giá trị của biểu thức $C = 2x^5 - 5y^3 + 2015$ tại x, y thỏa mãn:

$$|x-1| + (y+2)^{20} = 0$$

Hướng dẫn giải

Do $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y

$$\text{Kết hợp } |x-1| + (y+2)^{20} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \\ (y+2)^{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Giá trị của biểu thức $C = 2x^5 - 5y^3 + 2015$ tại $x=1, y=-2$ là:

$$C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 2015 = 2057$$

Vậy $C = 2057$

Bài 29: Tìm x,y,z biết: $|x+1| + \sqrt{(y-2)^2} + (z+3)^2 = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì : } \begin{cases} |x+1| \geq 0 \\ \sqrt{(y-2)^2} \geq 0 \\ (z+3)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ nên để : } |x+1| + \sqrt{(y-2)^2} + (z+3)^2 = 0$$

$$\text{Thì } \begin{cases} |x+1| = 0 \\ \sqrt{(y-2)^2} = 0 \\ (z+3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 2, z = -3.$$

Bài 30: Tìm x biết: $\left|x + \frac{11}{17}\right| + \left|x + \frac{2}{17}\right| + \left|x + \frac{4}{17}\right| = 4x$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì : } \left|x + \frac{11}{17}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{17}\right| \geq 0, \left|x + \frac{4}{17}\right| \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Khi } x \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{11}{17}\right) + \left(x + \frac{2}{17}\right) + \left(x + \frac{4}{17}\right) = 4x \Rightarrow x = 1$$

Bài 31: Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải $\geq 0 \Rightarrow 11x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0$ ta có:

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} (tm)$$

Vậy $x = \frac{10}{11}$

Bài 32: Tìm x, y, z biết: $\sqrt{(x-3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y+3\sqrt{5})^2} + |x+y+z| = 0$

Hướng dẫn giải

Vì: $\sqrt{(x-3\sqrt{5})^2} \geq 0$, và $\sqrt{(y+3\sqrt{5})^2} \geq 0$ và $|x+y+z| \geq 0$, Nên để:

$$\sqrt{(x-3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y+3\sqrt{5})^2} + |x+y+z| = 0 \quad \text{Thì:} \quad \begin{cases} x-3\sqrt{5} = 0 \\ y+3\sqrt{5} = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

Bài 33: Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y+12| \leq 0$

Hướng dẫn giải

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0 \forall x; |3y+12| \geq 0 \forall y, \text{ do đó: } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y+12| \geq 0 \forall x, y$$

Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y+12| \leq 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y+12| = 0$

Khi đó ta có: $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y+12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}; y = -4$

Bài 34: Tìm các số x, y, z biết: $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2100} = 0$

Hướng dẫn giải

$$(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2100} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3x-5)^{2006} = 0 \\ (y^2-1)^{2008} = 0 \\ (x-z)^{2100} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = \frac{5}{3}; \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Dạng 8: Tìm ẩn dạng lũy thừa

Bài 1: Tìm số tự nhiên n, m biết : $2^m + 2^n = 2^{m+n}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có :

$$2^m \cdot 2^n - 2^m - 2^n = 0 \Rightarrow 2^m(2^n - 1) - 2^n + 1 = 1 \Rightarrow 2^m(2^n - 1) - (2^n - 1) = 1$$

$$\Rightarrow (2^m - 1)(2^n - 1) = 1 = 1 \cdot 1 \quad (do \ m, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} 2^m - 1 = 1 \\ 2^n - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^m = 2 = 2^1 \\ 2^n = 2 = 2^1 \end{cases} \Rightarrow m = n = 1$$

Bài 2: Tìm m, n nguyên dương biết : $2^m - 2^n = 256$

Hướng dẫn giải

$$Từ giả thiết ta có $m > n$: $2^m - 2^n = 256 \Rightarrow 2^{m+n-n} - 2^n = 256 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8$$$

Vì m, n là số tự nhiên và $m > n$ nên $m - n \geq 1 \Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là 1 số lẻ lớn hơn hoặc bằng 1,

$$Vế phải chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 nên $\begin{cases} 2^{m-n} - 1 = 1 \\ 2^n = 2^8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ m = 9 \end{cases}$$$

Bài 3: Tìm a, b, c nguyên dương biết : $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

Hướng dẫn giải

$$Từ giả thiết suy ra $a^2(a+3) + 5 = 5^b \Rightarrow a^2 \cdot 5^c = 5^b - 5 = 5(5^{b-1} - 1) \Rightarrow a^2 = \frac{5^{b-1} - 1}{5^{c-1}}$$$

$$Vì a, b, c là các số nguyên nên $5^{c-1} = 1 = 5^0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2, b = 2$$$

Bài 4: Tìm hai số tự nhiên x, y biết : $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

Hướng dẫn giải

$$Ta có : 2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x \Rightarrow 2^{x+1} \cdot 3^y = 2^{2x} \cdot 3^x \Rightarrow \frac{2^{2x}}{2^{x+1}} = \frac{3^y}{3^x} \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x}$$

$$Vì (2; 3) = 1 \text{ nên } x-1 = 0 \text{ và } y-x = 0 \Rightarrow y = 1$$

Bài 5: Tìm x, y biết: $10^x : 5^y = 20^y$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$10^x : 5^y = 20^y \Rightarrow 10^x = 5^y \cdot 20^y \Rightarrow 10^x = 5^y \cdot (2 \cdot 10)^y = 5^y \cdot 2^y \cdot 10^y = (2 \cdot 5)^y \cdot 10^y = 2^y \cdot 5^y \cdot 10^y \\ \Rightarrow 10^x = 10^{2y} \Rightarrow x = 2y.$$

Bài 6: Tìm a, b biết: $2^a + 124 = 5^b$

Hướng dẫn giải

$$Xét $a = 0 \Rightarrow VT = 2^0 + 124 = 125 = 5^3 \Rightarrow b = 3$$$

Xét $a \geq 1$ thì vế trái là 1 số chẵn, vế phải là 1 số lẻ suy ra vô lý.

Vậy $a=0, b=3$

Bài 7: Tìm số tự nhiên a, b biết: $10^a + 168 = b^2$

Hướng dẫn giải

Xét $a = 0 \Rightarrow b = 13$

Xét $a \geq 1 \Rightarrow 10^a + 168$ có chữ số tận cùng là 8 suy ra b^2 cũng có tận cùng là 8 (vô lý)

Vậy $a=0, b=13$

Bài 8: Tìm a, b, c hoặc x, y, z tự nhiên biết: $35^x + 9 = 2.5^y$

Hướng dẫn giải

Xét $x = 0 \Rightarrow 10 = 2.5^y \Rightarrow y = 1$

Với $x > 0 \Rightarrow VT$ có tận cùng là 4, còn vế phải có chữ số tận cùng là 2 hoặc 0 mâu thuẫn nên $x=0$ và $y=1$

Bài 9: Tìm a, b, c hoặc x, y, z tự nhiên biết: $2^a + 342 = 7^b$

Hướng dẫn giải

Xét $a = 0 \Rightarrow VT = 343 = 7^3 = 7^b \Rightarrow b = 3$

Với $a > 0$ thì VT là 1 số chẵn, còn vế phải là 1 số lẻ (mâu thuẫn)

Bài 10: Tìm a, b, c hoặc x, y, z tự nhiên biết: $3^a + 9b = 183$

Hướng dẫn giải

Vì $183:3$ nhưng $183 \nmid 9$ Nên $3^a + 9b:3$ và $3^a + 9b \nmid 9$, Mà $9b:9 \Rightarrow 3^a \nmid 9 \Rightarrow a = 1$

Khi $a=1$ suy ra $b=20$

Bài 11: Tìm a, b, c hoặc x, y, z tự nhiên biết: $5^a + 323 = b^2$

Hướng dẫn giải

Xét $a = 0 \Rightarrow VT = 1 + 323 = 324 = 8^2 = b^2 \Rightarrow b = 8$

Với $a > 0 \Rightarrow VT$ có chữ số tận cùng là 8,

Vế phải là 1 số chính phương nên không có tận cùng là 8 (mâu thuẫn).

Bài 12: Tìm a, b tự nhiên biết: $2^a + 80 = 3^b$

Hướng dẫn giải

Xét : $a = 0 \Rightarrow VT = 1 + 80 = 81 = 3^4 = 3^b \Rightarrow b = 4$

Nếu $a > 0 \Rightarrow VT$ là 1 số chẵn, còn VP là 1 số lẻ (mâu thuẫn)

Bài 13: Tìm x, y tự nhiên biết : $2x^2 + 3y^2 = 77$

Hướng dẫn giải

Do : $0 \leq 3y^2 \leq 77 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 25$, mà $2x^2$ là 1 số chẵn nên $3y^2$ là số lẻ suy ra y^2 lẻ

Suy ra $y^2 \in \{1; 9; 25\} \Rightarrow (x, y) = (1; 5), (5; 3)$.

Bài 14: Tìm các số nguyên tố x, y biết : $x^2 - 2y^2 = 1$

Hướng dẫn giải

Vì $x^2 - 1 = 2y^2$, Nếu $x:3$ vì x là nguyên tố nên $x=3, y=2$

Nếu $x \nmid 3 \Rightarrow x^2 - 1:3 \Rightarrow 2y^2:3 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x^2 = 19$ (loại)

Bài 15: Tìm các số nguyên tố x, y sao cho : $51x + 26y = 2000$

Hướng dẫn giải

Vì $17.3x = 2(1000 - 13y)$, Do 17, 3 là số nguyên tố nên $x:2$, mà x là số nguyên tố nên $x=2$

Lại có $1000 - 13y:51 \Rightarrow 1000 - 13y > 0$ và y nguyên tố suy ra tìm y

Bài 16: Tìm số tự nhiên p, q biết : $5^{2p} + 2013 = (5^{2p})^2 + q^2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } 2013 - q^2 = 25^{p^2} - 25^p = 25^p (25^p - 1)$$

Do p là số nguyên tố suy ra $2013 - q^2 : 25^2$ và $2013 - q^2 > 0$ từ đó tìm được q

Bài 17: Tìm số tự nhiên a, b biết : $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

Hướng dẫn giải

Do a, b là số tự nhiên :

$$\text{Nếu } a \geq 1 \Rightarrow 2008^a + 2008a + b > 225 \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 225 = 3.75 = 5.45 = 9.25$$

$$\text{Vì } 3b + 1 \not\equiv 3 \Rightarrow 3b + 1 > b + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ b + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow b = 8$$

Bài 18: Tìm x, y nguyên biết: $2^x + 624 = 5^y$

Hướng dẫn giải

Nếu $x=0$ thì $y=4$.

Nếu $x \neq 0$ thì vế trái là số chẵn, còn vế phải là số lẻ với mọi y (vô lý).

Bài 19: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2x^2 + 3y^2 = 77$

Hướng dẫn giải

Từ $2x^2 + 3y^2 = 77 \Rightarrow 0 \leq 3y^2 \leq 77 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 25$ kết hợp với $2x^2$ là số chẵn suy ra $3y^2$ là số lẻ suy ra y^2 là số lẻ nên $y^2 \in \{1; 9; 25\}$

$$\text{Với } y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 3 = 74 \Rightarrow x^2 = 37 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 27 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$\text{Với } y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 75 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Bài 20: Tìm x, y nguyên dương biết: $2^x - 2^y = 1024$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2^x > 2^y \Rightarrow x > y \Rightarrow 2^y (2^{x-y} - 1) = 2^{10}$, mà $2^{x-y} - 1$ là số lẻ, $2^{x-y} - 1 > 0$, và là ước của 2^{10}

$$\text{Nên } 2^{x-y} - 1 = 1 \Rightarrow 2^y = 2^{10} \Rightarrow y = 10 \text{ suy ra } x = 11$$

Bài 21: Tìm mọi số nguyên tố x, y thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra $x^2 - 1 = 2y^2$, Nếu x chia hết cho 3, vì x nguyên tố nên $x=3$ lúc đó $y=2$, (thỏa mãn)

Nếu x không chia hết cho 3 thì $x^2 - 1$ chia hết cho 3, do đó $2y^2$ chia hết cho 3 mà $(2;3)=1$

Nên y chia hết cho 3, do đó: $x^2 = 19$ (l) Vậy cặp số $(x; y)$ duy nhất tìm được là $(2; 3)$

Bài 22: Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho $2^m + 2015 = |n - 2016| + n - 2016$

Hướng dẫn giải

Nhận xét,

$$\text{Với } x \geq 0 \Rightarrow |x| + x = 2x$$

Với $x < 0 \Rightarrow |x| + x = 0$, Do đó $|x| + x$ luôn là 1 số chẵn với mọi x

Áp dụng nhận xét trên ta thấy $|n - 2016| + n - 2016$ là số chẵn suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn suy ra $m=0$.

Khi đó $|n - 2016| + n - 2016 = 2016$

Nếu $n < 2016 \Rightarrow -(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Rightarrow 0 = 2016$ (loại)

Nếu $n \geq 2016 \Rightarrow 2(n - 2016) = 2016 \Rightarrow n = 3024$ (thỏa mãn)

Vậy $(m, n) = (0; 3024)$

Bài 23: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn : $2^x + 2^y = 72$

Hướng dẫn giải

Giả sử $x > y$ thế thì ta có :

$$2^x + 2^y = 2^y (1 + 2^{x-y}) = 9 \cdot 2^3$$

Do $1 + 2^{x-y}$ là số lẻ nên $1 + 2^{x-y} = 1; 3; 9$

Ta có bảng giá trị sau :

$1 + 2^{x-y} = 1$	$2^y = 9 \cdot 2^3$ (Loại)
$1 + 2^{x-y} = 3$	$2^y = 3 \cdot 2^3$ (Loại)
$1 + 2^{x-y} = 9$	$2^y = 2^3$

Ta thấy $2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 6$

Bài 24: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $2^n - 1 \vdots 7$

Hướng dẫn giải

Với $n < 3 \Rightarrow 2^n - 1 \nmid 7$

Với $n \geq 3 \Rightarrow n = 3k$ hoặc $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$

Xét $n = 3k \Rightarrow 2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = (7 + 1)^k - 1 = 7A + 1 - 1 \nmid 7$

Xét $n = 3k + 1 \Rightarrow 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 8^k - 1 = 2(7A + 1) - 1 = 7A + 1 \nmid 7$

Xét $n = 3k + 2 \Rightarrow 2^{3k+2} - 1 = 4(7A + 1) - 1 = 27A + 4 \nmid 7$

Vậy $n = 3k$ với $k \in \mathbb{N}$

Dạng 9: Tìm ẩn dựa trên tính chất về dấu.

Bài 1: Tìm x biết:

a, $(x - 1)(x - 2) > 0$

b, $2x - 3 < 0$

c, $(2x - 4)(9 - 3x) > 0$

Hướng dẫn giải

a, Để $(x - 1)(x - 2) > 0$ thì ta có hai trường hợp :

$$\text{TH1 : } \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

$$\text{TH2 : } \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1$$

Vậy $x > 2$ hoặc $x < 1$

b, Để: $2x-3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

c, Để: $(2x-4)(9-3x) > 0$ thì ta có các trường hợp sau :

TH1: $\begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 9-3x > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 3$ hoặc TH2: $\begin{cases} 2x-4 < 0 \\ 9-3x < 0 \end{cases}$ (vô lý)

Vậy $2 < x < 3$

Bài 2: Tìm x biết:

a, $\frac{2x}{3} - \frac{3}{4} > 0$

b, $\left(\frac{2}{3x} - 4\right) \frac{5}{3} > \frac{15}{6}$

Hướng dẫn giải

a, $\frac{2x}{3} - \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \frac{2x}{3} > \frac{3}{4} \Rightarrow x > \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$

b, $\left(\frac{2}{3x} - 4\right) \frac{5}{3} > \frac{15}{6} \Rightarrow \left(\frac{2}{3x} - 4\right) > \frac{15}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3x} > \frac{11}{2} \Rightarrow 3x \cdot 11 < 4 \Rightarrow x < \frac{4}{33}$

Bài 3: Tìm x biết:

a, $(x-6)(x+5) \leq 0$

b, $(x-6)(x+5) \geq 0$

c, $2x-3 < 0$

Hướng dẫn giải

a, Để $(x-6)(x+5) \leq 0$ thì :

TH1: $\begin{cases} x-6 \geq 0 \\ x+5 \leq 0 \end{cases}$ (vô lý) hoặc TH2: $\begin{cases} x-6 \leq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -5 \leq x \leq 6$

b, Để: $(x-6)(x+5) \geq 0$ Thì:

TH1: $\begin{cases} x-6 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 6$ Hoặc TH2: $\begin{cases} x-6 \leq 0 \\ x+5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq -5$

c, $2x-3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

Bài 4: Tìm x biết:

a, $(2x-4)(9-3x) > 0$

b, $(x^2-5)(x^2-25) < 0$

c, $(x+5)(9+x^2) < 0$

Hướng dẫn giải

a, Để: $(2x-4)(9-3x) > 0$ thì :

TH1: $\begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 9-3x > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 3$ hoặc $\begin{cases} 2x-4 < 0 \\ 9-3x < 0 \end{cases}$ (vô lý)

b, Để: $(x^2-5)(x^2-25) < 0$ thì:

TH1: $\begin{cases} x^2-5 > 0 \\ x^2-25 < 0 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x^2-5 < 0 \\ x^2-25 > 0 \end{cases}$

c, Để: $(x+5)(9+x^2) < 0$, Vì $x^2+9 > 0 \Rightarrow x+5 < 0 \Rightarrow x < -5$

Bài 5: Tìm x biết:

a, $(x+3)(x-4) > 0$

b, $(x^2+7)(x^2-49) < 0$

c, $(x^2+2)(x+3) > 0$

Hướng dẫn giải

a, Để: $(x+3)(x-4) > 0$ thì:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4$$

$$\text{Hoặc: } \begin{cases} x+3 < 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < -3$$

b, Để $(x^2 + 7)(x^2 - 49) < 0 \Rightarrow (x^2 + 7)(x+7)(x-7) < 0$

Vì $x^2 + 7 > 0 \Rightarrow (x+7)(x-7) < 0$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x+7 > 0 \\ x-7 < 0 \end{cases} \Rightarrow -7 < x < 7$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x+7 < 0 \\ x-7 > 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

c, Để: $(x^2 + 2)(x+3) > 0$ thì $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$

Bài 8: Tìm x biết: $4x+5-|x+3|=11, x > -3$

Hướng dẫn giải

Với $x > -3 \Rightarrow 4x+5-(x+3)=11 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$

Bài 9: Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết:

a, $3 < 3^n \leq 234$

b, $8.16 \geq 2^n \geq 4$

c, $4^{15}.9^{15} < 2^n.3^n < 18^{16}.2^{16}$

Hướng dẫn giải

a, Ta có: $3 < 3^n \leq 234 < 243 = 3^5 \Rightarrow n \in \{2; 3; 4\}$

b, Ta có: $8.16 \geq 2^n \geq 4 \Rightarrow 2^7 \geq 2^n \geq 2^2 \Rightarrow n \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

c, $4^{15}.9^{15} < 2^n.3^n < 18^{16}.2^{16} \Rightarrow 36^{15} < 6^n < 36^{16} \Rightarrow 6^{30} < 6^n < 6^{32} \Rightarrow n=31$

Bài 10: Giải bất phương trình: $\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30} \geq 0$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} \geq 0 \quad (x \neq 1; 2; 3; 4; 5; 6) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x-2)(x-6)} \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 6 \\ x \in \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $2 < x < 6$ và $x \neq 3; 4; 5$

Bài 11: Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết:

a, $32 < 2^n < 128$

b, $2.16 \geq 2^n > 4$

Hướng dẫn giải

a, $2^5 < 2^n < 2048 = 2^{11} \Rightarrow n \in \{6; 7; 8; 9; 10\}$

b, $2.16 \geq 2^n > 4 \Rightarrow 2^5 \geq 2^n > 2^2 \Rightarrow n \in \{5; 4; 3\}$

Dạng 10 : Tìm các ẩn với điều kiện nguyên.

Bài1: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét phân số } \frac{n+1}{n-2} = \frac{n-2+3}{n-2} = 1 + \frac{3}{n-2}$$

$$\text{Để } \frac{n+1}{n-2} \text{ là một số nguyên} \Leftrightarrow 3 \mid n-2 \Leftrightarrow n-2 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Từ đó ta có:

$n-2$	-3	-1	1	3
n	-1	1	3	5

Vậy $n \in U(3) = \{-1; 1; 3; 5\}$ thì $\frac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên

Bài 2: Cho $A = \frac{2n+3}{n-2} \ (n \neq 2)$.

Tìm số nguyên n để A là một số nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2n+3}{n-2} = \frac{2(n-2)+7}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2}$$

Để A là một số nguyên thì $\frac{7}{n-2}$ phải là số nguyên.

Do đó $(n-2) \in U(7)$ mà $U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$, nên ta có bảng sau:

$n-2$	-7	-1	1	7
n	-5	1	3	9
	TM $n \in \mathbb{Z}$	TM $n \in \mathbb{Z}$	TM $n \in \mathbb{Z}$	TM $n \in \mathbb{Z}$

Vậy $n \in \{-5; 1; 3; 9\}$ thì A là một số nguyên.

Bài 3: Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{x+3}{x-2}$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x = 1; 3; -3; 7$$

Bài 4: Tìm số nguyên n để $4n+5$ chia hết cho $2n+1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $4n+5 = 2 \cdot (2n+1) + 3$

Vì $2(2n+1) : 2n+1$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$

Nên để $4n+5 : 2n+1$ thì $3 : 2n+1$

$$\Rightarrow 2n+1 \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$$

Ta có bảng giá trị sau:

$2n+1$	-3	-1	1	3
n	-2	-1	0	1

Vậy $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì $4n+5 : 2n+1$

Bài 5: Tìm số tự nhiên n sao cho $2n+7 : n+1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2n+7 : n+1$

$$\Leftrightarrow 2(n+1) + 5 : (n+1)$$

$$\Leftrightarrow 5 : n+1$$

$$\Leftrightarrow n+1 \in U(5) = \{1; 5\}, \text{ vì } n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n \in \{0; 4\}$$

Bài 6: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Để $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên thì $2n+1 : n+2$ (1)

Vì $n+2 : n+2$ nên $2(n+2) : n+2$ (2)

Từ (1) và (2) $[2(n+2) - (2n+1)] : n+2$

$$\Rightarrow 3 : n+2$$

Vì $n+2$ nguyên nên $n+2 \in \{-1; -3; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-3; -5; -1; 1\}$

Vậy với $\Rightarrow n \in \{-3; -5; -1; 1\}$ thì phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là số nguyên.

Bài 7: Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên: $B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2} = \frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2} = \frac{4n+19}{n+2}$$

$$= \frac{4(n+2)+11}{n+2} = 4 + \frac{11}{n+2}$$

Để B là số tự nhiên thì $\frac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$$\Rightarrow 11 : (n+2) \Rightarrow n+2 \in U(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$$

Do $n+2 > 1$ nên $n+2 = 11 \Rightarrow n = 9$

Vậy $n = 9$ thì $B \in \mathbb{N}$

Bài 8: Tìm n để $n^3 - n^2 + n + 7 : n^2 + 1$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } n^3 - n^2 + n + 7 : n^2 + 1 \Rightarrow n^3 + n - (n^2 + 1) + 8 : n^2 + 1$$

$$\Rightarrow n(n^2 + 1) - (n^2 + 1) + 8 : n^2 + 1 \Rightarrow n^2 + 1 \in U(8)$$

$$\Rightarrow x(x+2) + (x+2) - 3 : x+2 \Rightarrow x+2 \in U(3)$$

Bài 9: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ để biểu thức sau có giá trị nguyên:

$$K = \frac{3x(x+y) - 6(x+y) + 1}{x-2}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Để : } K = \frac{3x(x+y) - 6(x+y) + 1}{x-2} \text{ có giá trị nguyên thì : } \frac{(3x-6)(x+y) + 1}{x-2} = \frac{3(x-2)(x+y) + 1}{x-2}$$

$$\text{Phải có giá trị nguyên hay } 1 : x-2 \Rightarrow x-2 \in U(1) \Rightarrow x-2 \in \{-1; 1\} \Rightarrow x = 3, x = 1$$

Bài 10: Tìm số nguyên n để $B = \frac{2n+3}{3n+2}$ có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\text{Để } B = \frac{2n+3}{3n+2} \text{ có giá trị nguyên}$$

$$\Leftrightarrow 2n+3 : 3n+2$$

$$\Rightarrow 3(2n+3) : 3n+2 \text{ và } 2(3n+2) : 3n+2$$

$$\Rightarrow 3(2n+3) - 2(3n+2) : (3n+2)$$

$$\Rightarrow 5 : 3n+2$$

$$\Rightarrow 3n+2 \in U(5) \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-1; 1\}, \text{ vì } n \in \mathbb{Z}$$

Bài 11: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Hướng dẫn giải

$\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1) : (n-2)$

Ta có $n+1 = [(n-2)+3]$

Vậy $(n+1) : (n-2)$ khi $3 : (n-2)$

$$(n-2) \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}.$$

Bài 12: Cho $A = \frac{n-2}{n+3}$

a) Tìm điều kiện của n để: A là một phân số.

b) Tìm giá trị nguyên của n để A là một số nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Để A là một phân số thì $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -3 \end{cases}$

b) Ta có: $A = \frac{n-2}{n+3} = 1 - \frac{5}{n+3}$

Để A là một số nguyên thì $(n+3) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng:

$n+3$	-5	-1	1	5
n	-8	-4	-2	2

Vậy để A là một số nguyên thì $n \in \{-8; -4; -2; 2\}$.

Bài 13: Cho $Q = \frac{27-2x}{12-x}$. Tìm các số nguyên x để Q có giá trị nguyên?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{Z}, x \neq 12$

Biến đổi: $Q = \frac{27-2x}{12-x} = \frac{2 \cdot (12-x) + 3}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$

Ta có: $2 \in \mathbb{Z}; x \in \mathbb{Z}; x \neq 12$ nên Q có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{3}{12-x} \in \mathbb{Z}$

Mà $\frac{3}{12-x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 12-x \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow x \in \{15; 13; 11; 9\}$

Vậy Q nguyên khi và chỉ khi $x \in \{15; 13; 11; 9\}$

Bài 14: Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

Hướng dẫn giải

Ta có: $xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow x(y+3) - (y+3) = 6-3$

$\Leftrightarrow (x-1)(y+3) = 3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$. Ta có bảng sau:

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+3$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	0	-2	-6	-4

Vậy $(x; y) = \{(2; 0); (4; -2); (0; 6); (-2; -4)\}$

Bài 15: Tìm các số nguyên x, y biết $x - 2xy + y - 3 = 0$

Hướng dẫn giải

Ta có : $x - 2xy + y - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$$

Lập bảng:

$2x-1$	1	5	-1	-5
$1-2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Bài 16. Cho 2 biểu thức: $A = \frac{4x-7}{x-2}; B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3}$

- Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên
- Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x-2 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Để } A \text{ nguyên thì } \frac{1}{x-2} \text{ nguyên} \Rightarrow x-2 \in U(1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

$$B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} = \frac{3x(x-3)+2}{x-3} = 3x + \frac{2}{x-3}$$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Để } B \text{ nguyên thì } \frac{2}{x-3} \text{ nguyên} \Rightarrow x-3 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

Do đó $x=5, x=1, x=4, x=2$

Vậy để B nguyên thì $x \in \{5; 1; 4; 2\}$

b) Từ câu a suy ra để A, B cùng nguyên thì $x = 1$.

Bài 17: Tìm các số nguyên x và y biết: $2xy - 6y + x = 9$.

Hướng dẫn giải

$$2xy - 6y + x = 9$$

$$2y(x-3) + (x-3) = 6$$

$$(x-3)(2y+1) = 6$$

Vì x, y là các số nguyên nên $(x-3)$ và $(2y+1)$ là các ước của 6 và $(2y+1)$ là số lẻ nên:

- $\begin{cases} x-3=6 \\ 2y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-3=-6 \\ 2y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-3=2 \\ 2y+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-3=-2 \\ 2y+1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

Bài 18: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $x - xy + y = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$x - xy + y = 0$$

$$\Rightarrow x(1-y) + y = 0$$

$$\Rightarrow (1-y) - x(1-y) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1-y) = 1 = 1.1 = -1. -1$$

1- x	1	-1
1- y	1	-1
x	0	2
y	0	2

Vậy $(x; y) = \{(0; 0); (2; 2)\}$

Bài 19: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1} \Rightarrow \frac{x+5}{5} = \frac{1}{y-1}$$

$$\Rightarrow (x+5)(y-1) = 5$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x+5$ và $y-1$ là ước của 5 mà $U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng sau:

$x+5$	-5	-1	1	5
$y-1$	-1	-5	5	1
x	-10	-6	-4	0
y	0	-4	6	2

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là :

$$(x, y) = \{(-4; 6), (0; 2), (-6; 4), (-10, 0)\}$$

Bài 20: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = \frac{2(n-5)+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5}$$

Vì $2 \in \mathbb{Z}$ nên để $M \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-5$ là ước của 3.

Lập bảng:

$n-5$	1	-1	5	-5
n	6 (tm)	4 (tm)	10 (tm)	0 (tm)

Vậy với $n \in \{0; 4; 6; 10\}$ thì M có giá trị là số nguyên.

Bài 21: Tìm các số tự nhiên x, y biết: $2xy - 5x + 2y = 148$

Hướng dẫn giải

Tìm các số tự nhiên x, y biết

$$2xy - 5x + 2y = 148 \Rightarrow (2xy + 2y) - 5x - 5 = 148 - 5 \Rightarrow 2y(x+1) - 5(x+1) = 143$$

$$\Rightarrow (x+1)(2y-5) = 143$$

Do x, y là các số tự nhiên nên $x+1$ và $2y-5$ là ước của 143

Do $143 = 1.143 = 11.13$ nên ta có bảng sau

$x+1$	1	143	11	13
$2y-5$	143	1	13	11
x	0	142	10	12
y	74	3	9	8

Bài 22: Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ biết : $3xy + x + y = 13$.

Hướng dẫn giải

Từ $3xy + x + y = 13$.

$$\Rightarrow x(3y+1) + \frac{1}{3} \cdot (3y+1) - \frac{1}{3} = 13.$$

$$\Rightarrow (3y+1) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) = 13 + \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow (3y+1) \cdot (3x+1) = 40. (*)$$

x	0 (loại)	1
y	13	3

Vì x, y nguyên dương do đó $3y+1$ và $3x+1$ cũng là hai số nguyên dương nên từ (*) suy ra $3y+1; 3x+1$ là ước của 40. Mặt khác $3x+1$ là số chia 3 dư 1 nên ta có bảng sau:

$3x+1$	1	4
$3y+1$	40	10

Vậy cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(x; y) = (1; 3)$

Bài 23: Cho $A = 2xy - 10x + 3y$. Tìm các số nguyên x, y để $A = 28$

Hướng dẫn giải

$$A = 2xy - 10x + 3y$$

$$\Rightarrow 2xy - 10x + 3y = 28$$

$$\Rightarrow 2x \cdot y - 5 \cdot 2x + 3y - 15 = 13$$

$$\Rightarrow 2x \cdot y - 5 \cdot 2x + 3 \cdot y - 5 \cdot 2 = 13$$

$$\Rightarrow 2x + 3 \cdot y - 5 = 13 = 1 \cdot 13 = 13 \cdot 1 = -1 \cdot -13 = -13 \cdot -1$$

Từ đó ta có các cặp $x; y$ là $1; 18$; $5; 6$; $-2; -8$; $-8; 4$

Bài 24: Tìm số nguyên x và y biết : $xy - x + 2y = 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $xy - x + 2y = 3 \Rightarrow xy - x + 2y - 2 = 5 \Rightarrow (xy - x) + (2y - 2) = 5$

$$\Rightarrow x(y-1) + 2(y-1) = 5 \Rightarrow (y-1)(x+2) = 5$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y-1 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$

$y-1$	-5	-1	1	5
$x+2$	-4	0	2	6

$x + 2$	-1	-5	5	1
x	-3	-7	3	-1

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn là: $(x; y) \in \{(-3; -4), (-7; 0), (3; 2), (-1; 6)\}$.

Bài 25: Tìm x, y nguyên biết: $3x + xy + 2y = 17$.

Hướng dẫn giải

$$3x + xy + 2y = 17$$

$$\Leftrightarrow x(3 + y) + 2(3 + y) = 23$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(3 + y) = 23$$

Ta có bảng:

$x + 2$	-1	1	-23	23
$3 + y$	-23	23	-1	1
x	-3	-1	-25	21
y	-26	20	-4	-2

Vậy $(x; y) \in \{(-3; -26), (-1; 20), (-25; -4), (21; -2)\}$.

Bài 26: Tìm x, y nguyên biết: $x + y + xy = 40$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } x + y + xy = 40 \Rightarrow x + y + xy + 1 = 41$$

$$\Rightarrow x(y + 1) + y + 1 = 41 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 41$$

Mà 41 chỉ có các cách phân tích thành tích của các cặp số nguyên như sau

$$41 = -1 \cdot (-41) = 1 \cdot 41 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 1; y + 1 = 41 \\ x + 1 = 41; y + 1 = 1 \\ x + 1 = -1; y + 1 = -41 \\ x + 1 = -41; y + 1 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0; y = 40 \\ x = 40; y = 0 \\ x = -2; y = -42 \\ x = -42; y = -2 \end{cases}$$

Vậy $(x, y) \in \{(40; 0); (0; 40); (-2; -42); (-42; -2)\}$

Bài 27: Tìm số nguyên x, y biết: $xy + 4x = 25 + 5y$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } xy + 4x = 25 + 5y \Leftrightarrow x(y + 4) = 25 + 5y \quad (1)$$

+) Nếu $y = -4$ thì pt (1) vô nghiệm

+) Nếu $y \neq -4$ thì pt (1) trở thành:

$$x = \frac{5y+25}{y+4} = \frac{5(y+4)+5}{y+4} = 5 + \frac{5}{y+4}$$

Để x, y nguyên thì $y+4 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Lập bảng

$y+4$	-5	-1	1	5
y	-9	-5	-3	1
x	4	0	10	6

Vậy $(x, y) = (4; -9), (0; -5), (10; -3), (6; 1)$.

Bài 28: Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn: $a+b=c+d$ và $a.b+1=c.d$. Chứng minh rằng $c=d$

Hướng dẫn giải

Từ $a+b=c+d \Rightarrow a=c+d-b$, thay vào $a.b+1=c.d$ ta được:

$$(c+d-b).b+1=c.d \Rightarrow cb+db-cd+1-b^2=0 \Rightarrow b(c-b)-d(c-b)+1=0$$

$$\Rightarrow (b-d)(c-b)=-1$$

Vì a, b, c, d là các số nguyên nên $(b-d), (c-b)$ là các số nguyên, ta có các TH sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} b-d=-1 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=b+1 \\ c=b+1 \end{cases} \Rightarrow c=d \quad \text{TH2: } \begin{cases} b-d=1 \\ c-b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=b-1 \\ c=b-1 \end{cases} \Rightarrow c=d$$

Bài 29: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2+x=3^{2019y}+1$.

Hướng dẫn giải

+) TH1: Với $y < 0$, ta có:

$VP = 3^{2019y} + 1$ không là số nguyên

$VT = x^2 + x$ là số nguyên

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

+) Với $y = 0$, ta có $x^2+x=3^{2019.0}+1 \Rightarrow x^2+x=2$

$$\Rightarrow x(x+1)=1.2=(-2).(-1)$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ hoặc } x=-2.$$

+) Với $y \geq 1$, ta có: $VP = 3^{2019y} + 1$ chia cho 3 dư 1

Vì x nguyên nên x có dạng $3k; 3k+1; 3k+2$

Với $x=3k$ và $x=3k+2$ thì $VT = x(x+1):3$

Với $x=3k+1$ thì $VT = x(x+1)$ chia cho 3 dư 2.

Do đó trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên (x, y) cần tìm là: $(1; 0), (-2; 0)$.

Bài 30. Tìm tập hợp các số nguyên x , biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45} \right) : \left(-21\frac{1}{2} \right)$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 = \frac{41}{9} \cdot \frac{18}{41} - 7 = 2 - 7 = -5$. Lại có:

$$\left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45} \right) : \left(-21\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{16}{5} \cdot \frac{5}{16} + \frac{9}{2} \cdot \frac{76}{45} \right) : \left(\frac{43}{2} \right) = \left(1 + \frac{38}{5} \right) \cdot \frac{-2}{43} = \frac{43}{5} \cdot \frac{-2}{43} = \frac{-2}{5}$$

Do đó $-5 < x < \frac{-2}{5}$ mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1\}$

CHUYÊN ĐỀ 8: SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ**I. MỘT SỐ VẤN ĐỀ LỊCH SỬ VỀ SỐ NGUYÊN TỐ.**

Số nguyên tố được nghiên cứu từ nhiều thế kỉ trước công nguyên nhưng cho đến nay nhiều bài toán về số nguyên tố vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn.

1) SÀNG ORATOSTEN (EURATOSTHENE).

Làm thế nào để tìm được tất cả các số nguyên tố trong một giới hạn nào đó, chẳng hạn từ 1 đến 100 ?

Ta làm như sau: Trước hết xóa số 1.

Giữ lại số 2 rồi xóa tất cả các bội của 2 mà lớn hơn 2.

Giữ lại số 3 rồi xóa tất cả các bội của 3 mà lớn hơn 3.

Giữ lại số 5 (số 4 đã bị xóa) rồi xóa tất cả các bội của 5 mà lớn hơn 5.

Giữ lại số 7 (số 6 đã bị xóa) rồi xóa tất cả các bội của 7 mà lớn hơn 7.

Các số 8, 9, 10 đã bị xóa. Không cần xóa tiếp các bội của các số lớn hơn 10 cũng kết luận được rằng không còn hợp số nào nữa.

Thật vậy, giả sử n là một hợp số chia hết cho 1 số a lớn hơn 10 thì do $n < 100$, $a > 10$ nên n phải chia hết cho 1 số b nhỏ hơn 10, do đó n đã bị xóa.

Nhà toán học cổ Hi Lạp Oratosten (thế kỉ III trước công nguyên) là người đầu tiên đưa ra cách này. Ông viết các số trên giấy có sậy căng trên một cái khung rồi dùng thùng các hợp số được một vật tương tự như cái sàng: các hợp số được sàng qua, các số nguyên tố được giữ lại. Bảng số nguyên tố này được gọi là sàng Oratosten.

Ví dụ:

Dùng bảng các số nguyên tố nhỏ hơn 100, hãy nêu ra cách kiểm tra một số nhỏ hơn 10000 có là số nguyên tố không ? Xét bài toán trên với các số 259, 353.

Hướng dẫn giải

Cho số $n < 10000$ ($n > 1$). Nếu n chia hết cho một số k nào đó ($1 < k < n$) thì n là hợp số. Nếu n không chia hết cho mọi số nguyên tố p ($p^2 \leq n$). thì n là số nguyên tố.

Số 259 chia hết cho 7 nên là hợp số.

Số 353 không chia hết cho tất cả các số nguyên tố p mà $p^2 \leq 353$ (đó là các số nguyên tố 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17) nên 353 là số nguyên tố.

2) SỰ PHÂN BỐ SỐ NGUYÊN TỐ

Từ 1 đến 100 có 25 số nguyên tố, trong trăm thứ hai có 21 số nguyên tố, trong trăm thứ 3 có 16 số nguyên tố, ... Trong nghìn đầu tiên có 168 số nguyên tố, trong nghìn thứ hai có 145 số nguyên tố, trong nghìn thứ ba có 127 số nguyên tố, ... Như vậy càng đi xa theo dãy số tự nhiên, các số nguyên tố càng thưa dần.

Ví dụ:

Có tồn tại một nghìn số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số ?

Hướng dẫn giải

Có. Gọi $A = 2. 3. 4. ...1001$. Các số $A + 2, A + 3, ..., A + 1001$ là 1000 số tự nhiên liên tiếp và rõ ràng đều là hợp số (đpcm).

Một vấn đề được đặt ra: có những khoảng rất lớn các số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số. vậy có thể đến một lúc nào đó không còn số nguyên tố nữa không ? Có số nguyên tố cuối cùng không ? Từ thế kỉ III trước công nguyên, nhà toán học cổ Hi Lạp Oc-lit đã chứng minh rằng: Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

Ví dụ.

Chứng minh rằng không thể có hữu hạn số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là $p_1, p_2, ..., p_n$ trong đó p_n là số lớn nhất trong các số nguyên tố.

Xét số $A = p_1 p_2 ... p_n + 1$ thì A chia hết cho mỗi số nguyên tố $p_i, (1 \leq i \leq n)$ đều dư 1 (1).

Mặt khác A là hợp số (vì nó lớn hơn số nguyên tố lớn nhất là p_n) do đó A phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó, tức là A chia hết cho một trong các số $p_i (1 \leq i \leq n)$ (2), mâu thuẫn với (1).

Vậy không thể có hữu hạn số nguyên tố (đpcm).

Qua sự phân bố các số nguyên tố, nhà toán học Pháp Bectơrăng đưa ra dự đoán: nếu $n > 1$ thì giữa n và $2n$ có ít nhất một số nguyên tố. Năm 1852, nhà toán học Nga Trêbursép đã chứng minh được mệnh đề này. Ông còn chứng minh được:

Nếu $n > 3$ thì giữa n và $2n - 2$ có ít nhất một số nguyên tố. Ta cũng có mệnh đề sau: Nếu $n > 5$ thì giữa n và $2n$ có ít nhất 2 số nguyên tố.

Ví dụ.

Cho số tự nhiên $n > 2$. Chứng minh rằng số $n! - 1$ có ít nhất một ước nguyên tố lớn hơn n .

Giải.

Gọi $a = n! - 1$. Do $n > 2$ nên $a > 1$. Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có ít nhất một ước nguyên tố. Gọi p là ước nguyên tố của a . ta sẽ chứng minh rằng $p > n$.

Thật vậy giả sử $p \leq n$ thì tích $1. 2. 3...n$ chia hết cho p , ta có $n!$ chia hết cho p , mà a chia hết cho p nên 1 chia hết cho p , vô lí.

3) CÔNG THỨC CHO MỘT SỐ NGUYÊN TỐ**Ví dụ:**

a) Chứng minh rằng mọi số nguyên tố m lớn hơn 3 đều viết được dưới dạng $6n + 1$ hoặc $6n - 1 (n \in \mathbb{N})$.

b) Có phải mọi số có dạng $6n \pm 1 (n \in \mathbb{N})$ đều là số nguyên tố hay không?

Giải:

a) Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5. Do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới một trong các dạng $6n-2, 6n-1, 6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3$. Vì m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên m không chia hết cho 2, không chia hết cho 3, do đó m không có dạng $6n-2, 6n, 6n+2, 6n+3$. vậy m viết được dưới dạng $6n+1$ hoặc $6n-1$ (ví dụ: $17 = 6 \cdot 3 - 1, 19 = 6 \cdot 3 + 1$).

b) Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1 (n \in \mathbb{N})$ đều là số nguyên tố. Chẳng hạn

$6 \cdot 4 + 1 = 25$ không là số nguyên tố (đpcm).

Liệu có công thức nào mà với mọi giá trị tự nhiên của chữ đều cho ta các số nguyên tố không? Cho đến nay, người ta chưa tìm thấy một công thức như vậy. Tuy nhiên có một số biểu thức mà với khá nhiều giá trị của chữ, biểu thức đó cho ta các số nguyên tố.

Biểu thức $2n^2 + 29$ cho ta các giá trị nguyên tố với $n = 0, 1, 2, \dots, 28$.

Biểu thức $n^2 + n + 41$ do O- le (Euler 1707 - 1783) đưa ra cho các giá trị nguyên tố với $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ (còn $n = 40$ thì $40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41$ chia hết cho 41).

Biểu thức $n^2 - 79n + 1601$ cũng cho các giá trị nguyên tố với $n = 0, 1, 2, \dots, 79$ (còn với $n = 80$ thì biểu thức bằng 41^2).

Số Phec-ma. Nhà toán học kiêm luật gia Pháp Phec- ma (Pierre de Fermat 1601 - 1665) xét biểu thức $2^m + 1$ trong đó $m = 2^n$ với $n = 0, 1, 2, 3, 4$ cho các số nguyên tố $2 + 1 = 3, 2^2 + 1 = 5, 2^4 + 1 = 17, 2^8 + 1 = 257, 2^{16} + 1 = 65537$. Với $n = 5$, được số $2^{32} + 1 = 4294967297$, Phec- ma cho rằng đó cũng là số nguyên tố và ông đưa ra giả thuyết: Biểu thức $2^m + 1$ với m là lũy thừa của 2 cho ta các số nguyên tố.

Ý kiến này đứng vững rất lâu. Mãi đến năm 1732, O- le mới bác bỏ giả thuyết trên bằng cách chỉ ra số $2^{32} + 1$ chia hết cho 641. Đây là một trong các ví dụ điển hình nhất chứng tỏ rằng phép quy nạp không hoàn toàn có thể dẫn đến sai lầm.

Các số có dạng $2^m + 1$ với m là một lũy thừa của 2 được gọi là số Phec- ma.

4). BIỂU DIỄN MỘT SỐ DƯỚI DẠNG TỔNG CÁC SỐ NGUYÊN TỐ.

Năm 1742 nhà toán học Đức Gôn- bakh viết thư báo cho O- le biết rằng ông mạo hiểm đưa ra bài toán: mọi số tự nhiên lớn hơn 5 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố. O- le trả lời rằng theo ông, mọi số chẵn lớn hơn 2 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của 2 số nguyên tố.

Nếu chúng mình được một trong hai mệnh đề trên thì chúng mình được mệnh đề còn lại. Trong 200 năm, các nhà toán học thế giới không giải được bài toán Gôn bakh- O le. Đến năm 1937, nhà toán học Liên Xô Vinôgradốp đã giải quyết gần trọn vẹn bài toán đó bằng cách chứng minh rằng: Mọi số lẻ đủ lớn đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố.

Cho đến nay bài toán Gôn bakh- O le vẫn chưa được chứng minh hoàn toàn.

Ví dụ.

Công nhận mệnh đề nói trên của O le, hãy chứng minh bài toán Gôn bakh.

Hướng dẫn giải

Cho số tự nhiên $n > 5$, ta sẽ chứng minh rằng n viết được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố. Xét hai trường hợp:

- a) Nếu n chẵn thì $n = 2 + m$ với m chẵn, $m > 3$.
- b) Nếu n lẻ thì $n = 3 + m$ với m chẵn, $m > 2$.

Theo mệnh đề O le, m chẵn, $m > 2$ nên m viết được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố.

II. SỐ NGUYÊN TỐ-HỢP SỐ

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 có 2 ước dương là 1 và chính nó.

Số nguyên tố nhỏ nhất là 2, đó là số nguyên tố chẵn duy nhất.Tất cả số nguyên tố còn lại đều là số lẻ.

2.Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 có nhiều hơn 2 ước dương.

Ước nguyên tố nhỏ nhất của một hợp số a là một số không vượt quá $\sqrt{a}$.

Phân tích một số ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng tích của nhiều thừa số, mỗi thừa số là một số nguyên tố hoặc là lũy thừa của một số nguyên tố.

Dù phân tích một thừa số ra thừa số nguyên tố bằng cách nào thì cuối cùng ta cũng được một kết quả duy nhất.

Hai hay nhiều số được gọi là nguyên tố cùng nhau khi UCLN của chúng bằng 1. Hai số tự nhiên liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

Hệ quả.

Số $a > 1$ không có ước nguyên tố nào từ 2 đến $\sqrt{a}$ thì a là một số nguyên tố.

Tập hợp số nguyên tố là vô hạn.

B.CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên.

- i)Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n .
- ii) Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n \pm 1$.
- iii) Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n \pm 1$.

Bài 1 Cho p là số nguyên tố và một trong 2 số $8p+1$ và $8p-1$ là 2 số nguyên tố, hỏi số nguyên tố thứ 3 là số nguyên tố hay hợp số?

Hướng dẫn giải

Với $p = 3$ ta có $8p+1=25$ là hợp số, còn $8p-1$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ ta có $8p-1, 8p, 8p+1$ là 3 số nguyên tố liên tiếp nên có một số chia hết cho 3. Do p là nguyên tố khác 3 nên $8p$ không chia hết cho 3, do đó $8p-1$ hoặc $8p+1$ có một số chia hết cho 3. Vậy số thứ 3 là hợp số.

Bài 2. Hai số $2^n - 1$ và $2^n + 1 (n > 2)$ có thể đồng thời là số nguyên tố được không? Tại sao?

Giải.

Trong 3 số nguyên liên tiếp $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ có một số chia hết cho 3, nhưng 2^n không chia hết cho 3, do đó $2^n - 1$ hoặc $2^n + 1$ có một số chia hết cho 3 và lớn hơn 3. Vậy $2^n - 1, 2^n + 1$ không đồng thời là số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu p và $p+2$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Giải.

Ta có: $p+(p+2)=2(p+1)$.

. p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ suy ra: $p+1:2 \Rightarrow 2(p+1):4 *$

. $p, p+1, p+2$ là 3 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p và $p+2$ không chia hết cho 3 nên: $p+1:3 \Rightarrow 2(p+1):3 **$

Từ * và ** suy ra: $2(p+1):12$. (đpcm)

Bài 4. Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

Giải.

Với $p=3$ thì $p+10=13$ và $p+14=17$ là các số nguyên tố.

Với $p>3$ thì $p = 3k \pm 1$.

Nếu $p = 3k+1$ thì $p+14 = 3k+15:3$;

Nếu $p = 3k-1$ thì $p+10 = 3k+9:3$;

Vậy với $p=3$ thì $p+10$ và $p+14$ là số nguyên tố.

Bài 5.

a) Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

b) Tìm số nguyên tố p sao cho p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

a) Trong 3 số lẻ liên tiếp có một số chia hết cho 3. Vậy trong 3 số nguyên tố đã cho phải có một số chia hết cho 3 và 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp là 3, 5, 7.

b) giả sử $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là các số nguyên tố. Vì p_1, p_2 là số nguyên tố nên $p > 2$, suy ra p lẻ. Trong hai số p_1, p_2 phải có một số chẵn, trong hai số p_3, p_4 cũng phải có một số chẵn. Chẳng hạn $p_2 = p_4 = 2$. Khi đó: $p = p_1 + 2 = p_3 + 2 \Rightarrow p_1 = p_3$. Ta có p_1, p_1+2, p_1+4 là các số nguyên tố lẻ liên tiếp nên theo câu a) $p_1 = 3$ từ đó $p = 5$. Thử lại: $5 = 3 + 2 = 7 - 2$.

Bài 6.

Tìm các số tự nhiên k để dãy: $k+1, k+2, k+3, \dots, k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Giải.

Với $k=0$ ta có dãy 1, 2, 3, ..., 10 chứa 4 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7.

Với $k=1$ ta có dãy 2, 3, 4, ..., 11 chứa 5 số nguyên tố là 2, 3, 5, 7, 11.

Với $k=2$ ta có dãy 3, 4, 5, ..., 12 chứa 4 số nguyên tố là 3, 5, 7, 11.

Với $k \geq 3$ dãy $k+1, k+2, k+3, \dots, k+10$ chứa 5 số lẻ liên tiếp, các số lẻ này lớn hơn 3 nên chia có một số chia hết cho 3, mà 5 số chẵn trong dãy hiển nhiên không là số nguyên tố. Vậy trong dãy ít hơn 5 số nguyên tố.

Tóm lại $k=1$ thì dãy $k+1, k+2, \dots, k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Bài 7.

Ta gọi p, q là hai số tự nhiên liên tiếp, nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

Giải.

Nếu 3 số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r đều có dạng $3k \pm 1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư 1. Khi đó $p^2 + q^2 + r^2 \equiv 3 \pmod{3}$ và $p^2 + q^2 + r^2 > 3$ nên $p^2 + q^2 + r^2$ là hợp số.

Vậy $p=3, q=5, r=7$, khi đó $p^2 + q^2 + r^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ là số nguyên tố.

Bài 8. Tìm 3 số nguyên tố sao cho $p^q + q^p = r$.

Giải.

Giả sử có 3 số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q + q^p = r$. Khi đó $r > 3$ nên r là số lẻ, suy ra p, q không cùng tính chẵn lẻ. Giả sử $p=2$ và q là số lẻ. Khi đó ta có $2^q + q^2 = r$. Nếu q không chia hết cho 3 thì $q^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Mặt khác vì q lẻ nên $2^q \equiv -1 \pmod{3}$, từ đó suy ra $2^q + q^2 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow r \equiv 0 \pmod{3}$, vô lí. Vậy $q=3$, lúc đó $r = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Vậy $p=2, q=3, r=17$ hoặc $p=3, q=2, r=17$.

Bài 9.

a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia của một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 30 thì kết quả ra sao?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của n lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì $(n, 30) = 1$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử p là số nguyên tố và $p = 30k + r$ với $0 < r < 30$. Nếu r là hợp số thì r có ước nguyên tố $q \leq \sqrt{30} \Rightarrow q = 2, 3, 5$. Nhưng với $q = 2, 3, 5$ thì q lần lượt chia hết cho 2, 3, 5, vô lí. Vậy $r=1$ hoặc r là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn $p = 109 = 60 \cdot 1 + 49$, 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố p khi chia cho 30 chỉ có thể dư là 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Với $r=1, 11, 19, 29$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{30}$.

Với $r=7, 13, 17, 23$ thì $p^2 \equiv 19 \pmod{30}$.

Suy ra $p^4 \equiv 1 \pmod{30}$.

Giả sử $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Khi đó $q = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_n^4 \equiv n \pmod{30} \Rightarrow q = 30k + n$ là số nguyên tố nên $(n, 30) = 1$.

Bài 10.

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên giả sử $a \leq b \leq c$.

Khi đó $ab + bc + ca \leq 3bc \Rightarrow abc < 3bc \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2$ (vì a là số nguyên tố). Với $a = 2$ ta có $2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b + c) \leq 4c \Rightarrow b < 4 \Rightarrow b = 2$ hoặc $b = 3$.

Nếu $b=2$ thì $4c < 2+4c$ thỏa với c là số nguyên tố bất kì.

Nếu $b=3$ thì $6c < 6+5c \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c=3$ hoặc $c=5$.

Vậy các cặp số (a, b, c) cần tìm là $(2, 2, p), (2, 3, 3), (2, 3, 5)$ và các hoán vị của chúng, với p là số nguyên tố.

Bài 11.

Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ được xác định như sau:

$a_1 = 2$, a_n là ước nguyên tố lớn nhất của $a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} + 1$ với $n \geq 2$.

Chứng minh rằng $a_k \neq 5$ với mọi k .

Hướng dẫn giải

Ta có $a_1 = 2, a_2 = 3$, giả sử với $n \geq 3$ nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 2.3.a_3 \dots a_{n-1} + 1$ thì A không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra $A = 5^m$ với $m \geq 2$, suy ra $A-1 = 5^m - 1 : 4$.

Mà $A-1 = 2.3.a_3 \dots a_{n-1}$ không chia hết cho 4 do $a_3, \dots, a_{n-1}$ là các số lẻ, vô lí. Vậy A không có ước nguyên tố của 5, tức là $a_k \neq 5, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 12.

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Giải.

Với $p=2$ ta có $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 4$ không là số nguyên tố.

Với $p=3$ ta có $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Với $p>3$ ta có $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$. Vì p lẻ và p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 : 3$ và $2^p + 1 : 3$, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy, với $p=3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Dạng 2. áp dụng định lí fermat.

p là số nguyên tố và $(a, p)=1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Bài 1.

Nhà toán học Pháp Fermat đã đưa ra công thức $2^{2^n} + 1$ để tìm các số nguyên tố với mọi n tự nhiên.

1. Hãy tính giá trị của công thức này khi $n=4$.

2. Với giá trị này hãy chứng tỏ ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối bằng tổng các chữ số còn lại.

b) Tổng bình phương các chữ số là số chính phương.

c) Hiệu giữa tổng các bình phương của hai chữ số đầu và cuối với tổng các bình phương của các chữ số còn lại bằng tổng các chữ số của số đó.

Giải.

1. Ta thay $n=4$ vào công thức Fermat và được:

$2^{2^4} + 1 = 65537$ là số nguyên tố.

2. Số nguyên tố 65537 có ba tính chất sau:

- a) Tổng hai chữ số đầu và cuối $6+7=13$ đúng bằng tổng ba chữ số còn lại $5+5+3=13$.
 b) Tổng bình phương các chữ số $6^2 + 5^2 + 5^2 + 3^2 + 7^2 = 36 + 25 + 25 + 9 + 49 = 144$ là số chính phương vì $144 = 12^2$.
 c) Tổng bình phương của hai chữ số đầu và cuối là $6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$. Tổng các bình phương của ba chữ số còn lại là $5^2 + 5^2 + 3^2 = 25 + 25 + 9 = 59$. Tổng các chữ số đó là $6+5+5+3+7=26$.
 Ta nhận thấy rằng $85-59=26$. Hiệu này đúng bằng tổng các chữ số của số nguyên tố 65537.

Bài 2

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng: $2^{2^{10n+1}} + 19$ và $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là những hợp số.

Giải.

Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}} + 19 \vdots 23$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có: $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n+1} = 11k + 2, (k \in \mathbb{N})$.

Theo định lý Fermat:

$$2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} \equiv 4 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} + 19 \vdots 23.$$

Mặt khác: $2^{2^{10n+1}} + 19 > 23$ nên $2^{2^{10n+1}} + 19$ là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh: $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 \vdots 11$ với mọi $n \geq 1$.

Bài 3.

Tìm số nguyên tố p sao cho $2^p + 1$ chia hết cho p .

Giải.

Giả sử p là số nguyên tố thỏa: $2^p + 1 \vdots p$.

Theo định lý Fermat:

$$2^p \equiv 2 \pmod{p} \Rightarrow 2^p - 2 \vdots p \Rightarrow 3 = (2^p + 1) - (2^p - 2) \vdots p \Rightarrow p = 3.$$

Với $p=3$ ta có $2^p + 1 = 9 \vdots 3$.

Bài 4.

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n thỏa $n.2^n - 1$ chia hết cho p .

Giải.

Ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ta tìm $n = (p-1)$ sao cho $n.2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Ta có: $n.2^n = m(p-1).2^{m(p-1)} \pmod{p} \Rightarrow n.2^n \equiv -m \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow m = kp - 1, (k \in \mathbb{N}^*)$.

Vậy, với $n = (kp - 1)(p - 1), (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $n.2^n - 1 \vdots p$.

Bài 5.

Cho p là số nguyên tố, chứng minh rằng số $2^p - 1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk + 1$.

Giải.

Gọi q là ước nguyên tố của $2^p - 1$ thì q lẻ, nên theo định lý Fermat:

$2^{q-1}-1:q \Rightarrow (2^p-1, 2^{q-1}-1) = 2^{(p,q-1)}-1:q \Rightarrow q-1:p$, vì nếu $(q-1, p)=1$ thì $1:q$, vô lí.

Mặt khác: $q-1$ chẵn suy ra $q-1:2p \Rightarrow q=2pk+1$.

Bài 6.

Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m = \frac{9^p-1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$.

Giải.

Ta có: $m = \frac{3^p-1}{2} \cdot \frac{3^p+1}{4} = a.b$, với $a = \frac{3^p-1}{2}, b = \frac{3^p+1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m = 9^{p-1} + 9^{p-2} + \dots + 9 + 1$ và p lẻ nên m lẻ và $m \equiv 1 \pmod{3}$. Theo định lí Fermat, ta có: $9^p - 9 : p$.

$(p, 8)=1$ nên $9^p - 9 : 8p \Rightarrow m-1 : \frac{9^p-9}{8} : p$.

Vì $m-1:2$ nên $m-1:2p$, khi đó: $3^{m-1}-1:3^{2p}-1:\frac{9^p-1}{8}=m$. (đpcm).

Bài 7.

Chứng minh rằng dãy số $2003+23k$ với $k=1,2,3,\dots$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

Giải.

Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$$2003+23k = p^n \quad (1).$$

Trong đó k, n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên $(p, 23)=1$.

Theo định lí nhỏ Fermat thì $p^{22}-1$ chia hết cho 23, suy ra p^{22t} có dạng $p^{22t} = 1+23s$ với mọi số nguyên dương t .

Từ đó $p^{22t+n} = (1+23s)p^n = p^n + 23s.p^n = 2003+23k+23s.p^n$ hay

$$p^{22t+n} = 2003+23(k+sp^n) \text{ với mọi } t=1,2,3,\dots$$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn (1). Chẳng hạn:

$$\text{Với } p=2 \text{ có } 2003+23.91=2^{12}$$

$$\text{Với } p=3 \text{ có } 2003+23.8=3^7$$

$$\text{Với } p=4 \text{ có } 2003+23.6=2141$$

$$\text{Với } p=2003 \text{ thì tồn tại } k \text{ theo định lí Fermat thỏa mãn } 2003+23k=2003^{23}.$$

Bài 8.

Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

Giải:

Gọi bảy số nguyên tố là $p_1, p_2, p_3, \dots, p_7$.

Ta có:

$$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 = p_1^6 + p_2^6 + p_3^6 + p_4^6 + p_5^6 + p_6^6 + p_7^6 \quad (*)$$

Ta cần dùng định lý Fermat nhỏ:

Nếu số nguyên a không chia hết cho 7 thì $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$. (Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3 = (7k+r)^3 = 7t \pm 1$ với mọi r thỏa mãn $0 \leq r \leq 6$, còn t là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có k số khác 7 với $0 \leq k \leq 7$.

. Nếu $k = 0$, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6 + 7^6 + 7^6 + 7^6 + 7^6 + 7^6 + 7^6 \text{ thỏa mãn } (*).$$

. Nếu $k = 7$, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lý Fermat, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.

Dạng 3: Phương pháp phân tích.

Bài 1.

Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để:

- $n^4 + 4$ là số nguyên tố.
- $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n).$$

Nếu $n^4 + 4$ là số nguyên tố thì $n^2 - 2n + 2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Thử lại: Với $n = 1$ thì $n^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố.

Vậy, với $n = 1$ thì $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

$$b) \text{ Ta có: } n^{2003} + n^{2002} + 1 = n^2(n^{2001} - 1) + n(n^{2001} - 1) + n^2 + n + 1.$$

Với $n > 1$ ta có:

$$n^{2001} - 1; n^3 - 1; n^2 + n + 1 \quad \text{do} \quad \text{đó:} \quad n^{2003} + n^{2002} + 1; n^3 + n + 1 \quad \text{và} \quad n^2 + n + 1 > 1 \quad \text{nên}$$

$$n^{2003} + n^{2002} + 1 \text{ là hợp số.}$$

Với $n = 1$ thì $n^{2003} + n^{2002} + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Bài 2.

- Tìm các số nguyên số p để $2p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.
- Tìm các số nguyên tố p để $13p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Giải.

a) Giả sử $2p+1 = n^3$ (với $n \in \mathbb{N}$); n là số lẻ nên $n = 2m+1$ ($m \in \mathbb{N}$), khi đó

$$2p+1 = (2m+1)^3 \Rightarrow p = m(4m^2 + 6m + 3).$$

Vì p là số nguyên tố nên $m=1$, suy ra $p=13$.

Thử lại: $2p+1=2.13+1=27=3^3$. Vậy $p=13$.

b) Giả sử $13p+1=n^3 (n \in \mathbb{N})$; $p \geq 2$ suy ra $n \geq 3$.

$$13p+1=n^3 \Rightarrow 13p=(n-1)(n^2+n+1).$$

13 và p là các số nguyên tố, mà $n-1 > 1$ và $n^2+n+1 > 1$ nên $n-1=13$ hoặc $n-1=p$.

i) Với $n-1=13$ thì $n=14$, khi đó $13p=n^3-1=2743 \Rightarrow p=211$ là số nguyên tố.

ii) Với $n-1=p$ thì $n^2+n+1=13 \Rightarrow n=3$, khi đó $p=2$ là số nguyên tố.

Vậy với $p=2, p=211$ thì $13p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 3.

Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa $x^2 - 2y^2 = 1$.

Giải.

Giả sử x, y là các số nguyên tố thỏa: $x^2 - 2y^2 = 1$. Khi đó $x^2 = 2y^2 + 1$, suy ra x là số lẻ, đặt $x = 2n+1 (n \in \mathbb{N}^*)$. Ta có:

$$(2n+1)^2 = 2y^2 + 1 \Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 = 2y^2 + 1 \Rightarrow y^2 = 2(n^2 + n) : 2 \Rightarrow y : 2, \text{ mà } y \text{ là số nguyên tố nên suy ra } y=2.$$

Với $y=2$, ta có $x=3$.

Thử lại với $x=3, y=2$ thì $x^2 - 2y^2 = 1$.

Bài 4.

Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa $x^y + 1 = z$.

Giải.

Vì x, y là các số nguyên tố nên $x \geq 2, y \geq 2$ suy ra $z \geq 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn suy ra $x=2$, khi đó $z = 2^y + 1$.

Nếu y lẻ thì $2^y + 1 : 3$, suy ra $z : 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra $y=2, z = 2^2 + 1 = 5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x = y = 2; z = 5$.

Bài 5.

Chứng minh rằng nếu $1+2^n+4^n (n \in \mathbb{N}^*)$ là số nguyên tố thì $n=3^k$ với $k \in \mathbb{N}$.

Giải.

Đặt $n = 3^k \cdot m$ với $(m, 3)=1$. Giả sử $m > 1$, xét hai trường hợp:

i) $m = 3l+1 (l \in \mathbb{N}^*)$. Ta có:

$$1+2^n+4^n = 1+2^{3^k(3l+1)} + 4^{3^k(3l+1)} = 1+a^{(3l+1)} + a^{(6l+2)}, \text{ (với } a=2^{3^k}), \text{ suy ra}$$

$$1+2^n+4^n = a(a^{3l}-1) + a^2(a^{6l}-1) + a^2 + a + 1 : a^2 + a + 1 \Rightarrow 1+2^n+4^n \text{ là hợp số.}$$

ii) $m = 3l+2, (l \in \mathbb{N}^*)$. Ta có:

$$1+2^n+4^n = 1+2^{3^k(3l+2)} + 4^{3^k(3l+2)} = 1+a^{3l+2} + a^{6l+4} = a(a^{6l+3}-1) + a^2(a^{3l}-1) + a^2 + a + 1 : a^2 + a + 1$$

(với $a=2^{3^k}$).

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy $m=1$ tức là $n=3^k$.

Bài 6.

Cho $a, b, c, d \in N^*$ thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng: $A=a^n+b^n+c^n+d^n$ là hợp số với mọi $n \in N$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $(a, b)=t$, khi đó: $a=ta_1, c=tc_1$ với $((a_1, c_1)=1$.

Từ $ab=cd$ suy ra $a_1b=c_1d \Rightarrow b:c_1$.

Đặt: $b=kc_1 \Rightarrow c_1d=a_1.kc_1 \Rightarrow d=ka_1$.

Khi đó: $A=a^n+b^n+c^n+d^n=t^n a_1^n + k^n c_1^n + t^n c_1^n + k^n a_1^n = (k^n + t^n)(a_1^n + c_1^n)$.

Vì $k, t, a_1, c_1 \in N^*$ nên A là hợp số.

Bài 7.

Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ ($n \geq 1$).

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$p = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Với $n=2$ ta có $p=2$.

Với $n=3$ ta có $p=5$.

Với $n > 3$ thì $\frac{n-1}{2} > 1$ và $n+2 > 1$ nên p là hợp số.

Vậy với $n=2, n=3$ thì p là số nguyên tố có dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Bài 8.

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

Giải.

Vì a, b có vai trò như nhau nên có thể giả sử $a > b$.

Giả sử $\frac{ab}{|a-b|} = p$ với p là số nguyên tố.*

Suy ra $ab:p \Rightarrow a:p$ hoặc $b:p \Rightarrow p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Từ * ta có $ab=ap-bp$ $(a+p)(p-b)=p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+p=p^2 \\ p-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=p^2-p \\ b=p-1 \end{cases}$

Với $p=2$ ta có $\overline{ab}=21$ hoặc $\overline{ab}=12$.

Với $p=3$ ta có $\overline{ab}=62$ hoặc $\overline{ab}=26$.

Với $p=5$ và $p=7$ ta có a có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

Bài 9.

Cho các số $p = b^c + a, q = a^b + c, r = c^a + b$ là các số nguyên tố ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Giải.

Ba số a, b, c có ít nhất hai số có cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử a, b cùng chẵn hoặc cùng lẻ, khi đó $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn, vậy $p=2$.

Từ đó suy ra $a = b = 1; q = c + 1$ và $r = c + 1$ nên $q=r$.

Bài 10.

a) Cho $2^k + 1$ là số nguyên tố (gọi là nguyên tố Fermat). Chứng minh rằng $k = 0$ hoặc $k = 2^n$.

b) Cho $2^k - 1$ là số nguyên tố (gọi là số nguyên tố Mersenne).

Chứng minh rằng k là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử phản chứng rằng $k > 0$ và $k \neq 2^n$ với mọi n .

Khi đó $k = 2^n \cdot t$, với t lẻ > 1 . Vô lí với $2^k + 1$ là số nguyên tố.

Vậy $k = 0$ hoặc $k = 2^n$.

b) Giả sử $k = m \cdot t$ với $1 < t < k$, khi đó $2^k - 1 = (2^t)^m - 1 = (2^t - 1)(2^{t(m-1)} + \dots + 1)$ là hợp số vì $2^t - 1 > 1$.

Vậy k là số nguyên tố.

Dạng 4. Giải phương trình nghiệm nguyên nhờ sử dụng tính chất số nguyên tố.

Trong nhiều trường hợp khi giải phương trình nghiệm nguyên dẫn đến việc xét các số nguyên tố của số dạng $n = a^{2^t} + b^{2^t}$.

Xin nêu ra một số tính chất của ước số nguyên tố của số n để sử dụng vào giải phương trình.

Mệnh đề 1. Nếu số nguyên tố $p = 2^t k + 1$ với các số nguyên dương t, k và k lẻ, là ước của số $n = a^{2^t} + b^{2^t}$ thì p là ước số chung của a và b .

Chứng minh: Giả sử p không là ước số của số a thì p cũng không là ước số của số $b \Rightarrow (a, p) = (b, p) = 1$. Theo định lí nhỏ Fermat thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ hay $a^{2^t k} \equiv 1 \pmod{p}$.

Tương tự $b^{2^t k} \equiv 1 \pmod{p}$ suy ra $a^{2^t k} + b^{2^t k} \equiv 2 \pmod{p}$ *

Mặt khác sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ ta có $(a^{2^t})^k + (b^{2^t})^k = (a^{2^t} + b^{2^t}) \cdot M = n \cdot M$ trong đó k lẻ và M là số nguyên.

Theo giả thiết $n: p \Rightarrow (a^{2^t} + b^{2^t}): p$, mâu thuẫn với *. Tương tự p không là ước của số p thì p không là ước của số a cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy số nguyên tố p phải là ước số chung của số a và số b .

Mệnh đề 2: Giả sử a và b nguyên tố cùng nhau thì mọi ước số nguyên tố lẻ của $a^2 + b^2$ chỉ có dạng $4m + 1$ (mà không có dạng $4m + 3$) trong đó m là số nguyên dương.

Chứng minh: Xét ước số nguyên tố $p = 4m + 3 = 2(2m + 1) + 1$. Theo mệnh đề 1 nếu p là ước số nguyên tố của $n = a^2 + b^2$ thì p là ước số chung của a và $b \Rightarrow p = 1$, mâu thuẫn. Vì p lẻ nên p chỉ có dạng $p = 4m + 1$.

Ta thử vận dụng các tính chất trên vào giải một số phương trình nghiệm nguyên dưới đây.

Bài 1. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 - y^3 = 7 \quad (1)$$

Giải:

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2 + 1 = y^3 + 2^3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4) \quad (2)$$

Nếu y chẵn thì vế phải của (2) chia hết cho 4 $\Rightarrow x$ lẻ, $x = 2t + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 4t^2 + 4t + 2$ không chia hết cho 4, mâu thuẫn.

Vậy y là số lẻ, $y = 2k + 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 = 4k^2 + 3$ nên nó phải có ước số nguyên tố lẻ dạng $4m + 3$ (vì tích các số dạng $4m + 1$ lại có dạng $4k + 1$). Suy ra $x^2 + 1$ có ước số nguyên tố dạng $p = 4m + 3$, trái với mệnh đề 2.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 2.

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.

Giải.

Giả sử $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ nguyên dương và k là ước số của $1995 = 5.3.7.19 = 5n$ với $n =$

$3.7.19$. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng $2(2m + 1) + 1 = 4m + 3$

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d = (x, y)$ thì $x = du, y = dv$ với $(u, v) = 1$.

$$\text{Theo giả thiết } x^2 + y^2 = k(x - y) \Leftrightarrow d(u^2 + v^2) = k(u - v) \quad (1).$$

Xét hai trường hợp:

1) k là ước số của $n \Rightarrow k$ có ước số nguyên tố dạng $4m + 3$.

Áp dụng mệnh đề 2 vào (1) thì $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của $d \Rightarrow d = kt$. Từ (1) có $t(u^2 + v^2) = u - v$, do đó $u^2 < u^2 + v^2 \leq u - v < u \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

2) $k = 5m$ với m là ước số của m . Lúc đó (1) trở thành $d(u^2 + v^2) = 5m(u - v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d . Suy ra $d = m.t$. Từ đó ta có

$$t(u^2 + v^2) = 5(u - v) \quad (2)$$

Từ (2) có $u^2 + v^2 \leq 5(u - v)$

$$A = u^2 + v^2 - 5(u - v) \leq 0 \quad (3)$$

Mặt khác

$4A = 4u^2 - 20u + 25 + 4v^2 + 20v + 25 - 50 = (2u - 5)^2 + (2v + 5)^2 - 50 \geq 1^2 + 7^2 - 50 \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$ Kết hợp với (3) phải có $A = 0$. Điều này xảy ra chỉ khi $2u - 5 = \pm 1$ và $v = 1$, nghĩa là $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

Từ $A = 0$ và (2) suy ra $t = 1 \Rightarrow d = m$. Các số x, y phải tìm là $\begin{cases} x = 3m \\ y = m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2m \\ y = m \end{cases}$ trong đó m là ước của $n = 3.7.19$, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau: 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

Bài 3.

Tìm số nhỏ nhất trong tập hợp các số chính phương dạng $15a + 16b$ và $16a - 15b$ với a, b là các số nguyên dương nào đó.

Giải.

Giả sử $15a + 16b = m^2$ và $16a - 15b = n^2$ (1) với m, n là các số nguyên dương.

Khi đó:

$$m^4 + n^4 = (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2)$$

$$\text{hay } m^4 + n^4 = 13.37(a^2 + b^2) \quad (2)$$

Các số nguyên tố 13 và 37 đều có dạng $p = 2^2k + 1$ với k lẻ.

Giả sử $(m, n) = d \Rightarrow m = du, n = dv$ với $(u, v) = 1$ thì (2) trở thành $d^4(u^4 + v^4) = 481(a^2 + b^2)$ (3)

Vì $(u, v) = 1$ nên $u^4 + v^4$ không chứa các ước số nguyên tố 13 và 37 do đó 481 là ước của $d \Rightarrow d = 481t$. Để cho m, n nhỏ nhất, ta lấy $t = 1$. Lúc đó (3) trở thành $481^3(u^4 + v^4) = a^2 + b^2$ (4)

$$\text{Từ (1) có } m^2 - n^2 = 31b - a \text{ hay } 481^3(u^2 - v^2) = 31a - b \quad (5).$$

Có thể chọn $u = v = 1$ để m, n nhỏ nhất, lúc đó $a = 31b$ và $a^2 + b^2 = 481^3.2$. Từ đó có $b = 481$ và $a = 31.481$ suy ra $m = n = 481$.

