

ĐỀ SỐ 1. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

- a) Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử
- b) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

- c) Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Câu 2. (2 điểm)

- a) Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương
- b) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Câu 3. (1 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF . Tính số đo EAF

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

- a) Chứng minh $BC' \cdot BA + CB' \cdot CA = BC^2$
- b) Chứng minh rằng: $\frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HA \cdot HB}{BC \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot AB} = 1$
- c) Gọi D là trung điểm của BC . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh H là trung điểm của MN .

Câu 5. (1 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) \\ & = a^2(b-c) - b^2[(a-b) + (b-c)] + c^2(a-b) \\ & = (a^2 - b^2)(b-c) + (c^2 - b^2)(a-b) \\ & = (a-b)(a+b)(b-c) - (b-c)(b+c)(a-b) \\ & = (a-b)(b-c)[a+b-b-c] = (a-b)(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

$$b) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab+ac+bc=0$$

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} = \frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b^2+2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \quad ; \quad \frac{c^2}{c^2+2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \\ &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1 \end{aligned}$$

$$c) \text{ Vì } x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z \Rightarrow (x+y)^3 = -z^3$$

$$\text{Hay } x^3+y^3+3xy(x+y) = -z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3+y^3+z^3$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } 3xyz(x^2+y^2+z^2) &= (x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2) \\ &= x^5+y^5+z^5+x^3(y^2+z^2)+y^3(z^2+x^2)+z^3(x^2+y^2) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy \quad (\text{Vì } x+y=-z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2+z^2 = x^2 - 2yz; z^2+x^2 = y^2 - 2zx$$

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy: } 3xyz(x^2+y^2+z^2) &= x^5+y^5+z^5+x^3(x^2-2yz)+y^3(y^2-2zx)+z^3(z^2-2xy) \\ &= 2(x^5+y^5+z^5) - 2xyz(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } 2(x^5+y^5+z^5) = 5xyz(x^2+y^2+z^2)$$

Câu 2.

$$a) \text{ Để } n+18 \text{ và } n-41 \text{ là hai số chính phương}$$

$$\Leftrightarrow n+18 = p^2 \text{ và } n-41 = q^2 \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

$$\text{Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: } \begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$$

$$\text{Từ } n+18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$$

$$\text{Thay vào } n-41, \text{ ta được } 882-41 = 841 = 29^2 = q^2$$

$$\text{Vậy với } n=882 \text{ thì } n+18 \text{ và } n-41 \text{ là hai số chính phương}$$

$$b) \text{ Có: } (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (*)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$

$$\text{Áp dụng (*) có: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(a + \frac{1}{b}\right) \quad ; \quad \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(b + \frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Suy ra: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 \left[\left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{a}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 \left[(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (\text{Vi } a+b=1)$$

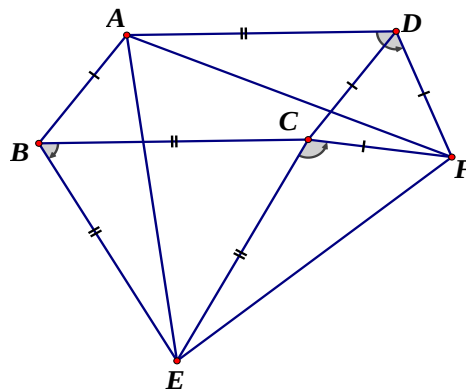
$$\text{Với } a, b \text{ dương, chứng minh } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} = 4 \quad (\text{Vi } a+b=1)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

$$\text{Ta được: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5.4$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Câu 3.



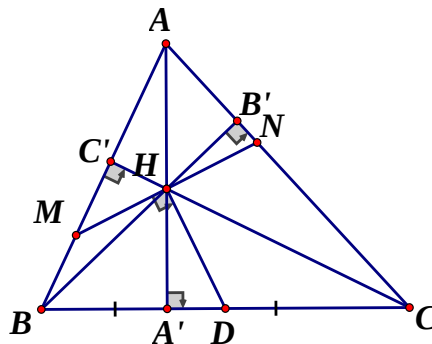
Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle ECF$

Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle ECF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AE = EF$

Tương tự: $AF = EF$

$$\Rightarrow AE = EF = AF \Rightarrow \triangle AEF \text{ đều} \Rightarrow \angle EAF = 60^\circ$$

Câu 4.



$$\text{a) Chứng minh } \triangle BHC' \sim \triangle BAB' \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow BH \cdot BB' = BC' \cdot BA \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh } \triangle BHA' \sim \triangle BCB' \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BA'}{BB'} \Rightarrow BH.BB' = BC.BA' \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC'.BA = BA'.BC$

Tương tự: $CB'.CA = CA'.BC$

$$\Rightarrow BC'.BA + CB'.CA = BA'.BC + CA'.BC = (BA' + A'C).BC = BC^2$$

$$b) \text{ Có } \frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow \frac{BH.CH}{AB.AC} = \frac{BC'.CH}{BB'.AC} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{AH.BH}{CB.CA} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}; \frac{AH.CH}{CB.AB} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HA.HB}{AC.BC} + \frac{HC.HA}{BC.AB} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

$$c) \text{ Chứng minh } \triangle AHM \sim \triangle CDH(g.g) \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{AH}{CD} \quad (3)$$

$$\text{Chứng minh } \triangle AHN \sim \triangle BDH(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{BD} = \frac{HN}{HD} \quad (4)$$

$$\text{Mà } CD = BD \quad (gt) \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5)} \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{HN}{HD} \Rightarrow HM = HN \Rightarrow H \text{ là trung điểm của } MN$$

Câu 5.

Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD. Lấy các điểm I, G trên EF và K, H trên PQ thỏa mãn:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{HP}{HQ} = \frac{GF}{GE} = \frac{KQ}{KP} = \frac{2}{3}$$

Xét d là một trong các đường thẳng bất kỳ đã cho cắt hai đoạn thẳng AD, BC, EF lần lượt tại M, N, G'. Ta có:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{CDNM}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{AB.(BM+AN)}{2}}{\frac{CD.(CM+DN)}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EG'}{G'F} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow G \equiv G' \text{ hay } d \text{ qua } G.$$

Từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề Câu đều đi qua một trong 4 điểm G, H, I, K

Do có 2018 đường thẳng đi qua 1 trong 4 điểm G, H, I, K theo nguyên lý Dirichle phải tồn

tại ít nhất $\left\lceil \frac{2018}{4} \right\rceil + 1 = 505$ đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm trên.

Vậy có ít nhất 505 đường thẳng trong số 2018 đường thẳng đã cho đồng quy.

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 2. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

- 1) Chứng minh : $(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = x^4 - y^4$
- 2) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x+2)(x^2 + 2x + 2) + 1$
- 3) Tìm a, b, c biết: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ và $a^8 + b^8 + c^8 = 3$

Câu 2. (4 điểm)

Cho biểu thức: $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$ với $x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$

- 1) Rút gọn biểu thức P.
- 2) Tính giá trị của biểu thức P, biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$$

Câu 3. (4 điểm)

- 1) Giải phương trình: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$
- 2) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + x + 3 = y^2$

Câu 4. (2 điểm)

Cho các số a, b, c thỏa mãn $1 \geq a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Câu 5. (5,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a , biết hai đường chéo cắt nhau tại O. Lấy điểm I thuộc cạnh AB, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\angle IOM = 90^\circ$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi N là giao điểm của AM và CD, K là giao điểm của OM và BN.

- 1) Chứng minh $\triangle BIO = \triangle CMO$ và tính diện tích tứ giác BIOM theo a
- 2) Chứng minh $BKM = BCO$
- 3) Chứng minh $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Câu 6. (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$), trọng tâm G. Qua G vẽ đường thẳng d cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D và E. Tính giá trị biểu thức $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- 1) Ta có: $(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$
 $= x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 - y^4$
 $= x^4 - y^4$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

$$x(x+2)(x^2+2x+2)+1=(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$$

$$2) \text{ Ta có: } =(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1$$

$$=(x^2+2x+1)^2=(x+1)^4$$

$$3) \text{ Biến đổi } a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \text{ về } (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

Lập luận suy ra $a=b=c$

Thay $a=b=c$ vào $a^8+b^8+c^8=3$ ta có: $3a^8=3 \Leftrightarrow a^8=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=b=c=1 \\ a=b=c=-1 \end{cases}$$

Câu 2.

1) Với $x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$ ta có:

$$P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2y - (x^2 - y^2)(x+y) - xy^2}{xy(x+y)} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{x-y}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

$$2) \text{ Ta có: } x^2+y^2+10=2(x-3y)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=0$$

$$\text{Lập luận } \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$\text{Nên thay } x=1; y=-3 \text{ vào biểu thức } P = \frac{x+y}{xy} = \frac{1+(-3)}{1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}$$

Câu 3.

$$1) \text{ Đặt } 6x+7=t. \text{ Ta có: } (t+1)(t-1)t^2=72 \Leftrightarrow (t^2-1)t^2=72 \Leftrightarrow t^4-t^2-72=0$$

$$\Leftrightarrow t=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ x=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right\}$$

$$2) \quad x^2 + x + 3 = y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 12 = 4y^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 - 4y^2 = -11$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1) = -11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x+2y+1=1 \\ 2x-2y+1=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y+1=-1 \\ 2x-2y+1=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y+1=11 \\ 2x-2y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y+1=-11 \\ 2x-2y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 4.

Vì $b, c \in [0; 1]$ nên suy ra $b^2 \leq b; c^3 \leq c$

$$\text{Do đó: } a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq a + b + c - ab - bc - ca \quad (1)$$

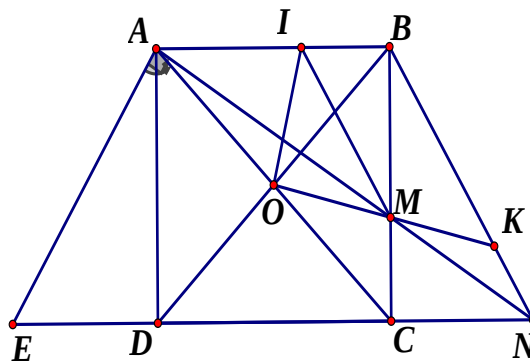
$$\text{Lại có: } a + b + c - ab - bc - ca = (a-1)(b-1)(c-1) - abc + 1 \quad (2)$$

Vì $a, b, c \in [0; 1]$ nên $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0; -abc \leq 0$

$$\text{Do đó từ (2)} \Rightarrow a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Câu 5.



$$1) \quad \angle IOB = \angle MOC (= 45^\circ) \text{ (tính chất đường chéo hình vuông)}$$

$$BO = CO \text{ (tính chất đường chéo hình vuông)}$$

$$\angle BOI = \angle COM \text{ (cùng phụ với } \angle BOM)$$

$$\Rightarrow \triangle BIO = \triangle CMO \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow S_{BIO} = S_{CMO} \text{ mà } S_{BMOI} = S_{BOI} + S_{BMO}$$

$$\text{Do đó: } S_{BMOI} = S_{CMO} + S_{BMO} = S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} a^2$$

$$2) \quad \text{Ta có: } \triangle BIO = \triangle CMO \text{ (cmt)} \Rightarrow CM = BI \Rightarrow BM = AI$$

$$\text{Vì } CN // AB \text{ nên } \frac{BM}{CM} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow IM // BN$$

Ta có: $OI = OM (\triangle BIO = \triangle CMO) \Rightarrow \triangle IOM$ cân tại $O \Rightarrow \angle IMO = \angle MIO = 45^\circ$

Vì $IM // BN \Rightarrow \angle BKM = \angle IMO = 45^\circ \Rightarrow \angle BKM = \angle BCO$

3) Qua A kẻ tia Ax vuông góc AN cắt CD tại E .

Chứng minh $\triangle ADE = \triangle ABM$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AM$

Ta có: $\triangle ANE$ vuông tại A có $AD \perp NE$

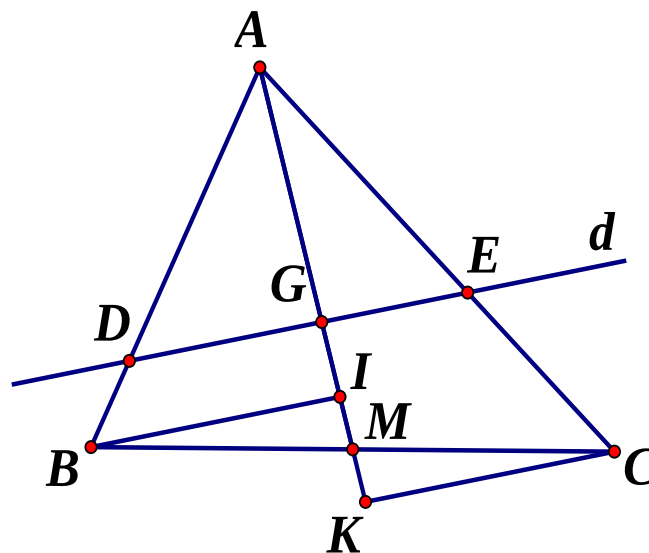
$$S_{\triangle AEN} = \frac{AD \cdot NE}{2} = \frac{AN \cdot AE}{2} \Rightarrow AD \cdot NE = AN \cdot AE \Rightarrow (AD \cdot NE)^2 = (AN \cdot AE)^2$$

Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle ANE$ ta có: $AN^2 + AE^2 = NE^2$

$$\Rightarrow AD^2 \cdot (AN^2 + AE^2) = AN^2 \cdot AE^2 \Rightarrow \frac{AN^2 + AE^2}{AN^2 \cdot AE^2} = \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$$

$$\text{Mà } AE = AM \text{ và } CD = AD \Rightarrow \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$$

Câu 6.



Gọi M là trung điểm của BC

Qua B vẽ đường thẳng song song với d cắt AM tại I , ta có: $\frac{AB}{AD} = \frac{AI}{AG}$ (1)

Qua C vẽ đường thẳng song song với d cắt AM tại K , ta có: $\frac{AC}{AE} = \frac{AK}{AG}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = \frac{AI + AK}{AG}$ (3)

Mặt khác: $AI + AK = (AM - MI) + (AM + MK) = 2AM$ (4)

(Vì $MI = MK$ do $\triangle BMI = \triangle CMK$)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = \frac{2AM}{AG} = \frac{2AM}{\frac{2}{3}AM} = 3$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 3. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
- Tìm x để $|A| = A$

Câu 2. (6 điểm)

- Giải phương trình: $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$
- Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x^2 + 2x - 10 = y^2$
- Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $a, b, c \neq 0$

Tính giá trị biểu thức $P = \left(1 + \frac{a}{b} \right) \left(1 + \frac{b}{c} \right) \left(1 + \frac{c}{a} \right)$

Câu 3. (4 điểm)

- Tìm các số có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7
- Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

Câu 4. (4 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a = 12\text{cm}$, $BC = b = 9\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD

- Chứng minh tam giác AHB đồng dạng với tam giác BCD
- Tính độ dài đoạn thẳng AH
- Tính diện tích tam giác AHB

Câu 5. (2 điểm)

Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và BC sao cho $BM = BN$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BMN$ và I là trung điểm của AN. Tính các góc của tam giác ICG.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

b) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \mid (1-2x)$, từ đó tìm được $\begin{cases} x=1(\text{ktm}) \\ x=0(\text{tm}) \end{cases}$

Vậy $x=0$

c) Ta có:

$$|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện : $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Câu 2.

a) Phân tích được $(x-1)(x^3+x^2+2x+8)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2-x+4)=0 \quad (1)$$

Vì $x^2-x+4 > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

b) Ta có: $x^2+2x-10=y^2 \Leftrightarrow (x+1)^2-y^2=11$

$$\Leftrightarrow (x+1+y)(x+1-y)=11 \quad (2)$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x+1+y > x+1-y > 0$

(2) viết thành: $(x+1+y)(x+1-y)=11.1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+y=11 \\ x+1-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (5; 5)$

c) Biến đổi giả thiết về dạng:

$$\frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases}$$

Với $a+b+c=0$ tính được: $P = \left(\frac{-c}{b} \right) \left(\frac{-a}{c} \right) \left(\frac{-b}{a} \right) = -1$

Với $a=b=c$ tính được: $P = 2.2.2 = 8$

Câu 3.

a) Gọi số có ba chữ số cần tìm là $\overline{abc}$

Ta có: $\overline{abc} = (98a + 7b) + 2a + 3b + c$

Vì $\overline{abc} : 7 \Rightarrow 2a + 3b + c : 7$ (3)

Mặt khác, vì $a + b + c : 7$ (4), kết hợp với (3) suy ra $b - c : 7$

Do đó $b - c$ chỉ có thể nhận các giá trị $-7; 0; 7$

Với $b - c = -7 \Rightarrow c = b + 7$. Kết hợp với (4) ta chọn được các số 707; 518; 329 thỏa mãn.

Với $b - c = 7 \Rightarrow b = c + 7$. Đổi vai trò b và c của trường hợp trên ta được các cặp số 770, 581, 392 thỏa mãn Câu toán.

Với $b - c = 0 \Rightarrow b = c$ mà do (4) nên $a + 2b : 7$

Do $1 \leq a + 2b \leq 27$ nên $a + 2b$ chỉ có thể nhận các giá trị 7; 14; 21.

Từ đó ta chọn được 12 số thỏa mãn là 133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966

Vậy có 18 số thỏa mãn Câu toán: 707; 518; 329; 770; 581; 392; 133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966.

$$\begin{aligned} \text{b) Vì } x + y + z = 1 \text{ nên: } M &= \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) (x + y + z) \\ &= \frac{21}{16} + \left(\frac{x}{4y} + \frac{y}{16x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{16x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{4y} \right) \end{aligned}$$

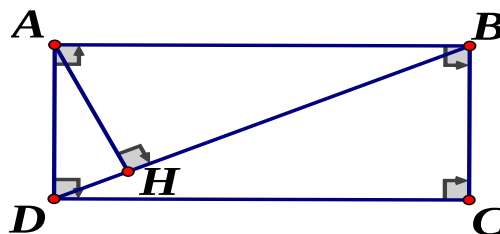
$$\text{Ta có: } \frac{x}{4y} + \frac{y}{16x} = \frac{16x^2 + 4y^2}{64xy} = \frac{(4x - 2y)^2 + 2.4x.2y}{64xy} = \frac{(4x - 2y)^2}{64xy} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} (\forall x, y > 0)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{x}{z} + \frac{z}{16x} \geq \frac{1}{2}; \frac{y}{z} + \frac{z}{4y} \geq 1 (\forall x, y > 0)$$

$$\text{Từ đó } M \geq \frac{21}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{49}{16}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2y = z \\ x + y + z = 1 \\ x, y, z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = \frac{2}{7} \\ z = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy GTNN của } M \text{ là } \frac{49}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$$

Câu 4.



a) Chứng minh được $\triangle AHB \sim \triangle BCD$ (g.g)

$$\text{b) } \triangle AHB \sim \triangle BCD \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AH = \frac{a.b}{BD}$$

Áp dụng định lý Pytago được: $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{225} = 15(\text{cm})$

Từ đó tính được: $AH = \frac{12.9}{15} = 7,2(\text{cm})$

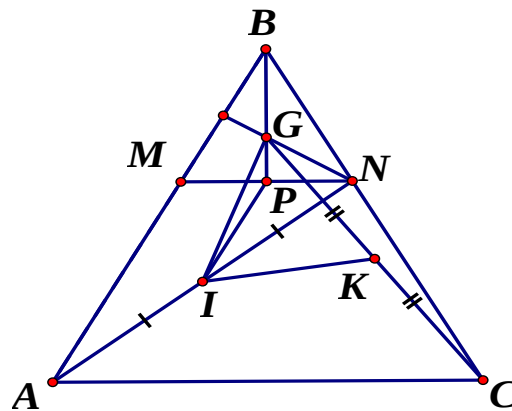
c) $\Delta AHB \sim \Delta BCD$ theo tỉ số $k = \frac{AH}{BC} = \frac{7.2}{9}$

Gọi S, S' lần lượt là diện tích của ΔBCD và ΔAHB , ta có: $S = 54\text{cm}^2$

$$\frac{S'}{S} = k^2 = \left(\frac{7.2}{9}\right)^2 \Rightarrow S' = \left(\frac{7.2}{9}\right)^2 \cdot 54 = 34,56(\text{cm}^2)$$

Vậy diện tích tam giác AHB bằng $34,56(\text{cm}^2)$

Câu 5.



Ta có BMN là tam giác đều, nên G là trọng tâm của ΔBMN . Gọi P là trung điểm của MN ,

Ta có: $\frac{GP}{GN} = \frac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm tam giác đều)

Lại có: $\frac{PI}{MA} = \frac{PI}{NC} = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{GP}{GN} = \frac{PI}{NC} = \frac{1}{2}$ (1)

Mặt khác: $GPI = GPM + MPI = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

Và $GNC = GNP + PNC = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$, do đó: $GPI = GNC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta GPI \sim \Delta GNC$ (c.g.c) $\Rightarrow PGI = NGC$ và $GI = \frac{1}{2}GC$

Mà $IGC = 60^\circ$ ($IGC = PGN = 60^\circ$)

Gọi K là trung điểm của GC thì $GI = GK = \frac{1}{2}GC$, suy ra ΔGIK đều nên $IK = \frac{1}{2}GC$

Điều này chứng tỏ ΔGIC vuông tại I

Vậy $GIC = 90^\circ; IGC = 60^\circ; GCI = 30^\circ$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 4. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

- a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$
- b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$. Tính $2a - 3b$

Câu 2. (2 điểm)

- a) Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương
- b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản

Câu 3. (3 điểm)

- a) Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Hãy rút gọn phân thức: $P = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$
- b) Tìm tích: $M = \frac{1^4 + 4}{3^4 + 4} \cdot \frac{5^4 + 4}{7^4 + 4} \cdot \frac{9^4 + 4}{11^4 + 4} \dots \frac{17^4 + 4}{19^4 + 4}$

Câu 4. (4 điểm)

- a) Cho $x = by + cz; y = ax + cz; z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0; xyz \neq 0$.

$$\text{CMR: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

- b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Câu 5. (3 điểm) Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức P
- b) Tìm x để $P < 1$
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Câu 6. (3 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, BC .

- a) Chứng minh rằng: $CE \perp DF$
- b) Gọi M là giao điểm của CE và DF . Chứng minh rằng: $AM = AD$

Câu 7. (3 điểm) Cho tam giác ABC . Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông $ABDE, ACFH$.

- a) Chứng minh rằng $EC = BH; EC \perp BH$
- b) Gọi M, N thứ tự là tâm của các hình vuông $ABDE, ACFH$. Gọi I là trung điểm của BC . Tam giác MNI là tam giác gì? Vì sao?

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

- a) $(x+1)(x-3)(x^2 - 2x + 2)$
- b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$ nên:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1)$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được $a = -12; b = -8$

$$\text{Vậy } 2a - 3b = 0$$

Câu 2.

a) Ta có: $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1$

$$a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

$= (n+1)^2$ là một số chính phương.

b) Gọi d là ƯCLN của $10n^2 + 9n + 4$ và $20n^2 + 20n + 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10n^2 + 9n + 4 : d \\ 20n^2 + 20n + 9 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20n^2 + 18n + 8 : d \\ 20n^2 + 20n + 9 : d \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 : d \Rightarrow d \text{ là số tự nhiên lẻ}$$

Mặt khác: $2n + 1 : d \Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 : d \Rightarrow 20n^2 + 20n + 5 : d \Rightarrow 4 : d$, mà d lẻ nên $d = 1$

Vậy phân số trên tối giản

Câu 3.

a) Từ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ chỉ ra được $x + y + z = 0$ hoặc $x = y = z$

$$\text{TH1: } x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z; x + z = -y; y + z = -x \Rightarrow P = -1$$

$$\text{TH2: } x = y = z \Rightarrow P = \frac{1}{8}$$

b) Nhận xét được: $n^4 + 4 = [(n-1)^2 + 1][((n+1)^2 + 1)]$. Do đó:

$$M = \frac{1 \cdot (2^2 + 1)}{(2^2 + 1) \cdot (4^2 + 1)} \cdot \frac{(4^2 + 1) \cdot (6^2 + 1)}{(6^2 + 1) \cdot (8^2 + 1)} \cdots \frac{(16^2 + 1) \cdot (18^2 + 1)}{(18^2 + 1) \cdot (20^2 + 1)} = \frac{1}{20^2 + 1} = \frac{1}{401}$$

Câu 4.

a) Từ giả thiết $\Rightarrow 2cz + z = x + y \Rightarrow 2cz = x + y - z$

$$\Rightarrow c = \frac{x + y - z}{2z} \Rightarrow c + 1 = \frac{x + y + z}{2z} \Rightarrow \frac{1}{c + 1} = \frac{2z}{x + y + z}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{1 + a} = \frac{2x}{x + y + z}; \frac{1}{1 + b} = \frac{2y}{x + y + z}. \text{ Khi đó: } \frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} = 2$$

$$\text{b) Từ } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

Khi đó:

$$P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3$$

Câu 5. a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

Rút gọn P ta có: $P = \frac{x^2}{x-1}$

$$b) P < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-1} < 0$$

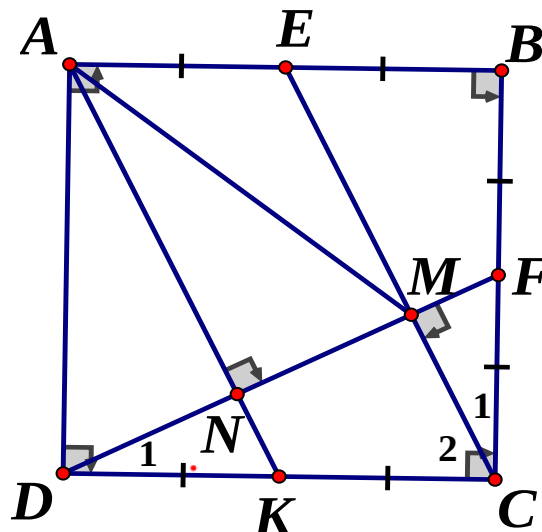
$$\Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy với $x < 1$ và $x \neq 0; x \neq -1$ thì $P < 1$

$$c) \text{ Ta có: } P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Khi $x > 1; x-1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. Vậy GTNN của P bằng 4 $\Leftrightarrow x = 2$

Câu 6.



a) Chứng minh được $\triangle CBE = \triangle DFC$ (c.g.c) $\Rightarrow C_1 = D_1$

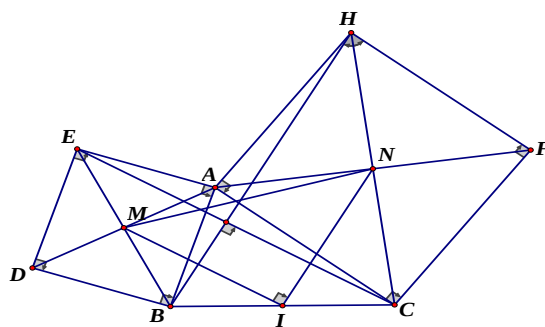
Lại có: $C_1 + C_2 = 90^\circ \Rightarrow D_1 + C_2 = 90^\circ \Rightarrow CE \perp DF$

b) Gọi K là trung điểm của CD. Chứng minh được tứ giác AECK là hình bình hành suy ra $AK \parallel CE$

Gọi N là giao điểm của AK và DF. $\triangle DCM$ có $DK = KC$ và $KN \parallel CM$ nên N là trung điểm của DM. Vì $CM \perp DM$ (câu a), $KN \parallel CM \Rightarrow KN \perp DM$

Tam giác $\triangle ADM$ có AN là đường cao đồng thời là trung tuyến nên là tam giác cân tại A. $\Rightarrow AM = AD$

Câu 7.



a) Chứng minh được: $\triangle EAC = \triangle BAH$ (c.g.c) $\Rightarrow EC = BH, \angle EAC = \angle ABH$

Gọi K và O thứ tự là giao điểm của EC với BA và BH

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle OBK$ có: $\angle AEK = \angle OBK; \angle AKE = \angle OKB \Rightarrow \angle EAK = \angle BOK$

$\Rightarrow \angle BOK = 90^\circ$. Vậy $EC \perp BH$

b) Ta có: $MI \parallel EC; MI = \frac{1}{2} EC; IN \parallel BH; IN = \frac{1}{2} BH$

Mà $EC \perp BH$ và $EC = BH$ nên $MI = IN$ và $MI \perp IN$

Vậy tam giác MIN vuông cân tại I

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 5. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tìm giá trị của a để $(21x^2 - 9x^3 + x + x^4 + a) : (x^2 - x - 2)$

b) Chứng minh rằng $n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ chia hết cho 24 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, (với $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$)

Tính giá trị của biểu thức $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định, rồi rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A = -1$

c) Tìm các giá trị của x để $A < 0$

Câu 4. (1,5 điểm)

Chứng minh rằng trong một hình bình hành, khoảng cách từ một điểm trên đường chéo đến hai cạnh kề (hai cạnh kề và đường chéo cùng đi qua một đỉnh của hình bình hành), tỉ lệ nghịch với hai cạnh ấy.

Câu 5. (2,0 điểm)

Gọi M là điểm nằm trong $\angle xOy = m^\circ (0 < m < 90)$. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của OM, PQ

- Chứng minh $HK \perp PQ$
- Tính số đo $\angle HPQ$ theo m

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- Thương: $x^2 - 8x + 15$ và dư: $a + 30$
Phép chia hết nên $a + 30 = 0 \Rightarrow a = -30$

b)

$$\begin{aligned} n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n &= n(n^3 - 2n^2 - n + 2) \\ &= n[n^2 \cdot (n-2) - (n-2)] \\ &= n(n^2 - 1)(n-2) = n(n-1)(n+1)(n-2) \end{aligned}$$

$n(n-1)(n+1)(n-2)$ là tích 4 số nguyên liên tiếp trong đó phải có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 4

Nên $n(n-1)(n+1)(n-2) : 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Vậy $n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n : 24$

Câu 2.

$$\begin{aligned} \text{a) } (a+b+c)^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ &= (a+b)^3 + 3(a+b)c \cdot (a+b+c) + c^3 = (a+b)^3 + c^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(-c) \quad (\text{Vì } a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \end{aligned}$$

b) Với $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$

Áp dụng kết quả câu a ta có: $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

$$\begin{aligned} \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} &= \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) \\ &= xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3 \end{aligned}$$

Câu 3.

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq \pm 2$

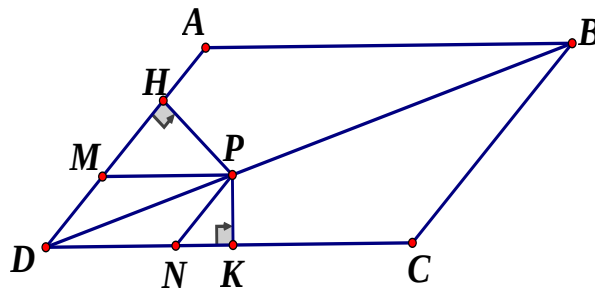
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right) = \frac{4x(2-x)+8x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{x-1-2(x-2)}{x(x-2)} \\ &= \frac{8x-4x^2+8x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{x-1-2x+4}{x(x-2)} = \frac{8x+4x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{3-x}{x(x-2)} \\ &= \frac{4x(2+x)}{(2+x)(2-x)} \cdot \frac{x(x-2)}{3-x} = \frac{4x^2}{x-3} \end{aligned}$$

$$b) \quad A = -1 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} = -1 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$c) \quad A < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

Vậy $x < 3; x \neq 0; x \neq \pm 2$ thì $A < 0$

Câu 4.



Kẻ $PH \perp AD; PK \perp CD; PM \parallel CD; PN \parallel AD$

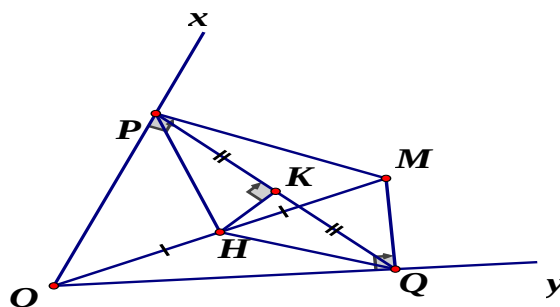
Chứng minh $\triangle HMP \sim \triangle KNP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{PM}{PN} \Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{DN}{PN} \text{ (do PMDN là hình bình hành)}$$

$$\text{Chứng minh } \triangle DNP \sim \triangle DCB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{PN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{DN}{PN} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{DC}{BC} \text{ (đpcm)}$$

Câu 5.



a) ΔMPO vuông tại P, đường trung tuyến $PH = \frac{1}{2}OM$

ΔMQO vuông tại Q, đường trung tuyến $QH = \frac{1}{2}OM$

$\Rightarrow PH = QH \Rightarrow \Delta HPQ$ cân tại H $\Rightarrow HK \perp PQ$

b) $MHQ = 2MOQ; MHP = 2MOP$

$\Rightarrow PHQ = 2POQ = 2m^0 \Rightarrow PHK = m^0 \Rightarrow HPQ = 90^0 - m^0$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 6. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm) Tìm x biết :

a) $\left|x - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}$

b) $-3^x = -6561$

c) $(2x-1)^{2012} = (2x-1)^{2010}$

Câu 2. (2 điểm)

a) Số tự nhiên $A = 1 + 2^{3^{2012}}$ là số nguyên tố hay hợp số ? Giải thích

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2028$

c) Tìm x, y, z biết: $10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 = 0$

Câu 3. (1,5 điểm)

Một khối 8 có $\frac{2}{3}$ số học sinh đội tuyển Toán bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh đội tuyển Anh và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh đội tuyển Văn. Đội tuyển Văn có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của hai đội tuyển kia là 38 học sinh. Tính số học sinh của mỗi đội tuyển ?

Câu 4. (1,5 điểm) Cho $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$ trong đó x, y, z là các số khác nhau và khác 0, Chứng minh rằng: $\frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$

Câu 5 (3 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Trên tia đối của tia AC lấy điểm I sao cho $AI = AM$.

a) Chứng minh rằng: $CM \perp BI$

b) Trên BC lấy điểm P sao cho $BP = 2CP$. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC có chứa điểm A, vẽ tia Px sao cho $\angle xPB = 60^0$. Tia Px cắt tia CA tại D. Tính số đo CBD

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$a) \left| x - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} < x - \frac{2}{3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

$$b) -3^x = -6561 \text{ hay } -3^x = -3^8 \Rightarrow x = 8$$

$$c) (2x-1)^{2012} = (2x-1)^{2010} \Leftrightarrow (2x-1)^{2012} - (2x-1)^{2010} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^{2010} \cdot [1 - (2x-1)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^{2010} \cdot (1-2x+1)(1+2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2-2x=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Câu 2.

$$a) 3^{2012} : 3 \text{ nên có thể viết } 3^{2012} = 3n (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A = 1 + 2^{3^{2012}} = 1^3 + 2^{3n} = 1^3 + (2^n)^3 = (1+2^n) \left[1 - 2^n + (2^n)^2 \right] \Rightarrow A \text{ là hợp số}$$

$$b) B = 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2028$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 8x + 16 + 2012$$

$$= (x+y)^2 + (x-4)^2 + 2012 \geq 2012$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của B là } 2012 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$c) 10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 + 6x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (4z^2 - 4xz + x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)^2 + (y-2)^2 + (2z-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \\ y-2=0 \\ 2z-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=2 \\ z=\frac{-1}{6} \end{cases}$$

Câu 3. Gọi số học sinh đội tuyển Toán, Anh, Văn thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}$)

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{(x+y)-z}{(18+16)-15} = \frac{38}{19} = 2$$

Tính đúng $x = 36; y = 32; z = 30$ và kết luận

Câu 4. Vì $xyz \neq 0$ nên: $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$

$$\Rightarrow \frac{x(m+n)}{xyz} = \frac{y(n+p)}{xyz} = \frac{z(p+m)}{xyz}$$

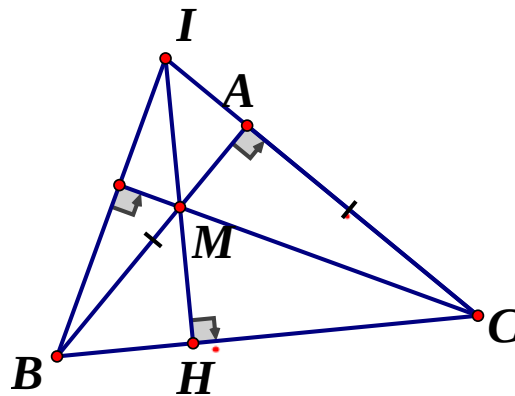
$$\text{hay: } \frac{m+n}{yz} = \frac{n+p}{xz} = \frac{p+m}{xy}$$

$$= \frac{(p+m)-(n+p)}{xy-yz} = \frac{(m+n)-(p+m)}{yz-xy} = \frac{(n+p)-(m+n)}{xz-yz}$$

$$= \frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$$

Câu 5.

a)



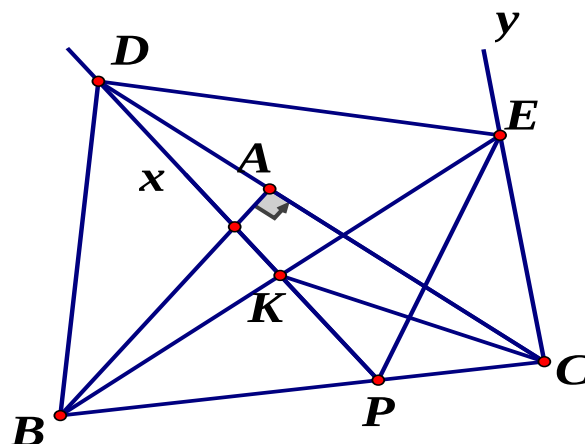
Tia IM cắt BC tại H

$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $C = 45^\circ$, $\triangle IAM$ vuông cân tại M nên $\hat{I} = 45^\circ$

$\triangle IHC$ có $C + \hat{I} = 90^\circ \Rightarrow H = 90^\circ \Rightarrow IH \perp BC$

Chứng minh được M là trực tâm $\triangle IBC \Rightarrow CM \perp BI$

b)



Gọi E là điểm đối xứng với B qua PD $\Rightarrow EP = PB = 2PC$

$\Rightarrow \triangle BPE$ cân tại P nên đường trung trực của PD cũng là phân giác

$\Rightarrow BPD = DPE = 60^\circ \Rightarrow EPC = 60^\circ$

Chứng minh được $\triangle EPC$ vuông tại C

Chứng minh được CD là phân giác của $\triangle PCE$

Chứng minh được ED là phân giác ngoài tại đỉnh E của $\triangle PCE$

Chứng minh được $\angle EP = 150^\circ \Rightarrow \angle DEP = 75^\circ$

Chứng minh được $\angle PBD = 75^\circ$ hay $\angle CBD = 75^\circ$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 7. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x+y \neq 0; y \neq 0$)

b) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2017$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

b) Cho $A = n^6 + 10n^4 + n^3 + 98n - 6n^5 - 26$ và $B = 1 + n^3 - n$. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì thương của phép chia A cho B là bội số của 6

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho a và b thỏa mãn: $a+b=1$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^3 + b^3 + 3ab$

b) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z}$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Qua điểm D thuộc cạnh BC , vẽ đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F .

a) Chứng minh $DE + DF = 2AM$

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại N . Chứng minh N là trung điểm của EF

c) Ký hiệu S_X là diện tích của hình X . Chứng minh $S_{FDC}^2 \geq 16S_{AMC} \cdot S_{FNA}$

Câu 5. (1,0 điểm)

Trong một đề thi có 3 Câu toán A, B, C . Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 Câu đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được Câu A thì số thí sinh đã giải được Câu B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được Câu C
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A nhiều hơn số thí sinh giải được Câu A và thêm Câu khác là 1 người
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A bằng số thí sinh chỉ giải được Câu B cộng với số thí sinh chỉ giải được Câu C .

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được Câu B?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) $x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = 0$

Vì $x+y \neq 0$ nên $x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$

Khi đó $P = \frac{2y-y}{2y+y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$

b) Ta có:

$$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+3) = 7$$

Vì x, y nguyên dương nên

$$x+y+3 > x-y-1 > 0 \Rightarrow x+y+3=7 \text{ và } x-y-1=1 \Rightarrow x=3; y=1$$

Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x, y) = (3, 1)$

Câu 2.

a) Ta có:

$$P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2017 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2017$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x) = (t-5)(t+3) = 2017 = t^2 - 2t + 2002$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 2000$ cho t ta có số dư là 2002

b) Thực hiện phép chia, ta được:

Thương của A chia cho B là $n^3 - 6n^2 + 11n - 6$

Ta có:

$$n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = n^3 - n + 12n - 6n^2 - 6$$

$$= (n-1)n(n+1) + 6(2n - n^2 - 1)$$

Vì $(n-1)n(n+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6

Và $6(2n - n^2 - 1)$ chia hết cho 6

$\Rightarrow$ Thương của phép chia A cho B là bội số của 6

Câu 3.

a) Ta có: $B = a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + b^3 + 3ab.(a+b) = (a+b)^3 = 1$ (Vì $a+b=1$)

b) $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

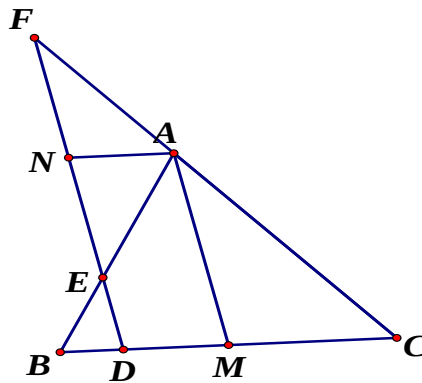
$$\text{Ta có: } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1 \right)$$

Bởi vậy :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy Min} P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Câu 4.



a) Lập luận được: $\frac{DF}{AM} = \frac{DC}{MC}$ (do $AM \parallel DF$) (1)

$$\frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \text{ (do } AM \parallel DE \text{)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{DE + DF}{AM} = \frac{BD + DC}{BM} = \frac{BC}{BM} = 2 \quad (MB = MC)$$

$$\Rightarrow DE + DF = 2AM$$

b) AMDN là hình bình hành

$$\text{Ta có: } \frac{NE}{ND} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{NF}{ND} = \frac{FA}{AC} = \frac{DM}{BM} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{NE}{ND} = \frac{NF}{ND} \Rightarrow NE = NF$$

$$\text{c) } \triangle AMC \sim \triangle FDC \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{FDC}} = \left(\frac{AM}{FD} \right)^2 = \left(\frac{ND}{FD} \right)^2 \quad (\text{Do } AM = ND)$$

$$\triangle FNA \sim \triangle FDC \Rightarrow \frac{S_{FNA}}{S_{FDC}} = \left(\frac{FN}{FD} \right)^2$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{\text{AMC}}}{S_{\text{FDC}}} \cdot \frac{S_{\text{FNA}}}{S_{\text{FDC}}} = \left(\frac{\text{ND}}{\text{FD}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\text{FN}}{\text{FD}} \right)^2 \leq \frac{1}{16} \left(\frac{\text{ND}}{\text{FD}} + \frac{\text{FN}}{\text{FD}} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow S_{\text{FDC}}^2 \geq 16 S_{\text{AMC}} \cdot S_{\text{FNA}}$$

$$\text{Do } (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x+y)^4 \geq 16x^2y^2 \text{ với } x \geq 0; y \geq 0)$$

Câu 5.

Gọi a là số học sinh chỉ giải được Câu A, b là số thí sinh chỉ giải được Câu B, c là số thí sinh chỉ giải được Câu C, d là số thí sinh giải được 2 Câu B và C nhưng không giải được Câu A. Khi đó số thí sinh giải được Câu A và thêm ít nhất một trong hai Câu B và C là : $25 - a - b - c - d$

Theo Câu ra ta có:

$$b + d = 2(c + d) \quad a = 1 + 25 - a - b - c - d \text{ và } a = b + c$$

$$\text{Từ các đẳng thức trên ta có: } \begin{cases} 4b + c = 26 \\ d = b - 2c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy số thí sinh chỉ giải được Câu B là 6 thí sinh.

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 8. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

- a) Cho biểu thức $A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác thì $A > 0$
- b) Chứng minh rằng $a^5 - a : 30 (a \in \mathbb{Z})$

Câu 2. (2 điểm)

$$\text{Giải phương trình: } |x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$$

Câu 3. (1,5 điểm)

$$\text{Cho } a^3 + b^3 = 2. \text{ Chứng minh rằng } a + b \leq 2$$

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho hình thang ABCD ($AB // CD$), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Một đường thẳng d qua O song song với 2 đáy cắt hai cạnh bên AD, BC lần lượt tại E và F.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}.$$

Câu 5. (2 điểm)

Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho $AN = CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh rằng KD là tia phân giác của $\angle AKC$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned}
A &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - (2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4) \\
&= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\
&= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)
\end{aligned}$$

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên

$$a+b+c > 0; a+b-c > 0; c+a-b > 0; c-a+b > 0 \Rightarrow A > 0$$

$$\begin{aligned}
b) \quad a^5 - a &= a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5] \\
&= a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1)
\end{aligned}$$

Do tích của 5 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

Suy ra $a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) : 30$ và $5a(a+1)(a-1) : 30$.

Vậy $a^5 - a : 30$

Câu 2.

$$\begin{aligned}
&|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2| \\
&\Leftrightarrow |(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| = 2x - 4 \quad (1)
\end{aligned}$$

Do

$$\begin{aligned}
&|(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| \geq 0 \quad (\forall x, y) \\
&\Rightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2
\end{aligned}$$

Với $x \geq 2$ thì $|(x-y+1)^2 + x - 2| = (x-y+1)^2 + x - 2; |(x-1)(x-2)| = x^2 - 3x + 2$

Khi đó từ phương trình (1)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x-y+1)^2 + x - 2 + (x-1) = 2(x-2) \Leftrightarrow (x-y+1)^2 = (x-2)(2-x+1-1) = -(x-2)^2 \\
&\Leftrightarrow (x-y+1)^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ và } x-y+1=0 \Leftrightarrow x=2; y=3(\text{tm})
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $(x; y) = (2; 3)$

Câu 3.

Giả sử $a+b > 2 \Leftrightarrow (a+b)^3 > 2^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3ab(a+b) > 8(a^3 + b^3 = 2)$

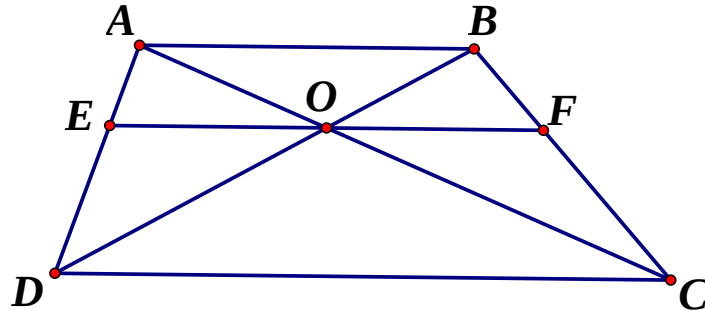
$$\Leftrightarrow 3ab(a+b) > 6 \Leftrightarrow ab(a+b) > 2 \Leftrightarrow ab(a+b) > a^3 + b^3 (a^3 + b^3 = 2)$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b) > (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow ab > a^2 - ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 < 0 \text{ (Vô lý')}$$

Vậy $a+b \leq 2$

Câu 4.



$$\text{Xét } \triangle ABD \text{ có } OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{OD}{DB} \text{ (Hệ quả định lý Talet) (1)}$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{CD} = \frac{OB}{BD} \text{ (hệ quả định lý Talet) (2)}$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } OF \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC} \text{ (hệ quả định lý Talet) (3)}$$

$$\text{Xét } \triangle ABD \text{ có } OE \parallel DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AC} \text{ (Hệ quả định lý Talet) (4)}$$

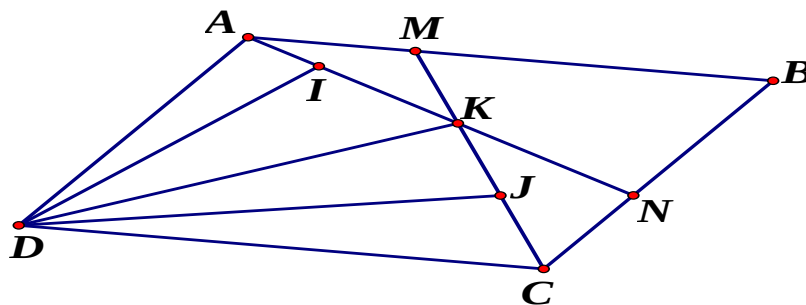
Từ (1), (2), (3), (4) suy ra

$$\frac{OE}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OF}{AB} + \frac{OE}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OE}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC} \Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} = \frac{2}{EF}$$

Câu 5.



Kẻ DI, DJ lần lượt vuông góc với AK, CK

$$\text{Ta có: } S_{\triangle AND} = \frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} S_{\triangle ABCD} \text{ (Do chung đáy AD, cùng chiều cao hạ từ N) (1)}$$

$$S_{\triangle CDM} = \frac{1}{2} CM \cdot DJ = \frac{1}{2} S_{\triangle ABCD} \text{ (Do chung đáy CD, cùng chiều cao hạ từ M) (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{1}{2}AN.DI = \frac{1}{2}CM.DJ \Leftrightarrow DI = DJ$ (Vì $AN = CM$)

$\Rightarrow \triangle DIK = \triangle DJK$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow IKD = JKD$

$\Rightarrow KD$ là tia phân giác $\angle AKC$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 9. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1.

- Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1}$
- Đặt $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n
- Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13

Câu 2. Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$b) B = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

$$\text{Câu 3. Tính tổng: } S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2007.2009}$$

Câu 4. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 2009$. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến x, y, z :

$$\frac{2009x}{xy + 2009x + 2009} + \frac{y}{yz + y + 2009} + \frac{z}{xz + z + 1}$$

Câu 5. Giải phương trình:

$$\frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

Câu 6. Cho tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm của BC . Một góc $\angle xMy = 60^\circ$ quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh

$$a) BD.CE = \frac{BC^2}{4}$$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc $\angle BDE$ và $\angle CED$

c) Chu vi tam giác ADE không đổi.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Thực hiện chia $m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1} = n + \frac{1}{n + 1}$

Để m nguyên với n nguyên khi $n + 1 \in U(1) = \{\pm 1\}$

Khi đó $\begin{cases} n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow m = 1 \\ n + 1 = -1 \Rightarrow n = -2 \Rightarrow m = -3 \end{cases}$

b)

$$\begin{aligned} A &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n + 1)^3 + 2(n + 1) = \dots \\ &= n(n + 1)(n + 2) + 3(n + 1) \end{aligned}$$

Khi đó: $3(n + 1) : 3$; $n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 3 số nguyên dương liên tiếp nên chia hết cho 3 $\Rightarrow A : 3$

c) $a = 13k + 2, b = 13n + 3$

$$a^2 + b^2 = (13k + 2)^2 + (13n + 3)^2 = \dots = 13(13k^2 + 4k + 13n^2 + 4n + 1) : 13$$

Câu 2.

a) Rút gọn $A = 1$

b) Rút gọn $B = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Câu 3.

$$S = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2009} \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2009} \right) = \frac{1004}{2009}$$

Câu 4.

$$\begin{aligned} & \frac{2009x}{2009 + 2009x + xy} + \frac{y}{xyz + y + yz} + \frac{z}{1 + z + zx} \\ &= \frac{xy \cdot xz}{xy(xz + z + 1)} + \frac{1}{1 + z + zx} + \frac{z}{1 + z + zx} = \frac{1 + z + xz}{1 + z + zx} = 1 \end{aligned}$$

Câu 5.

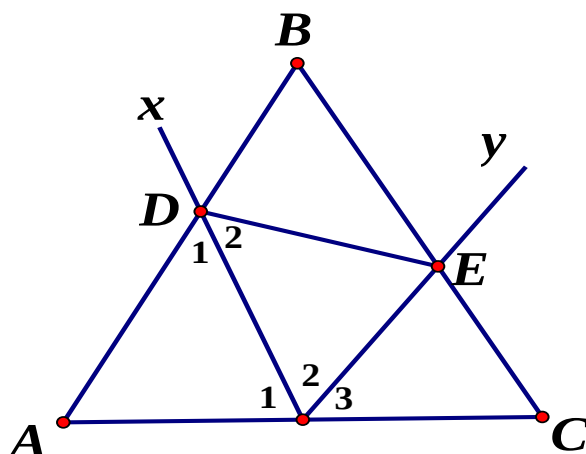
$$\frac{59-x}{41} + 1 + \frac{57-x}{43} + 1 + \frac{55-x}{45} + 1 + \frac{53-x}{47} + 1 + \frac{51-x}{49} + 1 = 0$$

.....

$$\Leftrightarrow (100-x) \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

Câu 6.



a) Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle CEM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có: $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

b) Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow D_1 = D_2$, do đó DM là tia phân giác BDE

Chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác CED

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC

Chứng minh $DH = DI, EI = EK$ Suy ra chu vi $ADE = 2AH$ không đổi

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 10. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $A = \left[n^3 (n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

b) Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (6 điểm)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (C khác A). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC , đường thẳng này cắt By tại D . Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD)

- Chứng minh $OA^2 = AC \cdot BD$
- Chứng minh tam giác AMB vuông
- Gọi N là giao điểm của BC và AD . Chứng minh $MN \parallel AC$

Câu 5. (2 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1) - 3x(x+1)}{3x} \right] : \frac{x-1}{x} \\ A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ A &= 2 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

b) Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$, Ta có: $A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của 2 $\Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Đối chiếu điều kiện tìm được $x = 2$ hoặc $x = 3$ thỏa mãn

Câu 2.

a) Ta có: $A = \left[n^3(n^2-7)^2 - 36n \right]$

$$\begin{aligned}
&= n \left[n(n^2 - 7) - 6 \right] \left[n(n^2 - 7) + 6 \right] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6) \\
&= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6) = n \left[(n^2 - 1) - 6(n+1) \right] \left[n(n^2 - 1) - 6(n-1) \right] \quad \text{Do đó} \\
&= n(n+1)(n^2 - n - 6)(n-1)(n^2 + n - 6) = n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3)
\end{aligned}$$

A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A:7 \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\text{b) } P &= n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\
&= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = \left[(n-1)^2 + 1 \right] \left[(n+1)^2 + 1 \right]
\end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên nên $(n+1)^2 + 1 \geq 2$. Như vậy muốn P là số nguyên tố thì ta phải có

$$(n-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$$

Khi đó $P = 5$ là số nguyên tố

Câu 3.

a) Ta có:

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+5)(x+6)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{TXĐ: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 & (\text{tm}) \\ x = 2 & (\text{tm}) \end{cases}$$

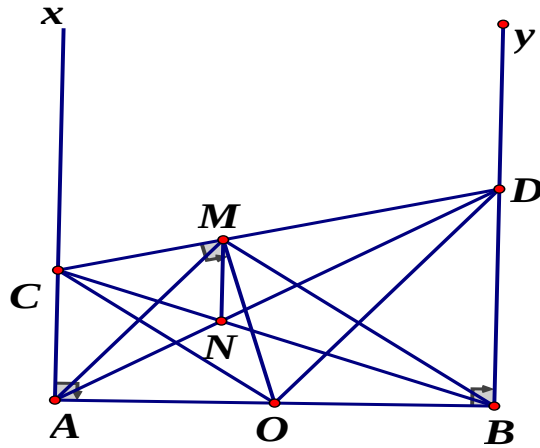
b) Đặt $b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$. Ta có: $x, y, z > 0$

$$\text{Từ đó suy ra: } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Thay vào ta được: } A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \Rightarrow A \geq 3. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c$$

Câu 4.



a) Xét $\triangle ACO$ và $\triangle BOD$ có:

$$\angle A = \angle B = 90^\circ; \angle COA = \angle ODB \text{ (cùng phụ với } \angle DOB)$$

$$\text{Nên } \triangle ACO \sim \triangle BOD (g.g) \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BD}{BO} \Rightarrow AO \cdot BO = AC \cdot BD$$

$$\text{Mà } AO = BO \text{ nên } AO^2 = AC \cdot BD$$

b) Xét $\triangle CMO$ và $\triangle OMD$ có:

$$\angle CMO = \angle OMD = 90^\circ; \angle OCM = \angle DOM \text{ (cùng phụ với } \angle COM)$$

$$\Rightarrow \triangle CMO \sim \triangle OMD \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{OM}{MD} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \triangle ACO \sim \triangle BOD \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{AO}{OD} \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{OB}{BD} \text{ (Do } AO = OB) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{OM}{MD} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \triangle OMD \sim \triangle OBD$$

$$\Rightarrow \angle MOD = \angle BOD \Rightarrow \triangle OMD = \triangle OBD \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow OM = OB = OA \Rightarrow \triangle AMB \text{ vuông tại } M$$

$$\text{c) Ta có: } AC \parallel BD \text{ (cùng vuông góc với } AB) \Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{AC}{BD}$$

$$\text{Mà } BD = MD (\triangle OMD = \triangle OBD)$$

$$\text{Tương tự ta chứng minh } AC = CM$$

$$\text{Nên } \frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MN \parallel BD \parallel AC$$

Câu 5.

$$\text{- Nhận xét: có } a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(c + a)$$

$$\text{Tương tự: } b + ca = (b + a)(b + c); \quad c + ab = (c + a)(c + b)$$

$$\text{Do đó: VT} = \frac{(a + b)(a + c)}{b + c} + \frac{(b + a)(b + c)}{c + a} + \frac{(c + a)(c + b)}{a + b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} \geq 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$$

Vậy $2.VT \geq 4(a+b+c) = 4 \Leftrightarrow VT \geq 2$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 11. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5-x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x-5}{x^2 + 5x} - \frac{2x}{5-x}$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để P có giá trị là một số nguyên.

Câu 2. (3 điểm)

Giải phương trình sau:

$$\frac{2010x + 2010}{x^2 + x + 1} - \frac{2010x - 2010}{x^2 - x + 1} = \frac{2011}{x(x^4 + x^2 + 1)}$$

Câu 3. (3 điểm)

- Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$$

- Cho a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 8$. Chứng minh $-4 \leq a+b \leq 4$

Câu 4. (8 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2a. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm D bất kỳ, qua O vẽ hai đường thẳng vuông góc với DO tại O cắt By tại C

- Chứng minh $BC.AD = a^2$
- Chứng minh DO và CO lần lượt là tia phân giác của $\angle ADC$ và $\angle BCD$
- Vẽ $OH \perp CD$ ($H \in CD$). Gọi I là giao điểm của AC và BD, E là giao điểm của AH và DO, F là giao điểm của BH và CO. Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng
- Xác định vị trí của điểm D trên tia Ax để tích $DO.CO$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 5. (2 điểm)

Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

a) Tìm được ĐKXĐ của P là : $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x}{(x+5)(x-5)} - \frac{x-5}{x(x+5)} \right) : \frac{2x-5}{x(x+5)} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{x^2 - (x-5)^2}{x(x+5)(x-5)} : \frac{2x-5}{x(x+5)} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{(x-x+5)(x+x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x(x+5)}{2x-5} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{5}{x-5} + \frac{2x}{x-5} = \frac{5+2x}{x-5} \end{aligned}$$

b)

$$P \in \mathbb{Z} \begin{cases} x \neq 0; x \neq \pm 5; x \in \mathbb{Z} (*) \\ \frac{5+2x}{x-5} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ta có: $\frac{5+2x}{x-5} = 2 + \frac{15}{x-5}$. Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(15) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15\}$

Mà x lớn nhất nên $x-5$ lớn nhất. Do đó $x-5 = 15 \Leftrightarrow x = 20$ (thỏa mãn $(*)$)

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của $x = 20$ để P có giá trị là một số nguyên.

Câu 2. Ta có: $\frac{2010x+2010}{x^2+x+1} - \frac{2010x-2010}{x^2-x+1} = \frac{2011}{x(x^4+x^2+1)}$ (1)

Ta có: $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x; \quad x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$

Điều kiện xác định của phương trình (1) là : $x \neq 0$

Ta có: $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$

Quy đồng mẫu hai vế và khử mẫu:

$(1) \Rightarrow 2010x(x+1)(x^2-x+1) - 2010x(x-1)(x^2+x+1) = 2011$

$\Leftrightarrow 2010x(x^3+1) - 2010x(x^3-1) = 2011 \Leftrightarrow 2010x(x^3+1-x^3+1) = 2011$

$\Leftrightarrow 2010x \cdot 2 = 2011 \Leftrightarrow x = \frac{2011}{4020} \quad (\text{TM})$

Câu 3.

$$\begin{aligned}
 a) \quad & a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) = a^4(b-c) - b^4(a-c) + c^4(a-b) \\
 & = a^4(b-c) - b^4(a-b+b-c) + c^4(a-b) \\
 & = a^4(b-c) - b^4(a-b) - b^4(b-c) + c^4(a-b) \\
 & = (b-c)(a^4 - b^4) - (a-b)(b^4 - c^4) \\
 & = (b-c)(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) - (a-b)(b-c)(b+c)(b^2 + c^2) \\
 & = (a-b)(b-c)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 - b^3 - bc^2 - b^2c - c^3) \\
 & = (a-b)(b-c)[(a-c)(a^2 + ac + c^2) + b^2(a-c) + b(a-c)(a+c)] \\
 & = (a-b)(b-c)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)
 \end{aligned}$$

b) Ta có:

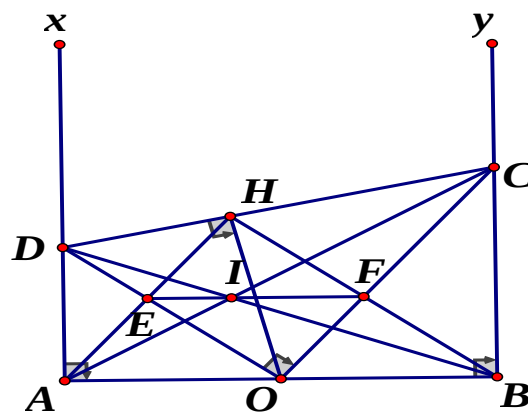
$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ mà } a^2 + b^2 \leq 8 \text{ nên } 2ab \leq 8$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 8 + 8 = 16$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow (a+b+4)(a+b-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq a+b \leq 4 \text{ (đpcm)}$$

Câu 4.



a) Chứng minh $\triangle ADO \sim \triangle BOC$ (cùng phụ với $\angle AOD$)

$$\text{Chứng minh } \triangle ADO \sim \triangle BOC \text{ (gg)} \Rightarrow \frac{OA}{BC} = \frac{AD}{OB} \Rightarrow BC \cdot AD = a^2$$

b) Chứng minh $\frac{OB}{BC} = \frac{OD}{OC}$. Từ đó chứng minh $\triangle ODC \sim \triangle BOC$ (c.g.c)

Suy ra và kết luận CO là tia phân giác của $\angle BCD$

Chỉ ra $\triangle ADO \sim \triangle ODC$ (cùng đồng dạng với $\triangle BOC$)

Chứng minh DO là tia phân giác của $\angle ADC$

c) Chứng minh $\triangle \text{vuông } OBC = \triangle \text{vuông } OHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow CB = CH$$

Chứng minh OC là đường trung trực HB

Tương tự chứng minh $AD = DH$ và OD là trung trực của HA

Chứng minh EF là đường trung bình $\triangle AHB \Rightarrow EF // AB$

$$\text{Chỉ ra } EH // OC \Rightarrow \frac{DE}{EO} = \frac{DH}{HC} = \frac{AD}{BC}$$

$$AD // BC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DI}{IB}$$

$$\text{Suy ra } \frac{DE}{EO} = \frac{DI}{IB}. \text{ Áp dụng định lý Talet đảo cho } \triangle DOB \Rightarrow EI // OB$$

Theo tiên đề Oclit kết luận E, I, F thẳng hàng

d) Chỉ ra $2S_{\text{DOC}} = OC \cdot OD = OH \cdot DC = a \cdot DC$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow DC \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow DC \perp Ax \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình chữ nhật} \Leftrightarrow AD = BC; CD = AB$$

$$\text{Mà } BC \cdot AD = a^2 \Leftrightarrow AD^2 = a^2 \Leftrightarrow AD = a$$

Xét tam giác vuông AHB có HO là đường trung tuyến thuộc cạnh huyền

$$\Rightarrow OH = \frac{AB}{2} = a$$

Suy ra GTNN của $OD \cdot OC$ bằng $2a^2$ khi và chỉ khi $D \in Ax$ và $AD = a$.

