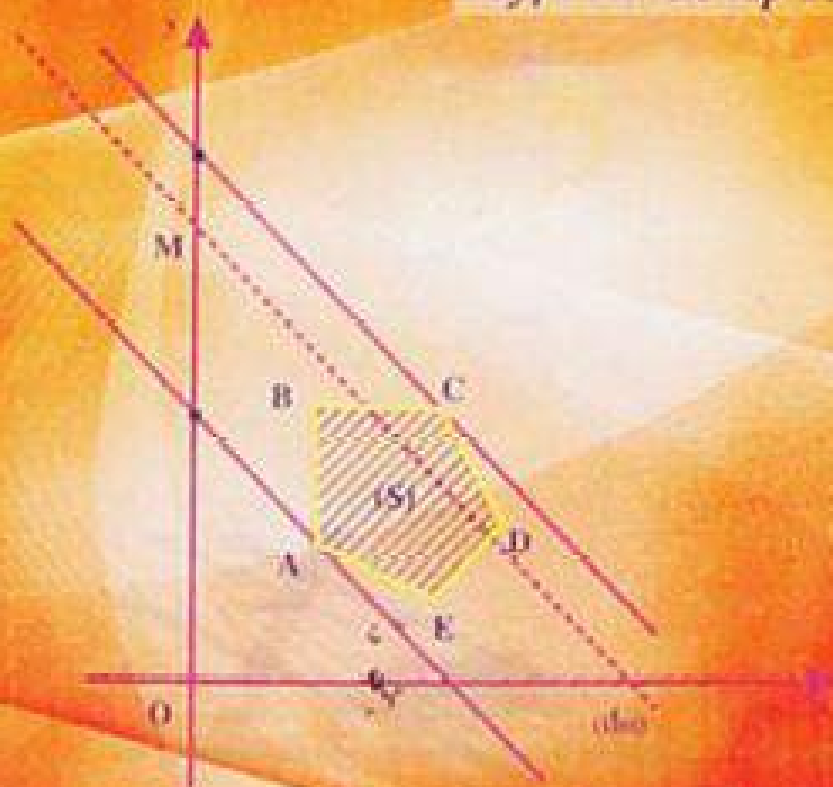


Tuyển chọn
ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO LỚP 10 CHUYÊN

Môn **TOÁN**

Luyện thi vào lớp 10 chuyên



ĐỀ 1**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN***(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)**(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)***Câu 1 (3 điểm)**1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.2) Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 \\ x^2 - xy + 3y^2 = 11 \end{cases}$$
Câu 2 (2 điểm)1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0$.2) Giải phương trình: $2\sqrt[4]{\frac{x^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3x}{2}}$ **Câu 3 (1 điểm)**Cho x, y là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2}$$

Câu 4 (3 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ tiếp tuyến chung CD (C, D là tiếp điểm, $C \in (O), D \in (O')$). Đường thẳng qua A song song với CD cắt (O) tại E , (O') tại F . Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của BD và BC với EF . Gọi I là giao điểm của EC với FD . Chứng minh rằng:

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCID$ nội tiếp.b) CD là trung trực của đoạn thẳng AI .b) IA là phân giác góc MIN .**Câu 5 (1 điểm)**

Cho 1010 số tự nhiên phân biệt không vượt quá 2015 trong đó không có số nào gấp 2 lần số khác. Chứng minh rằng trong các số được chọn luôn tìm được 3 số sao cho tổng của 2 số bằng số còn lại.

----- Hết -----

(Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:.....

ĐỀ 2

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho phương trình $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$ (với $x \in \mathbb{R}$)

Chứng minh rằng: $x = \sqrt{6 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 2. (2,5 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x(x+1)(y+1) + xy = -6 \\ 2y(y+1)(x+1) + yx = 6 \end{cases} \quad (\text{với } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho tam giác đều MNP có cạnh bằng 2 cm. Lấy n điểm thuộc các cạnh hoặc ở phía trong tam giác đều MNP sao cho khoảng cách giữa hai điểm tùy ý lớn hơn 1 cm (với n là số nguyên dương). Tìm n lớn nhất thỏa mãn điều kiện đã cho.

Câu 4. (1 điểm)

Chứng minh rằng trong 10 số nguyên dương liên tiếp không tồn tại hai số có ước chung lớn hơn 9.

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC không là tam giác cân, biết tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn (I) tại điểm N (N không trùng với D), gọi K là giao điểm của AI và EF.

- 1) Chứng minh rằng các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I).

----- Hết -----

(Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:.....

ĐỀ 3**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức:

$$P = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

b) Cho $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1}$. Tính $Q = x^3 + 12x + 2009$.**Câu 2. (3,5 điểm)** Cho phương trình $a(a+3)x^2 - 2x - (a+1)(a+2) = 0$ (a là tham số, nguyên).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm hữu tỷ.

b) Xác định a để phương trình có các nghiệm đều nguyên.**Câu 3. (5,0 điểm)** Giải phương trình và hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 13x + 2(3x+2)\sqrt{x+3} + 42 = 0; & \text{b) } \begin{cases} \sqrt{x^2+9} + y = 9 \\ \sqrt{y^2+9} + x = 9 \end{cases} \end{array}$$

Câu 4. (2,5 điểm)a) Chứng minh rằng với mọi $x, y > 0$: $\frac{2}{x^2+2y^2+3} \leq \frac{1}{xy+y+1}$.b) Cho 3 số dương a, b, c với $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3}.$$

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB \cdot AC = BC(AB+AC)$, có G là trọng tâm và BD, CE là các đường phân giác trong. Chứng minh rằng 3 điểm D, E, G thẳng hàng.

Câu 6. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O . Một điểm D di động trên cung nhỏ AC . Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = DC$. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng BE khi D di chuyển trên cung nhỏ AC .

----- Hết -----

(Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:.....

ĐỀ 4**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (1,5 điểm)

- a) Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.
- b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$

Câu 2 (2,0 điểm)

- a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$
- b) Tìm m để phương trình: $(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3 (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x - 1}(1 - x)$
- b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$

Câu 4 (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF .

- a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác $BHCK$ nội tiếp.
- b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BHCK$ lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R .
- c) Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}$$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 5

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 Cho $P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{4\sqrt{a}} \right]$ ($a > 0, a \neq 1$)

a) Rút gọn P

b) Đặt $Q = (a - \sqrt{a} + 1)P$. Chứng minh $Q > 1$

Câu 2 Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (1). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 - m)^2 + x_2 = m + 2$

Câu 3

1. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = x^2 - x - 2$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 & (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2+3x}) = 3 & (2) \end{cases}$$

Câu 4 Giải phương trình trên tập số nguyên $x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1$ (1)

Câu 5 Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC

a) Chứng minh $AH = 2OM$

b) Dựng hình bình hành AHIO. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Chứng minh rằng

$$OI \cdot OJ = R^2$$

c) Gọi N là giao điểm của AH với đường tròn (O) (N khác A). Gọi D là điểm bất kì trên cung nhỏ NC của đường tròn tâm (O) (D khác N và C). Gọi E là điểm đối xứng với D qua AC, K là giao điểm của AC và HE. Chứng minh rằng $ACH = ADK$

Câu 6

1. Cho a, b là 2 số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$

2. Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn $a + b = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + 2a} + \frac{1}{b^2 + 2b} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 6

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Cho $a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2015$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y - 2x + 1} - \sqrt{3 - 3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x + y + 5} - \sqrt{x + 2y - 2} \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$.

2) Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a + b)^3 + 4ab \leq 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 7

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1 (3,0 điểm).

Cho biểu thức: $P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ ($x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

- b) Tính giá trị của thức P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$
- c) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của x để biểu thức P có nghĩa thì biểu thức $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên.

Bài 2 (2,0 điểm).

Cho phương trình $x^2 - 2mx + (m - 1)^3 = 0$ (m là tham số).

- a) Giải phương trình khi $m = -1$.
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Bài 3 (1,0 điểm).

Giải phương trình: $\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}} - 1 = 0$

Bài 4 (3,5 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH, tâm O, cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại E và F. Gọi M là trung điểm của cạnh HC.

- a) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
- b) Chứng minh rằng MF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.
- c) Chứng minh $HAM = HBO$
- d) Xác định điểm trực tâm của tam giác ABM.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 8**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1: (1,5 điểm)

Giải phương trình: $2015\sqrt{2015x-2014} + \sqrt{2016x-2015} = 2016$

Câu 2: (1,5 điểm)

Cho phương trình $(x-2)(x^2-x) + (4m+1)x - 8m - 2 = 0$ (x là ẩn số). Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = (x+1)(y+1) \\ \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y, z :

$$P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$, Giả sử B, C cố định và A di động trên đường tròn sao cho $AB < AC$ và $AC < BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N.

- Chứng minh rằng $OM.ON=R^2$
- Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn
- Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T, gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng ST. Chứng minh H chạy trên 1 đường tròn cố định khi A di động

Câu 5: (2,0 điểm)

- Cho a, b là hai số thay đổi thỏa mãn các điều kiện $a > 0, a + b \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{8a^2 + b}{4a} + b^2$
- Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 - 32x + 4y + 39 = 0$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 9

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \neq 1; x \geq 0$). Rút gọn A, sau đó tính giá trị A - 1

khi $x = 2016 + 2\sqrt{2015}$

b) Cho $A = 2(1^{2015} + 2^{2015} + \dots + n^{2015})$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho $n(n+1)$

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình sau: $\frac{6}{x^2-9} + \frac{4}{x^2-11} - \frac{7}{x^2-8} - \frac{3}{x^2-12} = 0$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+4)(4x+y) = 6 \\ x^2 + 8x + y = -5 \end{cases}$$

Câu 3. (1 điểm) Cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng (d): $y = bx + c$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác vuông trong đó a là độ dài cạnh huyền. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 < 2$

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Các tia phân giác các góc EHB, DHC cắt AB, AC lần lượt tại I và K. Qua I và K lần lượt vẽ các đường vuông góc với AB, AC chúng cắt nhau tại M.

a) Chứng minh $AI = AK$.

b) Giả sử tam giác nhọn ABC có hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A di động. Chứng minh đường thẳng HM luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (2 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua A và B lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O). Từ điểm M bất kì trên (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt d_1 tại C và cắt d_2 tại D. Đường tròn đường kính CD cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung AM), gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b) Chứng minh MI vuông góc với AB và ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Câu 6. (1 điểm) Cho ba số thực x; y; z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z - (xy + yz + zx)$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 10

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (2,0 điểm) Chứng minh:

a) $A = \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B = \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên.

c) Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

Tính $x+y$ biết $(x+\sqrt{x^2+2015})(y+\sqrt{y^2+2015})=2015$.

Câu 2 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x=y^2+y \\ x^2+y^2=5 \end{cases} (x,y \in \mathbb{R})$

Câu 3 (1,5 điểm) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a+b=3, ab=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a^2-b^2)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$$

Câu 4 (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , $AB < AC$. Phân giác góc BAC cắt BC tại D . Đường tròn tâm I đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại E và F .

a) Chứng minh rằng $AD \perp EF$.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của AD và (O) . Chứng minh rằng $\triangle ABD \sim \triangle AKC$

c) Kẻ $EH \perp AC$ tại H . Chứng minh rằng $HE \cdot AD = EA \cdot EF$

d) Hãy so sánh diện tích của tam giác ABC với diện tích của tứ giác $AEKF$.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}$.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 11

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1: Cho biểu thức $P = \left[\frac{-x}{\sqrt{x}(x-9)} + \frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right] : \left(\sqrt{x}+3 - \frac{x}{\sqrt{x}-3} \right)$ với $x > 0; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P = -\frac{1}{4}$

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 2m + 2 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = -1$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$|2(x_1 + x_2) + x_1 x_2| = 3$$

Bài 3: a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{x+1} = -1$

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy^2 + 2y^2 - 2 = x^2 + 3x \\ x + y = 3\sqrt{y-1} \end{cases}$$

Bài 4: Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $\angle BAC = 45^\circ$, $BC = a$. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AC và từ C xuống AB. Gọi I là điểm đối xứng của O qua EF.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BFOC và AEIF nội tiếp được đường tròn

b) Tính EF theo a

Bài 5: Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 12**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN***(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)**(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)***Câu 1 (2,0 điểm).**

Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{a-3\sqrt{a}}{a-9}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3} + \frac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}} - \frac{9-a}{a+\sqrt{a}-6}\right)$ ($a \geq 0; a \neq 4; a \neq 9$)

- Rút gọn A.
- Tìm a để $A + |A| = 0$

Câu 2 (2,0 điểm).

- Giải phương trình: $\sqrt{29-x} + \sqrt{x+3} = x^2 - 26x + 177$
- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = xy + x + y \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - y + 1 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

- Cho hai phương trình: $x^2 + bx + c = 0(1); x^2 - b^2x + bc = 0(2)$ (trong đó x là ẩn, b và c là các tham số).

Biết phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 , phương trình (2) có hai nghiệm x_3 và x_4 thỏa mãn điều kiện $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Xác định b và c.

- Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB, vẽ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O (D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác A). Đường thẳng DE cắt MN tại I.

Chứng minh rằng:

- Bốn điểm B, D, M, I cùng thuộc một đường tròn.
- $MI \cdot BE = BI \cdot AE$
- Khi điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2}$$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 13

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{4}$.

Rút gọn biểu thức P và tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$.

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{a^3}{c+a^2} + \frac{b^3}{a+b^2} + \frac{c^3}{b+c^2}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a + 1)(b + 1) + 25.$$

b) Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AK ; lấy điểm I thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) (I khác A, B). Gọi M là giao điểm của IK và BC , đường trung trực của đoạn thẳng IM cắt AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Câu 5. (4,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) và có trục tâm là H . Gọi D, E, F lần lượt là các chân đường cao vẽ từ A, B, C của tam giác ABC .

a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC , gọi L là giao điểm của đường thẳng AK và đường tròn (O) (L khác A). Chứng minh HL vuông góc với AK .

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Gọi N và P lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm M qua hai đường thẳng AB và AC . Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 14**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1: Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

a) Tính giá trị biểu thức:
$$P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

b) Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$$

Câu 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

Câu 3: Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số. tìm tất cả các giá

trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị là số nguyên.

Câu 4: Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi CT là đường phân giác trong của tam giác (T thuộc cạnh AB).

1). Chứng minh rằng đường tròn (K) đi qua $C; T$ và tiếp xúc với AB có tâm K thuộc BC .

2). Gọi giao điểm của AC và (K) là $x^2, y^2 \equiv 1, 4 \pmod{5} \Rightarrow x^4, y^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow A:5$ khác C , giao điểm của DB và (K) là E khác D . Chứng minh rằng $ABD = BCE$.

3). Gọi giao điểm của CE và $x^4 \equiv y^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (x^4 - y^4):5$ là M . Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BT .

Câu 5: a) Cho các số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 670$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 15

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}.$$

b) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x^2 + 1942$.

c) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$

Câu 2. (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2m + 1 \\ 4x + 2y = 5m - 1 \end{cases}$
- 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol (P): $y = x^2$ cắt đường thẳng d: $y = mx - 2$ tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K.

1. Tính số đo góc BIF
2. Giả sử M là điểm di chuyển trên đoạn CE .
 - a. Khi $AM = AB$, gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng ba điểm A, O, H thẳng hàng, từ đó suy ra tứ giác ABHI nội tiếp.
 - b. Gọi N là giao điểm của đường thẳng BM với cung nhỏ EF của (O), P, Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE và DF. Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ max.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geq 3$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 16**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (2.0 điểm) Cho biểu thức : $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Cho biểu thức $Q = \frac{(x+27).P}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$. Chứng minh $Q \geq 6$.

Câu 2 (1.0 điểm) Cho phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số).

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

Câu 3 (2.0 điểm)

a) Giải phương trình : $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$.

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 - xy^2 + 1} + 3\sqrt{x-1} = xy^2 & (2). \end{cases}$$

Câu 4 (3.0 điểm)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 60^\circ$, $AC = b, AB = c$ ($b > c$). Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M (E thuộc cung lớn BC). Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC.

a) Chứng minh các tứ giác AIEJ, CMJE nội tiếp và $EA \cdot EM = EC \cdot EI$.

b) Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK.

c) Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c.

Câu 5 (1. điểm) Chứng minh biểu thức $S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

Câu 6 (1. điểm)

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4 \leq 2$.

b) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $\sqrt{xy}(x-y) = x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+y$

————— Hết —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 17**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN***(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)**(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)***Câu 1 (2 điểm).** Giả thiết $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = a$.

Chúng minh rằng: $x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z)^2(a+x)^2}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a$.

Câu 2 (2,5 điểm). Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - 1$ với m là tham số.a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = 1$ b) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi y_1, y_2 là tung độ của A, B. Tìm m sao cho $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$ **Câu 3 (1,5 điểm).** Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km.Vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB saubằng $\frac{1}{2}$ vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại Avới vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10 km/h. Thời gian

kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

Câu 4 (3,0 điểm). Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = AB$

c) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AMPC và BMPD cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh CDFE là hình thang.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq 7$$

————— Hết —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 18

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1: (2,5 điểm) Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x-4}{x-3\sqrt{x}+2} + 1 \right) : \frac{1}{2x-3\sqrt{x}+1} \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1; x \neq 4)$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x sao cho $P = 2019$.

c) Với $x \geq 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của $T = P + \frac{10}{x}$.

Câu 2: (0,75 điểm) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = mx + m$ và $(d_2): y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}$ (với m là tham số, $m \neq 0$). Gọi $I(x_0; y_0)$ là tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) với (d_2) . Tính $T = x_0^2 + y_0^2$.

Câu 3: (1,25 điểm) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 + (2-m)x - 1 - m = 0$ (m là tham số).

a) Tìm m để $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$.

b) Tìm m sao cho $T = \frac{1}{(x_1+1)^2} + \frac{1}{(x_2+1)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4: (1,5 điểm) a) Giải phương trình: $\sqrt{4x+8072} + \sqrt{9x+18162} = 5$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x = 1 \end{cases}$$

Câu 5: (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O bán kính a và điểm J có $JO = 2a$. Các đường thẳng JM, JN theo thứ tự là các tiếp tuyến tại M, tại N của đường tròn (O). Gọi K là trực tâm của tam giác JMN, H là giao điểm của MN với JO.

a) Chứng minh rằng: H là trung điểm của OK.

- b) Chứng minh rằng : K thuộc đường tròn tâm O bán kính a .
 c) JO là tiếp tuyến của đường tròn tâm M bán kính r . Tính r .
 d) Tìm tập hợp điểm I sao cho từ điểm I kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn (O) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Câu 6: (0,5 điểm) Cho x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn : $12x + 10y + 15z \leq 60$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - z$.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

ĐỀ 19

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (3,0 điểm). 1. Cho $f(x) = \frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + \dots + f\left(\frac{2010}{2012}\right) + f\left(\frac{2011}{2012}\right)$$

2. Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$

Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Câu 2 (1,5 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x+y)^3 = (x-y-6)^2$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện:

$$abc + bcd + cda + dab = a + b + c + d + \sqrt{2012}$$

Chứng minh rằng: $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) \geq 2012$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho ba đường tròn (O_1) , (O_2) và (O) (kí hiệu (X) chỉ đường tròn có tâm là điểm X). Giả sử (O_1) , (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm I và (O_1) , (O_2) lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại M_1, M_2 . Tiếp tuyến của đường tròn (O_1) tại điểm I cắt

đường tròn (O) lần lượt tại các điểm A, A' . Đường thẳng AM_1 cắt lại đường tròn (O_1) tại điểm N_1 , đường thẳng AM_2 cắt lại đường tròn (O_2) tại điểm N_2 .

1. Chứng minh rằng tứ giác $M_1N_1N_2M_2$ nội tiếp và đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng N_1N_2 .
2. Kẻ đường kính PQ của đường tròn (O) sao cho PQ vuông góc với AI (điểm P nằm trên cung AM_1 không chứa điểm M_2). Chứng minh rằng nếu PM_1, QM_2 không song song thì các đường thẳng AI, PM_1 và QM_2 đồng quy.

Câu 5 (1,0 điểm) Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, trong đó mỗi một điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó cùng màu hoặc đôi một khác màu.

————— Hết —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 20

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu I (2.0 điểm).

$$\text{Cho } A = \frac{x \left(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \right)}{\sqrt{x^2-8x+16}} \text{ với } x > 4$$

- a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.
- b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu II (1.5 điểm).

Giả sử phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có 2 nghiệm lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 - a - 2b}{b - a + 1} \geq \frac{2\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}}.$$

Câu III (2.0 điểm).

Giải phương trình: $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$

Câu IV (3.5 điểm).

Cho đường tròn $(O;R)$; AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn $(O;R)$ cắt các đường thẳng AC, AD thứ tự tại E và F.

- Chứng minh tứ giác ACBD là hình chữ nhật.
- Chứng minh $\triangle ACD \sim \triangle CBE$
- Chứng minh tứ giác CDFE nội tiếp được đường tròn.
- Gọi S, S_1, S_2 thứ tự là diện tích của $\triangle AEF, \triangle BCE$ và $\triangle BDF$. Chứng minh:

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$$

Câu V (1.0 điểm).

Cho $x > y \geq 0$. Chứng minh rằng: $x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 21

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (2,5 điểm)

- Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}$.

- Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$.

Câu 2 (2,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{-x^2}{2}$.

Gọi (d) là đường thẳng đi qua $I(0; -2)$ và có hệ số góc k.

- a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi k thay đổi.
- b) Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK vuông tại I.

Câu 3 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB = 2R. CD là dây cung thay đổi của nửa đường tròn sao cho CD = R và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). AD cắt BC tại H, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F.

- a) Chứng minh tứ giác CFDH nội tiếp
- b) Chứng minh CF.CA = CH.CB
- c) Gọi I là trung điểm của HF. Chứng minh tia OI là tia phân giác của góc COD.
- d) Chứng minh điểm I thuộc một đường tròn cố định khi CD thay đổi

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{3}{2}$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 22

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (2,5 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

1. Chứng minh $P = \frac{1}{ab}$

2. Giả sử a, b thay đổi sao cho $4a + b + \sqrt{ab} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 2 (2,0 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$ với m là tham số

1. Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

2. Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m . Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ. Chứng minh đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$

Câu 3 (1,5 điểm) Cho a, b là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình $a(a - x)^2 + b(x - b)^2 = 0$ có nghiệm duy nhất. Chứng minh $|a| = |b|$.

Câu 4 (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có các góc ABC, ACB nhọn và $BAC = 60^\circ$. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I .

1. Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.

2. Gọi K là giao điểm thứ hai (khác B) của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I . Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

3. Chứng minh $AK \perp B_1C_1$.

Câu 5 (1,0 điểm) Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$

————— Hết —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 23

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1. (2,0 điểm) a) Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z = xyz. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{3z}{1+z^2} = \frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

b) Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn:

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ và $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

c) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z = 0 \text{ và } xyz \neq 0. \text{ Tính giá trị biểu thức: } P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 4$.

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi

x_1, x_2 là hoành độ của các điểm A, B. Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}$.

b) Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 8.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 5 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Giả sử phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều khác 1. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{4}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} + (x_1 + x_2 - 6)^2$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, với $\angle ABC = 60^\circ$, $BC = 2a$ và $AB < AC$. Gọi (O) là đường tròn đường kính BC (O là trung điểm BC). Đường tròn (O) cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (D khác B, E khác C), BE cắt CD tại H.

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b) Chứng minh: $HB \cdot DE = HD \cdot BC$

c) Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt đường thẳng DI tại M. Tính tỉ số $\frac{OB}{OM}$

d) Gọi F là giao điểm của AH và BC. Cho $BF = \frac{3a}{4}$, tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác DEF theo a

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 24**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN***(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)**(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)***Câu 1** (2,0 điểm) a) Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$. Tính: $P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$ b) Cho a là nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Không cần tính a hãy tính giá trị biểuthức: $Q = \frac{a^2}{a^4 + a^2 + 1}$ **Câu 2** (2,5 điểm)a) Giải phương trình $x^2 + x - 4\sqrt{3x+1} + 6 = 0$ b) Trong hệ tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx + 2$ (m là tham số). Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho $S_{OAB} = 2\sqrt{6}$ **Câu 3** (1,0 điểm)Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 11$. Tìm GTNN

$$P = \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 11)} + \sqrt{12(b^2 + 11)} + \sqrt{c^2 + 11}}$$

Câu 4 (1,0 điểm) Tìm số tự nhiên n biết $n + S(n) = 2015$, với $S(n)$ là tổng các chữ số của n .**Câu 5** (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H và cắt (O) tại M, N, P.

a) Chứng minh M đối xứng H qua BC.

b) Chứng minh $(AHB) = (BHC) = (CHA)$ ((AHB) là đường tròn đi qua ba điểm A, H, B)c) Tính $T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$ **Hết***Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.**Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:*

ĐỀ 25**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (2,0 điểm) a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 6$; $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 8$ Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$ **Câu 2 (2,0 điểm)** a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1 \\ x^3 - 3x - 3xy = 6 \end{cases}$$
b) phương trình: $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} = \sqrt[3]{4x-3}$ (4)**Câu 3 (2,0 điểm)** a) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$$

b) Tìm số tự nhiên bé nhất có 4 chữ số biết nó chia hết cho 7 được số dư là 2 và bình phương của nó chia hết cho 11 được số dư là 3.

Câu 4 (3,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm I. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Hai đường thẳng BH, CH cắt đường tròn (I) lần lượt tại hai điểm P và Q (P khác B và Q khác C)

1, Chứng minh $IA \perp PQ$ 2, Trên hai đoạn HB và HC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM \perp MC$, $AN \perp NB$.Chứng minh $\triangle AMN$ cânb) Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 2\angle CBA = 4\angle ACB$. Chứng minh $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$ **Câu 5 (1,0 điểm)** Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} > 2015$$

————— Hết —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 26

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1: (1,5 điểm) Cho $\frac{a^4}{x} + \frac{b^4}{y} = \frac{1}{x+y}$ và $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng:

a) $bx^2 = ay^2$

b) $\frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$

Bài 2: (2,0 điểm) a) Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt{2x-1}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

Bài 3: (1,0 điểm)

a) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$ax_1 + bx_2 + c = 0$ Chứng minh rằng $ac(a + c - 3b) + b^3 = 0$.

b) Giả sử p, q là hai số nguyên dương khác nhau. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm $x^2 + px + q = 0; x^2 + qx + p = 0$.

Bài 4: (1,5 điểm) Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0; x + 1 > 0; y + 1 > 0$ và $z + 4 > 0$.

Tìm GTLN của $A = \frac{xy-1}{(x+1)(y+1)} + \frac{z}{z+4}$

Bài 5: (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy hai điểm C, D trên nửa đường tròn sao cho $AC = BD$ (C nằm giữa A và D). Gọi E là giao điểm của AD và BC.

- Chứng minh hai tam giác ACE, BDE bằng nhau.
- Chứng minh tứ giác AOEC, BOED nội tiếp.
- Đường thẳng qua O vuông góc AD cắt CD tại F. Tứ giác AODF là hình gì? Vì sao?
- Gọi G là giao điểm của AC và BD. Chứng minh O, E, G thẳng hàng.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 27

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

- Câu 1.** (2,0 điểm) 1) Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$ xác định.
- 2) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}$ khi $x=2\sqrt{2}$
- 3) Tìm tọa độ của các điểm có tung độ bằng 8 và nằm trên đồ thị hàm số $y = 2x^2$
- 4) Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=3$; $BC = 5$. Tính $\cos ACB$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right)\left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}\right)$ (với $x>0; x \neq 1$)

- Rút gọn biểu thức Q.
- Tìm các giá trị của x để $Q = -1$.

Câu 3. (2,5 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ (1) (với m là tham số).

- Giải phương trình với $m = 3$.
- Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có các nghiệm $x_1; x_2$, thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y} \\ x^2 + (x+3)(2x-y+5) = x+16 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính AH cắt các cạnh AB, AC, lần lượt tại M, N. Gọi O là trung điểm của đoạn BC, D là giao điểm của MN và OA.

- Chứng minh rằng:

a) AM. AB= AN. AC

b) Tứ giác BMNC là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng:

a) $\triangle ADI \sim \triangle AHO$.

b) $\frac{1}{AD} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HC}$

3) Gọi P là giao điểm của BC và MN, K là giao điểm thứ hai của AP và đường tròn đường kính AH. Chứng minh rằng $\angle BKC = 90^\circ$.

Câu 5. (1,0 điểm) 1) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x}$

2) Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 28

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho $x - 1$ dư 5. Tìm các hệ số a, b, c.

2) Cho các số a, b, x, y thỏa mãn $ab \neq 0$, $a + b \neq 0$, $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$; $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng:

a) $ay^2 = bx^2$

b) $\frac{x^{200}}{a^{100}} + \frac{y^{200}}{b^{100}} = \frac{2}{(a+b)^{100}}$

Bài 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y-x)(y-x-4) = x^2 - 4x \\ x(y-4) + 4\sqrt{x^2 - y} = 6 \end{cases}$$

2) Giải phương trình $3(x+1)\sqrt{x^2 + x + 3} - 3x^2 - 4x - 7 = 0$.

Bài 3. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) tiếp xúc ngoài tại M. Một đường thẳng cắt đường tròn (O_1) tại hai điểm phân biệt A, B và tiếp xúc với đường tròn (O_2) tại E (B nằm giữa A và E). Đường thẳng EM cắt đường tròn (O_1) tại điểm J khác M. Gọi C là điểm thuộc cung MJ không chứa A, B của đường tròn (O_1) (C khác M và J). Kẻ tiếp tuyến CF với đường tròn (O_2) (F là tiếp điểm) sao cho các đoạn thẳng CF, MJ không cắt nhau. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng JC và EF, K là giao điểm khác A của đường thẳng AI và đường tròn (O_1) . Chứng minh rằng:

1) Tứ giác MCFI là tứ giác nội tiếp và $JA = JI = \sqrt{JE \cdot JM}$

2) CI là phân giác góc ngoài tại C của tam giác ABC.

3) K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI

Bài 4. (1,0 điểm) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

Bài 5. (1,5 điểm)

1) Trong mặt phẳng cho tập S gồm 8065 điểm đôi một phân biệt mà diện tích của mỗi tam giác có 3 đỉnh thuộc tập S đều không lớn hơn 1 (quy ước nếu 3 điểm thẳng hàng thì diện tích của tam giác tạo bởi 3 điểm này bằng 0). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác T có diện tích không lớn hơn 1 chứa ít nhất 2017 điểm thuộc tập S (mỗi điểm trong số 2017 điểm đó nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác T)

2) Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 3.$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 29

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1: (2,0 điểm) Cho biểu thức $C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$.

- 1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C .
- 2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Câu 2: (2,5 điểm) a) Chứng minh rằng nếu: $x = \frac{a-b}{a+b}$; $y = \frac{b-c}{b+c}$; $z = \frac{c-a}{c+a}$

Thì: $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$

b)

Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn: $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$

Chứng minh rằng: $(ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$

Câu 3: (1,5 điểm) Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$

Câu 4: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A và (C) là đường tròn tâm C bán kính CA .

Lấy điểm D thuộc đường tròn (C) và nằm trong tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh

AB sao cho $BDM = \frac{1}{2}ACD$; N là giao điểm của đường thẳng MD với đường cao AH của

tam giác ABC ; E là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn (C) . Chứng minh rằng:

- a) MN song song với AE .
- b) $BD \cdot BE = BA^2$ và tứ giác $DHCE$ nội tiếp.
- c) HA là đường phân giác của góc DHE và D là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Câu 5: (1,0 điểm) Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 30**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN***(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)**(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)*

Bài 1. (2.00 điểm) Cho biểu thức $M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}}$

- 1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M.
- 2) Tính giá trị của M, biết rằng $x = (1 - \sqrt{3})^2$ và $y = 3 - \sqrt{8}$

Bài 2. (2,00 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{2}{x^2 + 17} + \frac{1}{2x^2 + 7} = \frac{2}{1 + \sqrt{(x^2 + 3)(x^2 + 15)}} \quad (x \in \mathbb{R})$

2) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $b \neq c; a + b \neq c$ và $c^2 = 2(ac + bc - ab)$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{a - c}{b - c}$

Bài 3. (2,00 điểm)

1) Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m + 1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

Bài 4. (4,00 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Hai đường tròn (B; BA) và (C; CA) cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Vẽ đường thẳng a bất kì qua D cắt đường tròn (B) tại M và cắt đường tròn (C) tại N (D nằm giữa M và N). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (B) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (C) cắt nhau tại E.

- 1) Chứng minh BC là tia phân giác của ABD
- 2) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh: $AD^2 = 4BI \cdot CI$
- 3) Chứng minh bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
- 4) Chứng minh rằng số đo MEN không phụ thuộc vị trí của đường thẳng a.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 31**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (2,0 điểm)

a) So sánh $N = \frac{6}{M}$ và $\frac{2.2016}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}}$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt{5}} - 2\sqrt[4]{25} - \sqrt[4]{125}}$.

Câu 2 (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ với a, b là tham số.

1) Giải phương trình khi $a = 3$ và $b = -5$.

2) Tìm giá trị của a, b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

điều kiện: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases}$.

Câu 3 (1,5 điểm)

Cho $m = \frac{a+b}{a-b}$; $n = \frac{c+d}{c-d}$; $p = \frac{ac-bd}{ad+bc}$. Chứng minh rằng: $m + n + p = m.n.p$

Câu 4 (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB , C là điểm chính giữa cung AB . Điểm M thuộc cung AC ($M \neq A, M \neq C$). Qua M kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn, gọi H là giao điểm của BM với OC . Từ H kẻ một đường thẳng song song với AB , đường thẳng đó cắt tiếp tuyến d ở E .

a. Chứng minh $OHME$ là tứ giác nội tiếp

b. Chứng minh $EH = R$

c. Kẻ MK vuông góc với OC tại K . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔOBC đi qua tâm đường tròn nội tiếp ΔOMK .

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho a, b là số các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = (a + b) \left(\frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{a + b^3} \right) - \frac{1}{ab}$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 32

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC

ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu I: Cho biểu thức $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$

- Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa
- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Câu II:

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx - m + 1$ ($m \neq 0$). Tìm m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu III: Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$

Câu IV: Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB. Điểm C là điểm bất kỳ trên (O). $C \neq A, B$. Tiếp tuyến tại C cắt tiếp tuyến tại A, B lần lượt tại P, Q

- Chứng minh: $AP \cdot BQ = R^2$
- Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ
- Gọi M là giao điểm của OP với AC, N là giao điểm của OQ với BC. Chứng minh: PMNQ là tứ giác nội tiếp.
- Xác định vị trí điểm C để đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ có bán kính nhỏ nhất

Câu V: Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 33

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x - \sqrt{x-8} - 3\sqrt{x} + 1 = 0.$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 10x - 10y \end{cases}$$

Bài II (2,5 điểm).

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4 - 1) : 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn
$$\begin{cases} p - 1 = 2x(x + 2) \\ p^2 - 1 = 2y(y + 2) \end{cases}$$

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$

Bài III (1,5 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Chứng minh $ab + ac + bc \leq \frac{3}{4}$

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H . Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC . Gọi E, F là điểm đối xứng của Q qua AB, AC .

1) CMR: $MH.MA = MP.MN$

2) CMR : E, F, H thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB. Gọi I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Bài V (1,0 điểm)

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < |a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < \frac{1}{1000}$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 34

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu I. Cho phương trình $(m^2 + 5)x^2 - 2mx - 6m = 0(1)$ với m là tham số.

- Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.
- Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

Câu II. 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(1 + x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1 + y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases}$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} \geq 3 + 2\sqrt{2}$

Câu III. Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

- Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.
- Chứng minh rằng nếu $c > 1$ thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố

Câu IV. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ ($C \neq A, C \neq B$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

- Chứng minh rằng $AN = AC, BM = BC$.
- Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.
- Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.

Câu V. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

- Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.
- Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

————— Hết —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 35

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1: (2,0 điểm): Cho biểu thức: $C = \frac{2}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$

- Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.
- Tìm giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$

Bài 2: (2,0 điểm)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases}$ (m là tham số)

- Giải hệ phương trình khi $m = 2$.
- Chứng minh rằng với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn: $x + 2y \leq 3$

Bài 3: (2,0 điểm):

1. Trong hệ tọa độ Oxy, tìm m để đường thẳng (d): $y = mx - m + 2$ cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4 - x - 2y(1) \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2(2) \end{cases}$$

Bài 4: (3,0 điểm): Cho đường tròn O đường kính BC và một điểm A nằm bất kì trên đường tròn (A khác B và C). Gọi AH là đường cao của DABC, đường tròn tâm I đường kính AH cắt các dây cung AB, AC tương ứng tại D, E.

1. Chứng minh rằng: góc DHE bằng 90° và $AB \cdot AD = AC \cdot AE$

2. Các tiếp tuyến của đường tròn (I) tại D và E cắt BC tương ứng tại G và F. Tính số đo góc GIF.

3. Xác định vị trí điểm A trên đường tròn (O) để tứ giác DEFG có diện tích lớn nhất.

Bài 5: (1,0 điểm): Cho ba số thực x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức

$$S = \frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 36

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1: (2.0 điểm) Cho biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$ (Với $x > 0$)

1. Rút gọn biểu thức P

2. Tính giá trị của biểu thức khi $x = 2\sqrt{2} + 3$

Câu 2: (2.0 điểm)

1. Cho phương trình: $2013x^2 - (m - 2014)x - 2015$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2$

2. Giải phương trình: $\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+2)^2} = 3$

Câu 3: (2,0 điểm) Tìm nghiệm của phương trình: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$

Câu 4: (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi M là điểm thuộc cung AB ($AB \neq A, M \neq B$) và I là điểm thuộc đoạn OA ($I \neq O, I \neq A$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M, kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với đường tròn (O). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IM, đường thẳng này cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi E là giao điểm của AM với IC, F là giao điểm của BM với ID. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp

2. $EF \parallel AB$

3. OM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác CEM và DFM.

Câu 5: (1,0 điểm) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2014$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 37

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC

ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1. (3,0 điểm) 1) Giải phương trình: $\sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - x - 2$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 96y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

Bài 2. (2,0 điểm) 1) Cho phương trình $x^2 - 2x - 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Tính $S = x_1^7 + x_2^7$

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

Bài 3. (1,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1.

Chứng minh: $\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$

Bài 4. (3,0 điểm) Cho hình bình hành ABCD với A, C cố định và B, D di động. Đường phân giác của góc BCD cắt AB và AD theo thứ tự tại I và J (J nằm giữa A và D). Gọi M là giao điểm khác A của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và AIJ, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ.

- 1) Chứng minh AO là phân giác góc IAJ.
- 2) Chứng minh bốn điểm A, B, D, O cùng thuộc một đường tròn.
- 3) Tìm đường tròn cố định luôn đi qua M khi B, D di động.

Bài 5. (1,0 điểm) Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ luôn tồn tại ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 11

Câu 1: (2 điểm) a) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-3} = 3x-4$

b) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 0$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$

Câu 2: (1,5 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} \\ x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} \end{cases}$$

Câu 3: (1,5 điểm) Cho tam giác đều ABC và M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC. Xác định vị trí của M để tam giác MDE có chu vi nhỏ nhất

Câu 4: (2 điểm). a) Cho x, y là 2 số thực khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

b) Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

Câu 5: (2 điểm) Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB với OM, I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A).

- a) Chứng minh HK vuông góc AI.
- b) Tính số đo góc MKB

Câu 6: (1 điểm) Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$2015(x^2 + y^2) - 2014(2xy + 1) = 25$$

ĐỀ 38**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN***(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)**(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)***Bài 1. (3,0 điểm)**

1) Giải phương trình: $\sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - x - 2$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 96y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Cho phương trình $x^2 - 2x - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $S = x_1^7 + x_2^7$

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

Bài 3. (1,0 điểm)Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1.

Chứng minh:
$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD với A, C cố định và B, D di động. Đường phân giác của góc BCD cắt AB và AD theo thứ tự tại I và J (J nằm giữa A và D). Gọi M là giao điểm khác A của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và AIJ, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ.

4) Chứng minh AO là phân giác góc IAJ.

5) Chứng minh bốn điểm A, B, D, O cùng thuộc một đường tròn.

6) Tìm đường tròn cố định luôn đi qua M khi B, D di động.

Bài 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ luôn tồn tại ít nhất một số có tổng các chữ số chỉ hết cho 11

Hết

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 39**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN***(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)**(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)***Bài 1. (2,0 điểm)**

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ ($x > 0, x \neq 4$)

- 1, Rút gọn biểu thức A.
- 2, Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 2. (2, 5 điểm)

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2(m+3)x - 2m + 2$ (m là tham số, $m \in \mathbb{R}$).

- 1, Với $m = -5$ tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d).
 - 2, Chứng minh rằng: với mọi m parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Tìm m sao cho hai giao điểm đó có hoành độ dương.

- 3, Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m

Bài 3. (1,5 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O; R) cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D khác A.

- 1, Chứng minh rằng tam giác ABT đồng dạng với tam giác BDT.
- 2, Chứng minh rằng: $AB \cdot CD = BD \cdot AC$
- 3, Chứng minh rằng hai đường phân giác góc BAC , góc BDC và đường thẳng BC đồng quy tại một điểm.
- 4, Gọi M là trung điểm của BC, chứng minh rằng góc BAD bằng góc MAC.

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn: $x(x+1) + y(y+1) + z(z+1) \leq 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1}$

————— Hết —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 40

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu I. (1, 5 điểm)

Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (1), với ẩn x , tham số m .

- 1) Giải phương trình (1) khi $m = 1$
- 2) Xác định giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất.

Câu II. (1,5 điểm)

Trong cùng một hệ toạ độ, gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$ và (d) là đồ thị của hàm số $y = -x + 2$

- 1) Vẽ các đồ thị (P) và (d). Từ đó, xác định toạ độ giao điểm của (P) và (d) bằng đồ thị.
- 2) Tìm a và b để đồ thị Δ của hàm số $y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1

Câu III. (2,0 điểm)

1) Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B, quãng đường AB dài 24km. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

2) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$

Câu IV. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H. Vẽ hình bình hành BHCD. Đường thẳng qua D và song song với BC cắt đường thẳng AH tại M.

- 1) Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, M cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $BM = CD$ và góc $BAM =$ góc OAC .
- 3) Gọi K là trung điểm của BC, đường thẳng AK cắt OH tại G. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu V .(2, 0 điểm)

- 1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2014$.
- 2) Có 6 thành phố trong đó cứ 3 thành phố bất kỳ thì có ít nhất 2 thành phố liên lạc được với nhau . Chứng minh rằng trong 6 thành phố nói trên tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 41**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1: (2,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức sau: $A = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$

b) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x})$ với $x > 0, x \neq 1$

i) Rút gọn biểu thức B

ii) Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên

Câu 2: (2,5 điểm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+2y=1 \\ 3x+(m+1)y=-1 \end{cases}$ với m là tham số.

a) Giải hệ với $m = 3$.

b) Giải và biện luận hệ theo m.

c) Tìm m nguyên để hệ có nghiệm là số nguyên.

Câu 3: (2 điểm)

Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$?

Câu 4: (3 điểm)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn đường kính AD. Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ AB (M không trùng với các điểm A và B).

- a) Chứng minh MD là đường phân giác của góc BMC
 b) Cho $AD=2R$. Tính diện tích của tứ giác ABDC theo R
 c) Gọi O là tâm đường tròn đường kính AD. Hãy tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AMB và dây AB theo R. d) Gọi K là giao điểm của AB và MD, H là giao điểm của AD và MC. Chứng minh ba đường thẳng AM, BD, HK đồng quy.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 42**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1. (1,5 điểm) Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ và

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ Chứng minh rằng } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Câu 2. (1,5 điểm) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số:

$$a_n = 1 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}{(n+5)(n+6) \dots (2n)}$$
 là một số chính phương

Câu 4. (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Câu 5 (3 điểm) Cho hình vuông ABCD với tâm O. Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng

1. Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc $\angle NOP = 45^\circ$

2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

3. Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

Câu 6.(1 điểm) Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1;2;3;4;...;2014\}$ thỏa mãn điều

kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu $x \in A, y \in A, x > y$, thì : $\frac{y^2}{x-y} \in A$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 43

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1(2 điểm)

Cho các số thực dương a, b ; $a \neq b$. Chứng minh rằng

$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0$$

Câu 2(2 điểm)

Cho Quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ xe

bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h.

Biết xe máy đến B lúc 11h40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng

đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không đổi .Hỏi

xe máy bị hỏng lúc mấy giờ ?

Câu 3 (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) : $y=x^2$ và đường thẳng (d) :

$$y = -\frac{2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3} \quad (m \text{ là tham số})$$

1. Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt .

2. Gọi x_1 ; x_2 là hoành độ các giao điểm (d) và (P), đặt $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$

$$\text{CMR: } f(x_1) - f(x_2) = \frac{-1}{2}(x_1 - x_2)^3$$

Câu 4 (3 điểm):

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC = 2R. Gọi K, M theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn BE ($K \neq B$; $K \neq E$). Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AC tại P.

1. Chứng minh tứ giác AKPD nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh $KP \perp PM$.

3. Biết $\angle ABD = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x.

Câu 5: (1 điểm) Giải phương trình

$$\frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} = 4$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 44

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1: (2,00 điểm)

1) Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}}$

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ với $a > 0$; $a \neq 4$

Bài 2: (2,00 điểm)

1) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax - y = -b \\ x - by = -a \end{cases}$$

Tìm a và b biết hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

2) Giải phương trình: $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$

Bài 3: (2,00 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$

- a) Vẽ đồ thị (P).
 b) Trên (P) lấy điểm A có hoành độ $x_A = -2$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất, biết rằng $B(1;1)$.

Bài 4: (4,00 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khác A và B), tia AM cắt d tại N. Gọi C là trung điểm của AM, tia CO cắt d tại D.

- a) Chứng minh rằng: OBNC nội tiếp.
 b) Chứng minh rằng: $NO \perp AD$
 c) Chứng minh rằng: $CA \cdot CN = CO \cdot CD$.
 d) Xác định vị trí điểm M để $(AM \cdot AN)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 45

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1: (2,0 điểm):

- 1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ và $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng $(a-1)(b-1)(c-1)=0$

- 2) Với mỗi số nguyên dương n ; chứng minh $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ là số nguyên dương.

Bài 2: (2,5 điểm):

- 1) Giải phương trình $(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12}) = 8$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \\ 2\sqrt{y^4 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 3 - 4x^3 \end{cases}$$

Bài 3: (3,0 điểm): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AA₁; BB₁; CC₁ của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng AA₁ cắt đường tròn (O) tại K khác A.

- 1) Chứng minh A₁ là trung điểm của HK.
- 2) Hãy tính $\frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1}$
- 3) Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên BC. Đường thẳng BB₁ cắt (O) tại giao điểm thứ hai là E, kéo dài MB₁ cắt AE tại N. Chứng minh rằng $\frac{AN}{NE} = \left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2$

Bài 4: (1,0 điểm): Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn $x^3 + y^3 - 3xy = 1$

Bài 5: (1,5 điểm):

- 1) Trên bảng ghi một số nguyên dương có hai chữ số trở lên. Người ta thiết lập số mới bằng cách xóa đi chữ số hàng đơn vị của số đã cho, sau đó cộng vào số còn lại 7 lần số vừa bị xóa. Ban đầu trên bảng ghi số 6^{100} . Hỏi sau một số bước thực hiện như trên ta có thể thu được 100^6 hay không? Tại sao?
- 2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}$$

————— Hết —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 46

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Bài 1: (2,0 điểm) a) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh:

$$P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$$

Bài 2: (2,0 điểm)

Gọi đồ thị hàm số $y=x^2$ là parabol (P), đồ thị hàm số $y=(m+4)x-2m-5$ là đường thẳng (d).

- Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- Khi (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 0$

Bài 3: (1,5 điểm)

Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18}$

Bài 4: (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). PO cắt đường tròn tại hai điểm K và I (K nằm giữa P và O) và cắt AB tại H. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O, C là giao điểm của PD và đường tròn (O).

- Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp.
- Chứng minh $AC \perp CH$.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH cắt IC tại M. Tia AM cắt IB tại Q. Chứng minh M là trung điểm của AQ.

Bài 5: (1,0 điểm)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$.

2) Cho ba số thực x, y, z đều lớn hơn 2 và thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1. \text{ Chứng minh rằng: } (x-2)(y-2)(z-2) \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 47**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN***(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)**(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)***Câu I.** Cho phương trình $(m^2 + 5)x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1) với m là tham số.

- c) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.
- d) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

Câu II. 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(1 + x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1 + y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases}$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức
$$\frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

Câu III. Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

- c) Chứng minh rằng $a + b$ không thể là số nguyên tố.
- d) Chứng minh rằng nếu $c > 1$ thì $a + c$ và $b + c$ không thể đồng thời là số nguyên tố

Câu IV. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ ($C \neq A, C \neq B$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

- d) Chứng minh rằng $AN = AC, BM = BC$.
- e) Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.
- f) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.

Câu V. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

- c) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.
- d) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 48

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$

1. Rút gọn A.
2. Tìm giá trị của x để $A > 1$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1)(x + 3)}$
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 3(m+1)x + 2m^2 + 5m + 2 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2|$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi P, Q lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh rằng BCQP là tứ giác nội tiếp.
2. Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $MH^2 = MB \cdot MC$
3. Đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCQP. Chứng minh rằng ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$

Hết

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 49**PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN****MÔN TOÁN**

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{43-x} = x-1$

2) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

Câu II (2,0 điểm)

Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=(m-1)x+m+4$ (tham số m)

- 1) Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).
- 2) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases} \quad (\text{tham số } m)$$

Tìm m để hệ đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn $x^2 - y^2$ đạt giá trị lớn nhất.

- 2) Một ô tô dự định đi từ A đến B dài 80 km với vận tốc dự định. Thực tế trên nửa quãng đường đầu ô tô đi với vận tốc nhỏ hơn vận tốc dự định là 6 km/h. Trong nửa quãng đường còn lại ô tô đi với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định là 12 km/h. Biết rằng ô tô đến B đúng thời gian đã định. Tìm vận tốc dự định của ô tô.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại H.

Dựng hình bình hành BHCD.

- 1) Chứng minh: Các tứ giác APHN, ABDC là các tứ giác nội tiếp.
- 2) Gọi E là giao điểm của AD và BN. Chứng minh: $AB \cdot AH = AE \cdot AC$

- 3) Giả sử các điểm B và C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn và $B \cdot AC$ không đổi. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN có diện tích không đổi

Câu V (1,0 điểm)

Cho $x; y$ là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}$$

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

ĐỀ 50

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

MÔN TOÁN

(Thời gian: 120 phút, không tính thời gian giao đề)

(Dùng cho tất cả các học sinh vào lớp 10 chuyên)

Câu 1 (7,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+3} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ 3xy = x + y + 1 \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn phương trình $9x + 2 = y^2 + y$

b) Tìm các chữ số a, b sao cho $(\overline{ab})^2 = (a+b)^3$

Câu 3 (2,0 điểm).

Cho các số a, b, c không âm. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 2(ab + bc + ca)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AE và CF cắt nhau tại H. Gọi P là điểm thuộc cung nhỏ BC (P khác B, C); M, N lần lượt là hình chiếu của P trên các đường thẳng AB và AC. Chứng minh rằng:

a) OB vuông góc với EF và $\frac{BH}{BO} = 2 \cdot \frac{EF}{AC}$

b) Đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng HP.

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có $\angle BAC = 60^\circ$; $BC = 2\sqrt{3}\text{cm}$. Bên trong tam giác này cho 13 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong 13 điểm ấy luôn tìm được 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1cm.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

PHẦN 2: HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ 1

Câu 1. 1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.

Ta có: $n^4 + 2015n^2 = n^2(n^2 + 2015)$

Nếu n chẵn thì n^2 chia hết cho 4.

Nếu n lẻ thì $n^2 + 2015$ chia hết cho 4.

$\Rightarrow n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 4.

Nếu n chia hết cho 3 thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3

Nếu n chia 3 dư 1 hoặc dư 2 thì $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3.

