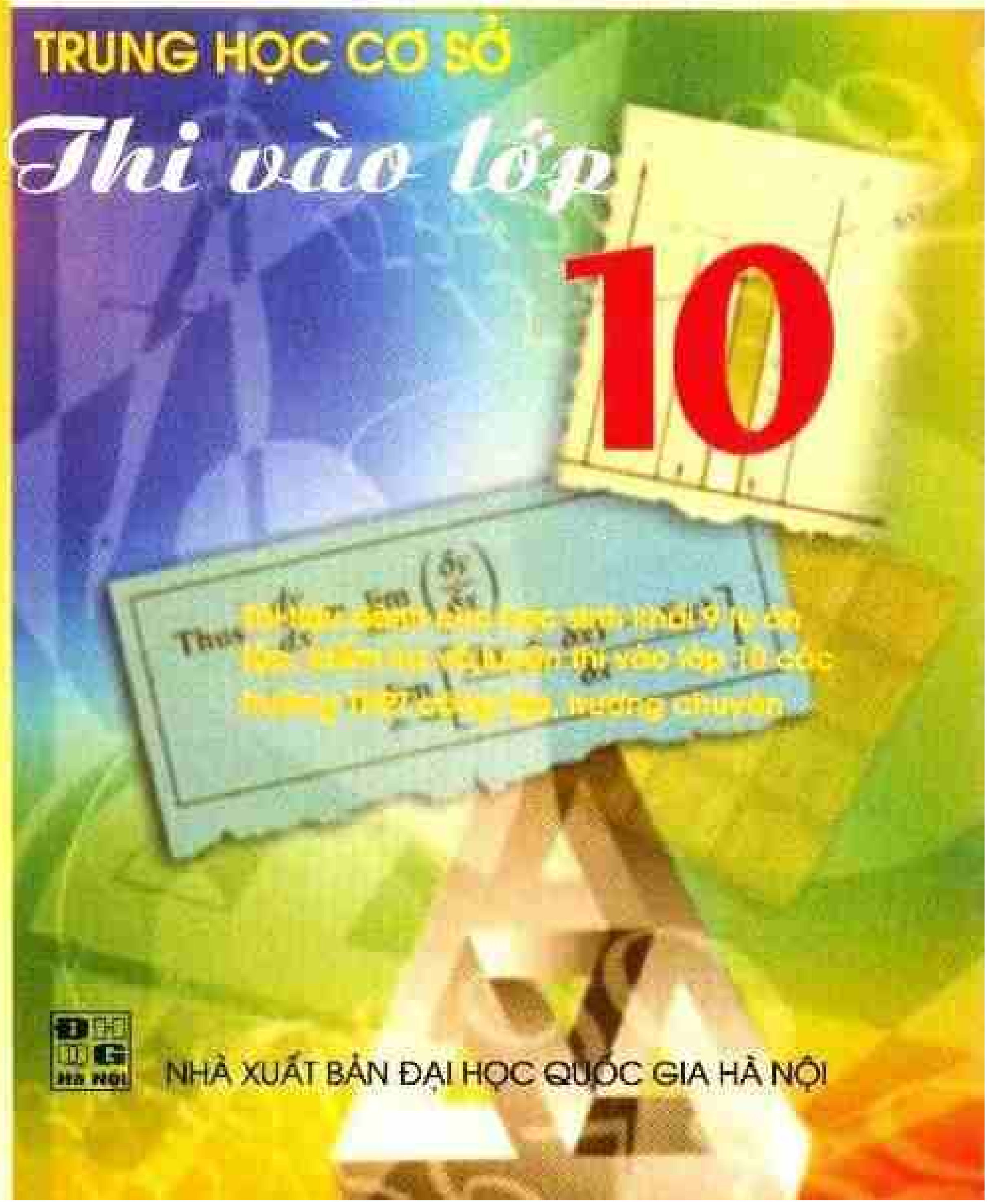
MAI CÔNG MÃN (CHỦ BIÊN)
NGUYỄN TRỌNG DƯƠNG - NGUYỄN THẾ VẬN
NGUYỄN THỊ HIỀN - THIỀU THỊ HUYỀN

Tổng ôn tập TOÁN

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Thi vào lớp 10



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MAI CÔNG MÃN (CHỦ BIÊN)
NGUYỄN TRỌNG DƯƠNG - NGUYỄN THẾ VẬN
NGUYỄN THỊ HIỀN - THIỀU THỊ HUYỀN

TỔNG ÔN TẬP
TOÁN
TRUNG HỌC CƠ SỞ
Thi vào lớp 10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập : **NGUYỄN BÁ THÀNH**

Biên tập
Đức Hoàng

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ :
2bisA Đinh Tiên Hoàng - P.Đakao - Q.1 - TP.HCM
ĐT : 08 9111564 - Fax : 08 9102915
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

Tổng ôn tập Toán THCS và thi vào lớp 10
Mã số : 1L – 254 ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại XN in
Số xuất bản : 769 – 2007/CXB/26 – 114/ĐHQGHN ngày 21/09/2007.
Quyết định xuất bản số : 585 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2008.

MỤC LỤC

PHẦN I : ĐẠI SỐ

PHẦN II : HÌNH HỌC

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

PHẦN I : ĐẠI SỐ

PHẦN II : HÌNH HỌC

BÀI TẬP NÂNG CAO

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP NÂNG CAO

LỜI GIỚI THIỆU

Việc đổi mới chương trình và sách giáo khoa ở bậc Trung học cơ sở đã hoàn chỉnh từ lớp 6 đến lớp 9. Để giúp học sinh nắm được những kiến thức cơ bản của chương trình, nâng cao khả năng tự học, tự rèn luyện trong quá trình học tập, đồng thời có kiến thức vững vàng để tiếp tục học ở bậc Trung học phổ thông.

Chúng tôi biên soạn cuốn sách " Ôn luyện Toán THCS và thi vào lớp 10 ", gồm các phần chính sau:

Phần I: Đại số

Phần II: Hình học

Phần III: Bài tập nâng cao

Phần IV: Hướng dẫn giải

Trong mỗi phần chúng tôi cố gắng soạn theo tinh thần bám sát kiến thức sách giáo khoa. Trong từng đơn vị kiến thức viết theo bố cục như sau:

1. Kiến thức cần nhớ: Tóm tắt các kiến thức cơ bản
2. Những điểm cần lưu ý:
   - Nêu phương pháp giải
   - Nhấn mạnh các sai lầm học sinh có thể mắc phải và cách khắc phục
3. Bài tập ví dụ: Theo hướng bám sát
4. Bài tập tự luyện: Có cả bài tập trắc nghiệm khách quan và tự luận

Trong quá trình biên soạn, chúng tôi đã cố gắng trình bày để học sinh dễ tiếp cận và nắm vững kiến thức của chương trình theo hướng đổi mới, tuy vậy không tránh khỏi thiếu sót. Xin được tiếp thu ý kiến góp ý phê bình từ phía bạn đọc.

Xin chân thành cảm ơn !

PHẦN THỨ NHẤT.

ĐẠI SỐ

I. BIẾN ĐỔI ĐỒNG NHẤT

I.1. Hằng đẳng thức

1. Kiến thức cần nhớ

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$. $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

$A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B)$. $A^3 - B^3 = (A-B)^3 - 3AB(A-B)$

2. Những điểm cần lưu ý

- Khi giải các bài toán vận dụng các hằng đẳng thức, chúng ta phải vận dụng các hằng đẳng thức theo cả hai chiều khai triển và thu gọn một cách linh hoạt.
- Hai đa thức bằng nhau với mọi giá trị của biểu thức khi tất cả các hệ số của chúng tương ứng bằng nhau.

  Một đa thức bằng đa thức không khi tất cả các hệ số của chúng đều bằng 0.

3. Các ví dụ

Ví dụ 1: Thu gọn biểu thức sau:

$$P = (2x-3)^2 + (6-4x)(2x+5) + (2x+1)^2 + 8(2x+1) + 16$$

Giải

Ta có: $P = (2x-3)^2 - 2(2x-3)(2x+5) + [(2x+1)^2 + 8(2x+1) + 16]$

$P = (2x-3)^2 - 2(2x-3)(2x+5) + (2x+5)^2$

$P = (2x+5-2x+3)^2 = 64$

Ví dụ 2: Cho $a + b + c = 0$ và $abc = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tính giá trị biểu thức $M = a^3 + b^3 + c^3$

Giải

Ta có: $M = a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3$

$= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b)$

$= -3ab(a+b) = 3abc = \sqrt{3}$

Từ đây ta có: Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
Điều ngược lại thì sao ?

Ví dụ 3: Cho $x + \frac{1}{x} = 4$. Tính $x^5 + \frac{1}{x^5}$

Giải

$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16$. nên $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) = 4.13 = 52$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 52.14 - 4 = 724$$

4. Bài tập tự luyện

Bài 1: Điền các biểu thức thích hợp vào ô trống :

a. $(2x + 3y)(\square + \square + \square) = 8x^3 + 27\square$

b. $(4x - 3y)(\square - \square + \square) = 64\square - 27y^3$

c. $(2x - 1)^2 - 2\square \times \square + (1 + \square)^2 = 4$

d. $(2 - 3x)^2 + 2\square \times \square + (\square + 2)^2 = 16$

Bài 2: Cho a là nghiệm của phương trình: $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

Tính giá trị biểu thức:

$$A = a^4 + \frac{1}{a^4} - 2\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) + 3\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - 4\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

Bài 3: Cho các số $a, b \in R$ thoả mãn:

$$(a - 3)(b - a) + (a - b)(b - 3) + (a - 3)(3 - b) + 3 = 0$$

Tính giá trị biểu thức: $\sqrt{(a - b)^2 + (a - 3)^2 + (b - 3)^2}$

Bài 4: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thoả mãn: $ab + ac + bc = 1$.

Tính giá trị biểu thức: $A = \dfrac{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2 + 2}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)}$

I.2. Ph n tích đa thức thành nhân tử

Để phân tích đa thức thành nhân tử, chúng ta có nhiều phương pháp như: đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức đáng nhớ, nhóm nhiều hạng tử, tách các hạng tử thành nhiều hạng tử, thêm bớt cùng một hạng tử, đặt ẩn phụ, dùng phương pháp hệ số bất định, phương pháp xét giá trị riêng.v.v. Sau đây a nêu chủ yếu một số phương pháp thường dùng.

1. Phương pháp đặt nhân tử chung:

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $3x^2(y - 2z) - 15x(y - 2z^2$

Giải

Ta có $3x^2(y - 2z) - 15x(y - 2z)^2$

$= 3x(y - 2z)[x - 5(y - 2z)] = 3x(y - 2z)(x - 5y + 10z)$

Ví dụ 2: Phân tích đa thức $A = 2x(y - z) + (z - y)(x + y)$ thành nhân tử

Giải

$A = 2x(y - z) + (z - y)(x + y) = 2x(y - z) - (y - z)(x + y)$

$= (y - z)[2x - (x + y)] = (y - z)(2x - x - y) = (y - z)(x - y)$

Chú ý: Nhiều khi cần đổi dấu để xuất hiện nhân tử chung

2. *Phương pháp dùng hằng đẳng thức :*

Ví dụ 3: Phân tích đa thức $-x^4y^2 + 8x^2y - 16$ thành nhân tử

Giải

Ta có: $-x^4y^2 + 8x^2y - 16 = -(x^4y^2 - 8x^2y - 16\ ) = -(x^2y - 4)^2$

Chú ý: *Có những trường hợp phải đổi dấu mới áp dụng được hằng đẳng thức đáng nhớ để phân tích đa thức thành nhân tử .*

Ví dụ 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

Giải

Ta có: $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

$= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)\ (2bc - b^2 - c^2 + a^2)$

$= [(b + c)^2 - a^2]\ [a^2 - (b - c)^2]$

$= (b + c - a)(b + c + a)(a - b + c)(a + b - c)$

3. *Phương pháp nhóm nhiều hạng tử*

Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng, ta kết hợp nhiều hạng tử của đa thức thành các nhóm thích hợp, rồi áp dụng các phương pháp khác để phân tích thành nhân tử đối với từng nhóm

Ví dụ 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $P = x^3z + x^2yz - x^2z^2 - xyz^2$

Giải

Ta có: $P = x^3z + x^2yz - x^2z^2 - xyz^2 = (x^3z - x^2z^2) + (x^2yz - xyz^2)$

$P = x^2z(x - z) + xyz(x - z) = xz(x - z)(x + y)$.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị của x, y sao cho: $xy + 1 = x + y$

Giải

Ta có: $xy + 1 = x + y \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow (xy - x) - (y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(x - 1) = 0$

+ Hoặc $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

+ Hoặc $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Vậy các giá trị cần tìm của x và y là: $x = 1$, y tuỳ ý $y = 1$, x tuỳ ý

4. *Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp*

Bài toán phân tích một đa thức thành nhân tử nhiều lúc ta phải vận dụng linh hoạt các phương pháp trên đồng thời sử dụng các tính chất giao hoán, kết hợp của phép cộng và phép nhân , tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng các đa thức.

Ví dụ7: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$M = ab(a + b) - bc(b + c) - ac(c - a)$$

Giải

$$M = ab(a + b) - bc(b + c) - ac(c - a) = a^2b + ab^2 - b^2c - bc^2 - ac(c - a)$$
$$= (a^2b - bc^2) + (ab^2 - b^2c) + ac(a - c)$$
$$= b(a^2 - c^2) + b^2(a - c) + ac(a - c) = (a - c)[b(a + c) + b^2 + ac]$$
$$= (a - c)[ba + cb + b^2 + ac] = (a - c)[(ba + b^2) + (ac + cb)]$$
$$= (a - c)[b(a + b) + c(a + b) = (a - c)(a + b)(b + c)$$

Ngoài các phương pháp trên, ta còn dùng một số phương pháp khác nữa, chẳng hạn:

1. Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử rồi nhóm các hạng tử thích hợp

Ví dụ 8: Phân tích đa thức thành nhân tử : $A = x^4 + x^3 + x^2 - x - 2$

Giải

$$A = x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = (x^4 - x^2) + (x^3 - x) + (2x^2 - 2)$$
$$= x^2(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 2)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 2)$$

Ví dụ 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $B = 2x^3 + x^2 + x - 1$

Giải

$$B = 2x^3 + x^2 + x - 1 = 2x^3 - x^2 + 2x^2 - x + 2x - 1$$
$$= x^2(2x - 1) + x(2x - 1) + (2x - 1) = (2x - 1)(x^2 + x + 1)$$

2. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Ta có thể thêm bớt cùng một hạng tử vào đa thức đã cho để làm xuất hiện những nhóm số hạng mà ta có thể phân tích đa thức thành nhân tử bằng các phương pháp: đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử…

Ví dụ 10: Phân tích đa thức $C = x^5 + x + 1$ thành nhân tử

Giải

Ta có: $C = x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$

$$= x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

Ví dụ 11: Phân tích đa thức $D = 4x^4 + 1$ thành nhân tử

Giải

Ta có: $D = 4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2$

$$= (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2 = (2x^2 + 1 - 2x)(2x^2 + 1 + 2x)$$

3. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt biến phụ

Trong một số trường hợp việc đặt biến phụ thích hợp giúp cho phân tích đa thúc thành nhân tử được thuận lợi.

Ví dụ 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$

Giải

$A = (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12 = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$

Đặt : $y = x^2 + x$.

Ta có: $A = y^2 + 4y - 12 = y^2 + 4y + 4 - 16 = (y + 2)^2 - 4^2$

$= (y + 2 - 4)(y + 2 + 4) = (y - 2)(y + 6) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 6)$

5. Bài tập áp dụng

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

Bài 1:

a) $(x^2 + y^2 - 2)^2 - (2xy - 2)^2$

b) $(a - b)(a^2 - c^2) - (a - c)(a^2 - b^2)$

c) $2x^2 - 5xy + 2y^2$

Bài 2:

a) $x^4 + 4x^2 - 5$

b) $x^3 + 2x + 3$

c) $x^3 + x^2 + 4$

d) $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

e) $x^3 + x^2 - 2x - 8$

f) $x^4 + x^3 - x - 1$

Bài 3:

a) $x^4 + 3x^2 + 4$ b) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ c) $64x^4 + 81$ d) $x^5 + x^4 + 1$

e) $x^8 + x + 1$ f) $x^8 + x^7 + 1$ g) $x^{10} + x^5 + 1$ h) $x^4 + 4y^2$

Bài 4:

a) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3$

b) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) - 72$

c) $(x^2 + x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$

d) $(4x + 1)(12x - 1)(x + 2)(x + 1) - 4$

I.3. Phân thức đại số

1. Kiến thức cần nhớ

- Hai phân thức bằng nhau: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$
- Nếu M khác đa thức 0 thì : $\frac{AM}{BM} = \frac{A}{B}$; $\frac{A:M}{B:M} = \frac{A}{B}$
- Các phép tính :
  + Phép cộng: $\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A+B}{M}$ Với M là đa thức khác đa thức 0

  (Nếu hai phân thức khác mẫu thì phải quy đồng mẫu thức)

+ Phép trừ: $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\left(-\frac{C}{D}\right)\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ với $-\frac{C}{D}$ là phân thức đối của phân thức $\frac{C}{D}$. $\frac{A}{M}-\frac{B}{M}=\frac{A-B}{M}$. Với M là đa thức khác đa thức 0

+ Phép nhân: $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{BD}$ Với B , D là các đa thức khác đa thức 0

+ Phép chia: $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.\frac{D}{C}=\frac{A.D}{B.C}$. Với B , C , D là các đa thức khác đa thức 0

2. Một số điểm cần lưu ý

- Trước khi quy đồng mẫu thức hay thực hiện các phép tính, nếu có thể thì nên rút gọn phân thức trước. Kết quả sau khi biến đổi các biểu thức hữu tỉ cũng cần được rút gọn.
- Các phép tính với đa thức cũng có đầy đủ các tính chất của các phép tính với các số thực.
- Khi giải các bài toán liên quan đến giá trị của phân thức. Ta phải tìm điều kiện xác định của phân thức.

3. Bài tập ví dụ

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức sau và tìm giá trị nguyên của x để biểu thức có giá trị nguyên: $M=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$

Giải

Ta có: $M=\left(\frac{x-2x}{2(x+4)}-\frac{2x}{4(2-x)+x(2-x)}\right).\frac{x-x-2}{x}$

$$=\left(\frac{x^2-2x}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{2x^2}{\left(x^2+4\right)(x-2)}\right).\frac{\left(x^2-2\right)(x+1)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2(x-2)^2+4x^2}{2(x-2)\left(x^2+4\right)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

$$=\frac{x\left(x^2-4x+4+4x\right)}{2\left(x^2+4\right)(x-2)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

$$=\frac{x\left(x^2+4\right)}{2(x-2)\left(x^2+4\right)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}=\frac{x+1}{2x}$$

Để M xác định thì: $\begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ \left(x^2 + 4\right)(x - 2) \neq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ (*)

Khi đó M nguyên thì 2 M nguyên hay $\frac{x+1}{x}$ nguyên.

Mà $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \in Z \Leftrightarrow x \in U(1) = \{-1; 1\}$

Với x = −1 thoả mãn (*) và $M = 0 \in Z$

Với x = 1 thoả mãn (*) và $M = 1 \in Z$

Vậy x = 1 ; x = −1 thoả mãn điều kiện bài ra .

Ví dụ 2: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{2x^2+1}{x^3-1} - \frac{x}{x^2+x+1}\right)\left(\frac{x^3+1}{1+x} - x\right)$

a) Rút gọn M

b) Tìm x để M = 3

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 - M$

Giải

a) Ta có:

$$M = \left(\frac{2x^2 + 1 - x(x-1)}{x^3 - 1}\right).\left(1 - 2x + x^2\right) = \frac{x^2+x+1}{x^3-1}(x-1)^2 = x - 1$$

b) Để M = 3 thì $\begin{cases} x - 1 = 3 \\ x^3 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$

c) Ta có: $x^2 - M = x^2 - x + 1 = x^2 - 2x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Vậy P nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ x^3 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

4. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho x, y, z đôi một khác nhau. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{xy}{(y-z)(z-x)} + \frac{yz}{(z-x)(x-y)} + \frac{xz}{(x-y)(y-z)}$$

Bài 2: Rút gọn biểu thức :

$$A = 1:\left(\frac{1}{2+x} + \frac{\frac{3x^2}{2}}{4-x^x} - \frac{2}{4-2x^2}\right):\frac{1}{4-2x^2}$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức :

$$M = \left(\frac{x^2-5x}{x^2-25} - 1\right):\left(\frac{25-x^2}{x^2+2x-15} - \frac{x+3}{x+5} + \frac{x-5}{x-3}\right)$$

và tìm giá trị của x để M < 1

Bài 4: Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{x-1}{3x-1} - \frac{1}{1+3x} + \frac{8x}{9x^2-1}\right):\left(1 - \frac{3x-2}{3x+1}\right)$

Tìm các giá trị của x để $B = \frac{5}{6}$

Bài 5: Tính giá trị biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{2x}{x^2+4x+3}\right)^2 . \frac{(x-3)^2+12x}{4}$$

với $x = \sqrt{2006} + \sqrt{2007}$

II . BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

II.1 Các phép tính căn thức

1. Kiến thức cần nhớ

* $\sqrt{A}$ tồn tại (có nghĩa) khi và chỉ khi $A \geq 0$
* Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ với } A \geq 0 \\ -A \text{ với } A < 0 \end{cases}$

2. Những điều cần lưu ý

Muốn tìm các giá trị của x để căn thức $\sqrt{A}$ có nghĩa ta phải giải bất phương trình: $A \geq 0$ (Xem phần bất phương trình)

3. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{3x-2}$ c) $\sqrt{x^2-5x-6}$ e) $\sqrt{x^2-2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{2x-1}}$ d) $\sqrt{x^2+3}$

Giải

a) $\sqrt{3x-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{2x-1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \\ 2x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$

c) $\sqrt{x^2 - 5x - 6}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-6) \ge 0$

Lập bảng xét dấu ta được $x \le -1$; $x \ge 6$ thoả mãn điều kiện bài ra

d) Ta có $x^2 \ge 0\ \forall x \Rightarrow x^2 + 3 > 0\ \forall x$ nên $\sqrt{x^2 + 3}$ có nghĩa với $\forall x$.

e) $\sqrt{x^2 - 2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 2 \Leftrightarrow |x| \ge \sqrt{2}$

hay $x \ge \sqrt{2}$ hoặc $x \le -\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Tính:

a) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

Giải

a) Ta có: $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \left|\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2} - 1$ (vì $\sqrt{2} > 1$)

b) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ (vì $\sqrt{3} > \sqrt{2}$)

Ví dụ 3: Khoanh tròn vào chữ cái đầu kết quả mà em cho là đúng

a) Biểu thức $3 - \sqrt{2 - 6x}$ có nghĩa khi:

A. $x \ge 3$ C. $x > 3$ B. $x \le -\dfrac{1}{3}$ D. $x < \dfrac{1}{3}$

b) Giá trị của biểu thức $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ bằng:

A. $1 - \sqrt{5}$ B. $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ C. $\sqrt{5} - 1$ D. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

Đáp số: a) b) C

4. Bài tập tự luyện

Bài 1: Tìm giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{6x - 3}$ c) $\sqrt{6 - x - x^2}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{6x - 3}}$ d) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 5}$ g) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{x - 1}}$

Bài 2: Tính:

a) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức:

a) $\dfrac{x-49}{\sqrt{x}-7}$ $(x \geq 0; x \neq 49)$

b) $\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}$

c) $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{6-2x}$ $(x \neq 3)$

II. 2 Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương

1. Kiến thức cần nhớ

+ Khai phương một tích: Nếu $A_1; A_2, \dots ; A_n \geq 0$

  Thì $\sqrt{A_1.A_2.A_3......A_n} = \sqrt{A_1}.\sqrt{A_2}.\sqrt{A_3}.........\sqrt{A_n}$

+ Khai phương một thương: Nếu $A \geq 0; B > 0$ thì $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

2. Một số vấn đề cần lưu ý

+ $A \geq 0$ thì $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$

+ Với A, $B \geq 0$ thì: $\sqrt{A+B} \leq \sqrt{A}+\sqrt{B}$

  Dấu bằng xảy ra khi A hoặc B bằng 0

+ Với $A \geq B$ thì: $\sqrt{A-B} \geq \sqrt{A}-\sqrt{B}$ Dấu bằng xảy ra khi $A = B$

+ Nếu chưa khẳng định được A và B không âm thì ta vẫn có thể khai căn một tích hoặc thương nhưng phải lấy giá trị tuyệt đối:

  $\sqrt{AB} = \sqrt{|A|}.\sqrt{|B|}$ và $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{|A|}}{\sqrt{|B|}}$

3. Các ví dụ

Ví dụ 4: Tính:

a) $\sqrt{9-\sqrt{17}}.\sqrt{9+\sqrt{17}}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$

c) $\sqrt{4(a-3)^2}$ $(a \geq 3)$

d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ $(b < 0)$

e) $\dfrac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$ $(m; n > 0)$

Giải

a) $\sqrt{9-\sqrt{17}}.\sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$

b) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{3}+\sqrt{2}.\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{4}.\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{7})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sqrt{4(a-3)^2} = \sqrt{4}.\sqrt{(a-3)^2} = 2.|a-3| = 2.(a-3)$ (Vì $a \geq 3$)

d) $\sqrt{b^2(b-1)^2} = \sqrt{b^2}.\sqrt{(b-1)^2} = |b|.|b-1| = b(b-1)$

Vậy $\sqrt{b^2(b-1)^2} = b(b-1)$

e) $\dfrac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}} = \sqrt{\dfrac{45mn^2}{20m}} = \sqrt{\dfrac{9n^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{9n^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{9}.\sqrt{n^2}}{2} = \dfrac{3|n|}{2} = \dfrac{3n}{2}$

(vì $n > 0$)

4. *Bài tập tự luyện*

Bài 1: Tính:

a) $(\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{8}) : \sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$

c) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt{9-6\sqrt{2}} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

e) $(\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{2}).\sqrt{3}$

Bài 2: Rút gọn:

$$A = \frac{x - y + 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y} + 3} \quad (x, y \geq 0)$$

$$B = \frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x}).(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \quad (x, y > 0)$$

$$C = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}}{\sqrt{2}} \quad (x \geq 4)$$

$$D = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\frac{(y - 2\sqrt{y} + 1)^2}{(x-1)^4}} \quad (x \neq 1;\ y \neq 1;\ y > 0)$$

Bài 3: Tìm x biết:

a) $\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x-3} = 0$

b) $\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x+2} = 0$

II. 3 Các phép biến đổi đơn giản căn thức bậc hai

1. *Kiến thức cần nhớ*

+ Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|.\sqrt{B}$ $(B \geq 0)$

+ Đưa một thừa số vào trong dấu căn:

$A.\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ với $A \geq 0; B \geq 0$; $A.\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ với $A < 0; B \geq 0$

+ Khử mẫu của biểu thức lấy căn: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ với $\dfrac{A}{B} \geq 0$; $B \neq 0$

+ Trục căn thức ở mẫu:

+) $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ $(B > 0)$

+) $\frac{A}{\sqrt{B} \pm C} = \frac{A(\sqrt{B} \mp C)}{B - C^2}$ $(B \geq 0; B \neq C^2)$

+) $\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} \mp C)}{B - C}$ $(B \geq 0; C \geq 0; B \neq C)$

2. Những vấn đề cần lưu ý

Khi trục căn thức của biểu thức ta nhân cả tử và mẫu của biểu thức lấy căm với liên hợp của mẫu

Ví dụ 5 : Trục căn thức ở mẫu

1. $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3.2}{8.2}} = \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

2. $\sqrt{\frac{b}{a^3}} = \sqrt{\frac{b.a}{a^4}} = \frac{\sqrt{ab}}{a^2}$ (Với $ab \geq 0$)

3. $\frac{1}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}\right)} = -\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{33}$

Việc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn đôi khi ta phải biến đổi biểu thức lấy căn về dạng thích hợp rồi mới thực hiện được.