Bài 4.

Tìm số có 3 chữ số mà có đúng 5 ước.

Giải.

Giả sử p và q là hai số nguyên tố khác nhau, khi đó pq có 4 ước đó là 1, p , q , pq và số p^2q có 6 ước đó là 1, p , p^2 , q , pq , p^2p . Do đó số phải tìm có dạng p^n .

Vì số p^n có $n + 1$ ước nên muốn có đúng 5 ước thì rõ ràng $n = 4$.

Số p^4 là số có 3 chữ số khi $p = 5$.

Vậy số phải tìm là $5^4 = 625$.

Bài 5.

Tìm 3 số nguyên tố biết rằng một trong ba số đó bằng hiệu các lập phương của hai số kia.

Giải.

Gọi ba số nguyên tố đó là a, b, c . Ta có $c = a^3 - b^3$ chẳng hạn. Thế thì
 $c = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Muốn c là số nguyên tố thì $a - b = 1$, điều này chỉ xảy ra khi các số nguyên tố là $a = 3, b = 2$. Suy ra: $c = 27 - 8 = 19$.

Vậy ba số nguyên phải tìm là 2; 3; 19.

Bài 6.

Xét dãy số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17;... ta lập hai dãy số $5 = 2 + 3$; $8 = 3 + 5$; $12 = 5 + 7$; $18 = 7 + 11$; $24 = 11 + 13$; ... và $6 = 2.3$; $15 = 3.5$; $35 = 5.7$; $77 = 7.11$; $143 = 11.13$; ... Có hay không một số hạng nào đó của dãy thứ nhất bằng một số hạng nào đó của dãy thứ hai.

Giải.

Trước hết ta nhận xét rằng:

. Ở dãy thứ nhất các số hạng theo thứ tự là tổng của hai số nguyên tố liên nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 5) đều là chẵn.

. Ở dãy thứ hai các số hạng theo thứ tự là tích của hai số nguyên tố liên nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 6) đều là lẻ.

Do đó ta có thể kết luận rằng: không có một số hạng nào của dãy thứ nhất bằng một số hạng của dãy thứ hai.

Bài 7.

Tìm số nguyên tố p biết rằng $p + 2$ và $p + 4$ cũng là số nguyên tố.

Giải.

Do $p \neq 1$ vì 1 không phải là số nguyên tố, nên p có thể có dạng $p = 3k$.

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3$ là hợp số.

Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 4 = 3k + 6$ cũng là hợp số.

Do đó p chỉ có thể bằng 3 và $p + 2 = 3 + 2 = 5$ là số nguyên tố,
 $p + 4 = 3 + 4 = 7$ là số nguyên tố.

Bài 8.

Có bao nhiêu số có ba chữ số mà mỗi chữ số của nó là ước nguyên tố của chúng?

Giải.

Các ước nguyên tố có 1 chữ số là: 2; 3; 5 và 7. Nếu số phải tìm bắt đầu bằng chữ số 2 thì nó phải chia hết cho 2 và tận cùng bằng 2. Chữ số thứ hai phải là 2, vì số 232 không chia hết cho 3, số 252 không chia hết cho 5 và số 272 không chia hết cho 7. Vậy số phải tìm là 222.

Tương tự số phải tìm mà bắt đầu bằng chữ số 5 thì đó là số 555.

Bây giờ nếu bắt đầu bằng 3 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 3, do đó chúng chỉ có thể là 3 và 3 hoặc 5 và 7.

Thử lại thấy rằng chỉ có số 333 là thích hợp.

Cuối cùng nếu bắt đầu bằng 7 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 7. Thử lại thấy rằng chỉ có hai số 777 và 735 là thích hợp.

Tóm lại có 5 số thỏa mãn bài ra là: 222; 333; 555; 735; 777.

Bài 9.

Một xí nghiệp điện tử trong một ngày đã giao cho một cửa hàng một số máy tivi. Số máy này là một số có ba chữ số mà nếu tăng chữ số đầu lên n lần, giảm các chữ số thứ hai và thứ ba đi n lần thì sẽ được một số mới lớn gấp n lần số máy đã giao. Tìm n và số máy tivi đã giao.

Giải.

Giả sử số máy tivi đã giao là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Ta có:

$$100(a + n) + 10(b - n) + (c - n) = n(100a + 10b + c) \text{ hay}$$

$$100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn.$$

Từ đó ta được:

$$100a + 10b + c = \frac{89n}{n-1}.$$

Nhưng 89 là số nguyên tố nên hoặc $n - 1$ phải bằng 1 hoặc n phải chia hết cho $n - 1$.

Trong cả hai trường hợp ta đều tìm được $n = 2$ và $\overline{abc} = 178$.

Vậy số máy tivi đã giao là 178.

Bài 10.

Những số nguyên tố nào có thể là ước của số có dạng $111...11$?

Giải.

Trước hết ta nhận xét rằng số có dạng $111...11$ không chia hết cho 2 số nguyên tố 2 và 5.

Giả sử p là số nguyên tố khác 2 và 5. Ta hãy xét $p + 1$ số sau:

$$1, 11, 111, 1111, \dots, 111...11.$$

ít nhất hai trong các số trên khi chia cho p có số dư giống nhau, thế thì hiệu của chúng $11...1100...0$ chia hết cho p .

vậy số có dạng $111...11$ có ước là tất cả số nguyên tố trừ hai số nguyên tố 2 và 5.

Dạng 5. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau.

Hai số nguyên tố cùng nhau là hai số có ước chung lớn nhất bằng 1. Nói cách khác chúng chỉ có ước chung duy nhất bằng 1.

Bài 1.

Chứng minh rằng:

- Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.
- Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.
- $2n + 1$ và $3n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Giải.

- a) Gọi $d \in \text{ƯC}(n, n+1) \Rightarrow (n+1) - n : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$. Vậy n và $n + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.
- b) Gọi $d \in \text{ƯC}(2n+1, 2n+3) \Rightarrow (2n+3) - (2n+1) : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d \in \{1, 2\}$. Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy $d=1$.
- c) Gọi $d \in \text{ƯC}(2n+1, 3n+1) \Rightarrow 3(2n+1) - 2(3n+1) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow 1 : d$.

Bài 2.

Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau.

- a) a và $a+b$.
 b) a^2 và $a+b$.
 c) ab và $a+b$.

Giải.

a) Gọi $d \in \text{ƯC}(a, a+b) \Rightarrow (a+b) - a : d \Rightarrow b : d$. Ta lại có $a : d$ nên $d \in \text{ƯC}(a, b)$, do đó $d = 1$ (vì a, b là hai số nguyên tố cùng nhau).

Vậy $(a, a+b) = 1$.

b) Giả sử a^2 và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d , do đó b cũng chia hết cho d . Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d , trái với giả thiết $(a, b) = 1$.

Vậy a^2 và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Giả sử ab và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d . Tồn tại một trong hai thừa số a và b , chẳng hạn là a , chia hết cho d , do đó b cũng chia hết cho d , trái với $(a, b) = 1$.

Vậy $(ab, a+b) = 1$.

Bài 3.

Tìm số tự nhiên n để các số $9n+24$ và $3n+4$ là các số nguyên tố cùng nhau.

Giải.

Giả sử $9n+24$ và $3n+4$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$9n+24 - 3(3n+4) : d \Rightarrow 12 : d \Rightarrow d \in \{2, 3\}.$$

Điều kiện để $(9n+24, 3n+4) = 1$ là $d \neq 2$ và $d \neq 3$. Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $3n+4$ không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong hai số $9n+4$ và $3n+4$ không chia hết cho 2. Ta thấy:

$$9n+4 \text{ là số lẻ} \Leftrightarrow 9n \text{ lẻ} \Leftrightarrow n \text{ lẻ},$$

$$3n+4 \text{ là số lẻ} \Leftrightarrow 3n \text{ lẻ} \Leftrightarrow n \text{ lẻ}.$$

Vậy điều kiện để $(9n+4, 3n+4) = 1$ là n là số lẻ.

Phần bài tập tự luyện.**Dạng 1:**

1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

- a) $p+2$ và $p+10$.

- b) $p + 10$ và $p + 20$.
 c) $p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14$.
2. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.
3. Chứng minh rằng nếu $a, a + k, a + 2k$ ($a, k \in \mathbb{N}^*$) là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì k chia hết cho 6.
4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 24.
5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r . Tìm r .
6. Một số nguyên tố p chia cho 30 có số dư là r . Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.
7. Chứng minh rằng số $\underbrace{11\dots1}_{n-1}\underbrace{1211\dots1}_n$ là hợp số với $n \geq 1$.
8. Tìm n số sao cho $10101\dots0101$ (n chữ số 0 và $n + 1$ chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.
9. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số.
- $A = 11\dots1$ (2001 chữ số 1);
 - $B = 11\dots1$ (2000 chữ số 1);
 - $C = 1010101$;
 - $D = 1112111$;
 - $E = 1! + 2! + 3! + \dots + 100!$;
 - $G = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 - 28$;
 - $H = 311141111$.

Dạng 2.

10. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng các số sau là hợp số:
- $A = 2^{2^{n+1}} + 3$;
 - $B = 2^{2^{4n+1}} + 7$;
 - $C = 2^{2^{6n+2}} + 13$.
11. p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1 \pmod{240}$.
12. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.
13. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n - n$ chia hết cho p .

Dạng 3.

14. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.
15. Tìm các số $x, y \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.
16. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$ ($n \geq 1$).
17. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ là hợp số với $n > 1$.

Dạng 4.

18. Giải phương trình nghiệm nguyên $4(a-x)(x-b)+b-a=y^2$ (1)

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và $a > b$.

19. Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2 + y^2 = 585$

b) $x^2 + y^2 = 1210$.

Dạng 5.

19. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , các số sau là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) $7n + 10$ và $5n + 7$;

b) $2n + 3$ và $4n + 8$.

20. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) b và $a - b$ ($a > b$) ;

b) $a^2 + b^2$ và ab .

21. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab .

22. Tìm số tự nhiên n , sao cho:

a) $4n - 5$ chia hết cho 13 ;

b) $5n + 1$ chia hết cho 7 ;

c) $25n + 3$ chia hết cho 53.

23. Tìm các số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau:

a) $4n + 3$ và $2n + 3$;

b) $7n + 13$ và $2n + 4$;

c) $9n + 24$ và $3n + 4$;

d) $18n + 3$ và $21n + 7$

24. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để $n + 15$ và $n + 72$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

25.

a) Viết các số 7, 8, 9, 10 thành tổng hai số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 6 đều biểu diễn được dưới dạng tổng hai số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1.

Bài tập trong các đề thi học sinh giỏi

26. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $7p + q$ và $pq + 11$ đều là số nguyên tố.

27. Biết $\overline{abcd}$ là nguyên tố có bốn chữ số thỏa mãn $\overline{ab}; \overline{cd}$ cũng là các số nguyên tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$. Hãy tìm $\overline{abcd}$

28. Giả sử p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố. Chứng tỏ $p^3 + p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.
29. Tìm hai số nguyên tố x, y thỏa mãn $x^2 - y^2 = 45$.
30. Chứng minh rằng hai số $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .
31. Cho 4 số tự nhiên $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ Chứng minh rằng số $a + b + c + d$ là hợp số.
32. Cho số nguyên tố $p > 3$. Hỏi $p^2 + 2018$ là số nguyên tố hay hợp số.
33. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố: $p+14; p+40$
34. Cho p và $p+4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p+14$ là hợp số.
35. Tìm các số nguyên tố x và y để $P = xy + 5x - 2y - 10$ cũng là số nguyên tố.
36. Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n thì $3n+2$ và $5n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.
37. Tìm số nguyên tố p sao cho $2p-1; p^2+2$ là các số nguyên tố.
38. Tìm số nguyên tố x, y biết $19x^4 + 57 = y^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Dạng 1.

1. a) b) Đáp số: $p = 3$. Xét p dưới các dạng: $p = 3k, p = 3k + 1, p = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N})$.
- c) Đáp số: $p = 5$. Xét p dưới các dạng: $p = 5k, p = 5k + 1, p = 5k + 2, p = 5k + 3, p = 5k + 4 \quad (k \in \mathbb{N})$.
2. $n = 3$.
3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng $6n+1, 6n+5$. Do đó 3 số $a, a+k, a+2k$ phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc $2k$ chia hết cho 6, suy ra k chia hết cho 3.
4. Ta có $(p-1)p(p+1):3$ mà $(p,3)=1$ nên
- $$(p-1)(p+1):3 \quad (1).$$
- p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích chúng chia hết cho 8 (2).
- Từ (1) và (2) suy ra $(p-1)(p+1)$ chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.
- Vậy $(p-1)(p+1):24$.
5. Ta có $p = 42k + r = 2 \cdot 3 \cdot 7k + r \quad (k, r \in \mathbb{N}, 0 < r < 42)$. Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.
- Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.
- Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy $r = 25$.

6. Ta có $p = 30k + r = 2 \cdot 3 \cdot 5k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 < r < 30$). Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 2, 3, 5.

Các hợp số nhỏ hơn 30 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27.

Loại đi các số chia hết cho 3, 5 thì không còn số nào nữa. Vậy r không phải là hợp số.

r không phải là hợp số cũng không phải là số nguyên tố, suy ra $r = 1$.

$$7. \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{1211 \dots 1}_n = \underbrace{11 \dots 10 \dots 0}_{n+1} + \underbrace{11 \dots 1}_{n+1} = \underbrace{11 \dots 1}_{n+1} (10^n + 1).$$

suy ra đpcm.

$$8. p = 1010 \dots 101 = \frac{(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)}{9 \cdot 11}.$$

$n = 1$: $p = 101$ là số nguyên tố.

$n > 1$: p là hợp số.

9. Tất cả đều là hợp số.

$$a) A = \underbrace{11 \dots 1}_{2001} = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{2001} : 3.$$

$$b) B = \underbrace{11 \dots 1}_{2000} : 11.$$

$$c) C = 1010101 : 101.$$

$$d) D = 1112111 = 1111000 + 1111 : 1111.$$

$$e) E : 3 \text{ vì } 1! + 2! = 3 : 3, \text{ còn } 3! + 4! + \dots + 100! \text{ cũng chia hết cho } 3.$$

$$g) G = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 - 28 \text{ chia hết cho } 7.$$

$$h) H = 311141111 = 311110000 + 31111 \text{ chia hết cho } 31111.$$

Dạng 2.

$$10. \text{ Chứng minh } A : 7; B : 11; C : 29.$$

$$11. 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5.$$

$$12. n = 6k + 4, k \in \mathbb{N}.$$

$$13. p = 2 \text{ lấy } n \text{ chẵn; } p > 2 \text{ lấy } n = (pk - 1)(p - 1), k \in \mathbb{N}^*.$$

Dạng 3.

$$14. n^3 - n^2 + n - 1 = (n - 1)(n^2 + 1), n = 2.$$

$$15. x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + y^2)$$

$x = y = 1$ thì $x^4 + 4y^4 = 5$ là số nguyên tố.

$$16. p = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1 = \frac{(n+3)(n^2+2)}{6}.$$

Với $n \geq 4$ thì $n+3 > 6$ và $n^2+2 > 17$.

$n+3$ và n^2+2 hoặc một số chẵn, một số chia hết cho 3; hoặc một trong hai số chia hết cho 6, khi đó p là hợp số với $n = 1, 2, 3$ thì $p = 2, 5, 11$ là các số nguyên tố.

17. n chẵn thì A chia hết cho 2.

n lẻ, đặt $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), ta có:

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 4^{2k+1} = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - 2.n^2.2^{2k+1} \\ &= (n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1}) \\ &= [(n - 2^k)^2 + 2^{2k}][(n + 2^k)^2 + 2^{2k}] \end{aligned}$$

Dạng 4.

18.

Giả sử phương trình (1) có nghiệm x, y nguyên. Xét nghiệm y nguyên dương. Vì $a > b$ nên từ (1) có $x \neq a, x \neq b$ và $4(a-x)(x-b) > 0$, suy ra $b < x < a$. Đặt $a-x=m, x-b=n$ thì m, n dương. Lúc đó (1) trở thành $4mn - m - n = y^2$ (2) với m, n, y nguyên dương. Biến đổi (2) $\Leftrightarrow (4m-1)(4n-1) = 4y^2 + 1$ (3)

Vì tích các số dạng $4k+1$ lại có dạng đó nên số $4m-1$ phải có ước nguyên tố dạng $p = 4k+3$. Từ (3) có $(4y^2+1):p$ hay $4y^2 \equiv -1 \pmod{p}$ (4). Suy ra $(y, p) = 1$. Theo định lí nhỏ

$$\text{Fermat } (2y)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow \left[(2y)^2 \right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

$$\text{Từ đó và (4) có } (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (-1)^{2k+1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow \text{mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

Dạng 5.

20. a) Gọi $d \in \text{ƯC}(7n+10, 5n+7)$ thì

$$5(7n+10) - 7(5n+7) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1.$$

b) Gọi d là ƯCLN $(2n+3, 4n+8)$.

$$(4n+8) - 2(2n+3) : d \Rightarrow 2 : d.$$

Do d là ước của số lẻ $2n+3$ nên $d = 1$.

21.

a) Gọi $d \in \text{ƯC}(b, a-b)$ thì $a-b : d, b : d$, do đó $a : d$. Ta có $(a, b) = 1$ nên $d = 1$.

b) Giả sử $a^2 + b^2$ và ab cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

21.

Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

22.a)

$$4n-5 : 13$$

$$\Rightarrow 4n-5+13 : 13$$

$$\Rightarrow 4n+8 : 13$$

$$\Rightarrow 4(n+2) : 13$$

Do $(4, 13) = 1$ nên $n+2 : 13$.

Đáp số: $n = 13k - 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

b) Đáp số: $n = 7k - 3$ ($k \in \mathbb{N}$).

c) $25n+3:53 \Rightarrow 25n+3-53:53.$

Đáp số: $n = 53k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$).

23.

a) n không chia hết cho 3.

b) n là số chẵn.

c) n là số lẻ.

d) Giả sử $18n+3$ và $21n+7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$6(21n+7)-7(18n+3):d \Rightarrow 21:d.$$

Vậy $d \in \{3; 7\}.$

Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $21n+7$ không chia hết cho 3. Như vậy $(18n+3, 21n+7) \neq 1 \Leftrightarrow 18n+3:7$ (còn $21n+7$ luôn chia hết cho 7) $\Leftrightarrow 18n+3-21:7 \Leftrightarrow 18(n-1):7 \Leftrightarrow n-1:7.$

Vậy nếu $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{N})$ thì $(18n+3, 21n+7)=1.$

24.

Bài toán không yêu cầu tính mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $(n+15, n+72)=1$. Do đó ngoài cách giải trên có thể giải như sau:

Gọi $d \in \text{ƯC}(n+15, n+72)$ thì $57:d$. Do $n+15:d, 57:d$ nên nếu tồn tại n sao cho $n+15=57k+1$ thì $d=1$. Nếu ta chọn $n=57k-14$ ($k=1, 2, 3, \dots$) thì

$(n+15, n+72)=1$, rõ ràng có vô số giá trị n .

Bài tập trong đề thi học sinh giỏi

26. Ta có: p, q là số nguyên tố nên $pq+11$ là số nguyên tố lớn hơn 11

$\Rightarrow pq+11$ là số lẻ suy ra pq là số chẵn.

Do $7p+q$ là số nguyên tố lớn hơn 7 nên p và q không thể cùng tính chẵn lẻ.

*) TH1: $p=2$ thì $7p+q=14+q$. Ta thấy 14 chia 3 dư 2

+) Nếu q chia hết cho 3, do q là số nguyên tố nên $q=3$.

$$7p+q=17; pq+11=17 \text{ (T/m)}$$

+) Nếu q chia cho 3 dư 1 thì $14+q$ chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+q$ là hợp số

+) Nếu q chia cho 3 dư 2 thì $2q$ chia cho 3 dư 1 nên $pq+11=2q+11$ chia hết cho 3

$\Rightarrow pq+11$ là hợp số.

*) TH2: $q=2$ thì $7p+q=7p+2$

+) Nếu $7p$ chia hết cho 3 thì p chia hết cho 3 nên $p = 3 \Rightarrow 7p + q = 23; pq + 11 = 17$
(Thỏa mãn)

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 1 chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p + 2$ là hợp số

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 2 thì p chia cho 3 dư 2 nên $2p$ chia cho 3 dư 1
 $\Rightarrow pq + 11 = 2p + 11$ chia hết cho 3 nên $pq + 11$ là hợp số.

Vậy: $p = 2, q = 3$ hoặc $p = 3, q = 2$.

27. Vì $\overline{ab}; \overline{cd}$ là các số nguyên tố nên b, d lẻ và khác 5

Ta lại có $b^2 = \overline{cd} + b - c \Leftrightarrow b^2 - b = 9c + d \Leftrightarrow b(b-1) = 9c + d$

Nếu $b = 1$ (không thỏa mãn)

Nếu $b = 3$ nên $9c + d = 6 \Rightarrow c = 0, d = 6$ (không thỏa mãn)

Nếu $b = 7 \Rightarrow 9c + d = 42 \Rightarrow d = 42 - 9c \Rightarrow c = 4; d = 6$ (loại)

Nếu $b = 9 \Rightarrow 9c + d = 72 \Leftrightarrow d = 72 - 9c \Rightarrow c = 7; d = 9$ (thỏa mãn)

$\Rightarrow a \in \{1; 2; 7\}$

Vậy $\overline{abcd} \in \{1979; 2979; 7979\}$

28. +) Với $p = 2$ thì $p^2 + 2 = 8$ không là số nguyên tố.

+) Với $p = 3$ thì $p^2 + 2 = 11$ và $p^3 + p^2 + 1 = 37$ đều là số nguyên tố.

+) Với $p > 3 \Rightarrow p = 3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$)

$\Rightarrow p^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1) : 3$ nên $p^2 + 2$ là hợp số.

Vậy chỉ có $p = 3$ thì $p^2 + 2$ và $p^3 + p^2 + 1$ đều là số nguyên tố.

29. Ta có: $x^2 = 45 + y^2$.

Ta thấy $x^2 > 45$ và x là số nguyên tố nên x phải là số nguyên tố lẻ. Suy ra x^2 là số lẻ.

Từ đó suy ra y^2 là số chẵn, mà y là số nguyên tố. Suy ra $y = 2; x = 7$

Vậy $x = 7$ và $y = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

30. Đặt $d = \text{UCLN}(2n+1, 10n+7)$

Suy ra $2n+1 : d$. Vì vậy $5(2n+1) : d$.

Mà $10n+7 : d$ nên $10n+7 - 5(2n+1) : d$

$\Rightarrow 2 : d$

Do đó $d = 2$ hoặc $d = 1$.

Nếu $d = 2$ thì $2n+1:2$ (vô lý).

$$\Rightarrow d = 1.$$

$$1 = \text{UCLN}(2n+1, 10n+7)$$

Vậy $2n+1$ và $10n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

31. Ta có

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(b^2 + d^2) \text{ là số chẵn}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 : 2$$

+ Xét

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a + b + c + d)$$

$$= a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)$$

- Vì a là số nguyên dương nên $a, a-1$ là 2 số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow a(a-1) : 2$

Tương tự $b(b-1); c(c-1); d(d-1)$ đều chia hết cho 2

$$\Rightarrow a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) : 2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a + b + c + d) : 2$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 : 2 \Rightarrow (a + b + c + d) : 2$$

$$\Rightarrow a + b + c + d \text{ là số chẵn mà } a + b + c + d < 2(a+b+c+d) \text{ (do } a, b, c, d \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow a + b + c + d \text{ là hợp số}$$

32. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p^2 chia cho 3 dư 1.

$$\Rightarrow p^2 = 3k + 1.$$

$$\text{Ta có: } p^2 + 2018 = 3k + 1 + 2018 = 3k + 2019$$

$$\text{Vì } 3k : 3 \text{ và } 2019 : 3 \Rightarrow (3k + 2019) : 3 \Rightarrow (p^2 + 2018) : 3$$

Vậy $p^2 + 2018$ là hợp số.

33. + Nếu $p = 2$ thì $p + 14 = 16$ và $p + 40 = 42$ đều không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3$ thì $p + 14 = 17$ và $p + 40 = 43$ đều là các số nguyên tố suy ra $p = 3$ là giá trị cần tìm

+ Nếu $p \neq 3$ suy ra p có dạng $3k + 1$ hoặc dạng $3k - 1$

$$\text{Với } p = 3k + 1 \text{ thì } p + 14 = 3k + 1 + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5) : 3$$

$$\text{Với } p = 3k - 1 \text{ thì } p + 40 = 3k - 1 + 40 = 3k + 39 = 3(k + 13) : 3$$

Vậy nếu $p \neq 3$ thì hoặc $p + 14$ hoặc $p + 40$ là hợp số suy ra không thỏa mãn bài ra

Do đó: giá trị duy nhất cần tìm là $p = 3$

34. Vì p là số nguyên tố và $p > 3$ nên p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$

Mà $p + 4$ là số nguyên tố nên p không thể có dạng $3k + 2$

Suy ra p có dạng $3k + 1$

$\Rightarrow p+14=3k+15=3(k+5):3 \Rightarrow p+14$ là hợp số.

35. Ta có $P=xy+5x-2y-10=x(y+5)-2(y+5)=(x-2)(y+5)$.

Bởi vậy để P là số nguyên tố thì một trong hai giá trị $x-2$ và $y+5$ phải bằng 1 mà $y+5 \geq 7$ nên $x-2=1 \Leftrightarrow x=3$ từ đó $P=y+5$. Nếu y lẻ thì P sẽ chẵn, điều này vô lí $\Rightarrow y$ phải chẵn mà y là số nguyên tố $\Rightarrow y=2$

Vậy $x=3; y=2$.

36. Đặt: $\text{ƯCLN}(3n+2, 5n+3) = d$

$$\Rightarrow (3n+2):d; (5n+3):d$$

$$\Rightarrow [5(3n+2)-3(5n+3)]:d$$

$$1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $3n+2$ và $5n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

37. Xét $p=2, 2p-1=2.2-1=3$ (là số nguyên tố) và $p^2+2=2^2+2=6$ (là hợp số)

Vậy $p=2$ không thỏa mãn

Xét $p=3$, khi đó $2p-1=2.3-1=5$ (là số nguyên tố) và $p^2+2=3^2+2=11$ (là số nguyên tố)

Vậy $p=3$ là giá trị cần tìm.

Xét p là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p$ có hai dạng là

$$p=3k+1; p=3k+2 \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Nếu } p=3k+1 \text{ thì } p^2+2 &= (3k+1)^2+2 = (3k+1)(3k+1)+2 = 9k^2+3k+3k+1+2 \\ &= (9k^2+6k+3):3 \end{aligned}$$

Do $p > 3 \Rightarrow p^2+2 > 3$ mà $p^2+2:3 \Rightarrow p^2+2$ là hợp số (loại)

$$\text{Nếu } p=3k+2 \text{ thì } 2p-1=2.(3k+2)-1=6k+4-1=6k+3:3$$

Do $p > 3 \Rightarrow 2p-1 > 3$ mà $2p-1:3 \Rightarrow 2p-1$ là hợp số (loại)

Vậy $p=3$ là giá trị cần tìm.

38. TH1: x là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow x=2$.

Thay $x=2$ vào (1)

$$\text{ta có: } 19.2^4+572=y^2$$

$$\Rightarrow y^2=361=19^2$$

$$\Rightarrow y=19 \text{ (thỏa mãn là số nguyên tố).}$$

TH2: x là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow 19x^4$ lẻ $\Rightarrow 19x^4+57$ chẵn

$\Rightarrow y^2$ là số chẵn $\Rightarrow y$ chẵn $\Rightarrow$ mà y là số nguyên tố $\Rightarrow y = 2$ (vô lí vì $19x^4 + 57 > 2$).

Vậy $x = 2$; $y = 19$ là giá trị cần tìm.

CHUYÊN ĐỀ 9: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa số chính phương.

Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên.

(tức là nếu n là số chính phương thì: $n = k^2$ ($k \in \mathbb{Z}$))

2. Một số tính chất cần nhớ

1- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $4n$ hoặc $4n+1$. Không có số chính phương nào có dạng $4n+2$ hoặc $4n+3$ ($n \in \mathbb{N}$).

4- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $3n$ hoặc $3n+1$. Không có số chính phương nào có dạng $3n+2$ ($n \in \mathbb{N}$).

5- Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

7. Mọi số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 1, 0, 4.

8. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

9. Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0.

10. Số các ước của một số chính phương là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.

11. Nếu $n^2 < k < (n+1)^2$ ($n \in \mathbb{Z}$) thì k không là số chính phương.

12. Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương.

13. Nếu a là một số chính phương, a chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p^2 .

14. Nếu tích hai số a và b là một số chính phương thì các số a và b có dạng

$$a = mp^2; b = mq^2$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

 **Dạng 1:** Chứng minh một số là số chính phương, hoặc là tổng nhiều số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh một số n là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa, tức là chứng minh : $n = k^2$ ($k \in \mathbb{Z}$)

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: $A = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = n^2 + 3n(n^2 + 3n + 2) + 1 = n^2 + 3n^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = n^2 + 3n + 1^2$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2 + 3n + 1 \in \mathbb{N}$. Vậy A là số chính phương.

Bài toán 2. Cho: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2)$ với k là số tự nhiên. Chứng minh rằng $4B + 1$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta thấy biểu thức B là tổng của một biểu thức chúng ta nghĩ đến việc phải thu gọn biểu thức B trước.

Ta có:

$$n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)[n+3 - n-1] = \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3) - n-1n(n+1)(n+2)]$$

Áp dụng:

$$1.2.3 = \frac{1}{4} 1.2.3.4 - 0.1.2.3$$

$$2.3.4 = \frac{1}{4} 2.3.4.5 - 1.2.3.4$$

$$3.4.5 = \frac{1}{4} 3.4.5.6 - 2.3.4.5$$

.....

$$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}[k(k+1)(k+2)(k+3) - k-1k(k+1)(k+2)]$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\Rightarrow 4B + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$$

Theo ví dụ 1 ta có: $4B + 1 = k^2 + 3k + 1^2$

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}$. Vậy $4B + 1$ là số chính phương.

Bài toán 3. Chứng minh rằng: $C = 11\dots1 + 44\dots4 + 1$ với n là số tự nhiên. Chứng minh rằng C là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C = \underbrace{11\dots1}_{n-1} \underbrace{00\dots0}_{n-1} + \underbrace{11\dots1}_{n-1} + \underbrace{44\dots4}_{n-1} + 1$

Đặt $a = \underbrace{11\dots1}_n$ thì $9a = \underbrace{99\dots9}_n$. Do đó $\underbrace{99\dots9}_n + 1 = 10^n = 9a + 1$

$$C = a \cdot 10^n + a + 4a + 1 = a \cdot (9a + 1) + 5a + 1$$

$$\Rightarrow C = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$$

$$\Rightarrow C = \underbrace{33\dots34}_{n-1}^2.$$

Vậy C là một số chính phương.

Nhận xét:

Khi biến đổi một số trong đó có nhiều chữ số giống nhau thành một số chính phương ta nên đặt $\underbrace{11\dots1}_n = a$ và như vậy $\underbrace{99\dots9}_n + 1 = 10^n = 9a + 1$.

Bài toán 4. Cho $a = \underbrace{11\dots1}_{2016}$, $b = \underbrace{10\dots05}_{2015}$. Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Ta có: $b = \underbrace{10\dots0}_{2015} \underbrace{5}_{2016} = \underbrace{10\dots0}_{2015} - 1 + 6 = \underbrace{9\dots9}_{2016} + 6 = 9a + 6$.

$$\Rightarrow ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a+1 \in \mathbb{N}.$$

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 2:

Ta có: $a = \underbrace{11\dots1}_{2016} = \frac{10^{2016} - 1}{9}$, $b = 10^{2016} + 5$.

$$\Rightarrow ab + 1 = \frac{10^{2016} - 1}{9} \cdot (10^{2016} + 5) + 1 = \frac{(10^{2016})^2 + 4 \cdot 10^{2016} - 5 + 9}{9} = \left(\frac{10^{2016} + 2}{3} \right)^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \frac{(10^{2016} + 2)}{3}.$$

Mà $(10^{2016} + 2) : 3$. Do đó, $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Bài toán 5. Cho số tự nhiên a gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên b gồm 30 chữ số 2. Chứng minh $a - b$ là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } a = \underset{60}{11\dots1} = \frac{10^{60}-1}{9}, \quad b = \underset{30}{22\dots2} = 2 \cdot \frac{10^{30}-1}{9}.$$

$$\Rightarrow a-b = \frac{10^{60}-1}{9} - \frac{2(10^{30}-1)}{9} = \frac{10^{60}-2 \cdot 10^{30}+1}{9} = \left[\frac{10^{30}-1}{3} \right]^2 = \left(\underset{30}{33\dots3} \right)^2.$$

Cách 2:

$$\underset{30}{b} = \underset{30}{22\dots2} = 2 \cdot \underset{30}{11\dots1}, \quad \underset{60}{a} = \underset{30}{11\dots1} = \underset{30}{11\dots1} \cdot \underset{30}{100\dots0} + \underset{30}{11\dots1} = \underset{30}{11\dots1} \cdot 10^{30} + \underset{30}{11\dots1}.$$

$$\text{Đặt } \underset{30}{c} = \underset{30}{11\dots1}. \Rightarrow 9c+1 = \underset{30}{99\dots9}+1 = 10^{30}.$$

$$\text{Khi đó: } a = c \cdot (9c+1) + c = 9c^2 + 2c. \quad b = 2c.$$

$$\Rightarrow a-b = 9c^2 + 2c - 2c = (3c)^2 = \left(\underset{30}{33\dots3} \right)^2.$$

Bài toán tổng

quát: Cho k số tự nhiên khác 0, số tự nhiên a gồm $2k$ chữ số 1 và số tự nhiên b gồm k chữ số 2. Chứng minh rằng $a-b$ là một số chính phương.

Bài toán 6. Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Hướng dẫn giải

$$\text{Giả sử ta có: } \frac{n^2-1}{3} = a(a+1).$$

$$\text{Từ đó có } n^2 = 3a^2 + 3a + 1 \Rightarrow 4n^2 - 1 = 12a^2 + 12a + 3$$

$$\Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2a+1)^2.$$

Vì $2n+1; 2n-1$ là hai số lẻ liên tiếp nên ta có các trường hợp:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 2n-1 = 3p^2 \\ 2n+1 = q^2 \end{cases}.$$

Khi đó $q^2 = 3p^2 + 2$ (Vô lí). Vậy trường hợp này không xảy ra.

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 2n-1 = p^2 \\ 2n+1 = 3q^2 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó } p \text{ là số lẻ nên } p = 2k+1.$$

$$\text{Từ đó } 2n = (2k+1)^2 + 1 \Rightarrow n = k^2 + (k+1)^2 \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 7. Cho k là một số nguyên dương và $a = 3k^2 + 3k + 1$

a) Chứng minh rằng $2a$ và a^2 là tổng của ba số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu a là một ước của một số nguyên dương b và b là một tổng gồm

ba số chính phương thì b^n là một tổng của ba số chính phương.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $2a = 6k^2 + 6k + 2 = 2k + 1^2 + k + 1^2 + k^2$

và $a^2 = 9k^4 + 18k^3 + 15k^2 + 6k + 1 = k^2 + k^2 + 2k^2 + 3k + 1^2 + 2k^2 + k^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

b) Vì $b \vdots a$ nên đặt $b = ca$.

Vì b là tổng của ba số chính phương nên đặt $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Khi đó $b^2 = c^2 \cdot a^2 = c^2 \cdot a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

Để kết thúc việc chứng minh, ta tiến hành như sau: cho $n = 2p + 1$ ta được:

$b^{2p+1} = b^{p^2} \cdot b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ và cho $n = 2p + 2$ ta được $b^n = b^{p^2} \cdot b^2 \cdot a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương.

* Cơ sở phương pháp:

Để chứng minh n không là số chính phương, tùy vào từng bài toán ta có thể sử dụng các cách sau:

- 1) Chứng minh n không thể viết được dưới dạng một bình phương một số nguyên.
- 2) Chứng minh $k^2 < n < (k + 1)^2$ với k là số nguyên.
- 3) Chứng minh n có tận cùng là 2; 3; 7; 8
- 4) Chứng minh n có dạng $4k + 2$; $4k + 3$
- 5) Chứng minh n có dạng $3k + 2$
- 6) Chứng minh n chia hết cho số nguyên tố p mà không chia hết cho p^2 .

* Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được không? tại sao?

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 là n

Ta có : $2018 = 3m + 2$ nên số tự nhiên n chia 3 dư 2, do đó số n có dạng $3k + 2$ với k là số tự nhiên. Mặt khác một số chính phương thì không có dạng $3k + 2$ suy ra số tự nhiên n không là số chính phương.

Bài toán 2. Chứng minh rằng số $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 \\ &= n^2 + n^2 + n + 1^2 > n^2 + n^2 \quad \forall n > 1 \\ \Rightarrow A &> n^2 + n^2 \quad \forall n > 1 \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1^2 &= n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n + 1 \\ &= n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 + n^2 = A + n^2 > A \quad \forall n > 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A < n^2 + n + 1^2$$

Do đó $n^2 + n^2 < A < n^2 + n + 1^2$

Ta có $(n^2 + n)$ và $(n^2 + n + 1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên A không thể là số chính phương.

Bài toán 3. Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + \dots + (2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33}) \\ &= 3 + 2^2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{30} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &= 3 + 2 \cdot 30 + \dots + 2^{29} \cdot 30 = 3 + (2 + \dots + 2^{29}) \cdot 3 \cdot 10. \end{aligned}$$

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3.

Mà số chính phương không có chữ số tận cùng là 3. Do đó, A không là số chính phương. Vậy A không là số chính phương.

Bài toán 4. Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$2012^{4n} : 4; 2014^{4n} : 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$2013^{4n} = 2013^{4n} - 1 + 1 = (2013^{4n} - 1) + 1 \text{ chia cho 4 dư 1.}$$

$$2015^{4n} = 2015^{4n} - (-1)^{4n} + 1 \text{ chia cho 4 dư 1.}$$

Do đó, $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2.

Ta có: $A : 2$, nhưng A không chia hết cho 2^2 , mà 2 là số nguyên tố. Suy ra A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài toán 5. Cho $2 \leq n \in \mathbb{N}$, Chứng minh rằng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không thể là số chính phương

Hướng dẫn giải

Ta có $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2 (n^4 - n^2 + 2n + 2)$

$$= n^2 [n^2 (n^2 - 1) + 2n + 2]$$

$$= n^2 [n^2 (n-1)(n+1) + 2n + 2]$$

$$= n^2 (n+1)^2 (n^2 - 2n + 2)$$

Với $2 \leq n \in \mathbb{N}$, ta có $n^2 - 2n + 2 > n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$. Do đó $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$

Như vậy $n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương nên A không phải là số chính phương.

Bài toán 6. Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử: $a = 2m+1$, $b = 2n+1$, với $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2 = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Không có số chính phương nào có dạng $4k + 2$ vì vậy $a^2 + b^2$ không phải số chính phương.

Dạng 3: Điều kiện để một số là số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.
- Phương pháp 2: Sử dụng tính chẵn, lẻ.
- Phương pháp 3: Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.
- Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số nguyên n sao cho $n(n+3)$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Để $A = n(n+3)$ là số chính phương thì $n(n+3) = k^2$ với k là số tự nhiên, do đó:

$$\begin{aligned} n^2 + 3n &= k^2 \\ \Leftrightarrow 4n^2 + 12n &= 4k^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 = 4k^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow 2n + 3^2 - 2k^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2n + 2k + 3 \quad 2n - 2k + 3 = 9$$

$$\text{Ta có } 2n + 2k + 3 \geq 2n - 2k + 3$$

$$\text{Và } 9 = 9.1 = 3.3 = -1 \cdot -9 = -3 \cdot -3$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 2n + 2k + 3 = 9 \\ 2n - 2k + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + k = 3 \\ n - k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 4$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 2n + 2k + 3 = 3 \\ 2n - 2k + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + k = 0 \\ n - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} 2n + 2k + 3 = -1 \\ 2n - 2k + 3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + k = -2 \\ n - k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 4$$

$$\text{Trường hợp 4: } \begin{cases} 2n + 2k + 3 = -3 \\ 2n - 2k + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + k = -3 \\ n - k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$$

Vậy khi $n = -4; -3; 0; 1$ thì ta có A là số chính phương.

Bài toán 2. Tìm số nguyên n sao cho $n+1955$ và $n+2014$ là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n+1955 = a^2$; $n+2014 = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a < b$.

$$\text{Khi đó } b^2 - a^2 = 59 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 59 \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ b+a=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=29 \\ b=30 \end{cases}.$$

Dễ dàng suy ra $n = -1114$.

Bài toán 3. Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương:

$$a) \quad A = n^2 - n + 2$$

$$b) \quad B = n^5 - n + 2$$

Hướng dẫn giải

a) Với $n = 1$ thì $A = n^2 - n + 2 = 2$ không là số chính phương

Với $n = 2$ thì $A = n^2 - n + 2 = 4$ là số chính phương

Với $n > 2$ thì $A = n^2 - n + 2$ không là số chính phương vì

$$n-1^2 = n^2 - 2n - 1 < n^2 - n - 2 < n^2$$

Vậy $n = 2$ thì A là số chính phương.

$$b) \text{ Ta có: } n^5 - n = n^2 - 1 \quad n \quad n^2 + 1$$

Với $n = 5k$ thì n chia hết cho 5.

Với $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5

Với $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Do đó $n^5 - n$ luôn chia hết cho 5

Nên $n^5 - n + 2$ chia cho 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên

$B = n^5 - n + 2$ không là số chính phương

Vậy không có giá trị nào của n thỏa để B là số chính phương.

Bài toán 4. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1$, $2n+1$, $5n+1$ đều là các số chính phương.

Hướng dẫn giải

Nếu $n = 3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $n+1 = 3k+2$, không là số chính phương.

Nếu $n = 3k+2$ thì $2n+1 = 6k+5$, cho cho 3 dư 2 nên không là số chính phương. Vậy $n:3$.

$2n+1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1. Suy ra $2n:8 \Rightarrow n:4 \Rightarrow n+1$ lẻ. Do $n+1$ là số chính phương lẻ nên $n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n:8$.

n chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau 3 và 8 nên $n:24$. Với $n = 24$ thì $n+1 = 25 = 5^2$, $2n+1 = 49 = 7^2$, $5n+1 = 121 = 11^2$.

Giá trị nhỏ nhất của n phải tìm là 24.

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 6 - Phòng giáo dục đào tạo Phúc Yên - Vĩnh Phúc)

Hướng dẫn giải

Với $n = 1$ thì $1! = 1 = 1^2$ là số chính phương

Với $n = 2$ thì $1! + 2! = 3$ không là số chính phương

Với $n = 3$ thì $1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2$ là số chính phương

Với $n \geq 4$ ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33$ còn 5!; 6!; ...; $n!$ đều tận cùng bởi 0 do đó $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài là $n = 1$; $n = 3$.

Bài toán 6. Tìm số nguyên dương n sao cho $A = (n+3)(4n^2 + 14n + 7)$ là số một chính phương.

(Đề thi chọn HSG Toán 9 tỉnh Thái Bình)

Hướng dẫn giải

Ta có: $4n^2 + 14n + 7 = (n+3)(4n+2) + 1$ và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2 + 14n + 7$ là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2 + 14n + 7$ và $n+3$ phải là số chính phương.

Do $n \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có $(2n+3)^2 \leq 4n^2 + 14n + 7 < (2n+4)^2$.

$\Rightarrow 4n^2 + 14n + 7 = (2n+3)^2 \Rightarrow n = 1$. Khi đó $n+3 = 4$ là số chính phương.

Thử lại, với $n = 1$, ta có $A = 10^2$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$.

Bài toán 7. Tìm $3 \leq a \in \mathbb{N}$ sao cho $\overline{a(a-1).a(a-1)} = \overline{(a-2)aa(a-1)}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{a(a-1).a(a-1)} = \overline{(a-2)aa(a-1)} \Leftrightarrow \overline{a(a-1)}^2 = \overline{(a-2)aa(a-1)}$. (*)

Vì VT(*) là số chính phương nên VP(*) cũng là số chính phương.

Vì số chính phương chỉ có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{0;1;4;5;6;9\}$

nên a có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{1;2;5;6;7;0\}$.

Do a là chữ số nên $a \leq 9$. Kết hợp với $3 \leq a \in \mathbb{N}$ nên $a \in \{5;6;7\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $a=7$ thỏa mãn $76^2 = 5776$.

Bài toán 8. Tìm số tự nhiên n sao cho $2^n + 9$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2^n + 9 = m^2, m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (m-3)(m+3) = 2^n$.

Vì $m-3 < m+3$ nên $\begin{cases} m-3 = 2^a \\ m+3 = 2^b \end{cases}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a < b$.

Ta có $2^b - 2^a = 6 \Leftrightarrow 2^a(2^{b-a} - 1) = 6$.

Vì $2^a(2^{b-a} - 1) : 2$ mà $2^a(2^{b-a} - 1) \not\equiv 4$ nên $a=1$. Điều này dẫn đến $m=5$ và $n=4$.

Dạng 4: Tìm số chính phương.

* **Cơ sở phương pháp:** Dựa vào định nghĩa về số chính phương $A = k^2$, với k là số nguyên và các yêu cầu của bài toán để tìm ra số chính phương thỏa bài toán.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(1 + \overline{cd}) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100, n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow 101.\overline{cd} = n^2 - 100 = (n-10)(n+10)$.

Vì $n < 100$ và 101 là số nguyên tố nên $n+10=101$.

$\Rightarrow n=91$.

Thử lại: $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$ có $82 - 81 = 1$.

Vậy $\overline{abcd} = 8281$.

Bài toán 2. Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A

một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Hướng dẫn giải

Gọi $A = \overline{abcd} = k^2$.

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$$

(với $k, m \in \mathbb{N}^*$ và $31 < k < m < 100$, $a, b, c, d = \overline{1,9}$).

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m - k)(m + k) = 1111 \quad (*)$$

Nhận xét thấy tích $(m - k)(m + k) > 0$ nên $m - k$ và $m + k$ là 2 số nguyên dương.

Và $m - k < m + k < 200$ nên (*) có thể viết $(m - k)(m + k) = 11.101$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ k = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$$

Vậy $A = 2025$, $B = 3136$.

Bài toán 3. Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với $a; b; c; d$ là các số tự nhiên

$$\text{và } 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9.$$

Ta có $\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow d \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

Vì d là số nguyên tố $\Rightarrow d = 5$.

$$\text{Đặt } \overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \leq k < 100, k \in \mathbb{N}.$$

Do k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow k$ tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow k = 45$ (vì k tận cùng bằng 5 và có 2 chữ số)

$$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$$

Vậy số phải tìm là: 2025.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho $p = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ là số chính phương.

Câu 2: Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ ($a > b > 0$), biết $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Câu 3: Tìm các chữ số a và số tự nhiên x sao cho $(12 + 3x)^2 = \overline{1a96}$.

Câu 4: Tìm số nguyên tố có hai chữ số khác nhau có dạng $\overline{xy}$ ($x > y > 0$) sao cho hiệu của số đó với số viết theo thứ tự ngược lại của số đó là số chính phương.

Câu 5: Cho $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2019}$. Chứng tỏ rằng $4A + 5$ là số chính phương.

- Câu 6:** Tìm các số có ba chữ số, sao cho hiệu của số ấy và số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.
- Câu 7:** Cho x, y là 2 số nguyên thỏa mãn: $x + 2019x^2 = 2020y^2 + y$. Chứng minh rằng: $x - y$ là số chính phương.
- Câu 8:** Cho n lẻ. Chứng minh rằng $n^{2004} + 1$ không là số chính phương.
- Câu 9:** Một số chính phương có dạng $\overline{abcd}$. Biết $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. Hãy tìm số $\overline{abcd}$.
- Câu 10.** Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a,b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.
- Câu 11.** Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$
- Câu 12.** Cho n là số tự nhiên có hai chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.
- Câu 13.** Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$
Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.
- Câu 14.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là một số chính phương.
- Câu 15.** M có là một số chính phương không nếu :
 $M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ (Với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$)
- Câu 16.** Tìm các số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng hai số $2n + 1$ và $3n + 1$ đồng thời là hai số chính phương.
- Bài 17:** Tìm số chính phương có 4 chữ số mà hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau
- Bài 18:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và viết số bỏ hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương
- Bài 19:** Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương
- Bài 20:** Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.
- Bài 21:** Chứng minh số: $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.
- Bài 22:** Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.
- Bài 23:** Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không phải là số chính phương.
- Bài 24:** Chứng minh rằng tổng sau: $P = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{61} + 3^{62}$ không là số chính phương.
- Bài 25:** Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2010} + 2^{2011}$. Hỏi số $A + 8$ có phải là số chính phương không?
- Bài 26:** Giả sử $N = 1.3.5.7 \dots 2007.2011$. Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N - 1, 2N$ và $2N + 1$ không có số nào là số chính phương.
- Bài 27:** Chứng minh rằng nếu p là tích của n (với $n > 1$) số nguyên tố đầu tiên thì $p - 1$ và $p + 1$ không thể là các số chính phương.

Bài 28: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Bài 29: Chứng minh rằng: Nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì $m - n$ và $4m + 4n + 1$ đều là số chính phương.

Bài 30: Cho $a = \underbrace{111 \dots 1}_{2017 \text{ số } 1}$ và $b = \underbrace{1000 \dots 0}_{2016 \text{ số } 0}5$. Chứng minh rằng số $M = ab + 1$ là số chính phương.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Ta có : $p = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b$
 $= 111(a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$

Để p là số chính phương thì $a + b + c : 37.3$ mà $0 < a + b + c \leq 27 \Rightarrow a + b + c \nmid 37.3$

Nên không có số tự nhiên nào có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2. Ta có $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a$
 $\Rightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)$
 $\Rightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = 3^2(a - b)$

Để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương khi $a - b$ là số chính phương

Do a, b là các chữ số và $0 < a, b \leq 9 \Rightarrow 1 \leq a - b \leq 8$

$\Rightarrow (a - b)$ là số chính phương khi $(a - b) \in \{1, 4\}$

+ Nếu $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ $\Rightarrow \overline{ab} = 43$

+ Nếu $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ $\Rightarrow \overline{ab} = 73$

Vậy $\overline{ab} \in \{43, 73\}$

Câu 3. Ta có: $(12 + 3x)^2 = \overline{1a96} \Leftrightarrow 9 \cdot (4 + x)^2 = 1096 + 100a \Leftrightarrow 9 \cdot (4 + x)^2 = 1089 + 7 + 100a$.

Vì $1089 : 9$ nên $(7 + 100a) : 9 \Rightarrow (7 + a) : 9 \Rightarrow a = 2$.

Với $a = 2$, $9 \cdot (4 + x)^2 = 1296 \Leftrightarrow (4 + x)^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + x = 12 \\ 4 + x = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -16 \end{cases}$.

Vì x là số tự nhiên nên chọn $x = 8$.

Vậy $a = 2$, $x = 8$.

Câu 4. Theo đề ta có: $\overline{xy} - \overline{yx}$ là số chính phương.

Khi đó: $10x + y - (10y + x) = 10 \cdot (x - y) - (x - y) = 9(x - y)$ là số chính phương.

Suy ra: $x - y$ là số chính phương.

Vì $x > y > 0$ nên $x, y \in \{1; 2; \dots; 9\}$, ta xét các trường hợp sau:

+ TH1: $x - y = 1$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên $\overline{xy} = 43$.

+ TH2: $x - y = 4$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên $\overline{xy} = 73$.

+ TH3: $x - y = 9$ và $\overline{xy}$ là số nguyên tố nên không có số nào thỏa mãn.

Vậy $\overline{xy} \in \{43; 73\}$.

Câu 5. Ta có:

$$5A = 5^2 + 5^3 + 5^4 \dots + 5^{2020}$$

$$5A - A = 5^{2020} - 5$$

$$4A + 5 = 5^{2020} = (5^{1010})^2$$

Vậy $4A + 5$ là số chính phương.

Câu 6. Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên có ba chữ số cần tìm

$$\text{Theo đề ta có: } \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$

$$= 99a - 99c = 9.11(a - c) = 3^2.11(a - c)$$

Để $\overline{abc} - \overline{cba}$ là số chính phương thì $a - c = 11$ (không tồn tại) hoặc

$$a - c = 0 \Rightarrow a = c$$

Vậy số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ với $a = c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và

$$b \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Câu 7. Ta có: $x + 2019x^2 = 2020y^2 + y \Rightarrow 2020x^2 - 2020y^2 + x - y = x^2$

$$2020(x^2 - y^2) + (x - y) = x^2$$

$$2020(x - y)(x + y) + (x - y) = x^2$$

$$(x - y)(2020x + 2020y + 1) = x^2 \quad (1)$$

Gọi d là ước chung lớn nhất của $x - y$ và $2020x + 2020y + 1$

thì $(2020x + 2020y + 1) + 2020(x - y)$ chia hết cho $d \Rightarrow 4040x + 1$ chia hết cho d

Mặt khác, từ (1) ta có: x^2 chia hết cho d^2 suy ra x chia hết cho d .

Từ $4040x + 1$ chia hết cho d mà x chia hết cho d ta có 1 chia hết cho d

$$\Rightarrow d = 1 \text{ hay } UCLN(x - y, 2020x + 2020y + 1) = 1$$

Từ đó suy ra $x - y$ và $2020x + 2020y + 1$ là các số nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (1) nên chúng đều là các số chính phương.

Vậy $x - y$ là số chính phương (đpcm).

Câu 8. Giả sử $n^{2004} + 1$ là số chính phương với n là số lẻ ta có:

$$n^{2004} + 1 = a^2 \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (n^{1002})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - n^{1002})(a + n^{1002}) = 1$$

$$\Rightarrow 1: (a - n^{1002}) \Rightarrow (a + n^{1002}) = 1 \text{ điều này vô lý vì } (a + n^{1002}) > 2 \text{ với } n \text{ là số lẻ}$$

Vậy $n^{2004} + 1$ không là số chính phương với n là số lẻ.

Câu 9. Ta có a, b, c, d là các số nguyên từ 0 đến 9; a, c khác 0

Là số chính phương nên $\overline{abcd} = n^2$ và $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

$$\text{Hay } n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$$

Suy ra $n^2 - 100 = (n - 10)(n + 10) = 101\overline{cd}$, n^2 là số có 4 chữ số vậy $n < 100$ do đó $n + 10 = 101$

$$\text{suy ra } n = 91 \text{ và } n^2 = \overline{abcd} = 91^2 = 8281$$

Câu 10.

$$\text{Đặt } a.b = c^2 \quad (1)$$

Gọi $(a, c) = d$ nên $a : d, c : d$

Hay $a = m.d$ và $c = n.d$ với $(m, n) = 1$

Thay vào (1) ta được $m.d.b = n^2 . d^2$

$$\Rightarrow m.b = n^2 . d \Rightarrow b : n^2 \text{ vì } (a, b) = 1 = (b, d)$$

$$\text{Và } n^2 : b \Rightarrow b = n^2$$

Thay vào (1) ta có $a = d^2 \Rightarrow \text{đpcm}$

Câu 11. Ta có: $(a + b)^3 = \overline{ab}^2$ là số chính phương nên $a + b$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } a + b = x^2 \quad (x \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Suy ra: } \overline{ab}^2 = (a + b)^3 = x^6$$

$$\Rightarrow x^3 = \overline{ab} < 100 \text{ và } \overline{ab} > 8 \Rightarrow 8 < x^3 < 100 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x = 3; 4 \text{ vì } x \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{- Nếu } x = 3 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a + b)^3 = 3^6 = 729 = 27^2 = (2 + 7)^3 \Rightarrow x = 3 \text{ (nhận)}$$

$$\text{- Nếu } x = 4 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a + b)^3 = 4^6 = 4096 = 64^2 \neq (6 + 4)^3 = 1000$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy số cần tìm là: } \overline{ab} = 27$$

Câu 12.

$$+ \text{ Vì } n \text{ là số có hai chữ số nên } 9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$$

+ Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36; 64; 100; 144; 196.

$$+ \text{ Với } 2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22 \text{ không là số chính phương}$$

$$2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36 \text{ là số chính phương}$$

$$2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54 \text{ không là số chính phương}$$

$$2n = 144 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow n + 4 = 76 \text{ không là số chính phương}$$

$$2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102 \text{ không là số chính phương}$$

$$+ \text{ Vậy số cần tìm là } n = 32 .$$

Câu 13. Ta có các số: $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0

$$\text{Nên } A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8 \text{ có chữ số tận cùng là 8}$$

Vậy A không phải là số chính phương vì số chính phương là những số có chữ số tận cùng là 1; 4; 5; 6; 9

Câu 14. Gọi số tự nhiên đó là P ($P \neq 0$)

Nếu $P = 1$ ta có $1 = 1^2 \Rightarrow P$ là số chính phương

Nếu $P > 1$. Phân tích P ra thừa số nguyên tố ta có $P = a^x \cdot b^y \cdot \dots \cdot c^z$

(với $a, b, \dots, c$ là các số nguyên tố)

Khi đó số lượng các ước của P là $(x+1) \cdot (y+1) \cdot \dots \cdot (z+1)$

Theo bài ra $(x+1) \cdot (y+1) \cdot \dots \cdot (z+1)$ là số lẻ

$\Rightarrow x+1, y+1, \dots, z+1$ đều là các số lẻ

$\Rightarrow x, y, \dots, z$ đều là các số chẵn

Do đó $x = 2.m; y = 2.n; \dots; z = 2.t$

Nên $P = a^{2.m} \cdot b^{2.n} \cdot \dots \cdot c^{2.t} = a^m \cdot b^n \cdot \dots \cdot c^t$

$\Rightarrow P$ là số chính phương

Vậy chứng tỏ với mọi số tự nhiên khác 0, có số lượng các ước là một số lẻ thì số tự nhiên đó là một số chính phương.

Câu 15. $M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ (Với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$)

Tính số số hạng $= (2n - 1 - 1) : 2 + 1 = n$

Tính tổng $= (2n - 1 + 1) n : 2 = 2n^2 : 2 = n^2$

KL: M là số chính phương

Câu 16. Ta có $10 \leq n < 100$ nên $21 \leq 2n+1 < 201$

Mặt khác $2n+1$ là số chính phương lẻ, do vậy $2n+1$ chỉ có thể là 25; 49; 81; 121; 169. Từ đó n chỉ có thể nhận các giá trị tương ứng 12; 24; 40; 60; 84

$3n+1$ chỉ có thể nhận các giá trị 37; 73; 121; 181; 253.

Trong các số này chỉ có $121 = 11^2$ là số chính phương.

Từ đó $3n+1 = 121$ Suy ra $n = 40$

Bài 17: Giả sử $\overline{xyxy}$ là một số chính phương ta có:

$$\overline{xyxy} = 1000x + 100y + 10x + y = 1100x + 11y = 11(100x + y) : 11$$

Do $\overline{xyxy}$ là số chính phương nên $\overline{xyxy} : 121 \Rightarrow 100x + y : 11 \Rightarrow x + y : 11$ (vì $99x : 11$)

Do $0 < x + y \leq 11$ nên $x + y = 11$; $\overline{xyxy} = 11(100x + y) = 11(99x + 11) = 11^2 (9x + 1)$

Suy ra $9x + 1$ là số chính phương suy ra $x = 7, y = 4$

Bài 18: Gọi số tự nhiên có hai chữ số phải tìm là $\overline{ab}$ ($a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a, b \leq 9$)

Số viết theo thứ tự ngược lại $\overline{ba}$

Ta có $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 99(a^2 - b^2) : 11 \Rightarrow a^2 - b^2 : 11$

Hay $(a - b)(a + b) : 11$

Vì $0 < a - b \leq 8, 2 \leq a + b \leq 18$ nên $a + b : 11 \Rightarrow a + b = 11$

Khi đó: $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot (a - b)$

Để $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chính phương thì $a - b$ phải là số chính phương do đó $a - b = 1$ hoặc $a - b = 4$

Nếu $a - b = 1$ kết hợp với $a + b = 11 \Rightarrow a = 6, b = 5, \overline{ab} = 65$

Khi đó $65^2 - 56^2 = 1089 = 33^2$

Nếu $a - b = 4$ kết hợp với $a + b = 11 \Rightarrow a = 7,5$ loại

Vậy số phải tìm là 65

Bài 19: Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$) thì

$$2^n = a^2 - 48^2 = (a + 48)(a - 48)$$

$$2^p \cdot 2^q = (a + 48)(a - 48) \text{ với } p, q \in \mathbb{N}; p + q = n \text{ và } p > q$$

$$\Rightarrow a + 48 = 2^p \text{ và } a - 48 = 2^q$$

$$\Rightarrow 2^p - 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ và } p - q = 2 \Rightarrow p = 7$$

$$\Rightarrow n = 5 + 7 = 12$$

$$\text{Thử lại ta có: } 2^8 + 2^{11} + 2^n = 80^2$$

Bài 20: Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

$$\text{Từ đó suy ra } m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2010$$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

$$\text{Mặt khác } m + n + m - n = 2m \Rightarrow 2 \text{ số } m + n \text{ và } m - n \text{ cùng tính chẵn lẻ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn.

$$\Rightarrow (m + n)(m - n) : 4 \text{ nhưng } 2010 \text{ không chia hết cho } 4$$

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Bài 21: Vì chữ số tận cùng của các số $2004^2; 2003^2; 2002^2; 2001^2$ lần lượt là 6; 9; 4; 1.

Do đó số n có chữ số tận cùng là 8 nên n không phải là số chính phương.

Bài 22. Thấy ngay số 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90). Do đó số 1234567890 không phải là số chính phương.

Chú ý: Có thể lý luận 1234567890 chia hết cho 2 (vì chữ số tận cùng là 0), nhưng không chia hết cho 4 (vì hai chữ số tận cùng là 90) nên 1234567890 không là số chính phương.

Bài 23: Ta thấy tổng các chữ số của số 2004 là 6 nên 2004 chia hết cho 3 mà không chia hết 9 nên số có tổng các chữ số là 2004 cũng chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9, do đó số này không phải là số chính phương.

$$\begin{aligned} \text{Bài 24: } P &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{56} + 3^{57} + 3^{58} + 3^{59}) + 3^{60} + 3^{61} + 3^{62} \\ &= (40 + 3^4 \cdot 40 + \dots + 3^{56} \cdot 40) + 3^{60} + 3^{61} + 3^{62}. \end{aligned}$$

- Các số hạng trong ngoặc đều có tận cùng là 0.

- Số $3^{60} = (3^2)^{30} = 9^{30} \Rightarrow$ chữ số tận cùng là 1.

- Số $3^{61} = 3 \cdot 3^{60} \Rightarrow$ có chữ số tận cùng là 3.

- Số $3^{62} = 9 \cdot 3^{60} \Rightarrow$ có chữ số tận cùng là 9.

Vậy tổng P có chữ số tận cùng là 3 $\Rightarrow$ P không là số chính phương.

Bài 25: Tính được $A+8 = 2^{2012} - 1 + 8 = 2^{4 \cdot 503} + 7 = \dots 6 + 7 = \dots 3$

Vì SCP không có tận cùng bằng 3, nên A+8 không phải là SCP.

Bài 26:

a) Ta có $2N - 1 = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2011 - 1$

Có $2N : 3 \Rightarrow 2N - 3 : 3 \Rightarrow 2N - 3 = 3k \Rightarrow 2N - 1 = 3k + 2 (k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow 2N - 1$ chia cho 3 dư 2

$\Rightarrow 2N - 1$ không là số chính phương.

b) $2N = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2011 \Rightarrow 2N$ chẵn.

Ta có N lẻ (vì N là tích các số tự nhiên lẻ) $\Rightarrow N$ không chia hết cho 2

$\Rightarrow$ Mặc dù $2N : 2$ nhưng $2N$ không chia hết cho 4.

$\Rightarrow 2N$ không là số chính phương.

c) $2N + 1 = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2011 + 1$

$2N + 1$ lẻ nên $2N + 1$ không chia hết cho 4

$2N$ không chia hết cho 4 nên $2N + 1$ không chia cho 4 dư 1.

$\Rightarrow 2N + 1$ không là số chính phương.

Bài 27: Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên (trong đó có 2 là số nguyên tố chẵn, còn lại tất cả là các số nguyên tố lẻ) $\Rightarrow p : 2$ và p không thể chia hết cho 4 (1)

a) Giả sử $p + 1$ là số chính phương. Đặt $p + 1 = m^2 (m \in \mathbb{N})$.

Vì p chẵn nên $p + 1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$. Ta có $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow p + 1 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow p = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1) : 4$ mâu thuẫn với (1).

$\Rightarrow p + 1$ không phải là số chính phương.

b) $p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \dots$ là số chia hết cho 3 $\Rightarrow p - 3 : 3 \Rightarrow p - 3 = 3k \Rightarrow p - 1 = 3k + 2$.

$\Rightarrow p - 1$ chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow p - 1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n ($n > 1$) số nguyên tố đầu tiên thì $p - 1$ và $p + 1$ không là số chính phương.

Bài 28:

a và b lẻ nên $a = 2k + 1, b = 2m + 1 (V \text{ ới } k, m \in \mathbb{N})$.

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1$

$= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2$

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia cho 4 dư 2

$\Rightarrow a^2 + b^2$ không thể là số chính phương.

Bài 29: Ta có: $3m^2 + m = 4n^2 + n \Leftrightarrow 4(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$

$\Leftrightarrow (m - n)(4m + 4n + 1) = m^2$ là số chính phương (*)

Gọi d là ước chung lớn nhất của $m - n$ và $4m + 4n + 1$ thì $(4m + 4n + 1) + 4(m - n)$ chia hết cho $d \Rightarrow 8m + 1$ chia hết cho d .

Mặt khác, từ (*) ta có: m^2 chia hết cho $d^2 \Rightarrow m$ chia hết cho d .

Từ $8m + 1$ chia hết cho d và m chia hết cho d ta có 1 chia hết cho $d \Rightarrow d = 1$.

Vậy $m - n$ và $4m + 4n + 1$ là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (*) nên chúng đều là các số chính phương.

Bài 30: Chú ý đến biến đổi $\underbrace{111\dots1}_n = \frac{10^n - 1}{9}$ ta đi phân tích các số a và b về các lũy thừa của

10. Ta có $a = \underbrace{111\dots1}_{2017 \text{ số } 1} = \frac{10^{2017} - 1}{9}$ và $b = \underbrace{1000\dots0}_{2016 \text{ số } 0}5 = \underbrace{1000\dots0}_{2017 \text{ số } 0} + 5 = 10^n + 5$.

Khi đó ta được $M = ab + 1 = \frac{10^{2017} - 1}{9} \cdot (10^n + 5) + 1 = \frac{(10^{2017})^2 + 4 \cdot 10^{2017} - 5}{9} + 1 = \left(\frac{10^{2017} + 2}{3} \right)^2$.

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{10^{2017} + 2}{3} \in \mathbb{N}$ ta ta có điều phải chứng minh.

Tuy nhiên $\frac{10^{2017} + 2}{3} \in \mathbb{N}$ hiển nhiên đúng do $10^{2017} + 2 \vdots 3$. Vậy $M = ab + 1$ là số chính phương.

• **Chú ý.** Với dạng toán chứng minh số chính phương như trên ta chú ý đến phép biến đổi:

$$9 = 10^1 - 1; 99 = 10^2 - 1; 999 = 10^3 - 1; \underbrace{999\dots9}_n = 10^n - 1$$

CHUYÊN ĐỀ 10: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

DẠNG 1: TÌM PHÂN SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

Một số điều kiện cho trước thường gặp:

- ① Biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.
- ② Viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu).
- ③ Liên hệ về phép chia giữa phân số cần tìm với phân số đã cho.
- ④ Biết phân số bằng phân số nào đó và biết quan hệ ƯCLN(Tử, Mẫu) hoặc tổng (hiệu) của tử và mẫu.
- ⑤ Cộng một số vào tử hoặc mẫu được một phân số mới

Bài tập 1. Tìm phân số có tử là 5, biết rằng phân số đó lớn hơn $-\frac{11}{12}$ và nhỏ hơn $-\frac{11}{15}$.

Hướng dẫn giải

Gọi mẫu phân số cần tìm là x

$$\text{Ta có: } -\frac{11}{12} < \frac{5}{x} < -\frac{11}{15} \Rightarrow \frac{55}{-60} < \frac{55}{11x} < \frac{55}{-75} \Rightarrow -75 < 11x < -60 \Rightarrow x = -6.$$

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Bài tập 2. Hãy viết phân số $\frac{11}{15}$ dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng 1 và có mẫu số khác nhau.

Hướng dẫn giải

$$\frac{11}{15} = \frac{44}{60} \Rightarrow U(60) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\};$$

$$30 + 10 + 4 = 44 \Rightarrow \frac{44}{60} = \frac{10}{60} + \frac{30}{60} + \frac{4}{60} \Rightarrow \frac{11}{15} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{15}$$

Bài tập 3. Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất (với $\frac{a}{b} > 0$) biết khi chia $\frac{a}{b}$ cho $\frac{7}{15}$ và $\frac{12}{25}$ được thương là các số nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} : \frac{7}{15} = \frac{a.15}{b.7}; \frac{a}{b} : \frac{12}{25} = \frac{a.25}{b.12}.$$

Vì $\frac{a}{b}$ tối giản nên $UCLN(a;b) = 1$ và $\frac{a.15}{b.7}; \frac{a.25}{b.12}$ là các số nguyên nên a chia hết cho 7 và 12 còn 15 và 25 chia hết cho b

Do đó $a \in BC(7;12)$ và $b \in UC(15;25)$.

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn 0 nên $a = BCNN(7;12)$ và $b = UCLN(15;25)$

nên $a = 84$; $b = 5 \Rightarrow$ Phân số cần tìm là $\frac{84}{5}$

Bài tập 4. Cho các phân số $\frac{35}{396}$ và $\frac{28}{297}$. Tìm phân số nhỏ nhất mà khi chia cho mỗi phân số đó ta được một số nguyên ?

Hướng dẫn giải

Gọi phân số phải tìm là $\frac{x}{y}$ ($x, y \in \mathbb{N}$ và $(x, y) = 1$)

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y} : \frac{35}{396} = \frac{396x}{35y}; \quad \frac{x}{y} : \frac{28}{297} = \frac{297x}{28y}$$

Vì kết quả là một số nguyên nên $396x : 35y$ và $297x : 28y$

$$\text{Mà } (396; 35) = 1; (297; 28) = 1 \text{ và } (x; y) = 1$$

$$\Rightarrow 396 : y \text{ và } 297 : y; \quad x : 35 \text{ và } x : 28$$

Để $\frac{x}{y}$ nhỏ nhất khi x nhỏ nhất và y lớn nhất. Do đó:

$$x = \text{BCNN}(35; 28) = 140; \quad y = \text{ƯCLN}(396; 297) = 99.$$

$$\text{Vậy phân số phải tìm là } \frac{140}{99}.$$

Bài tập 5. Tìm phân số bằng phân số $\frac{20}{39}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 36.

Hướng dẫn giải

Ta thấy $\text{ƯCLN}(20, 39) = 1 \Rightarrow$ phân số $\frac{20}{39}$ là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 36.

$\Rightarrow$ phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{20}{39}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 36.

$$\text{Vậy phân số cần tìm là: } \frac{20 \cdot 36}{39 \cdot 36} = \frac{720}{1404}$$

Bài tập 6. Tìm phân số bằng phân số $\frac{200}{520}$ biết tổng của tử và mẫu là 306.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{200}{520} = \frac{5}{13}$ là phân số tối giản nên phân số bằng $\frac{200}{520}$ có dạng tổng quát $\frac{5m}{13m}$

($m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$)

$$\Rightarrow 5m + 13m = 306 \Rightarrow m = 17 \Rightarrow \text{phân số cần tìm là } \frac{85}{221}$$

Bài tập 7. Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào tử số của phân số ấy thì được một phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu ?

Hướng dẫn giải

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng mẫu số vào mẫu số ta được phân

số $\frac{a}{b+b} = \frac{a}{2b}$; phân số này nhỏ hơn phân số $\frac{a}{b}$ 2 lần

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp 2 lần phân số lúc đầu thì $a+b$ phải bằng 4 lần a

$\Rightarrow$ Mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{1}{3}$

Bài tập 8. Tìm phân số $\frac{a}{b}$ thoả mãn điều kiện: $\frac{4}{7} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$ và $7a + 4b = 1994$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$7a + 4b = 1994 \Rightarrow a = \frac{1994 - 4b}{7} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1994 - 4b}{7b} \Rightarrow \frac{4}{7} < \frac{1994 - 4b}{7b} < \frac{2}{3} \Rightarrow 4 < \frac{1994 - 4b}{b} < \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1994}{b} - 4 > 4 \Rightarrow \frac{1994}{b} > 8 \Rightarrow b < \frac{1994}{8} \Rightarrow b < 249\frac{1}{4} \\ \frac{1994}{b} - 4 < \frac{14}{3} \Rightarrow \frac{1994}{b} < \frac{26}{3} \Rightarrow b > 230\frac{1}{13} \end{cases} \Rightarrow 231 < b < 249$$

$$7a + 4b = 1994 \Rightarrow 4b = 7k + 6 \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow b = \frac{7k+6}{4}; b \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 4l + 2 \ (l \in \mathbb{N}) \Rightarrow b = 7l + 5$$

$$\Rightarrow 231 < 7l + 5 < 249 \Rightarrow \frac{226}{7} < l < \frac{244}{7} \Rightarrow \begin{cases} l = 33 \Rightarrow b = 236 \Rightarrow a = 150 \\ l = 34 \Rightarrow b = 243 \Rightarrow a = 146 \end{cases}$$

Bài tập 9. Tìm phân số $\frac{a}{b}$ thoả mãn các điều kiện: $\frac{4}{9} < \frac{a}{b} < \frac{10}{21}$ và $5a - 2b = 3$

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ } 5a - 2b = 3 \Rightarrow a = (3 + 2b)/5$$

$$\text{Có } a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 2b : 5 \text{ dư } 2 \Rightarrow 2b = 5k + 2 \Rightarrow k : 2$$

$$\Rightarrow k = 2n \Rightarrow b = 5n + 1 \text{ nên } a = 2n + 1 \text{ ta có } \frac{4}{9} < \frac{2n+1}{5n+1} < \frac{10}{21}.$$

$$\text{Với } \frac{4}{9} < \frac{2n+1}{5n+1} \Rightarrow 20n + 4 < 18n + 9 \Rightarrow 2n < 5 \Rightarrow n \in \{0; 1; 2\}$$

$$\text{Với } \frac{2n+1}{5n+1} < \frac{10}{21} \Rightarrow 42n + 12 < 50n + 10 \Rightarrow 9n > 11 \Rightarrow n = 2.$$

$$\text{Vậy } n = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{11}$$

Bài tập 10. Cho phân số: $A = \frac{1+2+3+4+\dots+19}{11+12+13+14+\dots+29}$. Hãy xoá một số hạng ở tử và xoá một số hạng ở mẫu để được một phân số mới có giá trị bằng phân số đã cho.

Hướng dẫn giải

Ta có tử của A là a thì mẫu là 2a. Gọi số hạng xoá ở tử là m và số hạng xoá ở mẫu là n, khi đó ta có

$$\frac{a}{2a} = \frac{a-m}{2a-m} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a - n = 2a - 2m \Rightarrow n = 2m$$

Vậy để được một phân số mới có giá trị bằng phân số đã cho ta có thể xoá các cặp số như: 6 ở tử và 12 ở mẫu; 7 ở tử và 14 ở mẫu; 14 ở tử và 28 ở mẫu

Bài tập 11: Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15}$. Tìm hai phân số đó.