Vậy $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 3

Vì $(4, 3) = 1$ nên $n^4 + 2015n^2$ chia hết cho 12.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 22x^2 + 33xy + 11y^2 = 121 \\ 12x^2 - 12xy + 36y^2 = 121 \end{cases}$$

Suy ra: $10x^2 + 45xy - 25y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - y)(x + 5y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ x = -5y \end{cases}$$

Với $x = \frac{y}{2}$ ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Với $x = -5y$ ta được $\begin{cases} x = \frac{-5\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Câu 2. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0$.

$$2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0 \Leftrightarrow (2y + 1)(x + y + 1) = 14.$$

$\Rightarrow 2y + 1$ và $x + y + 1$ là các ước của 14.

Vì $2y + 1$ là số lẻ nên ta có các trường hợp sau:

TH 1: $2y + 1 = 1$ và $x + y + 1 = 14 \Rightarrow (x, y) = (13, 0)$

TH 2: $2y + 1 = -1$ và $x + y + 1 = -14 \Rightarrow (x, y) = (-14, -1)$

TH 3: $2y + 1 = 7$ và $x + y + 1 = 2 \Rightarrow (x, y) = (-2, 3)$

TH 4: $2y + 1 = -7$ và $x + y + 1 = -2 \Rightarrow (x, y) = (1, -4)$

2) Giải phương trình $2\sqrt{\frac{x^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3x}{2}}$

Điều kiện: $x \geq 0$. Ta có $4\sqrt{\frac{x^2}{3} + 4} = 1 + \frac{3x}{2} + \sqrt{6x}$.

Do $\sqrt{6x} \leq \frac{x+6}{2}$, suy ra $4\sqrt{\frac{x^2}{3} + 4} \leq 2x + 4$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 48 \leq 3x^2 + 12x + 12$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Thử lại $x = 6$ vào thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm $x = 6$.

Câu 3. Ta có: $\frac{(a+b)^2}{4} \geq a.b \quad \forall a, b (1)$. Dấu '=' xảy ra khi $a=b$.

Đặt: $\frac{x^2 + y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = a$ và $\frac{1 - x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = b$

Theo (1) ta có: $P = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$. Suy ra:

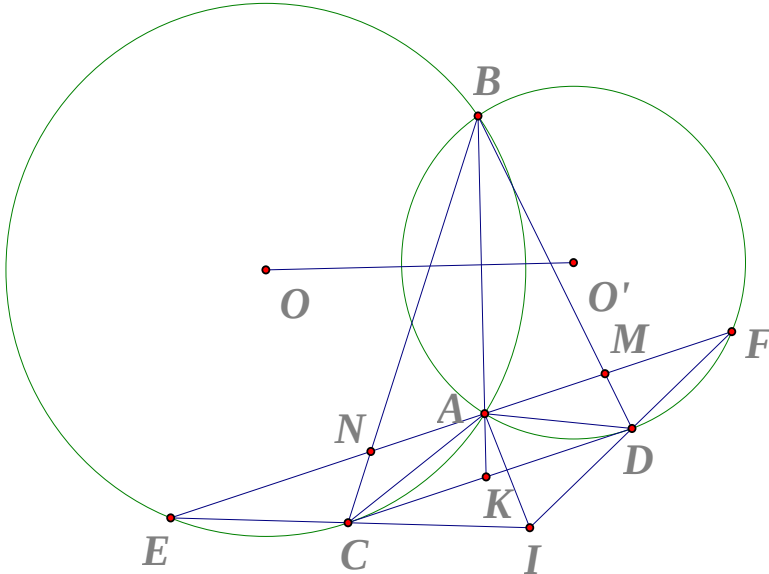
$$P \leq \frac{1}{4} \left[\frac{x^2 - y^2 + 1 - x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right]^2$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4} \left[\frac{(x^2+1)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right]^2 \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \right)^2$$

Ta có: $0 \leq \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \right)^2 \leq 1 \quad \forall y$

Do đó : $P_{\max} = \frac{1}{4}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (1 - y^2)^2 = (1 + y^2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$

Câu 4. Chứng minh tứ giác BCID nội tiếp (1 điểm)



TH1: Điểm A và đoạn thẳng CD nằm về cùng một phía với đường OO'.

Ta có

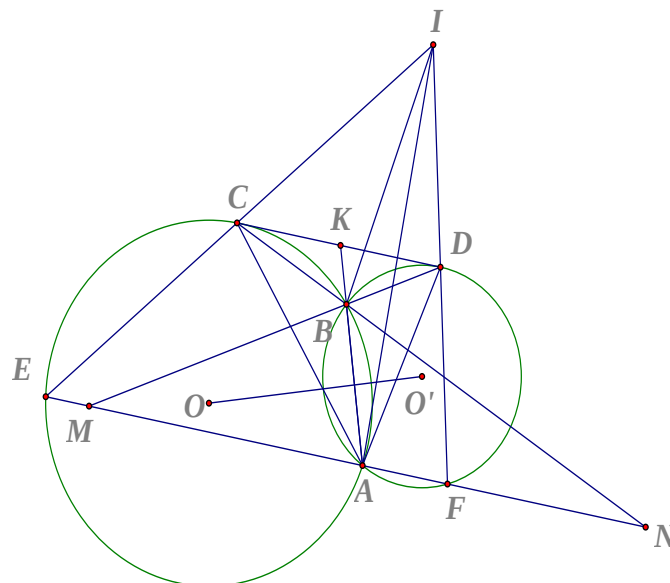
$$ABC = AEC = ICD$$

$$DBC = AED = IDC$$

$$\Rightarrow DBA + DIC = ABC + DBC + DIC = ICD + IDC + DIC = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCID nội tiếp.

TH2: Điểm A và đoạn thẳng CD nằm khác phía nhau so với OO'.



Vì tứ giác ABCE nội tiếp (O) nên $BCE + BAE = 180^\circ \Rightarrow BCE = BAF$

Tương tự $BAF = BDI$

$$\Rightarrow BCE = BDI \Rightarrow BCI + BDI = BCI + BCE = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCID nội tiếp.

$$\Rightarrow \Delta ICD = \Delta ACD$$

$$\Rightarrow CA = CI \text{ và } DA = DI$$

$\Rightarrow$ CD là trung trực của AI

b. Chứng minh CD là trung trực của AI (1,0 điểm)

(Hai trường hợp chứng minh như nhau)

$$\text{Ta có } ICD = CEA = DCA \Rightarrow ICD = DCA$$

$$\text{Tương tự } IDC = CDA$$

$$\Rightarrow \Delta ICD = \Delta ACD$$

$$\Rightarrow CA = CI \text{ và } DA = DI$$

$\Rightarrow$ CD là trung trực của AI

c. Chứng minh IA là phân giác góc MIN (1 điểm)

(Hai trường hợp chứng minh như nhau)

$$\text{Ta có } CD \perp AI \Rightarrow AI \perp MN.$$

Gọi $K = AB \cap CD$. Ta chứng minh được

$$CK^2 = KA.KB = KD^2$$

$$\Rightarrow KC = KD \quad (1)$$

$$\text{Vì } CD \parallel MN \text{ nên } \frac{KC}{AN} = \frac{KD}{AM} = \frac{KB}{AB}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow AN = AM$$

$$\text{Mà } AI \perp MN \Rightarrow \Delta IMN \text{ cân tại I}$$

$\Rightarrow$ IA là phân giác góc MIN.

Câu 5. Giả sử $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1010} \leq 2015$ là 1010 số tự nhiên được chọn.

Xét 1009 số: $b_i = a_{1010} - a_i, i = 1, 2, \dots, 1009$ suy ra:

$$0 < b_{1009} < b_{1008} < \dots < b_1 \leq 2015$$

Theo nguyên lý Dirichlet trong 2019 số a_i, b_i không vượt quá 2015 luôn tồn tại 2 số bằng nhau, mà các số a_i và b_i không thể bằng nhau, suy ra tồn tại i, j sao cho:

$$b_i = a_j \Rightarrow a_{1010} - a_i = a_j \Rightarrow a_{1010} = a_i + a_j \text{ (dpcm)}$$

(Chú ý $i \neq j$ do trong 1010 số được chọn không có số nào bằng 2 lần số khác)

ĐỀ 2.

Câu 1. Phương trình đã cho : $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$ (với $x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow (x^2 - 8)^2 - 32 = 0$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Với } x = \sqrt{6 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} &\Leftrightarrow x = \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\ &\Rightarrow x^2 = 8 - 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Thế x vào vế phải của (1) ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 - 8)^2 - 32 &= (8 - 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}} - 8)^2 - 32 = 4(2 + \sqrt{3}) + 4\sqrt{3} + 12(2 - \sqrt{3}) - 32 \\ &= 8 + 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 24 - 12\sqrt{3} - 32 = 0 \quad (\text{vế phải bằng vế trái}) \end{aligned}$$

Vậy $x = \sqrt{6 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình đã cho (đpcm)

Câu 2. Hệ pt đã cho $\begin{cases} 2x(x+1)(y+1) + xy = -6 & (1) \\ 2y(y+1)(x+1) + yx = 6 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1)(y+1) = -6 - xy \\ 2y(y+1)(x+1) = 6 - xy \end{cases}$

Thay $x = 0, y = 0$ thì hệ không thoả. Thay $x = -1$ và $y = -1$ vào, hệ không thoả

$$\Rightarrow (x; y) \neq (0; 0); xy \neq 0; x+1 \neq 0; y+1 \neq 0 \Rightarrow 6 - xy \neq 0 \quad (*)$$

- Chia từng vế của hai phương trình cho nhau : $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-6 - xy}{6 - xy} \Leftrightarrow xy(x - y) = 6(x + y)$

Thay $x = y$, hệ pt có vế phải bằng nhau, vế trái khác nhau (không thoả) $\Rightarrow x - y \neq 0$ (**)

$$\Rightarrow xy = \frac{6(x + y)}{x - y} \quad (3)$$

- Cộng từng vế (1) và (2) của hệ ta được pt: $2(x + y)(x + 1)(y + 1) + 2xy = 0$ (4)

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + y + xy + 1) + xy = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x + y + 1 + \frac{6(x + y)}{x - y}) + \frac{6(x + y)}{x - y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + y + 1 + \frac{6(x + y + 1)}{x - y}) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x + y + 1)(1 + \frac{6}{x - y}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + 1 = 0 \\ 1 + \frac{6}{x - y} = 0 \end{cases}$$

- Với $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$. Thế vào hệ $\Rightarrow -2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \vee x = 0)$ không thoả (*)

- Với $x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -y - 1$ thế vào phương trình (1) của hệ ta được :

$$2y^3 + 3y^2 + y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y + 2)(2y^2 - y + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \\ 2y^2 - y + 3 = 0 \text{ (vn)} \end{cases}$$

Với $y = -2 \Rightarrow x = 1$. Thế vào hệ thoả, vậy có nghiệm 1: $(x; y) = (1; -2)$

- Với $1 + \frac{6}{x - y} = 0 \Leftrightarrow x - y + 6 = 0 \Leftrightarrow x = y - 6$

Thế $x = y - 6$ vào pt (2) của hệ :

$$(2) \Leftrightarrow 2y^3 - 7y^2 - 16y - 6 = 0 \Leftrightarrow (2y+1)(y^2 - 4y - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y+1=0 \\ y^2 - 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 + \sqrt{10} \\ y_2 = 2 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y_3 = -\frac{1}{2}$$

Từ ba giá trị của y ở trên ta tìm được ba giá trị x tương ứng:

$$\begin{cases} x_1 = -4 + \sqrt{10} \\ x_2 = -4 - \sqrt{10} \\ x_3 = -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Thế các giá trị (x; y) tìm được vào hệ (thoả).

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x; y):

$$(1; -2), (-4 + \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}), (-4 - \sqrt{10}; 2 - \sqrt{10}), (-\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}).$$

Câu 3. (Cách 1) Tam giác đều có cạnh bằng 2 cm thì diện tích bằng $\sqrt{3} \text{ cm}^2$, tam giác đều có cạnh bằng 1 cm thì diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$. Nếu tam giác đều có cạnh $> 1 \text{ cm}$ thì diện tích $> \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

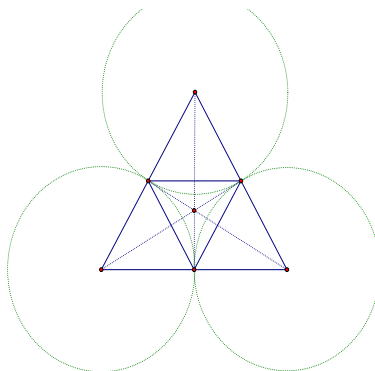
Gọi t là số tam giác đều có cạnh bằng $> 1 \text{ cm}$ chứa được trong tam giác đều có cạnh 2 cm:

$$1 \leq t < 4 \quad (\text{với } t \text{ là số nguyên dương}) \Rightarrow t_{\max} = 3.$$

Theo nguyên lý Dirichlet sẽ có 1 trong t tam giác đều có cạnh $> 1 \text{ cm}$ đó chứa tối đa 2 điểm thoả mãn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ luôn $> 1 \text{ cm}$.

Vậy số điểm thoả yêu cầu bài toán là: $2 \leq n \leq 4$ Vậy $n_{\max} = 4$

(Cách 2): Giải theo kiến thức hình học



Nếu ta chọn 3 điểm ở 3 đỉnh của tam giác đều cạnh bằng 2 cm vẽ 3 đường tròn đường kính 1 cm, các đường tròn này tiếp xúc với nhau ở trung điểm mỗi cạnh tam giác. $\Rightarrow$ Các điểm khác trong tam giác cách 3 đỉnh $> 1\text{cm}$ chỉ có thể nằm trong phần diện tích còn lại của tam giác (ngoài phần diện tích bị ba hình tròn che phủ), được giới hạn bởi 3 cung tròn bán kính 1 cm.

Vì 3 dây cung là 3 đường trung bình của tam giác có độ dài 1 cm $\Rightarrow$ khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ nằm trong phần diện tích còn lại đó của tam giác luôn $\leq 1\text{ cm}$.

$\Rightarrow$ trong phần diện tích đó chỉ lấy được 1 điểm mà khoảng cách đến 3 đỉnh của tam giác luôn $> 1\text{ cm}$.

Vậy số điểm lớn nhất thỏa mãn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ $> 1\text{cm}$ là :

$$n_{\max} = 3 + 1 = 4 \text{ điểm.}$$

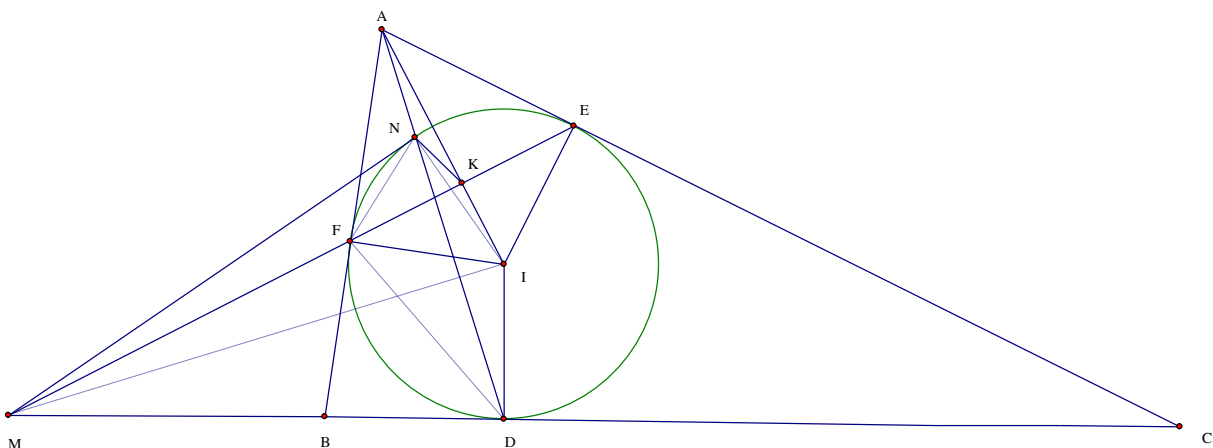
Câu 4. Gọi a và b là hai số bất kỳ trong 10 số nguyên dương liên tiếp với $a > b$ ($a; b$ nguyên dương) $\Rightarrow 1 \leq a - b \leq 9$.

Gọi n là ước chung của a và b , khi đó : $a = n.x$ và $b = n.y$ (n, x, y là số nguyên dương).

$$\text{Vì } a > b \Rightarrow x > y \Rightarrow x - y \geq 1 \Rightarrow 1 \leq n.x - n.y \leq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq x - y \leq \frac{9}{n} \Rightarrow \frac{9}{n} \geq 1 \Leftrightarrow n \leq 9$$

Vậy trong 10 số nguyên dương liên tiếp không tồn tại hai số có ước chung lớn hơn 9.

Câu 5.



1) Nối N và F , D và F .

- Xét $\triangle ANF$ và $\triangle AFD$ có: $\angle AFN = \angle ADF$ (vì AF là tt) và $\angle FAD$ chung $\Rightarrow \triangle ANF \sim \triangle AFD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AN}{AF} = \frac{AF}{AD} \Leftrightarrow AF^2 = AN \cdot AD$ (1)

- Xét $\triangle AFI$ có: $AF \perp IF$ (vì AF tiếp tuyến, FI là bán kính) và $FK \perp AI$ (vì AF và AE tt chung và AI nối tâm) $\Rightarrow \triangle AFI$ vuông tại F có FK là đường cao $\Rightarrow AK \cdot AI = AF^2$ (2)

- Xét $\triangle ANK$ và $\triangle AID$ có:

+ $\angle IAD$ chung.

$$+ \text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AN \cdot AD = AK \cdot AI \Rightarrow \frac{AN}{AK} = \frac{AI}{AD}$$

$$\Rightarrow \triangle ANK \sim \triangle AID \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle NKA = \angle IDN \quad (3)$$

- Từ (3) $\Rightarrow$ tứ giác DIKN nội tiếp đt (vì có góc đối bằng góc kề bù góc đối)

$\Rightarrow$ các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn. (đpcm).

2) Ta có $ID \perp DM$ (DM là tiếp tuyến, DI là bán kính) và $IK \perp KM$ (câu 1) $\Rightarrow$ tứ giác DIKM nội tiếp đường tròn đường kính MI. Vì 4 điểm D, I, K, N cũng thuộc một đường tròn (câu 1) $\Rightarrow$ hai đường tròn này cùng ngoại tiếp $\triangle DIK \Rightarrow$ hai đường tròn trùng nhau $\Rightarrow$ N cũng nằm trên đường tròn đường kính MI $\Rightarrow \angle INM = 90^\circ$.

Vì IN là bán kính đường tròn (I), $MN \perp IN \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn (I) tại tiếp điểm N. (đpcm).

ĐỀ 3

Câu 1. a) Rút gọn biểu thức:

$$P = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} &= \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)} \\ &= \sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4-2-\sqrt{3}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{4-3} = 1. \end{aligned}$$

Cách khác: Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, ta có:

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right) \\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) \\ &= 4-3=1 \end{aligned}$$

Vì $P > 0$ nên $P = 1$

b) Tính $Q = x^3 + 12x + 2009$, với $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } x^3 &= \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1} \right)^3 \\
 &= (1+\sqrt{65}) - (\sqrt{65}-1) - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{65})(\sqrt{65}-1)} \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1} \right) \\
 &= 2 - 12 \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1} \right) = 2 - 12x.
 \end{aligned}$$

Do đó: $Q = 2 - 12x + 12x + 2009 = 2011$.

Câu 2. Phương trình: $a(a+3)x^2 - 2x - (a+1)(a+2) = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm hữu tỷ:

- Với $a(a+3) = 0$ hay $a = 0$ hoặc $a = -3$:

Phương trình trở thành: $-2x - 2 = 0$ có nghiệm là $x = -1$

- Với $a(a+3) \neq 0$ hay $a \neq 0$ và $a \neq -3$ thì p/t cho là phương trình bậc hai.

Ta có: $a(a+3) + 2 - (a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2 - a^2 - 3a^2 - 2 = 0$

Nên phương trình cho có 2 nghiệm:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -1 \\
 x_2 &= \frac{(a+1)(a+2)}{a(a+3)} = 1 + \frac{2}{a(a+3)}
 \end{aligned}$$

Vì a nguyên nên suy ra phương trình cho luôn có nghiệm hữu tỷ.

Ghi chú : Nếu thí sinh tính $\Delta' = (a^2 + 3a + 1)^2 > 0, \forall a$

Vì a nguyên nên $\sqrt{\Delta'} = a^2 + 3a + 1$ là số nguyên

Vậy phương trình cho luôn có nghiệm hữu tỷ.

b) Xác định a để các nghiệm của phương trình đều là nghiệm nguyên:

(1) Nếu $a = 0$ hoặc $a = -3$: phương trình có 1 nghiệm nguyên $x = -1$.

(2) Nếu $a \neq 0, a \neq -3$: Theo câu a), phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ nguyên nên để p/trình có các nghiệm đều nguyên thì x_2 cũng phải là nghiệm nguyên.

Nghĩa là: 2 phải chia hết cho $a(a+3)$.

$$\text{Khi đó ta có các khả năng xảy ra : } \begin{cases} a(a+3) = -2 \\ a(a+3) = -1 \\ a(a+3) = 2 \\ a(a+3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 3a + 2 = 0 \\ a^2 + 3a + 1 = 0 \\ a^2 + 3a - 2 = 0 \\ a^2 + 3a - 1 = 0 \end{cases}$$

Vì a nguyên nên chỉ có phương trình $a^2 + 3a + 2 = 0$ có hai nghiệm nguyên

$a = -1$ hoặc $a = -2$.

Vậy: $a \in \{-3; -2; -1; 0\}$ thì phương trình cho có các nghiệm đều nguyên.

Câu 3. Giải các phương trình và hệ phương trình:

a) Giải phương trình: $13x + 2(3x+2)\sqrt{x+3} + 42 = 0$

Điều kiện : $x \geq -3$ (*).

Đặt $t = \sqrt{x+3}$, $t \geq 0$, suy ra $x = t^2 - 3$

Phương trình trở thành: $6t^3 + 13t^2 - 14t + 3 = 0$

Giải ra ta được: $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{1}{3}$; $t = -3$ (loại).

Với $t = \frac{1}{2}$, ta có: $\sqrt{x+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{4}$;

Với $t = \frac{1}{3}$, ta có: $\sqrt{x+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{26}{9}$.

Cả hai nghiệm đều thỏa điều kiện (*).

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là: $S = \left\{ -\frac{11}{4}; -\frac{26}{9} \right\}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9} + y = 9 \\ \sqrt{y^2+9} + x = 9 \end{cases}$$

Với điều kiện $x, y < 9$, hệ đã cho là:
$$\begin{cases} x^2 + 9 = (9-y)^2 & (1) \\ y^2 + 9 = (9-x)^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $(x-y)(x+y-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 9-x \end{cases}$.

+ Với $x = y$, thế vào (1) ta được: $18x - 72 = 0 \Leftrightarrow x = y = 4$.

+ Với $y = 9 - x$, thế vào (2) thì phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(x; y) = (4; 4)$.

Câu 4. a) Chứng minh : $\frac{2}{x^2+2y^2+3} \leq \frac{1}{xy+y+1}$ ($x, y > 0$)

Vì $x, y > 0$ nên $x^2+2y^2+3 > 0$; $xy+y+1 > 0$

Do đó : $\frac{2}{x^2+2y^2+3} \leq \frac{1}{xy+y+1} \Leftrightarrow 2xy+2y+2 \leq x^2+2y^2+3$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức sau cùng đúng nên bất đẳng thức đầu đúng.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \quad (a, b, c > 0; abc = 1)$$

Áp dụng bất đẳng thức ở câu a) ta có:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} = \frac{1}{2} \frac{2}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{ab + b + 1}$$

$$\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} = \frac{1}{2} \frac{2}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{bc + c + 1}$$

$$\frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} = \frac{1}{2} \frac{2}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{ca + a + 1}$$

$$\Rightarrow M \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right)$$

Do $abc = 1$ nên:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} &= \frac{ca}{ca^2b + abc + ca} + \frac{a}{abc + ac + a} + \frac{1}{ca + a + 1} \\ &= \frac{ca}{ca + a + 1} + \frac{a}{ca + a + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1. \end{aligned}$$

Do đó $M \leq \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy $\text{Max}(M) = \frac{1}{2}$.

Câu 5.

Gọi M là trung điểm của BC (1).

Nối GD, GE . Gọi P, Q là các điểm trên tia GM sao cho:

$$BP \parallel GE, CQ \parallel GD \quad (2).$$

Theo định lý Ta-lét và tính chất đường phân giác:

$$\frac{GP}{GA} = \frac{EB}{EA} = \frac{CB}{CA}; \quad \frac{GQ}{GA} = \frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{GP}{GA} + \frac{GQ}{GA} = \frac{CB}{CA} + \frac{BC}{BA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{GP + GQ}{GA} = \frac{BC(AB + AC)}{AB \cdot AC} = 1 \quad (\text{vì } BC(AB + AC) = AB \cdot AC).$$

$$\Leftrightarrow GP + GQ = GA = 2GM.$$

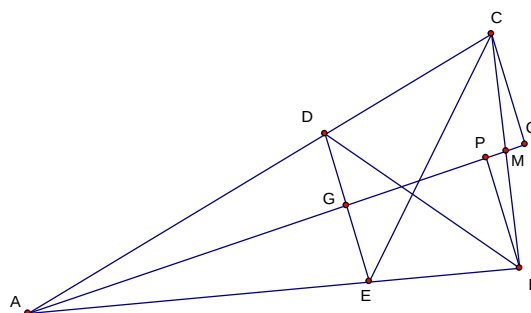
Do đó M là trung điểm của PQ (3).

Kết hợp (1) và (3) suy ra tứ giác $BPCQ$ là hình bình hành $\Rightarrow BP \parallel CQ$ (4).

Từ (2) và (4) suy ra G, D, E thẳng hàng.

Câu 6. a) Phần thuận:

$$\triangle ABC \text{ cân} \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = \angle ADB$$



$\Rightarrow ADE = ADC$ (vì cùng bù với ABC).

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ADE$ có:

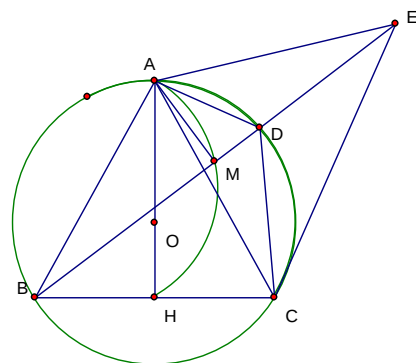
AD : chung ; $DC = DE$ (giả thiết)

$ADC = ADE$ (cmt)

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ADE$ (c.g.c)

Do đó $AC = AE = AB \Rightarrow \triangle ABE$ cân tại A .

Vì M là trung điểm BE nên $AMB = 90^\circ$.



Hơn nữa do AB cố định nên M lưu động trên đường tròn đường kính AB .

b) Giới hạn: Khi $D \equiv A$ thì $M \equiv A$; $D \equiv C$ thì $M \equiv H$ (AH là đ/cao của $\triangle ABC$).

c) Phần đảo:

Lấy điểm M bất kỳ trên AH . Gọi D là giao điểm thứ 2 của BM và đường tròn (O) . Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = DC$.

Ta sẽ chứng minh M là trung điểm của BE .

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ADE$ có:

AD : chung ; $DC = DE$ (giả thiết)

$ADC = ADE$ (cùng bù với ABC)

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ADE$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = AE = AB$ (1)

Lại có $AM \perp BE$ (M nằm trên đường tròn đường kính AB) (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là trung điểm của BE .

d) Kết luận: Khi D di động trên cung nhỏ AC thì quỹ tích của M là cung nhỏ AH của đường tròn đường kính AB .

ĐỀ 4

Câu 1. a) Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1 \Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 5; k \in \mathbb{N}^*$.

Nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố

Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4 \Rightarrow n^2 + 16 = 5k + 20; k \in \mathbb{N}^*$.

Nên $n^2 + 16$ không là số nguyên tố.

Vậy $n^2 : 5$ hay $n : 5$

$$\text{b) } x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2(y + 1)x + 2(y^2 - 1) = 0(1)$$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ' theo y phải là số chính phương

Ta có $\Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3 = 4 - (y - 1)^2 \leq 4$

Δ' chính phương nên $\Delta' \in \{0; 1; 4\}$

+ Nếu $\Delta' = 4 \Rightarrow (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ thay vào phương trình (1) ta có :

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(2 - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

+ Nếu $\Delta' = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow y \notin \mathbb{Z}$.

$$+ \text{ Nếu } \Delta' = 0 \Rightarrow (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

+ Với $y = 3$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

+ Với $y = -1$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x; y) \in \{(0; 1); (4; 1); (4; 3); (0; -1)\}$

Câu 2 a) $A = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{4 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} + \frac{2(3 - \sqrt{5})}{4 - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$

$$= 2 \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{4 + \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{4 - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} \right] = 2 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \right)$$

$$= 2 \left[\frac{(3 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})} \right] = 2 \left(\frac{15 - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5 + 15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5}{25 - 5} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{20}{20} = 2$$

Vậy $A = 2$

b) Phương trình $(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = m$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 15) = m \quad (1)$$

Đặt $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = y (y \geq 0)$ phương trình (1) trở thành:

$$(y - 9)(y - 16) = m \Leftrightarrow y^2 - 25y + 144 - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét: Với mỗi giá trị $y > 0$ thì phương trình: $(x + 1)^2 = y$ có 2 nghiệm phân biệt, do đó phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m + 49 > 0 \\ 25 > 0 \\ 144 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-49}{4} < m < 144$$

Vậy với $\frac{-49}{4} < m < 144$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3. a) Điều kiện: $x \geq 1(*)$

Ta có:

$$x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

Đặt $x + \sqrt{x-1} = y (y \geq 1)$ (**), phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

+ Với $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện (**).

+ Với $y = 3$ ta có phương trình:

$$x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện (*). Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

$$\text{b) } \begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Từ phương trình (1) ta có:

$$x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 - 6y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Trường hợp 1: } x^2 + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{11y^2}{4} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

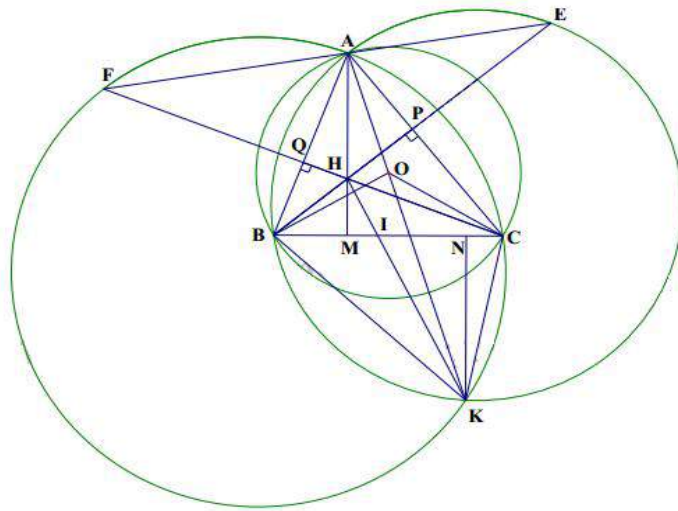
Vì $x = y = 0$ không thỏa mãn phương trình (2).

+ Trường hợp 2: $x = 2y$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$4y^2 + 8y^2 = 10 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; -1)\}$

Câu 4.



a) (1,5 điểm)

Ta có $\widehat{AKB} = \widehat{AEB}$ (vì cùng chắn cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB)

Mà $\angle ABE = \angle AEB$ (tính chất đối ứng) suy ra $\angle AKB = \angle ABE$ (1)

$AKC = AFC$ (vì cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFC)

ACF= AFC (tính chất đối xứng) suy ra AKC= ACF (2)

Mặt khác $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{AKC}$ hay KA là phân giác trong của góc BKC.

Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của BE với AC và CF với AB.

Ta có $BC = R\sqrt{3}$ nên $\angle BOC = 120^\circ$; $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = 60^\circ$. Trong tam giác vuông ABP có

$APB=90^\circ; BAC=60^\circ \Rightarrow APB=30^\circ$ hay $ABE=ACF=30^\circ$

Tứ giác $APHQ$ có

$$\text{AQH} + \text{APH} = 180^\circ \Rightarrow \text{PAQ} + \text{PHQ} = 180^\circ \Rightarrow \text{PHQ} = 120^\circ \Rightarrow \text{BHC} = 120^\circ \text{ (đối đỉnh)}.$$

Ta có $\angle AKC = \angle ABE = 30^\circ$, $\angle KCB = \angle ACF = \angle ABE = 30^\circ$ (theo chứng minh phần a).

Mà $\angle BKC = \angle AKC + \angle AKB = \angle AFC + \angle AEB = \angle ACF + \angle ABE = 60^\circ$ suy ra $\angle BHC + \angle BKC = 180^\circ$

nên tứ giác BHCK nội tiếp.

b) (1,5 điểm)

Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B, H, C, K. Ta có dây cung $BC = R\sqrt{3}$

BKC=60°= BAC nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O).

Gọi M là giao điểm của AH và BC thì MH vuông góc với BC, kẻ KN vuông góc với BC (N thuộc BC), gọi I là giao điểm của HK và BC.

Ta có

$$S_{\text{BHCK}} = S_{\text{BHC}} + S_{\text{BCK}} = \frac{1}{2} \text{BC.HM} + \frac{1}{2} \text{BC.KN} = \frac{1}{2} \text{BC.}(\text{HM} + \text{KN})$$

$$S_{\text{BHCK}} \leq \frac{1}{2} \text{BC}(\text{HI} + \text{KI}) = \frac{1}{2} \text{BC.KH}(\text{Do HMK} \leq \text{HI}; \text{KN} \leq \text{KI})$$

Ta có KH là dây cung của đường tròn (O' ; R) suy ra $KH \leq 2R$ (không đổi)

Nên S_{BHCK} lớn nhất khi $KH = 2R$ và $HM + KN = HK = 2R$.

$$\text{Giá trị lớn nhất } S_{BHCK} = \frac{1}{2} R \sqrt{3} \cdot 2R = R^2 \sqrt{3}$$

Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M, I, N trùng nhau suy ra I là trung điểm của BC nên $\triangle ABC$ cân tại A. Khi đó A là điểm chính giữa cung lớn BC.

c) (0,5 điểm)

Ta có $\angle BOC = 120^\circ$; $\angle BKC = 60^\circ$ suy ra $\angle BOC + \angle BKC = 180^\circ$

nên tứ giác BOCK nội tiếp đường tròn.

Ta có $OB = OC = R$ suy ra $OB = OC \Rightarrow \angle BKO = \angle CKO$ hay KO là phân giác góc BKC theo phần (a)
KA là phân giác góc BKC nên K, O, A thẳng hàng hay AK đi qua O cố định

Câu 5. Ta có:
$$P = \frac{1}{x\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2}\right)} + \frac{1}{y\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}$$

Đặt $\frac{1}{x} = a$; $\frac{1}{y} = b$; $\frac{1}{z} = c$ thì $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:

$$a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2a^2(1-a^2)(1-a^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right) = \frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2(1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b(1-b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2(2); \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2(3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3) ta có } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay } x = y = z = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ĐỀ 5

Câu 1 a) Với $a > 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left[\frac{\sqrt{a}-1}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} + \frac{3\sqrt{a}+5}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \right] \cdot \frac{(a+2\sqrt{a}+1)-4\sqrt{a}}{4\sqrt{a}} \\
 &= \frac{4\sqrt{a}+4}{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{a-2\sqrt{a}+1}{4\sqrt{a}} = \frac{4}{(\sqrt{a}-1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

$$b) \text{ Có } Q = \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}. \text{ Xét } Q-1 = \frac{a-2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}}$$

$$\text{Vì } (\sqrt{a}-1)^2 > 0, \sqrt{a} > 0, \forall a > 0, a \neq 1 \Rightarrow Q-1 > 0 \Rightarrow Q > 1$$

Câu 2. Phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$

$$\text{Theo định lý Viét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+2 \\ x_1 x_2 = m^2 \end{cases}$$

$$\text{Có (2)} \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 m + m^2 + x_2 = m+2 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 2m) + m^2 + x_2 = m+2$$

$$\text{Thay } x_1 - 2m = 2 - x_2; m^2 = x_1 x_2 \text{ vào ta có } x_1(2 - x_2) + x_1 x_2 + x_2 = m+2 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = m+2$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+2 \\ 2x_1 + x_2 = m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m \\ x_2 = 3m+2 \end{cases} \Rightarrow m^2 = x_1 x_2 = -m(3m+2) \Rightarrow 4m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(thỏa mãn)

$$+ \text{ Với } m = 0: (1) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn đề bài)}$$

$$+ \text{ Với } m = -\frac{1}{2}: (1) \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn đề bài)}$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$ là tất cả các giá trị m cần tìm.

$$\text{Câu 3 1) } (x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = x^2 - x - 2 \quad (1)$$

Điều kiện: $x^2 + 4 \geq 0$ (luôn đúng $\forall x$)

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = (x-2)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \left[\sqrt{2(x^2+4)} - (x-2) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{2(x^2+4)} = x-2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Có (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2(x^2+4) = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-1\}$

$$2, \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2 + 3x}) = 3 (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x^2 + 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y-x}{y\sqrt{x}} = (x-y)(x+2y) \Leftrightarrow (x-y) \left(x+2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow x=y \text{ do}$$

$$x+2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} > 0, \forall x, y > 0$$

Thay $y = x$ vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x^2 + 3x}) &= 3 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 3x} = \frac{3}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 3x} &= \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(L) \\ x = 1(tm) \end{cases} \Rightarrow x = y = 1 \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1;1)

Câu 4

$$x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1 \quad (1)$$

$$\text{Có } y(y+1)(y+2)(y+3) = [y(y+3)][(y+1)(y+2)] = (y^2 + 3y)(y^2 + 3y + 2)$$

$$\text{Đặt } t = y^2 + 3y + 1 \Rightarrow y(y+1)(y+2)(y+3) = t^2 - 1 \quad (t \in \mathbb{Z}, t^2 \geq 1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x^{2015} - 1 = \sqrt{t^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} - 1 \geq 0 \\ (x^{2015} - 1)^2 = t^2 - 1 (2) \end{cases}$$

Với x, t là số nguyên ta có:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (x^{2015} - 1 + t)(x^{2015} - 1 - t) = -1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} - 1 + t = 1 \\ x^{2015} - 1 - t = -1 \\ x^{2015} - 1 + t = -1 \\ x^{2015} - 1 - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} = t = 1 \\ x^{2015} = 1 \\ t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

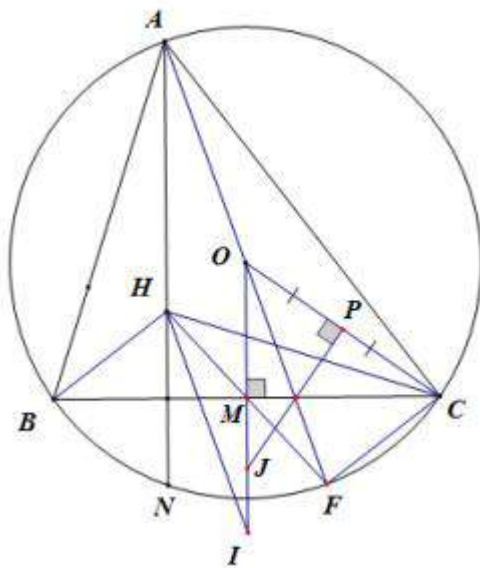
$$\text{Với } x^{2015} = t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} x^{2015} = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các cặp (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0) thỏa mãn đề bài

Vậy có 4 cặp (x;y) cần tìm là (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0)

Câu 5



a) Gọi F là điểm đối xứng với A qua O $\Rightarrow$ AF là đường kính của (O)

Ta có $\angle ACF = \angle ABF = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp CF, AB \perp BF$

Mà $BH \perp AC, CH \perp AB \Rightarrow CF \parallel BH, BF \parallel HC$

Suy ra BHCF là hình bình hành $\Rightarrow$ Trung điểm M của BC cũng là trung điểm của HF.

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của $\triangle AHF \Rightarrow AH = 2OM$

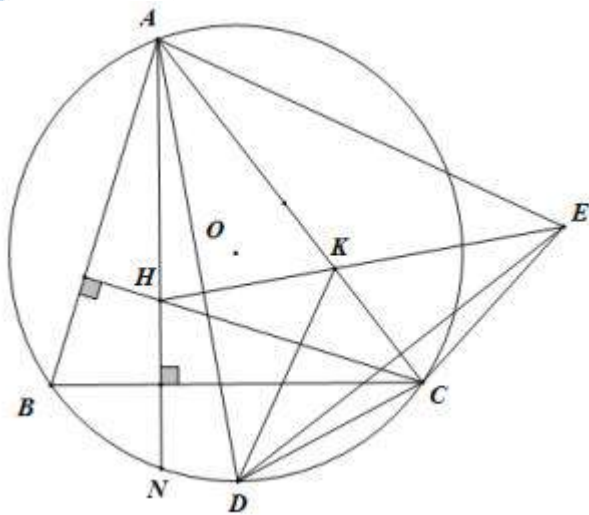
b) Vì AHIO là hình bình hành nên $OI = AH = 2OM$

Gọi P là trung điểm OC $\Rightarrow PJ$ là trung trực OC $\Rightarrow PJ \perp OC$.

Có OM là trung trực BC $\Rightarrow OM \perp BC$. Suy ra

$$\triangle OJP \sim \triangle OCM (g.g) \Rightarrow \frac{OJ}{OC} = \frac{OP}{OM} \Rightarrow OJ \cdot OM = OC \cdot OP$$

$$\Rightarrow OJ \cdot 2OM = OC \cdot 2OP \Rightarrow OJ \cdot OI = OC \cdot OC = R^2$$



c) Ta có $\angle NHC = \angle ABC$ (cùng phụ với $\angle HCB$) (1)

Vì $ABDC$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle ABC = \angle ADC$ (2)

Vì D và E đối xứng nhau qua AC nên AC là trung trực DE suy ra

$\triangle ADC = \triangle AEC$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle ADC = \angle AEC$ (3)

Tương tự ta có $\angle AEK = \angle ADK$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle NHC = \angle AEC \Rightarrow \angle AEC + \angle AHC = \angle NHC + \angle AHC = 180^\circ$

Suy ra $AHCE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle ACH = \angle AEK = \angle ADK$ (đpcm)

Câu 6

1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1+a)(1+b) \geq (1+\sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow 1+a+b+ab \geq 1+2\sqrt{ab}+ab$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

(luôn đúng với mọi $a, b > 0$)

2. Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 1+ab = 1+a+b$ (1)

Với mọi $x, y > 0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y) \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \cdot 2\sqrt{xy} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$
 (2)

Áp dụng (1) và (2) ta có:

$$P \geq \frac{4}{a^2+2a+b^2+2b} + 1+a+b = \frac{4}{a^2+b^2+2ab} + 1+a+b$$

$$= \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{8} + \frac{7(a+b)}{8} + 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$a+b = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4(a+b) \Rightarrow a+b \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\frac{4}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{16} + \frac{a+b}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{16} \cdot \frac{a+b}{16}} = \frac{3}{4}$$

Suy ra $P \geq \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot 4 + 1 = \frac{21}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{21}{4}$

ĐỀ 6

Câu 1. (2,0 điểm)

$$1) \quad a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = 3$$

$$\begin{aligned} A &= a^3 - b^3 + a^2 + b^2 - 11ab + 2015 \\ &= (a - b)(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015 \\ &= 3(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015 \\ &= 4(a^2 - 2ab + b^2) + 2015 = 4(a - b)^2 + 2015 = 2051 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 - xy \\ \Rightarrow (1+x^2)(1+y^2) &= (1-xy)^2 \\ \Leftrightarrow 1+x^2+y^2+x^2y^2 &= 1-2xy+x^2y^2 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy &= 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x \\ \Rightarrow x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} &= x\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

Câu 2(2,0 điểm)

$$1) \text{ Giải phương trình } 2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}.$$

$$Pt \Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{(x+2)(4x+1)} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}. \text{ ĐK: } x \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Đặt } t^2 = 8x+4, \sqrt{(x+2)(4x+1)} + 9 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{(x+2)(4x+1)} = \frac{t^2-9}{4}$$

$$PTTT \quad t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 3$$

TH1. $t = 1$ giải ra vô nghiệm hoặc kết hợp với ĐK $t \geq \sqrt{7}$ bị loại

TH 2. $t = 3 \Rightarrow 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} = 3$. Giải pt tìm được $x = -\frac{2}{9}$ (TM)

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{9}$

$$2) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

$$\text{ĐK: } y-2x+1 \geq 0, 4x+y+5 \geq 0, x+2y-2 \geq 0, x \leq 1$$

$$\text{TH 1. } \begin{cases} y-2x+1=0 \\ 3-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ -1=\sqrt{10}-1 \end{cases} \text{ (Không TM hệ)}$$

TH 2. $x \neq 1, y \neq 1$ Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1) = \frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}}$$

$$(x+y-2) \left[\frac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y-2x+1 \right] = 0. \text{ Do } y-2x+1 \geq 0$$

$$\text{nên } \frac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y-2x+1 > 0 \Rightarrow x+y-2=0$$

Thay $y = 2-x$ vào pt thứ 2 ta được $x^2 + x - 3 = \sqrt{3x+7} - \sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{3x+7} - 1 + 2 - \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = \frac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1-x \right] = 0$$

$$\text{Do } x \leq 1 \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1-x > 0$$

$$\text{Vậy } x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=4 \text{ (TMĐK)}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$. (1)

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$$

$$\text{Ta thấy } x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+1) < y(y+1) \leq (x^2+4)(x^2+5)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

$$+ \text{ TH1. } y(y+1) = (x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Với } x^2 = 9, \text{ ta có } y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 10; y = -11 (\text{t.m})$$

$$+ \text{ TH2. } y(y+1) = (x^2+2)(x^2+3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ TH3. } y(y+1) = (x^2+3)(x^2+4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ TH4. } y(y+1) = (x^2+4)(x^2+5) \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } x^2 = 0, \text{ ta có } y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4$$

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ là :

$(3;10), (3;-11), (-3; 10), (-3;-11), (0; -5), (0;4).$

2) Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } M = k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$$

$$\text{Ta có } M = (k^4 - 2k^2 + 1) - 8k(k^2 - 2k + 1) + 9k^2 - 18k + 9$$

$$= (k^2 - 1)^2 - 8k(k - 1)^2 + 9(k - 1)^2 = (k - 1)^2 \cdot [(k - 3)^2 + 1]$$

M là số chính phương khi và chỉ khi $(k - 1)^2 = 0$ hoặc $(k - 3)^2 + 1$ là số chính phương.

$$\text{TH 1. } (k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

$$\text{TH 2. } (k - 3)^2 + 1 \text{ là số chính phương, đặt } (k - 3)^2 + 1 = m^2 (m \in \mathbb{Z})$$

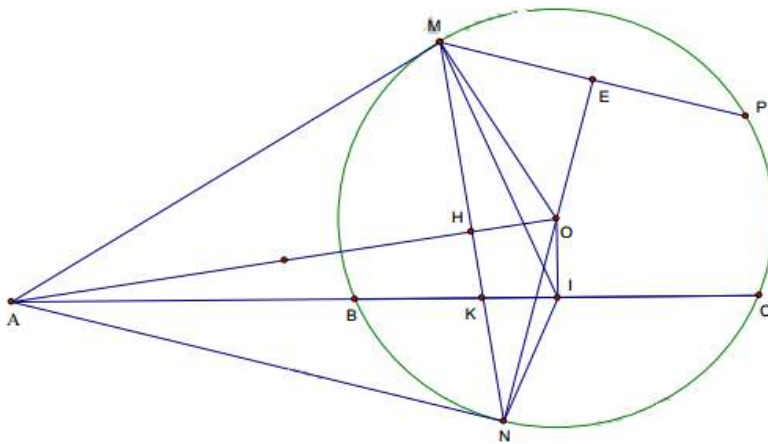
$$\Leftrightarrow m^2 - (k - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow (m - k + 3)(m + k - 3) = 1$$

Vì $m, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m - k + 3 \in \mathbb{Z}, m + k - 3 \in \mathbb{Z}$ nên

$$\begin{cases} m - k + 3 = 1 \\ m + k - 3 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m - k + 3 = -1 \\ m + k - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1, k = 3 \\ m = -1, k = 3 \end{cases} \Rightarrow k = 3$$

Vậy $k = 1$ hoặc $k = 3$ thì $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương

Câu 4 (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC .



1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

Theo giả thiết $AMO = ANO = AIO = 90^\circ \Rightarrow 5$ điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO 0,25

$$\Rightarrow \angle AIN = \angle AMN, \angle AIM = \angle ANM \text{ (Góc nội tiếp cùng chắn một cung)}$$

$$AM = AN \Rightarrow \triangle AMN \text{ cân tại } A \Rightarrow \angle AMN = \angle ANM$$

$$\Rightarrow \angle AIN = \angle AIM \Rightarrow \text{đpcm}$$

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC . Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

$$\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \Leftrightarrow 2AB.AC = AK(AB + AC) \Leftrightarrow AB.AC = AK.AI$$

(Do $AB + AC = 2AI$)

$\triangle ABN$ đồng dạng với $\triangle ANC \Rightarrow AB.AC = AN^2$

$\triangle AHK$ đồng dạng với $\triangle AIO \Rightarrow AK.AI = AH.AO$

Tam giác $\triangle AMO$ vuông tại M có đường cao $MH \Rightarrow AH.AO = AM^2$

$\Rightarrow AK.AI = AM^2$. Do $AN = AM \Rightarrow AB.AC = AK.AI$

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Ta có $AN \perp NO, MP \perp NO, M \notin AN \Rightarrow AN \parallel MP$

Do đó AMPN là hình bình hành $\Leftrightarrow AN = MP = 2x$

Tam giác $\triangle ANO$ đồng dạng với $\triangle NEM \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{NO}{EM} \Rightarrow NE = \frac{2x^2}{R}$

$$\text{TH 1. } NE = NO - OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R - \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 - R\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2.$$

$$\text{PTTT } 2(R^2 - t^2) = R^2 - Rt \Leftrightarrow 2t^2 - Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -R \\ t = R \end{cases}$$

$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow t = R \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A \equiv B \text{ (loại)}$$

$$\text{TH 2 } NE = NO + OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R + \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 + R\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2.$$

$$\text{PTTT } 2(R^2 - t^2) = R^2 + Rt \Leftrightarrow 2t^2 + Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = R \\ t = -R \end{cases}$$

$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow 2t = R \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = 2R \text{ (loại)}$$

Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hbh

Câu 5 (1,0 điểm) Ta có $12 \geq (a+b)^3 + 4ab \geq (2\sqrt{ab})^3 + 4ab$. Đặt $t = \sqrt{ab}, t > 0$ thì

$$12 \geq 8t^3 + 4t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t + 3) \leq 0$$

Do $2t^2 + 3t + 3 > 0, \forall t$ nên $t-1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Vậy $0 < ab \leq 1$

Chúng minh được $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

$$\text{Thật vậy, BĐT } \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \leq 0. \text{ Do } 0 < ab \leq 1 \text{ nên BĐT này đúng}$$

Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2015ab \leq 2016, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{ab}, 0 < t \leq 1$ ta được $\frac{2}{1+t} + 2015t^2 \leq 2016$

$$2015t^3 + 2015t^2 - 2016t - 2014 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2 + 4030t + 2014) \leq 0. \text{ BĐT này đúng } \forall t: 0 < t \leq 1$$

Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$. Đẳng thức xảy ra $a = b = 1$

ĐỀ 7

Câu 1 a)

$$P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

$$= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + 2 = \frac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{b) Ta có } x = 2 - 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$$

Thay vào biểu thức

$$P = 2(\sqrt{2}-1) + 2 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2} - 2 + 2 + \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2$$

$$P = 4\sqrt{2} + 2$$

$$\text{c) Đưa được } \frac{7}{P} = \frac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}}$$

$$\text{Đánh giá } 2x+2+2\sqrt{x} \geq 6\sqrt{x} \Rightarrow 0 < \frac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}} < \frac{7}{6}$$

Vậy $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên đó là 1 khi

$$7\sqrt{x} = 2x + 2 + 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 2. a) Khi $m = -1$ ta có phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$

Ta có: $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $x_1 = 2; x_2 = -4$

b) Tính được $\Delta' = m^2 - (m-1)^3$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2 - (m-1)^3 > 0 (*)$

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m(1) \\ x_1 x_2 = (m-1)^3(2) \end{cases}$

Giả sử $x_1 = (x_2)^2$ thay vào (2) ta được $x_2 = m-1; x_1 = (m-1)^2$

Thay hai nghiệm $x_1; x_2$ vào (1) ta được:

$$(m-1)^2 + m - 1 = 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Khẳng định hai giá trị m vừa tìm được thỏa mãn điều kiện (*), kết luận

Câu 3. Điều kiện: $x \neq 0$, đưa phương trình trở thành: $\frac{2x^2+9}{x^2} + 2\frac{x}{\sqrt{2x^2+9}} - 3 = 0$

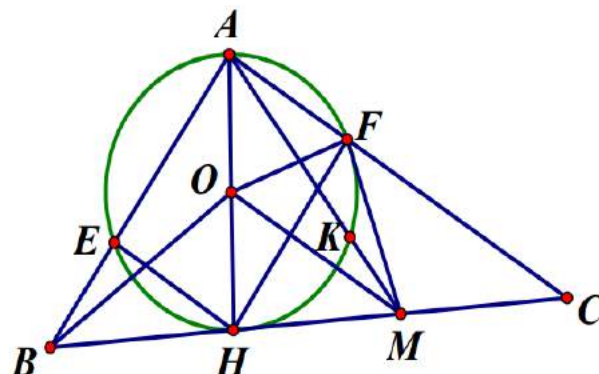
Đặt ẩn phụ: $\frac{x}{\sqrt{2x^2+9}} = t$, phương trình trở thành:

$$\frac{1}{t^2} + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Trường hợp: $t = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2x^2+9}$ (VN)

Trường hợp: $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+9} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$

Câu 4 a)



Xét hai tam giác: AEF và ACB có góc A chung

Ta có $\angle AEF = \angle AHF$; $\angle AHF = \angle ACB$; suy ra $\angle AEF = \angle ACB$

(hoặc $\angle AFE = \angle AHE$; $\angle AHE = \angle ABC$; suy ra $\angle AFE = \angle ABC$)

Suy ra hai tam giác AEF và ACB đồng dạng

Từ tỷ số đồng dạng $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ ta có $AE \cdot AB = AC \cdot AF$

b) Xét hai tam giác OHM và OFM có OM chung, $OF = OH$.