Câu 5.

$$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = -3x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 = -3x^2 + 1$$

$$\text{Ta có: } -3x^2 + 1 \leq 1 \forall x \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq A \leq 2$$

$$A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0. \text{ Vậy } \min A = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } \max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 12. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1. $8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15$

2. $x^{11} + x^7 + 1$

Câu 2. (4 điểm) Giải phương trình:

1. $\frac{8}{81} \cdot \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x \right)^3 = \frac{9}{64}$

$$2. \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$$

Câu 3. (2 điểm)

Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2010$ cho đa thức $x^2+10x+21$

Câu 4. (6 điểm)

Cho đa thức ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1. Chứng minh rằng: $\triangle BEC \sim \triangle ADC$. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$
2. Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác $\triangle BHM, \triangle BEC$ đồng dạng. Tính số đo của $\angle AHM$
3. Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$

Câu 5. (4 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD. Vẽ BH vuông góc với AC ($H \in AC$). Gọi M là trung điểm của AH, K là trung điểm của CD. Chứng minh rằng: $BM \perp MK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$1.1 \quad 8(x^2+3x+5)^2 + 7(x^2+3x+5) - 15$$

Đặt $t = x^2 + 3x + 5$, ta có:

$$\begin{aligned} 8(x^2+3x+5)^2 + 7(x^2+3x+5) - 15 &= 8t^2 + 7t - 15 \\ &= 8t^2 - 8t + 15t - 15 = 8t(t-1) + 15(t-1) = (t-1)(8t+15) \end{aligned}$$

Thay $t = x^2 + 3x + 5$ vào đa thức ta có:

$$\begin{aligned} 8(x^2+3x+5)^2 + 7(x^2+3x+5) - 15 &= (x^2+3x+5-1)[8(x^2+3x+5)+15] \\ &= (x^2+3x+4)(8x^2+24x+55) \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned} x^{11} + x^7 + 1 &= (x^{11} + x^{10} + x^9) + (-x^{10} - x^9 - x^8) \\ &+ (x^8 + x^7 + x^6) + (-x^6 - x^5 - x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) + (-x^3 - x^2 - x) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^9(x^2 + x + 1) - x^8(x^2 + x + 1) + x^6(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1) \cdot (x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 + 1) \end{aligned}$$

2.

$$2.1. \quad \frac{8}{81} \cdot \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x \right)^3 = \frac{9}{64}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x \right)^3 = \frac{9}{64} \cdot \frac{81}{8} = \left(\frac{9}{8} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{9}{8} + \frac{5}{16}}{-\frac{3}{8}} = \frac{-23}{6}$$

$$2.2 \quad \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Đặt $t = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = t - 1$, DK: $t \geq 2$

Phương trình trở thành:

$$\frac{t-2}{t-1} + \frac{t-1}{t} = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6t(t-2)}{t(t-1)} + \frac{6(t-1)(t-1)}{t} = \frac{7t(t-1)}{6t(t-1)}$$

$$\Rightarrow 6t^2 - 12t + 6t^2 - 12t + 6 = 7t^2 - 7t$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 17t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3) \left(t - \frac{2}{5} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (TM)} \\ t = \frac{2}{5} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = 0; x = -2$

Câu 3.

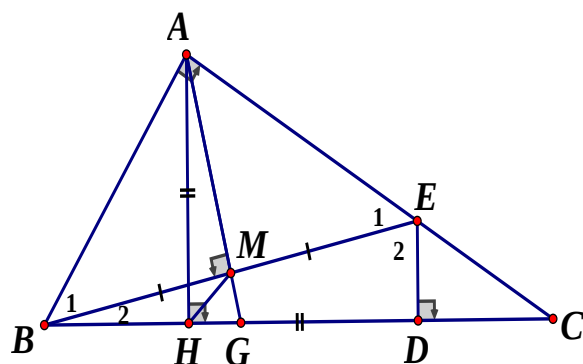
$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2010 \\ \text{Ta có:} \quad &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2010 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$, biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x) = (t-5)(t+3) + 2010 = t^2 - 2t + 1995$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1995$ cho t ta có số dư là 1995

Câu 4.



4.1 $\triangle CDE$ và $\triangle CAB$ có: C chung; $\angle CDE = \angle CAB = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}.$$

Hai tam giác ADC và BEC có:

$$\text{C chung; } \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} (\text{cmt}) \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BEC (\text{c.g.c})$$

Suy ra: $\angle BEC = \angle ADC = 135^\circ$ (Vì $\triangle AHD$ vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $\angle AEB = 45^\circ$, do đó $\triangle ABE$ vuông cân tại A

$$\text{Suy ra } BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$$

$$4.2 \text{ Ta có: } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} \text{ (do } \triangle BEC \sim \triangle ADC)$$

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ ($\triangle AHD$ vuông cân tại H)

$$\text{Nên } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE} \text{ (Do } \triangle BHM \sim \triangle CBA)$$

$$\text{Do đó: } \triangle BHM \sim \triangle BEC (\text{c.g.c}) \Rightarrow \angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$$

4.3 Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là tia phân giác góc BAC

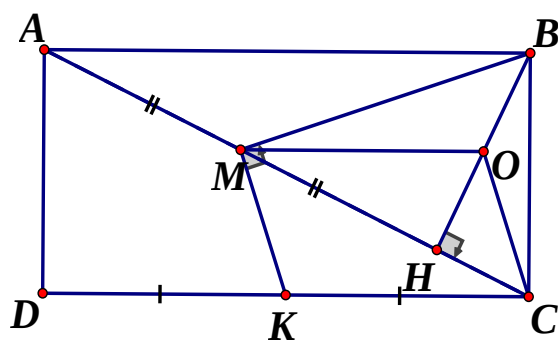
$$\text{Suy ra } \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC} \text{ mà } \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} (\triangle ABC \sim \triangle DEC)$$

$$\text{Ta lại có: } ED \parallel AH \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{AH}{HC}$$

$$\text{Mà } HD = HC \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{AH}{HC} = \frac{HD}{HC}$$

$$\Rightarrow \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GC + GB} = \frac{HD}{HC + HD} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{HC + AH}$$

Câu 5.



Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BH

Ta có M, O lần lượt là trung điểm của AH, BH nên: MO là đường trung bình ΔHAB

Vậy $MO = \frac{1}{2} AB, MO \parallel AB$

Mà $AB = CD, AB \parallel CD, KC = \frac{1}{2} CD$

Do đó: $MO = KC, MO \parallel KC$, suy ra tứ giác MOCK là hình bình hành.

Từ đó có: $CO \parallel MK$

Ta có: $MO \parallel KC, KC \perp CB \Rightarrow MO \perp CB$

Tam giác MBC có $MO \perp CB, BH \perp MC$ nên O là trực tâm $\Delta MBC \Rightarrow CO \perp BM$

Ta có: $CO \perp BM$ và $CO \parallel MK$ nên $BM \perp MK$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 13. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

1. $x^2 + 7x + 6$

2. $x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

2) $8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$

Câu 3. (2 điểm)

1. CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

2. Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2008$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Câu 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

- 1) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$
- 2) Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của AHM
- 3) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1)

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 6 &= x^2 + x + 6x + 6 \\ &= x(x+1) + 6(x+1) = (x+6)(x+1) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008 &= x^4 + x^2 + 2007x^2 + 2007x + 2007 + 1 \\ &= x^4 + x^2 + 1 + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1) - x^2 + 2007(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2008) \end{aligned}$$

Câu 2.

$$2.1 \quad x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0 \quad (1)$$

Nếu $x \geq 1$: $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$)

$$x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0$$

$$\text{Nếu } \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{ktm}) \\ x = 3 & (\text{ktm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$

2.2

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{ktm}) \\ x = -8 (\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$

Câu 3.

3.1 Ta có:

$$A = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)$$

Mà $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (BĐT Cô si)

Do đó: $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Vậy $A \geq 9$

3.2 Ta có:

$$P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2008$$

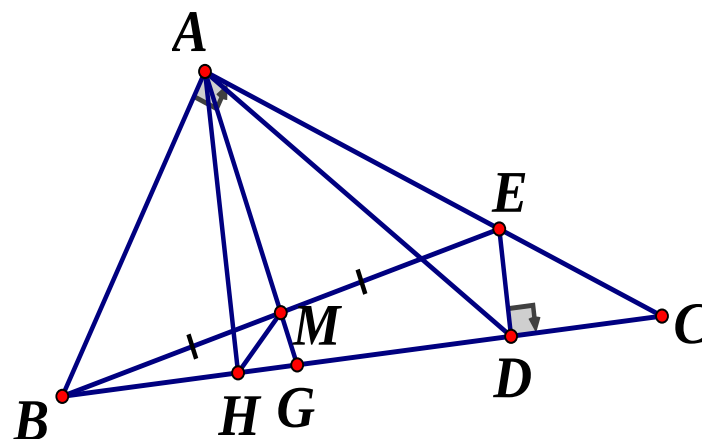
$$= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2008$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3$; $t \neq -7$), Biểu thức $P(x)$ được viết lại

$$P(x) = (t-5)(t+3) + 2008 = t^2 - 2t + 1993$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1993$ cho t ta có số dư là 1993

Câu 4.



- 1) Hai tam giác ADC và BEC có: C chung;

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \text{ (hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng)}$$

Do đó $\triangle ADC \sim \triangle BEC$

Suy ra $\angle BEC = \angle ADC = 135^\circ$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $\angle AEB = 45^\circ$, do đó $\triangle ABE$ vuông cân tại A

$$\text{Suy ra: } BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$$

- 2) Ta có $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC}$ (do $\triangle BEC \sim \triangle ADC$)

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

$$\text{Nên } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE} \text{ (do } \triangle ABH \sim \triangle CBA)$$

Do đó: $\triangle BHM \sim \triangle BEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$

3) Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là tia phân giác BAC

$$\text{Suy ra: } \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}, \text{ mà } \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} \text{ (} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{)} = \frac{AH}{HC} \text{ (} ED \parallel AH \text{)} = \frac{HD}{HC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 14. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(x+4)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5\right) = (3-x)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5\right)$

b) Giải bất phương trình: $x + \frac{1}{x} < 2$

Câu 2. (2,0 điểm)

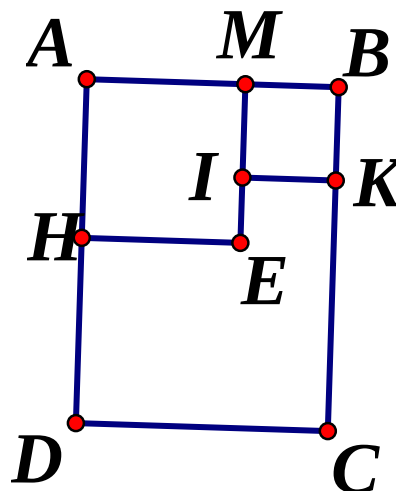
a) Tính giá trị của biểu thức sau: $\frac{x^{16} - 1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}$ với $x = 2011$

b) Cho $(x+3y)^3 - 6(x+3y)^2 + 12(x+3y) = -19$

Tìm giá trị của biểu thức $x+3y$

Câu 3. (1,0 điểm)

Một trường học được xây dựng trên khu đất hình chữ nhật ABCD có $AB = 50\text{m}$, $BC = 200\text{m}$. Ở phía chiều rộng AB tiếp giáp đường chính, người ra sử dụng hai lô đất hình vuông AMEH, BMIK để xây dựng phòng làm việc và nhà để xe. Diện tích còn lại để xây phòng học và các công trình khác (như hình vẽ). Tính diện tích lớn nhất còn lại để xây phòng học và các công trình khác.



Câu 4. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x^3-8}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x^2-4} \right) : \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P
- Tìm các giá trị của x để P > 0

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 8cm, AD = 6cm. Gọi H là hình chiếu của A trên BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH, BC

- Tính diện tích tứ giác ABCH
- Chứng minh AM ⊥ MN.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$a) (x+4) \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5 \right) = (3-x) \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x-1)(x-1)(2x+3) = \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 1 \\ x = -1,5 \end{cases}$$

$$b) x + \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} < 2, DK: x \neq 0$$

$$x > 0; x^2+1 < 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 < 0 \text{ (ktm)}$$

$$x < 0: x^2+1 > 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 \text{ (đúng } \forall x < 0)$$

Vậy $x < 0$

Câu 2.

a)

$$x^{16}-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)} = x-1$$

Kết quả 2010

$$(x+3y)^3 - 6(x+3y)^2 + 12(x+3y) - 8 = -27$$

$$b) \Leftrightarrow (x+3y-2)^3 = (-3)^3$$

$$\Rightarrow x+3y-2 = -3 \Rightarrow x+3y = -1$$

Câu 3. Đặt : AM = a, MB = b $\Rightarrow (a+b)^2 = 50^2$

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 = 50^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 1250$$

Diện tích nhỏ nhất $S_{AMEH} + S_{BIMK} = 1250(m^2)$

Diện tích lớn nhất còn lại: $10000 - 1250 = 8750 (\text{m}^2)$

Câu 4. a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$

$$\frac{x^3 - 8}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \cdot \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+2)^2} = \frac{x(x+2) - (x^2 + 2x + 4)}{(x+2)^2} = \frac{-4}{(x+2)^2}$$

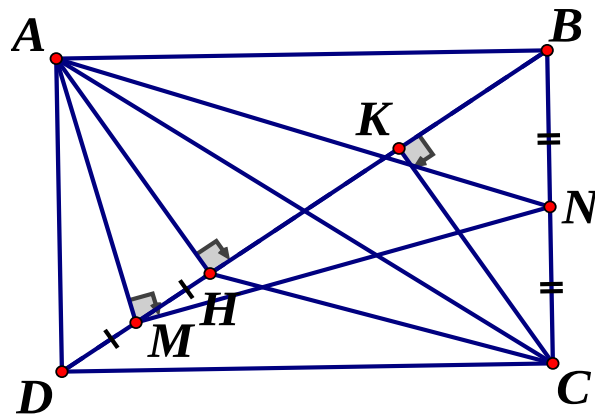
$$\frac{-4}{(x+2)^2} : \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{-4 \cdot (x+2)(x+1)(x+2)}{(x+2)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{-4 \cdot (x+1)}{x^2 + x + 1}$$

b) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x

Để $P > 0 \Leftrightarrow -4(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Vậy để $P > 0$ thì $x < -1; x \neq -2$

Câu 5.



a)

$$\triangle ABH \sim \triangle DBA$$

Tính $AH = 4,8 \text{ cm}; BH = 6,4 \text{ cm}$

Kẻ $KC \perp BD$. C/m $KC = AH = 4,8 \text{ cm}$

$$S_{ABCH} = S_{ABH} + S_{BHC} = \frac{1}{2} AH \cdot HB + \frac{1}{2} CK \cdot HB = 30,72 (\text{cm}^2)$$

b) $\triangle AHD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{HD}{BC}$.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{CN}; \triangle ADM \sim \triangle ACN \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AN}$$

$$\Rightarrow \angle MAD = \angle NAC \Rightarrow \angle NAM = \angle CAD; \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AN}$$

$$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AMN (\text{cgc}) \Rightarrow AM \perp MN$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 15. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (1,50 điểm)

a) Hãy viết biểu thức sau : $\frac{2a+1}{a^2(a+1)}$ thành hiệu hai bình phương

b) Cho $M = \frac{2.1+1}{(1^2+1)^2} + \frac{2.2+1}{(2^2+2)^2} + \frac{2.3+1}{(3^2+3)^2} + \dots + \frac{2.2012+1}{(2012^2+2012)^2}$

Chứng minh rằng $M < 1$

Câu 2. (2,00 điểm)

a) Chứng minh rằng $n^3 - 28n$ chia hết cho 48 với mọi n là số nguyên chẵn

b) Giải phương trình sau: $\frac{x^2+3x+7}{x^2+5x-6} = \frac{3x+2}{x+15}$

Câu 3. (2,50 điểm)

Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-x} \right) : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị của x để $P > -1$

c) Giải phương trình $|P| = 2$

Câu 4. (1,00 điểm)

Cho $a > 0; b > 0$ và $a^2 + b^2 = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Câu 5. (3,00 điểm)

Cho tam giác ABC có $AB = 2a; AC = 3a; BC = 4a$. Đường phân giác AD và BE cắt nhau tại I . Gọi M là trung điểm của AC , G là trọng tâm tam giác ABC

a) Tính độ dài đoạn thẳng BD theo a

b) Chứng minh $IG \parallel AC$

c) Tính tỉ số diện tích của tứ giác $EIGM$ và $\triangle ABC$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$a) \frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} = \frac{a^2+2a+1-a^2}{a^2(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2-a^2}{a^2(a+1)^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a+1}\right)^2$$

$$b) \frac{2a+1}{(a^2+a)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2}$$

$$M = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2012^2} - \frac{1}{2013^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2013^2} < 1 \Rightarrow M < 1$$

Câu 2.

a) $n = 2k$, với k là số nguyên; $n^3 - 28n = (2k)^3 - 28(2k) = 8k^3 - 56k$

$$= 8k(k^2 - 7) = 8k(k^2 - 1 - 6)$$

$$= 8k(k^2 - 1) - 48k = 8k(k-1)(k+1) - 48k$$

$k(k-1)(k+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 nên

$8k(k-1)(k+1) - 48k$ chia hết cho 48

b) ĐKXĐ: $x \neq -15; x \neq 1; x \neq -6$

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3x + 2}{x + 15} = \frac{x^2 + 3x + 7 + 3x + 2}{x^2 + 5x - 6 + x + 15} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 6x + 9} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2}$$

Thay $x = -3$ vào phương trình và kết luận nghiệm của phương trình

Với $x \neq -3$ ta có:

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3x + 2}{x + 15} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2 = x + 15 \Leftrightarrow x = \frac{13}{2} \text{ (tm)}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{13}{2}; -3 \right\}$

Câu 3.

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

$$P = \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} : \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

b) $P > -1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} > -1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 + x}{x} > 0$

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x

Để $\frac{x^2 + 1 + x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Vậy $P > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

c) $|P| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ P = -2 \end{cases}$

$P = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (ktm)}$

$P = -2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = -2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 + 2x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (ktm)}$

Vậy phương trình vô nghiệm

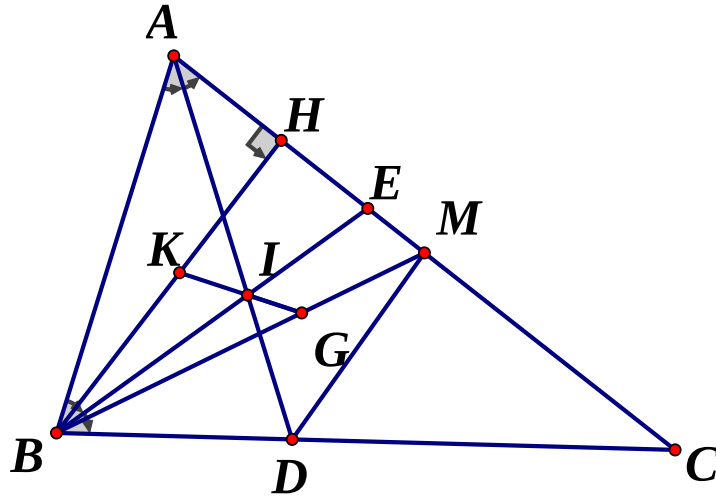
Câu 4.

$$a^2 + b^2 \geq 2ab; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2 \frac{1}{ab}$$

$$(a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq 2ab \cdot \frac{2}{ab} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Vậy } \text{Min} Q = \frac{2}{5} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{5}$$

Câu 5.



$$a) \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5} \Rightarrow BD = \frac{8a}{5}$$

$$b) \frac{EA}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{EA + EC}{AB + BC} = \frac{AC}{AB + BC} = \frac{3a}{6a} = \frac{1}{2}$$

$$EA = a; EC = 2a$$

$$\Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{EA}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Rightarrow \frac{GM}{GB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{GM}{GB} = \frac{IE}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow IG \parallel EM \text{ (ta let đảo)} \Rightarrow IG \parallel AC$$

$$c) \frac{S_{BIG}}{S_{BEM}} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{Tính } EM = 0,5a; \frac{S_{BEM}}{S_{ABC}} = \frac{0,5a}{3a} = \frac{1}{6}; \frac{S_{BIG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BIG}}{S_{BEM}} \cdot \frac{S_{BEM}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$$

$$\frac{S_{EIGM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BEM} - S_{AIG}}{S_{ABC}} = \frac{1}{6} - \frac{2}{27} = \frac{5}{54}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 16. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Cho $x^2 + y^2 = 2$ và $M = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2x^2y^2$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến số x, y

2. Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $n^3 - 2n^2 + 2n - 4$ là số nguyên tố

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho $A = \left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{1-x} \right] : \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

2. Tìm các giá trị thực của x để A và $\frac{2}{A}$ có giá trị là số nguyên.

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$

2. Bạn Nam hỏi bạn Bắc: “Năm nay cha và mẹ của bạn bao nhiêu tuổi”. Bắc trả lời: “Cha tôi hơn mẹ tôi 4 tuổi. Trước đây tổng số tuổi của cha và mẹ tôi là 66 tuổi thì tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi là 10. Hiện nay tổng số tuổi của cha và mẹ tôi gấp 3 lần tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi”

Tính xem tuổi của cha và tuổi của mẹ bạn Bắc là bao nhiêu ?

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2BC$, đường phân giác các góc C và D cắt nhau tại M . Chứng minh A, M, B thẳng hàng

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC đều. Một đường thẳng song song với BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE và BE . Gọi O là trọng tâm của tam giác ADE .

1. Chứng minh $\triangle OMN \sim \triangle OEC$

2. Chứng minh ON vuông góc với NC .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1.

$$\begin{aligned} M &= (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2x^2y^2 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 + y^4 - 2y^2 + 1 + 2x^2y^2 \\ &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 2 \\ &= 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

2.

$$n^3 - 2n^2 + 2n - 4 = (n^2 + 2)(n - 2)$$

Để giá trị của biểu thức là số nguyên tố thì $n^2 + 2 = 1$ (loại vì $n^2 + 2 \geq 2$)

Hoặc $n - 2 = 1$. Ta tìm được $n = 3$

Câu 2.

1. Điều kiện xác định $x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{1-x} \right] &= \left[\frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{1-3x+x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{1-x} \right] \\ &= \frac{(x-1)(x-1) - (1-3x+x^2) + (x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{1-x} \right] &\cdot \frac{x^2+2x+1}{x-1} \\ &= \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

2. $A = \frac{1}{x^2+x+1}$ nguyên thì $\frac{2}{A}$ nguyên nghĩa là $A \in U(2)$

$$x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}; 0 < A \leq \frac{4}{3} \Rightarrow A = 1$$

$$\text{Suy ra } A = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{tm}) \\ x = -1(\text{ktm}) \end{cases}$$

Vậy $x = 0$

Câu 3.

1.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$, đặt $t = x^2 - 4x + 8$

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{21}{t+2} - (t-2) = 0 \quad (t \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow 21 - (t+2)(t-2) = 0 \Leftrightarrow 21 - (t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5$$

$$x^2 - 4x + 8 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ giải ra } x = 1; x = 3$$

$$x^2 - 4x + 8 = -5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 13 = 0 \text{ vô nghiệm vì } x^2 - 4x + 13 > 0$$

Vậy $x = 1; x = 3$

2.

Gọi x là tuổi của mẹ bạn Bắc khi tổng số tuổi của cha và mẹ là 66 (x nguyên dương)

Ta có: $x + x + 4 = 66 \Leftrightarrow 2x = 62 \Leftrightarrow x = 31$

Gọi y là số tuổi thêm từ khi mẹ Bắc 31 tuổi đến nay (y nguyên dương)

Tổng số tuổi hiện nay của hai người là $66 + 2y$

Tổng số tuổi của hai người con hiện nay là $10 + 2y$

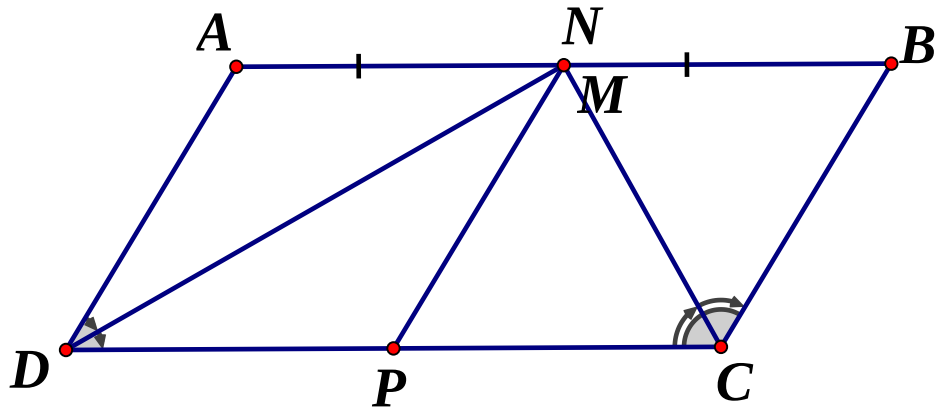
Ta có phương trình:

$$3(10 + 2y) = 66 + 2y \Leftrightarrow 30 + 6y = 66 + 2y \Leftrightarrow y = 9$$

Tuổi của mẹ Bắc hiện nay là $9 + 31 = 40$ tuổi

Tuổi của cha Bắc hiện nay là $9 + 35 = 44$ tuổi

Câu 4.



Gọi N là trung điểm AB , P là trung điểm CD

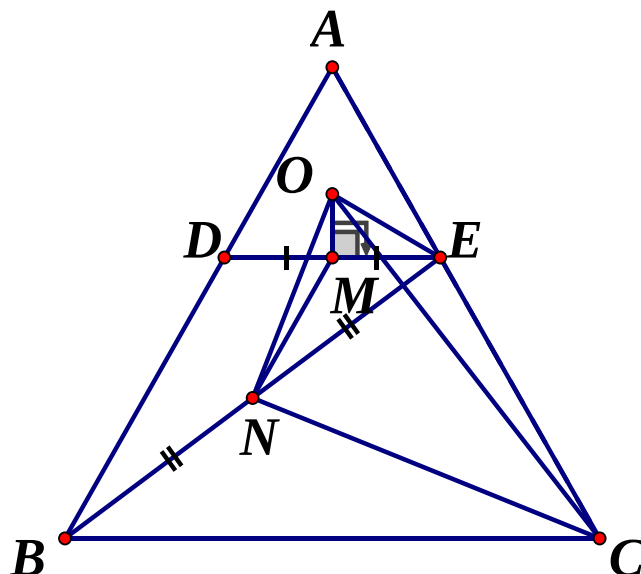
Chứng minh $ANPD$ và $NBCP$ là các hình thoi

Suy ra N là giao điểm của phân giác các góc C và D

Suy ra N trùng với M

Vậy A, M, B thẳng hàng

Câu 5.



$$1. OA = OE, \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OM}{OE} = \frac{1}{2}$$

$$BD = EC; \frac{MN}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN}{EC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{EC} = \frac{OM}{OE} \Rightarrow \angle OMN = \angle OEC = 150^\circ \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OEC \text{ (c.g.c)}$$

$$2. \text{ Từ } \triangle OMN \sim \triangle OEC, \text{ ta có: } \angle ONM = \angle OCE; \angle MON = \angle EOC \text{ và } \frac{ON}{OM} = \frac{OC}{OE}$$

$$\Rightarrow \angle MON = \angle EOC \Rightarrow \angle NOC = \angle MOE$$

$$\triangle ONC \sim \triangle OME \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle ONC = \angle OME = 90^\circ$$

Suy ra $ON \perp NC$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 17. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \forall a, b > 0$

Câu 2. (3 điểm)

Giải các phương trình sau:

$$a) (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$$

$$b) \frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9}$$

Câu 3. (3 điểm) Thực hiện các phép tính:

a) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$

Câu 4. (2 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x-2)(x-5)(x^2-7x-10)$$

Câu 5. (4 điểm) Cho biểu thức:

$$M = \left(\frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$$

- a) Rút gọn M
- b) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = -1$
- c) Với giá trị nào của x thì $M = -2$
- d) Tìm giá trị nguyên của x để M có giá trị nguyên.

Câu 6. (5 điểm)

Cho tam giác ABC, các góc B và C nhọn. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

- a) $AB \cdot AF = AC \cdot AE$
- b) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$
- c) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 $= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz$
 $= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z)$
 $= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z)$
 $= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

b) Xét hiệu:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{4}{a+b} \\ &= \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0 \text{ (Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b)$$

Câu 2.

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 1) - 4 &= 0(*) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = 2x^2 - 3x - 1$$

$$\Rightarrow \text{Pt} (*) \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1 = -1 \\ 2x^2 - 3x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x - 3) = 0 \\ (x + 1)(2x - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -1; 0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right\}$$

$$\text{b) } \frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9} (*)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq -9; x \neq -10$$

$$(*) \Leftrightarrow x(x+19)(19x+181) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -19 \text{ (TMDK)} \\ x = \frac{-181}{19} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 0; -19; \frac{-181}{19} \right\}$$

Câu 3.

$$\text{a) } A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$\text{b) } B = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{51} \right) = \frac{25}{51}$$

Câu 4.

$$A = (x-2)(x-5)(x^2-7x-10)$$

$$= (x^2-7x+10)(x^2-7x-10)$$

Đặt $x^2 - 7x = t$, ta có biểu thức:

$$A = (t-10)(t+10) = t^2 - 100 \geq -100$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -100

Câu 5.

a) Điều kiện $x \neq 0, x \neq \pm 2$

$$M = \left(\frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$$

$$= \left[\frac{x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right] : \frac{x^2-4+10-x^2}{x+2}$$

$$= \frac{x-2(2+x)+x-2}{(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2} = \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{2-x}$$

$$\text{b) } x = -1 \Rightarrow M = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } M = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = 2 \Leftrightarrow 2(2-x) = 1 \Leftrightarrow 2-x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (TMDK)}$$

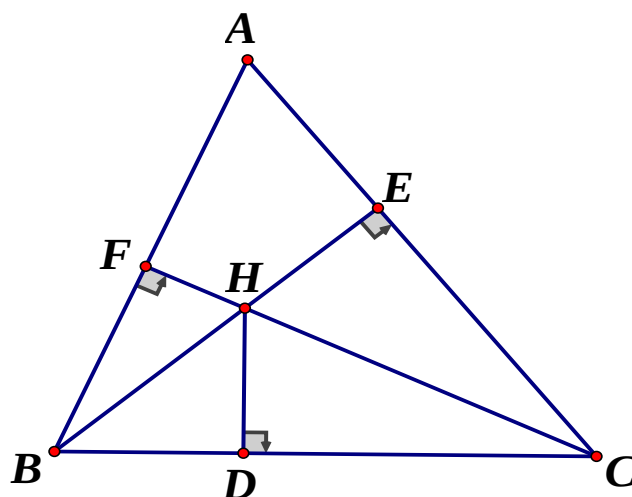
d) Để M nhận giá trị nguyên thì $\frac{1}{2-x}$ nhận giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2 - x \in U(1) = \{-1; 1\}$$

$$\begin{cases} 2 - x = -1 \Rightarrow x = 3(\text{tm}) \\ 2 - x = 1 \Rightarrow x = 1(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy với $x \in \{1; 3\}$ thì Mnhận giá trị nguyên.

Câu 6.



a) $\triangle ABE \sim \triangle ACF(g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AB.AF = AC.AE$

b) $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

$\triangle AEF, \triangle ABC$ có A chung và $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC(c.g.c)$

c) Vẽ $HD \perp BC$

$\triangle BHD \sim \triangle BCE(g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BH.BE = BC.BD \quad (1)$

$\triangle CHD \sim \triangle CBF(g.g) \Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{CD}{CF} \Rightarrow CH.CF = BC.CD \quad (2)$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được: $BH.BE + CH.CF = BC.(BD + CD) = BC.BC = BC^2$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 18. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

2. Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right).$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 24, $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư
2. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
- 2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$

3) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1.1 Ta có:

$$\begin{aligned} & x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013.(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

1.2 Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\
&= \frac{x \cdot (x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\
&= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Câu 2.

2.1 Đặt $\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

2.2 Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2$$
 (2)

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Câu 3.

3.1 Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề Câu, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

Do đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + \frac{7}{2}x + 17$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

3.2

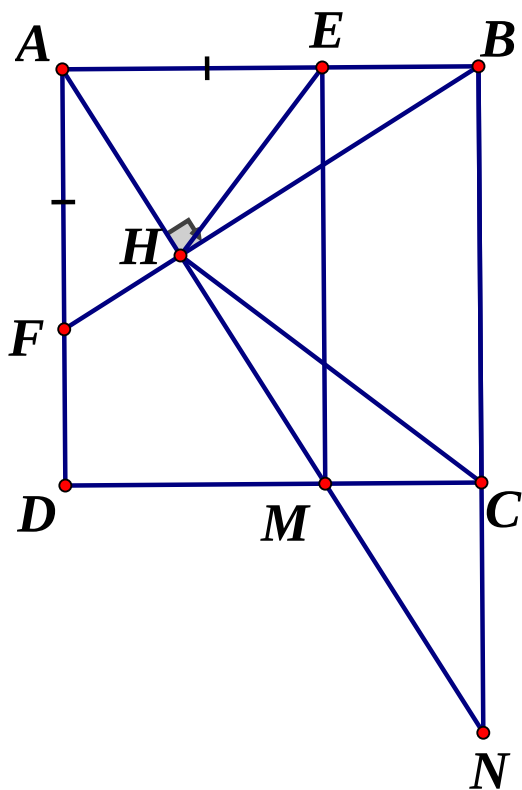
Ta có: $a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0$ (1)

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) \cdot x^2 - \frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4}(z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (\text{dfcm}) \end{aligned}$$

Câu 4.



1) Ta có: $\angle DAM = \angle ABF$ (cùng phụ với $\angle BAH$)

$$AB = AD \quad (\text{gt}); \angle BAF = \angle ADM = 90^\circ (\text{ABCD là hình vuông})$$

$$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF (\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow DM = AF, \text{ mà } AF = AE (\text{gt}) \text{ nên } AE = DM$$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành. Mặt khác $\angle DAE = 90^\circ (\text{gt})$

Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật

2) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH (\text{g.g})$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} (AB = BC; AE = AF)$$

Lại có: $\angle HAB = \angle HBC$ (cùng phụ với $\angle ABH$)

$$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE} \right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4 (\text{gt}) \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE} \right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB, F \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\text{Do đó: } BD = 2EF \text{ hay } AC = 2EF (\text{dfcm})$$

3) Do $AD \parallel CN (\text{gt})$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB (\text{gt})$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM} \right)^2 + \left(\frac{AD}{AN} \right)^2 = \left(\frac{CN}{MN} \right)^2 + \left(\frac{CM}{MN} \right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM} \right)^2 + \left(\frac{AD}{AN} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (\text{dfcm})$$

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 19. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,5 điểm)

- 1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $M = (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$
- 2) Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

Nếu $a+b+c=0$ thì $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$

- 3) Cho $A=p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức $P=\left(\frac{x-4}{x^3-1}+\frac{1}{x-1}\right):\left(1-\frac{x-8}{x^2+x+1}\right)$ ($x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$

2) Chứng minh rằng: $f(x)=(x^2+x-1)^{2018}+(x^2-x+1)^{2018}-2$ chia hết cho $g(x)=x^2-x$

Câu 3. (3,5 điểm)

1) Tìm m để phương trình có nghiệm (với m tham số) $\frac{x-m}{x+3}+\frac{x-3}{x+m}=2$

2) Giải phương trình: $2x(8x-1)^2.(4x-1)=9$

Câu 4. (7,0 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB=2AD$. Trên cạnh AD lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM=CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H . Gọi Q là trung điểm của CH , đường thẳng kẻ qua P song song với MQ cắt AC tại N .

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

b) Khi M là trung điểm của AD . Chứng minh BQ vuông góc với NP

c) Đường thẳng AP cắt DC tại điểm F . Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{4AF^2}$

Câu 5. (1,0 điểm) Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1.

$$M=(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$$

$$M=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$$

$$M=(x^2+7x+11-1)(x^2+7x+11+1)-24$$

$$M=(x^2+7x+11)^2-25$$

$$M=(x^2+7x+6)(x^2+7x+16)$$

$$M=(x+1)(x+6)(x^2+7x+16)$$

2. Các ước dương của A là $1;p;p^2;p^3;p^4$

Tổng các ước là $1+p+p^2+p^3+p^4=n^2 (n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow 4+4p+4p^2+4p^3+4p^4=4n^2$$

Ta có:

$$4p^4+4p^3+p^2 < 4n^2 < 4p^4+p^2+4+4p^3+8p^2+4p$$

$$\Rightarrow (2p^2+p)^2 < (2n)^2 < (2p^2+p+2)^2 \Rightarrow (2n)^2 = (2p^2+p+1)^2$$

Do đó :

$$4p^4+4p^3+4p^2+4p+4=4p^4+4p^3+5p^2+2p+1$$

$$\Leftrightarrow p^2-2p-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1=-1(\text{ktm}) \\ p_2=3(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy $p=3$

$$3. \text{ Đặt } \frac{a-b}{c}=x; \frac{b-c}{a}=y; \frac{c-a}{b}=z \Rightarrow \frac{c}{a-b}=\frac{1}{x}; \frac{a}{b-c}=\frac{1}{y}; \frac{b}{c-a}=\frac{1}{z} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9$$

$$\text{Ta có: } (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có: } \frac{y+z}{x} &= \left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right) \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab} \cdot \frac{c}{a-b} \\ &= \frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)} = \frac{c(c-a-b)}{ab} = \frac{c[2c-(a+b+c)]}{ab} = \frac{2c^2}{ab} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{x+z}{y} = \frac{2a^2}{bc}; \frac{x+y}{z} = \frac{2b^2}{ac}$$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3)$$

$$\text{Vì } a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\text{Do đó: } (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2}{abc} \cdot 3abc=3+6=9$$

Câu 2.

1. a) Với $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x-4}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1} \\ &= \left(\frac{x-4+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \frac{x^2+9}{x^2+x+1} = \frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+9} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{x+3}{x^2+9}$$

Vậy $x \neq 1$ thì $P = \frac{x+3}{x^2+9}$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2(\text{tm}) \\ x = 1(\text{ktm}) \end{cases}$. Thay $x = 2$ vào P ta có: $P = \frac{2+3}{2^2+9} = \frac{5}{13}$

Kết luận với $x = 2$ thì $P = \frac{5}{13}$

2) Đa thức $g(x) = x^2 - x = x(x-1)$ có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$

Ta có $f(0) = (-1)^{2018} + 1^{2018} - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của $f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ chứa thừa số x

Ta có $f(1) = (1^2 + 1 - 1)^{2018} + (1^2 - 1 + 1)^{2018} - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của $f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ chứa thừa số $x-1$ mà các thừa số x và $x-1$ không có nhân tử chung do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x-1)$

Vậy $f(x) = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Câu 3.

1) ĐKXĐ: $x \neq -3; x \neq -m$ ta có:

$$\frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2 \Rightarrow x^2 - m^2 + x^2 - 9 = 2(x+3)(x+m)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - m^2 - 9 = 2(x^2 + 3x + 3m + mx) \Leftrightarrow -2(m+3)x = (m+3)^2 \quad (1)$$

Với $m = 3$ thì (1) có dạng $0x = 0$. Nghiệm đúng mọi x thỏa mãn điều kiện $x \neq -3$

$x \neq -m$, do đó tập nghiệm của phương trình là $x \neq \pm 3$

Với $m \neq -3$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = -\frac{(m+3)^2}{2(m+3)} = -\frac{m+3}{2}$

Để giá trị này là nghiệm của phương trình thì ta phải có:

$$-\frac{m+3}{2} \neq -3 \text{ và } -\frac{m+3}{2} \neq -m \text{ tức là } m \neq 3. \text{ Vậy nếu } m \neq \pm 3 \text{ thì } x = -\frac{m+3}{2} \text{ là nghiệm.}$$

Kết luận : với $m = -3$ thì $S = \{x / x \neq \pm 3\}$. Với $m \neq \pm 3$ thì $S = \left\{ -\frac{m+3}{2} \right\}$

2. Ta có: $2x(8x-1)^2(4x-1) = 9$

$$\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72 (*)$$

Đặt $64x^2 - 16x = t$ ta có:

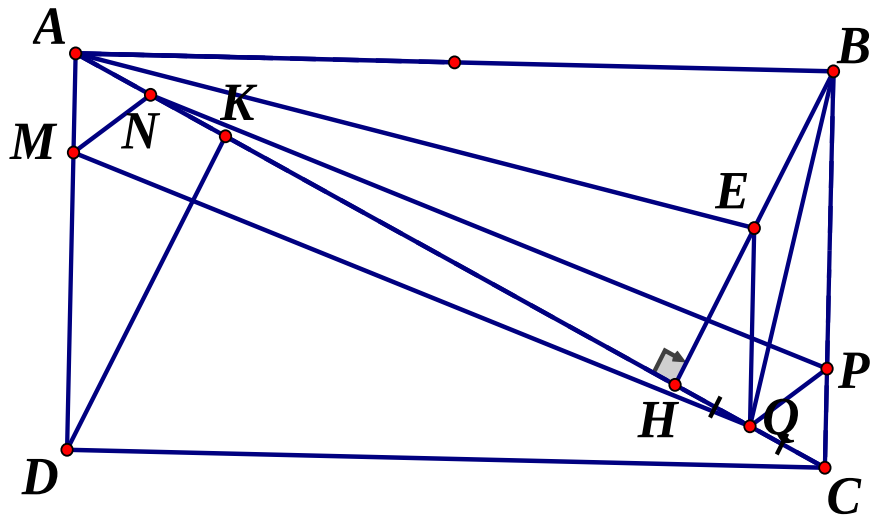
$$(*) \Leftrightarrow t(t+1) - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 8 \end{cases}$$

Với $t = -9$ ta có: $64x^2 - 16x = -9 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x - 1)^2 + 8 = 0$

(Vô nghiệm vì $(8x - 1)^2 + 8 > 0$)

Với $t = 8$ ta có $64x^2 - 16x = 8 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Câu 4.



a) Chứng minh được $DH // BK$ (1)

Chứng minh được $\triangle AHD = \triangle CKB \Rightarrow DH = BK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Gọi E là trung điểm BK , chứng minh được QE là đường trung bình $\triangle KBC$ nên

$$QE // BC \Rightarrow QE \perp AB \text{ (vì } BC \perp AB) \text{ và } QE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD$$

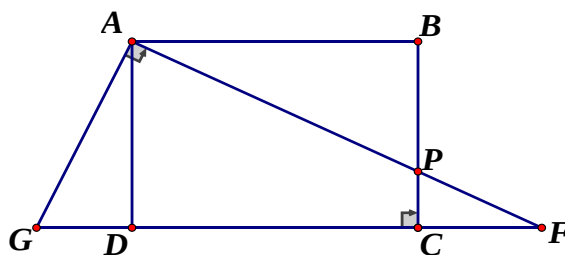
Chứng minh $AM = QE$ và $AM // QE \Rightarrow AMQE$ là hình hành

Chứng minh $AE // NP // MQ$ (3).

Xét $\triangle AQB$ có BK và QE là hai đường cao của tam giác nên E là trực tâm của tam giác nên

AE là đường cao thứ ba của tam giác $AE \perp BQ \Rightarrow BQ \perp NP$

c)



Vẽ tia Ax vuông góc với AF . Gọi giao của Ax với CD là G .

Chứng minh $\angle GAD = \angle BAP$ (cùng phụ với $\angle PAD$) $\Rightarrow \triangle GAD \cong \triangle BAP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{AB}{AD} = 2 \Rightarrow AG = \frac{1}{2} AP$$

Ta có: $\triangle AGF$ vuông tại A có $AD \perp GF$ nên $AG \cdot AF = AD \cdot GF (= 2S_{\triangle AGF})$

$$\Rightarrow AG^2 \cdot AF^2 = AD^2 \cdot GF^2 \quad (1)$$

Ta chia hai vế của (1) cho $AD^2 \cdot AG^2 \cdot AF^2$ mà $AG^2 + AF^2 = GF^2$ (đl Pytago)

$$\Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AG^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AP\right)^2} + \frac{1}{AF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{AB^2} = \frac{4}{AP^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$$

Câu 5.

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương). Ta có

$$xy = 2(x + y + z) \quad (1) \text{ và } x^2 + y^2 = z^2 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y) \Leftrightarrow z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$\Leftrightarrow (z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + 2 = x + y - 2 \\ z + 2 = -x - y + 2 \text{ (ktm vi } z > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = x + y - 4; \text{ thay vào (1) ta được: } xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$\Leftrightarrow xy - 4x - 4y = -8$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 20. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

a) Tìm 3 số dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{a^2+7}{4} = \frac{b^2+6}{5} = \frac{c^2+3}{6}$ và $a^2 + 2c^2 = 3c^2 + 19$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Câu 2. (3 điểm)

Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số còn lại, rồi đến lớp thứ n ($n = 2; 3; 4; \dots$) nhận được $4n$ áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo

Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo ?

Câu 3. (3 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $(1 + n^{2017} + n^{2018})$ là số nguyên tố

Câu 4. (3 điểm)

Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt (hai đội bất kỳ chỉ thi đấu với nhau 1 trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ 2 thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 9 thắng a_9 trận và thua b_9 trận.

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$

Câu 5. (5 điểm)

Cho đoạn thẳng AB dài a (cm). Lấy điểm C bất kỳ thuộc đoạn thẳng AB (C khác A và B). Vẽ tia Cx vuông góc với AB . Trên tia Cx lấy hai điểm D và E sao cho $CD = CA$ và $CE = CB$.

- Chứng minh AE vuông góc với BD
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BD . Tìm vị trí của điểm C trên đoạn thẳng AB để đa giác $CMEDN$ có diện tích lớn nhất
- Gọi I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng khoảng cách từ I đến AB không phụ thuộc vào vị trí điểm C

Câu 6. (2 điểm)

Hình vuông có 3×3 ô (như hình bên), chứa 9 số mà tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng nhau được gọi là hình vuông kỳ diệu. Chứng minh rằng số ở tâm ($\times$) của một hình vuông kỳ diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo.

	$\times$	

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Từ giả thiết $a^2 + 2c^2 = 3b^2 + 19 \Rightarrow a^2 + 2c^2 - 3b^2 = 19$

Ta có: $\frac{a^2+7}{4} = \frac{b^2+6}{5} = \frac{c^2+3}{6} = \frac{3b^2+18}{15} = \frac{2c^2+6}{12} = \frac{a^2+7+2c^2+6-3b^2-18}{4+12-15} = \frac{14}{1} = 14$

$$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

Suy ra: $b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$

$$c^2 = 81 \Rightarrow c = 9$$

b)

$$P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (2x^3 + 2x) + x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) + x^2 = (x^2 + x + 1)^2$$

$$\text{Vì } x^2 + x + 1 = \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow P \geq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Câu 2.

Gọi số lớp của trường A được nhận áo là x

Vì lớp thứ x nhận áo cuối cùng và số áo được phát hết nên số áo lớp thứ x nhận được là $4x$.

$$\text{Lớp thứ } x-1 \text{ nhận số áo là } 4(x-1) + \frac{1}{8} \cdot 4x = 4,5x - 4$$

Vì số áo các lớp nhận được như nhau nên ta có phương trình:

$$4,5x - 4 = 4x \Leftrightarrow x = 8$$

Suy ra số áo mỗi lớp nhận được: $4 \cdot 8 = 32$ (áo)

Suy ra số áo trường A nhận được: $32 \cdot 8 = 256$ (áo)

Câu 3. Đặt: $A = 1 + n^{2017} + n^{2018}$

Với $n = 1$ thì $A = 3$ là số nguyên tố

Với $n > 1$, ta có:

$$\begin{aligned} 1 + n^{2017} + n^{2018} &= (n^{2018} - n^2) + (n^{2017} - n) + (n^2 + n + 1) \\ &= n^2(n^{2016} - 1) + n(n^{2016} - 1) + (n^2 + n + 1) = (n^{2016} - 1)(n^2 + n) + (n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có: } n^{2016} - 1 = (n^3)^{672} - 1 = (n^3 - 1) \left[(n^3)^{671} + (n^3)^{670} + \dots + n^3 + 1 \right] : (n^3 - 1)$$

$$\Rightarrow (n^{2016} - 1) : (n^2 + n + 1). \text{ Suy ra } A : (n^2 + n + 1), \text{ mà } 1 < n^2 + n + 1 < A \text{ nên } A \text{ là hợp số.}$$

Vậy $n = 1$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn điều kiện

Câu 4.

Mỗi đội bóng thi đấu với 8 đội bóng khác và hai đội bất kỳ chỉ gặp nhau 1 trận nên mỗi đội sẽ thi đấu 8 trận $\Rightarrow a_i + b_i = 8$ (với $i = 1, 2, 3, \dots, 8$)

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_8^2 = (8 - a_1)^2 + (8 - a_2)^2 + (8 - a_3)^2 + \dots + (8 - a_8)^2$$

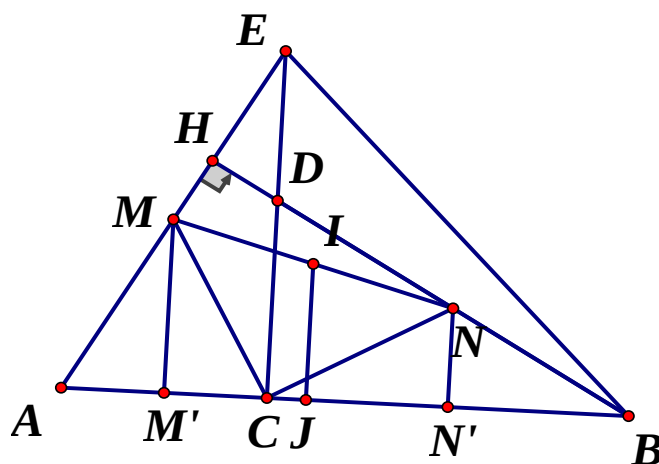
$$\Leftrightarrow 16(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8) = 576 \quad (1)$$

Mặt khác, tổng số trận thắng của các đội bằng tổng số trận đấu nên :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

Câu 5.



a) Gọi H là giao điểm của BD và AE

$$\triangle ACE = \triangle DCB (\text{c.g.c}) \Rightarrow E = B$$

$$\text{Suy ra } \triangle DHE \sim \triangle DCB (\text{g.g}) \Rightarrow \angle DHE = \angle CDB = 90^\circ$$

$$\text{b) Ta có: } S_{\text{CMEDN}} = S_{\text{CME}} + S_{\text{CDN}} = \frac{1}{2} S_{\text{ACE}} + \frac{1}{2} S_{\text{BCD}} = \frac{1}{4} \cdot AC \cdot CE + \frac{1}{4} \cdot CB \cdot CD = \frac{1}{2} AC \cdot CB$$

$$\text{Mặt khác, theo bất AM-GM ta có: } AC \cdot CB \leq \frac{(AC + CB)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } S_{\text{CMEDN}} \geq \frac{a^2}{8}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } AC = CB \text{ hay C là trung điểm AB}$$

c) Gọi J, M', N' lần lượt là hình chiếu vuông góc của I, M, N lên AB

$$\text{Ta có: IJ là đường trung bình của hình thang MNN'M' nên } IJ = \frac{MM' + NN'}{2} \quad (1)$$

Ta lại có MM' là đường trung bình của $\triangle ACE$ và NN' là đường trung bình $\triangle BCD$ nên

$$MM' = \frac{CE}{2} = \frac{CB}{2} \text{ và } NN' = \frac{CD}{2} = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $IJ = \frac{\frac{AC}{2} + \frac{CB}{2}}{2} = \frac{AB}{4} = \frac{a}{4}$

Vậy khoảng cách của điểm I đến đoạn AB không phụ thuộc vào vị trí của điểm C.

Câu 6.

Giả sử hình vuông kỳ diệu điền các số $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ như hình vẽ

Đặt $S = a + b + c + d + e + f + g + h + i$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$d + e + f = b + e + h = a + e + i = c + e + g = \frac{S}{3} \quad (1)$$

Suy ra $(d + e + f) + (b + e + h) + (a + e + i) + (c + e + g) = \frac{4S}{3}$

$$\Rightarrow (d + e + f) + (b + e + h) + (a + e + i) + (c + e + g) = \frac{4S}{3}$$

$$\Rightarrow S + 3e = \frac{4S}{3} \Rightarrow e = \frac{S}{9} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d + f = b + h = a + i = c + g = \frac{2S}{9} = 2e$ (dpcm)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 21. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,5 điểm)

1) Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

2) Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Câu 2. (4,5 điểm)

1) Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định,

khi đó hãy rút gọn biểu thức

2) Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

2) Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$

a) Tính diện tích hình thang ABCD theo a

b) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC.

Chứng minh $\widehat{HDI} = 45^\circ$

2) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là l_a, l_b, l_c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1) Ta có: $P = 2(a^3 + b^3) + 7ab(a + b)$

$$= 2(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a + b)$$

$$= (a + b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab)$$

$$= (a + b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab)$$

$$= (a + b)[2a(a + 2b) + b(a + 2b)]$$

$$= (a + b)(2a + b)(a + 2b)$$

$$\text{Kết luận } P = (a + b)(2a + b)(a + 2b)$$

2) Ta có:

$$Q = x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 + 2x^3 + x^2) + x^2 + x + x + 1$$

$$= x^2(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 + x + 2$$

$$= x^2 + x + 3 = 4$$

Vậy $Q = 4$

Câu 2.

$$1) \text{ Ta có: } R = \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x}{4026}$$

$$\text{ĐK: } x(x^2-4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } R = \frac{1}{4026} \cdot \left(\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

$$= \frac{1}{4026} \cdot \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2-4}$$

$$= \frac{1}{4026} \cdot \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{1}{2013}$$

Vậy R xác định khi $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$ và $R = \frac{1}{2013}$

2) +Nếu $x \geq 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{ktm}) \\ x = \sqrt{5}(\text{tm}) \\ x = -\sqrt{5}(\text{ktm}) \end{cases}$$

+Nếu $x < 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = -4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = -4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{5}$

Câu 3.

1) Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

$$\text{Do đó } (n^3 - n):8 \quad (2)$$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1);(2) suy ra

$$(n^3 - n):24 \quad (\text{dpcm})$$

2) Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2 (m \in \mathbb{N})$

$$\text{Suy ra } (n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m+n+2 > m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

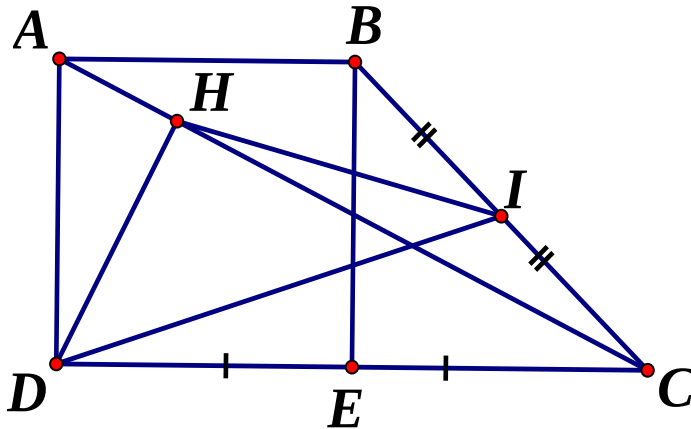
$$\text{TH1: } \begin{cases} m+n+2 = 2009 \\ m-n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} m+n+2 = 287 \\ m-n-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là 1002;138;2

Câu 4.



1)

- a) Gọi E là trung điểm của CD, chỉ ra ABED là hình vuông và BEC là tam giác vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, BC = 2a$

Diện tích của hình thang ABCD là $S = \frac{(AB+CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a+2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

- b) $\angle ADH = \angle ACD$ (1) (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

Xét hai tam giác ADC và IBD vuông tại D và B có:

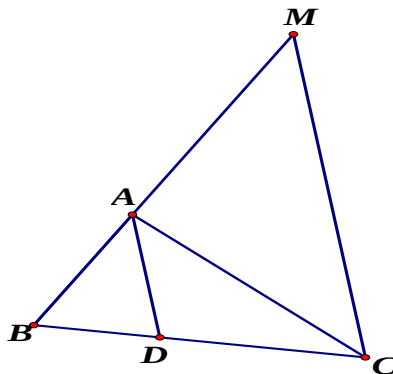
$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ do đó hai tam giác ADC và IBD đồng dạng}$$

Suy ra $\angle ACD = \angle BDI$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \angle ADH = \angle BDI$

Mà $\angle ADH + \angle BDH = 45^\circ \Rightarrow \angle BDI + \angle BDH = 45^\circ$ hay $\angle HDI = 45^\circ$

2)



Gọi AD là đường phân giác trong góc A, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại M

Ta có: $\angle BAD = \angle AMC$ (hai góc ở vị trí đồng vị)

$\angle DAC = \angle ACM$ (hai góc ở vị trí so le trong)

Mà $\angle BAD = \angle DAC$ nên $\angle AMC = \angle ACM$ hay $\triangle ACM$ cân tại A, suy ra $AM = AC = b$

Do $AD \parallel CM$ nên $\frac{AD}{CM} = \frac{BA}{BM} = \frac{c}{b+c}$

$$\text{Mà } CM < AM + AC = 2b \Rightarrow \frac{c}{b+c} > \frac{AD}{2b} \Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{l_b} > \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \quad (2); \frac{1}{l_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (3)$$

Cộng (1); (2); (3) về theo về ta có điều phải chứng minh

Câu 5.

Ta có: $a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Rightarrow a + b \leq 2$

Chứng minh được với hai số dương x, y thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

$$\text{Do đó: } S = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \leq 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \leq 1$$

Vậy GTLN của S là 1, đạt được khi $a = b = 1$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 22. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3+x-x^2-1} \right) : \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right)$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A
- Tìm x để A nhận giá trị là số âm
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $(x+2).A$ nhận giá trị là số nguyên.

Câu 2.

- Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$ (với $k \in \mathbb{N}^*$)

Chứng minh rằng $4S+1$ là bình phương của một số tự nhiên

- Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Câu 3.

- Giải phương trình sau: $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$
- Xác định giá trị của m để phương trình: $m^3(x-2) - 8(x+m) = 4m^2$ có nghiệm duy nhất là số không lớn hơn 1

c) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$, M là trung điểm của BC . $\angle xMy = 60^\circ$ quay quanh đỉnh M cố định sao cho hai tia Mx, My cắt AB, AC lần lượt tại D và E . Chứng minh rằng:

a) $\triangle BDM \sim \triangle CME$ và tích $BD \cdot CE$ không phụ thuộc vào vị trí của $\angle xMy$

b) DM là phân giác của $\angle BDE$

c) $BD \cdot ME + CE \cdot MD > a \cdot DE$

d) Chu vi $\triangle ADE$ không đổi khi $\angle xMy$ quay quanh M

Câu 5. Trong bảng ô vuông kích thước 8×8 gồm 64 ô vuông đơn vị, người ta đánh dấu 13 ô bất kỳ. Chứng minh rằng với mọi cách đánh dấu luôn có ít nhất 4 ô được đánh dấu không có điểm chung (hai ô có điểm chung là hai ô có chung đỉnh hoặc chung cạnh).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1a) ĐKXĐ: $x \neq 1$; Rút gọn được: $A = \frac{1}{x-1}$

1b) $A < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Đối chiếu với ĐKXĐ, ta được $x < 1$

1c) Ta có: $(x+2)A = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$

Lập luận để suy ra: $x \in \{0; -2; 2; 4\}$

Câu 2

2a) Ta có: $k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2) \cdot 4 = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)[(k+3) - (k-1)]$

$$= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k-1)$$

$$\Rightarrow 4S = 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2)(k-1) = k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\Rightarrow 4S + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$$

Mặt khác:

$$k(k+1)(k+2)(k+3) + 1 = k(k+3)(k+1)(k+2) + 1$$

$$= (k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1 = (k^2 + 3k + 1)^2$$

Mà $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra đpcm.

$$2b) \text{ Ta có: } y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y \quad (1)$$

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $x < y < x+2$, mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn Câu toán là: $(-1; 0); (1; 2)$

Câu 3.

$$3a) x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0 \quad (1)$$

$$+ \text{ Nếu } x \geq 1: (1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TM)}$$

$$+ \text{ Nếu } x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (ktm)} \\ x = 3 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

$$m^3(x-2) - 8(x+m) = 4m^2$$

$$\Leftrightarrow (m^3 - 8)x = 2m(m^2 + 2m + 4)$$

$$3b) \text{ Ta có: } \Leftrightarrow (m-2)(m^2 + 2m + 4)x = 2m(m^2 + 2m + 4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2m}{m-2} \text{ (Do } m^2 + 2m + 4 > 0)$$

$$\text{Để nghiệm này không lớn hơn 1 thì } \frac{2m}{m-2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2 \text{ (TM)}$$

Vậy $-2 \leq m \leq 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất và nghiệm đó không lớn hơn 1

3c) Ta có:

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x+y+z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16} \text{ Theo}$$

$$\text{BĐT cô si ta có: } \frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow y = 2x$$

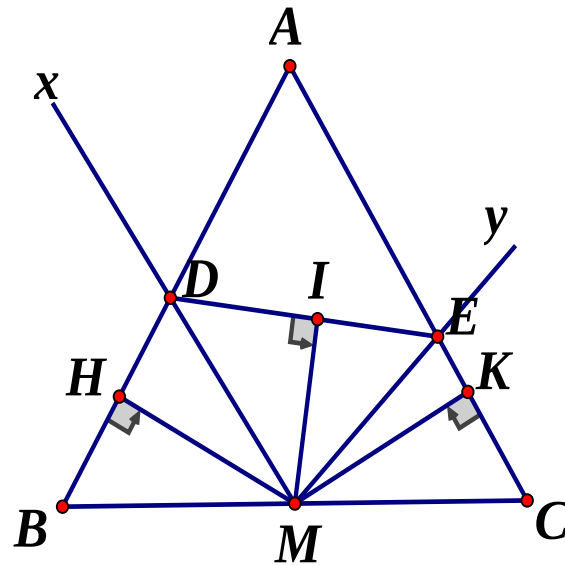
$$\text{Tương tự: } \frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow z = 4x$$

$$\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow z = 2y;$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$$

$$\text{Vậy } \text{Min} P = \frac{49}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$$

Câu 4.