Ví dụ 6: $\sqrt{28a^3b} = \sqrt{4a^2.7ab} = \sqrt{(2a)^2.7ab} = 2|a|\sqrt{7ab}$ (Với $ab \geq 0$)

3. Các ví dụ

Ví dụ 7:

a) Cho các số $3\sqrt{12}$ và $2\sqrt{26}$. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

A. $3\sqrt{2} > 2\sqrt{26}$; B. $3\sqrt{2} < 2\sqrt{26}$; C. $3\sqrt{2} = 2\sqrt{26}$

b) Cho các số: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}$ và $\frac{1}{3}\sqrt{19}$. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

A. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2}} < \frac{1}{3}\sqrt{19}$; B. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2}} > \frac{1}{3}\sqrt{19}$ C. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{19}$

Đáp số: a) B b) A

c) Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

A. $x.\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2x}$ B. $x.\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2x}$ với $x \geq 0$

C. $x.\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2x}$ với $x > 0$

Đáp số: c) C

Ví dụ 8: Rút gọn các biểu thức sau

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

b) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\dfrac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}$ $(x \geq 0)$

d) $D=\dfrac{2}{2x-1}\sqrt{5x^4(1-4x+4x^2)}\ (x \neq \dfrac{1}{2})$

Giải

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}-\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\dfrac{2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2}{2}=2$

b) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\dfrac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\dfrac{(5+\sqrt{5})^2}{25-5}+\dfrac{(5-\sqrt{5})^2}{25-5}$

$=\dfrac{25+10\sqrt{5}+25-10\sqrt{5}+5+5}{20}=3$

c) $\dfrac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}=\dfrac{x-\sqrt{3x}+3}{(\sqrt{x})^3+(\sqrt{3})^3}=\dfrac{x-\sqrt{3x}+3}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x-\sqrt{3x}+3)}=\dfrac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$

d) $D=\dfrac{2}{2x-1}\sqrt{5x^4(1-4x+4x^2)}=\dfrac{2}{2x-1}\sqrt{(5x^2)^2(1-2x)^2}$

$=\dfrac{2}{2x-1}.x^2|1-2x|.\sqrt{5}$

Vậy $D=2x^2\sqrt{5}$. Nếu $x>\dfrac{1}{2}$; $D=-2x^2\sqrt{5}$ Nếu $x<\dfrac{1}{2}$

4. *Bài tập tự luyện*

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}-\dfrac{2}{3-2\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}-3}-\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{x+y}{y}\sqrt{\dfrac{xy^2+xy^3}{x^2+2xy+y^2}}$ $(xy \geq 0;\ y \neq 0)$ tại $x=2;\ y=1$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+.....+\dfrac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2007}}$

Bài 2: So sánh:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}$ với $\dfrac{3}{13}$

b) $\sqrt{30}-\sqrt{29}$ với $\sqrt{29}-\sqrt{28}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{2b}{a-b}$ $(a \geq 0;\ b \geq 0;\ a \neq b)$

b) $\dfrac{a-b}{b^2}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}}$ $(b \neq 0;\ a \neq b)$

Bài 4: Tìm x biết:

a) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ b) $x-7\sqrt{x-3}+9=0$

II. 4. Thực hiện phép tính. Rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai

1. Kiến thức cần nhớ:

+ Với m, p, q, r $\in$ R; A $\in Q^+$ thì $p\sqrt{A}$; $q\sqrt{A}$; $r\sqrt{A}$ được gọi là các căn đồng dạng.

+ $p\sqrt{A}+q\sqrt{A}+r\sqrt{A}+m=(p+q+r)\sqrt{A}+m$

2. Các ví dụ

Ví dụ 9: Thực hiện các phép tính sau:

a) $3\sqrt{2a}-\sqrt{18a^3}+4\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\dfrac{1}{4}\sqrt{128a}$ với $a \geq 0$

b) $\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{m}{n}}-\dfrac{ab}{n}\sqrt{mn}+\dfrac{a^2}{b^2}\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ với $m>0;\ n>0$

c) $\sqrt{72}-\sqrt{5\dfrac{1}{3}}+4,5\sqrt{2\dfrac{2}{3}}+2\sqrt{27}$

d) $\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{6}{\sqrt{3}-3}$

Giải

a) $3\sqrt{2a}-\sqrt{18a^3}+4\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\dfrac{1}{4}\sqrt{128a}$

$=3\sqrt{2a}-\sqrt{9a^2.2a}+4\dfrac{1}{2}\sqrt{2a}-\dfrac{1}{4}\sqrt{64.2a}$

$=3\sqrt{2a}-3a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}-\dfrac{1}{4}.8\sqrt{2a}$ (vì $a \geq 0$)

$=3\sqrt{2a}-3a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}-2\sqrt{2a}=3\sqrt{2a}(1-a)$

b) $\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{m}{n}}-\dfrac{ab}{n}\sqrt{mn}+\dfrac{a^2}{b^2}\sqrt{\dfrac{m}{n}}=\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{m}{n}}-\dfrac{ab}{n}\sqrt{mn}+\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{\sqrt{mn}}{n}$ (vì $n>0$)

$$= \frac{ab\sqrt{mn} - ab^3\sqrt{mn} + a^2\sqrt{mn}}{b^2n} = \frac{a\sqrt{mn}(b - b^2 + a)}{b^2.n}$$

c) $\sqrt{72} - \sqrt{5\frac{1}{3}} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} + 2\sqrt{27} = \sqrt{6^2.2} - \sqrt{\frac{16}{3}} + 4,5\sqrt{\frac{8}{3}} + 2\sqrt{3^2.3}$

$$= 6\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{3} + 4,5.2\frac{\sqrt{6}}{3} + 2.3\sqrt{3} = 6\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{6}}{3} + 6\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + \frac{14}{3}\sqrt{3}$$

d) $\dfrac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \dfrac{(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2.\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = (\sqrt{2 + \sqrt{3}}).(\sqrt{2 - \sqrt{3}})$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3}).(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{4 - 3} = 1$$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{3} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3} - 2} + \dfrac{6}{\sqrt{3} - 3} = \dfrac{4(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} + \dfrac{\sqrt{3} + 2}{3 - 4} + \dfrac{6(\sqrt{3} + 3)}{3 - 9}$

$$= 2(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2) - (\sqrt{3} + 3) = 2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 3 = -7$$

Ví dụ 10: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{4,5x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} - 5\sqrt{\frac{1}{2}x} - 12 = 0$ (1)

b) $2\sqrt{9x - 27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x - 75} - \frac{1}{2}\sqrt{49x - 147} = 20$ (2)

Giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 0$

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{9x}{2}} + \sqrt{25.2x} - \sqrt{16.2x} + \sqrt{36.2x} - 5\sqrt{\frac{2x}{4}} - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 4\sqrt{2x} + 6\sqrt{2x} - \frac{5}{2}\sqrt{2x} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{3}{2} + 5 - 4 + 6 - \frac{5}{2})\sqrt{2x} = 12$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{2x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (t/m)}$$

Vậy $S = \{2\}$

b) PT (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{9(x - 3)} - \frac{1}{5}\sqrt{25(x - 3)} - \frac{1}{7}\sqrt{49(x - 3)} = 20$; ĐKXĐ: $x \geq 3$

$$\Leftrightarrow 2.3\sqrt{x - 3} - \frac{1}{5}.5\sqrt{x - 3} - \frac{1}{7}.7\sqrt{x - 3} = 20$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}(6-1-1)=20 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}=5 \Leftrightarrow x-3=25$

$\Leftrightarrow x-3=28$ (t/m)

Vậy $S=\{28\}$

Ví dụ 11: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=4\sqrt{6}$

b) $\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right):(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=1$ $(x>0; y>0; x\neq y)$

Giải

a) Biến đổi vế trái ta có:

$$\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=\left[\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right]^2-\left[\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right]^2$$

$$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

$$=(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}.2\sqrt{3}=4\sqrt{6}$$

So sánh VT và VP ta thấy đẳng thức đã cho luôn đúng.

b) Biến đổi vế trái ta được: $\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right):(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

$$=\left[\frac{(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right]:(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

$$=\left[\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right]:(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

$$=(x+\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}):(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2:(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=1$$

So sánh VT và VP ta thấy đẳng thức đã cho luôn đúng.

Ví dụ 12: Cho biểu thức: $B=\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{1+a^2}}+1\right)$

a) Rút gọn B

b) Tính giá trị của B nếu: $a=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Giải

a) Điều kiện: $-1\le a\le 1$

Khi đó: $B=\frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}:\frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}.\frac{\sqrt{1-a^2}}{3+\sqrt{1-a^2}}$

$$=\frac{\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}}=\sqrt{1-a}$$. Vậy $B=\sqrt{1-a}$

b) $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3} = 2\sqrt{3} - 3$

Khi đó: $1 - a = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$

$B = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3} - 1 \quad (\sqrt{3} > 1)$

3. *Bài tập tự luyện:*

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau:

a) $(1 - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}) : (\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + 2)$

b) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$

c) $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}} + \dfrac{1}{3+\sqrt{7}} - \dfrac{6}{\sqrt{7}-2} - \dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

e) $\left(\dfrac{9-2\sqrt{14}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{9+2\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\right)^2$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

b) $(\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \dfrac{\sqrt{216}}{3}).(\dfrac{1}{\sqrt{6}}) = -1,5$

c) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = a - b \qquad (a, b > 0; a \neq b)$

d) $(1 + \dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1})(1 - \dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}) = 1 - a \quad (a > 0; a \neq 1)$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{ab}} : (\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}) - \dfrac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = -1$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $x - \sqrt{4x - 20} = 20$ b) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ c) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \dfrac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$ b) $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$ $(x \geq 4)$

Bài 5: Cho biểu thức: $A = (\dfrac{\sqrt{x}}{x-4} + \dfrac{2}{2-\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}) : (\sqrt{x} - 2 + \dfrac{10-x}{\sqrt{x}+2})$

a) Rút gọn

b) Tìm giá trị của x để $A > 0$

Bài 6: Cho biểu thức: $B = \left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x}\right) : \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) Rút gọn

b) Tính B khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$; $y = 3 + 2\sqrt{2}$

c) Chứng minh : $b \geq 0$

Bài 7: Cho biểu thức: $P = \left(\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \dfrac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \dfrac{4x}{x-9}\right) : \left(\dfrac{5}{3+\sqrt{x}} - \dfrac{4\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+x}\right)$

Biết với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 1$ thì P có nghĩa.

a) Rút gọn P.

b) Gọi x_0 là nghiệm của phương trình: $x^2 - 11x + 18 = 0$

Tính giá trị của P tại x_0

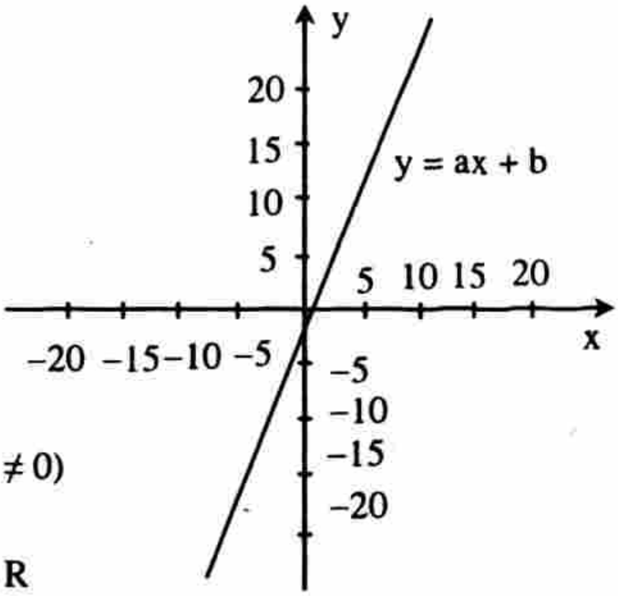
III. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. Hàm số bậc nhất và qui về bậc nhất

1.1. Kiến thức cần nhớ:

a. ***Định nghĩa***:

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$



b. ***Tính chất:*** Hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

+ TXĐ: $\forall x \in R$

+ Nếu $a > 0$ hàm số đồng biến trên R

Nếu $a < 0$ hàm số nghịch biến trên R.

+ Đồ thị của hàm số là một đường thẳng đi qua $M(0, b)$ và $N(-\dfrac{b}{a}, 0)$

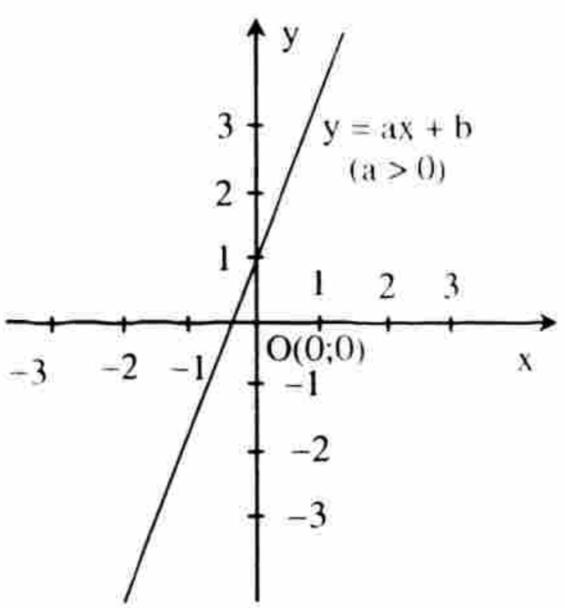
1.2. Những điều cần lưu ý:

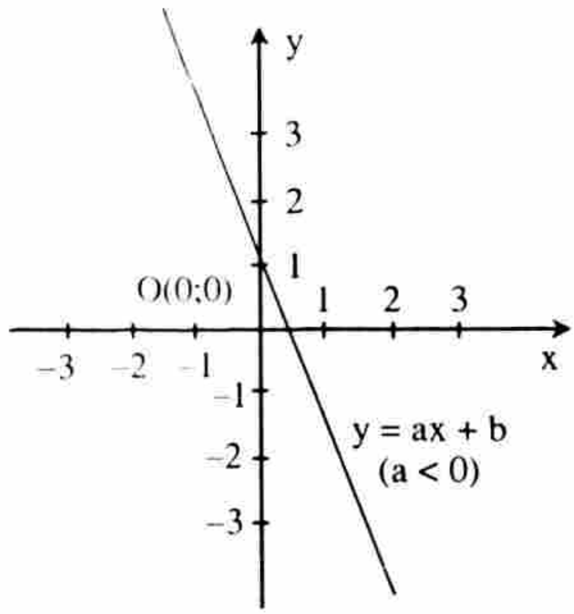
* Nếu $b = 0$ ta có hàm số $y = ax$ có đồ thị là một đường thẳng đi qua $O(0, 0)$ và $M(1, a)$.
* Nếu $a = 0$ ta có hàm số $y = b$ là hàm hằng.
* Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng song song với đường thẳng $y = ax$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b (b là tung độ gốc)
* Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ có hệ số góc là a

+ $a > 0 \Leftrightarrow 0^0 < \alpha < 90^0$

+ $a < 0 \Leftrightarrow 90^0 < \alpha < 180^0$

α - Góc tạo bởi đồ thị của hàm số và chiều dương của trục hoành





Chú ý: Nếu $b = 0$ ta có đường thẳng $y = ax$, a cũng được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax$

* + Những điểm có hoành độ bằng 0 nằm trên trục tung.

+ Những điểm có tung độ bằng 0 nằm trên trục hoành.

+ Những điểm có hoành độ bằng tung độ nằm trên đường phân giác của góc vuông thứ I và thứ II.

+ Những điểm có hoành độ và tung độ đối nhau nằm trên đường phân giác của góc vuông thứ III và thứ IV.

* Có những hàm số phải qua một số phép biến đổi mới đưa về dạng hàm số bậc nhất.

1.3. Các ví dụ

Ví dụ 1: Trong các hàm số biến x dưới đây, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Tại sao?

a) $y = 3x - 1$

b) $y = x(3x - 1) - (3x^2 - x) + 2$

c) $y = (m^2 + \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} + 1$

d) $y = mx - m^2 + \sqrt{2} - x$

e) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$

Giải

a) Hàm số $y = 3x - 1$ là một hàm số bậc nhất vì nó có dạng:

$y = ax + b;\ a = 3 \neq 0$

b) Ta có : $y = x(3x - 1) - 3(x^2 - x) + 2$

$= 3x^2 - x - 3x^2 + 3x + 2 = 2x + 2$

Vậy $y = 2x + 2$ nên hàm số đã cho là hàm số đưa được về dạng hàm số bậc nhất.

c) $y = (m^2 + \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} + 1$ là hàm số bậc nhất vì nó có dạng $y = ax + b$

với $a = m^2 + \sqrt{2} \neq 0$

d) $y = mx - m^2 + \sqrt{2} - x$

$y = (m - 1)x - m^2 + \sqrt{2}$

Hàm số này chưa hẳn đã là hàm số bậc nhất vì nếu $m = 1$ thì hàm số có dạng $y = \sqrt{2} - 1$ là hàm hằng.

e) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$ không phải là hàm số bậc nhất vì nó không có dạng:

$y = ax + b$

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = (a - 1)x + 3$

a) Tìm a để hàm số đồng biến? nghịch biến?

b) Tìm a biết rằng khi $x = \sqrt{2}$ thì $y = 1$

Giải

a) Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 1$

b) Với $x = \sqrt{2}$; $y = 1$ ta có $1 = (a - 1)\sqrt{2} + 3$

$\Leftrightarrow (a - 1) = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = 1 - \sqrt{2}$. Vậy $a = 1 - \sqrt{2}$

Ví dụ 3: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A(1; 2) và B(3; 4).

Xác định hàm số biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua A và B.

Chỉ ra hệ số góc của đường thẳng.

Giải

* Gọi phương trình đường thẳng đi qua A và B có dạng:

$y = ax + b$ ($a \neq 0$) (*)

Vì đường thẳng đi qua A(1; 2) ta có: $2 = a.1 + b \Leftrightarrow a + b = 2$ (1)

Vì đường thẳng đi qua B(3; 4) ta có: $4 = a.3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 4$ (2)

Ta có hệ : $\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Vậy đường thẳng cần tìm là: $y = x + 1$ có hệ số góc là $a = 1$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = (k + 1)x + k$. Biết đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 3.

a) Xác định hàm số trên

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

c) Tính góc tạo bởi đường thẳng và trục Ox (Kết quả làm tròn đến phút)

Giải

a) Vì đồ thị hàm số $y = (k + 1)x + k$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là 3

Ta có: $3 = (k + 1).0 + k \Rightarrow k = 3$

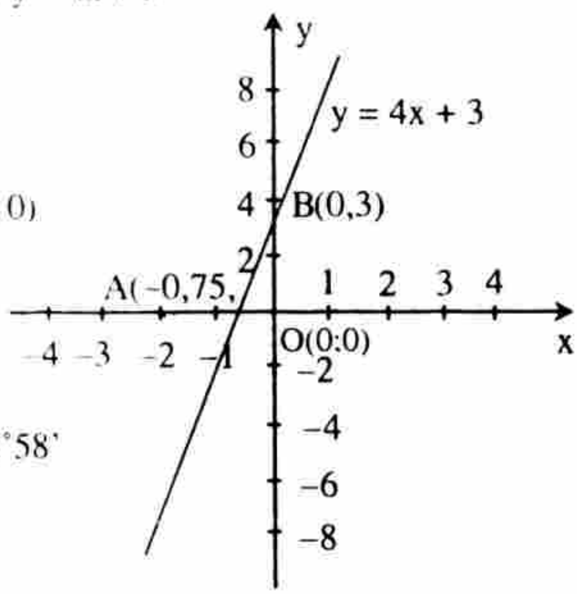
Vậy đồ thị hàm số cần tìm có dạng: $y = 4x + 3$

b) Vẽ đồ thị hàm số: $y = 4x + 3$

* $x = 0$ thì $y = 3$; $y = 0$ thì $x = -\frac{3}{4}$

* Biểu diễn các điểm $A(0; 3)$; $B(-\frac{3}{4}; 0)$ trên mặt phẳng toạ độ

* Vẽ đường thẳng đi qua A và B ta được đồ thị hàm số $y = 4x + 3$



c) Ta có: $\text{tg}B = \dfrac{3}{\left|-\frac{3}{4}\right|} = 4 \Rightarrow \widehat{B} \approx 75°58'$

1.4. Các bài tập tự luyện:

Bài 1: Xác định hàm số $y = -2x + b$ biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $M(3, -5)$

Bài 2: Cho hàm số: $y = (a - 1).x + a$

a) Tìm a để hàm số đồng biến, nghịch biến.

b) Xác định hàm số biết đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2.

c) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

Bài 3: Cho hàm số: $y = ax + 6$ (d)

a) Xác định a biết rằng đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

c) Tính giá trị của hàm số tìm được ở câu a biết $x = \frac{1}{3}$

d) Tính x biết $y = \sqrt{2}$ theo hàm số đã xác định ở câu a.

Bài 4: Cho hàm số: $y = (m - 1).x + m$

a) Xác định m để đường thẳng trên đi qua gốc toạ độ? Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$

b) Với giá trị nào của m thì góc α tạo bởi đường thẳng (1) với tia Ox là góc bằng 45^0?

2. Hàm số bậc hai:

2.1. Kiến thức cần nhớ:

Hàm số bậc hai ta chỉ xét trong trường hợp $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

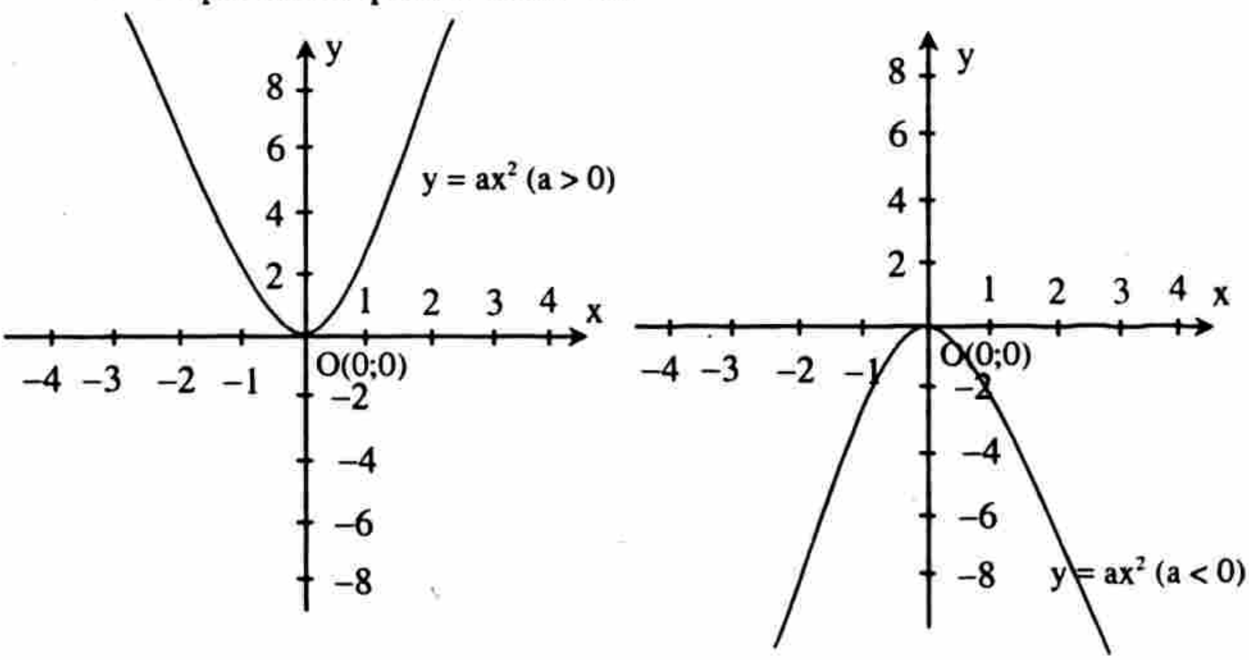
* TXĐ: $\forall x \in R$

* Tính chất:

+) $a > 0$: Hàm số đồng biến với $x > 0$, nghịch biến với $x < 0$, bằng 0 với $x = 0$

+) a < 0: Hàm số đồng biến với x < 0, nghịch biến với x > 0, bằng 0 với x = 0

* Đồ thị: Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là đường parabol với các đặc điểm sau:
   - Đỉnh: O(0; 0)
   - Trục đối xứng: Oy
   - Nếu a > 0: parabol quay bề lõm lên phía trên nhận O(0; 0) làm điểm thấp nhất (điểm cực tiểu)
   - Nếu a < 0: parabol quay bề lõm xuống phía dưới nhận O(0; 0) làm điểm cao nhất (điểm cực đại)
* Cách vẽ đồ thị hàm số: $y = ax^2$ $(a \neq 0)$
   - Đặt đỉnh tại O(0; 0)
   - Xác định các điểm (1; a); (–1; a); (2; 4a); (–2; 4a); (3; 9a) ; (–3; 9a)
   - Vẽ parabol đi qua các điểm trên.