Có $MF = MH$ (vì tam giác HFC vuông tại F, trung tuyến FM)

Suy ra $\triangle OHM = \triangle OFM$ (c.c.c)

Từ đó $\angle MFO = 90^\circ$, MF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH

c) Xét hai tam giác AHM và BHO có $\angle AHM = \angle BHO = 90^\circ$

Trong tam giác vuông ABC, đường cao AH có

$$AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH \cdot 2OH = HB \cdot 2HM \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{HM}{HO}$$

Suy ra $\triangle HBO$ đồng dạng với $\triangle HAM$

Suy ra $HA = HO$

d) Gọi K là giao điểm của AM với đường tròn

Ta có $\angle HBO = \angle HAM = \angle MHK$, suy ra $BO \parallel HK$

Mà $HK \perp AM$, suy ra $BO \perp AM$, suy ra O là trực tâm của tam giác ABM

Câu 5. Giả sử $a \geq b \geq c$, từ giả thiết suy ra $ab \geq 1$. Ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Vậy ta cần chứng minh: } \frac{2}{1+ab} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 3 - ab \geq 3abc^2 \Leftrightarrow c^2 + ca + bc \geq 3abc^2 \Leftrightarrow a + b + c \geq 3abc$$

$$\text{Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì } \begin{cases} (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \\ ab+bc+ca \geq 3\sqrt{(abc)^2} \end{cases}$$

$$\text{Hay } a+b+c \geq 3 \geq 3abc$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

ĐỀ 8

$$\text{Câu 1: } 2015\sqrt{2015x-2014} + \sqrt{2016x-2015} = 2016 \text{ (1)}$$

$$\text{ĐK: } x \geq \frac{2015}{2016}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2015\sqrt{2015x-2014} - 2015) + (\sqrt{2016x-2015} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2015(\sqrt{2015x-2014} - 1) + (\sqrt{2016x-2015} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2015(2015x-2015)}{\sqrt{2015x-2014}+1} + \frac{2016x-2016}{\sqrt{2016x-2015}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\underbrace{\frac{2015^2}{\sqrt{2015x-2014}+1} + \frac{2016}{\sqrt{2016x-2015}+1}}_{>0 \forall x \geq \frac{2015}{2016}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{1\}$

Câu 2:

$$(x-2)(x^2-x) + (4m+1)x - 8m - 2 = 0(1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x) + (4m+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x+4m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - x + 4m + 1 = 0(2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4(4m+1) > 0 \\ 2^2 - 2 + 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16m - 3 > 0 \\ 4m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{16} \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (2) $\Rightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3 = 2$ (*)

Theo định lý Vi-ét: $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = 4m + 1$. (**)

Thay (*) và (**) ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 4 = 11$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(4m + 1) = 7$$

$$\Leftrightarrow m = -1$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 3:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = (x+1)(y+1) \end{cases} \quad (1)$$

$$a) \begin{cases} \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

ĐK: $x \neq -1; y \neq -1$

$$(1) \Leftrightarrow x(x+1) + y(y+1) = (x+1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = 1$$

Đặt $a = \frac{x}{y+1}; b = \frac{y}{x+1}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^2 - 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 1-2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(0;1), (1;0)$

$$b) P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

$$\text{Xét } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2}$$

Thay $x+y+z=2$ và $x^2+y^2+z^2=2$ ta có $xy + yz + zx = 1$.

Thay $1 = xy + yz + zx$ ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(xy+yz+zx+y^2)(xy+yz+zx+z^2)}{xy+yz+zx+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+z)(y+x)(z+y)(z+x)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Tương tự ta có:

$$y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} = y(z+x)$$

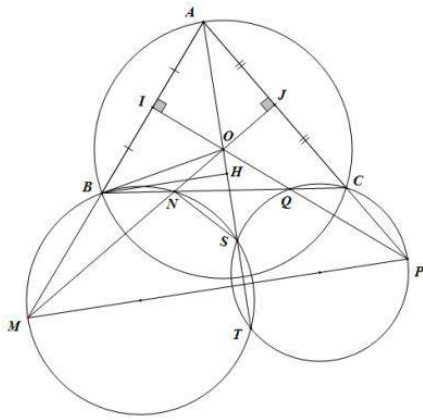
$$z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = z(x+y)$$

Cộng từng vế của ba đẳng thức trên ta có

$$P = xy + xz + yz + yx + zx + zy = 2(xy + yz + zx) = 2$$

Vậy biểu thức P không phụ thuộc vào x, y, z .

Câu 4:



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, AC

ΔOAB cân ở O có OI là đường cao kẻ từ đỉnh O nên OI cũng là phân giác góc O, suy ra

$$\angle BOI = \frac{1}{2} \angle BOA \quad (1)$$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AB của (O):

$$\angle BCA = \frac{1}{2} \angle BOA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BOI = \angle BCA$ (3)

Xét ΔOBI vuông tại I có góc ngoài OBM:

$$\angle OBM = 90^\circ + \angle BOI \quad (4)$$

Xét ΔNJC vuông tại J có góc ngoài ONB:

$$\angle ONB = 90^\circ + \angle BCA \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra $\angle OBM = \angle ONB$

$\Rightarrow \Delta OBM \sim \Delta ONB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OB}{ON} = \frac{OM}{OB} \Rightarrow OM \cdot ON = OB^2 = R^2$$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có

$$OQ \cdot OP = R^2 \Rightarrow OM \cdot ON = OQ \cdot OP$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OQ} = \frac{OP}{ON}$$

Xét ΔOMP và ΔOQN có:

$$\begin{cases} \text{MOP chung} \\ \frac{OM}{OQ} = \frac{OP}{ON} \end{cases} \Rightarrow \Delta OMP \sim \Delta OQN \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle OMP = \angle OQN \Rightarrow \angle OMP + \angle NQP = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Ta chứng minh O, S, T thẳng hàng

Gọi T' là giao điểm khác S của OS với đường tròn ngoại tiếp ΔBMN .

Khi đó $MNST'$ là tứ giác nội tiếp, nên

$$OSN = OMT' \Rightarrow \Delta OSN \sim \Delta OMT' (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{OS}{OM} = \frac{ON}{OT'} \Rightarrow OS \cdot OT' = OM \cdot ON$$

$$\Rightarrow OS \cdot OT' = OQ \cdot OP$$

$$\Rightarrow \frac{OS}{OP} = \frac{OQ}{OT'}$$

Xét ΔOSQ và $\Delta OPT'$ có:

$$\begin{cases} \text{SOQ chung} \\ \frac{OS}{OP} = \frac{OQ}{OT'} \end{cases} \Rightarrow \Delta OSQ \sim \Delta OPT' (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle OSQ = \angle OPT' \Rightarrow \angle OPT' + \angle QST' = 180^\circ$$

$\Rightarrow T'SQP$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow T'$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCPQ

$\Rightarrow T' \equiv T$

Vậy O, S, T thẳng hàng

$$\Rightarrow BH \perp OH$$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính OB .

Vậy khi A di động, H luôn thuộc đường tròn đường kính OB .

Câu 5:

$$a) A = \frac{8a^2 + b}{4a} + b^2 = 2a + \frac{b}{4a} + b^2 = (a + b^2) + (a + \frac{b}{4a})$$

Vì

$$a > 0; a + b \geq 1 \Rightarrow \frac{b}{4a} \geq \frac{1-a}{4a}; a \geq 1-b \Rightarrow a + \frac{b}{4a} \geq \frac{1}{4a} - b + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A \geq (a + b^2) + (\frac{1}{4a} - b + \frac{3}{4}) = (a + \frac{1}{4a}) + (b - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } a + \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}} = 1 \text{ (BĐT Cô-si cho hai số không âm); } (b - \frac{1}{2})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$

b) Ta có:

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 - 32x + 4y + 39 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40 = 4y^2 - 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2+2x+10) = (2y-1)^2$$

Vì y là số nguyên nên $2y-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Vì $(2y-1)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2+2x+10$ là số chính phương.

Đặt $x^2+2x+10=m^2$ ($m \in \mathbb{N}^*$) suy ra

$$(x+1)^2 + 9 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1-m)(x+1+m) = -9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+m=9 \\ x+1-m=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+1+m=1 \\ x+1-m=-9 \end{cases} \quad (\text{Do } x+1+m > x+1-m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+m=3 \\ x+1-m=-3 \end{cases}$$

$$\bullet x=3 \Rightarrow (2y-1)^2 = 25 \Rightarrow y=3 \text{ hoặc } y=-2$$

$$\bullet x=-5 \Rightarrow (2y-1)^2 = 1225 \Rightarrow y=18 \text{ hoặc } y=-17$$

$$\bullet x=-1 \Rightarrow (2y-1)^2 = 81 \Rightarrow y=5 \text{ hoặc } y=-4$$

Vậy các bộ $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $(3;3), (3;-2), (-5;18), (-5;-17), (-1;5), (-1;-4)$

ĐỀ 9

Câu 1

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - (\sqrt{x}-1) \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \\ A-1 &= \frac{\sqrt{x}-(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

Ta có $x = 2016 + 2\sqrt{2015}$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Có $x = 2015 + 2\sqrt{2015} + 1 = (\sqrt{2015} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2015} + 1$. Thay vào biểu thức $A - 1$ ta được:

$$A - 1 = \frac{1}{\sqrt{2015}}$$

b) Với 2 số nguyên dương a, b bất kì ta có:

$$a^{2015} + b^{2015} = (a+b)(a^{2014} + a^{2013}b + \dots + ab^{2013} + b^{2014}) \Rightarrow a^{2015} + b^{2015} : (a+b)$$

+ Xét trường hợp n là số lẻ

Áp dụng khẳng định trên ta có:

$$2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] : n$$

$$2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] : n$$

...

$$2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n$$

Suy ra

$$A = n^{2015} + 2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] + 2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] + \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n$$

Tương tự

$$A = 2(1^{2015} + n^{2015}) + 2[2^{2015} + (n-1)^{2015}] + \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2015}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : (n+1)$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $A : n(n+1)$

Tương tự với trường hợp n chẵn ta cũng có $A : n(n+1)$

Câu 2

a) Điều kiện: $x^2 \neq 8; x^2 \neq 9; x^2 \neq 11; x^2 \neq 12$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{7}{x^2-8} \right) + \left(\frac{4}{x^2-11} - \frac{3}{x^2-12} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{6(x^2-8)-7(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{4(x^2-12)-3(x^2-11)}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-x^2+15}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{x^2-15}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-15=0(2) \\ -\frac{1}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{1}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0(3) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}$ (thỏa mãn)

Phương trình (3) $\Leftrightarrow (x^2-9)(x^2-8) = (x^2-11)(x^2-12)$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{\pm\sqrt{15}; \pm\sqrt{10}\}$

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x^2+4x) \cdot (4x+y) = 6 \\ (x^2+4x) + (4x+y) = -5 \end{cases}$$

Suy ra x^2+4x và $4x+y$ là 2 nghiệm của phương trình

$$t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x^2+4x = -2 \\ 4x+y = -3 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} x^2+4x = -3 \\ 4x+y = -2 \end{cases}$ (II)

$$\text{Giải (I): } x^2+4x = -2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2+\sqrt{2} \Rightarrow y = -3-4x = 5-4\sqrt{2} \\ x = -2-\sqrt{2} \Rightarrow y = -3-4x = 5+4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Giải (II): } x^2+4x+3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2-4x = 2 \\ x = -3 \Rightarrow y = -2-4x = 10 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(-2+\sqrt{2}; 5-4\sqrt{2}), (-2-\sqrt{2}; 5+4\sqrt{2}), (-1; 2), (-3; 10)$

Câu 3

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $ax^2 = bx+c \Leftrightarrow ax^2 - bx - c = 0(1)$

Vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác vuông với cạnh huyền là a nên a, b, c > 0, $a^2 = b^2 + c^2$

(d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$$\Delta = b^2 + 4ac > 0 \text{ (luôn đúng } \forall a, b, c > 0)$$

Gọi 2 giao điểm có hoành độ là x_1, x_2 , là 2 nghiệm của (1). Theo Viét ta có:

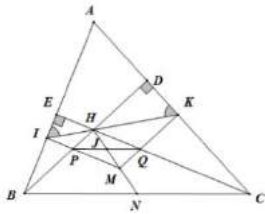
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\text{Xét } P = x_1^2 + x_2^2 - 2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{a} - 2 = \frac{b^2 - 2ac - 2a^2}{a^2}$$

$$\text{Có } b^2 + 2ac - 2a^2 = b^2 + 2ac - (b^2 + c^2) - a^2 = 2ac - c^2 - a^2 = -(c-a)^2 < 0, \forall a, c, 0 < c < a$$

Suy ra $P < 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Câu 4



a) Vì HI, HK là phân giác của góc EHB và góc DHC nên

$$\text{EHI} = \frac{1}{2} \text{EHB}; \text{DHC} = \text{CHK} = \frac{1}{2} \text{DHC. Mà } \text{EHB} = \text{DHC (đối đỉnh)} \Rightarrow \text{EHI} = \text{DHC} = \text{CHK} \quad (1)$$

$$\text{Có } \text{AIH} = 90^\circ - \text{EHI}; \text{AKH} = 90^\circ - \text{DHC} \Rightarrow \text{AIH} = \text{AKH} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) suy ra } \text{EHI} + \text{EHK} = \text{CHK} + \text{EHK} = 180^\circ \Rightarrow \text{I, H, K thẳng hàng} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \Delta \text{ AIK cân tại A} \Rightarrow \text{AI} = \text{AK}$$

b) Gọi giao IM và BH là P, giao KM và CH là Q, giao HM và PQ là J, giao HM và BC là N.

Ta có:

$$\Delta \text{ HEI} \sim \Delta \text{ HDK (g.g)} \Rightarrow \frac{\text{HE}}{\text{HD}} = \frac{\text{EI}}{\text{DK}}$$

$$\Delta \text{ HEB} \sim \Delta \text{ HDC (g.g)} \Rightarrow \frac{\text{HE}}{\text{HD}} = \frac{\text{EB}}{\text{DC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{EI}}{\text{DK}} = \frac{\text{EB}}{\text{DC}} \Rightarrow \frac{\text{EI}}{\text{EB}} = \frac{\text{DK}}{\text{DC}} \quad (4)$$

$$\text{Vì } \text{IP} \perp \text{AB}, \text{HE} \perp \text{AB} \Rightarrow \text{IP} \parallel \text{HE} \Rightarrow \frac{\text{EI}}{\text{EB}} = \frac{\text{HP}}{\text{HB}} \quad (5). \text{ Tương tự } \frac{\text{DK}}{\text{DC}} = \frac{\text{HQ}}{\text{HC}} \quad (6)$$

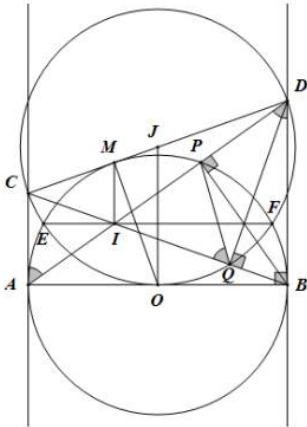
$$\text{Từ (4), (5), (6)} \Rightarrow \frac{\text{HP}}{\text{HB}} = \frac{\text{HQ}}{\text{HC}} \Rightarrow \text{PQ} \parallel \text{BC}$$

$$\text{Suy ra } \frac{PJ}{BN} = \frac{HJ}{HN} = \frac{JQ}{NC} \Rightarrow \frac{PJ}{JQ} = \frac{BN}{NC}$$

Vì $HP \parallel MQ$, $HQ \parallel PM$ nên $HQMP$ là hình bình hành $\Rightarrow J$ là trung điểm $PQ \Rightarrow PJ = JQ$
 $\Rightarrow BN = NC \Rightarrow N$ là trung điểm BC

Vậy HM luôn đi qua trung điểm BC là điểm cố định.

Câu 5



a) Vì $AC \perp AB$, $BD \perp AB \Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow ACDB$ là hình thang

Vì CM , CA là tiếp tuyến của (O) nên $CM = CA$. Tương tự $DM = DB$

Gọi J là trung điểm của CD thì JO là đường trung bình của hình thang $ACDB$ suy ra $JO \parallel BD$ và

$$OJ = \frac{AC + BD}{2} = \frac{CM + MD}{2} = \frac{CD}{2} = IC = ID \quad (1)$$

Vì $BD \perp AB$ nên $JO \perp AB$ tại O (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn (J) đường kính CD

b) Vì $CA \parallel BD$ nên theo định lý Talét ta có: $\frac{CI}{IB} = \frac{CA}{CD} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow IM \parallel BD$

Mà $BD \perp AB$ nên $MI \perp AB$

Gọi P , Q lần lượt là giao của AD và (O) , BC và (J)

Có $\angle APB = \angle CQD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle DPB = \angle BQD = 90^\circ$

Suy ra $BQPD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle PDB = \angle PQI$

Vì $AC \parallel BD$ nên $\angle PDB = \angle IAC$

$$\Rightarrow \angle PQI = \angle IAC \Rightarrow \triangle PQI \sim \triangle CAI \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PI}{CI} = \frac{QI}{AI} \Rightarrow IP \cdot IA = IC \cdot IQ$$

Suy ra phương tích của điểm I đối với 2 đường tròn (O) và (J) là bằng nhau

Suy ra I nằm trên trục đẳng phương EF của 2 đường tròn.

Vậy I , E , F thẳng hàng.

Câu 6

Ta có:

$$(x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx) \leq 9 + 2(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx \geq \frac{(x+y+z)^2 - 9}{2}$$

$$\Rightarrow P \leq x+y+z + \frac{9-(x+y+z)^2}{2}$$

$$\text{Đặt } x+y+z=t \Rightarrow P \leq t + \frac{9-t^2}{2} = -\frac{t^2-2t+1}{2} + 5 = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 5 \leq 5$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$, chẳng hạn khi $x=1, y=2, z=-2$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 5.

ĐỀ 10.

Câu 1

a) Dễ thấy $A < 0$,

$$\text{Ta có } A^2 = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}} \right)^2 = 7 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}} = 14 - 2.5 = 4$$

Suy ra $A = -2$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Ta có:

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}} \right)$$

$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}} \right). \text{ Hay}$$

$$B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{\left(1+\frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1-\frac{\sqrt{84}}{9}\right)} \cdot B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{1-\frac{84}{81}} B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (B-1)(B^2+B+2) = 0 \text{ mà } B^2+B+2 = \left(B+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ suy ra } B=1. \text{ Vậy } B \text{ là số nguyên.}$$

c) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

$$\text{Ta có } x^3 = 2a + (1-2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2a) = 0$$

Xét đa thức bậc hai x^2+x+2a với $\Delta = 1-8a \geq 0$

$$+ \text{ Khi } a = \frac{1}{8} \text{ ta có } x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1.$$

+ Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$ Vậy với mọi

$$a \geq \frac{1}{8} \text{ ta có: } x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ là số tự nhiên.}$$

$$d) \text{ Nhận xét: } (\sqrt{x^2 + 2015} + x)(\sqrt{x^2 + 2015} - x) = x^2 + 2015 - x^2 = 2015.$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết ta suy ra } \sqrt{x^2 + 2015} - x = \sqrt{y^2 + 2015} + y$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2015} + y + \sqrt{x^2 + 2015} + x = \sqrt{x^2 + 2015} - x + \sqrt{y^2 + 2015} - y \Leftrightarrow x + y = 0$$

Câu 2

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 + y & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

• $y = x$: Thay vào (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

• $y = -x - 1$. Thay vào (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + (-x - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -x - 1 = -2$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -x - 1 = 1$$

Vậy hệ phương trình (I) có 4 nghiệm là $(1; -2), (-2; 1), \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Câu 3 Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a^2 - b^2)}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a - b)(a + b)}{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab})} = \frac{(a + b - 2\sqrt{ab})(a + b)}{a + b - \sqrt{ab}} \end{aligned}$$

d) Trên tia AC lấy B' sao cho AB = AB'. Vẽ KI ⊥ AC tại I

Xét Δ ABK và Δ AB'K có

$$\begin{cases} AK(\text{chung}) \\ \angle KAB = \angle KAB'(\text{gt}) \Rightarrow \Delta ABK = \Delta AB'K (\text{c.g.c}) \\ AB = AB' \end{cases}$$

⇒ KB = KB' (hai cạnh tương ứng)

Mặt khác AK là phân giác góc BAC nên K là điểm chính giữa cung BC ⇒ KB = KC.

⇒ KB' = KC

⇒ Δ KB'C cân tại K

⇒ I là trung điểm B'C

$$\Rightarrow AI = \frac{AB' + AC}{2} = \frac{AB + AC}{2}$$

⇒ I là trung điểm B'C

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2} DE \cdot AB + \frac{1}{2} DF \cdot AC = \frac{1}{2} DF \cdot (AB + AC)$$

Vì AK là trung trực EF nên AE = AF, EK = FK ⇒ Δ AEK = Δ AFK (c.c.c). Do đó

$$S_{AEDF} = 2 \cdot S_{AEK} = KI \cdot AF$$

Vì DF // KI (cùng vuông góc AC) nên theo định lí Ta-lét:

$$\frac{DF}{KI} = \frac{AF}{AI} \Rightarrow S_{AEDF} = KI \cdot AF = DF \cdot AI = DF \cdot \frac{AB + AC}{2} = S_{ABC}$$

Vậy $S_{ABC} = S_{AEDF}$

Câu 5
$$P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}$$

Ta có:
$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có $1+b^2 \geq 2b$

Thay vào (1) ta được:
$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \quad (2)$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \quad (3) \qquad \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2} \quad (4)$$

Cộng từng vế ba BĐT (2), (3), (4) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \left(\frac{ab + bc + ca}{2} \right) \quad (5)$$

Mặt khác

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3 \quad (6)$$

Thay điều kiện $a+b+c=3$ và BĐT (6) vào (5) ta có

$$P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi $a=b=c=1$.

ĐỀ 11

Bài 1:

a)

$$P = \frac{-x+2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(x-9)} : \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-x}{\sqrt{x}-3} = \frac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{-9}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{9\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{-9\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{-1}{\sqrt{x}+3}$$

b)

$$P = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x}+3=4 \Leftrightarrow x=1(\text{TM})$$

Bài 2: a) Khi $m=-1$ ta có phương trình

$$x^2+6x+5=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-5 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \{-1; -5\}$

b) Ta có: $\Delta' = (m-2)^2 - (m^2 - 2m + 2) = 2 - 2m$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 4 \\ x_1 x_2 = m^2 - 2m + 2 \end{cases}$$

Do đó:

$$|2(x_1 + x_2) + x_1 x_2| = 3 \Leftrightarrow |m^2 + 2m - 6| = 3 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 7 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 7 = 3 \\ (m+1)^2 - 7 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } (m+1)^2 - 7 = 3 \Leftrightarrow m+1 = \pm\sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 + \sqrt{10}(\text{L}) \\ m = -1 - \sqrt{10}(\text{TM}) \end{cases}$$

$$\text{Với } (m+1)^2 - 7 = -3 \Leftrightarrow m+1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = -3(TM) \end{cases}$$

Bài 3:

a) ĐKXĐ: $x \geq -1$. Phương trình tương đương

$$\sqrt{2x+3} + 1 = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x+3 + 2\sqrt{2x+3} + 1 = 4x+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-3)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -1 \Leftrightarrow x = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 3$

b) ĐKXĐ: $y \geq 1$

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$$\Rightarrow y^2(x+2) = (x+1)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(y^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét } x = -2 \text{ thay vào (2) được } y - 2 = 3\sqrt{y-1} \Leftrightarrow y^2 - 13y + 13 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{117}}{2} \text{ (với } y \geq 2)$$

$$\text{Xét } x = y^2 - 1 \text{ thay vào (2) được } y^2 + y - 1 = 3\sqrt{y-1}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y-1} = a \geq 0 \Rightarrow y = a^2 + 1$$

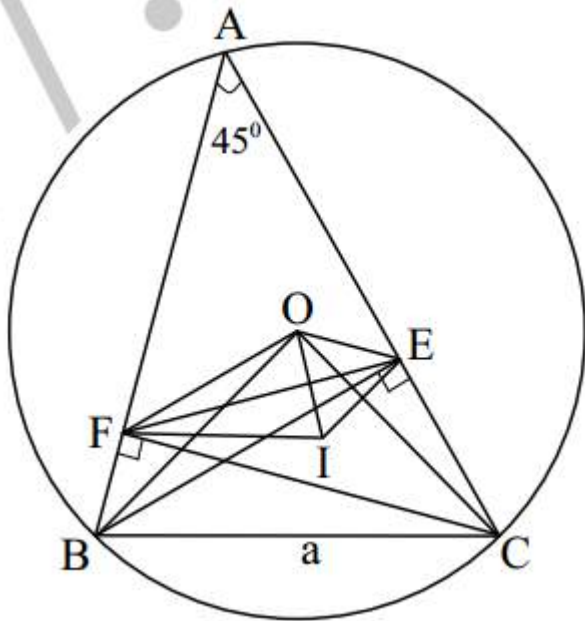
$$y^2 + y - 1 = 3\sqrt{y-1} \Leftrightarrow (a^2 + 1)^2 + a^2 = 3a$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 3a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 3(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$\text{Đối chiếu ĐKXĐ ta có } \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{13 + \sqrt{117}}{2} \end{cases} \text{ là nghiệm của hệ phương trình đã cho}$$

Bài 4:



a) Ta có $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ (Góc nội tiếp, góc ở tâm cùng chắn cung BC)

Do đó $\angle BFC = \angle BOC = \angle BEC = 90^\circ$ suy ra đỉnh F, O, E cùng nhìn BC dưới góc 90° nên B, F, O, E, C cùng thuộc một đường tròn đường kính BC (Bài toán cung chứa góc)

Hay tứ giác BFOC nội tiếp

Ta có $\angle FOB = \angle FCB$ (Cùng chắn cung BF)

$\angle EOC = \angle EBC$ (Cùng chắn cung EC)

Mà $\angle FCB + \angle EBC = 90^\circ - \angle ABC + 90^\circ - \angle ACB$

$= 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = \angle BAC = 45^\circ \Rightarrow \angle FOB + \angle EOC = 45^\circ$

Hay $\angle EOF = 135^\circ$. Mặt khác vì I đối xứng với O qua EF nên $\angle EIF = \angle EOF = 135^\circ \Rightarrow \angle EIF + \angle BAC = 180^\circ$

Do đó tứ giác AEIF nội tiếp đường tròn (Tổng hai góc đối bằng 180°)

b) Theo câu a) tứ giác BFEC nội tiếp nên $\angle AFE = \angle ACB$ (Cùng bù với $\angle EFB$) $\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ACB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{\sqrt{2}AE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow EF = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (\text{Vì } \triangle AEB \text{ vuông cân tại E})$$

Bài 5: Dễ dàng nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Giả sử $x_0 \neq 0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Chia 2 vế của phương trình cho $x_0^2 \neq 0$ được

$$\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right) + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b = 0$$

$$\text{Đặt } t = x_0 + \frac{1}{x_0} \Rightarrow |t| \geq 2; x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = t^2 - 2$$

Do đó ta có phương trình:

$$t^2 - 2 = -at - b$$

Áp dụng BĐT Bunhia được

$$(a^2 + b^2)(t^2 + 1) \geq (at + b)^2 = (t^2 - 2)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1} = \frac{t^3 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1} - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5t^4 - 24t^2 + 16}{5(t^2 + 1)} + \frac{4}{5} = \frac{(5t^2 - 4)(t^2 - 4)}{5(t^2 + 1)} + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$$

Vậy $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} |t| = 2 \\ \frac{a}{t} = \frac{b}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x_0| = 1 \\ a = bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{5} \\ a = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

ĐỀ 12

Câu 1

a) Với $a \geq 0, a \neq 4, a \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{a - 3\sqrt{a}}{a - 9}\right) : \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 3} + \frac{\sqrt{a} - 3}{2 - \sqrt{a}} - \frac{9 - a}{a + \sqrt{a} - 6}\right) = \frac{a - 9 - a + 3\sqrt{a}}{a - 9} : \frac{(\sqrt{a} - 2)^2 - (\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3) - 9 + a}{(\sqrt{a} + 3)(\sqrt{a} - 2)} \\ &= \frac{-9 + 3\sqrt{a}}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)} : \frac{(\sqrt{a} - 2)^2 - (a - 9) - (9 - a)}{(\sqrt{a} + 3)(\sqrt{a} - 2)} = \frac{3(\sqrt{a} - 3)}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)} : \frac{(\sqrt{a} - 2)^2}{(\sqrt{a} + 3)(\sqrt{a} - 2)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{a} + 3} : \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 3} = \frac{3}{\sqrt{a} + 3} \cdot \frac{\sqrt{a} + 3}{\sqrt{a} - 2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{a} - 2} \end{aligned}$$

b) Ta có: $A + |A| = 0 \Leftrightarrow |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{a} - 2} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} - 2 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$

Kết hợp với điều kiện, ta có $0 \leq a < 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 2

1) $\sqrt{29 - x} + \sqrt{x + 3} = x^2 - 26x + 177 \quad (1)$

ĐK: $-3 \leq x \leq 29$.

Với mọi $a, b \geq 0$, ta có:

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

Thay $a = \sqrt{29 - x}; b = \sqrt{x + 3}$ ta có:

$$\sqrt{29-x} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{2(29-x+x+3)} = 8$$

$$x^2 - 26x + 177 = (x-13)^2 + 8 \geq 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{29-x} + \sqrt{x+3} \leq x^2 - 26x + 177$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{29-x} = \sqrt{x+3} \\ x-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=13$

Do đó (1) $\Leftrightarrow x=13$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là {13}.

$$2) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = xy + x + y(1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - y + 1(2) \end{cases} \quad (I)$$

ĐK: $x \geq 1, y \geq 0$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = x + y$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = x+y$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1) = 0$$

$$\geq 1+0=1>0$$

$$\Leftrightarrow x-2y-1=0$$

Do đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2(2y+1) - y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (y+1)\sqrt{2y} = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (y+1)(\sqrt{2y} - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{2y} = 3 \text{ (Do } y+1>0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{2} \\ x = 10 \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(10; \frac{9}{2}\right)$

Câu 3

$$1. \text{ Vì } x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = x_1 + 1; x_4 = x_2 + 1$$

Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình (1) và phương trình (2) có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = b^2 = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = -b + 2 \\ x_3 x_4 = bc = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 1 = -b + c + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 + b - 2 = 0 \\ bc + b - c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(b+2) = 0 \\ (c+1)(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Nếu $b = 1$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{4}$

Thử lại:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

(thỏa mãn)

Nếu $b = -2, c = -1$ thì

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

(thỏa mãn)

Vậy $b = 1, c \leq \frac{1}{4}$ hoặc $b = -2, c = -1$.

2. Đặt $A = (p + 1)(p - 1)$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 2 và 3.

p lẻ $\Rightarrow p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow A = (2k + 2).2k = 4k(k + 1)$$

k và $k + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2 $\Rightarrow k(k + 1) : 2$

$$\Rightarrow A : 8 \quad (1)$$

Vì p không chia hết cho 3 nên $p = 3m + 1$ hoặc $p = 3m - 1$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

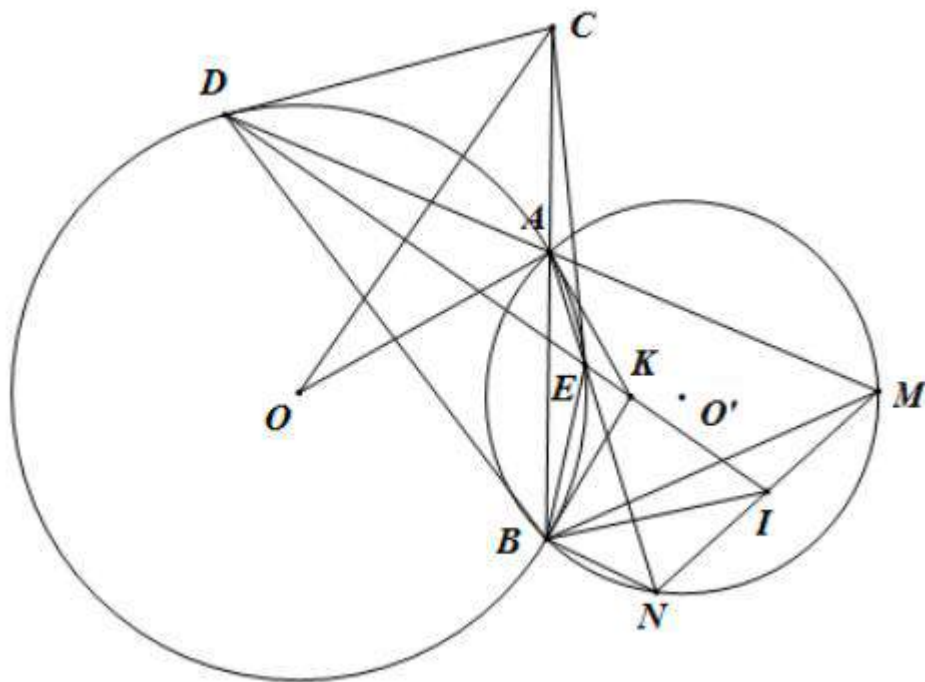
$$\text{Nếu } p = 3m + 1 \Rightarrow p - 1 : 3 \Rightarrow A : 3$$

$$\text{Nếu } p = 3m - 1 \Rightarrow p + 1 : 3 \Rightarrow A : 3$$

$$\text{Vậy } A : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), với chú ý $(3; 8) = 1 \Rightarrow A : 24$.

Câu 4



a) Vì DAEB là tứ giác nội tiếp nên $\angle DAB = \angle DEB$

Vì ABNM là tứ giác nội tiếp nên $\angle DAB = \angle BNI$

Do đó $\angle DEB = \angle BNI \Rightarrow \angle BEI + \angle BNI = 180^\circ$

$\Rightarrow$ BEIN là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle BEN = \angle BIN$

Vì DAEB là tứ giác nội tiếp nên $\angle BEN = \angle ADB$

Do đó $\angle BIN = \angle ADB \Rightarrow \angle BIM + \angle MDB = 180^\circ$

$\Rightarrow$ BDMI là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ B, D, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì ABNM là tứ giác nội tiếp nên $\angle BAE = \angle BMI$ (1)

Vì DAEB và DMIB là các tứ giác nội tiếp nên

$\angle ABE = \angle ADE$ và $\angle MBI = \angle ADE \Rightarrow \angle ABE = \angle MBI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tam giác BAE đồng dạng với tam giác BMI (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BE}{BI} = \frac{AE}{MI} \Rightarrow MI \cdot BE = BI \cdot AE$$

c) Ta chứng minh $AD \cdot BE = AE \cdot BD$

Vì CD là tiếp tuyến của (O) nên

$\angle CDA = \angle CBD$

$\Rightarrow$ tam giác CDA đồng dạng với tam giác CBD (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DA}{BD} = \frac{CD}{CB}$$

Chúng minh tương tự ta có $\Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{CE}{CB}$

Mà theo tính chất tiếp tuyến ta có $CD = CE$ nên $\frac{DA}{BD} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow AD \cdot BE = AE \cdot BD$

• Ta chứng minh DE đi qua điểm K là giao hai tiếp tuyến tại A và B của (O)

Gọi K_1, K_2 lần lượt là giao điểm của DE với tiếp tuyến của (O) tại A và B.

Khi đó

$$K_1A \cdot AE = K_1A \cdot DA \Rightarrow \Delta K_1AE \sim \Delta K_1DA (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{K_1E}{K_1A} = \frac{K_1A}{K_1D}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AE}{AD} \right)^2 = \frac{K_1E}{K_1A} \cdot \frac{K_1A}{K_1D} = \frac{K_1E}{K_1D}$$

Chúng minh tương tự ta có:

$$\left(\frac{BE}{BD} \right)^2 = \frac{K_2E}{K_2D}$$

$$\text{Mà } AD \cdot BE = AE \cdot BD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{K_1E}{K_1D} = \frac{K_2E}{K_2D}$$

Do K_1 và K_2 đều nằm ngoài đoạn DE nên K_1 và K_2 chia ngoài đoạn DE theo các tỷ số bằng nhau $\Rightarrow K_1 \equiv K_2 \equiv K$.

Vậy DE luôn đi qua điểm K cố định.

Câu 5.

Xét

$$\begin{aligned} \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} - (2b - a) &= \frac{5b^3 - a^3 - (ab + 3b^2)(2b - a)}{ab + 3b^2} \\ &= \frac{5b^3 - a^3 - (2ab^2 - a^2b + 6b^3 - 3b^2a)}{ab + 3b^2} = \frac{-b^5 - a^3 + a^2b + b^2a}{ab + 3b^2} \\ &= \frac{-(a+b)(a-b)^2}{ab + 3b^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} &\leq 2b - a \end{aligned}$$

Ta có 2 BĐT tương tự:

$$\begin{aligned} \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} &\leq 2c - b \\ \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} &\leq 2a - c \end{aligned}$$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được

$$P \leq 2(a+b+c) - (a+b+c) = a+b+c = 3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $3 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

ĐỀ 13

Câu 1.

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{x-4}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left(\frac{2x^2+4\sqrt{x}+x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}} \right] \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}} \right] \\ &= \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

+ Với $x > 0$, ta có: $x\sqrt{x}+2 = x\sqrt{x}+1+1 \geq 3\sqrt[3]{x\sqrt{x}.1.1} \Rightarrow x\sqrt{x}+2 \geq 3\sqrt{x}$

Suy ra $P = \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \geq \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ hay $P \geq \frac{3}{2}$ (dấu bằng xảy ra khi $x=1$).

Do đó, để $P \leq \frac{3}{2}$ thì $x=1$.

Hoặc trình bày cách khác:

+ Với $x > 0$, ta có: $P \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2 \leq 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x}$, $t > 0$.

Khi đó (*) trở thành: $t^3 - 3t + 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2) \leq 0$$

Vì $t+2 > 0, (t-1)^2 \geq 0$ nên $(t-1)^2(t+2) \leq 0 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1$ hay $x=1$.

b) **Cách 1:** theo đề: $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

$$\frac{a^3}{c+a^2} = \frac{(a^3+ac)-ac}{c+a^2} = a - \frac{ac}{c+a^2}$$

$$c+a^2 \geq 2a\sqrt{c} \Rightarrow \frac{ac}{c+a^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{c} \leq \frac{c+1}{4}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^3}{c+a^2} \geq a - \frac{c+1}{4}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^3}{a+b^2} \geq b - \frac{a+1}{4}, \quad \frac{c^3}{b+c^2} \geq c - \frac{b+1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &\geq 9 \\ \Rightarrow (a+b+c)3 &\geq 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{3}{2}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a=b=c=1.$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{3}{2} \text{ khi } a=b=c=1.$$

Cách 2: Ta có: $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, \text{ khi đó: } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Biểu thức } A \text{ được viết lại: } A = \frac{x}{y(x+y^2)} + \frac{y}{z(y+z^2)} + \frac{z}{x(z+x^2)}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y(x+y^2)} = \frac{(x+y^2)-y^2}{y(x+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x+y^2};$$

$$\text{mà } x+y^2 \geq 2y\sqrt{x} \Rightarrow \frac{y}{x+y^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ nên } \frac{x}{y(x+y^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{mà } \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{1 \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ nên } \frac{x}{y(x+y^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

(dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$)

$$\text{Tương tự: } \frac{y}{z(y+z^2)} \geq \frac{1}{z} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{y}\right), \quad \frac{z}{x(z+x^2)} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4}.$$

$$\text{Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: } (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3 \text{ (vì } x+y+z=3\text{)}.$$

Do đó $A \geq \frac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

Vậy $\min A = \frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Câu 2 a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$

Cách 1:

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Khi đó ta có: $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = (2-x^2)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} + 2 = (2-x^2)^2 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$, $t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành:

$$2t + 2 = (t^2 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 2t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)[(t+1)(t^2+1)+2t] = 0 \quad (2)$$

Vì $t \geq 0$ nên $(t+1)(t^2+1)+2t > 0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $t = 1$.

+ Với $t = 1 \Rightarrow x = 0$ (thỏa).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Cách 2:

+ Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - x^2 \quad (*)$$

$$+ \text{Đặt } t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}, t \geq 0. \text{ Suy ra } t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{t^2-2}{2}\right)^2 + 1 = 2 - x^2$$

Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$t^4 - 4t^2 - 4t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 - 4) = 0 \quad (*)$$

+ vì $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \geq 2$ và $t \geq 0$ nên $t \geq \sqrt{2}$.

Do đó $t^3 + 2t^2 - 4 \geq 2\sqrt{2} + 4 - 4 > 0$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $t = 2$.

+ Với $t = 2 \Rightarrow x = 0$ (thỏa).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Cách 3:

+ Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $\sqrt{1+x} = a, \sqrt{1-x} = b$ ($a, b \geq 0$). Suy ra: $a^2 + b^2 = 2$ (1)

+ Hơn nữa: $\sqrt{1-x^2} = ab \Rightarrow 2 - x^2 = a^2b^2 + 1$.

+ Phương trình đã cho trở thành: $a + b = a^2b^2 + 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a + b = a^2b^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

Cách 1:

$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ (x^2y^2 + 2xy + 1)y - 2(2x+1) = -2y \end{cases} \quad (*)$$

(lưu ý: không nhất thiết biến đổi đưa về phải của pt thứ hai về $-2y$, có thể $-3y$)

- Xét $y = 0$ thay vào hệ (*) ta được:
$$\begin{cases} 2x+1=0 \\ -2(2x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ.

- Xét $y \neq 0$, hệ phương trình (*) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} xy + \frac{2x+1}{y} = 4 \\ x^2y^2 + 2xy + 1 - 2\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+1) + \frac{2x+1}{y} = 5 \\ (xy+1)^2 - 2\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} \quad (**)$$

Đặt $a = xy + 1, b = \frac{2x+1}{y}$; khi đó hệ phương trình (**) trở thành:
$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 - 2b = -2 \end{cases} \quad (***)$$

+ Giải hệ (***) tìm được:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}, \begin{cases} a = -4 \\ b = 9 \end{cases}.$$

* Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ ta có
$$\begin{cases} xy + 1 = 2 \\ \frac{2x+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{2x+1}{3}\right) = 1 \\ y = \frac{2x+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$* \text{ Với } \begin{cases} a = -4 \\ b = 9 \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} xy + 1 = -4 \\ \frac{2x+1}{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \left(\frac{2x+1}{9} \right) = -5 \\ y = \frac{2x+1}{9} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}.$

Cách 2:

$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ x^2y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + (4x+2) = 8y \\ x^2y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases} \Rightarrow x^2y^3 + xy^2 - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ xy = 1 \\ xy = -5 \end{cases}$$

+ Với $y = 0$. Suy ra được $(x; y) = (-\frac{1}{2}; 0)$.

+ Với $xy = 1$. Suy ra được $(x; y) = (1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$.

+ Với $xy = -5$. Trường hợp này không tồn tại cặp $(x; y)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}.$

Câu 3.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a+1)(b+1) + 25.$$

$$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a+1)(b+1) + 25$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) = (a+1)(b+1) + 25$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^3 - (b+1)^3 = (a+1)(b+1) + 25 \quad (*)$$

Đặt $x = a+1, y = b+1 (x, y \in \mathbb{Z}; x, y \geq 2)$.

Khi đó $(*)$ trở thành: $x^3 - y^3 = xy + 25 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = xy + 25 \quad (**)$

+ Từ $(**)$ suy ra $x > y \Rightarrow x - y \geq 1$, mà $x^2 + xy + y^2 > 0$ nên:

$$x^2 + xy + y^2 \leq xy + 25 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 25 \Rightarrow x \leq 4 \quad (1).$$

+ Hơn nữa: $x > y$ và $x, y \geq 2$ nên $xy \geq 6$.

Suy ra $x^3 - y^3 = xy + 25 \geq 31 \Rightarrow x^3 > 31 \Rightarrow x > 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x = 4$. Do $x > y$ và $y \geq 2$ nên $y \in \{2; 3\}$.

+ Thử lại, chỉ có $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ thỏa (**). Suy ra $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ là cặp số cần tìm.

b) Cho hai số nguyên a và b thỏa: $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 1:

$$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{5} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5} \\ b \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}.$$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 2:

$$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5k + 1 \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 5l + r \quad (l \in \mathbb{Z}, r \in \{0; 1; 2; 3; 4\})$$

$$\Rightarrow n^2 = 5l_1^2 + r_1^2 \quad (l_1 \in \mathbb{Z}, r_1 \in \{0; 1; 4\}) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} a^2 = 5k_1 + 1 \\ b^2 = 5k_2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 5k_1 \\ b^2 = 5k_2 + 1 \end{cases}$$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 3:

$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 24a^2 - b^2 = -1$ không chia hết cho 5 nên a và b không đồng thời chia hết cho 5.

+ Giả sử a và b đều không chia hết cho 5.

$$\text{Theo định lý Fermat ta có } \begin{cases} a^4 \equiv 1 \pmod{5} \\ b^4 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \equiv 0 \pmod{5}$$

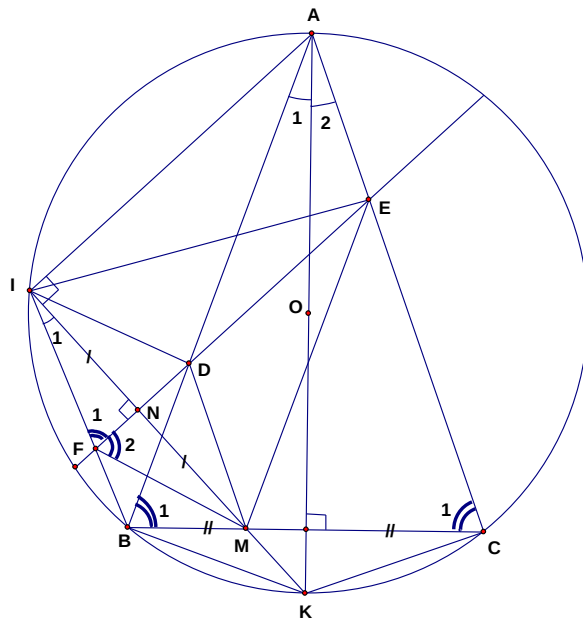
Nếu $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{5}$ thì $25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{5}$ (vô lí).

$$\text{Suy ra } a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 23a^2 + 1 = b^2 - a^2 \equiv 0 \pmod{5} \quad (*)$$

Vì a không chia hết cho 5 nên $a \equiv \pm 1, \pm 2 \pmod{5}$.

Với $a \equiv \pm 2 \pmod{5} \Rightarrow a^2 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv 3 \pmod{5}$ (trái với (*))

Câu 4.



+ Mặt khác $F_1 = C_1 \Rightarrow F_2 = B_1 \Rightarrow$ tứ giác BFDM nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $\angle FBC = \angle MDE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\angle AED = \angle MDE \Rightarrow AE \parallel DM$ (*)

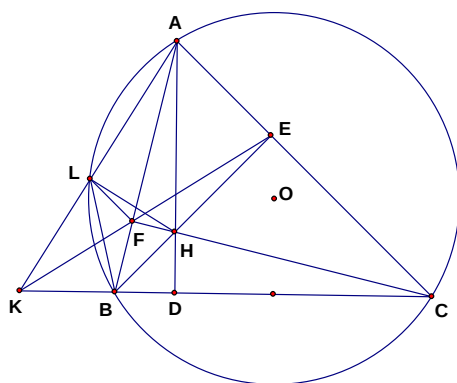
Hơn nữa $\angle AED = \angle MDE \Rightarrow \angle AED = \angle IDE$

Mà $DE \parallel IA$. Do đó tứ giác $AEDI$ là hình thang cân.

Suy ra $\angle ADE = \angle IED$; mà $\angle IED = \angle DEM$ nên $\angle ADE = \angle DEM \Rightarrow AD \parallel EM$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Câu 5 a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC , gọi L là giao điểm của đường thẳng AK và đường tròn (O) (L khác A). Chứng minh HL vuông góc với AK .



(Không có hình vẽ không chấm bài)

Cách 1:

+ Xét hai tam giác $\triangle KBF$ và $\triangle KEC$ có:

$\angle K$ chung, $\angle KBF = \angle KEC$ (vì cùng bù với $\angle FBC$)

Suy ra $\triangle KBF$ và $\triangle KEC$ đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{KB}{KE} = \frac{KF}{KC} \Leftrightarrow KB \cdot KC = KF \cdot KE \quad (1)$$

+ Tương tự: $\triangle KBL$ và $\triangle KAC$ đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{KB}{KA} = \frac{KL}{KC} \Leftrightarrow KB \cdot KC = KL \cdot KA \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } KF \cdot KE = KL \cdot KA \Leftrightarrow \frac{KF}{KA} = \frac{KL}{KE}; \text{ hơn nữa } \angle FKL = \angle AKE.$$

Suy ra $\triangle KFL$ và $\triangle KAE$ đồng dạng.

Suy ra $\angle KFL = \angle KAE$.

Do đó 4 điểm A, L, F, E cùng nằm trên đường tròn.

Mà A, E, F nằm trên đường tròn đường kính AH nên L cũng nằm trên đường tròn đường kính AH . Vậy HL vuông góc với AK .

Cách 2:

+ Hạ $HL' \perp AK$ tại L' . Ta đi chứng minh L' thuộc đường tròn (O) .

+ 5 điểm A, L', F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AH .