Hướng dẫn giải

Tích của hai phân số là $\frac{8}{15}$. Thêm 4 đơn vị vào phân số thứ nhất thì tích mới là $\frac{56}{15}$ suy ra tích mới hơn tích cũ là $\frac{56}{15} - \frac{8}{15} = \frac{48}{15}$ đây chính là 4 lần phân số thứ hai.

$$\text{Suy ra phân số thứ hai là } \frac{48}{15} : 4 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Từ đó suy ra phân số thứ nhất là: } \frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

DẠNG 2: CHỨNG MINH PHÂN SỐ ĐÃ CHO LÀ TỐI GIẢN.

- Gọi số d là ước chung của Tử Số và Mẫu Số
- Cần chứng minh $d = 1$

Bài tập 1. Cho a, b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $\frac{8a+3b}{5a+2b}$ là phân số tối giản.

Hướng dẫn giải

Gọi d là ước chung lớn nhất của $8a+3b$ và $5a+2b$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 8a+3b:d \\ 5a+2b:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(8a+3b):d \\ 8(5a+2b)-5(8a+3b):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 40a+16b-40a-15b:d \Rightarrow b:d \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} 8a+3b:d \\ 5a+2b:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(8a+3b):d \\ 3(5a+2b)-2(8a+3b):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 16a+6b-15a-6b:d \Rightarrow a:d \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d \in \text{ƯC}(a, b)$.

Mà a, b là hai số nguyên tố cùng nhau, nên $(a, b) = 1$

$$\Rightarrow d = 1 \Rightarrow \frac{8a+3b}{5a+2b} \text{ là phân số tối giản.}$$

Bài tập 2. Chứng minh : $\frac{12n+1}{30n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) tối giản.

Hướng dẫn giải

Gọi d là ước chung của $12n + 1$ và $30n + 2$

$$\Rightarrow 5(12n + 1) - 2(30n + 2) = 1 \text{ chia hết cho } d$$

$\Rightarrow d = 1$ nên $12n + 1$ và $30n + 2$ nguyên tố cùng nhau

Do đó $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Bài tập 3: Chứng tỏ rằng $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản.

Hướng dẫn giải

Gọi $d = \text{ƯC}(21n + 4; 14n + 3)$

$$\Rightarrow 2(21n + 4) - 3(14n + 3) = 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy $(21n + 4 : 14n + 3) = 1$ nên $\frac{21+4}{14+3}$ là phân số tối giản.

Bài tập 4: Chứng minh phân số $\frac{n+1}{2n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Bài tập 5: Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n phân số sau tối giản: $\frac{16n+3}{12n+2}$

Bài tập 6: Chứng minh rằng với mọi n thì phân số $\frac{7n+10}{5n+7}$ là phân số tối giản

DẠNG 3. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHÂN SỐ LÀ PHÂN SỐ TỐI GIẢN

*** LOẠI 1: Phân số có dạng $A = \frac{a}{b.n + c}$ với a, b, c là các số nguyên đã biết.**

- Bước 1: Tìm $\text{Ư}(a) \neq \{1, a\}$ là p

- Bước 2: Để phân số A là tối giản thì a và $b.n + c$ phải có ƯCLN bằng 1

$$\Rightarrow b.n + c \neq p.k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow n \neq \text{các giá trị tương ứng với số } k \in \mathbb{N}$$

*** LOẠI 2: Phân số có dạng $A = \frac{e.n+d}{b.n+c}$ với e, b, c, d là các số nguyên đã biết.**

- Tách $\frac{e.n+d}{b.n+c} = f + \frac{a}{b.n+c}$ (với a, f là các số nguyên)

- Phân số A tối giản khi $\frac{a}{b.n+c}$ tối giản (Bài toán LOẠI 1)

- Chú ý: Nếu $0 < e < b$ hoặc $0 < -e < b$ hoặc $0 < -e < -b$ thì phân số A tối giản

khi phân số $\frac{1}{A}$ tối giản, rồi mới thực hiện tách.

Bài tập 1. Cho phân số $A = \frac{n+1}{n-3}$ ($n \in \mathbb{Z}; n \neq 3$). Tìm n để A là phân số tối giản.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{n+1}{n-3} = 1 + \frac{4}{n-3}$$

$$\Rightarrow A \text{ là phân số tối giản thì } \text{ƯCLN}(n-3; 4) = 1 \quad (*)$$

Nhận thấy 4 là số chẵn nên để thỏa mãn (*) thì $n - 3$ phải là số lẻ
 $\Rightarrow n$ phải là số chẵn

Bài tập 2. Cho $A = \frac{8n+193}{4n+3}$. Tìm số tự nhiên n để A là phân số tối giản

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Ta có: } A = \frac{8n+193}{4n+3} = \frac{2(4n+3)+187}{4n+3} = 2 + \frac{187}{4n+3}$$

$\Rightarrow A$ là phân số tối giản khi 187 và $4n+3$ có UCLN bằng 1

Nhận thấy 187 có hai ước khác 1 là 11 và 17

$\Rightarrow 4n+3 \neq 11k$ ($k \in \mathbb{N}$) Hoặc $4n+3 \neq 17m$ ($m \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 4n+3-11 \neq 11k$ ($k \in \mathbb{N}$) Hoặc $4n+3-51 \neq 17m$ ($m \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 4n-8 \neq 11k$ ($k \in \mathbb{N}$) Hoặc $4n-48 \neq 17m$ ($m \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 4(n-2) \neq 11k$ ($k \in \mathbb{N}$) Hoặc $4(n-12) \neq 17m$ ($m \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow n-2 \neq 11k$ ($k \in \mathbb{N}$) Hoặc $n-12 \neq 17m$ ($m \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow n \neq 11k+2$ ($k \in \mathbb{N}$) Hoặc $n \neq 17m+12$ ($m \in \mathbb{N}$)

Bài tập 3. Tìm các giá trị của số tự nhiên n để phân số sau tối giản: $\frac{n+8}{2n-5}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$

Hướng dẫn giải

$$A = \frac{n+8}{2n-5} \text{ là phân số tối giản khi } \frac{1}{A} = \frac{2n-5}{n+8} = \frac{2(n+8)-21}{n+8} = 2 - \frac{21}{n+8} \text{ cũng là phân}$$

số tối giản khi 21 và $n+8$ phải có UCLN bằng 1

Nhận thấy 21 có hai ước tự nhiên khác 1 là 3 và 7.

$\Rightarrow n+8 \neq 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) Hoặc $n+8 \neq 7m$ ($m \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow n \neq 3k-8$ ($k \in \mathbb{N}$) Hoặc $n \neq 7m-8$ ($m \in \mathbb{N}$)

Bài 3. (4 điểm) Tìm tất cả các số nguyên n để:

Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

Hướng dẫn giải

Gọi d là ƯC của $12n+1$ và $30n+2$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow 12n+1 : d; 30n+2 : d \Rightarrow [5(12n+1) - 2(30n+2)] : d \Rightarrow 1 : d \text{ mà } d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1.$$

Vậy phân số đã cho tối giản với mọi n nguyên.

Bài tập 5: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều tối giản.

$$\frac{7}{n+9}; \frac{8}{n+10}; \frac{9}{n+11}; \dots; \frac{100}{n+102}$$

Hướng dẫn giải

Các phân số đã cho đều có dạng: $\frac{a}{a+(n+2)}$, vì các phân số này đều tối giản nên $n+$

2 và a phải là hai số nguyên tố cùng nhau

Như vậy $n + 2$ phải nguyên tố cùng nhau với lần lượt các số 7; 8; 9; ...; 100 và $n + 2$ phải là số nhỏ nhất

$\Rightarrow n + 2$ là số nguyên tố nhỏ nhất lớn hơn 100

$\Rightarrow n + 2 = 101 \Rightarrow n = 99$

DẠNG 4: TÌM SỐ TỰ NHIÊN n ĐỂ PHÂN SỐ RÚT GỌN ĐƯỢC.

* Một phân số rút gọn được khi $ƯC(\text{Tử số ; mẫu số}) \neq 1$

* **LOẠI 1: Phân số có dạng $A = \frac{a}{b.n + c}$ với a, b, c là các số nguyên đã biết.**

- Bước 1: Tìm $Ư(a) \neq \{1, a\}$ là p

- Bước 2: Để phân số A rút gọn được thì

$$\Rightarrow b.n + c = p.k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các số n theo các giá trị tương ứng với số $k \in \mathbb{N}$

* **LOẠI 2: Phân số có dạng $A = \frac{e.n + d}{b.n + c}$ với e, b, c, d là các số nguyên đã biết.**

- Tách $\frac{e.n + d}{b.n + c} = f + \frac{a}{b.n + c}$ (với a, f là các số nguyên)

- Phân số A rút gọn được khi $\frac{a}{b.n + c}$ rút gọn được (Bài toán LOẠI 1)

Bài tập 1. Cho $A = \frac{8n + 193}{4n + 3}$. Với giá trị nào của n trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{8n + 193}{4n + 3} = \frac{2(4n + 3) + 187}{4n + 3} = 2 + \frac{187}{4n + 3}$$

$\Rightarrow A$ là phân số tối giản khi 187 và $4n + 3$ có UCLN bằng 1

Nhận thấy 187 có hai ước khác 1 là 11 và 17

Phân số A rút gọn được khi 187 và $4n + 3$ có ƯỚC CHUNG khác 1

$$\Rightarrow 4n + 3 = 11k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{Hoặc} \quad 4n + 3 = 17m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 4n + 3 - 11 = 11k' \quad (k' \in \mathbb{N}) \quad \text{Hoặc} \quad 4n + 3 - 51 = 17m' \quad (m' \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 4(n - 2) = 11k' \quad (k' \in \mathbb{N}) \quad \text{Hoặc} \quad 4(n - 12) = 17m' \quad (m' \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow n = 11k'' + 2 \quad (k'' \in \mathbb{N}) \quad \text{Hoặc} \quad n = 17m'' + 12 \quad (m'' \in \mathbb{N})$$

Mà $150 < n < 170 \Rightarrow$ Tìm được $k'' = 14$ và $m'' = 9$

$$\Rightarrow n = 156 \text{ hoặc } n = 165$$

Bài tập 2. Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ có thể rút gọn được.

Hướng dẫn giải

Giả sử $18n + 3$ và $21n + 7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d

$$\Rightarrow 18n + 3 \vdots d, 21n + 7 \vdots d \Rightarrow 6(21n + 7) - 7(18n + 3) \vdots d$$

$$\Rightarrow 21 \vdots d \Rightarrow d \in Ư(21) = \{3; 7\}$$

Mà $21n + 7$ Không chia hết cho 3 $\Rightarrow d \neq 3$

Ta lại có $21n + 7 : 7 \Rightarrow 18n + 3 : 7 \Rightarrow 18n + 3 - 21 : 7$

$\Rightarrow 18(n - 1) : 7$ mà $(18; 7) = 1 \Rightarrow n - 1 : 7 \Rightarrow n = 7k + 1 (k \in \mathbb{N})$

Vậy để phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ có thể rút gọn được thì $n = 7k + 1 (k \in \mathbb{N})$

Bài tập 3. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được.

Hướng dẫn giải

Gọi d là ước chung của $2n-1$ và $3n+2$. Ta có: $3(2n-1) - 2(3n+2) : d$ nên $-7 : d$

Để phân số $\frac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được, ta phải có $2n - 1 : 7$

$\Leftrightarrow 2n-1+7 : 7 \Leftrightarrow 2(n+3) : 7 \Leftrightarrow n+3 : 7$

Vậy với $n = 7k - 3 (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được

DẠNG 5: MỘT SỐ BÀI TOÁN LỜI VĂN.

Bài tập 1: Tại một buổi học ở lớp 6A số học sinh vắng mặt bằng $\frac{1}{7}$ số học sinh có mặt.

Người ta nhận thấy rằng nếu lớp có thêm 1 học sinh nghỉ học nữa thì số học sinh vắng mặt bằng $\frac{1}{6}$ số học sinh có mặt. Tính số học sinh của lớp 6A

Hướng dẫn giải

Lúc đầu số HS vắng mặt bằng $\frac{1}{8}$ số HS cả lớp. Nếu có thêm 1 HS nữa vắng mặt thì số HS vắng mặt bằng $\frac{1}{7}$ số HS cả lớp.

Như vậy 1 HS bằng $\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$ (HS cả lớp).

Vậy số HS cả lớp là $1 : \frac{1}{56} = 56$ (học sinh)

Bài tập 2: Một lớp học có chưa đến 50 học sinh, cuối năm học có 30% số học sinh xếp loại giỏi, $\frac{3}{8}$ số học sinh xếp loại khá còn lại là học sinh xếp loại trung bình. Tính số học sinh xếp loại trung bình của lớp.

Hướng dẫn giải

Đổi $30\% = \frac{3}{10}$

Số hs của lớp phải là bội chung của 8 và 10 Và số hs của lớp nhỏ hơn 50

Nên số hs của lớp đó là 40

Số hs trung bình chiếm là $1 - \frac{3}{10} - \frac{3}{8} = \frac{13}{40}$

Vậy số hs xếp loại trung bình là 13

Bài tập 3: Một cửa hàng bán một tấm vải trong bốn ngày. Ngày thứ nhất bán $\frac{1}{6}$ tấm vải và 5m, ngày thứ hai bán 20% số vải còn lại và 10m. Ngày thứ ba bán 25% số vải còn lại và 9m, ngày thứ tư bán $\frac{1}{3}$ số vải còn lại. Cuối cùng còn 13m. Tính chiều dài của tấm vải.

Hướng dẫn giải

Số mét vải còn lại sau ngày thứ ba là

$$13 : \frac{2}{3} = \frac{39}{2} \text{ (mét)}$$

Số mét vải còn lại sau ngày thứ hai là

$$\left(\frac{39}{2} + 9 \right) : \frac{3}{4} = 38 \text{ (mét)}$$

Số mét vải còn lại sau ngày thứ nhất là

$$(38 + 10) : \frac{4}{5} = 60 \text{ (mét)}$$

Chiều dài tấm vải là : $(60 + 5) : \frac{5}{6} = 78 \text{ (mét)}$

Bài tập 4: Có hai vòi nước cùng chảy vào bể không chứa nước, nếu cả 2 vòi cùng chảy thì sau 48 phút sẽ đầy bể, nếu chỉ mở một mình vòi thứ nhất chảy thì sau 2 giờ sẽ đầy bể. Trong một giờ vòi thứ nhất chảy ít hơn vòi thứ hai 50 lít nước. Tính thể tích khi bể chứa đầy nước?

Hướng dẫn giải

Trong 1 phút:

Hai vòi chảy được: $\frac{1}{48}$ bể

Vòi thứ nhất chảy được: $\frac{1}{120}$ bể

Vòi thứ hai chảy được: $\frac{1}{48} - \frac{1}{120} = \frac{1}{80}$ bể

Vòi thứ hai chảy hơn vòi thứ nhất: $\frac{1}{80} - \frac{1}{120} = \frac{1}{240}$ bể

Thể tích bể: $50 : \frac{1}{240} = 12000$ lít

Bài tập 5: Ở lớp 6A, số học sinh giỏi học kỳ I bằng $\frac{3}{7}$ số còn lại. Cuối năm có thêm 4 học sinh đạt loại giỏi nên số học sinh giỏi bằng $\frac{2}{3}$ số còn lại. Tính số học sinh của lớp 6A.

Hướng dẫn giải

Số học sinh giỏi kỳ I bằng $\frac{3}{10}$ số học sinh cả lớp

Số học sinh giỏi cuối bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh cả lớp

4 học sinh là $\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$ số học sinh cả lớp

$\frac{1}{10}$ số học sinh cả lớp là 4 nên số học sinh cả lớp là $4 : \frac{1}{10} = 40$

DẠNG 6: CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH .

I/ Phương pháp 1: Quy đồng mẫu dương rồi so sánh các tử: tử nào lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

Ví dụ: So sánh $\frac{-11}{12}$ và $\frac{17}{-18}$?

Ta viết : $\frac{-11}{12} = \frac{-33}{36}$ và $\frac{17}{-18} = \frac{-17}{18} = \frac{-34}{36}$

Vì $\frac{-33}{36} > \frac{-34}{36} \Rightarrow \frac{-11}{12} > \frac{17}{-18}$

Chú ý: Phải viết phân số dưới dạng phân số có mẫu dương.

II/ Phương pháp 2: Quy đồng tử dương rồi so sánh các mẫu có cùng dấu “+” hay cùng dấu “-”: mẫu nào nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn

Ví dụ 1: $\frac{2}{-5} > \frac{2}{-4}$ vì $-5 < -4$; $\frac{3}{7} < \frac{3}{5}$ vì $7 > 5$

Ví dụ 2: So sánh $\frac{2}{5}$ và $\frac{5}{7}$?

Ta có : $\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$; $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$. Vì $\frac{10}{25} < \frac{10}{14} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{7}$

Ví dụ 3: So sánh $\frac{-3}{4}$ và $\frac{-6}{7}$?

Ta có : $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = \frac{6}{-8}$ và $\frac{-6}{7} = \frac{6}{-7}$

Vì $\frac{6}{-8} > \frac{6}{-7} \Rightarrow \frac{-3}{4} > \frac{-6}{7}$

Chú ý : Khi quy đồng tử các phân số thì phải viết các phân số dưới dạng phân số có tử dương.

III/ Phương pháp 3: (Tích chéo với các mẫu b và d đều là dương)

+ Nếu $a.d > b.c$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

+ Nếu $a.d < b.c$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

+ Nếu $a.d = b.c$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ví dụ 1: $\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$ vì $5.8 < 6.7$ ($40 < 42$)

Ví dụ 2: $\frac{-4}{5} < \frac{-4}{8}$ vì $(-4).8 < (-4).5$

Ví dụ 3: So sánh $\frac{3}{-4}$ và $\frac{4}{-5}$. Ta viết $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$ và $\frac{4}{-5} = \frac{-4}{5}$

Vì $(-3).5 > (-4).4$ nên $\frac{3}{-4} > \frac{4}{-5}$

Chú ý : Phải viết các mẫu của các phân số là các mẫu dương.

(vì chẳng hạn $\frac{3}{-4} < \frac{-4}{5}$ do $3.5 < (-4).(-4)$ là sai)

IV/ Phương pháp 4: Dùng số hoặc phân số làm trung gian

1/Dùng số 1 làm trung gian:

a) Nếu $\frac{a}{b} > 1$ và $1 > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

b) Nếu $\frac{a}{b} - M = 1$; $\frac{c}{d} - N = 1$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

* M, N là phần thừa so với 1 của 2 phân số đã cho .

* Phân số nào có phần thừa lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

c) Nếu $\frac{a}{b} + M = 1$; $\frac{c}{d} + N = 1$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

* M, N là phần thiếu hay phần bù đến đơn vị của 2 phân số đó.

* Phân số nào có phần bù lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

Ví dụ 1: So sánh $\frac{19}{18}$ và $\frac{2005}{2004}$?

Ta có : $\frac{19}{18} - \frac{1}{18} = 1$; $\frac{2005}{2004} - \frac{1}{2004} = 1$

Vì $\frac{1}{18} > \frac{1}{2004} \Rightarrow \frac{19}{18} > \frac{2005}{2004}$

Ví dụ 2: So sánh $\frac{72}{73}$ và $\frac{98}{99}$?

Ta có : $\frac{72}{73} + \frac{1}{73} = 1$; $\frac{98}{99} + \frac{1}{99} = 1$. Vì $\frac{1}{73} > \frac{1}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} < \frac{98}{99}$

Ví dụ 3: So sánh $\frac{7}{9}$ và $\frac{19}{17}$?

Ta có $\frac{7}{9} < 1 < \frac{19}{17} \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{19}{17}$

2/ Dùng một phân số làm trung gian

* Phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất , có mẫu là mẫu của phân số thứ hai

Ví dụ: Để so sánh $\frac{18}{31}$ và $\frac{15}{37}$ ta xét phân số trung gian $\frac{18}{37}$.

Vì $\frac{18}{31} > \frac{18}{37}$ & $\frac{18}{37} > \frac{15}{37} \Rightarrow \frac{18}{31} > \frac{15}{37}$

* Nhận xét: Trong hai phân số , phân số nào vừa có tử lớn hơn , vừa có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn (điều kiện các tử và mẫu đều dương).

* Tính bắc cầu : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ & $\frac{c}{d} > \frac{m}{n}$ thì $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$

Ví dụ 1: So sánh $\frac{72}{73}$ và $\frac{58}{99}$?

– Xét phân số trung gian là $\frac{72}{99}$, ta thấy $\frac{72}{73} > \frac{72}{99}$ và $\frac{72}{99} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$

– Hoặc xét số trung gian là $\frac{58}{73}$, ta thấy $\frac{72}{73} > \frac{58}{73}$ và $\frac{58}{73} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$

Ví dụ 2: So sánh $\frac{n}{n+3}$ và $\frac{n+1}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Dùng phân số trung gian là $\frac{n}{n+2}$

Ta có : $\frac{n}{n+3} < \frac{n}{n+2}$ và $\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{n}{n+3} < \frac{n+1}{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$

Ví dụ 3: So sánh các phân số sau:

a) $\frac{12}{49}$ và $\frac{13}{47}$?

e) $\frac{456}{461}$ và $\frac{123}{128}$?

b) $\frac{64}{85}$ và $\frac{73}{81}$?

f) $\frac{2003.2004-1}{2003.2004}$ và $\frac{2004.2005-1}{2004.2005}$?

c) $\frac{19}{31}$ và $\frac{17}{35}$?

g) $\frac{149}{157}$ và $\frac{449}{457}$?

d) $\frac{67}{77}$ và $\frac{73}{83}$?

h) $\frac{1999.2000}{1999.2000+1}$ và $\frac{2000.2001}{2000.2001+1}$?

(Gợi ý: Từ câu a $\rightarrow$ c: Xét phân số trung gian.

Từ câu d $\rightarrow$ h: Xét phần bù đến đơn vị)

3/ Dùng một phân số xấp xỉ là trung gian.

Ví dụ 1: So sánh $\frac{12}{47}$ và $\frac{19}{77}$?

Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{4}$.

Ta có : $\frac{12}{47} > \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ và $\frac{19}{77} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{47} > \frac{19}{77}$

Bài tập áp dụng :

Dùng phân số xấp xỉ làm phân số trung gian để so sánh :

a) $\frac{11}{32}$ và $\frac{16}{49}$; b) $\frac{58}{89}$ và $\frac{36}{53}$; c) $\frac{12}{37}$ và $\frac{19}{54}$; d) $\frac{18}{53}$ và $\frac{26}{78}$

e) $\frac{13}{79}$ và $\frac{34}{204}$; f) $\frac{25}{103}$ và $\frac{74}{295}$; h) $\frac{58}{63}$ và $\frac{36}{55}$.

IV/ Phương pháp 5: Dùng tính chất sau với $m \neq 0$:

* $0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} ; \frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m}$

* $\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+m}$.

* $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m} ; \frac{a}{b} < \frac{a-m}{b-m}$

* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Ví dụ 1: So sánh $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$ và $B = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$?

Ta có : $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < 1$ (vì tử < mẫu)

$$\Rightarrow A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < \frac{(10^{11}-1)+11}{(10^{12}-1)+11} = \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10} = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} = B$$

Vậy $A < B$.

Ví dụ 2: So sánh $M = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $N = \frac{2004+2005}{2005+2006}$?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ta có : } \frac{2004}{2005} > \frac{2004}{2005+2006} \\ \frac{2005}{2006} > \frac{2005}{2005+2006} \end{array} \right\} \text{ Cộng vế theo vế ta có kết quả } M > N.$$

Ví dụ 3: So sánh $\frac{37}{39}$ và $\frac{3737}{3939}$?

Giải: $\frac{37}{39} = \frac{3700}{3900} = \frac{3700+37}{3900+39} = \frac{3737}{3939}$ (áp dụng $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$)

VI/ Phương pháp 6: Đổi phân số lớn hơn đơn vị ra hỗn số để so sánh :

+ Hỗn số nào có phần nguyên lớn hơn thì hỗn số đó lớn hơn.

+ Nếu phần nguyên bằng nhau thì xét so sánh các phân số kèm theo

Ví dụ 1: So sánh $\frac{5}{8}$ và $\frac{12}{15}$?

Ta có $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{12}{15} = 0,8$.

Vì $0,625 < 0,8$ nên $\frac{5}{8} < \frac{12}{15}$

Ví dụ 2: So sánh $\frac{3}{-4}$ và $\frac{4}{-5}$?

Ta có $\frac{3}{-4} = -0,75$; $\frac{4}{-5} = -0,8$

Vì $-0,75 > -0,8$ nên $\frac{3}{-4} > \frac{4}{-5}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: So sánh qua phân số trung gian:

a, $\frac{18}{31}$ và $\frac{15}{37}$ b, $\frac{72}{73}$ và $\frac{58}{99}$

Bài 2: So sánh:

a, $A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1}$ và $B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}$

b, $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$ và $B = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1}$

Bài 3: So sánh:

a, $A = \frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1}$ và $B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1}$

b, $A = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{1998} + 1}$ và $B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1}$

Bài 4: So sánh:

a, $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$ và $B = \frac{100^{98} + 1}{100^{97} + 1}$

b, $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1}$ và $B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$

Bài 5: So sánh:

a, $A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8}$ và $B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7}$

b, $A = \frac{10^8 + 2}{10^8 - 1}$ và $B = \frac{10^8}{10^8 - 3}$

Bài 6: So sánh:

a, $A = \frac{19^{20} + 5}{19^{20} - 8}$ và $B = \frac{19^{21} + 6}{19^{21} - 7}$

b, $A = \frac{100^{2009} + 1}{100^{2008} + 1}$ và $B = \frac{100^{2010} + 1}{100^{2009} + 1}$

Bài 7: So sánh:

a, $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

b, $A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1}$ và $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$

Bài 8: So sánh:

a, $A = \frac{10^{1992} + 1}{10^{1991} + 1}$ và $B = \frac{10^{1993} + 3}{10^{1992} + 3}$

b, $A = \frac{10^{10} + 1}{10^{10} - 1}$ và $B = \frac{10^{10} - 1}{10^{10} - 3}$

Bài 9: So sánh:

a, $A = \frac{10^{20} + 6}{10^{21} + 6}$ và $B = \frac{10^{21} + 6}{10^{22} + 6}$

b, $A = \frac{15^{2016} + 5}{15^{2017} + 5}$ và $B = \frac{15^{2017} + 1}{15^{2018} + 1}$

Bài 10: So sánh:

a, $A = \frac{10^{20} + 3}{10^{21} + 3}$ và $B = \frac{10^{21} + 4}{10^{22} + 4}$

b, $A = \frac{20^{21} + 3}{20^{22} + 4}$ và $B = \frac{20^{22} + 8}{20^{23} + 28}$

Bài 11: So sánh: $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$ và $B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$

Bài 12: So sánh:

a, $A = \frac{2^{18} - 3}{2^{20} - 3}$ và $B = \frac{2^{20} - 3}{2^{22} - 3}$

b, $A = \frac{15^{23} - 3}{15^{22} - 138}$ và $B = \frac{15^{22} + 4}{15^{21} - 5}$

Bài 13: So sánh:

a, $A = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $B = \frac{2004 + 2005}{2005 + 2006}$

b, $A = \frac{2000}{2001} + \frac{2001}{2002}$ và $B = \frac{2000 + 2001}{2002 + 2002}$

Bài 14: So sánh:

a, $A = \frac{1985.1987 - 1}{1980 + 1985.1986}$ và 1

b, $A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.54}$ và $B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548}$

Bài 15: So sánh:

a, $A = \frac{33.10^3}{2^3.5.10^3 + 7000}$ và $B = \frac{3774}{5217}$

b, $A = \frac{244.395 - 151}{244 + 395.243}$ và

$B = \frac{423134.846267 - 423133}{423133.846267 + 423134}$

Bài 16: So sánh $M = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52}$ và $N = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548}$

Bài 17: So sánh: $A = \frac{244.395 - 151}{244 + 395.243}$ và $B = \frac{423134.846267 - 423133}{423133.846267 + 423134}$

Bài 18: So sánh:

a, $A = \frac{1919.171717}{191919.1717}$ và $B = \frac{18}{19}$

b, $A = \frac{4}{7} + 5 + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \frac{6}{7^4}$ và

$B = \frac{5}{7^4} + 5 + \frac{6}{7^2} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}$

Bài 19: So sánh:

a, $A = \frac{10}{2^7} + \frac{10}{2^6}$ và $B = \frac{11}{2^7} + \frac{9}{2^6}$

b, $A = \frac{10}{2^7} + \frac{9}{2^6} + \frac{1}{2^6}$ và $B = \frac{10}{2^7} + \frac{9}{2^6} + \frac{1}{2^7}$

Bài 20: So sánh:

a, $M = \frac{7.9 + 14.27 + 21.36}{21.27 + 42.81 + 63.108}$ và $B = \frac{37}{333}$

b, $A = \frac{19}{41} + \frac{23}{53} + \frac{29}{61}$ và $B = \frac{21}{41} + \frac{23}{45} + \frac{33}{65}$

Bài 21: So sánh:

a, $A = \frac{12}{14^{11}} + \frac{23}{14^{12}}$ và $B = \frac{12}{14^{12}} + \frac{23}{14^{11}}$

b, $A = \frac{5^0 + 5^1 + \dots + 5^9}{5^0 + 5^1 + \dots + 5^8}$ và

$B = \frac{3^0 + 3^1 + \dots + 3^9}{3^0 + 3^1 + \dots + 3^8}$

Bài 22: So sánh:

a, $A = \frac{n}{n+1}$ và $B = \frac{n+2}{n+3}$ ($n > 0$)

b, $A = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ và $B = \frac{n^2+3}{n^2+4}$ ($n > 1$)

Bài 23: So sánh:

a, $A = \frac{10}{50^{10}} + \frac{10}{50^8}$ và $B = \frac{11}{50^{10}} + \frac{9}{50^8}$

b, $A = \frac{2016}{100^{20}} + \frac{2016}{100^{30}}$ và $B = \frac{2017}{100^{20}} + \frac{2015}{100^{30}}$

Bài 24: So sánh:

a, $A = \frac{n}{n+3}$ và $B = \frac{n-1}{n+4}$

b, $A = \frac{n}{2n+1}$ và $B = \frac{3n+1}{6n+3}$

Bài 25: So sánh:

a, $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ và $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$

b, $A = \frac{2003 \cdot 2004 - 1}{2003 \cdot 2004}$ và $B = \frac{2004 \cdot 2005 - 1}{2004 \cdot 2005}$

Bài 26: So sánh :

a, $A = \frac{2^{2010} + 1}{2^{2007} + 1}$ và $B = \frac{2^{2012} + 1}{2^{2009} + 1}$

b, $A = \frac{3^{123} + 1}{3^{125} + 1}$ và $B = \frac{3^{122}}{3^{124} + 1}$

Bài 27: So sánh : $A = \frac{2}{60.63} + \frac{2}{63.66} + \dots + \frac{2}{117.120} + \frac{2}{2011}$ và

$B = \frac{5}{40.44} + \frac{5}{44.48} + \frac{5}{48.52} + \dots + \frac{5}{76.80} + \frac{5}{2011}$

Bài 28: So sánh tổng $S = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{41} + \frac{1}{42}$ với $\frac{1}{2}$

Bài 29: So sánh không qua quy đồng : $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Bài 30: So sánh: $A = \frac{-9}{10^{2012}} + \frac{-19}{10^{2011}}$ và $B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2012}}$

Bài 31: So sánh : $A = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$ và $B = \frac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2}$

Bài 32: So sánh phân số : $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ với a, b là số nguyên cùng dấu và $a \neq b$

Bài 33: So sánh $A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$ với $B = 4$

Câu 34: So sánh : $C = \frac{1+5+5^2+\dots+5^9}{1+5+5^2+\dots+5^8}$ và $D = \frac{1+3+3^2+\dots+3^9}{1+3+3^2+\dots+3^8}$

Câu 35: Cho $C = \frac{2019^{2018} + 1}{2019^{2019} + 1}$ và $D = \frac{2019^{2019} + 1}{2019^{2020} + 1}$. So sánh C và D.

Câu 36: So sánh: $C = \frac{74^{2018} + 1}{74^{2019} + 1}$ và $D = \frac{74^{2019} - 2021}{74^{2020} - 2021}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a, Xét phân số trung gian là: $\frac{18}{37}$, Khi đó ta có: $\frac{18}{31} > \frac{18}{37} > \frac{15}{37}$

b, Xét phân số trung gian là $\frac{72}{99}$, Khi đó ta có: $\frac{72}{73} > \frac{72}{99} > \frac{58}{99}$

Bài 2:

$$\begin{aligned} \text{a, } A &= \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < 1 \Rightarrow A < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008^{2008} + 2008}{2008^{2009} + 2008} \\ &= \frac{2008(2008^{2007} + 1)}{2008(2008^{2008} + 1)} = B \end{aligned}$$

$$\text{b, Ta có : } B = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1} > 1 \Rightarrow B > \frac{100^{101} + 1 + 99}{100^{100} + 1 + 99} = \frac{100^{101} + 100}{100^{100} + 100} = \frac{100(100^{100} + 1)}{100(100^{99} + 1)} = A$$

Bài 3:

$$\text{a, } B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1} < 1 \Rightarrow B < \frac{13^{16} + 1 + 12}{13^{17} + 1 + 12} = \frac{13^{16} + 13}{13^{17} + 13} = \frac{13(13^{15} + 1)}{13(13^{16} + 1)} = A \quad \text{Vậy } A > B$$

$$\text{b, } B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1} > 1 \Rightarrow B > \frac{1999^{2000} + 1 + 1998}{1999^{1999} + 1 + 1998} = \frac{1999^{2000} + 1999}{1999^{1999} + 1999} = \frac{1999(1999^{1999} + 1)}{1999(1999^{1998} + 1)} = A$$

Bài 4:

$$\text{a, } A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} > 1 \Rightarrow A > \frac{100^{100} + 1 + 9999}{100^{99} + 1 + 9999} = \frac{100^{100} + 10^2}{100^{99} + 10^2} = \frac{100^2(100^{98} + 1)}{100^2(100^{97} + 1)} = B \quad \text{Vậy } A > B$$

$$\text{b, } A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} < 1 \Rightarrow A < \frac{10^{11} - 1 + 11}{10^{12} - 1 + 11} = \frac{10^{11} + 10}{10^{12} + 10} = \frac{10(10^{10} + 1)}{10(10^{11} + 1)} = B$$

Bài 5:

$$\text{a, } A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8} = \frac{10^7 - 8 + 13}{10^7 - 8} = 1 + \frac{13}{10^7 - 8}$$

$$B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7} = \frac{10^8 - 7 + 13}{10^8 - 7} = 1 + \frac{13}{10^8 - 7} \quad \text{mà: } \frac{13}{10^7 - 8} > \frac{13}{10^8 - 7} \Rightarrow A > B$$

$$\text{b, } A = \frac{10^8 + 2}{10^8 - 1} = \frac{10^8 - 1 + 3}{10^8 - 1} = 1 + \frac{3}{10^8 - 1}$$

$$B = \frac{10^8}{10^8 - 3} = \frac{10^8 - 3 + 3}{10^8 - 3} = 1 + \frac{3}{10^8 - 3} \quad \text{Mà: } \frac{3}{10^8 - 1} < \frac{3}{10^8 - 3} \Rightarrow A < B$$

Bài 6:

$$\text{a, } A = \frac{19^{20} + 5}{19^{20} - 8} = \frac{19^{20} - 8 + 13}{19^{20} - 8} = 1 + \frac{13}{19^{20} - 8}$$

$$B = \frac{19^{21} + 6}{19^{21} - 7} = \frac{19^{21} - 7 + 13}{19^{21} - 7} = 1 + \frac{13}{19^{21} - 7} \quad \text{Mà: } \frac{13}{19^{20} - 8} > \frac{13}{19^{21} - 7} \Rightarrow A > B$$

$$\text{b, } B = \frac{100^{2010} + 1}{100^{2009} + 1} > 1 \Rightarrow B > \frac{100^{2010} + 1 + 99}{100^{2009} + 1 + 99} = \frac{100(100^{2009} + 1)}{100(100^{2008} + 1)} = A, \text{ vậy } A < B$$

Bài 7:

$$a, B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{16}+1+9}{10^{17}+1+9} = \frac{10(10^{15}+1)}{10(10^{16}+1)} = A \text{ Vậy: } A > B$$

$$b, B = \frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{2005}+1+9}{10^{2006}+1+9} = \frac{10(10^{2004}+1)}{10(10^{2005}+1)} = A \text{ Vậy } A > B$$

Bài 8:

$$a, B = \frac{10^{1993}+3}{10^{1992}+3} > 1 \Rightarrow B > \frac{10^{1993}+3+7}{10^{1992}+3+7} = \frac{10(10^{1992}+1)}{10(10^{1991}+1)} = A \text{ vậy } B > A$$

$$b, A = \frac{10^{10}+1}{10^{10}-1} = \frac{10^{10}-1+2}{10^{10}-1} = 1 + \frac{2}{10^{10}-1}$$

$$B = \frac{10^{10}-1}{10^{10}-3} = \frac{10^{10}-3+2}{10^{10}-3} = 1 + \frac{2}{10^{10}-3}, \text{ mà: } \frac{2}{10^{10}-1} < \frac{2}{10^{10}-3} \Rightarrow A < B$$

Bài 9:

$$a, B = \frac{10^{21}+6}{10^{22}+6} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{21}+6+54}{10^{22}+6+54} = \frac{10^{21}+60}{10^{22}+60} = \frac{10(10^{21}+6)}{10(10^{21}+6)} = A, \text{ Vậy } A > B$$

$$b, B = \frac{15^{2017}+1}{15^{2018}+1} < 1 \Rightarrow B < \frac{15^{2017}+1+74}{15^{2018}+1+74} = \frac{15^{2017}+75}{15^{2018}+75} = \frac{15(15^{2016}+5)}{15(15^{2017}+5)} = A \text{ vậy } A > B$$

Bài 10:

$$a, B = \frac{10^{21}+4}{10^{22}+4} < 1 \Rightarrow B < \frac{10^{21}+4+26}{10^{22}+4+26} = \frac{10^{21}+30}{10^{22}+30} = \frac{10(10^{20}+3)}{10(10^{21}+3)} = A, \text{ vậy } A > B$$

$$b, B = \frac{20^{22}+8}{20^{23}+8} < 1 \Rightarrow B < \frac{20^{22}+8+52}{20^{23}+8+52} = \frac{20^{22}+60}{20^{23}+60} = \frac{20(20^{21}+3)}{20(20^{22}+4)} = A \text{ Vậy } A > B$$

Bài 11:

Quy đồng mẫu ta có:

$$A = (100^{100}+1)(100^{68}+1), \text{ và } B = (100^{69}+1)(100^{99}+1)$$

$$\text{Xét hiệu } A - B = (100+1)(100^{68}+1) - (100^{89}+1)(100^{99}+1) = 100^{100} - 100^{99} - 100^{69} + 100^{68}$$

$$= 100 \cdot 100^{99} - 100^{99} - 100 \cdot 100^{68} + 100^{68} = 99 \cdot 100^{99} - 99 \cdot 100^{68} = 99(100^{99} - 100^{68}) > 0 \Rightarrow A > B$$

Bài 12:

a, Chú ý trong trường hợp ta trừ cả tử và mẫu với cùng 1 số thì ta đảo chiều của bất đẳng

$$\text{thức } B = \frac{2^{20}-3}{2^{22}-3} < 1 \Rightarrow B > \frac{2^{20}-3-9}{2^{22}-3-9} = \frac{2^{20}-12}{2^{22}-12} = \frac{2^2(2^{18}-3)}{2^2(2^{20}-3)} = A \text{ Vậy } B > A$$

$$b, A = \frac{15^{23}-3}{15^{22}-138} > 1 \Rightarrow A > \frac{15^{23}-3+63}{15^{22}-138+63} = \frac{15^{23}+60}{15^{22}-75} = \frac{15(15^{22}+4)}{15(15^{21}-5)} = B, \text{ Vậy } A > B$$

Bài 13:

$$a, B = \frac{2004+2005}{4011} = \frac{2004}{4011} + \frac{2005}{4011} < \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006} = A$$

$$b, B = \frac{2000+2001}{4004} = \frac{2000}{4004} + \frac{2001}{4004} < \frac{2000}{2001} + \frac{2001}{2002} = A$$

Bài 14:

$$\begin{aligned} \text{a, } A &= \frac{1985 \cdot (1986 + 1) - 1}{1980 + 1985 \cdot 1986} = \frac{1985 \cdot 1986 + 1985 - 1}{1980 + 1985 \cdot 1986} = \frac{1985 \cdot 1986 + 1984}{1985 \cdot 1986 + 1980} > 1 \\ \text{b, } A &= \frac{5(11 \cdot 13 - 22 \cdot 26)}{4 \cdot (11 \cdot 13 - 22 \cdot 26)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} \text{ và } B = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137} \text{ mà: } \frac{1}{4} > \frac{1}{137} \Rightarrow A > B \end{aligned}$$

Bài 15:

$$\begin{aligned} \text{a, } 7000 &= 7 \cdot 10^3 \Rightarrow A = \frac{33}{47} \text{ và } B = \frac{34}{47} \Rightarrow A < B \\ \text{b, } A &= \frac{(243 + 1) \cdot 395 - 151}{244 + 395 \cdot 243} = \frac{243 \cdot 395 + 395 - 151}{244 + 395 \cdot 243} = \frac{243 \cdot 395 + 244}{244 + 395 \cdot 243} = 1, \end{aligned}$$

Tương tự ta có: Tử số của B là

$$\begin{aligned} (423133 + 1) \cdot 846267 - 423133 &= 423133 \cdot 846267 + 846267 - 423133 \\ &= 423133 \cdot 846267 + 423134 \text{ bằng với mẫu số của } B \text{ nên } B = 1. \text{ Vậy } A = B \end{aligned}$$

Bài 16:

Ta có: $M = \frac{5(11 \cdot 13 - 22 \cdot 26)}{4(11 \cdot 13 - 22 \cdot 26)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ và $N = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$

Bài 17:

Ta có: A có $TS = (243 + 1) \cdot 395 - 151 = 243 \cdot 395 + 395 - 151 = 243 \cdot 395 + 244 = MS \Rightarrow A = 1$
 Và $TS = (423133 + 1) \cdot 846267 - 423133 = 423133 \cdot 846267 + 846267 - 423133$
 $= 423133 \cdot 846267 + 423134 = MS \Rightarrow B = 1$

Bài 18:

a, Ta có: $A = \frac{19 \cdot 101 \cdot 17 \cdot 10101}{19 \cdot 10101 \cdot 17 \cdot 101} = 1 > \frac{18}{19} = B$

b, Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3} \right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{6}{7^4} \right) = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3} \right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4} + \frac{1}{7^4} \right) \\ B &= \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3} \right) + \left(\frac{6}{7^2} + \frac{5}{7^4} \right) = \left(5 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3} \right) + \left(\frac{3}{7^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^4} \right) \end{aligned}$$

Mà: $\frac{1}{7^4} = \frac{1}{2401} < \frac{3}{7^2} = \frac{3}{49}$

Bài 19:

a, Ta có: $A = \frac{10}{2^7} + \frac{10}{2^6} = \frac{10}{2^7} + \frac{9}{2^6} + \frac{1}{2^6}$
 $B = \frac{11}{2^7} + \frac{9}{2^6} = \frac{10}{2^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{9}{2^6}$, mà: $\frac{1}{2^6} > \frac{1}{2^7} \Rightarrow A > B$

b, Ta có: $\frac{1}{2^6} > \frac{1}{2^7} \Rightarrow A > B$

Bài 20:

a, Rút gọn M ta có: $A = \frac{7 \cdot 9(1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4)}{21 \cdot 29(1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4)} = \frac{1}{9}$ và $B = \frac{37 \cdot 37}{333 \cdot 37} = \frac{1}{9}$
 b, $A = \frac{19}{41} + \frac{23}{53} + \frac{29}{61} < \frac{19}{38} + \frac{23}{46} + \frac{29}{58} = \frac{3}{2}$ và $B = \frac{21}{41} + \frac{23}{45} + \frac{33}{65} > \frac{21}{42} + \frac{23}{46} + \frac{33}{66} = \frac{3}{2}$

Vậy $A < B$

Bài 21:

a, Ta có : $A = \frac{12}{14^{11}} + \frac{23}{14^{12}} = \frac{12}{14^{11}} + \frac{12}{14^{12}} + \frac{11}{14^{12}}$

$B = \frac{12}{14^{12}} + \frac{23}{14^{11}} = \frac{12}{14^{11}} + \frac{11}{14^{11}} + \frac{12}{14^{12}}$, mà: $\frac{11}{14^{12}} < \frac{11}{14^{11}} \Rightarrow A < B$

b, Ta có : $A = \frac{1+5(5^0+5^1+5^2+\dots+5^8)}{5^0+5^1+5^2+\dots+5^8} = \frac{1}{1+5+5^2+\dots+5^8} + 5 > 2+3$

$B = \frac{1+3(3^0+3^1+3^2+\dots+3^8)}{3^0+3^1+3^2+\dots+3^8} = \frac{1}{3^0+3^1+3^2+\dots+3^8} + 3$

Nhận thấy $\frac{1}{3^0+3^1+3^2+\dots+3^8} < 2 \Rightarrow A > B$

Bài 22:

a, Ta có : $A = \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow A < \frac{n+2}{n+1+2} = \frac{n+2}{n+3} = B$

b, Ta có : $A = \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{n^2+1-2}{n^2+1} = 1 + \frac{-2}{n^2+1}$

Và $B = \frac{n^2+3}{n^2+4} = \frac{n^2+4-1}{n^2+4} = 1 + \frac{-1}{n^2+4} = 1 + \frac{-2}{2n^2+8}$, Mà: $\frac{-2}{n^2+1} < \frac{-2}{2n^2+8} \Rightarrow A < B$

Bài 23:

a, $A = \frac{10}{50^{10}} + \frac{9}{50^8} + \frac{1}{50^8}$ và $B = \frac{10}{50^{10}} + \frac{1}{50^{10}} + \frac{9}{50^8}$, Mà: $\frac{1}{50^8} > \frac{1}{50^{10}} \Rightarrow A > B$

b, $A = \frac{2016}{100^{20}} + \frac{2015}{100^{30}} + \frac{1}{100^{30}}$ và $B = \frac{2016}{100^{20}} + \frac{1}{100^{20}} + \frac{2015}{100^{30}}$, mà: $\frac{1}{100^{30}} < \frac{1}{100^{20}} \Rightarrow A < B$

Bài 24:

a, $A = \frac{n}{n+3} > \frac{n-1}{n+3} > \frac{n-1}{n+4} = B$

b, $A = \frac{n}{2n+1} = \frac{3n}{6n+3} < \frac{3n+1}{6n+3} = B$

Bài 25:

a, $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{4}{8^4}$, và $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4}$, Mà: $\frac{4}{8^4} < \frac{4}{8^3} \Rightarrow A < B$

b, $A = 1 + \frac{-1}{2003.2004}$, $B = 1 + \frac{-1}{2004.2005}$, Mà: $\frac{-1}{2003.2004} < \frac{-1}{2004.2005} \Rightarrow A < B$

Bài 26:

a, $A = \frac{2^{2010} + 2^3 - 7}{2^{2007} + 1} = 2^3 - \frac{7}{2^{2002} + 1}$ $B = \frac{2^{2012} + 2^3 - 7}{2^{2009} + 1} = 2^3 - \frac{7}{2^{2009} + 1}$

b, $A = \frac{3^{123} + \frac{1}{3^2} + \frac{8}{9}}{3^{125} + 1} = \frac{\frac{1}{3^2}(3^{125} + 1) + \frac{8}{9}}{3^{125} + 1} = \frac{1}{3^2} + \frac{\frac{8}{9}}{3^{125} + 1}$, Tương tự : $B = \frac{1}{3^2} + \frac{\frac{9}{3^{124}}}{3^{124} + 1}$

Bài 27:

$3A = 2 \left(\frac{3}{60.63} + \frac{3}{63.66} + \dots + \frac{3}{117.120} + \frac{3}{2011} \right) = 2 \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{120} + \frac{3}{2011} \right)$

$$= 2 \left(\frac{1}{120} + \frac{3}{2011} \right) = \frac{1}{60} + \frac{6}{2011}$$

$$A = \frac{1}{180} + \frac{2}{2011}$$

$$4B = 5 \left(\frac{4}{40 \cdot 44} + \frac{4}{44 \cdot 48} + \dots + \frac{4}{76 \cdot 80} + \frac{4}{2011} \right) = 5 \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{80} + \frac{4}{2011} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{1}{80} + \frac{4}{2011} \right) = \frac{1}{16} + \frac{20}{2011}$$

$$B = \frac{1}{64} + \frac{5}{2011} > \frac{1}{180} + \frac{2}{2011} = A$$

Bài 28:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \text{ và } \frac{1}{41} + \frac{1}{42} < \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{20} \text{ nên } S < \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

Bài 29:

$$A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}, B = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

Bài 30:

$$A = \frac{-9}{10^{2012}} + \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2012}} + \frac{-10}{10^{2012}}, \text{ Mà: } \frac{-10}{10^{2011}} < \frac{-10}{10^{2012}} \Rightarrow A < B$$

Bài 31:

$$B < 1 \Rightarrow B < \frac{2009^{2010} - 2 + 2011}{2009^{2011} - 2 + 2011} = A$$

Bài 32:

$$\text{Ta có: } \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a} \text{ \& } \frac{b+1}{b} = 1 + \frac{1}{b}$$

$$\text{*Nếu } a > 0 \text{ và } b > 0 \text{ thì } \frac{1}{a} > 0 \text{ và } \frac{1}{b} > 0 \quad \text{*Nếu } a < 0 \text{ và } b < 0 \text{ thì } \frac{1}{a} < 0 \text{ \& } \frac{1}{b} < 0$$

Bài 33:

$$A = \frac{2007-1}{2007} + \frac{2008-1}{2008} + \frac{2009-1}{2009} + \frac{2006+3}{2006} = 4 + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} > 4$$

Câu 34: Ta có:

$$C = \frac{1+5+5^2+\dots+5^9}{1+5+5^2+\dots+5^8} = 1 + \frac{5^9}{1+5+5^2+\dots+5^8} = 1 + 1 : \frac{1+5+5^2+\dots+5^8}{5^9}$$

$$C = 1 + 1 : \left(\frac{1}{5^9} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5} \right)$$

$$D = \frac{1+3+3^2+\dots+3^9}{1+3+3^2+\dots+3^8} = 1 + \frac{3^9}{1+3+3^2+\dots+3^8} = 1 + 1 : \frac{1+3+3^2+\dots+3^8}{3^9}$$

$$D = 1 + 1 : \left(\frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^7} + \dots + \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Do } \frac{1}{5^9} < \frac{1}{3^9}; \frac{1}{5^8} < \frac{1}{3^8}; \frac{1}{5^7} < \frac{1}{3^7}; \dots; \frac{1}{5} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5^9} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5} < \frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^7} + \dots + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1 : \left(\frac{1}{5^9} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5} \right) > 1 : \left(\frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^7} + \dots + \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow 1 + 1 : \left(\frac{1}{5^9} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5} \right) > 1 + 1 : \left(\frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^7} + \dots + \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow C > D$$

Câu 35:

$$C = \frac{2019^{2018} + 1}{2019^{2019} + 1} \Rightarrow 2019C = \frac{2019 \cdot (2019^{2018} + 1)}{2019^{2019} + 1} = \frac{2019^{2019} + 1 + 2018}{2019^{2019} + 1} = 1 + \frac{2018}{2019^{2019} + 1}$$

$$D = \frac{2019^{2019} + 1}{2019^{2020} + 1} \Rightarrow 2019D = \frac{2019 \cdot (2019^{2019} + 1)}{2019^{2020} + 1} = \frac{2019^{2020} + 1 + 2018}{2019^{2020} + 1} = 1 + \frac{2018}{2019^{2020} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{2018}{2019^{2019} + 1} > \frac{2018}{2019^{2020} + 1} \text{ nên } 2019C > 2019D \Rightarrow C > D$$

Câu 36: Ta có:

$$C = \frac{74^{2018} + 1}{74^{2019} + 1}$$

$$74.C = \frac{74^{2019} + 74}{74^{2019} + 1} = \frac{74^{2019} + 1 + 73}{74^{2019} + 1}$$

$$74.C = 1 + \frac{73}{74^{2019} + 1} \quad (1)$$

$$D = \frac{74^{2019} - 2021}{74^{2020} - 2021}$$

$$74.D = \frac{74^{2020} - 2021.74}{74^{2020} - 2021} = \frac{74^{2020} - 2021.(1 + 73)}{74^{2020} - 2021}$$

$$74.D = \frac{74^{2020} - 2021 - 2021.73}{74^{2020} - 2021}$$

$$74.D = 1 - \frac{2021.73}{74^{2020} - 2021} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $74C > 74D \Rightarrow C > D$

CHUYÊN ĐỀ 11: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GTLN, GTNN

I. TÌM GTLN,GTNN

Dạng 1: Với $A = \frac{a}{b.n + c}$ với a, b, c là các số nguyên đã biết.

+ Nếu $a \in \mathbb{Z}^+$ thì:

A có GTLN khi $b.n + c$ là số dương nhỏ nhất ứng với n nguyên

A có GTNN khi $b.n + c$ là số nguyên âm lớn nhất ứng với n nguyên

+ Nếu $a \in \mathbb{Z}^-$ thì:

A có GTLN khi $b.n + c$ là số âm lớn nhất ứng với n nguyên.

A có GTNN khi $b.n + c$ là số dương nhỏ nhất ứng với n nguyên

Bài 1. Cho phân số $P = \frac{2019}{x - 2020}$. Tìm số nguyên x để P có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq 2020$

*Nếu $x < 2020$ thì $x - 2020 < 0 \Rightarrow P < 0$

*Nếu $x > 2020$ thì $x - 2020 > 0 \Rightarrow P > 0$

Vì x là số nguyên nên $x - 2020 \geq 1$

Do đó $P = \frac{2019}{x - 2020} \leq 2019$

Xảy ra $P = 2019$ khi $x - 2020 = 1 \Rightarrow x = 2021$

Vậy với $x = 2021$ thì giá trị lớn nhất của $P = 2019$.

Bài 2. Tìm số tự nhiên n để $A = \frac{15}{n - 9}$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có: $15 > 0$ và không đổi.

Nên $A = \frac{15}{n - 9}$ có giá trị lớn nhất khi $n - 9 > 0$ và có giá trị nhỏ nhất (1)

Ta lại có: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n - 9 \in \mathbb{Z}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n - 9$ có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi đó $n = 10$.

Vậy với $n = 10$ thì thỏa mãn đầu bài.

Bài 3. Tìm x để phân số $\frac{1}{x^2 + 1}$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Vì $\frac{1}{x^2+1}$ là một phân số $\Rightarrow x^2+1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ Phân số $\frac{1}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất khi x^2+1 phải là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 $\Rightarrow x^2+1=1 \Rightarrow x=0$.

Dạng 2: Với $A = \frac{a.n+d}{b.n+c}$ với a, b, c, d là các số nguyên đã biết.

$$+ \text{Tách } A = \frac{a.n+d}{b.n+c} = e + \frac{f}{b.n+c} \quad (f \in \mathbb{Z})$$

+ Việc tìm n nguyên để A có GTLN – GTNN trở thành bài toán tìm n nguyên để $\frac{f}{b.n+c}$ có GTLN hoặc có GTNN (Bài toán dạng 1)

Bài 1. Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2} (n \in \mathbb{N})$. Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{2(3n+2)+1}{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$$

$$\text{Với } n \in \mathbb{N} \text{ thì } 3n+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3n+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{3n+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow n=0$$

$$\text{Vậy } n=0 \text{ thì phân số } P \text{ có giá trị lớn nhất bằng } \frac{5}{2}.$$

Bài 2. Cho phân số $A = \frac{n+1}{n-3} (n \in \mathbb{Z})$. Tìm n để A có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{n+1}{n-3} = \frac{n-3+4}{n-3} = 1 + \frac{4}{n-3}$$

$$\text{Với } n > 3 \text{ thì } \frac{4}{n-3} > 0$$

$$\text{Với } n < 3 \text{ thì } \frac{4}{n-3} < 0$$

Để A có giá trị lớn nhất thì $n-3$ nguyên dương và có giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Hay } n-3=1 \Rightarrow n=4$$

Bài 3. Với giá trị nào của số tự nhiên a thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

$$\frac{5a-17}{4a-23} = \frac{4(5a-17)}{4(4a-23)} = \frac{20a-68}{4(4a-23)} = \frac{5.4a-5.23+47}{4(4a-23)} = \frac{5(4a-23)+47}{4(4a-23)} = \frac{5}{4} + \frac{47}{4(4a-23)}$$

Cách giải tương tự **Bài tập 2:**

Như vậy bài toán đưa về tìm số tự nhiên a để $4a-23$ là số dương nhỏ nhất ứng với số tự nhiên $a=6$.

Vậy $a = 6 \Rightarrow \frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất bằng 13.

Bài 4. Tìm số tự nhiên n để phân số $B = \frac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$B = \frac{10n-3}{4n-10} = \frac{5(2n-5)+22}{2(2n-5)} = \frac{5}{2} + \frac{22}{2(2n-5)} = \frac{5}{2} + \frac{11}{2n-5}$$

Ta có: B đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{11}{2n-5}$ đạt giá trị lớn nhất.

Vì $11 > 0$ và không đổi nên $\frac{11}{2n-5}$ đạt giá trị lớn nhất khi: $2n-5 > 0$ và đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2n-5=1 \Leftrightarrow n=3$

Vậy B đạt giá trị lớn nhất là $\frac{5}{2} + 11 = \frac{27}{2}$ khi $n=3$

Bài 5. Cho $M = \frac{42-x}{x-15}$. Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

Ta thấy $M = \frac{42-x}{x-15} = -1 + \frac{27}{x-15}$ đạt GTNN $\Leftrightarrow \frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất

Xét $x-15 > 0$ thì $\frac{27}{x-15} > 0$

Xét $x-15 < 0$ thì $\frac{27}{x-15} < 0$. Vậy $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15 < 0$

Phân số $\frac{27}{x-15}$ có tử dương mẫu âm

Khi đó $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15$ là số nguyên âm lớn nhất hay

$$x-15 = -1 \Leftrightarrow x=14$$

Vậy $x=14$ thì M nhỏ nhất và $M = -28$

Bài 6. Cho $A = \frac{2n+3}{n-2}$ ($n \neq 2$). Tìm số nguyên n để A có giá trị lớn nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn giải

* Tìm A có giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có: } A = 2 + \frac{7}{n-2}$$

Để A đạt GTLN thì $\frac{7}{n-2}$ có GTLN, do đó $n-2$ là số nguyên dương nhỏ nhất.

Với $n-2=1$ suy ra $n=3$.

Khi đó $A = 2 + \frac{7}{1} = 9$

Vậy A có giá trị lớn nhất bằng 9 khi $n=3$.

* Tìm A có giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $A = 2 + \frac{7}{n-2}$

Để A đạt GTNN thì $\frac{7}{n-2}$ có GTNN, do đó $n-2$ là số nguyên âm lớn nhất.

Với $n-2=-1$ suy ra $n=1$.

Khi đó $A = 2 - 7 = -5$.

Vậy A có giá trị nhỏ nhất bằng -5 khi $n=1$.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2}$

Hướng dẫn giải

$$b) B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{x^2 + y^2 + 2 + 1}{x^2 + y^2 + 2} = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}$$

B lớn nhất khi $x^2 + y^2 + 2$ lớn nhất

Ta có: $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2$ nhỏ nhất bằng 2, khi $x = y = 0$

Khi đó B lớn nhất bằng $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$

Hướng dẫn giải

$$B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3} = 1 + \frac{12}{x^2 + 3}$$

Ta có $x^2 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3$

$$\Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2 + 3} \leq 5$$

Vậy $\text{Max} B = 5 \Leftrightarrow x = 0$

LOẠI 3: Với $A = |f(x)| + b$ hoặc $A = -|f(x)| + b$

+ Vì $|f(x)| \geq 0 \Rightarrow A = |f(x)| + b \geq b \Rightarrow A$ nhỏ nhất = b khi $f(x) = 0$

+ Vì $|f(x)| \leq 0 \Rightarrow A = -|f(x)| + b \leq b \Rightarrow A$ lớn nhất $= b$ khi $f(x) = 0$

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất các biểu thức sau:

a) $\left|x + \frac{1}{2}\right|$

b) $\left|x - \frac{1}{3}\right| + 2.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq 0$

Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ là 0

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ là 0 đạt được khi $x + \frac{1}{2} = 0$ hay $x = -\frac{1}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ là 0 khi $x = -\frac{1}{2}.$

b) Ta có: $\left|x - \frac{1}{3}\right| \geq 0$

Suy ra: $\left|x - \frac{1}{3}\right| + 2 \geq 2$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x - \frac{1}{3}\right| + 2$ là 2 đạt được khi $x - \frac{1}{3} = 0$ hay $x = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|x - \frac{1}{3}\right| + 2$ là 2 khi $x = \frac{1}{3}$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất các biểu thức sau:

a) $-|3x+1|$

b) $6 - |x+2|.$

c) $\frac{1}{|x+6|+2}$

d) $\frac{3+2|x+1|}{1+|x+1|}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $-|3x+1| \leq 0$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $-|3x+1|$ là 0 đạt được khi $3x+1=0$ hay $x = -\frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $-|3x+1|$ là 0 khi $x = -\frac{1}{3}$

b) Ta có: $-|x+2| \leq 0$

Suy ra: $6 - |x+2| \leq 6$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $6 - |x+2|$ là 6 đạt được khi $x+2=0$ hay $x = -2$

Vậy giá trị lớn nhất của $6 - |x+2|$ là 6 khi $x = -2$

c) Ta có: $\frac{1}{|x+6|+2} \leq \frac{1}{2}$

Suy ra: $\frac{1}{|x+6|+2} \leq \frac{1}{2}$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{|x+6|+2}$ là $\frac{1}{2}$ đạt được khi $x+6=0$ hay $x=-6$

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{1}{|x+6|+2}$ là $\frac{1}{2}$ khi $x=-6$

d) Ta có: $\frac{3+2|x+1|}{1+|x+1|} = \frac{1+2(1+|x+1|)}{1+|x+1|} = \frac{1}{1+|x+1|} + 2$

Do: $1+|x+1| \geq 1$. Suy ra: $\frac{1}{1+|x+1|} + 2 \leq 3$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{3+2|x+1|}{1+|x+1|}$ là 3 đạt được khi $x+1=0$ hay $x=-1$

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{3+2|x+1|}{1+|x+1|}$ là 3 khi $x=-1$

Bài 3. Với giá trị nào của x, y thì biểu thức: $A = |x - y| + |x + 1| + 2016$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn giải

Vì $|x - y| \geq 0$ với mọi x, y ; $|x + 1| \geq 0$ với mọi x

$\Rightarrow A \geq 2016$ với mọi x, y .

$\Rightarrow A$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\begin{cases} |x - y| = 0 \\ |x + 1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -1 \end{cases}$

Vậy với $x = y = -1$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là 2016.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019}$

Hướng dẫn giải

a) $C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019} = \frac{(|x - 2017| + 2019) - 1}{|x - 2017| + 2019} = 1 - \frac{1}{|x - 2017| + 2019}$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x - 2017| + 2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x - 2017| \geq 0$ nên $|x - 2017| + 2019 \geq 2019$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết:

$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$

Hướng dẫn giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0$; $|2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Nên $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Mà $A = 0$ khi và chỉ khi

$$|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$$

$$\text{Có: } |7x - 5y| = 0 \Leftrightarrow 7x = 5y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

$$|2z - 3x| = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{3}$$

$$|xy + yz + zx - 2000| = 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 2000$$

$$\text{Từ đó tìm được } \begin{cases} x = 20; y = 28; z = 30 \\ x = -20; y = -28; z = -30 \end{cases}$$

$$A \geq 0, \text{ mà } A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30) \text{ hoặc } (x, y, z) = (-20; -28; -30)$$

$$\text{Vậy } \min A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30) \text{ hoặc } (x, y, z) = (-20; -28; -30)$$

II. BẤT ĐẲNG THỨC

Dạng 1: Tổng phân số tự nhiên

Phương pháp:

Với tổng phân số tự nhiên, với chương trình lớp 6 -7 ta nên cho học sinh làm theo cách nhóm đầu cuối và so sánh giữa các nhóm với nhau, để tạo ra các ngoặc có cùng tử, rồi so sánh bình thường

$$\text{Bài 1. Cho } A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}.$$

$$\text{Chứng minh rằng: a) } A > \frac{7}{12} \text{ b) } A > \frac{5}{8}$$

Hướng dẫn giải

a) Ta chọn biểu thức B làm trung gian sao cho $A > B$, còn $B \geq \frac{7}{12}$. Tách A thành hai nhóm, mỗi nhóm có 50 phân số, rồi thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ nhất trong nhóm ấy, ta được:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right) > \\ &> \frac{1}{150} \cdot 50 + \frac{1}{200} \cdot 50 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

b) Tách A thành bốn nhóm rồi cũng làm như trên, ta được:

$$A > \frac{25}{125} + \frac{25}{150} + \frac{25}{175} + \frac{25}{200} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{8} = \frac{107}{210} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\frac{5}{8} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200} < \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$.

Ghép các phân số ở hai đầu và các phân số cách đều hai đầu thành 50 cặp.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{200} \right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{199} \right) + \dots + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{151} \right) = \\ &= \frac{301}{101 \cdot 200} + \frac{301}{102 \cdot 199} + \dots + \frac{301}{150 \cdot 151} \\ &= 301 \left(\frac{1}{101 \cdot 200} + \frac{1}{102 \cdot 199} + \dots + \frac{1}{150 \cdot 151} \right) \end{aligned}$$

Xét mẫu của 50 phân số trong dấu ngoặc, theo câu a thì 101.200 có giá trị nhỏ nhất, 150.151 có giá trị lớn nhất, suy ra trong 50 phân số trong dấu ngoặc thì $\frac{1}{101 \cdot 200}$ lớn nhất, $\frac{1}{150 \cdot 151}$ nhỏ nhất.

$$\text{Do đó: } A < 301 \cdot \frac{1}{101 \cdot 200} \cdot 50 = \frac{301}{404} < \frac{303}{404} = \frac{3}{4}$$

$$A > 301 \cdot \frac{1}{150 \cdot 151} \cdot 50 = \frac{301}{453} > \frac{300}{453} > \frac{300}{480} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Vậy: } \frac{5}{8} < A < \frac{3}{4}$$

Bài 3. Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$.

Chứng minh rằng: a) $A < 100$; b) $A > 50$

Giải. a) Để chứng tỏ rằng $A < 100$, ta chia A thành 100 nhóm:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{15} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1} \right).$$

Thay các phân số trong mỗi dấu ngoặc bằng phân số lớn nhất trong dấu ngoặc đó, ta được:

$$A < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \dots + \frac{1}{2^{99}} \cdot 2^{99} = 100.$$

b) Để chứng tỏ rằng $A > 50$, ta thêm và bớt $\frac{1}{2^{100}}$ rồi viết A dưới dạng sau:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3} \right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{100}} \right) - \frac{1}{2^{100}}.$$

Thay các phân số trong mỗi dấu ngoặc bằng phân số nhỏ nhất trong dấu ngoặc đó, ta được:

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{2^{100}} \cdot 2^{99} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 100 - \frac{1}{2^{100}} > 50.$$

Bài 4: Cho $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$

Chứng minh rằng: $A > \frac{7}{12}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200} \\ &> \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200} \right) \\ &\quad \left(\text{có 50 số hạng } \frac{1}{150} \text{ và } \frac{1}{200} \right) \\ &= \frac{50}{150} + \frac{50}{200} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Vậy $A > \frac{7}{12}$

Bài 5: Chứng minh rằng $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{130} > \frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{130} = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{111} + \frac{1}{112} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{121} + \frac{1}{122} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} > \frac{1}{110} + \frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} = \frac{10}{110} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{111} + \frac{1}{112} + \dots + \frac{1}{120} > \frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{121} + \frac{1}{122} + \dots + \frac{1}{130} > \frac{1}{130} + \frac{1}{130} + \dots + \frac{1}{130} = \frac{10}{130} = \frac{1}{13}$$

$$S > \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} = \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} = \frac{1}{4}$$

Bài 6: Chứng minh: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 3$

Hướng dẫn giải

Theo bài ta có

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right)$$

Vì $\frac{1}{3}$ lớn hơn $\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ lớn hơn $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{15}$ lớn hơn $\frac{1}{16}$

$\frac{1}{17}, \dots, \frac{1}{31}$ lớn hơn $\frac{1}{32}$. Do đó

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}\right)$$

$$\Rightarrow S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow S > 3$$

Vậy $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 3$ (đpcm)

Bài 7: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } 2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow 2A + A = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right)$$

$$\Rightarrow 3A = 1 - \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow 3A = \frac{63}{64} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3} \text{ (đpcm).}$$

Bài 8: Cho biểu thức: $B = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+101}$.

Chứng minh $B < \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } B = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+101}$$

Nhận xét: Vì :

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2 > 3.2$$

$$1+3+5+7=16=4^2 > 4.3$$

...

$$1+3+5+7+\dots+101=51^2 > 51.50$$

Suy ra:

$$B = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{51^2}$$

$$B < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{50.51}$$

$$B < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$B < \frac{3}{4} - \frac{1}{51}$$

$$B < \frac{3}{4}$$

Dạng 2: Tổng lũy thừa

Phương pháp:

So sánh các số hạng trong tổng với các số hạng trong tổng liên tiếp để tìm mối quan hệ. Nếu muốn chứng minh lớn hơn 1 giá trị k nào đó, ta cần so sánh với số hạng có mẫu lớn hơn, và ngược lại

Bài 1: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Hướng dẫn giải

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ A &< \frac{1}{1} - \frac{1}{100} < 1 \end{aligned}$$

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Chứng minh rằng $A < \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Giữ nguyên phân số $\frac{1}{2^2}$, còn các phân số khác thay bằng các phân số lớn hơn,

ta có: $A < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} + B$

Để dàng tính được: $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{100}$

Do đó: $A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$.

Bài 2: Cho $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{2004^2}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < A < \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{2004^2} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{2003.2004}$

$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \dots + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004}$

$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{2004} = \frac{501-1}{2004} = \frac{500}{2004} < \frac{500}{2000} = \frac{1}{4}$ (1)

Mặt khác, $A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$

$\Rightarrow A > \frac{1}{5} - \frac{1}{2005} = \frac{400}{2005} = \frac{80}{401} > \frac{7}{401} > \frac{7}{455} = \frac{1}{65}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{65} < A < \frac{1}{4}$;

Bài 3: Chứng tỏ $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} < 1$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2018.2019} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} = 1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019} < 1. \end{aligned}$$

Bài 4: Chứng minh rằng $A < \frac{1}{16}$ với $A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots + \frac{99}{5^{100}}$.

Hướng dẫn giải

$A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots + \frac{99}{5^{100}}$

$\Rightarrow 5A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{99}{5^{99}}$

$$\Rightarrow 4A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{99}} - \frac{99}{5^{100}}$$

$$\Rightarrow 20A = 1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^{98}} - \frac{1}{5^{99}}$$

$$\Rightarrow 20A - 4A = \left(1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^{98}} - \frac{1}{5^{99}}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{99}} - \frac{99}{5^{100}}\right)$$

$$\Rightarrow 16A = 1 - \frac{2}{5^{99}} + \frac{99}{5^{100}} < 1$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{16}$$

Bài 5: Cho $A = \frac{7}{3} + \frac{11}{3^2} + \frac{15}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{504}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$A = \frac{7}{3} + \frac{11}{3^2} + \frac{15}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{504}}$$

$$\text{Ta có: } 3A = 7 + \frac{11}{3} + \frac{15}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{503}}$$

$$\text{Suy ra } 3A - A = \left(7 + \frac{11}{3} + \frac{15}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{503}}\right) - \left(\frac{7}{3} + \frac{11}{3^2} + \frac{15}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{504}}\right)$$

$$2A = 7 + \frac{11}{3} - \frac{7}{3} + \frac{15}{3^2} - \frac{11}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{503}} - \frac{2015}{3^{503}} - \frac{2019}{3^{504}}$$

$$2A = 7 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^{503}} - \frac{2019}{3^{504}}$$

$$2A = 7 + 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{503}}\right) - \frac{2019}{3^{504}}$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{503}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{502}}$$

$$3B - B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{502}} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{503}}\right)$$

$$2B = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{502}} - \frac{1}{3^{502}} - \frac{1}{3^{503}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{503}}$$

$$B = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{503}}\right)$$

$$\text{Do đó } 2A = 7 + 4 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{503}} \right) \right] - \frac{2019}{3^{504}} = 7 + 2 - \frac{2}{3^{503}} - \frac{2019}{3^{504}} = 9 - \frac{2}{3^{503}} - \frac{2019}{3^{504}}$$

$$A = \frac{9}{2} - \frac{1}{3^{503}} - \frac{2019}{2 \cdot 3^{504}} < \frac{9}{2}. \text{ Do đó } A < \frac{9}{2}.$$

Bài 6: Chứng minh rằng $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$.

Hướng dẫn giải

$$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow 3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 4A < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 3B = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow 4B = B + 3B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 4A < B < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}.$$

Bài 7: Cho $n \in \mathbb{Z}, n > 2$. Chứng tỏ rằng $P = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ không là số nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{4-1}{4} + \frac{9-1}{9} + \frac{16-1}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2} = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < n - 1 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}.$$

$$\text{Suy ra: } P > n - 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \quad (2)$$

Vậy $n-2 < P < n-1$ nên P không phải số nguyên.

Bài 8: Chứng minh rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} \\ &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2} \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} \\ &= 1 - \frac{1}{10^2} < 1 \end{aligned}$$

Bài 9: Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{2002}} - \frac{1}{2^{2004}} < \frac{1}{5}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{2^2} S = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{10}} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} - \frac{1}{2^{2006}} \Rightarrow S + \frac{S}{4} = \frac{5S}{4} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2006}} < \frac{1}{4} \Rightarrow S < \frac{1}{5}$$

Bài 10: Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2005}} < \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{3} B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2006}} \Rightarrow B - \frac{1}{3} B = \frac{2B}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2006}} < \frac{1}{3} \Rightarrow B < \frac{1}{2}$$

Bài 11: Cho $P = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2019^2}$. Chứng minh rằng P không phải là một số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{1}{1^2} = 1$$

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{2019^2} < \frac{1}{2018} \cdot \frac{1}{2019}$$

$$\Rightarrow P < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019}$$

$$\Rightarrow P < 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}$$

$$\Rightarrow P < 2 - \frac{1}{2019}$$

Vậy P không phải là một số tự nhiên.