- a) Ta có: $\angle DMC = 60^\circ + \angle CME = 60^\circ + \angle BDM \Rightarrow \angle BDM = \angle CME$
 Suy ra : $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (g.g) vì $\angle DBM = \angle MCE = 60^\circ$; $\angle BDM = \angle CME$ (cmt)

$$\text{Suy ra } \frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM = a^2 \text{ (không đổi)}$$

- b) Vì $\triangle BMD \sim \triangle CEM \Rightarrow \frac{BD}{MD} = \frac{CM}{EM}$ hay $\frac{BD}{MD} = \frac{BM}{ME}$

Lại có: $\angle DBM = \angle DME = 60^\circ \Rightarrow \triangle BMD \sim \triangle MED$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \angle BDM = \angle EDM$ suy ra DM là phân giác của $\angle BDE$

- c) Vì $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{BM}{ME} \Rightarrow BD \cdot ME = a \cdot DM$ (1)

Tương tự chứng minh được: $\triangle CEM \sim \triangle MED \Rightarrow CE \cdot MD = a \cdot ME$ (2)

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta được:

$$BD \cdot ME + CE \cdot MD = a \cdot DM + a \cdot ME = a \cdot (DM + ME) < a \cdot DE$$

- d) Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với AB, DE, AC tại H, I, K suy ra
 $MH = MI = MK$

Suy ra $DI = DH, EI = EK$. Suy ra chu vi $\triangle ADE = 2AH$

Vì $\angle HBM = 60^\circ$ và $BM = a$ nên $BH = \frac{a}{2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}$. Suy ra chu vi tam giác ADE không đổi
 và bằng $3a$

Câu 5 Chi 64 ô vuông của bảng 8×8 thành 4 loại như hình vẽ (các ô cùng loại được đánh số giống nhau). Khi đó theo cách chia này rõ ràng các ô trong cùng loại sẽ không có điểm chung.

Khi đánh dấu 13 điểm bất kỳ, thì 13 điểm này sẽ thuộc 4 loại ô vừa chia. Vì $13 = 4.3 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichle sẽ tồn tại ít nhất 4 ô thuộc cùng một loại, khi đó 4 ô này sẽ không có điểm chung. Suy ra đpcm.

	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 23. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (5 điểm)

- a) Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

$$(x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1)$$

- b) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Câu 2. (5 điểm)

- a) Chứng minh rằng $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$

- b) Tìm x , biết: $\frac{x+1}{1000} + \frac{x+2}{999} + \frac{x+3}{998} + \frac{x+4}{997} + \frac{x+5}{996} + \frac{x+6}{995} + 6 = 0$

Câu 3. (3 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên?
- Tìm giá trị lớn nhất của A

Câu 4. (7 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH . Trên tia HC lấy

$HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E

- Chứng minh $AE = AB$
- Gọi M là trung điểm của BE . Tính góc AHM

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1) \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - x^4 - 6x^2 + 4x^3 + 4x \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vậy với mọi giá trị của x biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến x

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ &= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 \\ &= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Câu 2.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \text{Ta có: } x+y+z=0 \Rightarrow x=-(y+z) \\ & \Rightarrow x^2 = [-(y+z)]^2 \\ & x^2 = y^2 + z^2 + 2yz \Leftrightarrow x^2 - y^2 - z^2 = 2yz \\ & \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - z^2)^2 = (2yz)^2 \\ & \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = 4y^2z^2 \\ & \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 \\ & \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 + x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 \\ & \Leftrightarrow 2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{x+1}{1000} + \frac{x+2}{999} + \frac{x+3}{998} + \frac{x+4}{997} + \frac{x+5}{996} + \frac{x+6}{995} + 6 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x+1}{1000} + 1 + \frac{x+2}{999} + 1 + \frac{x+3}{998} + 1 + \frac{x+4}{997} + 1 + \frac{x+5}{996} + 1 + \frac{x+6}{995} + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x+1001}{1000} + \frac{x+1001}{999} + \frac{x+1001}{998} + \frac{x+1001}{997} + \frac{x+1001}{996} + \frac{x+1001}{995} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1001) \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{999} + \frac{1}{998} + \frac{1}{997} + \frac{1}{996} + \frac{1}{995} \right) = 0 \Rightarrow x = -1001 \end{aligned}$$

Câu 3.

$$\text{a)} \quad A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1)+(x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

$$\text{b)} \quad \text{Muốn } A \text{ nhận giá trị nguyên thì } x^2+1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

- Nếu $x^2+1 = -3 \Rightarrow x \in \emptyset$
- Nếu $x^2+1 = -1 \Rightarrow x \in \emptyset$

- Nếu $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = 3$
- Nếu $x^2 + 1 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow A = 1$

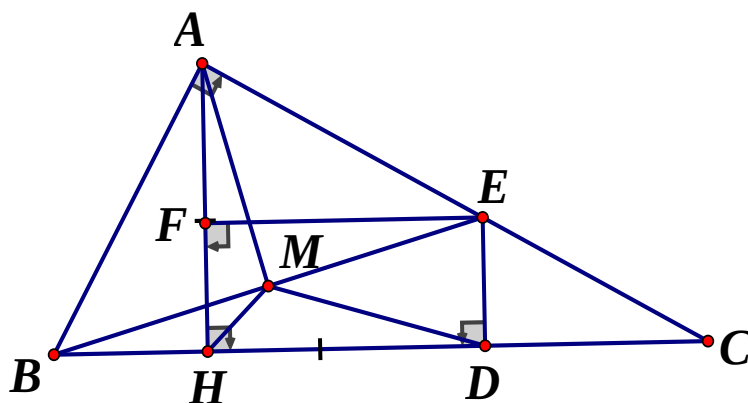
Vậy tập hợp các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên là $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

- c) $A = \frac{3}{x^2 + 1}$ nhận giá trị lớn nhất khi $x^2 + 1$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $x^2 + 1 \geq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Vậy $\text{Max}_A = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 4.



- a) Kẻ $EF \perp AH \Rightarrow$ Tứ giác HDEF là hình chữ nhật
 $\Rightarrow EF = HD$ mà $HD = AH(gt) \Rightarrow EF = AH$

Xét $\triangle HBA$ và $\triangle FAE$ có: $H = F = 90^\circ$, $AH = EF$, $FEA = BAH$ (phụ FAE)

Do đó: $\triangle HBA = \triangle FAE$ (g.g) $\Rightarrow AE = AB$

- b) Ta có $\triangle BAE$ vuông tại $A \Rightarrow AM = \frac{1}{2} BE$

$\triangle BDE$ vuông tại $D \Rightarrow DM = \frac{1}{2} BE$

Do đó: $AM = DM$

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle DHM$ có: $AM = MD$; $AH = HD$; HM là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle AHM = \triangle DHM \Rightarrow \angle AHM = \angle MHD = \frac{\angle AHD}{2} = 45^\circ$

Vậy $\angle AHM = 45^\circ$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 24. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,5 điểm)

- a) Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

- b) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$. Tính giá trị của biểu thức $A = |a-b| + |b-c| + |c-a|$

Câu 2. (2,5 điểm)

- a) Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 3 - xy$
b) Giải phương trình: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$

Câu 3. (2,5 điểm)

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = (x-2012)^2 + (x+2013)^2$
b) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM, đường thẳng này cắt tia BM tại D, cắt tia BA tại E.

- a) Chứng minh : $EA.EB = ED.EC$
b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi
c) Kẻ $DH \perp BC$ ($H \in BC$). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH. Chứng minh $CQ \perp PD$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2(b-c) + b^2(c-a) - c^2(b-c+c-a) \\ & = (b-c)(a^2 - c^2) + (c-a)(b^2 - c^2) = (b-c)(a-c)(a+c) + (c-a)(b-c)(b+c) \\ & = (b-c)(a-c)(a+c-b-c) = (b-c)(a-c)(a-b) \end{aligned}$$

$$\text{b) Đặt } a-b=x; b-c=y; c-a=z \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)$$

$$\text{Ta có: } x^3 + y^3 + z^3 = 210 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x+y)^3 = 210 \Leftrightarrow -3xy(x+y) = 210 \Leftrightarrow xyz = 70$$

Do x, y, z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz = 70 = (-2).(-5).7$ nên

$$x, y, z \in \{-2; -5; 7\} \Rightarrow A = |a-b| + |b-c| + |c-a| = 14$$

Câu 2.

$$\text{a) Ta có: } (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3-xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1$$

$$\text{Lại có: } (x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow 3-xy \geq -2xy \Leftrightarrow xy \geq -3$$

$$\text{Suy ra } -3 \leq xy \leq 1. \text{ Mà } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow xy \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$$

Lần lượt thử ta được $(x, y) \in \{(-2; 1); (1; -2); (2; -1); (-1; 2); (1; 1)\}$ là nghiệm của PT

b) Đặt $6x+7=t$. Ta có:

$$(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 + 8 = 0 \text{ (VN)} \\ t^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Câu 3.

a) Ta có:

$$P = (x-2012)^2 + (x+2013)^2 = x^2 - 4024x + 4048144 + x^2 + 4026x + 4052169$$

$$= 2x^2 + 2x + 8100313 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 8100312,5 \geq 8100312,5 \quad \forall x$$

$$\text{Vậy Min} P = 8100312,5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) Đặt } P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra

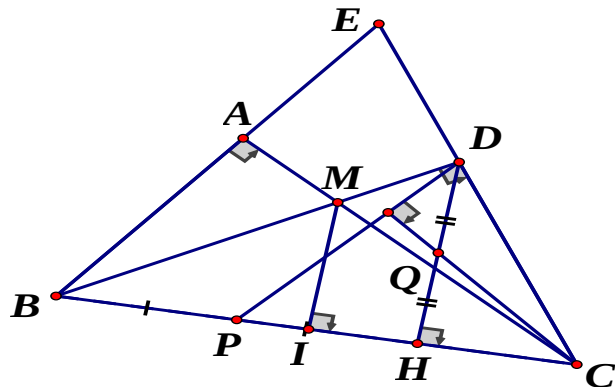
$$\Leftrightarrow a=b=c$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1\right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1\right)$$

$$\text{Bởi vậy } P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1\right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}$$

Câu 4.



$$\text{a) Chứng minh } \triangle EBD \sim \triangle ECA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA \cdot EB = ED \cdot EC$$

b) Kẻ $MI \perp BC (I \in BC)$. Ta có : $\triangle BIM \sim \triangle BDC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BM.BD = BI.BC \quad (1)$$

Tương tự: $\triangle ACB \sim \triangle ICM (g-g) \Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow CM.CA = CI.BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BM.BD + CM.CA = BI.BC + CI.BC = BC.(BI + CI) = BC^2$

(Không đổi)

c) $\triangle BHD \sim \triangle DHC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2BP}{2DQ} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BP}{DQ} = \frac{BD}{DC}$$

Chứng minh được: $\triangle DPB \sim \triangle CQD (g.g) \Rightarrow BDP = DCQ$

Mà $BDP + PDC = 90^\circ \Rightarrow DCQ + PDC = 90^\circ \Rightarrow CQ \perp PD$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 25. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A.
- Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

- $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$
- $y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$
- $\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6}$

Câu 3. (3 điểm)

- Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$
- Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$
- Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Câu 4. (6,5 điểm) Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kỳ ($CM < CD$), vẽ hình vuông CMNP (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H, MP cắt BD tại K.

- Chứng minh: DH vuông góc với BM.
- Tính $Q = \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK}$
- Chứng minh: $MP.MK + DK.BD = DM^2$

Câu 5. (1,5 điểm)

1) Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

a) Giá trị của A được xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \neq -8 \\ 4(2-x) + x^2(2-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq -4 \\ (2-x)(4+x^2) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right] \cdot \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2-x) - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x^2 + x - 2x - 2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^3 - 4x + 2x^2 - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x(x+1) - 2(x+1)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

b)

$$* \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 : 2x \Rightarrow 2x+2 : 2x \text{ mà } 2x : 2x$$

$$\Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = -1(tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -1$$

Câu 2.

a)

$$\begin{aligned}
& x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0 \\
& \Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1=0 \\
& \Leftrightarrow (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1=0 \\
& \Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2=0 \\
& \Leftrightarrow (x+1)^4=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$

b)

$$\begin{aligned}
& y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0 \\
& \Leftrightarrow y^2+2y+1+(2^x)^2-2.2^x+1=0 \\
& \Leftrightarrow (y+1)^2+(2^x-1)^2=0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;-1)$

c)

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6} \quad (1)$$

ĐKXĐ: $x \neq -2; x \neq -4; x \neq -6; x \neq -8$

$$\begin{aligned}
(1) & \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+8)^2+8}{x+8} = \frac{(x+4)^2+4}{x+4} + \frac{(x+6)^2+6}{x+6} \\
& \Leftrightarrow x+2 + \frac{2}{x+2} + x+8 + \frac{8}{x+8} = x+4 + \frac{4}{x+4} + x+6 + \frac{6}{x+6} \\
& \Leftrightarrow \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+4} = \frac{6}{x+6} - \frac{8}{x+8} \\
& \Leftrightarrow \frac{2x+8-4x-8}{(x+2)(x+4)} = \frac{6x+48-8x-48}{(x+6)(x+8)} \\
& \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2)(x+4)} = \frac{-2x}{(x+6)(x+8)} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+2)(x+4)=(x+6)(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8x=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} \text{(tm)}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0; x=-5$

Câu 3.

1) Biến đổi được $p=(n^2+1)(n-1)$

Nếu $n=0;1$ không thỏa mãn đề Câu

Nếu $n=2$ thỏa mãn đề Câu vì $p=(2^2+1)(2-1)=5$

Nếu $n > 3$ không thỏa mãn đề Câu vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n-1 > 1$ và $n^2+1 > n-1 > 1$

Vậy $n=2$ thì $p=n^3-n^2+n-1$ là số nguyên tố.

$$2) \quad *g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x-2)$$

$$*f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 : g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x-1)(x-2)Q(x) \quad (1) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- Thay $x_1 = 1; x_2 = 2$ vào (1) ta có:

$$a+b+6=0 \text{ và } 8a+4b+16=0 \Rightarrow a=2 \text{ và } b=-8$$

$$\text{Vậy } f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 : g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \end{cases}$$

3)

Biến đổi được:

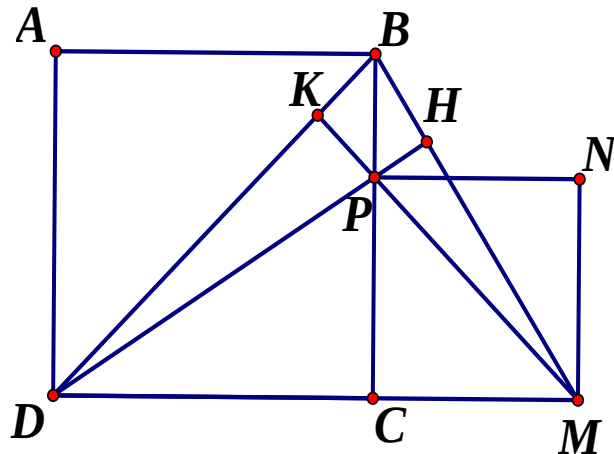
$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (4a-b)(a-b) \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a \\ b=a \end{cases}$$

Mà $2a > b > 0 \Rightarrow 4a > 2b > b$ nên $a = b$

$$\text{Ta có: } P = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

Vậy $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$ thì $P = \frac{1}{3}$

Câu 4.



a) Chứng minh được : DH vuông góc với BM

Chứng minh được: $CD = BC; PC = CM; DCB = BCM = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle DPC = \triangle BMC$ (c.g.c) $\Rightarrow BHP = 90^\circ$

$$b) \text{ Chứng minh được: } MP \perp BD \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{\frac{1}{2} DM \cdot PC}{\frac{1}{2} DM \cdot BC} = \frac{S_{\triangle PDM}}{S_{\triangle BDM}}$$

$$\text{Tương tự } \frac{PH}{DH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DB \cdot KP}{\frac{1}{2} \cdot DB \cdot MK} = \frac{S_{PBM}}{S_{BDM}}; \frac{PH}{DH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DB \cdot KP}{\frac{1}{2} \cdot DB \cdot MK} = \frac{S_{PBD}}{S_{BDM}}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{S_{PDM} + S_{PBM} + S_{PBD}}{S_{BDM}} = 1.$$

c) Chứng minh: $\Delta MCP \sim \Delta MKD(g.g) \Rightarrow MP \cdot MK = MC \cdot MD$ (1)

Chứng minh: $\Delta DBC \sim \Delta DKM(g.g) \Rightarrow DK \cdot BD = DC \cdot DM$ (2)

Từ (1) & (2)

$$\Rightarrow MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM \cdot (MC + DC)$$

$$\Rightarrow MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$$

Câu 5.

1) Học sinh chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ với mọi $x, y > 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - 2 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y > 0$

2) $B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$

$$*) x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y^2 + 6y + 9 = (y+3)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 12 \geq 3 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} +B &= xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045 \\ &= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 36 + 2009 \\ &= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) + 2009 \\ &= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009 \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow B \geq 2 \cdot 3 + 2009 \Rightarrow B \geq 2015$

$$*) B = 2015 \Leftrightarrow x = 1 \& y = -3$$

$$*) \text{Min} B = 2015 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 26. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M = \frac{x^4+2}{x^6+1} + \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \frac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

2. Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033$ cho $x^2 + 12x + 30$

2. Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 7$; $x^2 + y^2 + z^2 = 23$; $xyz = 3$

Tính giá trị của biểu thức $H = \frac{1}{xy+z-6} + \frac{1}{yz+x-6} + \frac{1}{zx+y-6}$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

2. Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16$

Câu 4. (6 điểm)

Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy M ($0 < MB < MA$) và trên cạnh BC lấy N sao cho $\angle MON = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AN với DC, gọi K là giao điểm của ON với BE.

1) Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân

2) Chứng minh MN song song với BE

3) Chứng minh CK vuông góc với BE

4) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H. Chứng minh: $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1.

a)

$$\begin{aligned}
M &= \frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+3)} \\
&= \frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \\
&= \frac{x^4+2+(x^2-1)(x^2+1)-(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{x^4+2+x^4-1-x^4+x^2-1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} \\
&= \frac{x^4+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{x^2}{x^4-x^2+1}
\end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

b) Ta có : $M = \frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

- Nếu $x=0$ ta có $M=0$

- Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$

$$\text{Ta có: } x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Nên ta có: } M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \leq 1. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = 1.$$

Vậy M lớn nhất là $M=1$ khi $x=1$

2.

$$\text{Ta có } \frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$$

$$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy = 1-x-y+xy \Leftrightarrow x+y = \frac{3xy+1}{2}$$

$$\text{Ta có: } M = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy+1}{2} \right)^2 - 3xy = \dots = \left(\frac{3xy-1}{2} \right)^2$$

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ, Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ.

Câu 2.

1)

$$\text{Ta có: } (x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = \dots = (x^2+12x+27)(x^2+12x+35) + 2033$$

$$\text{Đặt } x^2+12x+30=t, \text{ ta có: } (x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = (t-3)(t+5) + 2033$$

$$= t^2 + 2t - 15 + 2033 = t(t+2) + 2018$$

$$\text{Vậy ta có } (x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = (x^2+12x+30)(x^2+12x+32) + 2018$$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

2) Vì $x+y+z=7 \Rightarrow z=-x-y+7 \Rightarrow xy+z-6=\dots=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự ta có: $yz+x-6=(y-1)(z-1); zx+y-6=(z-1)(x-1)$

$$\text{Vậy } H = \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

$$= \frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1} = \frac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1} = \frac{4}{9-(xy+yz+xz)}$$

Ta có:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+xz) \Rightarrow 7^2 = 23 + 2(xy+yz+xz)$$

$$\Rightarrow xy+yz+xz = 13$$

$$\text{Vậy } H = \frac{4}{9-13} = -1$$

Câu 3.

1) Ta có:

$$3x^2+3xy-17=7x-2y \Leftrightarrow 3xy+2y=-3x^2+7x+17 \Leftrightarrow (3x+2)y=-3x^2+7x+17$$

Vì x nguyên nên $2x+3 \neq 0$ nên ta có:

$$y = \frac{-3x^2+7x+17}{3x+2} = \frac{-3x^2-2x+9x+6+11}{2}$$

$$= \frac{-x(3x+2)+3(3x+2)+11}{3x+2} = -x+3+\frac{11}{3x+2}$$

Vì x, y nguyên nên ta có $\frac{11}{3x+2}$ nguyên $\Rightarrow 11:3x+2 \Rightarrow 3x+2 = \pm 1; \pm 11$

- Xét các trường hợp ta tìm được $x=-1; y=-1; x=-3; y=5$ thỏa mãn và kết luận

2) Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16 \Leftrightarrow (3x-2)(3x+3)^2(3x+8)=-144$

Đặt $3x+3=t \Rightarrow 3x-2=t-5; 3x+8=t+5$

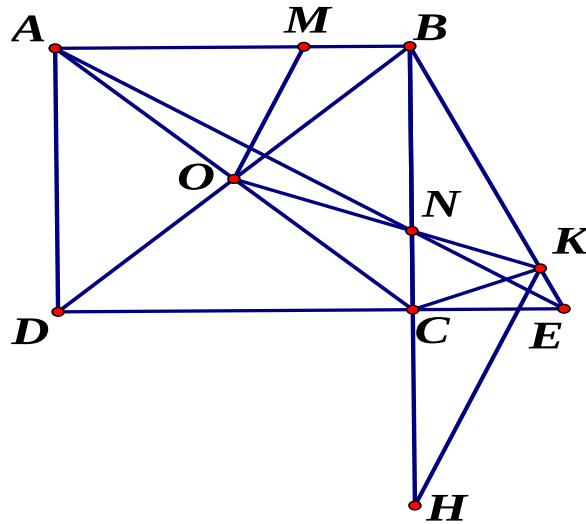
Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5)=-144$

$$\Leftrightarrow t^4-25t^2+144=0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t^2-16)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2=9 \\ t^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\pm 3 \\ t=\pm 5 \end{cases}$$

Xét các trường hợp ta tìm được $x=0; x=-2; x=\frac{2}{3}; x=-\frac{8}{3}$

Câu 4.



- 1) Ta có : $\angle BOC = 90^\circ \Rightarrow \angle CON + \angle BON = 90^\circ$; vì
 $\angle MON = 90^\circ \Rightarrow \angle BOM + \angle BON = 90^\circ \Rightarrow \angle BOM = \angle CON$
Ta có BD là phân giác $\angle ABC \Rightarrow \angle MBO = \angle CBO = \frac{\angle BOC}{2} = 45^\circ$
Tương tự ta có: $\angle NCO = \angle DCO = \frac{\angle BOC}{2} = 45^\circ$. Vậy ta có : $\angle MBO = \angle NCO$
Xét $\triangle OBM$ và $\triangle OCN$ có $OB = OC$; $\angle BOM = \angle CON$; $\angle MBO = \angle NCO$
 $\Rightarrow \triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow OM = ON$
Xét $\triangle MON$ có $\angle MON = 90^\circ$; $OM = ON \Rightarrow \triangle MON$ vuông cân
- 2) $\triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow MB = NC$ mà $AB = BC \Rightarrow AB - MB = BC - NC$
 $\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC}$
Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow AM \parallel CE \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{BN}{NC}$
Vậy ta có: $\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NE} \Rightarrow MN \parallel BE$ (Theo định lý Talet đảo)
- 3) Vì $MN \parallel BE \Rightarrow \angle BKN = \angle MNO = 45^\circ$ (đồng vị và có tam giác MON vuông cân)
 $\Rightarrow \triangle BKN \sim \triangle ONC$ (vì có $\angle BKN = \angle ONC$; $\angle BKN = \angle OCN = 45^\circ$) $\Rightarrow \frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC}$
- Xét $\triangle BNO$; $\triangle KNC$ có $\angle BNO = \angle CNK$; $\frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC} \Rightarrow \triangle BNO \sim \triangle KNC$
 $\Rightarrow \angle NKC = \angle NBO = 45^\circ$
Vậy ta có: $\angle BKC = \angle BKN + \angle CNK = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow CK \perp BE$
- 4) - Vì $KH \parallel OM$ mà $MK \perp OK \Rightarrow MK \perp KH \Rightarrow \angle NKH = 90^\circ$ mà
 $\angle NKC = 45^\circ \Rightarrow \angle CKH = 45^\circ \Rightarrow \angle BKN = \angle NKC = \angle CKH = 45^\circ$
Xét $\triangle BKC$ có $\angle BKN = \angle NKC \Rightarrow KN$ là phân giác trong của $\triangle BKC$, mà $KH \perp KN$

$$\Rightarrow KH \text{ là phân giác ngoài của } \triangle BKC \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{HC}{HB}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{KN}{KH} = \frac{BN}{BH}$$

$$\text{Vậy ta có } \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{NC}{BH} = \frac{HC}{HB} + \frac{BN}{BH} + \frac{CN}{BH} = \dots = \frac{BH}{BH} = 1$$

Câu 5 Ta có: $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

$$= (x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 8y + 8) + \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\frac{24}{y} + 6y - 24\right) + (x + 2y) + 17$$

$$= (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + \frac{(x-1)^2}{x} + \frac{6(y-2)^2}{y} + (x+2y) + 17$$

$$\geq 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 17 = 22$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2(y-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{6(y-2)^2}{y} = 0 \text{ và } x+2y=5$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ và } y=2. \text{ Vậy } H \text{ nhỏ nhất là } H=22 \Leftrightarrow x=1, y=2$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 27. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

2. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2. (2 điểm)

1. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

2. Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD . Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

a) Chứng minh $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

Câu 4. (1,5 điểm) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2011} + b^{2011}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. 1a. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$
 $= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

1b. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$
 $= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 = [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24$
 $= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16)$
 $= (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)$

2. Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Câu 2.

1. Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1).q(x)$$

Với $x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6$ (1)

Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $a=2; b=4$

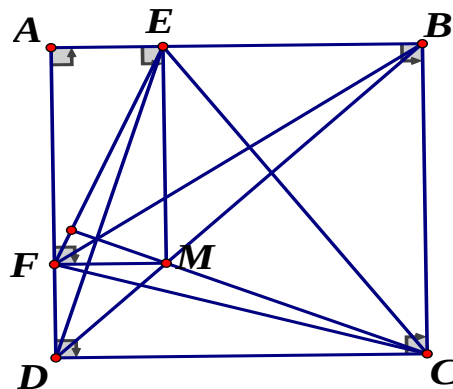
2. Ta có: $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2).(a^2 + 2a + 2)$

Vì $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{Z}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{Z}$

Có: $a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \geq 1 \forall a$ và $a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1 (\forall a)$

Vậy $a^4 + 4$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} a^2 + 2a + 2 = 1 \\ a^2 - 2a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(\text{tm}) \\ a = -1(\text{tm}) \end{cases}$

Câu 3.



a) Chứng minh $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow đpcm$

b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow đpcm$

c) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi

$$\Rightarrow ME + MF = a \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow S_{AEMF} = ME.MF \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow ME = MF \text{ (AEMF là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của BD.}$$

Câu 4.

$$(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + 1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(\text{tm}) \\ b = 0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vì } b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(\text{tm}) \\ a = 0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 28. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3,5 điểm)

a) Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

b) Rút gọn biểu thức:
$$\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

Câu 2. (4,5 điểm).

a) Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được 4m thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 8m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 12m dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc 2m / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

b) Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Câu 4. (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

a) Chứng minh APQR là hình thang cân

b) Biết $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Tính độ dài của AR

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$$

Câu 6. (1,0 điểm)

Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

$$a) \quad n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3)=1$ nên chia hết cho 6

$18n:6$, suy ra điều phải chứng minh

b)

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1} &= \frac{x^2 + x^2a + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - x^2a - a + a^2 + a^2x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + x^2a + a^2x^2 + 1 + a + a^2}{x^2 - x^2a + a^2x^2 + 1 - a + a^2} = \frac{x^2(1 + a + a^2) + (1 + a + a^2)}{x^2(1 - a + a^2) + (1 - a + a^2)} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(1 + a + a^2)}{(x^2 + 1)(1 - a + a^2)} = \frac{1 + a + a^2}{1 - a + a^2} \end{aligned}$$

Câu 2.

a) Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x-1$

$$\text{Thời gian đi: } \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2x = 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x+1)$$

$$\text{Thời gian dừng: } 1 + 2 + 3 + \dots + (x-1) = \frac{(x-1+1)(x-1)}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\text{Lập được phương trình: } \frac{x(x-1)}{2} + x(x+1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Khoảng cách AB là } 10 \cdot (10+1) \cdot 2 = 220 \text{ (m)}$$

b)

$$\begin{aligned}
 a^3 - 3ab^2 &= 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25 \\
 b^3 - 3a^2b &= 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100 \\
 \Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 &= 125 \\
 \Rightarrow (a^2 + b^2)^3 &= 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}
 \end{aligned}$$

Câu 3.

a) $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X + 4) - 3(X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 3)(X + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

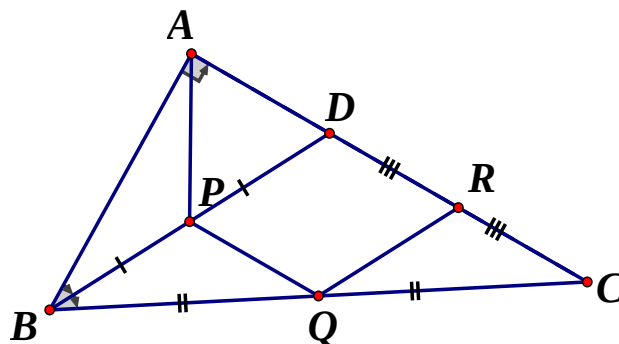
$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned}
 P &= x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010 \\
 &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018 \\
 &= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 2018 \geq -2018
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Câu 4.



a) PQ là đường trung bình tam giác BDC, suy ra $PQ \parallel AR$ nên APQR là hình thang.

$$AQ = \frac{1}{2} BC \text{ (trung tuyến tam giác vuông ABC)}$$

$$PR = \frac{1}{2} BC \text{ (đường trung bình tam giác DBC)}$$

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

b) Tính được $BC = 10\text{cm}$

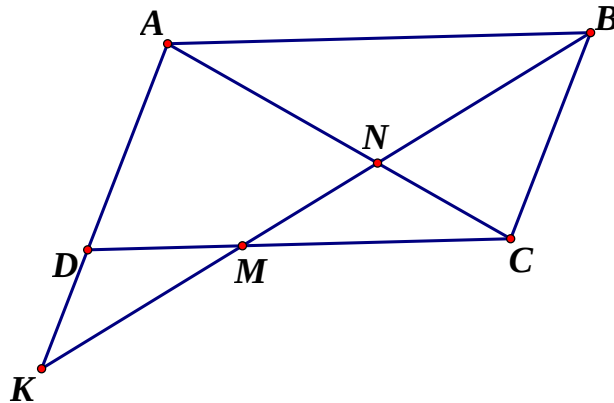
Tính chất đường phân giác trong của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC+BC}$$

Thay số tính được $AD = 3\text{cm}, DC = 5\text{cm}, DR = 2,5\text{cm}$

Kết quả $AR = 5,5\text{cm}$

Câu 5.



$AB \parallel DC$ (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AN} = \frac{MN}{NB} \Rightarrow \frac{MC + AB}{AB} = \frac{MN + NB}{BN} = \frac{BM}{BN} \quad (1)$$

$$\frac{KM}{BK} = \frac{KD}{KA} = \frac{MD}{AB} \Rightarrow \frac{BK - KM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = \frac{AB + MC}{AB} - \frac{AB - MD}{AB} = \frac{MC + MD}{AB}$$

Mà $MC + MD = CD = AB$ nên $\frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = 1$ (Điều phải chứng minh)

Câu 6.

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][a^2 - (b-c)^2] \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \end{aligned}$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 29. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

- a) Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}}$
- b) Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$ và $x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0$
 Tính giá trị của biểu thức $Q = x^2 + y^2$

Câu 2. (5 điểm)

- a) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn: $2^x = 5^y - 624$
- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:
 $10x^2 + 50y + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$

Câu 3. (4 điểm)

- a) Tìm số tự nhiên n sao cho số $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.
- b) Trong một cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi học sinh tham gia thi phải trả lời 10 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm; ngược lại, mỗi câu trả lời sai thì bị trừ 2 điểm. Qua cuộc thi, những học sinh đạt từ 30 điểm trở lên thì được thưởng.
 Hỏi: Mỗi học sinh được thưởng thì phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu hỏi

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông ở A có AM là phân giác ($M \in BC$). Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại N . Chứng minh rằng $MN = MC$

Câu 5. (4 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 20cm. Trên cạnh CD lấy điểm M . Đường thẳng vuông góc với BM tại M cắt AD tại N .

- a) Cho $MC = 15$ cm. Tính diện tích tam giác BMN
- b) Xác định vị trí của M trên cạnh CD để ND có độ dài lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- a) Từ $a^2 + a + 1 = 0$ với $a \neq 1$ ta có: $(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0 \Rightarrow a^3 - 1 = 0 \Rightarrow a^3 = 1$

Ta lại có $a^{2013} = (a^3)^{671}$

$$\text{Do đó: } P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}} = (a^3)^{671} + \frac{1}{(a^3)^{671}} = 1 + 1 = 2$$

- b) Từ $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2y}{y^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ (1)

$$x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 - 2(y - 1)^2 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1$$
 (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$

$$x^2 = 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y^2 = 1$$

Vậy $Q = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$

Câu 2.

a) Ta có: $2^x = 5^y - 624 \Leftrightarrow 2^x + 624 = 5^y (*)$

+Xét $x = 0$, ta có: $5^y = 625 \Leftrightarrow y = 4$

+Xét $x \in \mathbb{N}$ và $x > 0$ ta có VT(*) là số chẵn còn vế phải (*) là số lẻ, Vô lý

Vậy $(x; y) = (0; 4)$

b) Ta có:

$$10x^2 + 50y^2 + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 + 42xy + 49y^2) + (x^2 + 14x + 49) + (y^2 - 6y + 9) - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 < 1$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (3x + 7y)^2 \geq 0 \\ (x + 7)^2 \geq 0 \\ (y - 3)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ và } x, y \in \mathbb{Z} \text{ nên } (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 7y)^2 = (x + 7)^2 = (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Câu 3.

a) Giả sử A là số chính phương, suy ra tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$n^2 + n + 6 = k^2 \Leftrightarrow 4(n^2 + n + 6) = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow (2k)^2 - (2n + 1)^2 = 23 \Leftrightarrow (2k + 2n + 1)(2k - 2n - 1) = 23 (*)$$

Do $k, n \in \mathbb{N}$ nên dễ thấy $2k - 2n - 1$ và $2k + 2n + 1$ là các số nguyên

Ngoài ra $23 > 0$ và $2k + 2n + 1 \geq 1; 2k - 2n - 1 < 2k + 2n + 1$

Suy ra $1 \leq 2k - 2n - 1 < 2k + 2n + 1$

Căn cứ các lập luận trên và 23 là số nguyên tố nên từ (*) suy ra

$$\begin{cases} 2k - 2n - 1 = 0 \\ 2k + 2n + 1 = 23 \end{cases} \Rightarrow 4n + 2 = 22 \Leftrightarrow n = 5$$

Với $n = 5$ thì $A = 36 = 6^2$ là số chính phương

Vậy $n = 5$ là số tự nhiên cần tìm

b) Gọi x là số câu trả lời đúng (x nguyên và $0 \leq x \leq 10$)

Số câu trả lời sai là : $10 - x$

Số điểm được cộng là $5x$

Số điểm bị trừ là $2.(10 - x)$

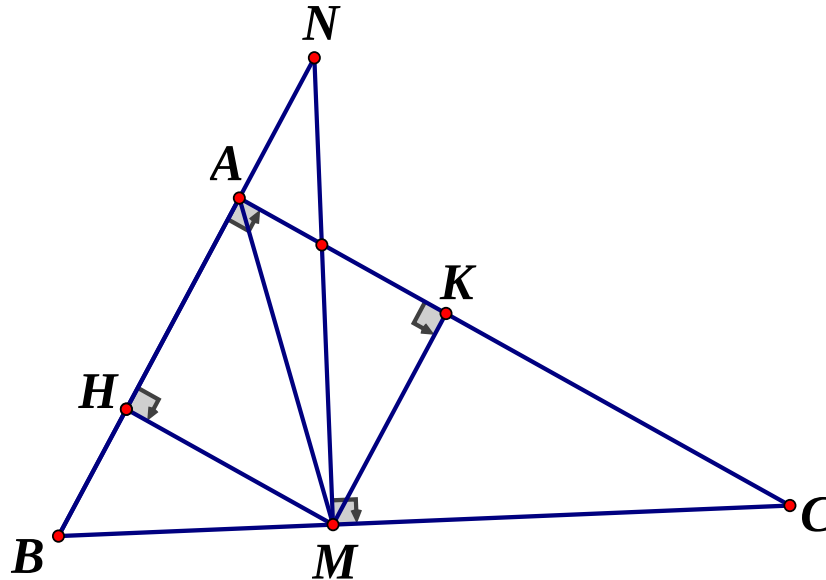
Nếu được thưởng thì phải đạt từ 30 điểm trở lên. Nên ta có:

$$5x - 2(10 - x) \geq 30$$

Giải bất phương trình trên ta được: $x \geq 8(\text{tm})$

Vậy để được thưởng học sinh phải trả lời đúng ít nhất 8 câu hỏi.

Câu 4.

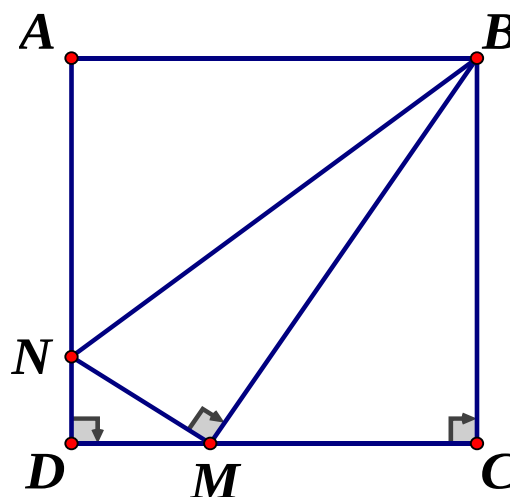


Kẻ $MH \perp AB$ tại H , $MK \perp AC$ tại $K \Rightarrow AHMK$ là hình vuông $\Rightarrow MH = MK$ (1)

Ta có: $MCA = MNA$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MHN = \Delta MKC (\text{ch} - \text{cgv}) \Rightarrow MN = MC$

Câu 5



a) Hai tam giác vuông BCM và MDN có:

CBM = DMN (cùng phụ với BMC)

$$\Rightarrow \triangle BCM \sim \triangle MDN \Rightarrow \frac{ND}{MC} = \frac{MD}{BC} \quad (*)$$

$$\Rightarrow ND = \frac{MC \cdot MD}{BC} = \frac{15 \cdot (20 - 15)}{20} = 3,75 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow AN = AD - ND = 20 - 3,75 = 16,25 \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle BMN} = S_{\triangle ABCD} - S_{\triangle BCM} - S_{\triangle DMN} - S_{\triangle ABN}$$

$$= 20^2 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,75 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16,25 = 78,125 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{b) Đặt } MC = x \text{ (} 0 \leq x \leq 20 \text{)}$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow ND = \frac{MC \cdot MD}{BC} = \frac{x \cdot (20 - x)}{20} = \frac{20x - x^2}{20} = 5 - \frac{(x - 10)^2}{20} \leq 5$$

$\Rightarrow$ Độ dài ND lớn nhất là ND = 5cm khi x = 10 hay M là trung điểm của CD

Vậy để độ dài ND lớn nhất thì vị trí của M là trung điểm của CD.

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 30. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (5,0 điểm)

$$\text{Cho biểu thức } P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Câu 2. (6 điểm)

a) Tìm đa thức f(x) biết rằng: f(x) chia cho $x+2$ dư 10, f(x) chia cho $x-2$ dư 22, f(x) chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

c) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

b) Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC ($M \neq B, C$). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

- Chứng minh : $\triangle OEM$ vuông cân
- Chứng minh: $ME \parallel BN$
- Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

- a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

- b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \in \text{ĐKXĐ}$

$$\Rightarrow 2x^2 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ x = -1 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

- c)

$$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$P = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Vì $x > 1$ nên $x-1 > 0$. Áp dụng BĐT Cosi ta có: $x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} = 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TM)}$

Vậy GTNN của P là $4 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 2.

- a) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề Câu, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 22 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 22 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 16 \end{cases}$$

Do đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 3x + 16$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + 23x + 16$

b) $a^3 + 5a = a^3 - a + 6a = a(a^2 - 1) + 6a = a(a - 1)(a + 1) + 6a$

Vì $a(a - 1)(a + 1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên $a(a - 1)(a + 1)$ chia hết cho 6

$6a$ chia hết cho 6

Nên $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

c) $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2013x - 2013y - 2013 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x + y + 1) - 2013(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2013)(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2014 \\ y = -2014 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ y = -2014 \end{cases}$$

Câu 3.

a) $P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$

$$= \frac{1}{b^2 + c^2 - (b + c)^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - (a + c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (a + b)^2}$$

$$= \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = \frac{a + b + c}{-2abc} = 0$$

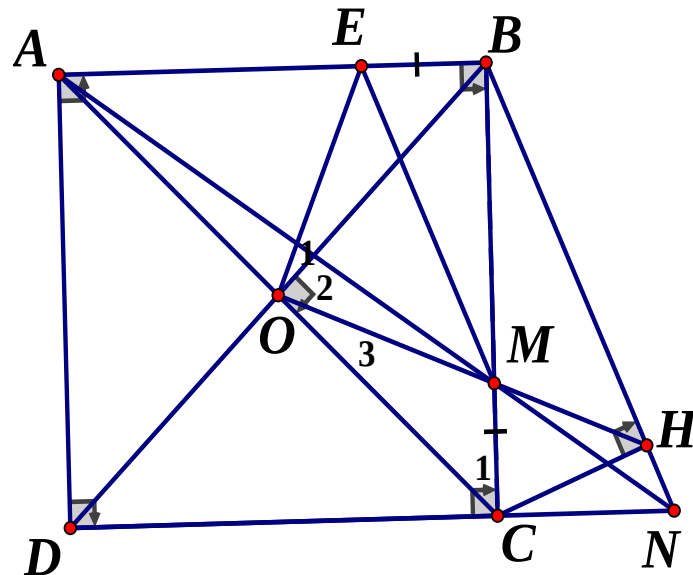
b) $\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} - \frac{2}{1 + ab} = \left(\frac{1}{1 + a^2} - \frac{1}{1 + ab} \right) + \left(\frac{1}{1 + b^2} - \frac{1}{1 + ab} \right) = \frac{ab - a^2}{(1 + a^2)(1 + ab)} + \frac{ab - b^2}{(1 + b^2)(1 + ab)}$

$$= \frac{a(b - a)(1 + b^2) + b(a - b)(1 + a^2)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)} = \frac{(b - a)(a + ab^2 - b - a^2b)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)} = \frac{(b - a)^2(ab - 1)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)}$$

Do $a \geq 1; b \geq 1$ nên $\frac{(b - a)^2(ab - 1)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)} \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} - \frac{2}{1 + ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \geq \frac{2}{1 + ab}$$

Câu 4.



a) Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có: $OB = OC$

Và $B_1 = C_1 = 45^\circ$, $BE = CM$ (gt) $\Rightarrow \triangle OEB = \triangle OMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow OE = OM$ và $O_1 = O_3$

Lại có: $O_2 + O_3 = \angle BOC = 90^\circ$ vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow O_2 + O_1 = \angle EOM = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

b) Từ giả thiết tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \parallel CD$ và $AB = CD$

+) $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (định lý Ta let) (*)

Mà $BE = CM$ (gt) và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào (*)

Ta có: $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN$ (Ta let đảo)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \angle OME = \angle OH'E$ (cặp góc so le trong)

Mà $\angle OME = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O

$\Rightarrow \angle MH'B = 45^\circ = C_1 \Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH'$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}$, kết hợp $\angle OMB = \angle CMH'$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH'$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle OBM = \angle MH'C = 45^\circ$

Vậy $\angle BH'C = \angle BH'M + \angle MH'C = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN$ ($H \in BN$) $\Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 31. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$
- b) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng : $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 26, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Câu 2. (2,0 điểm) Giải phương trình

a) $\frac{x+43}{57} + \frac{x+46}{54} = \frac{x+49}{51} + \frac{x+52}{48}$

b) $(2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng: $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
- b) Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AE, BF, CG cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC, qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM, a cắt AB, AC lần lượt tại I và K

- a) Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác EFC
- b) Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK, b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D. Chứng minh $NC = ND, HI = HK$
- c) Chứng minh $\frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} > 6$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. a) $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{(a^3 - 8) - 7a(a - 2)} = \frac{(a^2 - 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)}$

$$= \frac{(a-1)(a+1)(a-4)}{(a-2)(a-1)(a-4)} = \frac{a+1}{a-2}$$

Vậy $P = \frac{a+1}{a-2}$ với $a \neq \{1; 2; 4\}$

b) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$. Khi đó

$$f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$$

Theo đề Câu, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 26 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 26 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 18 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 4x + 18$$

$$\text{Vậy đa thức } f(x) \text{ cần tìm là } f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 4x + 18$$

Câu 2.

$$\text{a) pt } \Leftrightarrow \frac{x+43}{57} + 1 + \frac{x+46}{54} + 1 = \frac{x+49}{51} + 1 + \frac{x+52}{48} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+100}{57} + \frac{x+100}{54} - \frac{x+100}{51} - \frac{x+100}{48} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+100) \left(\frac{1}{57} + \frac{1}{54} - \frac{1}{51} - \frac{1}{48} \right) = 0 \Leftrightarrow x = -100$$

$$\text{b) } (2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(2x+5)(x+2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + 16x + 15)(x^2 + 4x + 4) = 3(2)$$

$$\text{Đặt } y = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 4y - 1$$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow y(4y-1) - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(4y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{+) } y = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{+) } 4y + 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 + 3 = 0 \text{ (VN)}$$

$$\text{Vậy } S = \{-1; -3\}$$

Câu 3.

$$\text{a) } Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

$$= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$

$$= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$$

$$\text{Đặt } C = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3$$

$$= n^2(n+1) + 2n(n+1) + 3(n+1)$$

$$= n(n+1)(n+2) + 3(n+1)$$

Ta thấy $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3 (vì tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Câu 4.

Tương tự ta có: $\frac{BH}{HF} = \frac{S_{BHC} + S_{BHA}}{S_{AHC}}; \quad \frac{CH}{HG} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC}}{S_{BHA}}$

$$\Rightarrow \frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} = \frac{S_{AHC}}{S_{BHC}} + \frac{S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{BHA}} + \frac{S_{AHC}}{S_{BHA}} \geq 6$$

Dấu "=" xảy ra khi $\triangle ABC$ đều mà theo gt $AB < AC$ nên không xảy ra dấu bằng.

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*). \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng BDT (**) ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+ac+bc)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vi } abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Mà $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 32. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (6 điểm)

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

- a) Rút gọn P
- b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$
- c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên
- d) Tìm x để $P > 0$

Câu 2. (3 điểm)

- a) $\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$
- b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$
- c) $||x-2|+3| = 5$

Câu 3. (2 điểm)

Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó

Câu 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

- a) Tứ giác AMDB là hình gì ?
- b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD. Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng
- c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật MEAF không phụ thuộc vào vị trí điểm P.
- d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4\text{cm}$, $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD

Câu 5. (2 điểm) a) Chứng minh rằng : $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

b) Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Phân tích:

$$4x^2 - 12x + 5 = (2x - 1)(2x - 5) \quad ; \quad 13x - 2x^2 - 20 = (x - 4)(5 - 2x)$$

$$21 + 2x - 8x^2 = (3 + 2x)(7 - 4x); \quad 4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1)(2x + 3)$$

$$\text{Điều kiện: } x \neq \left\{ \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{-3}{2}; \frac{7}{4}; 4 \right\}$$

$$\text{a) Rút gọn: } P = \frac{2x - 3}{2x - 5}$$

$$\text{b) } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) } P = \frac{2x - 3}{2x - 5} = 1 + \frac{2}{x - 5}$$

$$\text{Vậy } P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x - 5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 5 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

$$x - 5 = -2 \Rightarrow x = 3(\text{tm})$$

$$x - 5 = -1 \Rightarrow x = 4(\text{tm})$$

$$x - 5 = 1 \Rightarrow x = 6(\text{tm})$$

$$x - 5 = 2 \Rightarrow x = 7(\text{tm})$$

$$\text{d) } P = \frac{2x - 3}{2x - 5} = 1 + \frac{2}{x - 5}$$

$$\text{Ta có: } 1 > 0 \Rightarrow P > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x - 5} > 0 \Rightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

$$\text{Với } x > 5 \text{ thì } P > 0$$

Câu 2.

$$\text{a) } \frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{3x - 3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x + 4)(x - 1)} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{3(x - 1)} \right) \quad (\text{DK: } x \neq -4; x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow 3.15x - 3(x + 4)(x - 1) = 3.12(x - 1) + 12(x + 4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{tm}) \\ x = -4(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$S = \{0\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10 \\ \Leftrightarrow & \frac{148-x}{25} - 1 + \frac{169-x}{23} - 2 + \frac{186-x}{21} - 3 + \frac{199-x}{19} - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = 123$$

$$\text{c) Ta có: } |x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2| + 3 > 0 \text{ nên } ||x-2| + 3| = |x-2| + 3$$

$$\text{Phương trình được viết lại: } |x-2| + 3 = 5 \Leftrightarrow |x-2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 4\}$$

Câu 3. Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(\text{km/h})(x > 0)$

$$\text{Vận tốc dự định của người đi xe máy là } \frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (\text{km/h}) \quad 3^{\text{h}}20' = 3\frac{1}{3} \text{ h}$$

$$\text{Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên } 5\text{km/h: } \frac{3x}{10} + 5 (\text{km/h})$$

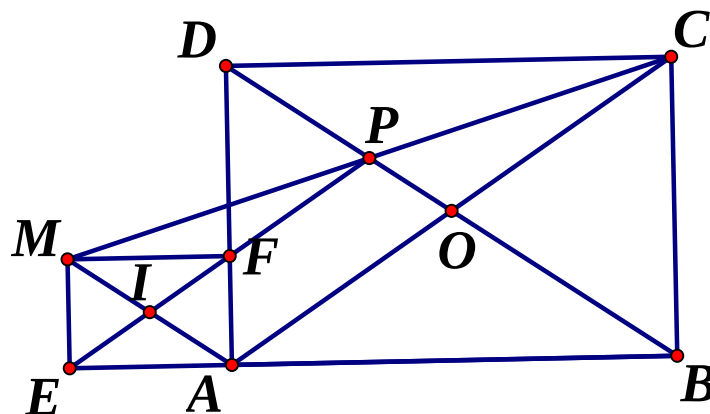
Theo đề Câu ta có phương trình :

$$\left(\frac{3x}{10} + 5 \right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150 (\text{tm})$$

Vậy khoảng cách giữa A và B là : 150km

$$\text{Vận tốc dự định: } \frac{3 \cdot 150}{10} = 45 \text{ km/h}$$

Câu 4.



a) Gọi O là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật ABCD

$\Rightarrow PO$ là đường trung bình tam giác CAM

$\Rightarrow AM // PO \Rightarrow AMDB$ là hình thang.

b) Do $AM // BD$ nên $OBA = MAE$ (đồng vị)

$\triangle AOB$ cân ở O nên $OBA = OAB$

Gọi I là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật $AEMF$ thì tam giác AIE cân ở I
nên $IAE = IEA$

Từ chứng minh trên $\Rightarrow FEA = OAB \Rightarrow EF // AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình $\triangle MAC$ nên $IP // AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, F, P thẳng hàng

$$c) \triangle MAF \sim \triangle DBA (g.g) \Rightarrow \frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB} \text{ không đổi}$$

$$d) \text{ Nếu } \frac{PD}{PB} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{PD}{9} = \frac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$$

$$\text{Nếu } CP \perp BD \Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle DCP (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{PB}{CP}$$

$$\text{Do đó: } CP^2 = PB \cdot PD \text{ hay } (2,4)^2 = 9 \cdot 16k^2 \Rightarrow k = 0,2$$

$$PD = 9k = 1,8\text{cm}; \quad PB = 16k = 3,2\text{cm}; \quad BD = 5\text{cm}$$

$$\text{Chứng minh } BC^2 = BP \cdot BD = 16 \Rightarrow \begin{cases} BC = 4\text{cm} \\ CD = 3\text{cm} \end{cases}$$

Câu 5.

$$a) \text{ Ta có: } 2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} + \dots) : 2010 \quad (1)$$

$$2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) : 2010 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

b) Ta có:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Vì } x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$$

Suy ra BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 33. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

$$1. x^2 + 7x + 6$$

$$2. x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$$

$$2) 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$$

Câu 3. (2 điểm)

$$3. \text{ CMR với } a, b, c \text{ là các số dương, ta có: } (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

$$4. \text{ Tìm số dư trong phép chia của biểu thức } (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2008 \text{ cho đa thức } x^2 + 10x + 21$$

Câu 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

$$4) \text{ Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo } m = AB$$

$$5) \text{ Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của } \angle AHM$$

$$6) \text{ Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh } \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Ta có:

$$1) x^2 + 7x + 6 = x^2 + x + 6x + 6 = x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 6)(x + 1)$$

$$\begin{aligned} 2) x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008 &= x^4 + x^2 + 2007x^2 + 2007x + 2007 + 1 \\ &= x^4 + x^2 + 1 + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1) - x^2 + 2007(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2008) \end{aligned}$$

Câu 2. Ta có: $2.1 \quad x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0 \quad (1)$

$$\text{Nếu } x \geq 1: (1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq 1)$$

$$\text{Nếu } x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{ktm}) \\ x = 3 & (\text{ktm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$

2.2 Ta có: $8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$ (2)

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (\text{ktm}) \\ x=-8 & (\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$

Câu 3. 3.1 Ta có: $A = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

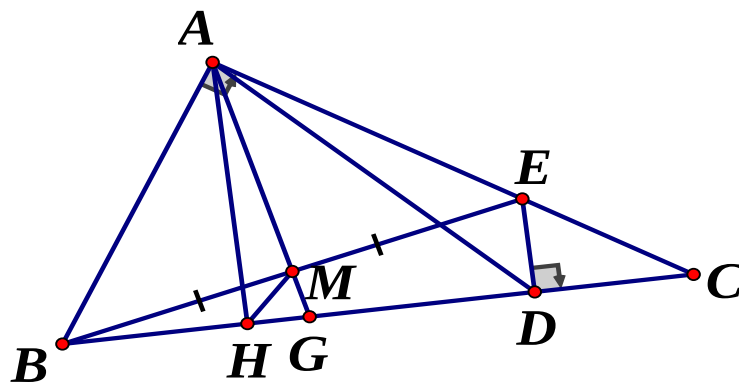
Mà $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (BĐT Cô si). Do đó: $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Vậy $A \geq 9$

3.2 Ta có: $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2008 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2008$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3$; $t \neq -7$), $P(x)$ viết lại $P(x) = (t-5)(t+3) + 2008 = t^2 - 2t + 1993$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1993$ cho t ta có số dư là 1993

Câu 4.



4) Hai tam giác ADC và BEC có: C chung;

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \text{ (hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng)}$$

Do đó $\triangle ADC \sim \triangle BEC$

Suy ra $\angle BEC = \angle ADC = 135^\circ$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $\angle AEB = 45^\circ$, do đó $\triangle ABE$ vuông cân tại A

Suy ra : $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

5) Ta có $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC}$ (do $\triangle BEC \sim \triangle ADC$)

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

Nên $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE}$ (do $\triangle ABH \sim \triangle CBA$)

Do đó: $\triangle BHM \sim \triangle BEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$

6) Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là tia phân giác BAC

Suy ra : $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$, mà $\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC}$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEC$) $= \frac{AH}{HC}$ ($ED \parallel AH$) $= \frac{HD}{HC}$

Do đó: $\frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 34. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$; b) $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Câu 3. (3 điểm) Tìm x biết:

$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Câu 4. (3 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Câu 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC

- Xác định vị trí của điểm D để tứ giác AEDF là hình vuông
- Xác định vị trí của điểm D sao cho $3AD + 4EF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6. (4 điểm)

Trong tam giác ABC, các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\angle AFE = \angle BFD$; $\angle BDF = \angle CDE$; $\angle CED = \angle AEF$

- a) Chứng minh rằng: $BDF = BAC$
b) Cho $AB = 5, BC = 8, CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- a) Ta có:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= [(x+y+z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3) \\ &= (y+z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2 \right] - (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\ &= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y+z)[x(x+y) + z(x+y)] \\ &= 3(x+y)(x+z)(y+z) \end{aligned}$$

- b) Ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010) \end{aligned}$$

Câu 2. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} &= 10 \\ \Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 258 \end{aligned}$$

Câu 3 Ta có:
$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

ĐKXĐ: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010 (a \neq 0)$, ta có hệ thức:
$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19 \Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

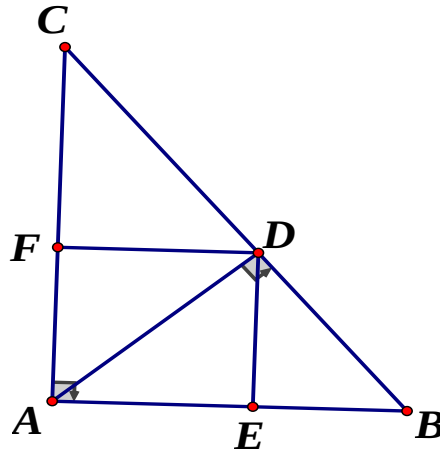
$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a = -\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4023}{2} \\ x = \frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Câu 4 Ta có:
$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Câu 5



a) Tứ giác AEDF là hình chữ nhật (vì $\angle E = \angle A = \angle F = 90^\circ$)

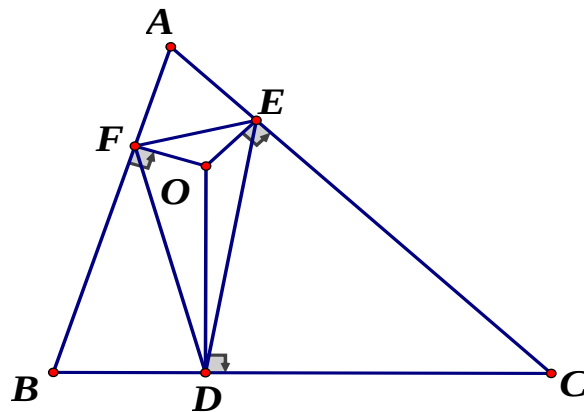
Để tứ giác AEDF là hình vuông thì AD là tia phân giác của $\angle BAC$

b) Do tứ giác AEDF là hình chữ nhật nên $AD = EF$

$$\Rightarrow 3AD + 4EF = 7AD$$

$3AD + 4EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Câu 6.



a) Đặt $\angle AFE = \angle BFD = \omega$, $\angle BDF = \angle CDE = \alpha$; $\angle CED = \angle AEF = \beta$

$$\text{Ta có: } \angle BAC + \beta + \omega = 180^\circ (*)$$

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O.

Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF

$$\Rightarrow \angle OFD + \angle OED + \angle ODF = 90^\circ (1)$$

Ta có:

$$\text{OFD} + \omega + \text{OED} + \beta + \text{ODF} + \alpha = 270^\circ (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^\circ (**)$$

$$\text{Từ } (*) \& (**) \Rightarrow \text{BAC} = \alpha = \text{BDF}$$

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

$$\text{B} = \beta, \text{C} = \omega \Rightarrow \triangle \text{AEF} \sim \triangle \text{DBF} \sim \triangle \text{DEC} \sim \triangle \text{ABC}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\text{BD}}{\text{BF}} = \frac{\text{BA}}{\text{BC}} = \frac{5}{8} \\ \frac{\text{CD}}{\text{CE}} = \frac{\text{CA}}{\text{CB}} = \frac{7}{8} \\ \frac{\text{AE}}{\text{AF}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{BD} = \frac{5\text{BF}}{8} \\ \text{CD} = \frac{7\text{CE}}{8} \\ 7\text{AE} = 5\text{AF} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{BD} = \frac{5\text{BF}}{8} \\ \text{CD} = \frac{7\text{CE}}{8} \\ 7(7 - \text{CE}) = 5(5 - \text{BF}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{BD} = \frac{5\text{BF}}{8} \\ \text{CD} = \frac{7\text{CE}}{8} \\ 7\text{CE} - 5\text{BF} = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{CD} - \text{BD} = 3 \quad (3)$$

$$\text{Ta lại có: } \text{CD} + \text{BD} = 8 \quad (4)$$

$$\text{Từ } (3) \text{ và } (4) \Rightarrow \text{BD} = 2,5$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 35. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1.(3đ)

a) Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

b) Tìm giá trị nguyên của x để $A:B$ biết

$$A = 10x^2 - 7x - 5 \text{ và } B = 2x - 3$$

c) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Câu 2. (3đ) Giải các phương trình sau:

$$\text{a)} (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12; \quad \text{b)} \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

Câu 3. (2đ)

Cho hình vuông ABCD; Trên tia đối của tia BA lấy E, trên tia đối tia CB lấy F sao cho $\text{AE} = \text{CF}$

a) Chứng minh $\triangle \text{EDF}$ vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm EF. Chứng minh O, C, I thẳng hàng

Câu 4.(2đ)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho

- DE có độ dài nhỏ nhất
- Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

$$= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4$$

$$= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x-1)(x-2)^2$$

b) Xét $\frac{A}{B} = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x - 3}$

với $x \in \mathbb{Z}$ thì $A:B$ khi $\frac{7}{2x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7:(2x-3)$

Mà $U(7) = \{-1; 1; -7; 7\} \Rightarrow x \in \{5; -2; 2; 1\}$ thì $A:B$

c) Biến đổi:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} (x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \& x - 1 = -y)$$

$$= \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - (x - y)}{xy(x^2y^2 + y^2x + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}{xy[x^2y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2]}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy[x^2y^2 + (x + y)^2 + 2]} = \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2y^2 + 3)}$$

$$= \frac{(x - y)[x(-y) + y(-x)]}{xy(x^2y^2 + 3)} = \frac{(x - y)(-2xy)}{xy(x^2y^2 + 3)}$$

$$= \frac{-2(x - y)}{x^2y^2 + 3} \Rightarrow \text{dpcm}$$

Câu 2.