+ Chứng minh được $\Delta KFL'$ và ΔKAE đồng dạng.

$$\Rightarrow KL' \cdot KA = KF \cdot KE.$$

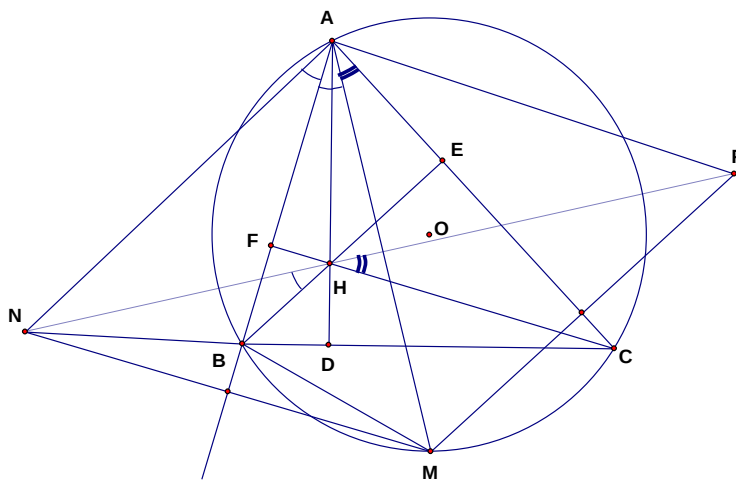
Tương tự chứng minh được: $KF \cdot KE = KB \cdot KC$

Suy ra $KL' \cdot KA = KB \cdot KC$.

Chứng minh được $AL'BC$ nội tiếp. Suy ra L' trùng L .

Vậy HL vuông góc với AK .

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Gọi N và P lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm M qua hai đường thẳng AB và AC . Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.



(Không có hình vẽ không chấm bài)

$$+ \text{Ta có: } \begin{cases} \angle ANB = \angle AMB \\ \angle AMB = \angle ACB \end{cases} \Rightarrow \angle ANB = \angle ACB$$

+ Tứ giác $DHEC$ nội tiếp nên $\angle ACB + \angle AHB = 180^\circ$. Suy ra $\angle ANB + \angle AHB = 180^\circ$.

Do đó tứ giác $AHBN$ nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $\angle NHB = \angle NAB$. Mà $\angle NAB = \angle MAB$ nên $\angle NHB = \angle MAB$

+ Tương tự ta cũng chứng minh được: $\angle CHP = \angle MAC$.

+ Suy ra $\angle NHB + \angle BHC + \angle CHP = \angle MAB + \angle BHC + \angle MAC = (\angle MAB + \angle MAC) + \angle BHC$

$$= \angle BAC + \angle BHC = \angle BAC + \angle FHE = 180^\circ$$

Suy ra N, H và P thẳng hàng.

ĐỀ 14.

Câu 1: a) Để ý rằng: $1 + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(x + z)$

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Suy ra $P = x(y + z) + y(z + x) + z(x + y) = 2(xy + yz + zx) = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} - \frac{z}{(z+y)(z+x)} \\ &= \frac{x(y+z) + y(z+x) - z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}} \end{aligned}$$

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 1$ và $x_1 x_2 = m^2 + 1$. Do đó

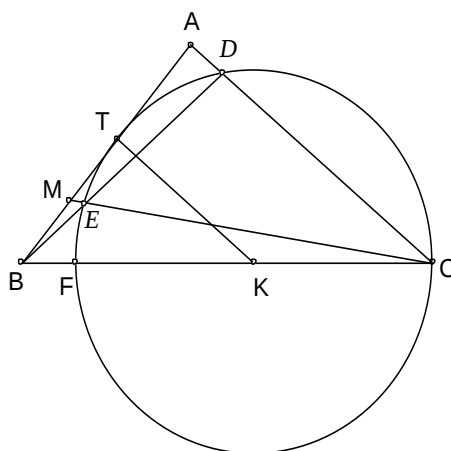
$$P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m + 1} = \frac{2m - 1}{4} = \frac{5}{4(2m + 1)}. \text{ Suy ra } 4P = 2m - 1 + \frac{5}{2m + 1}. \text{ Do } m > \frac{3}{4} \text{ nên}$$

$$2m+1>1$$

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì ta phải có $(2m+1)$ là ước của 5, suy ra $2m+1=5 \Leftrightarrow m=2$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm thỏa mãn bài toán.

Câu 4.



1). (K) tiếp xúc AB tại T, nên $KT \perp AB$, suy ra $KT // AB$.

Chú ý tam giác ΔKTC cân nên $KCT = KTC = TCA = TCB$. nên K thuộc BC.

Nhận xét. Chứng minh một điểm thuộc một đoạn thẳng ta quy về chứng minh ba điểm thẳng hàng.

2). Gọi (K) giao BC tại F khác C. Ta thấy tứ giác FEDC nội tiếp và chú ý K thuộc BC nên $FEC = 90^\circ$.

Từ đó $ABD = 90^\circ - ADB = 90^\circ - EFC = BCE$.

3). Từ trên, suy ra $MBE = BCM$ do đó $\Delta MBE \sim \Delta MCB \Rightarrow ME.MC = MB^2$.

Từ đó chú ý MT tiếp xúc (K), suy ra $MT^2 = ME.MC = MB^2$.

Vậy M là trung điểm BT.

Câu 5: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương

$$a+b+c \geq \sqrt[3]{abc}; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\text{Suy ra} \quad (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

$$\text{b) Ta có} \quad ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq 3$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{2007}{ab+bc+ca} \geq 669$$

Áp dụng bất đẳng thức trong câu a, ta có

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \right) (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \geq 9$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 1$$

$$\text{Do đó ta được} \quad \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \geq 670.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ 15

Câu 1.

a) Ta có: $x^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^2 = 8 + 2\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2 \Rightarrow x = \sqrt{5} + 1. \text{ Từ}$$

đó ta suy ra $(x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4.$

Ta biến đổi: $P = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1.$

b) Ta có $x = 1 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0.$ Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P = x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + x(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 1945 = 1945$$

c) Để ý rằng: $x = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2} - 1$ để tận dụng hằng đẳng thức: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$ Khi đó ta có: $(\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Ta biến đổi: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015 = (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2016 = 2016$

Câu 2.

1.
$$\begin{cases} x + 2y = 2m + 1 \\ 4x + 2y = 5m - 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x + 2y - 1}{2} \\ m = \frac{4x + 2y + 1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x + 2y - 1}{2} = \frac{4x + 2y + 1}{5}$$

$$\Rightarrow 5(x + 2y - 1) = 2(4x + 2y + 1) \Rightarrow 3x - 6y + 7 = 0$$

Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$ thì

$$3x_0 - 6y_0 + 7 = 0 \Rightarrow 6y_0 - 7 = 3x_0 : 3 \Rightarrow 7 : 3 \text{ (vô lí)}$$

Vậy hệ phương trình không có nghiệm nguyên $\forall m.$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$$x^2 - mx + 2 = 0 \quad (1)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2) \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \cdot 2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow m > 2\sqrt{2} \text{ hoặc } m < -2\sqrt{2}$$

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của (1). Áp dụng định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = 2.$

Do $A, B \in d$ nên $y_1 = mx_1 - 2$ và $y_2 = mx_2 - 2.$

Ta có:

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

$$\Leftrightarrow mx_1 - 2 + mx_2 - 2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(x_1 + x_2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại) hoặc } m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

$$1. \sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1 \quad (1)$$

$$\text{ĐK: } x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ hoặc } x \leq -4.$$

$$(I) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 16} + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = x^2 - 16 + 2\sqrt{x^2 - 16} + 1 \Leftrightarrow 6 = 2\sqrt{x^2 - 16}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{x^2 - 16} \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 5$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-5; 5\}$.

$$2. \begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{– Xét } x = 0, \text{ hệ (I) trở thành } \begin{cases} 4y = y^3 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 2$$

$$\text{– Xét } x \neq 0, \text{ đặt } \frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt. \text{ Hệ (I) trở thành}$$

$$\begin{cases} x^3 + 4xt = x^3 t^3 + 16x \\ 1 + x^2 t^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4xt - 16x \\ x^2(t^2 - 5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4x(t - 4) \\ 4 = x^2(t^2 - 5) \end{cases} \quad (1)$$

Nhân từng vế của (1) và (2), ta được phương trình hệ quả

$$4x^3(t^3 - 1) = 4x^3(t - 4)(t^2 - 5)$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 1 = t^3 - 4t^2 - 5t + 20 \quad (\text{Do } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 5t - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{7}{4} \end{cases}$$

+ Với $t = -3$, thay vào (2) được $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

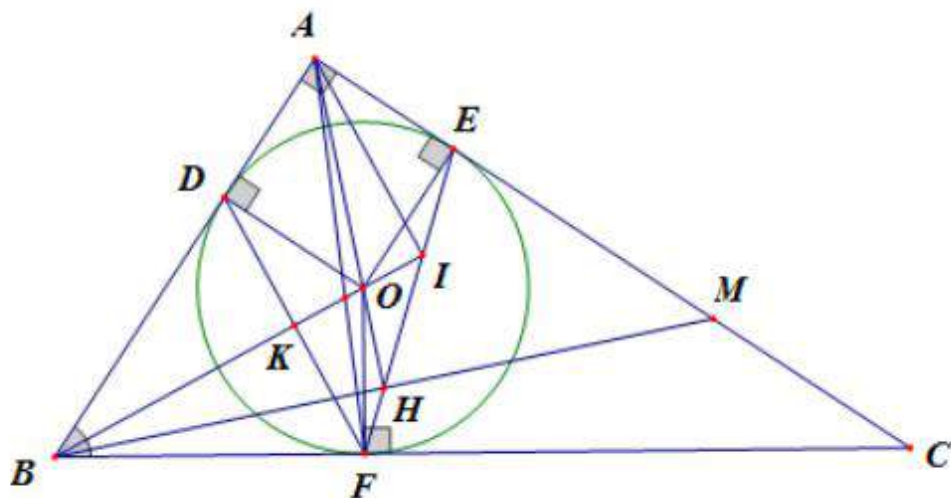
$x = 1$ thì $y = -3$, thử lại $(1; -3)$ là một nghiệm của (I)

$x = -1$ thì $y = 3$, thử lại $(-1; 3)$ là một nghiệm của (I)

+ Với $t = \frac{7}{4}$, thay vào (2) được $x^2 = -\frac{64}{31}$ (loại)

Vậy hệ (I) có các nghiệm $(0;2), (0;-2), (1;-3), (-1;3)$

Câu 4.



1. Vì BD, BF là các tiếp tuyến của (O) nên $OD \perp BD, OF \perp BF$.

Xét 2 tam giác vuông OBD và OBF có

$$\left. \begin{array}{l} OB \text{ chung} \\ OBD = OBF(\text{gt}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBD = \triangle OBF \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BD = BF$$

Mà $OD = OF = r$ nên OB là trung trực của DF $\Rightarrow OB \perp DF \Rightarrow \triangle KIF$ vuông tại K.

Mà $OD = OF = r$ nên OB là trung trực của DF $\Rightarrow OB \perp DF \Rightarrow \triangle KIF$ vuông tại K. $\angle DOE = 90^\circ$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cho đường tròn (O), ta có:

$$\angle DFE = \frac{1}{2} \angle DOE = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle KIF \text{ vuông cân tại K.}$$

$$\Rightarrow \angle BIF = 45^\circ$$

2.

a. Hình chữ nhật ADOE có $OD = OE = r$ nên nó là hình vuông

$$\Rightarrow AO \text{ là trung trực DE (1)}$$

Vì $AB = AM$ nên tam giác ABM vuông cân tại A, suy ra $\angle ABM = 45^\circ$

$$\Rightarrow \angle DBH = \angle DFH = 45^\circ$$

$$\Rightarrow BDHF \text{ là tứ giác nội tiếp (2)}$$

Vì $\angle BDO + \angle BFO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên BDOF là tứ giác nội tiếp (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 5$ điểm B, D, O, H, F nằm trên một đường tròn.

$$\Rightarrow \angle BHO = \angle BFO = 90^\circ$$

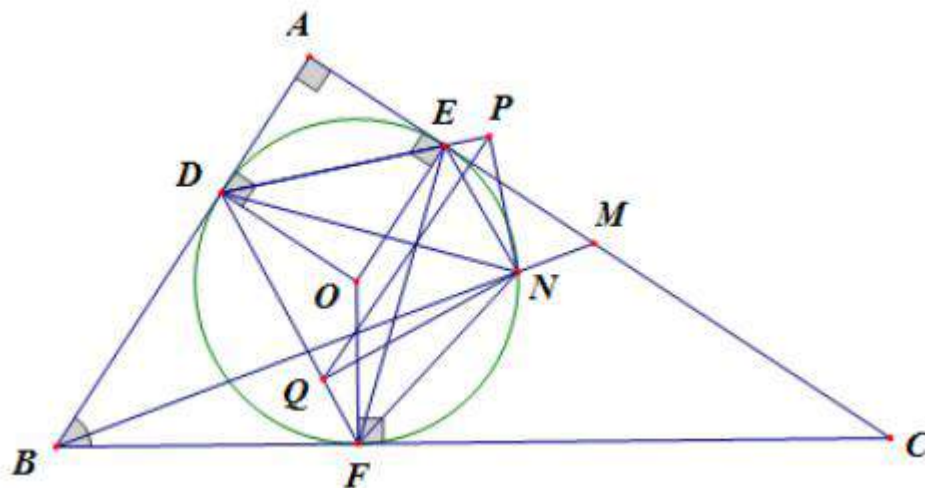
$\Rightarrow OH \perp BM$.

Mặt khác $\angle ADE = \angle ABM = 45^\circ \Rightarrow DE \parallel BM \Rightarrow OH \perp DE$

Mà $OD = OE$ nên OH là trung trực của đoạn OE (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng.

b.



Vì $\angle DPN + \angle DQN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $DPNQ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle QPN = \angle QDN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN) (5)

Mặt khác $DENF$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle QDN = \angle FEN$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $\angle FEN = \angle QPN$ (7)

Tương tự ta có: $\angle EFN = \angle PQN$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra $\triangle NPQ \sim \triangle NEF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF}$

Theo quan hệ đường vuông góc – đường xiên, ta có

$$NQ \leq NF \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$$

Dấu bằng xảy ra khi $Q \equiv F \Leftrightarrow NF \perp DF \Leftrightarrow D, O, N$ thẳng hàng.

Do đó PQ max khi M là giao điểm của AC và BN , với N là điểm đối xứng với D qua O .

Câu 5.

Ta chứng minh BĐT

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9(*)$$

$$(*) \Leftrightarrow 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 9$$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$$

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$$

$\Rightarrow (*)$ đúng

$$\Rightarrow \frac{9}{a+b+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT Cô si cho hai số dương ta có $1+b^2 \geq 2b$

Ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \quad (2)$$

$$\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq a+b+c \geq 3$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ 16

Câu 1

a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - x + x\sqrt{x} + 6 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} - x + x\sqrt{x} + 6 - x - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-x + x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(x - 4)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \sqrt{x} - 2.$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$, ta có

$$Q = \frac{(x + 27).P}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x + 27}{\sqrt{x} + 3} = \frac{x - 9 + 36}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \sqrt{x} - 3 + \frac{36}{\sqrt{x} + 3} = -6 + (\sqrt{x} + 3) + \frac{36}{\sqrt{x} + 3} \geq -6 + 12 = 6.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \sqrt{x} + 3 = \frac{36}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 = 36 \Leftrightarrow x = 9.$$

Câu 2 Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2 \quad (1).$$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$$

$$\text{Mà } x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_1 - 2m + 2) + 2(x_1 + x_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 3 + 4(m - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } m = 2 - \sqrt{2}.$$

Câu 3

a) Điều kiện $1 \leq x \leq 7$

$$\text{Ta có } x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1}) + (x-1) - \sqrt{(x-1)(7-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1}) + \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1})(2 - \sqrt{x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=4; x=5$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - xy^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$, kết hợp với phương trình (1), ta có $y > 0$.

Từ (1), ta có

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} &= 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = xy\sqrt{y^2+4} \\ \Leftrightarrow 16(x+1) &= x^2y^2(y^2+4) \Leftrightarrow (y^4+4y^2)x^2 - 16x - 16 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình theo ẩn x ta được $x = \frac{4}{y^2}$ hoặc $x = \frac{-4}{y^2+4} < 0$ (loại).

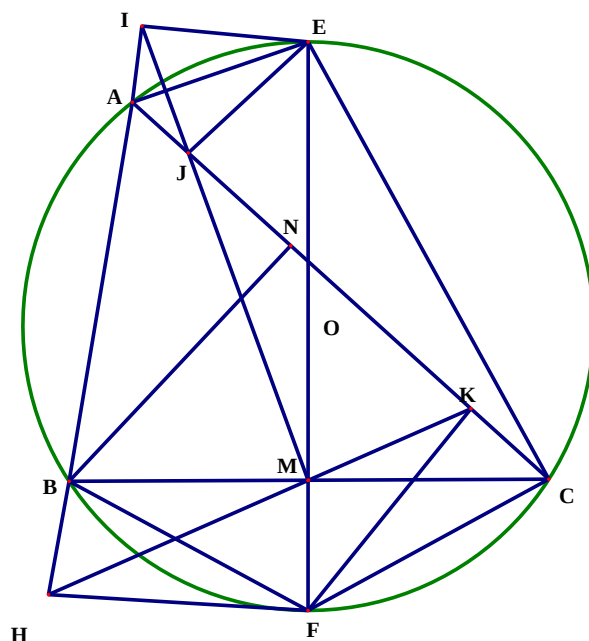
Với $x = \frac{4}{y^2} \Leftrightarrow xy^2 = 4$ thế vào phương trình (2), ta được: $\sqrt{x^2-3} + 3\sqrt{x-1} = 4$

Điều kiện $x \geq \sqrt{3}$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-3} + 3\sqrt{x-1} &= 4 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3}-1) + 3(\sqrt{x-1}-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x-2=0 \text{ (vì } \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} > 0) &\Leftrightarrow x=2. \end{aligned}$$

Với $x=2$ ta có $\begin{cases} y^2=2 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\sqrt{2}$. Kết hợp với điều kiện trên, hệ phương trình có nghiệm $(2; \sqrt{2})$.

Câu 4



a) Ta có: $\angle AIE = \angle AJE = 90^\circ$ nên tứ giác AIEJ nội tiếp.

$\angle EMC = \angle EJC = 90^\circ$ nên tứ giác CMJE nội tiếp.

Xét tam giác $\triangle AEC$ và $\triangle IEM$, có

$\angle ACE = \angle EMI$ (cùng chắn cung JE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác CMJE).

$\angle EAC = \angle EIM$ (cùng chắn cung JE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AIEJ).

Do đó hai tam giác $\triangle AEC$ đồng dạng $\triangle IEM \Rightarrow \frac{AE}{EI} = \frac{EC}{EM} \Rightarrow EA \cdot EM = EC \cdot EI$ (đpcm).

b) Ta có $\angle IEM = \angle AEC \Rightarrow \angle AEI = \angle CEM$.

Mặt khác $\angle AEI = \angle AJI$ (cùng chắn cung IJ), $\angle CEM = \angle CJM$ (cùng chắn cung CM). Suy ra $\angle CJM = \angle AJI$. Mà I, M nằm hai phía của đường thẳng AC nên $\angle CJM = \angle AJI$ đối đỉnh suy ra I, J, M thẳng hàng.

Tương tự, ta chứng minh được H, M, K thẳng hàng.

Do tứ giác CFMK nội tiếp nên $\angle CFK = \angle CMK$.

Do tứ giác CMJE nội tiếp nên $\angle JME = \angle JCE$.

Mặt khác $\angle ECF = 90^\circ \Rightarrow \angle CFK = \angle JCE$ (vì cùng phụ với $\angle ACF$).

Do đó $\angle CMK = \angle JME \Rightarrow \angle JMK = \angle EMC = 90^\circ$ hay $IJ \perp HK$.

c) Kẻ $BN \perp AC$ ($N \in AC$). Vì $\angle BAC = 60^\circ$ nên $\angle ABN = 30^\circ$

$$\Rightarrow AN = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow BN^2 = AB^2 - AN^2 = \frac{3c^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = BN^2 + CN^2 = \frac{3c^2}{4} + \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Xét tam giác đều BCE có

$$R = OE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3(b^2 + c^2 - bc)}.$$

Câu 5

Ta có

$$\begin{aligned} S &= n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6) \\ &= n[(n^2 - 1)(n^2 + 6) + 5n(n^2 - 1)] \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= n(n - 1)(n + 1)(n + 2)(n + 3) \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \end{aligned}$$

Ta có S là tích của 5 số nguyên tự nhiên liên tiếp chia hết cho 5! nên chia hết cho 120.

Câu 6

a) Từ giả thiết $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$, ta có $a^4 \leq a^2, b^6 \leq b^2, c^8 \leq c^2$. Từ đó

$$a^4 + b^6 + c^8 \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Lại có $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \leq 0$ và $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 0$ nên

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) - (a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2(ab + bc + ca) \leq 2.$$

Hơn nữa $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -(ab + bc + ca) \leq 2$. Vậy $a^4 + b^6 + c^8 \leq 2$.

b) Từ giả thiết suy ra: $x > y > 0$, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(x + y)^2 = xy(x - y)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4xy \left((x + y)^2 - 4xy \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4xy + (x + y)^2 - 4xy}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} (x + y)^4.$$

Do đó $x + y \geq 4$. Vậy $\min A = 4$ khi $x = 2 + 2\sqrt{2}; y = 2 - \sqrt{2}$.

ĐỀ 17

Câu 1 Ta có: $a + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(x + z)$. Tương tự ta có:

$$a + y^2 = (y + x)(y + z); a + z^2 = (z + x)(z + y).$$

Từ đó ta có: $x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} = x\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = x(x+y)$. Tương tự:

$$y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} = y(z+x); z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = z(x+y). \text{ Vậy}$$

$$VT = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2a.$$

Câu 2

a) Khi $m = 1$ ta có $d: y = 2x - 1$ và $(P): y = -x^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$\text{Với } x = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Với } x = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 2\sqrt{2}$$

Vậy các giao điểm là $(-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}); (-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): -x^2 = 2mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2mx - 1 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0 \Rightarrow (*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$ hay d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Áp dụng Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} y_1 = 2mx_1 - 1 \\ y_2 = 2mx_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| = |(2mx_1 - 1)^2 - (2mx_2 - 1)^2|$$

$$\Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| = |(2mx_1 - 1 - 2mx_2 + 1)(2mx_1 - 1 + 2mx_2 - 1)| = |4m(x_1 - x_2)[m(x_1 + x_2) - 1]|$$

$$= |4m(2m^2 + 1)(x_1 - x_2)| = 4|m(2m^2 + 1)| |x_1 - x_2| = 4|m|(2m^2 + 1)2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\text{Ta có } |y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 64m^2(2m^2 + 1)^2(m^2 + 1) = 45 \Leftrightarrow 64(4m^4 + 4m^2 + 1)(m^4 + m^2) = 45$$

$$\text{Đặt } m^4 + m^2 = t \geq 0 \text{ có phương trình } 64t(4t + 1) = 45 \Leftrightarrow 256t^2 + 64t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{16} \text{ (vì } t \geq 0)$$

$$\text{Suy ra } m^4 + m^2 = \frac{5}{16} \Leftrightarrow 16m^4 + 16m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \pm \frac{1}{2}$$

Câu 3

Gọi vận tốc của người đi xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu (90 km) là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc của người đi xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau là $0,5x$ (km/h)

Vận tốc của người đi xe máy khi quay trở lại A là $x + 10$ (km/h)

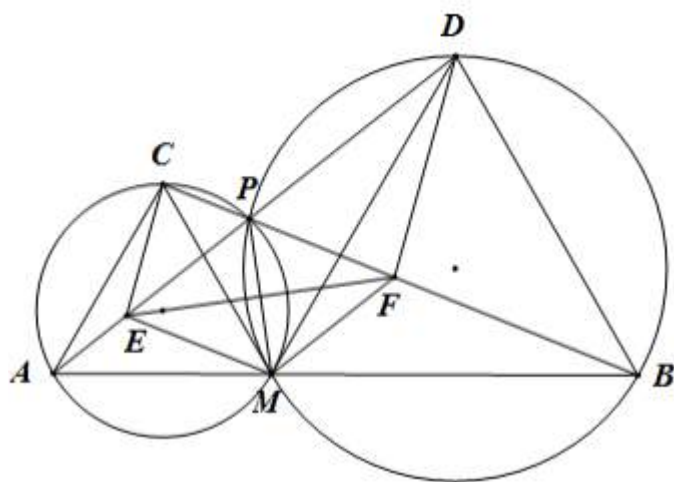
Tổng thời gian của chuyến đi là $\frac{90}{x} + \frac{30}{0,5x} + \frac{120}{x+10} + \frac{1}{2} = 8,5$

$$\Leftrightarrow \frac{90}{x} + \frac{60}{x} + \frac{120}{x+10} = 8 \Leftrightarrow \frac{150}{x} + \frac{120}{x+10} = 8 \Leftrightarrow 75(x+10) + 60x = 4x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 95x - 750 = 0 \Leftrightarrow x = 30 \text{ (do } x > 0)$$

Vậy vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A là $30 + 10 = 40$ (km/h)

Câu 4



a) Vì $\angle CMA = \angle DMB = 60^\circ \Rightarrow \angle CMB = \angle DMA = 120^\circ$. Xét $\triangle CMB$ và $\triangle AMD$ có

$$\begin{cases} CM = AM \\ \angle CMB = \angle DMA \\ MB = MD \end{cases} \Rightarrow \triangle CMB = \triangle AMD (c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} \angle MCB = \angle MAD \\ \angle MBC = \angle MDA \end{cases}$$

Suy ra AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp

b) Vì AMPC là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle CPM = 180^\circ - \angle CAM = 120^\circ = \angle CMB \Rightarrow \triangle CPM \sim \triangle CMB (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{CM} = \frac{CM}{CB}$$

$$\Rightarrow CP \cdot CB = CM^2 \Rightarrow \sqrt{CP \cdot CB} = CM. \text{ Tương tự } \sqrt{DP \cdot DA} = DM$$

$$\text{Vậy } \sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = CM + DM = AM + BM = AB$$

c) Ta có EF là đường trung trực của PM $\Rightarrow EP = EM \Rightarrow \triangle EPM$ cân tại E

Mặt khác $\angle EPM = \angle ACM = 60^\circ$ (do AMPC là tứ giác nội tiếp) nên $\triangle EPM$ đều

$$\Rightarrow PE = PM. \text{ Tương tự } PF = PM$$

Ta có $CM \parallel DB$ nên $\angle PCM = \angle PBD$

Mà BMPD là tứ giác nội tiếp nên $\angle PBD = \angle PMD$. Suy ra $\angle PCM = \angle PMD$

$$\text{Ta lại có } \angle CPM = \angle DPM = 120^\circ \Rightarrow \triangle CPM \sim \triangle DPM (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{MP} = \frac{PM}{PD} \Rightarrow \frac{CP}{PF} = \frac{PE}{PD}$$

Theo định lý Talét đảo ta có $CE \parallel DF \Rightarrow CDFE$ là hình thang.

Câu 5 Vì a, b, c không âm và có tổng bằng 1 nên $0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \geq 0 \\ b(1-b) \geq 0 \\ c(1-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^2 \\ b \geq b^2 \\ c \geq c^2 \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{5a+4} \geq \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = a+2$

Tương tự $\sqrt{5b+4} \geq b+2; \sqrt{5c+4} \geq c+2$

Do đó $\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq (a+b+c) + 6 = 7$ (đpcm)

ĐỀ 18

Câu 1. a) $P = \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} + 1 \right) \cdot (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)$

$$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)$$

$$P = 4x - 1$$

b) $P = 2019 \Leftrightarrow 4x - 1 = 2019$

$$x = 505$$

c) $T = P + \frac{10}{x} = 4x + \frac{10}{x} - 1 = \left(\frac{10}{x} + \frac{2x}{5} \right) + \frac{18x}{5} - 1$

$$T = \left(\frac{10}{x} + \frac{2x}{5} \right) + \frac{18x}{5} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{10}{x} \cdot \frac{2x}{5}} + \frac{18}{5} \cdot 5 - 1 = 21 \quad (\text{Do } x \geq 5 \text{ và côsi})$$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 21 khi $x = 5$

Câu 2. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình .

$$-\frac{1}{m}x + \frac{1}{m} = mx + m \Leftrightarrow x = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

$$\text{do } x = \frac{1-m^2}{1+m^2} \Rightarrow y = \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow I\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}; \frac{2m}{1+m^2}\right)$$

$$T = \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 = 1$$

Câu 3.

a) Đk $x \geq -2018$ ta có $\sqrt{4(x+2018)} + \sqrt{9(x+2018)} = 5$

$$2\sqrt{x+2018} + 3\sqrt{x+2018} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+2018} = 1$$

$$x = -2017$$

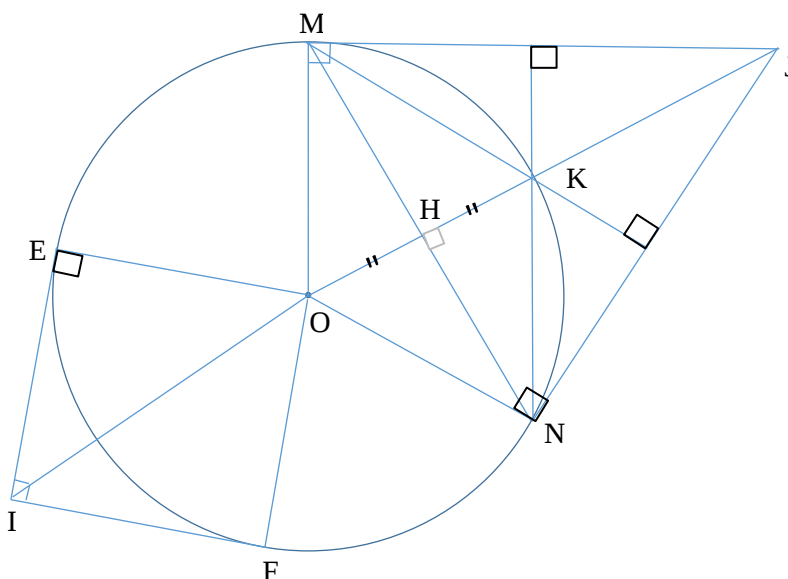
$$b) x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow [(x+1)^3 - y^3] + 3(x+1) - 3y = 0$$

$$(x+1-y)[(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 3] = 0 \Leftrightarrow y = x+1$$

$$\text{Với } y = x+1 \text{ thế vào } x^2 + y^2 - 3x = 1 \text{ ta có } 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(0;1), (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

Câu 4.



a) Do MK và ON vuông góc JN (1)

NK và OM vuông góc JM (2)

Nên từ (1) và (2) có $\begin{cases} MK \parallel ON \\ NK \parallel OM \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $OMKN$ là hình bình hành(3), suy ra H là trung điểm OK .

b) Do $OM = ON$ (4). Từ (3)&(4) có tứ giác $OMKN$ là hình thoi (5)

Mặt khác $OJ = 2OM = 2a$ suy ra $\angle MOJ = 60^\circ$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \angle MOK = 60^\circ \Rightarrow \triangle OMK$ đều

$\Rightarrow OK = OM = R = a \Rightarrow K$ thuộc đường tròn tâm O .

c) Do $(M; r)$ nhận OJ là tuyến tuyến mà $MH \perp JO = H \Rightarrow r = MH$

$$d) \text{ Ta có } \frac{1}{MH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{JM^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(hoặc dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Gọi IE, IF là hai tiếp tuyến với (O) tại E, F và $IE \perp IF$

Suy ra tứ giác IEOF là hình vuông

Tính $OI = a\sqrt{2}$ (Không đổi)(1)

Do O cố định (2)

Từ (1) và (2) tập hợp I nằm trên đường tròn tâm O bán kính $a\sqrt{2}$

Câu 5.

Do x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn: $12x + 10y + 15z \leq 60$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 6 \\ z \leq 4 \end{cases} \quad (*)$$

Từ điều kiện trên ta có $T = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - z$

$$= x(x-5) + y(y-6) + z(z-4) + x + 2y + 3z$$

$$\leq x + 2y + 3z \leq \frac{12x}{5} + 2y + 3z \leq \frac{60}{5} = 12$$

$$\text{Vậy GTLN của } T \text{ bằng } 12 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ z = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

ĐỀ 18

Câu 1 a) Nhận xét. Nếu $x + y = 1$ thì $f(x) + f(y) = 1$.

$$\text{Thật vậy, ta có } f(x) = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} \Rightarrow f(y) = f(1-x) = \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3}$$

$$\text{suy ra } f(x) + f(y) = f(x) + f(1-x) = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} + \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3} = 1.$$

Vậy, nhận xét được chứng minh. Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Theo nhận xét trên ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2011}{2012}\right) \right) + \left(f\left(\frac{2}{2012}\right) + f\left(\frac{2010}{2012}\right) \right) + \dots + \\ &\left(f\left(\frac{1005}{2012}\right) + f\left(\frac{1007}{2012}\right) \right) + f\left(\frac{1006}{2012}\right) = 1005 + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1005,5 \end{aligned}$$

b) Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\text{Rút gọn biểu thức ta được } P = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}$$

Ta có $Px + (P-1)\sqrt{x} + P-2 = 0$, ta coi đây là phương trình bậc hai của $\sqrt{x}$. Nếu $P=0 \Rightarrow -\sqrt{x}-2=0$ vô lí, suy ra $P \neq 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên có $\Delta = (P-1)^2 - 4P(P-2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3P^2 + 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 2P + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (P-1)^2 \leq \frac{4}{3}$$

Do P nguyên nên $(P-1)^2$ bằng 0 hoặc 1

+) Nếu $(P-1)^2 = 0 \Leftrightarrow P=1 \Leftrightarrow x=1$ thỏa mãn

+) Nếu $(P-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P=2 \\ P=0 \end{cases} \Rightarrow P=2 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x=0.$

Kết hợp điều kiện suy ra không tồn tại giá trị x cần tìm.

Câu 2. Nếu $x \geq y+6 \Rightarrow x+y > x-(y+6) \geq 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm. Do đó $x < y+6 \Rightarrow 2 \leq x+y < y+6-x \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in \{1; 2\}$

Với $x=1$ thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$(y+1)^3 = (y+5)^2 \Leftrightarrow (y-3)(y^2+5y+8)=0 \Leftrightarrow y=3 \text{ suy ra phương trình có nghiệm } (x; y) = (1; 3).$$

Với $x=2$ thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$(y+2)^3 = (y+4)^2 \Leftrightarrow y^3 + 5y^2 + 4y - 8 = 0 \text{ phương trình này vô nghiệm do } y \geq 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 3).$

Câu 3.

Ta có: $2012 = (abc + bcd + cda + dab - a - b - c - d)^2$

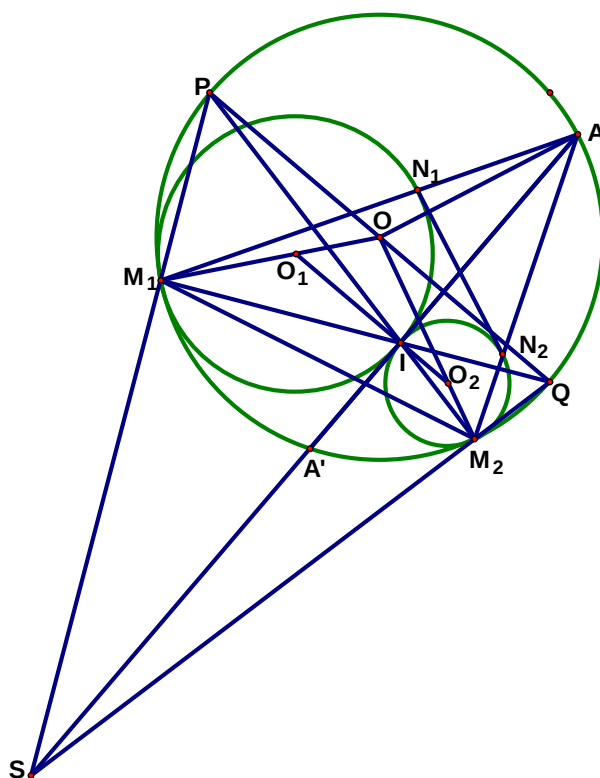
$$= ((ab-1)(c+d) + (cd-1)(a+b))^2$$

$$\leq [(ab-1)^2 + (a+b)^2][(cd-1)^2 + (c+d)^2]$$

$$= (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1)(c^2d^2 + c^2 + d^2 + 1) = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)$$

Suy ra $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \geq 2012$

Câu 4.



2,0 điểm

+) Ta có $AM_1 \cdot AN_1 = AM_2 \cdot AN_2 = AI^2 \Rightarrow \triangle AN_1N_2$ đồng dạng với $\triangle AM_2M_1$

suy ra $AN_1N_2 = AM_2M_1 \Rightarrow M_1N_1N_2 + AM_2M_1 = 180^\circ$ hay tứ giác $M_1N_1N_2M_2$ nội tiếp.

+) Ta có $AN_1N_2 = AM_2M_1 = \frac{1}{2}AOM_1$ và tam giác AOM_1 cân tại O nên

$$M_1AO = \frac{180^\circ - AOM_1}{2}$$

Do đó ta được $AN_1N_2 + M_1AO = 90^\circ \Rightarrow OA \perp N_1N_2$.

1,0 điểm

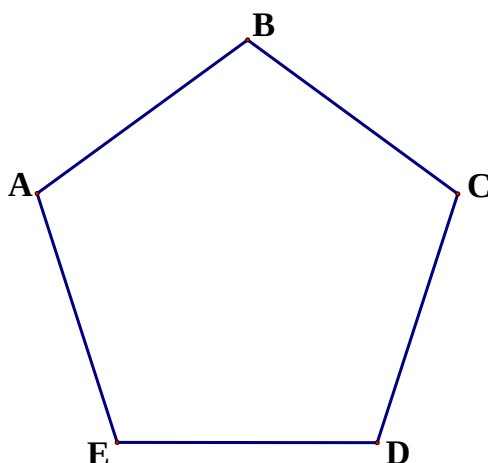
Gọi S là giao điểm của PM_1 và QM_2 .

Ta có O, O_2 , M_2 thẳng hàng và O_2I song song với $OP \Rightarrow IO_2M_2 = POM_2$ (1). Mặt khác tam giác O_2IM_2 cân tại O_2 , tam giác OPM_2 cân tại O và kết hợp với (1) ta được $O_2IM_2 = OPM_2$ suy ra P, I, M_2 thẳng hàng. Tương tự ta có Q, I, M_1 thẳng hàng.

Do PQ là đường kính của đường tròn (O) suy ra $PM_1Q = PM_2Q = 90^\circ$

$\Rightarrow I$ là trực tâm của tam giác SPQ suy ra AI đi qua S hay ba đường thẳng AI, PM_1 , QM_2 đồng quy.

Câu 5.



Xét ngũ giác đều $ABCDE$, ta nhận thấy ba đỉnh bất kì của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô 5 đỉnh A, B, C, D, E bằng 3 màu xanh, đỏ và tím sẽ xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu tô 5 đỉnh A, B, C, D, E bởi đủ ba loại màu đã cho thì tồn tại 3 đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.

+) Nếu tô 5 đỉnh A, B, C, D, E bởi nhiều nhất 2 màu thì có ít nhất 3 đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Vậy, trong mọi trường hợp luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có 3 đỉnh được tô bởi cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

ĐỀ 20

Câu I(2đ):

a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x \left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \right)}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x \left(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{|x-4|} =$$

$$\frac{x \left(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên $A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ (Theo bất}$$

đẳng thức Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x=8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên dương của 16. Hay $x-4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x \in \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x=5$ hoặc $x=6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có:

$$A = \frac{2(m^2 + 4)}{m} = 2m + \frac{8}{m} \text{ suy ra } m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}.$$

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

Câu II(1,5đ): Theo định lý Vi et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có

$$\text{dạng: } \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}}. \text{ Hay } \frac{x_1}{1+x_2} + 1 + \frac{x_2}{1+x_1} + 1 \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}} + 2$$

$$(x_1 + x_2 + 1) \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \right) \geq \frac{2(1+2\sqrt{x_1x_2})}{1+\sqrt{x_1x_2}}. \text{ Theo bất đẳng thức Cô si ta có:}$$

$x_1 + x_2 + 1 \geq 2\sqrt{x_1x_2} + 1$. Để chứng minh (*) ta quy về chứng minh:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}} \text{ với } x_1, x_2 > 1. \text{ Quy đồng và rút gọn bất đẳng thức trên tương}$$

đương với $(\sqrt{x_1x_2} - 1)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ (Điều này là hiển nhiên đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^2 = 4b$.

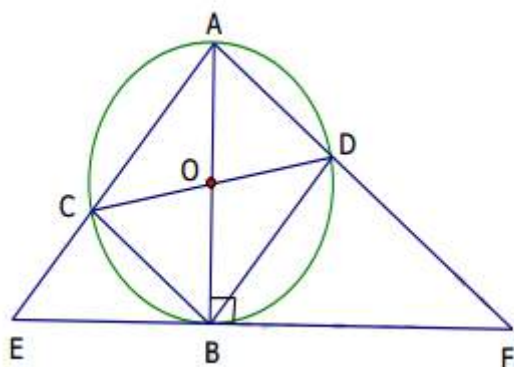
Câu III(2đ): Sử dụng HĐT $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ta viết lại phương trình thành:

$$x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[x + \frac{x}{x-1} \right]^3 - 3 \frac{x^2}{x-1} \left(x + \frac{x}{x-1} \right) + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \text{ hay}$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1} \right)^3 - 3 \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^2 + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0. \text{ Suy ra}$$

phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu IV(3,5đ):



a) Xét tứ giác ABCD có :

$$\begin{cases} AB = CD \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \quad (\text{Đường kính của đường tròn và bán kính của đường tròn}).$$

Tứ giác ACBD có hai đường chéo AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra ACBD là hình chữ nhật

b) Tứ giác ACBD là hình chữ nhật nên:

$\angle CAD = \angle BCE = 90^\circ$ (1). Lại có $\angle CBE = \frac{1}{2}$ số đo BC (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung);

$\angle ACD = \frac{1}{2}$ số đo AD (góc nội tiếp), mà $BC = AD$ (do BC = AD cạnh của hình chữ nhật) $\Rightarrow \angle CBE = \angle ACD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ACD \sim \triangle CBE$.

c) Vì ACBD là hình chữ nhật nên CB song song với AF, suy ra: $\angle CBE = \angle DFE$ (3). Từ (2) và (3) suy ra $\angle ACD = \angle DFE$ do đó tứ giác CDFE nội tiếp được đường tròn.

d) Do $CB \parallel AF$ nên $\triangle CBE \sim \triangle AFE$, suy ra: $\frac{S_1}{S} = \frac{EB^2}{EF^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{EB}{EF}$$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{BF}{EF}$

Từ đó suy ra: $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = S$

Câu V(1đ): Biến đổi vế trái BĐT cần chứng minh và áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$VT = (x-y) + \frac{y+1}{2} + \frac{y+1}{2} + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} - 1 \geq 4\sqrt{(x-y) \cdot \frac{(y+1)^2}{4} \cdot \frac{4}{(x-y)(y+1)^2}} - 1 = 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$ và $y = 1$.

ĐỀ 21

Câu 1

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

b) Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6.$

Áp dụng bất đẳng thức: $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6. \text{ Suy ra } VT \leq VP.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 0; z = \sqrt{2}$$

Câu 2

a) Đường thẳng (d): $y = kx - 2$

Xét phương trình $\frac{-x^2}{2} = kx - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2kx - 4 = 0$ (1). Ta có: $\Delta' = k^2 + 4 > 0$ với mọi k , suy

ra (1) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Giả sử (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Suy ra $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $H(x_1; 0), K(x_2; 0)$. Khi đó

$$IH^2 = x_1^2 + 4, IK^2 = x_2^2 + 4, KH^2 = (x_1 - x_2)^2. \text{ Theo định lý Viet thì } x_1 x_2 = -4 \text{ nên}$$

$$IH^2 + IK^2 = x_1^2 + x_2^2 + 8 = KH^2. \text{ Vậy tam giác IHK vuông tại I.}$$

Câu 3 Điều kiện: $x + y > 0$.

Biến đổi phương trình (1):

$$x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 + \frac{2xy}{x+y} - 2xy = 0$$

$$\text{Đặt } x+y=S, xy=P \text{ ta có phương trình: } S^2 + \frac{2P}{S} - 2P - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow S^3 + 2P - 2SP - S = 0 \Leftrightarrow S(S^2 - 1) - 2P(S - 1) = 0 \Leftrightarrow (S - 1)(S^2 + S - 2P) = 0.$$

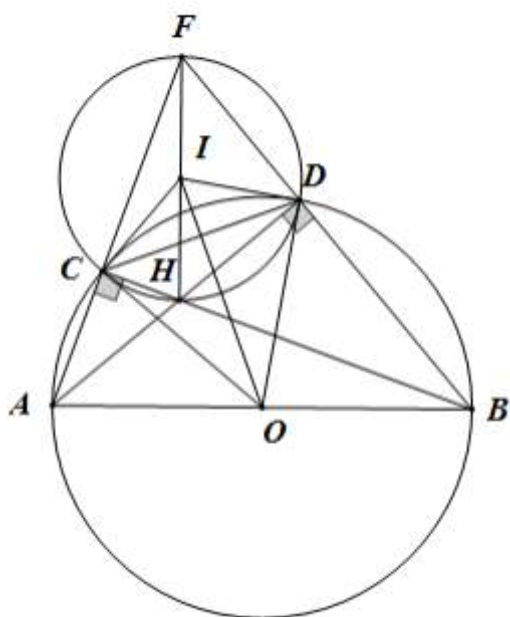
Vì $S^2 > 4P, S > 0$ suy ra $S^2 + S - 2P > 0$. Do đó $S = 1$

Với $x + y = 1$ thay vào (2) ta được: $1 = (1 - y)^2 - y \Leftrightarrow y = 0, y = 3$

Xét $x + y + 1 = \frac{2xy}{x + y} \Leftrightarrow x + y + 1 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = 0$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 0), (-2; 3)$.

Câu 4



a) Vì C, D thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên

$$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle FCH = \angle FDH = 90^\circ \Rightarrow \angle FCH + \angle FDH = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác CHDF nội tiếp

b) Vì $AH \perp BF, BH \perp AF$ nên H là trực tâm $\triangle AFB \Rightarrow FH \perp AB$

$$\Rightarrow \angle CFH = \angle CBA (= 90^\circ - \angle CAB) \Rightarrow \triangle CFH \sim \triangle CBA (g.g) \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CF \cdot CA = CH \cdot CB$$

c) Vì $\angle FCH = \angle FDH = 90^\circ$ nên tứ giác CHDF nội tiếp đường tròn tâm I đường kính FH

$$\Rightarrow IC = ID. \text{ Mà } OC = OD \text{ nên } \triangle OCI = \triangle ODI (c.c.c) \Rightarrow \angle COI = \angle DOI$$

$\Rightarrow OI$ là phân giác của góc COD

d) Vì $OC = CD = OD = R$ nên $\triangle OCD$ đều $\Rightarrow \angle COD = 60^\circ$

$$\text{Có } \angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ \Rightarrow \angle CFD = 90^\circ - \angle CAD = 60^\circ$$

Xét góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung CD của (I), có

$$CID = 2CFD = 120^\circ \Rightarrow OIC = OID = \frac{CID}{2} = 60^\circ$$

$$\text{Mặt khác } COI = DOI = \frac{COD}{2} = 30^\circ \Rightarrow OID + DOI = 90^\circ \Rightarrow \triangle OID \text{ vuông tại D}$$

$$\text{Suy ra } OI = \frac{OD}{\sin 60^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy I luôn thuộc đường tròn } \left(O; \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$$

Câu 5 Từ điều kiện đề bài ta có $\frac{ab+bc+ca}{abc} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

Áp dụng hai lần bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$a^2 + bc \geq 2\sqrt{a^2 \cdot bc} = 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{2}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{2\sqrt{bc}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{b^2 + ca} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right); \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{3}{2}.$$

ĐỀ 22

Câu 1 Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} + \frac{ab}{ab}\right)\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2}{\frac{a^4}{a^2b^2} + \frac{b^4}{a^2b^2} - \left(\frac{a^3b}{a^2b^2} + \frac{ab^3}{a^2b^2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}\right) \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2b^2}}{\frac{a^4 + b^4 - a^3b - ab^3}{a^2b^2}} \\ &= \frac{(a^3 - b^3)(a-b)}{a^3b^3} \\ &= \frac{1}{ab} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{1}{ab}.$$

2. Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương $4a$ và b ta có:

$$4a + b \geq 2\sqrt{4a \cdot b} = 4\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 1 = 4a + b + \sqrt{ab} \geq 5\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 0 < ab \leq \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{ab} \geq 25$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} b = 4a > 0 \\ 4a + b + \sqrt{ab} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a > 0 \\ 10a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

Vậy $\min P = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

Câu 2 Cho hệ phương trình:

1. Thay $m = 2$, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x - 2y = -6 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -12 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -19 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{19}{5} \\ 2x + \frac{19}{5} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(\frac{8}{5}; \frac{19}{5}\right)$

2. Ta có:

$$\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m \\ m(my + 2 - 4m) + y = 3m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m \\ m^2y + 2m - 4m^2 + y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m(1) \\ (m^2 + 1)y = m + 1 + 4m^2(2) \end{cases}$$

Phương trình (2) là phương trình bậc nhất ẩn y có hệ số $a = m^2 + 1 \neq 0 \forall m$ nên phương

trình (2) có nghiệm duy nhất $y = \frac{m+1+4m^2}{m^2+1} \forall m$

Thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}
 x &= my + 2 - 4m \\
 &= \frac{m^2 + m + 4m^3 + 2(m^2 + 1) - 4m(m^2 + 1)}{m^2 + 1} \\
 &= \frac{3m^2 - 3m + 2}{m^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Do đó: $\forall m$, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0) =$

$$\left(\frac{3m^2 - 3m + 2}{m^2 + 1}; \frac{m + 1 + 4m^2}{m^2 + 1} \right)$$

Chứng minh đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$ ()

Vì $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho nên:

$$\begin{cases} x_0 - my_0 = 2 - 4m \\ mx_0 + y_0 = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(y_0 - 4) = x_0 - 2(3) \\ 1 - y_0 = m(x_0 - 3)(4) \end{cases}$$

Xét $m = 0 \Rightarrow x_0 = 2$ và $y_0 = 1$. Khi đó (*) đúng.

Xét $m \neq 0$. Nhân từng vế của (3) và (4) ta được:

$$m(y_0 - 4)(1 - y_0) = m(x_0 - 2)(x_0 - 3)$$

$$\Leftrightarrow -y_0^2 + 5y_0 - 4 = x_0^2 - 5x_0 + 6$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$$

Vậy đẳng thức cần chứng minh đúng $\forall m$.

Câu 3:

Phương trình đã cho tương đương với

$$a(x^2 - 2ax + a^2) + b(x^2 - 2bx + b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 - 2a^2x + a^3 + bx^2 - 2b^2x + b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)x^2 - 2x(a^2 + b^2) + a^3 + b^3 = 0$$

• Xét $a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$, phương trình (1) trở thành:

$$-2x(a^2 + a^2) + a^3 - a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4a^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (Do } a \neq 0)$$

Do đó với $a + b = 0$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

• Xét $a + b \neq 0$. Khi đó (1) là phương trình bậc hai ẩn x .