Bài 12: Chứng minh rằng: $1 < \frac{2012}{2011^2+1} + \frac{2012}{2011^2+2} + \frac{2012}{2011^2+3} + \dots + \frac{2012}{2011^2+2011} < 2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{2012}{2011^2+1} < \frac{2012}{2011^2}$, $\frac{2012}{2011^2+2} < \frac{2012}{2011^2}$, tương tự như vậy :

$$A < \frac{2012}{2011^2} + \frac{2012}{2011^2} + \dots + \frac{2012}{2011^2} = \frac{2012.2011}{2011^2} = \frac{2012}{2011} < 2 \Rightarrow A < 2$$

Mặt khác: $\frac{2012}{2011^2+1} > \frac{2012}{2011^2+2011}$, $\frac{2012}{2011^2+2} > \frac{2012}{2011^2+2011}$, Tương tự như vậy:

$$A > \frac{2012}{2011^2+2011} + \frac{2012}{2011^2+2011} + \dots + \frac{2012}{2011^2+2011} = \frac{2012.2011}{2011^2+2011} = \frac{2012.2011}{2011(2011+1)} = 1$$

Bài 13: Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 10$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$$

Bài 14: Chứng minh rằng: $N = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ không là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

$$\text{Có } N = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > 0.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

... ..

$$\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\text{Nên } N < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1.$$

Dạng 3: Tích của một dãy

Phương pháp:

Với dạng tích ta sử dụng tính chất: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ với $m > 0$ và $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$ với $m > 0$.

$$\text{Bài 1. Cho } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{199}{200} \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh rằng } A^2 < \frac{1}{201}$$

Giải. Biểu thức A có tích của 100 phân số nhỏ hơn 1, trong đó các tử đều lẻ, các mẫu đều chẵn. Ta đưa ra biểu thức trung gian là một tích các phân số mà các tử đều chẵn, các mẫu đều lẻ. Thêm 1 vào tử và mẫu của mỗi phân số của A , giá trị mỗi phân số tăng thêm, do đó

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{200}{201} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được:

$$A^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{199}{200} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{200}{201} \right)$$

Vế phải của bất đẳng thức trên bằng:

$$\frac{1 \cdot (3 \cdot 5 \dots 199)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 200} \times \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 200}{(3 \cdot 5 \dots 199) \cdot 201} = \frac{1}{201}$$

$$\text{Vậy } A^2 < \frac{1}{201}.$$

$$\text{Bài 2: Cho } M = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{631}{632}. \text{ Chứng minh rằng: } M < 0,04.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } N = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{632}{633}.$$

$$\Rightarrow M.N = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{631}{632} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{632}{633} \right) = \frac{1}{633}$$

Mà $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \dots; \frac{631}{632} < \frac{632}{633}$ nên $M^2 < M.N \Rightarrow M < 0,39$

Vậy $M < 0,04$ (đpcm).

Bài 3: Cho $A = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$

Chứng minh rằng $A < 2$?

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right) \\ &= \frac{4}{1.3} \cdot \frac{9}{2.4} \cdot \frac{16}{3.5} \cdots \frac{4072324}{2017.2019} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdots \frac{2018.2018}{2017.2019} = \frac{2.3.4 \cdots 2018}{1.2.3 \cdots 2017} \cdot \frac{2.3.4 \cdots 2018}{3.4.5 \cdots 2019} \\ &= 2018 \cdot \frac{2}{2019} < 2019 \cdot \frac{2}{2019} = 2. \end{aligned}$$

Vậy $A < 2$.

Bài 4: Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ So sánh A với $-\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta thấy tích A gồm 99 số âm :

$$A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{10000} - 1\right) = - \left(\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdots \frac{99.101}{100.100} \right) = \frac{-101}{200}, \text{ Mà :}$$

$$\frac{101}{200} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-101}{200} < \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{-1}{2}$$

Dạng 5. Bất đẳng thức dạng chữ

Phương pháp:

+ Với các số thực dương a, b bất kì, ta luôn có $a \geq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

+ Với các số thực dương a, b, c, d bất kì, ta có:

- Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

- Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

- Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Lưu ý: Trước khi áp dụng các bất đẳng thức về tỉ số ta phải chứng minh.

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Hướng dẫn giải

1) Vì $a, b, c > 0$ nên $a+b+c > a+b > 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$.

Tương tự $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}$ và $\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a}$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

2) Trước hết ta chứng minh với x, y, k là các số dương và $\frac{x}{y} < 1$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k}$.

Thật vậy xét hiệu $\frac{x}{y} - \frac{x+k}{y+k} = \frac{k(x-y)}{y(y+k)} < 0$ do $y(y+k) > 0$ và $x-y < 0$ (do giả thiết $x < y$).

Do $a < b+c$; $b < c+a$; $c < a+b$ nên ta có :

$$\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a}; \quad \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b}; \quad \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Do đó: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Bài 2. Cho a, b, c, d là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Hướng dẫn giải

1) Vì $a, b, c, d > 0$ nên $a+b+c+d > a+b+c > 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c}$.

Tương tự $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d}$; $\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a}$; $\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b}$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} > \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

2) Trước hết ta chứng minh với x, y, k là các số dương và $\frac{x}{y} < 1$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k}$.

Thật vậy xét hiệu $\frac{x}{y} - \frac{x+k}{y+k} = \frac{k(x-y)}{y(y+k)} < 0$ do $y(y+k) > 0$ và $x-y < 0$ (do giả thiết $x < y$).

Do $a < a+b+c$; $b < b+c+d$; $c < c+d+a$; $d < d+a+b$ nên ta có :

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}; \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{b+c+d+a}; \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{c+d+a+b}; \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{d+a+b+c}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được :

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2$$

Do đó: $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

Bài 3: Cho $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng: $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}; \frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}; \frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

$$\Rightarrow 1 < M < 2$$

Vậy A có giá trị không nguyên

Bài 4 : Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Hướng dẫn giải

$$0 \leq (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Tương tự: $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$;

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

+) Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a < b + c$, nhân cả 2 vế với a dương ta được:

$a^2 < ab + ac$. Tương tự: $b^2 < ba + bc$; $c^2 < ca + cb$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5: Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Hướng dẫn giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$

Do đó: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$

Mà: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (dpcm)$

Bài 6: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Hướng dẫn giải

Vì $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$

$$\Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6 \text{ (vì } a+b+c=1)$$

Hay $3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b=\frac{5}{3}$

Bài 7: Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a+b$

Hướng dẫn giải

Từ $a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; \quad b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$

Vậy $ab > a+b$

Bài 8: Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

Vậy $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Bài 9: Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Hướng dẫn giải

Xét $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$$

Suy ra điều phải chứng minh

Bài 10: Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn : $a + 3c = 2016; a + 2b = 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$

Hướng dẫn giải

Ta có: $a + 3c = 2016$ (1) và $a + 2b = 2017$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow a = 2016 - 3c$

Lấy (2) $-(1)$ ta được $2b - 3c = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1+3c}{2}$. Khi đó:

$$P = a + b + c = (2016 - 3c) + \frac{1+3c}{2} + c = \left(2016 + \frac{1}{2}\right) + \frac{-6c + 3c + 2c}{2} = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2}$$

Vì a, b, c không âm nên $P = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2} \leq 2016\frac{1}{2}$, $Max P = 2016\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0$

Bài 11: Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ có các tính chất sau:

* a_1 là số dương

* Tổng của ba số viết liền nhau bất kỳ là một số dương.

* Tổng của 20 số đó là số âm

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$a_1 > 0, a_2 + a_3 + a_4 > 0; \dots; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0 \Rightarrow a_{14} < 0$$

Cũng như vậy:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + a_{13} + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$\Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0$$

$$\text{Mặt khác, } a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$$

$$\text{Từ các điều kiện } a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 a_{12} \text{ (đpcm)}$$

Bài 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } x \geq 0; \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 0 \text{ (tmdk)}. \text{ Vậy } P_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 13: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$$

Vì a là số dương nên theo tính chất của tỉ số ta được $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$

$$\text{Do đó ta có } \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$$

$$\text{Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

CHUYÊN ĐỀ 12: ĐỒNG DƯ THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Cho a, b là các số nguyên và n là số nguyên dương. Ta định nghĩa a đồng dư với b theo môđun n và kí hiệu là: $a \equiv b \pmod{n}$, nếu a và b có cùng số dư khi chia cho n .

Chú ý : a) $a \equiv b \pmod{m}$ là một đồng dư thức với a là vế trái, b là vế phải.

$$b) a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b : m \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z} \text{ sao cho } a = b + mt.$$

c) Nếu a và b không đồng dư với nhau theo môđun m ta ký hiệu :

$$a \not\equiv b \pmod{m}.$$

d) Nếu a chia cho b dư r thì $a \equiv r \pmod{b}$

2. Tính chất

1. Tính chất phản xạ : $a \equiv a \pmod{m}$.

2. Tính chất đối xứng : $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$.

3. Tính chất bắc cầu :

$$a \equiv b \pmod{m}; b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}.$$

4. Cộng hay trừ từng vế của đồng dư thức có cùng môđun :

$$a \equiv b \pmod{m}; c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$$

Tổng quát : $a_i \equiv b_i \pmod{m}, i = 1; 2; \dots; k \Rightarrow$

$$a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_k \equiv b_1 \pm b_2 \pm \dots \pm b_k \pmod{m}.$$

5. a) Nhân hai vế của đồng dư thức với một số nguyên :

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m} \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

b) Nhân hai vế và môđun của đồng dư thức với một số nguyên dương:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{km} \text{ với } k \in \mathbb{N}^*$$

6. Nhân từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun :

$$a \equiv b \pmod{m}; c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

Tổng quát $a_i \equiv b_i \pmod{m}, i = 1; 2; \dots; k \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_k \equiv b_1 b_2 \dots b_k \pmod{m}$.

7. Nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa :

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

8. Nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy :

$a \equiv b \pmod{m_i}, i = 1; 2; \dots; k \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m_1; m_2; \dots; m_k]}$. Đặc biệt nếu $(m_i, m_j) = 1$ ($i, j = 1; 2; \dots; k$) thì

$$a \equiv b \pmod{m_i} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

9. Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì tập hợp các ước chung của a và m bằng tập hợp các ước chung của b và m .

$$\text{Đặc biệt : } a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a, m) = (b, m)$$

10. Chia hai vế và môđun của một đồng dư cho một ước dương chung của chúng :

$$a \equiv b \pmod{m}, k \in UC(a, b, m), k > 0 \Rightarrow \frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{m}{k}}$$

$$\text{Đặc biệt : } ac \equiv bc \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{(c, m)}}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán chứng minh chia hết

*** Cơ sở phương pháp:** Khi số dư trong phép chia a cho m bằng 0 thì $a : m$. Như vậy để chứng tỏ $a : m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod{m}$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng: $(2222^{5555} + 5555^{2222}) : 7$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2222 \equiv 3 \pmod{7}$ hay $2222 \equiv -4 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv (-4)^{5555} \pmod{7} (*)$

Mặt khác $5555 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod{7} (**)$

Từ (*) và (**)

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv [(-4)^{5555} + 4^{2222}] \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv -4^{2222} (4^{3333} - 1) \pmod{7}$$

Ta lại có: $4^{3333} = (4^3)^{1111} = 64^{1111}$ mà $64 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4^{3333} \equiv 1 \pmod{7}$

$$\Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow -4^{2222} (4^{3333} - 1) \equiv 0 \pmod{7}$$

Do vậy $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv 0 \pmod{7}$ hay $(2222^{5555} + 5555^{2222}) : 7$

Bài toán 2. Chứng minh rằng: $A = (7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n) : 19$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$5^{2n} = (5^2)^n = 25^n \Rightarrow A = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$$

$$25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19} \Rightarrow A \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \pmod{19} \Leftrightarrow A \equiv 19 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow A : 19$$

Bài toán 3. Chứng minh rằng $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$ ($n \in \mathbb{N}$)

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$; $11^2 = 121 \equiv -12 \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1} = 12 \cdot (12^2)^n \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}$

$$11^{n+2} = 11^2 \cdot 11^n \equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133}$$

Do đó $12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 12 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n \equiv 0 \pmod{133}$.

Vậy với $n \in \mathbb{N}$ thì $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$.

Cách 2: Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n} \equiv 11^n \pmod{133}$ (1)

Mà $12 \equiv -11^2 \pmod{133}$ (2) Nhân vế với vế của (1) và (2) ta có :

$$12^{2n} \cdot 12 \equiv 11^n \cdot (-11^2) \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n+1} \equiv -11^{n+2} \pmod{133}$$

$$12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133} \text{ hay } 12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133.$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng: $A = (2^{2^n} + 5) \vdots 7 (\forall n \in \mathbb{N})$

Hướng dẫn giải

Ta có $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$

Ta đi tìm số dư của 2^{2^n} khi chia cho 3 (đây chính là điểm mấu chốt của bài toán).

Vì $4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2^n} \equiv 1 \pmod{3}$ hay n chia cho 3 dư 1.

Giả sử: $2^{2^n} = 3k + 1 (k \in \mathbb{N})$

Khi đó ta có: $A = 2^{3k+1} + 5 = 2 \cdot 8^k + 5$

$$\text{Vì } 8^k \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 8^k \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 8^k + 5 \equiv 2 + 5 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{7}$$

Vậy $A \vdots 7$

 **Dạng 2: Sử dụng đồng dư thức tìm số dư**

* **Cơ sở phương pháp:** Với hai số nguyên a và m , $m > 0$ luôn có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho $a = mq + r$, $0 \leq r < m$. Để tìm số dư r trong phép chia a cho m ta cần tìm r sao cho

$$\begin{cases} a \equiv r \pmod{m} \\ 0 \leq r < m \end{cases}.$$

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số dư khi chia 3^{2000} cho 7.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$3^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 3^6 \equiv (3^2)^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (3^6)^{333} \equiv 1 \pmod{7} \Leftrightarrow 3^{1998} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\text{Mặt khác } 3^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 3^{2000} \equiv 3^{1998} \cdot 3^2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{7} \Rightarrow 3^{2000} : 7 \text{ dư } 2.$$

Nhận xét:

Để tìm số dư khi chia a^n cho $b > 0$, ta lấy lũy thừa với số mũ tăng dần của a chia cho b để tìm số dư. Ta sẽ dừng lại để xem xét khi tìm được số dư có giá trị tuyệt đối nhỏ hoặc là một giá trị đặc biệt có liên quan đến bài toán.

Bài toán 2. Tìm số dư trong phép chia $5^{70} + 7^{50}$ cho 12.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$5^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow (5^2)^{35} \equiv 1 \pmod{12} \Leftrightarrow 5^{70} \equiv 1 \pmod{12} (*)$$

$$7^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow (7^2)^{25} \equiv 1 \pmod{12} \Leftrightarrow 7^{50} \equiv 1 \pmod{12} (**)$$

$$\text{Từ } (*); (**) \Rightarrow 5^{70} + 7^{50} \text{ cho } 12 \text{ dư } 2.$$

Bài toán 3. Tìm số dư của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } 3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (3^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{2005} \equiv 1 \pmod{11} (1)$$

$$\text{Mặt khác } 4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (4^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 4^{2005} \equiv 1 \pmod{11} (2)$$

$$\text{Từ } (1); (2) \Rightarrow \text{số dư của số } A = 3^{2005} + 4^{2005} \text{ khi chia cho } 11 \text{ là } 2.$$

Bài toán 4. a) Tìm số dư trong phép chia $1532^5 - 1$ cho 9.

b) Tìm số dư trong phép chia $2016^{2018} + 2$ cho 5

Hướng dẫn giải

a) Ta có $1532 = 9 \cdot 170 + 2 \equiv 2 \pmod{9}$ do đó $1532^5 \equiv 2^5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 2^5 - 1 \pmod{9}$. Vì $2^5 - 1 = 31 \equiv 4 \pmod{9}$. Do đó

$1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod{9}$. Vậy số dư cần tìm là 4.

b) Ta có $2016 \equiv 1 \pmod{5}$ do đó $2016^{2018} \equiv 1^{2018} \pmod{5}$

suy ra $2016^{2018} + 2 \equiv 1^{2018} + 2 \pmod{5}$. Vì $1 + 2 = 3 \equiv 3 \pmod{5}$.

Do đó $2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod{5}$.

Vậy số dư cần tìm là 3.

** Dạng 3: Tìm điều kiện của biến để chia hết**

* **Cơ sở phương pháp:** Dựa vào tính chất của đồng dư thức về số dư để tìm ra điều kiện của ẩn để biểu thức chia hết.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên n sao cho: a. $(2^{3n+4} + 3^{2n+1}) : 19$ b. $(n \cdot 2^n + 1) : 3$

Hướng dẫn giải

a. Ta có $2^{3n+4} + 3^{2n+1} = 16 \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n$

Vì $16 \equiv -3 \pmod{19} \Rightarrow 16 \cdot 8^n \equiv -3 \cdot 8^n \pmod{19}$

$\Rightarrow (16 \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n) : 19 \Leftrightarrow (-3) \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n \equiv 0 \pmod{19}$

$\Leftrightarrow 9^n - 8^n \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow 9^n \equiv 8^n \pmod{19}$

$\Rightarrow n = 0$

vì trái lại $9^n \equiv 8^n \pmod{19} \Rightarrow 9 \equiv 8 \pmod{19}$ là vô lý

Vậy $n = 0$.

b. Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $n = 3k (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n \cdot 2^n : 3 \Rightarrow n \cdot 2^n + 1 \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow$ loại

Trường hợp 2

Nếu $n = 3k + 1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n \cdot 2^n + 1 = (3k + 1) \cdot 2^{3k+1} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k+1} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+1} + 2 \cdot 8^k + 1$

$\Rightarrow n \cdot 2^n + 1 : 3 \Leftrightarrow (2 \cdot 8^k + 1) : 3$

$8 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 8^k \equiv (-1)^k \pmod{3}$

$\Rightarrow 2 \cdot 8^k + 1 : 3 \Leftrightarrow 2 \cdot (-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod{3}$

tương đương với k chẵn $\Leftrightarrow k = 2m (m \in \mathbb{N}) \Rightarrow n = 6m + 1 (m \in \mathbb{N})$

Trường hợp 3

Nếu

$n = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n \cdot 2^n + 1 = (3k + 2) \cdot 2^{3k+2} + 1$

$= 3k \cdot 2^{3k+2} + 2 \cdot 2^{3k+2} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+2} + 8^{k+1} + 1$

$\Rightarrow (n \cdot 2^n + 1) : 3 \Leftrightarrow (-1)^{k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow k+1$ lẻ $k = 2m (m \in \mathbb{N}) \Rightarrow n = 6m + 2 (m \in \mathbb{N})$

Vậy điều kiện cần tìm là $m \equiv 1 \pmod{6}$ hoặc $m \equiv 2 \pmod{6}$.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112 và chia n cho 132 thì dư 98.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} n &\equiv 98 \pmod{132} \Rightarrow n = 132k + 98 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (1) \\ \Rightarrow 132 + 98 &\equiv 112 \pmod{131} \\ \Rightarrow k + 98 + 33 &= 112 + 33 \pmod{131} \Rightarrow k \equiv 14 \pmod{131} \\ \Rightarrow k &\equiv 131m + 14 \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) $n = 131.132m + 1946 \Rightarrow n = 1946$

Dạng 4: Tìm một chữ số tận cùng

*** Cơ sở phương pháp:**

Nếu $a \equiv r \pmod{10}; 0 \leq r < 10$ thì r là chữ số tận cùng của a .

Ta cần lưu ý một số tính chất sau:

Tính chất 1

Nếu a có chữ số tận cùng là $0; 1; 5; 6$ thì a^n cũng có chữ số tận cùng như a nghĩa là

$$a^n \equiv a \pmod{10}$$

Tính chất 2

Nếu a có chữ số tận cùng bằng $4; 9$ thì a^2 có chữ số tận cùng bằng $6; 1$.

Nghĩa là: Nếu $a \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow a^2 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow a^{2k} \equiv 6 \pmod{10}$

Nếu $a \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow a^{2k} \equiv 1 \pmod{10}$

Do vậy để tìm chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 2.

Tính chất 3

Nếu a có chữ số tận cùng là $2; 3; 7; 8$ thì ta áp dụng một trong các kết quả sau:

$$2^{4k} \equiv 6 \pmod{10}; 3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}; 7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}; 8^{4k} \equiv 6 \pmod{10}$$

Do vậy để tìm chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 4.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho số $A = 2012^{2013}$ tìm chữ số tận cùng của A .

Hướng dẫn giải

Ta có $2013 = 4.503 + 1$

Vì $2012 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2012^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$$\Rightarrow (2012^4)^{503} \equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow 2012^{2012} \equiv 6 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 2012^{2013} \equiv 6.2 \pmod{10} \Leftrightarrow 2012^{2013} \equiv 2 \pmod{10}$$

Vậy A có chữ số tận cùng là 2.

Bài toán 2. Cho $B = 1978^{1986^8}$ tìm chữ số tận cùng của B .

Hướng dẫn giải

$$1978 \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 1978^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$1986^8 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 1986 = 4k \ (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow C = 1978^{4k} \equiv 6 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của B là 6.

Dạng 5: Tìm hai chữ số tận cùng

*** Cơ sở phương pháp:** Nếu $a \equiv r \pmod{100}; 10 \leq r < 100$ thì r là chữ số tận cùng của a.

Ta cần lưu ý một số tính chất sau:

$$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}; 3^{20} \equiv 01 \pmod{100}; 6^5 \equiv 76 \pmod{100}$$

$$7^6 \equiv 01 \pmod{100}; 5^2 \equiv 25 \pmod{100}$$

$$76^n \equiv 76 \pmod{100}; 25^n \equiv 25 \pmod{100} \ (\forall n \geq 2)$$

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \\ a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \\ a \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 25 \pmod{100} \\ a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10} \Rightarrow a^{20k} \equiv 76 \pmod{100} \end{cases}$$

Do vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 20.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho số $A = 2012^{2013}$ tìm hai chữ số tận cùng của A.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$2013 = 20 \cdot 100 + 13$$

$$2012 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2012^{20} \equiv 76 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow (2012^{20})^{100} \equiv 76 \pmod{100} \Leftrightarrow 2012^{2000} \equiv 76 \pmod{100} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 2012 \equiv 12 \pmod{100} \Rightarrow 2012^6 \equiv 12^6 \pmod{100} \Rightarrow 2012^6 \equiv 84 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 2012^6 \equiv 56 \pmod{100} \Rightarrow 2012^{12} \equiv 56 \pmod{100} \Rightarrow 2012^{2013} \equiv 72 \pmod{100} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 2012^{2013} = 2012^{2000} \cdot 2012^{2013} \equiv 76 \cdot 72 \pmod{100} \Leftrightarrow 2012^{2013} \equiv 72 \pmod{100}$$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là: 72

Bài toán 2. Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau

$$\text{a. } A = 7^{9^{7^9}} \quad \text{b. } B = 29^{9^{2012}} \quad \text{c. } C = 1978^{1986^8}$$

Hướng dẫn giải

a. Vì $7^4 \equiv 01 \pmod{100}$ nên ta đi tìm số dư khi chia 9^{7^9} cho 4.

Ta có

$$9 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 9^{7^9} \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 9^{7^9} = 4k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A = 7^{9^{7^9}} = 7^{4k+1} = 7 \cdot (7^4)^k \equiv 7 \cdot 01 \pmod{100} \Rightarrow 7^{9^{7^9}} \equiv 07 \pmod{100}$$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là 07.

b. Vì $29^{10} \equiv 01 \pmod{100} \Rightarrow$ nên ta đi tìm số dư khi chia 9^{2012} cho 10

Ta có :

$$9 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{2012} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{2012} = 10k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow B = 29^{10k+1} = 29 \cdot (29^{10})^k \equiv 29 \cdot 01 \pmod{100} \Leftrightarrow B \equiv 29 \pmod{100}$$

Vậy B có hai chữ số tận cùng là 29.

c. Vì $C \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow C^{20} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow C^{20m} \equiv 76 \pmod{100}$

Mặt khác

$$1986 \equiv 6 \pmod{20} \Rightarrow 1986^8 \equiv 16 \pmod{20}$$

$$\Rightarrow C = 1978^{20k+6} = (1978^{20})^k \cdot 1978^6 \equiv 1978^{16} \cdot 76 \pmod{100}$$

Ta lại có :

$$1978 \equiv -22 \pmod{100} \Rightarrow 1978^4 \equiv 56 \pmod{100} \Rightarrow (1978^4)^4 \equiv 56^4 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 1978^{16} \equiv 76 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow C \equiv 96 \cdot 76 \pmod{100} \Leftrightarrow C \equiv 76 \pmod{100}$$

Vậy C có hai chữ số tận cùng là 76.

 **Dạng 6: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán về số chính phương**

*** Cơ sở phương pháp:**

Số chính phương là số có dạng $n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

Ta đi chứng minh một số tính chất cơ bản của số chính phương bằng đồng dư :

1. Số chính phương khi chia cho 3 chỉ có hai số dư là 0 hoặc 1.

Thật vậy ta đi xét các trường hợp sau

Với $n = 3k \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow n^2 \equiv 0^2 \pmod{3} \Leftrightarrow n^2 \equiv 0 \pmod{3}$ số dư bằng 0

Với $n = 3k \pm 1 \Rightarrow n \equiv \pm 1 \pmod{3} \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2 \pmod{3} \Leftrightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$ số dư bằng 1.

2. Số chính phương khi chia cho 4 chỉ có hai số dư là 0 hoặc 1.

Chứng minh tương tự :

Với $n = 4k \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow n^2 \equiv 0^2 \pmod{4} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow$ số dư bằng 0.

Với $n = 4k \pm 1 \Rightarrow n \equiv \pm 1 \pmod{4} \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2 \pmod{4} \Leftrightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow$ số dư bằng 1.

Với $n = 4k + 2 \Rightarrow n \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow n^2 \equiv 2^2 = 4 \pmod{4} \Leftrightarrow n^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow$ số dư bằng 0.

3. Số chính phương khi chia cho 8 chỉ có ba số dư là 0, 1 hoặc 4.

Tương tự ta xét các trường hợp sau :

$$n = 8k \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

$$n = 8k \pm 1 \Rightarrow n \equiv \pm 1 \pmod{8} \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$n = 8k \pm 2 \Rightarrow n \equiv \pm 2 \pmod{8} \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 2)^2 = 4 \pmod{8}$$

$$n = 8k \pm 3 \Rightarrow n \equiv \pm 3 \pmod{8} \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 3)^2 \pmod{8} \Leftrightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$n = 8k + 4 \Rightarrow n \equiv 4 \pmod{8} \Rightarrow n^2 \equiv 4^2 \pmod{8} \Leftrightarrow n^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

Hoàn toàn tương tự ta có thể xét các trường hợp số dư của số chính phương khi chia cho 5,7,9..

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng số : $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ với k chẵn không thể là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Với k chẵn ta có

$$19^k \equiv (-1)^k \pmod{4} \Rightarrow 19^k \equiv 1 \pmod{4}$$

$$1995^k \equiv (-1)^k \pmod{4} \Rightarrow 1995^k \equiv 1 \pmod{4}$$

$$1996^k \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k \equiv 3 \pmod{4}$$

Hay A chia 3 dư 4. Vậy A không thể là số chính phương.

Bài toán 2. Tìm tất cả số tự nhiên x,y để $2^x + 5^y$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2^x + 5^y = k^2$ (k thuộc N)

Nếu x = 0 thì $1 + 5^y = k^2$ do đó k chẵn $\Rightarrow k^2$ chia hết cho 4 nhưng $1+5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy x khác 0, từ $2^x + 5^y = k^2 \Rightarrow k$ lẻ và k không chia hết cho 5. Xét hai trường hợp.

+) Với $y = 0$ thì $2^x + 1 = k^2 = (2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k = 2n+1, n \in \mathbb{N}$).

$$\Rightarrow 2^x = 4n(n+1) \Rightarrow n=1. \text{ Khi đó } x=3; y=0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Thử lại: $2^3 + 5^0 = 2^3 + 5^0 = 9$ là số chính phương.

+) Với $y \neq 0$ và k không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$

$$\text{Từ } 2^x + 5^y = k^2 \Rightarrow 2^x \equiv \pm 1 \pmod{5} \Rightarrow x \text{ chẵn}$$

Đặt $x = 2x_1$ ($x_1 \in \mathbb{N}$), ta có

$$5^y = (k + 2^{x_1})(k - 2^{x_1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k + 2^{x_1} = 5^{y_1} \\ k - 2^{x_1} = 5^{y_2} \end{cases} \text{ với } y_1 + y_2 = y \text{ với } y_1 > y_2, y_1, y_2 \text{ là các số tự nhiên.}$$

$$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^{y_2} (5^{x_1-y_2} - 1) \Rightarrow 5^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0.$$

$$\Rightarrow y_1 = y. \text{ Khi đó } 2^{x_1+1} = 5^y - 1.$$

Nếu $y=2t (t \in \mathbb{N})$ thì $2^{x_1+1} = 5^{2t} - 1 = 25^t - 1 \vdots 3$, vô lý

Vậy y lẻ, khi đó $2^{x_1+1} = 5^y - 1 = 4(5^{y-1} + 5^{y-2} + \dots + 5 + 1)$.

Nếu $y > 1$ thì $5^{y-1} + 5^{y-2} + \dots + 1$, lẻ (vô lý).

Nếu $y=1 \Rightarrow x_1=1$ khi đó $x=2; y=1$.

Thử lại $2^x + 5^y = 2^2 + 5^1 = 9$ là số chính phương

Vậy $x=2; y=1$ hoặc $x=3, y=0$.

Bài toán 3. Giả sử rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $5n+3$ là một hợp số.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2n+1=a^2$ và $3n+1=b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$.

Do $a^2 \equiv 1 \pmod{2}$ nên $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Suy ra $n \equiv 0 \pmod{2}$ và $b \equiv 1 \pmod{2}$. Do đó $2a-b > 1$ và $2a+b > 1$. Vậy $5n+3$ là hợp số.

Bài toán 3. Tìm nghiệm nguyên dương x để $3^x + 171$ là số chính phương.

(HSG Lai Châu 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta có: $3^x \equiv 1, 3 \pmod{8}$; $y^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$. Mà: $3^x + 171 = y^2 \Rightarrow 3^x \equiv 1 \pmod{8}$. Do đó: x có dạng $2k (k \in \mathbb{N})$.

Phương trình trở thành $A = (3^k)^2 + 171 = y^2$ với $k = 0, 1, 2$ thì phương trình vô nghiệm nên nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó phải ≥ 3 . Do đó theo nguyên lý kẹp được ta có: $\left[(3^k)^2 + 3 \right]^2 \geq A > (3^k)^2$.

$$\text{Khi đó: } A = \left[(3^k)^2 + 3 \right]^2 \text{ hoặc } A = \left[(3^k)^2 + 2 \right]^2$$

Giải từng trường hợp ra ta được $k=3 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=30$. Vậy $x=6$.

Dạng 7: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán về số nguyên tố, hợp số

* **Cơ sở phương pháp:** Đối với nhiều bài toán về số nguyên tố và hợp số ngoài sử dụng các tính chất về số nguyên tố chúng ta còn phải vận dụng các tính chất của đồng dư thức và định lý Fermat.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 14$ là số nguyên tố

Hướng dẫn giải

Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1

Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 14 = 23$ là số nguyên tố

Trường hợp 2

Với $p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 + 14 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p^2 + 14 > 3 \Rightarrow p^2 + 14$ không phải là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p đều tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho $2^n - n \vdots p$.

Hướng dẫn giải

Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $p = 2 \Rightarrow 2^n - n \vdots 2 (\forall n = 2k; k \in \mathbb{N})$

Trường hợp 2

Nếu $p > 2 \Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Theo định lý Fermat $\Rightarrow 2^{(p-1)k} - (p-1)k \equiv 1 + k \pmod{p} (\forall k \in \mathbb{N})$

Do đó với mọi số tự nhiên n có dạng $n = (p-1)(hp-1)(k \in \mathbb{N}^*)$

Ta có $2^n - n \equiv 1 + (hp-1) \equiv 0 \pmod{p}$ tức là $2^n - n \vdots p$

Bài toán 3. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ chứng minh rằng: $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số.

Hướng dẫn giải

Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1

Nếu $n = 2k \Rightarrow 19 \cdot 8^n + 17 \equiv 1 \cdot (-1)^{2k} + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 19 \cdot 8^n + 17 \vdots 3$

Mặt khác $19 \cdot 8^n + 17 > 3 \Rightarrow 19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số.

Trường hợp 2

$n = 4k + 1 \Rightarrow 19 \cdot 8^n + 17 = 19 \cdot 8^{4k+1} + 17 = 19 \cdot 8 \cdot 64^{2k} + 17 \equiv 6 \cdot 8 \cdot (-1)^{2k} + 4 \equiv 52 \equiv 0 \pmod{13}$ Mà

$19 \cdot 8^n + 17 > 3 \Rightarrow 19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số

Trường hợp 3

$n = 4k + 3 \Rightarrow 19.8^n + 17 = 19.8^{4k+3} + 17 = 19.8.64^{2k+1} + 17 \equiv (-1).3.(-1)^{2k+1} + 2 \equiv 5 \equiv 0 \pmod{3}$
 $\Rightarrow 19.8^n + 17 \vdots 3$
 Mà $19.8^n + 17 > 5 \Rightarrow 19.8^n + 17$ là hợp số.

Bài toán 4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 8. Chứng minh rằng: $(3^p - 2^p - 1) : 42p$

Hướng dẫn giải

Ta có $42p = 2.3.7.9$ để chứng minh $A = 3^p - 2^p - 1$ chia hết cho $42p$ ta chỉ cần chỉ ra rằng A chia hết cho 2, 3, 7

Thật vậy

Ta có $A \equiv 1^p - 0 - 1 = 0 \pmod{2} \Rightarrow A : 2$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 8 nên p là số lẻ :

$p = 2k + 1 \Rightarrow A = 3^p - 2^{2k+1} - 1 \equiv 0 - 4^k.2 - 1 \equiv -1.2 - 1 \equiv -3 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow A : 3$

Mặt khác $A = 3^{2k+1} - 2^{2k+1} - 1 = 3.9^k - 2^{2k+1} - 1 \equiv 3.2^k - 2^{2k+1} - 1 \equiv -(2^k - 1)(2^{2k+1} - 1) \pmod{7}$

Do $p = 2k + 3$ không chia hết cho 3 $\Rightarrow k : 3$ hoặc $k + 1 : 3$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1

Nếu $k = 3h (h \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^k - 1 = 8^h - 1 : 7$

Trường hợp 2

Tương tự nếu $k + 1 : 3 \Rightarrow 2^{k+1} - 1 : 7$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $A : 7$

Theo định lý Fermat ta có $A = 3^p - 2^p - 1 = (3^p - 3) - (2^p - 2) : p$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 8: Sử dụng đồng dư thức trong các bài toán giải phương trình nghiệm nguyên

* **Cơ sở phương pháp:** Trong giải phương trình nghiệm nguyên việc lựa chọn môđun một cách thích hợp sẽ giúp việc giải các phương trình khó phức tạp trở nên đơn giản hơn. Đặc biệt là các bài toán chứng minh phương trình nghiệm nguyên vô nghiệm.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$

b) $x^2 + y^2 = 1999$

Hướng dẫn giải

- Nhận xét: Số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1

$$a) \text{ Ta có: } \left. \begin{array}{l} x^2 \equiv 0,1(\text{mod } 4) \\ y^2 \equiv 0,1(\text{mod } 4) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0,1,3(\text{mod } 4)$$

Mà 1998 chia cho 4 dư 2, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

$$b) \text{ Ta có: } \left. \begin{array}{l} x^2 \equiv 0,1(\text{mod } 4) \\ y^2 \equiv 0,1(\text{mod } 4) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0,1,2(\text{mod } 4)$$

Mà 1999 chia cho 4 dư 3, nên phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$ (1)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow x^2 = 2(y-2)^2 - 5$$

- Nhận xét: Số chính phương chia cho 8 chỉ có số dư 0, 1 hoặc 4

$$\text{Ta có: } x^2 \equiv 0,1,4(\text{mod } 8)$$

$$\left. \begin{array}{l} (y-2)^2 \equiv 0,1,4(\text{mod } 8) \Rightarrow 2(y-2)^2 \equiv 0,2(\text{mod } 8) \\ -5 \equiv 3(\text{mod } 8) \end{array} \right\} \Rightarrow 2(y-2)^2 - 5 \equiv 3,5(\text{mod } 8)$$

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 3. Phương trình $z^2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 2013$ có nghiệm nguyên dương hay không?

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \equiv 0,1,4(\text{mod } 8) \Rightarrow x^2 - 1 \equiv 0,3,7(\text{mod } 8) \\ y^2 \equiv 0,1,4(\text{mod } 8) \Rightarrow y^2 - 1 \equiv 0,3,7(\text{mod } 8) \\ 2013 \equiv 5(\text{mod } 8) \end{array} \right\} \Rightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) \equiv 0,1,5(\text{mod } 8)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 2013 \equiv 5,6,2(\text{mod } 8)$$

$$\text{Mà } z^2 \equiv 0,1,4(\text{mod } 8)$$

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

 **Dạng 8: Sử dụng các định lý (ta thừa nhận không chứng minh)**

*** Cơ sở phương pháp:**

1. Định lý Fermat bé. Cho a là số nguyên dương và p là số nguyên tố. Khi đó ta luôn có $a^p \equiv a \pmod{p}$. Đặc biệt nếu $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

2. Định lý Wilson. Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3. Định lý Euler. Cho m là số nguyên dương và a là số nguyên tố cùng nhau với m ; $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m . Khi đó $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Chú ý: Nếu số nguyên dương m có dạng phân tích thành thừa số nguyên tố: $m =$

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \text{ thì } \varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

* Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Cho $a, b \in \mathbb{Z}; (a, b) = 1$ Chứng minh rằng: $a^3 - 2b^3$ không chia hết cho 19.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng phản chứng như sau:

Giả sử $(a^3 - 2b^3) : 19$ khi đó $(a^3)^6 - (2b^3)^6 : (a^3 - 2b^3) : 19$.

Mặt khác $(a^3)^6 - (2b^3)^6 = a^{18} - 64b^{18}$. Nếu a, b không chia hết cho 19 thì theo định lý

Fermat (Định lý Fermat: $a^p \equiv a \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$) Với mọi a nguyên và p nguyên tố).

$$\Rightarrow a^{18} \equiv b^{18} \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow a^{18} - 64b^{18} \equiv 1 - 64 = -63 \not\equiv 0 \pmod{19} \text{ (Vô lý)}$$

Nếu một trong hai số chia hết cho 19 thì từ $(a^3 - 2b^3) : 19 \Rightarrow \begin{cases} a : 19 \\ b : 19 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý vì $(a, b) = 1$.

Vậy $a^3 - 2b^3$ không chia hết cho 19.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì :

$$2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 \text{ chia hết cho } 22$$

Hướng dẫn giải

Theo Định lý Fermat bé ta có $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}; 3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

$$\text{Ta có } 3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 3 \cdot (3^4)^n \equiv 3 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 3^{4n+1} = 10k + 3, (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{Mặt khác } 2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 2^{4n+1} = 2 \cdot (2^4)^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10t + 2, (t \in \mathbb{N})$$

$$\text{Do đó } 2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 = 2^{10k+3} + 3^{10t+2} + 2002 + 5$$

$$= 2^3 \cdot (2^{10})^k + 3^2 \cdot (3^{10})^t + 22 \cdot 91 + 5 \equiv 2^3 + 3^2 + 0 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 : 2$ (vì $2^{3^{4n+1}}$ là số chẵn $3^{2^{4n+1}}$ là số lẻ 2007 là số lẻ).

$$\text{Do } (2; 11) = 1 \text{ nên } 2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 2007 : 22.$$

Bài toán 3. Cho $a_1; a_2; \dots; a_{2016}$ là 2016 số nguyên dương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \dots + a_{2016}^5 : 30$ là $a_1 + a_2 + \dots + a_{2016} : 30$.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Fermat bé, do 2; 3; 5 là các số nguyên tố và a là số nguyên dương bất kỳ ta có:

$$a^2 \equiv a \pmod{2} \Rightarrow a^4 = (a^2)^2 \equiv a^2 \equiv a \pmod{2} \Rightarrow a^5 \equiv a \pmod{2}$$

$$a^3 \equiv a \pmod{3} \Rightarrow a^5 = a^3 \cdot a^2 \equiv a \cdot a^2 \equiv a^3 \equiv a \pmod{3}$$

$$a^5 \equiv a \pmod{5}$$

Theo tính chất nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy.

$$\text{Do đó } a^5 \equiv a \pmod{2.3.5} \text{ hay } a^5 \equiv a \pmod{30} \Rightarrow a^5 - a \equiv 0 \pmod{30}$$

$$\text{Nghĩa là } (a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \dots + a_{2016}^5) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) \equiv 0 \pmod{30}$$

$$\text{Vậy } a_1 + a_2 + \dots + a_{2016} \vdots 30 \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \dots + a_{2016}^5 \vdots 30$$

Bài toán 3. Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5 .

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp 2 toàn quốc năm 1983).

Hướng dẫn giải

Vì 1983 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 mà $10^5 = 2^5 \cdot 5^5$ nên $(1983; 10^5) = 1$. Áp dụng định lý Euler ta có:

$$1983^{\varphi(10^5)} \equiv 1 \pmod{10^5}.$$

$$\text{Ta có } \varphi(10^5) = 10^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4 \cdot 10^4. \text{ Nghĩa là } 1983^{4 \cdot 10^4} - 1 \vdots 10^5$$

$$\text{Vậy } k = 4 \cdot 10^4.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Chứng minh $4^{2018} - 7 \vdots 9$

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên

$$A = (n^n - n^2 + n - 1) \vdots (n - 1)^2 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}, n > 1)$$

Bài 3. Chứng minh rằng: $(9^n + 1)$ không chia hết cho 100 ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Bài 4. Cho số $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ ($1 \leq a_n \leq 9$; $0 \leq a_i \leq 9$; $i = 0; 1; \dots; n-1$)

Hãy xác định dấu hiệu chia hết:

a) Cho 3;

b) Cho 4.

Bài 5. Chứng minh rằng: $A = (1924^{2003^{2004^n}} + 1920) \vdots 124 (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Bài 6. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000}

Bài 7. Tìm số dư trong phép chia

- a) $8! - 1$ cho 11. b) $2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018$ cho 5.
 c) $2^{50} + 41^{65}$ cho 7 d) $1^5 + 3^5 + 5^5 + \dots + 97^5 + 99^5$ cho 4.

Bài 8. Tìm số dư trong phép chia :

- a) $1532^5 - 4$ cho 9 ; b) 2^{2000} cho 25;
 c) $2014^{2015^{2016}}$ cho 13.

Bài 9. Tìm số dư trong phép chia :

- a) $A = 35^2 - 35^3 + 35^4 - 35^8 + 35^{16} + 35^{32}$ cho 425.
 b) $B = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \dots + 10^{10^{10}}$ cho 7.

Bài 10. a) Tìm chữ số tận cùng của 4^{3^2}

- b) Tìm hai chữ số tận cùng của 3^{999} .
 c) Tìm ba chữ số tận cùng của số 2^{512} .

Bài 11. Chứng minh :

- a) $41^{2015} - 6 \div 7$; b) $2^{4n+1} - 2 \div 15$ ($n \in \mathbb{N}$);
 c) $3^{76} - 2^{76} \div 13$; d) $20^{15} - 1 \div 341$.

Bài 12. Chứng minh $1890^{79} + 1945^{2015} + 2017^{2018} \div 7$.

Bài 13. a) Chứng minh $5555^{2222} + 2222^{5555} + 15554^{1111} \div 7$

b) Cho $M = 220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} + (220 + 119 + 69)^{102}$

Chứng minh $M \div 102$.

Bài 14. Chứng minh rằng $5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 2^{2n-1} \cdot 3^{n+1} \div 38$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Bài 15. Cho số $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ ($1 \leq a_n \leq 9$; $0 \leq a_i \leq 9$; $i = 0; 1; \dots; n-1$)

Hãy xác định dấu hiệu chia hết :

- a) Cho 9; b) Cho 25; c) Cho 11; d) Cho 8.

Bài 16. Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng A là một hợp số.

Bài 17. Cho $B = (12!)^{13} + 2016^{2015}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13.

Bài 18. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$:

- a) $2^{2^{2n+1}} + 3 \cdot 2^{3n} \div 7$;
 b) $2^{2^{4n+1}} + 2 \cdot 12^{5n+1} + 5 \cdot 10^{2n} \div 11$.

Bài 19. a) Với giá trị nào của số tự nhiên n thì $3^n + 63$ chia hết cho 72.

b) Cho $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$. Tìm giá trị tự nhiên của n để $A \div 323$.

Bài 20. Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + 1 \div p$.

Bài 21. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 20$ là số nguyên tố.

Bài 22. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số $ab^p - ba^p : p$ với mọi số nguyên dương a, b .

Bài 23. a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có dư là 7.

b) Chứng minh phương trình $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 2015$ không có nghiệm nguyên.

Bài 24. Tìm hai chữ số tận cùng của $2011^{2010^{2009}}$

(Đề thi Olympic Toán Singapore năm 2010)

Bài 25. Cho biểu thức $A = (a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}) - (a^{2008} + b^{2008} + c^{2008})$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 TP Hà Nội năm học 2011 – 2012)

Bài 26. Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2011 – 2012).

Bài 27. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2012 – 2013).

Bài 28. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a + 20$ và $b + 13$ cùng chia hết cho 21. Tìm số dư trong phép chia $A = 4^a + 9^b + a + b$ cho 21.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Trần Phú Hải Phòng năm học 2013 – 2014)

Bài 29. Cho n là một số nguyên dương chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Hà Nội năm học 2014 – 2015)

Bài 30. Chứng minh $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh năm học 2015 – 2016)

Bài 31. Chứng minh rằng phương trình : $x^{15} + y^{15} + z^{15} = 19^{2003} + 7^{2003} + 9^{2003}$ không có nghiệm nguyên.

Bài 32. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x(x+3) + y(y+3) = z(z+3)$ với điều kiện x, y là các số nguyên tố.

Bài 33. Chứng minh $(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10} : 106$

Bài 34. Chứng minh rằng $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k}$ không chia hết cho 5.

Bài 35. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại vô số số có dạng $2^n - n$, ($n \in \mathbb{N}$) chia hết cho p .

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1.

Ta có $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 4^{2016} = (4^3)^{672} \equiv 1 \pmod{9}$

Mặt khác $4^2 = 16 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow 4^{2018} = 4^{2016} \cdot 4^2 \equiv 1 \cdot 7 \pmod{9}$

Vậy $4^{2018} - 7 \equiv 0 \pmod{9}$ hay $4^{2018} - 7 \vdots 9$.

Bài 2.

Trường hợp 1:

Với $n = 2 \Rightarrow A = 1 : (2-1)^2$ luôn đúng

Trường hợp 2:

$$\begin{aligned} \text{Với } n > 2 \Rightarrow A &= n^2 (n^{n-2} - 1) + (n-1) = n^2 (n-1) (n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + 1) + (n-1) \\ &= (n-1) (n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1) \end{aligned}$$

Mặt khác

$$n \equiv 1 \pmod{(n-1)} \Rightarrow n^k \equiv 1 \pmod{(n-1)} (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 \equiv n-2 \pmod{(n-1)}$$

$$\Rightarrow n^{n-1} + \dots + n^2 + 1 \equiv n-1 \pmod{(n-1)}$$

$$n^{n-1} + \dots + n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{(n-1)} (1)$$

$$\Rightarrow (n-1) (n^{n-1} + \dots + n^2 + 1) \equiv 0 \pmod{(n-1)^2}$$

$$\Rightarrow A = (n^n - n^2 + n - 1) : (n-1)^2$$

Bài 3.

Trường hợp 1:

Với $n = 0 \Rightarrow 9^n + 1 = 2$ không chia hết cho 100.

hoặc $n = 1 \Rightarrow 9^n + 1 = 10$ không chia hết cho 100.

Trường hợp 2:

$n \geq 2$ Ta đi xét 2 khả năng sau:

Khả năng 1:

$$\text{Với } n \text{ chẵn } n = 2k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 9^n + 1 = 9^{2k} + 1 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow (9^n + 1) \text{ không chia hết cho } 10. \Rightarrow (9^n + 1) \text{ không chia hết cho } 100.$$

Khả năng 2:

$$\text{Với } n \text{ lẻ } n = 2k + 1 (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 9^n + 1 = 9 \cdot 81^k + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow (9^n + 1) \text{ không chia hết cho } 4. \Rightarrow (9^n + 1) \text{ không chia hết cho } 100.$$

Bài 4.

Ta có $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

a) Ta có $10 \equiv 1 \pmod{3}$ do đó $a_i \cdot 10^i \equiv a_i \pmod{3}, i = 1; 2; 3; \dots; n$

Do đó $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \pmod{3}$

Vậy $a \div 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{3}$

$\Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \div 3.$

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv 0 \pmod{4}, i = 2; 3; \dots; n$

$\Rightarrow a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv (a_1 \cdot 10 + a_0) \pmod{4}$

Vậy $a \div 4 \Leftrightarrow a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \div 4.$

Bài 5. Ta có $124 = 4 \cdot 31 \Rightarrow A \equiv 0 \pmod{4}$

Do vậy để chứng minh $A \div 124$ ta đi chứng minh $A \div 31$

Thật vậy : $1924 \equiv 2 \pmod{31}; 1920 \equiv -2 \pmod{31} \Rightarrow A \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2 \pmod{31} (*)$

Mặt khác : $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$. Ta đi tìm số dư của 2003^{2004^n} khi chia cho 5.

$2004^n \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 2004^n = 4k \Rightarrow 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$

$2003 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 2003^{4k} \equiv 3^{4k} \equiv 81^k \equiv 1 \pmod{5}$

$\Rightarrow 2003^{2004^n} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2003^{2004^n} = 5m + 1$

$\Rightarrow 2^{2003^{2004^n}} = 2^{5m+1} = 2 \cdot (2^5)^m \equiv 2 \pmod{31}$

Thay vào (*) ta có $A \equiv 0 \pmod{31} \Rightarrow A \div 31$

Bài 6.

a) Tìm chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 10. Vì $9^{2n+1} = 9 \cdot 81^n \equiv 9 \pmod{10}$. Do 9^{10} là số lẻ nên số $9^{9^{10}}$ có chữ số tận cùng là 9.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 100.

Ta có $3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100} \Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \pmod{100}$

Mà $(-19)^2 = 361 \equiv 61 \pmod{100}$ Vậy $3^8 \equiv 61 \pmod{100}$

$3^{10} \equiv 61 \cdot 9 \equiv 549 \equiv 49 \pmod{100}$

$3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100}$ (do $49^2 = 2401 = 24 \cdot 100 + 1$)

Do đó $3^{1000} \equiv 01 \pmod{100}$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01.

Bài 7. Với những bài toán dạng này, phương pháp chung là tính toán để đi đến $a \equiv b \pmod{m}$ với b là số có trị tuyệt đối nhỏ nhất có thể được (tốt nhất là $b = \pm 1$) từ đó tính được thuận lợi $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

a) $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8.$

Ta có $3 \cdot 4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}; 2 \cdot 6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}; 7 \cdot 8 \equiv 1 \pmod{11}$ Vậy $8! \equiv 5 \pmod{11}$
 $\Rightarrow 8! - 1 \equiv 4 \pmod{11}$. Số dư trong phép chia $8! - 1$ cho 11 là 4.

b) $2014 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 2014^{2015} \equiv -1 \pmod{5}$

$2016 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod{5}; 2018 \equiv 3 \pmod{5}$

$2014^{2015} + 2016^{2015} + 2018 \equiv 3 \pmod{5}.$

$$c) 2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{50} = (2^3)^{16} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$41 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 41^{65} \equiv (-1)^{65} \equiv -1 \pmod{7}$$

$$2^{50} + 41^{65} \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{7}.$$

$$d) 1^5 \equiv 1 \pmod{4}; 3^5 \equiv -1 \pmod{4}; 5^5 \equiv 1 \pmod{4}; \dots;$$

$$97^5 \equiv 1 \pmod{4}; 99^5 \equiv -1 \pmod{4}. \text{Đáp số: Dư } 0.$$

Bài 8. a) $1532 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod{9}$

$$\Rightarrow 1532^5 - 4 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$b) 2^5 = 32 \equiv 7 \pmod{25} \Rightarrow 2^{10} = (2^5)^2 \equiv 7^2 \equiv -1 \pmod{25}.$$

$$2^{2000} = (2^{10})^{200} \equiv (-1)^{200} \equiv 1 \pmod{25}.$$

$$c) 2014 = 155 \cdot 13 - 1 \text{ nên } 2014 \equiv -1 \pmod{13}; 2015^{2016} = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 2014^{2015^{2016}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{13}. \text{Đáp số: dư } 12.$$

Bài 9. a) Ta có $35^2 = 1225 = 425 \cdot 3 - 50 \equiv -50 \pmod{425}$

$$35^3 = 35^2 \cdot 35 \equiv -50 \cdot 35 \equiv -1750 \equiv -50 \pmod{425}$$

$$35^4 = (35^2)^2 \equiv (-50)^2 \equiv 2500 \equiv -50 \pmod{425}$$

$$\text{Tương tự với } 35^8; 35^{16}; 35^{32}. \text{ Từ đó có } A \equiv -100 \pmod{425}.$$

Hay số dư trong phép chia A cho 425 là 325.

$$b) \text{ Ta có } 10^5 = 7.14285 + 5 \equiv 5 \pmod{7}; 10^6 = 5.10 \equiv 1 \pmod{7};$$

$$10^n - 4 = \underbrace{99 \dots 96}_{n-1 \text{ số } 9} \equiv 0 \pmod{2} \text{ và } \underbrace{99 \dots 96}_{n-1 \text{ số } 9} \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 10^n - 4 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$\Rightarrow 10^n \equiv 4 \pmod{6} \text{ và } 10^n = 6k + 4 \quad (k, n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\text{Do đó } 10^{10^n} = 10^{6k+4} = (10^6)^k \cdot 10^4 \equiv 10^4 \pmod{7}$$

$$\text{Vậy } B \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + \dots + 10^4 \equiv 10 \cdot 10^4 \equiv 10^5 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Bài 10. a) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 10.

$$\text{Vì } 4^2 \equiv 6 \pmod{10} \text{ nên } 4^{3^2} = 4^9 = (4^2)^4 \cdot 4 \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow \text{chữ số tận cùng là } 4.$$

b) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 100. Theo ví dụ 3 chuyên đề 26 ta đã có $3^{1000} \equiv 01 \pmod{100}$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01. Số 3^{1000} là bội số của 3 nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải có số dư là 2 để chia tiếp thì 201 chia hết cho 3 (nếu số dư là 0 hay 1 thì 001; 101 đều không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ số tận cùng bằng $201 : 3 = 67$.

c) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 1000. Do $1000 = 125 \cdot 8$ trước hết ta tìm số dư của 2^{512} cho 125. Từ hằng đẳng thức:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \text{ ta có nhận xét nếu } a \vdots 25 \text{ thì } (a + b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}.$$

$$\text{Vì } 2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25} \text{ nên } 2^{10} = 25k - 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Từ nhận xét trên ta có $2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$

Vì vậy $2^{512} = (2^{50})^{10} \cdot 2^{12} \equiv (-1)^{10} \cdot 2^{12} \equiv 2^{12} \pmod{125}$.

Do $2^{12} = 2^{10} \cdot 2^2 = 1024 \cdot 4 \equiv 24 \cdot 4 \equiv 96 \pmod{125}$. Vậy $2^{512} \equiv 96 \pmod{125}$.

Hay $2^{512} = 125m + 96, m \in \mathbb{N}$. Do $2^{512} \div 8; 96 \div 8$ nên $m \div 8 \Rightarrow m = 8n (n \in \mathbb{N})$.

$2^{512} = 125 \cdot 8n + 96 = 1000n + 96$. Vậy ba chữ số tận cùng của số 2^{512} là 096.

Bài 11. Để chứng tỏ $a \div m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod{m}$

a) $41 = 42 - 1 \equiv -1 \pmod{7}$. Do đó $41^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \pmod{7}$

Hay $41^{2015} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 41^{2015} + 1 \equiv 0 \pmod{7}$

b) Ta có $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{15}$

Do đó $2^{4n+1} - 2 = 2(2^{4n} - 1) \equiv 0 \pmod{15}$.

c) Ta có $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}; 3^{76} = (3^3)^{25} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$

Ta có $2^4 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 2^6 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$

$$2^{76} = (2^6)^{12} \cdot 2^4 \equiv 3 \pmod{13}$$

Do đó $3^{76} - 2^{76} \equiv 0 \pmod{13}$ hay $3^{76} - 2^{76} \div 13$

d) $341 = 11 \cdot 31$

* Ta có $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}; 20 = 22 - 2 \equiv -2 \pmod{11}$

Do đó $20^{15} \equiv (-2)^{15} \equiv -(2^5)^3 \equiv -1 \pmod{11}$

* $20^{15} = (2^5)^3 \cdot (5^3)^5 \equiv 1 \pmod{31}$ do $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ và $5^3 \equiv 1 \pmod{31}$

Do đó $20^{15} \equiv 1 \pmod{11 \cdot 31}$ hay $20^{15} \equiv 1 \pmod{341} \Rightarrow 20^{15} - 1 \div 341$

Bài 12. $1890 \equiv 0 \pmod{7}; 1945 \equiv -1 \pmod{7}; 2017 \equiv 1 \pmod{7}$

$1890^{79} \equiv 0 \pmod{7}; 1945^{2015} \equiv -1 \pmod{7}; 2017^{2018} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 13. a) Ta có $5555 = 793 \cdot 7 + 4 \equiv 4 \pmod{7}; 2222 = 318 \cdot 7 - 4 \equiv -4 \pmod{7}$

$\Rightarrow 5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 4^{2222} + (-4)^{5555} \equiv -4^{2222}(4^{3333} - 1) \pmod{7}$

Do $4^{3333} - 1 = \left[(4^3)^{1111} - 1 \right]; 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$ nên $(4^3)^{1111} \equiv 1 \pmod{7}$

Hay $4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$. Do đó $5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv 0 \pmod{7}$ và

$15554^{1111} = (2 \cdot 7777)^{1111} = 2^{1111} \cdot 7777^{1111} \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow \text{đpcm.}$

b) Ta có $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Ta có $(220 + 119 + 69)^{102} \equiv 0 \pmod{102}$

* $220 \equiv 0 \pmod{2}; 119 \equiv -1 \pmod{2}; 69 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow M \equiv 0 \pmod{2}$

* $220 \equiv 1 \pmod{3}; 119 \equiv -1 \pmod{3}; 69 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow M \equiv 0 \pmod{3}$

* $220 \equiv -1 \pmod{17}; 119 \equiv 0 \pmod{17}; 69 \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow M \equiv 0 \pmod{17}$

(Để ý 119^{69} và 69^{220} là các số lẻ); $\Rightarrow M \equiv 0 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 17}$. Hay $M \div 102$

Bài 14. Đặt $A = 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}$. Ta có $A \div 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

Ta có $A = 2^n (5^{2n-1} \cdot 2 + 2^{n-1} \cdot 3^{n+1}) = 2^n (25^{n-1} \cdot 10 + 6^{n-1} \cdot 9)$

Do $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow A \equiv 2^n (6^{n-1} \cdot 10 + 6^{n-1} \cdot 9) \equiv 2^n \cdot 6^{n-1} \cdot 19 \equiv 0 \pmod{19}$

Hay $A : 19$. Mà $(2; 19) = 1 \Rightarrow A : 19 \cdot 2 \Rightarrow A : 38$.

Bài 15. Ta có $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

a) Ta có $10 \equiv 1 \pmod{9}$ do đó $a_i \cdot 10^i \equiv a_i \pmod{9}, i = 1; 2; 3; \dots; n$

Do đó $a \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \pmod{9}$. Vậy

$a : 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 9$.

b) Ta có $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv 0 \pmod{25}, i = 2; 3; \dots; n$.

$\Rightarrow a \equiv (a_1 \cdot 10 + a_0) \pmod{25}$.

Vậy $a : 25 \Leftrightarrow a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 25$.

c) Do $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv a_i \cdot (-1)^i \pmod{11}$

$a \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) \pmod{11}$

Do đó $a : 11 \Leftrightarrow (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) \equiv 0 \pmod{11}$

Tức là hiệu của tổng các chữ số ở vị trí lẻ và tổng các chữ số ở vị trí chẵn bằng 0.

d) Ta có $10^3 = 1000 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv 0 \pmod{8}, i = 3; 4; \dots; n$.

$\Rightarrow a \equiv (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) \pmod{8}$.

Vậy $a : 8 \Leftrightarrow a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 8$.

Bài 16. Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có

$2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2 \cdot 2^{10n} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2 (k \in \mathbb{N})$

Do 23 là số nguyên tố ta cũng có $2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4 \cdot 2^{22k} \equiv 4 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$ Tức là $A : 23$. Mà $A > 23, \forall n \geq 1$ nên A là hợp số.

Bài 17. Theo định lý Wilson : Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Do 13 nguyên tố nên $12! \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (12!)^{13} \equiv (-1)^{13} \equiv -1 \pmod{13}$.

Ta có $2016 = 13 \cdot 155 + 1 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2016^{2015} \equiv 1 \pmod{13}$.

Do đó $B = (12!)^{13} + 2016^{2015} \equiv 0 \pmod{13}$. Hay $B : 13$.

Bài 18. a) Theo Định lý Fermat bé, do 7 là số nguyên tố nên $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Ta có $4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2 \cdot 4^n \equiv 2 \pmod{6}$. Nghĩa là

$2^{2n+1} = 2(2^2)^n = 2 \cdot 4^n \equiv 2 \pmod{6} \Rightarrow 2^{2n+1} = 6k + 2, (k \in \mathbb{N})$

Mặt khác $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3 \cdot 2^{3n} \equiv 3 \pmod{7}$.

Do đó $2^{2^{2n+1}} + 3 \cdot 2^{3n} \equiv 2^{6k+2} + 3 \equiv 2^2 \cdot (2^6)^k + 3 \equiv 2^2 \cdot 1 + 3 \equiv 0 \pmod{7}$.

b) Do 11 là số nguyên tố nên $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Ta có $16 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 16^n \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2 \cdot 16^n \equiv 2 \pmod{10}$. Nghĩa là $2^{4n+1} = 2(2^4)^n = 2 \cdot 16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2, (k \in \mathbb{N})$

Mặt khác $12 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 12^{5n+1} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2 \cdot 12^{5n+1} \equiv 2 \pmod{11}$;

Do $10^2 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{2n} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 5 \cdot 10^{2n} \equiv 5 \pmod{11}$.

Vì thế $2^{2^{4n+1}} + 2 \cdot 12^{5n+1} + 5 \cdot 10^{2n} \equiv 2^{10k+2} + 2 + 5 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$.

Bài 19. a) Ta có $72 = 8 \cdot 9$ và $(8; 9) = 1$.

* $63 \equiv 0 \pmod{9}$; khi $n = 2$ thì $3^n \equiv 0 \pmod{9}$ do đó $3^n + 63 \equiv 0 \pmod{9}$.

* Mặt khác, với $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1 \equiv 1^k - 1$

$\equiv 0 \pmod{8}$ do đó $3^n + 63 = 3^n - 1 + 64 \equiv 0 \pmod{8}$.

Vậy với $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $3^n + 63 \vdots 72$.

b) Ta có $323 = 17 \cdot 19$ và $(17; 19) = 1$.

* $A = (20^n - 1) + (16^n - 3^n) = P + Q$.

Ta có $20^n \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow P \equiv 0 \pmod{19}$.

Nếu $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $Q = 16^{2k} - 3^{2k} \equiv (-3)^{2k} - 3^{2k} \equiv 3^{2k} - 3^{2k} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow A = P + Q \equiv 0 \pmod{19}$

* $A = (20^n - 3^n) + (16^n - 1) = P' + Q'$

$20^n \equiv 3^n \pmod{17}$. Do đó $P' = 20^n - 3^n \equiv 0 \pmod{17}$.

Nếu $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $Q' = 16^{2k} - 1 = (-1)^{2k} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{17}$

$\Rightarrow A = P' + Q' \equiv 0 \pmod{17}$. Do $(17; 19) = 1$ nên $A \equiv 0 \pmod{17 \cdot 19}$.

Vậy với $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$.

Bài 20. Theo định lý Fermat bé ta có $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ nên nếu $2^p \equiv -1 \pmod{p}$ thì ta có $3 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 3$.

Mặt khác khi $p = 3$ thì $2^3 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod{3}$. Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

Bài 21. Với $p = 3$ thì $p^2 + 20 = 29$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $p^2 + 20 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{3}$.

Vậy $p^2 + 20 \vdots 3$ mặt khác $p^2 + 20 > 3$ nên $p^2 + 20$ là hợp số. Vậy chỉ có 1 số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

Bài 22. Với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Nếu $ab \vdots p$ thì số $ab^p - ba^p \vdots p$

Nếu $ab \not\vdots p$ thì $(a, p) = (b, p) = 1$. Do đó $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow$

$$a^{p-1} - b^{p-1} \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow ab(a^{p-1} - b^{p-1}) \equiv 0 \pmod{p}$$

$\Rightarrow ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod{p}$ hay $ab^p - ba^p \vdots p, \forall a, b \in \mathbb{N}^*$.

Bài 23. a) Giả sử $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mà $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 7 \pmod{8}$.

Ta có $a \equiv 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4 \pmod{8} \Rightarrow a^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8}$

$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 7; 6; 3 \pmod{8}$. Điều này vô lý vì $b^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8}$ và $c^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8}$
 $\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 0; 1; 2; 4; 5 \pmod{8}$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7 \pmod{8}$.

b) Áp dụng câu a) ta có với $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = (2x)^2 + y^2 + (3z)^2 \not\equiv 7 \pmod{8}.$$

$$\text{Mà } 2015 = 8 \cdot 251 + 7 \equiv 7 \pmod{8}$$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 24. Ta có $2011 \equiv 11 \pmod{100}$; $11^2 \equiv 21 \pmod{100}$; $11^3 \equiv 31 \pmod{100}$;

$$11^5 \equiv 21 \cdot 31 \equiv 51 \pmod{100} \Rightarrow 11^{10} \equiv 51^2 \equiv 1 \pmod{100}.$$

$$\text{Ta có } 2010^{2009} \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 2010^{2009} = 10k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 2011^{2010^{2009}} = 2011^{10k} \equiv 11^{10k} \equiv (11^{10})^k \equiv 1 \pmod{100}. \text{ Do đó hai chữ số tận cùng là số } 01.$$

Bài 25. Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là cách giải theo đồng dư thức:

* Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$ (ví dụ 8 chuyên đề 26 đã chứng minh)

$$A = (a^{2012} - a^{2008}) + (b^{2012} - b^{2008}) + (c^{2012} - c^{2008})$$

$$A = a^{2007} (a^5 - a) + b^{2007} (b^5 - b) + c^{2007} (c^5 - c)$$

$$\text{Ta có } a^5 - a \equiv 0 \pmod{30} \Rightarrow a^{2007} (a^5 - a) \equiv 0 \pmod{30}$$

$$\text{Tương tự } b^{2007} (b^5 - b) \equiv 0 \pmod{30}; c^{2007} (c^5 - c) \equiv 0 \pmod{30}$$

$$\text{Vậy } A \equiv 0 \pmod{30}. \text{ Hay } A : 30.$$

Bài 26. Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5 \quad (1).$$

Xét với một số nguyên a bất kỳ thì nếu a chẵn thì $a = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow a^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{8}; \text{ nếu } a \text{ lẻ thì } a^4 = (2k+1)^4 \equiv 1 \pmod{8}$$

Do đó $x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0; 1; 2; 3 \pmod{8}$. Trong khi đó $8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod{8}$ mâu thuẫn với (1).

Vậy không tồn tại các bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

Bài 27. Ta có $41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81 \pmod{100}$

$$41^4 \equiv 81^2 \equiv 6561 \equiv 61 \pmod{100} \Rightarrow 41^5 \equiv 61 \cdot 41 \equiv 1 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 41^{106} \equiv 41. (41^5)^{21} \equiv 41 \pmod{100}$$

$$\text{Mặt khác } 57^4 = 10556001 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1 \pmod{100}$$

$$\text{Vì thế } A \equiv 41 + 1 \pmod{100}.$$

Do đó hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$ là 42

Bài 28. Do $a + 20 : 21 \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{3}$ và $a \equiv 1 \pmod{7}$

$$b + 13 : 21 \Rightarrow b \equiv 2 \pmod{3} \text{ và } b \equiv 2 \pmod{7}$$

$$\text{Suy ra } A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1 + 0 + 1 + 2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A \equiv 10 \pmod{3}$$

$$\text{Xét } a = 3k + 1; b = 3q + 2 \text{ với } k, q \in \mathbb{N} \text{ ta có } 4^a = 4^{3k+1} = 4 \cdot 64^k \equiv 4 \pmod{7}$$

$$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \equiv 4, 8^q \equiv 4 \pmod{7}.$$

$$\text{Do đó } A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4 + 4 + 1 + 1 \equiv 10 \pmod{7} \Rightarrow A \equiv 10 \pmod{7}$$

$$A \equiv 10 \pmod{3} \text{ và } A \equiv 10 \pmod{7} \text{ mà } (3; 7) = 1 \text{ nên } A \equiv 10 \pmod{3.7}$$

Hay $A \equiv 10 \pmod{21}$. Vậy số dư trong phép chia A cho 21 là 10.

Bài 29. $2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow (2^3)^n \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{3n+1} = 2 \cdot (2^3)^n \equiv 2 \pmod{7}.$

$$\text{và } 2^{3n-1} = 2^2 \cdot (2^3)^{n-1} \equiv 4 \pmod{7}.$$

$$\text{Nên } A \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod{7} \text{ nghĩa là } A \vdots 7. \text{ Mà với } n \in \mathbb{N}^* \text{ thì } A > 7.$$

Vậy A là hợp số.

Bài 30. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $2012^{4n} \equiv 0 \pmod{2}$; $2013^{4n} \equiv 1 \pmod{2}$;

$$2014^{4n} \equiv 0 \pmod{2} ; 2015^{4n} \equiv 1 \pmod{2}. \text{ Do đó } A \equiv 2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

$$* \text{ Ta lại có } 2012 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod{4} ;$$

$$2014 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 2014^{4n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\text{Do } 2013 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod{4} ;$$

$$\text{Do } 2015 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 2015^{4n} \equiv (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod{4}$$

Vậy $A \equiv 2 \pmod{4}$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2. Ta có $A \vdots 2$; $A \nmid 2^2$; 2 là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 31.

Ta có

$$19^{2003} \equiv (2.9 + 1)^{2003} \equiv 1 \pmod{2003}(1); 7^{2003} \equiv (9 - 2)^{2003} \Rightarrow 7^{2003} \equiv (-2)^{2003} \pmod{9} \text{ Mặt khác}$$

$$(-2)^{2003} = (-2) \cdot 2^{2002} = (-2) \cdot (2^3)^{667} \cdot 2 = (-4) \cdot (2^3)^{667}$$

Do

$$2^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow (2^3)^{667} \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow (-4)(2^3)^{667} \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow 7^{2003} \equiv 4 \pmod{9}(2) \text{ Từ}$$

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow 19^{2003} + 7^{2003} + 9^{2003} \equiv 5 \pmod{9}(3)$$

Vì lập phương của một số tự nhiên khi chia cho 9 chỉ có thể dư là 0, 1, -1 nên mọi số

$$\text{nguyên } x, y, z \text{ ta có : } x^{15} + y^{15} + z^{15} = (x^5)^3 + (y^5)^3 + (z^5)^3 \equiv (-3); (-1); 0; 1; 3 \pmod{9}(4)$$

Từ (3) và (4) suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài 32.

$$\text{Ta có } z(z+3) = z^2 + 3z$$

$$\text{Mặt khác ta luôn có } z^2 \equiv 0 \pmod{3} \text{ hoặc } z^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

Do đó với mọi z nguyên ta có :

$$z(z+3) \equiv c \pmod{3}; c \in \{0; 1\}(1)$$

Chúng minh tương tự với y, x

$$\Rightarrow x(x+3) + y(y+3) \equiv d \pmod{3}; d \in \{0;1;2\} \quad (2)$$

$$\text{Lại để ý rằng : } x(x+3) + y(y+3) \equiv (x^2 + y^2) \pmod{3} \quad (3)$$

Chú ý rằng nếu p là số nguyên tố khác 3 thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Do vậy x, y đồng thời là các số nguyên tố khác 3 thì :

$$x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{3} \quad (4)$$

Kết hợp (1), (2), (3), (4) suy ra ít nhất một trong hai số x, y phải là 3. Do vai trò đối xứng của x, y chọn $x = 3$

Khi $x = 3$ ta có :

$$18 + y^2 + 3y = z^2 + 3z \Leftrightarrow 18 = z^2 + 3z - y^2 - 3y \Leftrightarrow 18 = (z - y)(x + y + 3) \quad (5)$$

$$\text{Từ } z > 0, y > 0 \Rightarrow z + y + z > 3 \Rightarrow z - y > 0.$$

Vì thế kết hợp với $(z + y + 3) - (z - y) = 2y + 3 \geq 7$ (do y nguyên tố lớn hơn 2). Nên từ (5) suy ra :

$$\begin{cases} z + y + 3 = 18 \\ z - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z + y + 3 = 9 \\ z - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Do tính đối xứng nên phương trình có 4 nghiệm nguyên dương :

$$(3; 7; 8); (7; 3; 8); (3; 2; 4); (2; 3; 4)$$

Bài 33. Ta phải tìm số tự nhiên r sao cho

$$0 = r \equiv (2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10} \pmod{106}$$

$$\text{Ta có } 2013 = 106 \cdot 19 - 1 \Rightarrow 2013 \equiv -1 \pmod{106} \Rightarrow 2013^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$$

$$2014 = 106 \cdot 19 \Rightarrow 2014 \equiv 0 \pmod{106} \Rightarrow 2014^{2016} \equiv 0 \pmod{106}$$

$$2015 = 106 \cdot 19 + 1 \Rightarrow 2015 \equiv 1 \pmod{106} \Rightarrow 2015^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$$

$$\text{Do đó } (2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{20} \equiv 0 \pmod{106}.$$

Bài 34. Do 5 là số nguyên tố nên theo Định lý Fermat bé ta có: với $a = 1; 2; 3; 4$ ta có $a^5 \equiv a \pmod{5} \Leftrightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{5} \Leftrightarrow a^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$.

$$\text{Do đó } 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4 \pmod{5}.$$

$$\text{Chúng tỏ } 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \not\equiv 5.$$

Bài 35. * Nếu $p = 2$ thì $2^n - n \vdots 2, \forall n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$.

* Nếu $p \neq 2$ do $(2; p) = 1$ nên theo định lý Fermat bé ta có :

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$\text{Hay là } 2^{(p-1)^{2k}} - 1 \vdots p \quad (k \in \mathbb{N}; k \geq 2).$$

$$\text{Mặt khác } (p-1)^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - (p-1)^{2k} = \underbrace{\left[2^{(p-1)^{2k}} - 1\right]}_{\vdots p} - \underbrace{\left[(p-1)^{2k} - 1\right]}_{\vdots p} \vdots p$$

Vậy tồn tại vô số số tự nhiên n có dạng $n = (p-1)^{2k}$, ($\forall k \in \mathbb{N}; k \geq 2$) sao cho $2^n - n \vdots p$.

CHUYÊN ĐỀ 13: NGUYÊN LÝ DIRICHLET

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giới thiệu nguyên lý Dirichlet

Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 – 1859) là nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại về hàm số. Trên cơ sở quan sát thực tế, ông đã phát biểu thành một nguyên lý mang tên ông – nguyên lý Dirichlet: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi cái lồng có không quá 2 con thỏ. Nói cách khác, nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con trở lên.* Một cách tổng quát hơn, **nếu có k lồng để nhốt m con thỏ (với $k = kn + r$ ($0 < r \leq k - 1$)) thì tồn tại ít nhất một lồng có chứa từ $n + 1$ con thỏ trở lên.**



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Ta cũng có thể dễ dàng chứng minh nguyên lý Dirichet bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử không có một lồng nào chứa $n + 1$ con thỏ trở lên, tức là mỗi lồng chứa nhiều nhất n con thỏ, thì số con thỏ chứa trong k lồng nhiều nhất chỉ có thể là kn con. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có m con thỏ với $m = kn + r$ ($0 < r \leq k - 1$).