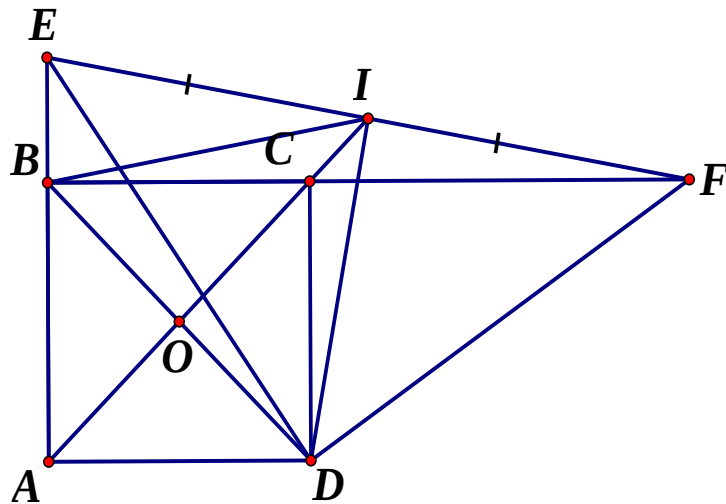
a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$, đặt $y = x^2 + x$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = -6 \\ x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-2; 1\}$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003} \\ \Leftrightarrow & \frac{x+1}{2008} + 1 + \frac{x+2}{2007} + 1 + \frac{x+3}{2006} + 1 = \frac{x+4}{2005} + 1 + \frac{x+5}{2004} + 1 + \frac{x+6}{2003} + 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003} \\ \Leftrightarrow & (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -2009 \end{aligned}$$

Câu 3.



a) Ta có $\triangle ADE = \triangle CDF$ (cgc) $\Rightarrow \triangle EDF$ cân tại D

Mặt khác $\triangle ADE = \triangle CDF$ (cgc) $\Rightarrow E_1 = F_2$

Mà $E_1 + E_2 + F_1 = 90^\circ \Rightarrow F_2 + E_2 + F_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle EDF = 90^\circ$

Vậy $\triangle EDF$ vuông cân

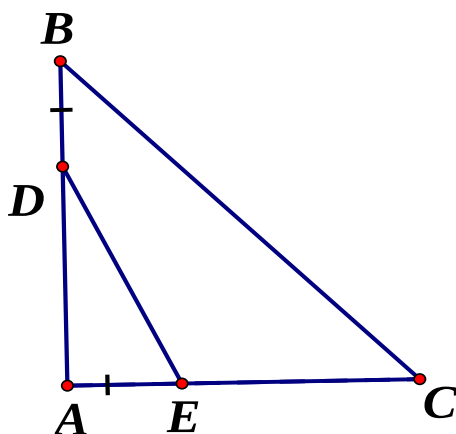
b) Theo tính chất đường chéo hình vuông $\Rightarrow CO$ là trung trực BD

Mà $\triangle EDF$ vuông cân $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$, tương tự: $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của DB $\Rightarrow I$ thuộc đường thẳng CO

Hay O, C, I thẳng hàng

Câu 4.



a) Đặt $AB = AC = a$ không đổi ; $AE = BD = x$ ($0 < x < a$)

Áp dụng định lý Pytago với $\triangle ADE$ vuông tại A có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$$

$$= 2(x^2 - ax) - a^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Ta có } DE_{\min} \Leftrightarrow DE^2_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow D, E \text{ là trung điểm } AB, AC$$

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất .

$$\text{Ta có: } S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot BD = \frac{1}{2} AD \cdot (AB - AD) = \frac{1}{2} \cdot (AD^2 - AB \cdot AD)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(AD^2 - 2 \frac{AB}{2} AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{AB^2}{8} = -\frac{1}{2} \left(AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$$

$$\text{Vậy } S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8} AB^2 \text{ (Không đổi)}$$

$$\text{Do đó } \min S_{BDEC} = \frac{3}{8} AB^2 \text{ khi } D, E \text{ lần lượt là trung điểm } AB, AC$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 36. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,0 điểm) Cho biểu thức : $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = 6$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6. \text{ Chứng minh } A = abcd \text{ là số chính phương.}$$

b) Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x-1)(2x-1)(2x^2-3x-1) + 2017$

b) Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều

b) Cho x, y, z dương và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2xz} + \frac{1}{z^2 + 2xy} \geq 9$$

Câu 5. (5,0 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D

a) Chứng minh $AB^2 = 4AC \cdot BD$

b) Kẻ $OM \perp CD$ tại M . Chứng minh $AC = CM$.

c) Từ M kẻ MH vuông góc với AB tại H . Chứng minh BC đi qua trung điểm MH

d) Tìm vị trí của C trên tia Ax để diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất

Câu 6. (1,0 điểm) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Câu 1. a) } P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1} = \frac{x^4 \cdot (2x-1) - (2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2(4x^2 - 2x + 1)}{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - 1)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2}{2x-1} = \frac{x^4 - 1}{2x+1} + \frac{2}{2x-1} = \frac{x^4 + 1}{2x+1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{x^4 + 1}{2x+1}$$

b) ĐK: $x \neq \pm \frac{1}{2}$

$$P = 6 \Leftrightarrow \frac{x^4 + 1}{2x + 1} = 6 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 12x + 6 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 2x + 3 & (1) \\ x^2 + 2 = -2x - 3 & (2) \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2} \\ x - 1 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \text{(tmdk)}$$

(2) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = -4$ (VN)

Vậy $S = \{1 \pm \sqrt{2}\}$

Câu 2.

a) $\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{a+b} + 1 + \frac{b}{b+c} + 1 + \frac{c}{c+d} + 1 + \frac{d}{d+a} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} + 1 - \frac{c}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} - \frac{b}{b+c} + \frac{d}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)} = 0$$

$$\Leftrightarrow b(c+d)(d+a) - d(a+b)(b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow abc - acd + bd^2 - b^2d = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0$$

$$\Leftrightarrow ac - bd = 0 \Leftrightarrow ac = bd$$

Vậy $A = abcd = (ac)^2$ là số chính phương

b) Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$ được kết quả:

$$a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$$

Để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$

$$\begin{aligned}
& (4a-1):(a^2+3) \\
& \Rightarrow (4a-1)(4a+1):(a^2+3) (a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a+1 \in \mathbb{Z}) \\
& \Rightarrow (16a^2-1):(a^2+3) \\
& \Rightarrow 49:(a^2+3)
\end{aligned}$$

Tìm a, thử lại và kết luận $a \in \{-2; 2\}$

Câu 3.

$$\begin{aligned}
a) A &= (x-1)(2x-1)(2x^2-3x-1)+2017 \\
&= (2x^2-3x+1)(2x^2-3x-1)+2017 \\
&= (2x^2-3x)^2-1+2017 = (2x^2-3x)^2+2016 \geq 2016
\end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 2x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(2x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 2016 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$b) \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 12\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \frac{x+1}{x-2} = a \text{ và } \frac{x-2}{x-4} = b \Rightarrow ab = \frac{x-1}{x-4}$$

Phương trình (*) trở thành:

$$a^2 + ab - 12b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-3b)(a+4b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ a=-4b \end{cases}$$

$$+ \text{Nếu } a=3b \text{ thì } \frac{x+1}{x-2} = 3 \cdot \frac{x-2}{x-4} \Rightarrow (x+1)(x-4) = 3(x-2)^2 \text{ (VN)}$$

$$+ \text{Nếu } a=-4b \text{ thì } \frac{x+1}{x-2} = -4 \cdot \frac{x-2}{x-4} \Rightarrow (x+1)(x-4) = -4(x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 & (\text{tm}) \\ x=\frac{4}{5} & (\text{tm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{3; \frac{4}{5}\right\}$$

Câu 4.

$$a) C/m: a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$+) \text{Từ giả thiết suy ra: } (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \quad (a+b+c > 0)$$

Biến đổi được kết quả: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow \text{Tam giác đó là đều (đpcm)} \\ c-a=0 \end{cases}$$

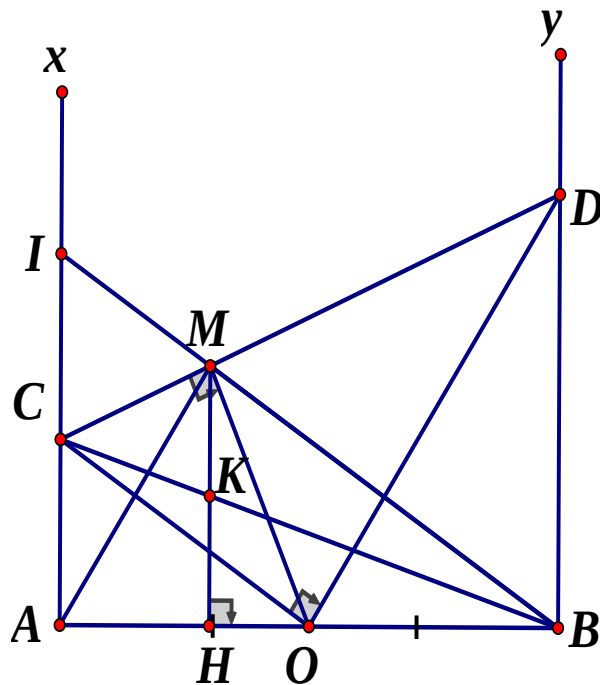
b) Đặt $a = x^2 + 2yz; b = y^2 + 2xz; c = z^2 + 2xy$

$$\Rightarrow a, b, c > 0 \text{ và } a+b+c = (x+y+z)^2 = 1$$

Chứng minh: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 9 \text{ hay } \frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy} \geq 9 \text{ (đpcm)}$$

Câu 5.



a) Chứng minh $\triangle OAC \sim \triangle DBO(g.g) \Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB = AC \cdot BD$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = AC \cdot BD \Rightarrow AB^2 = 4AC \cdot BD \quad (\text{đpcm})$$

b) Theo câu a ta có: $\triangle OAC \sim \triangle DBO(g-g) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$

$$\text{Mà } OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$$

+) Chứng minh: $\triangle OAC \sim \triangle DOC(c.g.c) \Rightarrow \angle ACO = \angle OCM$

+) Chứng minh: $\triangle OAC = \triangle OMC(\text{ch-gn}) \Rightarrow AC = MC(\text{đpcm})$

c) Ta có $\triangle OAC = \triangle OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực AM

$$\Rightarrow OC \perp AM,$$

Mặt khác $OA = OM = OB \Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow OC \parallel BM$ (vì cùng vuông góc với AM) hay $OC \parallel BI$

+) Xét $\triangle ABI$ có OM đi qua trung điểm AB, song song BI suy ra OM đi qua trung điểm AI $\Rightarrow IC = AC$

+) $MH \parallel AI$ theo hệ quả định lý ta lại có: $\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$

Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK \Rightarrow BC$ đi qua trung điểm MH (đpcm)

d) Tứ giác ABCD là hình thang vuông

$$\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AC + BD) \cdot AB$$

Ta thấy $AC, BD > 0$, nên theo BĐT Cô si ta có:

$$AC + BD \geq 2\sqrt{AC \cdot BD} = 2\sqrt{\frac{AB^2}{4}} = AB \Rightarrow S_{ABDC} \geq \frac{1}{2}AB^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow AC = BD = \frac{AB}{2} = OA$$

Vậy C thuộc tia Ax và cách điểm A một đoạn bằng OA.

Câu 6.

+) Với a, b, c, d dương, ta có:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \\ &= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} \right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \right) = \frac{a(d+a) + c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \geq \\ &\geq \frac{a^2 + c^2 + ad + bc}{\frac{1}{4}(b+c+d+a)^2} + \frac{b^2 + d^2 + ab + cd}{\frac{1}{4}(c+d+a+b)^2} = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd)}{(a+b+c+d)^2} \end{aligned}$$

$$(\text{theo bất đẳng thức } xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2)$$

$$\text{Mặt khác: } 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd) - (a+b+c+d)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd = (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0$$

Suy ra $F \geq 2$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = c; b = d$

+) Áp dụng $F \geq 2$ với $a = 2016, b = x, c = y, d = 2015$ ta có:

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y = 2016, x = 2015$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 37. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh :

$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$ chia hết cho 210 với mọi số tự nhiên n

Câu 2. (2 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} (x \neq -1; 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Câu 3. (1 điểm) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$. Tính

$$M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$$

Câu 4. (4 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi P là giao điểm của AN với DM

a) Chứng minh $\triangle APM$ là tam giác vuông

b) Tính diện tích của tam giác APM

c) Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân

Câu 5. (1 điểm) Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho $x^2 = y^2 + 2y + 13$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. a) $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x = x \left[(x^3 - 7x)^2 - 36 \right]$

$$= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6) = x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6)$$

.....

$$= x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)(x+3)$$

b) Theo phần a ta có: $A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên có một bội của 2, 1 bội của 3, 1 bội của 5,

1 bội của 7. Mà $(2, 3, 5, 7) = 1$ nên $A : (2.3.5.7) \Rightarrow A : 210$

Câu 2.

a) Với $x \neq \pm 1$ thì

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2)(1-x) \end{aligned}$$

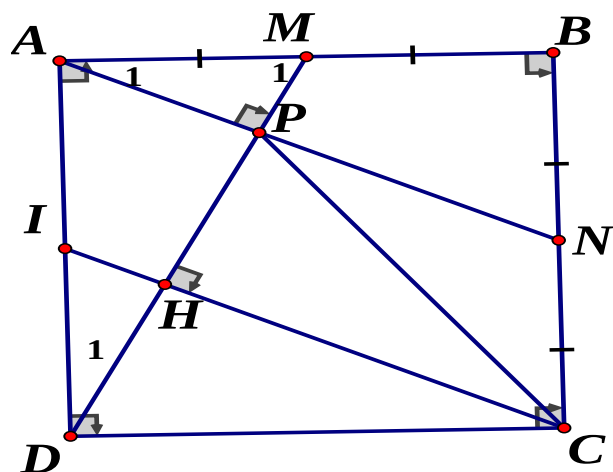
b) Tại $x = -1\frac{2}{3} \Rightarrow A = 10\frac{2}{27}$

c) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Câu 3. Thay $2004 = abc$ vào M ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc} + \frac{b}{bc+b+abc} + \frac{c}{ac+c+1} = \frac{a^2bc}{ab(1+ac+c)} + \frac{b}{b(c+1+ac)} + \frac{c}{ac+c+1} \\ &= \frac{ac}{1+ac+c} + \frac{1}{c+1+ac} + \frac{c}{ac+c+1} = \frac{ac+c+1}{1+ac+c} = 1 \end{aligned}$$

Câu 4.



a) Chứng minh $\triangle ADM = \triangle BAN$ (cg) $\Rightarrow A_1 = D_1$

Mà $D_1 + M_1 = 90^\circ$ ($\triangle ADM$ vuông tại A)

Do đó: $A_1 + M_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle APM = 90^\circ$. Hay $\triangle APM$ vuông tại P

b) Tính được $AP = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ (cm), $AM = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm, $S_{APM} = \frac{4}{5}$ (cm²)

c) Gọi I là trung điểm của AD. Nối C với I; CI cắt DM tại H

Chứng minh tứ giác AICN là hình bình hành

$\Rightarrow AN \parallel CI$ mà $AN \perp DM \Rightarrow CI \perp DM$

Hay CH là đường cao trong $\triangle CPD$ (1)

Vận dụng định lý về đường trung bình trong $\triangle ADP$ chứng minh được H là trung điểm DP suy ra CH là trung tuyến trong $\triangle CPD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CPD$ cân tại C

Câu 5. Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x+y+1)(x-y-1)=12$

Lập luận để có $x+y+1 > x-y-1$ và $x+y+1; x-y-1$ là các ước dương của 12 từ đó có các trường hợp

$x+y+1$	12	6	4
$x-y-1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Mà x, y nguyên dương nên $(x; y) = (4; 1)$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 38. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

- Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9
- Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 2. (4 điểm) Phân tích các đa thức thành nhân tử:

- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
- $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Câu 3. (4 điểm)

- Cho $a+b=2$ và $a^2+b^2=20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$
- Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Câu 4. (4 điểm)

Cho hình thang cân ABCD có $\angle ACD = 60^\circ$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC. Tam giác EFG là tam giác gì ? Vì sao?

Câu 5. (4 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD.

- Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy
- Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng EMFN là hình bình hành.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Ta phải chứng minh : $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} A &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9 \\ &= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1) : 3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) : 9$ và $9(n^2 + 2n + 1) : 9$

Vậy $A : 9$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} &= 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 8^{2n} \\ &= 5^n(59 - 8) + 8 \cdot 64^n = 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n) \\ 59 \cdot 5^n : 59 \text{ và } 8 \cdot (64^n - 5^n) : (64 - 5) &= 59 \end{aligned}$$

Vậy $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 2.

$$\begin{aligned} a / x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3z(x+y) - 3xy \right] \\ &= (x+y+z) \left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 3zx - 3zy - 3xy \right] \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b / x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011 \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + 2010x^2 + 2010x + 2010 - x^3 + 1 \\ &= x^2(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2010 - x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2011) \end{aligned}$$

Câu 3.

a) Từ $a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow (a+b)^2 - 2ab = 20 \Rightarrow ab = -8$

$$M = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3 \cdot (-8) \cdot 2 = 56$$

b) Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 14 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 196$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Ta lại có: $a + b + c = 0 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = -7$$

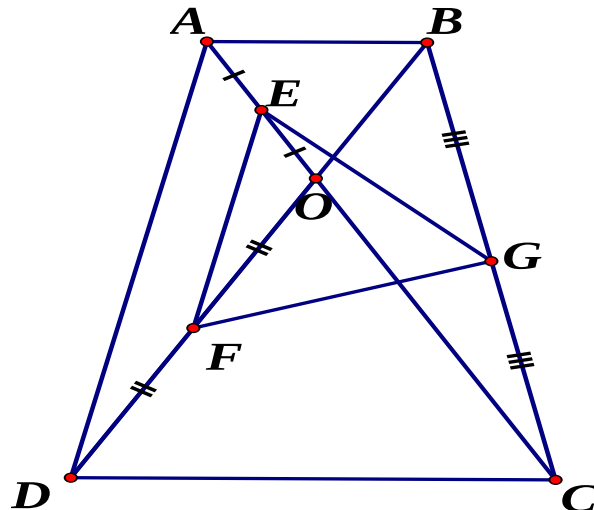
$$\Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49$$

$$\text{Do đó: } N = a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 196 - 2 \cdot 49 = 98$$

Câu 4.



Do ABCD là hình thang cân và $\angle ACD = 60^\circ$ suy ra $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ là các tam giác đều
 Chứng minh $\triangle BFC$ vuông tại F

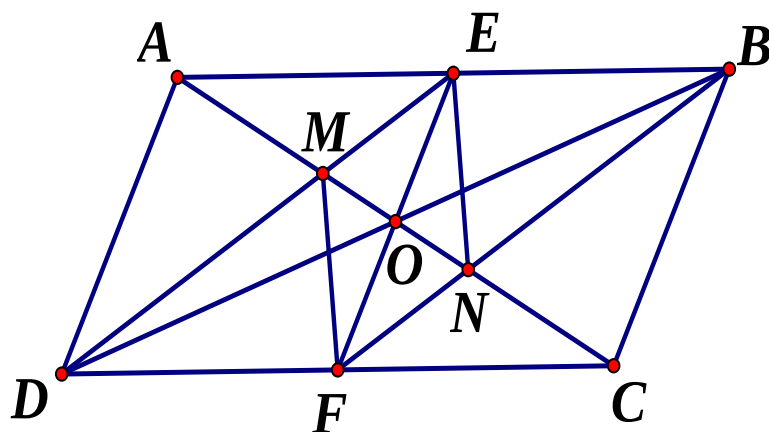
Xét $\triangle BFC$ vuông tại F có: $FG = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh $\triangle BEC$ vuông tại E có $EG = \frac{1}{2}BC$

Xét EF là đường trung bình $\triangle AOD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}BC$ (ABCD hthang cân)

Suy ra $EF = EG = FG \Rightarrow \triangle EFG$ đều

Câu 5.



a)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD, ta có O là trung điểm của BD.

Chứng minh BEDF là hình bình hành

Có O là trung điểm của BD nên O cũng là trung điểm của EF

Vậy EF, BD, AC đồng quy tại O

b) Xét $\triangle ABD$ có M là trọng tâm, nên $OM = \frac{1}{3}OA$

Xét $\triangle BCD$ có N là trọng tâm, nên $ON = \frac{1}{3}OC$

Mà $OA = OC$ nên $OM = ON$

Tứ giác EMFN có $OM = ON, OE = OF$ nên là hình bình hành

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 39. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a + b \geq 1$

b) Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tìm x

biết rằng: $\left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1$

Câu 3. (3 điểm)

Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là 6km/h

Câu 4. (5 điểm)

- a) Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:
 $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên
 (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)
- b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:
- $$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 5. (5 điểm)

Cho đoạn thẳng $AB = a$. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMNP, BMLK$ có tâm theo thứ tự là C, D . Gọi I là trung điểm của CD .

- a) Tính khoảng cách từ I đến AB
- b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1-3x^2-3x}{3x} \right) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-2x-3x^2}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2-2+6x}{3x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

b)
$$A = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Rightarrow x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$\Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ vì $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\} = \{2; 3\}$

Câu 2.

- a) Theo Câu ra ta có: $a + b \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$ (1)

Mặt khác: $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2(a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

$$b) \quad \left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11} - (2x+1) < 1 \text{ và } 2x+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8 < 11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x < 3 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq 2x+1 < \frac{3}{2}$$

$$\text{Do } 2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

Câu 3.

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc ca nô xuôi dòng ($x > 12$)

Vận tốc ca nô khi nước lặng: $x-6(\text{km/h})$

Vận tốc ca nô khi ngược dòng: $x-12(\text{km/h})$

Thời gian cả đi và về của ca nô là 4,5 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x-12} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-4)(x-24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4(\text{ktm}) \\ x=24(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là 24km/h

Câu 4.

$$a) \quad \overline{abcd} : \overline{dcba} = q$$

$$\text{Vì } q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q=4 \\ q=9 \end{cases} \Rightarrow a, d \text{ phải là những số thuộc } \{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$$

$$\text{Do } \overline{abcd} = \overline{dcba} \times q \text{ nên } d < 3 \Rightarrow d = 1$$

Giả sử $q = 4$ khi đó $\overline{1cba} \cdot 4 = \overline{abc1}$ (vô lý) vì $\overline{1cba} \cdot 4$ phải là một số chẵn nên $q = 9$

Với $q=9$ ta có: $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abc1}$ suy ra $a=9, c < 2$ vì tích $\overline{1cba} \times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c \neq d$ tức là $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b = 8$

Tóm lại ta có: $9801 : 1089 = 9$

$$b) \quad \text{Đặt } x = b + c - a; \quad y = a + c - b; \quad z = a + b - c \Rightarrow x, y, z > 0$$

$$\Rightarrow x + y + z = a + b + c$$

$$2a = a + b + c - (b + c - a) = x + y + z - x = y + z \Rightarrow a = \frac{y+z}{2}$$

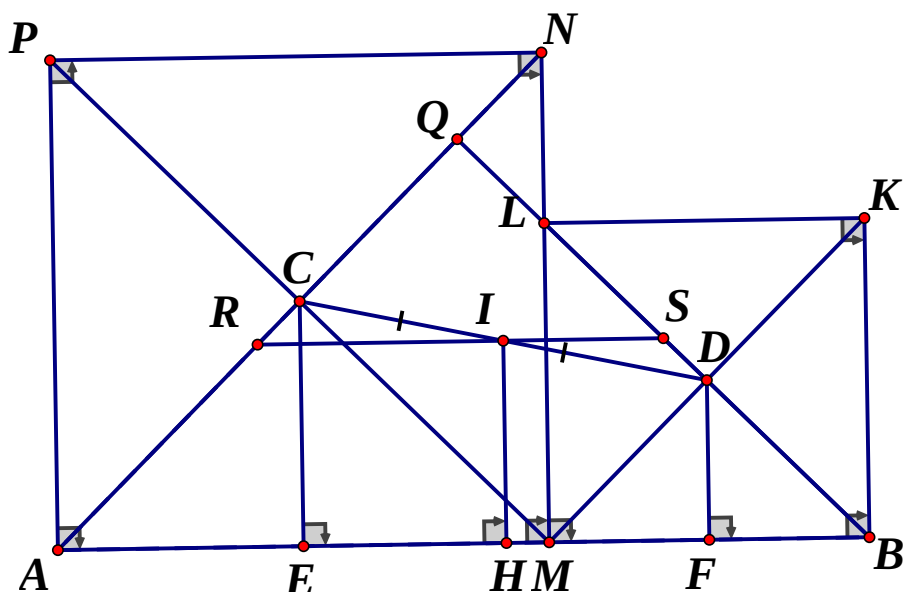
$$\text{Tương tự: } b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{BĐT chứng minh tương đương với: } \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \geq 6 \text{ do } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Câu 5.



a) Kẻ CE, IH, DF cùng vuông góc với AB suy ra tứ giác $CDFE$ là hình thang vuông.

Chứng minh được: $CE = \frac{AM}{2}, DF = \frac{BM}{2} \Rightarrow CE + DF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{4}$

b) Khi M di chuyển trên AB thì I di chuyển trên đoạn RS song song với AB và cách AB một khoảng bằng $\frac{a}{4}$ (R là trung điểm của AQ)

S là trung điểm của BQ , Q là giao điểm của BL và AN)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 40. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $2x^2 - x = 3 - 6x$

2) $(x+2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x+2) \cdot x^2$

Câu 2. (3 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

1) Rút gọn A

2) Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$

3) Có giá trị nào của x để $A = 1$ không?

4) Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên.

Câu 3. (2 điểm) Giải Câu toán bằng cách lập phương trình

Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B . Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là 15km/h ; 45km/h và 60km/h .

Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi N và M theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD . Chứng minh rằng:

- 1) $MN \parallel AB$
- 2) $MN = \frac{CD - AB}{2}$

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

$$1) \quad 2x^2 - x = 3 - 6x \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ hoặc } x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -3$

$$2) \quad (x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x + 2) \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(5 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ 5 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ -2; \frac{5}{3} \right\}$

Câu 2.

$$1) \quad \text{Rút gọn được } A = \frac{x + 4}{x - 3}$$

$$2) \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq 2 \text{ và } x \neq 3$$

$$2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào, tính được $A = \frac{-5}{2}$

$$3) \quad A = 1 \Leftrightarrow \frac{x + 4}{x - 3} = 1 \Leftrightarrow x + 4 = x - 3 \Leftrightarrow 0x = -7 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị nào của x để $A = 1$

$$4) \quad A = \frac{x + 4}{x - 3} = 1 + \frac{7}{x - 3}$$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $x - 3 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$

Thử lại và kết hợp với ĐKXD ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$

Câu 3.

- Gọi thời gian để ô tô cách đều xe đạp và xe máy kể từ lúc xe đạp chạy là x (giờ).

Điều kiện $x > 2$

Khi đó: Xe đạp đi được : $15x$ (km)

Xe máy đi được : $45(x-1)$ (km)

Ô tô đi được: $60(x-2)$ (km)

Khi ô tô bắt đầu chạy thì xe đạp đã bị xe máy vượt qua

Hiệu quãng đường đi được của xe máy và ô tô là: $45(x-1) - 60(x-2)$

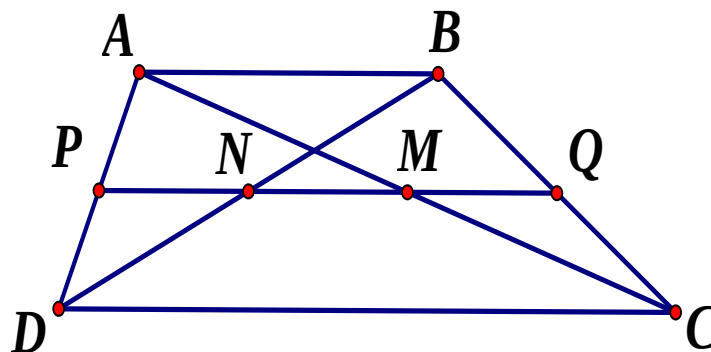
Hiệu quãng đường đi được của ô tô và xe đạp: $60(x-2) - 15x$

Theo đề Câu ta có phương trình: $45(x-1) - 60(x-2) = 60(x-2) - 15x$

Giải phương trình tìm được $x = 3,25$ giờ = 3 giờ 15 phút

Vậy lúc 8 giờ 15 phút thì ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Câu 4



- 1) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD và BC

Chứng minh được $\frac{AP}{AD} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow PN \parallel AB$ (định lý Talet đảo)

Mà $PM \parallel AB$ (đường trung bình)

$\Rightarrow P, M, N$ thẳng hàng (Tiên đề Oclit)

Vậy $MN \parallel AB$

- 2) Tương tự $\Rightarrow P, M, N, Q$ thẳng hàng

Rút ra ta được: $PQ = \frac{AB+CD}{2}$ (1); $PM = \frac{AB}{2}$ (2); $NQ = \frac{AB}{2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MN = PQ - (PM + NQ) = \frac{CD - AB}{2}$

Câu 5. $A = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 41. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1: (1 điểm) Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^4 + 1 - 2x^2$

b) $-x^2 - 28x - 27$

Câu 2: (2 điểm) Giải phương trình

a) $-2|-3x+4|-2=0$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$

Câu 3 (1 điểm)

Với giá trị nào của x thì $\frac{x-1}{x+1} > 0$

Câu 4 (2 điểm)

Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người làm trong bao lâu sẽ xong công việc

Câu 5 (3,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. M là giao điểm của CE và DF.

a) Chứng minh CE vuông góc với DF

b) Chứng minh $\frac{CM \cdot CE}{CF} = a$

c) Tính diện tích ΔMDC theo a

Câu 6. (0,5 điểm)

Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) $x^4 - 1 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2$

b) $-x^2 - 28x - 27 = -(x+1)(x+27)$

Câu 2.

a) $-2|-3x+4|-2=0$

$\Leftrightarrow |-3x+4| = -1$ (khả định sai vì $|-3x+4| \geq 0 \forall x$)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$ ĐKXĐ: $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^3-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1+2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (\text{tm}) \\ x=1 & (\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0\}$$

Câu 3. Ta có:

$$+\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

Vậy $x > 1$ hoặc $x < -1$

Câu 4.

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ($x > 0$).

Một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một ngày người thứ hai làm được $\frac{2}{3x}$ (công việc)

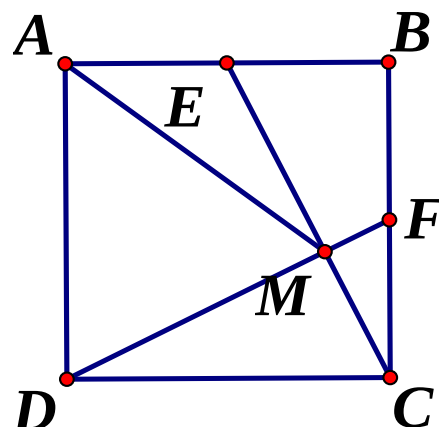
Một ngày hai người làm chung được $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$ (công việc)

Theo Câu ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = 20$

Vậy người thứ nhất làm xong trong 20 ngày

Người thứ hai làm xong trong 30 ngày.

Câu 5.



$$a) \Delta BEC = \Delta CFD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow ECB = FDC$$

ΔCDF vuông tại C $\Rightarrow DFC + FDC = 90^\circ \Rightarrow DFC + ECB = 90^\circ \Rightarrow \Delta CMF$ vuông tại M
Hay $CE \perp DF$

b) Xét ΔCMF và ΔCBE có: $CMF = CBE = 90^\circ$; MCF chung

$$\Rightarrow \Delta CMF \sim \Delta CBE \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow \frac{CM \cdot CE}{CF} = BC$$

$$\text{Mà } BC = a \text{ do đó: } \frac{CM \cdot CE}{CF} = a$$

$$c) \Delta CMD \sim \Delta FCD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{\Delta CMD}}{S_{\Delta FCD}} = \left(\frac{CD}{FD} \right)^2 \Rightarrow S_{\Delta CMD} = \left(\frac{CD}{FD} \right)^2 \cdot S_{\Delta FCD}$$

$$\text{Mà: } S_{\Delta FCD} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2$$

$$\text{Vậy: } S_{\Delta CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot CD^2.$$

Trong ΔDCF theo Pitago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2} BC^2 \right) = CD^2 + \frac{1}{4} CD^2 = \frac{5}{4} \cdot CD^2$$

$$\text{Do đó: } S_{\Delta CMD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4} CD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{5} CD^2 = \frac{1}{5} a^2$$

Câu 6.

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^3 - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 42. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

$$\text{Cho biểu thức: } A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Câu 2. (2,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$

b) $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

4) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

5) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$

6) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 5. Cho $a_n = 1+2+3+...+n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Rút gọn được kết quả: $A = \frac{-1}{x-2}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ A = \frac{2}{5} \end{cases}$

c) $A < 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \in U(1) = \{\pm 1\} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$

Câu 2.

a) Đặt $6x+7=t$. Ta có:

$$(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2-1)t^2 = 72$$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = -8(ktm) \\ t^2 = 9(tm) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{-2}{3}; \frac{-5}{3} \right\}$$

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5); \quad x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5);$$

$$\text{b) } x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{DKXD: } x \neq \{-4; -5; -6; -7\}$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

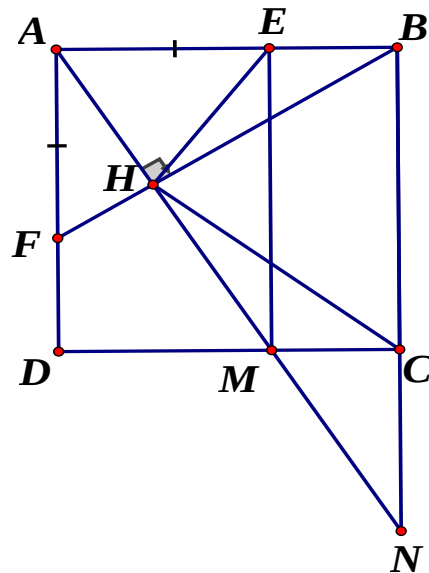
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13(\text{tm}) \\ x = 2(\text{tm}) \end{cases}$$

Câu 3.



4) Ta có: $\angle DAM = \angle ABF$ (cùng phụ với $\angle BAH$)

$$AB = AD \quad (\text{gt}); \quad \angle BAF = \angle ADM = 90^\circ \quad (\text{ABCD là hình vuông})$$

$$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF \quad (\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow DM = AF, \text{ mà } AF = AE (\text{gt}) \text{ nên } AE = DM$$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành. Mặt khác $\angle DAE = 90^\circ$ (gt)

Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật

5) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} \quad (AB = BC; AE = AF)$$

Lại có: $\angle HAB = \angle HBC$ (cùng phụ với $\angle ABH$)

$$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4 \text{ (gt)} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB, F \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\text{Do đó: } BD = 2EF \text{ hay } AC = 2EF \text{ (dfcm)}$$

6) Do $AD \parallel CN$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad \text{(dfcm)}$$

Câu 4. Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } (**) \text{ ta có: } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có: $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$

(Vì $abc=1$)

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

Câu 5. Ta có:

$$a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1$$

$$a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \text{ là một số chính phương.}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 43. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Chứng minh: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$

b) Cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $x + y + z = xyz$ ($x, y, z \neq 0$)

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2$

Câu 2. (2,5 điểm)

Giải các phương trình:

a) $\frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0$

b) $x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Chứng minh $x^2 - x + 1 > 0$ (với mọi x)

b) Chứng minh: $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức : $A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$); Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC , BD . Đường thẳng qua A và song song với BC cắt BD tại E , cắt CD tại A' ; đường thẳng qua B và song song với AD cắt AC tại F , cắt CD tại B' . Gọi diện tích các tam giác OAB, OCD, ACD, ABC lần lượt là S_1, S_2, S_3, S_4 . Chứng minh:

a) $EF \parallel AB$

b) $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{BD}$ và $AB^2 = EF \cdot CD$

c) $\frac{S_1}{S_4} + \frac{S_2}{S_3} = 1$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a)
$$\begin{aligned} VT &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \\ &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = VP \end{aligned}$$

b) Bình phương 2 vế ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2z}{xyz} + \frac{2y}{xyz} + \frac{2x}{xyz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x+y+z)}{xyz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2xyz}{xyz} &= 4 \quad (x+y+z=xyz) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &= 2 \quad (\text{dpcm}) \end{aligned}$$

Câu 2.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+7}{2003} + 1 + \frac{x+6}{2004} + 1 + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2005}{5} - 3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+2010}{2003} + \frac{x+2010}{2004} + \frac{x+2010}{2005} + \frac{x+2010}{5} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+2010) \left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{5} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x+2010 = 0 \Leftrightarrow x = -2010
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & x^4 - 2x^2 = 400x + 9999 \\
 \Leftrightarrow & x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000 \text{ (thêm } 4x^2 + 1 \text{ vào 2 vế)} \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + 1 + 2x + 100)(x^2 + 1 - 2x - 100) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + 2x + 101 = 0 \\ x^2 - 2x - 99 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ x = -9 \\ x = 11 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{11; -9\}$$

Câu 3.

$$\text{a)} \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ (với mọi } x)$$

b) Từ kết quả câu a, nhân 2 vế của BĐT với số dương $3(x^2 - x + 1)$ được:

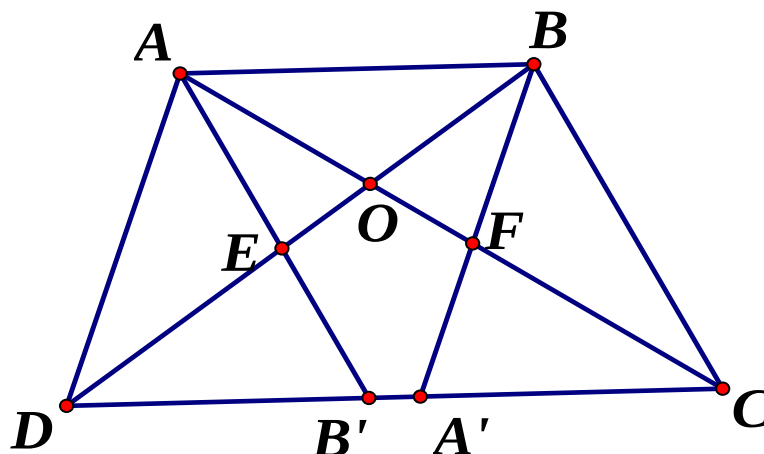
$$\begin{aligned}
 & 3x^2 + 3x + 3 > x^2 - x + 1 \\
 \Leftrightarrow & 2x^2 + 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 > 0 \text{ (luôn đúng)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{c)} \quad \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3(x^2 - x + 1) + x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = 3 - \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - x + 1} = 3 - \frac{2(x-1)^2}{x^2 - x + 1} \leq 3$$

$$\text{Vậy } \text{Max} A = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 4.



- a) $AE // BC \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$
 $BF // AD \Rightarrow \frac{OF}{OA} = \frac{OB}{OC}$
 $AB // CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow EF // AB$ (Ta let đảo)
- b) $AB // DA' \Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DA'} \Rightarrow \frac{EB}{ED+EB} = \frac{AB}{AB+DA'}$
 $AB = A'C$ được: $\frac{EB}{BD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{EF}{DB'} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{EF}{AB}$ (Do $AB = DB'$)
 $\Rightarrow AB^2 = EF \cdot DC$
- c) $\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{OA}{AC}$ (1); $\frac{S_{OCD}}{S_{ADC}} = \frac{OA}{AC}$ (2)
 (Tỷ số DT hai tam giác có cùng đáy bằng tỉ số đường cao)
 Cộng (1) (2) về theo về ta có : đpcm

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 44. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$
- b) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$

Câu 2. (4 điểm)

- a) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

b) Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$

Câu 3. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là số chính phương.

b) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Câu 4. (6 điểm)

Cho điểm M di động trên đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông $AMCD, BMEF$

a) Chứng minh rằng: $AE \perp BC$

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC . Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng

c) Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB .

Câu 5. (2 điểm)

Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} x(x+2)(x^2+2x+2)+1 &= (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1 \\ &= (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1 \\ &= (x^2+2x+1)^2 = (x+1)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} &= \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ \Rightarrow B = \dots &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Câu 2.

a) Ta có $a+b+c=0$ thì :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 = -c^3 - 3ab(-c) + c^3 = 3abc$$

(vì $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$)

$$\text{Theo giả thiết } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} \\ &= xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3 \end{aligned}$$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) + (z^2 - 2z + 1) + \left(\frac{3}{4}y^2 - 3y + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + (z-1)^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 = 0$$

Có các giá trị $(x, y, z) = (1; 2; 1)$

Câu 3.

a) Ta có: $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$

$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t (t \in \mathbb{Z})$ thì

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}, 5xy \in \mathbb{Z}, 5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z}$ (đpcm)

Vậy A là số chính phương

b) Dễ thấy $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

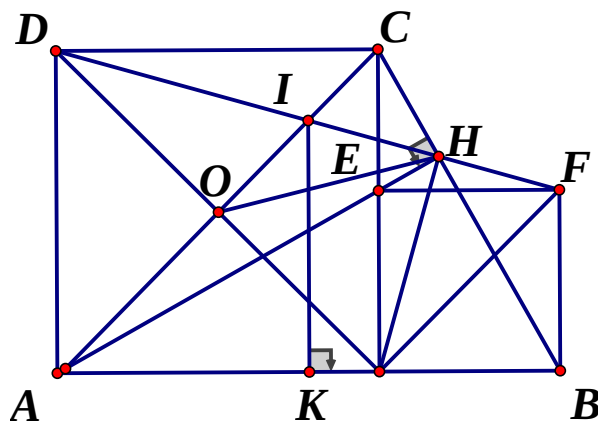
Xét hiệu:

$$A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016})$$

$$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016})$$

Các hiệu trên chia hết cho 3, do vậy A chia hết cho 3

Câu 4.



a) $\Delta\text{AME} = \Delta\text{CMB}(\text{cgc}) \Rightarrow \text{EAM} = \text{BCM}$

Mà $\angle BCM + \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow \angle EAM + \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$$\Delta AHC \text{ vuông tại H có HO là đường trung tuyến} \Rightarrow HO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM$$

$$\Rightarrow \Delta DHM \text{ vuông tại H suy ra } DHM = 90^\circ$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } MHF = 90^\circ$$

Suy ra $DHM + MHF = 180^\circ$, vậy 3 điểm D, H, F thẳng hàng

c) Gọi I là giao điểm của AC và DF

$$\text{Ta có: } DMF = 90^\circ \Rightarrow MF \perp DM \text{ mà } IO \perp DM \Rightarrow IO \parallel MF$$

Vì O là trung điểm của DM nên I là trung điểm của DF

Kẻ $IK \perp AB (K \in AB) \Rightarrow IK$ là đường trung bình của hình thang ABFD

$$\Rightarrow IK = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2} \text{ (không đổi)}$$

Do A, B cố định nên K cố định, mà IK không đổi nên I cố định

Vậy đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB.

Câu 5.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \quad ; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\ &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1 \end{aligned}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 45. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

$$\text{Câu 1. Cho biểu thức } M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của M khi $|x| = \frac{1}{2}$

Câu 2. Cho biểu thức $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

- a) Phân tích biểu thức A thành nhân tử
- b) Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì $A < 0$

Câu 3.

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$$

- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Câu 4. Cho hình bình hành ABCD. Với $AB = a, AD = b$. Từ đỉnh A, kẻ một đường thẳng a bất kỳ cắt đường chéo BD tại E, cắt cạnh BC tại F và cắt tia DC tại G.

- a) Chứng minh : $AE^2 = EF \cdot EG$
- b) Chứng minh rằng khi đường thẳng a quay quanh A thay đổi thì tích $BF \cdot DG$ không đổi

Câu 5. Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$ với $x \neq y; xyz \neq 0; yz \neq 1; xz \neq 1$

$$\text{Thì } xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Rút gọn M:
$$M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$
$$= \left[\frac{x^2}{x(x - 2)(x + 2)} - \frac{6}{3(x - 2)} + \frac{1}{x + 2} \right] : \frac{6}{x + 2}$$

$$M = \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{6} = \frac{1}{2 - x}$$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Câu 2.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2) - (2bc)^2 \\
 &= (b^2 + c^2 - 2bc - a^2)(b^2 + c^2 + 2bc - a^2) \\
 &= (b + c - a)(b + c + a)(b - c - a)(b - c + a)
 \end{aligned}$$

b) Ta có: $b + c - a > 0$ (BĐT tam giác)

$$b + c + a > 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$b - c - a < 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$b - c + a > 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$\text{Vậy } A < 0$$

Câu 3.a) Ta có: $A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$

$$\text{Do } (x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$$

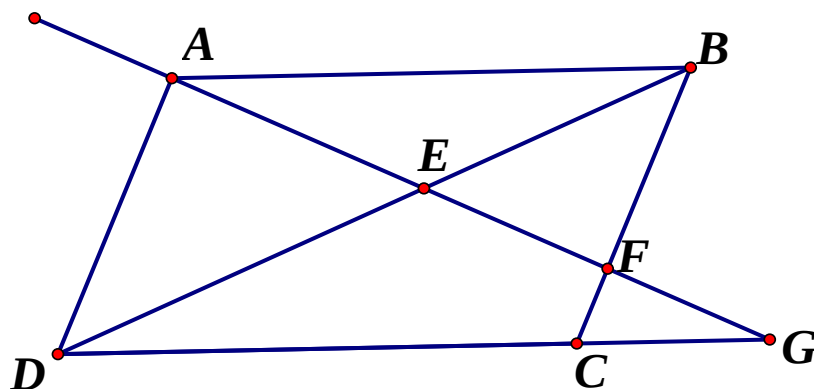
$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$\text{Vậy } \min A = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$b) B = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + (x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

$$\text{Do } x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{B}{x^2+1} \leq 3. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy } \max B = 3 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 4.

$$a) \text{ Do } AB \parallel CD \text{ nên ta có: } \frac{EA}{EG} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DG} \quad (1)$$

$$\text{Do } BF \parallel AD \text{ nên ta có: } \frac{EF}{EA} = \frac{EB}{ED} = \frac{AD}{FB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA} \text{ hay } AE^2 = EF \cdot EG$$

b) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{DG} = \frac{FB}{AD} \Rightarrow BF.DG = AB.AD = a.b$ (không đổi)

Câu 5.

Từ gt $\Rightarrow (x^2 - yz)y(1 - xz) = x(1 - yz)(y^2 - xz)$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 = xy^2 - x^2z - xy^3z + x^2yz^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 - xy^2 + x^2z + xy^3z - x^2yz^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x - y) + xyz(yz + y^2 - xz - x^2) + z(x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x - y) + xyz(x - y)(x + y + z) + z(x - y)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)[xy - xyz(x + y + z) + xz + yz] = 0$$

Do $x - y \neq 0$ nên $xy + xz + yz - xyz(x + y + z) = 0$

Hay $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$ (đpcm)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 46. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

Cho $a > b > 0$ thỏa mãn $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$

Câu 2. (1,5 điểm)

Rút gọn biểu thức: $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 999^2 - 1000^2$

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không ?

Câu 4. (1,5 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản

Câu 5. (1,5 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = |x - 2006| + |x - 2007| + 2006$

Câu 6. (2 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$. Qua A và B kẻ các đường thẳng song song với BC và AD lần lượt cắt CD ở K và I . Gọi E là giao điểm của AK và BD , F là giao điểm của BI và AC . Chứng minh rằng:

a) $EF \parallel AB$

b) $AB^2 = CD.EF$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\text{Xét } P^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{3a^2 + 3b^2 + 6ab} = \frac{4ab}{16ab} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } a > b > 0 \Rightarrow P > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

Câu 2.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + (999^2 - 1000^2) \\ &= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + (999-1000)(999+1000) \\ &= -(1+2+3+4+\dots+999+1000) \\ &= -500.1001 = -500500 \end{aligned}$$

Câu 3.

Vì số thứ nhất chia cho 5 dư 1 nên có dạng $5a+1$, số thứ hai chia cho 5 dư 2 nên có dạng $5b+2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Ta có tổng bình phương hai số đó là:

$$(5a+1)^2 + (5b+2)^2 = 25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 10b + 4 = 5(5a^2 + 5b^2 + 2a + 2b + 1):5$$

Vậy tổng bình phương của hai số chia hết cho 5

Câu 4.

Gọi $d = \text{UCLN}(21n+4; 14n+3)$ với $d \in \mathbb{N}, d \geq 1$

Ta có: $21n+4 : d$ và $14n+3 : d$

Khi đó $2(21n+4) : d$ và $3(14n+3) : d$

Hay $42n+8 : d$ và $42n+9 : d$

$$\Rightarrow (42n+9 - 42n-8) : d \text{ hay } 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n

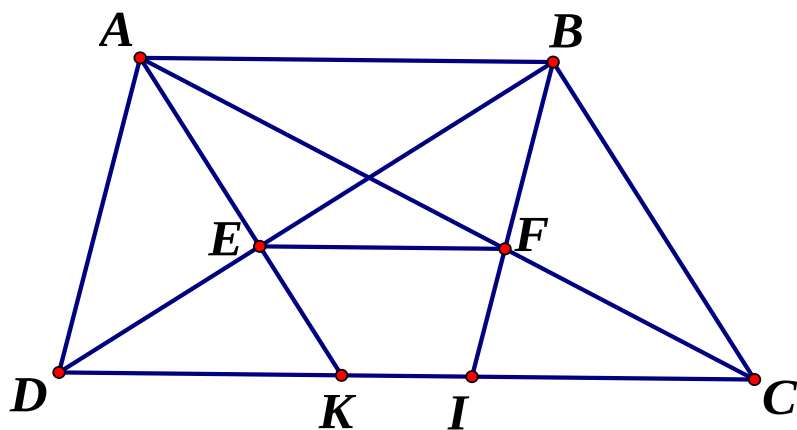
Câu 5.

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= |x-2006| + |x-2007| + 2006 \\ &= |x-2006| + |2007-x| + 2006 \geq |(x-2006) + (2007-x)| + 2006 = 2007 \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 2007 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Câu 6.



a) Ta có: $AB \parallel CD$ nên theo hệ quả Ta let ta có:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{IC} \quad (1) \qquad \frac{AE}{EK} = \frac{AB}{DK} \quad (2)$$

Mặt khác ta có:

Tứ giác ABCK là hình bình hành (do $AB \parallel CD, BC \parallel AK$) nên $AB = CK$ (3)

Tứ giác ABID là hình bình hành (do $AB \parallel CD, BI \parallel AD$) nên $AB = DI$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $CK = DI \Rightarrow IC = DK$ (5)

Từ (1) (2) (5) suy ra $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EK} \Rightarrow EF \parallel DC \Rightarrow EF \parallel AB$

b) Ta có: $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CI} = \frac{AF}{CF} \quad (*) \quad (\text{Do } AB = DI \text{ nên } AB + CI = DI + CI = CD)$$

Mặt khác $\triangle AEF \sim \triangle AKC$ ($EF \parallel KC$)

$$\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{KC} \text{ mà } KC = AB \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AB} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB}$ hay $AB^2 = EF \cdot CD$ (đpcm).

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 47. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$; b) $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Câu 3. (3 điểm)

Tìm x biết:
$$\frac{(2009-x^2)+(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2}{(2009-x)^2-(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Câu 4. (3 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

Câu 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC

- Xác định vị trí của điểm D để tứ giác AEDF là hình vuông
- Xác định vị trí của điểm D sao cho $3AD + 4EF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6. (4 điểm)

Trong tam giác ABC, các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $AFE = BFD$; $BDF = CDE$; $CED = AEF$

- Chứng minh rằng: $BDF = BAC$
- Cho $AB = 5$, $BC = 8$, $CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= \left[(x+y+z)^3 - x^3 \right] - (y^3 + z^3) \\ &= (y+z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2 \right] - (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\ &= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y+z) \left[x(x+y) + z(x+y) \right] \\ &= 3(x+y)(x+z)(y+z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010) \end{aligned}$$

Câu 2 Ta có:
$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 258$$

Câu 3
$$\frac{(2009-x^2)+(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2}{(2009-x)^2-(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

ĐKXD: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010 (a \neq 0)$, ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a = -\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4023}{2} \\ x = \frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

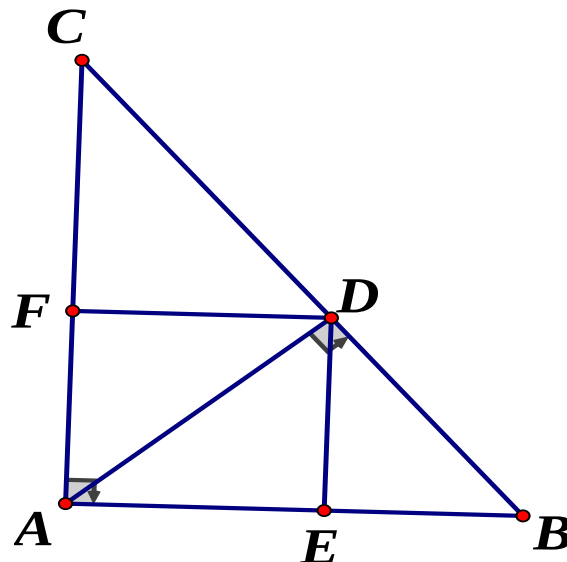
Câu 4 Ta có:

$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Câu 5



a) Tứ giác AEDF là hình chữ nhật (vì $\angle E = \angle A = \angle F = 90^\circ$)

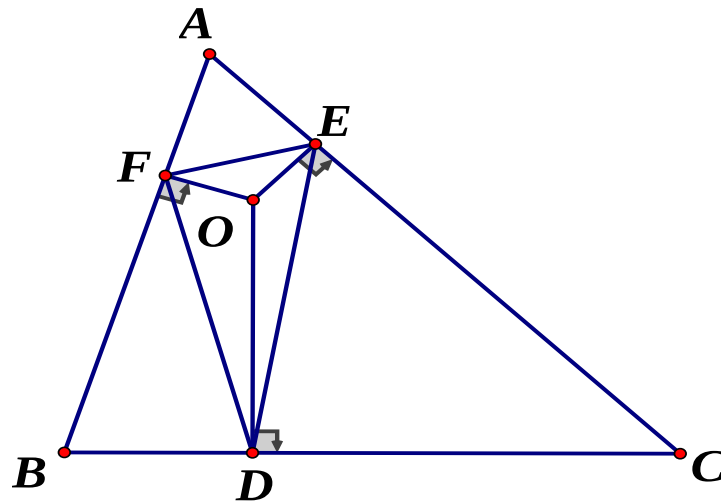
Để tứ giác AEDF là hình vuông thì AD là tia phân giác của $\angle BAC$

b) Do tứ giác AEDF là hình chữ nhật nên $AD = EF$

$$\Rightarrow 3AD + 4EF = 7AD$$

$3AD + 4EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Câu 6.



a) Đặt $\angle AFE = \angle BFD = \omega$, $\angle BDF = \angle CDE = \alpha$; $\angle CED = \angle AEF = \beta$

Ta có: $\angle BAC + \beta + \omega = 180^\circ (*)$

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O .

Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF

$$\Rightarrow \angle OFD + \angle OED + \angle ODF = 90^\circ (1)$$

Ta có:

$$\angle OFD + \omega + \angle OED + \beta + \angle ODF + \alpha = 270^\circ (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^\circ (**)$$

$$\text{Từ } (*) \& (**) \Rightarrow \angle BAC = \alpha = \angle BDF$$

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

$$\angle B = \beta, \angle C = \omega \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \\ \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \\ \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7AE = 5AF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7(7 - CE) = 5(5 - BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CD - BD = 3 \quad (3)$$

$$\text{Ta lại có: } CD + BD = 8 \quad (4)$$

$$\text{Từ } (3) \text{ và } (4) \Rightarrow BD = 2,5$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 48. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

c) $x^4 + 4$

d) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

4. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2. (2 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm các giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

a) Chứng minh $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2011} + b^{2011}$

Câu 5.

Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1a. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$

$$= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

1b. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\
&= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

2. Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Câu 2.

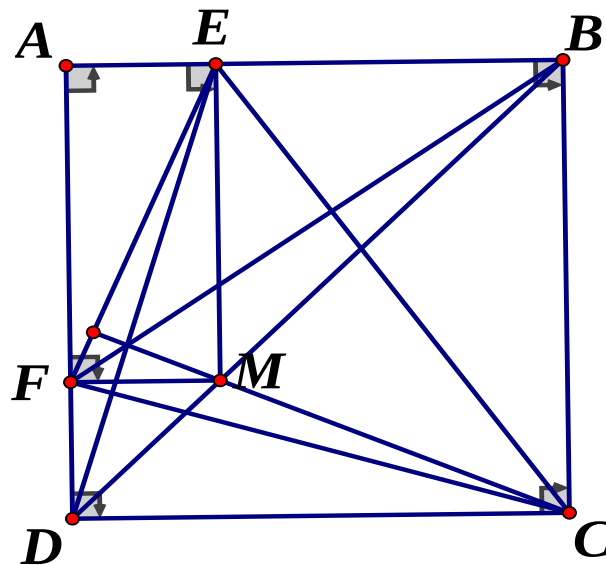
a) Rút gọn biểu thức được kết quả: $A = \frac{-1}{x-2}$

$$b) |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$$

c) $A < 0 \Leftrightarrow x > 2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$

Câu 3.



a) Chứng minh $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow$ đpcm

b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow$ đpcm

d) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi

$\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi

$\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ ($AEMF$ là hình vuông)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BD .

Câu 4.

$$(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + 1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \text{ (tm)} \\ b = 0 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Vì } b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (tm)} \\ a = 0 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Câu 5. Ta có:

$$a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 49. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

$$\text{Cho } P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$$P = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) \text{ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.}$$

Câu 3. (2 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60° quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh:

- a) $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$
- b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED
- c) Chu vi tam giác ADE không đổi

Câu 5. (1 điểm)

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a)

$$a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a-1)(a+1)(a-4)$$

$$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a-2)(a-1)(a-4)$$

Nêu ĐKXĐ: $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

$$\text{Rút gọn } P = \frac{a+1}{a-2}$$

b)

$P = \frac{a-2+3}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}$; ta thấy P nguyên khi $a-2$ là ước của 3, mà $U(3) = \{-1; 1; -3; 3\}$, từ đó tìm được $a \in \{-1; 3; 5\}$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có a + b chia hết cho 3.

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] \text{ Vì}$$

a + b chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

$$\text{b) } P = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36$$

Ta thấy $(x^2 + 5x)^2 \geq 0$ nên $P = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

$$\text{Do đó } \text{Min} P = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Câu 3. a) Ta có:

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5); \quad x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5); \quad x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

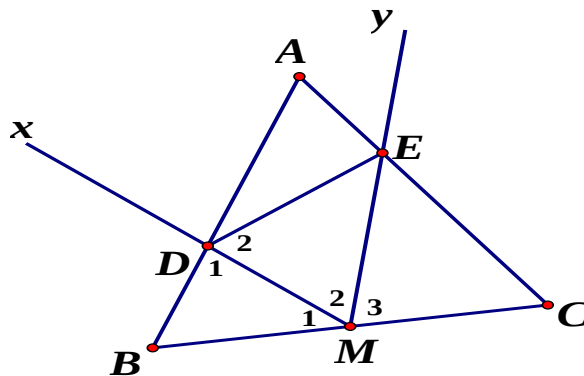
b) Đặt $b+c-a=x>0$; $c+a-b=y>0$; $a+b-c=z>0$

$$\text{từ đó suy ra } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2};$$

$$\text{Thay vào ta được: } A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \text{ hay } A \geq 3$$

Câu 4.



a) Trong tam giác BDM ta có: $D_1 = 120^\circ - M_1$

Vì $M_2 = 60^\circ$ nên ta có: $M_3 = 120^\circ - M_1$

Suy ra $D_1 = M_3$. Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (1)

Suy ra $\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$, Từ đó $BD \cdot CE = BM \cdot CM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có: $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

b) Từ (1) suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$

Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow D_1 = D_2$, do đó DM là tia phân giác BDE

Chứng minh tương tự ta có : EM là tia phân giác CED

c) Gọi H,I,K là hình chiếu của M trên AB,DE,AC.

Chứng minh $DH = DI, EI = EK$

Tính chu vi tam giác bằng 2AH - không đổi

Câu 5.

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy = 2(x + y + z)(1)$ và $x^2 + y^2 = z^2(2)$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

Suy ra $z + 2 = x + y - 2 \Rightarrow z = x + y - 4$; thay vào (1) ta được:

$$xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 50. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a + 1)(a + 3)(a + 5)(a + 7) + 15$

Câu 2. (2 điểm)

Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x - a)(x - 10) + 1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên

Câu 3. (1 điểm)

Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $B(x) = x^2 - 3x + 4$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC , đường cao AH , vẽ phân giác Hx của góc AHB và phân giác Hy của AHC . Kẻ AD vuông góc với Hx , AE vuông góc với Hy

Chứng minh rằng tứ giác $AEDH$ là hình vuông.