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Delta = (a^2 + b^2)^2 - (a+b)(a^3 + b^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - (a^4 + ab^3 + a^3b + b^4) = 0$$

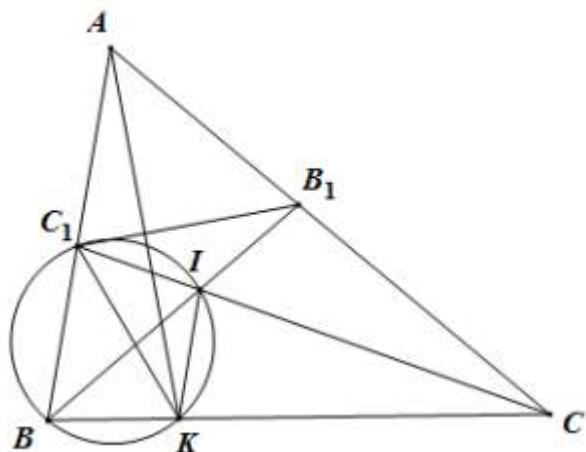
$$\Leftrightarrow 2a^2b^2 - ab^3 - a^3b = 0$$

$$\Leftrightarrow -ab(a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ (do } ab \neq 0)$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow b = \pm a \Leftrightarrow |a| = |b|$.

Câu 4



1. Ta có

$B_1IC_1 = BIC$ (hai góc đối đỉnh)

$$BIC = 180^\circ - IBC - ICB = 180^\circ - \frac{ABC}{2} - \frac{ACB}{2} = 180^\circ - \frac{ABC + ACB}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - BAC}{2} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow B_1IC_1 + BAC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

Mà hai góc này là hai góc đối nhau của tứ giác AC_1IB_1 nên tứ giác AC_1IB_1 là tứ giác nội tiếp.

2. Vì tứ giác BC_1IK là tứ giác nội tiếp (gt) nên $BKI = AC_1I$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện) (1)

Vì tứ giác AC_1IB_1 là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $AC_1I = IB_1C$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IB_1C = BKI = 180^\circ - CKI \Rightarrow IB_1C + CKI = 180^\circ$

Đây là hai góc đối của tứ giác $CKIB_1$ nên tứ giác này là tứ giác nội tiếp.

3. Vì BC_1IK là tứ giác nội tiếp nên

$$BKC_1 = BIC_1 = 180^\circ - BIC = 60^\circ \Rightarrow CKC_1 = 180^\circ - BKC_1 = 120^\circ$$

$$\Rightarrow CKC_1 + CAC_1 = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác AC_1KC là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow C_1KA = C_1CA \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } C_1A)$$

Và $\Rightarrow C_1AK = C_1CK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung C_1K)

Mặt khác CC_1 là phân giác góc C (gt) nên $C_1CK = C_1CA \Rightarrow C_1KA = C_1AK$

Suy ra tam giác C_1AK cân tại $C_1 \Rightarrow C_1A = C_1K$ (3)

Tương tự ta có: $B_1A = B_1K$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra C_1B_1 là trung trực của đoạn thẳng AK .

$\Rightarrow AK \perp B_1C_1$ (đpcm).

Câu 5

Với mọi x, y không âm, ta có:

$$(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4} \geq x(*) \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

□ à

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy(**)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng BĐT (*) với $x = a$ và $x = b$ ta được

$$\begin{cases} a^2 + b + \frac{3}{4} = (a^2 + \frac{1}{4}) + b + \frac{1}{2} \geq a + b + \frac{1}{2} > 0 \\ b^2 + a + \frac{3}{4} = (b^2 + \frac{1}{4}) + a + \frac{1}{2} \geq b + a + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^2 + b + \frac{3}{4})(b^2 + a + \frac{3}{4}) \geq (a + b + \frac{1}{2})^2 (1)$$

Áp dụng BĐT (**) ta được:

$$(a + b + \frac{1}{2})^2 = \left[\left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{4} \right)^2 \right] \geq 4(a + \frac{1}{4})(b + \frac{1}{4})$$

$$= (2a + \frac{1}{2})(2b + \frac{1}{2}) (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $(a^2 + b + \frac{3}{4})(b^2 + a + \frac{3}{4}) = (2a + \frac{1}{2})(2b + \frac{1}{2})$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a + \frac{1}{4} = b + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Vậy $a = b = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

ĐỀ 23

Câu 1.

a) Ta có: $\frac{x}{1+x^2} = \frac{xyz}{yz+x \cdot xyz} = \frac{xyz}{yz+x \cdot (x+y+z)} = \frac{xyz}{x^2+xy+yz+zx} = \frac{xyz}{(x+y)(z+x)}$

Tương tự ta có: $\frac{2y}{1+y^2} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)}$; $\frac{3z}{1+z^2} = \frac{3xyz}{(y+z)(z+x)}$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{3z}{1+z^2} &= \frac{xyz}{(x+y)(z+x)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)} + \frac{3xyz}{(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{xyz(y+z+2x+2z+3x+3y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \end{aligned}$$

Vậy: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{3z}{1+z^2} = \frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

b)

Ta có: $0 = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}$. Suy ra: $ayz+bxz+cxy = 0$.

Do đó: $1 = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ca} \right) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz} \right)$

$$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{0}{xyz} \right)$$

Vậy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (đpcm)

c) Ta có: $x + y + z = 0 \Rightarrow y + z = -x \Leftrightarrow (y + z)^2 = (-x)^2$

Suy ra: $y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$. Do đó: $\frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} = \frac{x^2}{-2yz}$

Tương tự ta có: $\frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} = \frac{y^2}{-2xz}$; $\frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{z^2}{-2xy}$

Do đó:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2xz} + \frac{z^2}{-2xy} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-2xyz} \\ &= \frac{(x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)}{-2xyz} = \frac{0 - 3 \cdot (-z) \cdot (-x) \cdot (-y)}{-2xyz} = \frac{3xyz}{-2xyz} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $P = -\frac{3}{2}$

Câu 2. a). Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$. Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, với mọi m nên phương trình luôn có

2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Theo

định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$ ta có $Q = \frac{2m+7}{m^2+8}$. (dùng phương pháp miền giá trị hàm số-

Xem thêm phần ứng dụng trong bài toán GTLN, GTNN) ta dễ tìm được giá trị lớn nhất

của Q là 1 và GTNN của Q là $-\frac{1}{8}$ đạt được khi $m=1$ và $m=-8$.

b) Để ý rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $I(0;4)$ nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $x_1 x_2 = -4 < 0$ nên hai giao điểm A, B nằm về hai phía trục tung. Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ thì ta có:

$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI$ với H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm

A, B trên trục Oy. Ta có $OI = 4, AH = |x_1| = -x_1, BK = |x_2| = x_2$. Suy ra $S_{OAB} = 2(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4(x_1 - x_2)^2 = 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]$. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = -4$.

Thay vào ta có: $S_{OAB}^2 = 4(m^2 + 16) = 64 \Leftrightarrow m = 0$.

Nếu thay điều kiện $S = 8$ thành diện tích tam giác OAB nhỏ nhất ta cũng có kết quả như trên. Vì $m^2 \geq 0 \Rightarrow S^2 \geq 4(m^2 + 16) \geq 64$.

Câu 3. $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 5 = 0$ (1)

a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 2m + 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases} m > 1 \\ 1^2 - 2(m+1).1 + m^2 - 2m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 - 4m + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = m^2 - 2m + 5 \end{cases}$

Thay vào P ta có:

PAGE TÀI LIỆU TOÁN HỌC

Từ (3) và (4) $\Rightarrow IDH = MCD$

Suy ra ΔMDC cân tại $M \Rightarrow MD = MC$.

Mà $OD = OC$ nên OM là trung trực của CD .

$\Rightarrow OM \perp CD$

Mà $BD \perp CD$ nên $OM \parallel BD$

$\Rightarrow \angle COM = \angle CBD = 60^\circ$

Ta có: $\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{OM} = \cos \angle COM = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

d) Vì $\angle BDH + \angle BFH = 90^\circ + 90^\circ + 180^\circ$ nên $BDHF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow DBH = DFH$ (5)

Tương tự ta có: $\angle ECH = \angle EFH$ (6)

Vì $BDEC$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle DBH = \angle ECH$ (7)

Từ (5), (6), (7) $\Rightarrow \angle DFH = \angle EFH \Rightarrow FH$ là phân giác góc DFE .

Tương tự ta có: EH là phân giác góc DEF .

Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF . Vẽ $HK \perp DF$ tại K . Suy ra bán kính đường tròn (H) nội tiếp ΔDEF là HK .

Tính HK :

Ta có: $BD = BC \cdot \cos \angle DBC = a$

Vì ΔBDC vuông tại D nên $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = a\sqrt{3}$

Hai tam giác vuông CDB và CFH có chung góc C nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{HF}{BD} = \frac{CF}{CD} \Rightarrow HF = \frac{BD \cdot CF}{CD} = \frac{a \cdot \frac{5}{4}a}{a\sqrt{3}} = \frac{5a}{4\sqrt{3}}$$

$$\Delta BFH \text{ vuông tại } F \text{ nên } BH = \sqrt{BF^2 + HF^2} = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{25}{48}a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Delta BDH \text{ vuông tại } D \text{ nên } DH = \sqrt{BH^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{13}{12}a^2 - a^2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Có } \begin{cases} \angle BHF = \angle HDK \\ \angle HKD = \angle HFB = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta HBF \text{ đồng dạng với } \Delta HDK \text{ (g.g)}$$

$$\frac{HB}{HD} = \frac{HF}{HK} \Rightarrow HK = \frac{HD \cdot HF}{HB} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{5a}{4\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}} = \frac{5a\sqrt{39}}{156}$$

$$\text{Vậy bán kính đường tròn nội tiếp } \Delta DEF \text{ là } HK = \frac{5a\sqrt{39}}{156}$$

ĐỀ 24

Câu 1

a) . Do $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

Do $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ với a, b , đôi một khác nhau nên: $a + b + c = 0$

Suy ra: $a + b + c = 0$

Khi đó: $\frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{a^2 + (b-c)(b+c)} = \frac{ab^2}{a^2 + (b-c)(-a)} = \frac{b^2}{a+c-b} = \frac{b^2}{-b-b} = \frac{b}{-2}$

Tương tự: $\frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{c}{-2}; \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{a}{-2}$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{b}{-2} + \frac{c}{-2} + \frac{a}{-2} = -\frac{1}{2}(a+b+c) = 0$$

b) Do a là nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + 1 = 0$ nên $a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a^2 + 1 = 3a$.

Suy ra: $Q = \frac{a^2}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{a^2}{(a^2 + 1)^2 - a^2} = \frac{a^2}{(3a)^2 - a^2} = \frac{a^2}{8a^2} = \frac{1}{8}$

Câu 2

a) $x^2 + x - 4\sqrt{3x+1} + 6 = 0$ (1)

ĐK: $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (3x + 1 - 4\sqrt{3x+1} + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{3x+1} - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{3x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

(thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1\}$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$$x^2 - 2mx - 2 = 0 \quad (1)$$

Có $\Delta' = m^2 + 2 > 0 \forall m$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ (P) luôn cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = -2$.

Do $A, B \in d$ nên $y_1 = 2mx_1 + 2; y_2 = 2mx_2 + 2$

Tính S_{OAB} : Ta có

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2mx_1 - 2mx_2)^2 \\
 &= (1 + 4m^2)(x_1 - x_2)^2 = (1 + 4m^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] \\
 &= (1 + 4m^2)(4m^2 + 8)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{(4m^2 + 1)(m^2 + 2)}$$

$$d(O; AB) = d(O; d) = \frac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{(2m)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{4m^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow S_{ABO} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 + 2} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 3

Thay $11 = ab + bc + ca$ vào P, ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 11)} + \sqrt{12(b^2 + 11)} + \sqrt{c^2 + 11}} \\
 &= \frac{5a + 5b + 5c}{\sqrt{12(a^2 + ab + bc + ca)} + \sqrt{12(b^2 + ab + bc + ca)} + \sqrt{c^2 + ab + bc + ca}} \\
 &= \frac{5a + 5b + 5c}{2\sqrt{3(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{3(b+a)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}} (*)
 \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} \leq 3(a+b) + (a+c) = 4a + 3b + c \quad (1)$$

Tương tự:

$$2\sqrt{3(b+a)(b+c)} \leq 4b + 3a + c \quad (2)$$

$$\sqrt{(c+a)(c+b)} \leq \frac{1}{2}(a+b+2c) \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{3(b+a)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)} \leq \frac{15}{2}a + \frac{15}{2}b + 3c \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có

$$P \geq \frac{5a + 5b + 2c}{\frac{15}{2}a + \frac{15}{2}b + 3c} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+b) = a+c \\ 3(b+a) = b+c \\ c+a = c+b \\ ab+bc+ca = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{c}{5} \\ ab+bc+ca = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=5 \end{cases}$$

Vậy GTNN của P là $\frac{2}{3}$, đạt được khi $a = b = 1, c = 5$.

Câu 4

Vì $n + S(n) = 2015$ nên $n \leq 2015 \Rightarrow n$ có nhiều nhất 4 chữ số

$$\Rightarrow S(n) \leq 9 + 9 + 9 + 9 = 36$$

$$\Rightarrow n = 2015 - S(n) \geq 2015 - 36 = 1979.$$

Xét 2 TH:

• TH1: $1979 \leq n \leq 1999$. Đặt $n = \overline{19ab}$ ($0 \leq a, b \leq 9$)

$$n + S(n) = 2015 \Leftrightarrow \overline{19ab} + 1 + 9 + a + b = 2015 \Leftrightarrow 11a + 2b = 105 \Leftrightarrow 11a = 105 - 2b$$

Ta có $105 - 2b$ lẻ và $105 - 2b \geq 105 - 2 \cdot 9 = 87 \Rightarrow a$ lẻ và $11a \geq 87$

$$\Rightarrow a = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow n = 1993$$

• TH2: $2001 \leq n \leq 2015$. Đặt $n = \overline{20cd}$ ($0 \leq c, d \leq 9$)

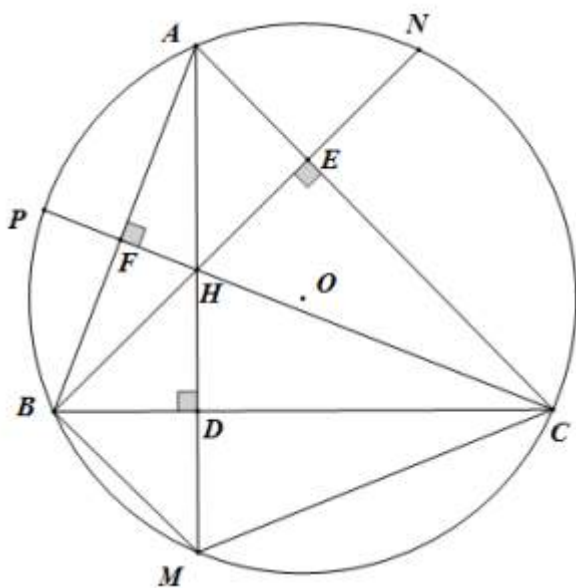
$$n + S(n) = 2015 \Leftrightarrow \overline{20cd} + 2 + 0 + c + d = 2015 \Leftrightarrow 11c + 2d = 13$$

Vì $11c \leq 13$ và $11c = 13 - 2d$ lẻ nên $c = 1 \Rightarrow d = 1$

$$\Rightarrow n = 2011$$

Vậy tất cả các giá trị n cần tìm là $n = 1993$ và $n = 2011$

Câu 5



a) Vì 2 tam giác BEC và ADC vuông nên

$$HBD = DAC \text{ (cùng phụ với góc C)} \quad (1)$$

Vì ABMC là tứ giác nội tiếp nên

$$DAC = MBD \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$HBD = MBD$$

Suy ra BD là phân giác của góc HBM. Tam giác HBM có BD vừa là đường cao vừa là phân giác, nên nó là tam giác cân tại B.

$$\Rightarrow D \text{ là trung điểm HM}$$

Mà $HM \perp BC$ nên M đối xứng với H qua BC.

b) Vì M đối xứng với H qua BC nên $HB = MB$; $HC = MC$

$$\Rightarrow \Delta HBC = \Delta MBC$$

$$\Rightarrow (\angle HBC) = (\angle MBC) = (\angle O)$$

Tương tự ta có:

$$(\angle HAB) = (\angle HAC) = (\angle O)$$

$$\text{Vậy } (\angle AHB) = (\angle BHC) = (\angle CHA) = (\angle O)$$

c) Ta có:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AD + DM}{AD} = 1 + \frac{DM}{AD} = 1 + \frac{HD}{AD}$$

Mặt khác:

$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot HD}{\frac{1}{2}BC \cdot AD} = \frac{HD}{AD}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AM}{AD} = 1 + \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} \quad (3)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{BN}{BE} = 1 + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} \quad (4)$$

$$\frac{CP}{CF} = 1 + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} \quad (5)$$

Cộng từng vế của (3), (4) và (5) ta có

$$T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = 3 + \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 3 + \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 4.$$

ĐỀ 25

Câu 1

a) Để giải bài toán này ta cần có bổ đề sau:

Bổ đề: với mọi số thực dương x, y ta có: $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$.

Chứng minh: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \Leftrightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề ta có:

$$(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

Vì thế: $\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} <$

$$< \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}. \text{ Mà theo kết quả câu 25 thì:}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \text{ Vậy bài toán được chứng minh.}$$

b) Ta có:

$$6.8 = (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a}$$

$$= 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} = 3 + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c}$$

$$\text{Vậy: } P = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = 6.8 - 3 = 3.9$$

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Điều kiện $y \geq -1$. Ta viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2x(y+1) = 1 \\ x^3 - 3x(y+1) = 6 \end{cases}$$

Ta thấy các phương trình của hệ đều là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $x, \sqrt{y+1}$

Dễ thấy $y = -1$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $y > -1$. Đặt $x = t\sqrt{y+1}$ thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(y+1)^3} [t^2 - 2t] = 1 \\ \sqrt{(y+1)^3} [t^3 - 3t] = 6 \end{cases} \Leftrightarrow t^3 - 3t - 6(t^2 - 2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

+ Nếu $t = 0$ thì $x = 0$. Không thỏa mãn hệ

$$+ \text{ Nếu } t = 3 \Leftrightarrow 27\sqrt{(y+1)^3} - 9\sqrt{(y+1)^3} = 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

Vậy hệ có 1 cặp nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\sqrt[3]{9}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \right)$

$$\text{b) Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{3x+1} \\ b = \sqrt[3]{5-x} \\ c = \sqrt[3]{2x-9} \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 4x - 3$$

Khi đó từ (4) ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$

$$\text{Từ đây suy ra: } \begin{cases} \sqrt[3]{3x+1} = -\sqrt[3]{5-x} \\ \sqrt[3]{5-x} = -\sqrt[3]{2x-9} \\ \sqrt[3]{2x-9} = -\sqrt[3]{3x+1} \end{cases}$$

Giải ra ta được nghiệm $x = -3; x = 4; x = \frac{8}{5}$

Câu 3 a) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow xy - 617(x+y) = 0 \Leftrightarrow xy - 617x - 617y + 617^2 = 617^2 \\ &\Leftrightarrow (x-617)(y-617) = 617^2 \end{aligned}$$

Vì x, y nguyên dương nên $x - 617$ và $y - 617$ là ước lớn hơn -617 của 617^2 .

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\begin{cases} \begin{cases} x-617=617 \\ y-617=617 \end{cases} \\ \begin{cases} x-617=1 \\ y-617=617^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-617=617^2 \\ y-617=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1234 \\ x=618; y=381306 \\ x=381306; y=618 \end{cases}$$

Vậy tất cả các cặp $(x; y)$ nguyên dương cần tìm là $(1234; 1234), (618; 381306), (381306; 618)$

b) Gọi x là số cần tìm $(x \in \mathbb{N}, 1000 \leq x \leq 9999)$

Vì x^2 chia cho 11 dư 3, nên x chia cho 11 dư 5 hoặc dư 6

+) Nếu x^2 chia cho 11 dư 5 nên $x - 5 : 11 \Rightarrow x - 5 + 66 = x + 61 : 11$

Lại có x^2 chia cho 7 dư 2 $\Rightarrow x - 2 : 7 \Rightarrow x - 2 + 63 = x + 61 : 7$

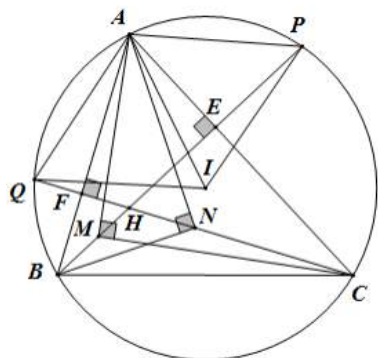
Do đó $x + 61 \in BC(11; 7) \Rightarrow x + 61 = 77k \Rightarrow x = 77k - 61 (k \in \mathbb{N})$

Vì $(x \in \mathbb{N}, 1000 \leq x \leq 9999) \Rightarrow 1000 \leq 77k - 61 \leq 9999 \Rightarrow 14 \leq k \leq 130$

Mà x bé nhất, nên chọn $k = 14 \Rightarrow x = 77 \cdot 14 - 61 = 1017$

Vậy số cần tìm là 1017

Câu 4



a) Gọi E, F lần lượt là giao của BH và AC, CH và AB.

1, Ta có $\angle ABE = \angle ACF = 90^\circ - \angle BAC$ suy ra số đo hai cung AP và AQ của đường tròn (I) bằng nhau

$$\Rightarrow AP = AQ$$

Mà $IP = IQ$ nên IA là trung trực PQ $\Rightarrow IA \perp PQ$.

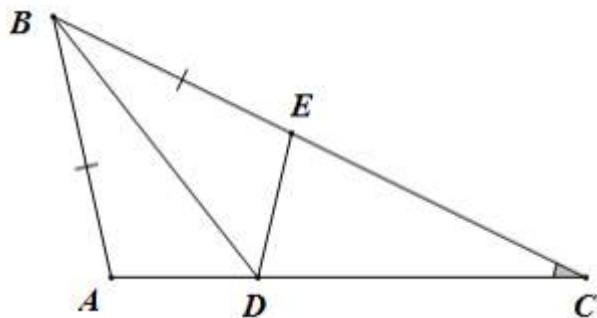
2, Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AMC ta có: $AM^2 = AE \cdot AC$

Tương tự ta có: $AN^2 = AF \cdot AB$.

$$\text{Có } \triangle ABE \sim \triangle ACF (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AF \Rightarrow AM^2 = AN^2$$

Suy ra $AM = AN$. Tam giác AMN cân tại A.

b)



$$\text{Đặt } C = \alpha \Rightarrow \angle ABC = 2\alpha; \angle A = 4\alpha$$

Gọi BD là phân giác của góc ABC ($D \in AC$). E thuộc đoạn BC sao cho $BE = BA$

Ta có $\angle ABD = \angle EBD = \alpha \Rightarrow \triangle BDC$ cân tại D $\Rightarrow BD = DC$

$$\triangle ABD = \triangle AED (c.g.c) \Rightarrow \angle BED = \angle A = 4\alpha \quad (1)$$

$$\text{Vì } \angle ABD = \angle C = \alpha \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB (g.g) \Rightarrow \angle ADB = \angle ABC = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle EDB = \angle ADB = 2\alpha \Rightarrow \angle ADE = 4\alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle BED = \angle ADE = 4\alpha \Rightarrow \angle CED = \angle CDE = 180^\circ - 4\alpha$. Suy ra $\triangle CED$ cân tại C

$$\text{Suy ra } CE = CD \Rightarrow BC - BE = BD \Rightarrow BD = BC - BA \quad (3)$$

$$\text{Vì } \triangle ABD \sim \triangle ACD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BD = \frac{CB \cdot AB}{AC} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$BC - BA = \frac{CB \cdot AB}{AC} \Rightarrow \frac{BC - BA}{BC \cdot BA} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{BA} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$$

Câu 5 Với mọi $a, b > 0$ và x, y, z thỏa điều kiện đề bài, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (*)$$

$$(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geq 3(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Áp dụng 2 bất đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} = 386 \left(\frac{1}{2xy + 2yz + 2zx} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) + \frac{157}{xy + yz + zx} \\ &\geq 386 \cdot \frac{4}{2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2} + \frac{157}{xy + yz + zx} \\ &= \frac{1544}{(x+y+z)^2} + \frac{157}{xy + yz + zx} = 1544 + \frac{157}{xy + yz + zx} \geq 1544 + \frac{157}{\frac{1}{3}} = 2015 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \\ 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ (không xảy ra)}$$

Vậy $P > 2015$ (đpcm)

ĐỀ 26

Bài 1: a) Từ $\frac{a^4}{x} + \frac{b^4}{y} = \frac{1}{x+y}$ và $a^2 + b^2 = 1$ suy ra: $\frac{a^4}{x} + \frac{b^4}{y} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{x+y}$

$$\Rightarrow (x+y)(a^4y + b^4x) = (x+y)(a^2 + b^2)^2 \Rightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0 \Rightarrow bx^2 = ay^2.$$

b) Từ câu a) $bx^2 = ay^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{1000} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{1000}; \left(\frac{y}{b}\right)^{1000} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{1000}$$

Do đó: $\frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$

Bài 2: a) Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ x^3 - t^3 = 2(t-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ (x-1)(x^2 + t^2 + tx + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^3 - 2t + 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này được nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b)

Để ý rằng nếu nhân chéo 2 phương trình của hệ ta có:

$6(x^3 + y^3) = (8x + 2y)(x^2 + 3y^2)$ đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như sau:

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y = tx$. Khi đó hệ thành:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = t^3 x^3 + 2tx \\ x^2 - 3 = 3(t^2 x^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-t^3) = 2t+8 \\ x^2(1-3t^2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-t^3}{1-3t^2} = \frac{t+4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(1-t^3) = (t+4)(1-3t^2) \Leftrightarrow 12t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$* \quad t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x^2(1-3t^2) = 6 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$* \quad t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \mp \frac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình có các cặp nghiệm:

$$(x; y) = (3, 1); (-3, -1); \left(\frac{4\sqrt{78}}{13}, \frac{\sqrt{78}}{13} \right); \left(-\frac{4\sqrt{78}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{13} \right)$$

Bài 3:

a) Vì $a \neq 0$ nên $ac(a+c-3b)+b^3=ac^2+a^2c+b^3-3abc=a^3\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-3\frac{bc}{a^2}\right]$ (*). Theo hệ

thức Viet, ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Khi đó (*) thành:

$$\begin{aligned} & a^3\left[x_1^2x_2^2+x_1x_2-(x_1+x_2)^3+3x_1x_2(x_1+x_2)\right] \\ &= a^3\left[x_1^2x_2^2+x_1x_2-(x_1^3+x_2^3)\right]=a^3(x_1^2-x_2)(x_2^2-x_1) \\ &\Rightarrow ac(a+c-3b)+b^3=a^3(x_1^2-x_2)(x_2^2-x_1) \end{aligned}$$

Mà theo giả thiết ta có $ax_2^2+bx_2+c=0$ và $ax_1+bx_2+c=0$ ($a \neq 0$)

Suy ra $bx_2+c=-ax_2^2=-ax_1 \Rightarrow x_2^2-x_1=0$. Do đó $ac(a+c-3b)+b^3=0$

b) Vì p, q nguyên dương khác nhau nên xảy ra hai trường hợp là $p > q$ hoặc $p < q$.

Nếu $p > q$ suy ra $p \geq q+1$. Khi đó $\Delta = p^2 - 4q \geq (q+1)^2 - 4q = (q-1)^2 \geq 0$.

Vậy trong trường hợp này phương trình $x^2 + px + q = 0$ có nghiệm.

Tương tự trường hợp $p < q$ thì phương trình $x^2 + qx + p = 0$ có nghiệm (đpcm).

Bài 4:

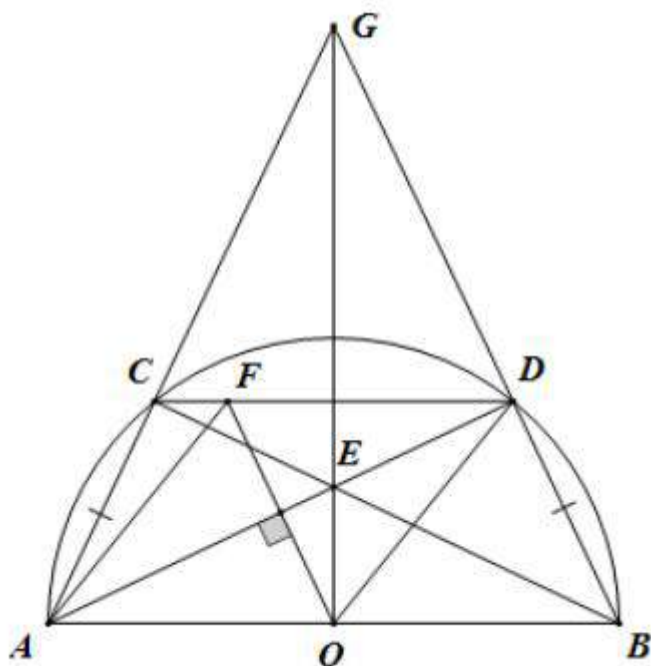
$$\text{Đặt } \begin{cases} x+1=a \\ y+1=b \\ z+4=c \end{cases} \Leftrightarrow a+b+c=6$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a-1)(b-1)-1}{ab} + \frac{c-4}{c} = \frac{ab-a-b+1-1}{ab} + \frac{c-4}{c} = 2 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c}\right) \\ &\leq 2 - \left(\frac{4}{a+b} + \frac{4}{c}\right) \leq 2 - \frac{16}{a+b+c} = 2 - \frac{16}{6} = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Max} A = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} a+b+c=6 \\ a=b, a+b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{3}{2} \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{1}{2} \\ z=-1 \end{cases}$$

Bài 5:



a) Vì C, D thuộc đường tròn đường kính AB nên:

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ Hai tam giác ACE và BDE vuông

$\Rightarrow \angle CAE + \angle AEC = 90^\circ; \angle DBE + \angle BED = 90^\circ$

Mà $\angle AEC = \angle BED$ (hai góc đối đỉnh) nên $\angle CAE = \angle DBE$

Xét $\triangle ACE$ và $\triangle BDE$ có:

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle BDE = 90^\circ \text{ (cmt)} \\ AC = BD \text{ (gt)} \\ \angle CAE = \angle DBE \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle ACE = \triangle BDE \text{ (g.c.g)}$$

b) Vì $\triangle ACE = \triangle BDE$ nên $AE = BE$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $OA = OB$ nên OE là đường trung trực của đoạn AB

$\Rightarrow \angle AOE = 90^\circ$

Tứ giác AOEC có tổng hai góc đối $\angle AOE + \angle ACE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên AOEC là tứ giác nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có BOED là tứ giác nội tiếp.

c) Vì $EA = EB$ (cmt) nên $\triangle ABE$ cân ở E

$\Rightarrow \angle EAB = \angle EBA$ (1)

Vì ACDB là tứ giác nội tiếp nên

$\angle EAB = \angle ECD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle ECD = \angle EBA$

$\Rightarrow CD \parallel AB$ (3)

Vì $OF \perp AD$, $BD \perp AD$ nên $OF \parallel BD$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ OFDB là hình bình hành

$$\Rightarrow DF = OB = OA$$

Mà DF // OA nên tứ giác AODF là hình bình hành

Hình bình hành AODF có hai đường chéo OF và AD vuông góc với nhau nên nó là hình thoi.

d) Vì $\triangle ACE = \triangle BDE$ nên $CAE = DBE$

Mà $EAB = EBA$ (cmt) nên $CAE + EAB = DBE + EBA \Rightarrow CAB = DBA$

$\Rightarrow \triangle GAB$ cân ở G

$$\Rightarrow GA = GB$$

$\Rightarrow G$ thuộc đường trung trực của đoạn AB.

$$\Rightarrow G \in OE$$

$\Rightarrow O, E, G$ thẳng hàng.

ĐỀ 27

Câu 1. 1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$ xác định $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}; \sqrt{x-3}$ đồng thời xác định

$$\sqrt{x+1} \text{ xác định } \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\sqrt{x-3} \text{ xác định } \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Vậy điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$ là $x \geq 3$

$$2) \text{ Với } x = 2\sqrt{2} \text{ ta có: } A = \sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$= |\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}-1| = (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2$$

3) Hoành độ của điểm cần tìm là nghiệm phương trình $2x^2 = 8$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$. Vậy có hai điểm thỏa mãn là: (2;8) và (-2;8).

4) Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$$\text{Do đó } \cos ACB = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

Câu 2.

1) (1,0 điểm)

Với điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{2}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{2}{x-1} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2) (0,5 điểm) Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Do đó

$$Q = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = -\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (TM)}$$

Vậy với $x = \frac{1}{4}$ thì $Q = -1$

Câu 4. 1) (1,5 điểm)

a) (0,75 điểm) Với $m = 3$, ta có phương trình (1) trở thành $x^2 - 4x + 3 = 0$

Ta có $a+b+c = 1-4+3 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=1; x_2=3$

Vậy với $m = 3$, phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x_1=1; x_2=3$

b) (0,75 điểm) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$

Phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x có $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 6) = 7 - 2m$

Phương trình (1) có các nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 7 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{2} \text{ (*)}$

Khi đó theo định lý Viét ta có $x_1 + x_2 = 2(m-1); x_1 x_2 = m^2 - 6$

Do đó: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4(m-1)^2 - 2(m^2 - 6) = 2m^2 - 8m + 16$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = 16 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m + 16 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $m = 0$ là giá trị thỏa mãn.

$$\text{2) (1,0 điểm)} \begin{cases} \sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y} & (1) \\ x^2 + (x+3)(2x-y+5) = x+16 & (2) \end{cases} \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Với $x \geq -2; y \geq 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}(x-y+2) + \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}[(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{y})^2] + \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{y})[\underbrace{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{y}) + 1}_{>0 \forall x \geq -2; y \geq 0}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 = y$$

Thay $y = x+2$ vào phương trình (2) ta được phương trình:

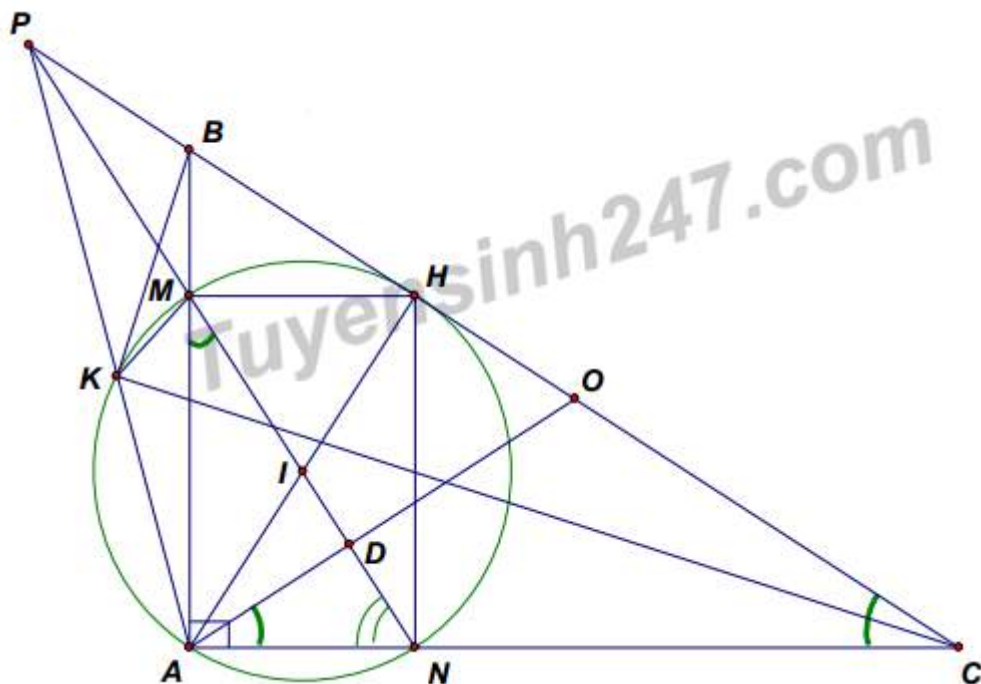
$$x^2 + (x+3)(2x - (x+2) + 5) = x + 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+3)^2 = x + 16$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(TM) \\ x = -\frac{7}{2}(L) \end{cases}$$

Câu 4



1) (1,0 điểm)

a) (0,5 điểm) Xét đường tròn (I) có $\angle AMH = \angle ANH = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên HM, HN tương ứng là đường cao của các tam giác vuông ABH, ACH

+) $\triangle ABH$ vuông tại H, có đường cao HM nên suy ra $AM \cdot AB = AH^2$.

+) $\triangle ACH$ vuông tại H, có đường cao HN nên suy ra $AN \cdot AC = AH^2$.

Do đó $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

b) (0,5 điểm) Theo câu a) ta có $AM \cdot AB = AN \cdot AC \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ACB$ có A chung, $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ nên suy ra $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ (c.g.c)

Do đó $\angle AMN = \angle ACB \Rightarrow \angle BCN + \angle BMN = \angle ACB + \angle BMN = \angle AMN + \angle BMN = 180^\circ$

Mà các góc $\angle BCN, \angle BMN$, ở vị trí đối diện nên suy ra tứ giác BMNC nội tiếp.

2) (1,0 điểm)

a) (0,5 điểm) Ta có tam giác ABC vuông tại A và O là trung điểm của cạnh BC nên $OA = OB = OC \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow \angle OAC = \angle BCN$ Mà $\angle AMN = \angle ACB = \angle BCN \Rightarrow$ nên $\angle AMN = \angle OAC \Rightarrow \angle AMN = \angle DAN$

Vì ΔAMN vuông tại A nên $\angle AMN + \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow \angle DAN + \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow \angle ADN = 90^\circ$

Mà $\angle MAN = 90^\circ \Rightarrow MN$ là đường kính của đường tròn (I) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN nên $\angle ADI = 90^\circ$.

Xét ΔAID và ΔAOH có $\angle ADI = \angle AHO = 90^\circ$ và A chung do đó $\Delta ADI \sim \Delta AHO$ (g.g)

b) (0,5 điểm)

$$\text{Vì } \Delta ADI \sim \Delta AHO \Rightarrow \frac{AD}{AH} = \frac{AI}{AO} \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{AO}{AH \cdot AI}$$

$$\text{Mà } AO = \frac{1}{BC}; AI = \frac{1}{2}AH; \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{BC}{AH^2}$$

Câu 5

$$1) \text{ (0,5 điểm) Điều kiện xác định } \begin{cases} 3x^2 - 6x - 6 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{3}$$

Với $x \leq 1 - \sqrt{3}$, phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3(2 - x)^2 \sqrt{2 - x} + (7 - 19)\sqrt{2 - x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} = (3x^2 - 5x - 7)\sqrt{2 - x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} - \sqrt{2 - x} = (3x^2 - 5x - 7)\sqrt{2 - x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 5x - 8}{\sqrt{3x^2 - 6x - 6} + \sqrt{2 - x}} = (3x^2 - 5x - 7)\sqrt{2 - x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 = 0 \\ 1 = \sqrt{2 - x}(\sqrt{3x^2 - 6x - 6} + \sqrt{2 - x}) \end{cases} \text{ (Do } \sqrt{3x^2 - 6x - 6} + \sqrt{2 - x} > 0 \forall x \leq 1 - \sqrt{3})$$

$$+) 3x^2 - 5x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (TM)} \\ x = \frac{8}{3} \text{ (L)} \end{cases}$$

$$+) 1 = \sqrt{2 - x}(\sqrt{3x^2 - 6x - 6} + \sqrt{2 - x})$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2 - x + \sqrt{2 - x}\sqrt{3x^2 - 6x - 6}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2 - x}\sqrt{3x^2 - 6x - 6} (*)$$

$$\text{Do } x \leq 1 - \sqrt{3} \Rightarrow x - 1 < 0 \leq \sqrt{2 - x}\sqrt{3x^2 - 6x - 6} \Rightarrow (*) \text{ VN}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$

$$2) \text{ (0,5 điểm) Ta có: } a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \forall a; b \in \mathbb{R}$$

Thật vậy:

$$a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall a, b \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c \geq ab(a^2 + b^2) + c \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c \geq ab(a^2 + b^2) + abc^2 > 0 \text{ (vì } a, b, c > 0 \text{ và } abc=1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2) + abc^2} \text{ (Vi } c > 0) \Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{b}{a^4 + c^4 + b} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2)$$

$$\frac{a}{b^4 + c^4 + a} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Vậy $T \leq 1 \quad \forall a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc=1$

Với $a=b=c=1$ thì $T=1$

Vậy GTLN của T là 1

ĐỀ 28

Bài 1.

Vì $P(x)$ chia cho $x+1$ dư 3 nên $P(x) - 3$ chia hết cho $x+1$.

$$\Rightarrow P(x) - 3 = f(x) \cdot (x+1)$$

Thay $x = -1$ vào đẳng thức trên ta có:

$$P(-1) - 3 = f(-1) \cdot (-1+1) = 0.$$

$$\Rightarrow P(-1) = 3 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } P(x) \text{ chia cho } x \text{ dư 1 nên } P(0) = 1 \quad (2)$$

$$P(x) \text{ chia cho } x-1 \text{ dư 5 nên } P(1) = 5 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x) = 3x^2 + x + 1$. Thử lại ta thấy $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

Vậy $P(x) = 3x^2 + x + 1$.

2)

a) Ta có:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{x^4b + y^4a}{ab} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(x^4b + y^4a) = ab$$

$$\Leftrightarrow abx^4 + a^2y^4 + b^2x^4 + aby^4 - ab = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(x^4 + y^4 - 1) + (ay^2)^2 + (bx^2)^2 = 0(*)$$

$$\text{Mặt khác } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 1 \Rightarrow x^4 + y^4 - 1 = -2x^2y^2$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow -2abx^2y^2 + (ay^2)^2 + (bx^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ay^2 = bx^2$$

b) Vì $ab \neq 0$ nên

$$ay^2 = bx^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{100} = \left(\frac{y^2}{b}\right)^{100} = \frac{1}{(a+b)^{100}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{200}}{a^{100}} + \frac{y^{200}}{b^{100}} = \frac{2}{(a+b)^{100}}$$

Bài 2. (2,5 điểm)

$$1) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} (y-x)(y-x-4) = x^2 - 4x(1) \\ x(y-4) + 4\sqrt{x^2 - y} = 6(2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1):

$$(1) \Leftrightarrow (y-x)(y-4) - x(y-x) = x(x-4)$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(y-4) = x(x-4+y-x)$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(y-4) = x(y-4)$$

$$\Leftrightarrow (y-4)(y-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 2x \end{cases}$$

• Với $y = 4$, thay vào (2) được:

$$(2) \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 4} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x} - 3 = 0$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$, phương trình trở thành:

$$t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0(3) \end{cases}$$

Phương trình (3) có $\Delta = 1 - 4.3 = -11 < 0$ nên vô nghiệm.

Do đó

$$t = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 - 2\sqrt{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$\left(\frac{\sqrt{118}}{4}; 4\right), \left(-\frac{\sqrt{118}}{4}; 4\right), (1 + \sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}; 2 - 2\sqrt{2})$$

2) Giải phương trình $3(x+1)\sqrt{x^2 + x + 3} - 3x^2 - 4x - 7 = 0$. (1)

ĐK: $x^2 + x + 3 \geq 0$

Đặt $a = x+1; b = \sqrt{x^2 + x + 3}$ ($b \geq 0$). Ta có $a^2 + 2b^2 = (x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + x + 3) = 3x^2 + 4x + 7$

Phương trình (1) trở thành

$$3ab - a^2 - 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-a + b)(a - 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{x^2 + x + 3} \\ x+1 = 2\sqrt{x^2 + x + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 3 \\ x^2 + 2x + 1 = 4(x^2 + x + 3) \end{cases}$$

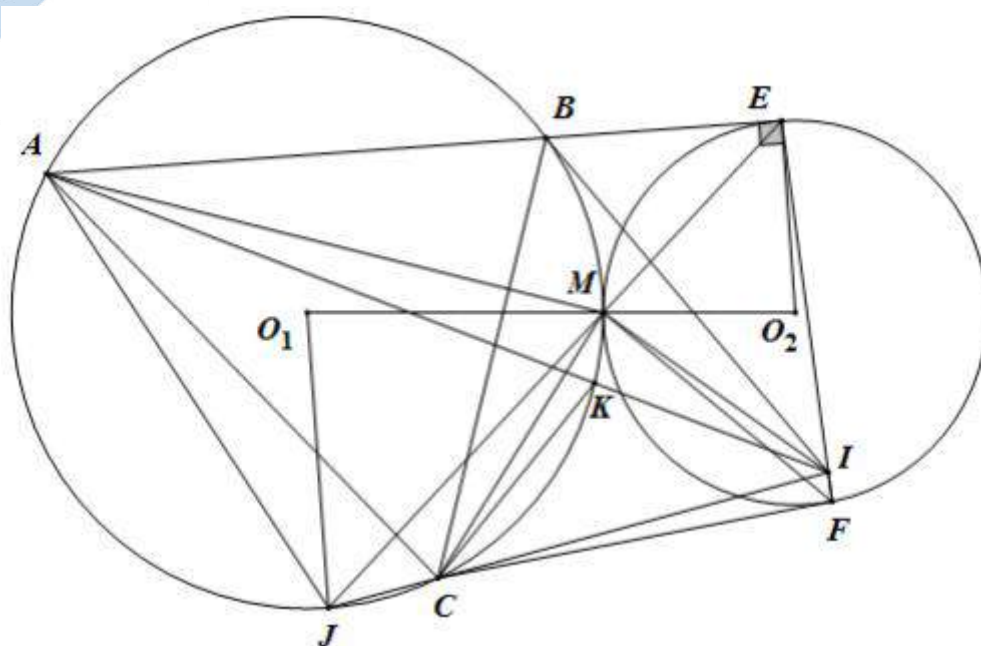
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 2 \\ 3x^2 + 2x + 11 = 0(2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

(Phương trình (2) có $\Delta' = 1 - 3.11 = -32 < 0$ nên vô nghiệm)

Do đó $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 3.



1) Ta có tam giác O_1MJ và O_2ME cân nên $O_1MJ = O_1JM$; $O_2ME = O_2EM$

Mặt khác $O_1MJ = O_2ME$ (hai góc đối đỉnh) nên

$\Delta O_1MJ \sim \Delta O_2ME$ (g.g)

$\Rightarrow O_1 = O_2$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm trong một đường tròn ta có:

$$JAM = \frac{1}{2}O_1$$

$$MFI = \frac{1}{2}O_2$$

$\Rightarrow JAM = MFI$

Mặt khác, vì $AJCM$ là tứ giác nội tiếp, nên $MCI = JAM$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện)

$\Rightarrow MCI = MFI$

$\Rightarrow MCFI$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow MIC = MFC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Mặt khác xét đường tròn O_2 ta có: $MFC = MEF$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MF)

$\Rightarrow MIC = MEI$

$$\text{Do đó } \Delta JMI \sim \Delta JIE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{JM}{JI} = \frac{JI}{JE} \Rightarrow JM \cdot JE = JI^2$$

$$\text{Tương tự } JAM = MFE = AEJ \Rightarrow \Delta JAM \sim \Delta JEA \Rightarrow JM \cdot JE = JA^2$$

$$\text{Do đó } JA = JI = \sqrt{JE \cdot JM}$$

2) Do $O_1 = O_2$ (cmt) nên $O_1J \parallel O_2E \Rightarrow O_1J \perp AB$.

Mà $O_1A = O_1B$ nên O_1J là trung trực của AB

⇒ Tam giác JAB cân tại J

Vì ABCJ là tứ giác nội tiếp nên ta có:

$$BCI = BAJ = \frac{180^\circ - AJB}{2} = \frac{180^\circ - ACB}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}ACB$$

Do đó CI là phân giác ngoài tại đỉnh C của tam giác ABC.

3) Do AJCK là tứ giác nội tiếp nên

$$ICK = IAJ = KIC \Rightarrow KI = KC$$

Áp dụng tính chất góc ngoài với tam giác ACI, ta có:

$$KAC = ACJ - AIC = ABJ - AIJ = BAJ - JAK = BAK \Rightarrow KB = KC.$$

Do đó KB = KC = KI ⇒ K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI.

Bài 4.

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

$$\Leftrightarrow (2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 4)(2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 6) - 5^y = 11879 \quad (1)$$

Đặt $t = 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 5, t \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (t-1)(t+1) - 5^y = 11879$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5^y = 11880 \quad (2)$$

Xét các TH sau:

• TH1: $y \geq 2 \Rightarrow 5^y : 25$

Từ (2) suy ra $t^2 : 5 \Rightarrow t^2 : 25$. Do đó từ (2) $\Rightarrow 11880 : 25$ (vô lí)

• TH2: $y = 1$

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11885$ (loại vì 11885 không phải là số chính phương)

• TH3: $y = 0$

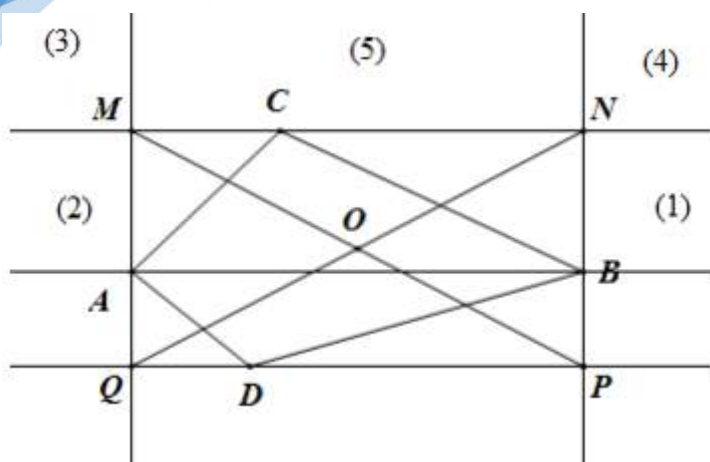
$$(2) \Leftrightarrow t^2 = 11881 \Rightarrow t = 109$$

$$\Rightarrow 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 5 = 109 \Rightarrow 2^{2x} + 5 \cdot 2^x - 104 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8(TM) \\ 2^x = -13(L) \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3, y = 0$ là các số tự nhiên cần tìm.

Bài 5.1)



Gọi A, B là 2 điểm có khoảng cách lớn nhất thuộc 8065 điểm đã cho.

Gọi a, b lần lượt là các đường thẳng qua A, B và vuông góc AB.

Gọi C là điểm có khoảng cách đến đường thẳng AB là lớn nhất trong 8065 điểm đã cho.

Đường thẳng qua C và song song AB cắt a, b lần lượt ở M, N.

Xét 2 trường hợp:

- TH1: Không tồn tại điểm nào thuộc S mà nằm khác phía C so với AB.

Khi đó tất cả 8065 điểm đã cho đều nằm trong hình chữ nhật AMNB.

Thật vậy, nếu $\forall$ điểm $I \in S$ không nằm trong hình chữ nhật đó thì I chỉ có thể nằm trong các miền (1), (2), (3), (4) hoặc (5).

Nếu $I \in (1)$ hoặc $I \in (4)$ thì dễ thấy $AI > AB$ (mâu thuẫn với giả sử)

Nếu $I \in (2)$ hoặc $I \in (3)$ thì dễ thấy $BI > AB$ (mâu thuẫn với giả sử)

Nếu $I \in (5)$ thì $d(I; AB) > d(C; AB)$ (mâu thuẫn).

Do đó I thuộc hình chữ nhật AMNB $\forall I \in S$.

Khi đó xét ba tam giác AMC, ABC và BNC, ta có

$$S_{AMC} < S_{ABC} \leq 1$$

$$S_{BNC} < S_{ABC} \leq 1$$

và tồn tại một trong ba tam giác chứa ít nhất 2017 điểm, vì nếu không thì cả hình chữ nhật AMNB sẽ chứa ít hơn $3 \cdot 2017 = 6051$ (điểm), vô lí.

Do đó chọn được tam giác T thỏa mãn.

- TH2 : Tồn tại tập S' các điểm nằm khác phía với C so với AB.

Khi đó gọi D là điểm thuộc S' mà có khoảng cách đến AB là lớn nhất.

Qua D kẻ đường thẳng song song AB cắt a, b lần lượt ở Q, P. Gọi O là giao MP, NQ.

Chứng minh tương tự ta có 8065 điểm đã cho đều nằm trong hình chữ nhật MNPQ.