Nguyên lý Dirichlet thật đơn giản, dễ hiểu nhưng được vận dụng vào giải rất nhiều bài toán trong số học, đại số, hình học về việc chỉ ra sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng thỏa mãn một điều kiện đặt ra.

Khi sử dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán cụ thể, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

2. Một số dạng áp dụng của nguyên lý Dirichlet

• **Nguyên lý Dirichlet cơ bản:** Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

• **Nguyên lý Dirichlet tổng quát:** Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật. (Ở đây $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x)

• **Nguyên lý Dirichlet mở rộng:** Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left\lceil \frac{n+m-1}{m} \right\rceil$ con thỏ.

• **Nguyên lý Dirichlet dạng tập hợp:** Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B . Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B , thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B .

3. Phương pháp ứng dụng.

Nguyên lý Dirichlet tưởng chừng như đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nguyên lý Dirichlet cũng được áp dụng cho các bài toán của hình học, điều đó được thể hiện qua hệ thống bài tập sau:

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt “thỏ” vào “chuồng” và thỏa mãn các điều kiện:

+ Số “thỏ” phải nhiều hơn số chuồng.

+ “Thỏ” phải được nhốt hết vào các “chuồng”, nhưng không bắt buộc chuồng nào cũng phải có thỏ.

Thường thì phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng. Ngoài ra nó còn có thể áp dụng với các nguyên lý khác. Một số bài toán cơ bản thường gặp như sau:

- 1) Trong $n + 1$ số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hoặc hiệu của chúng chia hết cho n).
- 2) Nếu trên một đoạn thẳng độ dài 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm chung.
- 3) Nếu trên đường tròn có bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn 2π thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm chung.
- 4) Trong một hình có diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm chung.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Chứng minh sự tồn tại chia hết

*** Cơ sở phương pháp:**

Thông thường ta coi m số tự nhiên đã cho là m “con thỏ”, các số dư trong phép chia các số tự nhiên đó cho n là những “lồng”; như vậy sẽ có n cái lồng: lồng i ($0 \leq i \leq n-1$) gồm những số tự nhiên đã cho chia cho n dư i .

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

- a) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho 2011 có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho 2011).
- b) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho 2012 hoặc luôn tìm được hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Hướng dẫn giải

a) Ta coi 2012 số tự nhiên đã cho là 2012 “con thỏ”; “lồng i ” gồm các số chia cho 2011 dư i ($0 \leq i \leq 2011$) nên có 2011 lồng: lồng 0, lồng 1, ..., lồng 2010. Như vậy có 2011 lồng chứa 2012 con thỏ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn hai con thỏ, tức là có ít nhất hai số chia cho 2011 có cùng số dư.

b) Nếu trong 2012 số đã cho có ít nhất một số chia hết cho 2012 thì ta chọn luôn số này. Nếu không có số nào chia hết cho 2012 thì khi chia cho 2012 nhận nhiều nhất 2012 số dư khác nhau là 1, 2, ..., 2011. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau:

1) Trong $n + 1$ số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho n).

2) Trong n số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư.

Bài toán 2. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 20122012...2012 (gồm các số 2012 viết liên tiếp nhau) chia hết cho 2013.

Hướng dẫn giải

Xét 2014 số sau: 2012, 20122012, ..., 2012...2012 (gồm 2014 bộ số 2012).

Đem 2014 số này lần lượt chia cho 2013, có 2014 số mà chỉ có 2013 số dư trong phép chia cho 2013 (là 0, 1, 2, ..., 2012) nên luôn tồn tại hai số chia cho 2013 có cùng số dư, chẳng hạn đó là $a = 2012...2012$ (gồm i bộ 2012) và $b = 2012...2012$ (gồm j bộ 2012) với $1 \leq i \leq j \leq 2014$.

Khi đó

$b - a = 2012...2012.10^{4i}$ (gồm $j - i$ bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013.

Lại có ƯCLN(10^{4i} , 2013) = 1 nên số 2012...2012 (gồm $j - i$ bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây “thỏ” là số có dạng 2012...2012, “lồng” là số dư trong phép chia cho 2013).

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là chọn ra 2014 (= 2013 + 1) số tự nhiên có dạng đã cho. Từ đó ta có thể phát biểu nhiều bài toán tương tự, chẳng hạn như: Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 111...1 chia hết cho 29.

Bài toán 3. Cho sáu số tự nhiên a, b, c, d, e, g . Chứng minh rằng trong sáu số ấy, tồn tại một số chia hết cho 6 hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải

Trường hợp có một số bằng 0 thì ta chọn số 0 thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Trường hợp sáu số đều lớn hơn 0. Xét 6 số sau

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + b$$

$$S_3 = a + b + c$$

$$S_4 = a + b + c + d$$

$$S_5 = a + b + c + d + e$$

$$S_6 = a + b + c + d + e + g.$$

Đem mỗi số này chia cho 6 ta nhận được số dư thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nếu tồn tại $S_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ chia hết cho 6 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có S_i nào chia hết cho 6 thì ta có 6 số chia hết cho 6 chỉ nhận 5 loại số dư khác nhau $(1, 2, 3, 4, 5)$; theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho 6 có cùng số dư, chẳng hạn S_2 và S_5 do đó hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 6, tức là $c + d + e$ chia hết cho 6. Bài toán đã được chứng minh.

(Ở đây “thỏ” là các số S_i , “lồng” là số dư trong phép chia cho 6).

Nhận xét. Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:

Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho n .

Bài toán 4. Chứng minh rằng:

- Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n .
- Trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n . Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là $n - 1$ số dư khác nhau $(1, 2, 3, \dots, n - 1)$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó $a - b$ chia hết cho n , điều này mâu thuẫn với $0 < a - b < n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Lấy 20 số tự nhiên liên tiếp đầu của dãy, ta luôn tìm được một số có chữ số hàng đơn vị là 0 và có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử đó là N và tổng các chữ số của N là s . Khi đó 11 số $N, N + 1, N + 2, N + 3, \dots, N + 9, N + 19$ sẽ nằm trong 39 số đã cho. Vì N tận cùng bằng 0 nên tổng các chữ số của $N, N + 1, N + 2, \dots, N + 9$ lần lượt bằng $s, s + 1, s + 2, \dots, s + 9$. Vì N tận cùng bằng 0 và có chữ số hàng chục khác 9 nên tổng các chữ số của $N + 10$ bằng $s + 1$, tổng các chữ số của $N + 19$ bằng $s + 10$.

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $s, s + 1, s + 2, s + 3, \dots, s + 9, s + 10$ luôn tìm được một số chia hết cho 11. Chẳng hạn số đó là $s + i (0 \leq i \leq 10)$: Nếu $0 \leq i \leq 9$ thì ta chọn được số $N + i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán; nếu $i = 10$ thì ta chọn được số $N + 19$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Mấu chốt để giải bài toán câu b) là phải tìm ra 11 số trong 39 số đã cho có tổng các chữ số thứ tự là 11 số tự nhiên liên tiếp, đồng thời sử dụng kết quả câu a).

Bài toán 5. Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao

nhiều số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó?

Hướng dẫn giải

Nhận thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 dư 1; nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012, sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k+2$ ($k=0,1,2,\dots,670$). Khi đó hai số bất kì trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3, nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng. Ta sẽ chứng minh rằng chọn được nhiều nhất 672($=671+1$) số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được $a, b (a > b)$ sao cho $a-b \leq 2$ (Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã chọn sẽ không nhỏ hơn $3 \cdot 671 = 2013$. Điều này mâu thuẫn giả thiết với hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012-1=2011$), nghĩa là $a-b$ bằng 1 hoặc 2.

- Nếu $a-b=1$ thì hiển nhiên $a+b$ chia hết cho $a-b (=1)$

- Nếu $a-b=2$ thì $a+b$ là số chẵn nên $a+b$ chia hết cho $a-b (=2)$.

Như vậy từ 2012 số đã cho không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

📁 Dạng 2: Bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

* **Cơ sở phương pháp:** Thông thường ta phải lập ra những tập hợp có tính chất cần thiết rồi sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng tỏ có hai phần tử thuộc hai tập hợp bằng nhau.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Hướng dẫn giải

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_6 < 10$.

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5+5=10$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

(Ở đây, có 10 “thỏ” là 10 số $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1$ và có 9 “lồng” là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Nhận xét. Để giải bài toán này, ta cần tạo ra hai tập hợp gồm các phần tử nhỏ hơn 10 và tổng số phần tử của hai tập hợp phải không nhỏ hơn 10. Từ đó suy ra tồn tại hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

Bài toán 2. Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử 700 số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{700}$. Ta xét các tập hợp sau:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{700}\};$$

$$B = \{a_1 + 6, a_2 + 6, \dots, a_{700} + 6\};$$

$$C = \{a_1 + 9, a_2 + 9, \dots, a_{700} + 9\};$$

Tổng số phần tử của ba tập hợp A, B, C là $700 \cdot 3 = 2100$, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá $2006 + 9 = 2015$, mà $2100 > 2015$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai phần tử bằng nhau. Vì mỗi tập hợp A, B, C có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó phải thuộc hai tập hợp: A và B , hoặc A và C , hoặc B và C .

- Nếu hai phần tử thuộc A và B , chẳng hạn $a_i = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 6$.

- Nếu hai phần tử thuộc A và C , chẳng hạn $a_i = a_j + 9$ suy ra $a_i - a_j = 9$.

- Nếu hai phần tử thuộc B và C , chẳng hạn $a_i + 3 = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 3$.

Như vậy luôn tồn tại hai số thuộc tập hợp A có hiệu là 3, 6, 9. Ta được điều phải chứng minh.

(Ở đây 2100 “thô” là 2010 phần tử của ba tập hợp A, B, C ; 2015 “lồng” là các số từ 1 đến 2015)

Nhận xét. Ta còn có kết quả mạnh hơn như sau:

Cho X là tập hợp gồm 505 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Chứng minh.

Gọi A là tập hợp các số thuộc X mà chia hết cho 3, gọi B là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 1, gọi C là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 2.

Có 505 số xếp vào ba tập hợp, mà $505 = 3 \cdot 168 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một tập hợp có chứa từ 169 số trở lên.

Trong tập hợp này, hai số bất kỳ có hiệu là một bội của 3. Tồn tại hai số x, y có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi số trong tập hợp này đều có hiệu không nhỏ hơn 12 thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn $12 \cdot 168 = 2016 > 2006$, trái với đề bài.

Vậy trong tập hợp X tồn tại hai phần tử x, y mà $x - y \in E$.

Bài toán 3. Cho hai tập hợp số nguyên dương phân biệt mà mỗi số đều nhỏ hơn n . Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không nhỏ hơn n thì có thể chọn được trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng của chúng bằng n .

Hướng dẫn giải

Giả sử hai tập hợp số nguyên dương đã cho là

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \text{ và } B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

với $a_i < n$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $b_j < n$ ($j = 1, 2, \dots, k$) và $m + k \geq n$.

Xét tập hợp $C = \{n - b_1, n - b_2, \dots, n - b_k\}$.

Nhận thấy, có tất cả $n - 1$ số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn n , các phần tử của A và C đều nhỏ hơn n và tổng số các phần tử của A và C không nhỏ hơn n . Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai phần tử bằng nhau, chúng không cùng thuộc A và C , do đó một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc C , tức là tồn tại hai số a_p và $n - b_q$ mà $a_p = n - b_q \Leftrightarrow a_p + b_q = n$ (điều phải chứng minh).

(Ở đây coi $m + k$ “thỏ” là các số nguyên dương thuộc tập hợp A hoặc C , $n - 1$ “lồng” là các số nguyên dương từ 1 đến $n - 1$).

Dạng 3: Bài toán liên quan đến bảng ô vuông

*** Cở sở phương pháp:** Một bảng vuông kích thước $n \times n$ gồm n dòng, n cột và 2 đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có n ô vuông.

Một bảng các ô vuông kích thước $m \times n$ gồm m dòng và n cột.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho một mảng ô vuông kích thước 5×5 . Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-1, 0, 1$; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Bảng ô vuông kích thước 5×5 có 5 dòng, 5 cột, 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, cột và đường chéo đều có ghi 5 số thuộc tập $\{-1; 0; 1\}$. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có 11 phần tử. Có 12 tổng nhận trong tập 11 các giá trị khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây “thỏ” là tổng nên có 12 “thỏ”, “lồng” là giá trị của tổng nên có 11 “lồng”).

Nhận xét. Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:

Cho một bảng ô vuông kích thước $n \times n$. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-1, 0, 1$; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài toán 2. Trên bảng ô vuông kích thước 8×8 , ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Hướng dẫn giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).

Ta có $64 = 14 \cdot 4 + 7$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn $4 + 1 = 5$. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây, “thỏ” là hiệu của hai số trong 64 số (từ 1 đến 64) nên có 63 thỏ; “lồng” là số cặp ô vuông kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nên có nhiều nhất là 14 lồng).

Nhận xét.

- Mấu chốt của bài toán là quan tâm đến hai ô vuông ghi số nhỏ nhất (số 1) và số lớn nhất (số 64) sẽ có hiệu lớn nhất là 63; đồng thời xét từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 chỉ cần tối đa là $(8 - 1) + (8 - 1) = 14$ ô. Ở đây ta đã vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát: Có m thỏ, nhốt vào k lồng mà $m = kn + r$ ($1 \leq r \leq k - 1$) thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $n + 1$ con thỏ.

- Nếu thay bởi bảng chữ nhật gồm 8×10 ô vuông, trên đó ghi các số từ 1 đến 80 không lặp một cách tùy ý thì kết quả câu bài toán còn đúng hay không? Hãy chứng minh.

Dạng 4: Bài toán liên quan đến thực tế

Cơ sở phương pháp: Khi chứng minh sự tồn tại một số đối tượng thỏa mãn điều kiện nào đó, ta thường sử dụng nguyên lí Dirichlet.

Điều quan trọng nhất là phải xác định được “thỏ” và “lồng”.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Một tổ học tập có 10 học sinh. Khi viết chính tả, cả tổ đều mắc lỗi, trong đó bạn Bình mắc nhiều lỗi nhất (mắc 5 lỗi). Chứng minh rằng trong tổ ấy có ít nhất 3 bạn đã mắc một số lỗi bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Ta coi “thỏ” là học sinh (trừ bạn Bình) nên có 9 thỏ; “lồng” là số lỗi chính tả học sinh mắc phải nên có 4 lồng: lồng i gồm những học sinh mắc i lỗi ($i = 1, 2, 3, 4$). Có 9 thỏ nhốt vào 4 lồng, mà $9 = 4 \cdot 2 + 1$, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $2 + 1 = 3$ thỏ, tức là có ít nhất 3 bạn mắc một số lỗi bằng nhau.

Bài toán 2. Ở một vòng chung kết cờ vua có 8 đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ đều phải gặp đủ 7 đấu thủ còn lại, mỗi người một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Hướng dẫn giải

Ta coi “thỏ” là đấu thủ nên có 8 thỏ; “lồng” là số trận đấu của đấu thủ nên có 8 lồng: “lồng i ” gồm các đấu thủ đã thi đấu i trận (với $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).

Ta thấy lồng 0 và lồng 7 không đồng thời tồn tại, vì nếu có một đấu thủ chưa đấu trận nào thì sẽ không có đấu thủ nào đã đấu đủ 7 trận, cũng như nếu có đấu thủ đã đấu đủ 7 trận thì không có ai chưa đấu trận nào.

Như vậy, có 7 lồng chứa 8 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn 2 con thỏ, tức là trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu luôn tìm được 2 đấu thủ đã đấu cùng một số trận.

Bài toán 3. Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Hướng dẫn giải

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2 \cdot 2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề bài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

(Ở đây coi nhà khoa học (trừ A) là “thỏ” nên có 5 thỏ, coi đề tài là “lồng” nên có 2 lồng và vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát).

Dạng 5: Bài toán liên quan đến sự sắp xếp

*** Cơ sở phương pháp:** Các bài toán về sắp xếp chỗ, phân công việc không đòi hỏi nhiều về kiến thức và kĩ năng tính toán, chúng chủ yếu kết hợp suy luận logic để xét các khả năng có thể xảy ra với nguyên lí Dirichlet.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Có 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Biết rằng nếu hai người A và B mà không quen nhau thì tổng số những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân công vào các thuyền đôi sao cho mỗi thuyền đều là hai người quen nhau.

Hướng dẫn giải

Nếu trong 20 người không có hai người nào quen nhau thì tổng số người quen của hai người bất kì là 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là tổng số người quen của hai người không nhỏ hơn 19. Vậy tồn tại một số cặp quen nhau.

Ta xếp mỗi cặp quen nhau đó vào một thuyền đôi. Gọi k là số lượng thuyền lớn nhất mà trong đó ta có thể xếp được những cặp quen nhau vào một thuyền và kí hiệu thuyền thứ i xếp hai người A_i và B_i quen nhau ($1 \leq i \leq k$).

Giả sử $k \leq 9$, kí hiệu tập hợp M gồm những người chưa được xếp vào thuyền nào, tức là gồm những người đôi một không quen nhau. Chọn hai người A và B trong tập hợp M . Theo bài ra thì tổng số người quen của A và số người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen A hoặc quen B đã được xếp vào thuyền rồi. Như vậy có 19 người quen hệ quen A hoặc B được xếp vào nhiều nhất là 9 thuyền đôi (trừ 1 thuyền vì A, B chưa được xếp), mà $19 = 9 \cdot 2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một thuyền chở 2 người quen cả A và B. Nhưng khi đó ta có thể xếp lại như sau: trong $k - 1$ thuyền đầu tiên vẫn

giữ nguyên, còn thuyền thứ k xếp A_k và B , còn thuyền thứ $k + 1$ xếp A và B_k . Điều này mâu thuẫn với giả sử.

Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

Bài toán 2. Kỳ thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên Long An năm nay có 529 học sinh đến từ 16 địa phương khác nhau tham dự. Giả sử điểm bài thi môn Toán của mỗi học sinh đều là số nguyên lớn hơn 4 và bé hơn hoặc bằng 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 6 học sinh có điểm môn Toán giống nhau và cùng đến từ một địa phương.

Hướng dẫn giải

Ta có 529 học sinh có điểm bài thi từ 5 điểm đến 10 điểm. Theo nguyên lý Dirichlet ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau (từ 5 điểm đến 10 điểm).

Ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau và đến từ 16 địa phương. Theo nguyên lý Dirichlet tìm được 6 em có cùng điểm thi môn toán và đến từ cùng một địa phương.

Dạng 6: Vận dụng nguyên lý Dirichlet vào các bài toán hình học

* **Cơ sở phương pháp:** Một số các dạng toán hình học thường gặp:

- 1) Nếu trên một đoạn thẳng độ dài 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm chung.
- 2) Nếu trên đường tròn có bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn 2π thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm chung.
- 3) Trong một hình có diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm chung.

4) * Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho.

Hỏi có hay không 3 điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó?

(Thi chọn HSG lớp 9 Quốc Gia năm 1995-1996- Bảng A)

Hướng dẫn giải

Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh là 1; vì có 33 điểm chứa trong 16 hình vuông, do đó theo nguyên tắc Dirichlet ắt phải có ít nhất là một hình vuông chứa không ít hơn 3 điểm.

Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong hình vuông đơn vị đã cho không thể vượt qua độ dài đường chéo của nó bằng $\sqrt{2}$.

Gọi O_1, O_2, O_3 là 3 điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó.

Vẽ ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 cùng bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Chắc chắn cả ba điểm O_1, O_2, O_3 đều nằm trong cả ba đường tròn này, nghĩa là chúng nằm trong phần chung của 3 hình tròn có tâm tại chính các điểm O_1, O_2, O_3 .

Bài toán 2. Trên mặt phẳng cho 25 điểm sao cho từ ba điểm bất kỳ trong số chúng đều tìm được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 13 điểm.

Hướng dẫn giải

Xét điểm A và hình tròn (C_1) có tâm A và bán kính là 1. Nếu tất cả 24 điểm còn lại đều nằm trong (C_1) thì hiển nhiên bài toán được chứng minh.

Xét trường hợp có điểm B nằm ngoài (C_1) . Ta có $AB > 1$ xét hình tròn (C_2) tâm B và bán kính là 1.

Giả sử C là một điểm bất kỳ khác A và B . Ta chứng minh C phải thuộc một trong hai hình tròn (C_1) hoặc (C_2) .

Thật vậy: giả sử ngược lại điểm C không thuộc cả (C_1) , cả $(C_2) \Rightarrow AC > 1$ và $BC > 1$; theo trên, $AB > 1$ như vậy có bộ ba điểm A, B, C trong đó không có bất kỳ 2 điểm nào có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Vô lý, vì trái với giả thiết.

Điều vô lý đó chứng tỏ rằng hoặc là C thuộc vào (C_1) hoặc là C thuộc vào (C_2) .

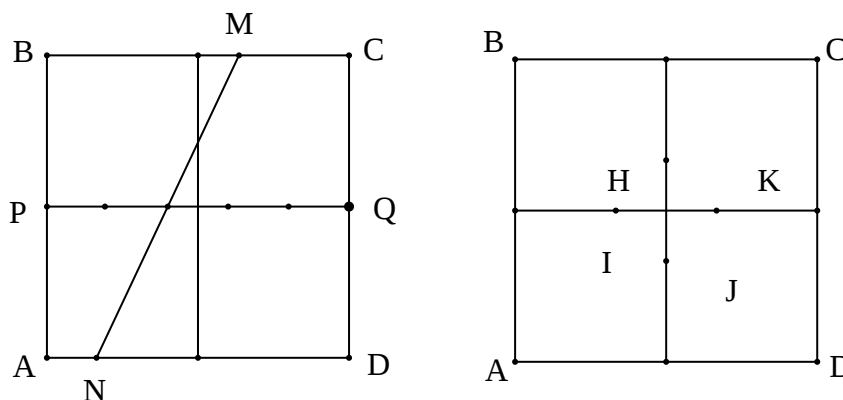
Như vậy cả 25 điểm đã cho đều thuộc vào (C_1) và (C_2) .

Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt phải có ít nhất là một hình tròn chứa không ít hơn 13 điểm.

Bài toán 3. Cho hình vuông $ABCD$ và chín đường thẳng phân biệt thỏa mãn mỗi một đường thẳng đều chia hình vuông thành hai tứ giác có diện tích tỷ lệ với 2 và 3.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là ba đường thẳng đồng quy tại một điểm.

Hướng dẫn giải



Nhận xét: các đường thẳng đã cho không thể đi qua trung điểm các cạnh hình vuông $ABCD$ bởi vì ngược lại thì hình vuông sẽ bị phân thành hai phần tam giác và ngũ giác.

Giả sử một đường thẳng trong số đó cắt cạnh BC tại M và cắt cạnh AD tại N .

Các hình thang $ABMN$ và $CDNM$ có chiều cao bằng nhau nên từ giả thiết suy ra MN chia đoạn thẳng nối trung điểm P, Q của AB và CD theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$.

Dễ thấy chỉ có 4 điểm chia 2 đường trung bình của hình vuông $ABCD$ theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$ là I, J, K, H . Có 9 đường thẳng đi qua 4 điểm này; theo nguyên tắc

Dirichlet, phải có ít nhất là 3 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

Bài toán 4. Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng 2 màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng ắt phải tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

Hướng dẫn giải

Ta có đa giác 1999 cạnh nên có 1999 đỉnh. Do đó ắt phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được sơn bởi cùng 1 màu (chẳng hạn màu đỏ).

Vì đa giác đã cho là đa giác đều có một số lẻ đỉnh, cho nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ . Giả sử đỉnh đó là A .

Nếu A tô màu đỏ thì ta có $\triangle APQ$ là tam giác cân có 3 đỉnh A, P, Q được tô cùng màu đỏ.

Nếu A tô màu xanh. Lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q .

Nếu cả 2 đỉnh B và C được tô màu xanh thì $\triangle ABC$ cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.

Nếu ngược lại một trong hai đỉnh B hoặc C mà tô màu đỏ thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là các tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài1. Một đồi thông có 800 000 cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá 500 000 chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau ở trên cây.

Bài2. Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Bài3. Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

Bài4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. chứng minh rằng tồn tại một số có dạng $111...11$ mà chia hết cho p .

Bài5. Với 39 số tự nhiên liên tiếp, hỏi rằng ta có thể tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11 hay không?

Bài6. Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên tùy ý, chỉ ít cũng có một cặp gồm hai số sao cho hoặc tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Bài7. Chứng minh rằng tồn tại lũy thừa của 29 mà các chữ số tận cùng của nó là 00001.

Bài8. (Bài toán áp dụng 2 lần nguyên tắc Dirichlet)

Có 17 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người viết thư cho một người về một vấn đề. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Bài9. Một lớp học có 30 học sinh. Khi viết chính tả, em A phạm 14 lỗi, các em khác phạm ít lỗi hơn. Chứng minh rằng có ít nhất là 3 học sinh không mắc lỗi hoặc mắc số lỗi bằng nhau.

Bài 10. Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất là hai người có số người quen bằng nhau (chú ý là A quen B thì B quen A).

Bài 11. Trong một giải bóng đá có 10 đội tham gia, bất cứ hai đội nào trong số đó cũng phải đấu với nhau một trận. Chứng minh rằng tại bất cứ thời điểm nào của lịch thi đấu cũng có hai đội đã đấu được một số trận như nhau.

Bài 12. Chứng minh rằng đối với một số n nguyên dương bất kì bao giờ ta cũng tìm được một số tự nhiên mà các chữ số của nó bao gồm chỉ có chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n .

Bài 13. Chứng minh rằng luôn tồn tại số được viết bởi toàn chữ số 8 chia hết cho 2011.

Bài 14. Chứng minh rằng nếu $(n, 2010) = 1$ thì luôn tồn tại một số k nguyên dương sao cho $n^k - 1$ chia hết cho 2010.

Bài 15. Chứng minh rằng trong 1007 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 2011.

Bài 16. Cho $n + 1$ số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn $2n$ ($n > 1$). Chứng minh rằng có thể chọn ra 3 số nào đó mà một số bằng tổng hai số kia.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kỳ trong $\triangle ABC$. Chứng minh rằng ắt tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 0,5.

Bài 18. Bên trong hình vuông có cạnh bằng 1, lấy bất kỳ 51 điểm phân biệt. Chứng minh rằng phải tồn tại ít nhất là 3 điểm trong số 51 điểm này nằm trong một hình tròn có bán kính bằng $\frac{1}{7}$.

Bài 19. Bên trong hình tròn (O, R) có diện tích bằng 8, người ta lấy 17 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất là 3 điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

Bài 20. Bên trong một cái sân hình chữ nhật có chiều dài 4m và chiều rộng là 3m có 6 con chim đang ăn. Chứng minh rằng phải có ít nhất là hai con chim mà khoảng cách đều giữa chúng nhỏ hơn là $\sqrt{5}m$.

Bài 21. Các điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm được tô bởi cùng một màu và khoảng cách giữa chúng bằng 1.

Bài 22. Trên mặt phẳng cho 100 điểm bất kỳ. Nối mỗi điểm với ít nhất là 66 điểm trong số 99 điểm còn lại bằng một đoạn thẳng. Chứng minh rằng có thể xảy ra trường hợp có 2 điểm trong số 4 điểm bất kỳ của 100 điểm đã cho không được nối với nhau.

Bài 23. Cho 5 điểm phân biệt nằm bên trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $35 + \sqrt{3}$. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là một điểm trong hình vuông đã cho sao cho, khoảng cách từ nó đến ẽm đã cho lớn hơn 10.

Bài 24. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là ba điểm được tô bởi cùng một màu tạo thành một tam giác đều có cạnh là 1 hoặc $\sqrt{3}$.

Bài 25. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu đen và đỏ. Chứng tỏ rằng tồn tại một tam giác đều mà các đỉnh của nó chỉ được tô bằng một màu.

Bài 26. Trên mặt phẳng cho 2000 đường thẳng phân biệt, đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 đường thẳng mà góc tạo bởi chúng không lớn hơn $\frac{180^\circ}{2000}$

Bài 27. Bên trong đường tròn có bán kính 2000 có 8000 đoạn thẳng có độ dài là 1. Chứng minh rằng có thể dựng được một đường thẳng d hoặc là song song hoặc là vuông góc với một đường thẳng l cho trước, sao d cắt ít nhất là hai đoạn thẳng đã cho.

Bài 28. Cho bảng ô vuông kích thước 10×10 gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Bài 29. Trong hình chữ nhật kích thước 1.2 ta lấy $6n^2 + 1$ điểm với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại 1 hình tròn có bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn 4 trong số các điểm đã cho.

Bài 30. Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Câu 31. Lớp 6A có 45 học sinh làm bài kiểm tra môn Toán không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 bạn được điểm 10. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau. Biết điểm kiểm tra là số tự nhiên từ 0 đến 10?

Câu 32. Chứng minh rằng từ 52 số nguyên bất kì luôn tồn tại 2 số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Câu 33. Trên mặt phẳng cho 2019 điểm phân biệt sao cho trong bất cứ 3 điểm nào trong 2019 điểm ở trên ta luôn tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1 cm. Chứng minh rằng: Sẽ tồn tại ít nhất 1010 điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính bằng 1 cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài1. Ta hãy tưởng tượng mỗi cây thông là một "thỏ", như vậy có 800.000 "thỏ" được nhốt vào không quá 500.000 "chiếc lồng". Lồng 1 ứng với cây thông có 1 chiếc lá trên cây, lồng 2 ứng với cây thông có 2 chiếc lá trên cây v.v... Số thỏ lớn hơn số lồng, theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất có 1 lồng nhốt không ít hơn 2 thỏ nghĩa là có ít nhất 2 cây thông có cùng số lá.

Bài2. Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: $3 \cdot 12 = 36$ mà $36 < 40$ (vô lý). Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh (trong bài này 40 thỏ là 40 học sinh, 12 lồng là 12 tên tháng).

Bài3. Ta sẽ thành lập dãy số mới gồm 5 số sau đây:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

- Nếu một trong các S_i ($i = 1, \dots, 5$) chia hết cho 5 thì bài toán đã được chứng minh.

- Nếu không có số nào chia hết cho 5 thì khi đem chia các số S_i cho 5 sẽ được 5 số dư có giá trị từ 1 đến 4.

Có 5 số dư mà chỉ có 4 giá trị (5 thỏ, 4 lồng). Theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất phải có 2 số dư có cùng giá trị. Hiệu của chúng chia hết cho 5. Hiệu này chính là tổng các a_i liên tiếp nhau hoặc là a_i nào đó.

Bài4.

Xét dãy số $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots11}_{p \text{ chữ số } 1}$

Ta chứng minh trong dãy trên phải có số chia hết cho p . Giả sử kết luận ấy không đúng, tức là không có bất kỳ số nào của dãy lại chia hết cho p .

Cho tương ứng mỗi số dư của phép chia cho p . Tập hợp số dư có thể thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ (Do 0 không thể thuộc tập hợp này). Ta lại có p số trong dãy số trên. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho p . Giả sử các số đó là $\underbrace{111\dots11}_{m \text{ chữ số } 1}$ và số $\underbrace{111\dots11}_{n \text{ chữ số } 1}$ với $(1 \leq n < m \leq p)$. Từ đó ta có

$$\left(\underbrace{111\dots11}_{m \text{ chữ số } 1} - \underbrace{111\dots11}_{n \text{ chữ số } 1} \right) : p, \text{ hay } \underbrace{111\dots1}_{m-n \text{ chữ số } 1} \underbrace{000\dots0}_n : p \text{ Hay } \underbrace{111\dots1}_{m-n \text{ chữ số } 1} \cdot 10^n : p \quad (1)$$

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên $(p; 10) = 1$, Vì thế từ (1) ta suy ra $\underbrace{111\dots1}_{m-n \text{ chữ số } 1} : p \quad (2)$

$\underbrace{111\dots1}_{m-n \text{ chữ số } 1}$ là một số thuộc dãy trên nên từ (2) suy ra mâu thuẫn với giả thiết. Vậy giả sử

phản chứng là sai. Ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài5. Từ 20 số đầu tiên của dãy bao giờ ta cũng có thể tìm được 2 số mà chữ số hàng đơn vị là 0, và trong hai số đó ít nhất phải có một số có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử N là số đó, và ta gọi S là tổng các chữ số của N .

Ta có dãy số mới $N, N + 1, N + 2, \dots, N + 9, N + 10$ là 11 số vẫn nằm trong 39 số cho trước mà tổng các chữ số của chúng là $S, S + 1, S + 2, \dots, S + 9, S + 10$. Đó là 11 số tự nhiên liên tiếp, ít nhất phải có một số chia hết cho 11.

Bài6. Để làm xuất hiện số "thỏ" và số "lồng" ta làm như sau:

Trong tập hợp các số dư trong phép chia cho 100 ta lấy ra từng cặp số sao cho tổng các cặp đó bằng 100 và thành lập thành các nhóm sau:

$(0 ; 0), (1 ; 99), (2 ; 98), (3 ; 97), (4 ; 96), (5 ; 95), (6 ; 94) \dots (49 ; 51), (50 ; 50)$. Chú ý rằng sẽ có 50 cặp như vậy, ta thêm vào cặp $(0, 0)$ sẽ có 51 cặp (51 lồng).

- Đem chia 52 số tự nhiên cho 100 sẽ có 52 số dư (52 thỏ).

- Có 52 số dư mà chỉ có 51 nhóm, theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất cũng phải có 2 số dư cùng rơi vào một nhóm.

Rõ ràng là cặp số tự nhiên ứng với cặp số dư này chính là hai số tự nhiên có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100. (đpcm)

Bài7. Trước hết ta chú ý rằng:

29^m có tận cùng là 1 nếu m là số chẵn

29^m có tận cùng là 9 nếu m là số lẻ.

Ta hãy xét 10^5 lũy thừa của 29 với các số mũ chẵn khác nhau. Có hai khả năng xảy ra:

a. Trong đó nếu có số mũ $2k$ nào mà 29^{2k} có tận cùng là 00001 thì bài toán đã được chứng minh.

b. Không có số mũ $2k$ nào để 29^{2k} có tận cùng là 00001.

Từ b, ta thấy rằng:

Số các số có 5 chữ số tận cùng khác nhau nhỏ hơn 10^5 (kể từ 5 chữ số tận cùng 00002, 00003, ... 99 999, 10^5).

trong khi đó số các số khác nhau mà ta đang xét là 10^5 số. Theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất phải có hai lũy thừa nào đó có 5 chữ số tận cùng là như nhau.

Giả sử $A_1 = 29^{2k_1} = M_1 \cdot 10^5 \overline{abcd}_1$

$$A_2 = 29^{2k_2} = M_2 \cdot 10^5 \overline{abcd}_1$$

Có thể giả sử $k_1 > k_2$ mà không làm mất tính chất tổng quát của bài toán. Thế thì ta có:

$$A_1 - A_2 = 29^{2k_1} - 29^{2k_2} = (M_1 - M_2) 10^5$$

$$A_1 - A_2 = 29^{2k_1} - 29^{2k_2} = 29^{2k_2} (29^{2(k_1-k_2)} - 1)$$

Vì 29^{2k_2} có tận cùng là 1 và $A_1 - A_2 = (M_1 - M_2)10^5$ có tận cùng không ít hơn 5 số 0 nên suy ra $(29^{2(k_1-k_2)} - 1)$ phải có tận cùng không ít hơn 5 chữ số 0, từ đó suy ra $29^{2(k_1-k_2)}$ có tận cùng là 00001 (số các chữ số 0 ít nhất là 4).

Ta tìm được số $k = 2(k_1 - k_2)$ thỏa mãn đề bài (đpcm).

Bài 8. Gọi A là nhà toán học nào đó trong số 17 nhà toán học, thì nhà toán học A phải trao đổi với 16 nhà toán học còn lại về 3 vấn đề. Như vậy nhà toán học A phải trao đổi ít nhất với 6 nhà toán học về một vấn đề nào đó. Vì nếu chỉ trao đổi với số ít hơn 6 nhà toán học về một vấn đề thì số nhà toán học được trao đổi với A ít hơn 16. (Các bạn có thể diễn tả theo khái niệm "thỏ" và "lồng" để thấy ở đây đã áp dụng nguyên tắc Dirichlet lần thứ nhất.)

- Gọi các nhà toán học trao đổi với nhà toán học A về một vấn đề nào đó (giả sử vấn đề I) là $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Như vậy có 6 nhà toán học trao đổi với nhau về 3 vấn đề (không kể trao đổi với A). Như vậy có 6 nhà toán học $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ trao đổi với nhau về 3 vấn đề, I, II, III.

Có hai khả năng xảy ra:

- a. Nếu có 2 nhà toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thế thì có 3 nhà toán học (kể cả A) trao đổi với nhau về vấn đề I. Bài toán được chứng minh.
- b. Nếu không có nhà toán học nào trong 6 nhà toán học $A_1, A_2 \dots A_6$ trao đổi về vấn đề I thì ta có 6 nhà toán học chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III. Theo nguyên tắc Dirichlet có ít nhất 3 nhà toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề II hoặc III. Bài toán cũng được chứng minh.

Bài 9. Để tôn trọng ta cần thay đổi ngôn ngữ *thỏ, chuồng* là *học sinh, phòng*.

Phòng 1: Chứa các em mắc 1 lỗi.

Phòng 2: Chứa các em mắc 2 lỗi.

.....

Phòng 14: Chứa các em mắc 14 lỗi.

Phòng 15: Chứa các em không mắc lỗi.

Theo giả thiết *phòng 14* chỉ có em A. Còn lại 14 phòng chứa 29 em. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 3 em. Từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 10. Có 5 người nên số người quen nhiều nhất của mỗi người là 4.

Phòng 0: Chứa những người không có người quen.

Phòng 1: Chứa những người có 1 người quen.

.....

Phòng 4: Chứa những người có 4 người quen.

Để ý rằng *phòng 0* & *phòng 4* không thể cùng có người.

Thực chất 5 người chứa trong 4 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 2 người. Từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 11. Xét một thời điểm bất kỳ của lịch thi đấu (mỗi đội thi đấu tối đa 9 trận).

Phòng 0: Chứa các đội chưa đấu trận nào.

Phòng 1: Chứa các đội đã thi đấu 1 trận.

.....

Phòng 9: Chứa các đội đã thi đấu 9 trận.

Để ý rằng *phòng 0* và *phòng 9* không thể cùng có đội thi đấu.

Thực chất 10 đội chứa trong 9 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 12. Xét $n+1$ số sau: $a_1 = 5; a_2 = 55; \dots; a_{n+1} = 55 \dots 5$ ($n+1$ chữ số 5).

Theo nguyên lý Dirichlet : với $n+1$ số trên ắt tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n . Hiệu của hai số này là số có dạng: $55 \dots 50 \dots 0$ gồm toàn chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n . Đó là điều phải chứng minh!

Bài 13. Xét 2012 số $a_1 = 8; a_2 = 88; \dots; a_{2012} = 88 \dots 8$ (2012 chữ số 8). Tương tự ví dụ 4 sẽ tồn tại số có dạng $88 \dots 80 \dots 0$ (n chữ số 8 và k chữ số 0) chia hết cho 2011.

Mà: $88 \dots 80 \dots 0 = 88 \dots 8 \cdot 10^k$ và $(10^k, 2011) = 1$ suy ra số: $88 \dots 8$ chia hết cho 2011. Điều phải chứng minh! (Lưu ý: 2011 là số nguyên tố)

Bài 14. Xét 2011 số sau: $n; n^2; n^3; \dots; n^{2011}$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2010. Giả sử hai số đó là n^i và n^j với $1 \leq i < j \leq 2011$. Khi đó $n^j - n^i = n^i (n^{j-i} - 1) = n^i (n^k - 1)$ chia hết cho 2010 ($k = j - i$ là số nguyên dương). Vậy $n^k - 1$ chia hết cho 2010 (vì $(n^i, 2010) = 1$).

Bài 15. Ta xét phép chia 1007 số trên cho 2011 và xếp vào:

Nhóm 0: Các số chia hết cho 2011 (dư 0)

Nhóm 1: Các số chia cho 2011 dư 1 hoặc 2010.

Nhóm 2: Các số chia cho 2011 dư 2 hoặc 2009.

.....

Nhóm 1005: Các số chia cho 2011 dư 1005 hoặc 1006.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm chứa ít nhất hai số. Theo cách xếp nhóm thì hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 2011.

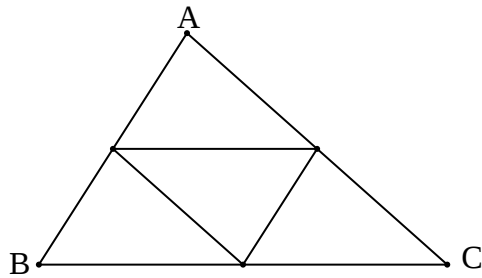
Bài 16. Sắp thứ tự $n+1$ số đã cho $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} < 2n$ (Nhóm 1). Xét thêm n số:

$b_1 = a_2 - a_1; b_2 = a_3 - a_2; \dots; b_n = a_{n+1} - a_1$. Ta có: $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_n < 2n$ (Nhóm 2).

Tập $2n$ số của cả 2 nhóm trên (trừ a_1 của nhóm 1) nhận $2n-1$ giá trị (chuồng).

Theo nguyên lý Dirichlet có 2 số bằng nhau nhưng không cùng một nhóm 1 hoặc nhóm 2 tức là phải thuộc 2 nhóm. Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

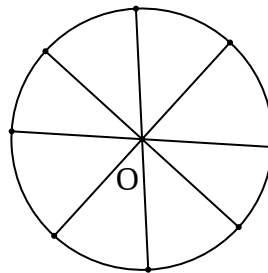
Bài 17.



Các đường trung bình của $\triangle ABC$ chia nó thành bốn tam giác đều có cạnh là 0,5. Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt tồn tại ít nhất là 2 điểm rơi vào cùng một tam giác nhỏ. Ta có khoảng cách giữa 2 điểm này nhỏ hơn 0,5.

Bài 18. Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh là 0,2. Suy ra theo nguyên tắc Dirichlet, ắt tồn tại ít nhất là 3 điểm nằm trong một hình vuông con. Ta có bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông này bằng $\frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7}$. Suy ra 3 điểm đã cho nằm trong hình tròn bán kính là $\frac{1}{7}$.

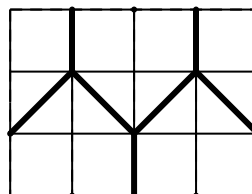
Bài 19.



Chia hình tròn (O, R) thành 8 phần bằng nhau. Do đó mỗi hình quạt có diện tích bằng 1.

Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt có ít nhất là một hình quạt chứa nhiều hơn 2 điểm. Xét 3 điểm phân biệt trong hình quạt đã cho. Dễ thấy tam giác tạo bởi 3 điểm này có diện tích bé hơn 1.

Bài 20.



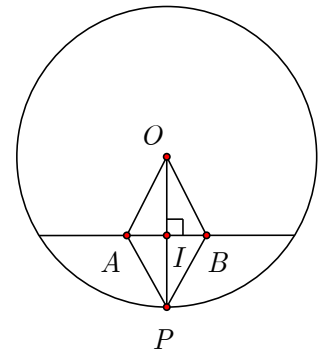
Chia sân thành 5 hình như hình vẽ. Áp dụng nguyên tắc Dirichlet, ta suy ra kết quả cần chứng minh.

Bài 21. Dựng $(0; \sqrt{3})$. P là một điểm thuộc $(0; \sqrt{3})$. Dựng hình thoi $OAPB$ có đường chéo OP cạnh là 1.

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo, ta có: $OI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow AI^2 = AO^2 - OI^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 1$$



Vậy $\triangle AOB$ đều có cạnh bằng 1.

Giả sử ngược lại, mọi cặp hai điểm có khoảng cách giữa chúng bằng 1 mà đều được tô bằng hai màu khác nhau.

Không mất tính chất tổng quát, ta giả sử điểm O được tô bằng màu xanh, điểm A được tô bằng màu đỏ và điểm B được tô bằng màu vàng.

Bởi vì $PA = PB = 1$ suy ra P phải được tô bằng màu xanh.

Với cách lập luận như vậy ta suy ra, tất cả các điểm trên đường $(0; \sqrt{3})$ đều được tô cùng một màu xanh. Mặt khác dễ dàng tìm được trên $(0; \sqrt{3})$ hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bằng 1, nên theo giả sử chúng được tô bằng hai màu khác nhau. Vô lý.

Điều vô lý đó chứng tỏ có hai điểm được tô cùng một màu mà khoảng cách của chúng bằng 1.

Bài 22. Gọi các điểm đã cho là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$

Kí hiệu: $M = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{33}\}$, $N = \{A_{34}, A_{35}, A_{36}, \dots, A_{66}\}$, $P = \{A_{67}, A_{68}, A_{69}, \dots, A_{100}\}$

Tập M gồm 33 điểm, tập N gồm 33 điểm và tập P gồm 34 điểm. Trường hợp của bài toán: yêu cầu chứng minh có thể xảy ra nếu như:

Mỗi điểm trong tập hợp M chỉ được nối với các điểm của tập hợp N hoặc P .

Các điểm của tập hợp N chỉ được nối với các điểm của tập hợp P hoặc tập M .

Các điểm của tập hợp P chỉ được nối với các điểm có trong tập M hoặc tập N (2 tập này có 66 điểm).

Thật vậy, giả sử (A_i, A_j, A_k, A_l) là 4 điểm bất kỳ trong số 100 điểm. Theo nguyên tắc Dirichlet awrt phải có ít nhất là 2 điểm cùng thuộc vào cùng 1 tập hợp (M , N hoặc P)

Do đó với cách phân chia trên đây, 2 điểm này không được nối với nhau.

Bài 23. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

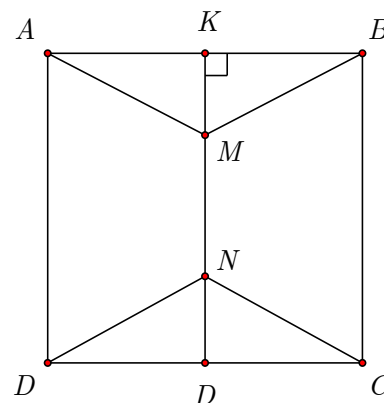
Trên đoạn KI lấy điểm M và N sao cho:

$$KM = NI = 8$$

$$\text{Ta có: } MN = KI - KM - NI = 35 + \sqrt{3} - 16 = 19 + \sqrt{3}$$

$$\text{còn } AM = BM = DN = CN$$

$$= \sqrt{\left(\frac{35 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + 8^2} > 20$$



Do đó nếu ta vẽ các đường tròn có tâm là A, B, C, D, M, N bán kính là 10 thì các đường tròn này không cắt nhau.

Bởi vì chỉ có 5 điểm phân biệt nằm trong hình vuông, do đó ắt tồn tại ít nhất là một hình tròn không chứa điểm nào trong số 5 điểm đã cho.

Nhận thấy, tâm của đường tròn này có khoảng cách tới 5 điểm đã cho lớn hơn 10.

Bài 24. Dựng một tam giác đều có cạnh bằng 1. Nếu cả ba đỉnh được tô bởi cùng một màu (xanh hoặc đỏ) thì bài toán được chứng minh.

Trong trường hợp ngược lại, xét tam giác đều ABC có cạnh $AB = 1$ mà A và B được tô bằng hai màu khác nhau.

Lấy điểm D của mặt phẳng sao cho $AO = BO = 2$. Vì A, B khác màu nên D cùng màu với chỉ một trong hai điểm A hoặc B .

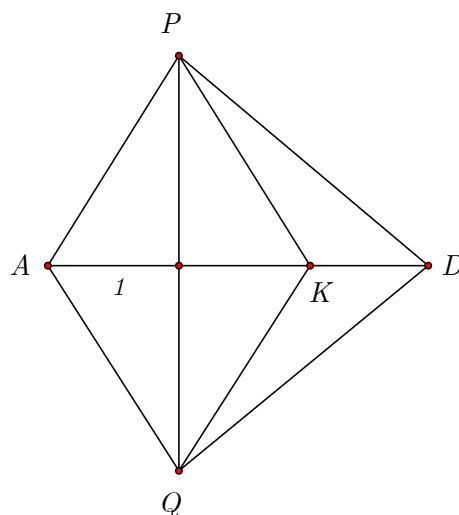
Suy ra tồn tại đoạn thẳng $AD = 2$ hoặc $BD = 2$ có 2 mút được tô bằng hai màu khác nhau. Giả sử là đoạn thẳng AD . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng AD thì K cùng màu với một trong hai điểm A hoặc D . Giả sử K và A cùng có màu xanh.

Vẽ các tam giác đều APK và AQK .

Nếu P và Q có màu xanh thì ta có tam giác đều APK và AQK có cạnh bằng 1 và ba đỉnh được tô bằng cùng màu xanh.

Nếu P và Q có màu đỏ thì tam giác PQD có 3 đỉnh được tô cùng màu đỏ. Dễ thấy, tam giác PQD đều có cạnh là $\sqrt{3}$.

Bài 25.



Cách 1. Có thể giải như bài 808

Cách 2: có thể giải như cách sau đây:

Vẽ tam giác ABC nếu cả ba đỉnh A, B, C được tô cùng một màu thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu A, B, C được tô bởi 2 màu khác nhau, theo nguyên tắc Dirichlet, ắt phải có hai đỉnh được tô cùng một màu. Giả sử các đỉnh A và B được tô cùng màu đen, khi đó C được tô bằng màu đỏ..

Dựng lục giác đều $ADGEFC$ có tâm là B .

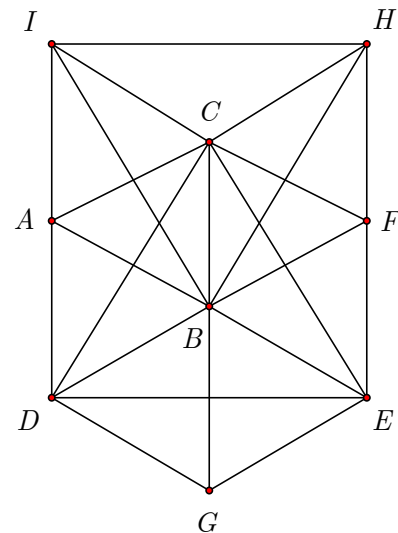
Ta có tam giác ADB đều. Nếu D được tô màu đen ta có ngay điều phải chứng minh. Còn nếu D được tô màu đỏ, lại xét tam giác CDE đều. Nếu E được tô bằng màu đỏ thì tam giác CDE có ba đỉnh được tô cùng màu đỏ, thỏa mãn.

Có nếu ngược lại E được tô bằng màu đen, lại xét tam giác BEF đều. Nếu F được tô bằng màu đen thì ta có BEF có ba đỉnh được tô cùng màu đen, thỏa mãn.

Giả sử ngược lại F được tô bằng màu đỏ, thì lại xét tam giác CFH đều.

Nếu điểm H được tô bằng màu đỏ thì ta có tam giác CFH có ba đỉnh được tô bằng màu đỏ, thỏa mãn. Còn giả sử ngược lại H được tô bằng màu đen thì lại vẽ tam giác đều BHI . Nếu I được tô bằng màu đen thì tam giác BHI có ba đỉnh được tô bằng màu đen, thỏa mãn. Giả sử ngược lại, I được tô bằng màu đỏ thì xét tam giác IDF . Dễ thấy tam giác IDF đều, theo trên ta có ba đỉnh I, D, F được tô bởi cùng màu đỏ, thỏa mãn.

Tóm lại: ta chứng tỏ được rằng, tồn tại tam giác đều mà ba đỉnh được tô bởi cùng một màu.



Bài 26. Lấy một điểm O bất kỳ trên mặt phẳng. Qua O dựng các đường thẳng song song với 2000 đường thẳng đã cho. Tại O ta có 4000 góc đôi một đối đỉnh có tổng số đo bằng 360° . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 27. Giả sử xy là một đường thẳng bất kỳ vuông góc với l . Ta đánh dấu các đoạn thẳng theo thứ tự $1, 2, 3, \dots, 8000$. Chiếu các đoạn thẳng này lên hai đường thẳng xy và l .

Kí hiệu a_i và b_i ($i = 1, 2, \dots, 8000$) tương ứng là độ dài của các đoạn thẳng đã cho trên các đường thẳng xy và l .

Ta có $a_i + b_i \geq 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 8000$

Do đó $(a_1 + a_2 + \dots + a_{8000}) + (b_1 + b_2 + \dots + b_{8000}) \geq 8000 = 4000 + 4000$

Suy ra: hoặc là $a_1 + a_2 + \dots + a_{8000} \geq 4000$

hoặc là $b_1 + b_2 + \dots + b_{8000} \geq 4000$

Ta có 8000 đoạn thẳng có thể chiếu vuông góc lên đường kính của đường tròn với độ dài 4000.

Nếu các hình chiếu của các đoạn thẳng đã cho lên đường thẳng l mà không có các điểm chung thì ta có: $a_1 + a_2 + \dots + a_{8000} < 4000$.

Vì vậy trên l tìm được một điểm là hình chiếu của các điểm thuộc ít nhất là hai trong số các đoạn thẳng đã cho.

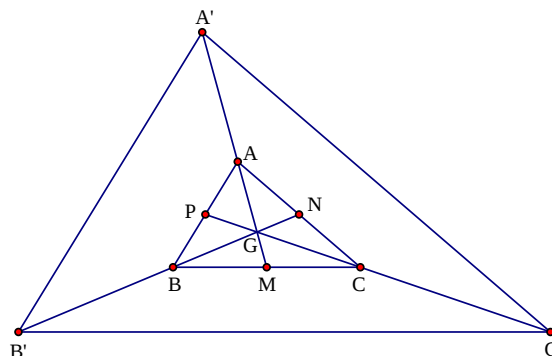
Khi đó đường thẳng vuông góc với l dựng qua điểm này sẽ có điểm chung với ít nhất hai đoạn thẳng trong số 8000 đoạn thẳng đã cho.

Bài 28. Xét hình vuông cạnh 2×2 , do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng 10×10 được chia thành 25 hình vuông có cạnh 2×2 nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lý Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left\lceil \frac{50}{3} \right\rceil + 1 = 17$ lần

Bài 29. Chia các cạnh của hình chữ nhật thành n đoạn và $2n$ đoạn bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài $\frac{1}{n}$. Nối các điểm chia bằng các đường thẳng song song với các cạnh của hình chữ nhật ta được $n \cdot 2n = 2n^2$ hình vuông nhỏ với cạnh là $\frac{1}{n}$. Nếu mỗi hình vuông chứa không quá 3 điểm thì tổng số điểm đã cho không quá $3 \cdot 2n^2 = 6n^2$ (trái với giả thiết). Do đó phải tồn tại 1 hình vuông chứa không ít hơn 4 điểm. Rõ ràng hình vuông cạnh $\frac{1}{n}$ nội tiếp đường tròn bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{2n}$ và đường tròn này được chứa trong đường tròn đồng tâm bán kính $\frac{1}{n}$.

Bài 30.

Lấy năm điểm tùy ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng có hai màu để tô các đỉnh, mà theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là ba điểm A, B, C có màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chỉ có hai khả năng xảy ra:



+ Nếu G có màu đỏ. Khi đó A, B, C, G cùng đỏ và bài toán đã được giải.

+ Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA' = 3GA$, $BB' = 3GB$, $CC' = 3GC$. Khi đó gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì $A'A = 3AG = 6GM \Rightarrow A'A = 2AM$.

Tương tự $B'B = 2BN$, $CC' = 2CP$. Do đó các tam giác $A'BC$, $B'AC$, $C'AB$ tương ứng nhận A, B, C là trọng tâm. Mặt khác, ta cũng có các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm G. Có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

- Nếu A', B', C' cùng xanh. Khi đó tam giác $A'B'C'$ và trọng tâm G có cùng màu xanh.
- Nếu ít nhất một trong các điểm A', B', C' có màu đỏ. Không mất tính tổng quát giả sử A' đỏ. Khi đó tam giác $A'BC$ và trọng tâm A màu đỏ.

Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Câu 31. Số học sinh lớp 6A đạt điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là: $45 - 2 = 43$ (học sinh)

Ta có: $43 = 8.5 + 3$

Khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra từ 2 đến 9 thì theo Nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại ít nhất $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra giống nhau.

Câu 32. Chia 52 số nguyên tùy ý cho 100, ta có thể có các số dư từ 0, 1, 2, 3, ..., 99. Ta phân các số dư thành các nhóm sau: 0 ; 1, 99 ; ... ; 49, 51 ; 50 . Ta có tất cả 51 nhóm và khi chia 52 số cho 100 ta có 52 số dư. Theo nguyên lí Dirichlet sẽ có 2 số dư cùng thuộc một nhóm. Ta có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Hai số dư giống nhau, suy ra hiệu hai số có 2 số dư tương ứng đó sẽ chia hết cho 100.

Trường hợp 2: Hai số dư khác nhau, suy ra tổng của hai số dư có hai số dư tương ứng đó sẽ chia hết cho 100

Ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 33. Nếu khoảng cách giữa hai điểm đều bé hơn 1 thì ta chỉ cần chọn một điểm bất kì trong số 2019 điểm đã cho, rồi vẽ đường tròn $(A,1)$, đường tròn ấy sẽ chứa cả 2018 điểm còn lại, do đó ta có điều phải chứng minh.

Giả sử có hai điểm A và B trong đó 2019 điểm đã cho mà có khoảng cách lớn hơn 1. Vẽ các đường tròn tâm là A, B và bán kính cùng là 1. Ta còn lại 2017 điểm. Mỗi điểm C bất kì trong số 2017 điểm ấy.

Theo bài thì AB, AC, BC phải có một đoạn thẳng có độ dài bé hơn 1.

Vì $AB > 1$ nên $BC < 1$ hoặc $AC < 1$. Do đó hoặc là C nằm trong đường tròn $(A,1)$ hoặc là B nằm trong đường tròn $(B,1)$.

Do có 2017 điểm C như vậy nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất $\left\lceil \frac{2017}{2} \right\rceil + 1 = 1009$ điểm nằm trong cùng một đường tròn.

Giả sử đường tròn đó là $(A,1)$. Cùng với điểm A ta có 1010 điểm nằm trong đường tròn $(A,1)$ (đpcm).

CHUYÊN ĐỀ 14: ĐIỀN CHỮ SỐ CÒN THIẾU TRONG PHÉP TÍNH

Các bài toán về điền chữ số không chỉ yêu cầu kỹ năng tính toán đúng mà còn đòi hỏi cả lập luận chính xác và hợp lý.

Bài 1. Thay các chữ bởi các chữ số thích hợp:

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \\ a \ c \ b \\ \hline b \ c \ a \end{array}$$

Hướng dẫn giải

So sánh cột hàng đơn vị và hàng chục, ta thấy $c + b$ có nhớ. Do đó ở cột hàng chục :

$$b + c + 1 \text{ (nhớ)} = 10 \Rightarrow b = 9.$$

$$\text{ở cột hàng trăm: } a + 1 + 1 \text{ (nhớ)} = 9 \Rightarrow a = 4.$$

$$\text{ở cột hàng đơn vị: } c + 9 = 14 \Rightarrow c = 5.$$

Các chữ số được điền đầy đủ như sau:

$$\begin{array}{r} 495 \\ + \\ 459 \\ \hline 954 \end{array}$$

Bài 2: Tìm các chữ số a, b, c , biết rằng tổng $a + b + c$ bằng tổng của bốn số chẵn liên tiếp và các chữ số a, b, c thỏa mãn cả hai phép trừ sau:

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \\ - \\ c \ b \ a \\ \hline 9 \ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} b \ a \ c \\ - \\ a \ b \ c \\ \hline 2 \ 7 \ 0 \end{array}$$

Hướng dẫn giải

* Xét phép trừ thứ nhất: ở cột hàng trăm ta có $a \geq c$ nên phép trừ ở hàng đơn vị và hàng chục có nhớ. Do đó ở cột hàng trăm:

$$a - c - 1 \text{ (nhớ)} = 0 \Rightarrow c = a - 1 \quad (1)$$

* Xét phép trừ thứ hai: ở cột hàng trăm ta có $b > a$ nên phép trừ ở hàng chục có nhớ. Do đó ở cột hàng trăm:

$$b - a - 1 \text{ (nhớ)} = 2 \Rightarrow a = b - 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $c = b - 4$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra : $a + b + c = (b - 3) + b + (b - 4) = 3b - 7 \leq 20$.

Số không quá 20 và là tổng của bốn số chẵn liên tiếp có thể bằng:

$$0 + 2 + 4 + 6 = 12 \text{ hoặc } 2 + 4 + 6 + 8 = 20.$$

Trường hợp $3b - 7 = 12$ cho $3b = 19$, (loại).

Trường hợp $3b - 7 = 20$ cho $3b = 27$ nên $b = 9$.

Từ đó: $a = 9 - 3 = 6$; $c = 9 - 4 = 5$.

Ta được:

$$\begin{array}{r} 695 \\ - \\ \hline 596 \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 965 \\ - \\ \hline 695 \\ \hline 270 \end{array}$$

Bài 3. Thay các dấu * bằng các chữ số thích hợp trong phép chia sau:

$$\begin{array}{r} \text{A} \quad \begin{array}{r} * * * * * \\ * * * \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} * * \\ \hline \end{array} \\ \text{B} \quad \begin{array}{r} 000** \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} * * 8 \\ \hline \end{array} \\ \text{C} \quad \begin{array}{r} * * \\ \hline 00 \end{array} \end{array}$$

Hướng dẫn giải

Gọi thương là $\overline{ab8}$, ta thấy a nhân với số chia được tích riêng A có ba chữ số, còn 8 nhân với số chia được tích riêng C có hai chữ số. Do đó $a > 8$, vậy $a = 9$.

Ở dòng B, ta hạ liền hai chữ số ở số bị chia xuống, do đó $b = 0$.

Số chia nhân với 9 được tích riêng A có ba chữ số nên số chia lớn hơn 11.

Số chia nhân với 8 ta được tích riêng C có hai chữ số nên số chia nhỏ hơn 13.

Vậy số chia bằng 12.

Số bị chia bằng $908 \cdot 12 = 10896$. Toàn bộ phép tính là:

$$\begin{array}{r} 10896 \\ 108 \\ \hline 908 \\ 00096 \\ 96 \\ \hline 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \hline \end{array}$$

Bài 4. Thay các chữ a, b, c bằng các chữ số thích hợp khác nhau thích hợp trong phép nhân sau:

$$\overline{ab.cc.abc} = \overline{abcabc}.$$

Hướng dẫn giải

Biến đổi đẳng thức đã cho thành:

$$\overline{ab.11.c} = \overline{abcabc} : \overline{abc} = 1001$$

$$\overline{ab.c} = 1001 : 11 = 91.$$

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $91 = 7.13$, do đó $\overline{ab.c}$ chỉ có thể là 13. 7 hoặc 91. 1.

Trường hợp thứ nhất cho $\overline{ab} = 13, c = 7$.

Trường hợp thứ hai cho $\overline{ab} = 91, c = 1$, loại vì $b = c = 1$.

Vậy ta có $13. 17. 137 = 137137$.

Bài 5. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng trong hai cách viết: viết thêm số 5 vào đằng sau số đó hoặc viết thêm chữ số 1 vào đằng trước số đó thì cách viết thứ nhất cho số lớn gấp 5 lần so với cách viết thứ hai.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta có:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ a b c} \\ \times \quad 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{a b c 5}$$

Nếu lần lượt tìm từng chữ số, chẳng hạn tìm c ở số bị nhân thì c có thể bằng 1, 3, 5, 7, 9 nên lời giải sẽ phức tạp. Để giải gọn hơn, ta có thể đặt $\overline{abc} = x$, ta có $(100 + x).5 = 10x + 5$.

Tìm x từ đẳng thức này ta được $x = 999$. Số phải tìm là: 999.

Bài 6. Điền các chữ số thích hợp vào các chữ số trong phép nhân sau:

$$\begin{array}{r} \text{a b c d m n} \\ \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{c d m n a b}$$

Hướng dẫn giải

Ở bài toán này, nếu tìm lần lượt từng chữ số thì lời giải rất phức tạp. Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cdmn} = y$, ta có:

$$2.(10000x + y) = 100y + x \Leftrightarrow 19999x = 98y \Leftrightarrow 2857x = 14y.$$

Như vậy $14y$ chia hết cho 2857, mà $(14, 2857) = 1$ nên y chia hết cho 2857.

Chú ý rằng y là số có 4 chữ số nên có các trường hợp:

$$y = 2857, x = 14; y = 5714, x = 28; y = 8571, x = 42.$$

Ta có ba đáp số:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \times 2 \\ \hline 285714 \end{array} \quad \begin{array}{r} 285714 \\ \times 2 \\ \hline 571428 \end{array} \quad \begin{array}{r} 428571 \\ \times 2 \\ \hline 857142 \end{array}$$

Bài 7. Điền các chữ số thích hợp vào các dấu * trong phép nhân sau

$$\begin{array}{r} ** \\ \cdot \\ *** \\ \hline **** \end{array}$$

Biết rằng cả hai thừa số đều chẵn và tích là số có ba chữ số như nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi tích là $\overline{aaa}$, ta có $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$ nên tích chia hết cho 37 mà 37 là số nguyên tố, do đó phải có một thừa số chia hết cho 37. Thừa số này là số chẵn và có hai chữ số nên bằng 74.

Mặt khác tích chia hết cho 4 (vì mỗi thừa số chia hết cho 2) nên $\overline{aa}$ chia hết cho 4, do đó $a \in \{4, 8\}$.

Xét hai trường hợp: $444 : 74 = 6$ (loại)

$$888 : 74 = 12 \text{ (thỏa mãn)}$$

Ta có đáp số: $74 \cdot 12 = 888$.

Bài 8. Tìm các chữ số a và b, biết rằng: $900 : (a + b) = \overline{ab}$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi đẳng thức đã cho thành phép nhân: $\overline{ab} \cdot (a + b) = 900$.

Như vậy $\overline{ab}$ và $a + b$ là các ước của 900. Ta có các nhận xét:

a) $a + b \leq 18$;

b) $\overline{ab} \leq 100$ nên $a + b > 9$;

c) Tích $\overline{ab}(a + b)$ chia hết cho 3 nên tồn tại một thừa số chia hết cho 3. Do $\overline{ab}$ và $a + b$ có cùng số dư trong phép chia cho 3 nên cả hai cùng chia hết cho 3.

Từ ba nhận xét đó, ta có $a + b$ bằng 12, hoặc 15 hoặc 18.

Nếu $a + b = 12$ thì $\overline{ab} = 900 : 12 = 75$, thỏa mãn $7 + 5 = 12$.

Nếu $a + b = 15$ thì $\overline{ab} = 900 : 15 = 60$, loại.

Nếu $a + b = 18$ thì $\overline{ab} = 900 : 18 = 50$, loại.

Ta có đáp số: $a = 7, b = 5$.

Bài 9. Hãy thay chữ bằng chữ số thích hợp trong phép nhân sau đây:

$$\overline{HANOI} \times \overline{HANOI} = \overline{*****HANOI}$$

Hướng dẫn giải

Để cho gọn ta đặt số $\overline{HANOI} = m$, thế thì $m^2 - m = m(m - 1)$ tận cùng bằng năm chữ số 0 nên chia hết cho $100\,000 = 5^5 \cdot 2^5$.

Vì các số m và $m - 1$ không có ước chung nên một trong chúng chia hết cho $5^5 = 3125$ và số kia chia hết cho $2^5 = 32$.

Trước hết ta xét trường hợp m chia hết cho 3125 và $m - 1$ chia hết cho 32. Từ sơ đồ phép nhân ở trên ta thấy ngay $A = 0$. Do mỗi số trong hai số $\overline{H0NOI}$ và $\overline{H0000}$ chia hết cho 625 nên hiệu của chúng là $\overline{NOI}$ cũng chia hết cho 625.

Vậy $\overline{NOI} = 625$.

Nhưng số $\overline{H0625} = 10000H + 625$ khi chia cho 625 cho thương là $16H + 1$ và để cho thương này chia hết cho 5 thì chữ số H phải là 4 hoặc 9.

Với $H = 4$ ta được số 40 625 không thỏa mãn bài ra. Với $H = 9$ ta được số 90 625 thích hợp.

Trường hợp thứ hai cũng xét tương tự, nhưng không cho nghiệm mới.

Tóm lại ta có: $90\,625 \times 90\,625 = 8\,212\,890\,625$.

Bài 10. Thay dấu $*$ bằng các chữ số thích hợp theo sơ đồ phép chia ở dưới:

$$\begin{array}{r}
 3 \text{ * * * } \\
 \times 3 \\
 \hline
 \text{ * 3 * } \\
 \text{ * * * } \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Hướng dẫn giải

Nhìn vào sơ đồ ta thấy ngay rằng: chữ số đầu tiên của thương phải là 1, chữ số đầu tiên của số chia là phải là 2. Như thế số chia là 23, còn thương bây giờ là 1 * * .

Do chữ số cuối cùng của thương nhân với 23 phải $\times 3 \text{ * }$, nên chữ số cuối của thương là 6 (vì $6 \cdot 23 = 138$).

Từ đó suy ra thương là 136, số chia là 23.

Vậy số bị chia là 3128.

Bài 12. Thay các chữ bằng các chữ số thích hợp:

a) $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 874$;

b) $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 1037$.

Hướng dẫn giải

a) Đổi các chữ số ở cùng một cột:

$$\begin{array}{r}
 a \text{ } b \text{ } c \\
 + \quad a \text{ } b \\
 \hline
 \quad a \\
 \hline
 8 \text{ } 7 \text{ } 4
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 a \text{ } a \text{ } a \\
 + \quad b \text{ } b \\
 \hline
 \quad c \\
 \hline
 8 \text{ } 7 \text{ } 4
 \end{array}$$

Do $\overline{bb} + c < 110$ nên: $874 \geq \overline{aaa} > 874 - 110 = 764 \Rightarrow \overline{aaa} = 777$.

Suy ra: $\overline{bb} + c = 874 - 777 = 97$.

Ta có: $97 \geq \overline{bb} > 97 - 10 = 87 \Rightarrow \overline{bb} = 88$.

Do đó: $c = 97 - 88 = 9$.

Ta được: $789 + 78 + 7 = 874$.

b) Tương tự như trên, ta cũng viết đẳng thức thành: $\overline{aaa} + \overline{bb} + c = 1037$ rồi lần lượt tìm được $a = 9, b = 3, c = 5$.

Bài 13. Thay các chữ bằng các chữ số thích hợp: $\overline{abc} - \overline{ca} = \overline{ca} - \overline{ac}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abc} - \overline{ca} = \overline{ca} - \overline{ac}$ (1)

Vế phải của (1) nhỏ hơn 100 nên $\overline{abc} - \overline{ca} < 100$, do đó $a = 1$.

Ta có: $\overline{1bc} - \overline{c1} = \overline{c1} - \overline{1c}$ (2).

Xét vế phải của (2): $c > 1$. Phép trừ ở cột đơn vị của vế phải là $11 - c$, phép trừ ở cột đơn vị của vế trái là $c - 1$. Do đó $c - 1 = 11 - c$, suy ra $c = 6$.

Ta có: $106 - 61 = 61 - 16$.

Bài 14. Thay các chữ bằng các chữ số thích hợp $\overline{abcd} + \overline{abc} = 3576$.

Hướng dẫn giải

Ta viết lại dưới dạng $3576 - \overline{abc} = \overline{abcd}$.

Thêm chữ số d vào cuối của số bị trừ và số trừ:

$$\overline{3576d} - \overline{abcd} = \overline{abcd0}$$

$$\Rightarrow \overline{3576d} = 11 \cdot \overline{abcd}$$

Thực hiện phép chia $\overline{3576d}$ cho 11, ta tìm được $d = 1$. Từ đó ta tìm được $\overline{abc} = 325$.

Ta có: $3251 + 325 = 3576$.

Bài 15: Thay các chữ bằng các chữ số thích hợp.

a) $\overline{ab} \cdot b = \overline{1ab}$.

b) $\overline{260abc} : \overline{abc} = 626$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy:

$$\overline{1ab} : \overline{ab} \Rightarrow 100 + \overline{ab} : \overline{ab} \Rightarrow 100 : \overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} \in \{10, 20, 25, 50\}.$$

Để thấy $b \neq 0$ nên $\overline{ab} = 25$.

Thử: $25 \cdot 5 = 125$, đúng.

b) Áp dụng tính chất chia một tổng cho một số:

$$(\overline{260000} + \overline{abc}) : \overline{abc} = 626 \Rightarrow \overline{260000} : \overline{abc} + 1 = 626 \Rightarrow \overline{260000} : \overline{abc} = 625$$

$$\overline{abc} = \overline{260000} : 625$$

$$\overline{abc} = 416.$$

$$\text{Vậy } 260416 : 416 = 626.$$

Bài 16. Tìm chữ số a và số tự nhiên x , sao cho: $(12 + 3x)^2 = \overline{1a96}$.

Hướng dẫn giải

$$(12 + 3x)^2 = [3(4 + x)]^2 = 9(4 + x)^2. \text{ Như vậy } \overline{1a96} \text{ chia hết cho } 9 \Rightarrow a = 2.$$

$$\text{Suy ra } (4 + x)^2 = 1296 : 9 = 144 = 12^2.$$

$$\text{Vậy } a = 2, x = 8.$$

Bài 17. Tìm số tự nhiên x có chữ số tận cùng bằng 2, biết rằng $x, 2x, 3x$ đều là các số có ba chữ số và chín chữ số của ba số đó đều khác nhau và khác 0.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \overline{ab2}$, ta có:

$$\begin{array}{r} x = a \ b \ 2 \\ \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$2x = c \ d \ 4 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r} x = a \ b \ 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline \end{array}$$

$$3x = e \ g \ 6 \quad (2)$$

a, b, c, d, e, g khác nhau và nhận các giá trị 1, 3, 5, 7, 8, 9

Vì d chẵn nên $d = 8$. Từ (1) suy ra $b = 9$. Từ (2) suy ra $g = 7$. Do đó $a, c, e \in \{1; 3; 5\}$.

Dễ thấy $a < c < e$ nên $a = 1; c = 3; e = 5$.

Thử lại:

$$\begin{array}{r} 1 \ 9 \ 2 \\ \times \ 2 \\ \hline 3 \ 8 \ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \ 9 \ 2 \\ \times \ 3 \\ \hline 5 \ 7 \ 6 \end{array}$$

Bài 18. Tìm số tự nhiên x có sáu chữ số, biết rằng các tích $2x, 3x, 4x, 5x, 6x$ cũng là số có sáu chữ số gồm cả sáu chữ số ấy.

a) Cho biết sáu chữ số của số phải tìm là 1, 2, 4, 5, 7, 8.

b) Giải bài toán nếu không cho điều kiện a.

Giải.

a) Ta có:

$$x = * * * * *$$

$$2x = * * * * *$$

$$3x = * * * * *$$

$$4x = * * * * *$$

$$5x = * * * * *$$

$$6x = * * * * *$$

Ta chú ý rằng trong sáu số trên, hiệu của hai số bất kì là một trong sáu số ấy.

Mỗi chữ số 1, 2, 4, 5, 7, 8 không thể có mặt hai lần ở cùng một cột. Thật vậy, nếu một chữ số a có ở cùng một cột của số $5x$ và $2x$ chẳng hạn thì hiệu của hai số này (là $3x$) phải có chữ số 0 hoặc 9 ở cột đó (chữ số 0 ứng với trường hợp phép trừ không có nhớ ở cột bên phải sang, chữ số 9 ứng với trường hợp ngược lại). Điều này vô lí vì các chữ số 0 và 9 không thuộc tập các số đã cho.