Câu 5. (2 điểm)

Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15 \\ &= (a+1)(a+7)(a+3)(a+5) + 15 \\ &= (a^2 + 8a + 7)(a^2 + 8a + 15) + 15 \\ &= (a^2 + 8a)^2 + 22(a^2 + 8a) + 120 \\ &= (a^2 + 8a + 11)^2 - 1^2 \\ &= (a^2 + 8a + 12)(a^2 + 8a + 10) \\ &= (a+2)(a+6)(a^2 + 8a + 10) \end{aligned}$$

Câu 2. Giả sử :

$$\begin{aligned} (x-a)(x-10) + 1 &= (x-m)(x-n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow x^2 - (a+10)x + 10a + 1 &= x^2 - (m+n)x + mn \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m+n = a+10 \\ mn = 10a+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Khử a ta có:

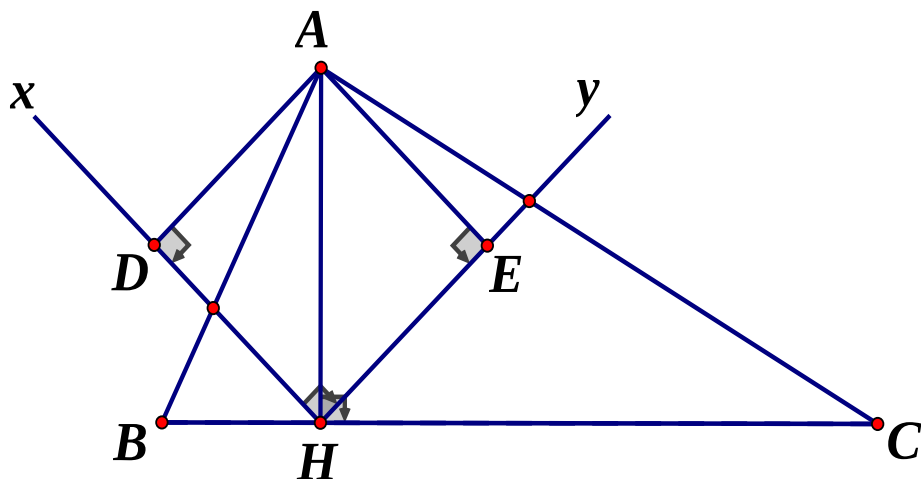
$$\begin{aligned} mn &= 10(m+n-10) + 1 \\ \Leftrightarrow mn - 10m - 10n + 100 &= 1 \\ \Leftrightarrow m(n-10) - 10(n-10) &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } m, n \text{ nguyên ta có: } \begin{cases} m-10=1 \\ n-10=1 \end{cases} \& \begin{cases} m-10=-1 \\ n-10=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ a=8 \end{cases}$$

Câu 3. Ta có: $A(x) = B(x) \cdot (x^2 - 1) + (a-3)x + b + 4$

$$\text{Để } A(x) : B(x) \text{ thì } \begin{cases} a-3=0 \\ b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

Câu 4.



Tứ giác ADHE là hình vuông

Hx là phân giác của AHB ; Hy là phân giác của AHC mà AHB và AHC là hai góc kề bù nên $Hx \perp Hy$

Hay $\angle DHE = 90^\circ$, mặt khác: $\angle AHD = \angle AEH = 90^\circ$ nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật (1)

$$\angle AHD = \frac{\angle AHB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \text{ Do } \angle AHE = \frac{\angle AHC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Hay HA là phân giác $\angle DHE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Câu 5. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100} \\ &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1 \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 51. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (6 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

- a) Rút gọn P
- b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$
- c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên
- d) Tìm x để $P > 0$

Câu 2. (3 điểm) Giải phương trình:

- a) $\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$
- b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$
- c) $||x-2|+3|=5$

Câu 3. (2 điểm) Giải Câu toán bằng cách lập phương trình:

Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Câu 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

- a) Tứ giác AMDB là hình gì ?
- b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD. Chứng minh EF // AC và ba điểm E, F, P thẳng hàng
- c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật MEAF không phụ thuộc vào vị trí điểm P
- d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4\text{cm}$, $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Câu 5. (2 điểm) a) Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

b) Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Điều kiện: $x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{5}{2}; x \neq \frac{-3}{2}; x \neq \frac{7}{4}; x \neq 4$

a) Rút gọn $P = \frac{2x-3}{2x-5}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

+) $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2}$; +) $x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$

c) $P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$

$$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3 \quad (\text{tm})$$

$$x-5 = -1 \Rightarrow x = 4 \quad (\text{ktm})$$

$$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6 \quad (\text{tm})$$

$$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7 \quad (\text{tm})$$

Kết luận: $x \in \{3; 6; 7\}$ thì P nhận giá trị nguyên

d) $P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$

Ta có: $1 > 0$

$$\text{Để } P > 0 \text{ thì } \frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Câu 2.

a) Ta có:

$$\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \cdot \left[\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)} \right] \quad \text{DK: } x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 15x - 3(x+4)(x-1) = 3 \cdot 12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (\text{TM}) \\ x = -4 \quad (\text{KTM}) \end{cases}$$

$$S = \{0\}$$

b) Ta có:

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1\right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2\right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3\right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19}\right) = 0 \Leftrightarrow 123-x = 0 \Leftrightarrow x = 123$$

$$S = \{123\}$$

c) $|x-2|+3=5$

Ta có: $|x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0$ nên $|x-2|+3 = |x-2|+3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5 \Leftrightarrow |x-2|=5-3 \Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 4\}$

Câu 3. Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(\text{km})$ ($x > 0$)

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (\text{km/h})$ $3\text{h}20' = 3\frac{1}{3}(\text{h})$

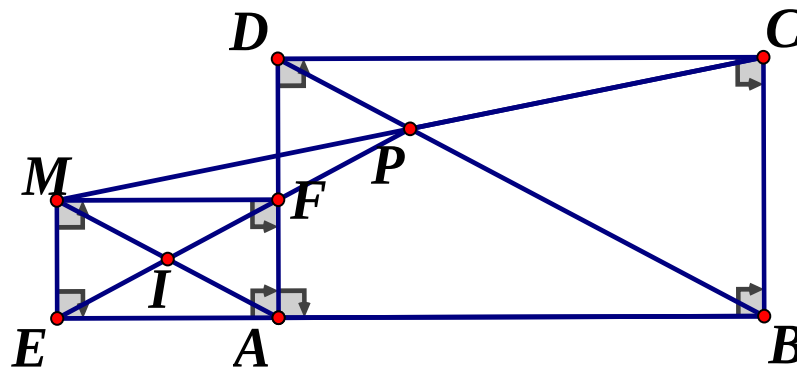
Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên 5km/h là: $\frac{3x}{10} + 5 (\text{km/h})$

Theo đề Câu ta có phương trình: $\left(\frac{3x}{10} + 5\right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150(\text{tm})$

Vậy khoảng cách giữa A và B là 150km

Vận tốc dự định là: $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45 (\text{km/h})$

Câu 4.



a) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD

$\Rightarrow PO$ là đường trung bình tam giác CAM

$\Rightarrow AM // PO \Rightarrow AMDB$ là hình thang

b) Do $AM // BD$ nên $OBA = MAE$ (đồng vị)

Tam giác AOB cân ở O nên $OBA = OAB$

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật AEMF thì $\triangle AIE$ cân ở I nên

$$IAE = IEA$$

Từ chứng minh trên : có $FEA = OAB$, do đó: $EF // AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của $\triangle MAC$ nên $IP // AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) $\triangle MAF \sim \triangle DBA(g.g) \Rightarrow \frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB}$ Không đổi

d) Nếu $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{PD}{9} = \frac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$

Nếu $CP \perp BD$ thì $\triangle CBD \sim \triangle DCP(g.g) \Rightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{PB}{CP}$

Do đó: $CP^2 = PB \cdot PD$ hay $(2,4)^2 = 9 \cdot 16k^2 \Rightarrow k = 0,2$

$PD = 9k = 1,8(\text{cm}); \quad PB = 16k = 3,2(\text{cm}) \quad BD = 5(\text{cm})$

Chứng minh $BC^2 = BP \cdot BD = 16$, do đó: $BC = 4\text{cm}, \quad CD = 3\text{cm}.$

Câu 5.

a) Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots) = 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) = 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

b) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2 \cdot (xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$

$\Rightarrow$ BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 52 . ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4}$

b) Giải bất phương trình: $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \geq 0$

Câu 2. (5 điểm)

2.1) Cho đa thức $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m$

a) Tìm m để $P(x)$ chia hết cho $2x + 3$

b) Với m vừa tìm được ở câu a, hãy tìm số dư khi chia $P(x)$ cho $3x - 2$ và phân tích ra các thừa số bậc nhất

2.2) Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Biết $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 16; P(5) = 25$. Tính $P(6); P(7)$?

Câu 3. (2 điểm)

Cho $a, b, c \in [0; 1]$ và $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$

Câu 4. (7 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ ($AC > BD$). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D lên AC ;

H, K lần lượt là hình chiếu của C trên AB và AC

a) Tứ giác $DFBE$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh: $\triangle CHK \sim \triangle BCA$

c) Chứng minh: $AC^2 = AB.AH + AD.AK$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Ta có:

$$y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4} \Leftrightarrow (y^2 - 2y + 3)(x^2 + 2x + 4) = 6$$

$$\Leftrightarrow [(y-1)^2 + 2] \cdot [(x+1)^2 + 3] = 6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (y-1)^2 + 3(y-1)^2 + 2(x+1)^2 + 6 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (y-1)^2 + 3(y-1)^2 + 2(x+1)^2 = 0$$

$$\forall i \quad (x+1)^2 \geq 0; (y-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$b) \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} \geq 0 \quad (x \neq 1; 2; 3; 4; 5; 6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x-2)(x-6)} \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-6 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0 \\ x-6 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 6 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $2 < x < 6$ và $x \neq 3; 4; 5$

Câu 2.

$$2.1) a) P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 6x^3 + 9x^2 - 16x^2 - 24x + 8x + 12 + m - 12$$

$$= 3x^2(2x+3) - 8x(2x+3) + 4(2x+3) + m - 12$$

$$= (2x+3)(3x^2 - 8x + 4) + m - 12$$

$$\text{Để } P(x) : (2x+3) \text{ thì } m-12=0 \Leftrightarrow m=12$$

$$b) \text{ Với } m=12; P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = 6x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 2x - 18x + 12$$

$$= 2x^2(3x-2) - x(3x-2) - 6(3x-2) = (3x-2)(2x^2 - x - 6)$$

Phân tích $P(x)$ ra tích các thừa số bậc nhất:

$$P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = (2x+3)(3x-2)(x-2)$$

$$2.2) \text{ Vì } P(1)=1; P(2)=4; P(3)=9; P(4)=16; P(5)=25$$

$$\text{Mà } P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + x^2$$

$$\Rightarrow P(6) = 5.4.3.2.1 + 6^2 = 156$$

$$\Rightarrow P(7) = 6.5.4.3.2 + 7^2 = 769$$

Câu 3.

$$\text{Vì } a, b, c \in [0; 1] \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$$

$$\text{Ta có: } (1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ac) - abc \quad (\text{Vì } a+b+c=2)$$

$$= -1 + (ab+bc+ac) - abc \geq 0$$

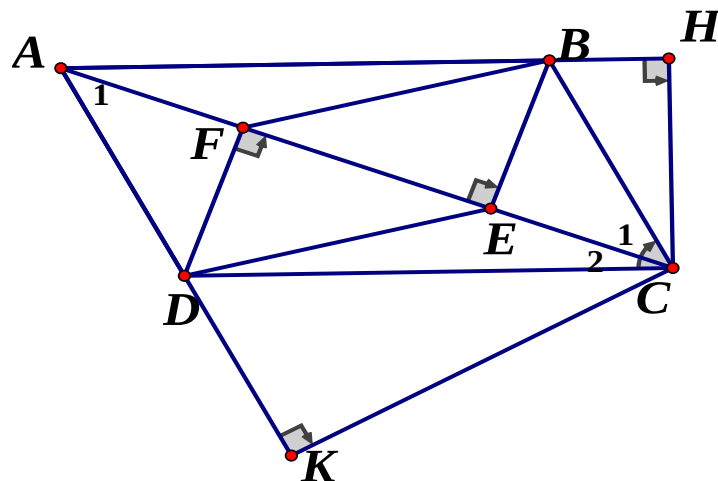
$$\Leftrightarrow ab+bc+ac \geq abc+1 \geq 1 \quad (\text{Vì } abc \geq 0) \Rightarrow -2(ab+bc+ac) \leq -2$$

$$\text{Lại có: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 4 - 2(ab+bc+ac) \leq 4 - 2 = 2$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 2 \Leftrightarrow (a, b, c) \text{ là hoán vị của } (0; 1; 1)$$

Câu 4.



- a) $DF \parallel BE$ (vì cùng vuông góc với AC)

$$\triangle AFD = \triangle CEB \text{ (Cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow DF = BE$$

$$\Rightarrow DFBE \text{ là hình bình hành}$$

- b) $BC \parallel AK \Rightarrow \angle BCK = 90^\circ$

$$\angle ABC = 90^\circ + \angle BCH \text{ (góc ngoài của } \triangle CHB)$$

$$\angle HCK = 90^\circ + \angle BCH \Rightarrow \angle ABC = \angle HCK$$

$$\text{Có: } \angle CKD = \angle ACD + \angle DAC \text{ (góc ngoài của } \triangle DKC)$$

$$\angle HBC = \angle BAC + \angle BCA \text{ mà } \angle BCA = \angle DAC; \angle BAC = \angle DCA$$

$$\Rightarrow \triangle CKD \sim \triangle CBH \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \triangle CHK \sim \triangle BCA \text{ (c.g.c)}$$

$$c) \Delta AEB \sim \Delta AHC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow AE.AC = AB.AH(1)$$

$$\Delta AFD \sim \Delta AKC \Rightarrow \frac{AF}{AK} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF.AC = AD.AK(2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có: $AE.AC + AF.AC = AB.AH + AD.AK(3)$

Mà $\Delta AFD = \Delta CEB$ (cmt) $\Rightarrow AF = CE$

$$(3) \Leftrightarrow AC.(AE + EC) = AB.AH + AD.AK \Leftrightarrow AC^2 = AB.AH + AD.AK$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 53 . ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (6 điểm)

$$a) \text{ Giải phương trình: } \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 2. (5 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 3. (3 điểm)

a) Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

b) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là một điểm di động trên AC . Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H , cắt tia BA tại O . Chứng minh rằng:

$$a) OA.OB = OC.OH$$

b) $\angle OHA$ có số đo không đổi

c) Tổng $BM.BH + CM.CA$ không đổi

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4) \\ \Leftrightarrow & (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Đặt $b+c-a=x>0$; $c+a-b=y>0$; $a+b-c=z>0$

Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3 \Leftrightarrow a=b=c$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a+b$ chia hết cho 3

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b) \left[(a+b)^2 - 3ab \right]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a+b) \left[(a+b)^2 - 3ab \right]$ chia hết cho 9

$$\text{b) } n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n+1) : (n+1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n-1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n-1) : n^2 - n + 1$$

$$\text{Hay } n^2 - n : n^2 - n + 1 \Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1)$$

$$\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$+) n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 3.

$$\text{a. Từ } a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } (a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + b) - ab = 1$$

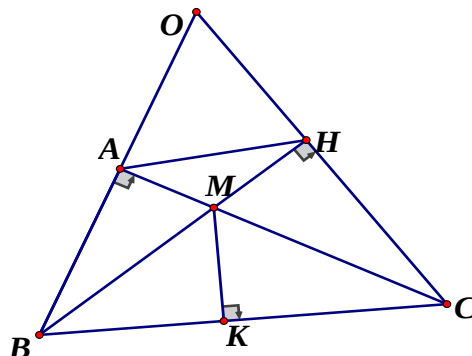
$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \text{ (tm)} \\ b = 0 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Với } b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (tm)} \\ a = 0 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Câu 4.



$$\text{a) } \triangle BOH \sim \triangle COA (g.g) \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OA \cdot OB = OH \cdot OC$$

$$\text{b) } \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OB} \text{ và } O \text{ chung } \Rightarrow \triangle OHA \sim \triangle OBC$$

$$\Rightarrow \angle OHA = \angle OBC \text{ (không đổi)}$$

c) Vẽ $MK \perp BC$; $\triangle BKM \sim \triangle BHC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow BM \cdot BH = BK \cdot BC \quad (3)$$

$$\triangle CKM \sim \triangle CAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = BC \cdot CK \quad (4)$$

Cộng từng vế của (3) và (4) ta có:

$$BM \cdot BH + CM \cdot CA = BK \cdot BC + BC \cdot CK = BC \cdot (BK + KC) = BC^2 \text{ (Không đổi)}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 54. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
- Tìm x để $|A| = A$

Câu 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0$; b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

Câu 3 (5 điểm)

Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD.

- Tứ giác ABED là hình gì ? Tại sao ?
- Tính diện tích hình thang ABCD theo a
- Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Tính góc HDI

Câu 4. (4 điểm)

- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Câu 5. (2 điểm)

a) Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

b) Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-d}{a+b}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Điều kiện: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

b) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \mid (1-2x)$

Từ đó tìm được $x=1$ và $x=0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$

$$|A| = A \Leftrightarrow A > 0$$

c) Ta có: $\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện: $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Câu 2

$$a) \quad x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{cases}$$

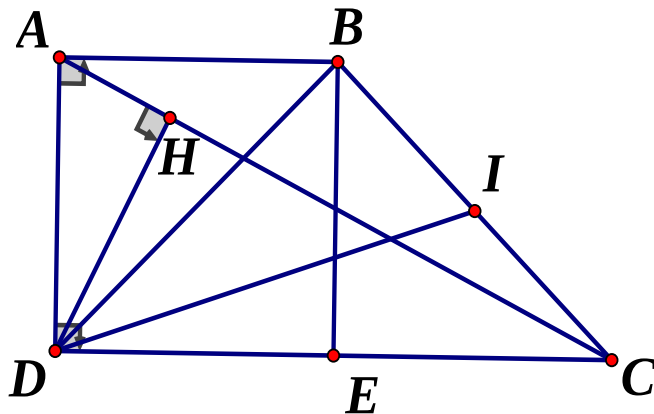
$$b) \quad \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Câu 3.



a) Chỉ ra $ABED$ là hình bình hành ($AB \parallel DE, AB = DE$)

Chỉ ra $ABED$ là hình thoi ($AB = AD$)

Chỉ ra $ABED$ là hình vuông ($\angle BAD = 90^\circ$)

b) Chỉ ra $\triangle BEC$ vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, DC = 2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là: $S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

c) $\angle ACH = \angle ACD$ (1) (cùng phụ với góc HDC)

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle IBD$ vuông tại D và B có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle IBD$$

Suy ra $\angle ACD = \angle BDI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle ADH = \angle BDI$

Mà $\angle ADH + \angle BDI = 45^\circ \Rightarrow \angle BDI + \angle BDH = 45^\circ$ hay $\angle HDI = 45^\circ$

Câu 4.

a) Ta có:

$$A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1$$

$$= (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$$

$$\text{Do } (x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } A = (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$\text{Vậy GTNN của } A \text{ là } 1 \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$\text{b) } B = \frac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1)+x+1} = \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

$$\text{Do } x^2+1 \geq 1 \text{ nên } B = \frac{3}{x^2+1} \leq 3. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy GTLN của } B \text{ là } 3 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 5

a) Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-a+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} &\geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4 \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned} &\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4 \\ &= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4 \\ &\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 55. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$; b) $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình: $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$

Câu 3. (3 điểm)

Tìm x biết: $\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$

Câu 4. (3 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Câu 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC

- a) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác AEDF là hình vuông
- b) Xác định vị trí của điểm D sao cho $3AD + 4EF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6. (4 điểm)

Trong tam giác ABC, các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $AFE = BFD$; $BDF = CDE$; $CED = AEF$

- a) Chứng minh rằng: $BDF = BAC$
- b) Cho $AB = 5$, $BC = 8$, $CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a)
$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= [(x+y+z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3) \\ &= (y+z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2 \right] - (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\ &= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y+z)[x(x+y) + z(x+y)] \\ &= 3(x+y)(x+z)(y+z) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010) \end{aligned}$$

Câu 2 Ta có:

$$\begin{aligned}
& \frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow x = 258
\end{aligned}$$

Câu 3
$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Điều kiện: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010 (a \neq 0)$, ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a = -\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

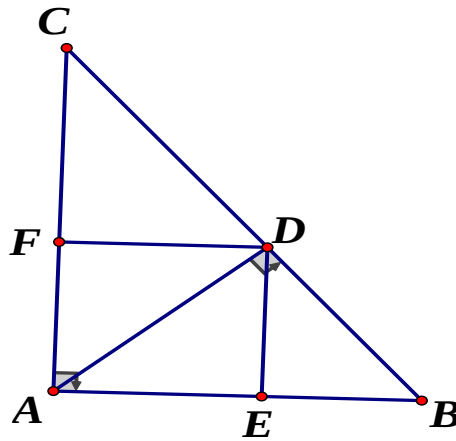
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4023}{2} \\ x = \frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Câu 4

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} \\
&= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Câu 5



a) Tứ giác AEDF là hình chữ nhật (vì $\angle E = \angle A = \angle F = 90^\circ$)

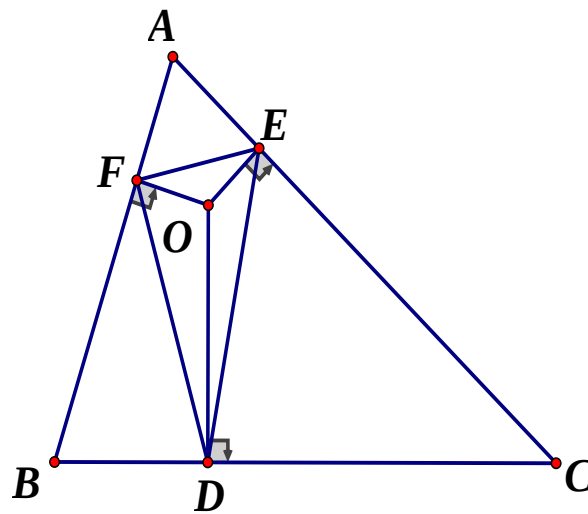
Để tứ giác AEDF là hình vuông thì AD là tia phân giác của $\angle BAC$

b) Do tứ giác AEDF là hình chữ nhật nên $AD = EF$

$$\Rightarrow 3AD + 4EF = 7AD$$

$3AD + 4EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Câu 6.



a) Đặt $\angle AFE = \angle BFD = \omega$, $\angle BDF = \angle CDE = \alpha$; $\angle CED = \angle AEF = \beta$

Ta có: $\angle BAC + \beta + \omega = 180^\circ (*)$

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O.

Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF

$$\Rightarrow \angle OFD + \angle OED + \angle ODF = 90^\circ (1)$$

Ta có:

$$\angle OFD + \omega + \angle OED + \beta + \angle ODF + \alpha = 270^\circ (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^\circ (**)$$

Từ (*) & (**) $\Rightarrow \angle BAC = \alpha = \angle BDF$

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

$$\angle B = \beta, \angle C = \omega \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \\ \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \\ \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7AE = 5AF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7(7-CE) = 5(5-BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CD - BD = 3 \quad (3)$$

$$\text{Ta lại có: } CD + BD = 8 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) } \Rightarrow BD = 2,5$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 56. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15$

Câu 2. (2 điểm)

Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x-a)(x-10)+1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên

Câu 3. (1 điểm)

Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức

$$B(x) = x^2 - 3x + 4$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC , đường cao AH , vẽ phân giác Hx của góc AHB và phân giác Hy của AHC . Kẻ AD vuông góc với Hx , AE vuông góc với Hy

Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Câu 5. (2 điểm)

Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15 \\
 &= (a+1)(a+7)(a+3)(a+5) + 15 \\
 &= (a^2 + 8a + 7)(a^2 + 8a + 15) + 15 \\
 &= (a^2 + 8a)^2 + 22(a^2 + 8a) + 120 \\
 &= (a^2 + 8a + 11)^2 - 1^2 \\
 &= (a^2 + 8a + 12)(a^2 + 8a + 10) \\
 &= (a+2)(a+6)(a^2 + 8a + 10)
 \end{aligned}$$

Câu 2. Giả sử: $(x-a)(x-10)+1=(x-m)(x-n)(m,n \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow x^2 - (a+10)x + 10a + 1 = x^2 - (m+n)x + mn \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m+n = a+10 \\ mn = 10a+1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Khử a ta có:

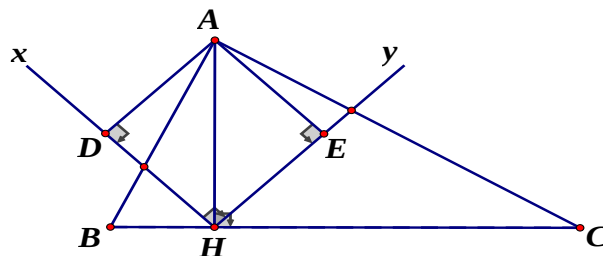
$$\begin{aligned}
 mn &= 10(m+n-10)+1 \\
 &\Leftrightarrow mn - 10m - 10n + 100 = 1 \\
 &\Leftrightarrow m(n-10) - 10(n-10) = 1
 \end{aligned}$$

Vì m, n nguyên ta có: $\begin{cases} m-10=1 \\ n-10=1 \end{cases} \& \begin{cases} m-10=-1 \\ n-10=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ a=8 \end{cases}$

Câu 3. Ta có: $A(x) = B(x) \cdot (x^2 - 1) + (a-3)x + b + 4$

Để $A(x) \vdots B(x)$ thì $\begin{cases} a-3=0 \\ b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

Câu 4.



Tứ giác $ADHE$ là hình vuông

Hx là phân giác của $\angle AHB$; Hy là phân giác của $\angle AHC$ mà $\angle AHB$ và $\angle AHC$ là hai góc kề bù nên $Hx \perp Hy$

Hay $\angle DHE = 90^\circ$, mặt khác: $\angle AHD = \angle AEH = 90^\circ$ nên tứ giác ADHE là hình chữ nhật (1)

$$\angle AHD = \frac{\angle AHB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \text{ Do } \angle AHE = \frac{\angle AHC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Hay HA là phân giác $\angle DHE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác ADHE là hình vuông.

Câu 5. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100} \\ &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1 \end{aligned}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 57. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm) Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

- Rút gọn P
- Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

- Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9
- Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) \text{ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.}$$

Câu 3. (2 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

- b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60° quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E.
 Chứng minh:

- a) $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$
- b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED
- c) Chu vi tam giác ADE không đổi

Câu 5. (1 điểm)

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a)

$$a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a-1)(a+1)(a-4)$$

$$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a-2)(a-1)(a-4)$$

Nêu ĐKXĐ: $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

Rút gọn $P = \frac{a+1}{a-2}$

b) Ta có:

$$P = \frac{a-2+3}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}; \text{ ta thấy } P \text{ nguyên khi } a-2 \text{ là ước của } 3, \text{ mà}$$

$$U(3) = \{-1; 1; -3; 3\}, \text{ từ đó tìm được } a \in \{-1; 3; 5\}$$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có a + b chia hết cho 3.

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] \text{ Vì}$$

a + b chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

$$\text{b) } P = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36$$

$$\text{Ta thấy } (x^2 + 5x)^2 \geq 0 \text{ nên } P = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$$

$$\text{Do đó } \text{Min}P = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Câu 3. a) Ta có:

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5); x^2 + 11x + 30 = (x+5)(x+6); x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

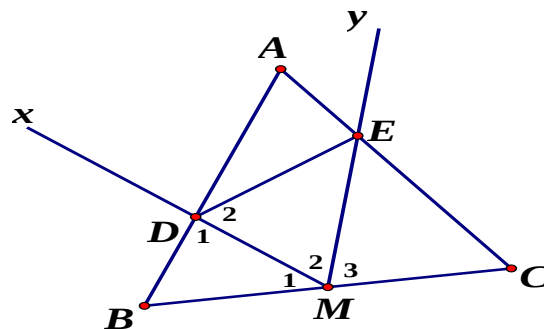
$$\text{b) Đặt } b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$$

$$\text{từ đó suy ra } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}; \text{Thay vào ta được:}$$

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \text{ hay } A \geq 3$$

Câu 4.



$$\text{a) Trong tam giác BDM ta có: } D_1 = 120^\circ - M_1$$

$$\text{Vì } M_2 = 60^\circ \text{ nên ta có: } M_3 = 120^\circ - M_1$$

$$\text{Suy ra } D_1 = M_3. \text{ Chứng minh } \triangle BMD \sim \triangle CEM (1)$$

Suy ra $\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$, Từ đó $BD.CE = BM.CM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có: $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) Từ (1) suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$

Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow D_1 = D_2$, do đó DM là tia phân giác BDE

Chứng minh tương tự ta có : EM là tia phân giác CED

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC.

Chứng minh $DH = DI, EI = EK$

Tính chu vi tam giác bằng $2AH$ - không đổi

Câu 5. Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy = 2(x + y + z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$ (2)

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

Suy ra $z + 2 = x + y - 2 \Rightarrow z = x + y - 4$; thay vào (1) ta được:

$$xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 58. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1.

a) Phân tích các đa thức ra thừa số:

$$x^4 + 4$$

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$$

b) Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

c) Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2. Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 3. Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

a) Chứng minh: $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng : DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Câu 4.

a) Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

b) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \\ (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 &= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\ &= [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24 \\ &= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\ &= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\ &= (x+1)(x+2)(x^2 + 7x + 16) \end{aligned}$$

b)

$$x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x - 5)(x + 6) = 0 (*)$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x$$

$$\text{Vì } \Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x - 5)(x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -6 \end{cases}$$

c) Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$; rút gọn $\Rightarrow$ dpcm

Câu 2.

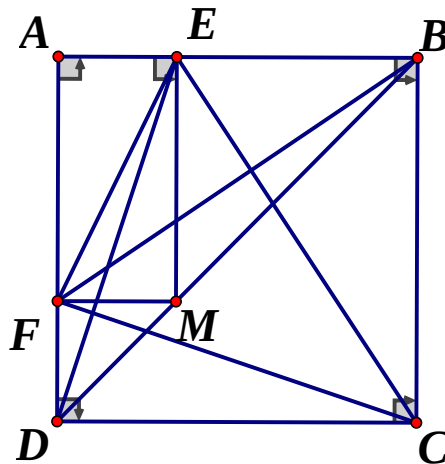
a) Rút gọn được kết quả $A = \frac{-1}{x-2}$

$$\text{b) } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{c) } A < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{d) } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$$

Câu 3.



a) Chứng minh: $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow$ dpcm

b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow$ dpcm

c) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi

$$\Rightarrow ME + MF = a \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow ME = MF \text{ (AEMF là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của } BD.$$

Câu 4.

$$a) \text{ Từ } a+b+c=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a} \\ \frac{1}{b}=1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \\ \frac{1}{c}=1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$$

b) Ta có:

$$(a^{2001} + b^{2001}) \cdot (a+b) - (a^{2000} + b^{2000}) \cdot ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+b) - ab = 1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(\text{tm}) \\ b=0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Với } b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(\text{tm}) \\ a=0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 59. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

$$\text{Cho biểu thức: } A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a+b \geq 1$

b) Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm x

biết rằng: $\left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1$

Câu 3. (3 điểm)

Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là 6km/h

Câu 4. (5 điểm)

a) Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q \text{ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên}$$

(những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 5. (5 điểm)

Cho đoạn thẳng $AB = a$. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMNP, BMLK$ có tâm theo thứ tự là C, D . Gọi I là trung điểm của CD .

a) Tính khoảng cách từ I đến AB

b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1-3x^2-3x}{3x} \right) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-2x-3x^2}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2-2+6x}{3x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

b) $A = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Rightarrow x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$\Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ vì $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\} = \{2; 3\}$

Câu 2.

a) Theo Câu ra ta có: $a + b \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$ (1)

Mặt khác: $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2(a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

$$b) \left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11} - (2x+1) < 1 \text{ và } 2x+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8 < 11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x < 3 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq 2x+1 < \frac{3}{2}$$

$$\text{Do } 2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

Câu 3.

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc ca nô xuôi dòng ($x > 12$)

Vận tốc ca nô khi nước lặng: $x - 6(\text{km/h})$

Vận tốc ca nô khi ngược dòng: $x - 12(\text{km/h})$

Thời gian cả đi và về của ca nô là 4,5 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x-12} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-4)(x-24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4(\text{ktm}) \\ x=24(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là 24km/h

Câu 4.

$$a) \overline{abcd} : \overline{dcba} = q$$

$$\text{Vì } q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q=4 \\ q=9 \end{cases} \Rightarrow a, d \text{ phải là những số thuộc } \{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$$

$$\text{Do } \overline{abcd} = \overline{dcba} \times q \text{ nên } d < 3 \Rightarrow d = 1$$

Giả sử $q = 4$ khi đó $\overline{1cba} \cdot 4 = \overline{abc1}$ (vô lý) vì $\overline{1cba} \cdot 4$ phải là một số chẵn nên $q = 9$

Với $q=9$ ta có: $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abc1}$ suy ra $a = 9, c < 2$ vì tích $\overline{1cba} \times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c \neq d$ tức là $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b = 8$

Tóm lại ta có: $9801 : 1089 = 9$

b) Đặt $x = b + c - a$; $y = a + c - b$; $z = a + b - c \Rightarrow x, y, z > 0$

$$\Rightarrow x + y + z = a + b + c$$

$$2a = a + b + c - (b + c - a) = x + y + z - x = y + z \Rightarrow a = \frac{y+z}{2}$$

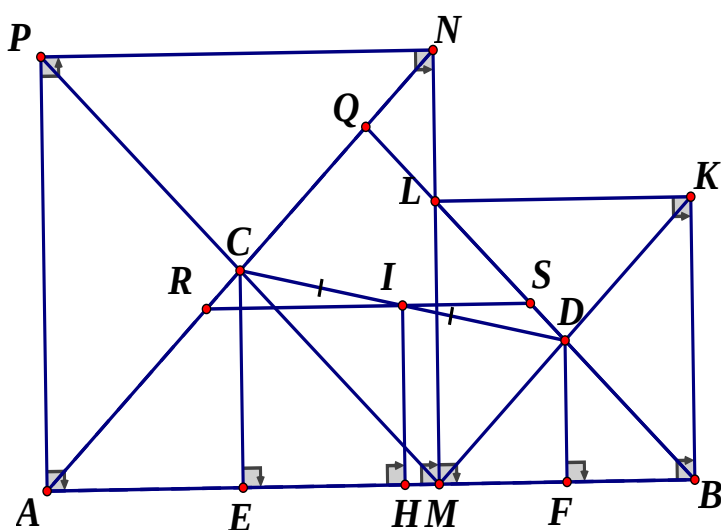
$$\text{Tương tự: } b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{BĐT chứng minh tương đương với: } \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \geq 6 \text{ do } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Câu 5.



a) Kẻ CE, IH, DF cùng vuông góc với AB suy ra tứ giác CDFE là hình thang vuông.

$$\text{Chứng minh được: } CE = \frac{AM}{2}, DF = \frac{BM}{2} \Rightarrow CE + DF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{4}$$

b) Khi M di chuyển trên AB thì I di chuyển trên đoạn RS song song với AB và cách AB

một khoảng bằng $\frac{a}{4}$ (R là trung điểm của AQ)

S là trung điểm của BQ, Q là giao điểm của BL và AN)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 60. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3,5 điểm)

a) Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

b) Rút gọn biểu thức:
$$\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

Câu 2. (4,5 điểm)

a) Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được 4m thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 8m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 12m dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc 2m / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

b) Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Câu 4. (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

a) Chứng minh APQR là hình thang cân

b) Biết $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Tính độ dài của AR

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$$

Câu 6. (1,0 điểm)

Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2, 3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n : 6$, suy ra điều phải chứng minh

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
& \frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1} = \frac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1} \\
& = \frac{x^2+x^2a+a^2x^2+1+a+a^2}{x^2-x^2a+a^2x^2+1-a+a^2} = \frac{x^2(1+a+a^2)+(1+a+a^2)}{x^2(1-a+a^2)+(1-a+a^2)} \\
& = \frac{(x^2+1)(1+a+a^2)}{(x^2+1)(1-a+a^2)} = \frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}
\end{aligned}$$

Câu 2.

a) Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x-1$

Thời gian đi

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2x \\
& = 2(1+2+3+\dots+x) = x(x+1)
\end{aligned}$$

Thời gian dừng:

$$1+2+3+\dots+(x-1) = \frac{(x-1+1)(x-1)}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x-1)}{2} + x(x+1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10+1) \cdot 2 = 220(\text{m})$

b)

$$\begin{aligned}
& a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25 \\
& b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100 \\
& \Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125 \\
& \Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}
\end{aligned}$$

Câu 3.

$$a) (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X+4) - 3(X+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-3)(X+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

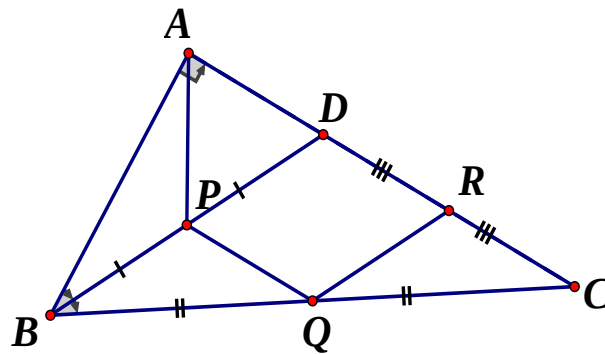
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 - 4(x+y) - 2010 \\ &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018 \\ &= (x-2)^2 + (y-2)^2 - 2018 \geq -2018 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Câu 4.



a) PQ là đường trung bình tam giác BDC, suy ra $PQ \parallel AR$ nên APQR là hình thang.

$$AQ = \frac{1}{2} BC \text{ (trung tuyến tam giác vuông ABC)}$$

$$PR = \frac{1}{2} BC \text{ (đường trung bình tam giác DBC)}$$

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

b) Tính được $BC = 10\text{cm}$

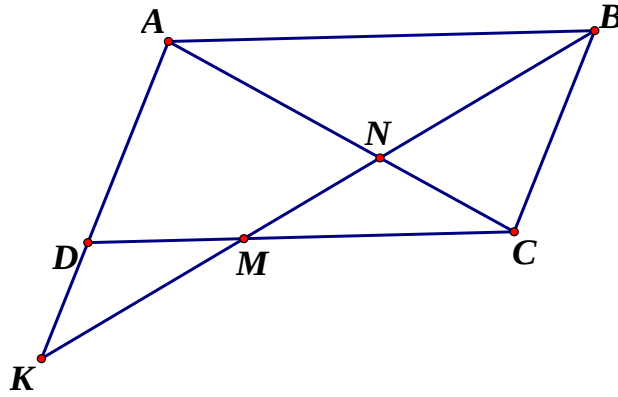
Tính chất đường phân giác trong của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BA}$$

Thay số tính đúng $AD = 3\text{cm}, DC = 5\text{cm}, DR = 2,5\text{cm}$

Kết quả $AR = 5,5\text{cm}$

Câu 5.



$AB \parallel DC$ (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AN} = \frac{MN}{NB} \Rightarrow \frac{MC + AB}{AB} = \frac{MN + NB}{BN} = \frac{BM}{BN} \quad (1)$$

$$\frac{KM}{BK} = \frac{KD}{KA} = \frac{MD}{AB} \Rightarrow \frac{BK - KM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = \frac{AB + MC}{AB} - \frac{AB - MD}{AB} = \frac{MC + MD}{AB}$$

$$\text{Mà } MC + MD = CD = AB \text{ nên } \frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = 1 \text{ (Đpcm)}$$

Câu 6.

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \end{aligned}$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 61. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1: (4,0 điểm) Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40.

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$.

Câu 3: (4,0điểm)

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$.

Câu 4: (3,0 điểm) Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Câu 5: (4,0điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

- a) Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.
b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.
c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3} DC$

Câu 6: (1,0điểm) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (4,0điểm)

a) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$$

$$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11})$$

$$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$$

$$= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40$$

$$= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8) : 40$$

$$\text{Vậy } A : 40$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100} \\ &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= 1 - \frac{1}{100} < 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B < 1$$

Câu 2: (4,0điểm)

a) Ta có: $a + b + c = 0$ suy ra $a + b = -c$

$$\text{Mặt khác: } (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\text{Suy ra } (-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (đpcm)}$$

b) Ta có:

$$C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$(2-1)C = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$C = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$C = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$C = (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$C = (2^{16}-1)(2^{16}+1)$$

$$C = 2^{32} - 1$$

Vì $2^{32} - 1 < 2^{32}$ nên $C < D$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Ta có:

$$x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$$

$$= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 - x^3$$

$$= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) - (x^3 - 1)$$

$$= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 - x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)$$

b) Ta có: $E = 2x^2 - 8x + 1$

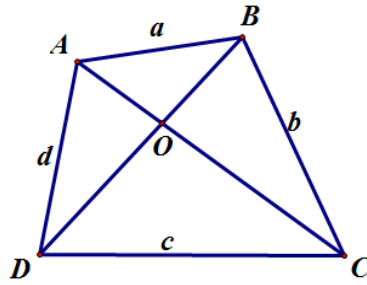
$$= 2x^2 - 8x + 8 - 7$$

$$= 2(x^2 - 4x + 4) - 7$$

$$= 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $E = -7$ khi $x = 2$

Câu 4: (3,0 điểm)



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.

Đặt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

Xét $\triangle AOB$, ta có: $OA + OB > AB$ (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).

Xét $\triangle COD$, ta có: $OC + OD > CD$ (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).

Suy ra: $OA + OB + OC + OD > AB + CD$

$$\Rightarrow AC + BD > AB + CD$$

$$\Rightarrow AC + BD > a + c \quad (1)$$

Chứng minh tương tự:

$$AC + BD > AD + BC$$

$$\Rightarrow AC + BD > d + b \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2(AC + BD) > a + c + d + b$

$$\Rightarrow AC + BD > \frac{a + c + d + b}{2} \quad (*)$$

Xét $\triangle ABC$, ta có: $AC < a + b$

Xét $\triangle ADC$, ta có: $AC < d + c$

Suy ra: $2AC < a + b + c + d$

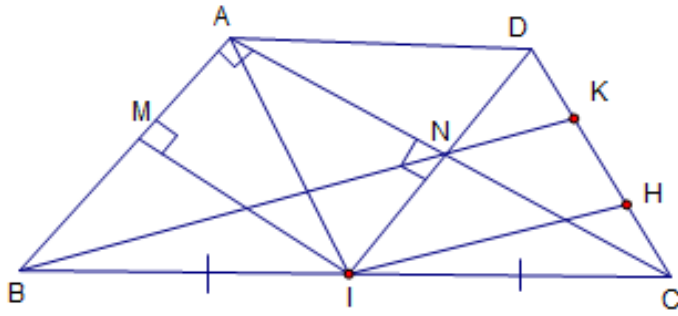
$$\Rightarrow AC < \frac{a + c + d + b}{2} \quad (3)$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } BD < \frac{a + c + d + b}{2} \quad (**)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $AC + BD < a + b + c + d$.

$$\text{Từ (*) và (**)} \text{ suy ra } \frac{a + c + d + b}{2} < AC + BD < a + b + c + d \text{ (dpcm)}$$

Câu 5: (4,0 điểm)



a) Xét tứ giác AMIN có:

$\widehat{MAN} = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông ở A)

$\widehat{AMI} = 90^\circ$ (vì IM vuông góc với AB)

$\widehat{ANI} = 90^\circ$ (vì IN vuông góc với AC)

Vậy tứ giác AMIN là hình chữ nhật (Vì có 3 góc vuông)

b) $\triangle ABC$ vuông tại A, có AI là trung tuyến nên $AI = IC = \frac{1}{2}BC$

Do đó $\triangle AIC$ cân tại I, có đường cao IN đồng thời là trung tuyến $\Rightarrow NA = NC$

Mặt khác: $NI = ND$ (tính chất đối xứng) nên ADCI là hình bình hành (1)

Mà $AC \perp ID$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ADCI là hình thoi.

c) Kẻ qua I đường thẳng IH song song với BK cắt CD tại H

$\Rightarrow IH$ là đường trung bình $\triangle BKC$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của CK hay $KH = HC$ (3)

Xét $\triangle DIH$ có N là trung điểm của DI, $NK \parallel IH$ ($IH \parallel BK$)

Do đó K là trung điểm của DH hay $DK = KH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $DK = KH = HC \Rightarrow DK = \frac{1}{3}DC$

Câu 6: (1,0 điểm)

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{2}a - b\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + b^2 \geq ab \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + c^2 \geq ac \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - d\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + d^2 \geq ad \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + e^2 \geq ae \quad (4)$$

Ta cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được :

$$4 \cdot \frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 62. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

- a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9
- b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 2. (4 điểm)

Phân tích các đa thức thành nhân tử:

- a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
- b) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Câu 3. (4 điểm)

- a) Cho $a + b = 2$ và $a^2 + b^2 = 20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$
- b) Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Câu 4. (4 điểm)

Cho hình thang cân ABCD có $\angle ACD = 60^\circ$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC. Tam giác EFG là tam giác gì ? Vì sao?

Câu 5. (4 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD.

- a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy
- b) Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng EMFN là hình bình hành

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- a) Ta phải chứng minh : $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
A &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\
&= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\
&= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9 \\
&= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1)
\end{aligned}$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1):3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1):9$ và $9(n^2 + 2n + 1):9$

Vậy $A:9$

$$\begin{aligned}
b) 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} &= 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n} \\
&= 5^n(59 - 8) + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n) \\
59.5^n:59 \text{ và } 8.(64^n - 5^n):(64 - 5) &= 59
\end{aligned}$$

Vậy $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1}:59$

Câu 2.

$$\begin{aligned}
a / x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\
&= (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z) \\
&= (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3z(x+y) - 3xy \right] \\
&= (x+y+z) \left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 3zx - 3zy - 3xy \right] \\
&= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b / x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011 \\
&= x^4 + x^3 + x^2 + 2010x^2 + 2010x + 2010 - x^3 + 1 \\
&= x^2(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2010 - x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2011)
\end{aligned}$$

Câu 3.

$$a) \text{ Từ } a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow (a+b)^2 - 2ab = 20 \Rightarrow ab = -8$$

$$M = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3.(-8).2 = 56$$

$$b) \text{ Từ } a^2 + b^2 + c^2 = 14 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 196$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\text{Ta lại có: } a + b + c = 0 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = -7$$

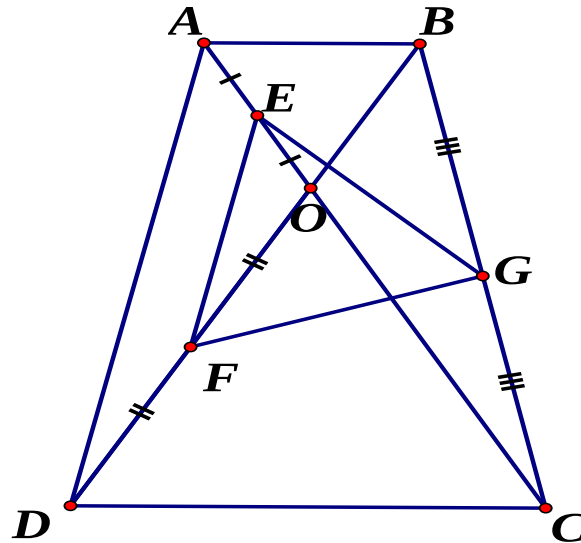
$$\Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49$$

$$\text{Do đó: } N = a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 196 - 2 \cdot 49 = 98$$

Câu 4.



Do ABCD là hình thang cân và $\angle ACD = 60^\circ$ suy ra $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ là các tam giác đều

Chứng minh $\triangle BFC$ vuông tại F

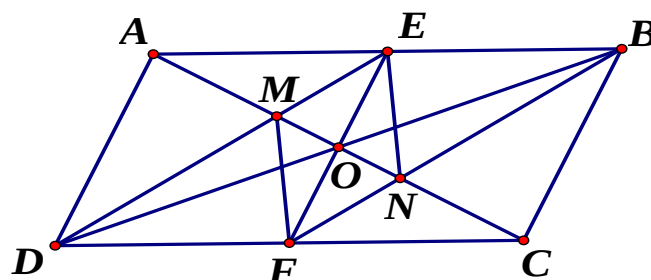
Xét $\triangle BFC$ vuông tại F có: $FG = \frac{1}{2} BC$

Chứng minh $\triangle BEC$ vuông tại E có $EG = \frac{1}{2} BC$

Xét EF là đường trung bình $\triangle AOD \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AD \Rightarrow EF = \frac{1}{2} BC$ (ABCD hình thang cân)

Suy ra $EF = EG = FG \Rightarrow \triangle EFG$ đều

Câu 5.



a) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD, ta có O là trung điểm của BD. Chứng minh BEDF là hình bình hành

Có O là trung điểm của BD nên O cũng là trung điểm của EF

Vậy EF, BD, AC đồng quy tại O

b) Xét $\triangle ABD$ có M là trọng tâm, nên $OM = \frac{1}{3}OA$

Xét $\triangle BCD$ có N là trọng tâm, nên $ON = \frac{1}{3}OC$

Mà $OA = OC$ nên $OM = ON$

Tứ giác EMFN có $OM = ON, OE = OF$ nên là hình bình hành

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 63. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm) Chứng minh rằng

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 2. (6,0 điểm) Tìm x, biết:

a) $x^2 - 2005x - 2006 = 0$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

c) $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Câu 3. (4,0 điểm) Cho biểu thức : $A = \frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

a) Tìm giá trị của biểu thức A xác định

b) Tìm giá trị của biểu thức A có giá trị bằng 0

c) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Câu 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA.
. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, AF, EF, ED

a) Tứ giác MNPQ là hình gì? Tại sao?

b) Tam giác ABC có điều kiện gì thì MNPQ là hình chữ nhật?

c) Tam giác ABC có điều kiện gì thì MNPQ là hình thoi?

Câu 5. (3 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle ABC = 60^\circ$, phân giác BD. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, CD

- Tứ giác AMNI là hình gì ? Chứng minh
- Cho $AB = 4\text{cm}$, Tính các cạnh của tứ giác AMNI

Câu 6. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của $M = 4x^2 + 4x + 5$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$ chia hết cho 17
- Ta có:

$$19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} + 69 + \dots + 69^{18}) = 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} + 69 + \dots + 69^{18}) \text{ chia hết cho 44}$$

Câu 2.

- Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - 2005x - 2006 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2005x - 2005 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+1) - 2005(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-1-2005) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2006 \end{cases} \end{aligned}$$

- Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} &= \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1 \right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1 \right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1 \right) &= \left(\frac{x+4}{2005} + 1 \right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1 \right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} - \frac{x+2009}{2005} - \frac{x+2009}{2004} - \frac{x+2009}{2003} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2009 \end{aligned}$$

- Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} &= \frac{1}{18} \\ x^2 + 9x + 20 &= (x+4)(x+5) \\ x^2 + 11x + 30 &= (x+5)(x+6) \\ x^2 + 13x + 42 &= (x+6)(x+7) \end{aligned}$$

ĐKXD: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$. Phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 3.

a) Ta có $A = \frac{(x-3)^2 \cdot (3x+4)}{(x-3)^2 \cdot (3x-1)}$. Vậy biểu thức A xác định khi $x \neq 3; x \neq \frac{1}{3}$

b) Ta có: $A = \frac{3x+4}{3x-1}$, do đó $A = 0 \Leftrightarrow 3x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

Vậy với $x = -\frac{4}{3}$ thì biểu thức A có giá trị bằng 0

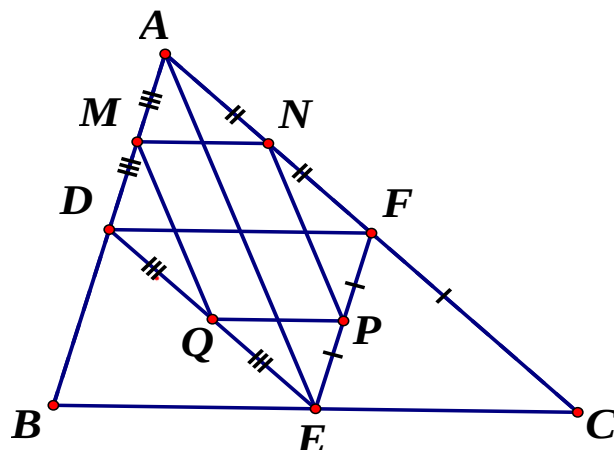
c) Ta có: $A = \frac{3x+4}{3x-1} = 1 + \frac{5}{3x-1}$

Để A có giá trị nguyên thì $\frac{5}{3x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (3x-1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$$\Rightarrow x \in \left\{ -\frac{4}{3}; 0; \frac{2}{3}; 2 \right\}$$

Vậy với giá trị nguyên của x là 0 và 2 thì A có giá trị nguyên

Câu 4.



$$a) \left. \begin{array}{l} MN \parallel DF; MN = \frac{1}{2} DF \\ PQ \parallel DF; PQ = \frac{1}{2} DF \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel PQ; MN = PQ. \text{ Vậy } MNPQ \text{ là hình bình hành}$$

b) Giả sử MNPQ là hình chữ nhật thì $MP = NQ$

$$\text{Mà } \left. \begin{array}{l} MP = AF = \frac{AC}{2} \\ NQ = AD = \frac{AB}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow AC = AB$$

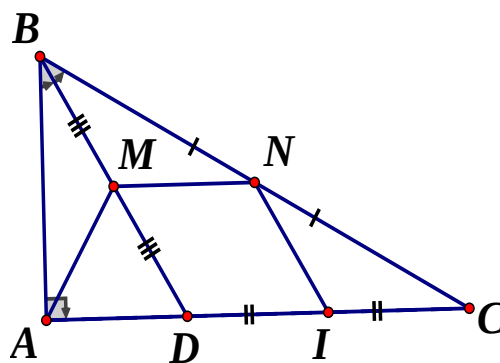
Vậy $\triangle ABC$ cân tại A thì MNPQ là hình chữ nhật

c) Giả sử MNPQ là hình thoi thì $MN = MQ$

$$MN = MQ \Leftrightarrow \frac{BC}{4} = \frac{AE}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{1}{2} BC$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A thì MNPQ là hình thoi

Câu 5.



a) Chứng minh được tứ giác AMNI là hình thang

Chứng minh được $AN = MI$, từ đó suy ra tứ giác AMNI là hình thang cân

$$b) \text{ Tính được: } AD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm; } BD = 2AD = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm; } AM = \frac{1}{2} BD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$NI = AM = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm, } DC = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm, } MN = \frac{1}{2} DC = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm, } AI = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Câu 6. Ta có: } M = 4x^2 + 4x + 5 = \left[(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1 \right] + 4 = (2x + 1)^2 + 4$$

$$\text{Vì } (2x + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$$

$$\text{Vậy GTNN của } M = 4 \Leftrightarrow x = -0,5$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

Câu 1. (3 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

2. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2. (2 điểm)

1. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

2. Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD . Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

a) Chứng minh $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2011} + b^{2011}$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

1a. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$

$$= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

1b. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

$$= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24$$

$$= [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24$$

$$= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2$$

$$= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16)$$

$$= (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)$$

2. Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Câu 2.

1. Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x) \cdot q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2) \cdot (x-1) \cdot q(x)$$

Với $x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6$ (1)

Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $a=2; b=4$

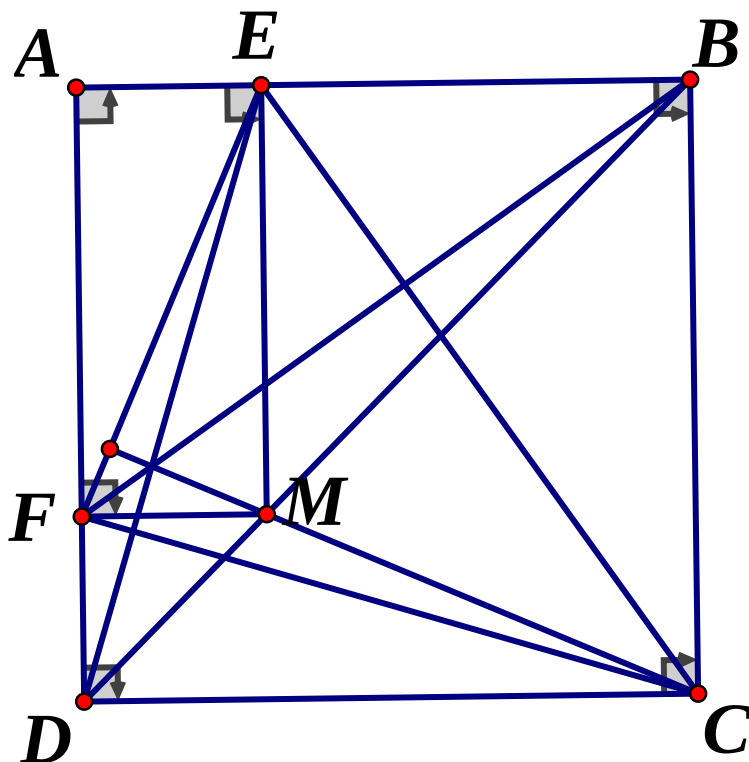
2. Ta có: $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2) \cdot (a^2 + 2a + 2)$

Vì $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{Z}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{Z}$

Có: $a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \geq 1 \forall a$ và $a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1 (\forall a)$

Vậy $a^4 + 4$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} a^2 + 2a + 2 = 1 \\ a^2 - 2a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(\text{tm}) \\ a = -1(\text{tm}) \end{cases}$

Câu 3.



a) Chứng minh $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow d_{fcm}$

b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow d_{fcm}$

c) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi

$$\Rightarrow ME + MF = a \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow ME = MF \text{ (AEMF là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của } BD.$$

Câu 4.

$$(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + 1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(\text{tm}) \\ b = 0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vì } b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(\text{tm}) \\ a = 0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 65. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

2) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x \cdot y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, chia cho $x - 2$ dư 24, chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

b) Cho p và $2p + 1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p + 1$ là hợp số

Câu 4. (8,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của BAC . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC , E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN .

- 1) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$.
- 2) Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle NFA$ và H là trực tâm $\triangle AEF$
- 3) Gọi giao điểm của AH và DM là K , giao điểm của AH và BC là O , giao điểm của

BK và AD là I . Chứng minh : $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$

Câu 5. (2,0 điểm)

- a) Cho $x > 0, y > 0$ và m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$

- b) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

1)

$$\begin{aligned} \text{a) } x^3 - x^2 - 14x + 24 &= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24 \\ &= x^2(x-2) + x(x-2) - 12(x-2) = (x^2 + x - 12)(x-2) \\ &= (x-2)(x-3)(x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018 &= x^4 + 2017x^2 + x^2 + 2017x + 2017 + 1 \\ &= (x^4 + x^2 + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2018) \end{aligned}$$

- 2) Với $x + y = 1$ và $xy \neq 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} &= \frac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)} \\
&= \frac{(x^4-y^4)-(x-y)}{xy(x^2+x+1)(y^2+y+1)} \\
&= \frac{(x-y)[(x+y)(x^2+y^2)-1]}{xy(x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2)} \\
&= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy(x^2y^2+(x+y)^2+2)} \\
&= \frac{(x-y)[x(x-1)+y(y-1)]}{xy(x^2+y^2+3)} = \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$$

Câu 2.

$$\text{a) Ta có: } y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x+y) = (x+1)(x+2) (*)$$

VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=-1 \Rightarrow y=1$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow y=2$$

$$\text{b) Điều kiện } x \neq 0$$

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy = 2$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0; \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \neq 0; \text{ mọi } y$$

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \\ x=-1; y=-2 \\ x=-2; y=-1 \end{cases}$$

Câu 3.

a) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và dư $ax + b$

Khi đó $f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + ax + b$

$$\text{Theo đề ta có: } \begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$$

$$\text{Vậy } f(x) = -5x^2 + \frac{47}{2}x + 17$$

b) Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 3k + 1$; $p = 3k - 1$ với $k > 1$

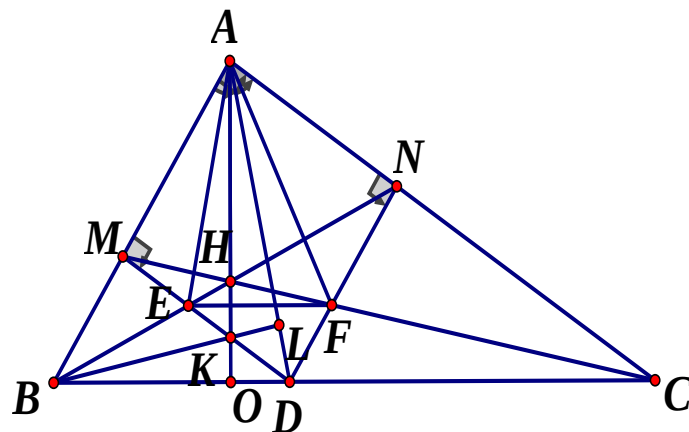
+ Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$

Suy ra $2p + 1$ là hợp số (vô lý)

+ Nếu $p = 3k - 1$, $k > 1$ thì $4p + 1 = 12k - 3 = 3(4k - 1)$

Do $k > 1$ nên $4k - 1 > 3$. Do đó $4p + 1$ là hợp số.

Câu 4.



1) ***Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông**

+) Chứng minh $\angle AMD = 90^\circ$; $\angle AND = 90^\circ$; $\angle MAN = 90^\circ$

Suy ra tứ giác AMDN là hình chữ nhật

+) Hình chữ nhật AMDN có AD là phân giác của $\angle MAN$ nên tứ giác AMDN là hình vuông.

***Chứng minh $EF \parallel BC$**

$$\text{+) Chứng minh: } \frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC} \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh: } \frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA} \quad (2)$$

$$\text{Chứng minh } AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN} \quad (3)$$

$$\text{Chứng minh } \frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1),(2),(3),(4) suy ra } \frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF // BC$$

2) Chứng minh $\triangle ANB \sim \triangle NFA$

$$\text{Chứng minh } AN = DN. \text{ suy ra } \frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB} \quad (5)$$

$$\text{Chứng minh } \frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA} \quad (6)$$

$$\text{Chứng minh } \frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM} \quad (7)$$

$$\text{Chứng minh } AM = AN. \text{ Suy ra } \frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN} \quad (8)$$

$$\text{Từ (5) (6) (7) (8) suy ra } \frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle NFA \text{ (c.g.c)}$$

***chứng minh H là trực tâm tam giác AEF**

Vì $\triangle ANB \sim \triangle NFA$ nên $\angle NBA = \angle FAN$

$$\text{Mà } \angle BAF + \angle FAN = 90^\circ \Rightarrow \angle NBA + \angle BAF = 90^\circ$$

Suy ra $EH \perp AF$, Tương tự: $FH \perp AE$, suy ra H là trực tâm $\triangle AEF$

3) Đặt $S_{AKD} = a, S_{BKD} = b, S_{AKB} = c$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABD}}{S_{AKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{BKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{AKB}} &= \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Theo định lý AM-GM ta có: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2; \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$$

$$\text{Suy ra } \frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} \geq 9$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABD$ là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.