Theo nguyên lí Đê-rích-lê $\Rightarrow$ Tồn tại một trong bốn tam giác OMN, ONP, OPQ, OQM chứa ít nhất 2017 điểm.

$$\text{Mặt khác } S_{OMN} = S_{ONP} = S_{OPQ} = S_{OQM} = \frac{1}{4} S_{MNPQ} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (S_{ACB} + S_{ADB}) \leq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (1+1) = 1$$

Bài toán được chứng minh.

2) Ta có:

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2(2a^2 + b^2 + c^2) - (b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = 2 - \frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2}$$

Có hai đẳng thức tương tự.

BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \leq 3.$$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz cho 4 số dương $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \geq \frac{(x+y)^2}{m+n}$, ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2}$$

Ta có hai BĐT tương tự, cộng từng vế ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \\ & \leq \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) + \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{a^2}{c^2 + a^2} + \frac{b^2}{c^2 + b^2} \right) \\ & = \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + b^2} \right) + \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) \\ & = 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ BĐT đã cho được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

ĐỀ 29

Câu 1.

$$1) \text{ Biểu thức } C \text{ có nghĩa khi: } \begin{cases} a \geq 0 \\ a-16 \neq 0 \\ \sqrt{a}-4 \neq 0 \\ \sqrt{a}+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 16 \\ a \neq 16 \\ \forall a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0, a \neq 16.$$

$$\begin{aligned} \text{Rút gọn } C &= \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} = \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a-2(\sqrt{a}+4)-2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}.$$

2) Giá trị của C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Ta có: $a = a = 9 - 4\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = (2 - \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$

Vậy $C = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2+4} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 9 - 4\sqrt{5}$.

Câu 2.a)

$$1+x = 1 + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}; 1+y = 1 + \frac{b-c}{b+c} = \frac{2b}{b+c}; 1+z = 1 + \frac{c-a}{c+a} = \frac{2c}{c+a}$$

$$\Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$1-x = 1 - \frac{a-b}{a+b} = \frac{2b}{a+b}; 1-y = 1 - \frac{b-c}{b+c} = \frac{2c}{b+c}; 1-z = 1 - \frac{c-a}{c+a} = \frac{2a}{c+a}$$

$$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

b) Đặt $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a} = k \Rightarrow k = \frac{cay-cby}{c^2} = \frac{bcx-baz}{b^2} = \frac{abz-acy}{a^2}$

$$k = \frac{cay-cbx+bcx-abz+abz-acy}{a^2+b^2+c^2} = 0 \Rightarrow ay-bx = cx-az = bz-cy = 0$$

$$\Rightarrow (ay-bx)^2 = (cx-az)^2 = (bz-cy)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 = 0$$

Suy ra: $(ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$

Câu 3.

Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$ (Điều kiện $x \geq -1$)

$$PT \Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2(x^2+2)$$

Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{x^2-x+1} = b$ ($a, b \geq 0$)

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2. \text{ thay vào ta có PT}$$

$$5ab = 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)(2b-a) = 0$$

TH1: $2a-b=0 \Rightarrow 2a=b$

$$2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Rightarrow 4x + 4 = x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = 37 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} (TM) \\ x_2 = \frac{5 - \sqrt{37}}{2} (TM) \end{cases}$$

$$TH2: 2b - a = 0$$

$$\Rightarrow 2b = a$$

$$2\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x + 1}$$

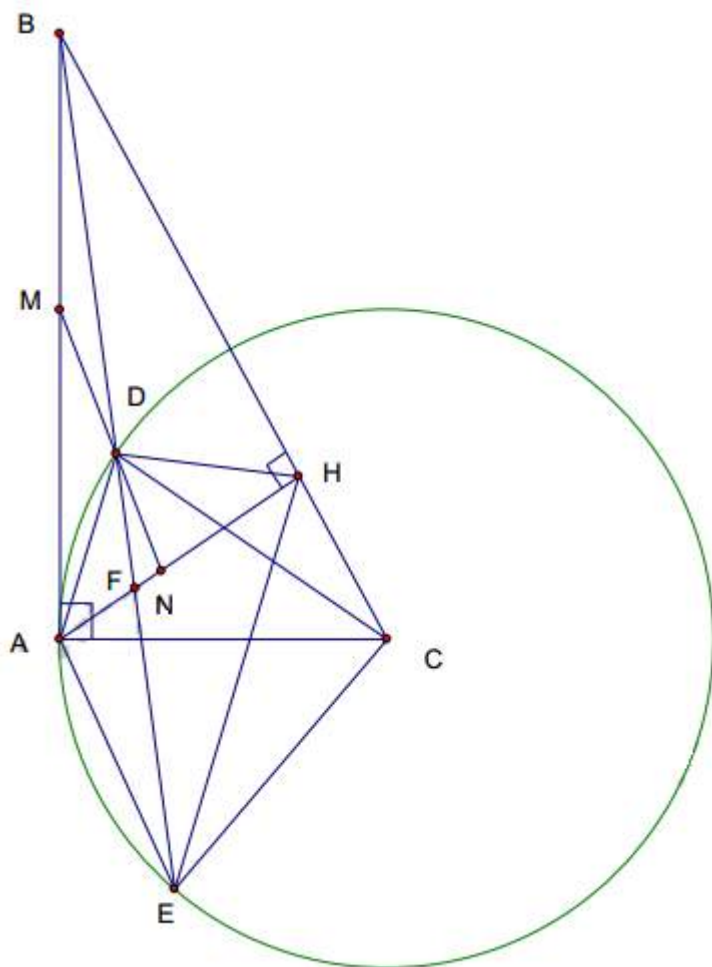
$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 4 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = -23 < 0 \Rightarrow PTVN$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm : $x_1 = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$; $x_2 = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$

Câu 4.



a/ Chứng minh $MN \parallel AE$

Xét đường tròn (C) ta có : $\angle AED = \frac{1}{2} \angle ACD$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung AD) (1)

$$\angle BDM = \frac{1}{2} \angle ACD \text{ (gt)} \quad (2)$$

Từ 1, 2 $\Rightarrow \angle AED = \angle BDM$

$\Rightarrow MN \parallel AE$ (Vì có 2 góc đồng vị bằng nhau)

b/ Chứng minh $BD \cdot BE = DA^2$ và tứ giác DHCE nội tiếp

+ Chứng minh $BD \cdot BE = BA^2$

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle BEA$ có

$\angle ABE$ chung (3)

$\angle ADB = \angle BEA$ (cùng chắn cung AD) (4)

Từ 3, 4 $\Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BEA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BE} \Rightarrow BD \cdot BE = BA^2 \quad (5) \text{ (ĐPCM)}$$

+ Chứng minh DHCE nội tiếp

Xét $\triangle BAC$ vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow BA^2 = BH \cdot BC$ (Hệ thức) (6)

$$\text{Từ 5, 6} \Rightarrow BD \cdot BE = BH \cdot BC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BH}{BE} \quad (7) \text{ Mà } \angle CBE \text{ chung} \quad (8)$$

$\Rightarrow \triangle BDH \sim \triangle BCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BHD = \angle BEC$ (Hai góc tương ứng) (9)

Mà $\angle BHD + \angle DHC = 180^\circ$ (10)

Từ 9, 10 $\Rightarrow \angle DHC + \angle BEC = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác DHCE nội tiếp (Đ/l) (ĐPCM)

c/ Chứng minh HA là đường phân giác của góc DHE và D là trung điểm của đoạn thẳng MN

+ Chứng minh HA là đường phân giác của góc DHE

Xét $\triangle CHE$ và $\triangle CEB$ có $\angle HCE$ chung (11)

Xét $\triangle BAC$ vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow CA^2 = CH \cdot CB$ (Hệ thức)

$$\text{Hay } CE^2 = CH \cdot CB \text{ (do } CE = CA = R) \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{CH}{CE} \quad (12)$$

Từ 11, 12 $\Rightarrow \triangle CHE$ và $\triangle CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle CHE = \angle CEB$ (13)

Từ 9, 13 $\Rightarrow \angle CHE = \angle BHD$

$\Rightarrow \angle AHE = \angle AHD$ (cùng phụ với 2 góc bằng nhau)

$\Rightarrow HA$ là đường phân giác của góc DHE

+ D là trung điểm của đoạn thẳng MN

$$\text{Ta có : } MD \parallel AE \text{ (câu a)} \Rightarrow \frac{DM}{EA} = \frac{BD}{BE} \text{ (talet)} \quad (14)$$

Gọi giao của DE và AH là F

$$\text{Ta có : } \frac{DN}{EA} = \frac{FD}{FE} = \frac{HD}{HE} \text{ (Ta lét – T/c tia phân giác)} \quad (15)$$

$$\text{Ta có : } \triangle HDB \sim \triangle HCE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DH}{HC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow DH \cdot CE = CH \cdot BD \quad (16)$$

$$\text{Ta có : } \triangle CHE \sim \triangle CEB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HC}{CE} = \frac{HE}{BE} \Rightarrow HC \cdot BE = HE \cdot CE \quad (17)$$

$$\text{Từ 16,17} \Rightarrow \frac{DH \cdot CE}{HE \cdot CE} = \frac{HC \cdot BD}{HC \cdot BE} \Rightarrow \frac{DH}{HE} = \frac{BD}{BE} \quad (18)$$

$$\text{Từ 14,15,18} \Rightarrow \frac{DM}{EA} = \frac{DN}{EA} \Rightarrow DM = DN$$

$\Rightarrow$ D là trung điểm của MN (ĐPCM)

Câu 5. Ta có: $P = \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy$

$$= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} + 2xy - \frac{x^2 + y^2}{32} - \frac{35xy}{16}$$

$$= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} - \frac{(x+y)^2}{32} - \frac{xy}{8}.$$

Sử dụng Cô – si cho các cặp $(\frac{x^2 + y^2}{32}; \frac{2}{x^2 + y^2})$ và $(\frac{35}{xy}; \frac{35xy}{16})$ ta có:

$$\frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} \geq 2\sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} \geq 2\sqrt{\frac{35^2}{16}} = \frac{35}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } x + y \leq 4 \Rightarrow x \cdot y \leq 4 \text{ nên } \frac{xy}{8} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{(x+y)^2}{32} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{2} + \frac{35}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 17. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x = y = 2$$

ĐỀ 30

Bài 1:

$$M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}}$$

a) DK: $x \geq 0; y \geq 0$

$$\begin{aligned} M &= \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \\ &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1 + \sqrt{xy}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{xy})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1 + \sqrt{xy}} \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{y} \end{aligned}$$

b) Với $x = (1 - \sqrt{3})^2$ và $y = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$

$$M = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Bài 2:

a) Với $ab \geq 1$ ta có: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ (*)

Thật vậy, biến đổi tương đương (*) ta được: $(ab-1)(a-b)^2 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$ hoặc $ab = 1$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $ab \geq 1$.

Biến đổi và áp dụng BĐT (*) ta được:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{2}{x^2+17} + \frac{1}{2x^2+7} = \frac{1}{1+\frac{x^2+15}{2}} + \frac{1}{1+2(x^2+3)} \\ &\geq \frac{2}{1+\sqrt{\left(\frac{x^2+15}{2}\right) \cdot 2(x^2+3)}} = \frac{2}{1+\sqrt{(x^2+15)(x^2+3)}} = VP \end{aligned}$$

Để thấy $\left(\frac{x^2+15}{2}\right) \cdot 2(x^2+3) > 1$ với mọi x nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{x^2+15}{2} = 2(x^2+3). \text{ Giải phương trình này ta được nghiệm } x = \pm 1$$

b) Ta có:

$$a^2 + (a-c)^2 = a^2 + c^2 - c^2 + (a-c)^2 = a^2 + c^2 - 2(ac+bc-ab) + (a-c)^2 = 2(a-c)(a-c+b)$$

$$\text{Tương tự: } b^2 + (b-c)^2 = 2(b-c)(b-c+a)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{2(a-c)(a-c+b)}{2(b-c)(b-c+a)} = \frac{a-c}{b-c} \text{ (đpcm)}$$

Bài 3: a) Với $m = 2$, ta có phương trình: $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

b) Xét phương trình (1) ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4) = 2m - 3$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$. Theo hệ thức Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$.

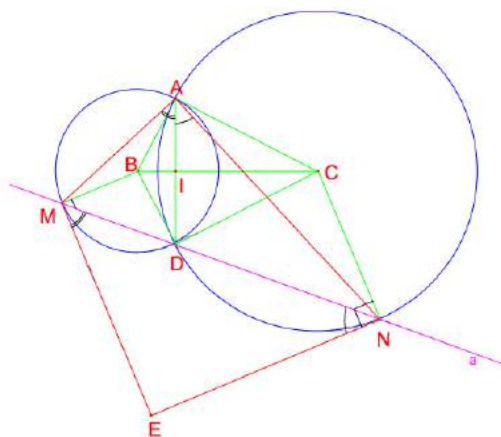
Theo giả thiết: $x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 \leq 3m^2 + 16$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - (m^2 + 4) \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 8m \leq 16 \Leftrightarrow m \leq 2. \text{ Vậy } \frac{3}{2} \leq m \leq 2.$$

Bài 4:



a) C/m: $\Delta ABC = \Delta DBC$ (ccc) $\Rightarrow \angle ABC = \angle DBC$ hay: BC là phân giác của $\angle ABD$

b) Ta có: $AB = BD$ (=bk(B))

$CA = CD$ (=bk(C))

Suy ra: BC là trung trực của AD hay $BC \perp AD \Rightarrow AI \perp B$

Ta lại có: $BC \perp AD$ tại I $\Rightarrow IA = ID$ (đlí)

Xét ΔABC vuông tại A (gt) có: $AI \perp BC$, suy ra: $AI^2 = BI \cdot CI$ hay: $\frac{AD^2}{4} = BI \cdot CI \Rightarrow AD^2 = 4BI \cdot CI$

c) Ta có: $\angle DME = \angle DAM$ (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

$\angle DNE = \angle DAN$ (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

Suy ra: $\angle DME + \angle DNE = \angle DAM + \angle DAN$

Trong ΔMNE có: $\angle MEN + \angle EMN + \angle ENM = 180^\circ$, suy ra: $\angle MEN + \angle DAM + \angle DAN = 180^\circ$

Hay: $\angle MEN + \angle MAN = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác AMEN nội tiếp.

d) Trong ΔAMN có: $\angle MAN + \angle AMN + \angle ANM = 180^\circ$, mà: $\angle MEN + \angle MAN = 180^\circ$

suy ra: $\angle MEN = \angle AMN + \angle ANM$

Ta lại có: $AND = ACB = \frac{1}{2}ACD, AMD = ABC = \frac{1}{2}ABD$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Mà: $\triangle ABC$ vuông tại A nên: $MEN = 90^\circ$ (không đổi)

Vậy số đo góc MEN không phụ thuộc vào đường thẳng a.

ĐỀ 31

Câu 1

a.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{2015^2 - 1} - \sqrt{2014^2 - 1} &= \frac{(\sqrt{2017^2 - 1} - \sqrt{2016^2 - 1})(\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1})}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}} \\ &= \frac{(2015^2 - 1) - (2014^2 - 1)}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}} = \frac{2017^2 - 2016^2}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}} = \frac{(2017 - 2016)(2017 + 2016)}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}} \\ &= \frac{2017 + 2016}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}} > \frac{2 \cdot 2016}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{2017^2 - 1} - \sqrt{2016^2 - 1} > \frac{2 \cdot 2016}{\sqrt{2017^2 - 1} + \sqrt{2016^2 - 1}}$$

$$\text{b. Đặt } b = \sqrt[4]{5} \Rightarrow b^2 = \sqrt{5}, b^3 = \sqrt[4]{125}, b^4 = 5, b^6 = 5b^2, b^5 = 5b.$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{2}{\sqrt{4 - 3b + 2b^2 - 3b^3}}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^3 - 2b^2 + 3b - 4} &= \frac{1}{(b^3 + 3b) - (2b^2 + 4)} = \frac{(b^3 + 3b) + (2b^2 + 4)}{(b^3 + 3b)^2 - (2b^2 + 4)^2} \\ &= \frac{b^3 + 3b + 2b^2 + 4}{-2b^2 - 6} = -\frac{(b^3 + 2b^2 + 3b + 4)(b^2 - 3)}{2(b^4 - 9)} = \frac{b^5 + 2b^4 - 2b^2 - 9b - 12}{8} \\ &= \frac{-b^2 - 2b - 1}{4} = -\left(\frac{b+1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = 2\sqrt{\left(\frac{2}{b+1}\right)^2} = \frac{4}{b+1} = \frac{4}{\sqrt[4]{5} + 1}.$$

Câu 2 1) Khi $a = 3$ và $b = -5$ ta có phương trình: $x^2 + 3x - 4 = 0$. Do $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -4$.

2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4(b+1) > 0$ (*)

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b+1 \end{cases}$ (1).

Bài toán yêu cầu $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ ((x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2)) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases} \quad (2).$

Từ hệ (2) ta có: $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 3^2 + 4(-2) = 1$, kết hợp với (1) được $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b + 1 = -2 \end{cases}$

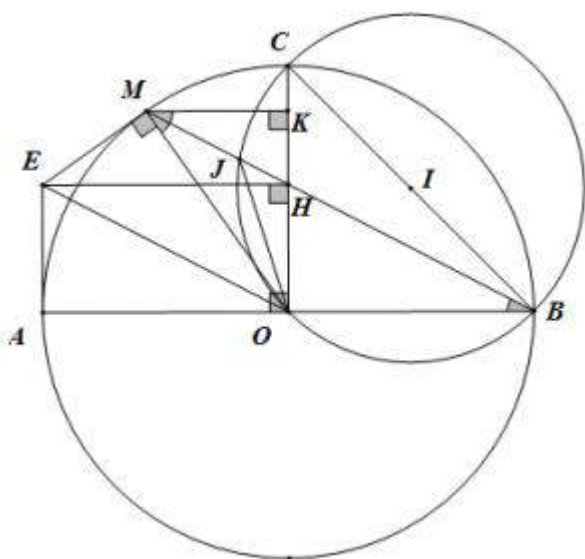
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = -3 \\ a = -1, b = -3 \end{cases}.$$

Các giá trị này đều thỏa mãn điều kiện (*) nên chúng là các giá trị cần tìm.

Câu 3 Ta có:

$$\begin{aligned} m + n + p &= \frac{a+b}{a-b} + \frac{c+d}{c-d} + \frac{ac-bd}{ad+bc} = \frac{(a+b)(c-d) + (c+d)(a-b)}{(a-b)(c-d)} + \frac{ac-bd}{ad+bc} \\ &= \frac{2(ac-bd)}{(a-b)(c-d)} + \frac{ac-bd}{ad+bc} = \frac{(ac-bd)(2(ad+bc) + (a-b)(c-d))}{(a-b)(c-d)(ad+bc)} \\ &= \frac{(ac-bd)(a+b)(a+c)}{(a-b)(c-d)(ad+bc)} = m.n.p \end{aligned}$$

Câu 4



a. Vì C là điểm chính giữa cung AB nên $OC \perp AB$. ME là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow ME \perp MO$
 $\Rightarrow OHE = OME = 90^\circ \Rightarrow OHME$ là tứ giác nội tiếp (1)

b. Có góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $AMB = 90^\circ \Rightarrow AMH + AOH = 180^\circ$
 $\Rightarrow OHMA$ là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5$ điểm O, H, M, E, A cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow OMEA$ là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow EAO = 180^\circ - EMO = 90^\circ$

Tứ giác OHEA có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật. $\Rightarrow EH = OA = R$.

c. Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow$ đường tròn (I), đường kính BC là đường tròn ngoại tiếp Δ OBC

Gọi J là giao của (I) và BH.

Vì OM = OB nên Δ OMB cân tại O $\Rightarrow$ OMB = OBM

Vì MK $\perp$ OC $\Rightarrow$ MK // AB $\Rightarrow$ OBM = KMB

Suy ra OMB = KMB $\Rightarrow$ MJ là phân giác của góc OMK (3)

Vì OJCB là tứ giác nội tiếp nên JOC = JBC (4)

Có MOC = 2.MBC (góc ở tâm và góc nội tiếp) (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ MOC = 2.JOC $\Rightarrow$ MOJ = JOC $\Rightarrow$ OJ là phân giác góc MOC (6)

Từ (3) và (6) $\Rightarrow$ J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MKO

Vậy đường tròn (I) đi qua tâm đường tròn nội tiếp Δ MKO

Câu 5

Ta có :

$$(a^3 + b)\left(\frac{1}{a} + b\right) \geq (a+b)^2; (b^3 + a)\left(\frac{1}{b} + a\right) \geq (a+b)^2.$$

Khi đó :

$$\frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{a + b^3} \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{(a+b)^2} \Leftrightarrow VT \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{a+b} - \frac{1}{ab} = 1 + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ab} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = 1

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi a = b = 1.

ĐỀ 32

Câu I:

a) Điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa :
$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^3+1 \neq 0 \\ \sqrt{x+2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

b) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \right) = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1-(x+2)} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x-2) - (x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{-(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

a) c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

$$\text{Ta có } A = \frac{-1}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Ta có A nhỏ nhất khi $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{-4}{3}$ khi $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Câu II:

PT hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = 2mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (*). Có

$\Delta' = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m$. Vậy phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay (d)

luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

Theo định lý Vi - et ta có: $x_1 + x_2 = 2m, x_1 \cdot x_2 = m - 1$.

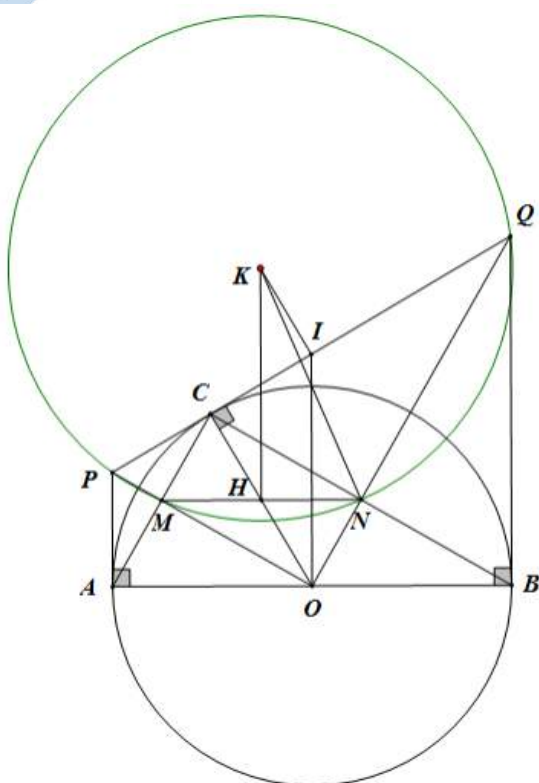
$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2 - 4(m - 1) = 4 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (do } m \neq 0).$$

Câu III:

$$\text{Ta có: } \frac{2k+1}{[k(k+1)]^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{[k(k+1)]^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } M &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)(n+1) - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Câu IV:



1) Vì AP và CP là tiếp tuyến của (O) nên $OA \perp AP$, $OC \perp PC$

Xét tam giác vuông OAP và tam giác vuông OCP có:

$$\begin{cases} OP(\text{chung}) \\ OA = OC = R \end{cases} \Rightarrow \triangle OAP = \triangle OCP \text{ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PC = PA(1) \\ POA = POC \Rightarrow POC = \frac{1}{2}COA(2) \end{cases}$$

Tương tự ta có: $\begin{cases} QC = QB(3) \\ QOC = \frac{1}{2}COB(4) \end{cases}$

Từ (2) và (4) ta có: $POQ = POC + QOC = \frac{1}{2}(COA + COB) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle POQ$ vuông tại O

Từ (1), (3) và áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OPQ ta có:

$$AP \cdot BQ = CP \cdot CQ = CO^2 = R^2 \text{ (đpcm)}$$

2) Xét tam giác vuông OPQ, gọi I là trung điểm cạnh huyền PQ, khi đó: $IP = IQ = IO$

$\Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính PQ (5)

Mặt khác, do $AP \parallel BQ$ nên APQB là hình thang và nhận IO là đường trung bình, suy ra $OI \parallel BQ$

Mà $BQ \perp AB \Rightarrow OI \perp AB$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow$ AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ tại O.

3) Vì $OC = OA = R$, $PC = PA$ (cmt) nên PO là trung trực của đoạn AC $\Rightarrow PO \perp AC$

Tương tự $QO \perp BC$.

Tứ giác OMCN có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật $\Rightarrow$ OMCN là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle OMN = \angle OCN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ON) (7)

Mặt khác, do các tam giác OCQ và OCN vuông, suy ra:

$\angle OCN = \angle PQO$ (cùng phụ với $\angle CON$) (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \angle OMN = \angle PQO$

Mặt khác $\angle OMN + \angle PMN = 180^\circ \Rightarrow \angle PQO + \angle PMN = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác PMNQ là tứ giác nội tiếp.

4) Gọi H, I là trung điểm MN, PQ. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ.

Ta có: $KH \perp MN$ và $KI \perp PQ$

Vì OP là trung trực AC (cmt) nên M là trung điểm AC, tương tự N là trung điểm BC.

$\Rightarrow MN \parallel AB$ và $MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow HN = \frac{MN}{2} = \frac{AB}{4} = \frac{R}{2}$ (9)

Vì $MN \parallel AB$, $OI \perp AB \Rightarrow MN \perp OI$. Mà $MN \perp KH$ nên $OI \parallel KH$. Mà $KI \parallel HO$ (cùng vuông góc PQ) nên OIKH là hình bình hành.

$\Rightarrow KH = OI \geq OC = R$ (10)

Bán kính đường tròn (K) là KN. Từ (9) và (10) ta có:

$$KN = \sqrt{KH^2 + HN^2} \geq \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow OI = OC \Leftrightarrow O \equiv C \Leftrightarrow OC \perp AB \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp PMNQ nhỏ nhất khi C là điểm chính giữa cung AB của đường tròn (O).

Câu V:

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy$ nên: $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$. Do đó:

$$\begin{aligned} P &= \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y) \geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 \\ &\geq \frac{4xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 - \frac{3xy}{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{4} + 2 - \frac{3(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} \\ &\geq 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Dấu « = » xảy ra khi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ \frac{4xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Leftrightarrow x = y. \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{9}{2}$ khi $x = y$.

ĐỀ 33

Bài I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x - \sqrt{x-8} - 3\sqrt{x} + 1 = 0$. (1)

ĐK: $x \geq 8$

$$(1) \Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x-8} - 6\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-8-2\sqrt{x-8}+1) + (x-6\sqrt{x}+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-8}-1)^2 + (\sqrt{x}-3)^2 = 0 \quad (2)$$

Ta có: $\begin{cases} (\sqrt{x-8}-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{x}-3)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{x-8}-1)^2 + (\sqrt{x}-3)^2 \geq 0$

Do đó $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-8}-1=0 \\ \sqrt{x}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=9 \text{ (thỏa mãn)}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{9\}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 10x - 10y \end{cases} \quad (I)$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 2(x^2 + y^2)(x - y) \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x^3 + 2y^3 = 2x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 2y^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 4y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+2y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Ta có $x^2 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ không là nghiệm của hệ.

Do đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(2;1)$ và $(-2;-1)$

Bài II (2,5 điểm).

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4 - 1) : 40$

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 2 và 5.

$\Rightarrow n$ chỉ có thể có dạng $10k \pm 1$ và $10k \pm 3$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

Do n lẻ nên $n - 1 : 2$; $n + 1 : 2$ và $n^2 + 1 : 2 \Rightarrow n^4 - 1 : 8$. (1)

• Nếu $n = 10k \pm 1 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow n^2 - 1 : 10 \Rightarrow n^4 - 1 : 5$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý $(5; 8) = 1$ suy ra $n^4 - 1 : 40$

• Nếu $n = 10k \pm 3 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 3)^2 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow n^2 + 1 : 10 \Rightarrow n^4 - 1 : 5$ (3)

Từ (1) và (3) chú ý $(5; 8) = 1$ suy ra $n^4 - 1 : 40$

Vậy trong mọi trường hợp ta có $n^4 - 1 : 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn
$$\begin{cases} p - 1 = 2x(x + 2) \\ p^2 - 1 = 2y(y + 2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow p - 1$ là số chẵn $\Rightarrow p$ là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được

$$p^2 - p = 2y^2 - 2x^2 + 4y - 4x \Leftrightarrow p(p - 1) = 2(y - x)(y + x + 2) (*)$$

$\Rightarrow 2(y - x)(y + x + 2) : p$. Mà $(2; p) = 1$ nên xảy ra 2 TH:

• $y - x : p \Rightarrow y - x = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó từ (*) $\Rightarrow p - 1 = 2k(x + y + 2) \Rightarrow kp - k = 2k^2(x + y + 2) \Rightarrow y - x - k = 2k^2(x + y + 2)$

(loại vì $x + y + 2 > y - x - k > 0$; $2k^2 > 1 \Rightarrow 2k^2(x + y + 2) > y - x - k$)

• $y + x + 2 : p \Rightarrow x + y + 2 = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Từ (*) $\Rightarrow p - 1 = 2k(y - x) \Rightarrow kp - k = 2k^2(y - x) \Rightarrow x + y + 2 - k = 2k^2(y - x) (**)$

Ta chứng minh $k = 1$. Thật vậy nếu $k \geq 2$ thì từ (**) $\Rightarrow x + y = 2k^2(y - x) + k - 2 \geq 8(y - x)$ (vì $y - x > 0$)

$$\Rightarrow 9x \geq 7y \Rightarrow 7y < 14x \Rightarrow y < 2x$$

Do đó từ (2) $\Rightarrow (p - 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p - 1)$

(vì $2x(x + 2) = p - 1$ theo (1))

$\Rightarrow p + 1 < 4 \Rightarrow p < 3$, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó $k = 1$, suy ra

$$\begin{cases} x + y + 2 = p \\ p - 1 = 2(y - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = p \\ x + y + 1 = 2(y - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = p \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ p - 1 = 4x + 2 \end{cases}$$

Thay $p - 1 = 4x + 2$ vào (1) ta có: $4x + 2 = 2x(x + 2) \Leftrightarrow 2x + 1 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow y = 4, p = 7$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 1, y = 4$ và $p = 7$.

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn
 $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$ (1)

Giả sử n là số nguyên dương sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$.

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 0 < y^3 + z^3 = x^2(ny^2z^2 - 1) \Rightarrow ny^2z^2 - 1 > 0 \Rightarrow ny^2z^2 - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow y^3 + z^3 = x^2(ny^2z^2 - 1) \geq x^2 (*)$$

$$\text{Vì } x \geq y \geq z \text{ nên } 3x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2 \Rightarrow ny^2z^2 \Rightarrow 9x^2 \geq n^2y^4z^4$$

$$\text{Kết hợp với (*) ta có } 9(y^3 + z^3) \geq 9x^2 \geq n^2y^4z^4 \Rightarrow 9\left(1 + \frac{z^3}{y^3}\right) \geq n^2yz^4$$

$$\text{Mà } y \geq z \Rightarrow \frac{z^3}{y^3} \leq 1 \Rightarrow n^2yz^4 \leq 9\left(1 + \frac{z^3}{y^3}\right) \leq 18 (**)$$

$$\text{Ta có: } (**) \Rightarrow z^4 \leq 18 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Nếu } z = 2 : (**) \Rightarrow 16n^2y \leq 18 \Rightarrow n = y = 1 \text{ (loại vì } y < z)$$

$$\bullet \text{ Nếu } z = 1 : (**) \Rightarrow n^2y \leq 18 \Rightarrow n^2 \leq 18 \Rightarrow n \leq 4$$

Ta chứng minh $n \notin \{2; 4\}$. Thật vậy,

*Nếu $n = 4$ thì từ $n^2y \leq 18 \Rightarrow 16y \leq 18 \Rightarrow y = 1$. Từ (1) $\Rightarrow x^3 + 2 = 4x^2 \Rightarrow x^2(4 - x) = 2 \Rightarrow x^2$ là ước của 2 $\Rightarrow$

$x = 1$ (không thỏa mãn)

*Nếu $n = 2$ thì từ $n^2y \leq 18$ suy ra $4y \leq 18 \Rightarrow 1 \leq y \leq 4$.

$$+ y = 1: (1) \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 2) = -2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x = 1(L)$$

+ $y = 2: (1) \Rightarrow x^3 - 8x^2 + 9 = 0 \Rightarrow 9 = x^2(8 - x)$. Suy ra x^2 là ước của 9. Mà $x^2 \geq y^2 = 4$ nên $x = 3$ (không thỏa mãn)

+ $y = 3: (1) \Rightarrow x^3 - 18x^2 + 28 = 0 \Rightarrow x^2(18 - x) = 28$. Suy ra x^2 là ước của 28. Mà $x^2 \geq y^2 = 9$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

+ $y = 4: (1) \Rightarrow x^3 - 32x^2 + 65 = 0 \Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy $n \notin \{2; 4\}$. Do đó $n \in \{1; 3\}$

Thử lại với $n = 1$, tồn tại bộ $(x; y; z)$ nguyên dương chẳng hạn $(x; y; z) = (3; 2; 1)$ thỏa mãn (1)

với $n = 3$, tồn tại bộ $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là $n \in \{1; 3\}$

Bài III (1,5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Chứng

$$\text{minh } ab + ac + bc \leq \frac{3}{4}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$(a+b) + (b+c) + (c+a) \geq 3\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3 \Rightarrow a+b+c \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ c+a \geq 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow 1 = (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8} \quad (3)$$

Biến đổi (1), chú ý 2 BĐT (2) và (3), ta được:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+c^2+ca) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+ca) + ac^2 + bc^2 = 1$$

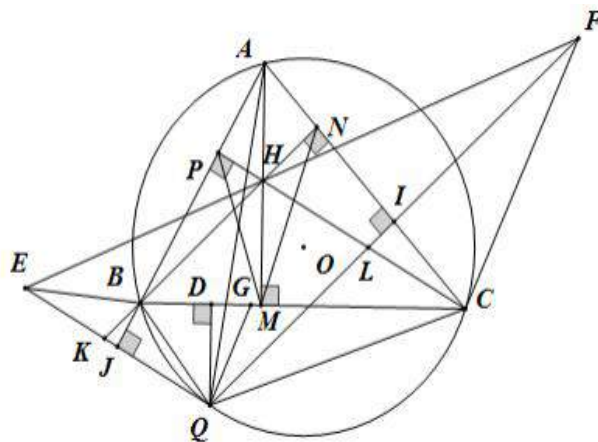
$$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca) - abc = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 1$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c} \leq \frac{1+\frac{1}{8}}{3} = \frac{3}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài IV (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Gọi E, F là điểm đối xứng của Q qua AB, AC.



1) CMR: $MH \cdot MA = MP \cdot MN$

1) Xét tứ giác ANMB có $\angle ANB = \angle AMB = 90^\circ$

nên nó là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle BAM = \angle BNM$

hay $\angle PAM = \angle HNM$ (1)

Xét tứ giác CNHM có $\angle HNC + \angle HMC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nó là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle NHM + \angle NCM = 180^\circ$ (2)

Tứ giác APMC có $\angle APC = \angle AMC = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle APM + \angle ACM = 180^\circ$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \angle NHM = \angle APM$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \triangle NHM \sim \triangle APM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{NM}{AM} = \frac{HM}{PM} \Rightarrow MH \cdot MA = MN \cdot MP$.

2) CMR : E, F, H thẳng hàng.

Gọi K là giao BH và QE, L là giao CH và QF.

Tứ giác AJQI có $\angle AIQ + \angle AJQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle JAI + \angle JQI = 180^\circ$

Mà $\angle JAI + \angle BQC = 180^\circ$ (do $ABQC$ là tứ giác nội tiếp) nên $\angle JQI = \angle BQC \Rightarrow \angle BQE = \angle CQF$ (5)

Vì E, F đối xứng với Q qua AB, AC nên $BQ = BE, CQ = CF \Rightarrow \triangle BEQ$ và $\triangle CQF$ cân

$\Rightarrow \angle CQF = \angle CFQ$ (6). Từ (5) và (6) suy ra $\angle CFL = \angle BQK$ (7)

Ta có $LH \parallel QK$ (cùng vuông góc AB); $KH \parallel QL$ (cùng vuông góc AC) nên $QKHL$ là hình bình hành $\Rightarrow \angle QKH = \angle QLH = \angle FLC$ hay $\angle QKB = \angle FLC$ (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \triangle QKB \sim \triangle FLC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{QK}{FL} = \frac{QB}{FC}$

Hai tam giác cân $\triangle BQE$ và $\triangle CFQ$ đồng dạng, nên $\frac{QB}{FC} = \frac{QE}{QF} \Rightarrow \frac{QK}{FL} = \frac{QE}{QF} \Rightarrow \frac{QK}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Mà $QK = LH$ (do $QKHL$ là hình bình hành) nên $\frac{LH}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Vì $LH' \parallel QE$ nên theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{LH'}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Do đó $LH = LH' \Rightarrow H' \equiv H \Rightarrow H \in EF \Rightarrow H, E, F$ thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB . Gọi I là giao điểm của QF và AC . Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Vẽ $QD \perp BC$ tại D . Trên cạnh BC lấy điểm G sao cho $\angle CQG = \angle BQA \Rightarrow \angle BQG = \angle CQA$

Vì $ABQC$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle BAQ = \angle GCQ \Rightarrow \triangle BAQ \sim \triangle GCQ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BA}{GC} = \frac{AQ}{CQ}$

Vì $\angle JAQ = \angle DCQ$; $\angle QJA = \angle QDC = 90^\circ \Rightarrow \triangle JAQ \sim \triangle DCQ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AQ}{CQ} = \frac{JQ}{DQ}$

Do đó $\frac{BA}{GC} = \frac{JQ}{DQ} \Rightarrow \frac{AB}{QJ} = \frac{GC}{DQ}$

Chúng minh tương tự ta có:

$$\frac{AC}{QI} = \frac{GB}{DQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI} = \frac{GC + GB}{DQ} = \frac{BC}{DQ}$$

Vì BC không đổi nên $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DQ$ lớn nhất $\Leftrightarrow Q$ là điểm chính giữa cung BC

nhỏ của đường

tròn (O) .

Bài V (1,0 điểm)

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < \left| a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \right| < \frac{1}{1000}$

Xét nửa khoảng $A = (0;1]$. Chia nửa khoảng này thành 1000 nửa khoảng

$$A_1 = \left(0; \frac{1}{1000}\right], A_2 = \left(\frac{1}{1000}; \frac{2}{1000}\right], \dots, A_n = \left(\frac{n-1}{1000}; \frac{n}{1000}\right], \dots, A_{1000} = \left(\frac{999}{1000}; 1\right]$$

Xét bộ số $x_1; x_2; \dots; x_{1001}$ với $x_k = \left[1 - k\sqrt{2}\right] + k\sqrt{2} (k \in \mathbb{N}^*, k \leq 1001)$

Với mọi k ta có $-k\sqrt{2} < \left[1 - k\sqrt{2}\right] \leq 1 - k\sqrt{2}$ (tính chất phần nguyên) nên

$$0 < \left[1 - k\sqrt{2}\right] + k\sqrt{2} \leq 1 \Rightarrow x_k \in A$$

$\Rightarrow x_k$ thuộc một trong các 1000 khoảng $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$

Có 1001 số x_k mà có 1000 nửa khoảng, do đó tồn tại 2 số x_i, x_j thuộc cùng một nửa khoảng

$$A_m \text{ nào đó } 0 \leq x_i - x_j < \frac{1}{1000}.$$

$$\text{Đặt } a = \left[1 - i\sqrt{2}\right] - \left[1 - j\sqrt{2}\right], b = i - j \Rightarrow x_i - x_j = a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}$$

Mà a là số nguyên, $b\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên $a + b\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow |x_i - x_j| > 0$

$$\text{Do đó } 0 < |x_i - x_j| < \frac{1}{1000} \Rightarrow 0 < |a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}| < \frac{1}{1000}$$

Vậy tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn đề bài.

ĐỀ 34

Câu I.

a) Phương trình (1) có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên là phương trình bậc hai ẩn x . Do đó Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + (m^2 + 5).6m > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m^3 + 30m > 0$$

$$\Leftrightarrow m(6m^2 + m + 30) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \underbrace{\left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4}\right]}_{>0 \forall m} > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 0$$

$$\text{Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: } x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5}$$

$$\text{Xét } m^2 + 5 - 2m = (m-1)^2 + 4 > 0. \text{ Mà } m > 0 \Rightarrow m^2 + 5 > 2m > 0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2m}{m^2 + 5} < 1 \Rightarrow 0 < x_1 + x_2 < 1$$

Vậy tổng hai nghiệm của (1) không thể là số nguyên.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 0$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5} \\ x_1 x_2 = \frac{-6m}{m^2 + 5} \end{cases}$$

Ta có:

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2 \\ x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \end{cases}$$

$$TH1: x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = 2 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}}; t \geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2 - t - 2 = 0$

Xét $\Delta = 1^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

$$TH2: x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = -2 \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}}; t \geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2 - t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)(3t-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = \frac{2}{3}(TM) \Rightarrow \frac{2m}{m^2 + 5} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 4m^2 - 18m + 20 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(4m-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(TM) \\ m = \frac{5}{2}(TM) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{ 2; \frac{5}{2} \right\}$

Câu II.

$$\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases} \quad (I)$$

ĐK: $x \geq 0, y \geq 0$

Đặt $a = x\sqrt{y}; b = y\sqrt{x}$, điều kiện $a \geq 0, b \geq 0$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} 2(1+a)^2 = 9b(1) \\ 2(1+b)^2 = 9a(2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$2(1+a)^2 - 2(1+b)^2 = 9(b-a)$$

$$\Leftrightarrow 2(a-b)(a+b+2) + 9(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\underbrace{2a+2b+13}_{>0 \forall a, b > 0}) = 0$$

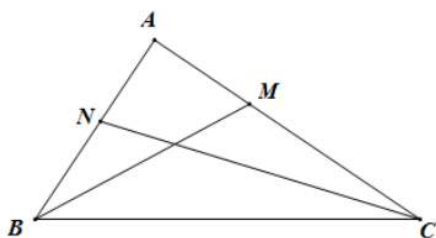
$$\Leftrightarrow a = b$$

Thay $a = b$ vào (1) ta có

$$2(1+a)^2 = 9a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 2(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = 2 \\ y\sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{4} \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = \frac{1}{2} \\ y\sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}); (\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \sqrt[3]{\frac{1}{4}})$

2)



Vì BM, CN lần lượt là phân giác góc ABC, ACB nên theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{MC + MA}{MA} = 1 + \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{NB}{NA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BN + NA}{NA} = 1 + \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} = \left(1 + \frac{BC}{AB}\right)\left(1 + \frac{BC}{AC}\right) = 1 + \frac{BC^2}{AB \cdot AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC}$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC và BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \geq 2AB.AC \Rightarrow \frac{BC^2}{AB.AC} \geq 2$$

$$\frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} \geq 2\sqrt{\frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC}} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(MA+MC)(NB+NA)}{MA.NA} \geq 1+2+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

Câu III.

a) Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \Rightarrow c(a+b) = ab(*)$

Giả sử $a+b$ là số nguyên tố, khi đó từ $(*) \Rightarrow ab : (a+b) \Rightarrow a : (a+b)$ hoặc $b : (a+b)$

Điều này mâu thuẫn do $0 < a < a+b, 0 < b < a+b$.

Vậy $a+b$ không thể là số nguyên tố.

b) Giả sử $a+c$ và $b+c$ đồng thời là số nguyên tố.

$$\text{Từ } c(a+b)=ab \Rightarrow ca+cb=ab \Rightarrow ca+ab=2ab-ab \Rightarrow a(b+c)=b(2a-c)$$

$$\Rightarrow a(b+c) : b(**)$$

Mà $b+c$ là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn $b+c$ nên $(b+c, b) = 1$

Do đó từ $(**)$ suy ra $a : b$.

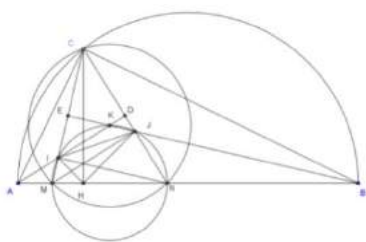
Chứng minh tương tự ta có $b(a+c) = a(2b-c) \Rightarrow b : a$

Vậy $a=b$. Từ $(*) \Rightarrow a=b=2c$

Do đó $a+c=b+c=3c$, không là số nguyên tố với $c > 1$ (mâu thuẫn với giả sử)

Vậy $a+c$ và $b+c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV.



a) Ta có: $\angle HCA = \angle ABC$ (cùng phụ với $\angle HCB$)

Vì CN là phân giác của góc HCB nên $\angle HCN = \angle BCN$

$$\text{Do đó } \angle CAN = \angle HCA + \angle HCN = \angle ABC + \angle BCN$$

Mặt khác, xét $\triangle BCN$ với góc ngoài $\angle ANC$ ta có: $\angle ANC = \angle ABC + \angle BCN$

Suy ra $\angle CAN = \angle ANC \Rightarrow \triangle ACN$ cân tại A $\Rightarrow AC = AN$.

Chứng minh tương tự ta có $BC = BM$.

b) Vì CM, CN lần lượt là phân giác của góc ACH và BCH nên

$$\angle MCN = \angle MCH + \angle NCH = \frac{1}{2} \angle ACH + \frac{1}{2} \angle BCH = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$$

Tam giác ACN cân tại A có AI là phân giác kẻ từ đỉnh A, nên cũng là trung trực của đáy CN.

$$\Rightarrow IC = IN.$$

$$\Rightarrow \Delta ICN \text{ cân tại I.}$$

Tam giác ICN cân tại I có $\angle ICN = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại I

$$\Rightarrow CI \perp IN$$

Chứng minh tương tự ta có $CJ \perp MJ$.

Tứ giác MIJN có $\angle MIN = \angle MJN = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, I, J, N cùng thuộc một đường tròn.

Vì $CH \perp MN$, $MJ \perp CN$, $NI \perp CM$ nên CH, MJ, NI đồng quy tại trực tâm của ΔCMN .

$$c) \text{ Đặt } AC = b; BC = a \Rightarrow a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2 (P_i - t_a - g_o)$$

Theo câu a, ta có $AN = AC = b$; $BM = BC = b$

$$\text{Do đó } a + b = AN + BM = BC + MN \Rightarrow MN = a + b - BC = a + b - 2R$$

Ta có:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 8R^2$$

$$\Leftrightarrow a + b \leq 2\sqrt{2}R \Rightarrow MN = a + b - 2R \leq 2R(\sqrt{2} - 1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Leftrightarrow CA = CB \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $CH \leq R$.

$$\text{Do đó } S_{CMN} = \frac{1}{2} CH \cdot MN \leq \frac{1}{2} R \cdot 2R(\sqrt{2} - 1) = R^2(\sqrt{2} - 1)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $2R(\sqrt{2} - 1)$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CMN là $R^2(\sqrt{2} - 1)$

đều xảy ra khi và chỉ khi C là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Câu V.

a) Gọi 5 số tự nhiên đã cho là a, b, c, d, e.

Do chúng đôi một phân biệt nên có thể giả sử $a < b < c < d < e$.

Theo giả thiết ta có $a + b + c > d + e \Rightarrow a + b + c \geq d + e + 1$

Suy ra $a \geq d + e + 1 - b - c$.

Vì b, c, d, e là số tự nhiên nên từ

$$d > c \Rightarrow d \geq c + 1; c > b \Rightarrow c \geq b + 1$$

$$\text{Suy ra } d \geq b + 2 \Rightarrow d - b \geq 2$$

$$e > d \Rightarrow e \geq d + 1 \Rightarrow e \geq c + 2 \Rightarrow e - c \geq 2$$

Do đó $a \geq (d - b) + (e - c) + 1 \geq 5$. Suy ra b, c, d, e > 5

Vậy tất cả các số đều không nhỏ hơn 5.

- b) Nếu $a \geq 6 \Rightarrow b \geq a + 1 \geq 7$. Tương tự $c \geq 8, d \geq 9, e \geq 10 \Rightarrow a + b + c + d + e \geq 40$ (mâu thuẫn)

Suy ra $a < 6$. Mà theo câu a ta có $a \geq 5 \Rightarrow a = 5$.

Ta có $5 + b + c \geq d + e + 1 \Rightarrow b + c \geq d + e - 4$.

Mà $d - 2 \geq b, e - 2 \geq c \Rightarrow d + e - 4 \geq b + c$.

Do đó

$$\begin{cases} b = d - 2 \\ c = e - 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d + e = 5 + 2b + 2c + 4 < 40$$

$$\Rightarrow b + c < \frac{31}{2} \Rightarrow b + (b + 1) \leq b + c < \frac{31}{2} \Rightarrow b \leq 7$$

Suy ra $b = 6$ hoặc $b = 7$

Nếu $b = 6$ thì $d = b + 2 = 8$. Vì $b < c < d$ nên $c = 7 \Rightarrow e = c + 2 = 9$.

Nếu $b = 7$ thì $d = b + 2 = 9$. Vì $b < c < d$ nên $c = 8 \Rightarrow e = c + 2 = 10$.

có hai bộ thỏa mãn đề bài là $(5; 6; 7; 8; 9)$ và $(5; 7; 8; 9; 10)$.