2.2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y = -3x^2$

A. Hàm số đồng biến khi x < 0; nghịch biến khi x < 0.

B. Hàm số đồng biến khi x > 0; nghịch biến khi x > 0.

Chọn kết qủa đúng trong hai kết qủa trên.

Đáp số: A

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2$

a) Tính f(5); f(–5); f(3); f(–3) và rút ra nhận xét.

b) Tính x khi f(x) = 1; f(x) = 3; f(x) = 9

Giải

a) $f(5) = \frac{1}{3}.5^2 = \frac{25}{3}$; $f(-5) = \frac{1}{3}.(-5)^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow f(5) = f(-5)$

$$f(3) = \frac{1}{3}.3^2 = 3;\ f(-3) = \frac{1}{3}.(-3)^2 = 3 \Rightarrow f(3) = f(-3)$$

b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$

$f(x) = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\sqrt{3} \\ x = -3\sqrt{3} \end{array}\right.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = (m^2 - 2).x^2 (2)$

a) Xác định m để đồ thị của hàm số (2) đi qua điểm A(1; 2)

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được ở câu a.

Giải

a) Vì đồ thị hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ đi qua điểm A(1; 2) nên ta có:

$2 = (m^2 - 2).1^2 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$

Vậy $m = \pm 2$ thì hàm số (2) đi qua A(1; 2)

b) Nếu m = 2 ta có hàm số: $y = 2x^2$

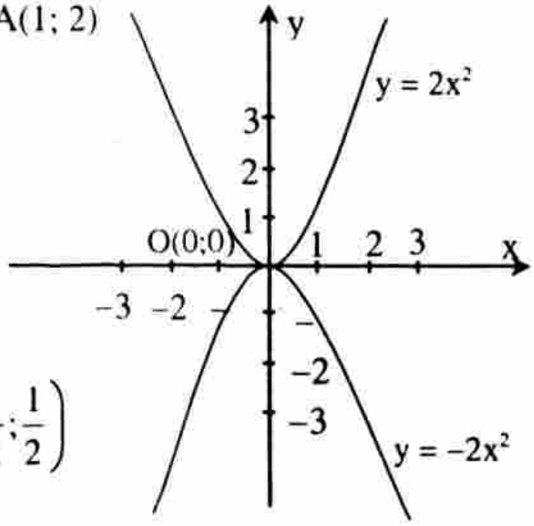
Nếu m = −2 ta có hàm số: $y = 2x^2$

Vậy ta có hàm số $y = 2x^2$

* Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2$

Với x = 1 thì y = 2

Với $x = \frac{1}{2}$ thì $y = \frac{1}{2}$



Biểu diễn các điểm: A(1; 2) và $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

trên mặt phẳng toạ độ

Lấy A' đối xứng A qua trục Oy; B' đối xứng với B qua trục Oy

Vẽ Parabol đI qua A', B', O, B, A ta được đồ thị hàm số $y = 2x^2$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (3)

a) Vẽ đồ thị hàm số (3)

b) Tìm m để A($\sqrt{2}\pi$; m); B($-\sqrt{2}$; m); C(m ; $\frac{-3}{4}$) nằm trên parabol trên.

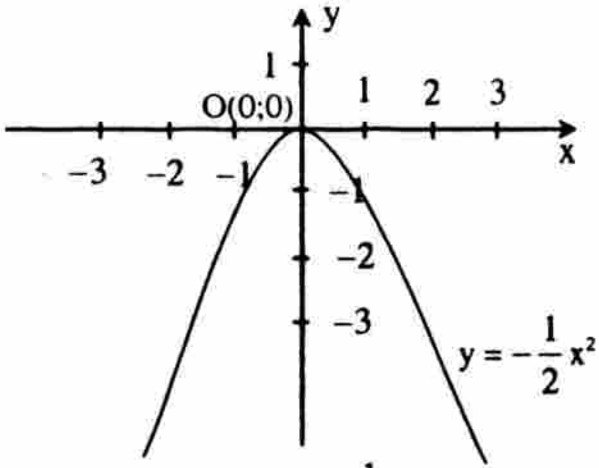
Giải

a) Vẽ đồ thị hàm số: $y = -\frac{1}{2}x^2$; x = 1 thì $y = -\frac{1}{2}$; x = 2 thì y = −2

Biểu diễn các điểm E(1; $-\frac{1}{2}$) và F(2; −2)

Trên mặt phẳng toạ độ. Lấy F', E' đối xứng với F,E qua trục Oy.

Vẽ parabol đi qua E', F', O, F, E ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$



b) $A(\sqrt{2}; m) \in$ parabol $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow m = -1$

$B(-\sqrt{2}; m) \in$ parabol $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}(-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow m = -1$

$C(m; -\frac{3}{4}) \in$ parabol $\Leftrightarrow -\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}m^2$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = m^2 \Leftrightarrow |m| = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ m = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $m = \frac{\sqrt{6}}{2}$ và $m = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ thì $C \in$ parabol

2.3. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho hàm số: $y = f(x) = -1{,}5x^2$

a) Tính f(1); f(2); f(3) rồi sắp xếp ba giá trị này theo thứ tự từ lớn đến bé.

b) Tính f(−3); f(−2); f(−1) rồi sắp xếp ba giá trị này theo thứ tự từ bé đến lớn.

Bài 2: Tìm hàm số có đồ thị là Parabol mà đỉnh O(0; 0), trục đối xứng là Oy và đi qua điểm A(3; 2).

Bài 3: Cho hàm số: $y = ax^2$

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số trên đi qua điểm A(−1; 2). Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

b) Tìm các điểm thuộc Parabol nói trên có tung độ bằng 4.

3. Đồ thị và tương giao của các đồ thị:

3.1. Kiến thức cần nhớ:

– Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số y = f(x) và y = g(x) là nghiệm của phương trình f(x) = g(x)

– Cho 2 đường thẳng (d): y = ax + b và (d') :y' = ax' + b' (d') (a; a' ≠ 0)

+ (d) cắt (d') $\Leftrightarrow$ $a \neq a'$

+ (d) // (d') $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

+ (d) $\equiv$ (d') $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

+ (d) $\perp$ (d') $\Leftrightarrow$ $a.a' = -1$

– Cho Parabol (P) $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ (l) và đường thẳng (d):

$y = mx + n$ $(m \neq 0)$ (k)

+ (k) cắt (l) $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ $ax^2 = mx + n$

$\Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ có 2 nghiệm phân biệt tại 2 điểm.

+ (k) tiếp xúc với (l) $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ $ax^2 = mx + n$

$\Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ có nghiệm kép.

+ (k) không cắt (l) $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ $ax^2 = mx + n$

$\Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ vô nghiệm.

3.2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $y = (a - 1)x + 2$ và $y = (3 - a)x + 1$

a) Tìm a để hai đường thẳng trên song song.

b) Tìm a để hai đường thẳng trên cắt nhau.

Giải

$y = (a - 1)x + 2$ (d) ; $y = (3 - a)x + 1$ (d')

a) Để (d) // (d') thì $\begin{cases} a - 1 = 3 - a \\ 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$

b) Để (d) $\cap$ (d') thì $a - 1 \neq 3 - a \Leftrightarrow a \neq 2$

Ví dụ 2: Đồ thị hàm số $y = 12x + 5 - m$ cắt đồ thị hàm số $y = 3x + 3 + m$ tại một điểm trên trục tung là:

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = 4$

Đáp số: B

Ví dụ 3: Xác định hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị đi qua A(–2; 3) và song song với đường thẳng $y = 3x - 5$

Giải

Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 3x - 5$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b \neq 5 \end{cases}$ (1)

Lại do đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm A(–2; 3) nên ta có: $3 = -2a + b$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow 3 = -2.3 + b \Rightarrow b = 9 \neq 5$

Vậy hàm số cần tìm có dạng: $y = 3x + 9$

Ví dụ 4: Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 6$ (d) và $y = x + 2$ (d') trên cùng mặt phẳng toạ độ. Gọi giao điểm của (d) với Oy là A của (d') với Oy là B. Gọi giao điểm của (d) và (d') là C.

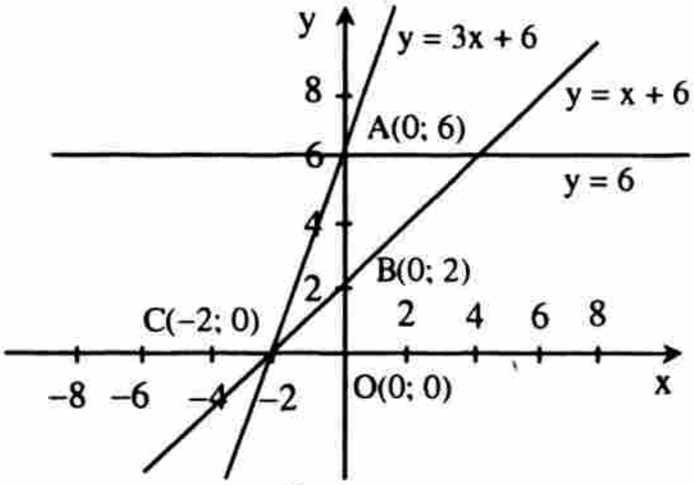
a) Xác định toạ độ các điểm A, B, C.

b) Qua A kẻ đường thẳng song song với trục Ox cắt đường thẳng (d') tại D. Xác định toạ độ điểm D. Tính chu vi và diện tích của ΔACD.

Giải

a) Vì A nằm trên trục tung, $Oy \cap (d) = \{A\} \Rightarrow A(0; 6)$

Tương tự $B(0; 2)$. Vì $(d) \cap (d') = \{C\}$; $C \in Ox \Rightarrow C(-2; 0)$



b) * Từ D kẻ đường thẳng song song Ox cắt Oy tại A $\Rightarrow y_D = 6$

* Từ D kẻ đường thẳng song song với Oy cắt Ox tại E $\Rightarrow x_D = 4$

Vậy D (4; 6)

Ta có: AD = OE = 4 (đvdt)

$AC^2 = OA^2 + OC^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ (đvdt)

$DC^2 = DE^2 + CE^2 = 6^2 + 6^2 = 2.36 \Rightarrow DC = 6\sqrt{2}$ (đvdt)

Vậy chu vi ΔABC là $AD + DC + AC = 4 + 2\sqrt{10} + 6\sqrt{2}$ (đvdt)

* Từ C kẻ $CK \perp AD$ ($K \in AD$) $\Rightarrow CK = OA = 6$ (đvdt)

$S_{(ACD)} = \frac{1}{2}CK.AD = \frac{1}{2}.6.4 = 12 \Rightarrow S_{(ACD)} = 12$ (đvdt)

Ví dụ 5: Cho Parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = x + n$

a) Với giá trị nào của n thì đường thẳng cắt Parabol tại hai điểm phân biệt.

b) Xác định toạ độ giao điểm của Parabol và đường thẳng nếu n = 2

Giải

$y = x^2$ (P) ; $y = x + n$ (d)

a) Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ: $x^2 = x + n$ có 2 nghiệm phân biệt

Xét phương trình: $x^2 = x + n \Leftrightarrow x^2 - x + n = 0$

Có $\Delta = (-1)^2 - 4.1(-n) = 1 + 4n$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = 1 + 4n > 0$ (vì $a = 1 \neq 0$) $\Leftrightarrow n > -\frac{1}{4}$

Vậy (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow n > -\frac{1}{4}$

b) Khi n = 2 thì (d): $y = x + 2$

Toạ độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^2 & (1) \\ y = x + 2 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta có: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ (3)

Giải phương trình (3) ta được: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$

Với $x = -1$ thì $y = 1$

Với $x = 2$ thì $y = 4$

Vậy đường thẳng $y = x + 2$ cắt (P) tại hai điểm A $(-1, 1)$ và B$(2; 4)$

3.3. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(-1; -4)$ và song song với đường thẳng $y = -3x + 1$

Bài 2: Cho đường thẳng $y = (m - 2)x + 3$ (d_1)

và đường thẳng $y = 2mx - 5$ (d_2)

a) Tìm m để đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau

b) Tìm m để đường thẳng (d_1) cắt đường thẳng (d_2)

c) Tìm m để đường thẳng (d_1) vuông góc với đường thẳng (d_2)

Bài 3: Cho Parabol $y = \frac{x^2}{4}$. Lập phương trình đường thẳng đi qua $A(-1; -2)$ và tiếp xúc với parabol. Tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài 4. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = mx + n$. Xác định các hệ số m và n để đường thẳng đi qua $A(-1; 0)$ và tiếp xúc với parabol. Tìm toạ độ tiếp điểm.

IV . PHƯƠNG TRÌNH

IV.1- PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MẪT ẨN – GIẢI VÀ BIỆN LUẬN

1. Kiến thức cơ bản

– *Phương trình bậc nhất 1 ẩn* có dạng: $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ với a, b là 2 số đã cho.

– *Giải và biện luận phương trình bậc nhất 1 ẩn:*

Xét phương trình $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$

+ Nếu $a = 0$; $b = 0 \Rightarrow$ Phương trình có vô số nghiệm

+ Nếu a = 0; b $\neq 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

+ Nếu a $\neq 0$, Phương trình có 1 nghiệm là $x = -\dfrac{b}{a}$

2. Bài tập ví dụ

Ví dụ: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số

$m^2(x-1) = x - 2m + 1 \qquad (1)$

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow m^2x - m^2 = x - 2m + 1$

$\Leftrightarrow m^2x - x = m^2 - 2m + 1 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)x = (m-1)^2$

– Nếu $m \neq \pm 1$ thì phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{m-1}{m+1}$

– Nếu m = 1 thì phương trình là 0x = 0 $\Rightarrow$ Phương trình có vô số nghiệm

– Nếu m = – 1 thì phương trình là 0x = 4 $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

3. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $(2x-1)^2 - (2x-2)(2x+2) = x(2x-1) - (2x^2+5x-3)$

b) $\dfrac{3x+1}{2005} + \dfrac{3x+2}{2004} = \dfrac{3x+3}{2003} + \dfrac{3x+4}{2002}$

c) $\dfrac{x-1050}{956} + \dfrac{x-1055}{951} + \dfrac{x-1060}{946} = \dfrac{x-1065}{941} + \dfrac{x-1070}{936} + \dfrac{x-1075}{931}$

d) $\dfrac{x+3}{201} + \dfrac{x+4}{100} + \dfrac{x+6}{66} = -6$

e) $\left(\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + ... + \dfrac{1}{97.99}\right).(x-1) + x = \dfrac{148}{99}x - \dfrac{49}{99}$

g) $\dfrac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{2x}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \dfrac{3x}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \dfrac{4x}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = -\sqrt{7}$

Bài 2: Giải và biện luận các phương trình sau (với x là ẩn số):

a) $4m^2(x-1) = x - 4m + 1$ b) $\dfrac{m(x-1)}{2} - \dfrac{m+x}{3} = 2$

c) $\dfrac{x+a-2}{a-1} + \dfrac{x-a}{a+1} + \dfrac{x+2a}{1-a^2} = 0$

d) $\dfrac{a+b-x}{c} + \dfrac{a+c-x}{b} + \dfrac{b+c-x}{a} = 1 - \dfrac{4x}{a+b+c}$

IV.2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC II

HỆ THỨC VIET ÁP DỤNG CHO PHƯƠNG TRÌNH BẬC II

1. Phương trình bậc hai một ẩn:

– Là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$.

Trong đó x là ẩn; a, b, c $\in$ R

- ***Cách giải:***

Cách 1: Dùng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, đưa về phương trình tích.

Cách 2: Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $3x^2 - 7x + 4 = 0$ (1)

Cách 1: Phương trình (1) $\Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 4x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (3x - 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = \dfrac{4}{3}$; $x_2 = 1$

Cách 2: $\Delta = 49 - 48 = 1$; $\sqrt{\Delta} = 1$

$$x_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{7-1}{6} = 1$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = \dfrac{4}{3}$; $x_2 = 1$

Ví dụ 2: Cho phương trình: $m(x^2 - 4x + 3) + 2(x - 1) = 0$ (1)

a) Giải phương trình với $m = -\dfrac{1}{2}$

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có tất cả các nghiệm đều nguyên.

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow mx^2 - 2x(2m - 1) + 3m - 2 = 0$

a) Với $m = -\dfrac{1}{2}$, phương trình (1) là: $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 7$

b) Với $m = 0$, phương trình (1) là: $2x - 2 = 0$; PT có nghiệm $x = 1$

Với $m \neq 0$, $\Delta' = 4m^2 - 4m + 1 - 3m^2 + 2m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$

Với $\forall m \Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

c) Với $m = 0$, phương trình có nghiệm là $x = 1 \in Z$

Với $m \neq 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m - 1 + m - 1}{m} = \frac{3m - 2}{m}$$

$$x_2 = \frac{2m - 1 - m + 1}{m} = 1. \text{ Vì } x^2 \in Z$$

Nên để phương trình có tất cả các nghiệm đều nguyên thì

$$\frac{3m-2}{m} \in Z \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{m} \in Z \Leftrightarrow 2 \vdots m \Leftrightarrow m = \pm 1; \pm 2$$

Vậy với $m = 0;\ \pm 1; \pm 2$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm nguyên.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^4 + x^3 - 3a^2x^2 - 2a^2x + 2a^4 = 0$ (1)

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2a^4 - a^2(3x^2 + 2x) + x^4 + x^3 = 0$ (2)

Coi phương trình (2) là phương trình với ẩn a, tham số x.

Đặt $a^2 = t$ ($t \geq 0$) ta được phương trình:

$2t^2 - (3x^2 + 2x)\,t + x^4 + x^3 = 0$ (3)

$\Delta = (3x^2 + 2x)^2 - 8\,(x^4 + x^3)$

$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = (x^2 + 2x)^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm

$$t_1 = \frac{3x^2 + 2x - \left(x^2 + 2x\right)}{4} = \frac{2x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

$$t_2 = \frac{3x^2 + 2x + \left(x^2 + 2x\right)}{4} = x^2 + x$$

* Với $t_1 = \frac{x^2}{2}$ ta có: $a^2 = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2a^2$

– Nếu $a = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

– Nếu $a \neq 0 \Rightarrow x_{3,4} = \pm a\sqrt{2}$

* Với $t_2 = x^2 + x$ ta có: $a^2 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - a^2 = 0$

$\Delta = 1 + 4a^2 > 0$ với mọi a

Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_5 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2};\ x_6 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$$

Vậy nếu a = 0, phương trình có 2 nghiệm là: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$

Nếu $a \neq 0$, phương trình có 4 nghiệm là:

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{2};\ x_{3;4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$$

* ***Quan hệ giữa các nghiệm của phương trình bậc 2:***

Ví dụ 4: Tìm các giá trị của m để 2 phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung.

$x^2 + (m - 8)x + m + 3 = 0$ (1)

$x^2 + (m - 2)x + m - 9 = 0$ (2)

Giải

Giả sử x_0 là nghiệm chung của 2 phương trình, thế thì :

$$x_0^2 + (m-8)x_0 + m + 3 = 0 \quad (1')$$
$$x_0^2 + (m-2)x_0 + m - 9 = 0 \quad (2')$$

$\Rightarrow -6x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Thay vào (1') tìm được $m = 3$

Với $m = 3$ thì phương trình (1) là: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$

Phương trình (2) là: $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -3$

Khi đó nghiệm chung của 2 phương trình là $x = 2$

Vậy với $m = 3$ thì 2 phương trình có nghiệm chung là $x = 2$

2. Hệ thức Viét áp dụng cho phương trình bậc hai.

a) Hệ thức Viét:

+ Nếu x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

+ *Ngược lại*: Nếu có 2 số $x_1; x_2$ sao cho $x_1 + x_2 = S$; $x_1.x_2 = P$ thì $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$

b) Một số áp dụng:

Hệ thức Viét thường được ứng dụng để giải một số dạng bài tập sau:

b_1) Tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai:

Cho phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

– Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{c}{a}$

– Nếu $a - b + c = 0$ thì $x_1 = -1; x_2 = -\dfrac{c}{a}$

Ví dụ 5: Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $\sqrt{2}.x^2 - (3-\sqrt{2})x + (\sqrt{2}-1)^2 = 0$ (1)

b) $mx^2 - (1-m)x - 1 = 0$ (2)

Giải

a) Phương trình (1) là phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$,

có: $a + b + c = \sqrt{2} - (3-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1)^2$

$= \sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$

b) + Với $m = 0$, phương trình là : $-x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

+ Với $m \neq 0$, phương trình (2) là phương trình bậc hai có $a - b + c = m + 1 - m - 1 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{m}$

b_2) Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai.

Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Gọi $S = x_1 + x_2$; $S = -\dfrac{b}{a}$; $P = x_1.x_2$; $P = \dfrac{c}{a}$

Điều kiện để phương trình:

- Có 2 nghiệm trái dấu: $P < 0$ (khi đó hiển nhiên $\Delta > 0$)
- Có 2 nghiệm cùng dấu $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- Có 2 nghiệm cùng dương: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- Có 2 nghiệm cùng âm $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Ví dụ 6: Cho phương trình: $x^2 + 2(m - 2)x - 2m + 1 = 0$ (1)

Tìm giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm cùng dương ? 2 nghiệm trái dấu

Giải

Phương trình (1) có 2 nghiệm dương khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - (-2m+1) \geq 0 \\ -2m + 1 > 0 \\ -2(m-2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - 2m + 3 \geq 0 \\ m < \dfrac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 + 2 \geq 0 \text{ TM với mọi m} \\ m < \dfrac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$$

Vậy với $m < \dfrac{1}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm dương.

* Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $\dfrac{c}{a} < 0$

Hay $-2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$

b_3) Tính giá trị của hệ thức giữa các nghiệm của phương trình.

Trước hết, kiểm tra điều kiện có nghiệm của phương trình.

Sau đó tính $S = x_1 + x_2$; $P = x_1.x_2$ và biến đổi hệ thức cần tính theo S và P.

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$ (1)

Gọi x_1; x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $x_1^2 - x_2^2$ c) $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$

Giải

Phương trình (1) có: $\Delta = 25 - 12 = 13 > 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có 2 nghiệm x_1; x_2. Theo định lý Viét ta có: $x_1 + x_2 = 5$; $x_1.x_2 = 3$

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2.3 = 19$

b) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 5^2 - 4.3 = 13 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \pm\sqrt{13}$.

Ta có: $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \pm 5\sqrt{13}$

c) $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3} = \dfrac{x_2^3 + x_1^3}{x_2^3 x_1^3} = \dfrac{(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2 - x_2x_1)}{x_2^3 x_1^3} = \dfrac{5(19-3)}{3^3}$

$\dfrac{80}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

b_4) Xác định hệ số của phương trình, biết hệ thức giữa các nghiệm

Ví dụ 8: Cho phương trình: $x^2 - 3x + (k - 1) = 0$ (1)

Xác định hệ số k để phương trình có 2 nghiệm x_1; x_2 thoả mãn 1 trong các điều kiện sau:

a) $2x_1 - 5x_2 = -8$ b) $x_1^2 - x_2^2 = 15$ c) $x_1^2 + x_2^2 = 3$

Giải

Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là: $\Delta \geq 0$

$\Delta = 9 - 4(k - 1) = 9 - 4k + 4 = 13 - 4k$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 13 - 4k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \dfrac{13}{4}$ (2)

Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1; x_2

Áp dụng hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 3$

$x_1.x_2 = k - 1$ (3)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 = -8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 - 5x_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_2 = 14 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Khi đó, thay vào (3) ta có: $1.2 = k - 1 \Rightarrow k = 3$ (Thoả mãn (2))

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1^2 - x_2^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Thay vào (3) ta có: $4.(-1) = k - 1 \Leftrightarrow k = -3$ (Thoả mãn (2))

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1^2 + x_2^2 = 3 \\ x_1.x_2 = k - 1 \end{cases}$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$\Rightarrow\ 3 = 3^2 - 2(k - 1) \Leftrightarrow k = 4$, không TMĐK (2).

Vậy không tồn tại số k để thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

b₅) Tìm hệ thức giữa các nghiệm độc lập với tham số.

Ví dụ 9: Cho phương trình bậc 2: $(m - 2)x^2 - 2(m + 2)x + 2(m - 1) = 0$ (1)

Khi phương trình có nghiệm, hãy tìm 1 hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số m.