Câu 5.

5a) Với $x > 0, y > 0$ và $m, n \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2y + n^2x)(x+y) \geq xy(m+n)^2$$

$$\Leftrightarrow (nx - my)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

5b) Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n+p)^2}{x+y+z} \quad (2)$$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{do } abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Do đó: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 66. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3 điểm)

a) Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

b) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab}$

c) Cho $x+y+z=0$. Chứng minh rằng: $2(x^5+y^5+z^5) = 5xyz(x^2+y^2+z^2)$

Câu 2. (2 điểm)

- a) Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương
- b) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Câu 3. (1 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF . Tính số đo EAF

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

- a) Chứng minh $BC' \cdot BA + CB' \cdot CA = BC^2$
- b) Chứng minh rằng: $\frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HA \cdot HB}{BC \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot AB} = 1$
- c) Gọi D là trung điểm của BC . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh H là trung điểm của MN .

Câu 5. (1 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) &= a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) \\ &= a^2(b-c) - b^2[(a-b) + (b-c)] + c^2(a-b) \\ &= (a^2 - b^2)(b-c) + (c^2 - b^2)(a-b) \\ &= (a-b)(a+b)(b-c) - (b-c)(b+c)(a-b) \\ &= (a-b)(b-c)[a+b-b-c] = (a-b)(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

$$\text{b) } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \quad ; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \\
 &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} \\
 &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1
 \end{aligned}$$

c) Vì $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z \Rightarrow (x+y)^3 = -z^3$

Hay $x^3+y^3+3xy(x+y) = -z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3+y^3+z^3$

Do đó:

$$\begin{aligned}
 3xyz(x^2+y^2+z^2) &= (x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2) \\
 &= x^5+y^5+z^5+x^3(y^2+z^2)+y^3(z^2+x^2)+z^3(x^2+y^2)
 \end{aligned}$$

Mà $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy$ (Vi $x+y=-z$)

Tương tự: $y^2+z^2 = x^2 - 2yz; z^2+x^2 = y^2 - 2zx$

$$\begin{aligned}
 \text{Vì vậy: } 3xyz(x^2+y^2+z^2) &= x^5+y^5+z^5+x^3(x^2-2yz)+y^3(y^2-2zx)+z^3(z^2-2xy) \\
 &= 2(x^5+y^5+z^5) - 2xyz(x^2+y^2+z^2)
 \end{aligned}$$

Suy ra : $2(x^5+y^5+z^5) = 5xyz(x^2+y^2+z^2)$

Câu 2.

a) Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$$\Leftrightarrow n+18 = p^2 \text{ và } n-41 = q^2 \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$

Từ $n+18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$

Thay vào $n-41$, ta được $882-41 = 841 = 29^2 = q^2$

Vậy với $n = 882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

b) Có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (*)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$

Áp dụng (*) có: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(a + \frac{1}{b}\right) \quad ; \quad \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(b + \frac{1}{a}\right)$

Suy ra: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[\left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{a}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 \left[(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (\text{Vi } a+b=1)$$

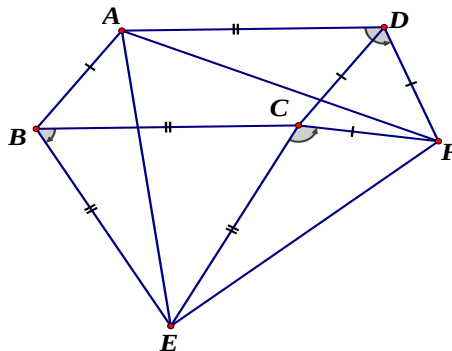
Với a, b dương, chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} = 4$ (Vi $a+b=1$)

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

$$\text{Ta được: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5.4$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Câu 3.



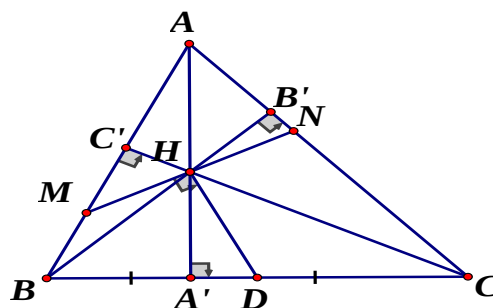
Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle ECF$

Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle FCE$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = EF$

Tương tự: $AF = EF$

$\Rightarrow AE = EF = AF \Rightarrow \triangle AEF$ đều $\Rightarrow \angle EAF = 60^\circ$

Câu 4.



$$\text{a) Chứng minh } \triangle BHC' \sim \triangle BAB' \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow BH \cdot BB' = BC' \cdot BA \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh } \triangle BHA' \sim \triangle CBA' \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BA'}{BB'} \Rightarrow BH \cdot BB' = BC \cdot BA' \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC'.BA = BA'.BC$

Tương tự : $CB'.CA = CA'.BC$

$$\Rightarrow BC'.BA + CB'.CA = BA'.BC + CA'.BC = (BA' + A'C).BC = BC^2$$

$$b) \text{ Có } \frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow \frac{BH.CH}{AB.AC} = \frac{BC'.CH}{BB'.AC} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{AH.BH}{CB.CA} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}, \frac{AH.CH}{CB.AB} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HA.HB}{AC.BC} + \frac{HC.HA}{BC.AB} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

$$c) \text{ Chứng minh } \triangle AHM \sim \triangle CDH(g.g) \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{AH}{CD} \quad (3)$$

$$\text{Chứng minh } \triangle AHN \sim \triangle BDH(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{BD} = \frac{HN}{HD} \quad (4)$$

$$\text{Mà } CD = BD \quad (gt) \quad (5)$$

$$\text{Từ } (3), (4), (5) \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{HN}{HD} \Rightarrow HM = HN \Rightarrow H \text{ là trung điểm của } MN$$

Câu 5.

Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD. Lấy các điểm I, G trên EF và K, H trên PQ thỏa mãn:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{HP}{HQ} = \frac{GF}{GE} = \frac{KQ}{KP} = \frac{2}{3}$$

Xét d là một trong các đường thẳng bất kỳ đã cho cắt hai đoạn thẳng AD, BC, EF lần lượt tại M, N, G'. Ta có:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{CDNM}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AB.(BM+AN)}{\frac{2}{CD.(CM+DN)}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EG'}{G'F} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow G \equiv G' \text{ hay } d \text{ qua } G.$$

Từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề Câu đều đi qua một trong 4 điểm G, H, I, K. Do có 2018 đường thẳng đi qua 1 trong 4 điểm

$$G, H, I, K \text{ theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất } \left\lceil \frac{2018}{4} \right\rceil + 1 = 505 \text{ đường thẳng}$$

cùng đi qua một điểm trong 4 điểm trên.

Vậy có ít nhất 505 đường thẳng trong số 2018 đường thẳng đã cho đồng quy.

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 67. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (3,5 điểm)

- a) Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$
b) Rút gọn biểu thức:

$$\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

Câu 2. (4,5 điểm)

- c) Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được 4m thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 8m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 12m dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc 2m / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.
d) Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Câu 3. (4 điểm)

- c) Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$
d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Câu 4. (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

- c) Chứng minh APQR là hình thang cân
d) Biết $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Tính độ dài của AR

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh: $\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$

Câu 6. (1,0 điểm)

Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$c) \quad n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3)=1$ nên chia hết cho 6

$18n:6$, suy ra điều phải chứng minh

d)

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1} &= \frac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1} \\ &= \frac{x^2+x^2a+a^2x^2+1+a+a^2}{x^2-x^2a+a^2x^2+1-a+a^2} = \frac{x^2(1+a+a^2)+(1+a+a^2)}{x^2(1-a+a^2)+(1-a+a^2)} \\ &= \frac{(x^2+1)(1+a+a^2)}{(x^2+1)(1-a+a^2)} = \frac{1+a+a^2}{1-a+a^2} \end{aligned}$$

Câu 2.

c) Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x-1$

Thời gian đi

$$\begin{aligned} \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} &= 2 + 4 + 6 + \dots + 2x \\ &= 2(1+2+3+\dots+x) = x(x+1) \end{aligned}$$

Thời gian dừng:

$$1+2+3+\dots+(x-1) = \frac{(x-1+1)(x-1)}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x-1)}{2} + x(x+1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10.(10+1).2 = 220(\text{m})$

d)

$$\begin{aligned} a^3 - 3ab^2 &= 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25 \\ b^3 - 3a^2b &= 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100 \\ \Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 &= 125 \\ \Rightarrow (a^2 + b^2)^3 &= 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018} \end{aligned}$$

Câu 3.

$$c) \quad (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X + 4) - 3(X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 3)(X + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

d)

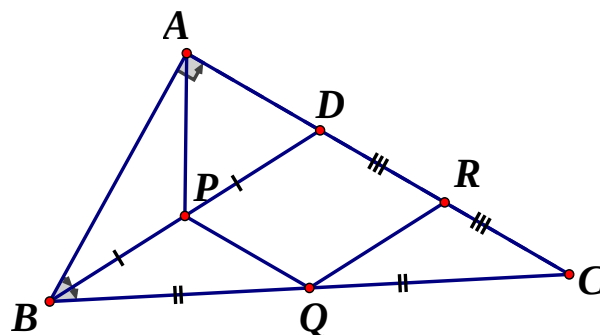
$$P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$$

$$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018$$

$$= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 2018 \geq -2018$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Câu 4.



c) PQ là đường trung bình tam giác BDC, suy ra $PQ \parallel AR$ nên APQR là hình thang.

$$AQ = \frac{1}{2}BC \text{ (trung tuyến tam giác vuông ABC)}$$

$$PR = \frac{1}{2}BC \text{ (đường trung bình tam giác DBC)}$$

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

d) Tính được $BC = 10\text{cm}$

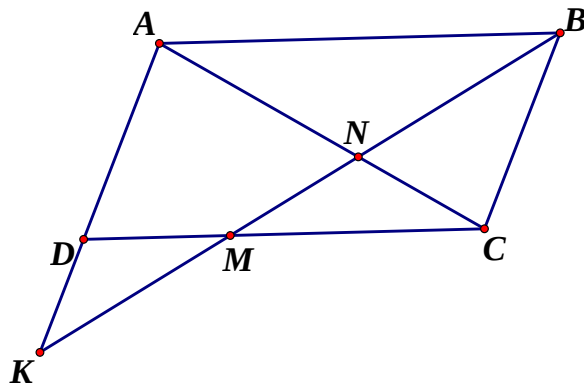
Tính chất đường phân giác trong của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BC}$$

Thay số tính đúng $AD = 3\text{cm}, DC = 5\text{cm}, DR = 2,5\text{cm}$

Kết quả $AR = 5,5\text{cm}$

Câu 5.



$AB \parallel DC$ (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AN} = \frac{MN}{NB} \Rightarrow \frac{MC + AB}{AB} = \frac{MN + NB}{BN} = \frac{BM}{BN} \quad (1)$$

$$\frac{KM}{BK} = \frac{KD}{KA} = \frac{MD}{AB} \Rightarrow \frac{BK - KM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = \frac{AB + MC}{AB} - \frac{AB - MD}{AB} = \frac{MC + MD}{AB}$$

Mà $MC + MD = CD = AB$ nên $\frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = 1$ (Điều phải chứng minh)

Câu 6.

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \end{aligned}$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 68. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn A

b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình và bất phương trình sau:

- a) $x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x$ (với m là tham số, $m \neq 0$)
- b) $8 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$
- c) $(2x+3)^3 + (3x-5)^3 = (5x-2)^3 - (5x-2)(17x^2 + 2016x - 2063)$

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Tìm các số tự nhiên n để $B = (n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố
- b) Trong lớp học bạn An khi đã hoàn thành Câu tập mà giáo viên giao cho thì đã giết thời gian bằng cách liệt kê ra một bảng các số nguyên. Bạn ấy bắt đầu ghi ra một số nguyên nào đó; để có số tiếp theo, An đã cộng hoặc nhân các chữ số của số đứng liền trước. Cứ tiếp tục như thế, và rồi nhận ra rằng các số mình ghi đều là số lẻ. Hỏi có bao nhiêu số đầu tiên An có thể chọn, biết rằng nó không quá 6 chữ số.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- a) Tính tổng $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$
- b) Chứng minh: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$
- c) Chứng minh: Điểm H cách đều ba cạnh của tam giác DEF
- d) Trên các đoạn HB, HC lấy tương ứng các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$.

Chứng minh : Đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh: $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) ĐKXĐ:
$$\begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ thì:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\
&= \left[\frac{x(x-2)}{2(x^2+4)} + \frac{2x^2}{(x^2+4)(x-2)} \right] \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\
&= \frac{x(x-2)^2 + 2x^2 \cdot 2}{2(x^2+4)(x-2)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\
&= \frac{(x^2 - 4x + 4) + 4x^2}{2(x^2+4)} \cdot \frac{x+1}{x} \\
&= \frac{x^2 + 4}{2(x^2+4)} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x}
\end{aligned}$$

Vậy, với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ thì $A = \frac{x+1}{2x}$

b) Xét với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} (*)$

Giả sử biểu thức A nhận giá trị nguyên thì biểu thức 2A cũng nhận giá trị nguyên

$$2A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2x+2}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$$

$x = -1; x = 1$ đều thỏa mãn $(*)$

Với $x = -1$ thì $A = \frac{-1+1}{2(-1)} = 0$ (thỏa mãn $A \in \mathbb{Z}$)

Với $x = 1$ thì $A = \frac{1+1}{2 \cdot 1} = 1$ (thỏa mãn $A \in \mathbb{Z}$)

Vậy để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{-1; 1\}$

Câu 2.

$$a) \quad x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x \Leftrightarrow (m-1)x < \frac{2}{m} \quad (2a)$$

+) Nếu $m < 1$ và $m \neq 0$ thì $m-1 < 0 \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow x > \frac{2}{m(m-1)}$

+) Nếu $m > 1$ thì $m-1 > 0 \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow x < \frac{2}{m(m-1)}$

+) Nếu $m = 1$ thì $m-1 = 0 \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow 0x < 2$ (luôn đúng)

Kết luận:

+ Với $m < 1$ và $m \neq 0$ thì tập nghiệm BPT là $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{2}{m(m-1)} \right\}$

+Với $m = 1$ thì tập nghiệm của BPT là $S = \mathbb{R}$

+Với $m > 1$ thì tập nghiệm của BPT là: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x < \frac{2}{m(m-1)} \right\}$

$$b) \quad 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \quad (2b)$$

Điều kiện $x \neq 0$, Khi đó:

$$(2b) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$$

Vì $x \neq 0$ nên $S = \{-8\}$

c) Trước hết chứng minh được rằng:

Nếu có 3 số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (2c)

Ta có:

$$(2x+3)^3 + (3x-5)^3 = (5x-2)^3 - (5x-2)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)^3 + (3x-5)^3 + (2-5x)^3 = (2-5x)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

Áp dụng đẳng thức (2c) và vì $(2x+3) + (3x-5) + (2-5x) = 0$ nên phương trình đã cho tương đương với :

$$3(2x+3)(3x-5)(2-5x) = (2-5x)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)\left[3(6x^2 - x - 15) - (17x^2 + 2016x - 2063)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)(x^2 - 2019x + 2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)(x-1)(x-2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = 1 \\ x = 2018 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{5}; 1; 2018 \right\}$

Câu 3.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= (n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 64 + 36 \\ &= n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2 \\ &= (n^2 + 10)^2 - (6n)^2 \\ &= (n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10) \end{aligned}$$

Với $n \in \mathbb{N}$ thì $0 < n^2 - 6n + 10 \leq n^2 + 6n + 10$

Nên để B là số nguyên tố thì trước hết $n^2 - 6n + 10 = 1$

Hay $(n - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$

Thử lại, với $n = 3$ thì $B = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$

37 là số nguyên tố nên $n = 3$ là giá trị cần tìm

b) Ta gọi số đầu tiên thỏa mãn đề Câu là số chấp nhận được. Các chữ số của số chấp nhận đều phải là số lẻ, vì nếu không tích của chúng sẽ chẵn

Như vậy có 5 số chấp nhận được có 1 chữ số

Không thể có số chấp nhận được gồm 2 chữ số vì thế thì tổng hoặc tích các chữ số của chúng sẽ là số chẵn. Tương tự như vậy số chấp nhận được cũng không thể có 4 hoặc 6 chữ số.

Ta xét các số chấp nhận được gồm ba chữ số (tổng và tích các chữ số của các số chấp nhận được gồm ba chữ số này phải là số lẻ, và chúng không thể có hai chữ số, nên và tổng và tích các chữ số không thể vượt quá 9. Như vậy số chấp nhận được gồm 3 chữ số có thể:

Hoặc là gồm 3 chữ số 1,

Hoặc là gồm hai chữ số 1, số còn lại là 1 trong 3 chữ số 3,5,7

Hoặc gồm 1 chữ số 1 và 2 chữ số 3

Do đó có $1 + 9 + 3 = 13$ số chấp nhận được có 3 chữ số.

Tương tự như thế, ta tính được số chấp nhận được gồm 5 chữ số. Tổng các chữ số không vượt quá 45 và là số chấp nhận được nên tích không vượt quá 9, khả năng xảy ra là :

Hoặc gồm 5 chữ số 1

Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 3

Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 5

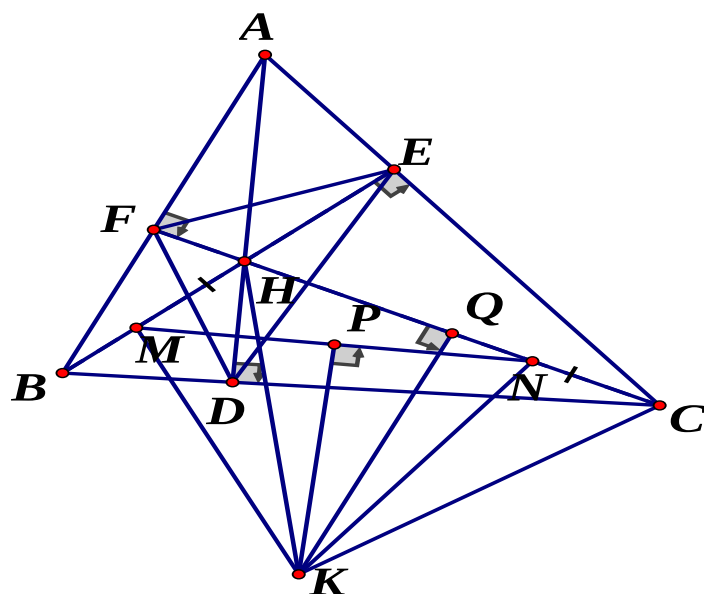
Hoặc gồm ba chữ số 1 và hai chữ số 3

Do đó số các số chấp nhận được gồm 5 chữ số:

$1 + 5 + 5 + 10 = 21$ số

Vậy số các số thỏa mãn đề Câu là: $5 + 13 + 21 = 39$ số

Câu 4.



a) Trước hết chứng minh : $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự có: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Nên $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

Vậy $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$

b) Trước hết chứng minh: $\triangle BDH \sim \triangle BEC \Rightarrow BH \cdot BE = BD \cdot BC$

Và $\triangle CDH \sim \triangle CFB \Rightarrow CH \cdot CF = CD \cdot BC$

$\Rightarrow BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot (BD + CD) = BC^2$

c) Trước hết chứng minh $\triangle AEB \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Mặt khác $\angle EAF = \angle BAC$

Nên $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \angle CED = \angle CBA$

$\Rightarrow \angle AEF = \angle CED$ mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF

Tương tự: DA, FC là phân giác của các góc EDF, DFE

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF

d) Gọi K là giao điểm của các đường trung trực của hai đoạn MN và HC , ta có

$\triangle KMH = \triangle KNC$ (c.c.c) $\Rightarrow KH = KC$ (1)

Mặt khác ta cũng có: $\triangle KCH$ cân tại K nên: $KH = KC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $KHC = KHB \Rightarrow HK$ là phân giác của góc BHC

Vậy K là giao điểm của trung trực đoạn HC và phân giác của góc BHC nên K là điểm cố định

Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là K

Câu 5.

Áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta được:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \quad (*)$$

Cũng theo BĐT Cô si :

$$0 < 3^3 abc \leq (a+b+c)^3 \quad (1) \quad \text{và} \quad 0 < 3^3 \cdot (a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^3 \quad (2)$$

Nhân tương ứng hai vế các BĐT (1) và (2) được:

$$3^6 abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^6$$

$$\text{Hay } \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2} \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra } \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 69. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 \cdot (x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1$

2) Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Câu 2. (2,0 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$; 2) $\frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$

2) Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D.

- 1) Chứng minh $AB^2 = 4AC \cdot BD$
- 2) Kẻ OM vuông góc với CD tại M. Chứng minh $AC = CM$
- 3) Từ M kẻ MH vuông góc với AB tại H. Chứng minh BC đi qua trung điểm của MH.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

1) Ta có:

$$\begin{aligned} x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1 &= x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2)(x^4 + x^2 - 2) + 1 = (x^4 + x^2)^2 - 2(x^4 + x^2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

2)

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a - b)(4a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 4b \end{cases}$$

Do $2a > b > 0$ nên $4a = b$ loại

$$\text{Với } a = b \text{ thì } C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

Câu 2.

1)* Với $x \geq 1$ ta có phương trình: $x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (tm)

* Với $x < 1$ ta có phương trình:

$$x^2 - 3x + 2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{ktm}) \\ x = 3 & (\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$

2) Xét $x = 0$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq 0$

$$\frac{9x}{2x^2+x+3} - \frac{x}{2x^2-x+3} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2x+1+\frac{3}{x}} - \frac{1}{2x-1+\frac{3}{x}} = 8$$

Đặt $2x + \frac{3}{x} = t$ ta có phương trình:

$$\frac{9}{t+1} - \frac{1}{t-1} = 8$$

ĐKXD: $x \neq \pm 1$

$$PT \Rightarrow 8t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{95}{16} = 0 \Rightarrow \text{PTVN}$$

Câu 3.

1. Ta có:

$$x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9(*)$$

Ta thấy: $(2x + 2y + 7)^2 \geq 0$ nên $4y^2 \leq 9 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{4}$ do y nguyên nên $y^2 \in \{0; 1\} \Rightarrow y \in \{0; 1; -1\}$

Với $y = 0$ thay vào $(*)$ ta được $(2x + 7)^2 = 9$ tìm được $x \in \{-2; -5\}$

Với $y = 1$ thay vào $(*)$ ta có: $(2x + 9)^2 = 5$ không tìm được x nguyên

Với $y = -1$ thay vào $(*)$ ta có: $(2x + 5)^2 = 5$ không tìm được x nguyên.

Vậy $(x; y)$ nguyên tìm được $(-2; 0); (-5; 0)$

2. Chia $f(x)$ cho $x^2 + 2$ được thương là $x - 3$ dư $x + 2$

Để $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$ thì $x + 2$ chia hết cho $x^2 + 2$

$$\Rightarrow (x+2)(x-2) \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 - 6 \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow 6 \text{ chia hết cho } x^2 + 2 \text{ mà } x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \in \{3; 6\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$$

Thử lại ta thấy $x = 1; x = -2$ thỏa mãn

Vậy với $x = 1; x = -2$ thì $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$

$$\text{Tương tự } \frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = 4x; \frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1 \Leftrightarrow z = 2y$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 70. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

- Tìm ĐKXĐ và rút gọn P
- Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Câu 2. (4,0 điểm)

- Giải phương trình: $\left(\frac{x+3}{x-2} \right)^2 + 6 \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^2 = \frac{7(x^2-9)}{x^2-4}$
- Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Câu 3. (4,0 điểm)

- Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 - (a+b+c)$ chia hết cho 30.
- Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y = 15$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC phân giác AD. Trên nửa mặt phẳng không chứa A bờ BC, vẽ tia Cx sao cho $\angle BCx = \frac{1}{2} \angle BAC$. Cx cắt AD tại E; I là trung điểm DE. Chứng minh rằng:

- $\triangle ABD \sim \triangle CED$
- $AE^2 > AB \cdot AC$
- $4AB \cdot AC = 4AI^2 - DE^2$
- Trung trực của BC đi qua E

Câu 5. (2,0 điểm) Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = abc$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq 1$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (tm)}$

c) $P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2 \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ **Câu 2.**

a) $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 = \frac{7(x^2-9)}{x^2-4}$

ĐK: $x \neq \pm 2$

Đặt $\frac{x+3}{x-2} = u, \frac{x-3}{x+2} = v$, phương trình đã cho trở thành:

$$u^2 + 6v^2 = 7uv$$

$$\Leftrightarrow u^2 - uv + 6v^2 - 6uv = 0$$

$$\Leftrightarrow u(u-v) - 6v(u-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u-6v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 6v \end{cases}$$

Xét $u = v$ ta có: $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (tm)}$

Xét $u = 6v$ ta có: $\frac{x+3}{x-2} = 6 \cdot \frac{x-3}{x+2}$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 6x^2 - 18x - 12x + 36$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 35x + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 1; 6\}$

b) $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$$

$$= (x+y+z)^3 - 3(x+y)z(x+y+z) - 3xy(x+y+z)$$

$$= (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3(x+y)z - 3xy \right]$$

$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

Câu 3.

a) Học sinh biến đổi được

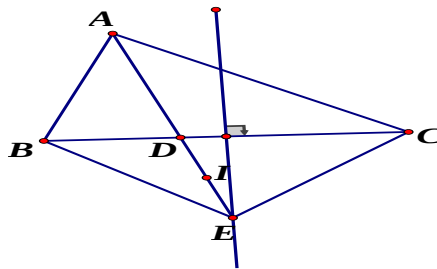
$$a^5 - a = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) + 5a(a-1)(a+1)$$

Lập luận được $a^5 - a:30$; $b^5 - b:30$; $c^5 - c:30$, kết luận

3b) Biến đổi về dạng : $(x+y+2)(x+2y+1)=17=1.17=17.1=-1.-17=-17.-1$

Xét 4 trường hợp $\Rightarrow (x; y) = \{(30; -15); (-18; 17); (12; -15); (-36; 17)\}$

Câu 4.



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CED$ có: $\widehat{BAD} = \widehat{BCE} \left(= \frac{1}{2} \widehat{BAC} \right)$; $\widehat{ADB} = \widehat{CDE}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CED (\text{g.g})$$

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEC$ có:

$$\text{BAD} = \text{EAD} \left(= \frac{1}{2} \text{BAC} \right); \text{ABD} = \text{AEC} (\angle \text{ABD} = \angle \text{CED}) \Rightarrow \triangle \text{ABD} \sim \triangle \text{AEC} (\text{g.g})$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE < AE^2 \quad (AD < AE)$$

Vậy $AE^2 > AB.AC$

c) Ta có: $4AI^2 - DE^2 = 4AI^2 - 4DI^2 = 4 \cdot (AI - DI)(AI + DI) = 4AD \cdot (AI + IE) = 4AD \cdot AE$

Mà $AD.AE = AB.AC$ (câu b) $\Rightarrow 4AB.AC = 4AI^2 - DE^2$

d)

$$+) \Delta ABE \sim \Delta ADC$$

$$\angle BAD = \angle DAC; \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \quad (AD \cdot AE = AB \cdot AC)$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADC(\text{c.g.c}) \Rightarrow \angle AEB = \angle ACB$$

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle ADC$ có: $BDE = ADC$ (đối đỉnh); $BE = AC$

$$\Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle ADC(\text{g.g}) \Rightarrow DBE = DAC = BCE$$

$\Rightarrow \Delta BEC$ cân tại E $\Rightarrow$ Trung trực BC qua E

Câu 5.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}; \frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$$

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+b} = \frac{1}{1+c} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 71. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1(1.5 điểm): Thực hiện phép tính

a) $9^8 \cdot 2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1)$

b) $(2x - 1)^2 + 2(2x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$

c) $\left(2x + 1 - \frac{1}{1-2x}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x-1}\right)$

Câu 2(1.5 điểm): Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^3 - 9x$

b) $4x^2 - 3x - 1$

c) $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

Câu 3. (1.5 điểm):

a) Chứng minh rằng: Nếu $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ thì $A = (a^2 + a + 1)(a^2 + a + 2) - 12$ là hợp số

b) Cho $10a^2 = 10b^2 - c^2$. Chứng minh rằng: $(7a - 3b - 2c)(7a - 3b + 2c) = (3a - 7b)^2$

Câu 4(1.5 điểm): Cho $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a - 4a - 8}$

a) Rút gọn A

b) Tìm số nguyên a để A là số nguyên

Câu 5(3.25 điểm): Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C, vẽ hình vuông AHKE. Gọi P là giao điểm của AC và KE

a) Chứng minh $\triangle ABP$ vuông cân

b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh H, I, E thẳng hàng

c) Tứ giác HEKQ là hình gì? Chứng minh

Câu 6(0.75 điểm): Tính diện tích hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 42\text{cm}$, $A = 45^\circ$; $B = 60^\circ$ và chiều cao của hình thang bằng 18m.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a/ $9^8 \cdot 2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1) = 18^8 - (18^8 - 1) = 18^8 - 18^8 + 1 = 1$

b/ $(2x - 1)^2 + 2(2x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2 = [(2x - 1) + (x + 1)]^2 = (3x)^2 = 9x^2$

c/ $\left(2x + 1 - \frac{1}{1 - 2x}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x - 1}\right) = \left(2x + 1 + \frac{1}{2x - 1}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x - 1}\right) = \frac{4x^2 - 1 + 1}{2x - 1} : \frac{4x - 2 - 4x}{2x - 1}$
 $= \frac{4x^2}{2x - 1} : \frac{-2}{2x - 1} = -2x^2$

Câu 2.

a/ $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x + 3)(x - 3)$

b/ $4x^2 - 3x - 1 = 4x^2 + 4x - x - 1 = (4x^2 + 4x) - (x + 1) = 4x(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(4x - 1)$

c/ $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = ab(a - b) + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c$

$= ab(a - b) + (b^2c - a^2c) + (ac^2 - bc^2) = ab(a - b) + c(b^2 - a^2) + c^2(a - b)$

$= (a - b)[(ab - ac) - (bc - c^2)] = (a - b)[a(b - c) - c(b - c)]$

$= (a - b)(b - c)(a - c)$

Câu 3.

a/ Đặt $a^2 + a + 1 = x$ (1)

$A = x(x + 1) - 12 = x^2 + x - 12 = x^2 - 3x + 4x - 12$

$= (x^2 - 3x) + (4x - 12) = x(x - 3) + 4(x - 3)$

$= (x - 3)(x + 4)$

Thay (1) vào biểu thức A, ta có

$A = (a^2 + a - 2)(a^2 + a + 5)$

$= (a^2 + 2a - a - 2)(a^2 + a + 5)$

$= (a - 2)(a + 2)(a^2 + a + 5)$

Ta thấy $A : a - 1; A : a + 2; A : a^2 + a + 5$

Vậy A là hợp số

$$b/ VT = (7a - 3b)^2 - 4c^2 = 49a^2 - 42ab + 9b^2 - 4c^2$$

$$\text{mà } 10a^2 = 10b^2 + c^2 \text{ nên } c^2 = 10a^2 - 10b^2$$

$$\begin{aligned} \text{nhên } VT &= 49a^2 - 42ab + 9b^2 - 4(10a^2 - 10b^2) \\ &= 49a^2 - 42ab + 9b^2 - 40a^2 + 40b^2 \\ &= 9a^2 - 42ab + 49b^2 = (3a - 7b)^2 = VP \end{aligned}$$

Câu 4.

$$a/ A = \frac{(a+2)^2}{(a^3 - 2a^2) + (4a^2 - 8a) + (4a - 8)} = \frac{(a+2)^2}{(a-2)(a^2 + 4a + 4)} = \frac{(a+2)^2}{(a-2)(a+2)^2} = \frac{1}{a-2}$$

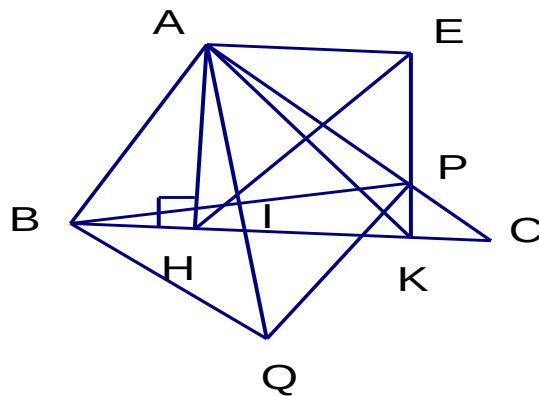
$$b/ \text{Để } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{a-2} \in \mathbb{Z} \text{ nên } a-2 \text{ là ước của}$$

$$\text{Với } a-2 = 1 \text{ thì } a = 3$$

$$\text{Với } a-2 = -1 \text{ thì } a = 1.$$

Vậy $a \in \{-1; 1\}$ thì A là số nguyên

Câu 5.



$$a/ \text{CM được } \triangle BHA = \triangle PEA (\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow AB = AP \text{ mà } \angle BAP = 90^\circ (\text{gt})$$

Vậy $\triangle BPA$ vuông cân

$$b/ \text{Ta có : } HA = HK$$

$$\Rightarrow H \text{ nằm trên đường trung trực của } AK$$

$$\text{Ta có : } AE = KE$$

$$\Rightarrow E \text{ nằm trên đường trung trực của } KA$$

$\triangle PBK$ vuông có $IB = IP$ (t/c đ/c hnh ABQP)

$$\Rightarrow IK = IP = IB (*)$$

Ta có ABQP là hnh(gt), có $BA = AP$ ($\triangle BPA$ vuông cân tại A) $\Rightarrow APQB$ là hình thoi, mà

$$\angle BAP = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$\Rightarrow APQB$ là hình vuông nên $PI = IA(**)$.

Từ (*) và(**) suy ra $IK = IA$ nên I nằm trên đường trung trực của AK

Vậy H, I, E thẳng hàng.

c/ Ta có APQB là hình vuông (cmt) nên $AP = BQ$

$$\text{mà } IK = \frac{PB}{2} \Rightarrow IK = \frac{AQ}{2}$$

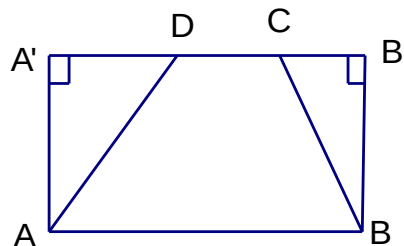
$\triangle AKQ$ có $AI = IQ$ (t/c đ/c hv)

$$\text{Mà } IK = \frac{AQ}{2} \text{ (cmt)} \Rightarrow \triangle AKQ \text{ vuông ở K}$$

$$\Rightarrow AK \perp KQ \text{ mà } AK \perp HE \text{ (EAHK là hv)} \Rightarrow KQ \parallel HE$$

Vậy HEKQ là hình thang

Câu 6.



Qua A và B kẻ AA' và BB' vuông góc với CD.

Tứ giác $ABB'A'$ là hcn và $A'A = BB' = 18\text{m}$

$$\angle A'AB = 90^\circ, \angle DAB = 45^\circ \Rightarrow \angle A'AD = 45^\circ$$

Do đó $\triangle A'AD$ vuông cân

$$\Rightarrow A'D = A'A = 18\text{m}$$

$$\angle B'BA = 90^\circ, \angle CBA = 60^\circ \Rightarrow \angle B'BC = 30^\circ$$

vì thế trong tam giác vuông $B'BC$

$$\text{ta có } B'C = \frac{BC}{2}. \text{ Theo định lí Pi ta go, ta có: } B'C^2 = BC^2 - B'B^2$$

$$\Rightarrow B'C^2 = 4B'C^2 - B'B^2$$

$$\Rightarrow 3B'C^2 = B'B^2$$

$$\Rightarrow B'C = \frac{B'B}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}$$

$$\text{Suy ra : } CD = A'B' - A'D - B'C = 42 - 18 - \frac{18}{\sqrt{3}} = 24 - \frac{18}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot A'A = \frac{1}{2} \left(42 + 24 - \frac{18}{\sqrt{3}} \right) 18 \approx 498,6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 72. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x}{x+1} - \frac{3-3x}{x^2-x+1} + \frac{x+4}{x^3+1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Chứng minh rằng giá trị của A luôn dương với mọi $x \neq -1$

Câu 2. (3 điểm)

- Chứng minh rằng: Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ thì giá trị của đa thức :

$$M = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 16 \text{ là bình phương của một số hữu tỉ}$$

- Giải phương trình : $|x+1| = |x(x+1)|$

Câu 3. (1,5 điểm) Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $P(1) = 0$; $P(3) = 0$; $P(5) = 0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $Q = P(-2) + 7P(6)$

Câu 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Vẽ hình vuông MNPQ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BN và MQ; CM và NP. Chứng minh rằng

- DE song song với AC
- $DE = DF$; $AE = AF$

Câu 5. (1 điểm) Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2} \text{ với } a \geq b \geq c > 0$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \frac{x}{x+1} - \frac{3-3x}{x^2-x+1} + \frac{x+4}{x^3+1} = \frac{x(x^2-x+1) - (x+1)(3-3x) + x+4}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

$$\text{b) Với mọi } x \neq -1 \text{ thì } A = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\text{Vì } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0; \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \neq -1 \Rightarrow A > 0, \forall x \neq -1$$

Câu 2.

$$\text{a) Ta có: } M = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 16$$

$$\text{Đặt } a = x^2 + 10x + 16$$

$$\text{Suy ra } M = a(a+8) + 16 = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$$

$$\text{Vậy } M = (x^2 + 10x + 20)^2 \text{ (dpcm)}$$

$$\text{b) } |x+1| = |x(x+1)|$$

$$\Leftrightarrow |x(x+1)| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x| \cdot |x+1| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x+1| \cdot (|x| - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = 0 \\ |x| - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ |x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Câu 3. Ta có: } P(x) : (x-1), (x-3), (x-5)$$

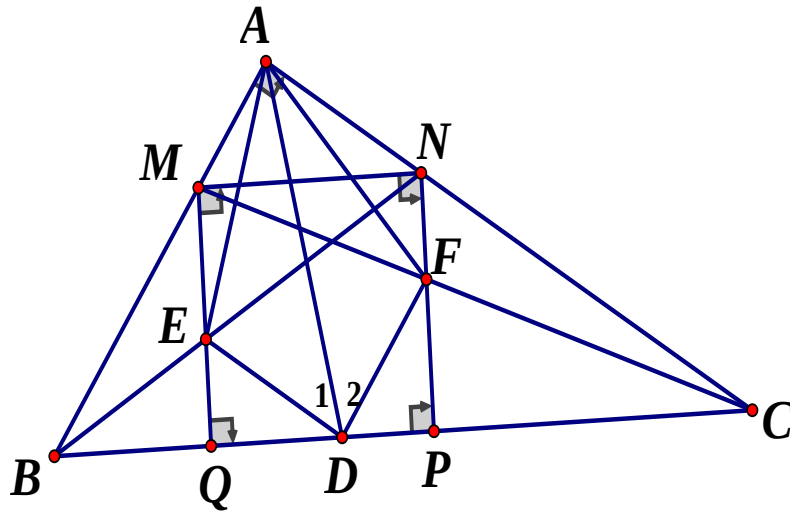
$$\text{Nên } P(x) \text{ có dạng } P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x+a)$$

$$\text{Khi đó: } P(-2) + 7 \cdot P(6) = (-3) \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot (-2+a) + 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (6+a)$$

$$= -105 \cdot (-2+a) + 105 \cdot (6+a)$$

$$= 105 \cdot (2 - a + 6 + a) = 840$$

Câu 4.



a) Chứng minh được $\frac{BE}{EN} = \frac{BQ}{QP} = \frac{BQ}{MQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow DE \parallel NC$ hay $DE \parallel AC$

b) Do $DE \parallel AC \Rightarrow \frac{DE}{CN} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow DE = \frac{BD}{BC} \cdot CN$ (1)

Tương tự: $DF = \frac{CD}{BC} \cdot BM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{DF} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CN}{BM}$

Mà $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ và $\frac{CN}{BM} = \frac{AC}{AB}$ nên $\frac{DE}{DF} = 1 \Rightarrow DE = DF$

Ta có: $D_1 = \angle DAC = \angle DAB = D_2 \Rightarrow \triangle ADE = \triangle ADF \Rightarrow AE = AF$

Câu 5.

Gọi về trái là A, ta có:

$$\begin{aligned}
A - \frac{3}{2} &= \left(\frac{a}{a+b} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{b-c}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(c+a)} \\
&= \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(b-a) + (a-c)}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(c+a)} \\
&= \frac{a-b}{2} \cdot \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} \right) + \frac{a-c}{2} \cdot \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) \\
&= \frac{a-b}{2} \cdot \frac{c-a}{(a+b)(b+c)} + \frac{a-c}{2} \cdot \frac{a-b}{(b+c)(c+a)} \\
&= \frac{(a-b)(a-c)}{2(b+c)} \cdot \left(\frac{-1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right) \\
&= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{2(b+c)(a+b)(c+a)} \geq 0 \quad (\text{Do } a \geq b \geq c \geq 0)
\end{aligned}$$

Vậy $A \geq \frac{3}{2}$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 73. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. Phân tích thành nhân tử:

a) $a^3 + 2a^2 - 13a + 10$

b) $(a^2 + 4b^2 - 5)^2 - 16(ab + 1)^2$

Câu 2. Cho 3 số tự nhiên a, b, c . Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 3 thì $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ chia hết cho 6

Câu 3. a) Cho $a - b = 1$. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

b) Cho $6a - 5b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $4a^2 + 25b^2$

Câu 4. Đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 và thỏa mãn $f(1) = 5; f(2) = 11; f(3) = 21$. Tính $f(-1) + f(5)$

Câu 5. Cho tam giác vuông cân $ABC (AB = AC)$. M là trung điểm của AC , trên BM lấy điểm N sao cho $NM = MA$; CN cắt AB tại E . Chứng minh :

a) Tam giác BNE đồng dạng với tam giác BAN

b) $\frac{NC}{AN} = \frac{NB}{AB} + 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Ta nhận thấy $a = 1, a = 2$ là nghiệm của đa thức nên:

$$a^3 + 2a^2 - 13a + 10 = (a - 1)(a - 2)(a + 5)$$

$$(a^2 + 4b^2 - 5)^2 - 16(ab + 1)^2 = (a^2 + 4b^2 - 5 + 4ab + 4)(a^2 + 4b^2 - 5 - 4ab - 4)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad &= [(a + 2b)^2 - 1][(a - 2b)^2 - 9] \\ &= (a + 2b + 1)(a + 2b - 1)(a - 2b - 3)(a - 2b + 3) \end{aligned}$$

Câu 2.

$$A = a + b + c : 3 \Rightarrow 2A : 6; B = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$$

$$C = B + 2A = a^3 + 3a^2 + 2a + b^3 + 3b^2 + 2b + c^3 + 3c^2 + 2c$$

$$= a(a + 1)(a + 2) + b(b + 1)(b + 2) + c(c + 1)(c + 2)$$

$a(a + 1)(a + 2), b(b + 1)(b + 2), c(c + 1)(c + 2)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 $\Rightarrow C : 6 \Rightarrow B : 6$

Câu 3.

a) Từ $a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \Rightarrow a^2 = 1 + 2b + b^2$, thay vào đẳng thức cần chứng minh ta có:

$$1 + 2b + 2b^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4b^2 + 4b + 1 \geq 0 \Rightarrow (2b + 1)^2 \geq 0. \text{ BĐT này luôn đúng. Vậy } a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (2b + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Đặt $x = 2a, y = -5b$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(3x + y)^2 \leq (x^2 + y^2)(9 + 1) \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{10} \text{ hay } 4a^2 + 25b^2 \geq \frac{1}{10}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow 3y = x \Leftrightarrow -15b = 2a \Leftrightarrow 6a = -45b \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{50} \\ a = \frac{3}{20} \end{cases}$$

Câu 4.

Nhận xét $g(x) = 2x^2 + 3$ thỏa mãn $g(1) = 5; g(2) = 11; g(3) = 21$

$Q(x) = f(x) - g(x)$ là đa thức bậc 4 có 3 nghiệm $x = 1; x = 2; x = 5$

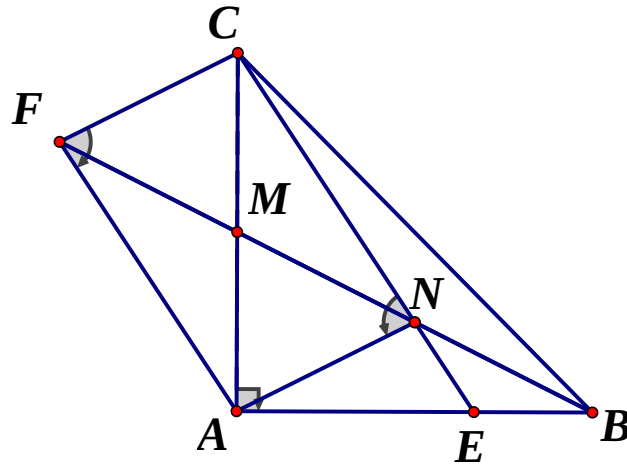
Vậy $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$; ta có:

$$f(-1) = Q(-1) + 2(-1)^2 + 3 = 29 + 24a$$

$$f(5) = Q(5) + 2 \cdot 5^2 + 3 = 173 - 24a$$

$$\Rightarrow f(-1) + f(5) = 202$$

Câu 5.



a) $\triangle ANC$ vuông tại N (vì $AM = MC = MN$)

$$\angle CNM + \angle MNA = 90^\circ \text{ \& } \angle BAN + \angle NAC = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \angle MNA = \angle NAC \Rightarrow \angle CNM = \angle BAN$$

Mặt khác $\angle CNM = \angle BNE$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle BNE = \angle BAN \Rightarrow \triangle BNE \sim \triangle BAN$

b) Trên tia đối tia MN lấy điểm F sao cho $FM = MN$

Tứ giác ANCF là hình chữ nhật (vì có 2 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

$$\Rightarrow CE \parallel AF \Rightarrow \angle AFB = \angle ENB \text{ (đồng vị)} \Rightarrow \triangle BAN \sim \triangle BFA$$

$$\Rightarrow \frac{FA}{AN} = \frac{BF}{BA} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{AB + NB}{AB} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{NB}{AB} + 1 \text{ (đpcm)}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 74. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 2. (5 điểm)

- c) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9
- d) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 3. (3 điểm)

- a) Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$
- b) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.
 Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là một điểm di động trên AC . Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H , cắt tia BA tại O . Chứng minh rằng:

- a) $OA \cdot OB = OC \cdot OH$
- b) $\angle OHA$ có số đo không đổi
- c) Tổng $BM \cdot BH + CM \cdot CA$ không đổi

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

- a) ĐKXĐ: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4) \\ \Leftrightarrow & (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Đặt $b+c-a = x > 0; \quad c+a-b = y > 0; \quad a+b-c = z > 0$

Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3 \Leftrightarrow a = b = c$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a+b$ chia hết cho 3

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$ chia hết cho 9

$$\begin{aligned} \text{b) } n^5 + 1 &: (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1) \\ &\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1) \\ &\Leftrightarrow (n-1)(n+1) : (n+1)(n^2 - n + 1) \\ &\Leftrightarrow n-1 : n^2 - n + 1 \\ &\Rightarrow n(n-1) : n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hay } n^2 - n : n^2 - n + 1 &\Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1) \\ &\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp:

$$+) \quad n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) \quad n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 3.

$$\text{a. Từ } a+b+c=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } (a^{2001} + b^{2001})(a+b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+b) - ab = 1$$

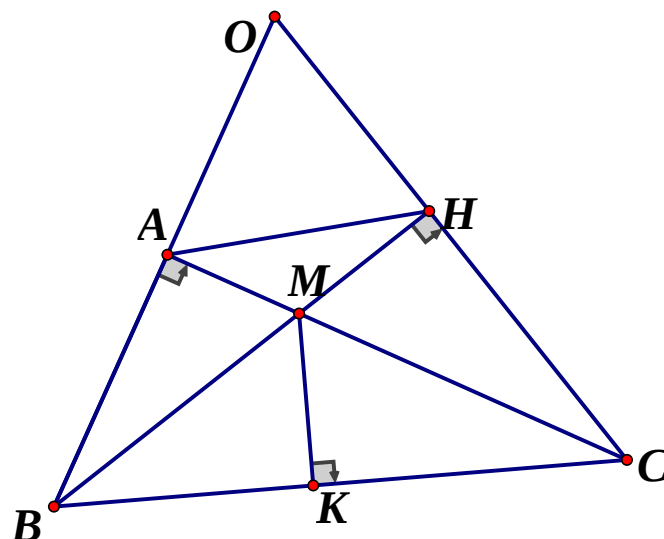
$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(\text{tm}) \\ b = 0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Với } b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(\text{tm}) \\ a = 0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Câu 4.



$$\text{d) } \triangle BOH \sim \triangle COA (g.g) \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OA \cdot OB = OH \cdot OC$$

$$\text{e) } \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OB} \text{ và } O \text{ chung} \Rightarrow \triangle OHA \sim \triangle OBC$$

$$\Rightarrow \angle OHA = \angle OBC \text{ (không đổi)}$$

$$\text{f) Vẽ } MK \perp BC; \triangle BKM \sim \triangle BHC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow BM \cdot BH = BK \cdot BC \quad (3)$$

$$\triangle CKM \sim \triangle CAB (g.g) \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = BC \cdot CK \quad (4)$$

Cộng từng vế của (3) và (4) ta có:

$$BM \cdot BH + CM \cdot CA = BK \cdot BC + BC \cdot CK = BC \cdot (BK + KC) = BC^2 \text{ (Không đổi)}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 75. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm x để A nhận giá trị là một số nguyên

Câu 2. (4 điểm)

- a) Giải phương trình: $\frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1} + 2 = -\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$
b) Giải phương trình: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Câu 3. (3 điểm)

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^{20} + x + 1$
b) Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình

$$\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8 \quad \text{và} \quad 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$$

Câu 4. (3 điểm)

- a) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$
b) Cho x, y thỏa mãn $xy \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Câu 5. (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H

- a) Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle ACE$
b) Chứng minh $BH \cdot HD = CH \cdot HE$
c) Nối D với E, cho biết $BC = a, AB = AC = b$. Tính độ dài đoạn thẳng DE theo a

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.a) ĐKXĐ: $x \neq 2, x \neq 3$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x-9}{(x-3)(x-2)} - \frac{x+3}{x-2} + \frac{2x+4}{x-3} \\ &= \frac{x^2+2x-8}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x+4)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+4}{x-3} \end{aligned}$$

b) Ta có: $A = \frac{x+4}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $x-3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$

Kết hợp với ĐKXĐ ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$

Câu 2.

a) ĐKXĐ: $x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}$

$$\frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1} + 2 = -\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} + 1 + \frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2x + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(3x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \text{ (TMDK)} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ 1; 2; -\frac{2}{3} \right\}$

b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 1)(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -1 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{-1; 2\}$

Câu 3.

a) $x^{20} + x + 1 = x^{20} - x^2 + x^2 + x + 1$

$$= x^2(x^{18} - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x^2(x^9 + 1)(x^9 - 1) + x^2 + x + 1$$

$$= x^2(x^9 + 1)(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x^2 \cdot (x^9 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1) \cdot [x^2 \cdot (x^9 + 1)(x - 1)(x^6 + x^3 + 1) + 1]$$

b) Giải bất phương trình (1): $\frac{3x - 2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8$

$$\Leftrightarrow \frac{3x - 2}{5} - \frac{x}{2} \geq \frac{8}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 4}{10} \geq \frac{8}{10} \Leftrightarrow x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 12$$

Giải bất phương trình (2): $1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{3-x}{4} + \frac{2x-5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{x-1}{12} \Leftrightarrow \frac{x-13}{12} < 0 \Leftrightarrow x < 13$$

Vì x là nghiệm chung của hai bất phương trình (1), (2) $\Rightarrow x = 12$

Câu 4.

a) Ta có:

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$(*) \Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+1)(x+2)$$

VT của (*) là số chính phương ; VP của (*) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên phải có một số bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = \{(-1; 1); (-2; 2)\}$

b) Ta có:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

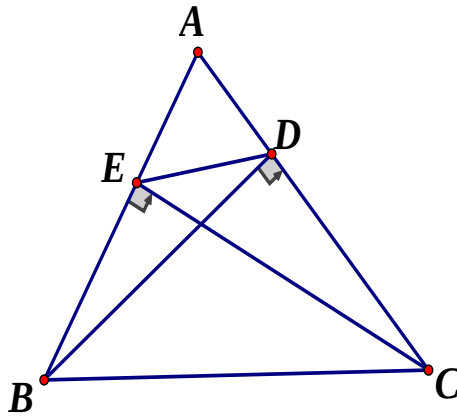
$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2 \cdot (xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0 \Rightarrow$ BĐT (2) luôn đúng nên BĐT (1) đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Câu 5.

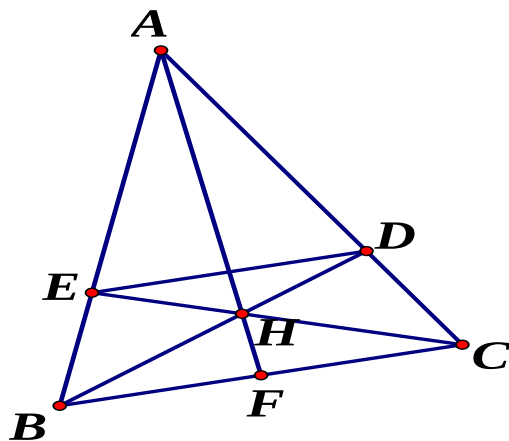


a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: A chung; $\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE$ (g.g)

b) Xét $\triangle BHE$ và $\triangle CHD$ có:

$$\angle BEH = \angle CDH = 90^\circ; \angle BHE = \angle CHD \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle BHE \sim \triangle CHD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow BH \cdot HD = CH \cdot HE$$



c) Khi $AB = AC = b$ thì $\triangle ABC$ cân tại A

$$\text{Suy ra được } DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AC}$$

$$\text{Gọi giao điểm của AH và BC là F} \Rightarrow AF \perp BC, FB = FC = \frac{a}{2}$$

$$\triangle DBC \sim \triangle FAC \Rightarrow \frac{DC}{FC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow DC = \frac{BC \cdot FC}{AC} = \frac{a^2}{2b}$$

$$\Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AC} = \frac{(AC - DC) \cdot BC}{AC} = \frac{\left(b - \frac{a^2}{2b}\right) \cdot a}{b} = \frac{a(2b^2 - a^2)}{2b^2}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 76. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,5 điểm)

- a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 0$
- b) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thỏa mãn $13a + b + 2c = 0$
Chứng tỏ rằng $f(-2).f(3) \leq 0$
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{x-3}{2011} = \frac{x-4}{2010}$ b) $(2x-5)^3 - (x-2)^3 = (x-3)^3$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD. M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Hạ ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AD

- a) Chứng minh $DE \perp CF$
- b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy
- c) Xác định vị trí điểm M trên BD để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD ($AC > BD$). Gọi G, H lần lượt là hình chiếu của C lên AB và AD. Chứng minh

- a) $\triangle ABC \sim \triangle HCG$
- b) $AC^2 = AB.AG + AD.AH$

Câu 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) : 91$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Có: $a^2 + b^2 \geq 2ab; a^2 + c^2 \geq 2ac; b^2 + c^2 \geq 2bc$

Cộng được: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ (1)

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \Leftrightarrow -a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$ (2) Cộng

(1) với (2) được $3ab + 3ac + 3bc \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 0$

b) $f(-2) = 4a - 2b + c; f(3) = 9a + 3b + c$

Có $f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$ nên:

Hoặc: $f(-2) = 0$ và $f(3) = 0 \Rightarrow f(-2).f(3) = 0$ (1)

Hoặc: $f(-2)$ và $f(3)$ là hai số đối nhau $\Rightarrow f(-2).f(3) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) được $f(-2).f(3) \leq 0$

c) $4M = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x + 4y + 4$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3y^2 + 2y + 3$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) + \frac{8}{3}$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$$

Giá trị nhỏ nhất của $4M$ là $\frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ nên

Giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Câu 2.

a) Ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 = \frac{x-4}{2010} - 1 + \frac{x-3}{2011} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} = \frac{x-2014}{2010} + \frac{x-2014}{2011}$$

$$\Leftrightarrow (x-2014)\left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2014$$

b) Đặt $2x - 5 = a; \quad x - 2 = b \Rightarrow a - b = x - 3$

Phương trình đã cho trở thành: $a^3 - b^3 = (a - b)^3$

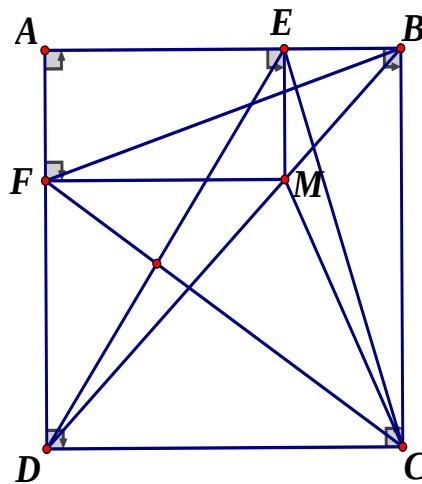
$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ b = 0 \Rightarrow x = 2 \\ a = b \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Câu 3.



- a) Chứng tỏ được $AE = DF$ (cùng bằng MF)

Chứng tỏ được $\triangle CDF = \triangle DAE \Rightarrow FCD = EDA$

Có: EDA và EDC phụ nhau $\Rightarrow ECD$ và EDA phụ nhau hay $CF \perp DE$

- b) Tương tự có $CE \perp BF$

Chứng minh được $CM \perp EF$

Gọi G là giao điểm của FM và BC ; H là giao điểm của CM và EF .

$MCG = EFM$ (hai HCN bằng nhau)

$CMG = FMH$ (đối đỉnh) $\Rightarrow MHF = MGC = 90^\circ$

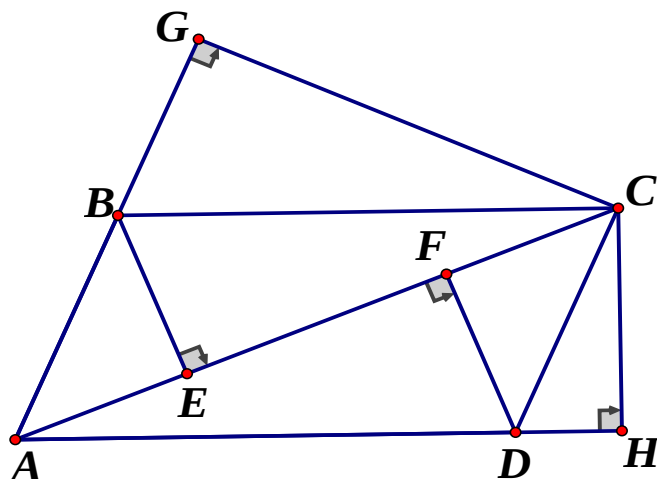
CM, FB, ED là ba đường cao của $\triangle CEF$ nên chúng đồng quy

- c) $(AE - ME)^2 \geq 0$ nên $(AE + ME)^2 \geq 4AE \cdot ME \Leftrightarrow AE \cdot ME \leq \frac{(AE + ME)^2}{4}$

$\Leftrightarrow S_{AEMF} \leq \frac{AB^2}{4}$. Mà AB là hằng số nên S_{AEMF} lớn nhất $\Leftrightarrow AE = ME$

Lúc đó M là trung điểm của BD

Câu 4.



a) Chứng tỏ được $\triangle CBG \sim \triangle CDH \Rightarrow \frac{CG}{CH} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{BA}$

Và $\angle ABC = \angle HCG$ (cùng bù với $\angle BAD$) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HCG$

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D trên AC.

$$\triangle AFD \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AF}{AH} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF \cdot AC = AD \cdot AH$$

$$\triangle AEB \sim \triangle AGC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AG \cdot AB$$

Cộng được : $AF \cdot AC + AE \cdot AC = AD \cdot AH + AG \cdot AB$

$$\Leftrightarrow AC \cdot (AF + AE) = AD \cdot AH + AG \cdot AB$$

Chứng tỏ được: $AE = FC$. Thay được:

$$AC \cdot (AF + FC) = AD \cdot AH + AG \cdot AB \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AH + AG \cdot AB$$

Câu 5.

$$A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$$

$$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 7$$

$$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 13$$

Do $(13, 7) = 1$ nên A chia hết cho 91

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 77. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (6 điểm)

1. Giải phương trình sau:

a) $(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013).(x^2 - 5x - 2012)$

b) $|x-1| + |x+3| = 4$

2) Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \text{ với mọi } x, y, z$$

Câu 2. (5 điểm)

1. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư.

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Câu 3. (2 điểm) Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$$

Câu 4. (7 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

1) Chứng minh rằng $\triangle BEC \sim \triangle ADC$. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$

2) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BE . Chứng minh $\triangle BHM \sim \triangle BEC$. Tính số đo của góc AHM

3) Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1)

a) Đặt:
$$\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó, ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

$$S = \left\{ \frac{-2011}{11} \right\}$$

b) Lập bảng xét dấu các nhị thức : $x-1$ và $x+3$

Xét $x < -3$ (1)

Phương trình $\Leftrightarrow 1-x-3-x=4 \Leftrightarrow x=-3$ (không thỏa (1))

Xét $-3 \leq x \leq 1$ (2)

Phương trình $\Leftrightarrow 1-x+x+3=4 \Leftrightarrow 0x=0$ (Thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 1$)

Xét $x \geq 1$ (3)

Phương trình $\Leftrightarrow x-1+x+3=4 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn (3))

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm $-3 \leq x \leq 1$

2) Có $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$ với mọi x, y, z

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + xz)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \quad (\text{dpcm})$$

Câu 2.

1) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$.