Do đó mỗi chữ số 1, 2, 4, 5, 7, 8 có mặt đúng một lần ở mỗi cột. Tổng các chữ số ở mỗi cột bằng:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27.$$

Suy ra:

$$x + 2x + 4x + 5x + 7x + 8x = 27.111111$$

$$21x = 2999997$$

$$x = 142857.$$

Các số $2x, 3x, 4x, 5x, 6x$ thứ tự bằng 285714, 428571, 571428, 714285, 857142.

b) Gọi $x = \overline{abcdeg}$. Ta có $a = 1$ để $6x$ vẫn có 6 chữ số.

Xét sáu số $x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x$, chữ đầu tiên của số sau lớn hơn chữ số đầu tiên của số trước ít nhất là 1 nên sáu chữ số đầu tiên của sáu số trên đều khác nhau và khác 0.

Các chữ số đầu tiên này cũng là các chữ số của x , do đó sáu chữ số của x đều khác nhau, khác 0, trong đó có chữ số 1.

Các chữ số tận cùng của $x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x$ cũng phải khác nhau (vì nếu có hai số tận cùng giống nhau thì hiệu của chúng tận cùng bằng 0, tức là có một trong sáu số tận cùng bằng 0, trái với nhận xét ở trên). Do đó phải có một chữ số tận cùng bằng 1.

Các số $2x, 3x, 4x, 5x, 6x$ hiển nhiên không tận cùng bằng 1, còn x cũng vậy vì các chữ số đầu tiên của x đã bằng 1.

Vậy $3x$ tận cùng bằng 1, do đó x tận cùng bằng 7. Suy ra $2x, 3x, 4x, 5x, 6x$ theo thứ tự tận cùng bằng 4, 1, 8, 5, 2.

Như vậy số x gồm sáu chữ số 4, 1, 8, 5, 2, 7. Sau đó giải tiếp như câu a.

Bài 19. Tìm số có 6 chữ số $\overline{abcdeg} = (\overline{abc} + \overline{deg})^2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overline{abc} = A, \overline{deg} = B (100 \leq A, B \leq 999)$.

Ta có: $100A + B = (A + B)^2$

$$\Leftrightarrow 999A = (A + B)(A + B - 1) \quad (1).$$

Do $A \leq 999$ nên $(A + B)(A + B - 1) \leq 999^2$

Suy ra: $A + B \leq 999$.

Nếu $A + B = 999$ thì từ (1) ta suy ra $A = 998; B = 1$.

Từ đó $\overline{abcdeg} = 998001$.

Nếu $A + B < 999$. Ta có: $999 = 27 \cdot 37$.

Mặt khác $((A+B), (A+B-1)) = 1$ nên trong hai số $A+B$ và $A+B-1$ có một số chia hết cho 27 và số kia chia hết cho 37.

Xét hai trường hợp: $\begin{cases} A+B:27 \\ A+B-1:37 \end{cases}$

Ta có $A+B-1 = 37m$ ($m \in \mathbb{N}^+$) hay $37m+1:27 \Rightarrow 10m+1:27 \Rightarrow 80m+8:27$.

Mặt khác $81m:27$. Từ đó suy ra $m-8:27$ hay $m = 27n+8$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Do đó có:

$$A+B-1 = 37(27n+8) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Nhưng $0 < A+B-1 \leq 997$ nên suy ra: $A+B-1 = 296$.

Kết hợp với (1) ta có: $A = 88$ (loại).

Xét trường hợp $\begin{cases} A+B:37 \\ A+B-1:27 \end{cases}$

Ta có: $A+B = 37k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) hay $37k-1:27 \Rightarrow 10k-1:27 \Rightarrow 80k-8:27$.

Mặt khác: $81k:27$ suy ra $k+8:27$ hay $k = 27r-8$ ($r \in \mathbb{N}$).

Do đó có $A+B = 37(27r-8) = 999r - 296$.

Với $r = 1$ ta có $A+B = 703$.

Kết hợp với (1) ta có $A = 494$; $B = 209$.

Từ đó ta có $\overline{abcdeg} = 494209$.

Vậy hai số có 6 chữ số thỏa mãn đề bài là: $\overline{abcdeg} = 998001$ và 494209 .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Thay các dấu * và các chữ bởi các chữ số thích hợp (từ bài 1 đến bài 11).

Bài 1.

a) $\overline{acc.b} = \overline{dba}$ (biết a là chữ số lẻ).

b) $\overline{ac.ac} = \overline{acc}$

c) $\overline{ab.ab} = \overline{acc}$.

Bài 2.

a) $\overline{1ab.2} = \overline{abc8}$;

b) $\overline{ab} = 9.b$.

Bài 3.

$\overline{abcdeg.4} = \overline{gabcde}$ và $\overline{abcde} + g = 15930$.

Bài 4.

$$\begin{array}{r}
 \times \quad ** \\
 \hline
 **** \\
 ****7 \\
 \hline

 \end{array}$$

biết rằng số bị nhân có tổng các chữ số bằng 18 và không đổi khi đọc từ phải sang trái.

Bài 5.

$$\begin{array}{r}
 \times \\
 \hline
 8** \\
 ***9 \\
 *** \\
 \hline

 \end{array}$$

Bài 6.

- a) $\overline{ab.cd} = \overline{ddd}$.
 b) $\overline{ab.cd} = \overline{bbb}$.
 c) $**.* = ***$ biết tích là số có ba chữ số như nhau.

Bài 7.

$$\overline{abcdeg}.6 = \overline{degabc}.$$

Bài 8. $20** : 13 = **7$.

Bài 9. a)

$$\begin{array}{r}
 **** \\
 \hline
 ** \\
 *** \\
 *** \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 ** \\
 \hline
 **2
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r}
 ***** \\
 *** \\
 ** **8** \\
 ** \\
 *** \\
 *** \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 ** \\
 \hline
 \end{array}$$

Bài 10. $\overline{abc} : 11 = a + b + c$.

Bài 11. $(\overline{ab} + \overline{cd})(\overline{ab} - \overline{cd}) = 2002$.

Bài 12. Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 7 vào đằng trước số đó thì được một số lớn gấp 4 lần so với số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào sau số đó.

Bài 13. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên phải và một chữ số 2 vào bên trái của nó thì số ấy tăng gấp 36 lần.

Bài 14. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết xen vào giữa hai chữ số của nó chính số đó thì số đó tăng gấp 99 lần.

Bài 15. Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm 4 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

Bài 16. Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, sao cho nhân nó với 9 ta được số gồm chính các chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.

Bài 17.

a) Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu xóa chữ số hàng trăm thì số ấy giảm đi 9 lần.

b) Giải bài toán trên nếu không cho biết chữ số bị xóa thuộc hàng nào.

Bài 18. Tìm số tự nhiên n có 3 chữ số khác nhau, biết rằng nếu xóa bất kì chữ số nào của nó ta cũng được một số là ước của n .

Bài 19. Một số tự nhiên tăng gấp 9 lần nếu viết thêm một chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó. Tìm số ấy.

Bài 20. Tìm số tự nhiên A biết rằng nếu xóa một hoặc nhiều chữ số tận cùng của nó thì được số B mà $A = 130B$.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1.

a) a là chữ số lẻ nên b và c cũng là lẻ. Ta lại có b và c khác 1 và 5 để $a \neq c$.

Vậy $b, c \in \{3, 7, 9\}$.

Lần lượt xét b bằng 9, 7, 3 và chú ý rằng a, b, c lẻ, khác nhau.

Đáp số: $177 \cdot 3 = 531$.

b) $\overline{ac} \cdot \overline{ac} = \overline{acc}$.

Thực hiện phép chia $\overline{acc}$ cho $\overline{ac}$ được 10. Vậy $c = 0, a = 1$.

Đáp số: $10 \cdot 10 = 100$.

c) Xét chữ số đầu tiên bên trái của các thừa số và tích, ta có $a \cdot a \leq a$ nên

Ta có: $\overline{1b1b} = \overline{1cc}$.

Ta thấy $b \leq 4$ vì nếu $b \geq 5$ thì: $\overline{1b2b} \geq 15 \cdot 15 = 225 > \overline{1cc}$.

Xét các tích $10 \cdot 10, 11 \cdot 11, 12 \cdot 12, 13 \cdot 13, 14 \cdot 14$, ta có đáp số $12 \cdot 12 = 144$.

Bài 2.

a) Đặt $\overline{abc} = A$ thì:

$$(1000 + A) \cdot 2 = 10A + 8$$

$$2000 + 2A = 10A + 8$$

$$1992 = 8A$$

$$A = 294.$$

Đáp số: $1249 \cdot 2 = 2498$.

b) Chuyển thành phép trừ: $\overline{ab} = \overline{b0} - b$.

Đáp số: $45 = 9 \cdot 5$.

Bài 3.

Đặt $\overline{abcde} = A$ thì:

$$(10A + g) \cdot 4 = 100000g + A \quad (1)$$

$$\text{và } A + g = 15390. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được: $A = 2564g$.

Đưa về bài toán tìm hai số biết tổng và tỉ số, ta được: $g = 6$; $A = 15384$.

Bài 4.

a b b a

Xét tích riêng (2)

$\times$ c d a b b a

$$(1) \quad \begin{array}{r} * * * * \\ * * * * \\ * * * * \\ * * * * \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{r} * * * 7 \\ * * * 7 \\ * * * 7 \\ * * * 7 \end{array}$$

* * * * *

$$\begin{array}{r} \times \quad c \\ * * * 7 \\ \hline \end{array}$$

Ta thấy $ac < 10$ mà ac tận cùng bằng 7 nên $ac = 7$.

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp $a = 1$, $c = 7$: Khi đó $b = 8$ (do $a + b = 9$), ta có: $1881 \cdot 7$ được tích riêng (2) có 5 chữ số, loại.

- Trường $a = 7$; $c = 1$: khi đó $d = 1$ (để tích riêng (1) có 4 chữ số), thỏa mãn đề bài:

$$\begin{array}{r} 7227 \\ \times 11 \\ \hline 7227 \\ 7227 \\ \hline 79497 \end{array}$$

Bài 5.

Chữ số hàng chục của số nhân bằng 0, chữ số đơn vị của số nhân bằng 9. Gọi số bị nhân là $\overline{abc}$. Để tích riêng thứ nhất tận cùng bằng 9 thì $c = 1$.

Để tích riêng thứ hai có 3 chữ số thì $a = 1$.

Số bị nhân là $\overline{1b1}$. Chú ý rằng $\overline{1b1} \cdot 9$ được số có 4 chữ số nên $b > 1$, còn $\overline{1b1} \cdot 8$ được số có 3 chữ số nên $b < 3$, do đó $b = 2$.

Số bị nhân là 121, số nhân là 809, tích là 97889.

Bài 6.

$$a) \overline{ab} \cdot \overline{cb} = \overline{ddd} = d \cdot 111 = 3 \cdot 3 \cdot 37.$$

Hai số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$ có tích chia hết cho số nguyên tố 37 nên tồn tại một số chia hết cho 37, giả sử $\overline{ab}:37$. Khi đó $\overline{ab} \in \{37, 74\}$

Nếu $\overline{ab} = 37$ thì $37.\overline{c7} = 999$. Khi đó $\overline{c7} = 999:37 = 27$.

Nếu $\overline{ab} = 74$ thì $74.\overline{c4} = 666$. Khi đó $\overline{c4} = 666:74 = 9$, loại.

Đáp số: $37.27 = 999$.

b) Tích chia hết cho 111 nên chia hết cho các số nguyên tố 3 và 37. Do đó số bị nhân chia hết cho 37(hoặc 74), số nhân chia hết cho 3.

Có 6 đáp số: $37.3 = 111; 37.6 = 222; 37.9 = 333; 74.3 = 222; 74.6 = 444; 74.9 = 666$.

c) Có 2 đáp số: $37.21 = 777; 15.37 = 555$.

Bài 6.

Đặt $\overline{abc} = x, \overline{deg} = y$ thì $6(1000x + y) = 1000y + x$, suy ra $857x = 142y$.

Chú ý rằng $(857, 142) = 1$ nên y chia hết cho 857 và bằng 857, còn $x = 142$.

Ta có: $142857 \cdot 6 = 857142$.

Bài 7.

Thương $\overline{**7} \geq \frac{2000}{13} \Rightarrow \overline{**7} > 153$. Mặt khác $\overline{**7} \leq \frac{2099}{13} \Rightarrow \overline{**7} \leq 161$.

Do đó $\overline{**7} = 157$.

Số bị chia: $157 \cdot 13 = 2041$.

Bài 8.

a) $10098 : 99 = 102$.

b) $1089708 : 12 = 90809$.

Bài 9.

Ta có $\overline{abc} = 11(a + b + c)$.

$$100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$$

$$\Rightarrow 89a = 10c + b \Rightarrow 89a = \overline{cb} \Rightarrow a = 1, \overline{cb} = 89$$

Vậy $198 : 11 = 1 + 9 + 8$.

Bài 10. Không tồn tại hai số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$.

Bài 12. Đáp số: 17948.

Bài 13. Đáp số: 77.

Bài 14.

Cách 1. Viết $\overline{aabb} = 99.\overline{ab}$ thành $\overline{aabb} + \overline{ab} = \overline{ab00}$.

Cách 2. $\overline{aabb} = 99.\overline{ab}$

$$\Rightarrow 1100a + 11b = 990a + 99b$$

$$\Rightarrow 110a = 88b$$

$$\Rightarrow 5a = 4b \Rightarrow a = 4, b = 5$$

Bài 15. Xét phép nhân

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \ d \\ \times \quad 4 \\ \hline d \ c \ b \ 2 \end{array}$$

4d tận cùng bằng a nên a chẵn, ta lại có $4a < 10$ nên $a = 2$.

Ta được:

$$\begin{array}{r} 2 \ b \ c \ d \\ \times \quad 4 \\ \hline d \ c \ b \ 2 \end{array}$$

$d \geq 2$. $4 = 8$, mà 4d tận cùng bằng 2 nên $d = 8$.

Ta được:

$$\begin{array}{r} 2 \ b \ c \ 8 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8 \ c \ b \ 2 \end{array}$$

$4c + 3$ tận cùng bằng b nên b lẻ, ta lại có $4b < 10$ nên $b = 1$.

$4c + 3$ tận cùng bằng 1 nên 4c tận cùng bằng 8. Suy ra $c \in \{2, 7\}$.

$c = 2$ không thỏa mãn bài toán, $c = 7$ cho số phải tìm là: 2178.

Thử lại: $2178 \cdot 4 = 8712$.

Bài 16.

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$. Ta có phép nhân (1).

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \ d \\ \times \quad 9 \quad (1) \\ \hline d \ c \ b \ a \end{array} \quad \text{Từ (1) ta tìm được: } a = 1, d = 9.$$

Ta có phép nhân (2).

$$\begin{array}{r} 1 \ b \ c \ 9 \\ \times \quad 9 \quad (2) \\ \hline 9 \ c \ b \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Từ (2): } b < 2 \text{ vì nếu } b \geq 2 \text{ thì tích có 5 chữ số.} \\ \text{Xét } b = 1 \text{ thì } c = 7, \\ \text{khi đó } 1179 \cdot 9 \text{ có 5 chữ số, loại.} \end{array}$$

Xét $b = 0$ thì $c = 8$, khi đó $1089 \cdot 9 = 9801$, thỏa mãn

Đáp số: 1089.

Bài 17.

$$a) \overline{abc} = 9.\overline{bc} \Rightarrow 100a + \overline{bc} = 9.\overline{bc}$$

$$8.\overline{bc} = 100a \Rightarrow 2.\overline{bc} = 25a.$$

Như vậy $\overline{bc} : 25$. Có 3 đáp số: 225, 450, 675.

b)

Nếu xóa chữ số tận cùng thì số ban đầu giảm từ 10 lần trở lên.

Nếu xóa chữ số hàng chục: có 4 đáp số là 135, 225, 315, 405.

Nếu xóa chữ số hàng trăm: có 3 đáp số như câu a).

Bài 18.

Gọi $n = \overline{abc}$.

Số $\overline{abc}$ xóa c được $\overline{ab}$. Ta có $\overline{abc} : \overline{ab} \Rightarrow c = 0$.

Số $\overline{ab0}$ xóa b được $\overline{a0}$. Ta có $\overline{ab0} : \overline{a0} \Rightarrow \overline{ab} : a \Rightarrow b : a$. (1)

Số $\overline{ab0}$ xóa a được $\overline{b0}$. Ta có $\overline{ab0} : \overline{b0} \Rightarrow \overline{ab} : b \Rightarrow 10a + b : b \Rightarrow 10a : b$. (2)

Từ (1) đặt $b = ka$ ($k \in \mathbb{N}$). Thay $b = ka$ vào (2): $10a : ka \Rightarrow 10 : k$

Do $b \neq a$ nên $k \in \{2, 5\}$.

Với $k = 2$ ta có $\overline{abc}$ bằng 120, 240, 360, 480.

Với $k = 5$ ta có $\overline{abc}$ bằng 150.

Bài 19.

Đáp số: 45.

Bài 20.

Gọi C là số tạo bởi k chữ số tận cùng bị xóa của A, ta có

$$A = 10^k \cdot B + C, \text{ do đó } 10^k \cdot B + C = 130B.$$

$$\text{Như vậy } 10^k \cdot B \leq 130B \Rightarrow k = 1, k = 2.$$

Với $k = 1$ thì $10B + C = 130B \Rightarrow C = 120B$ và C có 1 chữ số, loại.

Với $k = 2$ thì $100B + C = 130B \Rightarrow C = 30B$ và C có 2 chữ số. Vậy C bằng 30; 60; 90.

Có ba số thỏa mãn bài toán là 130; 260; 390.

CHUYÊN ĐỀ 15: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Trong BỒI DƯỠNG HSG Toán lớp 6 "*Toán Chuyển Động*" là một dạng toán tương đối khó đối với học sinh. Trong những năm gần đây, các kỳ thi học sinh giỏi lớp 6 thường gặp những bài toán về chuyển động. Dạng toán này rất phong phú và đa dạng, có ý nghĩa rất quan trọng đối với các em học sinh ở bậc THCS, phải bằng cách giải thông minh, tìm ra các biện pháp hữu hiệu và phù hợp với trình độ kiến thức toán học ở lớp 6 để giải quyết loại toán này.

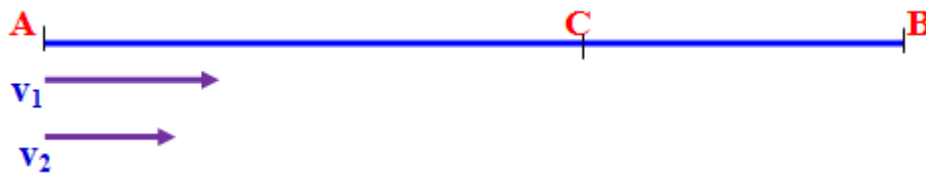
DẠNG 1. CHUYỂN ĐỘNG CÙNG CHIỀU.

Trong chuyển động cùng chiều có các bài toán thường có liên quan đến vận tốc của chuyển động

Xét chuyển động 1 đi sau (đuổi theo) chuyển động 2

$$\Rightarrow \text{Thời gian để hai chuyển động gặp nhau: } t = \frac{s}{v_1 - v_2}$$

Trong đó: s là khoảng cách lúc đầu của hai động tử, v_1 và v_2 là các vận tốc của chúng.



* **Chú ý:** Dạng toán chuyển động cùng chiều, để chúng gặp nhau được trong quá trình chuyển động thì chuyển động đi sau phải có vận tốc lớn hơn chuyển động đi trước.

Bài tập 1: Trong một cuộc thi chạy 2000m, các vận động viên chạy với vận tốc không đổi trên suốt quãng đường. Người thứ nhất về đích trước người thứ hai 200m và trước người thứ ba 290m. Khi người thứ hai đến đích thì người thứ ba còn cách đích bao nhiêu mét?

Hướng dẫn giải

Lúc người thứ nhất đến đích thì người thứ ba chạy được là:

$$2000 - 290 = 1710 \text{ (m)}$$

và người thứ hai chạy được :

$$2000 - 200 = 1800 \text{ (m)}$$

Tỉ số quãng đường (cũng là tỉ số vận tốc) của người thứ ba và người thứ hai là :

$$\frac{1710}{1800} = \frac{19}{20}$$

Khi người thứ hai chạy 200 m cuối cùng thì người thứ ba chạy được là :

$$200 \cdot \frac{19}{20} = 190 \text{ (m)}$$

Lúc người thứ hai đến đích thì người thứ ba còn cách đích là :

$$290 - 190 = 100 \text{ (m)}$$

Bài tập 2. Một người đi từ A đến B vận tốc 15km/h. Sau đó 1h30ph, người thứ 2 cũng rời A đi về B, vận tốc 20km/h và đến B trước người thứ nhất là 30ph. Tính quãng đường AB.

Hướng dẫn giải

Thời gian đi từ A đến B của người thứ 2 ít hơn người thứ nhất là:

$$1\text{h}30\text{ph} + 30\text{ph} = 2\text{h}.$$

Cách 1 : Giả sử người thứ hai đi sau người thứ nhất 2h thì hai người đến B cùng một lúc.

Trong 2 giờ đi trước, người thứ nhất đi được :

$$15.2 = 30 \text{ (km)}.$$

Thời gian để người thứ hai đuổi kịp người thứ nhất là :

$$30 : (20-15) = 6 \text{ (h)}$$

Quãng đường AB dài là :

$$20.6 = 120 \text{ (km)}$$

Cách 2 : Giả sử người thứ hai đi với thời gian như người thứ nhất thì người thứ hai đi quãng đường nhiều hơn người thứ nhất là :

$$20.2 = 40 \text{ (km)}$$

Vận tốc người thứ hai hơn vận tốc người thứ nhất :

$$20 - 15 = 5 \text{ (km/h)}$$

Thời gian người thứ nhất đi hết quãng đường AB là :

$$40 : 5 = 8 \text{ (h)}$$

Quãng đường AB dài : $15.8 = 120 \text{ (km)}$

Cách 3 : Cùng đi một quãng đường AB thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian.

$$\text{Ta có } \frac{v_1}{v_2} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ nên } \frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Biết tỉ số } \frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{3} \text{ và hiệu } t_1 - t_2 = 2$$

$$\Rightarrow t_1 = 8, t_2 = 6.$$

Do đó quãng đường AB dài : $15.8 = 120 \text{ (km)}$.

Cách 4 : Cứ mỗi km, người thứ nhất đi hết $\frac{1}{15}$ giờ, người thứ hai đi hết $\frac{1}{20}$ giờ, người

thứ hai đi ít hơn người thứ nhất : $\frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{1}{60} \text{ (h)}$

$$\text{Quãng đường AB dài : } 2 : \frac{1}{60} = 120 \text{ (km)}$$

Bài tập 3: Lúc 14h20phut một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 48km/h. Sau 10 phút một ô tô xuất phát từ A đuổi theo xe máy với vận tốc 60km/h. Hỏi:

a) Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

b) Chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km?

Hướng dẫn giải

$$\text{Đổi } 10 \text{ phút} = \frac{1}{6} \text{ giờ}$$

$$\text{a) Xe máy đi trong } \frac{1}{6} \text{ giờ được quãng đường là } 48 \cdot \frac{1}{6} = 8 \text{ km}$$

$$\text{Hiệu vận tốc hai xe là } 60 - 48 = 12 \text{ km/h}$$

$$\text{Thời gian hai xe gặp nhau là: } 8 : 12 = \frac{2}{3} \text{ giờ} = 40 \text{ phút}$$

$$\text{Hai xe gặp nhau lúc } 14 \text{ giờ } 20 \text{ phút} + 40 \text{ phút} = 15 \text{ giờ}$$

$$\text{b) Chỗ gặp nhau cách A là } 60 \cdot \frac{2}{3} = 40 \text{ km}$$

Bài tập 4: Lúc 7 giờ 50 phút bác An đi từ A đến B với vận tốc 80m/ phút. Đến 7 giờ 55 phút bác Bình đi từ A đến B với vận tốc 90m/ phút đuổi theo bác An. Hỏi:

a) Bác Bình đuổi kịp bác An lúc mấy giờ

b) Chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km?

Hướng dẫn giải

a) Thời gian bác An đi trước bác Bình là

$$7 \text{ giờ } 55 \text{ phút} - 7 \text{ giờ } 50 \text{ phút} = 5 \text{ phút}$$

$$\text{Khi bác Bình bắt đầu đi thì bác An đã đi được là } 80 \cdot 5 = 400 \text{ (m)}$$

Thời gian bác Bình đuổi kịp bác An là

$$400 : (90 - 80) = 40 \text{ phút}$$

Bác Bình đuổi kịp bác An lúc

$$7 \text{ giờ } 55 \text{ phút} + 40 \text{ phút} = 8 \text{ giờ } 35 \text{ phút}$$

$$\text{b) Chỗ gặp nhau cách A là } 90 \cdot 40 = 3600 \text{ (m)} = 3.6 \text{ km}$$

CHUYỂN ĐỘNG CỦA HAI KIM ĐỒNG HỒ.

Trong loại toán này:

+ Nếu ta chọn mặt đồng hồ là 1 vòng thì vận tốc của kim phút là 1 vòng/h, vận tốc của kim giờ là $\frac{1}{12}$ vòng/h

+ Nếu ta chia mặt đồng hồ thành 60 vạch chia phút thì vận tốc của kim phút là 60 vạch/h, vận tốc của kim giờ là 5 vạch/h

+ Nếu chia mặt đồng hồ thành 12 vạch chia giờ thì vận tốc của kim phút là 12 vạch/h, vận tốc của kim giờ là 1 vạch/h.

Bài tập 5. Đồng hồ đang chỉ 4 giờ 10 phút. Sau ít nhất bao lâu thì hai kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng ?

Hướng dẫn giải

Ta xét thời điểm 4 giờ, lúc đó kim phút còn cách kim giờ $\frac{1}{3}$ vòng.

Muốn kim phút nằm đối diện với kim giờ thì trong cùng một thời gian, kim phút phải quay nhiều hơn kim giờ :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (vòng)}$$

Mỗi giờ kim phút quay được 1 vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng, kim phút quay nhanh hơn kim giờ :

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng)}$$

Thời gian để kim phút và kim giờ nằm đối diện ở trên một đường thẳng:

$$\frac{5}{6} : \frac{11}{12} = \frac{10}{11} \approx 54 \text{ phút } 33 \text{ giây.}$$

Lúc đó là 4 giờ 54 phút 33 giây, sau lúc 4 giờ 10 phút là 44 phút 33 giây

Bài tập 6: Hiện nay là 12 giờ đúng. Hỏi sau bao lâu nữa thì kim giờ và kim phút trùng khít nhau một lần nữa.

Hướng dẫn giải

Trong 1 giờ kim phút chạy được 1 vòng

Trong 1 giờ kim giờ chạy được $\frac{1}{12}$ vòng

Trong 1 giờ kim phút chạy nhiều hơn kim giờ là $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (vòng)

Lúc 12 giờ kim phút trùng với kim giờ

Khi kim phút trùng với kim giờ một lần nữa thì kim phút phải chạy nhiều hơn kim giờ đúng 1 vòng

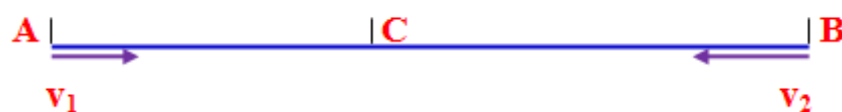
=> Thời gian để kim phút trùng với kim giờ một lần nữa là:

$$1 : \frac{11}{12} = \frac{12}{11} \text{ giờ} = 1 \frac{1}{11} \text{ giờ}$$

DẠNG 2. CHUYỂN ĐỘNG NGƯỢC CHIỀU

Thời gian để hai chuyển động động ngược chiều gặp nhau là: $t = \frac{s}{v_1 + v_2}$

Trong đó: s là khoảng cách ban đầu giữa hai động tử, v_1 và v_2 là các vận tốc của chúng).



Bài tập 7: Hai xe ô tô đi từ hai địa điểm A và B về phía nhau, xe thứ nhất khởi hành từ A lúc 7 giờ, xe thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ 10phút. Biết rằng để đi cả quãng đường AB, xe thứ nhất cần 2 giờ, xe thứ hai cần 3 giờ. Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

Hướng dẫn giải

Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước.

Trong 1 giờ xe thứ nhất đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường, xe thứ hai đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, hai xe gần nhau được :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ (quãng đường)}$$

Trong 7h10phút - 7h = 10phút đi trước, xe thứ nhất đi được:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ (quãng đường)}$$

Lúc xe thứ hai khởi hành, hai xe cách nhau :

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (quãng đường)}$$

Hai xe gặp nhau sau :

$$\frac{11}{12} : \frac{5}{6} = \frac{11}{10} \text{ (h)} = 1\text{h}6\text{phút}$$

Lúc hai xe gặp nhau :

$$7\text{h } 10\text{phút} + 1\text{h } 6\text{phút} = 8\text{h } 16\text{phút}$$

Bài tập 8: Trên quãng đường AB, hai xe ô tô đi từ A và từ B ngược chiều nhau. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì chúng gặp nhau tại một điểm cách A 12km, cách B 18 km. Nếu muốn gặp nhau ở chính giữa đường thì xe thứ nhất (đi từ A) phải khởi hành trước xe kia 10 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Hướng dẫn giải

Nửa quãng đường AB dài : $(12 + 18) : 2 = 15 \text{ (km)}$

Tỉ số vận tốc của xe thứ nhất so với xe thứ hai bằng :

$$12 : 18 = \frac{2}{3}$$

Trong thời gian xe thứ hai đi được nửa quãng đường AB (15km) thì xe thứ nhất đi được :

$$15 \cdot \frac{2}{3} = 10 \text{ (km)}$$

Như vậy trong 10 phút, xe thứ nhất đi được :

$$15 - 10 = 5 \text{ (km)}$$

Vận tốc xe thứ nhất : $5 : \frac{1}{6} = 30 \text{ (km/h)}$

$$\text{Vận tốc xe thứ hai : } 30 \cdot \frac{3}{2} = 45 \text{ (km/h)}$$

Bài tập 9: Phúc và Quang cùng khởi hành một lúc từ nhà mình và đi về phía nhau. Phúc đi nhanh gấp $\frac{4}{3}$ Quang và họ gặp nhau sau 72 phút. Phúc phải khởi hành sau Quang bao lâu để họ gặp nhau ở chính giữa?

Hướng dẫn giải

Gọi P và Q là các điểm mà Phúc và Quang khởi hành .

Trong 72 phút, Phúc đi được $\frac{4}{7}$ quãng đường PQ nên đi cả quãng đường trong:

$$72 : \frac{4}{7} = 126 \text{ (ph)}$$

Phúc đi nửa quãng đường PQ trong thời gian là:

$$126 : 2 = 63 \text{ (ph)}$$

Trong 72 phút, Quang đi $\frac{3}{7}$ quãng đường QP nên đi cả quãng đường trong :

$$72 : \frac{3}{7} = 168 \text{ (phút)}$$

Quang đi nửa quãng đường QP trong thời gian là :

$$168 : 2 = 84 \text{ (phút)}$$

Muốn gặp Quang chính giữa đường, Phúc phải khởi hành sau Quang :

$$84 - 63 = 21 \text{ (ph)}$$

Bài tập 10: Trên con đường đi qua 3 địa điểm A; B; C (B nằm giữa A và C) có hai người đi xe máy Hùng và Dũng. Hùng xuất phát từ A, Dũng xuất phát từ B. Họ cùng khởi hành lúc 8 giờ để cùng đến C vào lúc 11 giờ cùng ngày. Ninh đi xe đạp từ C về phía A, gặp Dũng lúc 9 giờ và gặp Hùng lúc 9 giờ 24 phút. Biết quãng đường AB dài 30 km, vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng. Tính quãng đường BC.

Hướng dẫn giải

Thời gian đi từ A đến C của Hùng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Thời gian đi từ B đến C của Dũng là: $11 - 8 = 3$ (giờ)

Quãng đường AB là 30 km do đó cứ 1 giờ khoảng cách của Hùng và Dũng bớt đi 10 km. Vì vậy lúc 9 giờ Hùng còn cách Dũng là 20 km, lúc đó Ninh gặp Dũng nên Ninh cũng cách Hùng 20 km.

Đến 9 giờ 24 phút, Ninh gặp Hùng do đó tổng vận tốc của Ninh và Hùng là:

$$20 : \frac{24}{60} = \frac{20 \cdot 60}{24} = 50 \text{ (km/h)}$$

Do vận tốc của Ninh bằng $\frac{1}{4}$ vận tốc của Hùng nên vận tốc của Hùng là:

$$[50 : (1 + 4)] \cdot 4 = 40 \text{ (km/h)}$$

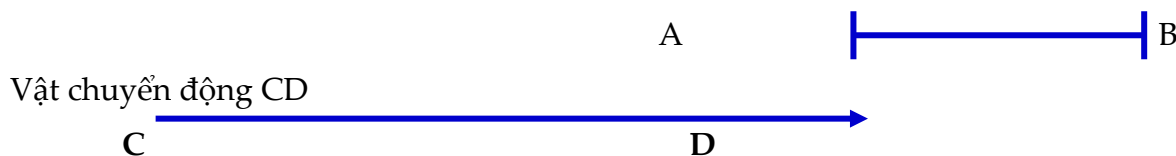
Từ đó suy ra quãng đường BC là:

$$40 \cdot 3 - 30 = 90 \text{ (km)}$$

Đáp số: BC = 90 km

DẠNG 3. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT CÓ CHIỀU DÀI ĐÁNG KỂ

Đây là một dạng toán phức tạp, học sinh phải phân tích được vật chuyển động so với vật đứng yên làm mốc. Vì vật chuyển động có chiều dài đáng kể.



Với loại toán này khi ta sẽ lấy điểm cuối C của “vật chuyển động” làm vật chuyển động, điểm đầu A (vật cố định) làm điểm cố định.

+ Vật chuyển động cách điểm cố định đoạn CA.

+ Nếu vật chuyển động đi hết quãng đường AB thì quãng đường vật chuyển động đi được bằng tổng chiều dài của “Vật chuyển động” và “Vật cố định”

Chú ý: “Vật chuyển động CD” thường gặp là đoàn tàu (xe lửa), vật cố định AB thường là cái cầu có chiều dài

Bài tập 10: Một xe lửa đi hết một cái cầu dài 12m hết 12 giây và đi hết một cái cầu dài 148m hết 20 giây. Tính chiều dài và vận tốc của xe lửa.

Hướng dẫn giải.

Trong 12 giây, xe lửa đi 12m cộng với chiều dài xe lửa. Trong 20 giây, xe lửa đi 148m cộng với chiều dài xe lửa.

Như vậy trong thời gian : $20 - 12 = 8$ (s), xe lửa đi được quãng đường là:

$$148 - 12 = 136 \text{ (m)}$$

Vận tốc xe lửa là :

$$136 : 8 = 17 \text{ (m/s)}$$

Chiều dài của xe lửa là :

$$17 \cdot 12 - 12 = 192 \text{ (m)}$$

Bài tập 11: Một xe lửa dài 110m đi qua một cầu dài 160m hết 18 giây và đi vượt qua một người đi xe đạp cùng chiều hết 10 giây. Tính vận tốc của người đi xe đạp.

Hướng dẫn giải.

* **Phân Tích:** Ở bài toán này ta lấy điểm cuối cùng của xe lửa làm vật chuyển động và đầu cầu làm điểm cố định. Khi đó vật chuyển động cách điểm cố định 110m, khi vật chuyển động đi hết cầu thì quãng đường của vật chuyển động bằng tổng chiều dài của xe lửa và cầu. Người đi xe đạp đi được quãng đường bằng quãng đường vật chuyển động đi trong 10 giây cách điểm xuất phát.

* **Lời giải**

Trong 18 giây xe lửa đi qua được cây cầu dài 160m nên vận tốc của xe lửa là:

$$\frac{110+160}{18} = 15 \text{ (m/s)}.$$

Trong 10 giây xe lửa đi được quãng đường là: $15 \cdot 10 = 150 \text{ (m)}$

Vì xe lửa vượt người đi xe đạp hết 10 giây, nên vận tốc của người đi xe đạp là:

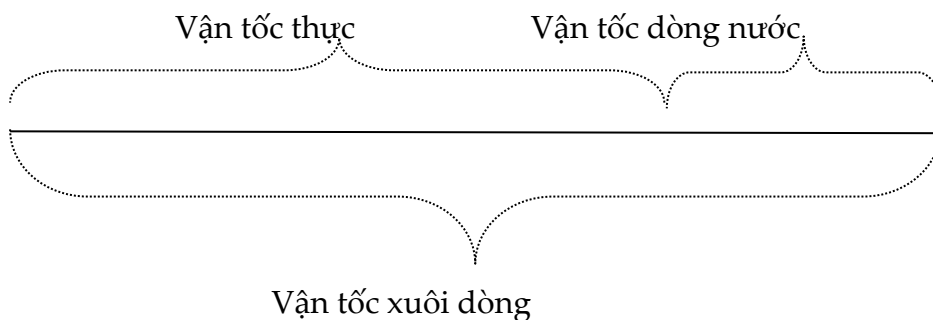
$$\frac{150-110}{10} = 4 \text{ (m/s)}$$

DẠNG 4. CHUYỂN ĐỘNG CÓ DÒNG NƯỚC

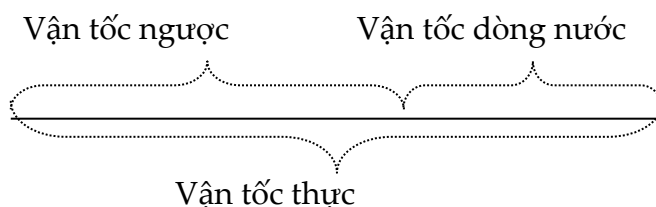
Một số công thức tính:

- Vận tốc thực : Vận tốc của vật chuyển động khi nước lặng.
- Vận tốc xuôi : Vận tốc của vật chuyển động khi đi xuôi dòng.
- Vận tốc ngược : Vận tốc của vật chuyển động khi ngược dòng.
- Vận tốc dòng nước (Vận tốc chảy của dòng sông)

* Vận tốc xuôi dòng = Vận tốc thực + Vận tốc dòng nước.



* Vận tốc ngược dòng = Vận tốc thực - Vận tốc dòng nước.



* **Chú ý:** Vận tốc thực của chuyển động phải lớn hơn vận tốc của dòng nước

Bài tập 12: Một con thuyền đi với vận tốc 7,2 km/giờ khi nước lặng, vận tốc của dòng nước là 1,6km/giờ. Nếu thuyền đi xuôi dòng thì sau 3,5giờ sẽ đi được bao nhiêu ki-lô-mét ?

Hướng dẫn giải

Vận tốc của thuyền đi xuôi dòng là:

$$7,2 + 1,6 = 8,8 \text{ (km/giờ)}$$

Độ dài quãng sông thuyền đi xuôi dòng trong 3,5 giờ là:

$$8,8 \times 3,5 = 30,8 \text{ (km)}$$

Đáp số: 30,8 km.

Bài tập 13. Một ca nô chạy xuôi khúc sông AB hết 6 giờ và chạy ngược khúc sông ấy hết 9 giờ. Hỏi một phao trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu ?

Hướng dẫn giải

Trong 1 giờ, ca nô chạy xuôi được $\frac{1}{6}$ AB, ca nô chạy ngược được $\frac{1}{9}$ BA.

Do vận tốc xuôi trừ vận tốc ngược bằng 2 lần vận tốc dòng nước nên trong 1 giờ dòng nước trôi được : $(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}) : 2 = \frac{1}{36}$ AB.

Thời gian phao trôi từ A đến B là $1 : \frac{1}{36} = 36$ (h)

DẠNG 5. CHUYỂN ĐỘNG CÓ VẬN TỐC THAY ĐỔI TRÊN TỪNG ĐOẠN

* Để giải Dạng Toán này ta cần phân tích được từng đoạn đường cụ thể.

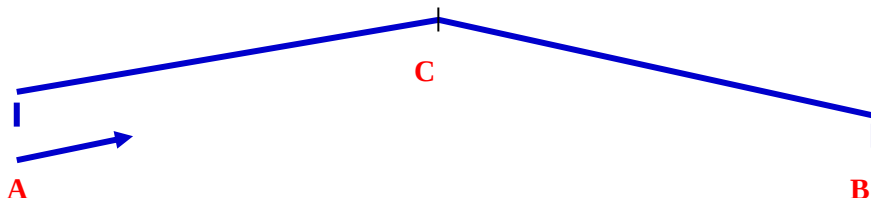
* Nếu vật chuyển động trên đoạn đường bằng phẳng thì vận tốc không đổi theo thời gian.

* Đối với vật chuyển động lên dốc, xuống dốc ta chỉ xét chuyển động của vật khi lên dốc cũng như khi xuống dốc là chuyển động có vận tốc không thay đổi nghĩa là chuyển động đều theo từng đoạn.

Bài tập 14 . Một người đi xe đạp từ A đến B gồm một đoạn lên dốc AC và một đoạn xuống dốc CB. Thời gian đi từ A đến B là 2 giờ, thời gian về từ B đến A là 1 giờ 45 phút. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng lúc lên dốc thì người đó đi với vận tốc 10km/h, lúc xuống dốc thì người đó đi với vận tốc 15km/h.

Hướng dẫn giải

* **Phân tích hình học.** Khi đi thì quãng đường lên dốc là đoạn AC, xuống dốc là đoạn CB. Còn khi trở lại thì quãng đường lên dốc là BC, xuống dốc là CA. Vận tốc không đổi khi lên dốc là 10km/h, xuống dốc là 15 km/h.

*** Lời giải**

Cách 1: Chú ý rằng vận tốc 10km/h bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc 15km/h. Giả sử trong 2 giờ lúc đi, người đó đều đi với vận tốc 10km/h thì đi được quãng đường : $AC + \frac{2}{3} CA$, dài: $10 \cdot 2 = 20$ (km)

Giả sử trong 1 giờ 45 phút lúc về, người đó đều đi với vận tốc 10km/h thì được quãng đường : $BC + \frac{2}{3} CA$, dài:

$$10 \cdot 1 \frac{3}{4} = 17,5 \text{ (km)}$$

vậy quãng đường $20 + 17,5 = 37,5$ (km) là :

$$AC + \frac{2}{3}CB + BC + \frac{2}{3}CA = \frac{5}{3}(AC + CB) = \frac{5}{3}AB$$

$$\text{Quãng đường AB : } 37,5 : \frac{5}{3} = 22,5 \text{ (km).}$$

Cách 2.

Trên mỗi km của quãng đường AB đều có một lần người đi xe đạp đi với vận tốc 10km/h, một lần đi với vận tốc 15km/h.

1km đi với vận tốc 10km/h hết $\frac{1}{10}$ giờ, 1km đi với vận tốc 15km/h hết $\frac{1}{15}$ giờ, do đó 1km cả đi lẫn về hết :

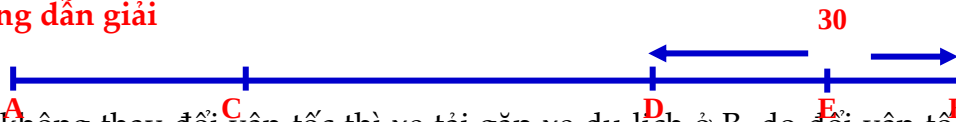
$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Thời gian cả đi lẫn về : } 2 + 1\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ (h)}$$

$$\text{Quãng đường AB : } 3\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = 22,5 \text{ (km)}$$

Bài tập 15. Một xe tải đi từ A đến B, vận tốc 40km/h. Sau đó một thời gian, một xe du lịch rời A, vận tốc 60km/h và như vậy sẽ đến B cùng lúc với xe tải. Nhưng đến C được $\frac{1}{5}$ quãng đường AB, xe tải giảm vận tốc xuống còn 35km/h, do đó xe du lịch gặp xe tải ở D, cách D 30km. Tính quãng đường AB.

Hướng dẫn giải



Nếu không thay đổi vận tốc thì xe tải gặp xe du lịch ở B, do đổi vận tốc nên nó gặp xe du lịch ở D. Trong bài toán này, xe du lịch được đưa vào để xác định xem do thay đổi vận tốc, xe tải đi chậm bao lâu so với bình thường.

$$\text{Xe du lịch đi DB trong : } 30 : 60 = \frac{1}{12} \text{ (h).}$$

$$\text{Trong } \frac{1}{2} \text{ giờ đó, xe tải đi được : } 35 \cdot \frac{1}{2} = 17,5 \text{ (km)}$$

Như vậy lúc xe du lịch đến B (tức là lúc xe tải đáng lẽ đến B) thì xe tải mới đến E, còn cách B : $30 - 17,5 = 12,5$ (km).

Từ C xe tải đi với vận tốc bằng $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$ vận tốc cũ nên quãng đường đi được CE bằng $\frac{7}{8}$ quãng đường CB. Vậy quãng đường 12,5 km là $\frac{1}{8}$ quãng đường CB.

$$\text{Quãng đường CB : } 12,5 \cdot 8 = 100 \text{ (km).}$$

$$\text{Quãng đường AB : } \frac{100 \cdot 5}{4} = 125 \text{ (km)}$$

Bài tập 16: Lúc 8 giờ một người đi từ A đến B với vận tốc 25 km/h. Khi còn cách B 20km người ấy tăng vận tốc lên 30 km/h. Sau khi làm việc ở B trong 30 phút, rồi quay trở về A với vận tốc không đổi 30 km/h và đến A lúc 12 giờ 2 phút. Tính chiều dài quãng đường AB.

Hướng dẫn giải

Gọi điểm cách B 20km là C.

Thời gian đi quãng đường CB và BC là: $(20 \cdot 2) : 30 = 1\text{h } 20'$

Thời gian đi quãng đường AC và CA là: $12\text{h } 2' - 8\text{h} - 30' - 1\text{h } 20' = 132'$

Tỷ số vận tốc trên quãng đường AC và CA là $\frac{5}{6}$ nên tỷ số vận tốc trên quãng đường

AC và CA là $\frac{6}{5}$

Thời gian đi quãng đường AC là: $132 : 11 \cdot 6 = 72' = \frac{6}{5}\text{h}$

Chiều dài quãng đường AC là $\frac{6}{5} \cdot 25 = 30\text{ (km)}$

Chiều dài quãng đường AB là: 50 km

DẠNG 6. VẬN TỐC TRUNG BÌNH

* Trong dạng toán này có sự thay đổi vận tốc theo một khoảng thời gian nhất định của một chuyển động hoặc cùng một thời gian có nhiều chuyển động với vận tốc khác nhau.

* Chú ý rằng vận tốc trung bình không phải luôn luôn bằng trung bình cộng của hai vận tốc. Vận tốc trung bình trên quãng đường AB bằng quãng đường AB chia cho thời gian đi từ A đến B

Bài tập 16. Một người đi xe đạp từ A đến B, đi từ A với vận tốc 10km/h, nhưng đi từ chính giữa đường đến B với vận tốc 15km/h. Tính xem trên cả quãng đường người đó đi với vận tốc trung bình là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Trên quãng đường AB, cứ 2km thì có 1km đi với vận tốc 10km/h (hết $\frac{1}{10}$ giờ), 1km đi với vận tốc 15km/h (hết $\frac{1}{15}$ giờ), nên cứ 2km, người đó đi hết: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ (h).

Vậy vận tốc trung bình của người đó là: $2 : \frac{1}{6} = 12\text{ (km/h)}$.

Bài tập 17. An, Hải, Hoàng, Anh, Minh đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Biết rằng An đi với vận tốc là 12 km/h, Hải đi với vận tốc là: 15km/h, Hoàng đi với vận tốc bằng $\frac{4}{5}$ vận tốc của Hải, Anh đi với vận tốc bằng 75% vận tốc của An, Minh đi với vận tốc bằng vận tốc trung bình của An và Hải. Hỏi trung bình cả năm người đi với vận tốc là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Vận tốc của Hoàng là: $15 \cdot \frac{4}{5} = 12\text{ km/h}$

Vận tốc của Anh là: $12 \cdot \frac{75}{100} = 9 \text{ km/h}$

Vận tốc của Minh là: $\frac{12+15}{2} = 13,5 \text{ km/h}$

Vận tốc trung bình của năm người đi là: $\frac{12+15+12+9+13,5}{5} = 12,3 \text{ km/h}$

CHUYÊN ĐỀ 16: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ HỌC
“TOÁN LỜI VĂN”

I/ PHƯƠNG PHÁP DÙNG SƠ ĐỒ ĐOẠN THẲNG

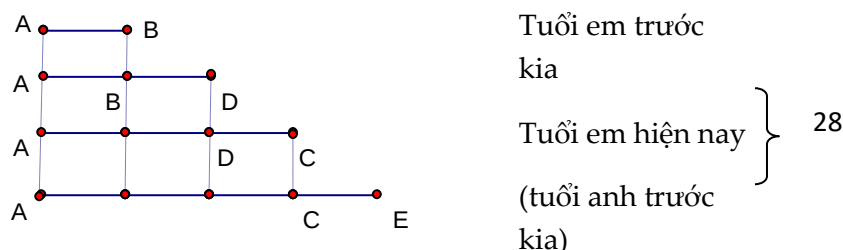
- Mỗi đại lượng trong bài được sơ đồ hóa bằng đoạn thẳng
- Với sơ đồ đoạn thẳng ta đã thể hiện trực quan các đại lượng trong bài toán và các quan hệ giữa chúng và dễ dàng tìm ra đáp án của bài toán

*** LOẠI TOÁN TÍNH SỐ TUỔI.**

Bài tập 1: Tuổi anh hiện nay gấp 3 lần tuổi em trước kia. Khi anh bằng tuổi em hiện nay thì tổng số tuổi của hai người là 28. Tính số tuổi của mỗi người hiện nay

Hướng dẫn giải

Gọi độ dài đoạn thẳng AB là sự biểu thị số tuổi của em trước kia thì tuổi anh hiện nay được biểu thị bằng đoạn thẳng AC gấp 3 lần đoạn thẳng AB ta có mô hình quan hệ của bài toán như sau



Do anh luôn hơn em một số tuổi nhất định nên nếu ta biểu thị tuổi anh trước kia (tức tuổi em hiện nay) là đoạn AD, tuổi anh sau này là đoạn AE thì $BD = DC = CE$ chính là số tuổi anh hơn em. Từ sơ đồ ta tính được $AB = 4$

Vậy tuổi em hiện nay là 8 tuổi

Tuổi anh hiện nay là 12 tuổi

Bài tập 2: Hiện nay, tuổi mẹ gấp 4 lần tuổi con. Bốn năm trước đây, tuổi mẹ gấp 6 lần tuổi con. Tính tuổi mẹ, tuổi con hiện nay.

Hướng dẫn giải

Hiện nay, tuổi mẹ gấp bốn lần tuổi con nên hiệu số tuổi của mẹ và con hiện nay số lần là: $4 - 1 = 3$ (lần)

Bốn năm trước đây, tuổi mẹ gấp 6 lần tuổi con nên hiệu số tuổi của mẹ và con bốn năm trước đây gấp tuổi con trước đây là: $6 - 1 = 5$ (lần)

Vì hiệu số tuổi của hai mẹ con không đổi nên 3 lần tuổi con hiện nay bằng 5 lần tuổi con bốn năm trước, hay tuổi mẹ hiện nay bằng $\frac{5}{3}$ tuổi con bốn năm trước.

Tuổi con hiện nay hơn tuổi con 4 năm trước là 4 tuổi.

Ta có sơ đồ:

Tuổi con hiện nay: |----|----|----|----|----|
↔
 4 tuổi

Tuổi con 4 năm trước: |----|----|----|

Hiệu số phần bằng nhau là: $5 - 3 = 2$ (phần)

Tuổi con hiện nay là: $4 : 2 \times 5 = 10$ (tuổi)

Tuổi mẹ hiện nay là: $10 \times 4 = 40$ (tuổi)

Vậy con 10 tuổi; mẹ 40 tuổi.

Bài tập 3: Tuổi bà gấp đôi tuổi mẹ, tuổi con bằng $\frac{1}{5}$ tuổi mẹ. Tính tuổi của mỗi người, biết tổng số tuổi của mẹ và con là 36.

Hướng dẫn giải

Theo bài ra ta có sơ đồ:

Tuổi con: |----|
 Tuổi mẹ: |----|----|----|----|----| } 36 tuổi
 Tuổi con là: $36 : (1 + 5) = 6$ (tuổi)
 Tuổi mẹ là: $36 - 6 = 30$ (tuổi)
 Tuổi bà là: $30 \times 2 = 60$ (tuổi)

Bài tập 4: Tuổi bố gấp 3 lần tuổi anh, tuổi anh gấp 2 lần tuổi em. Tuổi bố cộng với tuổi em bằng 42 tuổi. Tính tuổi của mỗi người.

Hướng dẫn giải

Tuổi bố gấp 3 lần tuổi anh, tuổi anh gấp 2 lần tuổi em.

Vậy tuổi bố gấp $3 \cdot 2 = 6$ (lần) tuổi em,

$$\text{tuổi bố} + \text{tuổi em} = 42 \text{ tuổi}$$

Ta có sơ đồ:

Tuổi em: |----|
 Tuổi bố: |----|----|----|----|----|----| } 42 tuổi
 Tuổi em là $42 : (1 + 6) = 6$ tuổi
 Tuổi bố là $42 - 6 = 37$ tuổi

Bài tập 5: Năm 2000, bố 40 tuổi, Mai 11 tuổi, em Nam 5 tuổi. Đến năm nào, tuổi bố bằng tổng số tuổi của hai chị em?

Hướng dẫn giải

Năm 2000, chênh lệch giữa tuổi bố và tổng số tuổi của hai chị em là:

$$40 - (11 + 5) = 24 \text{ (tuổi)}.$$

Cứ mỗi năm mỗi người tăng thêm một tuổi nên chênh lệch giữa tuổi bố là tuổi 2 chị em sẽ giảm đi: $(1 + 1) - 1 = 1$.

Số năm để tuổi bố bằng tổng số tuổi của hai chị em là: $24:1 = 24$ (năm)

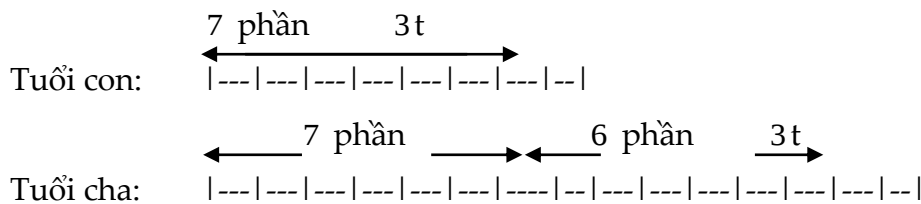
Lúc đó là năm: $2000 + 24 = 2024$.

Bài tập 6: Năm nay tuổi cha hơn 7 lần tuổi con là 3 tuổi. Đến khi tuổi con bằng tuổi cha hiện nay thì tuổi hai cha con cộng lại bằng 109. Tìm tuổi của mỗi người hiện nay.

Hướng dẫn giải

Nếu coi tuổi con là 1 phần thì tuổi cha là 7 phần như thế cộng thêm 3 tuổi. Vậy hiệu số tuổi của hai cha con là 6 phần tuổi con cộng thêm 3 tuổi.

Vì hiệu số tuổi của hai cha con không thay đổi theo thời gian nên khi tuổi con bằng tuổi cha hiện nay thì con vẫn kém cha 6 phần tuổi con hiện nay cộng thêm 3 tuổi, ta có sơ đồ khi đó:



Theo sơ đồ ta có:

$$7 \text{ phần} + 7 \text{ phần} + 6 \text{ phần} + 3 \text{ tuổi} + 3 \text{ tuổi} + 3 \text{ tuổi} = 109 \text{ tuổi}$$

$$20 \text{ phần} + 9 \text{ tuổi} = 109 \text{ tuổi} \Leftrightarrow 20 \text{ phần} = 100 \text{ tuổi}$$

Vậy tuổi con hiện nay là: $100:20 = 5$ (tuổi).

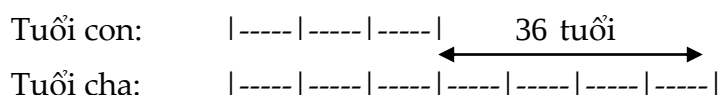
Tuổi cha hiện nay là: $5 \times 7 + 3 = 38$ (tuổi).

Bài tập 7: Năm năm trước cha hơn con 36 tuổi. Hỏi năm cha bao nhiêu tuổi thì 3 lần tuổi cha bằng 7 lần tuổi con?

Hướng dẫn giải

Vì hiệu số tuổi của hai cha con không thay đổi theo thời gian nên cha luôn hơn con 36 tuổi.

Đến năm mà 3 lần tuổi cha bằng 7 lần tuổi con nghĩa là năm tuổi con bằng $\frac{3}{7}$ tuổi cha. Ta có sơ đồ khi đó:



Theo sơ đồ, hiệu số phần bằng nhau là: $7 - 3 = 4$ (phần)

Khi đó tuổi của cha là: $36:4 \times 7 = 63$ (tuổi).

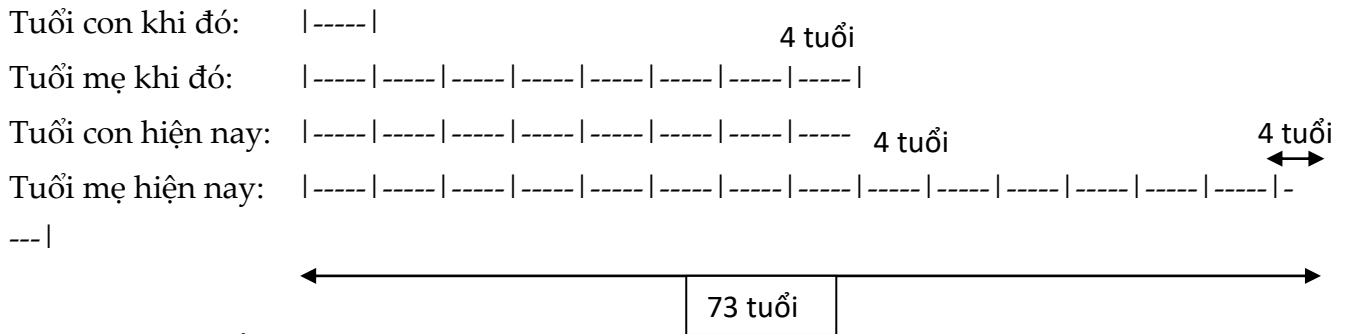
Bài tập 8: Năm nay mẹ 73 tuổi. Khi tuổi mẹ bằng tuổi con hiện nay thì tuổi mẹ hơn 7 lần tuổi con lúc đó là 4 tuổi. Tính tuổi con hiện nay?

Hướng dẫn giải

Coi tuổi con là 1 phần (khi tuổi mẹ bằng tuổi con hiện nay) thì tuổi mẹ lúc đó là 7 phần như thế là cộng thêm 4 tuổi. Ta có hiệu số tuổi của hai mẹ con là:

7 phần tuổi con + 4 tuổi – 1 phần tuổi con = 6 phần tuổi con + 4 tuổi.

Vì hiệu số tuổi của hai mẹ con không đổi theo thời gian nên hiện nay mẹ vẫn hơn con 6 phần tuổi con khi đó cộng thêm 4 tuổi. Ta có sơ đồ:



Theo sơ đồ ta có:

$$7 \text{ phần tuổi con} + 4 \text{ tuổi} + 6 \text{ phần tuổi con} + 4 \text{ tuổi} = 73 \text{ tuổi}$$

Hay $13 \text{ phần tuổi con} + 8 \text{ tuổi} = 73 \text{ (tuổi)}$

$$13 \text{ phần tuổi con} = 65 \text{ (tuổi)}$$

Vậy một phần tuổi con khi đó là: $65 : 13 = 5 \text{ (tuổi)}$

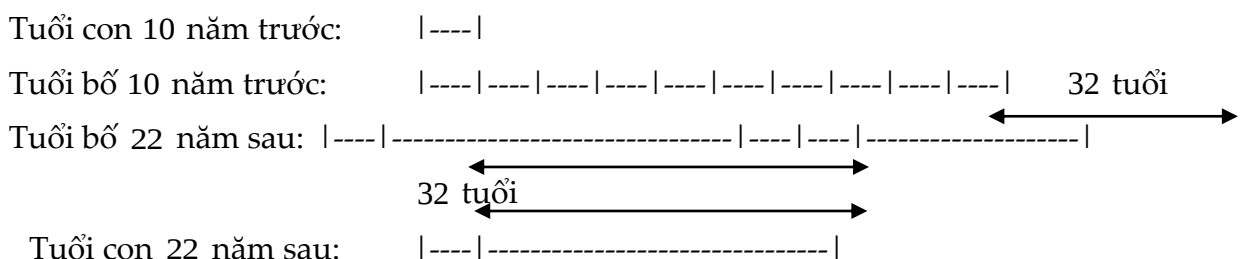
Tuổi con hiện nay là: $5 \times 7 + 4 = 39 \text{ (tuổi)}$.

Bài tập 9: Bố nói với con: "10 năm trước đây tuổi bố gấp 10 lần tuổi con", 22 năm sau nữa thì tuổi bố sẽ gấp đôi tuổi con. Hãy tính tuổi bố và tuổi con hiện nay.

Hướng dẫn giải

Mười năm trước đây, nếu coi tuổi con là 1 phần thì tuổi bố là 10 phần như thế. Thời gian từ cách đây 10 năm đến sau đây 22 năm nữa có số năm là: $10 + 22 = 32 \text{ (năm)}$

Theo bài ra ta có sơ đồ:



Nhìn sơ đồ ta thấy:

$$1 \text{ phần tuổi con} + 32 \text{ tuổi} = (10 \text{ phần tuổi con} + 32 \text{ tuổi}) : 2$$

Hay $1 \text{ phần tuổi con} + 32 \text{ tuổi} = 5 \text{ phần tuổi con} + 16 \text{ tuổi}$

$$16 \text{ tuổi} = 4 \text{ phần tuổi con}$$

Vậy tuổi con cách đây 10 năm là: $16 : 4 = 4 \text{ (tuổi)}$.

Tuổi bố cách đây 10 năm là: $4 \times 10 = 40 \text{ (tuổi)}$.

Tuổi con hiện nay là: $4 + 10 = 14 \text{ (tuổi)}$

Tuổi bố hiện nay là: $40 + 10 = 50 \text{ (tuổi)}$.

Bài tập 10: Mẹ hơn con 24 tuổi. Cách đây 4 năm tuổi con bằng $\frac{1}{4}$ tuổi mẹ. Hỏi hiện nay mỗi người bao nhiêu tuổi?

Hướng dẫn giải

Hiệu số tuổi của hai mẹ con không thay đổi theo thời gian nên cách đây 4 năm mẹ vẫn hơn con 24 tuổi. Ta có sơ đồ khi đó:

Tuổi con: |-----| 24 tuổi
 Tuổi mẹ: |-----|-----|-----|-----|

Theo sơ đồ tuổi mẹ cách đây 4 năm là: $24 : (4 - 1) \times 4 = 32$ (tuổi)

Vì mỗi năm mỗi người tăng lên 1 tuổi nên hiện nay tuổi mẹ là:

$$32 + 4 \times 1 = 36 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi con hiện nay là: $36 - 24 = 12$ (tuổi)

Bài tập 11: Ba năm trước em 6 tuổi và kém chị 6 tuổi. Hỏi mấy năm sau nữa thì 3 lần tuổi chị bằng 4 lần tuổi em?

Hướng dẫn giải

Vì hiệu số tuổi của hai chị em không thay đổi theo thời gian nên em luôn kém chị 6 tuổi

Khi 3 lần tuổi chị bằng 4 lần tuổi em nghĩa là khi tuổi em bằng $\frac{3}{4}$ tuổi chị.

Ta có sơ đồ khi đó:

Tuổi em: |----|----|----| 6t
 Tuổi chị: |----|----|----|-----|

Theo sơ đồ hiệu số phần bằng nhau là: $4 - 3 = 1$ (phần)

Khi đó tuổi của em là: $6 : 1 \times 3 = 18$ (tuổi)

Từ khi em 6 tuổi đến lúc em 18 tuổi có số năm là: $18 - 6 = 12$ (năm)

Vậy sau 12 năm từ lúc em 6 tuổi thì 3 lần tuổi chị bằng 4 lần tuổi em.

Bài tập 12: Năm 2000, mẹ 36 tuổi, hai con 7 tuổi và 12 tuổi. Bắt đầu từ năm nào, tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi của hai con?

Hướng dẫn giải

Trước hết ta tính xem đến năm nào thì tuổi mẹ bằng tổng số tuổi của hai con. Đó là năm 2017. Vậy từ năm 2018 trở đi thì tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi của hai con.

Số năm để tuổi mẹ bằng tổng tuổi hai con là:

$$36 - (7 + 12) = 17 \text{ (năm)}$$

Số năm để tuổi mẹ bắt đầu nhỏ hơn tổng số tuổi của con là:

$$17 + 1 = 18 \text{ (năm)}$$

Vậy năm đầu tiên là tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi 2 con là:

$$2000 + 18 = 2018$$

Bài tập 13: Anh hơn em 3 tuổi. Tuổi anh hiện nay gấp rưỡi tuổi em, lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Tính tuổi hiện nay của mỗi người.

Hướng dẫn giải

Vì hiệu số tuổi của anh và em không thay đổi theo thời gian nên coi tuổi em trước đây là 1 phần thì tuổi anh trước đây là 1 phần cộng thêm 3 tuổi.

Vậy tuổi em hiện nay cũng là 1 phần cộng thêm 3 tuổi.

Tuổi anh hiện nay là:

$$1 \text{ phần} + 3 \text{ tuổi} + 3 \text{ tuổi} = 1 \text{ phần} + 6 \text{ tuổi}$$

Vì (1 phần + 6 tuổi) này cũng chính là 1,5 phần. Vậy 0,5 phần là 6 tuổi.

Tuổi em hiện nay là:

$$12 + 3 = 15 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi anh hiện nay là:

$$15 + 3 = 18 \text{ (tuổi)}$$

Bài tập 14: Tuổi mẹ hiện nay gấp 2,3 lần tuổi con. 16 năm trước, tuổi mẹ gấp 7,5 lần tuổi con. Hỏi mấy năm sau thì tuổi mẹ gấp đôi tuổi con?

Hướng dẫn giải

Hiện nay mẹ hơn con: $2,3 - 1 = 1,3$ lần tuổi con hiện nay.

Còn 16 năm trước mẹ hơn con: $7,5 - 1 = 6,5$ lần tuổi con trước kia.

Vì mẹ luôn hơn con một số tuổi không đổi nên 6,5 lần tuổi con trước kia bằng 1,3 lần tuổi con hiện nay, tức là tuổi con hiện nay gấp: $6,5 : 1,3 = 5$ lần tuổi con trước kia.

Do đó 4 lần tuổi con trước kia là: 16 năm, tuổi con trước kia là 4 tuổi, tuổi con hiện nay là: $4 + 16 = 20$ tuổi, tuổi mẹ hiện nay là: $20 \times 2,3 = 46$ tuổi.

Mẹ hơn con: $46 - 20 = 26$ tuổi. Lúc mẹ gấp đôi tuổi con thì con 26 tuổi, tức là $26 - 20 = 6$ năm sau thì tuổi mẹ gấp đôi tuổi con.

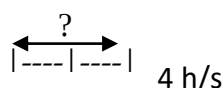
*** LOẠI TOÁN BIẾT MỐI LIÊN HỆ SỐ PHẦN, PHÂN SỐ.**

Bài tập 15: Lớp 5A có số học sinh nữ bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh nam. Sang đầu học kỳ II có 4 bạn nữ từ lớp khác chuyển đến nên số học sinh nữ bằng $\frac{3}{5}$ số học sinh nam. Hỏi đầu năm học lớp 5A có bao nhiêu học sinh nữ, bao nhiêu học sinh nam?

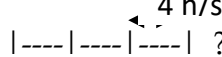
Hướng dẫn giải

Theo bài ra ta có sơ đồ sau:

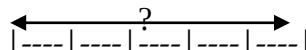
Số học sinh nữ lúc đầu:



Số học sinh nữ lúc sau:



Số học sinh nam:



Theo sơ đồ số học sinh nữ lúc đầu là: $4 : (3 - 2) \times 2 = 8$ (học sinh)

Số học sinh nam là: $8 : \frac{2}{5} = 20$ (học sinh)

Bài tập 16: Ba bình nước đựng nước chưa đầy. Sau khi đổ $\frac{1}{3}$ số nước ở bình 1 sang bình 2, rồi đổ $\frac{1}{4}$ số nước hiện có ở bình 2 sang bình 3, cuối cùng đổ $\frac{1}{10}$ số nước hiện có ở bình 3 sang bình 1 thì mỗi bình đều có 9 lít nước. Hỏi lúc đầu mỗi bình có bao nhiêu lít nước?

Hướng dẫn giải

Sau khi đổ $\frac{1}{10}$ số lít nước ở bình 3 sang bình 1 thì bình 3 còn 9 lít nước.

Vậy trước đó bình ba có số lít nước là: $9 : \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 10$ (l)

Trước khi nhận $\frac{1}{10}$ số lít nước của bình 3 thì bình 1 có số lít nước là:

$$9 - 10 \times \frac{1}{10} = 8 \text{ (l)}$$

Vậy lúc đầu bình 1 có số lít nước là: $8 : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12$ (l)

Sau khi đổ $\frac{1}{4}$ số nước ở bình 2 sang bình 3 thì bình 2 còn 9 lít (theo bài ra), vậy trước khi đó bình 2 có số lít nước là: $9 : \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 12$ (l).

Vậy trước khi nhận $\frac{1}{3}$ số nước của bình 1 hay lúc đầu bình 2 có số lít nước

$$12 - 12 \times \frac{1}{3} = 8 \text{ (l)}.$$

Bình 2 đổ sang bình 3 số lít nước là: $12 \times \frac{1}{4} = 3$ (l)

Theo lời giải đầu thì trước khi đổ $\frac{1}{10}$ số nước sang bình 1 thì bình 3 có 10 lít nước, vậy trước khi nhận 3 lít nước ở bình 2 đổ sang hay lúc đầu bình 3 có số lít nước là: $10 - 3 = 7$ (l).

Bài tập 17: Cho phân số $\frac{23}{28}$. Hãy tìm số tự nhiên m sao cho khi cùng bớt cả tử số và mẫu số của phân số đã cho đi m thì ta được phân số mới có giá trị bằng $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Hiệu của mẫu số và tử số của phân số $\frac{23}{28}$ là $28 - 23 = 5$

Nếu cùng bớt m ở cả tử số và mẫu số thì hiệu mẫu số và tử số không đổi (vẫn bằng 5) mà khi đó được phân số mới có giá trị bằng $\frac{2}{3}$ nên ta có sơ đồ:

Tử số mới: |----|----| 5

Mẫu số mới: |----|----| $\longleftrightarrow$ |

Tử số mới là: $5:(3-2) \times 2 = 10$

Số tự nhiên m là: $23-10=13$.

Bài tập 18: Cho phân số $\frac{107}{187}$. Hãy tìm số tự nhiên, biết rằng nếu cùng bớt cả tử số và mẫu số đi số tự nhiên đó thì ta được phân số mới có giá trị bằng $\frac{5}{9}$.

Hướng dẫn giải

Hiệu của tử số và mẫu số của phân số $\frac{107}{187}$ là: $187-107=80$

Nếu cùng bớt cả tử số và mẫu số đi cùng một số tự nhiên thì hiệu mẫu số và tử số vẫn không đổi (vẫn bằng 80) mà khi đó thì được phân số mới có giá trị bằng $\frac{5}{9}$, có sơ đồ

Tử số mới: |----|----|----|----|----| $\xrightarrow{80}$

Mẫu số mới: |----|----|----|----|----| $\longleftarrow$ |

Tử số mới là: $80:(9-5) \times 5 = 100$

Số tự nhiên cần tìm là: $107-100=7$

Bài tập 19: Một quầy bán vải, lần thứ nhất bán $2m$ vải, lần thứ hai bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}m$. Lần thứ ba bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}m$, lần thứ tư bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}m$ thì vừa hết. Hỏi quầy vải đó bán được tất cả bao nhiêu mét vải?

Hướng dẫn giải

Ta có sơ đồ:

Số vải lúc đầu: |----- $\xrightarrow{2m}$ -----|

Số vải sau khi bán lần thứ nhất: |----- $\frac{1}{2}m$ -----|

Số vải sau khi bán lần thứ hai: |----- $\frac{1}{2}m$ -----|

Số vải sau khi bán lần thứ ba: |--- $\frac{1}{2}m$ ---|

Theo sơ đồ vải còn lại sau khi bán lần thứ ba là: $\frac{1}{2} \times 2 = 1(m)$

Số vải còn lại sau khi bán vải lần thứ hai là: $(1 + \frac{1}{2}) \times 2 = 3(m)$

Số vải còn lại sau khi bán lần thứ nhất là: $(3 + \frac{1}{2}) \times 2 = 7(m)$

Số vải cửa hàng đó bán được tất cả là: $7 + 2 = 9(m)$

Bài tập 20: Bình đọc một quyển truyện trong 3 ngày. Ngày đầu Bình đọc được $\frac{1}{5}$ số trang và 16 trang. Ngày thứ hai Bình đọc được $\frac{3}{10}$ số trang còn lại và 20 trang. Ngày thứ ba Bình đọc được $\frac{3}{4}$ số trang còn lại và 37 trang cuối cùng. Hỏi quyển truyện đó có bao nhiêu trang?

Hướng dẫn giải

Ta có sơ đồ: 16 trang

Số trang quyển truyện: |-----|--|-----|-----|-----|-----|

20 trang

Số trang còn lại sau khi đọc ngày đầu: |---|---|---|---|-|---|---|---|---|-
---|

37 trang

Số trang còn lại sau khi đọc ngày thứ 2: |-----|-----|-----|-----|

Theo sơ đồ, số trang còn lại sau khi Bình đọc ngày thứ hai là:

$$37 \times 4 = 148 \text{ (trang)}$$

Số trang còn lại sau khi Bình đọc ngày đầu là:

$$(148 + 20) : 7 \times 10 = 240 \text{ (trang)}$$

Số trang của quyển truyện đó là: $(240 + 16) : 4 \times 5 = 320 \text{ (trang)}$.

*** LOẠI TOÁN TÌM SỐ TỰ NHIÊN**

Bài tập 21: Tìm bốn số tự nhiên chẵn liên tiếp có tổng bằng 5420

Hướng dẫn giải

Gọi bốn số tự nhiên chẵn có dạng: $2k; 2k + 2; 2k + 4; 2k + 6, (k \in N)$

Theo bài ra ta có: $2k + 2k + 2 + 2k + 4 + 2k + 6 = 5420$

Hay $8k + 12 = 5420$

$$8k = 5408$$

$$k = 676 \text{ (TM)}$$

Vậy 4 số tự nhiên cần tìm là: 1352; 1354; 1356; 1358.

Bài tập 22: Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp biết rằng tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng 114.

Hướng dẫn giải

Gọi ba số tự nhiên lẻ liên tiếp là: $2k + 1; 2k + 3; 2k + 5$ ($k \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có: $2k + 1 + 2k + 5 = 114$

Hay $4k + 6 = 114$

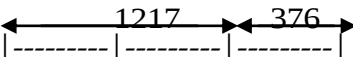
$k = 27$ (TM)

Vậy 3 số tự nhiên lẻ cần tìm là: 55; 57; 59.

Bài tập 23: Hiệu của hai số bằng 1217. Nếu tăng số trừ gấp bốn lần thì được số lớn hơn số bị trừ là 376. Tìm số bị trừ và số trừ.