Giải

Vì phương trình đã cho là phương trình bậc hai nên $m \neq 2$

$\Delta' = [-(m+2)]^2 - 2(m - 2)(m - 1) = -m^2 + 10m$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m \leq 0 \Leftrightarrow m(m - 10) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 10$

Gọi x_1; x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

Theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+2)}{m-2} & (1) \\ x_1.x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m-2} & (2) \end{cases}$

Từ (1): $x_1 + x_2 = \dfrac{2m - 4 + 8}{m - 2} = 2 + \dfrac{8}{m - 2} \Rightarrow \dfrac{1}{m - 2} = \dfrac{(x_1 + x_2) - 2}{8}$ (3)

Từ (2): $x_1.x_2 = \dfrac{2m - 2}{m - 2} = \dfrac{2m - 4 + 2}{m - 2} = 2 + \dfrac{2}{m - 2} \Rightarrow \dfrac{1}{m - 2} = \dfrac{x_1x_2 - 2}{2}$ (4)

Từ (3); (4) $\Rightarrow \dfrac{x_1 + x_2 - 2}{8} = \dfrac{x_1.x_2 - 2}{2} \Rightarrow 4x_1.x_2 - (x_1 + x_2) = 6$

Vậy hệ thức cần tìm là : $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 6$

b₆) Lập phương trình bậc hai biết 2 nghiệm của nó

Ví dụ10: Gọi m, n là các nghiệm của phương trình:

$x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ (1) $(m < n)$

Lập phương trình bậc 2 có các nghiệm là: $x_1 = \dfrac{1}{m + \sqrt{2}}$; $x_2 = \dfrac{1}{1 - \mathrm{n}}$

Giải

Phương trình (1) có: $a + b + c = 1 - (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm là 1 và $\sqrt{2}$

Gọi m, n là các nghiệm của phương trình (1) với $m < n$

$\Rightarrow m = 1 ; n = \sqrt{2}$

$$x_1 = \frac{1}{m+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}; \quad x_2 = \frac{1}{1-n} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -2 \;;\; x_1.x_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.\frac{1}{1-\sqrt{2}} = -1$$

$\Rightarrow x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 + 2x - 1 = 0$

3. Bài tập tự luyện

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $2\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3}+1)x - \sqrt{3} + 1 = 0$

b) $\sqrt{2}x^2 + (2\sqrt{2} - 3)x + \sqrt{2} - 3 = 0$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-2)(x+3)}{3} = x - 1$

Bài 4: Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi m.

$(m-2)x^2 - (5m^2 + 4m - 1)x - m + 2 = 0$

Bài 5: Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$

a) Tính $x_1^2 + x_2^2$

b) Chứng minh: $Q = (x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 + x_2^4) \vdots 5$

Bài 6: Tìm m để phương trình: $x^2 - mx + m^2 - 7 = 0$ có nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

Bài 7: Cho phương trình: $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt.

b) Tìm m để phương trình chỉ có 1 nghiệm là dương.

Bài 8: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3m + 2 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 12$

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc m?

Bài 9: Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

a) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

b) Xác định m để phương trình có 1 nghiệm bằng 2 và tính nghiệm kia.

c) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thoả mãn hệ thức

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4}$$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2$

Bài 10: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để (1) có nghiệm.

b) Cho biểu thức $A = 6x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ (x_1; x_2 là nghiệm của (1). Tìm m sao cho A đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị ấy.

Bài 11: Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (với m là tham số)

a) Tìm m để phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2. Khi đó tìm hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 không phụ thuộc vào m.

b) Tìm m để phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 thoả mãn hệ thức: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 6 = 0$

Bài 12: Cho phương trình bậc hai đối với x: $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) với m = 0

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1; x_2 với mọi m

c) Tìm 1 hệ thức liên hệ giữa x_1; x_2 không phụ thuộc m.

d) Xác định giá trị của m sao cho phương trình có 2 nghiệm bằng nhau về GTTĐ và trái dấu nhau.

IV.3- MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP VÀ CÁCH GIẢI

1. Phương trình tích:

Bằng các phép biến đổi đại số, ta có thể đưa một số các phương trình bậc cao về dạng: A(x). B(x) ... = 0 (1) trong đó A(x), B(x) ... là các đa thức.

Để giải (1), ta chỉ cần giải từng phương trình A(x) = 0, B(x) = 0... rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Ví dụ1: Giải các phương trình sau:

a) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$

b) $(3x + 4)(x + 1)(6x + 7)^2 = 6$

c) $(4x + 5)^3 + (2x - 7)^3 - (6x - 2)^3 = 0$

Giải

a) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 + 5x^2 - 10x - 3x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2(x - 2) + 5x(x - 2) - 3(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 + 5x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - x + 6x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 1)(x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = -3$

b) $(3x + 4)(x + 1)(6x + 7)^2 = 6$

$\Leftrightarrow 12(3x + 4)(x + 1)(6x + 7)^2 = 6.12$

$\Leftrightarrow (6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$

$\Leftrightarrow (36x^2 + 84x + 48)(36x^2 + 84x + 49) - 72 = 0$

Đặt $36x^2 + 84x + 48 = t$, ta có phương trình: $t(t + 1) - 72 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + t - 72 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -9; t_2 = 8$

* Với $t_1 = -9$, ta có: $36x^2 + 84x + 48 = -9$

$\Leftrightarrow 36x^2 + 84x + 57 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 28x + 19 = 0$

$\Delta' = 14^2 - 12.19 = -32 < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

* Với $t_2 = 8$, ta có: $36x^2 + 84x + 48 = 8$

$\Leftrightarrow 36x^2 + 84x + 40 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 21x + 10 = 0$

$\Delta = 21^2 - 4.9.10 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9$

$$x_1 = \frac{-21 + 9}{2.9} = \frac{-12}{18} = \frac{-2}{3};\ x_2 = \frac{-21 - 9}{2.9} = \frac{-30}{18} = \frac{-5}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{-5}{3}$

c) Áp dụng hằng đẳng thức: Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Phương trình: $(4x + 5)^3 + (2x - 7)^3 - (6x - 2)^3 = 0$

$\Leftrightarrow (4x + 5)^3 + (2x - 7)^3 + (2 - 6x)^3 = 0$ (1)

Ta có: $(4x + 5) + (2x - 7) + (2 - 6x) = 0$

$\Rightarrow (4x + 5)^3 + (2x - 7)^3 + (2 - 6x)^3 = 3(4x + 5)(2x - 7)(2 - 6x)$

Phương trình (1) tương đương với phương trình:

$3(4x + 5)(2x - 7)(2 - 6x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + 5 = 0 \\ 2x - 7 = 0 \\ 2 - 6x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5}{4} \\ x = \dfrac{7}{2} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức:
  + Tìm ĐKXĐ của phương trình.
  + Quy đồng rồi khử mẫu thức ở 2 vế của phương trình.
  + Giải phương trình vừa nhận được.
  + Đối chiếu giá trị tìm được của ẩn với ĐKXĐ để kết luận nghiệm của phương trình (GT của ẩn phải thoả mãn điều kiện xác định).
- Với một số bài toán, việc tìm ĐKXĐ khó khăn, ta giải bình thường để tìm ra giá trị của ẩn. Sau đó thay giá trị của ẩn tìm được vào mẫu thức để kiểm

tra điều kiện mẫu thức khác 0. Nếu giá trị của ẩn thoả mãn điều kiện xác định (mẫu khác 0) thì giá trị đó là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2}{2x+3}-\dfrac{x-1}{2-x}-\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-6}=1$ (1)

b) $\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}+\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}=\dfrac{1}{2}$ (2)

Giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 2$; $x \neq \dfrac{-3}{2}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{2x+3}+\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x^2+4x-5}{(2x+3)(x-2)}=1$

$\Rightarrow 2(x-2)+(x-1)(2x+3)-(x^2+4x-5)=2x^2-x-6$

$\Leftrightarrow 2x-4+2x^2+3x-2x-3-x^2-4x+5-2x^2+x+6=0$

$\Leftrightarrow -x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x_1=2; x_2=-2$

$x_1=2$ không thoả mãn ĐKXĐ

$x_2=-2$ thoả mãn ĐKXĐ.

Vậy phương trình có 1 nghiệm là $x=-2$

b) Phương trình (2)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+6)}=\dfrac{1}{2}$ (2')

ĐKXĐ: $x \neq -2; -3; -4; -5; -6$ (*)

Phương trình (2')

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x+6)-2(x+2)=(x+2)(x+6)$

$\Leftrightarrow 2x+12-2x-4=x^2+8x+12 \Leftrightarrow x^2+8x+4=0$

$\Delta' = 16-4=12 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$x_1=-4-2\sqrt{3}$ (Thoả mãn (*))

$x_2=-4+2\sqrt{3}$ (Thoả mãn (*))

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x_1=-4-2\sqrt{3}$; $x_2=-4+2\sqrt{3}$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\dfrac{3x-1}{x^3+3x+7}=1$ (1)

Giải

Từ (1) ta có: $3x-1=x^3+3x+7 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$

Với $x=-2$ thì $x^3+3x+7=(-2)^3+3(-2)+7=-7\neq 0$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-2$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\dfrac{(1+x)^2}{1+mx}=1-x$ (1) (m là tham số)

Giải

ĐKXĐ: $x\neq -\dfrac{1}{m}$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow (1+x)^2=(1-x)(1+mx)$

$\Leftrightarrow 1+2x+x^2=1+mx-x-mx^2 \Leftrightarrow mx^2+x^2+3x-mx=0$

$\Leftrightarrow x[(m+1)x-(m-3)]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (m+1)x-(m-3)=0 \end{array}\right.$

- Giá trị $x=0$ thoả mãn ĐKXĐ: $x\neq -\dfrac{1}{m}$

  Nên $x=0$ là nghiệm của phương trình

- Xét phương trình: $(m+1)x-(m-3)=0 \Leftrightarrow (m+1)x=m-3$ (*)

  + Nếu $m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$ thì $x=\dfrac{m-3}{m+1}$ là nghiệm của phương trình

  Nghiệm phải thoả mãn điều kiện $x\neq -\dfrac{1}{m}$ tức là: $\dfrac{m-3}{m+1}\neq -\dfrac{1}{m}$

  $\Leftrightarrow m^2-3m\neq -m-1 \Leftrightarrow m^2-2m+1\neq 0$

  $\Leftrightarrow (m-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1 \Rightarrow m\neq \pm 1$ thì $x=\dfrac{m-3}{m+1}$

  + Nếu $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ thì phương trình (*) là $0x=-4$: PTVN

  Kết luận: Với $m\neq \pm 1$, phương trình có 2 nghiệm: $x_1=0$; $x_2=\dfrac{m-3}{m+1}$

  $m=\pm 1$, phương trình có 1 nghiệm: $x=0$

3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Để giải các phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta phải khử dấu giá trị tuyệt đối .

Hai biện pháp thường dùng để khử dấu giá trị tuyệt đối là:

- Ta xét giá trị của biến làm cho biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối âm hay không âm để khử dấu giá trị tuyệt đối: $|A|=\begin{cases} A & \text{nếu } A\geq 0 \\ -A & \text{nếu } A<0 \end{cases}$

– Bình phương hai vế của phương trình để khử dấu giá trị tuyệt đối

$$\left|f_{(x)}\right| = g_{(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f_{(x)}^2 = g_{(x)}^2 \\ g_{(x)} \ge 0 \end{cases}$$

Ngoài ra ta có thể đánh giá hai vế của phương trình dựa vào các bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối (Xem bất đẳng thức)

Ví dụ 5: Giải các phương trình:

a) $|5 - 2x| + 3 = x + 1$ (1)

b) $|3x - 2| + |3x - 5| = 3$ (2)

c) $\left|2|x| - 3\right| = 2x + 5$ (3)

Giải

a) ***Cách 1***

+ Với $5 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{2}$

Phương trình (1) là: $5 - 2x + 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ (thoả mãn điều kiện)

+ Với $5 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$

Phương trình (1) là: $-5 + 2x + 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 3$ (thoả mãn điều kện)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{\frac{7}{3}; 3\right\}$

Cách 2 : Ta có $(1) \Leftrightarrow |5 - 2x| = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - 2x)^2 = (x - 2)^2 \\ x - 2 \ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 16x + 21 = 0 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{7}{3} \end{array}\right. \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{7}{3} \end{array}\right.$$

b) ***Cách 1:***

* Với $x < \frac{2}{3}$, phương trình (2) là: $-3x + 2 - 3x + 5 = 3$

$\Leftrightarrow 6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ không thuộc khoảng đang xét.

* Với $\frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{3}$ phương trình (2) là: $3x - 2 - 3x + 5 = 3 \Leftrightarrow 0x =)$

Phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét

Tức là: $\frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{3}$

* Với $x > \frac{5}{3}$, phương trình (2) là: $3x - 2 + 3x - 5 = 3$

$\Leftrightarrow 6x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ (không thuộc khoảng đang xét)

Vậy phương trình có vô số nghiệm thoả mãn $\frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{3}$

Cách 2:

Do $|3x - 2| \ge 3x - 2$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{2}{3}$

$|3x - 5| = |5 - 3x| \ge 5 - 3x$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 5 - 3x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{3}$

Do đó: $|3x - 2| + |5 - 3x| \ge 3x - 2 + 5 - 3x = 3$

Theo bài ra, phải xảy ra dấu đẳng thức.

Điều này xảy ra khi : $\begin{cases} 3x - 2 \ge 0 \\ 5 - 3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{3}$

c) $\big|2|x| - 3\big| = 2x + 5$

* Xét khoảng $x \ge 0$, phương trình (3) có dạng: $|2x - 3| = 2x + 5$ (3')

– Với $x \ge \frac{3}{2}$, PT (3') có dạng: $2x - 3 = 2x + 5 \Leftrightarrow 0x = 8 \Rightarrow$ PTVN

– Với $0 \le x \le \frac{3}{2}$; phương trình (3') có dạng: $-2x + 3 = 2x + 5$

$\Leftrightarrow 4x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ không thuộc khoảng đang xét.

* Xét khoảng $x < 0$ phương trình (3') có dạng:

$|-2x - 3| = 2x + 5 \Leftrightarrow |2x + 3| = 2x + 5$ (3'')

– Với $0 > x \ge -\frac{3}{2}$; phương trình (3'') là: $2x + 3 = 2x + 5$

$\Leftrightarrow 0x = 2 \Rightarrow$ PTVN.

– Với $x < -\frac{3}{2}$, phương trình (3'') là: $-2x - 3 = 2x + 5$

$\Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$ thuộc khoảng đang xét.

Vậy phương trình có 1 nghiệm là $x = -2$

4. Phương trình có hệ số đối xứng

Phương trình có hệ số đối xứng là phương trình có dạng $f(x) = 0$ trong đó $f(x)$ là đa thức bậc n có tính chất hai số hạng có tổng các số mũ của biến bằng n thì bằng nhau, nghĩa là:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ với $a_i = a_{n-i}$ ($i = 0, 1, 2, ..., n$)

a) Phương trình: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$) (1)

Là phương trình hệ số đối xứng bậc 4.

Cách giải:

$x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia 2 vế cho x^2, ta được: $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ (2)

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ (3). Do x và $\frac{1}{x}$ cùng dấu $\Rightarrow |t| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Phương trình (2) trở thành: $at^2 + bt + c - 2a = 0$.

Nếu phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu phương trình (2) có nghiệm t thì thay vào (3) giải (3) để tìm x

b) Phương trình: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (4)

Là phương trình hệ số đối xứng bậc 5.

Cách giải:

Cách 1: $x = -1$ là 1 nghiệm của phương trình (4).

Đặt $x + 1$ làm nhân tử chung thì nhân tử còn lại là đa thức đối xứng bậc 4. Từ đó dẫn đến giải phương trình hệ số đối xứng bậc 4 như trên.

– *Chú ý*: Các phương trình hệ số đối xứng bậc lẻ có nghiệm $x_0 = -1$ và việc giải nó chuyển về giải phương trình hệ số đối xứng bậc $n - 1$ chẵn.

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$ (1)

b) $2x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$ (2)

Giải

a) Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). Chia cả 2 vế của phương trình này cho x^2 ta được:

$$2x^2 - 5x + 4 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0 \quad (1')$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ $\left(|t| \geq 2\right)$ $(*)$ $\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Phương trình (1') là: $2(t^2 - 2) - 5t + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t = 0 \Leftrightarrow t(2t - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 0 & \text{Không TMĐK}(*) \\ t = \frac{5}{2} & \text{TMĐK}(*) \end{array}\right.$$

Với $t = \frac{5}{2}$ thay vào $(*)$ ta có: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$; $\sqrt{\Delta} = 3$. $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$; $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm: $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2}$

Cách 2:

Ta có thể giải phương trình (1) bằng phương pháp nhẩm nghiệm.

Do $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1) nên VT phân tích thành tích có 1 thừa số là $x - 2$. Từ đó hạ bậc dần của tích.

b) $2x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$ (2)

$\Leftrightarrow 2x^5 + 2x^4 - 5x^4 - 5x^3 + 4x^3 + 4x^2 - 5x^2 - 5x + 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2) = 0$

Sử dụng kết quả câu a, phương trình (2) có 3 nghiệm là: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{1}{2}$

5. Phương trình bậc 4 có hệ số đối xứng lệch

Phương trình: $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

Gọi là phương trình bậc 4 có hệ số đối xứng lệch.

<u>*Cách giải:*</u> Phương trình (1) không nhận $x = 0$ là nghiệm nên chia 2 vế cho x^2, ta được: (1) $\Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x - \frac{1}{x}) + c = 0$ (2)

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ $(*)$ $\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

Khi đó phương trình (2) trở thành: $at^2 + bt + c + 2a = 0$ (3)

Nếu phương trình (3) vô nghiệm thì phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu phương trình (3) có nghiệm t. Khi đó thay vào $(*)$ ta tìm được x.

Ví dụ7: Cho phương trình: $3x^4 - 4x^3 + mx^2 + 4x + 3 = 0$ (1)

a) Với giá trị nào của m thì phương trình vô nghiệm?

b) Giải phương trình với $m = -5$

Giải

a) Phương trình (1) không nhận $x = 0$ là nghiệm.

Chia 2 vế cho x^2, ta được:

$$3x^2 - 4x + m + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + m = 0$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t\ (*) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

Phương trình trên trở thành: $3t^2 - 4t + m + 6 = 0$ (2)

Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 3m - 18 < 0$

$\Leftrightarrow 3m + 14 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{14}{3}$

Khi đó phương trình (1) vô nghiệm.

b) Với $m = -5$, phương trình (2) là: $3t^2 - 4t + 1 = 0$

Phương trình này có $a + b + c = 3 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = \frac{1}{3}$

* Với $t = 1$, thay vào (*) ta có: $x - \frac{1}{x} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

* Với $t = \frac{1}{3}$, thay vào (*) ta có: $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - x - 3 = 0$

$\Rightarrow x_3 = \frac{1+\sqrt{37}}{6};\ x_4 = \frac{1-\sqrt{37}}{6}$

Vậy với $m = -5$ phương trình đã cho có 4 nghiệm như trên.

6. Phương trình bậc 4 có hệ số đối xứng tỉ lệ

Phương trình: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bkx + ak^2 = 0$ (1)

($a \neq 0, k \neq 0$) gọi là phương trình bậc 4 có hệ số đối xứng tỉ lệ.

Cách giải: $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

Khi đó chia 2 vế của phương trình cho x^2, ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{k}{x}\right) + c = 0 \qquad (2)$$

Đặt $t = x + \frac{k}{x}\ (*) \Rightarrow x^2 + \frac{k^2}{x^2} = t^2 - 2k$

Phương trình (2) trở thành: $at^2 + bt + c - 2ak = 0$ (3)

Nếu phương trình (3) vô nghiệm thì phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu phương trình (3) có nghiệm t thì thay vào (*) ta tìm được nghiệm x.

Ví dụ 8: Giải phương trình $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 21x + 9 = 0$

Giải

$x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia 2 vế cho x^2, ta được

$x^2 - 7x + 18 - \frac{21}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{3}{x}\right) + 18 = 0$ (2)

Điều kiện: $|t| = \left|x + \frac{3}{x}\right| = |x| + \frac{3}{|x|} \ge 2\sqrt{3}$ (vì x và $\frac{3}{x}$ cùng dấu)

Đặt $x + \frac{3}{x} = t$ (*) $\Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 - 6$

Phương trình (2) là: $t^2 - 6 - 7t + 18 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 3 = 0 \\ t - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Vì t = 3 không thoả mãn ĐK ; Với t = 4, thay vào (*) ta được:

$x + \frac{3}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

Chú ý : *Các dạng phương trình 4, 5 , 6 bậc 4 có thể khái quát chung trong phương trình dạng* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Trong đó $\left(\frac{b}{d}\right)^2 = \frac{a}{e}$ *khi đó với nhận xét* $x \neq 0$ *. Chia cả hai vế của phương trình cho* ex^2 *ta được* $\left(\frac{a}{e}x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{d}{e}\left(\frac{b}{d}x + \frac{1}{x}\right) + \frac{c}{e} = 0$

Đặt $\frac{b}{d}x + \frac{1}{x} = t$ *thì* $\frac{a}{e}x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2\frac{b}{d}$ *ta đưa được phương trình đã cho về phương trình bậc hai với ẩn t*

7. Phương trình vô tỉ

Phương trình vô tỉ là phương trình chứa ẩn trong dấu căn.

Một số phương pháp giải

a) Phương pháp 1: Phương pháp nâng lên luỹ thừa:

Ví dụ 9: Giải phương trình: $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x + 4 \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \\ 1 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x \le 1 \\ x \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le \frac{1}{2}$ (1)

Phương trình viết lại dưới dạng: $\sqrt{x+4} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-2x)(1-x)} = 2x + 1$ (*)

ĐK: $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ (2)

Hai vế không âm. BP 2 vế của phương trình (*) ta có:

$(1 - 2x)(1 - x) = (2x + 1)^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(TMDK(1)\& (2)} \\ x = -\frac{7}{2} & \text{(K}^0\text{TMDK(2)} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm: $x = 0$

Ví dụ 10: Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{-2x}$ (1)

Áp dụng hằng đẳng thức: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

Lập phương 2 vế của (1) ta có:

$$3x - 1 + x + 1 + 3\sqrt[3]{3x-1}.\sqrt[3]{x+1}\left(\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{x+1}\right) = -2x$$

$$\Leftrightarrow 3.\sqrt[3]{3x-1}.\sqrt[3]{x+1}\left(\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{x+1}\right) = -6x \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $3.\sqrt[3]{3x-1}.\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{-2x} = -6x$

$\Leftrightarrow .\sqrt[3]{3x-1}.\sqrt[3]{x+1}.\sqrt[3]{2x} = 2x \Leftrightarrow (3x - 1)(x + 1).2x = 8x^3$

$\Leftrightarrow 2x[(3x - 1)(x + 1) - 4x^2] = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Thay $x = 0$ vào phương trình (1): Thoả mãn

Thay $x = 1$ vào phương trình (1): Không thoả mãn

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất là $x = 0$

b) Phương pháp 2: Đưa về phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ:

Ví dụ11: Giải phương trình: $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$ (1)

Giải

ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{2}$. Nhân 2 vế của phương trình (1) với $\sqrt{2}$, ta được:

$$\sqrt{2x - 1 + 2\sqrt{2x-1} + 1} + \sqrt{2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + 1 + \left|\sqrt{2x-1} - 1\right| = 2 \quad (*)$$

* Nếu $\sqrt{2x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

Phương trình (*) là: $\sqrt{2x-1}+1+\sqrt{2x-1}-1=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=1$. Hai vế không âm, bình phương 2 vế ta được: $2x-1=$

$\Leftrightarrow x=1$ (2) (Thoả mãn ĐKXĐ và thuộc khoảng đang xét).

* Nếu $\sqrt{2x-1}<1 \Leftrightarrow 2x-1<1 \Leftrightarrow x<1$

Phương trình là: $\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{2x-1}+1=2$

Phương trình có vô số nghiệm thoả mãn: $\frac{1}{2}\le x<1$ (3)

Kết hợp (2) và (3) ta có:

Phương trình có nghiệm là mọi x thoả mãn $\frac{1}{2}\le x\le 1$

*c) **Phương pháp 3: Đặt ẩn phụ.***

Ví dụ11: Giải phương trình: $6x^2+15x+\sqrt{2x^2+5x+1}=1$ (1)

Giải

Đặt $\sqrt{2x^2+5x+1}=t$ (*) $(t\ge 0) \Rightarrow 2x^2+5x+1=t^2$

$6x^2+15x=6x^2+15x+3-3=3(2x^2+5x+1)-3=3t^2-3$

Ta có phương trình (1) là: $3t^2+t-4=0 \quad \Rightarrow (3t+4)(t-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3t+4=0\\ t-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-\frac{4}{3}\\ t=1\end{array}\right.$

Ta thấy $t=-\frac{4}{3}$ không thoả mãn điều kiện $t\ge 0$

Với $t=1$. Thay vào (*) ta có: $\sqrt{2x^2+5x+1}=1$

$\Leftrightarrow 2x^2+5x+1=1 \Leftrightarrow 2x^2+5x=0$

$\Leftrightarrow x(2x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\frac{5}{2}\end{array}\right.$

Với $x=0$ và $x=-\frac{5}{2}$ TMĐK: $2x^2+5x+1>0$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1=0$; $x_2=-\frac{5}{2}$

*c) **Phương pháp 4: Dùng bất đẳng thức:***

Ví dụ12: Giải phương trình:

$\sqrt{8x^2-8x+3}+\sqrt{12x^2-12x+7}=2(-2x^2+2x+1)$ (1)

Giải

$$VT = \sqrt{2\left(4x^2 - 4x + 1\right) + 1} + \sqrt{3\left(4x^2 - 4x + 1\right) + 4}$$

$$= \sqrt{2\left(2x - 1\right)^2 + 1} + \sqrt{3\left(2x - 1\right)^2 + 4} \ge \sqrt{1} + \sqrt{4} = 3$$

$VP = 2(-2x^2 + 2x + 1) = -4x^2 + 4x - 1 + 3 = -(2x - 1)^2 + 3 \le 3$

Cả 2 vế đều bằng 3 khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}$

8. Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên

Phương pháp 1: Phát hiện tính chia hết của một ẩn

Ví dụ 13: Giải phương trình với nghiệm nguyên: $3x + 17y = 159$ (1)

Giải

Giả sử x, y là các số nguyên thoả mãn phương trình (1) ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên $17y \vdots 3$, do đó $y \vdots 3$ (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau)

Đặt: $y = 3t$ $(t \in Z)$ thay vào pt (1) ta được: $3x + 17.3t = 159$

$\Leftrightarrow x + 17t = 53 \Leftrightarrow x = 53 - 17t$

Do đó: $x = 53 - 17t \Rightarrow y = 3t$ $(t \in Z)$

Đảo lại: Thay các biểu thức của x và y vào (1) phương trình được nghiệm đúng

Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên (x, y) được biểu thị bởi công thức: $\begin{cases} x = 53 - 7t \\ y = 3t \end{cases}$ (t là số nguyên tuỳ ý)

Phương pháp 2: Đưa phương trình về ước số

Ví dụ14: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy - x - y = 2$

Giải

Biến đổi phương trình thành: $x(y - 1) - y = 2$

$\Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 3 \Leftrightarrow (y - 1)(x - 1) = 3$

Ta gọi phương trình trên là "Phương trình ước số": Vế trái là một tích các thừa số nguyên, vế phải là một hằng số. Ta có x và y là các số nguyên nên $x - 1$ và $y - 1$ là các số nguyên và là ước của 3.