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Xét các giá trị riêng của x sao cho $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$

Với $x=2 \Rightarrow f(2) = 2a + b$

Với $x=-2 \Rightarrow f(-2) = -2a + b$

Theo đề Câu, ta có: $\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$

Do đó: $f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

$$2) \quad x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x-5) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x-5} \quad (\text{vì } x=5 \text{ không là nghiệm của phương trình (2)})$$

$$\Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{3}{x-5}. \text{ Vì } x, y \text{ nguyên nên } x-5 \text{ là ước của } 3$$

$$\text{Hay } x-5 \in \{-1; 3; 1; -3\} \text{ hay } x \in \{4; 6; 8; 2\}$$

$$\text{Khi } x=2 \Rightarrow y=0$$

$$\text{Khi } x=4 \Rightarrow y=0$$

Khi $x = 6 \Rightarrow y = 8$

Khi $x = 8 \Rightarrow y = 8$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x, y) \in \{(2, 0); (4, 0); (6, 8); (8, 8)\}$

Câu 3.

$$M = \left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2 \quad (\text{Vi } a+b=1)$$

$$M = \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2$$

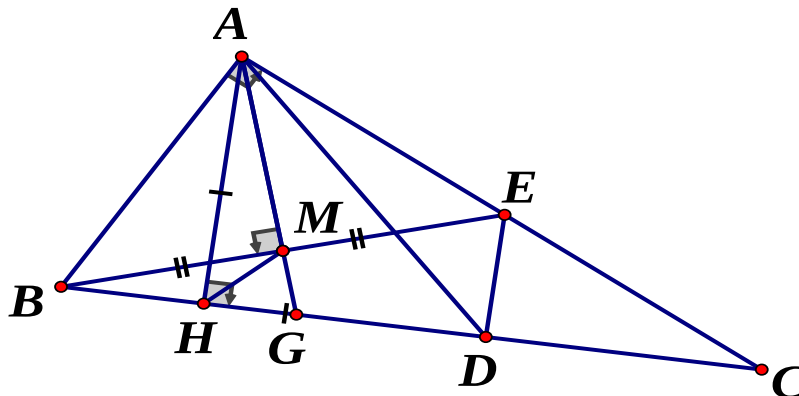
$$M = 4 + \frac{4b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + 4 + \frac{4a}{b} + \frac{a^2}{b^2}$$

$$M = 8 + \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 8 + 2 + 4 \cdot 2 = 18 \text{ (Co-si)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b \text{ \& } a+b=1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy $\text{Min} M = 18 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Câu 4.



a) Chứng minh $\triangle CDE \sim \triangle CAB(g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$

Hai tam giác ADC và BEC có:

C chung; $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$ (cmt) $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BEC$ (c.g.c)

Suy ra $\angle BEC = \angle ADC = 135^\circ$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo gt)

Nên $\angle AEB = 45^\circ$. Do đó tam giác ABE vuông cân tại A. suy ra $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

b) Ta có: $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC}$ (do $\triangle BEC \sim \triangle ADC$)

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

$$\text{Nên } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{AH}{\sqrt{2}AC}$$

$$\text{Mà } \triangle ABH \sim \triangle CBA(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\text{Nên } \frac{BM}{BC} = \frac{BH}{\sqrt{2}AB} = \frac{BH}{BE} \left(BE = \sqrt{2}AB \right)$$

$$\text{Do đó } \triangle BHM \sim \triangle BEC(c.g.c) \Rightarrow \angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$$

c) Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là phân giác BAC

$$\text{Suy ra AG là phân giác BAC suy ra: } \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Mà } \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} (\triangle ABC \sim \triangle DEC) = \frac{AH}{HC} (ED // AH) = \frac{HD}{HC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 78. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,0 điểm)

- Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$
- Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Câu 2. (4,0 điểm)

- Giải phương trình sau:

$$\left(2x^2 + x - 2013 \right)^2 + 4 \left(x^2 - 5x - 2012 \right)^2 = 4 \left(2x^2 + x - 2013 \right) \left(x^2 - 5x - 2012 \right)$$

- Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Câu 3. (4,0 điểm)

- Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư
- Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

- 1) Chứng minh rằng tứ giác AEMD là hình chữ nhật
- 2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng $AC = 2EF$
- 3) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1.1 Ta có:

$$\begin{aligned} & x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

1.2

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\
&= \frac{x \cdot (x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\
&= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Câu 2.

2.1 Đặt $\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2 \cdot (x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

2.2 Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2$$
 (2)

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Câu 3.

3.1 Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề Câu, ta có: $\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$

Do đó : $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + \frac{7}{2}x + 17$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

3.2

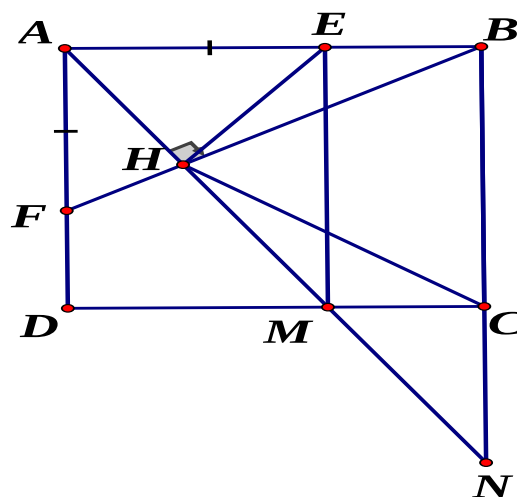
Ta có: $a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0$ (1)

Đặt $\begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) \cdot x^2 - \frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4}(z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (\text{dpcm}) \end{aligned}$$

Câu 4.



1) Ta có: $\triangle ADM = \triangle ABF$ (cùng phụ với $\angle BAH$)

$AB = AD$ (gt); $\angle BAF = \angle ADM = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle ABF$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE$ (gt) nên $AE = DM$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành. Mặt khác $\angle DAE = 90^\circ$ (gt)

Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

2) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} \quad (AB = BC; AE = AF)$$

Lại có: $\angle HAB = \angle HBC$ (cùng phụ với $\angle ABH$)

$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4 \text{ (gt)} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E$ là trung điểm của AB , F là trung điểm của AD

Do đó: $BD = 2EF$ hay $AC = 2EF$ (dfcm)

3) Do $AD \parallel CN$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (\text{dfcm})$$

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} &\geq \frac{(a+b)^2}{x+y} & (**) \\ \Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) &\geq xy(a+b)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 79. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. Chứng minh $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Câu 2. Phân tích đa thức thành nhân tử: $P = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

Câu 3. Cho biểu thức $Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

a) Rút gọn Q

b) Tính giá trị của Q biết $\left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{5}{4}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên

Câu 4. Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình: $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$

Câu 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 25 = y(y+6)$

Câu 6. Cho hình vuông ABCD, M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông AMHN. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, cắt DC ở F.

- Chứng minh rằng $BM = ND$
- Chứng minh rằng N, D, C thẳng hàng
- EMFN là hình gì ?
- Chứng minh: $DF + BM = FM$ và chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi vị trí trên BC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) = 10 \cdot (11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$$

Vì $10 \vdots 10$

Và $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ có chữ số tận cùng (hàng đơn vị) bằng 0

Nên : $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ chia hết cho 10

Vậy : $11^{10} - 1$ chia hết cho 10.

Câu 2.

$$\begin{aligned} & x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \\ &= x^2(y-z) + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y \\ &= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y^2 - z^2) \\ &= (y-z)(x^2 + yz - xy - xz) \\ &= (y-z)[x(x-y) - z(x-y)] \\ &= (y-z)(x-y)(x-z) \end{aligned}$$

Câu 3.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } Q &= 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x} \\
 &= 1 + \frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} \\
 &= 1 + \frac{-2x^2+4x}{x+1} \cdot \frac{1}{x(x-2)} \quad \text{DK: } x \neq 0; -1; 2 \\
 &= 1 + \frac{-2x(x-2)}{(x+1)x(x-2)} = 1 + \frac{-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (ktm)} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q = -3$$

$$\text{c) } Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-3; -2; 1\}$$

Câu 4.

$$\begin{aligned}
 (x+1)(x-1) - (x+2)^2 &= 3 \quad (1) \\
 \Leftrightarrow x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 &= 3 \\
 \Leftrightarrow -4x &= 8 \Leftrightarrow x = -2
 \end{aligned}$$

Để phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm gấp ba lần nghiệm của phương trình

$$(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3 \text{ hay } x = -6$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 6 \cdot (-6) - 5m &= 3 + 3m \cdot (-6) \\
 \Leftrightarrow -5m + 18m &= 39 \Leftrightarrow 13m = 39 \Leftrightarrow m = 3
 \end{aligned}$$

Vậy $m = 3$

Câu 5.

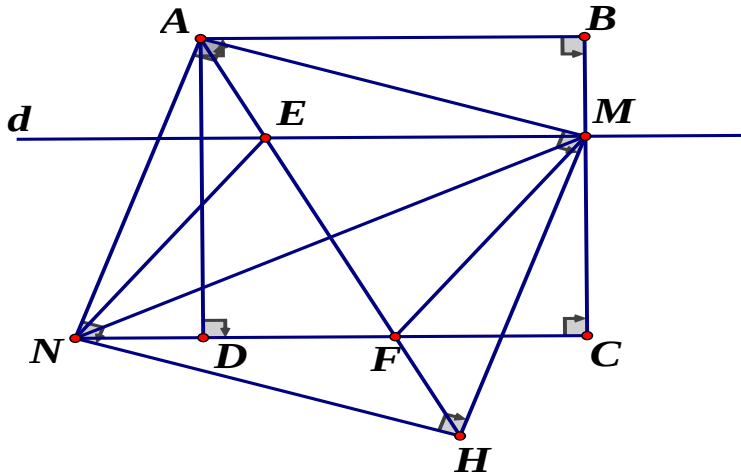
$$\begin{aligned}
 x^2 - 25 &= y(y+6) \Leftrightarrow x^2 - (y+3)^2 = 16 \\
 \Leftrightarrow (x+y+3)(x-y-3) &= (\pm 4) \cdot (\pm 4) = (\pm 2) \cdot (\pm 8) = (\pm 1) \cdot (\pm 16)
 \end{aligned}$$

$x-y$	7	-1	5	1	11	-5	4	2	19	-13
$x+y$	1	-7	5	-11	-1	-5	13	-19	-2	-4

Vậy các cặp số nguyên phải tìm là:

$$(4; -3); (-4; -3); (5; 0); (-5; -6); (5; -6); (-5; 0)$$

Câu 6.



a) $ABCD$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow A_1 + MAD = 90^\circ$ (gt) (1)

Vì $AMHN$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow A_2 + MAD = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A_1 = A_2$

Ta có: $\triangle AND = \triangle AMB$ (c.g.c) $\Rightarrow B = D_1 = 90^\circ$ và $BM = ND$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow D_2 = 90^\circ \Rightarrow D_1 + D_2 = NDC \Rightarrow NDC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN của hình vuông $AMHN$
 $\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$
 $\Rightarrow AH$ là đường trung trực của đoạn MN ,
 mà $E, F \in AH \Rightarrow EN = EM$ và $FM = FN$ (3)

Tam giác vuông $EOM =$ tam giác vuông FON ($OM = ON; N_1 = M_3$)

$\Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow EM = NF$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow EM = NE = NF = FM \Rightarrow MENF$ là hình thoi (5)

d) Từ (5) $\Rightarrow FM = FN = FD + DN$ mà $DN = MB$ (cmt) $\Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông $ABCD$ là a

$P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$ (Vì $MF = DF + MB$)

$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$

Hình vuông $ABCD$ cho trước $\Rightarrow a$ không đổi $\Rightarrow p$ không đổi

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 80. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (6 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

e) Rút gọn P

f) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

g) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

h) Tìm x để $P > 0$

Câu 2. (3 điểm) Giải phương trình:

a) $\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$

b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

c) $||x-2|+3| = 5$

Câu 3. (2 điểm) Giải Câu toán bằng cách lập phương trình:

Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Câu 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

e) Tứ giác AMDB là hình gì ?

f) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD. Chứng minh EF // AC và ba điểm E, F, P thẳng hàng

g) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật MEAF không phụ thuộc vào vị trí điểm P

h) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4\text{cm}$, $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Câu 5. (2 điểm) a) Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

b) Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\text{ĐKXD: } x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{5}{2}; x \neq \frac{-3}{2}; x \neq \frac{7}{4}; x \neq 4$$

$$\text{e) Rút gọn } P = \frac{2x-3}{2x-5}$$

$$\text{f) } |x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+) x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2} \quad ; +) x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$$

$$\text{g) } P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3(\text{tm})$$

$$x-5 = -1 \Rightarrow x = 4(\text{ktm})$$

$$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6(\text{tm})$$

$$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7(\text{tm})$$

Kết luận: $x \in \{3; 6; 7\}$ thì P nhận giá trị nguyên

$$\text{h) } P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$$

Ta có: $1 > 0$

$$\text{Để } P > 0 \text{ thì } \frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Câu 2.

$$\text{a) } \frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \cdot \left[\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)} \right] \quad \text{DK: } x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 15x - 3(x+4)(x-1) = 3 \cdot 12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (\text{TM}) \\ x = -4 \quad (\text{KTM}) \end{cases}$$

$$S = \{0\}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} &= 10 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1 \right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2 \right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3 \right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) &= 0 \Leftrightarrow 123-x=0 \Leftrightarrow x=123 \\ S &= \{123\} \end{aligned}$$

c) $||x-2|+3|=5$

Ta có: $|x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0$ nên $||x-2|+3| = |x-2|+3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5 \Leftrightarrow |x-2|=5-3 \Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 4\}$

Câu 3.

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(\text{km})$ ($x > 0$)

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (\text{km/h})$ $3\text{h}20' = 3\frac{1}{3}(\text{h})$

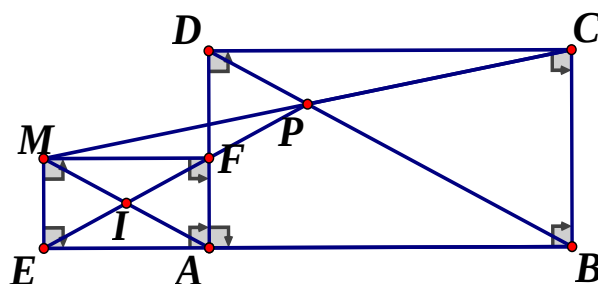
Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên 5km/h là: $\frac{3x}{10} + 5 (\text{km/h})$

Theo đề Câu ta có phương trình: $\left(\frac{3x}{10} + 5 \right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150(\text{km})$

Vậy khoảng cách giữa A và B là 150km

Vận tốc dự định là: $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45 (\text{km/h})$

Câu 4.



- e) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD
 $\Rightarrow PO$ là đường trung bình tam giác CAM

$\Rightarrow AM // PO \Rightarrow AMDB$ là hình thang

f) Do $AM // BD$ nên $OBA = MAE$ (đồng vị)

Tam giác AOB cân ở O nên $OBA = OAB$

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật $AEMF$ thì $\triangle AIE$ cân ở I nên

$$IAE = IEA$$

Từ chứng minh trên : có $FEA = OAB$, do đó: $EF // AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của $\triangle MAC$ nên $IP // AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, F, P thẳng hàng

$$g) \triangle MAF \sim \triangle DBA(g.g) \Rightarrow \frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB} \text{ Không đổi}$$

$$h) \text{ Nếu } \frac{PD}{PB} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{PD}{9} = \frac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$$

$$\text{Nếu } CP \perp BD \text{ thì } \triangle CBD \sim \triangle DCP(g.g) \Rightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{PB}{CP}$$

$$\text{Do đó: } CP^2 = PB \cdot PD \text{ hay } (2,4)^2 = 9 \cdot 16k^2 \Rightarrow k = 0,2$$

$$PD = 9k = 1,8(\text{cm}); \quad PB = 16k = 3,2(\text{cm}) \quad BD = 5(\text{cm})$$

Chứng minh $BC^2 = BP \cdot BD = 16$, do đó: $BC = 4\text{cm}$, $CD = 3\text{cm}$.

$$\text{Câu 5. a) } 2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots) = 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho } 2010 \text{ (1)}$$

$$\text{Vì } 2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) = 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho } 2010 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

$$b) \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2 \cdot (xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Vì } x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$$

$\Rightarrow$ BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 81. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- d) Rút gọn biểu thức A
- e) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
- f) Tìm x để $|A| = A$

Câu 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

Câu 3 (5 điểm)

Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD.

- d) Tứ giác ABED là hình gì ? Tại sao ?
- e) Tính diện tích hình thang ABCD theo a
- f) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Tính góc HDI

Câu 4. (4 điểm)

- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

- d) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Câu 5. (2 điểm)

- c) Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

- d) Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} > \frac{a-d}{a+b}$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

- d) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

e) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \mid (1-2x)$

Từ đó tìm được $x=1$ và $x=0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$

f) Ta có: $|A| = A \Leftrightarrow A > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện: $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Câu 2. a) $x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{cases}$

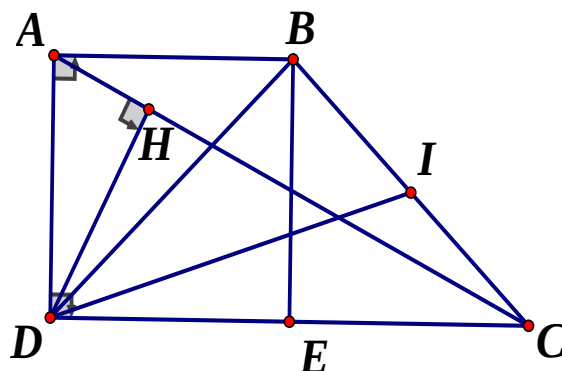
b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Câu 3.



d) Chỉ ra ABED là hình bình hành ($AB \parallel DE, AB = DE$)

Chỉ ra ABED là hình thoi ($AB = AD$)

Chỉ ra $ABED$ là hình vuông ($\angle BAD = 90^\circ$)

e) Chỉ ra $\triangle BEC$ vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, DC = 2a$

$$\text{Diện tích của hình thang } ABCD \text{ là: } S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

f) $\angle ACH = \angle ACD$ (1) (cùng phụ với góc $\angle HDC$)

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BDC$ vuông tại D và C có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BC}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BDC$$

Suy ra $\angle ACD = \angle BDC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle ACH = \angle BDC$

Mà $\angle ACH + \angle BDC = 45^\circ \Rightarrow \angle BDC + \angle BDC = 45^\circ$ hay $\angle BDC = 45^\circ$

Câu 4.

c)

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 \\ &= (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Do } (x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = y = 2$$

Vậy GTNN của A là $1 \Leftrightarrow x = y = 2$

$$\text{d) } B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2 + 1)(x+1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$\text{Do } x^2 + 1 \geq 1 \text{ nên } B = \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3. \text{ Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy GTLN của B là $3 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 5.

c) Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-a+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

d) Ta có:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

$$\text{Xét } \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4$$

$$= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4$$

$$\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 82. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^2 + 2014x + 2013$ 2) $x(x+2)(x^2 + 2x + 2) + 1$

Câu 2. (4 điểm)

1) Tìm a, b biết $\frac{1+2a}{15} = \frac{3b}{23+7a} = \frac{7-3a}{20}$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$

Câu 3. (4 điểm)

1) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ là các số tự nhiên có tổng cộng bằng 2013^{2014}

Chứng minh rằng: $B = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2013}^3$ chia hết cho 3.

2) Cho a và b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$

Chứng minh rằng: $a-b$ và $3a+3b+1$ là các số chính phương.

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC. Gọi I là một điểm di chuyển trên cạnh BC. Qua I, kẻ đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB tại M. Qua I, kẻ đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC tại N

- 1) Gọi O là trung điểm của AI. Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng
- 2) Kẻ MH, NK, AD vuông góc với BC lần lượt tại H, K, D. Chứng minh rằng $MH + NK = AD$
- 3) Tìm vị trí của điểm I để MN song song với BC.

Câu 5. (2 điểm)

Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d), y = (a+c)(b+d), z = (a+d)(b+c)$. Sắp xếp theo thứ tự giảm dần của x, y, z

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- 1) $x^2 + 2014x + 2013$
 $= x^2 + 2013x + x + 2013$
 $= x(x + 2013) + (x + 2013) = (x + 1)(x + 2013)$
- 2) $x(x + 2)(x^2 + 2x + 2) + 1$
 $= (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) + 1$
 $= (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1$
 $= (x^2 + 2x + 1)^2 = (x + 1)^4$

Câu 2.

- 1) Từ $\frac{1+2a}{15} = \frac{7-3a}{20} \Rightarrow 20(1+2a) = 15(7-3a) \Rightarrow a = 1$

Thay $a = 1$ vào tỉ lệ thức $\frac{1+2a}{15} = \frac{3b}{23+7a}$ ta được: $\frac{1+2.1}{15} = \frac{3b}{23+7.1} \Rightarrow b = 2$

Vậy $a = 1, b = 2$

- 2) Ta có:

$$A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013 = x^2 + 2x(y+1) + y^2 + 2y + 1 + y^2 - 6y + 9 + 2003$$

Nhận thấy

$$= (x+y+1)^2 + (y-3)^2 + 2003$$

với mọi x, y ta có: $(x+y+1)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0 \Rightarrow A \geq 2003$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -4, y = 3$

Vậy Giá trị nhỏ nhất của A là 2003 đạt được khi $x = -4, y = 3$

Câu 3.

1) Để thấy $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

$$\text{Xét hiệu } B - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}) = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2013}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2013})$$

$$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2013}^3 - a_{2013}) \text{ chia hết cho 3}$$

Mà $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ là các số tự nhiên có tổng bằng 2013^{2014}

Do vậy B chia hết cho 3.

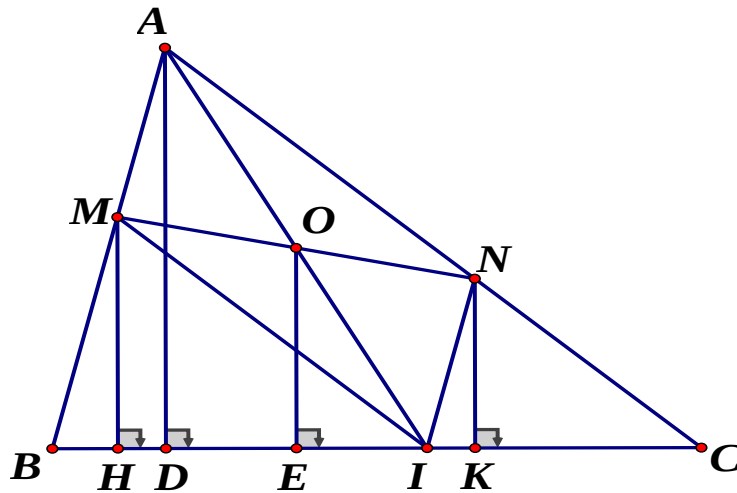
$$2) \text{ Từ } 2a^2 + a = 3b^2 + b \text{ có } (a-b)(3a+3b+1) = a^2$$

$$\text{Cũng có : } (a-b)(2a+2b+1) = b^2. \text{ Suy ra } (a-b)^2 \cdot (2a+2b+1)(3a+3b+1) = (ab)^2$$

Gọi $(2a+2b+1, 3a+3b+1) = d$. Chứng minh được $d = 1$

$\Rightarrow 3a+3b+1$ là số chính phương $\Rightarrow a+b$ là số chính phương (đpcm)

Câu 4.



1) Ta có: $IM \parallel AC, IN \parallel AB \Rightarrow AMIN$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN$ cắt AI tại trung điểm mỗi đường. Mà O là trung điểm AI

$\Rightarrow M, O, N$ thẳng hàng (đpcm)

2) Kẻ OE vuông góc với BC . Chứng minh $MHKN$ là hình thang vuông.

Ta có: O là trung điểm MN mà $OE \parallel MH \parallel NK$. Suy ra OE là đường trung bình của hình thang vuông $MNKH$ nên $MH + NK = 2OE$ (1)

Xét $\triangle ADI$ có O là trung điểm của AI và $OE \parallel AD$. Suy ra OE là đường trung bình của $\triangle ADI$ nên $AD = 2OE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $MH + NK = AD$ (đpcm)

3) Ta có: $MN \parallel BC \Leftrightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ABC$ (do O là trung điểm AI)

$\Leftrightarrow I$ là trung điểm BC (Vì $MI \parallel AC, MA = MB$)

Vậy để MN song song với BC thì I là trung điểm BC .

Câu 5. Xét hiệu $x - y = (a + b)(c + d) - (a + c)(b + d) = (d - a)(b - c)$

Vì $b > a, b < c$ nên $(d - a)(b - c) < 0$. Suy ra $x < y$ (1)

Xét hiệu $y - z = (a + c)(b + d) - (a + d)(b + c) = (a - b)(d - c)$

Vì $b > a, c < d$ nên $(a - b)(d - c) < 0$. Suy ra $y < z$ (2)

Từ (1) và (2) ta sắp xếp theo thứ tự giảm dần là $z > y > x$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 83. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

2. Rút gọn biểu thức sau:
$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right).$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

2) Chứng minh rằng:

$$a(b - c)(b + c - a)^2 + c(a - b)(a + b - c)^2 = b(a - c)(a + c - b)^2$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$

3) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.**

1.2 Ta có:

$$\begin{aligned} & x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

1.2

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2-x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\ &= \frac{x \cdot (x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\ &= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Câu 2.

a. Đặt $\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

$$\text{b. Ta có: } y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y \quad (1)$$

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x + 2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Câu 3.

3.1 Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

$$\text{Khi đó: } f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + ax + b$$

Theo đề Câu, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

3.2

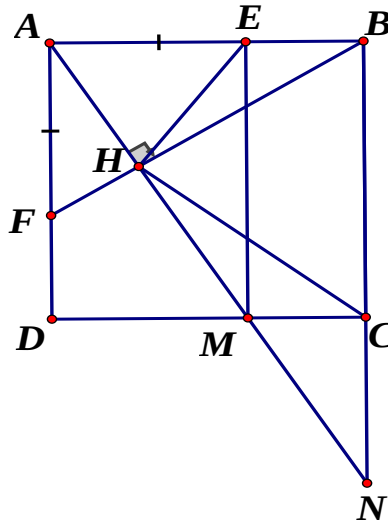
$$\text{Ta có: } a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+z}{2} \\ b = \frac{x+y}{2} \\ c = \frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x+y)(x-y)z^2 \\
&= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\
&= \frac{1}{4} (x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\
&= \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (\text{dfcm})
\end{aligned}$$

Câu 4.



1) Ta có: $\angle DAM = \angle ABF$ (cùng phụ với $\angle BAH$)

$AB = AD$ (gt); $\angle BAF = \angle ADM = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE$ (gt) nên $AE = DM$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành. Mặt khác $\angle DAE = 90^\circ$ (gt)

Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật

2) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH}$ hay $\frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH}$ ($AB = BC$; $AE = AF$)

Lại có: $\angle HAB = \angle HBC$ (cùng phụ với $\angle ABH$)

$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE} \right)^2$, mà $\frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4$ (gt) $\Rightarrow \left(\frac{BC}{AE} \right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$

$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E$ là trung điểm của AB , F là trung điểm của AD

Do đó: $BD = 2EF$ hay $AC = 2EF$ (đpcm)

3) Do $AD \parallel CN$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(**)$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 84. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1 (3 điểm) Chứng minh rằng:

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 2. (3 điểm)

a) Rút gọn biểu thức : $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9}$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ ($x, y, z \neq 0$). Tính $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Câu 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh rằng $AB = CK$

Câu 4. (1 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có): $M = 4x^2 + 4x + 5$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$

Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17

b) Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ với mọi } n \text{ lẻ}$$

$$\text{Ta có: } 19^{19} + 69^{19} = (19+69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$$

$$= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) \text{ chia hết cho 44}$$

Câu 2.

a) Ta có: *) $x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x+3) - 2(x+3) = (x-2)(x+3)$

$$\begin{aligned} *) \quad x^3 - 4x^2 - 18x + 9 &= x^3 + 3x^2 - 7x^2 - 21x + 3x + 9 \\ &= x^2(x+3) - 7x(x+3) + 3(x+3) \\ &= (x+3)(x^2 - 7x + 3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x^2 - 7x + 3)} = \frac{x-2}{x^2 - 7x + 3} \quad (x \neq -1; x^2 - 7x + 3 \neq 0)$$

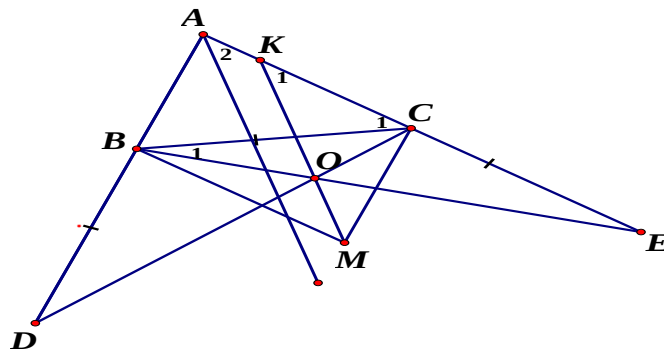
b) Vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x^3} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y} + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = -3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 3 \cdot \frac{1}{xyz}$$

$$\text{Do đó: } xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = 3 \Leftrightarrow \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$$

Câu 3.



Vẽ hình bình hành ABMC ta có: $AB = CM$

Để chứng minh $AB = KC$ ta cần chứng minh $KC = CM$.

Thật vậy, xét tam giác BCE có $BC = CE$ (gt) $\Rightarrow \triangle CBE$ cân tại C $\Rightarrow \angle B_1 = \angle E$

Vì góc C_1 là góc ngoài của tam giác BCE

$$\Rightarrow C_1 = B_1 + E \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}C_1 \text{ mà } AC // BM \text{ (ta vẽ)} \Rightarrow C_1 = CBM \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}CBM \text{ nên } BO \text{ là tia}$$

phân giác của CBM. Hoàn toàn tương tự ta có CD là tia phân giác của BCM. Trong tam giác BCM, OB, CO, MO đồng quy tại O

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của CMB

Mà BAC, BMC là hai góc đối của hình bình hành BMCA $\Rightarrow MO //$ với tia phân giác của góc A theo giả thiết tia phân giác của góc A còn song song với OK

$\Rightarrow K, O, M$ thẳng hàng

Ta lại có: $M_1 = \frac{1}{2}BMC$ (cmt); $A = M \Rightarrow M_1 = A_2$ mà $A_2 = K_1$ (2 góc đồng vị)

$\Rightarrow K_1 = M_1 \Rightarrow \triangle CKM$ cân tại C $\Rightarrow CK = CM$.

Kết hợp $AB = CM \Rightarrow AB = CK$ (dpcm)

Câu 4.

$$\text{Ta có } M = 4x^2 + 4x + 5 = (4x^2 + 4x + 1) + 4 = (2x + 1)^2 + 4$$

$$\text{Vì } (2x + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$$

$$\text{Vậy } \min_M = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 85. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1.

- Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$
- Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số
- Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 2.

- Giải phương trình: $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} + \frac{x-3}{2010} + \dots + \frac{x-2012}{1} = 2012$
- Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$.

Câu 3.

- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$
- Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác

$$\text{Chứng minh: } \frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} \geq a+b+c$$

Câu 4. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. M là giao điểm của CE và DF.

- Chứng minh: Tứ giác EFGH là hình vuông
- Chứng minh $DF \perp CE$ và ΔMAD cân
- Tính diện tích ΔMDC theo a.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (x-y)^2 + 4(x-y) - 5 &= (x-y)^2 + 4(x-y) + 4 - 9 \\ &= (x-y-2)^2 - 3^2 = (x-y+5)(x-y-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \text{Ta có: } n^3 + n + 2 &= n^3 + 1 + n + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1) \\ &= (n+1)(n^2 - n + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Do } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ nên } \begin{cases} n+1 > 1 \\ n^2 - n + 2 > 1. \end{cases} \text{ Vậy } n^3 + n + 2 \text{ là hợp số.}$$

$$\text{c)} \quad \text{Gọi hai số lần lượt là } a^2 \text{ và } (a+1)^2$$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + (a+1)^2 + a^2 \cdot (a+1)^2 &= a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \\ &= (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a+1) + 1 \end{aligned}$$

$= (a^2 + a + 1)^2$ là một số chính phương lẻ vì $a^2 + a = a(a+1)$ là số chẵn nên $a^2 + a + 1$ là số lẻ

Câu 2.

a) Phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{x-1}{2012} - 1 + \frac{x-2012}{2011} - 1 + \frac{x-3}{2010} - 1 + \dots + \frac{x-2012}{1} - 1 + 2012 = 2012$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2013}{2012} + \frac{x-2013}{2011} + \frac{x-2013}{2010} + \dots + \frac{x-2013}{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2013) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \dots + \frac{1}{1} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2013$$

$$\text{b)} \quad a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) = a^2(a-1) + b^2(b-1) + c^2(c-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 \Rightarrow a, b, c \text{ nhận hai giá trị là 0 hoặc 1}$$

$$\Rightarrow b^{2012} = b^2; c^{2013} = c^2 \Rightarrow S = a^2 + b^{2012} + c^{2013} = 1$$

Câu 3.

a) Ta có: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 - 8x - 2y + 18$

$$A = 2[(x+y)^2 - 4(x+y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$$

$$A = 2(x+y-2)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Vậy } \text{Min} A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

b) Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên: $a + b - c > 0; -a + b + c > 0; a - b + c > 0$

Đặt $x = -a + b + c > 0; y = a - b + c > 0; z = a + b - c > 0$

Ta có: $x + y + z = a + b + c; a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

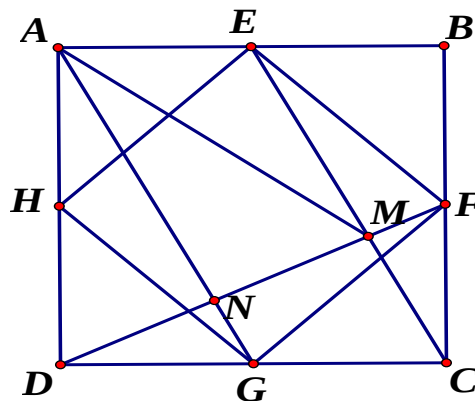
$$\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} = \frac{(y+z)(x+z)}{4z} + \frac{(x+z)(x+y)}{4x} + \frac{(x+y)(y+z)}{4y}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + 3x + 3y + 3z \right) = \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{xy}{z} + 2 \cdot \frac{yz}{x} + 2 \cdot \frac{xz}{y} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[3(x+y+z) + \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{z}{2} \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{4} \cdot [3(x+y+z) + x+y+z] = x+y+z$$

Mà $x + y + z = a + b + c$ nên suy ra điều phải chứng minh

Câu 4.

a) Chứng minh EFGH là hình thoi

Chứng minh có 1 góc vuông nên EFGH là hình vuông

b) $\triangle BEC = \triangle CFD \Rightarrow \angle ECB = \angle FDC$ mà $\triangle CDF$ vuông tại C nên:

$$\Rightarrow \angle CDF + \angle DFC = 90^\circ \Rightarrow \angle DFC + \angle ECB = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMF \text{ vuông tại } M \text{ hay } CE \perp DF$$

Gọi N là giao điểm của AG và DF. Chứng minh tương tự: $AG \perp DF$

$\Rightarrow GN // CM$ mà G là trung điểm của DC nên N là trung điểm DM .

Trong $\triangle MAD$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến

$\Rightarrow \triangle MAD$ cân tại A

$$c) \triangle CMD \sim \triangle FCD (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{CMD}}{S_{FCD}} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{CMD} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \cdot S_{FCD}$$

$$\text{Mà } S_{FCD} = \frac{1}{2} CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2.$$

$$\text{Vậy } S_{CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2$$

Trong $\triangle DCF$ theo định lý Pytago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2} BC^2\right) = CD^2 + \frac{1}{4} CD^2 = \frac{5}{4} CD^2$$

$$\text{Do đó: } S_{MCD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4} CD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{5} a^2$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 86. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$
2. Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Câu 2. (4,0 điểm)

3. Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

4. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Câu 3. (4,0 điểm)

- 4) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư
- 5) Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

- 6) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
- 7) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$
- 8) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1.3 Ta có:

$$\begin{aligned} & x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

1.2

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\
&= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\
&= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \\
&= \frac{x \cdot (x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x^2} \\
&= \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x + 1}{2x}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x + 1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Câu 2.

a. Đặt $\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
2x^2 + x - 2013 &= 2 \cdot (x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024 \\
\Leftrightarrow 11x &= -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

b. Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$$(x + 2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x + 2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Câu 3.3.1 Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

Khi đó : $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

$$\text{Theo đề bài, ta có: } \begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\text{Do đó : } f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + \frac{7}{2}x + 17$$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

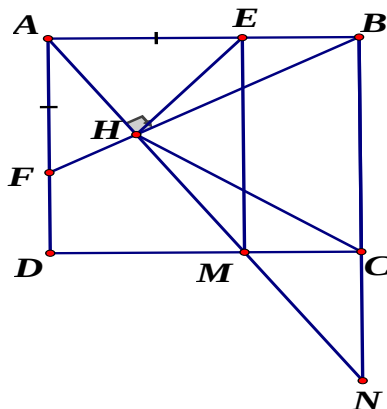
$$\mathbf{3.2} \text{ Ta có: } a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+z}{2} \\ b = \frac{x+y}{2} \\ c = \frac{y+z}{2} \end{cases}.$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) x^2 - \frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4}(z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (dpcm) \end{aligned}$$

Câu 4.



4) Ta có: $DAM = ABF$ (cùng phụ với BAH)

$$AB = AD \quad (gt); BAF = ADM = 90^\circ \text{ (ABCD là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow DM = AF, \text{ mà } AF = AE(gt) \text{ nên } AE = DM$$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành. Mặt khác $DAE = 90^\circ(gt)$

Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

5) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} \text{ (} AB = BC; AE = AF \text{)}$$

Lại có: $HAB = HBC$ (cùng phụ với ABH)

$$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH(c.g.c)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4(gt) \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB, F \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\text{Do đó: } BD = 2EF \text{ hay } AC = 2EF(dfcm)$$

6) Do $AD \parallel CN(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (dpcm)$$

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} &\geq \frac{(a+b)^2}{x+y} & (**) \\ \Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) &\geq xy(a+b)^2 \\ \Leftrightarrow (bx - ay)^2 &\geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 87. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

a) Giải phương trình : $(x^2 - 4x)^2 + 2(x - 2)^2 = 43$

b) Cho phương trình: $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1}$

Tìm giá trị m để phương trình vô nghiệm.

Câu 2. (2 điểm) Chứng minh rằng:

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ và $a + b + c = abc$ thì ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Câu 3. (2 điểm)

Cho $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng $S > \frac{7}{12}$

Câu 4. (4 điểm) Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị thì ta vẫn được một số chính phương.

Câu 5. (6 điểm)

1. Cho tam giác ABC nhọn. Dựng ra phía ngoài hai tam giác đều ABE ; ACF , lại dựng hình bình hành $AEPF$. Chứng minh rằng PBC là tam giác đều

2. Cho tam giác ABC có $BC = 15cm$, $AC = 20cm$, $AB = 25cm$.

a) Tính độ dài đường cao CH của tam giác ABC

b) Gọi CD là đường phân giác của $\triangle ACH$. Chứng minh $\triangle BCD$ cân

c) Chứng minh: $BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$

Câu 6. (2 điểm)

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \leq 1 + ab$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) $(x^2 - 4x)^2 + 2(x - 2)^2 = 43 \Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x + 4) = 43$

Đặt $x^2 - 4x = t$. Điều kiện : $t \geq -4$. Khi đó ta có phương trình:

$$t^2 + 2t - 35 = 0 \Leftrightarrow (t + 7)(t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7(ktm) \\ t = 5(tm) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{5; -1\}$$

$$\text{b) ĐK của phương trình: } \frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-m \neq 0 \Rightarrow x \neq m \\ x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow (x+2)(x-1) = (x+1)(x-m) \Rightarrow mx = 2-m(**)$$

$$\text{Với } m=0 \text{ thì PT } (**) \text{ có dạng } 0x = 2(VN)$$

$$\text{Với } m \neq 0 \text{ thì PT } (*) \text{ có nghiệm } x = \frac{2-m}{m}$$

$$\text{Nghiệm } x = \frac{2-m}{m} \text{ là nghiệm của PT } (*) \text{ khi nó phải thỏa mãn điều kiện } \begin{cases} x \neq m \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Tức là: } \frac{2-m}{m} \neq 1 \Rightarrow 2-m \neq m \Leftrightarrow m \neq 1$$

$$\frac{2-m}{m} \neq m \Rightarrow m^2 + m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

$$\text{Như vậy PT } (*) \text{ vô nghiệm với các giá trị của } m \in \{-2; 0; 1\}$$

Câu 2.

$$\text{Theo giả thiết: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \text{ nên } a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{a+b+c}{abc} \right) = 4$$

$$\text{Vì } a+b+c = abc(gt) \Rightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2(dfcm)$$

Câu 3. Ta có: $A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right)$

Thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ nhất trong từng nhóm ấy ta được

$$\left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) > \frac{1}{150} \cdot 50 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right) > \frac{1}{200} \cdot 50 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right) > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \frac{1}{153} + \dots + \frac{1}{200} \right) > \frac{7}{12}$$

Câu 4. Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm $a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$

Ta có:

$$\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}, 31 < k < m < 100$$

Do đó: $m^2 - k^2 = 1353$

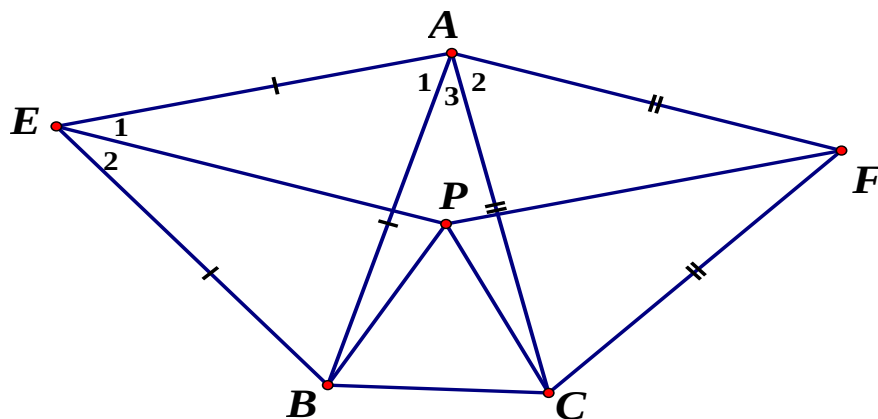
$$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123 \cdot 11 = 41 \cdot 33 \quad (k+m < 200)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+k=123 \\ m-k=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=67 \\ m=57 \end{cases} (TM)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+k=41 \\ m-k=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases} (KTM)$$

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd} = 3136$

Câu 5.1.



Ta có: $AEPF$ là hình bình hành nên $AEP = AFP$

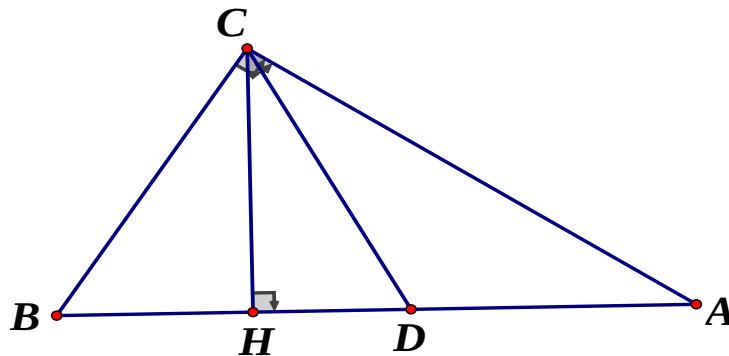
Xét $\triangle EPB$ và $\triangle FPC$ có:

$$EB = FP (= AE); EP = FC (= AF); \angle EPB = \angle FPC (\text{vì } 60^\circ - AEP = 60^\circ - AFP) \\ \Rightarrow \triangle EPB = \triangle FPC (c.g.c) \Rightarrow PB = PC \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \angle EAP + AEP = 180^\circ \Rightarrow A_3 + E_1 = 60^\circ \text{ mà } E_1 + E_2 = 60^\circ \Rightarrow A_3 = E_2 \\ \Rightarrow \triangle EPB = \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow PB = BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $PB = PC = BC$. Vậy $\triangle PBC$ đều

2.



a) Dùng định lý Pytago đảo chứng minh được: $\triangle ABC$ vuông tại C

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12 \text{ cm.}$$

b) Dễ dàng tính được: $HA = 16 \text{ cm}, BH = 9 \text{ cm}$

CD là tia phân giác của $\triangle ACH$ nên suy ra $AD = 10 \text{ cm}, HD = 6 \text{ cm}$.

Do đó: $BC = BD (= 15 \text{ cm})$

Vậy $\triangle BDC$ cân tại B

c) Xét các $\triangle$ vuông: CBH, CAH

Ta có:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 (\text{Pytago})$$

$$CD^2 = DH^2 + CH^2 (\text{Pytago})$$

$$BD^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2 (\text{Pytago})$$

$$\text{Từ đó suy ra } BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$$

Câu 6.

Xét 2 số dương :

$$\text{Xét: } a^2 + b^2 \leq 1 + ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2-ab) \leq (a+b) \quad (\forall a+b > 0)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3 \leq a+b$$

$$\Leftrightarrow (a^3+b^3)(a^3+b^3) \leq (a+b)(a^5+b^5) \quad (\forall a^3+b^3 = a^5+b^5)$$

$$\Leftrightarrow a^6+2a^3b^3+b^6 \leq a^6+ab^5+a^5b+b^6$$

$$\Leftrightarrow 2a^3b^3 \leq ab^5+a^5b$$

$$\Leftrightarrow ab(a^4-2a^2b^2+b^4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a^2-b^2)^2 \geq 0 \text{ đúng } \forall a, b > 0$$

Vậy : $a^2+b^2 \leq 1+ab$ với a, b dương và $a^3+b^3 = a^5+b^5$

ĐỀ SỐ 88. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,5 điểm)

Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ với $a, b, c \neq 0$ và $M = \frac{b^2c^2}{a} + \frac{c^2a^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c}$

Chứng minh rằng: $M = 3abc$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Chứng minh rằng $(x+2)^3 > 1+x+x^2+x^3$ với mọi giá trị x

b) Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: $1+x+x^2+x^3 = y^3$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

a) Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên

b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC . Từ điểm M thuộc cạnh AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và BC cắt BC tại E và AB tại F . Hãy xác định vị trí của M trên AC sao cho hình bình hành $BEMF$ có diện tích lớn nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

Đặt $\frac{1}{a} = x; \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z$ thì $x + y + z = 0$

$$\text{Ta có: } M = \frac{b^2 c^2}{a} + \frac{c^2 a^2}{b} + \frac{a^2 b^2}{c} = a^2 b^2 c^2 \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = a^2 b^2 c^2 \cdot (x^3 + y^3 + z^3)$$

$$\text{Từ: } x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = (-z)^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 - 3xyz = -z^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\text{Vậy } M = a^2 b^2 c^2 \cdot 3xyz = a^2 b^2 c^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = 3abc$$

Câu 2.

$$\text{a) Ta có: } (x+2)^3 - (1+x+x^2+x^3) = 5x^2 + 11x + 7 = 5\left(x + \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{19}{20} > 0$$

$$\text{suy ra } (x+2)^3 > 1+x+x^2+x^3$$

$$\text{b) Ta nhận thấy } 1+x+x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x$$

$$\text{Nên } x^3 < 1+x+x^2+x^3 = y^3$$

$$\text{Theo câu a): } (x+2)^3 > 1+x+x^2+x^3$$

$$\text{Suy ra: } x^3 < y^3 < (x+2)^3$$

$$\Rightarrow y^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow 1+x+x^2+x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(-1; 0); (0; 1)$

Câu 3.

$$\text{Ta có: } \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

Muốn A nhận giá trị nguyên thì x^2+1 phải là ước của 3. Mà $U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

$$\text{- Nếu } x^2+1=1 \Rightarrow x=0 \text{ thì } A=3$$

$$\text{- Nếu } x^2+1 = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \text{ thì không có giá trị } x \text{ thỏa mãn}$$

- Nếu $x^2 + 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ thì $A = 1$

Vậy tập hợp các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên là $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

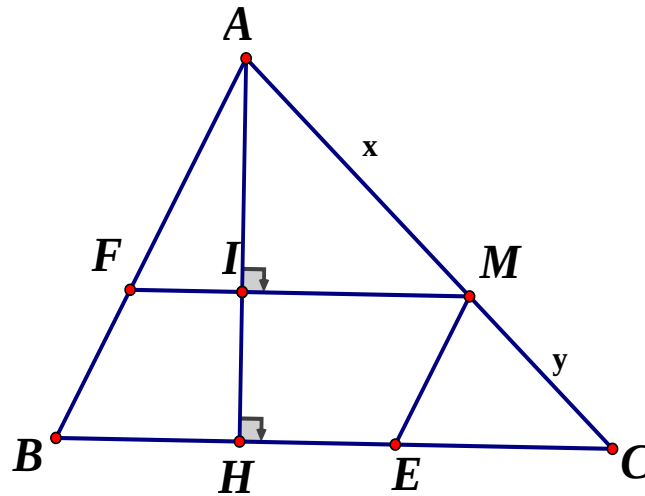
b)

$A = \frac{3}{x^2 + 1}$ nhận giá trị lớn nhất khi $x^2 + 1$ nhận giá trị nhỏ nhất

Mà $x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 1_{\min}$. Khi đó $A = 3$.

Vậy $A_{\max} = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 4.



Ta có tứ giác $BEMF$ là hình bình hành. Kẻ $AH \perp BC$, AH cắt MF tại I
 $AI \perp MF$. Gọi S' là diện tích hình bình hành $BEMF$ và S là diện tích tam giác ABC

$$S' = IH \cdot MF \text{ và } S = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

$$\text{Ta có: } \frac{S'}{S} = \frac{IH \cdot MF}{\frac{1}{2} BC \cdot AH} = 2 \frac{MF}{BC} \cdot \frac{IH}{AH} \quad (1)$$

Đặt $AM = x, MC = y$

$$\text{Vì } MF \parallel BC \text{ nên ta có: } \frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{x+y}; \frac{IH}{AH} = \frac{MC}{AC} = \frac{y}{x+y}$$

$$\text{Thay vào (1) ta có: } \frac{S'}{S} = 2 \cdot \frac{x}{x+y} \cdot \frac{y}{x+y} = \frac{2xy}{(x+y)^2}$$

Vì x, y là hai số không âm nên ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{2xy}{4xy} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S'}{S} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S' \leq \frac{1}{2} S$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$, tức là khi M là trung điểm cạnh AC thì diện tích hình bình hành $BEMF$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2}S$ không đổi

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 89. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên x thì biểu thức $A = x^5 - x$ luôn chia hết cho 30.

Câu 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$
- 2) $6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$
- 3) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$

Câu 3.

- a) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x - 1}$ nhận giá trị nguyên
- b) Tìm giá trị của a và b để biểu thức $C = a^2 - 4ab + 5b^2 - 2b - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 4. Chứng minh rằng: $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 \geq 1$

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và BC .

- a) Tính diện tích tứ giác $AMND$.
- b) Phân giác góc CDM cắt BC tại E . Chứng minh $DM = AM + CE$

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, BD, CE là hai đường cao của tam giác cắt nhau tại điểm H . Chứng minh rằng:

- a) $HD.HB = HE.HC$
- b) $\triangle HDE \sim \triangle HCB$
- c) $BH.BD + CH.CE = BC^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$A = x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)x(x+1)(x^2 + 1)$$

Vì $(x-1)x(x+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên $A \vdots 6$ (1)

+) Nếu $x \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$

+)Nếu $x:5$ dư 1 thì $(x-1):5 \Rightarrow A:5$

+)Nếu $x:5$ dư 4 thì $(x+1):5 \Rightarrow A:5$

+)Nếu $x:5$ dư 2 hoặc 3 thì $x^2:5$ dư 4 $\Rightarrow (x^2+1):5 \Rightarrow A:5$

Vậy $A:5$ với mọi x và $(5,6)=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A:30$

Câu 2.

$$1) a(x^2+1) - x(a^2+1) = ax^2 + a - a^2x - x = ax(x-a) - (x-a) = (ax-1)(x-a)$$

$$\begin{aligned} 2) 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3 &= 6x^3 + 6x^2 + 7x^2 + 7x - 3x - 3 \\ &= 6x^2(x+1) + 7x(x+1) - 3(x+1) = (x+1)(6x^2 + 7x - 3) \\ &= (x+1)(6x^2 + 9x - 2x - 3) = (x+1)[3x(2x+3) - (2x+3)] \\ &= (x+1)(2x+3)(3x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (x^2+x)^2 - 2(x^2+x) - 15 &= (x^2+x)^2 - 2(x^2+x) + 1 - 16 \\ &= (x^2+x-1)^2 - 4^2 = (x^2+x-5)(x^2+x+3) \end{aligned}$$

Câu 3.

$$a) B = \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x-1} = \frac{4x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3 + 3}{2x-1} = 2x^2 - 2x + 3 + \frac{3}{2x-1}$$

Để B nhận giá trị nguyên thì $(2x-1) \in U(3) = \{-1; 1; -3; 3\} \Rightarrow x \in \{0; 1; -1; 2\}$

$$b) C = a^2 - 4ab + 4b^2 + b^2 - 2b + 1 - 7 = (a-2b)^2 + (b-1)^2 - 7 \geq -7$$

$$\text{Vậy tại } \begin{cases} a-2b=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \text{ thì } \text{Min} C = -7$$

Câu 4. Ta có: $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10 = (x-1)(x-6)(x-4)(x-3)+10$

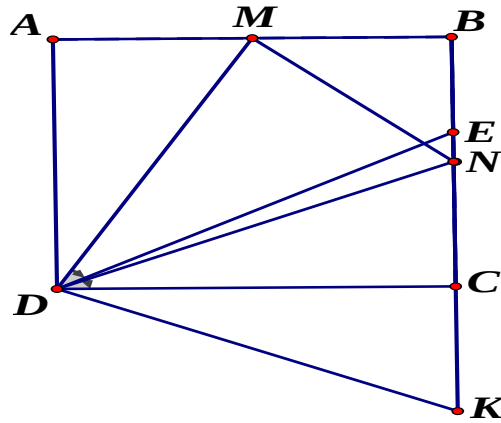
$$= (x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10 = (x^2-7x+9-3)(x^2-7x+9+3)+10$$

$$= (x^2-7x+9)^2 - 3^2 + 10 = (x^2-7x+9)^2 + 1$$

$$\text{Vì } (x^2-7x+9)^2 \geq 0 \forall x$$

$$\text{Nên } (x^2-7x+9)^2 + 1 \geq 1 \text{ với mọi } x$$

Câu 5.



$$a) S_{AMND} = S_{ABCD} - S_{BMN} - S_{NCD}$$

Ta có: $\triangle BMN$ vuông tại B có $BM = BN = \frac{a}{2} = CN$

$$\triangle NCD \text{ vuông tại C có } DC = a \Rightarrow S_{AMND} = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

b) Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho $CK = AM$.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle ADM = \triangle CDK$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = CK; DM = DK$ (1)

Và $ADM = CDK$

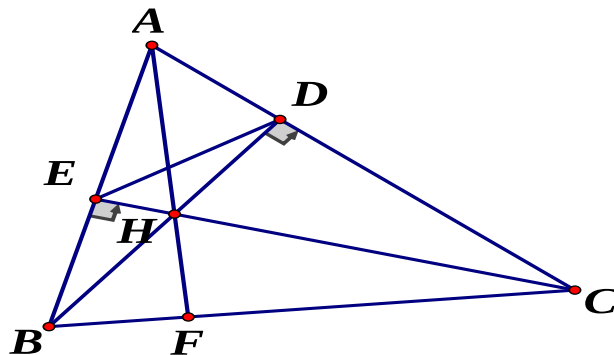
Ta có: $ADE = ADM + MDE = EDC + CDK = EDK$ (vì $MDE = EDC$)

Mặt khác $ADE = DEK$ (so le trong)

$\Rightarrow EDK = DEK$. Vậy $\triangle DKE$ cân tại K $\Rightarrow DK = KE = CK + CE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DM = AM + CE$

Câu 6.



a) Chứng minh $\triangle BHE \sim \triangle CHD$ vì $E = D = 90^\circ; EBH = DCH$ (cùng phụ góc A)

$$\Rightarrow \frac{HE}{HD} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HD \cdot HB = HE \cdot HC$$

b) Từ $\frac{HE}{HD} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{HD}{HC}$ và $EHD = CHB$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta HDE \sim \Delta HCB$

c) Vì H là giao điểm của hai đường cao BD và CE nên H là trực tâm của tam giác $\Rightarrow AH$ là đường cao thứ ba. Gọi F là giao điểm của AH với BC .

Ta có: $AF \perp BC$

$$\Delta BHF \sim \Delta BCD(g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BF}{BD} \Rightarrow BH \cdot BD = BF \cdot BC (*)$$

$$\Delta CHF \sim \Delta BCE(g.g) \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow CH \cdot CE = CF \cdot BC (**)$$

Cộng theo vế $(*), (**): BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC \cdot (BF + CF) = BC^2$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 90. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,5 điểm)

d) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 0$

e) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thỏa mãn $13a + b + 2c = 0$

Chứng tỏ rằng $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$

f) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{x-3}{2011} = \frac{x-4}{2010} \quad b) (2x-5)^3 - (x-2)^3 = (x-3)^3$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD. M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Hạ ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AD

d) Chứng minh $DE \perp CF$

e) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

f) Xác định vị trí điểm M trên BD để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD (AC > BD)$. Gọi G, H lần lượt là hình chiếu của C lên AB và AD. Chứng minh

c) $\Delta ABC \sim \Delta HCG$

d) $AC^2 = AB.AG + AD.AH$

Câu 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) \geq 91$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

d) Có: $a^2 + b^2 \geq 2ab; a^2 + c^2 \geq 2ac; b^2 + c^2 \geq 2bc$

Cộng được: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ (1)

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \Leftrightarrow -a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$ (2)

Cộng (1) với (2) được $3ab + 3ac + 3bc \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 0$

e) $f(-2) = 4a - 2b + c; f(3) = 9a + 3b + c$

Có $f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$ nên:

Hoặc: $f(-2) = 0$ và $f(3) = 0 \Rightarrow f(-2).f(3) = 0$ (1)

Hoặc: $f(-2)$ và $f(3)$ là hai số đối nhau $\Rightarrow f(-2).f(3) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) được $f(-2).f(3) \leq 0$

f) $4M = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x + 4y + 4$
 $= (2x - y - 1)^2 + 3y^2 + 2y + 3$
 $= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) + \frac{8}{3}$
 $= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$

Giá trị nhỏ nhất của $4M$ là $\frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ nên

Giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Câu 2.

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 = \frac{x-4}{2010} - 1 + \frac{x-3}{2011} - 1$$

$$c) \Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} = \frac{x-2014}{2010} + \frac{x-2014}{2011}$$

$$\Leftrightarrow (x-2014) \left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2014$$

$$d) \text{ Đặt } 2x-5=a; \quad x-2=b \Rightarrow a-b=x-3$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } a^3 - b^3 = (a-b)^3$$

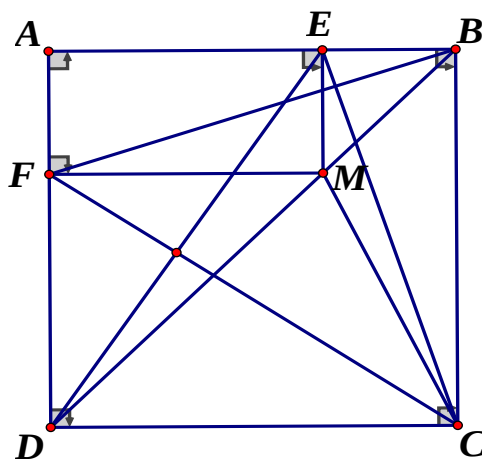
$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ b=0 \Rightarrow x=2 \\ a=b \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Câu 3.



d) Chứng tỏ được $AE = DF$ (cùng bằng MF)

Chứng tỏ được $\triangle CDF = \triangle DAE \Rightarrow FCD = EDA$

Có: EDA và EDC phụ nhau $\Rightarrow ECD$ và EDA phụ nhau hay $CF \perp DE$

e) Tương tự có $CE \perp BF$

Chứng minh được $CM \perp EF$

Gọi G là giao điểm của FM và BC ; H là giao điểm của CM và EF .