Hướng dẫn giải

Theo bài ra ta có sơ đồ:

Số bị trừ: |-----|
 Số trừ: |-----|
 Số trừ $\times 4$: |-----|-----|-----|-----|


Ba lần số trừ: $1217 + 376 = 1593$

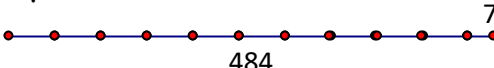
Số trừ: $1593 : 3 = 531$

Số bị trừ: $531 + 1217 = 1748$.

Bài tập 24: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 7 biết rằng sau khi xoá số 7 ấy đi thì số tự nhiên đó giảm đi 484 đơn vị

Hướng dẫn giải

Xoá số 7 ở tận cùng là trừ số đó đi 7 đơn vị sau đó chia cho 10.

Ta có sơ đồ sau: Số ban đầu 
 Số còn lại 

Theo sơ đồ ta có :

Số còn lại là:

$$(484 - 7) : 9 = 53$$

Vậy số tự nhiên ban đầu là

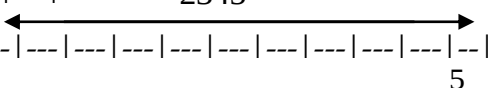
$$53 \cdot 10 + 7 = 537$$

Bài tập 25: Hiệu của hai số là 2345. Tìm hai số đó, biết rằng nếu viết thế chữ số 5 vào tận cùng bên phải số bé thì được số lớn.

Hướng dẫn giải

Nếu viết thêm chữ số 5 vào tận cùng bên phải số bé thì được số lớn hơn, như vậy số lớn gấp 10 lần số bé và cộng thêm 5 đơn vị.

Theo bài ra ta có sơ đồ:

Số bé: |---| 2345
 Số lớn: |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|


Theo sơ đồ ta có 9 lần số bé là: $2345 - 5 = 2340$

Số bé là: $2340 : 9 = 260$

Số lớn là: $260 + 2345 = 2605$

Bài tập 26: Hiệu của hai số bằng 0,8. Thương của hai số cùng bằng 0,8. Tìm hai số đó.

Hướng dẫn giải

$0,8 = \frac{4}{5}$. Ta có sơ đồ:

Số bé là: |----|----|----|----|0,8
Số lớn là: |----|----|----|----|

Theo sơ đồ hiệu số phần bằng nhau là: $5 - 4 = 1$ (phần).

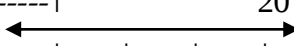
Số bé là: $0,8 : 1 \times 4 = 3,2$

Số lớn là: $3,2 + 0,8 = 4$

Bài tập 27: Hiệu của hai số bằng 20. Thương của hai số bằng 2,25. Tìm hai số đó.

Hướng dẫn giải

Theo bài ta có sơ đồ:

Số bé: |----|----|----|----|
Số lớn: |----|----|----|----|

Theo sơ đồ hiệu số phần bằng nhau là: $9 - 4 = 5$ (phần)

Số lớn là: $20 : 5 \times 9 = 36$

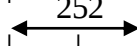
Số bé là: $36 - 20 = 16$

Bài tập 28: Tìm hai số có hiệu 252, biết số bé bằng $\frac{1}{4}$ tổng của hai số.

Hướng dẫn giải

Số bé bằng $\frac{1}{4}$ tổng hai số, nếu coi số bé là 1 phần thì tổng của hai số là 4 phần như vậy. Do đó số lớn hơn có số phần bằng nhau là: $4 - 1 = 3$ (phần)

Vậy số bé bằng $\frac{1}{3}$ số lớn. Ta có sơ đồ:

Số bé: |----|
Số lớn: |----|

Theo sơ đồ hiệu số phần bằng nhau là: $3 - 1 = 2$ (phần)

Số bé là: $252 : 2 \times 1 = 126$

Số lớn là: $126 + 252 = 378$

Một số bài tập bổ sung:

Bài tập 29: Trên hai ngăn của giá sách có tổng cộng 118 cuốn. Nếu lấy đi 8 cuốn ở ngăn thứ nhất sau đó thêm vào ngăn thứ hai 10 cuốn sách thì số sách ở ngăn thứ gấp đôi số sách ở ngăn thứ nhất. Tính số sách trong mỗi ngăn lúc ban đầu.

Bài tập 30: Mẹ hơn con 28 tuổi. Sau 5 năm nữa tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi con. Tính tuổi mẹ và tuổi con hiện nay?

Bài tập 31: Số dân trước kia của hai huyện A và B tỉ lệ với 2 và 3. Hiện nay dân số huyện A tăng thêm 8000 người, dân số huyện B tăng thêm 4000 nên dân số huyện A gấp $\frac{3}{4}$ dân số huyện B. Tính số dân hiện nay của mỗi huyện

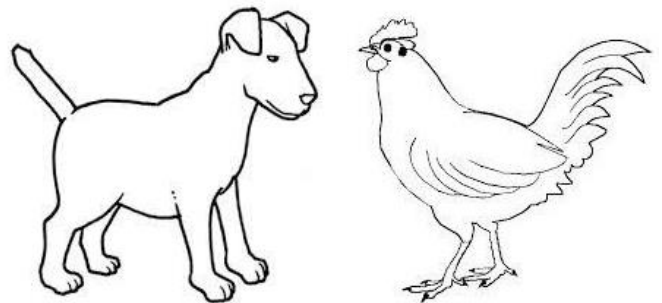
II/ PHƯƠNG PHÁP GIẢ THIẾT TẠM

Giả thiết tạm: là những điều ta tưởng tượng ra để giúp cho việc giải bài toán được dễ dàng

Bài tập 32: Xét bài toán cổ:

“Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn”

Hỏi mỗi loài có bao nhiêu con?



Hướng dẫn giải

* **Giả thiết tạm ở đây là:** Mỗi con gà có 4 chân tức là 36 con đều là chó.

Giả sử tất cả 36 con đều là chó khi đó tổng số chân là: $36 \cdot 4 = 144$ chân, thừa 44 chân so với đầu bài chính là do còn số chân của gà

Vậy số gà là: $44 : 2 = 22$ con

Số chó là $36 - 22 = 14$ con

Bài tập 33: (Tìm số gà, số chó biết tổng số con và hiệu số chân) Vừa gà vừa chó có 36 con. Biết số chân chó nhiều hơn số chân gà là 12 chân. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

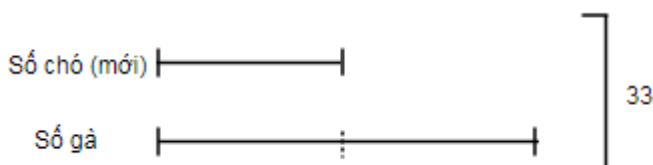
Hướng dẫn giải

Nếu ta bớt đi 3 con chó thì số chân chó bằng số chân gà.

Khi đó, số chó (mới) sẽ bằng một nửa số gà (vì số chân bằng nhau mà mỗi con chó có 4 chân, mỗi con gà chỉ có 2 chân).

Tổng số chó (mới) và số gà chỉ còn là: $36 - 3 = 33$ (con)

Ta có sơ đồ sau:



Số chó mới là: $33:3 = 11$ (con)

Suy ra, số chó lúc đầu là: $11 + 3 = 14$ (con)

Số gà là: $36 - 14 = 22$ (con)

*** Giả thiết tạm ở đây là:** bớt đi 12 chân chó hay là 3 con chó, để nhận xét tỉ số giữa số gà và số chó.

Bài tập 34: (Tính số gà, số chó biết hiệu số con và tổng số chân) Cả gà và chó có 100 chân. Biết số gà nhiều hơn số chó 8 con. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

Hướng dẫn giải

Nếu ta bớt đi 8 con gà thì số gà sẽ bằng số chó. Khi đó, tổng số chân gà và chân chó chỉ còn là: $100 - 8 \times 2 = 84$ (chân)

Vì số chân mỗi con chó gấp 2 lần số chân mỗi con gà nên 84 chính là 3 lần số chân gà (sau này)

Vậy số chân gà sau này là: $84 : 3 = 28$ (chân)

Số gà sau này là: $28 : 2 = 14$ (con)

Số gà lúc đầu là: $14 + 8 = 22$ (con)

Số chó là: $22 - 8 = 14$ (con)

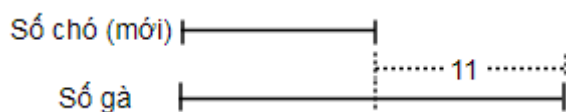
*** Giả thiết tạm ở đây là:** bớt đi 8 con gà để nhận xét tỉ số giữa số chân chó và số chân gà.

Bài tập 35: (Tính số gà, số chó biết hiệu số con và hiệu số chân) Số chân chó nhiều hơn số chân gà là 12, số gà lớn hơn số chó là 8 con. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

Hướng dẫn giải

Nếu bớt đi 3 con chó thì số chân chó sẽ bằng số chân gà, suy ra số gà sẽ gấp đôi số chó. Lúc này, số gà nhiều hơn số chó là: $8 + 3 = 11$ (con)

Ta có sơ đồ:



Vậy số chó mới là 11 con. Suy ra, số chó lúc đầu là $11 + 3 = 14$ (con)

Số gà là: $14 + 8 = 22$ (con)

*** Giả thiết tạm ở đây là:** bớt đi 12 chân chó (tức là bớt 3 con chó) để nhận xét tỉ số giữa số chó và số gà

Bài tập 36: Một đội bóng thi đấu tất cả 25 trận chỉ thắng hoặc hoà. Biết mỗi trận thắng đội được 3 điểm, mỗi trận hoà được 1 điểm. Tổng số điểm đội đạt được là 59 điểm. Tính số trận thắng và trận hoà của đội bóng đó.

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm ở đây là: Giả sử tất cả các trận đấu đều hoà, khi đó số điểm đạt được là 25 điểm. Do tổng số điểm đội đạt được là 59 điểm thừa 34 điểm so với giả sử là do đội còn có các trận thắng và mỗi trận thắng nhiều hơn các trận hoà là 2 điểm.

Vậy số các trận thắng của đội là $34 : 2 = 17$ trận

Số trận hoà là: $25 - 17 = 8$ trận

Vậy đội thắng 17 trận, hoà 8 trận

Bài tập 37: Ba ô tô chở tổng cộng 50 chuyển, gồm 118 tấn hàng. Mỗi chuyển, xe thứ nhất chở 2 tấn, xe thứ hai chở 2,5 tấn, xe thứ ba chở 3 tấn. Hỏi mỗi xe chở bao nhiêu chuyển biết rằng số chuyển xe thứ nhất gấp rưỡi số chuyển xe thứ hai?

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm ở đây là: Giả thiết rằng tất cả 50 chuyển đều do xe thứ ba chở thì khối lượng hàng chở được là: $3.50 = 150$ (tấn).

Dôi ra: $150 - 118 = 32$ (tấn)

Để không dôi ra, phải thay một số chuyển của xe thứ ba bằng các chuyển của hai xe kia theo quy luật sau: cứ 5 chuyển của xe thứ ba thay bởi 2 chuyển của xe thứ nhất và 2 chuyển của xe thứ hai. Mỗi lần thay bởi như vậy thì số chuyển không thay đổi, số chuyển của xe thứ nhất luôn gấp rưỡi số chuyển của xe thứ hai, còn khối lượng hàng giảm đi:

$$3.5 - (2.3 + 2.5.2) = 15 - 11 - 4 \text{ (tấn)}$$

Số lần thay: $32 : 4 = 8$ (lần)

Xe thứ nhất chở: $3.8 = 24$ (chuyển)

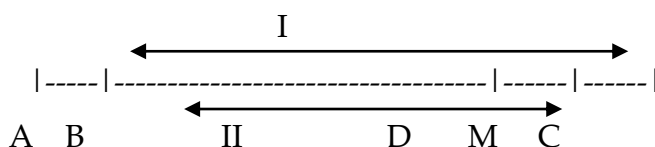
Xe thứ hai chở: $2.8 = 16$ (chuyển)

Xe thứ ba chở: $50 - (24 + 16) = 10$ (chuyển)

Bài tập 38. Trên quãng đường AC dài 200km có một điểm B cách A là 10km. Lúc 7 giờ, một ô tô đi từ A, một ô tô khác đi từ B, cả hai cùng đi tới C với vận tốc thứ tự bằng 50km/h và 40km/h. Hỏi lúc mấy giờ thì khoảng cách đến C của xe thứ hai gấp đôi khoảng cách đến C của xe thứ nhất?

Hướng dẫn giải

Quãng đường đi của hai ô tô được minh hoạ như sau:



Lúc xe thứ hai đến D là thời điểm phải tìm. ($DM = DC$).

Giả thiết tạm ở đây là: Giả thiết rằng có một xe thứ ba phải đi quan quãng đường EC dài gấp đôi quãng đường AC của xe thứ nhất phải đi ($EC = 200.2 = 400$ km).

Với vận tốc gấp đôi vận tốc của xe thứ nhất (như vậy vận tốc xe thứ ba bằng: $50.2 = 100$ km/h) thì cũng trong thời gian như xe thứ nhất, quãng đường còn lại đến C của

xe thứ nhất và như vậy xe thứ ba này xe gặp xe thứ hai tại D . (Minh hoạ bằng hình dưới đây).

Quãng đường ED dài hơn quãng đường BD :

$$400 - 190 = 210 \text{ (km)}$$

Vận tốc xe thứ ba lớn hơn vận tốc xe thứ hai:

$$100 - 40 = 60 \text{ (km/h)}$$

Thời gian để xe thứ ba gặp xe thứ hai tại D :

$$210 : 60 = 3,5 \text{ (h)}$$

Vậy thời điểm phải tìm là: $7 + 3,5 = 10\text{h}30\text{ph}$.

Bài tập 39. Người ta bơm nước vào một bể: dùng máy I trong 30 phút, dùng máy II trong 20 phút. Tính xem trong mỗi phút mỗi máy bơm được bao nhiêu lít nước, biết rằng mỗi phút máy II bơm được nhiều hơn máy I là 50 lít và tổng cộng hai máy bơm được 21000 lít nước?

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm ở đây là: Giả sử trong mỗi phút, máy II bơm số nước bằng máy I thì trong 50 phút cả hai máy bơm được:

$$21000 - 50.20 = 20000 \text{ (lít)}$$

Trong mỗi phút, máy I bơm được:

$$20000 : 5 = 400 \text{ (lít)}$$

Trong mỗi phút, máy II bơm được:

$$400 + 50 = 450 \text{ (lít)}$$

Bài tập 40. Khối 6 của một trường có 366 học sinh, gồm 8 lớp. Mỗi lớp gồm một số tổ, mỗi tổ có 9 người hoặc 10 người. Biết rằng số tổ của các lớp đều bằng nhau, tính số tổ có 9 người, số tổ có 10 người cả khối?

Hướng dẫn giải

Mỗi lớp gồm một số tổ mỗi tổ 9 người hoặc 10 người. Trước hết ta nhận thấy:

$$366 : 10 = 36 \text{ còn dư}$$

$$366 : 9 = 40 \text{ còn dư}$$

Do đó số tổ của các lớp nằm trong khoảng từ 37 đến 40

Mặt khác số tổ chia hết cho 8 $\Rightarrow$ Số tổ của khối lớp 6 đó là 40 tổ

Giả thiết tạm ở đây là: Giả sử cả 40 tổ đều là tổ 10 người.

Khi đó số HS của khối là: $40.10 = 400$ (HS)

So với bài ta thừa ra $400 - 366 = 34$ (HS) là do còn có tổ 9 người.

Nếu thay mỗi tổ 10 người bằng một tổ 9 người thì mỗi lần thay bớt được: $10 - 9 = 1$

Vậy số tổ có 9 người là $34 : 1 = 34$ (tổ)

Số tổ có 10 người là: $40 - 34 = 6$ (tổ)

Bài tập 41. Một câu lạc bộ có 22 chiếc ghế gồm ba loại: ghế ba chân, ghế bốn chân, ghế sáu chân. Tính số ghế mỗi loại, biết rằng tổng số chân ghế bằng 100 và số ghế sáu chân gấp đôi số ghế ba chân?

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm ở đây là: Giả sử 22 chiếc ghế đều là 4 chân.

Khi đó số chân ghế là: $4.22 = 88$ (chân)

So với bài ra bị hụt mất $100 - 88 = 12$ (chân) $\Rightarrow$ là do còn có ghế 3 chân, 6 chân. Để không bị hụt đi ta thay các ghế 4 chân bằng hai loại ghế kia theo quy luật: một ghế 3 chân, 2 ghế 6 chân cho 3 ghế 4 chân, khi đó số ghế không thay đổi, quan hệ giữa ghế 3 chân và ghế 6 chân được đảm bảo.

Mỗi lần thay, số chân ghế tăng thêm: $2.6 + 1.3 - 3.4 = 3$ (chân)

Vậy số lần thay là: $12 : 3 = 4$ (lần)

Số ghế 3 chân là: $4.1 = 4$ (ghế)

Số ghế 6 chân là: $4.2 = 8$ (ghế)

Số ghế 4 chân là: $22 - (4 + 8) = 10$ (ghế)

Bài tập 42: Một số học sinh xếp hàng 12 thì thừa 5 học sinh, còn xếp hàng 15 cũng thừa 5 học sinh và ít hơn trước là 4 hàng. Tính số học sinh?

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm rằng số HS đó khi xếp hàng 15 thì cũng được số hàng như khi xếp hàng 12, nghĩa là ta phải có thêm 4 hàng nữa. Khi đó có thêm:

$$15.4 = 60 \text{ (HS)}$$

Tổng hai trường hợp số HS ở mỗi hàng chênh lệch như nhau:

$$15 - 12 = 3 \text{ (HS)}$$

Số hàng khi xếp hàng 12 là: $60 : 3 = 20$ (hàng)

Số HS là: $20.12 + 5 = 245$ (HS)

Bài tập 43: An vào cửa hàng mua 12 vở và 4 bút chì hết 36000 đồng. Bích mua 8 vở và 5 bút chì cùng loại hết 27500 đồng. Tính giá trị một quyển vở, giá trị một bút chì.

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm: Giả sử An mua gấp đôi số hàng đã mua là 24 quyển vở và 8 bút chì hết

$$36000.2 = 72000 \text{ đồng}$$

Bích mua gấp ba số hàng đã mua là 24 quyển vở và 15 bút chì hết

$$27500.3 = 82500 \text{ đồng}$$

Như vậy Bích mua nhiều hơn An: $15 - 8 = 7$ (bút chì)

Số tiền chênh lệch là: $82500 - 72000 = 10500$ đồng

Vậy giá tiền một bút chì là: $10500 : 7 = 1500$ đồng

Giá tiền một quyển vở là: $(36000 - 4.1500) : 12 = 2500$ đồng.

Bài tập 44: Một tổ may phải may 1800 chiếc cả quần và áo trong 13 giờ. Trong 8 giờ đầu tổ may áo và trong thời gian còn lại tổ may quần. Biết rằng trong 1 giờ, tổ may được số áo nhiều hơn số quần là 30 chiếc. Tính số áo và số quần tổ đã may.

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm: Giả sử trong thời gian còn lại tổ vẫn may áo. Khi đó số áo may thêm được là:

$$(13 - 8).30 = 150 \text{ (chiếc)}$$

Số áo tổ đó may được trong 13 giờ là: $1800 + 150 = 1950$ (chiếc)

Số áo tổ đó may được là: $(1950 : 13).8 = 1200$ (chiếc)

Số quần tổ đó may được là: $1800 - 1200 = 600$ (chiếc)

Bài tập 45: Một lớp học có 6 tổ, số người của mỗi tổ bằng nhau. Trong một bài kiểm tra, tất cả học sinh đều được điểm 7 hoặc 8. Tổng số điểm của cả lớp là 350. Hãy tính số học sinh của lớp, số học sinh đạt từng loại điểm?

Hướng dẫn giải

Trước hết tính số học sinh của lớp ta thấy:

350 chia cho 8, được 43, còn dư;

$$350 : 7 = 50$$

Do đó số học sinh từ 44 đến 50. Do số học sinh chia hết cho 6 nên số học sinh là 48 người.

Giải tiếp bài toán bằng phương pháp tạm, ta tìm được: 4 học sinh được điểm 8; 34 học sinh được điểm 7.

Bài tập 46: Một đội bóng thi đấu 25 trận, chỉ có thắng và hoà, mỗi trận thắng được 3 điểm, mỗi trận hoà được 1 điểm, kết quả đội đó được 59 điểm. Tính số trận thắng, số trận hoà của đội bóng.

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm: Giả sử cả 25 trận đều thắng.

Khi đó số điểm đội đó có được là: $25.3 = 75$ (điểm)

So với bài ra thừa ra $75 - 59 = 16$ (điểm) $\Rightarrow$ là do còn có trận hoà

Chênh lệch điểm số của trận thắng và trận hoà là: $3 - 1 = 2$

Như vậy nếu thay mỗi trận thắng bằng một trận hoà thì mỗi lần thay giảm được 2 điểm $\Rightarrow$ Số trận hoà là $16 : 2 = 8$ (trận)

Số trận thắng là: $25 - 8 = 17$ (trận)

Bài tập 47: Có 25 gói đường gồm ba loại: gói 5 lạng, gói 2 lạng, gói 1 lạng, có tổng khối lượng tổng cộng là 56 lạng. Biết số gói 1 lạng gấp đôi số gói 5 lạng. Tính số gói mỗi loại.

Hướng dẫn giải

Giả thiết tạm: Giả sử cả 25 gói đường là gói 2 lạng.

Khi đó khối lượng tổng cộng là: $25 \cdot 2 = 50$ (lạng)

So với bài hụt đi: $56 - 50 = 6$ (lạng)

Để không bị hụt đi ta thay các gói 2 lạng bằng các gói 5 lạng và gói 1 lạng theo quy luật 1 gói 5 lạng, 2 gói 1 lạng cho 3 gói 2 lạng khi đó số gói không thay đổi, quan hệ giữa gói 5 lạng và gói 1 lạng được đảm bảo. Mỗi lần thay tăng thêm được:

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1 \text{ (lạng)}$$

Số lần thay: $6 : 1 = 6$ (lần)

Vậy số gói đường 5 lạng là: $6 \cdot 1 = 6$ (gói)

Số gói đường 1 lạng là $6 \cdot 2 = 12$ (gói)

Số gói đường 2 lạng là $25 - (6 + 12) = 7$ (gói).

Bài tập 48: Một hộp có thể chứa được vừa vặn 25 gói bánh hoặc 30 gói kẹo. Người ta xếp 28 gói cả bánh và kẹo thì vừa đầy hộp đó. Biết rằng giá tiền bánh và kẹo đều bằng nhau và bằng 36000 đồng. Tính giá một gói bánh, một gói kẹo.

Hướng dẫn giải

Một hộp có thể chứa được vừa vặn 25 gói bánh hoặc 30 gói kẹo

$\Rightarrow$ Thể tích của 25 gói bánh bằng thể tích của 30 gói kẹo

$\Leftrightarrow$ thể tích của 5 gói bánh = thể tích của 6 gói kẹo

Giả thiết tạm: Giả sử trong hộp đựng cả 30 gói kẹo. So với bài ra thì thừa:

$$30 - 28 = 2 \text{ (gói)}$$

Để kẹo không bị thừa ra ta thay các gói kẹo bằng các gói bánh theo quy luật 6 gói kẹo bằng 5 gói bánh. Mỗi lần thay như thế tổng thể tích không thay đổi, số gói bớt đi: $6 - 5 = 1$ (gói).

Số lần thay: $2 : 1 = 2$ (lần)

Vậy số gói bánh trong hộp là: $2 \cdot 5 = 10$ (gói)

Số gói kẹo trong hộp là: $36000 : 10 = 3600$ (đồng)

Giá tiền một gói kẹo là: $36000 : 18 = 2000$ (đồng)

Trong 1 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{15}$ công việc

Trong 1 ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{18}$ công việc

Trong 3 ngày cả hai người làm được $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{18}\right) \cdot 3 = \frac{11}{30}$ công việc

Trong 3 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{15} \cdot 3 = \frac{1}{5}$ công việc

Trong 4 ngày thì người thứ nhất và người thứ ba làm được số phần công việc là:

$$1 - \left(\frac{11}{30} + \frac{1}{5} \right) = \frac{13}{30} \text{ công việc}$$

Trong 4 ngày thì người thứ ba làm được $\frac{13}{30} - 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ công việc

Trong 1 ngày thì người thứ ba làm được $\frac{1}{6} : 4 = \frac{1}{24}$ công việc

Vậy người thứ ba làm một mình thì hoàn thành công việc nên trong thời gian là:

$$1 : \frac{1}{24} = 24 \text{ (ngày)}.$$

Bài tập 49: Ba máy cày cùng cày một cánh đồng. Lúc đầu chỉ có hai máy thứ nhất và thứ hai cày trong 3 giờ, sau đó máy thứ hai nghỉ, máy thứ ba vào làm thay với năng suất gấp đôi máy thứ hai và trong 5 giờ thì hai máy này cày xong cánh đồng. Hỏi mỗi máy cày một mình xong cánh đồng đó trong bao lâu, biết rằng nếu máy thứ nhất và máy thứ hai cùng làm thì sau 12 giờ xong công việc?

Hướng dẫn giải

Một giờ máy thứ nhất và máy thứ hai là được $\frac{1}{12}$ công việc

Vậy 3 giờ máy thứ nhất và máy thứ hai là được $3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ công việc

Trong 5 giờ máy thứ nhất và máy thứ ba cày được: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ công việc

Một giờ máy thứ nhất và máy thứ ba cày được: $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$ công việc

Gọi một giờ máy thứ nhất làm được x công việc

$\Rightarrow$ Một giờ máy thứ hai làm được $\frac{1}{12} - x$ công việc

$\Rightarrow$ Một giờ máy thứ ba làm được: $\frac{3}{20} - x$ công việc

Do năng suất của máy thứ ba gấp đôi năng suất của máy thứ hai nên ta có:

$$\frac{3}{20} - x = 2 \cdot \left(\frac{1}{12} - x \right) \Rightarrow x = \frac{1}{60}$$

Vậy máy thứ nhất cày một mình mất: $1 : \frac{1}{60} = 60$ giờ

Máy thứ hai cày một mình mất: $1 : \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{60} \right) = 15$ giờ

Máy thứ ba cày một mình mất: $1 : \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{60} \right) = 7,5$ giờ

III/ PHƯƠNG PHÁP LỰA CHỌN

Một số bài toán về số tự nhiên có thể giải bằng cách căn cứ vào các dữ kiện của bài toán để tìm ra một số giá trị thoả mãn điều kiện sau đó thử xem trường hợp nào thoả mãn đâu bài của bài toán và lựa chọn các kết quả đúng

Bài tập 50: Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thì tỉ lệ với 1: 2 : 3

Hướng dẫn giải

Vì các số tỉ lệ với 1 : 2 : 3 chỉ có thể là 1, 2, 3 hoặc 2, 4, 6 hoặc 3, 6, 9 nên số phải tìm có các là số lập nên từ một trong ba bộ các chữ số trên

Nhưng số phải tìm chia hết cho 18 nghĩa là chia hết cho 9 nên tổng các chữ số của nó phải chia hết cho 9. Như vậy chỉ có bộ ba chữ số 3, 6, 9 thoả mãn điều kiện đó.

Mặt khác số đó chia hết cho 18 nên phải chia hết cho 2 suy ra nó có chữ số tận cùng là số chẵn.

Vậy số phải tìm là **396** hoặc **936** thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Nhận xét: Ta có thể xét điều kiện số có ba chữ số chia hết cho 18 trước. Tuy nhiên khi đó phải thử chọn nhiều kết quả hơn. Vì vậy cần lưu ý khi sử dụng phương pháp này là kiểm tra các điều kiện loại được nhiều các giá trị không thoả mãn trước để vùng lựa chọn được thu hẹp lại giúp ta tìm đáp án bài toán nhanh hơn

Một số bài tập bổ sung:

Bài tập 52: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết nếu chia số đó cho tích các chữ số của nó thì được $\frac{8}{3}$ và hiệu giữa số phải tìm với số gồm các chữ số của số đó viết theo thứ tự ngược lại là 18.

Bài tập 53: Có ba tờ bìa ghi các số 23, 79 và $\overline{ab}$. Xếp ba tờ bìa đó lại thành thì được một số có 6 chữ số. Cộng tất cả các số có 6 chữ số đó lại (đổi chỗ các tờ bìa ta lại được số có 6 chữ số khác) thì được kết quả là 2 989 896. Tìm số $\overline{ab}$

Bài tập 54: Trên một tấm bia có các vòng tròn tính điểm là 18, 23, 28, 33, 38. Muốn trúng thưởng thì phải bắn một số phát để đạt đúng 100 điểm. Hỏi phải bắn bao nhiêu phát và vào những vòng nào để trúng thưởng.

IV/ PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGƯỢC TỪ CUỐI

Ở Phương pháp này, ta gọi đại lượng cần tìm là một ẩn x , từ đó thiết lập mối quan hệ giữa x với các đại lượng đã biết trong bài.

Bài tập 55: Một nông dân ra chợ bán hết số cam của mình cho năm người: Người thứ nhất mua $\frac{1}{2}$ số cam rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ hai mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ ba mua $\frac{1}{2}$ số quả còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ tư mua $1\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua $\frac{1}{2}$ quả, người thứ năm mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả thì vừa hết.

Tính số cam người nông dân đem đi bán và số cam những người khác đã mua.

Hướng dẫn giải

Gọi số cam ban đầu là x

Người thứ nhất mua $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ vậy còn lại $x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

Người thứ hai mua $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

Vậy còn lại: $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$

Người thứ ba mua: $\frac{x}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$ vậy còn lại $\frac{x}{8} - \frac{7}{8}$

Người thứ tư mua: $\frac{x}{16} - \frac{7}{16} + \frac{1}{2} = \frac{x}{16} + \frac{1}{16}$ vậy còn lại $\frac{x}{16} - \frac{15}{16}$

Người thứ năm mua: $\frac{x}{32} - \frac{15}{32} + \frac{1}{2} = \frac{x}{32} + \frac{1}{32}$ vậy còn lại $\frac{x}{32} + \frac{31}{32} = 0$

Vậy $x = 31 \Rightarrow$ ban đầu có 31 quả cam đem đi bán

Người 1 mua: $31 - 15 = 16$ quả

Người 2 mua: $15 - 7 = 8$ quả

Người 3 mua: $7 - 3 = 4$ quả

Người 4 mua: $3 - 1 = 2$ quả

Bài tập 56: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng tổng sáu số tự nhiên có hai chữ số lập bởi hai trong ba chữ số ấy gấp đôi số phải tìm.

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là: $\overline{abc}$ ($1 \leq a, b, c \leq 9$)

Theo bài ra ta có: $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ac} + \overline{cb} + \overline{ba} = 2\overline{abc}$

$$10a + b + 10b + c + 10c + a + 10a + c + 10c + b + 10b + a = 2(100a + 10b + c)$$

$$\Rightarrow 22a + 22b + 22c = 200a + 20b + 2c$$

$$\Rightarrow 178a = 2b + 20c$$

$$\text{Ta có: } 178a = 2b + 20c \leq 2.9 + 20.9 = 198 \text{ và } 178a \geq 178.1 = 178 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow 2b + 20c = 178$$

$$\Rightarrow b + 10c = 89$$

Ta tìm được duy nhất cặp số: $b = 9; c = 8$ thoả mãn.

Vậy số cần tìm là: 198.

Bài tập 57: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu chia số ấy cho tích các chữ số của nó thì được $\frac{8}{3}$ và hiệu giữa số phải tìm với số gồm các chữ số của số ấy viết theo thứ tự ngược lại bằng 18.

Hướng dẫn giải

Gọi chữ số cần tìm là: $\overline{ab}$ ($a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$, ta được $a - b = 2$, các số thoả mãn điều kiện này là:
20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97

$$\text{Do } \overline{ab} = \frac{8}{3}ab \Rightarrow 3\overline{ab} : 8$$

Trong các số trên chỉ có 64 chia hết cho 8.

$$\text{Thử lại: } 64 - 16 = 18, 64 : (6, 4) = \frac{8}{3}.$$

Bài tập 58: Tìm số tự nhiên x , biết rằng tổng các chữ số của x bằng y , tổng các chữ số của y bằng z và $x + y + z = 60$.

Bài giải

Từ đầu bài ta có x là số có 2 chữ số. Đặt $x = \overline{ab}$

$$x = 10a + b \Rightarrow y = a + b, z \text{ có 2 trường hợp:}$$

* Nếu $y = a + b \leq 9 \Rightarrow z = a + b$ ta có:

$$(10a + b) + (a + b) + (a + b) = 60 \Rightarrow 4a + b = 20$$

$$b : 4 \Rightarrow b = 0; 4; 8 \Rightarrow a = 5, 4, 3 \text{ loại } a = 3, b = 8 \text{ (do } a + b > 9)$$

* Nếu $y = a + b \Rightarrow z = a + b - 9$

$$\text{Ta có: } (10a + b) + (a + b) + (a + b - 9) = 60$$

$$\Rightarrow 4a + b = 23 \Rightarrow a = 4, b = 7$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 44, 47, 50.$$

Kết luận: có 3 số 44, 47, 50 đều thoả mãn đề bài.

Bài tập 59: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng tổng các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy bằng 1554.

Bài giải

Gọi ba số phải tìm là a, b, c .

Theo bài ra ta có: $a \neq b \neq c \neq 0$ và

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{cba} = 1554$$

$$\Rightarrow 222a + 222b + 222c = 1554$$

$$\Rightarrow a + b + c = 7;$$

Vì $a \neq b \neq c \neq 0$. Không làm mất tính tổng quát giả sử $a > b > c$ ta có
 $c = 1; b = 2; a = 4$

Vậy ba chữ số khác nhau đó là 1; 2; 4.

V/ BÀI TOÁN CHUNG RIÊNG.

Để giải bài toán ta thường xuất phát từ phần công việc ứng với 1 đơn vị thời gian rồi từ đó suy ra phần công việc trong các thời gian tiếp theo.

Bài tập 60 : Cùng một công việc nếu mỗi người làm riêng thì 3 người A, B, C hoàn thành công việc trong thời gian lần lượt là 6 giờ, 8 giờ, 12 giờ. Hai người B và C làm chung trong 2 giờ sau đó người C chuyển đi làm việc khác, người A cùng làm với người B tiếp tục công việc cho đến khi hoàn thành. Hỏi người A làm trong mấy giờ?

Hướng dẫn giải

Trong 1 giờ mỗi người A, B, C lần lượt làm được $\frac{1}{6}(CV)$, $\frac{1}{8}(CV)$, $\frac{1}{12}(CV)$, B và C làm được $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}(CV)$

2 giờ B và C làm được $\frac{5}{24} \cdot 2 = \frac{5}{12}(CV)$

A và B làm được $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}(CV)$

1 giờ A và B cùng làm được: $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}(CV)$

Thời gian A cùng làm với B là: $\frac{7}{12} : \frac{7}{24} = 2$ giờ.

Bài tập 61: Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn, nếu dùng cả máy một và máy hai thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng máy hai và máy ba thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy còn nếu dùng máy một và máy ba thì bể sẽ đầy sau 2 giờ 24 phút. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy sau bao lâu?

Hướng dẫn giải

Một giờ máy một và hai bơm được $\frac{3}{4}$ bể, máy hai và ba bơm $\frac{2}{3}$ bể, máy một và ba bơm $\frac{5}{12}$ bể.

$\Rightarrow$ một giờ cả ba máy bơm $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12}\right) : 2 = \frac{11}{12}$ bể.

Máy ba bơm một mình 6 giờ sẽ đầy bể

Máy một bơm một mình 4 giờ sẽ đầy bể

Máy hai bơm một mình 2 giờ sẽ đầy bể

Bài tập 62: Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước trong 12 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ, vòi thứ 2 chảy trong 6 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì phải mất bao nhiêu lâu mới đầy bể.

Hướng dẫn giải

Coi dung tích của bể là 1 đơn vị

Trong 4 giờ hai vòi chảy được $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ bể

Trong 2 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ bể

Thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể hết

$$2 : \frac{1}{15} = 30 \text{ giờ}$$

Một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{1}{20}$ bể

Thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể hết

$$1 : \frac{1}{20} = 20 \text{ giờ}$$

CHUYÊN ĐỀ 17 & 18: ĐIỂM – ĐƯỜNG THẲNG – ĐOẠN THẲNG – TAM GIÁC

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

I. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1/ Vị trí của điểm và đường thẳng

- Điểm A thuộc đường thẳng a , kí hiệu $A \in a$
- Điểm B không thuộc đường thẳng a , kí hiệu $B \notin a$

2/ Ba điểm thẳng hàng khi chúng cùng thuộc một đường thẳng, ba điểm không thẳng hàng khi chúng không cùng thuộc bất kì đường thẳng nào.

3/ Trong ba điểm thẳng hàng có một điểm và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.

4/ Nếu có một điểm nằm giữa hai điểm khác thì ba điểm đó thẳng hàng.

5/ Quan hệ ba điểm thẳng hàng còn được mở rộng thành nhiều (4,5,6,...) điểm thẳng hàng.

II. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA HAI ĐIỂM

1/ Có một đường thẳng và chỉ có 1 đường thẳng đi qua hai điểm A và B

2/ Có ba cách đặt tên đường thẳng:

- Dùng một chữ cái in thường: ví dụ a
- Dùng hai chữ cái in thường: ví dụ xy
- Dùng hai chữ cái in hoa: ví dụ AB

3/ Ba vị trí có hai đường thẳng phân biệt:

- Hoặc không có điểm chung nào (gọi là hai đường thẳng song song)
- Hoặc chỉ có một điểm chung (gọi là đường thẳng cắt nhau)

4/ Muốn chứng minh hai hay nhiều đường thẳng trùng nhau ta chỉ cần chứng tỏ chúng có hai điểm chung.

5/ Ba (hay nhiều) đường thẳng cùng đi qua một điểm gọi là ba (hay nhiều) đường thẳng đồng quy. Muốn chứng minh nhiều đường thẳng đồng quy ta có thể xác định giao điểm của đường thẳng nào đó rồi chứng minh các đường thẳng còn lại đều đi qua giao điểm này.

III. TIA

1/ Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O .

2/ Hai tia chung gốc tạo thành đường thẳng được gọi là hai tia đối nhau

3/ Quan hệ giữa một điểm nằm giữa hai điểm với hai tia đối nhau, hai tia trùng nhau:

Xét 3 điểm A, O, B thẳng hàng.

- Nếu OA và OB đối nhau thì gốc O nằm giữa A và B
- Ngược lại nếu O nằm giữa A và B thì:

+ Hai tia OA, OB đối nhau

+ Hai tia AO, AB trùng nhau; hai tia BO, BA trùng nhau.

IV. ĐOẠN THẲNG, ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, CỘNG ĐỘ DÀI HAI ĐOẠN THẲNG

1/ Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A , điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B

2/ Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đoạn thẳng là một số dương.

3/ $AB = CD \Leftrightarrow AB$ và CD có cùng độ dài

$AB < CD \Leftrightarrow AB$ ngắn hơn CD

$AB > CD \Leftrightarrow AB$ dài hơn CD .

4/ Điểm nằm giữa hai điểm:

Nếu điểm M nằm giữa điểm A và điểm B thì $AM + MB = AB$

Ngược lại, nếu $AM + MB = AB$ thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B .

Nếu $AM + MB \neq AB$ thì điểm M không nằm giữa A và B .

Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B ; điểm N nằm giữa hai điểm M và B thì $AM + MN + NB = AB$

V. VẼ ĐOẠN THẲNG CHO BIẾT ĐỘ DÀI

1/ Trên tia Ox bao giờ cũng vẽ được 1 và chỉ một điểm M sao cho $OM = a$ (đơn vị dài).

2/ Trên tia Ox , $OM = a, ON = b$, nếu $0 < a < b$ hay $OM < ON$ thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N

3/ Trên tia Ox có 3 điểm M, N, P ; $OM = a; ON = b; OP = c$; nếu $0 < a < b < c$ hay $OM < ON < OP$ điểm N nằm giữa hai điểm M và P .

VI. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG

1/ Trung điểm của đoạn thẳng là điểm nằm giữa hai đầu đoạn thẳng và cách đều hai đầu đoạn thẳng đó.

2/ Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $MA = MB = \frac{AB}{2}$

3/ Nếu M nằm giữa hai đầu đoạn thẳng AB và $MA = \frac{AB}{2}$ thì M là trung điểm của AB

4/ Mỗi đoạn thẳng có 1 trung điểm duy nhất.

VII. TAM GIÁC

1. Định nghĩa

Tam giác ABC là hình gồm ba đoạn thẳng AB, BC, AC khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Kí hiệu là $\triangle ABC$.

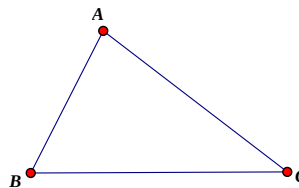
2. Các yếu tố trong tam giác

Tam giác ABC có:

+ Ba đỉnh là: A, B, C .

+ Ba cạnh là: AB, BC, AC .

+ Ba góc là ABC, BAC, ACB .



3/ Để vẽ một tam giác ABC có độ dài 3 cạnh cho trước, ta làm như sau:

Bước 1. Vẽ một đoạn thẳng AB có độ dài bằng một cạnh cho trước;

Bước 2. Vẽ đỉnh C (thứ ba) là giao điểm của hai cung tròn có tâm lần lượt là hai đỉnh A và B đã vẽ và bán kính lần lượt bằng độ dài hai cạnh còn lại.

B/ CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP TRONG KÌ THI HSG.

DẠNG 1: BÀI TOÁN TRỒNG CÂY THẲNG HÀNG.

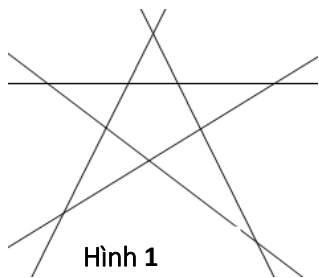
- Các cây thẳng hàng là các cây cùng nằm trên một đường thẳng.

- Giao điểm của hai hay nhiều đường thẳng là vị trí của 1 cây thỏa mãn bài toán.

Bài tập 1. Có 10 cây, hãy trồng thành 5 hàng sao cho mỗi hàng có 4 cây.

Hướng dẫn giải

Theo hình 1 (mỗi điểm trên hình vẽ là một cây).

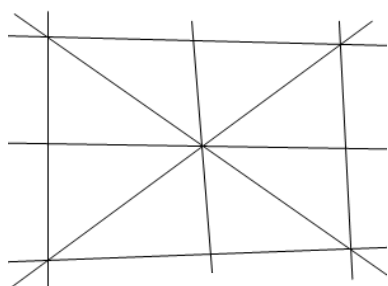


Hình 1

Bài tập 2. Có 9 cây, hãy trồng thành 8 hàng sao cho mỗi hàng có 3 cây.

Hướng dẫn giải

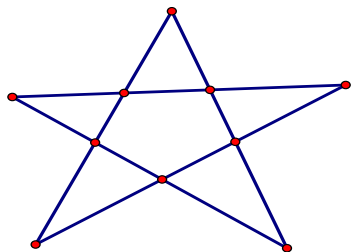
Theo hình 2 (mỗi điểm trên hình vẽ là một cây).



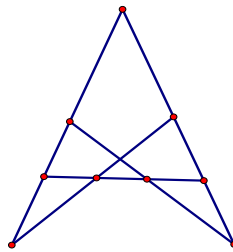
Hình 2

Bài tập 3. Hãy vẽ sơ đồ trồng 10 cây thành 5 hàng, mỗi hàng 4 cây (Giải bằng 4 cách)

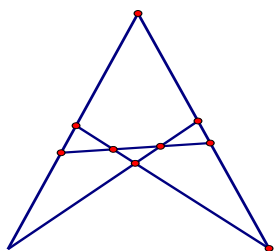
Hướng dẫn giải



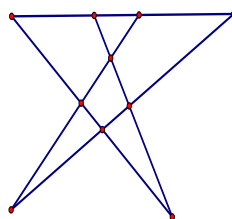
Cách 1



Cách 2



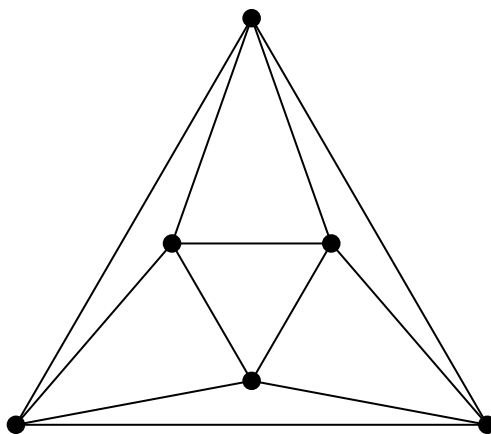
Cách 3



Cách 4

Bài tập 3. Có 6 cây cột, có 12 chiếc võng. Hãy vẽ sơ đồ dựng 6 cây cột để căng được 12 chiếc võng mà các võng không chồng chéo nhau.

Hướng dẫn giải



DẠNG 2: ĐẾM SỐ ĐOẠN THẲNG (ĐƯỜNG THẲNG) TẠO THÀNH TỪ CÁC ĐIỂM CHO TRƯỚC

Cho biết có n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$).

Kẻ từ một điểm bất kỳ với $n-1$ điểm còn lại được $n-1$ đoạn thẳng (đường thẳng)

Làm như vậy với n điểm nên có $n(n-1)$ đoạn thẳng (đường thẳng). Nhưng mỗi đoạn thẳng (đường thẳng) được tính 2 lần

Do vậy số đoạn thẳng (đường thẳng) vẽ được là $n(n-1):2$ đoạn thẳng (đường thẳng)

Bài tập 1. Lấy năm điểm M, N, P, Q, R, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Kẻ các đường thẳng đi qua các cặp điểm đó. Có bao nhiêu đường thẳng tất cả ? Đó là những đường thẳng nào?

Hướng dẫn giải

Kẻ từ một điểm bất kỳ với 4 điểm còn lại được 4 (đường thẳng)

Làm như vậy với 5 điểm nên có $4 \cdot 5 = 20$ (đường thẳng). Nhưng mỗi đoạn thẳng (đường thẳng) được tính 2 lần

Do vậy số đoạn thẳng (đường thẳng) vẽ được là 10 (đường thẳng).

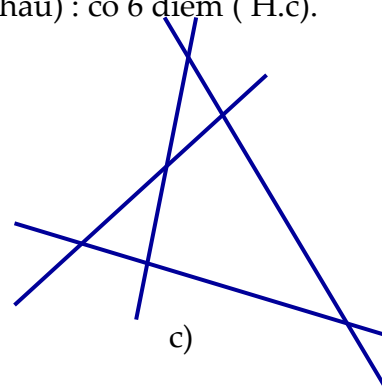
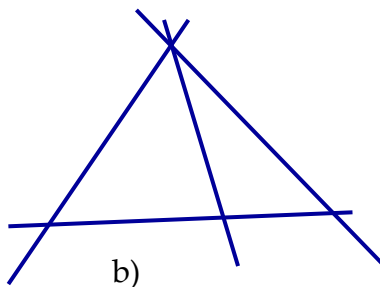
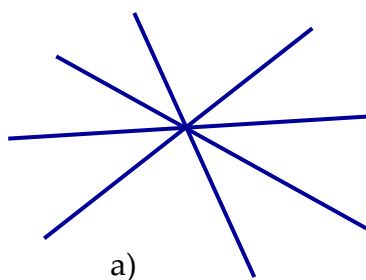
Đó là các đường thẳng: MN; MP; MQ; MR; NP; NQ; NR; PQ; PR; QR.

Bài tập 2. Vẽ bốn đường thẳng đôi một cắt nhau. Số giao điểm (của hai đường thẳng hay nhiều đường thẳng) có thể là bao nhiêu ?

Hướng dẫn giải

Khi vẽ bốn đường thẳng có thể xảy ra các trường hợp sau :

- Bốn đường thẳng đó đồng quy : có một điểm chung (H.a).
- Có ba đường thẳng đồng quy, còn đường thẳng thứ tư cắt ba đường thẳng đó : có 4 điểm (H.b).
- Không có ba đường thẳng nào đồng quy (đôi một cắt nhau) : có 6 điểm (H.c).

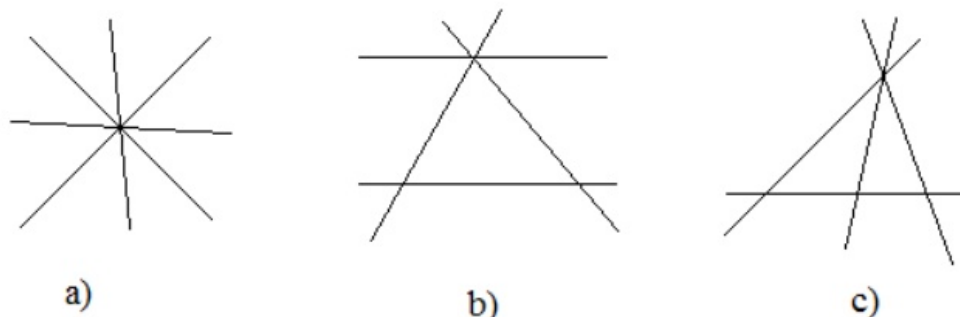


Hình 3

Bài tập 3: Trên mặt phẳng có bốn đường thẳng. Số giao điểm của các đường thẳng có thể bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Bài toán đòi hỏi phải xét đủ các trường hợp:



Hình 4

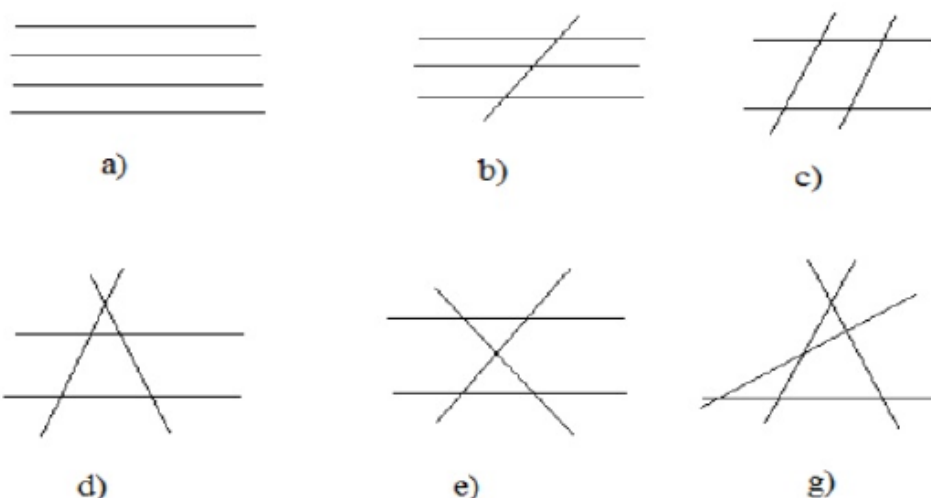
a) Bốn đường thẳng đồng quy: có 1 giao điểm (H4a)

b) Có đúng ba đường thẳng đồng quy:

- Có hai đường thẳng song song: 3 giao điểm (H4b)

- Không có hai đường thẳng nào song song: 4 giao điểm (H4c)

b) Không có ba đường thẳng nào đồng quy



Hình 5

- Bốn đường thẳng song song: 0 giao điểm (H5a)

- Có đúng ba đường thẳng song song: 3 giao điểm (H5b)

- Có hai cặp đường thẳng song song: 4 giao điểm (H5c)

- Có đúng một cặp đường thẳng song song: 5 giao điểm (H5d,e)

- Không có hai đường thẳng nào song song: 6 giao điểm (H5g)

Bài tập 5: Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n ?

Hướng dẫn giải

Cho biết có n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$).

Kẻ từ một điểm bất kỳ với $n-1$ điểm còn lại được $n-1$ đoạn thẳng (đường thẳng)

Làm như vậy với n điểm nên có $n(n-1)$ đoạn thẳng (đường thẳng). Nhưng mỗi đoạn thẳng (đường thẳng) được tính 2 lần

Do vậy số đoạn thẳng (đường thẳng) vẽ được là $n(n-1):2$ đoạn thẳng (đường thẳng)

$$\text{Do đó } \frac{n(n-1)}{2} = 105 \Rightarrow n(n-1) = 210 = 15.14 \Rightarrow n = 15.$$

Bài tập 6: Cho 20 điểm, trong đó có a điểm thẳng hàng. Cứ 2 điểm, ta vẽ một đường thẳng. Tìm a , biết vẽ được tất cả 170 đường thẳng.

Hướng dẫn giải

+) Qua 20 điểm phân biệt mà không có ba điểm nào thẳng hàng, ta vẽ được

$$\frac{20.19}{2} = 190 \text{ (đường thẳng)}$$

+) Qua a điểm thẳng hàng, ta vẽ được 1 đường thẳng. Nếu a điểm này không thẳng hàng thì vẽ được $\frac{a(a-1)}{2}$ (đường thẳng).

Số đường thẳng giảm đi là $\frac{a(a-1)}{2} - 1$ (đường thẳng).

Vậy vẽ được tất cả là

$$190 - \left[\frac{a(a-1)}{2} - 1 \right] = 170 \Rightarrow \frac{a(a-1)}{2} - 1 = 20 \Rightarrow a(a-1) = 42 = 7.6 \Rightarrow a = 7.$$

Vậy số đường thẳng trùng nhau là 7.

Bài tập 7

a) Cho bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 trong đó không có ba điểm thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta kẻ được một đường thẳng. Có bao nhiêu đường thẳng?

b) Cũng hỏi như thế với 5 điểm, 10 điểm?

Hướng dẫn giải

a) Có 4 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng nên số đường thẳng tạo thành được là:

$$\frac{4.(4-1)}{2} = 6 \text{ (đường thẳng)}$$

b) Có 5 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng nên số đường thẳng tạo thành được là:

$$\frac{5.(5-1)}{2} = 10 \text{ (đường thẳng)}$$

Có 10 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng nên số đường thẳng tạo thành được là:

$$\frac{10.(10-1)}{2} = 45 \text{ (đường thẳng)}$$

Bài tập 8.

a) Có 25 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Nếu thay 25 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số đường thẳng là bao nhiêu?

b) Cho 25 điểm trong đó có đúng 8 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

c) Cho m điểm ($m \in \mathbb{N}$) trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Biết rằng tất cả có 120 đường thẳng. Tìm m .

Hướng dẫn giải

a) Kể từ một điểm bất kỳ với các điểm còn lại vẽ được 24 đường thẳng.

Làm như vậy với 25 điểm nên có $24 \cdot 25 = 600$ đường thẳng

Nhưng mỗi đường thẳng đã được tính 2 lần

Do vậy số đường thẳng thực sự có là: $600 : 2 = 300$ đường thẳng

Lập luận tương tự có n điểm thì có: $n(n-1) : 2$ (đường thẳng)

b) Nếu 25 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được 300 đường thẳng (câu a)

Với 8 điểm, không có điểm nào thẳng hàng vẽ được: $8 \cdot 7 : 2 = 28$ đường thẳng

Còn nếu 8 điểm này thẳng hàng thì chỉ vẽ được 1 đường thẳng. Do vậy số đường thẳng bị giảm đi là: $28 - 1 = 27$ (đường thẳng)

Số đường thẳng cần tìm là: $300 - 27 = 273$ đường thẳng

c) Ta có: $m(m-1) : 2 = 120 \Leftrightarrow m(m-1) = 120 \cdot 2$

$\Leftrightarrow m(m-1) = 240 \Leftrightarrow m(m-1) = 16 \cdot 15 \Rightarrow m = 16$

Bài tập 9.

a) Cho 31 đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào cũng đi qua một điểm. Tính số giao điểm có được.

b) Cho m đường thẳng ($m \in \mathbb{N}$) trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào cũng đi qua một điểm. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 190. Tính m

Hướng dẫn giải

a) Mỗi đường thẳng cắt 30 đường thẳng còn lại tạo thành 30 giao điểm. Có 31 đường thẳng nên có $30 \cdot 31 = 930$ giao điểm, nhưng mỗi giao điểm đã được tính hai lần nên chỉ có:

$$930 : 2 = 465 \text{ (giao điểm)}$$

Nếu thay 31 bởi n ($n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) thì số giao điểm có được là:

$$n(n-1) : 2 \text{ (giao điểm)}$$

b) $m(m-1) : 2 = 190 \Leftrightarrow m(m-1) = 380 \Leftrightarrow m(m-1) = 20 \cdot 19$.

Vậy $m = 20$

Bài tập 10. Cho năm điểm A, B, C, D, E phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đoạn thẳng. Hỏi tất cả có bao nhiêu đoạn thẳng?

Hướng dẫn giải

Chọn một điểm. Nối điểm đó với từng điểm trong 4 điểm còn lại, ta vẽ được 4 đoạn thẳng. Làm như vậy 5 lần (vì có 5 điểm) nên ta có $5.4 = 20$ đoạn thẳng.

Nhưng mỗi đoạn thẳng được tính hai lần, do đó tất cả chỉ có $20 : 2 = 10$ đoạn thẳng.

Bài tập 11: Cho 30 điểm phân biệt trong đó có a điểm thẳng hàng, cứ qua 2 điểm ta vẽ được 1 đường thẳng. Tìm a, biết số đường thẳng tạo thành là 421 đường thẳng.

Hướng dẫn giải

- Giả sử trong 30 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng :
- + Chọn một điểm bất kì trong 30 điểm đã cho. Qua điểm đó và từng điểm trong 29 điểm còn lại ta vẽ được 29 đường thẳng.
- + Làm như vậy với 30 điểm thì ta vẽ được tất cả là 29.30 đường thẳng.
- + Nhưng mỗi đường thẳng đã được tính hai lần nên số đường thẳng thực tế vẽ được là $(29.30) : 2 = 435$ đường thẳng.

Vậy qua 30 điểm phân biệt mà không có 3 điểm nào thẳng hàng ta vẽ được 435 đường thẳng.

- Tương tự như trên, giả sử trong a điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng ta vẽ được $a.(a-1) : 2$ đường thẳng.

Nhưng qua a điểm thẳng hàng ta chỉ vẽ được một đường thẳng nên số đường thẳng bị giảm đi là $a.(a-1) : 2 - 1$ đường thẳng.

$$\text{Theo bài ra ta có : } a.(a-1) : 2 - 1 = 435 - 421 = 14$$

$$\Rightarrow a.(a-1) = 30 = 6.5$$

Vì a-1 và a là hai số tự nhiên liên tiếp và $a-1 < a$ nên $a = 6$.

Bài tập 12: Cho 100 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm ta vẽ một đường thẳng. Có tất cả bao nhiêu đường thẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn một điểm. Qua điểm đó và từng điểm trong 99 điểm còn lại, ta vẽ được 99 đường thẳng.

- Làm như vậy với 100 điểm ta được 99.100 đường thẳng
- Nếu như vậy mỗi đường thẳng được tính 2 lần. Nên số đường thẳng là: $99.100 : 2 = 4950$ đường thẳng.

Bài tập 13: Cho 1000 điểm phân biệt, trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng tạo bởi hai trong 1000 điểm đó?

Hướng dẫn giải

Số đường thẳng tạo bởi 1000 điểm phân biệt là: $\frac{1000.999}{2}$ đường thẳng

Số đường thẳng tạo bởi 3 điểm không thẳng hàng là: $\frac{3.2}{2} = 3$ đường thẳng

Theo bài ra vì có 3 điểm thẳng hàng nên số đường thẳng giảm đi là:
 $3 - 1 = 2$ đường thẳng.

Vậy số đường thẳng tạo thành là: $\frac{1000.999}{2} - 2 = 499498$ (đường thẳng)

Bài tập 14: Cho 20 điểm phân biệt trong đó có đúng 7 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi từ 20 điểm đó vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Hướng dẫn giải

Nếu trong 20 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì vẽ được $\frac{20.(20-1)}{2} = 190$.

(Đường thẳng).

Trong 7 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng thì tạo thành

$$\frac{7.(7-1)}{2} = 21 \text{ (Đường thẳng).}$$

Vì 7 điểm thẳng hàng tạo thành 1 đường thẳng nên số đường thẳng giảm $21 - 1 = 20$ (Đường thẳng).

Vậy có $190 - 20 = 170$ (Đường thẳng).

Bài tập 15: Trên tia Ox vẽ các điểm $M_1; M_2; M_3$. Nếu trong mặt phẳng chứa tia Ox vẽ thêm các điểm $M_4; M_5; M_6; \dots; M_{101}; M_{102}$. Trong các điểm $M_1; M_2; M_3; M_4; \dots; M_{101}; M_{102}$ có đúng 3 điểm thẳng hàng và cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Có tất cả bao nhiêu đường thẳng như thế? Tại sao?

Hướng dẫn giải

+) Qua 102 điểm phân biệt mà không có ba điểm nào thẳng hàng, ta vẽ được

$$\frac{102.101}{2} = 5151 \text{ (đường thẳng)}$$

+) Qua 3 điểm thẳng hàng, ta vẽ được 1 đường thẳng. Nếu 3 điểm này không thẳng hàng thì vẽ được $\frac{3.2}{2} = 3$ (đường thẳng).

Số đường thẳng giảm đi là $3 - 1 = 2$ (đường thẳng).

Vậy vẽ được tất cả là $5151 - 2 = 5149$ (đường thẳng).

Bài tập 16: Cho 2019 điểm phân biệt trong đó có đúng 7 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi từ 2019 điểm đó vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Hướng dẫn giải

+) Qua 2019 điểm phân biệt mà không có ba điểm nào thẳng hàng, ta vẽ được

$$\frac{2019.2018}{2} = 2037171 \text{ (đường thẳng)}$$

+) Qua 7 điểm thẳng hàng, ta vẽ được 1 đường thẳng. Nếu 7 điểm này không thẳng hàng thì vẽ được $\frac{7.6}{2} = 21$ (đường thẳng).

Số đường thẳng giảm đi là $21 - 1 = 20$ (đường thẳng).

Vậy vẽ được tất cả là $2037171 - 20 = 2037151$ (đường thẳng).

DẠNG 3: TÍNH SỐ GIAO ĐIỂM CỦA CÁC ĐƯỜNG THẲNG

* Hai đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm (1 giao điểm)

* Nếu có n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy

$\Rightarrow$ Số giao điểm là: $\frac{n(n-1)}{2}$

* Chú ý: Nếu biết số giao điểm thì tìm được số đường thẳng.

Bài tập 1: Cho 2010 đường thẳng trong đó bất kì 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Hướng dẫn giải

Mỗi đường thẳng cắt 2009 đường thẳng còn lại tạo nên 2009 giao điểm.

Mà có 2010 đường thẳng nên có: 2009×2010 giao điểm.

Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần nên số giao điểm thực tế là:

$$(2009 \times 2010) : 2 = 2009 \times 1005 = 2019045 \text{ giao điểm.}$$

Bài tập 2: Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Tính số giao điểm của chúng.

Hướng dẫn giải

- Mỗi đường thẳng cắt 100 đường thẳng còn lại nên tạo ra 100 giao điểm.

- Có 101 đường thẳng nên có : $101.100 = 10100$ giao điểm.

- Do mỗi giao điểm được tính hai lần nên số giao điểm là :
 $10100 : 2 = 5050$ giao điểm.

Vậy số giao điểm là: 5050 giao điểm.

Bài tập 3: Cho 2006 đường thẳng trong đó bất kì 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau. Không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng. (39)

Hướng dẫn giải

Mỗi đường thẳng cắt 2005 đường thẳng còn lại tạo nên 2005 giao điểm. Mà có 2006 đường thẳng

$\Rightarrow$ có : 2005×2006 giao điểm. Nhưng mỗi giao điểm được tính 2 lần

$\Rightarrow$ số giao điểm thực tế là: $(2005 \times 2006) : 2 = 1003 \times 2005 = 2011015$ giao điểm.

Bài tập 3: Cho n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 780. Tính n ?

Hướng dẫn giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần.

Vậy thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 780$

$$\Rightarrow n(n-1) = 1560 = 40.39$$

$$\Rightarrow n = 40$$

Vậy $n = 31$

Bài tập 4: Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng tổng số giao điểm mà n đường thẳng đó cắt nhau tạo ra bằng 465. Tìm n .

Hướng dẫn giải

Có n đường thẳng trong đó bất kỳ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy, nên mỗi đường thẳng sẽ cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo ra $n-1$ giao điểm phân biệt.

Do đó n đường thẳng thì có $n(n-1)$ giao điểm nhưng mỗi giao điểm đã được tính 2 lần.

Vậy thực tế chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ giao điểm.

Theo bài ra ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 465$

$$\Rightarrow n(n-1) = 930 = 31.30$$

$$\Rightarrow n = 31$$

Vậy $n = 40$

DẠNG 4: VẼ TAM GIÁC. TÍNH SỐ TAM GIÁC TẠO THÀNH

Ba điểm A, B, C không thẳng hàng luôn tạo thành một tam giác ABC.

Với n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, ta vẽ được $\frac{n.(n-1).(n-2)}{6}$ tam giác.

Bài tập 1:

a) Vẽ tam giác ABC biết $BC = 5cm, AB = 3cm, AC = 4cm$.

b) Lấy điểm O ở trong tam giác ABC nói trên. Vẽ tia AO cắt BC tại H, tia BO cắt AC tại I, tia CO cắt AB tại K. Trong hình đó có bao nhiêu tam giác.

Hướng dẫn giải

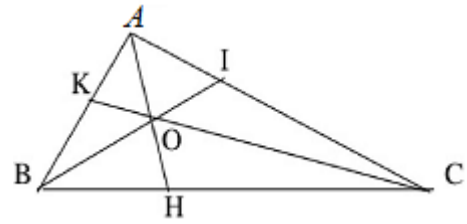
a) Vẽ đoạn thẳng $BC = 5cm$

Vẽ cung tròn $(B; 3cm)$

Vẽ cung tròn $(C; 4cm)$

Lấy giao điểm A của hai cung trên.

Vẽ đoạn thẳng AB, AC ta được tam giác ABC .



b) Có 6 tam giác “đơn” là $AOK; AOI; BOK; BOH; COH$ và COI .

Có 3 tam giác “Ghép đôi” là $AOB; BOC; COA$.

Có 6 tam giác “Ghép ba” là $ABH; BCI; CAK; ABI; BCK; CAH$.

Có một tam giác “Ghép 6” là tam giác ABC .

Vậy trong hình có tất cả $6+3+1+6=16$ (tam giác).

Bài tập2: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A; A_1; A_2; A_3; \dots; A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành

Hướng dẫn giải

Trên đoạn thẳng AB có các điểm $A; A_1; A_2; A_3; \dots; A_{2004}; B$ do đó, tổng số điểm trên AB là 2006 điểm suy ra có 2006 đoạn thẳng nối từ M đến các điểm đó.

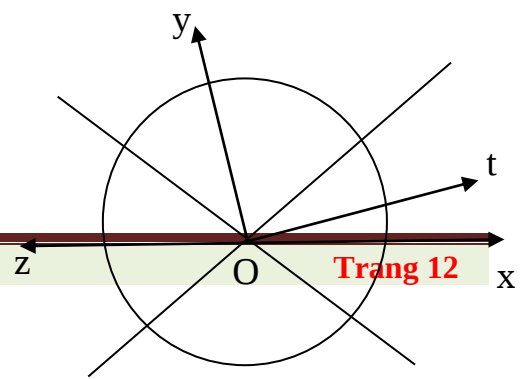
Mỗi đoạn thẳng (ví dụ MA) có thể kết hợp với 2005 đoạn thẳng còn lại và các đoạn thẳng tương ứng trên AB để tạo thành 2005 tam giác.

Do đó 2006 đoạn thẳng sẽ tạo thành $2005 \cdot 2006 = 4022030$ tam giác (nhưng lưu ý là MA kết hợp với MA_1 để được 1 tam giác thì MA_1 cũng kết hợp với MA được 1 tam giác và hai tam giác này chỉ là 1)

Do đó số tam giác thực có là: $4022030 : 2 = 2011015$

Bài tập 3: Cho góc xOy và góc yOz là hai góc kề bù thỏa mãn: $xOy = \frac{5}{4}yOz$. Khi Oy là tia phân giác của góc tOz . Qua O kẻ thêm 50 đường thẳng phân biệt sao cho các đường thẳng này đều không chứa các tia Ox, Oy, Oz và Ot . Vẽ đường tròn tâm O bán kính r . Gọi A là tập hợp các giao điểm của đường tròn nói trên với các tia gốc O có trong hình vẽ. Tính số tam giác mà các đỉnh của nó đều thuộc tập hợp A .

Hướng dẫn giải



Khi Oy là tia phân giác của góc tOz thì 4 tia Ox, Oy, Oz, Ot là 4 tia phân biệt.

- Lập luận để có $50.2 + 4 = 104$ tia gốc O phân biệt, suy ra A có 104 điểm (phần tử).

- Lập luận để có $\frac{104.103}{2} = 5356$ đoạn thẳng nối 2 trong 104 điểm của A

- Nối hai đầu của mỗi đoạn thẳng đó với 1 điểm thuộc 102 điểm còn lại (không phải là các mút của đoạn thẳng đó) được 102 tam giác

- vậy có 5356.102 tam giác. Nhưng như thế thì mỗi tam giác được tính 3 lần.

Vậy ta có $\frac{5356.102}{3} = 182\ 104$ (tam giác)

Bài tập 4: Giả sử trên tia Ay lần lượt lấy các điểm : $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ đôi một khác nhau và khác A. Nối $CA_1; CA_2; CA_3; \dots; CA_n$. Người ta đếm thấy trên hình vẽ có 171 tam giác khác nhau. Vậy trên Ay có bao nhiêu điểm phân biệt khác A?

Hướng dẫn giải

Tính được: Có n điểm khác nhau trên Ax thì có $\frac{n(n-1)}{2}$ tam giác khác nhau

Tính được $n = 19$

Kết luận trên Ay có 18 điểm phân biệt khác A

Bài tập 5: Cho 20 điểm cùng nằm trên một đường tròn và không trùng nhau. Hỏi vẽ được bao nhiêu hình tam giác nhận 3 trong 20 điểm là đỉnh?

Hướng dẫn giải

Chọn 1 trong 20 điểm nối với 19 điểm còn lại ta có 19 đoạn thẳng, có 20 điểm nên có $20.19 = 380$ (đoạn thẳng)

Mà mỗi đoạn tính 2 lần nên có $(19.20):2 = 190$ đoạn thẳng

Hai mút đoạn thẳng với 18 điểm còn lại ta có 1 hình tam giác, có 190 đoạn thẳng nên có 190.18 tam giác

Mà mỗi tam giác tính 3 lần nên có $(190.18):3 = 1140$ (tam giác)

Bài tập 6: Cho 10 điểm thuộc đường thẳng a và một điểm nằm ngoài đường thẳng ấy. Có bao nhiêu tam giác có các đỉnh là ba trong 11 điểm trên?

Hướng dẫn giải

Có bao nhiêu đoạn thẳng nằm trên đường thẳng a thì có bấy nhiêu tam giác.

Đáp số: 45 tam giác.

Bài tập 7: Cho tam giác ABC , điểm D nằm giữa A và C , điểm E nằm giữa A và B . Các đoạn thẳng BD và CE cắt nhau ở K . Nối DE . Tính xem có bao nhiêu tam giác trong hình vẽ?

Đáp số:

Có 5 tam giác “đơn”, có 4 tam giác “đôi”, có 2 tam giác “ba”, có 1 tam giác “năm”, tất cả có 12 tam giác.

DẠNG 5: BÀI TẬP LIÊN QUAN TỚI TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG.

Nếu điểm M nằm giữa điểm A và điểm B thì $AM + MB = AB$. Ngược lại, nếu $AM + MB = AB$ thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B .

Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B ; điểm N nằm giữa hai điểm M và B thì $AM + MN + NB = AB$

Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $MA = MB = \frac{AB}{2}$

Nếu M nằm giữa hai đầu đoạn thẳng AB và $MA = \frac{AB}{2}$ thì M là trung điểm của AB

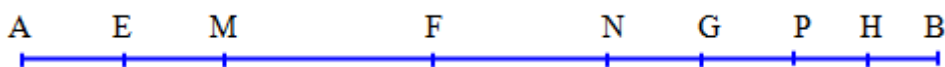
Bài tập 1. Đoạn thẳng $AB = 36$ cm được chia thành bốn đoạn thẳng có độ dài không bằng nhau là các đoạn thẳng AM , MN , NP và PB . Gọi E , F , H theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM , MN , NP và PB . Biết độ dài của đoạn thẳng $EH = 30$ cm. Tính độ dài của đoạn thẳng FG .

Hướng dẫn giải

- Theo đầu bài : $AB = 36$ cm, $EH = 30$ cm.

Vậy $AE + HB = 36 - 30 = 6$ (cm).

Mà $AE = \frac{AM}{2}$ (1) ; $HB = \frac{PB}{2}$ (2) (E và H là trung điểm của AM và PB)



Từ (1) và (2) ta có :

$$AE + HB = \frac{AM}{2} + \frac{PB}{2} = \frac{AM + PB}{2}$$

Mà $AE + HB = 6$ (cm) , nên:

$$\frac{AM + PB}{2} = 6 \Rightarrow AM + PB = 12(\text{cm})$$

Vậy, $MP = AB - (AM + PB) = 36 - 12 \rightarrow MP = 24$ (cm).

- Theo đầu bài : F là trung điểm của MN , nên:

$$FN = \frac{MN}{2} \quad (3)$$

Và G là trung điểm của NP, nên :

$$NG = \frac{NP}{2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra :

$$FN + NG = \frac{MN}{2} + \frac{NP}{2} = \frac{MN + NP}{2} \quad (5)$$

Theo thứ tự lấy các điểm chia và thứ tự lấy trung điểm các đoạn thẳng, thì N là điểm nằm giữa hai điểm F và G; N là điểm nằm giữa hai điểm M và P.

Vậy $FN + NG = FG$ và $MN + NP = MP$.

Thay vào (5) ta có :

$$FG = \frac{MP}{2} = \frac{24}{2} = 12(cm)$$

Vậy độ dài đoạn thẳng FG là 12 cm.

Bài tập 2. Các điểm A, B, C nằm trên cùng một đường thẳng. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và AC. Chứng tỏ rằng : $BC = 2MN$. Bài toán có mấy trường hợp, hãy chứng tỏ từng trường hợp đó.

Hướng dẫn giải

Khi vẽ hình có hai trường hợp:

- Trường hợp 1(H.a) : Hai điểm B và C ở cùng phía với A, tức là hai tia AB và AC trùng nhau.

+ Trường hợp này có thể chia làm hai trường hợp nhỏ là : $AB > AC$, $AC > AB$ (hai trường hợp chứng minh tương tự).

Ta chứng tỏ $AB < AC$:

$$N \text{ là trung điểm của } AC, \text{ nên : } AN = \frac{AC}{2} \quad (1)$$

$$M \text{ là trung điểm của } AB, \text{ nên : } AM = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$AN - AM = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} \quad (3)$$

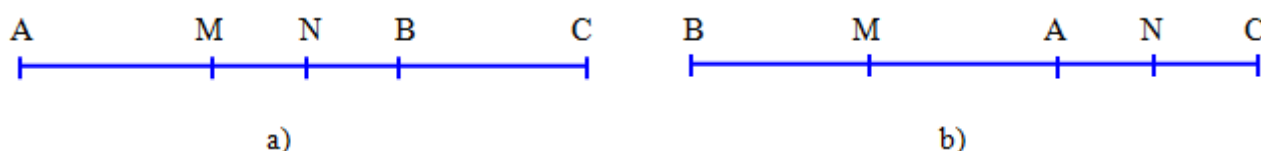
Ta xét $AB < AC$, nên điểm B nằm giữa hai điểm A và C.

$$AC = AB + BC \Rightarrow BC = AC - AB \quad (4)$$

$AB < AC \Rightarrow AM < AN$ nên điểm M nằm giữa hai điểm A và N.

$$AN = AM + MN \Rightarrow MN = AN - AM \quad (5)$$

Thay (4) và (5) vào (3), ta có: $MN = BC/2$ hay $BC = 2MN$



- Trường hợp 2 (H.b) : Hai điểm B và C thuộc hai tia đối AB và AC. Suy ra hai trung điểm cũng thuộc hai tia đối nhau.

$$M \text{ là trung điểm của } AB, \text{ nên : } AM = \frac{AB}{2} \quad (6)$$

$$N \text{ là trung điểm của } AC, \text{ nên : } AN = \frac{AC}{2} \quad (7)$$

Từ (6) và (7) có :

$$AM + AN = \frac{AB + AC}{2} \quad (8)$$

Mà AB và AC là hai tia đối nhau, nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C.

$$BC = BA + AC \quad (9)$$

$M \in AB$ và $N \in AC$ là hai tia đối, nên điểm A nằm giữa hai điểm M và N và ta có:

$$MN = AM + AN \quad (10)$$

Thay (9) và (10) vào (8), ta có : $MN = \frac{BC}{2}$ hay $BC = 2MN$.