Do vai trò bình đẳng của x và y trong phương trình nên có thể giả thiết rằng $x \ge y$, khi đó $x - 1 \ge y - 1$

Ta có:

$x - 1$	3	-1
$y - 1$	1	-3

Do đó:

X	4	0
Y	2	-2

Vậy nghiệm của phương trình là (4; 2); (2; 4); (0; -2); (-2; 0)

Phương pháp 3: Tách các giá trị nguyên

Ví dụ 15: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy - x - y = 2$

Giải

Biểu thị x theo y từ phương trình đã cho ta được: $x(y-1) = y + 2$

ta thấy $y \neq 1$ vì nếu $y = 1$ thì ta có $0x = 3$, vô nghiệm.

Do đó: $x = \dfrac{y+2}{y-1}$. Tách ra phân thức $x = \dfrac{y+2}{y-1}$ các số nguyên, ta có:

$$x = \frac{y+2}{y-1} = \frac{y-1+3}{y-1} = 1 + \frac{3}{y-1}$$

Do x là số nguyên nên $\dfrac{3}{y-1}$ là số nguyên. Do đó $y-1$ là ước của 3

Mà ước của (3) = ± 1 ; ± 3 lần lượt cho $y - 1$ bằng các ước của 3 ta được kết quả nghiệm của phương trình là: (4; 2); (2; 4); (0; -2); (-2; 0)

Phương pháp 4: Xét số dư của từng vế

Ví dụ 16: Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$ b) $x^2 + y^2 = 1999$

Giải

a) Ta chứng minh x^2, y^2 chia cho 4 chỉ có số dư là 0 và 1

Do vậy $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư 0; 1, 3.

Còn vế phải 1998 chia cho 4 dư 2.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên

b) x^2, y^2 chia cho 4 có số dư 0 ; 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 có số dư 0; 1; 2.

Còn vế phải 1999 chia cho 4 dư 3

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên

Phương pháp 5: Dùng bất đẳng thức

Ví dụ 17: Tìm 3 số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Giải

Gọi các số nguyên dương phải tìm là: x, y, z . Ta có: $x + y + z = xyz$ (1)

Chú ý rằng các ẩn x, y, z có vai trò bình đẳng trong phương trình nên có thể "Sắp thứ tự các ẩn". Chẳng hạn : $1 \leq x \leq y \leq z$

Do đó: $xyz = x + y + z \leq 3z$.

Chia 2 vế của bất đẳng thức $xyz \leq 3z$ cho số dương z ta được: $xy \leq 3$

Do đó: $xy \in \{1; 2; 3\}$

* Với $xy = 1$, ta có $x = 1$; $y = 1$. Thay vào (1) được: $2 + z = z$ (loại)
* Với $xy = 2$, ta có $x = 1$; $y = 2$. Thay vào (1) được: $z = 3$
* Với $xy = 3$, ta có $x = 1$; $y = 3$. Thay vào (1) được: $z = 2$ (loại)

Vì vế trái sắp xếp $y \le z$

Vậy 3 số phải tìm là: 1, 2, 3

Phương pháp 6: Chỉ ra nghiệm nguyên

Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn còn được thể hiện dưới dạng: Chỉ ra một vài số là nghiệm nguyên của phương trình, rồi chứng minh phương trình không có nghiệm khác.

Ví dụ 18: Tìm các số tự nhiên x sao cho : $2^x + 3^x = 5^x$

Giải

Viết phương trình dưới dạng: $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ (1)

Với $x = 0$ thì vế trái của (1) bằng 2 (loại)

Với $x = 1$ thì vế trái của (1) bằng 1 (đúng)

Với $x \ge 2$ thì : $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^x$; $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}$ nên

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \text{ (loại)}$$

Nghiệm duy nhất của phương trình: $x = 1$

Phương pháp 7: Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình

Ta viết phương trình: $F(x; y) = 0$ dưới dạng phương trình bậc hai đối với 1 ẩn, chẳng hạn đối với x, khi đó y là tham số. Điều kiện cần để phương trình có nghiệm là $\Delta \ge 0$ (để có nghiệm nguyên còn cần Δ là số chính phương)

Ví dụ 19: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x + y + xy = x^2 + y^2 \quad (1)$$

Giải

Viết (1) thành phương trình bậc 2 đối với x:

$$x^2 - (y + 1).x + (y^2 - y) = 0 \quad (2)$$

Điều kiện cần để (2) có nghiệm là $\Delta \ge 0$

Ta có: $\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \le 0 \Leftrightarrow 3 - (y - 1)^2 \le 4$

Do đó: $(y - 1)^2 \le 1$. Suy ra:

y – 1	–1	0	1
y	0	1	2

* Với $y = 0$ thay vào (2) được $x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1$
* Với $y = 1$ thay vào (2) được $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_3 = 0;\ x_4 = 1$
* Với $y = 2$ thay vào (2) được $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_5 = 0;\ x_6 = 1$

Thử lại các giá trị trên nghiệm đúng phương trình (1). Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm: (0; 0); (1; 0); (0; 1); (2; 1); (1; 2); (2; 2)

9. Bài tập vận dụng các dạng phương trình thường gặp:

Bài 13: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

c) $(x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x + 3)(x - 3) = 36(x + 3)^2$

d) $x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$

e) $(2x - \sqrt{5})^3 + (x + \sqrt{7})^3 + (\sqrt{5} - \sqrt{7} - 3x)^3 = 0$

g) $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x+1) = 4$

Bài 14: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{1 - x}{x + 2} - \dfrac{x + 1}{3 - x} - \dfrac{21}{x^2 - x - 6} = 2$

b) $\dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x + 4} = \dfrac{(3x - 2)(3x + 2)}{x^3 - 8}$

c) $\dfrac{2}{x + 3} - \dfrac{x + 2}{3x - x^2} = \dfrac{10}{x(x^2 - 9)}$

Bài 15: Giải các phương trình sau:

a) $3x - 2.|3 - x| = 1$

b) $|x + 1| + |2x - 3| = 5$

c) $||x| + 3| + 2x = 4$

Bài 16: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^5 - x^4 + 6x^3 + 6x^2 - x + 1 = 0$

c) $2x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 3x + 2 = 0$

d) $2x^4 - 21x^3 + 34x^2 + 105x + 50 = 0$

Bài 17: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x - 5} = \sqrt{2x + 1}$

b) $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 2} = 2$

c) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + 2x = 9$

d) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 5$

e) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-3} - 2} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-3} - 2} = 3$

g) $\sqrt{2x - 1 + \sqrt{4x-3}} + \sqrt{2x - 1 - \sqrt{4x-3}} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt{3x+2} - 5 = x$

h) $\sqrt{2x+9} = \sqrt{25-x} - \sqrt{3x+4}$

k) $\sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} = x^2 - 10x + 27$

Bài 18: Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình:

1) $2x + 13y = 156$ 2) $3xy + x - y = 1$

3) $2x^2 + 3xy - y = 1$ 4) $x^3 - y^3 = 91$

5) $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Bài 19: Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên. Biết rằng f(1). f(2) = 35.

Chứng minh rằng f(x) không có nghiệm nguyên.

V- HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn

1. Định nghĩa: Một hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn có dạng:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

trong đó $ax + by = 0$ và $a'x + b'y = c'$ là những phương trình bậc nhất 2 ẩn.

2. Cách giải: Thông thường ta giải hệ phương trình (I) bằng phương pháp cộng hoặc phương pháp thay thế.

Ví dụ1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - (m+3)y = 0 \\ (m-2)x + 4y = m - 1 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với $m = -1$.

b. Giải và biện luận hệ phương trình trên với m là tham số.

Giải

a. Với $m = -1$, hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy với $m = -1$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

b. Xét hệ phương trình: $(\mathrm{I})\begin{cases} x - (m+3)y = 0 & (1) \\ (m-2)x + 4y = m - 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có: $x = (m+3)y$ (3). Thay (3) vào (2) ta được:

$$(m-2)(m+3)y + 4y = m+1 \Leftrightarrow (m^2+m-6)y + 4y = m+1$$

$$\Leftrightarrow (m^2+m-2)y = m-1 \Leftrightarrow (m-1)(m+2)y = m-1 \quad (*)$$

* Nếu m = 1, phương trình (*) là : $0y = 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình vô số nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình (I) vô số nghiệm.

Thay m = 1 vào phương trình (1) ta được:

$$x - 4y = 0 \Leftrightarrow x = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x$$

Khi đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình (I) là: $(x \in R; y = \frac{1}{4}x)$

* Nếu m = −2, phương trình (*) là: $0y = -3$

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình (I) vô nghiệm.

* Nếu $m \neq 1$; $m \neq -2$ thì phương trình (*) có nghiệm là: $y = \dfrac{1}{m+2}$ thay vào (3) ta có : $x = \dfrac{m+3}{m+2}$

khi đó hệ phương trình (I) có nghiệm là: $\begin{cases} x = \dfrac{m+3}{m+2} \\ y = \dfrac{1}{m+2} \end{cases}$

Kết luận:

- Với m = 1, hệ phương trình có VSN ; nghiệm tổng quát là: $(x \in R; y = \frac{1}{4}x)$
- Với m = −2, hệ phương trình vô nghiệm.
- Với $m \neq 1$; $m \neq -2$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{m+3}{m+2} \\ y = \dfrac{1}{m+2} \end{cases}$

2. Hệ phương trình hai ẩn đối xứng loại I:

Ta có thể hiểu hệ phương trình đối xứng loại I đối với ẩn x và y là hệ có tính chất: khi tráo đổi vị trí các ẩn x và y cho nhau thì mỗi phương trình của hệ không đổi.

Cách giải:

* Đặt: $\begin{cases} x + y = S \\ x.y = P \end{cases}$ $(S^2 - 4P \geq 0)$ biến đổi hệ đã cho về hệ với 2 ẩn S và P.
* Giải hệ phương trình mới để tìm S, P.
* Với mỗi cặp (S, P) thì x và y là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

Chú ý: Nếu hệ phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là n_0 của hệ.

Ví dụ2: Giải hệ phương trình: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2xy = 7 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình : $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2xy = 7 \\ (x + y)^2 - 2xy = 5 \end{cases}$

Đặt: $x + y = S$; $x.y = P$ (với $S^2 - 4P \geq 0$)

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} S + 2P = 7 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases}$ (*)

$\Rightarrow S^2 + S - 12 = 0 \Leftrightarrow (S + 4)(S - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = -4 \\ S = 3 \end{array}\right.$

+ Thay vào (*) ta có : $S = -4 \Rightarrow P = \dfrac{11}{2}$ không thoả mãn điều kiện :

$S^2 - 4P \geq 0$

$S = 3 \Rightarrow P = 2$ (thoả mãn điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$).

Do đó x; y là nghiệm của phương trình:

$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$. Vậy ta có: $\left[\begin{array}{l} X = 1 \\ Y = 2 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} X = 2 \\ Y = 1 \end{array}\right.$

Hệ đã cho có 2 nghiệm: (1; 2); (2; 1).

3. Hệ phương trình 2 ẩn đối xứng loại II

Hệ 2 phương trình chưa 2 ẩn x; y được gọi là hệ đối xứng loại II nếu tráo đổi vị trí của x; y thì phương trình này trở thành phương trình kia và ngược lại.

Phương pháp giải:

Trừ vế với vế các phương trình đã cho, bao giờ ta cũng thu được phương trình tích: $(x - y)f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ f(x,y) = 0 \end{array}\right.$ khi đó ta giải hệ cho từng trường hợp.

Chú ý: Nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Ví dụ3: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$

Giải

Trừ từng vế hệ phương trình ta được:

$2(x^2 - y^2) - 3(x - y) = -(x^2 - y^2)$

$\Leftrightarrow 2(x - y)(x + y) - 3(x - y) + (x - y)(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(3x+3y-3)=0 \Leftrightarrow 3(x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=1-x \end{array}\right.$

+ Với x = y, hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x=y \\ 2x^2-3x=x^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=2 \end{array}\right.$$

+ Với y = 1 - x, hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y=1-x \\ 2x^2-3x=(1-x)^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2-x+1=0 \end{cases}$$

=> hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm là: (x; y) = (1; 1); (2; 2).

4. Hệ phương trình đẳng cấp.

Hệ phương trình đẳng cấp bậc 2 là hệ có dạng: $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2 \end{cases}$

Cách giải:

Cách 1:

- Khử x^2 (hay y^2), ta tính được x theo y (hay y theo x).
- Sử dụng phép thế ta được phương trình trùng phương theo y (hay theo x).

Cách 2:

- Giải hệ với x = 0.
- Khi $x \neq 0$, đặt y = tx, ta được hệ theo t và x.
- Khử x ta được phương trình bậc hai theo t.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình sau: $(\mathrm{I})\begin{cases} 2x^2+3xy+3y^2=3 & (1) \\ x^2+xy+y^2=1 & (2) \end{cases}$

Giải

Cách 1: Nếu (x; y) là nghiệm của hệ thì $y \neq 0$. Hệ (I) tương đương với :

$$\begin{cases} 2x^2+3xy+3y^2=3 & (1) \\ 2x^2+2xy+2y^2 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế 2 phương trình trên, ta được: $xy+y^2=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-y^2}{y}$ (3)

Thay (3) vào (2) ta được:

$$\left(\frac{1-y^2}{y}\right)^2+\frac{1-y^2}{y}y+y^2=1 \Leftrightarrow \frac{1-2y^2+y^4}{y^2}+1-y^2+y^2=1$$

$\Rightarrow (y^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

* Với y = 1, thay vào (2) ta có: $x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

* Với y = −1, thay vào (2) ta có: $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

(x; y) = (0; 1); (−1; 1); (0; −1); (1; −1).

5. Bài tập tự luyện hệ phương trình

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} (2x-3)(y+5) = 2xy \\ (x-3)(3y+1) = 3xy \end{cases}$ b. $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 3|x| - 7y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y = 4 \\ \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{4}y = 2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} \dfrac{2x}{2y+3} - \dfrac{x}{y-1} = 2 \\ \dfrac{x}{y-1} - \dfrac{2x}{2y-3} = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{6x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ g. $\begin{cases} \dfrac{3y+5}{y+1} + \dfrac{2x+3}{x+2} = 1 \\ \dfrac{y+2}{y+1} + \dfrac{5-2x}{x-2} = -3 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 4y + z = -17 \\ 5x - 3y + 6z = 3 \\ 3x + 5y + 2z = 21 \end{cases}$

Bài 3: Cho hệ phương trình (với m là tham số): $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với m = 3.

b. Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình có 1 nghiệm nguyên.

c. Xác định giá trị của m để hệ có 1 nghiệm là cặp số dương.

Bài 4: Cho hệ phương trình(m là tham số):

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{y}{y-m} = 0 \\ 2x - my = 2 - m \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với m = −1.

b. Giải và biện luận hệ phương trình.

Bài 5: Cho hệ phương trình (với m là tham số):

$$\begin{cases} \dfrac{(1-m)x}{2} = my + 1 \\ 2mx + (m-1)y = m - 1 \end{cases}$$

a. Giải và biện luận hệ phương trình trên.

b. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thoả mãn $x < 0$; $y < 0$.

Bài 6: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x+y) = 28 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x - 3y = 4.\dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4.\dfrac{x}{y} \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x \\ 2y^2 + xy = 3y \end{cases}$

VI . GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Kiến thức cơ bản: *Tóm tắt các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:*

Bước 1:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết
- Lập phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình

Bước 3: Đối chiếu các nghiệm của phương trình với điều kiện của ẩn rồi kết luận.

***Lưu ý*:** Ta có thể chọn ẩn trực tiếp (đại lượng bài toán bắt tìm) hoặc gián tiếp (đại lượng trung gian chưa biết)

2. Bài tập ví dụ:

Dạng 1: Toán chuyển động

Ví dụ1: Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một ôtô đi từ điểm A đến điểm B. Họ khởi hành từ A theo thứ tự nói trên lúc 6 giờ, 7 giờ và 8 giờ. Vận tốc trung bình của họ theo thứ tự trên là 10 km/h; 30 km/h và 40 km/h. Hỏi mấy giờ ôtô cách đều người đi xe đạp và xe máy.

Giải

Gọi x là thời gian ôtô đI để đến vị trí cách đều người đi xe đạp và người đi xe máy (x tính bằng giờ, x > 0). Trên hình các điểm Đ (chỉ vị trí người đi xe đạp), chữ O(chỉ vị trí người đi ôtô), chữ M (chỉ vị trí người đi xe máy) thoả mãn điều kiện đầu bài. Ta có bảng tóm tắt sau:

	Giờ khởi hành	*Thời gian đã đi để đến vị trí như h.Vù*	*Vận tốc*	*Quãng đường đã đi để đến vị trí như h.vẽ*
Ôtô	8 giờ	x giờ	40 km/h	4x km
Xe đạp	6 giờ	(x + 2) giờ	10 km/h	10(x + 2) km
Xe máy	7 giờ	(x + 1) giờ	30 km/h	30(x + 1) km

Theo đầu bài ta có phương trình: $40x - 10(x + 2) = 30(x + 1) - 40x$

Giải ra tìm được: $x = \frac{5}{4}$ giờ (thoả mãn điều kiện)

Kết luận: 8 giờ + $\frac{5}{4}$ giờ = 9giờ 15' thì ôtô cách đều người đi xe đạp và người đi xe máy.

Ví dụ 2: Một ôtô đi từ A đến dự định B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ôtô tại A.

Giải

Ta phân tích bài toán bằng bảng tóm tắt sau và lập hệ phương trình:

	S (km)	V (km/h)	t(giờ)
Dự định	x		y
Nếu xe chạy chậm	x	35	y + 2
Nếu xe chạy nhanh	x	30	y – 1

ĐK: $x > 0; y > 1 \Rightarrow x = 35(y + 2)$ (1)

$\Rightarrow x = 50(y - 1)$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x = 35(y+2) \\ x = 50(y-1) \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x = 350 \\ y = 8 \end{cases}$ (t/m đ/k)

Vậy quãng đường AB là 350 km và điểm xuất phát của ôtô tại A là:

12 – 8 = 4(giờ)

Dạng 2: Toán làm chung làm riêng

Ví dụ 3: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mới mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở vòi thứ 2 thì sau $\frac{6}{5}$ giờ mới đầy bể. Nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu mới đầy bể ?

Giải

Lập bảng phân tích:

	Thời gian đầy bể	Năng suất chảy 1 giờ
Hai vòi	$\frac{24}{5}$ (h)	$\frac{5}{24}$ (bể)
Vòi I	x (h)	$\frac{1}{x}$ (bể)
Vòi II	y (h)	$\frac{1}{y}$ (bể)

ĐK : $x, y > \frac{24}{5}$

Lập hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24} & (1) \\ \frac{9}{x}+\frac{5}{24}.\frac{6}{5} & (2) \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x=12 \\ y=8 \end{cases}$ (t/m đk)

Vậy ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau 8 giờ đầy bể.

Dạng 3: Dạng toán năng suất

Ví dụ 4: Một người mua 2 loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả 2 loại hàng thì người đó trả tổng cộng là 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại hàng.

Giải

Gọi số tiền phải trả cho mỗi loại hàng không kể thuế VAT lần lượt là x và y (triệu đồng) (ĐK $x, y > 0$)

Vậy loại hàng thứ nhất với mức thuế 10% phải trả $\frac{110}{100}x$ (triệu đong)

Loại hàng thư hai với mức thuế 10% phai trả $\frac{108}{100}y$ (triệu đong)

Ta có phương trình: $\frac{110}{100}x + \frac{108}{100}y = 2,17$ (1)

Cả 2 loại hàng với mức thuế 9% phải trả: $\frac{109}{100}(x + y)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 110x+108y=217 \\ 109(x+y)=218 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 110x+108y=217 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x=0,5 \\ y=1,5 \end{cases}$ (t/m đk)

Vậy số tiền phải trả cho mỗi loại hàng là 0,5 triệu và 1,5 triệu.

Dạng 4: Dạng toán số

Ví dụ 5: Tìm 2 số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ được thương là 2 và số dư là 124.

Giải

Gọi số lớn là x và số nhỏ là y (x, y $\in N$; y> 124)

Theo đầu bài tổng 2 số bằng 1006 ta có phương trình: x + y = 1006 (1)

Vì lấy số lớn chia cho số nhỏ được thương là 2 và số dư là 124 ta có phương trình : x = 2y + 124 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1006 \\ x = 2y + 124 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x=712 \\ y=294 \end{cases}$ (t/m đk)

Vậy Số lớn là 712

Số nhỏ là 294

Dạng 5:. Giải các bài toán về nhiệt lượng.

Biết rằng m kg nước giảm t°C thì toả nhiệt lượng Q = m.t (KCal); m kg nước tăng t°C thì thu vào nhiệt lượng là Q = m.t (KCal).

Ví dụ 6: Phải dùng bao nhiêu lít nước sôi 100°C và bao nhiêu lít nước lạnh 20°C để có hỗn hợp 100 lít nước ở 40°C.

Giải

Gọi khối lượng nước sôi là x (0 < x < 100, tính bằng kg;

1 lít nước có khối lượng 1kg).

Khối lượng nước lạnh là 100 – x (kg).

Khi x (kg) nước từ 100°C hạ xuống 40°C thì toả ra nhiệt lượng là:

$x.(100 - 40) = 60.x$ (KCal)

Khi (100 – x) kg nước tăng từ 20°C lên 40°C thì thu vào nhiệt lượng là:

$(100 - x).(40 - 20)$ tức là $20(100 - x)$ kcal.

Vì nhiệt lượng thu vào bằng nhiệt lượng toả ra nên ta có phương trình:

$60x = 20(100 - x) \Leftrightarrow 80x = 200 \Rightarrow x = 25$ (TMĐK)

Vậy khối lượng nước sôi là: 25kg.

khối lượng nước lạnh là: 100 – 25 = 75kg.

Vì 1 lít nước có khối lượng là 1 kg nên phải dùng 25 lít nước sôi và 75 lít nước lạnh 20°C

<u>Dạng 6</u>. Giải các bài toán về nồng độ:

Biết rằng m lít chất ta trong M lít dung dịch thì nồng độ phần trăm là $\frac{100.m}{M}$

Ví dụ 7: Khi thêm 200kg axit vào dung dịch axit (gồm nước và axit) thì dung dịch mới có nồng độ axit là 50%. Lại thêm 300g nước vào dung dịch mới ta được dung dịch axit có nồng độ là 40%. Tính nồng độ axit trong dung dịch đầu tiên.

Giải

Gọi khối lượng nước có trong dung dịch đầu tiên là x gam (x>0).

khối lượng axit có trong dung dịch đầu tiên là y gam (y>0).

Sau khi thêm 200g axit vào dung dịch thì nồng độ của dung dịch là 50% nên ta có phương trình: $\frac{y+200}{x+y+200} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - y = 200$ (1)

Sau khi thêm 300g nước vào dung dịch mới thì nồng độ của dung dịch là 40% nên ta có phương trình:

$$\frac{y+200}{x+y+200+300} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2x - 3y = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 200 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 600 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 600 \qquad \text{(TMĐK)}$$

Thay vào (1) ta được: $y = x - 200 = 600 - 200 = 400$ (TMĐK)

Vậy nồng độ axit trong dung dịch đầu tiên là: $\frac{400}{400+600} = \frac{4}{10} = 40\%$

Đáp số: 40%.

3. *Một số dạng toán khác :*

Ví dụ 8: Một hình chữ nhật có đường chéo bằng 15cm. Nếu gấp đôi chiều rộng và giảm chiều dài đi 1 nửa thì được hình chữ nhật mới có chu vi lớn hơn chu vi hình chữ nhật ban đầu là 6cm. Tính diện tích hình chữ nhật ban đầu.

Giải

Gọi chiều rộng hình chữ nhật ban đầu là x

chiều dài hình chữ nhật ban đầu là y (x, y > 0 ; tính bằng cm).

Gấp đôi chiều rộng, ta được chiều rộng mới là 2x.

Giảm chiều dài đi 1 nửa ta được chiều dài mới là : $\frac{y}{2}$

Theo bài ra ta có: $2x + \frac{y}{2} = x + y + 3$ (*)

$\Leftrightarrow 4x + y = 2x + 2y + 6 \Leftrightarrow 2x - y = 6$ (1)

đường chéo hình chữ nhật là 15cm.

Ta có phương trình: $x^2 + y^2 = 15^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 6\{\ \} & (1) \\ x^2 + y^2 = 225 & (2) \end{cases}$

từ (1) $\Rightarrow y = 2x - 6$ (3)

thay (3) vào (2) ta được : $x^2 + (2x - 6)^2 = 225 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 24x + 36 = 225$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 24x - 189 = 0.$ $\Delta' = 122 + 5.189 = 1089 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 33$

$\Rightarrow x_1 = \frac{12 + 33}{5} = 9$ (TM); $x_2 = \frac{12 - 33}{5} < 0$ (Không thoả mãn)

thay vào (1) ta được y = 12 (TMĐK)

Vậy hình chữ nhật ban đầu có chiều rộng là 9cm.

Chiều dài là 12cm. Diện tích là 9.12 = 108 (cm^2).