$MCG = EFM$ (hai HCN bằng nhau)

$CMG = FMH$ (đối đỉnh) $\Rightarrow MHF = MGC = 90^\circ$

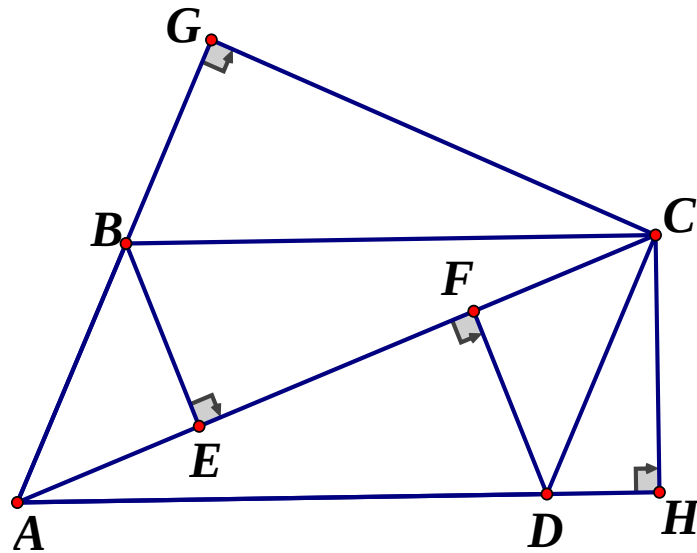
CM, FB, ED là ba đường cao của $\triangle CEF$ nên chúng đồng quy

$$f) (AE - ME)^2 \geq 0 \text{ nên } (AE + ME)^2 \geq 4AE.ME \Leftrightarrow AE.ME \leq \frac{(AE + ME)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow S_{AEMF} \leq \frac{AB^2}{4}. \text{ Mà } AB \text{ là hằng số nên } S_{AEMF} \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow AE = ME$$

Lúc đó M là trung điểm của BD

Câu 4.



$$c) \text{ Chứng tỏ được } \triangle CBG \sim \triangle CDH \Rightarrow \frac{CG}{CH} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{BA}$$

Và $\angle ABC = \angle HCG$ (cùng bù với $\angle BAD$) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HCG$

d) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D trên AC .

$$\triangle AFD \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AF}{AH} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF.AC = AD.AH$$

$$\triangle AEB \sim \triangle AGC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AG.AB$$

Cộng được: $AF.AC + AE.AC = AD.AH + AG.AB$

$$\Leftrightarrow AC.(AF + AE) = AD.AH + AG.AB$$

Chứng tỏ được: $AE = FC$. Thay được:

$$AC.(AF + FC) = AD.AH + AG.AB \Rightarrow AC^2 = AD.AH + AG.AB$$

Câu 5.

$$A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$$

$$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 7$$

$$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 13$$

Do $(13, 7) = 1$ nên A chia hết cho 91

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 91. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

1. $x^2 + 7x + 6$ 2. $x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

2) $8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$

Câu 3. (2 điểm)

1. CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

2. Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2008$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Câu 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

- 1) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$
- 2) Gọi M là trung điểm của đoạn BE . Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của $\widehat{AHM}$
- 3) Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1)

$$\begin{aligned}
 x^2 + 7x + 6 &= x^2 + x + 6x + 6 \\
 &= x(x+1) + 6(x+1) = (x+6)(x+1)
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008 &= x^4 + x^2 + 2007x^2 + 2007x + 2007 + 1 \\
 &= x^4 + x^2 + 1 + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1) - x^2 + 2007(x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2008)
 \end{aligned}$$

Câu 2.

$$2.1 \quad x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0 \quad (1)$$

Nếu $x \geq 1$: $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$)

$$x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Nếu} \quad &\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (ktm) \\ x=3 & (ktm) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$

2.2

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (ktm) \\ x=-8 & (tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$

Câu 3.3.1 Ta có: $A = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

Mà $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (BĐT Cô si)

Do đó: $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Vậy $A \geq 9$

3.2 Ta có:

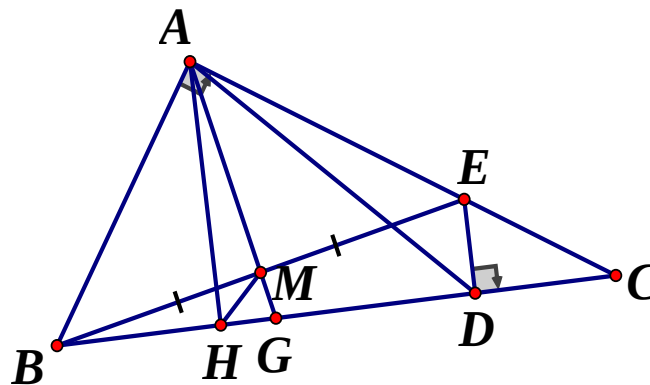
$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2008 \\ &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2008 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), Biểu thức $P(x)$ được viết lại

$$P(x) = (t-5)(t+3) + 2008 = t^2 - 2t + 1993$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1993$ cho t ta có số dư là 1993

Câu 4.



- 1) Hai tam giác ADC và BEC có: C chung;

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \text{ (hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng)}$$

Do đó $\triangle ADC \sim \triangle BEC$

Suy ra $\angle BEC = \angle ADC = 135^\circ$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $\angle AEB = 45^\circ$, do đó $\triangle ABE$ vuông cân tại A

Suy ra: $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

- 2) Ta có $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC}$ (do $\triangle BEC \sim \triangle ADC$)

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

$$\text{Nên } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE} \text{ (do } \triangle ABH \sim \triangle CBA)$$

Do đó: $\triangle BHM \sim \triangle BEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$

- 3) Tam giác ABE vuông cân tại A , nên tia AM còn là tia phân giác BAC

$$\text{Suy ra: } \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}, \text{ mà } \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} \text{ (} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{)} = \frac{AH}{HC} \text{ (} ED \parallel AH \text{)} = \frac{HD}{HC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 92. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (2,5 điểm)

- Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 + 2xy + 6y - 9$
- Giải phương trình: $\frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} + \frac{x-3}{2011} + \dots + \frac{x-2012}{2} = 2012$
- Tìm đa thức $f(x)$ biết: $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 5; $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 7; $f(x)$ chia cho $(x-2)(x-3)$ được thương là $x^2 - 1$ và đa thức dư bậc nhất đối với x

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho $P = 7 \cdot 2014^n + 12 \cdot 1995^n$ với $n \in \mathbb{N}$; $Q = \frac{(x^2 + n)(1 + n) + n^2 x^2 + 1}{(x^2 - n)(1 - n) + n^2 x^2 + 1}$. Chứng minh:

- P chia hết cho 19
- Q không phụ thuộc vào x và $Q > 0$

Câu 3. (1,5 điểm)

- Chứng minh: $a^2 + 5b^2 - (3a + b) \geq 3ab - 5$
- Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AE, BF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC , qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM , a cắt AB, AC lần lượt tại I và K

- Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle EFC$
- Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK , b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D . Chứng minh $NC = ND$ và $HI = HK$.
- Gọi G là giao điểm của CH và AB . Chứng minh $\frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} > 6$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 + 2xy + 6y - 9 &= (x^2 - 9) + 2y(x + 3) = (x - 3)(x + 3) + 2y(x + 3) \\ &= (x + 3)(x - 3 + 2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} + \frac{x-3}{2011} + \dots + \frac{x-2012}{2} &= 2012 \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 + \frac{x-3}{2011} + \dots + \frac{x-2012}{2} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} + \frac{x-2014}{2011} + \dots + \frac{x-2014}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2014) \left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \dots + \frac{1}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2014 \end{aligned}$$

c) Gọi dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $ax + b$

$$\text{Ta có: } f(x) = (x-2)(x-3)(x^2-1) + ax + b$$

Theo Câu ra : $f(2) = 5$ nên ta có: $2a + b = 5$; $f(3) = 7$ nên $3a + b = 7$

$$\Rightarrow a = 2; b = 1$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = (x-2)(x-3)(x^2-1) + 2x + 1$

Câu 2.a)

$$P = 7.2014^n + 12.1995^n = 19.2014^n - 12.2014^n + 12.1995^n = 19.2014^n - 12.(2014^n - 1995^n)$$

Ta có: $19.2014^n : 19; (2014^n - 1995^n) : 19 \Rightarrow P : 19$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad Q &= \frac{(x^2 + n)(1 + n) + n^2 x^2 + 1}{(x^2 - n)(1 - n) + n^2 x^2 + 1} = \frac{x^2 + x^2 n + n^2 + n + n^2 x^2 + 1}{x^2 - x^2 n + n^2 - n + n^2 x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2(n^2 + n + 1) + n^2 + n + 1}{x^2(n^2 - n + 1) + n^2 - n + 1} = \frac{(n^2 + n + 1)(x^2 + 1)}{(n^2 - n + 1)(x^2 + 1)} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \end{aligned}$$

Vậy Q không phụ thuộc vào x

$$Q = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} > 0$$

Câu 3.

$$\text{a)} \quad a^2 + 5b - (3a + b) \geq 3ab - 5 \Leftrightarrow 2a^2 + 10b^2 - 6a - 2b - 6ab + 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6ab + 9b^2 + a^2 - 6a + 9 + b^2 - 2b + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 3b)^2 + (a - 3)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 3; b = 1$

$$b) \quad 2x^2 + 3y^2 + 4x = 19 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 = 3(7 - y^2) (*)$$

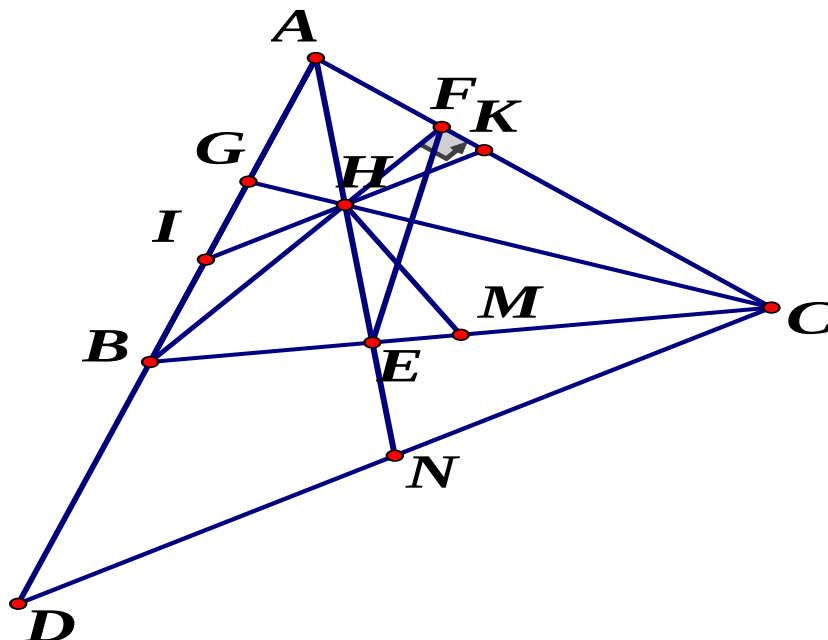
Xét thấy VT chia hết cho 2 nên $3(7 - y^2) : 2 \Rightarrow y$ lẻ (1)

$$\text{Mặt khác VT} \geq 0 \Leftrightarrow 3(7 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $y^2 = 1$, thay vào (*) ta có: $2(x + 1)^2 = 18$

Suy ra các nghiệm là $(x; y) \in \{(2; 1); (2; -1); (-4; -1); (-4; 1)\}$

Câu 4.



$$a) \quad \text{Ta có: } \triangle AEC \sim \triangle BFC (g.g) \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EFC$ có: $\frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$ và góc C chung nên suy ra $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ (cgc)

b) Vì $CN \parallel IK$ nên $HM \perp CN \Rightarrow M$ là trực tâm $\triangle HNC$
 $\Rightarrow MN \perp CH$ mà $CH \perp AD$ (H là trực tâm $\triangle ABC$) $\Rightarrow MN \parallel AD$

Do M là trung điểm BC nên $\Rightarrow NC = ND \Rightarrow IH = IK$ (theo Ta let)

$$c) \quad \text{Ta có: } \frac{AH}{HE} = \frac{S_{AHC}}{S_{CHE}} = \frac{S_{ABH}}{S_{BHE}} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{CHE} + S_{BHE}} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{BHC}}$$

Tương tự ta có: $\frac{BH}{BF} = \frac{S_{BHC} + S_{BHA}}{S_{AHC}}; \frac{CH}{CG} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC}}{S_{BHA}}$

$$\Rightarrow \frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC} + S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC} + S_{AHC}}{S_{BHA}}$$

$$= \frac{S_{AHC}}{S_{BHC}} + \frac{S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{BHA}} + \frac{S_{AHC}}{S_{BHA}} \geq 6$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều mà theo giả thiết $AB < AC$ nên không xảy ra dấu bằng

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 93. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x+1} + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2+4x+6}{x^2-x-2} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x}$

- 1) Rút gọn A
- 2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

Câu 2. (5 điểm)

- 1) Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 12x - 8y + 15 = 0$
- 2) Chứng minh: Tổng lập phương của ba số nguyên dương liên tiếp chia hết cho 9.
- 3) Tìm đa thức $H(x)$ có bậc 3 thỏa mãn: $H(1) = H(2) = H(3) = 0$ và với mọi x luôn có $H(x) = x \cdot f(x) + 24$, trong đó $f(x)$ là đa thức bậc 2.

Câu 3. (4 điểm)

- 1) Giải phương trình: $(3x-5)^3 + (x-6)^3 - (4x-11)^3 = 0$
- 2) Giải Câu toán bằng cách lập phương trình:

Quãng đường từ thành phố Bắc Giang đến huyện Sơn Động dài $80km$. Lúc 7 giờ 10 phút một xe máy đi từ thành phố Bắc Giang đến huyện Sơn Động. Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại 32 phút để sửa, rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu $5km/h$. Biết xe máy đến huyện Sơn Động lúc 10 giờ 30 phút cùng ngày. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H

- a) Chứng minh rằng: $\triangle AMC \sim \triangle BNC$ và $\angle CAB = \angle NMC$

b) Chứng minh rằng: Tia MA là tia phân giác của NMP

c) Gọi I là giao điểm của BN và MP . Chứng minh $HN.BI = HI.BN$

Câu 5. (1 điểm)

Cho $A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng $A > 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$1) A = \left(\frac{x+2}{x+1} + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2+4x+6}{x^2-x-2} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x}$$

ĐKXĐ: $x \neq -1; x \neq 0; x \neq 2$

$$A = \left(\frac{x+2}{x+1} - \frac{2x}{x-2} + \frac{x^2+4x+6}{(x+1)(x-2)} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x}$$

$$A = \frac{4x}{x^2+1}$$

$$2) A = \frac{4x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2x^2+4x-2}{x^2+1} = 2 - \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$\text{Mà } \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leq 2 \text{ hay } A \leq 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy GTLN của biểu thức A là 2, đạt được khi $x = 1$

Câu 2.

$$1) \text{ Học sinh biến đổi về phương trình } (x+y+10)(x-y+2) = 5$$

Do x, y nguyên nên $x+y+10; x-y+2$ nguyên

$$\text{Mà } 5 = 5.1 = 1.5 = -1.(-5) = -5.(-1)$$

$$\text{Tìm được } (x; y) \in \{(-3; -6); (-9; -2); (-3; -2); (-9; -6)\}$$

$$2) \text{ Gọi ba số là } a, a+1 \text{ và } a+2 \text{ (} a \text{ nguyên dương)}$$

$$\text{Ta có: } a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 3a^3 + 15a + 9a^2 + 9$$

$$\text{Xét } 3a^3 + 15a = 3a(a^2 + 5)$$

$$\text{Nếu } a \vdots 3 \text{ thì } 3a^2 + 15a \vdots 9 \text{ khi đó } a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 \vdots 9 \quad (1)$$

Nếu a không chia hết cho 3 thì a^2 chia 3 dư 1 $\Rightarrow a^2 + 5 \div 3$

$$\Rightarrow 3a^2 + 15a \div 9 \text{ khi đó } a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 \div 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 \div 9$ với mọi a nguyên dương.

3) Do đa thức $H(x)$ có bậc là 3 thỏa mãn: $H(1) = H(2) = H(3) = 0$

$$\text{Nên } H(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow H(0) = -6a$$

Lại có $H(x) = x.f(x) + 24$ đúng với mọi x

$$\text{Chọn } x = 0 \text{ ta có: } H(0) = 24$$

$$\text{Nên } -6a = 24 \Rightarrow a = -4$$

$$\text{Vậy } H(x) = -4.(x-1)(x-2)(x-3)$$

Câu 3.

1) Học sinh chứng minh được: Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = abc$ (*)

$$(3x-5)^3 + (x-6)^3 - (4x-11)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)^3 + (x-6)^3 + (11-4x)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)(x-5)(11-4x) = 0 \text{ theo (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = 6 \\ x = \frac{11}{4} \end{cases}$$

2) Gọi vận tốc xe máy đi trong $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu là $x(km/h)$ ($x > 5$)

$\Rightarrow$ vận tốc xe máy đi trong $\frac{1}{4}$ quãng đường cuối là $x-5(km/h)$

Ta có $\frac{3}{4}$ quãng đường từ thành phố Bắc Giang đến huyện Sơn Động dài $60km$

Thời gian xe máy đi đến huyện Sơn Động (kể cả thời gian dừng là)

$$10 \text{ giờ } 30 \text{ phút} - 7 \text{ giờ } 10 \text{ phút} = 3 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = \frac{10}{3}h$$

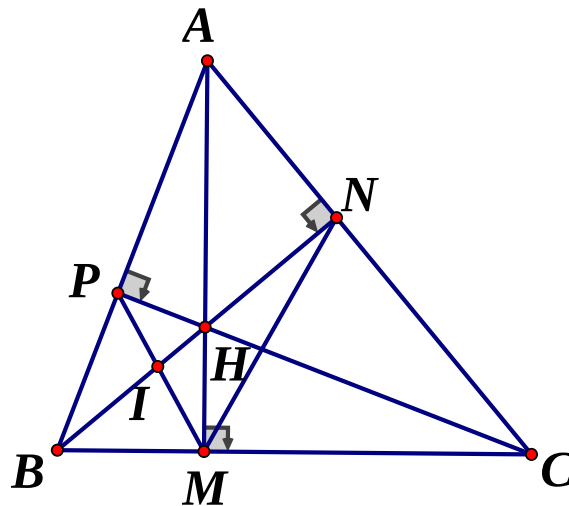
$$\text{Theo Câu ra ta có phương trình: } \frac{60}{x} + \frac{20}{x-5} + \frac{32}{60} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 30 & (tm) \\ x = \frac{25}{7} & (ktm) \end{cases}$$

Thời gian xe máy đi đến lúc hỏng xe là : $60:30 = 2h$

Vậy xe máy bị hỏng lúc 9 giờ 10 phút

Câu 4.



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BNC$ có: góc C chung; $M = N = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle BNC \Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle MNC$ có: $\frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB}$; C chung

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC (c.g.c) \Rightarrow \angle CAB = \angle NMC$$

b) Ta có: $\angle CAB = \angle NMC$

Chứng minh tương tự: $\angle CAB = \angle NMC$

Chỉ ra được: $\angle AMC = \angle AMB = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle AMN = \angle AMP \Rightarrow \text{Tia } MA \text{ là tia phân giác của } \angle NMP$$

c) Ta có: MH là đường phân giác trong của tam giác MNI

Mà $MB \perp MH$ nên MB là đường phân giác ngoài của tam giác MNI

$$\Rightarrow \frac{MN}{MI} = \frac{HN}{HI} = \frac{BN}{BI} \text{ (tính chất đường phân giác trong, ngoài tam giác)}$$

$$\Rightarrow HN \cdot BI = HI \cdot BN (dpcm)$$

Câu 5. Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với mọi $a, b > 0$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

$$A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}$$

Ta có A có $2n+1$ hạng tử

Áp dụng BĐT trên với các cặp số đôi một khác nhau ta có:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} > \frac{2}{2n+1}$$

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n} > \frac{2}{2n+1}$$

.....

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$2A > (2n+1) \frac{2}{2n+1} \Leftrightarrow A > 1 \text{ (dpcm)}$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 94. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1.

- d) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$
- e) Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số
- f) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 2.

- c) Giải phương trình: $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} + \frac{x-3}{2010} + \dots + \frac{x-2012}{1} = 2012$
- d) Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$.

Câu 3.

- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$
- d) Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác

$$\text{Chứng minh: } \frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} \geq a+b+c$$

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . M là giao điểm của CE và DF .

- d) Chứng minh: Tứ giác $EFGH$ là hình vuông
 e) Chứng minh $DF \perp CE$ và ΔMAD cân
 f) Tính diện tích ΔMDC theo a .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & (x-y)^2 + 4(x-y) - 5 = (x-y)^2 + 4(x-y) + 4 - 9 \\ & = (x-y-2)^2 - 3^2 = (x-y+5)(x-y-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \text{Ta có: } n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1) \\ & = (n+1)(n^2 - n + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Do } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ nên } \begin{cases} n+1 > 1 \\ n^2 - n + 2 > 1. \end{cases} \text{ Vậy } n^3 + n + 2 \text{ là hợp số.}$$

$$\text{f)} \quad \text{Gọi hai số liên tiếp là } a^2 \text{ và } (a+1)^2$$

Theo Câu ra ta có:

$$\begin{aligned} & a^2 + (a+1)^2 + a^2 \cdot (a+1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \\ & = (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a+1) + 1 \\ & = (a^2 + a + 1)^2 \text{ là một số chính phương lẻ vì } a^2 + a = a(a+1) \text{ là số chẵn nên} \\ & a^2 + a + 1 \text{ là số lẻ} \end{aligned}$$

Câu 2.

c) Phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{2012} - 1 + \frac{x-2012}{2011} - 1 + \frac{x-3}{2010} - 1 + \dots + \frac{x-2012}{1} - 1 + 2012 = 2012 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-2013}{2012} + \frac{x-2013}{2011} + \frac{x-2013}{2010} + \dots + \frac{x-2013}{1} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2013) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \dots + \frac{1}{1} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2013 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1] \\ \Rightarrow & a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) = a^2(a-1) + b^2(b-1) + c^2(c-1) \leq 0 \\ \Rightarrow & a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 \Rightarrow a, b, c \text{ nhận hai giá trị là 0 hoặc 1} \\ \Rightarrow & b^{2012} = b^2; c^{2013} = c^2 \Rightarrow S = a^2 + b^{2012} + c^{2013} = 1 \end{aligned}$$

Câu 3.

c) Ta có: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 - 8x - 2y + 18$

$$A = 2[(x+y)^2 - 4(x+y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$$

$$A = 2(x+y-2)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Vậy } \min A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

d) Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên:

$$a + b - c > 0; -a + b + c > 0; a - b + c > 0$$

$$\text{Đặt } x = -a + b + c > 0; y = a - b + c > 0; z = a + b - c > 0$$

$$\text{Ta có: } x + y + z = a + b + c; a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

$$\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} = \frac{(y+z)(x+z)}{4z} + \frac{(x+z)(x+y)}{4x} + \frac{(x+y)(y+z)}{4y}$$

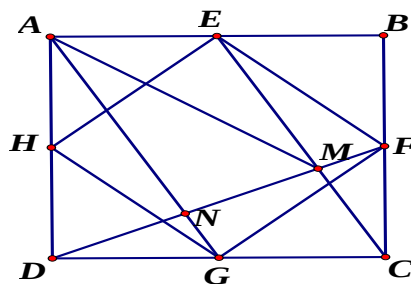
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + 3x + 3y + 3z \right) = \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{xy}{z} + 2 \cdot \frac{yz}{x} + 2 \cdot \frac{xz}{y} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{z}{2} \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{4} [3(x+y+z) + x + y + z] = x + y + z$$

Mà $x + y + z = a + b + c$ nên suy ra điều phải chứng minh

Câu 4.



d) Chứng minh $EFGH$ là hình thoi

Chứng minh có 1 góc vuông nên $EFGH$ là hình vuông

e) $\triangle BEC = \triangle CFD \Rightarrow ECB = FDC$ mà $\triangle CDF$ vuông tại C nên:

$$\Rightarrow \angle CDF + \angle DFC = 90^\circ \Rightarrow \angle DFC + \angle ECB = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMF \text{ vuông tại M hay } CE \perp DF$$

Gọi N là giao điểm của AG và DF . Chứng minh tương tự: $AG \perp DF$

$$\Rightarrow GN \parallel CM \text{ mà G là trung điểm của DC nên N là trung điểm DM.}$$

Trong ΔMAD có AN vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta MAD$ cân tại A

$$f) \quad \Delta CMD \sim \Delta FCD(g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{CMD}}{S_{FCD}} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{CMD} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \cdot S_{FCD}$$

$$\text{Mà } S_{FCD} = \frac{1}{2} CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2.$$

$$\text{Vậy } S_{CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2$$

Trong ΔDCF theo định lý Pytago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2} BC^2\right) = CD^2 + \frac{1}{4} CD^2 = \frac{5}{4} CD^2$$

$$\text{Do đó: } S_{MCD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4} CD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{5} a^2$$

ĐỀ SỐ 95. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (5,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Câu 2. (6 điểm)

a) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 22,

$f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

c) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

b) Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O . M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC ($M \neq B, C$). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

- Chứng minh : $\triangle OEM$ vuông cân
- Chứng minh: $ME \parallel BN$
- Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

- a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \in \text{ĐKXĐ}$

$$\Rightarrow 2x^2 = -x+1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ x = -1 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy $P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$

$$P = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Vì $x > 1$ nên $x - 1 > 0$. Áp dụng BĐT Cosi ta có: $x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} = 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2(TM)$

Vậy GTNN của P là $4 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 2.

a) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề Câu, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 22 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 22 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 16 \end{cases}$$

Do đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 3x + 16$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + 23x + 16$

b) $a^3 + 5a = a^3 - a + 6a = a(a^2 - 1) + 6a = a(a-1)(a+1) + 6a$

Vì $a(a-1)(a+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên $a(a-1)(a+1)$ chia hết cho 6

$6a$ chia hết cho 6

Nên $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

c) $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2013x - 2013y - 2013 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x + y + 1) - 2013(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2013)(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2014 \\ y = -2014 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ y = -2014 \end{cases}$$

Câu 3.

a)

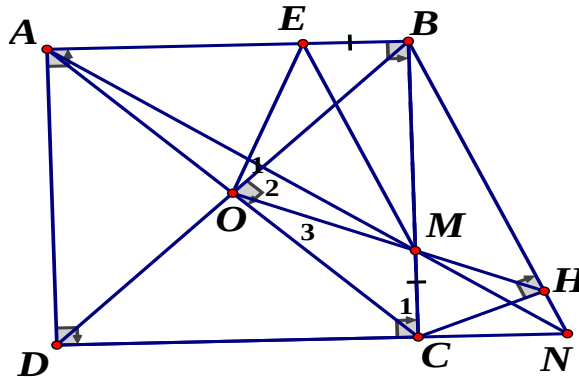
$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\
 &= \frac{1}{b^2 + c^2 - (b+c)^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - (a+c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (a+b)^2} \\
 &= \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = \frac{a+b+c}{-2abc} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} = \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) \\
 &= \frac{ab - a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab - b^2}{(1+b^2)(1+ab)} \\
 &= \frac{a(b-a)(1+b^2) + b(a-b)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} = \frac{(b-a)(a+ab^2-b-a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} = \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}
 \end{aligned}$$

Do $a \geq 1; b \geq 1$ nên $\frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Câu 4.



a) Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có: $OB=OC$

Và $B_1 = C_1 = 45^\circ$, $BE = CM$ (gt) $\Rightarrow \triangle OEB = \triangle OMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow OE = OM$ và $O_1 = O_3$

Lại có: $O_2 + O_3 = \angle BOC = 90^\circ$ vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow O_2 + O_1 = \angle EOM = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

b) Từ giả thiết tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \parallel CD$ và $AB = CD$

$$+) AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC} \text{ (định lý Ta let) } (*)$$

Mà $BE = CM(gt)$ và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào $(*)$

$$\text{Ta có: } \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN \text{ (Ta let đảo)}$$

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME \parallel BN \Rightarrow OME = OH'E$ (cặp góc so le trong)

Mà $OME = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O

$$\Rightarrow MH'B = 45^\circ = C_1 \Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH' (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}, \text{ kết hợp } OMB = CMH' \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH' (c.g.c) \Rightarrow OBM = MH'C = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } BH'C = BH'M + MH'C = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$$

Mà $CH \perp BN (H \in BN) \Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 96. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,0 điểm) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$ với x khác -1 và 1

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

3) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau: $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$

b) Cho x là số nguyên. Chứng minh rằng biểu thức:

$$M = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 \text{ là bình phương của một số nguyên.}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $x + y + z$ chia hết cho 6.

Chứng minh $M = (x+y)(y+z)(x+z) - 2xyz$ chia hết cho 6

b) Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn: $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$ /

$$\text{Tính giá trị biểu thức } P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), có đường cao AH sao cho $AH = HC$. Trên AH lấy một điểm I sao cho $HI = BH$. Gọi P và Q là trung điểm của BI và AC . Gọi N và M là hình chiếu của H trên AB và IC ; K là giao điểm của đường thẳng CI với AB ; D là giao điểm của đường thẳng BI với AC

- a) Chứng minh I là trực tâm của tam giác ABC
- b) Tứ giác $HNKM$ là hình vuông
- c) Chứng minh bốn điểm N, P, M, Q thẳng hàng.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện: $x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $x^2 + y^2 + z^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1.1) Với x khác 1 và -1 thì

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2)(1-x) \end{aligned}$$

$$1.2) \quad \text{Tại } x = -1\frac{2}{3} = \frac{-5}{3} \text{ thì } A = \left[1 + \left(\frac{-5}{3}\right)^2\right] - \left[1 - \left(-\frac{5}{3}\right)\right] = 10\frac{2}{27}$$

$$1.3) \quad \text{Với } x \text{ khác } 1 \text{ và } -1 \text{ thì } A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Câu 2.

$$a) \quad \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \quad (t \geq 2)$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t} = \frac{6}{t+1}$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 7t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(TM) \\ t = \frac{1}{3}(KTM) \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } (x-1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{b) Ta có: } M = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + x + 5$$

$$\text{Khi đó: } M = (t-1)(t+1) + 1 = t^2 - 1 + 1 = t^2$$

Vì x là số nguyên nên t là số nguyên. Vậy M là bình phương của một số nguyên.

Câu 3.

$$\text{a) Ta có: } M = (x+y)(x+z)(y+z) - 2xyz$$

Học sinh biến đổi được:

$$M = (x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$$

Vì x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $x+y+z$ chia hết cho 6 nên

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \text{ chia hết cho } 6$$

Trong 3 số x, y, z tồn tại ít nhất một số chia hết cho 2. Suy ra $3xyz : 6$

Do đó, $(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$ chia hết cho 6. Vậy $M : 6$

$$\text{b) Đặt } ab = x; bc = y; ca = z$$

$$\text{Ta có: } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\text{Học sinh chứng minh: } x+y+z=0 \text{ hoặc } x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=0$$

$$\text{TH1: } x+y+z=0$$

$$\text{Sử dụng hằng đẳng thức: } (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(x+z)$$

$$\Rightarrow -xyz = (x+y)(y+z)(x+z)$$

$$\text{Ta có: } -a^2b^2c^2 = (ab+bc)(bc+ca)(ca+ab)$$

$$-abc = (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Rightarrow P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = -1$$

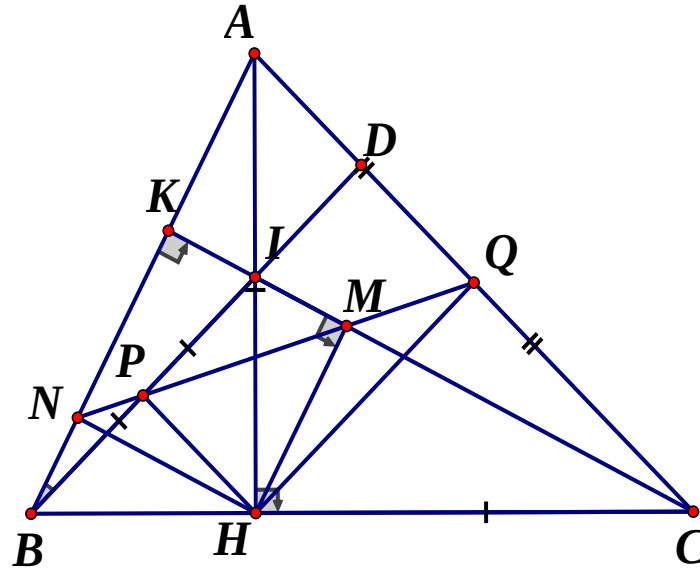
$$-TH2: x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = y = z \Rightarrow ab = bc = ca$$

$$\Rightarrow a = b = c \Rightarrow P = 8$$

Câu 4.



a) Xét tam giác BHI có: $BH = HI, H = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BHI$ vuông cân tại $H \Rightarrow \angle IBH = 45^\circ$

$\triangle AHC$ có $AH = HC, H = 90^\circ \Rightarrow \triangle AHC$ vuông cân tại $H \Rightarrow \angle ACH = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle BCD$ vuông cân tại D

Tam giác ABC có hai đường cao AH, BD .

Vậy I là trực tâm $\triangle ABC$

b) Xét tứ giác $HMKN$ có: $M = N = 90^\circ, K = 90^\circ$ (CK đường cao)

Tứ giác $HMNK$ là hình chữ nhật (1)

Xét $\triangle MIH$ và $\triangle NBH$ có:

$$\angle HMI = \angle HNB = 90^\circ; HB = HI(gt); \angle HIC = \angle HBN$$

$$\Rightarrow \triangle HMI = \triangle HNB(g.c.g) \Rightarrow HM = HN(2)$$

Từ (1) và (2): Tứ giác $HMKN$ là hình vuông

c) Theo câu b: Tứ giác $HMKN$ là hình vuông nên M, N thuộc trung trực đoạn thẳng KH

-Xét 2 tam giác vuông AHC và AKC ; trung tuyến HQ, KQ . Ta có:

$$HQ = \frac{1}{2}AC; KQ = \frac{1}{2}AC \Rightarrow Q \in \text{trung trực KH}$$

Vậy 4 điểm M, N, P, Q thẳng hàng

Câu 5.

Áp dụng BĐT Cô si cho 2015 số dương $x^{2015}, x^{2015}, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1$. ta được:

$$x^{2015} + x^{2015} + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 \geq 2015 \sqrt[2015]{x^{2015} \cdot x^{2015} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = 2015x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^{2015} + 2013 \geq 2015x^2$$

Tương tự ta cũng có:

$$2y^{2015} + 2013 \geq 2015y^2$$

$$2z^{2015} + 2013 \geq 2015z^2$$

$$\Rightarrow 2(x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}) + 6039 \geq 2015 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy $\text{Max}_{(x^2+y^2+z^2)} = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 97. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

2. Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033$ cho $x^2 + 12x + 30$

2. Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 7$; $x^2 + y^2 + z^2 = 23$; $xyz = 3$

Tính giá trị của biểu thức $H = \frac{1}{xy + z - 6} + \frac{1}{yz + x - 6} + \frac{1}{zx + y - 6}$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

2. Giải phương trình: $(3x - 2)(x + 1)^2(3x + 8) = -16$

Bài 4. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Trên cạnh AB lấy M ($0 < MB < MA$) và trên cạnh BC lấy N sao cho $\angle MON = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AN với DC , gọi K là giao điểm của ON với BE .

- 1) Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân
- 2) Chứng minh MN song song với BE
- 3) Chứng minh CK vuông góc với BE
- 4) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H . Chứng minh:

$$\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1.**

1.

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} \\ &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^4 + 2 + (x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^4 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^4 + 2 + x^4 - 1 - x^4 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} \\ &= \frac{x^4 + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

b) Ta có : $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

- Nếu $x = 0$ ta có $M = 0$

- Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$

$$\text{Ta có: } x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Nên ta có: } M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \leq 1. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = 1.$$

Vậy M lớn nhất là $M = 1$ khi $x = 1$

2.

$$\text{Ta có: } \frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$$

$$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy = 1-x-y+xy \Leftrightarrow x+y = \frac{3xy+1}{2}$$

$$\text{Ta có: } M = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy+1}{2} \right)^2 - 3xy = \dots = \left(\frac{3xy-1}{2} \right)^2$$

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ, Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2.

1) Ta có:

$$(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = \dots = (x^2 + 12x + 27)(x^2 + 12x + 35) + 2033$$

Đặt $x^2 + 12x + 30 = t$, ta có:

$$\begin{aligned} (x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 &= (t-3)(t+5) + 2033 \\ &= t^2 + 2t - 15 + 2033 = t(t+2) + 2018 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có } (x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = (x^2 + 12x + 30)(x^2 + 12x + 32) + 2018$$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033$ cho $x^2 + 12x + 30$ là 2018.

2) Vì

$$x + y + z = 7 \Rightarrow z = -x - y + 7 \Rightarrow xy + z - 6 = \dots = xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } yz + x - 6 = (y-1)(z-1); zx + y - 6 = (z-1)(x-1)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } H &= \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} \\ &= \frac{(x+y+z)-3}{xyz - (xy+yz+xz) + (x+y+z) - 1} = \frac{7-3}{3 - (xy+yz+xz) + 7-1} = \frac{4}{9 - (xy+yz+xz)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+xz) \Rightarrow 7^2 = 23 + 2(xy+yz+xz)$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz = 13$$

Vậy $H = \frac{4}{9-13} = -1$

Bài 3.

1) Ta có:

$$3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y \Leftrightarrow 3xy + 2y = -3x^2 + 7x + 17 \Leftrightarrow (3x + 2)y = -3x^2 + 7x + 17$$

Vì x nguyên nên $2x + 3 \neq 0$ nên ta có:

$$y = \frac{-3x^2 + 7x + 17}{3x + 2} = \frac{-3x^2 - 2x + 9x + 6 + 11}{2} = \frac{-x(3x + 2) + 3(3x + 2) + 11}{3x + 2} = -x + 3 + \frac{11}{3x + 2}$$

Vì x, y nguyên nên ta có $\frac{11}{3x + 2}$ nguyên $\Rightarrow 11 : 3x + 2 \Rightarrow 3x + 2 = \pm 1; \pm 11$

- Xét các trường hợp ta tìm được $x = -1; y = -1; x = -3; y = 5$ thỏa mãn và kết luận

2) Ta có: $(3x - 2)(x + 1)^2(3x + 8) = -16 \Leftrightarrow (3x - 2)(3x + 3)^2(3x + 8) = -144$

Đặt $3x + 3 = t \Rightarrow 3x - 2 = t - 5; 3x + 8 = t + 5$

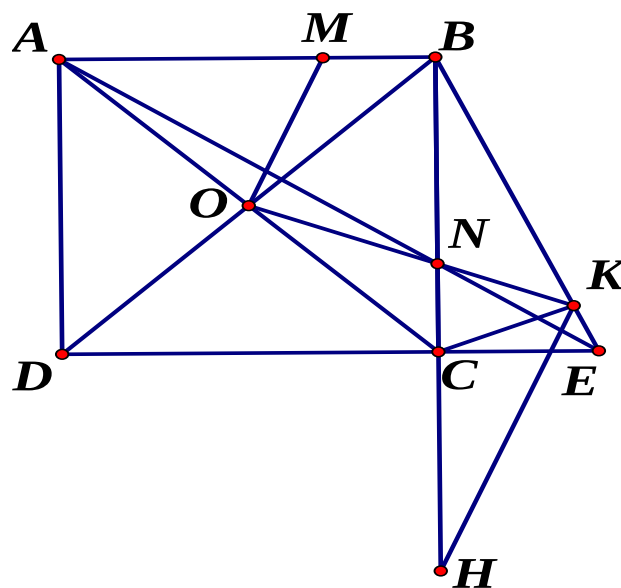
Ta có phương trình: $(t - 5)t^2(t + 5) = -144$

$$\Leftrightarrow t^4 - 25t^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 9)(t^2 - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 9 \\ t^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 3 \\ t = \pm 5 \end{cases}$$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = 0; x = -2; x = \frac{2}{3}; x = -\frac{8}{3}$

Bài 4.



1) Ta có: $\angle BOC = 90^\circ \Rightarrow \angle CON + \angle BON = 90^\circ$; vì

$$MON = 90^0 \Rightarrow BOM + BON = 90^0 \Rightarrow BOM = CON$$

$$\text{Ta có BD là phân giác } ABC \Rightarrow MBO = CBO = \frac{BOC}{2} = 45^0$$

$$\text{Tương tự ta có: } NCO = DCO = \frac{BOC}{2} = 45^0. \text{ Vậy ta có: } MBO = NCO$$

$$\text{Xét } \triangle OBM \text{ và } \triangle OCN \text{ có } OB = OC; BOM = CON; MBO = NCO \\ \Rightarrow \triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow OM = ON$$

$$\text{Xét } \triangle MON \text{ có } MON = 90^0; OM = ON \Rightarrow \triangle MON \text{ vuông cân}$$

$$2) \triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow MB = NC \text{ mà } AB = BC \Rightarrow AB - MB = BC - NC$$

$$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC}$$

$$\text{Ta có: } AB // CD \Rightarrow AM // CE \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{BN}{NC}$$

$$\text{Vậy ta có: } \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NE} \Rightarrow MN // BE \text{ (Theo định lý Talet đảo)}$$

$$3) \text{ Vì } MN // BE \Rightarrow BKN = MNO = 45^0 \text{ (đồng vị và có tam giác } MON \text{ vuông cân)}$$

$$\Rightarrow \triangle BNK \sim \triangle ONC \text{ (vì có } BNK = ONK; BKN = OCN = 45^0) \Rightarrow \frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC}$$

$$\text{- Xét } \triangle BNO; \triangle KNC \text{ có } BNO = CNK; \frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC} \Rightarrow \triangle BNO \sim \triangle KNC$$

$$\Rightarrow NKC = NBO = 45^0$$

$$\text{Vậy ta có: } BKC = BKN + CKN = 45^0 + 45^0 = 90^0 \Rightarrow CK \perp BE$$

$$4) \text{ - Vì } KH // OM \text{ mà } MK \perp OK \Rightarrow MK \perp KH \Rightarrow NKH = 90^0 \text{ mà}$$

$$NKC = 45^0 \Rightarrow CKH = 45^0 \Rightarrow BKN = NKC = CKH = 45^0$$

$$\text{Xét } \triangle BKC \text{ có } BKN = NKC \Rightarrow KN \text{ là phân giác trong của } \triangle BKC, \text{ mà } KH \perp KN$$

$$\Rightarrow KH \text{ là phân giác ngoài của } \triangle BKC \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{HC}{HB}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{KN}{KH} = \frac{BN}{BH}$$

$$\text{Vậy ta có } \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{NC}{BH} = \frac{HC}{HB} + \frac{BN}{BH} + \frac{CN}{BH} = \dots = \frac{BH}{BH} = 1$$

Bài 5

$$\text{Ta có: } H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$$

$$= (x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 8y + 8) + \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\frac{24}{y} + 6y - 24\right) + (x + 2y) + 17$$

$$= (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + \frac{(x-1)^2}{x} + \frac{6(y-2)^2}{y} + (x+2y) + 17$$

$$\geq 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 17 = 22$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2(y-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{6(y-2)^2}{y} = 0 \text{ và } x+2y=5$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ và } y=2. \text{ Vậy } H \text{ nhỏ nhất là } H=22 \Leftrightarrow x=1, y=2$$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 98. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4,5 điểm)

1) Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

2) Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Câu 2. (4,5 điểm)

1) Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức

2) Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

2) Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$

a) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a

b) Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC .

Chứng minh $\angle HDI = 45^\circ$

2) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là l_a, l_b, l_c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có: } P &= 2(a^3 + b^3) + 7ab(a + b) \\ &= 2(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a + b) \\ &= (a + b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab) \\ &= (a + b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) \\ &= (a + b)[2a(a + 2b) + b(a + 2b)] \\ &= (a + b)(2a + b)(a + 2b) \end{aligned}$$

$$\text{Kết luận } P = (a + b)(2a + b)(a + 2b)$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 + 2x^3 + x^2) + x^2 + x + x + 1 \\ &= x^2(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 + x + 2 \\ &= x^2 + x + 3 = 4 \\ \text{Vậy } Q &= 4 \end{aligned}$$

Câu 2.

$$1) \text{ Ta có: } R = \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x}{4026}$$

$$\text{ĐK: } x(x^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } R &= \frac{1}{4026} \cdot \left(\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \\ &= \frac{1}{4026} \cdot \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2-4} = \frac{1}{4026} \cdot \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{1}{2013} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } R \text{ xác định khi } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \text{ và } R = \frac{1}{2013}$$

2) +Nếu $x \geq 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=4$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2=0 \Leftrightarrow x^2.(x^2-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (ktm)} \\ x=\sqrt{5} \text{ (tm)} \\ x=-\sqrt{5} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

+) Nếu $x < 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2)=4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=-4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=-4$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2+8=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0 \text{ vô nghiệm}$$

Phương trình có một nghiệm $x=\sqrt{5}$

Câu 3.

1) Ta có: $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó $(n^3-n):8 \quad (2)$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1); (2) suy ra

$(n^3-n):24 \text{ (dpcm)}$

2) Giả sử $n^2+4n+2013=m^2 \text{ (} m \in \mathbb{N} \text{)}$

Suy ra $(n+2)^2+2009=m^2 \Leftrightarrow m^2-(n+2)^2=2009$

$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2)=2009$

Mặt khác $2009=2009.1=287.7=49.41$ và $m+n+2 > m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

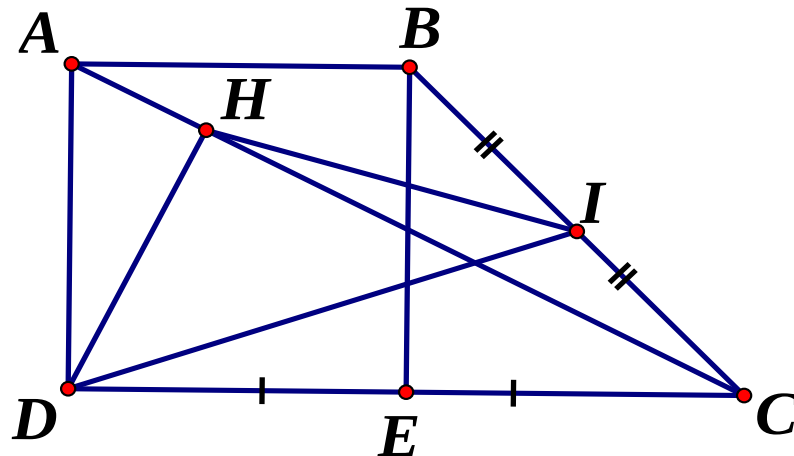
TH1: $\begin{cases} m+n+2=2009 \\ m-n-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1005 \\ n=1002 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} m+n+2=287 \\ m-n-2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=147 \\ n=138 \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là 1002;138;2

Câu 4.



1)

- a) Gọi E là trung điểm của CD, chỉ ra $ABED$ là hình vuông và BEC là tam giác vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, BC = 2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

- b) $\angle ADH = \angle ACD$ (1) (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

Xét hai tam giác ADC và IBD vuông tại D và B có:

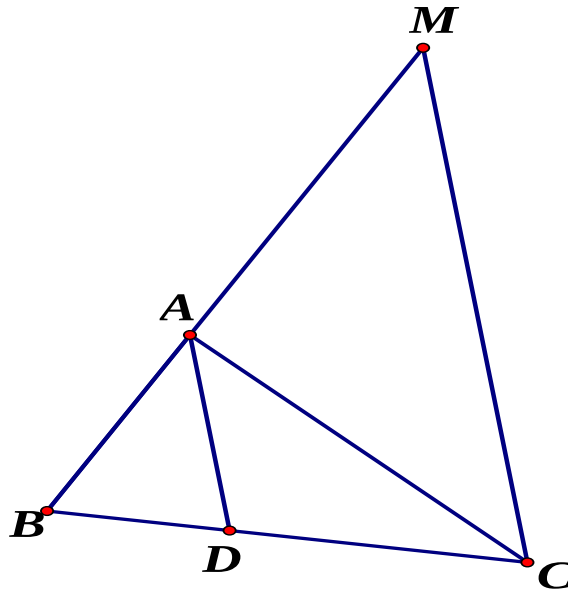
$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ do đó hai tam giác } ADC \text{ và } IBD \text{ đồng dạng}$$

Suy ra $\angle ACD = \angle BDI$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \angle ADH = \angle BDI$

Mà $\angle ADH + \angle BDH = 45^\circ \Rightarrow \angle BDI + \angle BDH = 45^\circ$ hay $\angle HDI = 45^\circ$

2)



Gọi AD là đường phân giác trong góc A, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại M

Ta có: $\angle BAD = \angle AMC$ (hai góc ở vị trí đồng vị)

$\angle DAC = \angle ACM$ (hai góc ở vị trí so le trong)

Mà $\angle BAD = \angle DAC$ nên $\angle AMC = \angle ACM$ hay $\triangle ACM$ cân tại A, suy ra $AM = AC = b$

Do $AD \parallel CM$ nên $\frac{AD}{CM} = \frac{BA}{BM} = \frac{c}{b+c}$

$$\text{Mà } CM < AM + AC = 2b \Rightarrow \frac{c}{b+c} > \frac{AD}{2b} \Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{l_b} > \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) (2); \frac{1}{l_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (3)$$

Cộng (1);(2);(3) về theo về ta có điều phải chứng minh

Câu 5. Ta có: $a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Rightarrow a + b \leq 2$

Chứng minh được với hai số dương x, y thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

$$\text{Do đó: } S = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \leq 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \leq 1$$

Vậy GTLN của S là 1, đạt được khi $a = b = 1$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 99. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

- Rút gọn M
- Tìm a để $M > 0$
- Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2. (5 điểm)

- Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}$

b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

- Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{1-x}{x-m} + \frac{x-2}{x+m} = \frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2}$$

- Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Câu 3. (4 điểm)

- Cho $x + y + z = 1$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Tính $A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$
- Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc 30 km/h , nhưng sau khi đi được 1 giờ người ấy nghỉ hết 15 phút, do đó phải tăng vận tốc thêm 10 km/h để đến B đúng giờ đã định. Tính quãng đường AB ?

Câu 4. (5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O , M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$

- Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân
- Chứng minh : $ME \parallel BN$
- Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Câu 5. (2 điểm)

Cho số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2016$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a+3b+3c+1}{2015+a} + \frac{3a+2b+3c}{2016+b} + \frac{3a+3b+2c-1}{2017+c}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2 điểm)

- Điều kiện: $a \neq 0; a \neq 1$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } M &= \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2} \\
&= \left[\frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)} \\
&= \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4} \\
&= \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4} \\
&= \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2+4} = \frac{4a}{a^2+4}
\end{aligned}$$

b) $M > 0 \Leftrightarrow 4a > 0 \Leftrightarrow a > 0$

Kết hợp với điều kiện suy ra $M > 0$ khi $a > 0$ và $a \neq 1$

c) Ta có: $M = \frac{4a}{a^2+4} = \frac{(a^2+4) - (a^2-4a+4)}{a^2+4} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$

Vì $\frac{(a-2)^2}{a^2+4} \geq 0$ với mọi a nên $1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4} \leq 1$ với mọi a

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{(a-2)^2}{a^2+4} = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Vậy $\text{Max}_M = 1$ khi $a = 2$.

Câu 2.

1)

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} &= \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92} \\
\Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{98} + 1 \right) + \left(\frac{x+4}{96} + 1 \right) &= \left(\frac{x+6}{94} + 1 \right) + \left(\frac{x+8}{92} + 1 \right) \\
\Leftrightarrow (x+100) \cdot \left(\frac{1}{98} + \frac{1}{96} - \frac{1}{94} - \frac{1}{92} \right) &= 0
\end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{98} + \frac{1}{96} - \frac{1}{94} - \frac{1}{92} \neq 0$

Do đó: $x+100=0 \Leftrightarrow x=-100$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -100$

b) Ta có:

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 1)(x^3 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1)(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0 (*)$$

$$\text{Do } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0 \text{ với mọi } x$$

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$$

$$2) \quad \frac{1-x}{x-m} + \frac{x-2}{x+m} = \frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2} \quad (1)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x+m \neq 0 \text{ và } x-m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm m$$

$$\Rightarrow (1-x)(x+m) + (x-2)(x-m) = 2 - 2(x-m)$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)x = m-2 (*)$$

$$+\text{Nếu } 2m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2} \text{ ta có: } (*) \Leftrightarrow 0x = \frac{-3}{2} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$+\text{Nếu } m \neq \frac{1}{2} \text{ ta có } (*) \Leftrightarrow x = \frac{m-2}{2m-1}$$

$$- \text{ Xét } x=m$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1} = m \Leftrightarrow m-2 = 2m^2 - m$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

(Không xảy ra vì vế trái luôn dương)

$$\text{Xét } x=-m$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1} = -m \Leftrightarrow m-2 = -2m^2 + m$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

$$\text{Vậy phương trình vô nghiệm khi } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = \pm 1$$

$$3) \quad \text{Ta có: } g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\text{Vì } f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 \text{ chia hết cho đa thức } g(x) = x^2 + x - 2$$

$$\text{Nên tồn tại một đa thức } q(x) \text{ sao cho } f(x) = g(x).q(x)$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1)q(x)$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có: } a=-4 \text{ và } b=-2$$

Câu 3.

$$1) \quad \text{Từ } x + y + z = 1 \Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 1$$

$$\text{Mà } x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^3 - z^3 - (x^3 + y^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z - z) \left[(x + y + z)^2 + (x + y + z)z + z^2 \right] - (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + xz + yz + z^2 + z^2 - x^2 + xy - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(3z^2 + 3xy + 3yz + 3xz) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)3(y + z)(x + z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ x = -z \end{cases}$$

$$* \text{ Nếu } x = -y \Rightarrow z = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$$

$$* \text{ Nếu } y = -z \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$$

$$* \text{ Nếu } x = -z \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$$

2)

Gọi $x(km)$ là độ dài quãng đường AB. ĐK: $x > 0$

Thời gian dự kiến đi hết quãng đường AB: $\frac{x}{30}$ (giờ)

Quãng đường đi được sau 1 giờ: $30(km)$

Quãng đường còn lại : $x - 30(km)$

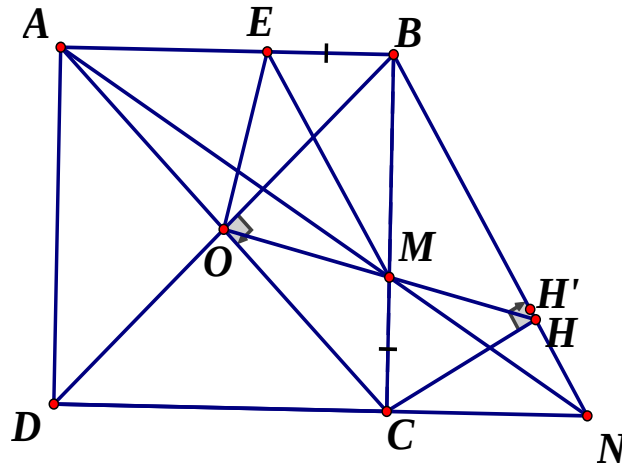
Thời gian đi quãng đường còn lại: $\frac{x - 30}{40}$ (giờ)

Theo bài ta có phương trình: $\frac{x}{30} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{x - 30}{40}$

$$\Leftrightarrow 4x = 30.5 + 3.(x - 30) \Leftrightarrow x = 60 (\text{thỏa mãn})$$

Vậy quãng đường AB là $60km$.

Câu 4.



a) Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có : $OB = OC$

Và $B_1 = C_1 = 45^\circ$

$BE = CM$ (gt)

Suy ra $\triangle OEM = \triangle OMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow OE = OM$ và $O_1 = O_3$

Lại có: $O_2 + O_3 = \angle BOC = 90^\circ$ vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow O_2 + O_1 = \angle EOM = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

b) Từ giả thiết $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = CD$ và $AB \parallel CD$

+ $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (định lý Ta-let) (*)

Mà $BE = CM$ (gt) và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào (*)

Ta có: $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN$ (theo Định lý Talet đảo)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \angle OME = \angle MH'B$

Mà $\angle OME = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại $O \Rightarrow \angle MH'B = 45^\circ = C_1$

$\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH'$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OM}{BM} = \frac{MC}{MH'}$, kết hợp $\angle OMB = \angle CMH'$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH'$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle OBM = \angle MH'C = 45^\circ$

Vậy $\angle BH'C = \angle BH'M + \angle MH'C = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN$ ($H \in BN$) $\Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

Câu 5.

Ta có:

$$P = \frac{2a+3b+3c+1}{2015+a} + \frac{3a+2b+3c}{2016+b} + \frac{3a+3b+2c-1}{2017+c}$$

$$= \frac{b+c+4033}{2015+a} + \frac{c+a+4032}{2016+b} + \frac{a+b+4031}{2017+c}$$

Đặt

$$2015+a = x$$

$$2016+b = y$$

$$2017+c = z$$

$$P = \frac{b+c+4033}{2015+a} + \frac{c+a+4032}{2016+b} + \frac{a+b+4031}{2017+c}$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} = 6 \quad (\text{Co-si})$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$ suy ra $a = 673, b = 672, c = 671$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 6 khi $a = 673, b = 672, c = 671$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

ĐỀ SỐ 100. ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN LỚP 8

Bài 1. (4,5 điểm)

Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$

a) Tìm điều kiện xác định của Q , rút gọn Q

b) Tìm x khi $Q = \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q .

Bài 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 2x^2 - x + 2$

c) Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho: $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Cho $abc \neq \pm 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$

b) Cho số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng: $BD \cdot DC = DH \cdot DA$

b) Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

c) Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

d) Gọi M, N, P, Q, I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB, EF, FD, DE . Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = b; BC = a$. Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}.$$

Bài 6. (1,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0; a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) ĐK: $x \neq -1; x \neq -2$

$$Q = \frac{x^2 - x + 1 + 6x + 3 - 2x - 2}{x^3 + 1} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

$$b) \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện suy ra $x = 2$ thì $Q = \frac{1}{3}$

$$c) Q = \frac{1}{x^2 - x + 1}; \text{ Vì } 1 > 0; x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$Q \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (tm). \text{ Lúc đó } Q = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy GTLN của } Q \text{ là } Q = \frac{4}{3} \text{ khi } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Câu 2. a) ĐK: } x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}$$

$$\frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+20x+21-4x^2-12x-5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2+16x+7-6x^2-9x+9}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x+16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2+7x+16}{(2x+7)}$$

$$\Rightarrow 8x+16 = -2x^2+7x+16 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (tm) \\ x=\frac{-1}{2} & (ktm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$

b) Ta có

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x - 2) = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$$

c) Ta có:

$$x^2 = y^2 + 2y + 13 \Leftrightarrow x^2 = (y + 1)^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y - 1) = 12$$

Do $x + y + 1 - (x - y - 1) = 2y + 2$ là số chẵn và $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x + y + 1 > x - y - 1$. Do đó $x + y + 1$ và $x - y - 1$ là hai số nguyên dương chẵn

Từ đó suy ra chỉ có một trường hợp : $x + y + 1 = 6$ và $x - y - 1 = 2$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ và } y = 1. \text{ Vậy } (x; y) = (4; 1)$$

Câu 3.

$$\text{a) Từ } \frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

Do đó:

$$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b - c}{bc}; b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c - a}{ac}; c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}$$

$$\text{Suy ra : } (a-b)(b-c)(c-a) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0 \text{ (do } abc \neq \pm 1)$$

Suy ra $a = b = c$

$$\text{b) Ta có: } 2^n = 10a + b \Rightarrow b : 2 \Rightarrow ab : 2 \quad (1)$$

Ta chứng minh $ab : 3 \quad (2)$

Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

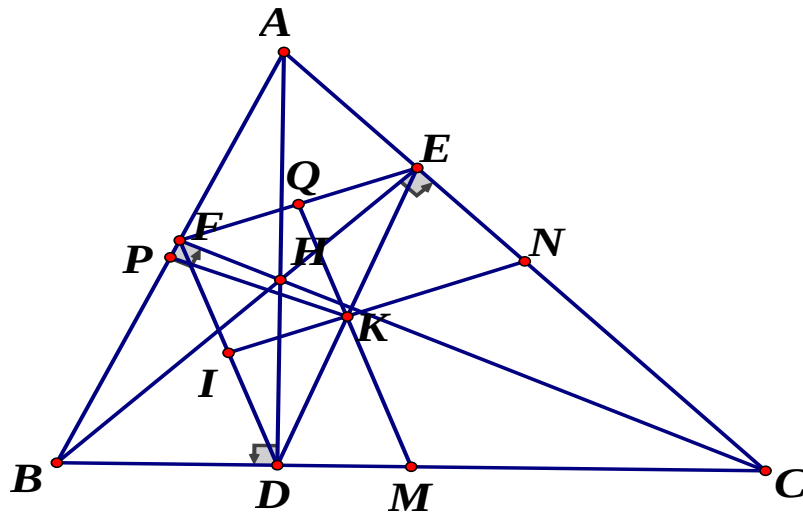
Đặt $n = 4k + r (k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3)$ ta có: $2^n = 16^k \cdot 2^r$

Nếu $r = 0$ thì $2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 10 \Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

$$\text{Suy ra } b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow ab : 3$$

Từ (1) và (2) suy ra $ab : 6$

Câu 4.



$$\text{a) Chỉ ra được } \triangle BDH \sim \triangle ADC (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DH \cdot DA$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HD \cdot BC}{\frac{1}{2} AD \cdot BC} = \frac{HD}{AD}$$

$$\text{Tương tự } \frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}, \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Do đó: } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\text{c) Chứng minh được } \triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow AEF = ABC$$

Tương tự: $DEC = ABC$. Do đó: $AEF = DEC$

Mà $AEF + HEF = DEC + HED = 90^\circ$ nên $HEF = HED$

$\Rightarrow EH$ là phân giác ngoài của góc EFD

Do đó H là giao các đường phân giác của tam giác DEF

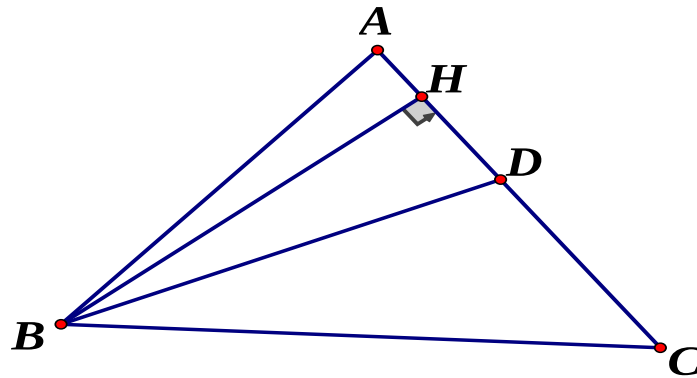
d) Do $\triangle BEC$ vuông tại E, M là trung điểm BC nên $EM = \frac{1}{2}BC$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền), Tương tự: $FM = \frac{1}{2}BC$

Do đó: $\triangle EMF$ cân tại M, mà Q là trung điểm EF nên $MQ \perp EF$

$\Rightarrow MQ$ là đường trung trực của EF hay MQ là đường trung trực của tam giác DEF.

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được NI và PK cũng là đường trung trực của tam giác DEF nên ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm

Câu 5.



Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC

Tam giác BAD cân tại B ($BA = BD$) có BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$$\Rightarrow AH = \frac{AD}{2}$$

Tam giác ABC có BD là đường phân giác, ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{DA}{b} = \frac{DC}{a} = \frac{DA + DC}{a + b} = \frac{AC}{a + b} = \frac{b}{a + b} \Rightarrow DA = \frac{b^2}{a + b}$$

Tam giác HAB vuông tại H, theo định lý Pytago ta có:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow BH^2 = b^2 - \frac{AD^2}{4} \quad (1)$$

Tam giác HBC vuông tại H, theo định lý Pytago, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow BH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2 = a^2 - \left(b - \frac{AD}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = a^2 - b^2 + b \cdot AD - \frac{AD^2}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$b^2 - \frac{AD^2}{4} = a^2 - b^2 + b \cdot AD - \frac{AD^2}{4} \Rightarrow b^2 - a^2 = b \cdot AD - b^2$$
$$\Rightarrow (b+a)(b-a) = \frac{-ab^2}{a+b} \Rightarrow \frac{a-b}{ab} = \frac{b}{(a+b)^2} \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}$$

Vậy bài toán được chứng minh

Câu 6.

Do $a, b > 0$ và $1+b^2 \geq 2b$ với mọi b nên:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$

Mà $a+b+c=3$ nên $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$ (1)

Cũng từ $a+b+c=3 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 9$$

Mà $a^2 + b^2 \geq 2ab; b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ac$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+bc+ca$

Suy ra $3(ab+bc+ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq 3$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ (dpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

(Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa)

HẾT