ĐỀ 35

Câu 1:

1/Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa, rút gọn C .

$$\text{+Biểu thức } C \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} a \geq 0 \\ a - 16 \neq 0 \\ \sqrt{a} - 4 \neq 0 \\ \sqrt{a} + 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 16 \\ a \neq 16 \\ \forall a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0, a \neq 16 \quad (0, 25d)$$

+Rút gọn biểu thức C

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a - 2(\sqrt{a}+4) - 2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} \\ &= \frac{a - 2\sqrt{a} - 8 - 2\sqrt{a} + 8}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} \\ &= \frac{a - 4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} \quad (1, 25d) \end{aligned}$$

2/ Tìm giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$

Ta có: $a = 9 + 4\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = (2 + \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 + \sqrt{5}$

$$\text{Vậy } C = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 4} = \frac{2 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5} + 4} = \frac{2 + \sqrt{5}}{6 + \sqrt{5}} \quad (0,5đ)$$

Câu 2:

1/Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

Khi $m = 2$ thay vào ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (2-1)x + y = 2 \\ 2x + y = 2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (0,75đ)$$

Kết luận: Với $m = 2$ hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (0,25đ)$

2/ Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $2x + y \leq 3$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ mx + 2 - (m-1)x = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ mx + 2 - mx + x = m+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ x = m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)(m-1) \\ x = m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -m^2 + 2m + 1 \\ x = m-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} y = -m^2 + 2m + 1 \\ x = m-1 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

Ta có:

$$2x + y - 3 = 2(m-1) - m^2 + 2m + 1 - 3 = -m^2 + 4m - 4 = -(m-2)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y \leq 3 \quad (0,5đ)$$

Câu 3:

1/ Hoàn thiện độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình:

$$2x^2 = mx - m + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - mx + m - 2 = 0(1)$$

$$\Delta = m^2 - 4.2(m-2) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2$$

Để đường thẳng (d): $y = mx - m + 2$ cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-4)^2 > 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m-2}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > 0 \Rightarrow m > 2, m \neq 4 \\ m > 2 \end{cases}$$

Kết luận: Để đường thẳng (d): $y = mx - m + 2$ cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung thì: $m > 2, m \neq 4$ (1đ)

2/Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4 - x - 2y(1) \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2(2) \end{cases}$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} x+2y \geq 0 \\ 2y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Đặt $\sqrt{x+2y} = t \geq 0$, thay vào phương trình (1) ta có:

$$3t = 4 - t^2 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$$

$1 + 3 - 4 = 0$, nên phương trình có hai nghiệm $t = 1$ và $t = -4$ (loại)

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2y} = 1 \Rightarrow x+2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y$ thay vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt[3]{2(1-2y)+6} + \sqrt{2y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-4y+8} + \sqrt{2y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-4y+8} = 2 - \sqrt{2y}$$

$$\Leftrightarrow -4 + 8 = 8 - 12\sqrt{2y} + 12y - 2y\sqrt{2y}$$

$$\Leftrightarrow 16y - 12\sqrt{2y} - 2y\sqrt{2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8y - 6\sqrt{2y} - y\sqrt{y} = 0$$

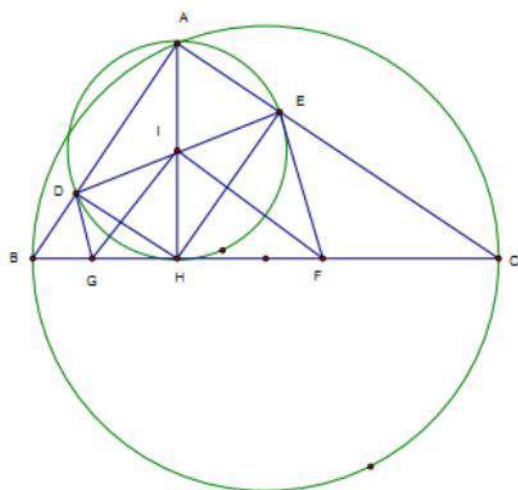
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(-\sqrt{2y} + 8\sqrt{y} - 6\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{2})(\sqrt{2}\sqrt{y} - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1(TM(*)) \\ \sqrt{y} = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -3(TM(*)) \\ \sqrt{y} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = 18 \Rightarrow x = -35(TM(*)) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm $(x;y) = (1;0); (-3;2); (-35;18)$ (1đ)

Câu 4:



1. Chứng minh $DHE=90^\circ$

Tứ giác ADHE có: $A = D = E \Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DHE=90^\circ$

Chứng minh: $AB \cdot AD = AC \cdot AE$

Xét hai tam giác vuông HAB và HAC ta có: $AB \cdot AD = AH^2 = AC \cdot AE$ (1 đ)

2/ Tính góc GIF

$DHE=90^\circ \Rightarrow DE$ là đường kính $\Rightarrow I$ thuộc DE

$$\Rightarrow \angle GIF = \frac{1}{2} \angle DIH + \frac{1}{2} \angle HIE = \frac{1}{2} \angle DIE = 90^\circ \quad (1 \text{ đ})$$

3/ Tứ giác DEFG là hình thang vuông có đường cao $DE = AH$

Hai đáy $DG = GH = GB = \frac{1}{2} BH$ và $EF = FC = FH = \frac{1}{2} HC$

$\Rightarrow$ Diện tích tứ giác DEFG là

$$\frac{\frac{1}{2}(HB + HC) \cdot AH}{2} = \frac{BC \cdot AH}{4} \text{ Lớn nhất khi } AH \text{ lớn nhất vì } BC = 2R \text{ không đổi}$$

Ta có: AH lớn nhất $\Rightarrow AH$ là đường kính $\Rightarrow A$ là trung điểm cung BC (1.0 đ)

Câu 5:

Theo Bunhia:

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow x + y + z \leq \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{xyz(\sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)} = \frac{xyz(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(xy + yz + zx)}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{xyz(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} \sqrt{x^2 y^2 z^2} \sqrt{x^2 y^2 z^2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3\sqrt{3}} \text{ khi } x = y = z \quad (1 \text{ đ})$$

ĐỀ 36**Câu 1:**

1.1

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \quad (0,25d) \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \quad (0,25d) \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - x + 1 - x + 9}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \quad (0,25d) \\
 &= \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \quad (0,25d)
 \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}
 x &= 2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} + 1)^2 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)} \\
 \Rightarrow \sqrt{x} &= \sqrt{2} + 1 \quad (0,5d) \\
 \Rightarrow P &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Câu 2:

2.1

Ta có: $\Delta = (m - 2014)^2 + 4 \cdot 2013 \cdot 2015 > 0$ với mọi m . Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . (0.25 đ)

Theo hệ thức Vi – et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m - 2014}{2013} \\ x_1 x_2 = \frac{-2015}{2013} \end{cases}$$

Từ $\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2$ (0,25đ)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} 2014 = (\sqrt{x_1^2 + 2014} + x_1)(\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2) \\ 2014 = (\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1)(\sqrt{x_2^2 + 2014} - x_2) \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2014 = (\sqrt{(x_1^2 + 2014)(x_2^2 + 2014)} + x_2\sqrt{x_1^2 + 2014} + x_1\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_1x_2) \\ 2014 = (\sqrt{(x_1^2 + 2014)(x_2^2 + 2014)} - x_2\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_1x_2) \end{cases} \\
&\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + 2014}(x_1 + x_2) + \sqrt{x_2^2 + 2014}(x_1 + x_2) = 0 \\
&\Rightarrow (x_1 + x_2)(\sqrt{x_1^2 + 2014} + \sqrt{x_2^2 + 2014}) = 0 \quad (0,25 \text{ đ}) \\
&\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{m - 2014}{2013} = 0 \\
&\Rightarrow m = 2014
\end{aligned}$$

Vậy $m=2014$ là giá trị thỏa mãn đề bài. (0.25 đ)

2.2 Giải phương trình: $\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+2)^2} = 3 (*)$

Đk : $x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}$. Đặt $2x+1=t$

$$PT(*) \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)^2 + \frac{2}{t(t+1)} - 3 = 0 \quad (0,25d)$$

Đặt $y = \frac{1}{t(t+1)}$ ta có pt:

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad (0,25d)$$

Với $y=1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{t(t+1)} = 1 \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3+\sqrt{5}}{4} \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \end{cases} (TM) \quad (0,25d)$$

Với $y=-3 \Rightarrow \frac{1}{t(t+1)} = -3 \Rightarrow t^2 + t + \frac{1}{3} = 0 (VN)$

Vậy pt có hai nghiệm $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \quad (0,25đ)$

Câu 3 :

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - 2xy + y^2) = 5 \quad (0, 25d)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 = 5$$

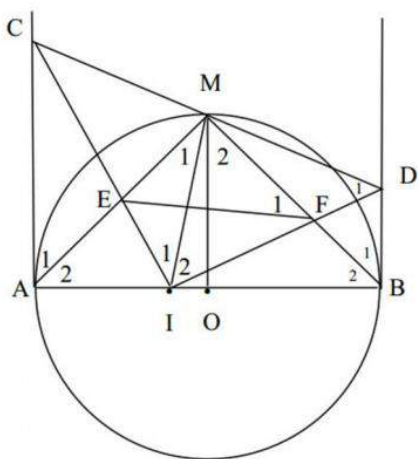
Do $(x-y)^2 \geq 0$ và x, y thuộc $\mathbb{Z}$ nên xảy ra hai trường hợp:

$$\text{Th1: } \begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{cases} \quad (0, 25d)$$

$$\text{Th2: } \begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases} \quad (L) \quad (0, 25d)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x; y) \in \{(3; 2); (2; 3)\}$

Câu 4 :



4.1 CM: Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp:

C/m được các tứ giác ACMI BDMI nội tiếp (đ)

$$\text{Do đó: } \begin{cases} I_1 = A_1 \\ I_2 = B_1 \end{cases} \Rightarrow I_1 + I_2 = A_1 + B_1 \quad \text{Mà } A_2 + B_2 = 90^\circ \quad \text{Và } A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 180^\circ \Rightarrow I_1 + I_2 = 90^\circ$$

(0,25đ)

$$\Rightarrow \angle EIF = \angle EMF = 90^\circ \quad \text{Tứ giác MEIF nội tiếp được. (0.25 đ)}$$

4.2

CM: $EF \parallel AB$:

Tứ giác MEIF nội tiếp (câu 1) $\Rightarrow I_1 = F_1$

Tứ giác ACMI nội tiếp (câu 1) $\Rightarrow I_1 = A_1 \quad (0,5đ)$

Trong (O) $B_2 = A_1$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM) (0,25đ)

Do đó $\Rightarrow B_2 = F_1$, mà chúng ở vị trí đồng vị $\Rightarrow EF \parallel AB$. (0.25 đ)

4.3

CM: OM là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp các tam giác: CEM, DFM

Ta có $OA = OM \Rightarrow M_1 = A_2$ Mà $C_1 = A_2$ (cùng chắn cung IM) $\Rightarrow C_1 = M_1 \Rightarrow OM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME (1). (0.5 đ)

Lại có: $OM = OB \Rightarrow M_2 = B_2$ mà $D_1 = B_2$ (cùng chắn cung IM) $\Rightarrow D_1 = M_2 \Rightarrow OM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF (2). (0.5 đ)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ĐPCM

Câu 5:

Đặt $a = \sqrt{x^2 + y^2}; b = \sqrt{y^2 + z^2}; c = \sqrt{z^2 + x^2}$ (*) $\Rightarrow a + b + c = 2014$ (1)

Từ (*) $\Rightarrow x^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}; y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}; z^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}$

Áp dụng BĐT Cau chy ta có:

$$y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)} = b\sqrt{2}$$

$$z + x \leq \sqrt{2(z^2 + x^2)} = c\sqrt{2} \quad (0,25đ)$$

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = a\sqrt{2}$$

Từ đó ta có:

$$T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a} \right)$$

$$T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} - a - b - c \right) \quad (0,25d)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta lại có:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a; \frac{c^2}{b} + b \geq 2c; \frac{a^2}{c} + c \geq 2a; \frac{b^2}{c} + c \geq 2b; \frac{b^2}{a} + a \geq 2b; \frac{c^2}{a} + a \geq 2c \quad (0,25d)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} \geq 4(a+b+c) - 2(a+b+c) = 2(a+b+c) \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} (a+b+c) \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4)} \Rightarrow T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2014.$$

$$\text{Vậy } T_{\min} = \frac{2014}{2\sqrt{2}} \text{ khi } x=y=z = \frac{2014}{3\sqrt{2}}$$

ĐỀ 37

Câu 1

$$a) x\sqrt{2x-3} = 3x-4 \text{ (ĐKXĐ: } x \geq 3/2)$$

$$\Leftrightarrow x^2(2x-3) = (3x-4)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2(TM)$$

$$\text{Vậy } S = \{2\}$$

b) Ta có

$$x + y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+z)^2 = (-x)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$$

Tương tự:

$$z^2 + x^2 - y^2 = -2zx$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -2yx$$

$$P = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2zx} + \frac{z^2}{-2yx} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-2xyz}$$

Mà

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + z^3$$

$$= (-z)^3 - 3xy(x+y) + z^3 = 3xy$$

$$\Rightarrow P = \frac{3xyz}{-2xyz} = \frac{-3}{2}$$

Câu 2

$$\text{ĐKXĐ: } x, y \neq 0$$

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\frac{1}{y} + \frac{4}{x} = \frac{9}{x} - \frac{4y}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4y}{x^2} - \frac{5}{x} + \frac{1}{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4y)(x - y) = 0$$

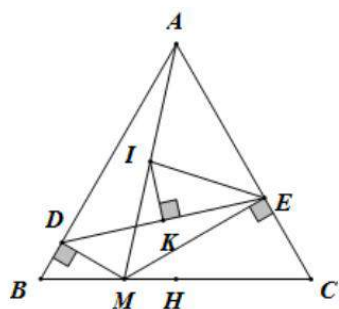
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 4y \end{cases}$$

Với $x = y$, thế vào (1) có $2x - \frac{8}{x} = 0 \Leftrightarrow x = y = \pm 2$

Với $x = 4y$, thế vào (1) có $5y - \frac{5}{4y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 2$

$$\text{Vậy } S = \left\{ (2; 2); (-2; -2); \left(2; \frac{1}{2}\right); \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

Câu 3:



$$\begin{aligned} C_{MDE} &= MD + ME + DE = (BM + CM) \sin 60^\circ + DE \\ &= BC \cdot \sin 60^\circ + DE \end{aligned}$$

Mà $BC \cdot \sin 60^\circ$ không đổi nên chi vi tam giác MDE nhỏ nhất $\Leftrightarrow DE$ nhỏ nhất

Tứ giác ADME nội tiếp đường tròn đường kính AM ($\angle ADM = \angle AEM = 90^\circ$) nên tam giác ADE cũng nội tiếp đường tròn đường kính AM, tâm I là trung điểm AM.

Gọi K là trung điểm DE, suy ra $IK \perp DE$ và $\angle EIK = \angle BAC (= \frac{\angle DIE}{2})$

Gọi R là bán kính đường tròn tâm I đường kính AM thì

$$\sin \angle KIE = \frac{KE}{IE} = \frac{0,5DE}{R} = \frac{DE}{2R} = \frac{DE}{AM}$$

$$\Rightarrow DE = AM \cdot \sin \angle BAC = AM \cdot \sin 60^\circ$$

Vì $\sin 60^\circ$ không đổi nên DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv H$ (H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC, mà tam giác ABC đều nên H là trung điểm BC).

Vậy khi M là trung điểm BC thì chu vi tam giác MDE nhỏ nhất.

Câu 4

$$a) \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (x \neq 0; y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 + y^4 - x^3y - xy^3}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(x^3 - y^3)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2 + xy + y^2)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right]}{x^2y^2} \geq 0$$

(luôn đúng $\forall x, y \neq 0$)

b) Tìm minP (a, b > 0)

$$P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$= \frac{(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(a+b)^2 + ab + \frac{3}{4}(a+b)^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)} + \frac{\frac{3}{4}(a+b)}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 \cdot ab}}{\sqrt{ab}(a+b)} + \frac{\frac{3}{4}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

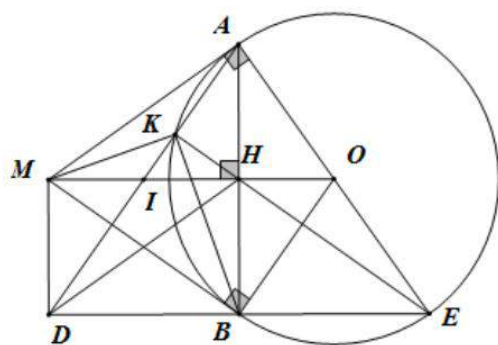
$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}(a+b)^2 = ab \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b$$

*Cách khác

$$P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right) \geq \frac{3}{4} \cdot 2 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$$

Câu 5


$$\Rightarrow \text{DH} // \text{AM} \quad (1)$$
$$\Rightarrow \text{HM} \perp \text{MD} \Rightarrow \text{DM} \parallel \text{AH} \quad (2)$$

$\Rightarrow$ AD đi qua trung điểm I của HM

$\Rightarrow K'$ là giao của AI với (O)

$$\Rightarrow K' \equiv K$$
$$\Rightarrow \text{HK} \perp \text{AI}$$

b) Ta có $IAM = ABK$ (cùng chắn cùng AK)

AMI= OBA (OAMB nội tiếp)

Nên

$$\text{IAM} + \text{AMI} = \text{ABK} + \text{OBA}$$
 $\Leftrightarrow \text{AIH} = \text{OBK}$

Mặt khác

$$AIH+KHI=90^{\circ}$$
$$\text{OBK} + \text{KBM} = 90^\circ$$
$$\Rightarrow KHI = KBM$$

$\Rightarrow$ Tứ giác HKMB nội tiếp

$$\Rightarrow \angle BKM = \angle BHM = 90^\circ$$

Câu 6

$$2015(x^2 + y^2) - 2014(2xy + 1) = 25$$

$$\Leftrightarrow 2014(x-y)^2 + x^2 + y^2 = 2039$$

Đặt $t=|x-y|$, $t \in N$ do x, y nguyên

Xét các trường hợp:

TH1: $t = 0$, tức $x = y \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

TH2: $t = 1$, tức là $x - y = \pm 1$

+ Với $x - y = 1$ hay $x = y + 1$, phương trình trở thành:

$$(y+1)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Với $y = 3$ thì $x = 4$; với $y = -4$ thì $x = -3$

+ Với $x - y = -1$ hay $x = y - 1$, phương trình trở thành:

$$(y-1)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Với $y = -3$ thì $x = -4$; với $y = 4$ thì $x = 3$

TH3: $t \geq 2$, VT > VP $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Vậy các cặp $(x;y)$ thỏa là $(4;3)$, $(-3;-4)$, $(-4;-3)$, $(3;4)$

Cách khác: Sử dụng phương pháp biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bình phương. Vế phải là tổng của các số chính phương, hoặc cách điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai cũng có thể giải ra đáp số.

ĐỀ 38

Bài 1.

$$a) \sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - x - 2 \quad \left(\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{10}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-6} - 2 + \sqrt{10-3x} - 2 = 2x^2 - x - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3(x-2)}{\sqrt{10-3x}+2} - (x-2)(2x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x-3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(TM) \\ \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x-3 = 0(*) \end{cases}$$

Vì

$$\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{10}{5} \Rightarrow \sqrt{5x-6} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - 3 < 0$$

$$\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{10}{5} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x < 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x-3 < 0 \Rightarrow (*)VN$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{2\}$

$$2) \begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 96y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 48.2y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 2y(x^2 + 32y^2) (*) \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + 8xy^2 - 64y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (4y)^3 - 2xy(x - 4y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4y)(x^2 + 2xy + 16y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x^2 + 2xy + 16y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ (x + y)^2 + 15y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Vì $x = y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên $x = 4y$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 16y^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(4;1), (-4;-1)$

Bài 2.

1) Phương trình $x^2 - 2x - 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$

Ta có:

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 2^3 - 3.(-4).2 = 32$$

Và

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2.(-4) = 12$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 12^2 - 2.(-4)^2 = 112$$

Khi đó:

$$(x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_2^4) = x_1^7 + x_2^7 + x_1^3x_2^4 + x_1^4x_2^3$$

$$\Rightarrow S = x_1^7 + x_2^7 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_2^4) - (x_1x_2)^3(x_1 + x_2)$$

$$= 32.112 - (-4)^3.2 = 3712$$

Vậy $S = 3712$.

2) Ta có

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2 + ab - cd$$

$$\Leftrightarrow ab - cd = (a+b)^2 - (c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d) (*)$$

Nếu $ab - cd = 0$: Do $a+b+c+d > 0 \Rightarrow a+b-c-d=0 \Rightarrow a+b+c+d=2(c+d)$ là hợp số do $c+d \in \mathbb{N}^*$ và $c+d > 1$

Nếu $ab - cd \neq 0$: Từ (*) $\Rightarrow ab - cd : (a+b+c+d)$.

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 \Rightarrow 3(ab - cd) + (a^2 - 2ab + b^2) = c^2 - 2cd + d^2$$

$$\Rightarrow 3(ab - cd) = (c-d)^2 - (a-b)^2 = (c-d+a-b)(c-d-a+b) \neq 0$$

$$\Rightarrow (c-d+a-b)(c-d-a+b) : (a+b+c+d)$$

Giả sử $a+b+c+d$ là số nguyên tố thì ta có

$$c-d+a-b : a+b+c+d \text{ hoặc } c-d-a+b : a+b+c+d$$

Điều này mâu thuẫn do $-(a+b+c+d) < c-d+a-b < a+b+c+d$;

$$-(a+b+c+d) < c-d-a+b < a+b+c+d \text{ và } (c-d+a-b)(c-d-a+b) \neq 0$$

Vậy $a+b+c+d$ là hợp số.

Bài 3.

Thay $1 = a+b+c$ ta có:

$$A+bc = a(a+b+c)+bc = (a+b)(a+c)$$

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc} = \frac{a+bc-2bc}{a+bc} = 1 - \frac{2bc}{a+bc} = 1 - \frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$

Ta có 2 đẳng thức tương tự

$$\frac{b-ca}{b+ca} = 1 - \frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$$

$$\frac{c-ab}{c+ab} = 1 - \frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

Cộng từng vế của 3 đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} = 3 - 2 \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right]$$

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right] \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2) \geq 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc)$$

$$\Leftrightarrow b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 \geq 6abc (*)$$

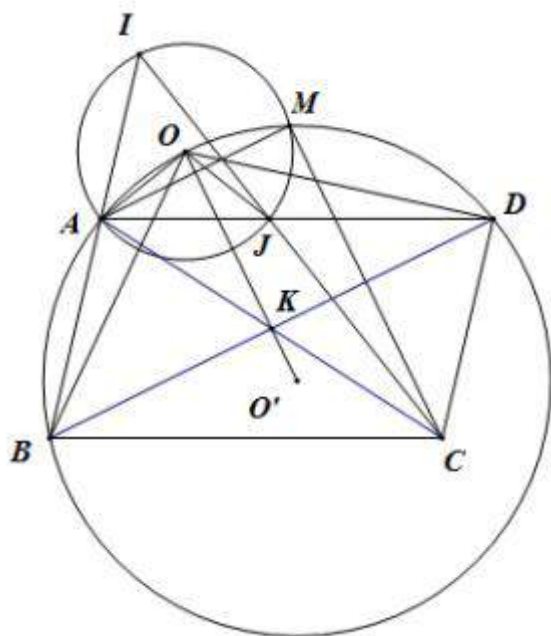
Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có:

$$\begin{cases} b^2c + c^2a + a^2b \geq 3abc \\ bc^2 + ca^2 + ab^2 \geq 3abc \end{cases} \Rightarrow (*) \text{ đúng}$$

Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 4.



1) Vì $AI \parallel DC$ (do $ABCD$ là hình bình hành) nên $AIJ = DCJ$ (so le trong)

Vì $AJ \parallel BC$ nên $AJI = BCJ$ (đồng vị)

Mà CJ là phân giác góc BCD nên $DCJ = BCJ \Rightarrow AIJ = AJI \Rightarrow \Delta AIJ$ cân ở A

Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAIJ cân nên AO là trung trực IJ đồng thời là phân giác góc IAJ .

2) Vì $JD \parallel BC$ nên $DJC = JCB = JCD \Rightarrow \Delta JDC$ cân tại D

Suy ra $JD = DC = AB$ (do $ABCD$ là hình bình hành)

Ta có $OA = OJ$ (bằng bán kính (O))

Xét ΔOAJ với góc ngoài OJD có:

$$OJD = AOJ + OAJ = 2AIJ + OAJ = 2DCJ + OAJ = DCB + OAJ = DAB + OAJ = OAB$$

Xét ΔOAB và ΔOJD có:

$$\begin{cases} OA = OJ (cmt) \\ OAB = OJD (cmt) \Rightarrow \Delta OAB = \Delta OJD (c.g.c) \\ AB = JD (cmt) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OBA = ODJ$$

⇒ AODB là tứ giác nội tiếp

⇒ A, O, D, B cùng thuộc một đường tròn.

3) Vì $\triangle OAB = \triangle OJD$ nên $OB = OD$. Mà $O'B = O'D$ (bằng bán kính (O')) nên OO' là trung trực của BD .

Gọi K là giao BD và AC ⇒ K là trung điểm BD và AC .

⇒ $K \in OO'$

Vì $OA = OM$, $O'A = O'M$ nên OO' là trung trực của AM

Mà $K \in OO' \Rightarrow KA = KM = KC$

⇒ M thuộc đường tròn tâm K bán kính KA , hay đường tròn đường kính AC .

Vậy khi B, D thay đổi, M luôn nằm trên đường tròn đường kính AC .

Bài 5.

Xét 20 số đầu tiên. Trong 20 số này có 2 số chia hết cho 10, chúng có chữ số hàng đơn vị là 0.

Mặt khác, trong 2 số đó có một số có chữ số hàng chục khác 9.

Gọi số đó là N . Xét dãy 11 số thuộc 39 số đã cho:

$$N, N + 1, \dots, N + 9, N + 19$$

Tổng các chữ số của các số này tương ứng là.

$$s, s + 1, s + 2, \dots, s + 9, s + 10$$

Thật vậy, nếu N có tổng chữ số là s thì mỗi số $N + i$ với $1 \leq i \leq 9$ có tất cả các chữ số (trừ hàng đơn vị) giống số N và chữ số hàng đơn vị của $N + i$ là i , do đó tổng chữ số của $N + i$ là $s + i$.

Số $N + 19$ có chữ số hàng đơn vị là 9, chữ số hàng chục hơn chữ số hàng chục của số N là 1, còn lại tất cả các chữ số ở hàng khác của hai số bằng nhau, do đó tổng chữ số của $N + 19$ là $s + 10$.

Trong 11 số liên tiếp $s, s + 1, s + 2, \dots, s + 9, s + 10$ có một số chia hết cho 11.

Bài toán được chứng minh.

ĐỀ 39

Bài 1.

1. Với $x > 0$, $x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2(2\sqrt{x}+1)+3(\sqrt{x}-2)-(5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5x-10\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} \\
 &= \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ Vì } x > 0 \Rightarrow 5\sqrt{x} > 0; 2\sqrt{x}+1 > 0 \Rightarrow A > 0$$

$$\text{Mặt khác, xét } A-3 = \frac{5\sqrt{x}-3(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+1} = \frac{-\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+1} < 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow A < 3$$

$$\text{Vậy } 0 < A < 3$$

Do đó A nguyên $\Leftrightarrow A = 1$ hoặc $A = 2$.

$$A=1 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$A=2 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2(2\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$$

Bài 2.

$$1. \text{ Khi } m = -5 \Rightarrow (d) : y = -4x + 12$$

Khi đó, phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = -4x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \text{ hoặc } x = 2$$

$$\text{Khi } x = -6 \Rightarrow y = 36$$

$$\text{Khi } x = 2 \Rightarrow y = 4$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(-6; 36)$ và $(2; 4)$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = 2(m+3)x - 2m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + 2m - 2 = 0 \quad (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+3)^2 - (2m-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 6m + 9) - (2m - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 3 > 0$$

(luôn đúng $\forall m$)

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Hai giao điểm có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+3) > 0 \\ x_1 x_2 = 2m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy $m > 1$.

3. Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (d) luôn đi qua $\forall m$

Khi đó:

$$y_0 = 2(m+3)x_0 - 2m + 2 (\forall m)$$

$$\Leftrightarrow m(2x_0 - 2) + (6x_0 + 2 - y_0) = 0 (\forall m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2 = 0 \\ 6x_0 + 2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ 6.1 + 2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 8 \end{cases}$$

Vậy (d) luôn đi qua điểm $(1; 8) \forall m$.

Bài 3.

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 & (1) \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y) - 5(2x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y - 5) = 0$$

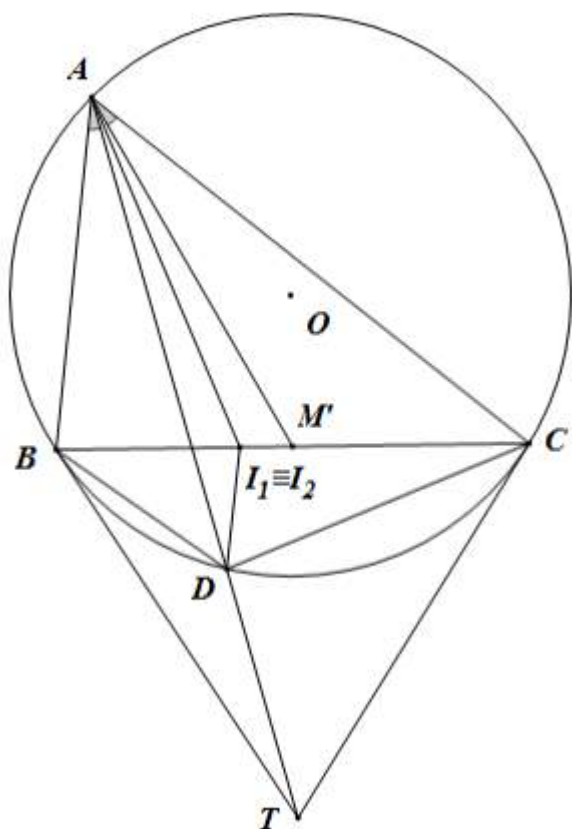
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 5 - 2y \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 2x.2x - 3(2x)^2 + 15 = 0 \end{cases} \quad (II) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = 5 - 2y \\ (5 - 2y)^2 - 2(5 - 2y)y - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases} \quad (III)$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -15x^2 + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -1; y = -2 \end{cases}$$

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 5y^2 - 30y + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2; x = 1 \\ y = 4; x = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(-3; 4)$

Bài 4.

1. Vì TB là tiếp tuyến của (O) nên

$\angle BAD = \angle DBT$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cùng BD)

Xét $\triangle ABT$ và $\triangle BDT$ có:

$$\begin{cases} \angle ATB (\text{chung}) \\ \angle DBT = \angle BAT (\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow \triangle ABT \sim \triangle BDT (g.g)$$

$$2. \text{ Vì } \triangle ABT \sim \triangle BDT \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AT}{BT} = \frac{BT}{DT} \Rightarrow \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \frac{AT}{BT} \cdot \frac{BT}{DT} = \frac{AT}{DT}$$

Chúng minh tương tự ta có:

$$\left(\frac{AC}{CD}\right)^2 = \frac{AT}{DT}$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{AC}{CD}\right)^2 \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = BD \cdot AC$$

3. Gọi I_1, I_2 lần lượt là giao điểm của BC với tia phân giác góc BAC và góc BDC.

Xét $\triangle ABC$ có tia phân giác AI_1 , theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{AB}{AC}$$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{I_2B}{I_2C} = \frac{DB}{DC}$

Theo câu 2) ta có $AB.CD = BD.AC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{I_1B}{I_1C} = \frac{I_2B}{I_2C}$

Mà I_1, I_2 cùng thuộc đoạn BC nên chúng chia trong đoạn BC theo các tỉ số bằng nhau.

$\Rightarrow I_1 \equiv I_2$

$\Rightarrow$ Đường phân giác góc BAC , đường phân giác góc BDC và đường thẳng BC đồng quy.

4. Gọi M' là điểm thuộc đoạn BC sao cho $CAM' = BAD$. Ta chứng minh $M' \equiv M$.

Vì $CAM' = BAD \Rightarrow BAM' = CAD$

Vì $ABDC$ là tứ giác nội tiếp nên $ADB = ACM'$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà $CAM' = BAD \Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ACM'$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{CM'} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow BD.AC = AD.CM'$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $AB.CD = AD.BM'$ (2)

Từ (1) và (2) với chú ý $BD.AC = AB.CD \Rightarrow AD.CM' = AD.BM' \Rightarrow CM' = BM'$

$\Rightarrow M' \equiv M$

$\Rightarrow BAD = MAC$

Bài 5. Với mọi $a, b, c > 0$, ta có:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 (*)$$

Với mọi $a, b, c > 0$, áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương, ta có:

$$\begin{cases} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} > 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} (**)$$

Áp dụng BĐT (*) với $a = x, b = y, c = z$ và từ điều kiện của x, y, z ta có:

$$18 \geq x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} + x + y + z$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2 + 3(x+y+z) - 54 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+y+z+9)(x+y+z-6) \leq 0$$

$$\Rightarrow x+y+z \leq 6 \text{ (do } x+y+z+9 > 0 \text{)} (***)$$

Áp dụng BĐT (**) với $a = x+y+1, b = y+z+1, c = z+x+1$, ta có:

$$B = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \geq \frac{9}{x+y+1+y+z+1+z+x+1} = \frac{9}{2(x+y+z)+3}$$

Áp dụng (***) ta có: $B \geq \frac{9}{2.6+3} = \frac{3}{5}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + 1 = y + z + 1 = z + x + 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{3}{5}$, xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

ĐỀ 40

Câu I. (1, 5 điểm)

Giải:

1) GPT khi $m = 1$

+ Thay $m = 1$ vào (1) ta được $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \{-4; 2\}$

KL : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 4$ hoặc $x = 2$

2) xét PT (1) : $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (1), với ẩn x , tham số m .

+ Xét PT (1) có $\Delta'_{(1)} = m^2 + 2m + 6 = (m+1)^2 + 5 > 0$ (luôn đúng) với mọi $m \Rightarrow$ PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m

+ Mặt khác áp dụng hệ thức Viète vào PT (1) ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -(2m + 6) \end{cases} \quad (I)$

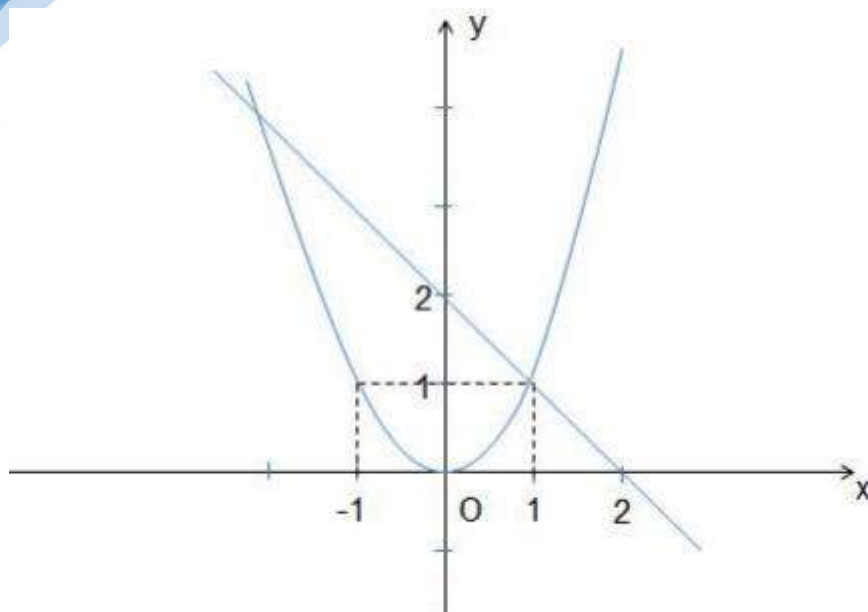
+ Lại theo đề và (I) có : $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-2m)^2 + 2(2m + 6) = 4m^2 + 4m + 12$

$= (2m + 1)^2 + 11 \geq 11$ với mọi $m \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của A là 11 khi $m = -\frac{1}{2}$

KL : $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu II. (1,5 điểm)

Giải : 1) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị hàm số:



Dựa vào đồ thị ta có giao điểm của d và (P) là 2 điểm M (1 ; 1); N (-2 ; 4)

2) Do đồ thị Δ của hàm số $y = ax + b$ song song với (d) $y = -x + 2$

Nên ta có: $a = -1$.

Δ cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 nên ta thay $x = -1$ vào pt (P) ta được: $y = 1$

Thay $x = -1$; $y = 1$ vào pt Δ ta được $a = -1$; $b = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình của Δ là $y = -x$

Câu III .(2,0 điểm)

Giải:

1) Đổi 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ

Gọi x (km /h) là vận tốc người đi xe đạp từ A $\rightarrow$ B ($x > 0$) .

Vận tốc người đó đi từ B $\rightarrow$ A là: $x + 4$ (km/h)

Thời gian người đó đi từ A $\rightarrow$ B là: $\frac{24}{x}$

Thời gian người đó đi từ B về A là: $\frac{24}{x+4}$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{48(x+4)}{2x(x+4)} - \frac{48x}{2x(x+4)} = \frac{x(x+4)}{2x(x+4)} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0$$

$\Rightarrow x = 12$ (t/m) . KL : Vậy vận tốc của người đi xe đạp từ A đến B là 12 km/h.

2) ĐKXD $0 \leq x \leq 1$ Đặt $0 < a = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow \frac{a^2 - 1}{2} = \sqrt{x(1-x)}$

$$+ \text{PT mới là : } a + \frac{a^2 - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \{-3 ; 1\} \Rightarrow a = 1 > 0$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$$

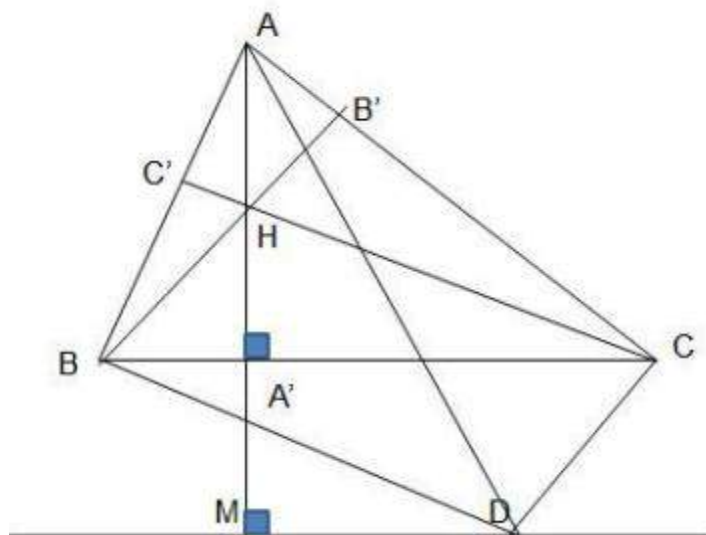
$$+ \text{ Nếu } a = 1 \Rightarrow x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = 0$$

$$\Rightarrow x = \{0; 1\} \text{ (t/m)}$$

KL : Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt là $x = 0$; $x = 1$

Câu IV . (3,0 điểm)

Giải



1) Chứng minh các tứ giác ABMD , AMDC nội tiếp

Do BHCD là hình bình hành nên:

Ta có: $BD \parallel CC' \Rightarrow BD \perp AB \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$

Có: $AA' \perp BC$ nên: $MD \perp AA' \Rightarrow \angle AMD = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle ABD + \angle AMD = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ tứ giác ABMD nội tiếp đường tròn đường kính AD.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác AMDC nội tiếp đường tròn đường kính AD.

$\Rightarrow A, B, C, D, M$ nằm trên cùng một đường tròn

2) Xét (O) có dây $MD \parallel BC \Rightarrow$ số cung MB = số cung CD $\Rightarrow$ dây MB = dây CD hay $BM = CD$

+ Theo phần 1) và $BC \parallel MD \Rightarrow$ góc BAM = góc OAC

3) Chứng minh OK là đường trung bình của tam giác AHD $\Rightarrow OK \parallel AH$ và $OK = \frac{1}{2} AH$ hay

$$\frac{OK}{AH} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

+ Chứng minh tam giác ODK đồng dạng với tam giác HGA $\Rightarrow \frac{OK}{AH} = \frac{1}{2} = \frac{GK}{AG} \Rightarrow AG = 2GK$,

từ đó suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC

Câu V . (2, 0 điểm)

Giải:

1) Giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi $a = b = 1$

$$4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b) + 4 \cdot 2014 - 12$$

$$= (a-b)^2 + 3(a+b-2)^2 + 8044 \geq 8044$$

$$\Rightarrow P \geq 2011$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi và chỉ khi $a = b = 1$.

2) Gọi 6 thành phố đã cho là A, B, C, D, E, F

+ Xét thành phố A .theo nguyên lý Dirichlet ,trong 5 thành phố còn lại thì có ít nhất 3 thành phố liên lạc được với A hoặc có ít nhất 3 thành phố không liên lạc được với A (vì nếu số thành phố liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 và số thành phố không liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 thì ngoài A , số thành phố còn lại cũng không vượt quá 4) . Do đó chỉ xảy ra các khả năng sau :

- Khả năng 1 :

số thành phố liên lạc được với A không ít hơn 3 , giả sử B, C, D liên lạc được với A . Theo đề bài trong 3 thành phố B, C, D có 2 thành phố liên lạc được với nhau . Khi đó 2 thành phố này cùng với A tạo thành 3 thành phố đôi một liên lạc được với nhau .

- Khả năng 2 :

số thành phố không liên lạc được với A , không ít hơn , giả sử 3 thành phố không liên lạc được với A là D, E, F . Khi đó trong bộ 3 thành phố (A, D, E) thì D và E liên lạc được với nhau (vì D, E không liên lạc được với A)

Tương tự trong bộ 3 (A, E, F) và (A, F, D) thì E, F liên lạc được với nhau , F và D liên lạc được với nhau và như vậy D, E, F là 3 thành phố đôi một liên lạc được với nhau .

Vậy ta có ĐPCM

ĐỀ 41

Câu 1: a) Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}} \\
&= \sqrt{\frac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+4)(5+2\sqrt{3})}{5^2-(2\sqrt{3})^2}} \\
&= \sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}} - \sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}} \\
&= \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\sqrt{3}-1| - \sqrt{3}-1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$b) B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x})$$

$$\begin{aligned}
B &= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] \cdot (x+\sqrt{x}) \\
&= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot (x+\sqrt{x})
\end{aligned}$$

i) Với $x > 0, x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+\sqrt{x}-2) - (x-\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot (x+\sqrt{x}) \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = \frac{2x}{x-1}
\end{aligned}$$

$$ii) \text{ Ta có: } B = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Do x nguyên nên:

$$B \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \text{ nguyên} \Leftrightarrow x-1 \text{ là ước của } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ x-1 = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{2; 0; 3; -1\}$$

Vậy các giá trị của x cần tìm là $x \in \{2; 0; 3; -1\}$

Câu 2:

$$a) \begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 3x + (m+1)y = -1 \end{cases} \quad (1)$$

Với $m = 3$, hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 2 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 3x + 4(-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Khi $m = 3$ hệ có nghiệm $(1; -1)$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 3x + (m+1)y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-mx}{2} \\ 3x + (m+1) \cdot \frac{1-mx}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-mx}{2} \\ 6x - (m^2 + m)x + m + 1 = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-mx}{2} \\ (m^2 + m - 6)x = m + 3 \end{cases} \quad (II) \end{aligned}$$

Khi $m = 2$: (*) $\Leftrightarrow 0x = 5$ (vô nghiệm) $\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

Khi $m = -3$: (*) $\Leftrightarrow 0x = 0$. Hệ phương trình có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1+3x}{2}$

Khi $m^2 + m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (m+3)(m-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 2 \end{cases}$, ta có:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{m^2+m-6} = \frac{1}{m-2} \\ y = \frac{1-\frac{m}{m-2}}{2} = \frac{1}{2-m} \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{m-2}; \frac{1}{2-m}\right)$

Kết luận: + $m = 2$: (I) vô nghiệm

+ $m = -3$: (I) có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1+3x}{2}$

+ $m \neq 2$ và $m \neq -3$: (I) có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{m-2}; \frac{1}{2-m}\right)$

c) Theo câu b, (I) có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq 2$.

Khi $m = -3$, (I) có nghiệm nguyên chẳng hạn $x = 1$, $y = 2$

Khi $m \neq 2$ và $m \neq -3$: (I) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{m-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-2$ là ước của 1

$\Leftrightarrow m-2 = 1$ hoặc $m-2 = -1$

$\Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = 1$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \{-3; 1; 3\}$

Câu 3:

Phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm thì:

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 6) = m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6.$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m - 6 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} |x_1| + |x_2| = 8 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 64 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 64 \quad (1) \end{aligned}$$

Trường hợp 1: Nếu x_1 và x_2 cùng dấu thì: $x_1 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 4$ (thỏa mãn (*)).

Trường hợp 2:

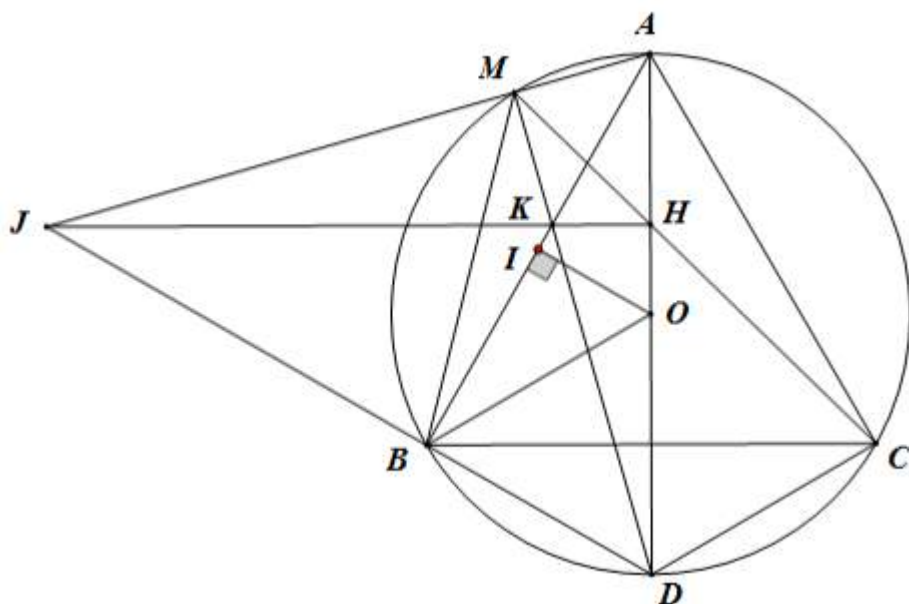
Nếu x_1 và x_2 trái dấu thì: $x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3$ (**)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - m - 6) = 64$

$\Leftrightarrow m + 6 = 16 \Leftrightarrow m = 10$ (không thỏa mãn điều kiện (**)).

Kết luận: $m = \pm 4$

Câu 4:



a) Vì B và C thuộc đường tròn đường kính AD nên $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$

Xét hai tam giác vuông ABD và ACD có chung cạnh huyền AD, hai cạnh góc vuông AB và AC bằng nhau (do $\triangle ABC$ đều)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$ (1)

Vì AMBD là tứ giác nội tiếp nên:

$\angle BMD = \angle BAD$ (2)

Vì AMDC là tứ giác nội tiếp nên:

$\angle CMD = \angle CAD$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \angle BMD = \angle CMD$

$\Rightarrow MD$ là phân giác của góc BMC.

b) Ta có: $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$

Xét $\triangle ABD$ vuông tại B có: $BA = AD \cdot \cos \angle BAD = 2R \cdot \cos 30^\circ = R\sqrt{3}$

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $BC = BA = R\sqrt{3}$

Vì $AB = AC$, $DB = DC$ nên AD là trung trực của BC

$\Rightarrow AD \perp BC$.

Tứ giác ABDC có $AD \perp BC$ nên

$$S_{ABDC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R\sqrt{3} = R^2 \sqrt{3}$$

c) Vẽ $OI \perp AB$ tại I. Xét tam giác vuông OIA ta có:

$$OI = OA \cdot \sin \angle OAI = R \cdot \sin 30^\circ = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích tam giác AOB là } S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OI = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}$$

Ta có: $\angle AOB = 2\angle AOC = 120^\circ$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$$\text{Diện tích hình quạt AOB là } \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Suy ra diện tích hình viên phân cần tìm là } \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} \text{ (đvdt)}$$

d) Gọi J là giao điểm của AM và BD.

Vì M, B thuộc đường tròn đường kính AD nên $DM \perp AJ$, $AB \perp DJ$

$\Rightarrow K$ là trực tâm của tam giác AJD

$\Rightarrow JK \perp AD$

$\Rightarrow JK \parallel BC$ (cùng $\perp AD$) (4)

Tứ giác AMKH có KMH = KAH (=BMD) nên là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow KHA = 180^\circ - KMA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow KH \perp AD$$

$$\Rightarrow KH \parallel BC \text{ (cùng } \perp AD) \quad (5)$$

Từ (4) và (5), theo tiên đề O-clit về đường thẳng song song, ta có J, K, H thẳng hàng.

Vậy AM, BD và KH đồng quy tại J.

ĐỀ 42

Câu 1.(1,5 điểm) Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ và

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ Chứng minh rằng } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hướng dẫn

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} \right) = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{cxy + ayz + bxz}{abc} \right) = 1(*)$$

$$\text{Từ } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0 \text{ thay vào (*) ta có}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Câu 2.(1,5 điểm) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$$

Hướng dẫn

$$\text{ĐKXĐ : } |x| \leq \sqrt{3}; |y| \leq 1; |z| \leq \sqrt{2}$$

Áp dụng Bất đẳng thức $AB \leq \frac{A^2 + B^2}{2}$ ta có đúng với mọi A, B

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} \leq \frac{x^2 + 1 - y^2}{2} + \frac{y^2 + 2 - z^2}{2} + \frac{z^2 + 3 - x^2}{2} = 3$$

Kết hợp với GT ta có Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \\ x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \\ x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 0 \\ z^2 = 2 \\ x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số:

$$a_n = 1 + \frac{2.6.10....(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)} \text{ là một số chính phương}$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{2^n \cdot (1.3.5....(2n-1) \cdot (n-4)!)}{(2n)!} = 1 + \frac{2^n \cdot (n+4)!}{2.4.6...2n} = 1 + \frac{2^n \cdot 1.2.3...n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)!}{2^n \cdot 1.2.3.4...n} \\ &= 1 + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\ a_n &= (n^2 + 5n + 5)^2 \end{aligned}$$

Câu 4. (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Hướng dẫn

$$\text{Đặt } a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$$

$$P = \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} = \frac{yz}{xy+xz+2yz} + \frac{zx}{xy+yz+2xz} + \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Thì

$$3-P = 1 - \frac{yz}{xy+xz+2yz} + 1 - \frac{zx}{xy+yz+2xz} + 1 - \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$3-P = (xy+yz+xz) \left(\frac{1}{xy+xz+2yz} + \frac{1}{xy+yz+2xz} + \frac{1}{xz+yz+2xy} \right)$$

$$\text{Áp dụng Bất đẳng thức } \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$$

(Do ta áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương:

$$A+B+C \geq 3\sqrt[3]{ABC}; \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{ABC}}$$

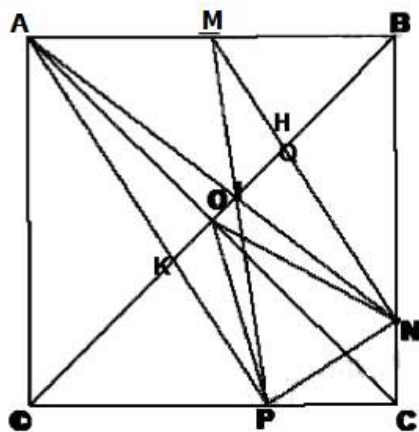
Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên, ta được:

$$(A+B+C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$$

$$\text{Khi đó Ta có } 3-P \geq (xy+yz+xz) \frac{9}{4xy+4yz+4xz} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} xy+yz+2xz = xy+2yz+xz = 2xy+yz+xz \\ xyz=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$$

Câu 5 (3điểm) Cho hình vuông ABCD với tâm O. Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho MN//AP. Chứng minh rằng



1. Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc NOP=45°

1. Đặt AB = a ta có AC = a√2 Chứng minh Tam giác ADP đồng dạng tam giác NBM (g.g)

$$\text{suy ra } \frac{BM}{DP} = \frac{BN}{AD} \Rightarrow BN \cdot DP = \frac{a^2}{2} \text{ mà } OB \cdot OD = \frac{a^2}{2}$$

tam giác DOP đồng dạng BNO (c.g.c). từ đó tính được $\angle NOP = 45^\circ$

2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

$$\text{Theo a ta có } \frac{OB}{DP} = \frac{ON}{OP} = \frac{OD}{DP} \text{ góc PON} = \text{góc ODP} = 45^\circ$$

tam giác DOP đồng dạng ONP (c.g.c). suy ra góc DOP= góc ONP

nên DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN

3. Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

Đặt giao điểm của MN và BC là Q và AP là K áp dụng tính chất phân giác cho tam giác MBN; APD

$$\frac{QM}{QN} = \frac{BM}{BN}; \frac{KP}{KA} = \frac{DP}{AD} \Leftrightarrow \frac{QM}{QN} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow \frac{QM}{KP} = \frac{QN}{KA} \quad (1) \text{ ta có. Giả sử MP cắt AN tại I. KI cắt}$$

$$\text{MN tại H Áp dụng định lí ta lét } \frac{HM}{PK} = \frac{HN}{KA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) Suy ra $\frac{HM}{HN} = \frac{QM}{QN}$ Q trùng H, vậy BD, PM, AN đồng quy

Câu 6.(1 điểm) Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1;2;3;4;...;2014\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu $x \in A, y \in A, x > y$, thì: $\frac{y^2}{x-y} \in A$

Hướng dẫn

Với mỗi tập A là tập con của $S = \{1;2;3;...;2014\}$ thỏa mãn đề bài, gọi a và b lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của A ($a, b \in S, a < b$)

Ta chứng minh $b \leq 2a$, thật vậy, giả sử $b > 2a$

Theo giả thiết $c = \frac{a^2}{b-a} \in A$. Mà $b > 2a \Rightarrow b - a > a > 0 \Rightarrow c = \frac{a^2}{b-a} < \frac{a^2}{a} = a$, mâu thuẫn với a là phần tử nhỏ nhất của A.