4. *Bài tập tự luyện*

Bài 1: Một ôtô dự định đi từ Ađến B với vận tốc 60km/h. Đi được 18 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc trên quãng đường còn lại là 50km/h. vì vậy, đã đến nơi chậm 12 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 2: Một nhà máy đặt kế hoạch sản xuất 3500 chi tiết máy trong 1 thời gian nhất định; 5 ngày đầu họ thực hiện đúng tiến độ. Những ngày sau đó do cải tiến kỹ thuật, mỗi ngày vượt 10 chi tiết nên chẳng những hoàn thành sớm 1 ngày mà còn vượt mức 50 chi tiết nữa. Tính năng suất dự kiến theo kế hoạch ban đầu?

Bài 3: Hai vòi nước cùng chảy vào 2 bể (không có nước) thì 4 giờ đầy bể. Người ta cùng mở 2 vòi trong 2 giờ, sau đó tắt vòi 1, vòi 2 tiếp tục chảy trong 6 giờ nữa thì đầy bể. Hỏi mỗi vòi chảy 1 mình thì sau bao lâu đầy bể ?

Bài 4: Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một ôtô đI từ điểm A đến điểm B. Họ khởi hành từ A theo thứ tự nói trên lúc 6 giờ, 7 giờ và 8 giờ. Vận tốc trung bình của họ theo thứ tự trên là 10 km/h; 30 km/h và 40 km/h. Hỏi mấy giờ ôtô cách đều người đi xe đạp và xe máy.

Bài 5: Một ôtô đi từ A đến dự định B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ôtô tại A.

Bài 6: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mới mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở vòi thứ 2 thì sau $\frac{6}{5}$ giờ mới đầy bể. Nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu mới đầy bể ?

Bài 7: Một người mua 2 loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả 2 loại hàng thì người đó trả tổng cộng là 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại hàng.

Bài 8: Tìm 2 số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ được thương là 2 và số dư là 124.

VII. BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, CỰC TRỊ ĐẠI SỐ

VII.1 - BẤT ĐẲNG THỨC

1. Kiến thức cần nhớ

a) Định nghĩa: Cho hai số a và b ta có $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

b) Một số bất đẳng thức cơ bản:

- Các bất đẳng thức về luỹ thừa và căn thức:

$A^{2n} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ với A là một biểu thức bất kỳ , dấu bằng xảy ra khi $A = 0$

$\sqrt[2n]{A} \geq 0$; $\forall A \geq 0; \forall n \in \mathbb{N}$; dấu bằng xảy ra khi $A = 0$

$\sqrt{A} + \sqrt{B} \geq \sqrt{A + B}$ Với $A \geq 0$; $B \geq 0$

dấu bằng xảy ra khi có ít nhất 1 trong hai số bằng không

$\sqrt{A - B} \leq \sqrt{A} - \sqrt{B}$ với $A \geq B \geq o$ dấu bằng xảy ra khi $B = 0$

- Các bất đẳng thứcvề giá trị tuyệt đối

$|A| \geq 0$ Với A bất kỳ , dấu bằng xảy ra khi $A = 0$

$|A| + |B| \geq |A + B|$ dấu bằng xảy ra khi A và B cùng dấu

$|A| - |B| \le |A - B|$ Dấu bằng xảy ra khi A và B cùng dấu và A> B

- Bất đẳng thức Cauchy (Côsi) :

+ Cho các số $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$

(Trung bình nhân của n số không âm không lớn hơn trung bình cộng của chúng)

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

+ Bất đẳng thức Côsi cho hai số có thể phát biểu dưới các dạng sau :

$\frac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab}$ Với a và b là các số không âm

$(a + b)^2 \ge 4ab$ Với a và b là các số bất kỳ

$a^2 + b^2 \ge \frac{(a + b)^2}{2}$ Với a và b là các số bất kỳ

Dấu bằng xảy ra khi a = b

- Bất đẳng thức Bunhiacopsky (Còn gọi là bất đẳng thức Côsi – Svac) :

+ Cho hai bộ các số thực: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$.

Khi đó:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi:

+ Hoặc $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ với a_i , b_i khác 0 và nếu $a_i = 0$ thì b_i tương ứng cũng bằng 0

+ Hoặc có một bộ trong hai bộ trên gồm toàn số không

+ Bất đẳng thức Côsi – Svac cho hai cặp số:

$(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ Dấu bằng xảy ra khi ay = bx

- Bất đẳng thức $x + \frac{1}{x} \ge 2$ Với $x > 0$; $x + \frac{1}{x} \le -2$ Với $x < 0$

c) Các tính chất của bất đẳng thức:

- Tính chất bắc cầu: Nếu a > b và b > c thì a > c
- Tính chất liên quan đến phép cộng:

  Cộng hai vế của bất đẳng thức với cùng một số:

  Nếu a > b thì a + c > b + c

  Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều:

  Nếu a > b và c > d thì a + c > b + d
- Trừ hai bất đẳng thức ngược chiều:

Nếu $a > b$ và $c < d$ thì $a - c > b - d$

Các tính chất liên quan đến phép nhân :

+ Nhân 2 vế của bất đẳng thức với một số.

  Nếu $a > b$ và $c > 0$ thì $ac > bc$

  Nếu $a > b$ và $c < 0$ thì $ac < bc$

+ Nhân 2 bất đẳng thức cùng chiều.

  Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$ thì $ac > bd$

  Nếu $a < b < 0$ và $c < d < 0$ thì $ac > bd$

+ Luỹ thừa hai vế của một bất đẳng thức:

  $a \ge b \Rightarrow a^{2n+1} \ge b^{2n+1}$ Với mọi $n \in \mathbb{N}$

  $a \ge b \ge 0 \Rightarrow a^{2n} \ge b^{2n}$ Với mọi $n \in \mathbb{N}$

  $a \le b < 0 \Rightarrow a^{2n} \ge b^{2n}$ Với mọi $n \in \mathbb{N}$

  $0 < a < 1 \Rightarrow a^n < a^m$ Với $n > m$

  $a > 1 \Rightarrow a^n > a^m$ Với $n > m$

2. Một số điểm cần lưu ý:

- Khi thực hiện các phép biến đổi trong chứng minh bất đẳng thức , không được trừ hai bất đẳng thức cùng chiều hoặc nhân chúng khi chưa biết rõ dấu của hai vế. Chỉ được phép nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một biểu thức khi ta biết rõ dấu của biểu thức đó
- Cho một số hữu hạn các số thực thì trong đó bao giờ ta cũng chọn ra được số lớn nhất và số nhỏ nhất . Tính chất này được dùng để sắp thứ tự các ẩn trong việc chứng minh một bất đẳng thức

3. Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức:

3.1. Sử dụng các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số thực x thì: $\dfrac{3x^2+4x+11}{x^2-x+1} \ge 2$

Giải

Ta có: $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ Với mọi x

Do vậy: $\dfrac{3x^2+4x+11}{x^2-x+1} \ge 2$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 11 \ge 2\left(x^2 - x + 1\right) \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 11 \ge 2x^2 - 2x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 \ge 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 \ge 0$. Đúng với mọi x

Dấu bằng xảy ra khi $x = -3$

Ví dụ 2 : Cho a, b $\in$ Z và a + b $\neq$ 0. Chứng minh rằng $\frac{a^5+b^5}{a+b} \geq a^2b^2$

Giải

Ta có: $\frac{a^5+b^5}{a+b} \geq a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{a^5+b^5}{a+b} - a^2b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow M = \frac{a^5+b^5-a^2b^2(a+b)}{a+b} \geq 0$

Xét tử của M: $a^5+b^5-a^3b^2-a^2b^3 = (a^5-a^2b^3)-(a^3b^2-b^5)$

$= a^2(a^3-b^3)-b^2(a^3-b^3)$

$= (a^3-b^3)(a^2-b^2) = (a-b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a+b)$

$= (a+b)(a-b)^2\left[\left(a^2-ab+\frac{1}{4}b^2\right)+\frac{3}{4}b^2\right]$

$= (a+b)(a-b)^2\left[\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]$

Vì a+b $\neq$ 0 nên $M = (a-b)^2\left[\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right] > 0$ do a, b không thể đồng thời bằng 0

3.2. Phương pháp phản chứng:

Ví dụ 3: Cho ba số a, b, c thoả mãn:

$\begin{cases} a+b+c>0 \\ ab+ac+bc>0 \\ abc>0 \end{cases}$. Chứng minh rằng cả ba số đó đều dương

Giải

Giả sử có một số không dương: $a \leq 0$

Từ $abc > 0$ ta có: $bc < 0$ (*)

Từ $a+b+c>0$ ta có: $b+c>-a>0$

Từ $ab+bc+ac>0$ ta có: $bc+a(b+c)>0 \Rightarrow bc>-a(b+c)>0$ (**)

Ta có (*) và (**) mâu thuẫn nhau $\Rightarrow$ đpcm.

3.3. Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cơ bản:

Ví dụ 4: Chứng minh rằng: Với x, y > 0.

Ta có : $(1+x)(1+y) \geq (1+\sqrt{xy})^2$

Giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có:

$$(1+x)(1+y)=\left(1^2+\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\left(1^2+\left(\sqrt{y}\right)^2\right)\geq\left(1+\sqrt{xy}\right)^2$$

Cách 2: Theo bất đẳng thức Cosi ta có:

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}\geq\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{(1+x)(1+y)}};\qquad \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\geq 2\frac{1}{(1+x)(1+y)}$$

$$2\geq\frac{2\sqrt{xy}+1}{\sqrt{(1+x)(1+y)}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{xy}+1}{\sqrt{(1+x)(1+y)}}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{xy}\leq\sqrt{(1+x)(1+y)}\Leftrightarrow (1+x)(1+y)\geq\left(1+\sqrt{xy}\right)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

Ví dụ 5: Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $3a + 4 = 5$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq 1$

Giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky ta có:

$$5^2=\left(3a+4b\right)^2\leq\left(3^2+4^2\right)\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}3a+4b=5\\ \dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{5}\\ b=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

Cách 2: Từ $3a + 4b = 5$ ta có $a= \dfrac{5-4b}{3}$

Vậy $a^2+b^2\geq 1\Leftrightarrow\left(\dfrac{5-4b}{3}\right)^2+b^2\geq 1\Leftrightarrow 25-40b+16b^2+9b^2\geq 9$

$\Leftrightarrow 25b^2-40b+16\geq 0\Leftrightarrow\left(5b-4\right)^2\geq 0$. Đúng với mọi x

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi góc nhọn x ta có:

a) $\sin x + \cos x \leq \dfrac{1}{2}$ b) $\tan x + \cot x \geq 2$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có:

$$\sin x+\cos x\leq\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2}=\frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin x = \cos x$ hay $x = 45^0$

b) Vì tanx , cotanx > 0. Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số ta có:

$\tan x + \cot x \ge 2\sqrt{\text{tg}x.\cot gx} = 2$ (Vì tgx . cotgx = 1)

Dấu bằng xảy ra khi tanx = cotanx hay $x = 45^0$

Ví dụ 7: Cho $a \ge 4$. Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{a} \ge \frac{17}{4}$

Giải

Ta có: $a + \frac{1}{a} = \frac{a}{16} + \frac{1}{a} + \frac{15a}{16}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosicho hai số dương $\frac{a}{16}$ và $\frac{1}{a}$ ta có:

$\frac{a}{16} + \frac{1}{a} \ge 2\sqrt{\frac{a}{16}.\frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$. Mà: $a \ge 4 \Rightarrow \frac{15a}{16} \ge \frac{15}{16}.4 = \frac{15}{4}$

Vậy $a + \frac{1}{a} \ge \frac{17}{4}$ Dấu bằng xảy ra khi a = 4

Ví dụ 8: Chứng minh rằng với mọi số thực x , y ta có :

$$5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y > -10$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y > -10$

$\Leftrightarrow \left(4x^2 - 4x + 1\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) + \left(x^2 - 2xy + y^2\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(2x - 1\right)^2 + \left(y - 3\right)^2 + \left(x - y\right)^2 \ge 0$

Điều này đúng vì $\left(2x - 1\right)^2 \ge 0; \left(y - 3\right)^2 \ge 0; \left(x - y\right)^2 \ge 0$

và không đồng thời xảy ra $(2x - 1)^2 = (y - 3)^2 = (x - y)^2 = 0$

3. 4. Phương pháp sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình:

Ví dụ 9 : Chứng minh rằng nếu phương trình:

$2x^2 + (x + a)^2 + (x + b)^2 = c^2$. Có nghiệm thì $4c^2 \ge 3(a + b)^2 - 8ab$

Giải

Ta có :

$2x^2 + \left(x + a\right)^2 + \left(x + b\right)^2 = c^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 2\left(a + b\right)x + a^2 + b^2 + -c^2 = 0$

Để phương trình có nghiệm thì:

$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow \left(a + b\right)^2 - 4(a^2 + b^2 - c^2) \ge 0 \Leftrightarrow 4c^2 \ge 3\left(a^2 + b^2\right)$ 2ab

$\Leftrightarrow 4c^2 \ge 3\left(a + b\right)^2 - 8ab$

3.5. Phương pháp làm trội:

Ví dụ 10: Chứng minh với $n \in N^*$ thì: $S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$

Giải

Ta có: $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$

$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$

$+ \quad ....$

$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$

$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$

$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > n.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

4. Các bài tập tự luyện:

Bài 1: Trong tam giác vuông ABC có cạnh huyền bằng 1, hai cạnh góc vuông là b và c. Chứng minh rằng : $b^3 + c^3 < 1$

Bài 2 : Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\frac{7x^2 - 15x + 12}{x^2 - x + 1} \geq 3$ Với mọi x

b) Nếu $a + b < 0$ thì $a^3 + b^3 \leq ab(a + b)$

c) Nếu $x^3 + y^3 = -2$ thì $-2 \leq x + y < 0$

d) Nếu $x^3 + y^3 = 16$ thì $0 < x + y \leq 4$

Bài 3 : Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) Nếu $a^2 + b^2 = 13$ thì $a^2 + b^2 \geq 2a + 3b$

b) $5\left(x^2 + y^2\right) - 4(x - y) + 2(xy + 1) \geq 0$. Với mọi x , $y \in \mathbb{R}$

Bài 4:

a) Cho hai số thực dương a và b . Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

b) Cho $0 < x < 2$ và $x \neq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x(2-x)} > 4 \quad x^2$

Bài 5

a) Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng : $\sqrt{a} > \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{2}$

b) Áp dụng so sánh $\sqrt{2007} - \sqrt{2006}$ và $\sqrt{2006} - \sqrt{2005}$

VII.2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

1. Kiến thức cần nhớ:

Cho các biểu thức A và B

- Nếu $A \leq a$ trong đó a là một giá trị của biểu thức A
  Thì a được gọi là giá trị lớn nhất của A (GTLN của A), được ký hiệu là MaxA hay A_{Max}
- Nếu $B \geq b$ trong đó b là một giá trị của B
  Thì b được gọi là giá trị nhỏ nhất của B (GTNN của B),được ký hiệu là Min B hay B_{Min}
- Các cách biến đổi thường dùng để tìm GTLN và GTNN.

Cách 1: a) Tìm GTLN: $f(x) \leq g(x) \leq a$

b) Tìm GTNN: $f(x) \geq g(x) \geq a$

Cách 2: a) Tìm GTLN: $f(x) = h(x) + g(x)$ $\quad (h(x) \leq 0;\ g(x) \leq a)$

b) Tìm GTNN: $f(x) = h(x) + g(x)$ $\quad (h(x) \geq 0;\ g(x) \geq a)$

Với biểu thức nhều biến có cách làm tương tự

2. Một số diểm cần lưu ý

- Khi tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức . Nếu biến lấy giá trị trên toàn tập $\mathbb{R}$ thì vấn đề đã không đơn giản . Khi biến trong biểu thức chỉ lấy giá trị trong $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ hoặc một khoảng giá trị nào đó thì vấn đề càng phức tạp và dễ mắc sai lầm .
- Một sai lầm thường mắc phải đó là khi biến đổi các biểu thức theo cách 1 hoặc cách 2 . Ta kết luận giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức là a nhưng dấu bằng không xảy ra đồng thời

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 4x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 5$

<u>Lời giải 1</u>:

$$P = x^2 + 2xy + y^2 + 2x^2 + 4x + 2 + x^2 - x + 3$$

$$= (x+y)^2 + 2(x-1)^2 + x^2 - x + 3 \geq x^2 - x + 3 \text{ Với mọi x}$$

Mà $x^2 - x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$

Nên Min $P = \frac{11}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và $x + y = 0$ nên $y = -\frac{1}{2}$

Ta thấy lời giải này sai lầm ở chỗ dấu bằng không xảy ra đồng thời .

Khi $x = \frac{1}{2}$ thì $(x-1)^2 \neq 0$

Lời giải 2:

Ta có:

$$P = x^2 + 2xy + y^2 + 3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{17}{4} = (x+y)^2 + 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \geq \frac{17}{4}$$

Vậy Min $P = \frac{17}{4}$ Khi $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 2: Cho $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + \frac{1}{a}$

Lời giải 1:

Theo bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có $P = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a.\frac{1}{a}} = 2$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2

Lời giải này sai lầm ở chỗ $P = 2 \Rightarrow a = 1$ không thoả mãn điều kiện $a \geq 2$

Lời giải 2:

Ta có $P = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3}{4}a \geq 2\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{1}{a}} + \frac{3}{4}a \geq 2 + \frac{3}{4}a \geq \frac{7}{2}$

Vậy Min $P = \frac{7}{2}$ khi $a = 2$

3. Bài tập ví dụ:

- Về bản chất bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức và bài toán chứng minh bất đẳng thức có thể coi là tương đương nhau. Bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức nếu ta phán đoán được kết quả thì bài toán trở thành chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 3: Cho $x, y, z \in R$ thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm GTLN của $P = |x + 2y + 3z|$

Giải

Theo bất đẳng thức Cosi – Bunhiacopxki ta có:

$P^2 = (x + 2y + 3z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 14$

Nên $P \leq \sqrt{14}$. Dấu = xảy ra khi:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{14} \\ y^2 = \frac{4}{14} \\ z^2 = \frac{9}{14} \end{cases}$$

Vậy $(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{14}}{14}; \frac{2\sqrt{14}}{14}; \frac{3\sqrt{14}}{14}\right)$ (1)

Hoặc $(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{14}}{14}; \frac{-2\sqrt{14}}{14}; \frac{-3\sqrt{14}}{14}\right)$ (2)

Vậy $P_{max} = \sqrt{14}$ khi $(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{14}}{14}; \frac{2\sqrt{14}}{14}; \frac{3\sqrt{14}}{14}\right)$

Hoặc $(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{14}}{14}; \frac{-2\sqrt{14}}{14}; \frac{-3\sqrt{14}}{14}\right)$

Ví dụ 4: Cho a, b, x, y là các số dương thoả mãn : $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $P = xy$ b) $Q = x + y$

Giải

a) Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $2\sqrt{\frac{ab}{xy}} \le \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1 \Rightarrow xy \ge 4ab$

Vậy $P_{min} = 4ab$ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = 2b \end{cases}$

b) Ta có: $\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)(x + y) = \left(\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)\right)$

$$\ge \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

(Bất đẳng thức Bunhiacopxki)

Vậy: $Q = x + y \ge \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$

$Q_{min} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ khi $x = a + \sqrt{ab}; y = b + \sqrt{ab}$

Ví dụ 5: Tìm GTLN của $P = \frac{x}{(x + a)^2}$

Giải

Điều kiện: $x \neq -a$. Ta có:

Với $x = 0 \Rightarrow P = 0$

Với $x \neq 0$ ta có: $P = \dfrac{x}{(x+a)^2} \Leftrightarrow x = P(x+a)^2$

$\Leftrightarrow px^2 + 2apx + pa^2 = x \Leftrightarrow px^2 + (2ap - 1)x + a^2 = 0$

Để phương trình có nghiệm thì: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2ap - 1)^2 - 4pa^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4a^2p^2 - 4ap + 1 - 4a^2p \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2p^2 - 4a(a+1)p + 1 \geq 0$

Giải bất phương trình bậc 2 thu được $P_1 \leq P \leq P_2$

4. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = x^2 - 6x + 1$

b) $B = 10x^2 + 5y^2 - 4x - 6y - 12xy + 2020$

c) $C = \sqrt{\dfrac{x}{2x+1}} + \sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}$

d) $D = 3x^2 + 5y^2$ với $\sqrt{3}x = \sqrt{5}y + 2$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $M = -x^2 + 4x + 7$

b) $N = 2003 - 2x^2 - 8y^2 + 2x + 4xy + 4y$

c) $P = (x+1)(2-x)$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{3x-1}{x^2+1}$

VII.3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Kiến thức cần nhớ :

- Bất phương trình bậc nhất : $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

  + Nếu $a > 0$ bất phương trình có nghiệm $x > -\dfrac{b}{a}$

  + Nếu $a < 0$ bất phương trình có nghiệm $x < -\dfrac{b}{a}$

  Tương tự cho bất phương trình $ax + b < 0$

* Ta có thể nhớ cách lấy nghiệm của bất phương trình bậc nhất theo qui tắc " Lớn cùng bé khác " .

Nghĩa là nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) có nghiệm $x = -\dfrac{b}{a}$

Khi $x > -\frac{b}{a}$ thì f(x) và hệ số a cùng dấu ,

Khi $x < -\frac{b}{a}$ thì f(x) và hệ số a khác dấu

- Bất phương trình tích :

$$A(x)B(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A(x) > 0\\B(x) > 0\end{cases}\\\begin{cases}A(x) < 0\\B(x) < 0\end{cases}\end{array}\right.;\ A(x)B(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A(x) < 0\\B(x) > 0\end{cases}\\\begin{cases}A(x) > 0\\B(x) < 0\end{cases}\end{array}\right.$$

trong đó A(x) và B(x) là các biểu thức của biến x

- Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối : Ta làm mất dấu giá trị tuyệt đối để giải bằng cách xét khoảng giá trị của biến hoặc bình phương hai vế của bất phương trình

$$|A(x)| \geq B(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B(x) \leq 0\\\begin{cases}B(x) > 0\\(A(x))^2 \geq (B(x))^2\end{cases}\end{array}\right.;\ |A(x)| \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases}B(x) \geq 0\\(A(x))^2 \leq (B(x))^2\end{cases}$$

- Bất phương trình vô tỷ: $\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}A(x) \geq 0\\B(x) \geq 0\\A(x) \geq B(x)\end{cases}$

$$\sqrt{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A(x) \geq 0\\B(x) \leq 0\end{cases}\\\begin{cases}B(x) > 0\\A(x) \geq (B(x))^2\end{cases}\end{array}\right.;\ \sqrt{A(x)} \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases}A(x) \geq 0\\B(x) \geq 0\\A(x) \geq (B(x))^2\end{cases}$$

2. Bài tập ví dụ:

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau :

a) $-3(x + 2) + 2(x - 1) \geq 4x - 3$ b) $(m + 1)^2 x \leq 2m(x + 1)$

Giải

a) Ta có: $-3(x + 2) + 2(x - 1)4x - 3$

$\Leftrightarrow -3x - 6 + 2x - 1 \geq 4x - 3 \Leftrightarrow -x - 4x \geq -3 + 7$

$\Leftrightarrow -5x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{5}$

b) Ta có: $(m+1)^2 x \le 2m(x+1) \Leftrightarrow (m^2+2m+1)x \le 2mx+2m$

$\Leftrightarrow (m^2+1)x \le 2m$

Vì $m^2+1>0$ với mọi m nên bất phương trình có nghiệm $x \ge \dfrac{2m}{m^2+1}$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình:

a) $x^2-5x+6 \ge 0$ b) $-x^2+4x-3 \ge 0$

Giải

a) Tacó:

$$x^2-5x+6 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3x+6 \ge 0 \Leftrightarrow x(x-2)-3(x-2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x-3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \le 0 \\ x-3 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 2 \\ x \le 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 2 \end{array}\right.$$

b) Tacó:

$$-x^2+4x-3 \ge 0 \Leftrightarrow -x^2+x+3x-3 \ge 0 \Leftrightarrow -x(x-1)-3(x-1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3-x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 3-x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \le 0 \\ 3-x \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$$

Chú ý :

- Ta có thể kết hợp nghiệm trên trục số
- Ta có thể so sánh A(x) và B(x) trong bất phương trình tích để giải nhanh hơn :

Ví dụ: $(x-1)(3-x) \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \le 0$ do $x-1 > x-3$

nên chỉ xảy ra $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2-3x+2} \ge x-2$ b) $|3x+2| \le 2x-1$

Giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \ge x - 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ x - 1 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \ge (x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-1)(x-2) \ge 0 \\ x - 1 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 3x + 2 \ge x^2 - 2x + 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \le 0 \\ x - 2 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x \le 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \le 2$

__Chú ý:__ Tránh biến đổi sai lầm như sau:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \ge x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} \ge \sqrt{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} \ge \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x - 2 \ge x - 1 \Leftrightarrow -1 \ge 0$$

Kết luận phương trình vô nghiệm

b) ***Cách 1:*** Ta có: $|2x + 1| \le 3x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \ge 0 \\ (2x+1)^2 \le (3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 4x^2 + 4x + 1 \le 9x^2 - 12x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ -5x^2 - 16x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ x(5x + 16) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x \le -\dfrac{16}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}$$

Cách 2: Nghiệm của bất phương trình đã cho nếu có phải thoả mãn::

$3x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{3}$ (1). Xét: $2x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}$ (2)

Bất phương trình trở thành: $2x + 1 \le 3x - 1 \Leftrightarrow -x \le 2 \Leftrightarrow x \ge -2$

Kết hợp với (1) và (2) ta có $x \ge \dfrac{1}{3}$ là nghiệm của bất phương trình đã cho

Xét $2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$ (3)

Bất phương trình đã cho trở thành: $-2x - 1 \le 3x - 1 \Leftrightarrow -5x \le 0 \Leftrightarrow x \ge 0$
Không thoả mãn (3).