Bài tập 3. các điểm A, B, C nằm trên một đoạn thẳng. Biết rằng $AB = 12\text{cm}$, $BC = 13,5\text{cm}$. Độ dài đoạn thẳng AC có thể bằng bao nhiêu? Chỉ rõ từng trường hợp.

Hướng dẫn giải

Xét hai trường hợp :

- Trường hợp 1 (H.a) : Hai điểm B và C ở hai tia đối nhau AB và AC.

Vậy, điểm A nằm giữa hai điểm B và C.

Ta có: $BC = BA + AC$.

Thay số vào ta được : $13,5 = 12 + AC$.

Vậy $AC = 1,5$ (cm).



- Trường hợp 2 (H.b) : Hai điểm B và C ở cùng phía với điểm A. Vì $BC > BA$ ($13,5\text{ cm} > 12\text{cm}$), nên không thể xảy ra trường hợp điểm C nằm giữa hai điểm A và B.

Chỉ có thể xảy ra điểm B nằm giữa hai điểm A và C.

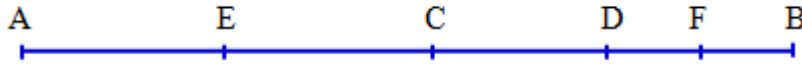
Ta có : $AC = AB + BC \Rightarrow AC = 12 + 13,5 = 25,5$ (cm).

Vậy $AC = 25,5$ (cm).

Bài tập 4. Đoạn thẳng AB có độ dài 28cm. Được chia thành ba đoạn thẳng không bằng nhau theo thứ tự AC, CD và DB. E và F là trung điểm của đoạn thẳng AC và DB. Biết độ dài đoạn EF = 16cm. Tìm độ dài đoạn CD.

Hướng dẫn giải

Đoạn AB được chia thành ba đoạn theo thứ tự AC, CD, DB. Vậy, hai điểm C và D nằm giữa hai điểm A và B, hay đoạn thẳng CD nằm giữa hai đoạn thẳng AC và DB.



$$E \text{ là trung điểm của } AC \text{ nên } AE = \frac{AC}{2} \quad (1)$$

$$F \text{ là trung điểm của } DB \text{ nên } FB = \frac{DB}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có : } AE + FB = \frac{AC}{2} + \frac{DB}{2} \Rightarrow AE + FB = \frac{AC + DB}{2}$$

Trong đó $AE + FB = AB - EF$.

$$\text{Vậy, } AE + FB = \frac{AC + DB}{2} = 28 - 16 = 12$$

Suy ra: $AC + DB = 24$ (cm).

Vậy đoạn $CD = AB - (AC + DB) = 28 - 24 = 4$ (cm).

Bài tập 5. Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C. Biết E là trung điểm của đoạn thẳng CA, F là trung điểm của đoạn thẳng CB.

a) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn CB lớn hơn độ dài đoạn CA.

b) Tìm độ dài đoạn EF.

Hướng dẫn giải

a) Điểm C thuộc tia đối của tia AB, nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C.

Vậy ta có : $BC = BA + AC$.

Độ lớn của các đoạn BC, BA, AC là các số dương, nên tổng hai số phải lớn hơn một số hạng.

Vậy, BC phải lớn hơn AC.

$$b) F \text{ là trung điểm của đoạn } CB, \text{ nên : } CF = \frac{CB}{2} \quad (1)$$

$$E \text{ là trung điểm của đoạn } CA, \text{ nên : } CE = \frac{CA}{2} \quad (2)$$

Mà $CA < CB$ (câu a), nên $CE < CF$, chứng tỏ điểm E nằm giữa hai điểm C và F.

Suy ra : $CF = CE + EF$

$$\Rightarrow EF = CF - CE \quad (3)$$

$$\text{Thay (1) và (2) vào (3), ta có : } EF = \frac{CB}{2} - \frac{CA}{2} = \frac{CB - CA}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm}).$$

Vậy $EF = 3$ cm.

Bài tập 6. Đoạn thẳng AB có độ dài bằng a được chia thành ba đoạn thẳng bởi hai điểm chia P, Q theo thứ tự là đoạn AP, PQ và QB sao cho $AP = 2PQ = 2QB$. Tìm khoảng cách giữa

- Điểm A và điểm I là trung điểm của QB
- Điểm E là trung điểm của đoạn AP và điểm I

Hướng dẫn giải



- Đoạn AB được chia thành ba đoạn theo thứ tự AP, PQ, QB.

Vậy $AB = AP + PQ + QB$.

$$\text{Mà } AP = 2PQ \quad (1)$$

$$2QP = 2QB \Rightarrow PQ = QB \quad (2)$$

$$\text{Vậy } AB = 2QB + BQ + QB \Rightarrow AB = 4QB \quad (3)$$

$$I \text{ là trung điểm của } QB, \text{ nên: } IB = \frac{QB}{2} \quad (4)$$

I là trung điểm của QB, mà Q nằm giữa hai điểm A và B, nên I cũng nằm giữa hai điểm A và B.

$$\text{Vậy ta có: } AB = AI + IB \quad (5)$$

Từ (3) ta có:

$$AB = 4QB \Rightarrow QB = \frac{AB}{4} \Rightarrow \frac{QB}{2} = \frac{AB}{8}$$

Vậy

$$IB = \frac{QB}{2} = \frac{AB}{8} \quad (6)$$

Thay (6) vào (5) có:

$$AB = AI + \frac{AB}{8} \Rightarrow AI = AB - \frac{AB}{8} = \frac{8AB - AB}{8} \Rightarrow AI = \frac{7AB}{8} = \frac{7a}{8} (cm)$$

(a là độ dài đoạn AB).

- Theo (3): $AB = 4QB$.

Theo (1): $2QB = AP$.

Vậy ta suy ra:

$$AB = 2AP \Rightarrow AP = \frac{AB}{2}$$

Mà E là trung điểm của AP, nên

$$EP = \frac{AP}{2} = \frac{AB}{4} \quad (7)$$

Theo (6):

$$\frac{QB}{2} = \frac{AB}{8}$$

$$\text{Suy ra } QB = \frac{AB}{4}, \text{ mà } PQ + QB, \text{ vậy : } PQ = \frac{AB}{4}. \quad (8)$$

$$\text{Theo (6) : } \frac{QB}{2} = \frac{AB}{8} \Rightarrow QB = \frac{AB}{4}.$$

$$\text{Mà I là trung điểm của QB, nên } QI = \frac{QB}{2}.$$

$$\text{Thay } QB = \frac{AB}{4}, \text{ có } QI = \frac{AB}{8} \quad (9)$$

$$\text{Theo đầu bài, đoạn AB được chia thành ba đoạn thẳng theo thứ tự AP, PQ, QB nên} \\ EI = EP + PQ + QI \quad (10)$$

$$\text{Thay (7), (8), (9) vào (10) có: } EI = \frac{AB}{4} + \frac{AB}{4} + \frac{AB}{8}$$

$$\Rightarrow EI = \frac{5AB}{8} \Rightarrow EI = \frac{5a}{8} (cm), \text{ (a là độ dài đoạn AB).}$$

Bài tập 7: Trên tia Ox vẽ các điểm $M_1; M_2; M_3$ sao cho $OM_1 = 12cm; OM_2 = 19cm; OM_3 = 26cm$. Điểm M_2 có là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_3 hay không? Vì sao?

Hướng dẫn giải

Trên tia Ox ta có $OM_1 < OM_2 < OM_3 \Rightarrow M_2$ nằm giữa M_1 và M_3 (1)

Tính được $M_2M_3 = 7 \text{ cm}$

Tính được $M_1M_2 = 7 \text{ cm}$

Suy ra $M_1M_2 = M_2M_3$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow M_2$ là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_3

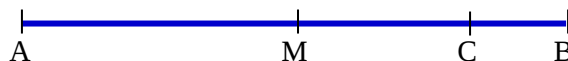
Bài tập 8: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm M của nó. Chứng tỏ rằng nếu C là điểm thuộc tia đối của tia BA thì $CM = \frac{CA + CB}{2}$

Hướng dẫn giải

$$CA = MA + CM$$

$$CB = MB - CM$$

$$\text{Trừ được } CA - CB = 2CM \text{ (Do } MA = MB) \Rightarrow CM = \frac{CA - CB}{2}$$



Bài 10: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D, biết rằng A nằm giữa B và C; B nằm giữa C và D; $OA = 5cm; OA = 2cm; BC = 4cm$ và độ dài AC gấp đôi độ dài BD. Tính độ dài các đoạn BD; AC.

Hướng dẫn giải



Vì A nằm giữa B và C nên $BA + AC = BC \Rightarrow BA + AC = 4$ (1)

Lập luận $\Rightarrow B$ nằm giữa A và D .

Theo gt $OD < OA \Rightarrow D$ nằm giữa O và A .

Mà $OD + DA = OA \Rightarrow 2 + DA = 5 \Rightarrow DA = 3cm$

Ta có $DB + BA = DA \Rightarrow DB + BA = 3$ (2)

(1) - (2) $\Rightarrow AC - BD = 1$ (3)

Theo đề ra: $AC = 2BD$ thay vào (3)

Ta có $2BD - BD = 1 \Rightarrow BD = 1$

$\Rightarrow AC = 2BD \Rightarrow AC = 2cm$

Bài 11: Gọi A và B là hai điểm trên tia Ox sao cho $OA = 4cm; OB = 6cm$. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3cm$. So sánh AB với AC .

Hướng dẫn giải



Hai điểm A và B trên tia Ox mà $OA < OB$ ($4 < 6$) nên điểm A nằm giữa O và B

Suy ra $AB = OB - OA$; $AB = 6 - 4 = 2(cm)$

Hai điểm A và C trên tia BA mà $BA < BC$ ($2 < 3$) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C

Suy ra $AC = BC - BA = 3 - 2 = 1(cm)$

Vậy $AB > AC$ ($2 > 1$).

Bài 12: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7cm; OD = 3cm; BC = 8cm$ và $AC = 3BD$.

a) Tính độ dài AC .

b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Hướng dẫn giải

a) Tính độ dài AC .



Đặt $BD = x(cm) \Rightarrow AC = 3x(cm)$

Vì D nằm giữa O và A (Do $OD < OA$) nên: $OD + DA = OA \Rightarrow DA = 4$

$\Rightarrow DB + BA = 4$ hay $x + BA = 4$ (1)

Vì A nằm giữa B và C nên: $BA + AC = BC$ hay $3x + BA = 8$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(3x + BA) - (x + BA) = 8 - 4$

$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow AC = 3.2 = 6(cm)$

b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Theo (1) ta có: $x + BA = 4$ mà $x = 2 \Rightarrow BA = 2$

Mà $BD = x = 2$

$\Rightarrow BD = BA (= 2) \Rightarrow B$ là trung điểm của đoạn thẳng AD .

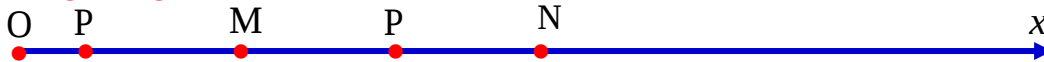
Bài 13: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 3cm$ và $ON = 7cm$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN .

b) Lấy điểm P trên tia Ox , sao cho $MP = 2cm$. Tính độ dài đoạn thẳng OP .

c) Trong trường hợp M nằm giữa O và P . Chứng tỏ rằng P là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Hướng dẫn giải



a) Do M, N cùng thuộc tia Ox mà $OM < ON$ nên M nằm giữa hai điểm O và N

$$\Rightarrow OM + MN = ON$$

$$\Rightarrow 3 + MN = 7 \Rightarrow MN = 7 - 3 = 4(cm)$$

Vậy $MN = 4(cm)$.

b)

TH1: Nếu P nằm giữa M và N thì M nằm giữa O và P

$$\Rightarrow OP = OM + MP \Rightarrow OP = 3 + 2 = 5(cm)$$

TH2: Nếu P nằm giữa O và $M \Rightarrow OM = OP + PM$

$$\Rightarrow 3 = OP + 2 \Rightarrow OP = 1(cm).$$

c) M nằm giữa O và $P \Rightarrow OP = 5(cm) < ON = 7(cm)$ nên P nằm giữa O và N

$$\Rightarrow OP + PN = ON \Rightarrow 5 + PN = 7 \Rightarrow PN = 2(cm)$$

Do đó: $MP = PN$, mà P nằm giữa M và N nên P là trung điểm của MN

Bài 14: Cho đường thẳng xy . Trên xy lấy 3 điểm A, B, C sao cho $AB = a(cm)$; $AC = b(cm)$ ($b > a$). Gọi I là trung điểm của AB .

a) Tính IC ?

b) Lấy 4 điểm $M; N; P; Q$ nằm ngoài đường thẳng xy . Chứng tỏ rằng đường thẳng xy hoặc không cắt, hoặc cắt ba, hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng sau: MN , MP , MQ , NP , NQ , PQ .

Hướng dẫn giải

a) TH1: B, C nằm cùng phía với nhau so với điểm A



$$\text{Tính được } IC = b - \frac{a}{2}$$

TH2: B, C nằm khác phía so với điểm A .



$$\text{Tính được } IC = b + \frac{a}{2}$$

b)

*) TH1: Nếu cả 4 điểm cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy không cắt các đoạn thẳng: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ .

*) TH2: Nếu có 3 điểm (giả sử: $M; N; P$) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng còn 1 điểm Q nằm khác phía bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy cắt 3 đoạn thẳng sau: MQ, NQ, PQ .

*) TH3: Nếu có 2 điểm (giả sử $M; N$) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng còn 2 điểm ($P; Q$) nằm khác phía bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy cắt 4 đoạn thẳng sau: $MP; MQ; NP; NQ$.

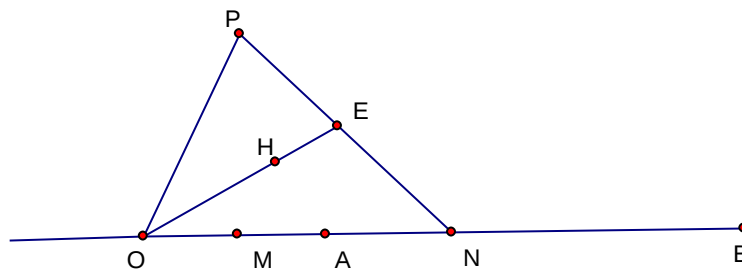
Bài tập 15: Cho đoạn thẳng AB , điểm O thuộc tia đối của tia AB . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB .

a) Chứng tỏ rằng $OA < OB$.

b) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí điểm O .

c) Lấy điểm P nằm ngoài đường thẳng AB . Cho H là điểm nằm trong tam giác ONP . Chứng tỏ rằng tia OH cắt đoạn NP tại một điểm E nằm giữa N và P

Hướng dẫn giải



a) Hai tia AO và AB là hai tia đối nhau

Suy ra điểm A nằm giữa điểm O và điểm B

Vậy $OA < OB$

b) Vì M, N lần lượt là trung điểm của OA và OB

Suy ra $OM = (1/2) \cdot OA, ON = (1/2) \cdot OB$

Theo câu a vì $OA < OB$ nên $OM < ON$

M, N thuộc tia OB nên M nằm giữa O và N

Suy ra $OM + MN = ON$

Suy ra $MN = ON - OM$

$MN = (1/2) \cdot OB - (1/2) \cdot OA = (1/2) \cdot (OB - OA) = (1/2) \cdot AB$

AB có độ dài không đổi nên MN không đổi

c) Điểm H nằm trong tam giác ONP suy ra H nằm trong góc O

Suy ra tia OH nằm giữa hai tia ON và OP

P, N là các điểm không trùng O và thuộc các tia ON, OP

Suy ra tia OH cắt đoạn NP tại điểm E nằm giữa N và P

Bài tập 16: Cho đoạn thẳng AB, điểm O thuộc tia đối của tia AB. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB.

a) Chứng tỏ rằng $OA < OB$.

b) Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?

c) Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB).

Hướng dẫn giải



a) Hai tia AO, AB đối nhau, nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B $\Rightarrow OA < OB$

b) Ta có M và N thứ tự là trung điểm của OA, OB $\Rightarrow OM = \frac{OA}{2}; \quad ON = \frac{OB}{2}$

Vì $OA < OB$, nên $OM < ON$.

Hai điểm M và N thuộc tia OB, mà $OM < ON$, nên điểm M nằm giữa hai điểm O và N.

c) Vì điểm M nằm giữa hai điểm O và N $\Rightarrow OM + MN = ON$

$\Rightarrow MN = ON - OM$

$\Rightarrow MN = \frac{OB - OA}{2} = \frac{AB}{2}$

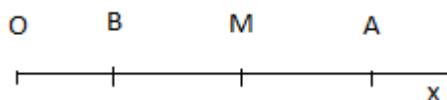
Vì AB có độ dài không đổi, nên MN có độ dài không đổi, hay độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí của điểm O (O thuộc tia đối của tia AB).

Bài tập 17 : Trên tia Ox xác định các điểm A và B sao cho $OA = a$ (cm), $OB = b$ (cm)

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB, biết $b < a$

b) Xác định điểm M trên tia Ox sao cho $OM = \frac{1}{2}(a+b)$.

Hướng dẫn giải



a) Vì $OB < OA$ (do $b < a$) nên trên tia Ox thì điểm B nằm giữa điểm O và điểm A.

Do đó: $OB + AB = OA$

Từ đó suy ra: $AB = a - b$.

b) Vì M nằm trên tia Ox và $OM = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{a+b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = b + \frac{a-b}{2} =$

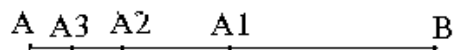
$$= OB + \frac{OA - OB}{2} = OB + \frac{1}{2} AB$$

$\Rightarrow$ M chính là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = BM$

Bài tập 18: Cho đoạn thẳng $AB = 1m$. Lấy A_1 là trung điểm của đoạn thẳng AB, A_2 là trung điểm của AA_1 , A_3 là trung điểm của AA_2 , ... cứ tiếp tục như vậy cho đến A_{20} là trung điểm của AA_{19} . Tính $AA_1 + AA_2 + AA_3 + \dots + AA_{20}$.

Hướng dẫn giải

Ta có:



$$AA_1 = \frac{1}{2} AB,$$

$$AA_2 = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2^2} AB,$$

$$AA_3 = \frac{1}{2} AA_2 = \frac{1}{2^3} AB, \dots,$$

$$AA_{20} = \frac{1}{2^{20}} AB.$$

Khi đó:

$$AA_1 + AA_2 + AA_3 + \dots + AA_{20} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{20}} \right) AB$$

$$\text{Đặt } T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{20}}$$

$$\text{Thì } 2T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{19}}$$

$$\text{Do đó } 2T - T = T = 1 - \frac{1}{2^{20}} = \frac{2^{20} - 1}{2^{20}}.$$

$$\text{Vậy } AA_1 + AA_2 + AA_3 + \dots + AA_{20} = T \cdot AB = \frac{2^{20} - 1}{2^{20}} \cdot 1 = \frac{2^{20} - 1}{2^{20}} \text{ (m)}$$

Bài tập 19: Cho đoạn thẳng $AB = 2^{2014} cm$. Lần lượt lấy điểm $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2014}$ là trung điểm của các đoạn thẳng AB, $AM_1, AM_2, \dots, AM_{2013}$. Tính BM_{2014} ?

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } M_1 \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow AM_1 = \frac{1}{2} AB$$

$$\text{Vì } M_2 \text{ là trung điểm của } AM_1 \Rightarrow AM_2 = \frac{1}{2} AM_1 = \frac{1}{2^2} AB$$

$$\text{Vì } M_3 \text{ là trung điểm của } AM_2 \Rightarrow AM_3 = \frac{1}{2} AM_2 = \frac{1}{2^3} AB$$

.....

$$\text{Vì } M_{2014} \text{ là trung điểm của } AM_{2013}$$

$$\Rightarrow AM_{2014} = \frac{1}{2^{2014}} AB = \frac{1}{2^{2014}} \cdot 2^{2014} = 1 \text{ (cm)}$$

Từ (1), (2), (3), ..., (2014) suy ra M_{2014} nằm giữa A và B

$$\Rightarrow AM_{2014} + BM_{2014} = AB ; BM_{2014} = AB - AM_{2014}$$

$$\Rightarrow BM_{2014} = 2^{2014} - 1$$

$$\text{Vậy } BM_{2014} = 2^{2014} - 1$$

Bài tập 20: Cho $AB = 2^{2014}$ cm. Gọi C_1 là trung điểm của AB; Gọi C_2 là trung điểm của AC_1 ; Gọi C_3 là trung điểm của AC_2 ; ...; Gọi C_{2014} là trung điểm của AC_{2013} . Tính $C_1 C_{2014}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } C_1 \text{ là trung điểm của AB nên } AC_1 = AB/2 \quad (1)$$

$$\text{Vì } C_2 \text{ là trung điểm của } AC_1 \text{ nên } AC_2 = AC_1/2 = AB/2^2 \quad (2)$$

$$\text{Vì } C_3 \text{ là trung điểm của } AC_2 \text{ nên } AC_3 = AC_2/2 = AB/2^3 \quad (3)$$

...

$$\text{Vì } C_{2014} \text{ là trung điểm của } AC_{2013} \text{ nên } AC_{2014} = AB/2^{2014} = 1 \quad (2014)$$

Từ (1), (2), (3), ..., (2014) suy ra C_{2014} nằm giữa A và C_1

$$\text{Do đó } AC_{2014} + C_1 C_{2014} = AC_1$$

$$\text{Vậy } C_1 C_{2014} = 2^{2013} - 1$$

CHỦ ĐỀ 18: GÓC – BÀI TOÁN LIÊN QUAN.

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

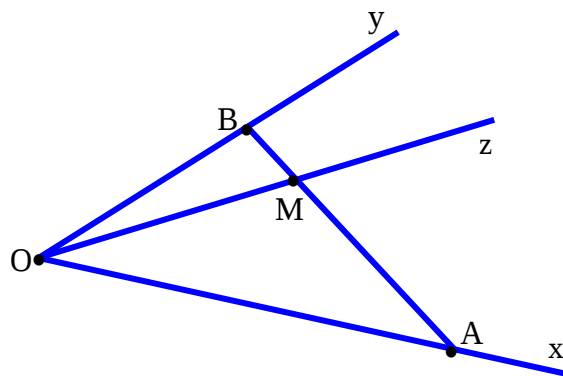
I - NỬA MẶT PHẪNG

1/ Hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi a được gọi là một nửa mặt phẳng bờ a .

Nhận xét: bất kỳ đường thẳng nào nằm trên mặt phẳng cũng là bờ chung của hai nửa mặt phẳng đối nhau.

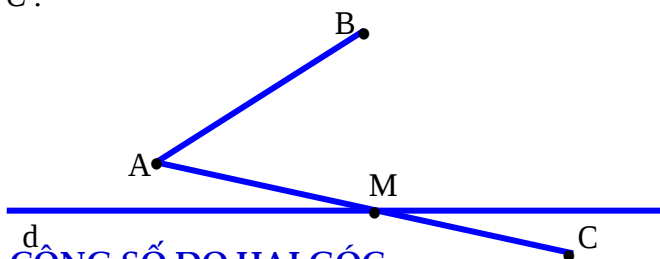
2/ Tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy , nếu tia Oz cắt đoạn thẳng AB tại điểm M nằm giữa A và B ($A \in Ox, B \in Oy; A$ và B khác O)

Nhận xét: Nếu hai tia Ox và Oy đối nhau thì mọi tia Oz khác Ox, Oy đều nằm giữa hai tia Ox, Oy .



3/ Hai điểm A và B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ a thì đoạn thẳng AB không cắt a

4/ Hai điểm A và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ a thì đoạn thẳng AC cắt a tại điểm M nằm giữa A và C .

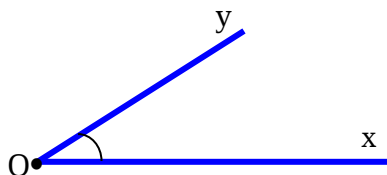


II - GÓC, SỐ ĐO GÓC. CỘNG SỐ ĐO HAI GÓC

1/ Góc là hình gồm hai tia chung gốc. Góc bẹt là góc có hai cạnh là hai tia đối nhau

xOy có hai tia chung gốc là Ox và Oy

Góc bẹt xOy có tia Ox là tia đối của tia Oy



2/ Mỗi góc có một số đo dương. Số đo của góc bẹt là 180° . Số đo của mỗi góc không vượt qua 180° .

3/ So sánh góc.

$A = B \Leftrightarrow A$ và B cùng số đo

$A < B \Leftrightarrow$ số đo $A <$ số đo B

$A > B \Leftrightarrow$ số đo $A >$ số đo B

4/ Các loại góc:

$0^\circ <$ góc nhọn $<$ góc vuông (90°) $<$ góc tù $<$ bẹt (180°)

5/ Hai góc kề nhau là hai góc có một cạnh chung và hai cạnh còn lại nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là cạnh chung.

6/ Góc phụ. Góc bù

A phụ với $B \Leftrightarrow A + B = 90^\circ$

A bù với $B \Leftrightarrow A + B = 180^\circ$

Hai góc vừa kề vừa bù gọi là hai góc kề bù.

Hai góc kề bù có tổng bằng 180° và hai cạnh ngoài là hai tia đối nhau

7/ Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz thì $xOy + yOz = xOz$

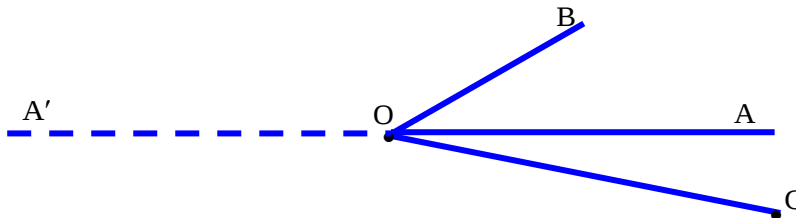
Ngược lại, nếu $xOy + yOz = xOz$ thì Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz

Nếu $xOy + yOz \neq xOz$ thì Oy nằm giữa hai tia Ox, Oz .

Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz ; tia Ot nằm giữa hai tia Oy và Oz thì:

$$xOy + yOt + tOz = xOz.$$

8/ Hai góc AOB và AOC là hai góc kề, tia OA' là tia đối của OA

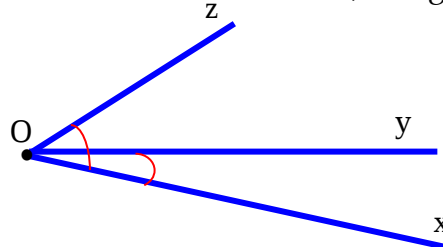


- Nếu $AOB + AOC < 180^\circ$ thì tia OA nằm giữa hai tia OB và OC

- Nếu $AOB + AOC > 180^\circ$ thì tia OA' nằm giữa hai tia OB và OC .

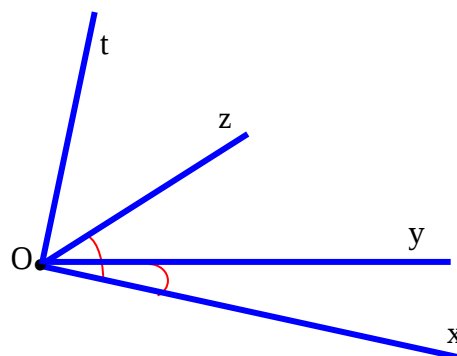
III - VẼ GÓC CHO BIẾT SỐ ĐỘ

1/ Trên nửa mặt phẳng cho trước có bờ chứa tia Ox , bao giờ cũng vẽ được 1 và chỉ 1 tia Oy sao cho $xOy = m$ (độ).



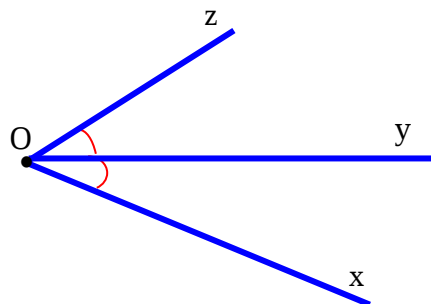
2/ Trên nửa mặt phẳng cho trước bờ chứa tia Ox , có $xOy = m^\circ, xOz = n^\circ$; nếu $m < n$ thì tia Oy nằm giữa hai tia Ox, Oz .

3/ Trên nửa mặt phẳng cho trước bờ chứa tia Ox , có $xOy = m^\circ, xOz = n^\circ; xOt = p^\circ$. Nếu $m < n$ thì Oz nằm giữa hai tia Oy và Ot .



IV - TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

1/ Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau



2/ Nếu tia Oz là tia phân giác của góc xOy thì: $xOz = zOy = \frac{xOy}{2}$.

3/ Nếu tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy và $xOz = \frac{xOy}{2}$ tia Oz là tia phân giác của góc xOy .

4/ Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc gọi là đường phân giác của góc đó. Mỗi góc có một đường phân giác duy nhất.

- Ba cạnh: AB, BC, AC

- Ba góc: A, B, C

3/ Nếu một đường thẳng không đi qua các đỉnh của một tam giác và cắt một cạnh của tam giác ấy thì nó cắt một và chỉ một trong hai cạnh còn lại.

B/ CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1: TÍNH SỐ GÓC TẠO THÀNH TỪ CÁC ĐIỂM (HOẶC TỪ CÁC TIA) CHO TRƯỚC.

* Nếu có n tia chung gốc thì số góc tạo thành là $\frac{n(n-1)}{2}$ góc

Giải thích:

- Vì mỗi tia với 1 tia còn lại tạo thành 1 góc.

- Xét 1 tia, tia đó cùng với $n - 1$ tia còn lại tạo thành $n - 1$ góc.

- Làm như vậy với n tia ta được $n.(n-1)$ góc.

- Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần do đó có tất cả $\frac{n(n-1)}{2}$ góc

Bài tập 1: Cho 10 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối các điểm đó với nhau. Hỏi tất cả có bao nhiêu góc tạo thành (có đỉnh là các điểm đã cho) ?

Hướng dẫn giải

Giả sử có 10 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

* Xét đoạn thẳng A_1A_2

Nối A_1 với 8 điểm còn lại ta được 8 góc có đỉnh là A_1

Nối A_2 với 8 điểm còn lại ta được 8 góc có đỉnh là A_2

Vậy với đoạn thẳng A_1A_2 ta được 16 góc

Mà ở đây có tổng cộng $\frac{10.9}{2} = 45$ đoạn thẳng do đó có 45. 16 góc.

Nhưng nếu vậy mỗi góc đã được tính hai lần. Vậy số góc là $\frac{1045.16}{2} = 360$ góc.

Bài tập 2: Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC chứa tia OB, OD, vẽ thêm 2006 tia phân biệt (không trùng với các tia OA; OB; OC; OD đã cho) thì có tất cả bao nhiêu góc?

Hướng dẫn giải

Tất cả có 2010 tia phân biệt. Cứ 1 tia trong 2010 tia đó tạo với 2009 tia còn lại thành 2009 góc. Có 2010 tia nên tạo thành 2010.2009 góc

Nhưng như thế mỗi góc được tính hai lần .

Vậy có tất cả $\frac{2010.2009}{2} = 2\,019\,045$ góc

Bài tập 3: Vẽ hai góc kề bù xOy và zOy. Vẽ tia Om và tia On theo thứ tự là tia phân giác của các góc xOy và góc zOy. Vẽ tia Om' là tia đối của tia Om. Cần vẽ thêm bao nhiêu tia phân biệt chung gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành tất cả 300 góc.

Hướng dẫn giải

Giả sử cần vẽ thêm n tia phân biệt chung gốc O và không trùng với các tia đã vẽ trong hình để tạo thành tất cả 300 góc.

Khi đó tổng số tia gốc O trên hình là n + 6

Cứ 1 tia gốc O tạo với n + 5 tia gốc O còn lại thành n + 5 góc, mà có n + 6 tia như vậy nên tạo thành:

$$(n + 5)(n + 6) \text{ góc}$$

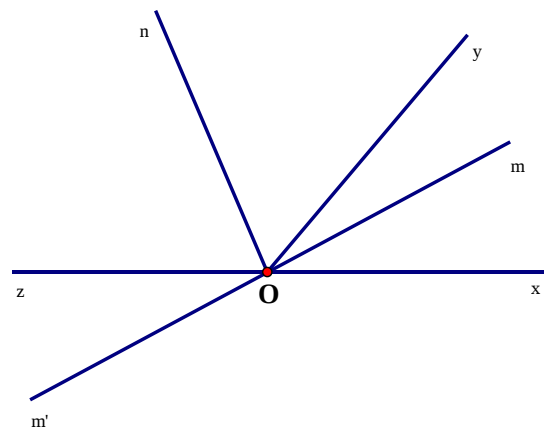
Vì tia này tạo với kia và ngược lại nên mỗi góc được tính hai lần, suy ra số góc tạo thành là:

$$\frac{(n + 5)(n + 6)}{2} \text{ góc}$$

Vì có 300 góc được tạo thành nên:

$$\frac{(n + 5)(n + 6)}{2} = 300 \Leftrightarrow (n + 5)(n + 6) = 600 = 24.25$$

$$\Leftrightarrow n + 5 = 24 \Leftrightarrow n = 19$$



Bài tập 4: Trên nửa mặt phẳng bờ là tia Ox, vẽ các tia $Ox_1, Ox_2, Ox_3, \dots, Ox_n$ sao cho:

$xOx_2 = 2xOx_1$; $xOx_3 = 3xOx_1$; $xOx_4 = 4xOx_1$; ...; $xOx_n = nxOx_1$. Tìm số n nhỏ nhất để trong các tia đã vẽ có một tia là tia phân giác chung của 2017 góc.

Hướng dẫn giải

Trên nửa mặt phẳng bờ là tia Ox , vẽ các tia $Ox_1, Ox_2, Ox_3, \dots, Ox_n$ sao cho: $\angle xOx_2 = 2\angle xOx_1$;
 $\angle xOx_3 = 3\angle xOx_1$; $\angle xOx_4 = 4\angle xOx_1$; ... ; $\angle xOx_n = n\angle xOx_1$

$$\Rightarrow \angle xOx_1 = \angle x_1Ox_2 = \angle x_2Ox_3 = \dots = \angle x_{n-1}Ox_n$$

Vậy khi n nhỏ nhất là $n = 2017.2 = 4034$ thì lúc đó Ox_{2017} là tia phân giác chung của 2017

$$\text{góc: } \angle xOx_{4034} = \angle x_1Ox_{4033} = \angle x_2Ox_{4032} = \dots = \angle x_{2016}Ox_{2018}$$

Bài tập 5: Cho n tia chung gốc $O: Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$ cùng nằm trong một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox_1 . Có tất cả bao nhiêu góc được tạo thành?

Hướng dẫn giải

Số góc có được từ n tia chung gốc là: $\frac{n(n-1)}{2}$

Bài tập 6: Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả 190 góc. Tính n ?

Hướng dẫn giải

$$\frac{n(n-1)}{2} = 190 \text{ được } n \text{ bằng } 20.$$

Bài tập 7:

a) Cho 6 tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ? Vì sao?

b) Vậy với n tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ.

Hướng dẫn giải

a) Vì mỗi tia với 1 tia còn lại tạo thành 1 góc. Xét 1 tia, tia đó cùng với 5 tia còn lại tạo thành 5 góc. Làm như vậy với 6 tia ta được 5.6 góc. Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần do đó có tất cả là $\frac{5.6}{2} = 15$ góc.

b) Từ câu a suy ra tổng quát. Với n tia chung gốc có $n\left(\frac{n-1}{2}\right)$ (góc).

DẠNG 2: BÀI TẬP LIÊN QUAN TỚI TÍNH ĐO GÓC.

* Cho biết tia phân giác tính số đo góc

* Cho biết số đo góc chứng minh một tia là phân giác của góc

* Chứng minh góc bằng nhau, so sánh hai góc.

* Dựa vào việc tính số đo góc chỉ ra hai góc kề bù, hai tia đối nhau.

Bài tập 1: Vẽ 2 góc kề bù $\angle xOy$ và $\angle yOx'$, biết $\angle xOy = 70^\circ$. Gọi Ot là tia phân giác của $\angle xOy$, Ot' là tia phân giác của $\angle yOx'$. Tính $\angle yOt'$; $\angle tOt'$; $\angle xOt'$

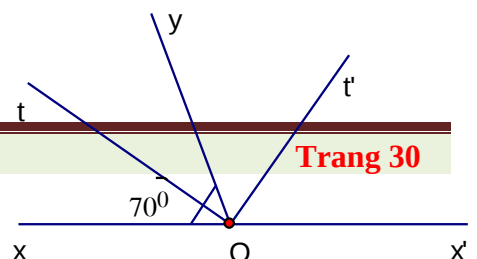
Hướng dẫn giải

HD: Ta có $\angle xOy$ và $\angle yOx'$ là 2 góc kề bù

$$\Rightarrow \angle xOy + \angle yOx' = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle yOx' = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Vì Ot' là tia phân giác của $\angle yOx'$



$$\Rightarrow t'\hat{O}x' = t\hat{O}y = \frac{1}{2} y\hat{O}x' = \frac{1}{2} \cdot 110^\circ = 55^\circ$$

Vì Ot là tia phân giác của xÔy

$$\Rightarrow x\hat{O}t = t\hat{O}y = \frac{1}{2} x\hat{O}y = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$$

Vì Ox và Ox' đối nhau

$$\Rightarrow Ot \text{ và } Ot' \text{ nằm giữa } Ox \text{ và } Ox' \Rightarrow x\hat{O}t + t\hat{O}t' + t'\hat{O}x' = 180^\circ$$

$$\Rightarrow t\hat{O}t' = 180^\circ - 35^\circ - 55^\circ = 90^\circ$$

$$x\hat{O}t' \text{ và } t'\hat{O}x' \text{ là 2 góc kề bù} \Rightarrow x\hat{O}t' + t'\hat{O}x' = 180^\circ \Rightarrow x\hat{O}t' = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

Bài tập 2: Cho góc AOB và góc BOC là hai góc kề bù. Biết góc BOC bằng năm lần góc AOB.

a) Tính số đo mỗi góc.

b) Gọi OD là tia phân giác của góc BOC. Tính số đo góc AOD.

c)* Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC chứa tia OB, OD, vẽ thêm n tia phân biệt (không trùng với các tia OA; OB; OC; OD đã cho) thì có tất cả bao nhiêu góc?

Hướng dẫn giải

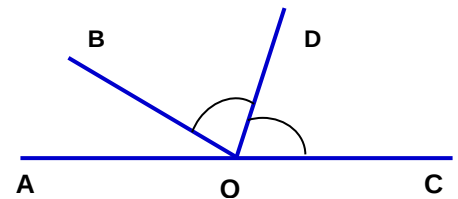
a) Vì góc AOB và góc BOC là hai góc kề bù nên:

$$AOB + BOC = 180^\circ$$

$$\text{mà } BOC = 5 AOB \text{ nên: } 6 AOB = 180^\circ$$

Do đó:

$$AOB = 180^\circ : 6 = 30^\circ; BOC = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$$



b) Vì OD là tia phân giác của góc BOC nên $BOD = DOC = \frac{1}{2} BOC = 75^\circ$.

Vì góc DOA và góc DOC là hai góc kề bù nên: $DOA + DOC = 180^\circ$

$$\text{Do đó } DOA = 180^\circ - DOC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

c) Tất cả có n + 4 tia phân biệt. Cứ 1 tia trong n+4 tia đó tạo với n+4 - 1 = n+3 tia còn lại thành n+3 góc. Có n+4 tia nên tạo thành (n + 4)(n + 3) góc, nhưng như thế mỗi góc được tính hai lần. Vậy có tất cả $\frac{(n + 4)(n + 3)}{2}$ góc

Bài tập 3: Cho hai góc kề bù xOy và yOz. Biết xOy = 62°. Om là tia phân giác của góc xOy; On là tia phân giác của góc yOz

a/ Tính số đo góc xOm và mOy ; yOn và nOz

b/ Tính số đo các góc mOz và xOn

c/ Tính số đo góc mOn Rồi rút ra nhận xét

Hướng dẫn giải

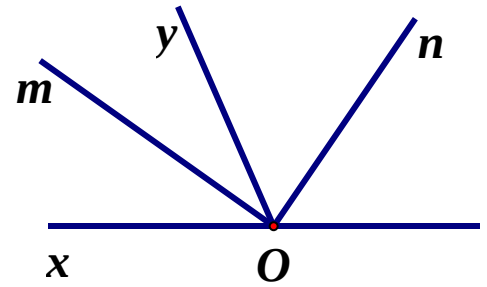
a/ Ta có : $xOy + yOz = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow yOz = 180^\circ - xOy = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$

Vì Om là phân giác của xOy nên ta có

$$xOm = mOy = \frac{xOy}{2} = \frac{62^\circ}{2} = 31^\circ$$

Vì On là phân giác của yOz nên ta có

$$yOn = nOz = \frac{yOz}{2} = \frac{118^\circ}{2} = 59^\circ$$



b/ Vì xOy và yOz là hai góc kề bù và Om là phân giác của xOy

On là phân giác của yOz nên tia Oy nằm giữa các tia

Om và Oz ; Ox và On ; Om và On

+ Oy Nằm giữa Om và Oz . Ta có

$$mOy + yOz = mOz \Rightarrow mOz = 31^\circ + 118^\circ = 149^\circ$$

+ Oy nằm giữa Ox và On . Ta có

$$xOy + yOn = xOn \Rightarrow xOn = 62^\circ + 59^\circ = 121^\circ$$

c/ Vì Oy nằm giữa Om và On nên ta có

$$mOy + yOn = mOn \Rightarrow mOn = 31^\circ + 59^\circ = 90^\circ$$

Nhận xét : Hai tia phân giác của hai góc kề bù thì tạo thành một góc vuông

Bài tập 4: Cho góc $AOB = 110^\circ$, tia OC nằm trong góc đó. Gọi OM, ON theo thứ tự là các tia phân giác của các góc AOC, BOC. Tính MON ?

Hướng dẫn giải

$$MON = MOC + CON = \frac{AOC}{2} + \frac{COB}{2} = \frac{AOC + COB}{2} = \frac{AOB}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$$

Bài tập 5: Cho góc $AOB = 100^\circ$ và OC là tia phân giác của góc đó. Trong góc AOB vẽ các tia OA, OE sao cho $AOD = BOE = 20^\circ$. Chứng tỏ rằng tia OC là tia phân giác của góc DOE.

Hướng dẫn giải

Chứng tỏ rằng $COD = COE = 30^\circ$.

Bài tập 6: Cho góc tù xOy . Bên trong góc xOy , vẽ tia Om sao cho góc xOm bằng 90° và vẽ tia On sao cho góc yOn bằng 90° .

a) Chứng minh góc xOn bằng góc yOm .

b) Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy . Chứng minh Ot cũng là tia phân giác của góc mOn .

Hướng dẫn giải

a) Lập luận được:

$$xOm + mOy = xOy \text{ hay } 90^\circ + mOy = xOy$$

$$yOn + nOx = xOy \text{ hay } 90^\circ + nOx = xOy \Rightarrow xOn = yOm$$

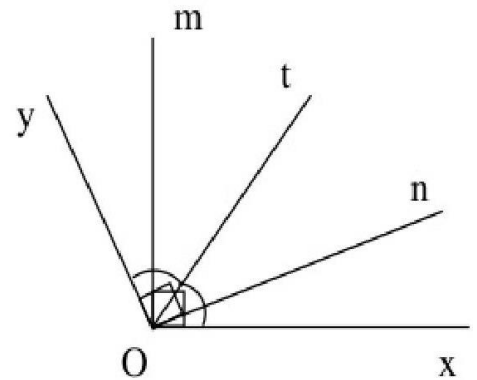
b) Lập luận được: $xOt = tOy$

$$xOt = xOn + nOt$$

$$tOy = yOm + mOt$$

$$\Rightarrow nOt = mOt$$

$\Rightarrow Ot$ là tia phân giác của góc mOn .

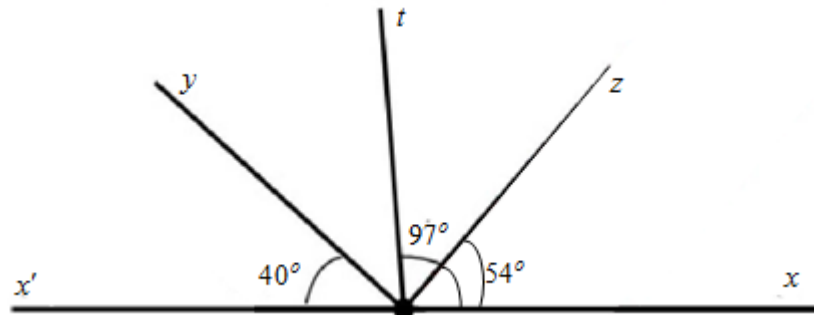


Bài tập 7: Trên đường thẳng xx' lấy một điểm O . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xx' vẽ 3 tia Oy, Ot, Oz sao cho góc $x'Oy = 40^\circ$; $xOt = 97^\circ$; $xOz = 54^\circ$.

a) Chứng minh tia Ot nằm giữa hai tia Oy và Oz .

b) Chứng minh tia Ot là tia phân giác của góc zOy .

Hướng dẫn giải



a) Theo đề bài ta có $x'Ox = 180^\circ$ mà góc $x'Oy$ và góc yOx kề bù. Mà góc $x'Oy = 40^\circ \Rightarrow$ góc $yOx = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Suy ra góc $xOt <$ góc xOy hay tia Ot nằm giữa hai tia Ox và Oy . Lại có: góc $xOz <$ góc xOt hay tia Oz nằm giữa hai tia Ot và Ox . Vậy tia Ot nằm giữa hai tia Oz và Oy .

b) Theo câu a) ta có tia Ot nằm giữa hai tia Oz và $Oy \Rightarrow$ Góc $zOt +$ góc $tOy =$ góc zOy .

Vì tia Ot nằm giữa hai tia Ox và Oy

$$\Rightarrow \text{Góc } xOt + \text{góc } tOy = \text{góc } xOy$$

$$\text{Hay góc } tOy = 43^\circ \text{ (vì góc } xOt = 97^\circ \text{ và góc } xOy = 54^\circ).$$

Vì tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Ot

$$\Rightarrow \text{Góc } xOz + \text{góc } zOt = \text{góc } xOt$$

$$\text{Hay góc } zOt = 43^\circ \text{ (vì góc } xOt = 97^\circ \text{ và } xOy = 54^\circ)$$

Suy ra góc $tOy = \text{góc } zOt = 43^\circ$.

Vậy tia Ot là tia phân giác của góc zOy .

Bài tập 8: Cho tia Ox . Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là Ox . Vẽ hai tia Oy và Oz sao cho góc xOy và xOz bằng 120° . Chứng minh rằng:

- Góc $xOy = \text{góc } xOz = \text{góc } yOz$.
- Tia đối của mỗi tia Ox, Oy, Oz là phân giác của góc hợp bởi hai tia còn lại.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: góc $x'Oy = 60^\circ$, góc $x'Oz = 60^\circ$ và tia Ox' nằm giữa hai tia Oy, Oz nên góc $yOz = yOx' + x'Oz = 120^\circ$.

Vậy góc $xOy = \text{góc } xOz = \text{góc } yOz$

b) Do tia Ox' nằm giữa hai tia Oy, Oz và góc $x'Oy = \text{góc } x'Oz$ nên Ox' là tia phân giác của góc hợp bởi hai tia Oy, Oz . Tương tự tia Oy' (tia đối của Oy) và tia Oz' (tia đối của tia Oz) là phân giác của góc xOz và xOy .

Bài tập 9: Cho góc $AOB = 135^\circ$, C là một điểm nằm trong góc AOB biết góc $BOC = 90^\circ$.

- Tính góc AOC .
- Gọi OD là tia đối của tia OC . So sánh hai góc AOD và BOD .

Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết C nằm trong góc AOB nên tia OC nằm giữa hai tia OB và OA

$$\Rightarrow \text{góc } AOC + \text{góc } BOC = \text{góc } AOB$$

$$\Rightarrow \text{góc } AOC = \text{góc } AOB - \text{góc } BOC \Rightarrow \text{góc } AOC = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

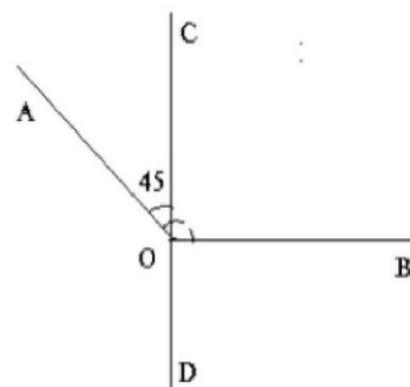
b) Vì OD là tia đối của tia OC nên C, O, D thẳng hàng.

Do đó góc $DOA + \text{góc } AOC = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

$$\Rightarrow \text{góc } AOD = 180^\circ - \text{góc } AOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\text{Góc } BOD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Vậy góc $AOD > \text{góc } BOD$.



Bài tập 10: Cho tam giác ABC và $BC = 5\text{cm}$. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3\text{cm}$

- Tính độ dài BM
- Cho biết góc $BAM = 80^\circ$, góc $BAC = 60^\circ$. Tính góc CAM .
- Vẽ các tia Ax, Ay lần lượt là tia phân giác của góc BAC và CAM . Tính góc xAy .
- Lấy K thuộc đoạn thẳng BM và $CK = 1\text{cm}$. Tính độ dài BK .

Hướng dẫn giải

a) M, B thuộc 2 tia đối nhau CB và CM

$\Rightarrow C$ nằm giữa B và M

$$\Rightarrow BM = BC + CM = 8(\text{cm})$$

b) C nằm giữa B, M

$\Rightarrow$ Tia AC nằm giữa tia AB, AM

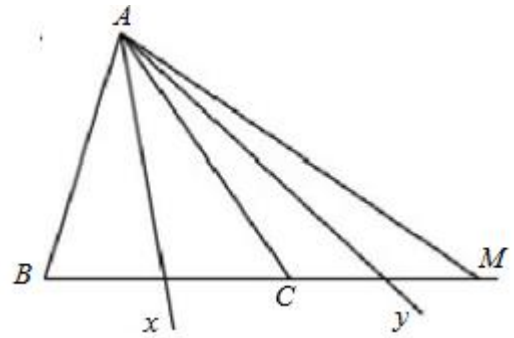
$$\Rightarrow CAM = BAM - BAC = 20^\circ$$

$$\text{c) Có } xAy = xAC + CAy = \frac{1}{2}BAC + \frac{1}{2}CAM = \frac{1}{2}(BAC + CAM) = \frac{1}{2}BAM = \frac{1}{2}.80^\circ = 40^\circ.$$

d)

- Nếu $K \in$ tia $CM \Rightarrow C$ nằm giữa B và $K_1 \Rightarrow BK_1 = BC + CK_1 = 6(\text{cm})$

- Nếu $K \in$ tia $CB \Rightarrow K_2$ nằm giữa B và $C \Rightarrow BK_2 = BC = CK_2 = 4(\text{cm})$.

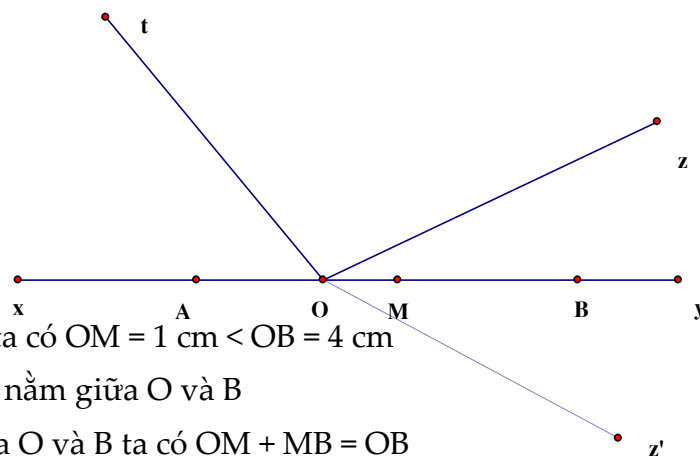


Bài tập 11: Cho góc bẹt xOy , trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2 \text{ cm}$; trên tia Oy lấy hai điểm M và B sao cho $OM = 1 \text{ cm}$; $OB = 4 \text{ cm}$.

a) Chứng tỏ: Điểm M nằm giữa hai điểm O và B ; Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

b) Từ O kẻ hai tia Ot và Oz sao cho $\widehat{tOy} = 130^\circ$, $\widehat{zOy} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{tOz}$.

Hướng dẫn giải



a) Trên tia Oy ta có $OM = 1 \text{ cm} < OB = 4 \text{ cm}$

Vậy M là điểm nằm giữa O và B

Do M nằm giữa O và B ta có $OM + MB = OB$

$$\Rightarrow MB = OB - OM = 4 - 1 = 3$$

Do A thuộc tia Ox M thuộc tia Oy nên O nằm giữa hai điểm A và M

$$\Rightarrow OM + OA = MA \Rightarrow MA = 2 + 1 = 3 \text{ cm}$$

Mặt khác do A, B nằm trên hai tia đối nhau, M lại nằm giữa O và B

$\Rightarrow M$ nằm giữa A và B

Vậy M là trung điểm của AB

b)

TH1: Tia Ot và tia Oz trên cùng một nửa mặt phẳng

Do $\widehat{yOt} = 103^\circ$, $\widehat{yOz} = 30^\circ$ suy ra tia Oz nằm giữa hai tia Ot và Oy .

Ta có $tOz = tOy - yOz = 130^\circ - 30^\circ = 100^\circ$

TH2: Tia Ot và tia Oz không nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là xy

$\Rightarrow$ tia Oy nằm giữa hai tia Ot và Oz

Ta có $tOz = tOy + yOz = 130^\circ + 30^\circ = 160^\circ$

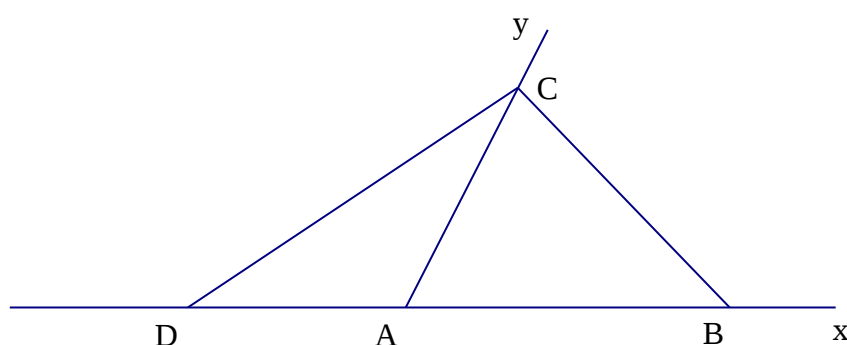
Bài tập 12: Cho xAy , trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 5$ cm. Trên tia đối của tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = 3$ cm, C là một điểm trên tia Ay.

a) Tính BD.

b) Biết $\angle BCD = 85^\circ$, $\angle BCA = 50^\circ$. Tính $\angle ACD$.

c) Biết $AK = 1$ cm (K thuộc BD). Tính BK.

Hướng dẫn giải



a) Tính BD

Vì B thuộc tia Ax, D thuộc tia đối của tia Ax

$\Rightarrow$ A nằm giữa D và B

$\Rightarrow BD = BA + AD = 5 + 3 = 8$ (cm)

b) Biết $\angle BCD = 85^\circ$, $\angle BCA = 50^\circ$. Tính $\angle ACD$

Vì A nằm giữa D và B $\Rightarrow$ Tia CA nằm giữa 2 tia CB và CD

$\Rightarrow \angle ACD + \angle BCA = \angle BCD$

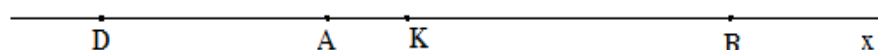
$\Rightarrow \angle ACD = \angle BCD - \angle BCA = 85^\circ - 50^\circ = 35^\circ$

c) Biết $AK = 1$ cm (K thuộc BD). Tính BK

* Trường hợp 1: K thuộc tia Ax

- Lập luận chỉ ra được K nằm giữa A và B

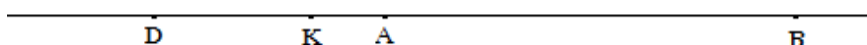
- Suy ra: $AK + KB = AB \Rightarrow KB = AB - AK = 5 - 1 = 4$ (cm)



* Trường hợp 2: K thuộc tia đối của tia Ax

- Lập luận chỉ ra được A nằm giữa K và B

- Suy ra: $KB = KA + AB \Rightarrow KB = 5 + 1 = 6$ (cm)



* Kết luận: Vậy $KB = 4 \text{ cm}$ hoặc $KB = 6 \text{ cm}$

Bài tập 13: Cho góc $\angle xBy = 55^\circ$. Trên các tia Bx, By lần lượt lấy các điểm A, C ($A \neq B, C \neq B$). Trên đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho $\angle ABD = 30^\circ$

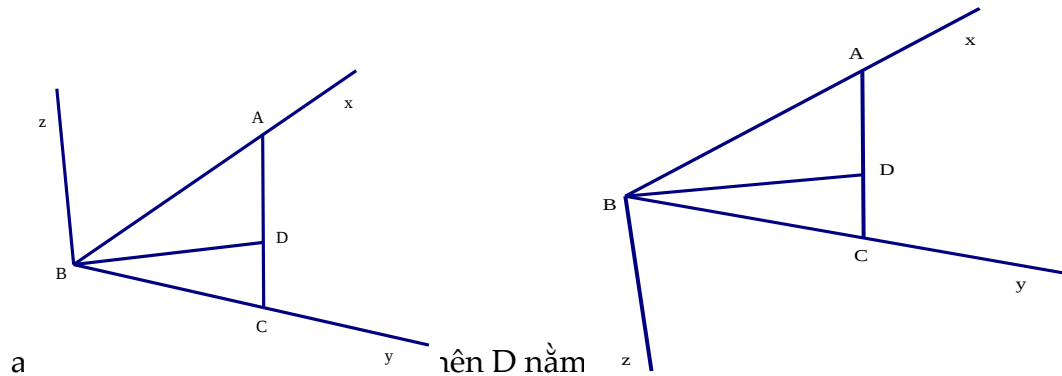
a/ Tính độ dài AC , biết $AD = 4 \text{ cm}$, $CD = 3 \text{ cm}$

b/ Tính số đo góc $\angle DBC$

c/ Từ B vẽ tia Bz sao cho $\angle DBz = 90^\circ$. Tính số đo $\angle ABz$.

Hướng dẫn giải

TH1 TH2



$$AC = AD + CD = 4 + 3 = 7 \text{ cm}$$

b) Chứng minh được tia BD nằm giữa hai tia BA và BC

Ta có đẳng thức:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \Rightarrow \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 55^\circ - 30^\circ = 25^\circ$$

c) Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Tia Bz và tia BD nằm về hai phía nửa mặt phẳng có bờ là AB nên tia BA nằm giữa hai tia Bz và BD

$$\text{Tính được } \angle ABz = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

- Trường hợp 2: Tia Bz và tia BD nằm về cùng phía nửa mặt phẳng có bờ là AB nên tia BD nằm giữa hai tia Bz và BA

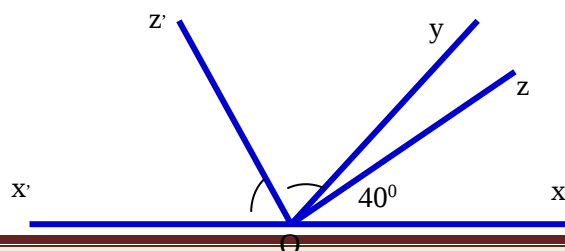
$$\text{Tính được } \angle ABz = 90^\circ + \angle ABD = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

Bài tập 14: Trên đường thẳng $x'x$ lấy điểm O tùy ý. Vẽ hai tia Oy và Oz nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ $x'x$ sao cho: $\angle xOz = 40^\circ$, $\angle x'Oy = 3 \cdot \angle xOz$.

a) Trong ba tia Ox, Oy, Oz tia nào nằm giữa hai tia còn lại?

b) Gọi Oz' là tia phân giác của góc $\angle x'Oy$. Tính góc $\angle zOz'$?

Hướng dẫn giải



a) Theo bài ra: $x'Oy = 3 \cdot xOz$ nên: $x'Oy = 3 \cdot 40^\circ = 120^\circ$

Hai góc xOy và $x'Oy$ là 2 góc kề bù nên

$$xOy = 180^\circ - x'Oy = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Hai tia Oy, Oz nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox

lại có xOz nhỏ hơn xOy nên tia Oz nằm giữa 2 tia Ox và Oy

Ta có: $xOz + zOy = xOy$

$$\text{Hay } zOy = xOy - \angle xOz = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$$

$$\text{Mà } yOz' = \frac{1}{2} \cdot x'Oy = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ \text{ (} Oz' \text{ là tia phân giác } x'Oy \text{)}$$

$$\text{Vậy: } zOz' = yOz' + yOz = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$$

Bài tập 15: Cho tam giác ABC có BC = 6cm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD bằng 3cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng CD.

b) Gọi M là trung điểm của CD. Tính độ dài đoạn thẳng BM.

c) Biết góc DAC = 120° . Vẽ Ax và Ay lần lượt là các tia phân giác của góc BAC và góc BAD. Tính số đo góc xAy.

d) Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB không chứa điểm D, nếu vẽ thêm n tia gốc A phân biệt không trùng với các tia AB, AC, Ax thì có tất cả bao nhiêu góc đỉnh A được tạo thành?

Hướng dẫn giải

a) Vì điểm D thuộc tia đối của tia BC nên điểm B nằm giữa hai điểm C và D, ta có:

$$CD = BC + BD = 6 + 3 = 9 \text{ (cm)}$$

b) Vì M là trung điểm của đoạn CD nên

$$CM = MD = CD : 2 = 4,5 \text{ (cm)}$$

$$CM < CB \text{ nên điểm M nằm giữa hai điểm C}$$

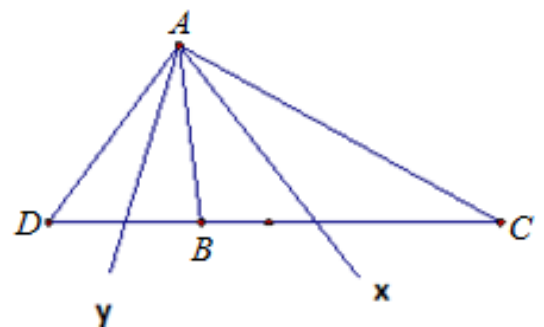
và B

$$\text{Ta có: } BC = BM + CM \Rightarrow BM = BC - CM = 6 - 4,5 = 1,5 \text{ (cm)}$$

c) Vì Ax là tia phân giác của góc BAC nên $\angle xAB = \frac{1}{2} \angle BAC$

Vì Ay là tia phân giác của góc BAD nên $\angle yAB = \frac{1}{2} \angle BAD$

Vì điểm B nằm giữa hai điểm C và D nên tia AB nằm giữa hai tia AC và AD



$$\Rightarrow BAC + BAD = DAC = 120^\circ.$$

Vì Ax là tia phân giác của góc BAC, Ay là tia phân giác của góc BAD

$\Rightarrow$ tia AB nằm giữa hai tia Ax, Ay

$$\Rightarrow xAy = xAB + BAy = \frac{1}{2}BAC + \frac{1}{2}BAD = \frac{1}{2}(BAC + BAD) = \frac{1}{2}DAC = 60^\circ$$

d) Ta có $n + 3$ tia gốc A phân biệt (kể cả các tia AB, AC, Ax)

Mỗi tia trong $n + 3$ tia hợp với $n + 2$ tia còn lại một góc. Có $n + 3$ tia như vậy nên có tất cả $(n + 3)(n + 2)$ góc. Tính như thế mỗi góc đã được tính hai lần nên có tất cả $(n + 3)(n + 2) : 2$ góc đỉnh A

Bài tập 16: Vẽ hai góc kề bù xOy và zOy. Vẽ tia Om và tia On theo thứ tự là tia phân giác của các góc xOy và góc zOy. Vẽ tia Om' là tia đối của tia Om.

a) Tính số đo góc mOn

b) Tính số đo của góc kề bù với góc yOm, biết $m'Oz = 30^\circ$

Hướng dẫn giải

a) Vì xOy kề bù với zOy nên: $xOy + zOy = 180^\circ$

Vì tia Om là tia phân giác của xOy nên:

$$mOy = \frac{1}{2}xOy$$

Vì tia On là tia phân giác của zOy nên:

$$nOy = \frac{1}{2}zOy$$

Vì xOy kề bù với zOy nên tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz mà tia Om là tia phân giác của xOy và tia On là tia phân giác của zOy nên tia Oy nằm giữa hai tia Om và On, khi đó:

$$mOy + yOn = mOn$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}xOy + \frac{1}{2}zOy = mOn$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(xOy + zOy) = mOn$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.180^\circ = mOn$$

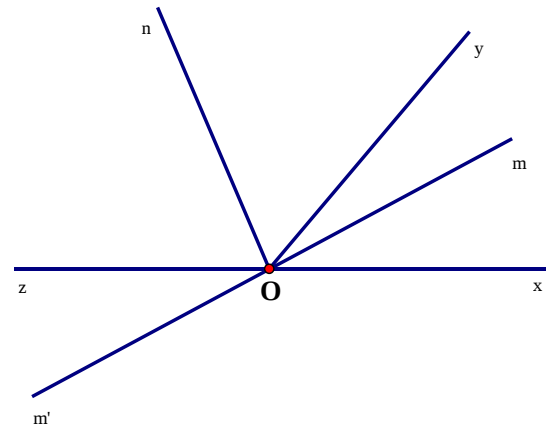
$$\Leftrightarrow mOn = 90^\circ$$

b) Vì hai tia Om và Om' đối nhau, khi đó m'Oz kề bù với zOm

$$\Rightarrow m'Oz + zOm = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ + zOm = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow zOm = 150^\circ$$



Vì hai tia Ox và Oz đối nhau, khi đó $\angle xOm$ kề bù với $\angle mOx$

$$\Rightarrow \angle xOm + \angle mOx = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 150^\circ + \angle mOx = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle mOx = 30^\circ$$

Vì tia Om là tia phân giác của $\angle xOy$ nên: $\angle mOy = \angle mOx = 30^\circ$

Vì hai tia Om và Om' đối nhau, khi đó $\angle yOm$ kề bù với $\angle yOm'$

$$\Rightarrow \angle yOm + \angle yOm' = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ + \angle yOm' = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle yOm' = 150^\circ$$

Bài tập 17: Cho góc $\angle xOy$. Vẽ tia Oz là tia phân giác của góc $\angle xOy$. Vẽ tia Ot là tia phân giác của góc $\angle xOz$. Vẽ tia Om là tia phân giác của góc $\angle xOt$.

a) Giả sử $\angle xOm = 12^\circ$. Hãy tính số đo góc $\angle xOy$?

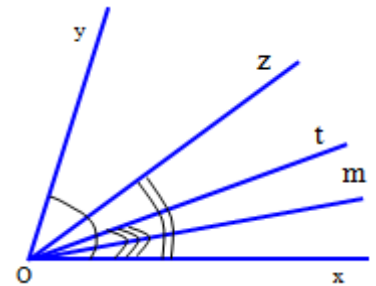
b) Tính giá trị lớn nhất của góc $\angle xOm$?

Hướng dẫn giải

a) Tính được: $\angle xOy = 8 \cdot \angle xOm = 8 \cdot 12^\circ = 96^\circ$

b) Vì $\angle xOy = 8 \cdot \angle xOm$, nên $\angle xOm$ có giá trị lớn nhất khi

$$\angle xOy = 180^\circ \Rightarrow \angle xOm = 22,5^\circ$$



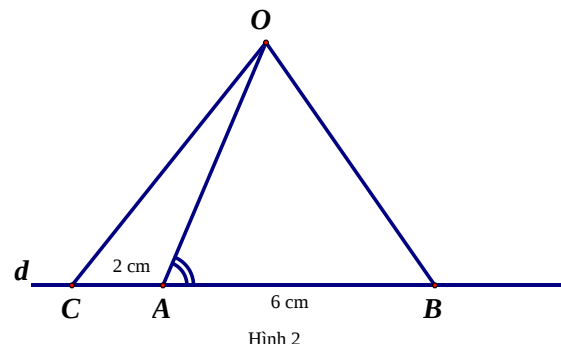
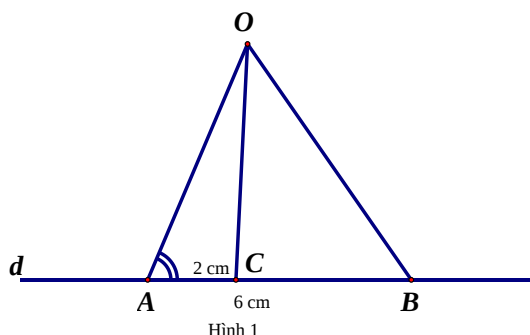
Bài tập 18: Cho điểm O nằm ngoài đường thẳng d. Trên đường thẳng d lấy 3 điểm A, B, C sao cho $AB = 6\text{cm}$, $AC = 2\text{cm}$.

a) Tính BC.

b) Giả sử cho $\angle OAB = 80^\circ$, tính $\angle OAC$.

c) Trên đường thẳng d lấy thêm 2015 điểm phân biệt (khác A, B, C). Hỏi có bao nhiêu góc có đỉnh O và cạnh đi qua 2 điểm thuộc đường thẳng d.

Hướng dẫn giải



a) Tính BC.

Vì A, B, C thuộc đường thẳng d và $AB > AC$ nên xảy ra 2 trường hợp

TH1: C nằm giữa A và B (hình 1)

$$\Rightarrow AB = AC + CB \Rightarrow BC = AB - AC = 6\text{cm} - 2\text{cm} = 4\text{cm}$$

TH2: A nằm giữa B và C (hình 2)

$$\Rightarrow BC = AC + AB = 6\text{cm} + 2\text{cm} = 8\text{cm}$$

Vậy $BC = 4\text{cm}$ hoặc $BC = 8\text{cm}$

b) Tính $\widehat{OAC}$.

TH1: C nằm giữa A và B (hình 1)

$$\text{Tia AC và tia AB trùng nhau} \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OAB} = 80^\circ$$

TH2: A nằm giữa B và C (hình 2)

$$\text{Tia AC và tia AB đối nhau} \Rightarrow \widehat{OAC}; \widehat{OAB} \text{ là hai góc kề bù} \Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{OAB} = 180^\circ$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{OAC} = 180^\circ - \widehat{OAB} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{OAC} = 80^\circ \text{ hoặc } \widehat{OAC} = 100^\circ$$

c)

+) Trên đường thẳng d có 2018 điểm phân biệt

+) Cứ 2 điểm trên đường thẳng d nối với điểm O được một góc đỉnh O.

Có bao nhiêu đoạn thẳng trên đường thẳng d thì có bấy nhiêu góc đỉnh O.

Số góc đỉnh O đi qua 2 điểm bất kì trên đường thẳng d là :

$$\frac{2018 \cdot 2017}{2} = 2035153 \text{ (góc)}$$

Vậy có 2035153 góc đỉnh O

Bài tập 19: Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia OA vẽ các tia OB, OC sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $\widehat{AOC} = 80^\circ$. Gọi OM là tia phân giác của $\widehat{BOC}$.

a) Tính $\widehat{AOM}$.

b) Vẽ tia ON là tia đối của tia OM. Chứng minh rằng OA là tia phân giác của $\widehat{CON}$.

Hướng dẫn giải

a) Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia OA có $\widehat{AOC} < \widehat{AOB}$ ($80^\circ < 120^\circ$)

$\Rightarrow$ Tia OC nằm giữa hai tia OA và OB

$$\Rightarrow \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = \widehat{AOB} \Rightarrow 80^\circ + \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 40^\circ$$

$$\text{Vì OM là tia phân giác của } \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{COM} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia OB có $\widehat{BOM} < \widehat{BOA}$

($20^\circ < 120^\circ$) nên tia OM nằm giữa hai tia OA và OB

$$\Rightarrow \widehat{BOM} + \widehat{MOA} = \widehat{AOB}$$

$$\Rightarrow 20^\circ + \widehat{MOA} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MOA} = 100^\circ$$

b) Vì OM và ON là hai tia đối nhau nên hai góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{AON}$ là hai góc kề bù.

$$\Rightarrow \angle AOM + \angle AON = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 100^\circ + \angle AON = 180^\circ \Rightarrow \angle AON = 80^\circ$$

$$\text{Suy ra } \angle AOC = \angle AON \text{ (vì cùng bằng } 80^\circ \text{)} \quad (1)$$

Vì hai tia OM và ON nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là tia OA nên tia OA nằm giữa hai tia OM và ON (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia OA là tia phân giác của $\angle CON$

Bài tập 20: Cho đoạn thẳng $AB = 5\text{cm}$. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng AB, trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

a) Tính BN khi $BM = 2\text{cm}$.

b) Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB, vẽ các tia Ax và Ay sao cho $\angle BAx = 40^\circ$, $\angle BAy = 110^\circ$. Tính $\angle xAy$, $\angle NAy$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng AB để đoạn thẳng BN có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Vì M thuộc AB nên $AM + MB = AB$

$$\Rightarrow AM + 2 = 5 \Rightarrow AM = 3\text{ cm}$$

$$\text{Có } AN = AM \Rightarrow AN = 3\text{ cm}$$

Do N thuộc tia đối của tia AB nên điểm A nằm giữa N và B

$$BN = AB + AN = 5 + 3 = 8\text{ cm}$$

b) Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia AB có: $\angle BAx < \angle BAy$ ($40^\circ < 110^\circ$)

$\Rightarrow$ Tia Ax nằm giữa hai tia AB và Ay nên ta có: $\angle BAx + \angle xAy = \angle BAy$

$$\text{hay } 40^\circ + \angle xAy = 110^\circ \Rightarrow \angle xAy = 110^\circ - 40^\circ = 70^\circ$$

+ Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ AB, ta có $\angle BAy$ và $\angle NAy$ là hai góc kề bù.

$$\Rightarrow \angle BAy + \angle NAy = 180^\circ$$

$$\text{hay } 110^\circ + \angle NAy = 180^\circ \Rightarrow \angle NAy = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

c) Vì $BN = AB + AN = 5 + AN$

Suy ra BN có độ dài lớn nhất khi AN có độ dài lớn nhất

Mà $AN = AM \Rightarrow BN$ có độ dài lớn nhất khi AM có độ dài lớn nhất

Có $AM \leq AB \Rightarrow AM$ lớn nhất khi $AM = AB$ khi đó điểm M trùng với điểm B.

Vậy khi điểm M trùng với điểm B thì BN có độ dài lớn nhất.