Vậy $b \leq 2a$

Gọi d là phần tử lớn nhất của tập $B = A \setminus \{b\}$. Ta chứng minh $b \geq 2d$. Thật vậy giả sử $b < 2d$, theo giả thiết thì

$$d < b \Rightarrow e = \frac{d^2}{b-d} \in A, \text{ mà } b < 2d \Rightarrow 0 < b - d < d \Rightarrow e > \frac{d^2}{d} = d$$

Suy ra $e \in A$ nhưng $e \notin B \Rightarrow e = b \Rightarrow$

$$\frac{d^2}{b-d} = b \Rightarrow d^2 = b^2 - bd \Rightarrow 5d^2 = 4b^2 - 4bd + d^2 = (2b - d)^2$$

(mâu thuẫn vì VP là số chính phương, VT không là số chính phương)

Vậy $b \geq 2d \Rightarrow 2d \leq b \leq 2a \Rightarrow d \leq a$. Mà $a \leq d$ (a và d lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của B) nên $a = d \Rightarrow b = 2a$

Vậy $A = \{a; 2a\}$. Kiểm tra lại ta thấy A thỏa mãn đề bài. Vì $a \in S$ và $2a \in S$ nên $2 \leq 2a \leq 2014 \Rightarrow 1 \leq a \leq 1007$

Vậy số tập con A thỏa mãn đề bài là 1007 tập.

ĐỀ 43

Câu 1

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} \\
&= \frac{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
&= \frac{a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\
&= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} \\
&= 0(DPCM)
\end{aligned}$$

Câu 2

Gọi vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là x (km/h) $x > 10$

Thì vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $x-10$ (km/h)

Thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian đi trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $\frac{30}{x-10}$ (h)

Vì thời gian đi cả 2 quãng đường là 11h40 phút – 7h- 10 phút = $\frac{9}{2}$ (h)

Nên ta có PT:

$$\begin{aligned}
\frac{90}{x} + \frac{30}{x-10} &= \frac{9}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{180(x-10)}{2x(x-10)} + \frac{60x}{2x(x-10)} &= \frac{9x(x-10)}{2x(x-10)} \\
\Leftrightarrow 240x - 1800 &= 9x^2 - 90x \\
\Leftrightarrow 9x^2 - 330x + 1800 &= 0
\end{aligned}$$

Giải ra $x=30$ thỏa mãn điều kiện. Thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu $\frac{90}{30} = 3$ (h)

Vậy xe hỏng lúc 10 h

Câu 3 a) xét hệ phương trình
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{-2(m+1)}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^2 + 2(m+1)x - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

PT(1) có hệ số a và c trái dấu nên luôn có 2 nghiệm phân biệt mọi m nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt với mọi m .

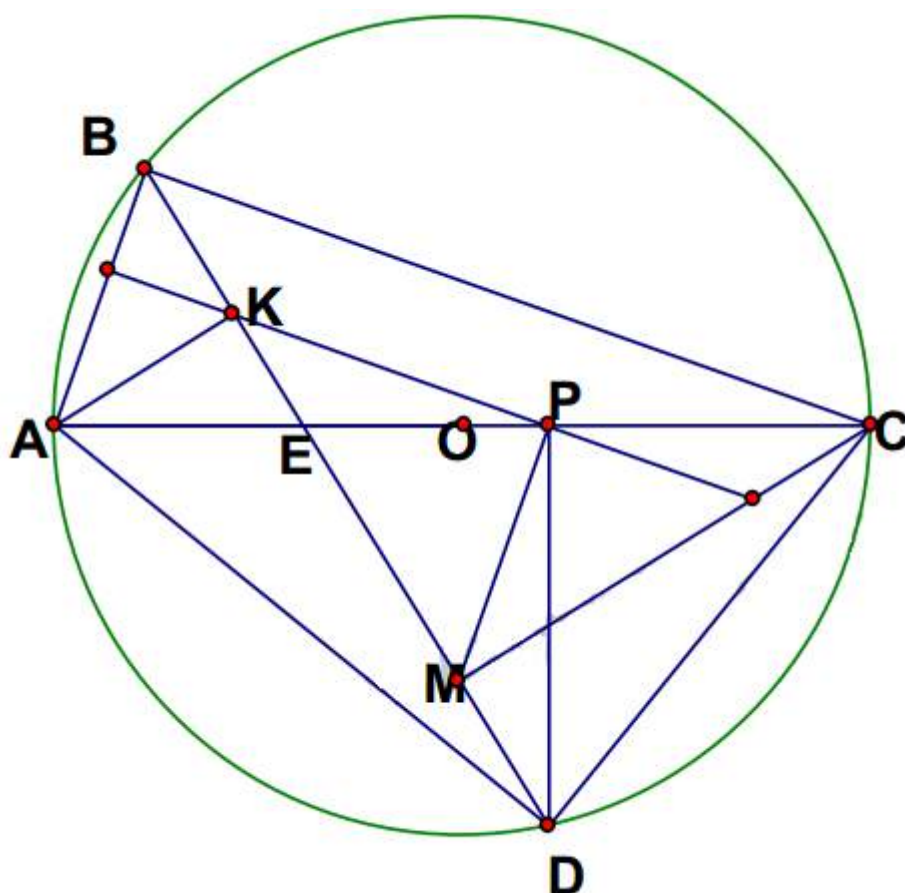
b) Theo Vi ét
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m+1)}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = \frac{-3(x_1 + x_2)}{2} \\ 3x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^3 - x_2^3 + (m+1)(x_1^2 - x_2^2) - x_1 + x_2 \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= 2x_1^3 - 2x_2^3 - 3(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_2^2) - 2x_1 + 2x_2 \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2(x_2 - x_1) - 2(x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -x_1^3 + x_2^3 + (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -(x_1^3 - x_2^3 - 3x_1 x_2(x_1 - x_2)) \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -[(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)] \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -(x_1 - x_2)^3 \end{aligned}$$

Nên $f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^3$

Câu 4



1. Ta có $\angle PAD = \angle PKD$

(cùng bằng $\angle CBD$ đồng vị) nên tứ giác AKPD nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

2.Theo phần 1 thì DP vuông góc AC nên MDCP nội tiếp suy ra: $\angle MPD = \angle MCD$ mà $\angle MCD = \angle ACB$ (cùng phụ 2 $\angle MDC = \angle ACB$) mà $\angle APK = \angle ACB$ (đồng vị) nên $\angle MPD = \angle APK$ Ta có $\angle MPD + \angle MPE = 90^\circ \Rightarrow \angle APK + \angle MPE = 90^\circ$ suy ra $KP \perp PM$.

3.ta có $AD = R\sqrt{3}$ Pitago tam giác vuông AKD vuông tại K tính được $KD = \sqrt{3R^2 - x^2}$ tam giác BAK vuông tại K có góc $ABK = 60^\circ \Rightarrow BK = AK \cdot \cot ABK = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$$BD = BK + KD = \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3R^2 - x^2} \text{ (dv độ dài)}$$

Câu 5 (1 điểm)

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq \frac{4}{7}; x \neq \sqrt[3]{2}$$

$$\text{Đặt : } 4 - 7x = b; x^3 + 2 = a; (a; b \neq 0)$$

Thì

$$x^3 - 56x = x^3 + 2 + 8(4 - 7x) - 34 = a + 8b - 34$$

$$21x + 24 = -3(4 - 7x) + 34 = 32 - 3b$$

Ta có phương trình

$$\frac{a + 8b - 34}{b} - \frac{34 - 3b}{a} = 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 8ab - 34a - 34b + 3b^2 = 4ab$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a + 3b - 34) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 3b = 34 \end{cases}$$

Với $a + b = 0$ ta có

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(TM) \\ x = -3(TM) \\ x = 1(TM) \end{cases}$$

Với $a + 3b = 34$ ta có

$$x^3 - 21x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 4)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(TM) \\ x = -4(TM) \\ x = 5(TM) \end{cases}$$

PT có 6 nghiệm $S = \{-4; -3; -1; 1; 2; 5\}$

ĐỀ 44**Bài 1: (2,00 điểm)**

1)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} - \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{5})}{2-\sqrt{5}} = \sqrt{2}-1-\sqrt{2} = -1$$

2)

$$B = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} \text{ với } a>0; a \neq 4$$

$$= \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$$

Bài 2: (2,00 điểm)

1) Vì hệ phương trình: $\begin{cases} ax-y=-b \\ x-by=-a \end{cases}$ có nghiệm $(x;y) = (2; 3)$ nên ta có hpt:

$$\begin{cases} 2a-3=-b \\ 2-3b=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=3 \\ a-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+3b=9 \\ a-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a=7 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Vậy $a=1, b=1$

2) Giải phương trình: $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$

$$\Leftrightarrow 4(2x-1)-6\sqrt{5x-6}=2\sqrt{3x-8}$$

$$\Leftrightarrow [(5x-6)-6\sqrt{5x-6}+9]+[(3x-8)-2\sqrt{3x-8}+1]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-6}+3)^2+(\sqrt{3x-8}-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-6}+3=0 \\ \sqrt{3x-8}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

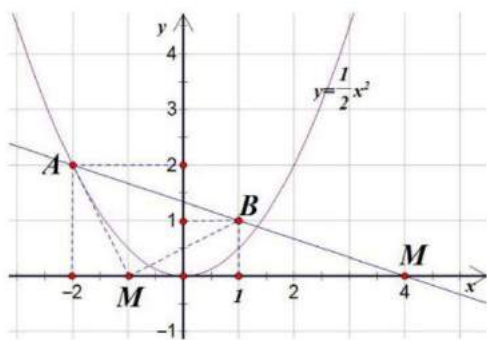
Vậy pt có nghiệm $x=3$.

Bài 3: (2,00 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$

a) Lập bảng giá trị (HS tự làm)

Đồ thị:



b) Vì $A \in (P)$ có hoành độ $x_A = -2$ nên $y_A = 2$. Vậy $A(-2; 2)$

Lấy $M(x_M; 0)$ bất kì thuộc Ox ,

Ta có: $|MA - MB| \leq AB$ (Do M thay đổi trên O và BĐT tam giác)

Dấu “=” xảy ra khi điểm A, B, M thẳng hàng khi đó M là giao điểm của đường thẳng AB và trục Ox .

- Lập pt đường thẳng AB :

Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$

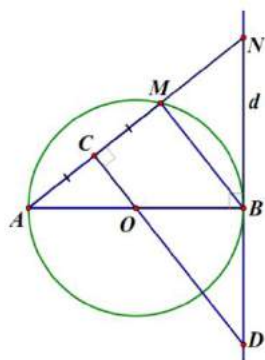
Do A, B thuộc đường thẳng AB nên ta có:

$$\begin{cases} -2a + b = 2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

- Tìm giao điểm của đường thẳng AB và O ($y = 0$) $\Rightarrow x = 4 \Rightarrow M(4; 0)$

Bài 4 (4,00 điểm)



a) Chứng minh rằng: $OBNC$ nội tiếp

Ta có $OC \perp AM \Rightarrow \angle OCN = 90^\circ$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B nên $\angle OBN = 90^\circ$

Vậy Tứ giác $OBNC$ nội tiếp có $\angle OCN + \angle OBN = 180^\circ$

b) Chứng minh rằng: $NO \perp AD$

Trong $\triangle AND$ có hai đường cao là AB và GC cắt nhau tại O .

Suy ra NO là đường cao thứ ba hay: $NO \perp AD$.

c) Chứng minh rằng $CA \cdot CN = CO \cdot CD$

Ta có Trong tam giác vuông AOC có $CAO + AOC = 90^\circ$

Trong tam giác vuông BOD có $BOD + BDO = 90^\circ$

Mà $CAO = BOD$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow CAO = BDO$

$\Rightarrow$ tam giác CAO đồng dạng với tam giác CDN (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CA \cdot CN = CO \cdot CD$$

d) Xác định vị trí điểm M để $(AM \cdot AN)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $2AM + AN \geq 2\sqrt{AM \cdot AN}$ (Cauchy - Cosi)

Ta chứng minh: $AM \cdot AN = AB^2 = 4R^2$ (1)

$$\Rightarrow 2AM + AN \geq 2\sqrt{2 \cdot 4R^2} = 4\sqrt{2}R$$

Đẳng thức xảy ra khi: $2AM = AN \Rightarrow AM = \frac{AN}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AM = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow \triangle AOM$ vuông tại O $\Rightarrow$ M là điểm chính giữa cung AB.

ĐỀ 45

Bài 1: (2,0 điểm):

1) Từ GT ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)[(c(a+b+c) + ab)] = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(a+c) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases}$$

Nếu $a+b=0 \Rightarrow c=1 \Rightarrow c-1=0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$

Nếu $c+b=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$

Nếu $a+c=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow b-1=0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$

Vậy ta có đpcm.

2) Với mỗi số nguyên dương n ; chứng minh $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ là số nguyên dương.

Bài 2: (2,5 điểm):

1) Giải phương trình $(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12}) = 8$.

ĐKXĐ $x \geq 2$, đặt

$$\sqrt{x+6} = a \geq 0; \sqrt{x-2} = b \geq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 8$$

$$PTTT: (a-b)(1+ab) = a^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1+ab-a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{x-2} \text{ (VN)} \\ 1+ab-a-b=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}=1 \text{ (VN)} \\ b=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3 \text{ (TM)} \end{cases} \end{cases}$$

PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \text{ (1)} \\ 2\sqrt{y^4 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 3 - 4x^3 \text{ (2)} \end{cases}$$

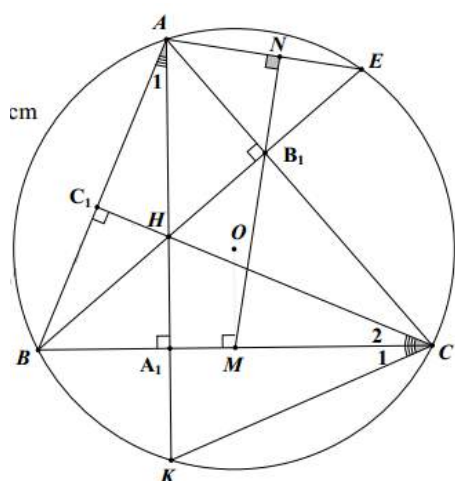
$$(1) \Leftrightarrow (x^3 - y^6) + xy^2 - y^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y^2)(x^2 + xy^2 + y^4 + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x^2 + xy^2 + y^4 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}y^2)^2 + \frac{3}{4}y^4 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (TM (2))} \end{cases}$$

Với $x=y^2$

Bài 3: (3,0 điểm): Cho tam giác ABC



a) góc $A_1 =$ góc $C_2 =$ góc C_1

$\Rightarrow \Delta CHK$ cân C, CA_1 là đ/cao + đ trung trực $\Rightarrow đpcm$

b) Có:

$$\begin{aligned}\frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1} &= \left(1 - \frac{HA_1}{AA_1}\right) + \left(1 - \frac{HB_1}{BB_1}\right) + \left(1 - \frac{HC_1}{CC_1}\right) = 3 - \left(\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1}\right) \\ &= 3 - \left(\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HBA}}{S_{ABC}}\right) = 3 - 1 = 2\end{aligned}$$

c) Từ GT $\Rightarrow M$ trung điểm $BC \Rightarrow \dots \Rightarrow \Delta B_1MC$ cân tại $M \Rightarrow \text{góc } MB_1C = \text{góc } MCB_1 = \text{góc } AB_1N$

$\Rightarrow \Delta CBB_1$ đồng dạng ΔB_1AN (g-g) $\Rightarrow B_1N \perp AE$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2 = \frac{AN \cdot AE}{EN \cdot EA} = \frac{AN}{EN} \text{ (đpcm)}$$

Bài 4: (1,0 điểm): Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - 3xy = 1$

$$x^3 + y^3 - 3xy = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3xy = 1$$

Đặt $x+y=a$ và $xy=b$ (a, b nguyên) ta có:

$$a^3 - 3ab - 3b = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) - 3b(a+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a^2 - a + 1 - 3b) = 2$$

Vì a, b nguyên nên có các TH sau :

$$\begin{aligned}1) & \begin{cases} a+1=1 \\ a^2 - a + 1 - 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{-1}{3} \end{cases} (L) \\ 2) & \begin{cases} a+1=2 \\ a^2 - a + 1 - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \{(0;1); (1;0)\} \\ 3) & \begin{cases} a+1=-1 \\ a^2 - a + 1 - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \emptyset \\ 4) & \begin{cases} a+1=-2 \\ a^2 - a + 1 - 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=4 \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \emptyset\end{aligned}$$

Vậy $(x; y) \in \{(0;1); (1;0)\}$

Bài 5: (1,5 điểm):

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}$$

Vì x, y, z dương, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$+) 2x^2\sqrt{yz} \leq x^4 + yz \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2\sqrt{yz}} \geq \frac{1}{x^4 + yz} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}} \quad (1)$$

$$+) \frac{2}{\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Tương tự:

$$\frac{y^2}{y^4 + xz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{xy + yz + zx}{xyz} \quad (3)$$

Mà lại có : $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$

$$\text{Từ (3) và (4) có : } A \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3xyz}{xyz} = \frac{3}{2} \text{ đpcm}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=1$

ĐỀ 46

Bài 1: (2,0 điểm)

a) Ta có:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$
 . Công theo vế các phương trình của hệ ta được:

$$(a+b+c)x + (a+b+c)y = a+b+c \Rightarrow (a+b+c)(x+y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a+b+c=0 \text{ thì: } (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc \quad (1)$$

$$\text{Với } x+y=1 \text{ thay vào giả thiết ta được: } a=b=c \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

b) Ta có:
$$\frac{1}{1+y+yz} = \frac{x}{x+xy+xyz} = \frac{x}{1+x+xy} ;$$

$$\frac{1}{1+z+zx} = \frac{xy}{xy+xyz+x^2.yz} = \frac{xy}{1+x+xy}$$

Do đó:

$$P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{xy}{1+x+xy} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 2: (2,0 điểm)

a) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Ta có: (d): $y = (m+4)x - 2m - 5$; (P): $y = x^2$

Pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = (m+4)x - 2m - 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+4)x + 2m + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = [-(m+4)]^2 - 4(2m+5) = (m+4)^2 - 4(2m+5) = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi Pt (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$

$$(m-2)(m+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

Vậy: với $m > 2$ hoặc $m < -2$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 0$

Với $m > 2$ hoặc $m < -2$. Thì Pt: $x^2 - (m+4)x + 2m + 5 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Theo Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m+4 \\ x_1 x_2 = 2m+5 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = (m+4)[(m+4)^2 - 3(2m+5)] \\ &= (m+4)(m+1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Để: } x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(m+4)(m+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -4(TM) \\ m = -1(L) \end{cases}$$

Vậy: $m = -4$ là giá trị cần tìm.

Bài 3: (1,5 điểm)

Ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18} (x \geq 0; y \geq 0)$

Pt viết: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{2} (1) (0 \leq \sqrt{x} \leq 3\sqrt{2}; 0 \leq \sqrt{y} \leq 3\sqrt{2})$

Pt viết:

$$\sqrt{x} = 3\sqrt{2} - \sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{y})^2 \Leftrightarrow 6\sqrt{2y} = y - x + 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y} = \frac{y - x + 18}{6} \in Q$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y} = a \in Q \Leftrightarrow 2y = a^2 \in Q \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \in N (\forall i \ 2y \in Z \text{ và } a \geq 0) \\ a : 2 \end{cases}$$

$$a = 2m (m \in N)$$

$$\Rightarrow 2y = (2m)^2 \Leftrightarrow y = 2m^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = m\sqrt{2} \text{ TT} \Rightarrow \sqrt{x} = n\sqrt{2}$$

$$\text{Pt (1) viết: } n\sqrt{2} + m\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m + n = 3 (m, n \in N)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} n = 0 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 18 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 1 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 3 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy Pt đã cho có 4 nghiệm } \begin{cases} x = 0 \\ y = 18 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 18 \\ y = 0 \end{cases}$$

Bài 4: (3,5 điểm)

a) Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp

Xét ΔABP có: $PA = PB$

và $AP \perp OP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \Delta ABP$ cân tại P có PO là phân giác

$\Rightarrow PO$ cũng là đường cao, trung tuyến ΔABP .

Xét tứ giác BHCP ta có $\angle BHP = 90^\circ$ (Vì $PO \perp AB$)

$$\angle BCP = 90^\circ$$

(Vì $\angle BCD = 90^\circ$ (nội tiếp nửa đường tròn (O)))

$$\angle BHP = \angle BCP$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCP nội tiếp (Quỹ tích cùng chứa góc)

b) Chứng minh $AC \perp CH$.

Xét ΔACH ta có

$\angle HAC = \angle B_1$ (chấn cung BKC của đường tròn (O))

Mà $\angle B_1 = \angle H_1$ (do BHCP nội tiếp)

$$\Rightarrow \angle HAC = \angle H_1$$

Mà $\angle H_1 + \angle AHC = 90^\circ$ (Vì: $PO \perp AB$)

$$\Rightarrow \widehat{HAC} + \widehat{AHC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{AHC}$ vuông tại C

Hay $AC \perp CH$.

c) Chứng minh M là trung điểm của AQ.

Xét tứ giác ACHM ta có M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔACH

$\Rightarrow$ tứ giác ACHM nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CMH} = \widehat{HAC}$ (chắn cung HC)

Mà $\widehat{HAC} = \widehat{BIC}$ (chắn cung BC của đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{CMH} = \widehat{BIC}$

$\Rightarrow MH \parallel BI$ (vì cặp góc đồng vị bằng nhau)

Xét ΔABQ có $AH = BH$ (do PH là trung tuyến APB (C/m trên))

Và: $MH \parallel BI$

$\Rightarrow MH$ là trung bình ΔABQ

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AQ

Bài 5: (1,0 điểm)

1) Tập xác định của hàm số y là R . Nhận thấy $y > 0$ với mọi giá trị của x nên để tìm giá trị nhỏ nhất của y ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của y^2 .

$$\text{Mà: } y^2 = 2x^2 + 2 + 2\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = 2x^2 + 2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \geq 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Vậy $y_{\min} = 4$ khi $x = 0$.

2) Đặt $a = x - 2$, $b = y - 2$, $c = z - 2$. Ta phải chứng minh: $abc \leq 1$.

$$\text{Thật vậy từ: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$$

Theo bất đẳng thức Cô – si:

$$\frac{1}{a+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b+2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} \right) \geq \sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{b+2} \geq \sqrt{\frac{ca}{(c+2)(a+2)}} \quad (2); \quad \frac{1}{c+2} \geq \sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}} \quad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) theo vế ta được điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay $x = y = z = 3$.

ĐỀ 47

Câu I.

c) Phương trình (1) có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên là phương trình bậc hai ẩn x . Do đó Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + (m^2 + 5).6m > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m^3 + 30m > 0$$

$$\Leftrightarrow m(6m^2 + m + 30) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \underbrace{\left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4} \right]}_{>0 \forall m} > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5}$

Xét $m^2 + 5 - 2m = (m - 1)^2 + 4 > 0$. Mà $m > 0 \Rightarrow m^2 + 5 > 2m > 0$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2m}{m^2 + 5} < 1 \Rightarrow 0 < x_1 + x_2 < 1$$

Vậy tổng hai nghiệm của (1) không thể là số nguyên.

d) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 0$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5} \\ x_1 x_2 = \frac{-6m}{m^2 + 5} \end{cases}$$

Ta có:

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2 \\ x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \end{cases}$$

TH1: $x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = 2 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}}; t \geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2 - t - 2 = 0$

Xét $\Delta = 1^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

TH2: $x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = -2 \quad (3)$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}}; t \geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2 - t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)(3t-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = \frac{2}{3}(TM) \Rightarrow \frac{2m}{m^2+5} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 4m^2 - 18m + 20 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(4m-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(TM) \\ m = \frac{5}{2}(TM) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{2; \frac{5}{2}\right\}$

Câu II.

$$\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases} \quad (I)$$

ĐK: $x \geq 0, y \geq 0$

Đặt $a = x\sqrt{y}; b = y\sqrt{x}$, điều kiện $a \geq 0, b \geq 0$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} 2(1+a)^2 = 9b(1) \\ 2(1+b)^2 = 9a(2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\begin{aligned} 2(1+a)^2 - 2(1+b)^2 &= 9(b-a) \\ \Leftrightarrow 2(a-b)(a+b+2) + 9(a-b) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(\underbrace{2a+2b+13}_{>0 \forall a, b > 0}) &= 0 \end{aligned}$$

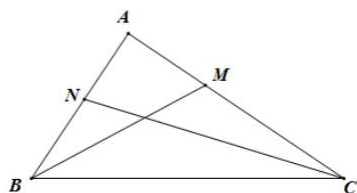
$$\Leftrightarrow a = b$$

Thay $a = b$ vào (1) ta có

$$2(1+a)^2 = 9a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 2(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = 2 \\ y\sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{4} \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = \frac{1}{2} \\ y\sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}); (\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \sqrt[3]{\frac{1}{4}})$

2)



Vì BM, CN lần lượt là phân giác góc ABC, ACB nên theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{MC + MA}{MA} = 1 + \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{NB}{NA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{NB + NA}{NA} = 1 + \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} = \left(1 + \frac{BC}{AB}\right)\left(1 + \frac{BC}{AC}\right) = 1 + \frac{BC^2}{AB \cdot AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC}$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC và BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \geq 2AB \cdot AC \Rightarrow \frac{BC^2}{AB \cdot AC} \geq 2$$

$$\frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} \geq 2\sqrt{\frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC}} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(MA + MC)(NB + NA)}{MA \cdot NA} \geq 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Câu III.

c) Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \Rightarrow c(a+b) = ab(*)$

Giả sử $a + b$ là số nguyên tố, khi đó từ $(*) \Rightarrow ab : (a + b) \Rightarrow a : (a + b)$ hoặc $b : (a + b)$

Điều này mâu thuẫn do $0 < a < a + b$, $0 < b < a + b$.

Vậy $a + b$ không thể là số nguyên tố.

d) Giả sử $a + c$ và $b + c$ đồng thời là số nguyên tố.

$$\text{Từ } c(a+b)=ab \Rightarrow ca+cb=ab \Rightarrow ca+ab=2ab-ab \Rightarrow a(b+c)=b(2a-c)$$

$$\Rightarrow a(b+c) : b(**)$$

Mà $b + c$ là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn $b + c$ nên $(b + c, b) = 1$

Do đó từ $(**)$ suy ra $a : b$.

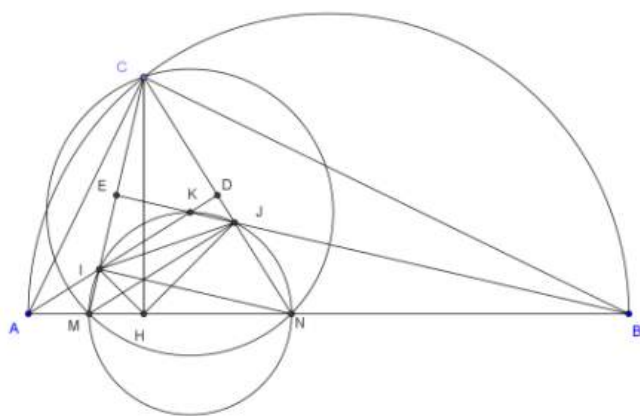
$$\text{Chứng minh tương tự ta có } b(a+c) = a(2b-c) \Rightarrow b : a$$

$$\text{Vậy } a = b. \text{ Từ } (*) \Rightarrow a = b = 2c$$

Do đó $a + c = b + c = 3c$, không là số nguyên tố với $c > 1$ (mâu thuẫn với giả sử)

Vậy $a + c$ và $b + c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV.



d) Ta có: $\angle HCA = \angle ABC$ (cùng phụ với $\angle HCB$)

Vì CN là phân giác của góc $\angle HCB$ nên $\angle HCN = \angle BCN$

Do đó $\angle CAN = \angle HCA + \angle HCN = \angle ABC + \angle BCN$

Mặt khác, xét $\triangle BCN$ với góc ngoài $\angle ANC$ ta có: $\angle ANC = \angle ABC + \angle BCN$

Suy ra $\angle CAN = \angle ANC \Rightarrow \triangle ACN$ cân tại A $\Rightarrow AC = AN$.

Chứng minh tương tự ta có $BC = BM$.

e) Vì CM, CN lần lượt là phân giác của góc $\angle ACH$ và $\angle BCH$ nên

$$\angle MCN = \angle MCH + \angle NCH = \frac{1}{2} \angle ACH + \frac{1}{2} \angle BCH = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$$

Tam giác ACN cân tại A có AI là phân giác kẻ từ đỉnh A, nên cũng là trung trực của đáy CN.

$\Rightarrow IC = IN$.

$\Rightarrow \triangle ICN$ cân tại I.

Tam giác ICN cân tại I có $\angle ICN = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại I

$\Rightarrow CI \perp IN$

Chứng minh tương tự ta có $CJ \perp MJ$.

Tứ giác $MIJN$ có $\angle MIN = \angle MJN = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, I, J, N cùng thuộc một đường tròn.

Vì $CH \perp MN$, $MJ \perp CN$, $NI \perp CM$ nên CH, MJ, NI đồng quy tại trực tâm của $\triangle CMN$.

f) Đặt $AC = b$; $BC = a \Rightarrow a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B)$

Theo câu a, ta có $AN = AC = b$; $BM = BC = a$

Do đó $a + b = AN + BM = BC + MN \Rightarrow MN = a + b - BC = a + b - 2R$

Ta có:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 8R^2$$

$$\Leftrightarrow a + b \leq 2\sqrt{2}R \Rightarrow MN = a + b - 2R \leq 2R(\sqrt{2} - 1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Leftrightarrow CA = CB \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $CH \leq R$.

$$\text{Do đó } S_{CMN} = \frac{1}{2} CH.MN \leq \frac{1}{2} R.2.R(\sqrt{2}-1) = R^2(\sqrt{2}-1)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $2R(\sqrt{2}-1)$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CMN là $R^2(\sqrt{2}-1)$

đều xảy ra khi và chỉ khi C là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB .

Câu V.

c) Gọi 5 số tự nhiên đã cho là a, b, c, d, e .

Do chúng đôi một phân biệt nên có thể giả sử $a < b < c < d < e$.

Theo giả thiết ta có $a + b + c > d + e \Rightarrow a + b + c \geq d + e + 1$

Suy ra $a \geq d + e + 1 - b - c$.

Vì b, c, d, e là số tự nhiên nên từ

$$d > c \Rightarrow d \geq c + 1; c > b \Rightarrow c \geq b + 1$$

Suy ra $d \geq b + 2 \Rightarrow d - b \geq 2$

$$e > d \Rightarrow e \geq d + 1 \Rightarrow e \geq c + 2 \Rightarrow e - c \geq 2$$

Do đó $a \geq (d - b) + (e - c) + 1 \geq 5$. Suy ra $b, c, d, e > 5$

Vậy tất cả các số đều không nhỏ hơn 5.

d) Nếu $a \geq 6 \Rightarrow b \geq a + 1 \geq 7$. Tương tự $c \geq 8, d \geq 9, e \geq 10 \Rightarrow a + b + c + d + e \geq 40$ (mâu thuẫn)

Suy ra $a < 6$. Mà theo câu a ta có $a \geq 5 \Rightarrow a = 5$.

Ta có $5 + b + c \geq d + e + 1 \Rightarrow b + c \geq d + e - 4$.

Mà $d - 2 \geq b, e - 2 \geq c \Rightarrow d + e - 4 \geq b + c$.

Do đó

$$\begin{cases} b = d - 2 \\ c = e - 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d + e = 5 + 2b + 2c + 4 < 40$$

$$\Rightarrow b + c < \frac{31}{2} \Rightarrow b + (b + 1) \leq b + c < \frac{31}{2} \Rightarrow b \leq 7$$

Suy ra $b = 6$ hoặc $b = 7$

Nếu $b = 6$ thì $d = b + 2 = 8$. Vì $b < c < d$ nên $c = 7 \Rightarrow e = c + 2 = 9$.

Nếu $b = 7$ thì $d = b + 2 = 9$. Vì $b < c < d$ nên $c = 8 \Rightarrow e = c + 2 = 10$.

có hai bộ thỏa mãn đề bài là $(5; 6; 7; 8; 9)$ và $(5; 7; 8; 9; 10)$.

ĐỀ 48

Câu 1.

1. Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right) \\
 &= \left[\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] : \frac{3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) + (\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{3(x-\sqrt{x}-2) + 3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-1 + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}
 \end{aligned}$$

2. ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 3; x \neq 4$

$$A > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-3(\sqrt{x}-1)}{3(\sqrt{x}-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 4$$

Kết hợp với ĐKXĐ, ta có $\begin{cases} 1 < x < 4 \\ x \neq 3 \end{cases}$ là điều kiện cần tìm.

Câu 2.

$$1. x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2+1)(x+3)} \quad (1)$$

$$\text{ĐK: } x \geq -3$$

$$\text{Nhận xét: } x^2 + 2x + 7 = (x^2 + 1) + 2(x+3)$$

Đặt $a = \sqrt{x^2+1} (a > 0)$, $b = \sqrt{x+3} (b \geq 0)$, phương trình (1) trở thành

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

Với

$$a = b \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x + 3} \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 3 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(TM) \\ x = -1(TM) \end{cases}$$

Với

$$a = 2b \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4(x + 3) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{15}(TM) \\ x = 2 - \sqrt{15}(TM) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{2; -1; 2 - \sqrt{15}; 2 + \sqrt{15}\}$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ (3 - xy)^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 3 - xy \\ 9 - 6xy + x^2y^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 3 + xy \\ x^2y^2 + 6xy - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 3 + xy \\ \begin{cases} xy = 1 \\ xy = -7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 4 \\ \begin{cases} xy = 1 \\ xy = -7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = -4 \\ \begin{cases} xy = -7 \end{cases} \end{cases} \quad (L)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (1;1) và (-1;-1)

Câu 3.

$$x^2 - 3(m+1)x + 2m^2 + 5m + 2 = 0. \quad (1)$$

Ta có:

$$\Delta = 9(m+1)^2 - 4(2m^2 + 5m + 2) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Khi đó, theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3(m-1) \\ x_1x_2 = 2m^2 + 5m + 2 \end{cases}$$

Do đó:

$$|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2|$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 4(x_1 - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 16x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 27(m+1)^2 - 16(2m^2 + 5m + 2) = 0$$

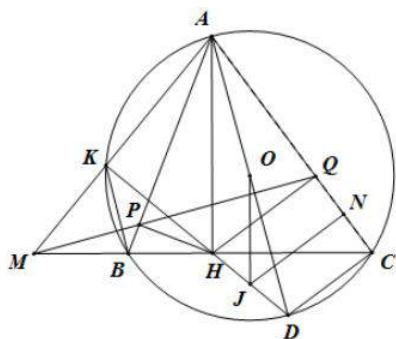
$$\Leftrightarrow 5m^2 + 26m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+5)(5m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m \neq 1$, ta có $m = -5$ và $m = -\frac{1}{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4.



1. Tứ giác APHQ có $\angle APH + \angle AQH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \angle APQ = \angle AHQ$$

Ta có: $\angle AHQ = \angle BCQ$ (cùng phụ với $\angle CHQ$)

Do đó $\angle APQ = \angle BCQ$

Suy ra BPQC là tứ giác nội tiếp.

2. Vì BPQC là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle MBP = \angle MQC$$

$$\triangle MBP \sim \triangle MQC (g.g) \Rightarrow \frac{MB}{MQ} = \frac{MP}{MC} \Rightarrow MB \cdot MC = MP \cdot MQ (1)$$

Vì APHQ là tứ giác nội tiếp nên: $\angle MQH = \angle BAH$

Mà $\angle BAH = \angle MHP$ (cùng phụ với $\angle PBH$)

nên $\angle MQH = \angle MHP$

$$\triangle MQH \sim \triangle MHP (g.g) \Rightarrow \frac{MQ}{MH} = \frac{MH}{MP} \Rightarrow MH^2 = MP \cdot MQ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH^2 = MB \cdot MC$

3. Vì AKBC là tứ giác nội tiếp nên

$$MKB = MCA \Rightarrow \Delta MKB \sim \Delta MCA \Rightarrow \frac{MK}{MC} = \frac{MB}{MA}$$

$$\Rightarrow MK \cdot MA = MB \cdot MC$$

Kết hợp với kết quả ý 2, ta có $MH^2 = MK \cdot MA$

$\Rightarrow$ HK là đường cao của tam giác vuông AHM.

$\Rightarrow AK \perp KH$

Do đó KH cắt (O) tại D (D khác K) thì AD là đường kính của (O).

Gọi J là trung điểm HD, N là trung điểm QC.

Khi đó OJ là đường trung bình của $\Delta AHD \Rightarrow OJ \parallel AH \Rightarrow OJ \perp BC$.

Mà OB = OC nên OJ là trung trực BC (3)

Vì HQ $\parallel$ DC (cùng vuông góc AC) nên HQCD là hình thang.

$\Rightarrow$ JN là đường trung bình của hình thang HQCD

$\Rightarrow JN \parallel HQ \Rightarrow JN \perp QC$

$\Rightarrow$ JN là trung trực của QC (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BPQC (do BPQC là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow J \equiv I$

Mà K, H, J thẳng hàng nên I, K, H thẳng hàng.

Câu 5.

$$\text{Đặt } S = \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}}$$

Ta có:

$$2S = \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2014}{2^{2012}} + \frac{2015}{2^{2013}}$$

$$\Rightarrow 2S - S = \frac{3}{2} + \frac{4-3}{2^2} + \frac{5-4}{2^3} + \dots + \frac{2015-2014}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}}$$

$$\Rightarrow S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}}\right) - \frac{2015}{2^{2014}}$$

$$\text{Ta có: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2014}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2013}}$$

Do đó:

$$S = 2 - \frac{1}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}} < 2 \Rightarrow 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$$

ĐỀ 49

Câu 1

1) Giải phương trình: $\sqrt{43-x} = x-1$

$$\sqrt{43-x} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0(1) \\ 43-x = (x-1)^2(2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -6 \end{cases}$$

Kết hợp nghiệm ta có: $x = 7$ (thỏa mãn), $x = -6$ (loại)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{7\}$.

2) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$

$$\begin{aligned} A &= \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \quad (x \geq 0; x \neq 1) \\ &= \frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{10\sqrt{x} - (2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{10\sqrt{x} - (2x-5\sqrt{x}+3) - (x+5\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-3x+10\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(7-3\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} = \frac{7-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} \end{aligned}$$

Câu 2

1. Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=(m-1)x+m+4$ (tham số m)

Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

$m = 2$ ta có phương trình đường thẳng (d) là: $y = x + 6$

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$+) x = -2 \Rightarrow y = 4$$

$$+) x = 3 \Rightarrow y = 9$$

Vậy $m = 2$ thì (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm A(-2;4) và B(3;9)

2. Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm nằm về hai phía của trục tung.

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = (m-1)x + m + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - m - 4 = 0(*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow 1. (-m-4) < 0$$

$$\Leftrightarrow m > -4$$

Câu 3

1) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases}$ (tham số m)

$$\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=6m+4 \\ 3x-2y=11-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=5m+15 \\ x+y=3m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m+3 \\ y=2m-1 \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = (m+3)^2 - (2m-1)^2 = -3m^2 + 10m + 8$$

$$= \frac{49}{3} - 3\left(m - \frac{5}{3}\right)^2$$

Do $\left(m - \frac{5}{3}\right)^2 \geq 0$ với mọi m ; dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{5}{3}$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 \leq \frac{49}{3}, \text{ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } m = \frac{5}{3}$$

Hay $x^2 - y^2$ lớn nhất bằng $\frac{49}{3}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{5}{3}$

2. Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h) ($x > 6$)

Khi đó thời gian ô tô dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{80}{x}$ (h)

Thời gian thực tế ô tô đi nửa quãng đường đầu là $\frac{40}{x-6}$ (h)

Thời gian thực tế ô tô đi nửa quãng đường còn lại là $\frac{40}{x+12}$ (h)

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{40}{x-6} + \frac{40}{x+12} = \frac{80}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{40x(x+12)}{x(x-6)(x+12)} + \frac{40x(x-6)}{x(x-6)(x+12)} = \frac{80(x-6)(x+12)}{x(x-6)(x+12)}$$

$$\Leftrightarrow 40x^2 + 480x + 40x^2 - 240x = 80x^2 + 480x - 5760$$

$$\Leftrightarrow 240x = 5760$$

$$\Leftrightarrow x = 24$$

Vậy vận tốc dự định của ô tô là 24 (km/h)

Câu 4

Từ giả thiết ta có: $\angle APH = 90^\circ$; $\angle ANH = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác APHN nội tiếp đường tròn đường kính AH

Ta có: $BD \parallel CH$ (BDCH là hình bình hành) và $CH \perp AB$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 4x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x = y(x; y > 0)$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2xy} \geq 1 \Leftrightarrow x = y$$

Cộng các bất đẳng thức ta được $S \geq 6$

$S = 6 \Leftrightarrow x = y$. Vậy Min $S = 6$ khi và chỉ khi $x = y$

ĐỀ 50

Câu 1

1) Điều kiện: $x \geq -1$

Ta có: $\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+3} = 2x + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x+3} - 2x + \sqrt{x+1} - \sqrt{(x+1)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(\sqrt{x+3} - 1) - \sqrt{x+1}(\sqrt{x+3} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x+1} - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1(1) \\ \sqrt{x+1} = 2x(2) \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x = -2$ (loại)

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} (TM)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$

2) Điều kiện: $x \neq -1; y \neq -1$

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y+1} \cdot \frac{y}{x+1} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{x}{y+1}; v = \frac{y}{x+1}$, hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \\ uv = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 + 2uv = 1 \\ u^2 + v^2 - 2uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 1 \\ (u-v)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = v = \frac{1}{2} \\ u = v = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Nếu $u = v = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y+1=2x \\ x+1=2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \text{ (TM)}$

Nếu $u = v = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y+1=-2x \\ x+1=-2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{3} \text{ (TM)}$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $x = y = 1, x = y = -\frac{1}{3}$

Câu 2. a) Phương trình đã cho tương đương với $9x = (y-1)(y+2) \text{ (1)}$

Nếu $y-1 : 3$ thì $y+2 = (y-1)+3 : 3 \Rightarrow (y-1)(y+2) : 9$

Mà $9x : 9 \forall x \in \mathbb{Z}$ nên ta có mâu thuẫn.

Suy ray $-1 : 3$, do đó: $y-1 = 3k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y = 3k+1 (k \in \mathbb{Z})$

Thay vào (1) ta có: $9x = 3k(3k+3) \Rightarrow x = k(k+1)$

Vậy phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = k(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

b) Từ giả thiết suy ra $\overline{ab} = (a+b)\sqrt{a+b} \text{ (1)}$

Vì $\overline{ab}$ và $a+b \in \mathbb{N}^*$ nên $a+b$ là số chính phương.

Mặt khác $1 \leq a+b \leq 18 \Rightarrow a+b \in \{1; 4; 9; 16\}$

Nếu $a+b=1, a+b=4, a+b=16$ thì thay vào (1) không thỏa mãn

Nếu $a+b=9$ thay vào (1) ta được $\overline{ab} = 27$

Vậy $a=2; b=7$

Câu 3. Đặt

$$\sqrt[3]{a^2} = x; \sqrt[3]{b^2} = y; \sqrt[3]{c^2} = z.$$

$$\Rightarrow a^2 = x^3; b^2 = y^3; c^2 = z^3, a = \sqrt{x^3}; b = \sqrt{y^3}; c = \sqrt{z^3}; x, y, z \geq 0$$

Bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3}) \text{ (1)}$$

Vì vai trò của $x; y; z$ bình đẳng nên có thể giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$

Khi đó

$$x(x-y)^2 + z(y-x)^2 + (z+x-y)(x-y)(y-z) \geq 0$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(z+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \text{ (2)}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $xy(x+y) \geq 2xy\sqrt{xy} = 2\sqrt{x^3 y^3} \text{ (3)}$

Tương tự ta có:

$$yz(y+z) \geq 2\sqrt{y^3z^3} \quad (4)$$

$$zx(z+x) \geq 2\sqrt{z^3x^3} \quad (5)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (3), (4), (5) ta được

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}) \quad (6)$$

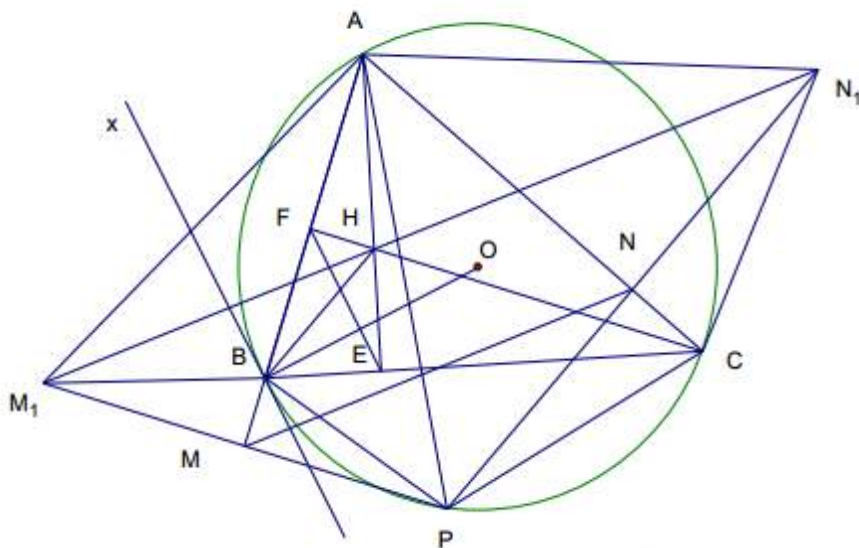
Từ (2) và (6) ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3})$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c$.

Câu 4

a)



Vì $\angle AEC = \angle AFC = 90^\circ$ nên tứ giác ACEF nội tiếp.

Suy ra $\angle BFE = \angle ACB$ (cùng bù với góc AFE) (1)

Kẻ tia tiếp tuyến Bx của đường tròn (O) tại B.

Ta có $\angle ACB = \angle ABx$ (cùng chắn cung AB) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BFE = \angle ABx$

Do đó $Bx \parallel EF$

Mà $OB \perp Bx$ nên $OB \perp EF$

Xét $\triangle BEF$ và $\triangle BAC$ có $\angle B$ chung và $\angle BFE = \angle ACB$ (theo (1))

nên $\triangle BEF$ và $\triangle BAC$ đồng dạng.

Mặt khác $\triangle BEF$ và $\triangle BAC$ lần lượt nội tiếp đường tròn bán kính $\frac{BH}{2}$ và đường tròn bán

kính OB nên $\frac{EF}{AC} = \frac{BH}{2.OB}$

Từ đó ta có $\frac{BH}{BO} = 2 \cdot \frac{EF}{AC}$

b) Gọi M_1 và N_1 lần lượt là các điểm đối xứng với P qua AB và AC.

Ta có: $AM_1B = APB$ (do tính chất đối xứng) (3)

$APB = ACB$ (cùng chắn cung AB) (4)

Tứ giác BEHF nội tiếp nên $BFE = BHE$ (5)

Mặt khác theo câu a) $BFE = ACB$ (6)

Từ (3), (4), (5), (6) suy ra $AM_1B = BHE \Rightarrow AM_1B + AHB = 180^\circ$,

do đó tứ giác AHBM₁ nội tiếp

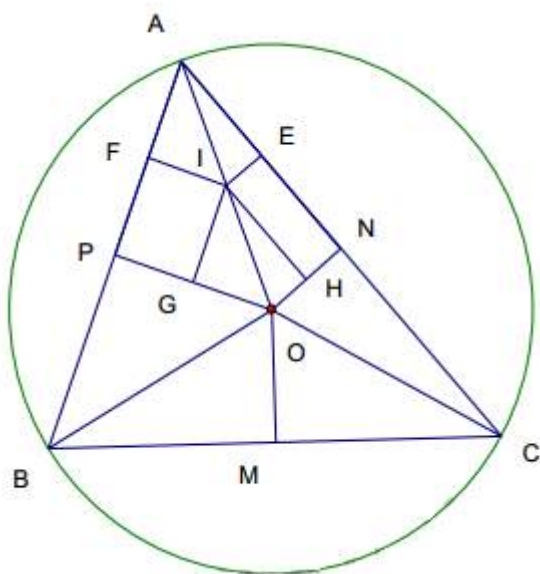
$\Rightarrow AHM_1 = ABM_1$ mà $ABM_1 = ABP$ nên $AHM_1 = ABP$.

Chứng minh tương tự ta có $AHN_1 = ACP$

$\Rightarrow AHM_1 + AHN_1 = ABP + ACP = 180^\circ \Rightarrow M_1, N_1, H$ thẳng hàng

Mặt khác MN là đường trung bình của tam giác PM₁N₁, do đó MN đi qua trung điểm của PH.

Câu 5



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BC, CA, AB.

Do tam giác ABC nhọn nên O nằm trong tam giác ABC

Vì $\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle MOC = 60^\circ \Rightarrow OA = OB = OC = \frac{MC}{\sin 60^\circ} = 2$

Vì O nằm trong tam giác ABC và $OM \perp BC, ON \perp AC, OP \perp AB$

Suy ra tam giác ABC được chia thành 3 tứ giác ANOP, BMOP, CMON nội tiếp các đường tròn có đường kính 2 (đường kính lần lượt là OA, OB, OC).

Theo nguyên lý Dirichlê, tồn tại ít nhất một trong 3 tứ giác này chứa ít nhất 5 điểm trong 13 điểm đã cho, giả sử đó là tứ giác ANOP.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của NA, AP, PO, ON và I là trung điểm OA, suy ra $IA=IP=IO=IN=1$

Khi đó tứ giác ANOP được chia thành 4 tứ giác AEIF, FIGP, IGOH, IHNE nội tiếp các đường tròn có đường kính 1.

Theo nguyên lý Dirichlê, tồn tại ít nhất một trong 4 tứ giác này chứa ít nhất 2 điểm trong 5 điểm đã cho, giả sử đó là tứ giác AEIF chứa 2 điểm X, Y trong số 13 điểm đã cho.

Vì X, Y nằm trong tứ giác AEIF nên X, Y nằm trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác này, do đó XY không lớn hơn đường kính đường tròn này, nghĩa là khoảng cách giữa X, Y không vượt quá 1.

MỤC LỤC**Phần 1. Đề luyện thi****Phần 2. Đáp án**

• Đề 1:	Trang57
• Đề 2:	Trang61
• Đề 3:	Trang64
• Đề 4:	Trang68
• Đề 5:	Trang72
• Đề 6:	Trang77
• Đề 7:	Trang81
• Đề 8:	Trang83
• Đề 9:	Trang88
• Đề 10:	Trang93
• Đề 11:	Trang97
• Đề 12:	Trang100
• Đề 13:	Trang105
• Đề 14:	Trang113
• Đề 15:	Trang116
• Đề 16:	Trang120
• Đề 17:	Trang124
• Đề 18:	Trang127
• Đề 19:	Trang129
• Đề 20:	Trang132
• Đề 21:	Trang134
• Đề 22:	Trang137
• Đề 23:	Trang141
• Đề 24:	Trang146
• Đề 25:	Trang149
• Đề 26:	Trang153
• Đề 27:	Trang157
• Đề 28:	Trang161
• Đề 29:	Trang167
• Đề 30:	Trang172
• Đề 31:	Trang174
• Đề 32:	Trang176
• Đề 33:	Trang180
• Đề 34:	Trang185
• Đề 35:	Trang190

- Đề 36: _____ Trang194
- Đề 37: _____ Trang198
- Đề 38: _____ Trang202
- Đề 39: _____ Trang206
- Đề 40: _____ Trang211
- Đề 41: _____ Trang215
- Đề 42: _____ Trang219
- Đề 43: _____ Trang222
- Đề 44: _____ Trang226
- Đề 45: _____ Trang228
- Đề 46: _____ Trang231
- Đề 47: _____ Trang234
- Đề 48: _____ Trang239
- Đề 49: _____ Trang243
- Đề 50: _____ Trang247

-----Hết-----