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \ge \dfrac{1}{3}$

3. Bài tập tự luyện:

Giải các bất phương trình sau

Bài 1: a) $2(3x-1)-3(x-2)\le 5(1-2x)+4$

b) $(m-2)^2(x+1)\ge 4m(3-x)$

c) $6x^2-7x+2\ge 0$

d) $-9x^2+18x-5\le 0$

Bài 2:

a) $|x+2|\ge 2x-1$

b) $1+2|x-1|\le 3x-5$

c) $\sqrt{x^2-5x+6}\ge 3x+2$

d) $\sqrt{x^2-3x+2}<\sqrt{2x^2-5x+3}$

e) $\sqrt{3x^2+2x-1}\le x+1$

Bài 3:

a) $x-6\sqrt{x}+8\le 0$

b) $\dfrac{2x}{2x+1}-\dfrac{x}{x+2}<0$

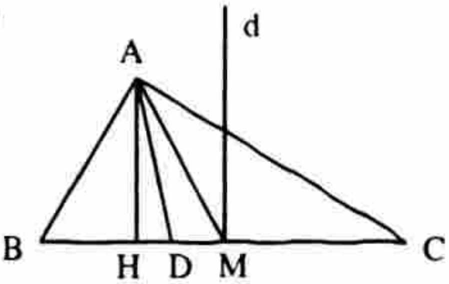
PHẦN THỨ HAI.

HÌNH HỌC

I. ĐỊNH LÝ TALET – TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Trong chương này, chúng ta sẽ ôn lại các kiến thức chung về tam giác, các trường hợp bằng nhau của tam giác, các dạng tam giác đặc biệt, các đường đặc biệt trong tam giác, các dạng tứ giác và tính chất của chúng. Vì lý do đó, chúng tôi chỉ nhắc lại các kiến thức này dưới dạng lý thuyết, các bài tập vận dụng chúng sẽ được gắn vào trong các bài tập về định lý Talet và tam giác đồng dạng

I. NHẮC LẠI MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

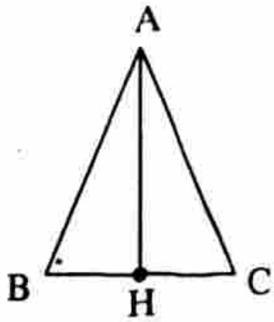


1. Tam giác

Trong một tam giác:

- Ba đường cao đồng quy, điểm đồng qui gọi là trực tâm của tam giác.
- Ba đường trung tuyến đồng quy, điểm đồng qui gọi là trọng tâm của tam giác
- Ba đường phân giác đồng quy, điểm đồng qui là tại tâm đường tròn nội tiếp tam giác
- Ba đường trung trực đồng quy, điểm đồng qui là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

Xét tam giác ABC:



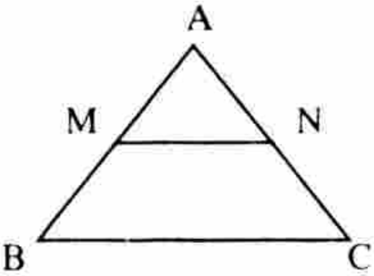
- Nếu ΔABC có $AB = AC$ hoặc $\hat{B} = \hat{C}$ thì tam giác cân tại A.
- Nếu ΔABC có $AB = AC = BC$ hoặc $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ thì tam giác ABC đều.
- Nếu ΔABC cân và có một góc bằng 60^0 thì tam giác ABC là tam giác đều.

Đường trung bình của tam giác: Trong tam giác ABC

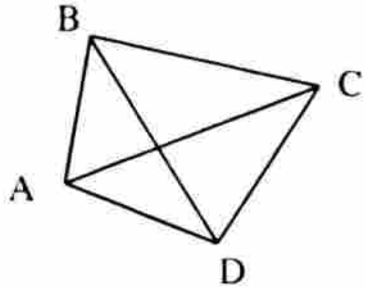
- Nếu $MA = MB$; $NA = NC$ thì MN được gọi là đường trung bình của ΔABC.
- Nếu MN là đường trung bình thì: $MN // BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.
- Nếu $\begin{cases} MN // BC \\ MA = MB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NA = NC \\ MN = \frac{1}{2}BC \end{cases}$

Chú ý: Từ $\begin{cases} MA = MB \\ MN = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$

Không suy ra được $\left[\begin{array}{l} MN // BC \\ MA = NC \end{array}\right.$



I.2. Tứ giác – các dạng tứ giác đặc biệt



1. Tứ giác

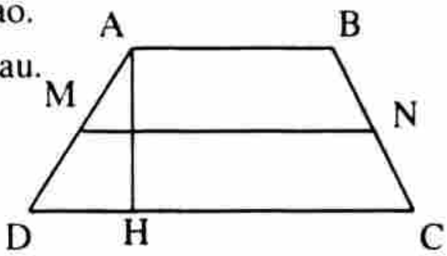
- Tổng 4 góc trong 1 tứ giác:
  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^0$
- Tổng các góc ngoài của tứ giác bằng 180^0

2. Các dạng tứ giác đặc biệt

1. Hình thang:

Tứ giác ABCD là hình thang nếu có hai cạnh đối song song (AB//CD)

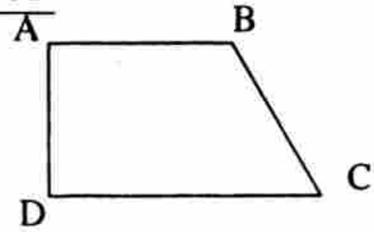
- AB và CD được gọi là 2 đáy AH là đường cao.
- Hai góc kề 1 cạnh bên của hình thang bù nhau.
- Đường trung bình của hình thang:



+ Nếu MA = MD và NB = NC thì MN là đường trung bình của hình thang ABCD .

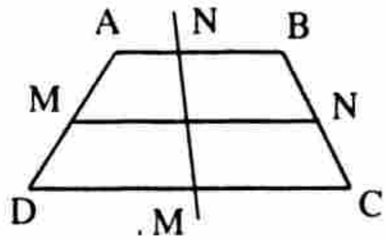
  Khi đó MN//AB//CD và $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$

+ Nếu MA = MB và MN // AB // CD thì MN cũng là đường trung bình của hình thang ABCD do đó NA = NC và $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$



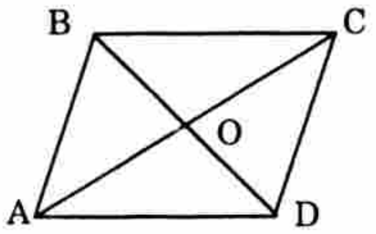
– Nếu hình thang có 1 góc vuông thì có ít nhất 2 góc vuông. Khi đó nó được gọi là hình thang vuông.

– Hình thang ABCD (AB//CD) là hình thang cân nếu có:



+ Hai góc kề một đáy bằng nhau ($\widehat{A} = \widehat{B}$ hoặc $\widehat{C} = \widehat{D}$).
+ Hai đường chéo bằng nhau (AC = BD)
+ Nhận đường thẳng đi qua trung điểm của 2 đáy (MN) làm trục đối xứng..

2. Hình bình hành



Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu:

+ Các cạnh đối song song AB// CD, BC// AD)

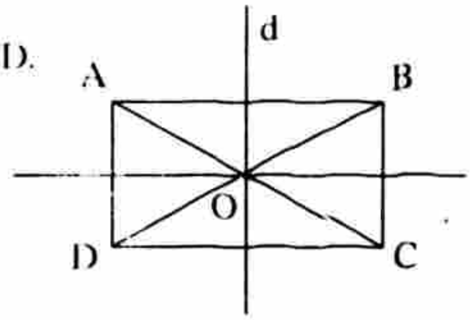
+ Các góc đối bằng nhau : ($\widehat{A} = \widehat{C}; \widehat{B} = \widehat{D}$)

+ Có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau
  (AB// CD và AB = CD hoặc BC// AD và BC = AD)

+ Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường
  (OA = OC ; OB = OD)

+ Các cạnh đối bằng nhau: AB = CD; BC = AD.

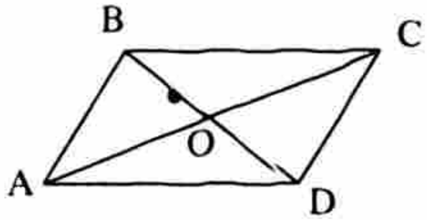
Chú ý: Giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng của hình bình hành



3. Hình chữ nhật:

Tứ giác ABCD là hình chữ nhật khi và chỉ khi:

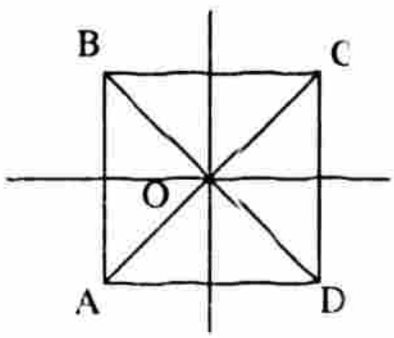
+ Có ba góc vuông ($A = B = C = 90^0$)
+ Là hình bình hành có 1 góc vuông.
+ Là hình bình hành có 2 đường chéo bằng nhau.
+ Là hình thang cân có 1 góc vuông.
+ Là hình thang cân có 2 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của nửa đường.
+ Nhận các đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối làm trục đối xứng.



4. Hình thoi.

Tứ giác ABCD là hình thoi khi và chỉ khi:

+ Các cạnh bằng nhau: AB = BC = CD = DA
+ Hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của nửa đường.
+ Hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau.
+ Các đường chéo là tia phân giác của các góc.
+ Hình bình hành có một đường chéo là tia phân giác của 1 góc.
+ Các đường chéo là các trục đối xứng.



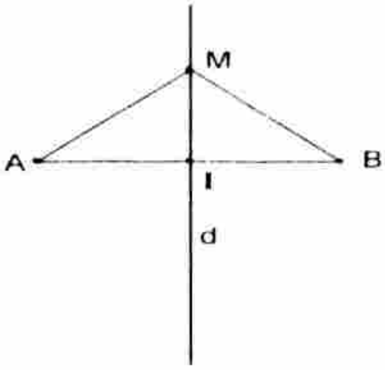
5. Hình vuông:

Tứ giác ABCD là hình vuông nếu và chỉ nếu:

+ Có 4 góc bằng nhau, 4 cạnh bằng nhau.
+ Hình chữ nhật có 2 đường chéo vuông góc.
+ Hình thoi có 2 đường chéo bằng nhau.
+ Hình chữ nhật có 2 cạnh kề bằng nhau.
+ Hình thoi có 1 góc vuông.
+ Hình chữ nhật có 1 đường chéo là tia phân giác của 1 góc.

I.3 Một số khái niệm khác:

1. Đường trung trực của đoạn thẳng:

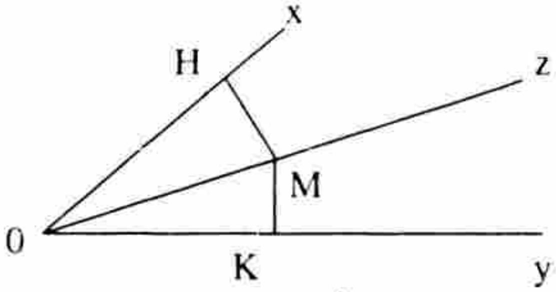


Đường thẳng d là đường trung trực của AB nếu:

$d \perp AB$ và đi qua trung điểm của AB

Ta có: $M \in d \Leftrightarrow MA = MB$

2. Tia phân giác của góc:



Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ khi và chỉ khi:

+ $\widehat{xOz} = \widehat{yOz}$

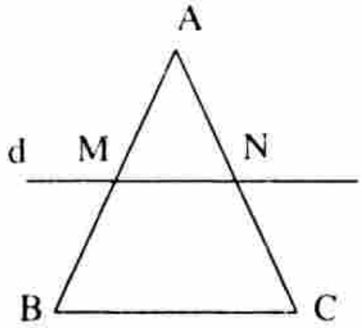
và Oz nằm giữa Ox và Oy.

+ $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$

+ Với điểm M bất kỳ, $M \in Oz$ thì $MH = MK$

II. Định lý Talet – Tam giác đồng dạng

1 Kiến thức cần nhớ:



– Định lý Talét: Cho ΔABC, đường thẳng d cắt AB, AC tại M, N

Ta có: $MN // BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Nếu $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Tam giác đồng dạng: ΔABC đồng dạng với $\Delta A'B'C'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$$

– ΔABC và $\Delta A'B'C'$ đồng dạng nếu:

+ Có 2 góc bằng nhau (g.g.)

+ Hai cặp cạnh tương ứng tỷ lệ và góc xen giữa bằng nhau: (c.g.c)

+ Ba cạnh tương ứng tỷ lệ (c.c.c)

– Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông:

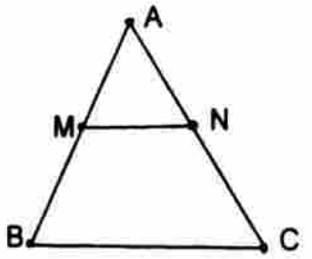
+ Hai cạnh góc vuông tương ứng tỷ lệ (c.g.c)

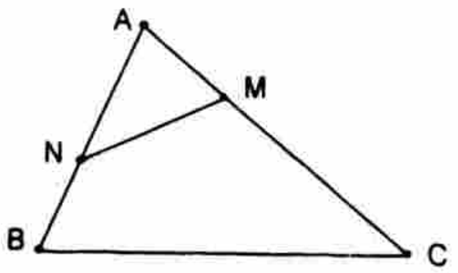
+ Hai góc nhọn bằng nhau (g.g)

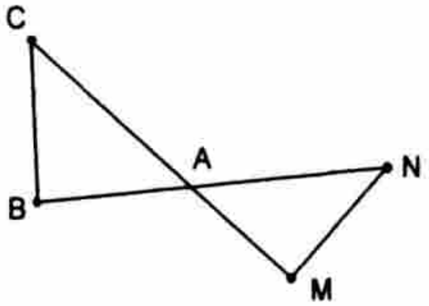
+ Cạnh góc vuông và cạnh huyền tương ứng tỷ lệ.

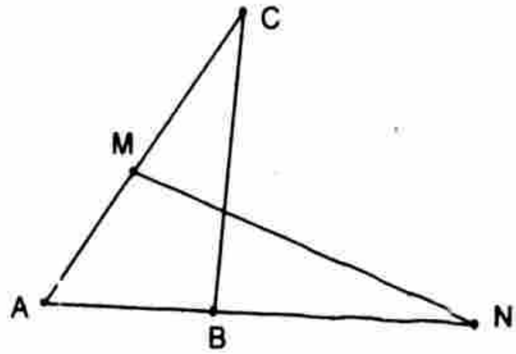
2. Những điểm cần lưu ý

– Trong khi giải các bài tập về đồng dạng nên quen nhìn Δ ABC và Δ AMN đồng dạng ở các hình vẽ sau:



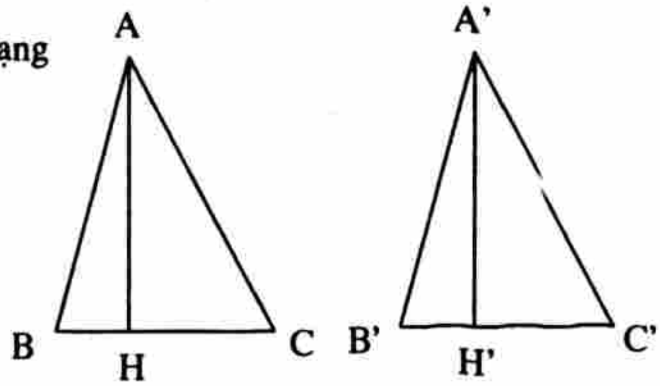






Nếu hai tam giác đồng dạng:

- Tỷ số chu vi bằng tỷ số đồng dạng
- Tỷ số diện tích bằng bình phương tỷ số đồng dạng.
- Tỷ số các đường cao, trung tuyến, phân giác tương ứng bằng tỷ số đồng dạng.



VD: ΔABC đồng dạng với ΔA'B'C' theo tỷ số k thì

$$\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=k;\ \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=k^2,\frac{AH}{A'H'}=k$$

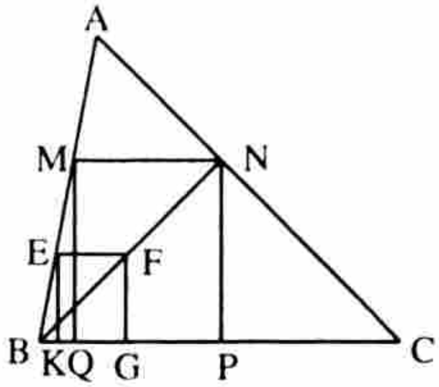
3. Bài tập ví dụ

Ví dụ 1: Cho Δ ABC, hình vuông MNPQ được gọi là nội tiếp Δ ABC nếu nó có hai đỉnh nằm trên hai cạnh của Δ và cạnh còn lại của hình vuông nằm trên cạnh thứ ba của Δ.

a) Hãy nêu cách vẽ một hình vuông như vậy với Δ ABC cho trước.

b) Tính cạnh hình vuông với $M \in AB$; $N \in AC$, P và Q thuộc cạnh BC theo BC = a và đường cao AH = h.

Giải



a. Vẽ hình vuông EFGK sao cho $E \in AB$; K và G nằm trên BC

Nối BF cắt AC tại N.

Qua N vẽ NM //EF cắt AB tại M.

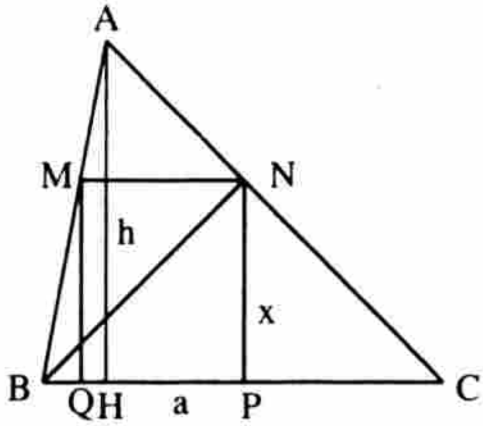
Vẽ $MQ \perp MN$; $MP \perp MN$ cắt BC tại Q và P.

Ta có MNPQ là hình vuông. Thật vậy.

Vì MN// EF// BC, $MQ \perp BC$; $NP \perp BC$

Nên MNPQ là hình chữ nhật.

Mặt khác EF//MN $\Rightarrow \dfrac{BP}{BN} = \dfrac{EF}{MN}$; FG//NP



Nên $\dfrac{BF}{BN} = \dfrac{FG}{NP}$ (Định lý Talét)

$\Rightarrow \dfrac{EF}{MN} = \dfrac{FG}{NP}$

mà EF = FG $\Rightarrow$ MN = NP.

Vậy MNPQ là hình vuông

b) Vì MN//BC nên $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{x}{a}$

MQ//AH nên $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{MQ}{AH} = \dfrac{x}{h}$ (Định lý Talét)

Do vậy: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{h} = \dfrac{AM}{AB} + \dfrac{BM}{AB} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{h} \Rightarrow x = \dfrac{ah}{a+h}$

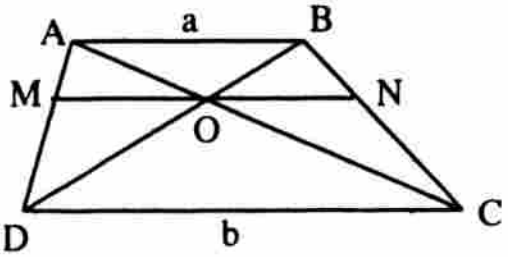
Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Có AB = a ; CD = b (a< b) . Hai đường chéo cắt nhau tại O.

Qua O kẻ đường thẳng song song với hai đáy cắt các cạnh bên tại M và N.

a) Chứng minh: OM = ON.

b) Tính MN theo a và b.

Giải



a) Vì MN//AB Nên $\dfrac{OM}{AB} = \dfrac{DO}{DB}$

$\dfrac{ON}{AB} = \dfrac{CO}{CA}$ (Định lý Talét)

Mà AB// CD nên $\dfrac{CO}{CA} = \dfrac{DO}{DB}$ (Định lý Talét)

Do vậy $\dfrac{OM}{AB} = \dfrac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$

Để chứng minh hai đoạn thẳng a và b bằng nhau. Ta có thể dùng đoạn có độ dài c làm trung gian và chứng minh $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = b$

b) Ta có: $\frac{OM}{AB} = \frac{DO}{DB}$; $\frac{ON}{CD} = \frac{BO}{BD}$

Đặt O'M = ON – x ta có: $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$

Vậy $MN = \frac{2ab}{a+b}$

Để tính x theo a và b ta có thể dùng tỷ lệ suy ra $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = k$ không đổi. Từ đó suy ra x

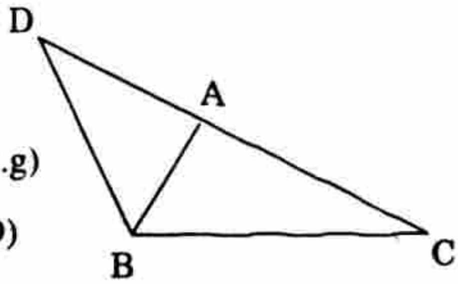
Ví dụ 3: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Chứng minh rằng: $BC^2 = AC^2 + AC.AB$

Giải

Trên tia đối của tia AC lấy D sao cho AD = AB

Khi đó ΔABC cân tại A nên: $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABD} = 2\widehat{ADB}$

Xét ΔABC và ΔBDC có:



$\widehat{BDC} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}\pi$

$\widehat{C}$ chung nên ΔABC đồng dạng với ΔBDV (g.g)

$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC^2 = AC.CD = AC(AC + AD)$

$= AC(AC + AB) = AC^2 + AC.AB$

4. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho ΔABC, dựng ra phía ngoài của nó các tam giác vuông cân BAD và CAE (vuông tại A). Chứng minh rằng đường cao AH của ΔABC đi qua trung điểm M của DE.

Bài 2: Cho ΔABC cân tại A, phân giác CD. Trên tia CB lấy M sao cho CM = 2 BD. Chứng minh rằng ΔCDM vuông tại D.

Bài 3: Cho ΔABC, biết rằng người ta có thể chọn được điểm M sao cho AM chia ΔABC thành hai tam giác con đồng dạng và tỷ số đồng dạng bằng $\sqrt{3}$. Tính các góc của ΔABC.

Bài 4: Cho ΔABC nhọn các đường cao AA', BB', CC' đồng quy tại H. Chứng minh rằng:

a) $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$ b) HA.HA' = BH.HB' = CH.HC'

Bài 5: Cho ΔABC. M là 1 điểm bất kỳ trong Δ Nối M với các đỉnh A, B, C cắt các cạnh đối diện lần lượt tại A', B', C' qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt A'B'; A'C' tại K và H. Chứng minh rằng: MK = MH

Bài 6: Trên đường phân giác của $\widehat{xOy}$ lấy 1 điểm M. Qua đó vẽ một đường thẳng bất kỳ định ra trên hai cạnh của góc các đoạn thẳng có độ dài a và b

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng mà ta vẽ.

Bài 7: Cho Δ ABC. Trên AB và AC lấy các điểm M và N sao cho BM = CN.

Chứng minh rằng: Khi M, N chạy trên AB và AC thì trung điểm K của MN luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng d bất kỳ cắt AB, AC, AD tại M, N, P. Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AN}$

Bài 9: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của Δ ABC. Trên AB và AC lấy các điểm M, N sao cho $CN.CB = CI^2$; $BM.BC = BI^2$

Chứng minh rằng: M, I, N thẳng hàng.

Bài 10: Cho Δ ABC cân tại A. Từ trung điểm H của BC kẻ HK $\perp$ AC. Gọi M là trung điểm của HK. Chứng minh rằng: AM $\perp$ BK

1.3 Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

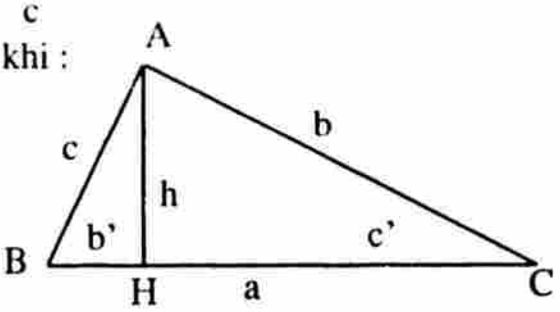
1. Kiến thức cần nhớ:

- Tỷ số lượng giác của góc nhọn:

$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}$; $\cot C = \cot B = \frac{c}{b}$

$\sin C = \cos B = \frac{c}{a}$; $\cot B = \cot C = \frac{b}{c}$

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi :



1) $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pitago)
2) $c^2 = ac'$; $b^2 = ab'$
3) $h^2 = b'c'$
4) $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$
5) $ah = bc$

Ngoài ra ta thấy các tam giác ABC, HBA; HAC luôn đồng dạng với nhau từng đôi một

2. Bài tập ví dụ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại C, có đường cao CK. Đường phân giác góc ACK cắt BC tại E. Chứng minh BC = BE.

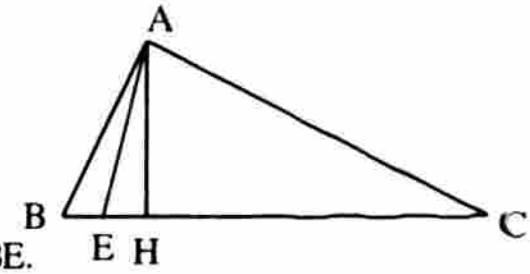
Giải

Xét ΔCBE có $\widehat{BEC} = \widehat{CAB} + \widehat{ECA}$ (góc ngoài của tam giác)

mà $\widehat{ECA} = \frac{\widehat{KCA}}{2} = \frac{90^0 - \hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2}$, $\widehat{CAB} = 90^0 - \hat{B}$

nên $\widehat{BEC} = 180^0 - \left(90^0 - \dfrac{\widehat{B}}{2} + \widehat{B}\right)$

$= 90^0 - \dfrac{\widehat{B}}{2} = \widehat{BEC}$

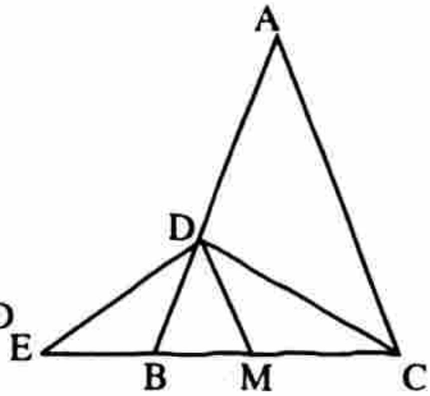


Vậy tam giác CBE cân tại B, do đó BC = BE.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$), CD là đường phân giác trong của góc C. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh: CE = 2 BD.

Giải

Gọi M là trung điểm của CE, ta có CE = 2CM = 2DM (tính chất tam giác vuông).



Vì ΔCDM cân nên $\widehat{MCD} = \widehat{MDC} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$

Vậy $\widehat{DMB} = \widehat{MCD} + \widehat{MDC} = \widehat{ACB}$

(góc ngoài tam giác). Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

(do tam giác ABC cân)

Nên $\widehat{DBM} = \widehat{DMB}$, do tam giác BDM cân tại D

Nên DB = DM. Vậy CE = 2 BD.

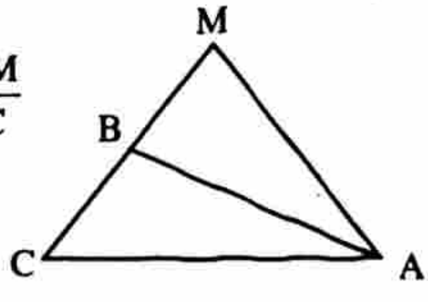
Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có AC = 2 BC và $\widehat{C} = 2\widehat{A}$.

Tính các góc của ΔABC.

Giải

Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $\widehat{MMB} = \widehat{BAC}$.

Khi đó $\widehat{MAC} = \widehat{BAC}$. Nên MA = MC.



Vì AB là phân giác nên: $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{MA}{CA} = \dfrac{2BM}{2BC}\dfrac{2BM}{AC}$

Vậy tam giác MCA cân tại A nên AM = AC.

Do đó tam giác CAM đều.

Vậy $\widehat{C} = 60^0; \widehat{CAB} = 30^0; \widehat{CBA} = 90^0$.

3. Bài tập tự giải

Bài 1: Tổng các góc ở đáy của một hình thang bằng 90^0. Hai đáy có độ dài a, b. Gọi E và F là trung điểm của hai đáy. Tính EF.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và phân giác AD. Gọi HM, HN là đường phân giác của góc BHA và góc CHA. Chứng minh rằng: A, D, M, N là các đỉnh của một hình vuông.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Đường thẳng nối tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng AM = AN.

Bài 4: Giải tam giác ABC biết AB = c, AC= b và $\widehat{BAC} = x$

Bài 5: Giải tam giác ABC biết BC = a, $\widehat{ABC} = x; \widehat{ACB} = y$

II. ĐƯỜNG TRÒN

II.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN .

1. Kiến thức cơ bản:

Định nghĩa:

- Tập hợp các điểm cách điểm O cho trước một khoảng cách R(R > 0) không đổi được gọi là đường tròn tâm O bán kính R.
- Kí hiệu(O; R) hoặc (O)

Vị trí tương đối của một điểm với một đường tròn.

- Cho trước: (O;R) và điểm M: gọi OM = d:

Nếu: $d < R \Leftrightarrow$ M nằm trong (O; R)

$d = R \Leftrightarrow M \in (O; R)$

$d > R \Leftrightarrow$ M nằm ngoài (O; R)

Một số khái niệm khác:

- Giả sử A và B là 2 điểm phân biệt thuộc (O; R) đường tròn thì:
- Đoạn thẳng AB được gọi là dây cung.
- Nếu $O \in AB$ thì AB đươc gọi là đường kính:
- Phần đường tròn nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB được gọi là cung tròn: kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$

Sự xác định đường tròn:

Một đường tròn hoàn toàn được xác định khi và chỉ khi

- Biết tâm O và bán kính R
- Qua điểm A; B; C phân biệt không thẳng hàng.

Đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác ABC. Gọi là đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của 3 trung trực của tam giác.

2. Các điểm cần lưu ý:

Khái niệm tương đương với định nghĩa đường tròn:

Tập hợp những điểm M tạo với 2 điểm phân biệt A, B cho trước một góc AMB bằng 90^0 là đường tròn đường kính AB.

Tam giác có một cạnh là đường kính của một đường tròn thì tam giác đó là tam giác vuông. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền

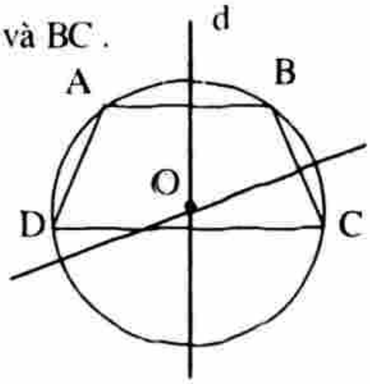
3. Các ví dụ:

Ví dụ1: Cho hình thang cân ABCD (AB//CD). Gọi M là trung điểm của CD

a. Chứng minh 4 điểm A;B;C;D cùng nằm trên một đường tròn tâm O.

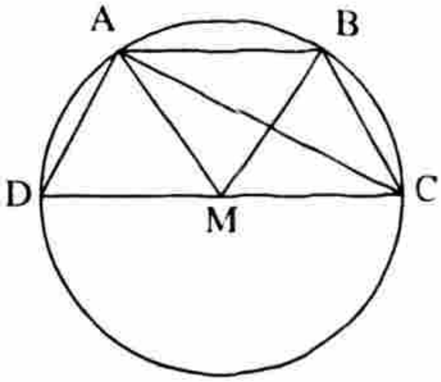
b. Chứng minh rằng: Nếu $AB = BC = \frac{1}{2}$ CD thì $MB \perp AC$

Giải



a. Dựng d và d' lần lượt là đường trung trực của AB và BC .
Gọi O là giao của d và d'
Ta có d cũng là trung trực của CD
Nên OB = OB = OC = OD
Do đó 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn tâm (O).

b. Nếu $AB = BC = \frac{1}{2}$ CD



gọi M là trung điểm của CD.
Ta có AB // CM
Nên ◇ABCM, là hình bình hành
mà AB = BC

⇒ ◇ABCM là hình thoi

⇒ $MB \perp AC$.

Ta thấy : MB = MC = MD = MA nên M ≡ O. Hình thang cân ABCD khi đó chính là một nửa của lục giác đều và CD là một đường kính của (O)

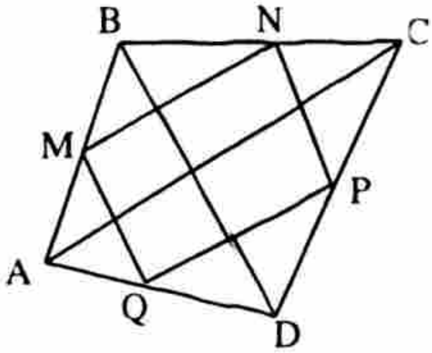
Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD có $AC \perp BD$.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của AB; BC; CD và DA. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Giải

Ta có: MN là đường trung bình của $\Delta BAC \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AC$ (1)

Tương tự $PQ = \frac{1}{2}AC$ (2)



Từ (1) và (2). Ta có MN = PQ

Nên MNPQ là hình bình hành:

Ta lại có: $AC \perp BD \Rightarrow MN \perp BD$

Và NP // BD $\Rightarrow NM \perp NP \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^0$

⇒ ◇MNPQ là hình chữ nhật:

Gọi O là giao điểm của NP Và NQ

⇒ OM = ON = OP = OQ

Hay 4 điểm M; N; P; Q cùng nằm trên đường tròn tâm O.

4. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tia đến của tia AB lấy điểm C bất kỳ. M là điểm tùy ý trên đường tròn O đường kính AB.

Chứng minh: $CA \leq CM \leq BC$

Bài 2: Cho tam giác nhọn ABC gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của H qua BC, CA và AB.

Chứng minh các điểm D, E, F nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 3: Cho ΔABC có các góc đều chon nội tiếp đường tròn (O) đường cao AA_1 cắt đường tròn (O) tại M. AN là một đường kính của (O)

a. Chứng minh $BM = CN$.

b. Gọi H và G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của ΔABC.

Chứng minh rằng: H; O; G thẳng hàng.

II.2. Tính chất đối xứng của đường tròn:

1. Kiến thức cơ bản:

- **Tâm đối xứng:** Tâm đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- **Trục đối xứng:** Đường kính của đường tròn là truc đối xứng của đường tròn đó: (Đường tròn có vô số trục đối xứng)
- **Mối quan hệ giữa các đường kính và dây cung lớn nhất:**

+ Đường kính vuông góc với một dây thì cắt dây cung đó tại trung điểm của dây cung đó.

+ Đường kính cắt dây cung tại trung điểm của dây cung(không phải là đường kính) thì vuông góc với dây cung đó.

- **Dây cung và khoảng cách đến tâm:**

+ Trong một đường tròn hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.

+ Trong 2 dây không bằng nhau của một đường tròn: dây lớn hơn khi và chỉ khi chúng gần tâm hơn:

2. Các điểm cần lưu ý:

- Tất cả các định lý này yêu cầu học sinh phải hiểu được lời chứng minh định lý để nắm vững hơn nội dung kiến thức
- Phân biệt rõ các định lý có đủ 2 chiều thuận và đảo giúp học sinh tránh sai sót khi vận dụng giải toán

3. Các ví dụ:

V dụ1: Đường tròn tâm O và một dây cung AB , điểm M nằm bên trong đường tròn đó.

a.Nêu cách xác định dây cung AB để dây cung AB có độ dài ngắn nhất.

b Chứng minh rằng khi AB thay đổi qua M. thì trung điểm I của AB luôn nằm trên một đường tròn cố định.

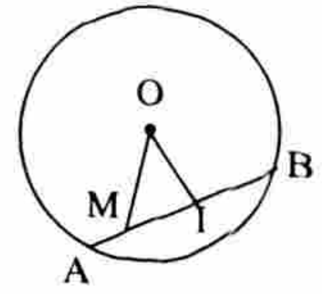
Giải

a. Kẻ dây cung AB đi qua M . Kẻ $OI \perp AB$ thì ta có $OI \leq OM$

Vậy AB nhỏ nhất khi và chỉ khi OI lớn nhất

Khi $OI = OM \Leftrightarrow I \equiv M$.

Vậy dây cung cần xác định là dây cung qua M và vuông góc với OM. (dây cung này là duy nhất)



b. Gọi I là trung điểm của AB

Xét 2 trường hợp:

1. Nếu $I \equiv M$. thì khi đó $I \in (O; OM)$

2. Nếu $I \neq M$ ta có $OI \perp AB$

Nên I nằm trên đường tròn đường kính OM cố định.

Ví dụ 2: Cho đường tròn tâm O và một dây cung CD = 8 cm đường kính AB vuông góc với CD tại H. Biết AD = 5 cm.

Tính bán kính của đường tròn (O)

Giải

Xét tam giác ΔAHD (vuông tại H).

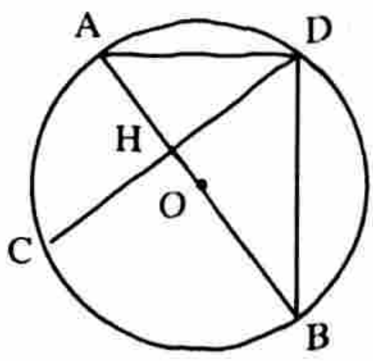
Có AD = 5 cm ; HD = 4 cm ;

$AH^2 = AD^2 - HD^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AH = 3$ cm

Do D nằm trên đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow \Delta ADB$ vuông tại D.

$\Rightarrow AD^2 = AH.AB \Rightarrow AB = \dfrac{AD^2}{AH} = \dfrac{25}{3}$



Bán kính đường tròn : $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{25}{26}$cm.

4. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và dây cung CD không qua tâm O. Hai điểm M và K thứ tự là hình chiếu vuông góc của hai điểm A; B lên CD. Gọi I là trung điểm của CD.

a. Chứng minh: I là trung điểm của HK.

b. Chứng minh: $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$

Bài 2: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Ta có thể lấy trên nửa đường tròn các điểm C và D sao cho $AC = CD = 4\sqrt{3}$ (cm) và DB = 10(cm). Tính bán kính R.

Bài 3: Cho góc xOy, trên tia Ox và Oy lấy 2 điểm B và C cố định khác điểm O. I là điểm thay đổi trên đoạn thẳng BC kẻ $ID \perp Ox$; $IE \perp Oy$; ($D \in Ox$; $E \in Oy$)

Các điểm M và N thứ tự là điểm đối xứng của O qua D và E.

Chứng minh đường tròn đi qua 3 điểm (O, M, N)luôn đi qua một điểm cố định khác điểm O.

Bài 4: Cho tâm giác ABC cân ở A nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB. Goi E là trọng tâm của tam giác ADC .Chứng minh OE $\perp$CD

II.3. Vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn

Tiếp tuyến của đường tròn.

1. Kiến thức cơ bản:

* Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

– Cho (O;R) và đường thẳng a. Từ O vẽ OH $\perp$ a (H $\in$ a), đặt OH = d. ba vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn:

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn không cắt nhau	0	d > 0
Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn(tiếp tuyến)	1	d = R
Đường thẳng cắt đường tròn (cát tuyến)	2	d < R

– **Tiếp tuyến của đường tròn**

Cho (O; R) và đường thẳng a cắt đường tròn tại A.

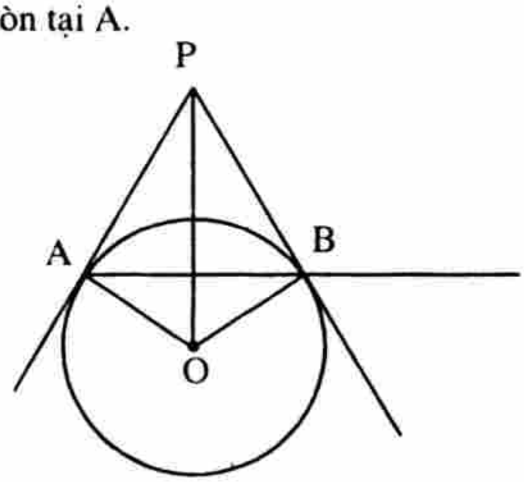
a là tiếp tuyến của (O; R)

tương đương OA $\perp$ a.

(A được gọi là tiếp điểm)

Hạ OH $\perp$ (H $\in$ a); OH = d

a là tiếp tuyến của (O; R) $\Leftrightarrow$ d = R.



– Đường thẳng xy cắt đường tròn tai A, B thì AB là một dây của (O; R)

$\Leftrightarrow \widehat{XAE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.

– **Hai tiếp tuyến PA và PB của một đường tròn (O) cắt nhau tại P. thì:**

+ PA =PB.

+ PO là phân giác của $\widehat{APB}$ và.

+ PO là đường trung trực của AB.

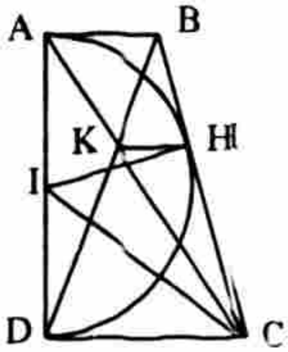
- **Đường tròn nội tiếp tam giác:**
  + Đường tròn tiếp xúc với 3 cạnh của tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác (tam giác ngoại tiếp đường tròn)
  + Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của 3 đường phân giác trong của tam giác.
  + Bán kính đường tròn là khoảng cách từ giao điểm của các đường phân giác tới cạnh của tam giác.
- Đường tròn bàng tiếp tam giác:
  + Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và phần kéo dài của 2 cạnh kia gọi là đường tròn tiếp tam giác.
  + Đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và phần kéo dài của cạnh AB và AC gọi là đường tròn bàng tiếp góc A. Tâm đường tròn bàng tiếp là giao điểm của 2 đường phân giác của góc ngoài đỉnh B, C và đường phân giác của góc trong đỉnh A.
  + Trong mỗi tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp.

2. Các điểm cần lưu ý:

- Phần này khối lượng kiến thức lớn yêu cầu là học sinh phải nắm vững các tính chất và dấu hiệu nhận biết của tiếp tuyến các hệ thức liên quan.
- Một số tính chất, dấu hiệu nhận biết, các nhận thức mà phần chứng minh có liên quan đến phần góc với đường tròn sẽ được trình bày ở phần sau:

3. Bài tập ví dụ :

Ví dụ 1: Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm I của AD:



a. Chứng minh BC là tiếp tuyến của (I;IA)

b. Gọi H là giao điểm của BC với đường tròn (I); K là giao điểm của AC với BD
Chứng minh: KH // DC

Giải

a. Hạ $IH \perp BC$; $(H \in BC) \Rightarrow IH = ID = \frac{1}{2}a$. (đặt AD = a)

$\Rightarrow$ BC là tiếp tuyến của (I; IA)

b. Ta có: AB cũng là tiếp tuyến của (I; IA) do AB // DC

$$\Rightarrow \frac{BK}{KD} = \frac{AB}{CD} \text{ mà } AB = BH \Rightarrow \frac{BK}{KD} = \frac{BH}{HC} \Rightarrow KH // DC.$$

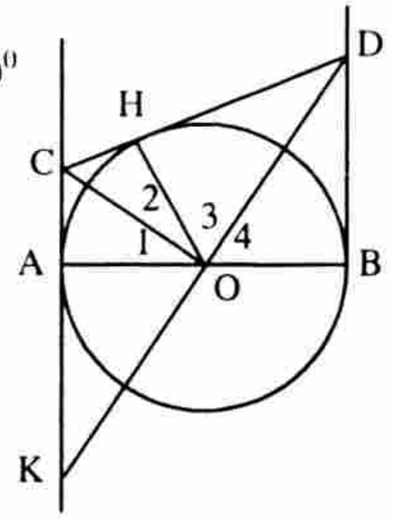
Ví dụ 2: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ 2 tia tiếp tuyến Ax và By với (O). Đường thẳng d thay đổi cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a. Chứng minh rằng d là tiếp tuyến của đường tròn O khi và chỉ khi

$\widehat{COD} = 90^0$

b. Khi d là tiếp tuyến của (O). Tính $\dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2}$

Giải



a. * Chứng minh CD là tiếp tuyến thì $\widehat{COD} = 90^0$

Thật vậy theo tính chất của tiếp tuyến ta có:

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ và $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$. Do đó : $OC \perp OD$

(Đường phân giác của hai góc kề bù)

Hay $\widehat{COD} = 90^0$

* Chứng minh nếu $\widehat{COD} = 90^0$

thì CD là tiếp tuyến . Thật vậy

Kẻ $OH \perp CD$; $H \in CD$. Gọi giao điểm của DO với tia đối của Ax là K.

Ta có : $\Delta DOB = \Delta KOA \Rightarrow OD = OK$

Do $OC \perp DK \Rightarrow \Delta CKD$ cân tại C.

Do đó $\Delta AOC = \Delta HOC \Rightarrow OH = OA = R \Rightarrow$ CD Là tiếp tuyến của (O)

b. Tam giác COD vuông tại OI có OH là đường cao.

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OC^2} \quad \text{do } H \in (O; R) \Rightarrow OH = R$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{R^2}$$

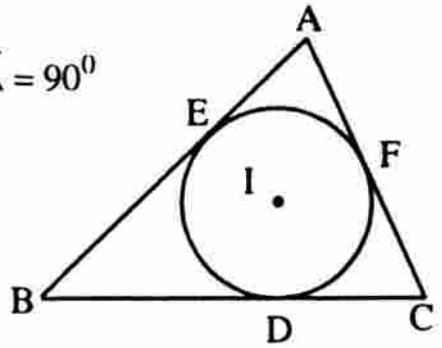
Ví dụ 3: Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D

Biết BC = a; CA = b; AB = c; BD = x

a. Chứng minh 2x = a + c − b.

b. Chứng minh bc = 2x(a − x) khi và chỉ khi $\widehat{A} = 90^0$

Giải



a. Gọi tiếp điểm của (I)

Với AB; AC thứ tự là E và F

Ta có:

2BD + 2CF + 2AE = AB + AC + BC

⇒ 2BD = AB + BC + AC − 2CF − 2AF (vì AE = AF)

⇒ 2BD = AB + BC − AC ⇒ 2x = a + c − b.

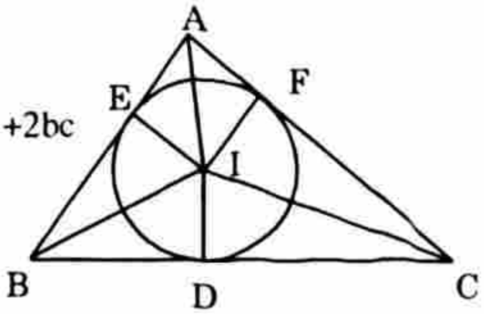
b. Ta chứng minh:

Nếu $bc = 2x(a - x)$ thì $\widehat{A} = 90^0$

Ta có: $2x = a + c - b$.

$2(a - x) = a + b - c$

$\Rightarrow 4x(a - x) = a^2 - (b - c)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$



Theo giả thiết ta có: $4x(a - x) = 2bc$

$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 2bc$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân vuông tại A. Nên $\widehat{A} = 90^0$

Chứng minh nếu $\widehat{A} = 90^0 \Rightarrow bc = 2x(a - x)$

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 0$

$\Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 2bc \Rightarrow a^2 - (b - c)^2 = 2bc$

$\Rightarrow 4x(a - x) = 2bc \Rightarrow 2x(a - x) = bc$.

4. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho góc vuông xOy. điểm A; B lần lượt trên Ox và Oy sao cho : $OA = OB = a$.

M là điểm di động trên AB khác điểm A và B.

Đường tròn (O_1) đi qua M và tiếp xúc với Ox tại A.

Đường tròn (O_2) đi qua M và tiếp xúc với Ox tại B.

Đường tròn (O_1) cắt (O_2) tại điểm thứ 2 tại N.

a. Chứng minh O_1N là tiếp tuyến của đường tròn (O_2)

b. Xác định vị trí của M để O_1O_2 ngắn nhất.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, Đường cao AH. HB = 3 cm; HC = 12 cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH, kẻ các tiếp tuyến BM, CN với đường tròn (A; AH) (M; N) là tiếp điểm khác H

a. Xác định giao điểm của CN với HA.

b. Tính diện tích ◇BMNC.

c. Tính AK và KN.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Hai điểm M và N di động trên cạnh BC và CD sao cho chu vi tam giác MCN bằng 2a. chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$ gọi I là trung điểm của BC

Gọi $\widehat{xIy} = \alpha$ thay đổi quanh I sao cho 2 tia Ix và Iy cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tai M và N.

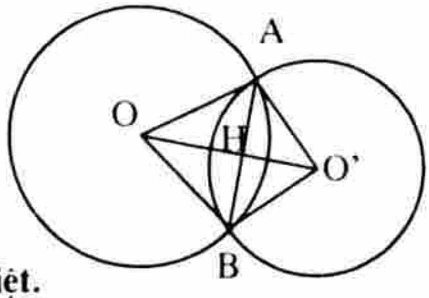
a. Chứng minh rằng đường thẳng MN thay đổi luôn tiếp xúc với một đương tròn cố định.

b. Tìm vị trí của tiếp tuyến M để (BM + CN) nhỏ nhất.

Bài 5: Cho nửa đường tròn đường kính AB. M là điểm trên nửa đường tròn kẻ MH vuông góc với AB; $H \in AB$.. tìm vị trí của M để AH + HM luôn lớn nhất.

Bài 6: Cho nủa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Bán kính OC vuông góc với AB. Gọi d là tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn qua M kẻ tiếp tuyến với đường tròn tiếp tuyến này cắt d tại E và cắt đường thẳng OC tại D. Gọi F là giao điểm của BD với d. Chứng minh AE.EF không đổi.

II.4. Vị trí tương đối của hai đường tròn:



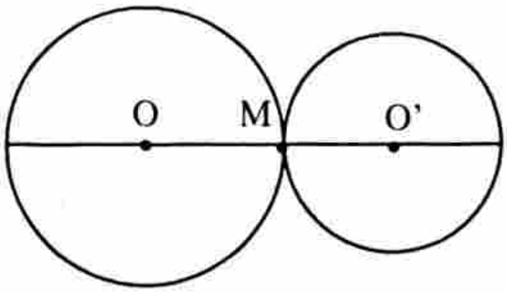
1. Kiến thức cơ bản:

Cho 2 đường tròn(O; R) và (O'; R')

Giả sử R > R', OO' = d.

Ba vị trí tương đối của hai đường tròn.

- **Hai đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.**
  + Dấu hiệu nhận biết: R – R' < d < R + R'
  + Tính chất: (O;R) cắt (O'; R') tại A và B
  + Đường thẳng OO' là trung trực của dây AB.
  + Đường thẳng OO' đi qua điểm chính giữa của các cung của 2 đường tròn nhận AB là các dây cung.
  + Có 2 tiếp tuyến chung ngoài:



- **Hai đường tròn tiếp xúc nhau:**

  (O; R) Và (O'; R') tiếp xúc nhau tại A.

+ Hai đường tròn tiếp xúc ngoài:
  - Dấu hiệu nhận biết: d = R + R'
  - Tính chất : 3 điểm O;O',A thẳng hàng:

    Có 3 tiếp tuyến chung: 1 tiếp tuyến chung trong là đường thẳng vuông góc với OO' tại A.

    Hai tiếp tuyến chung ngoài.
+ Hai đường tròn tiếp xúc trong:
  - Dấu hiệu nhận biết: d = R – R'
  - Có một tiếp tuyến chung là đường thẳng qua A vuông góc với OO'

- **Hai đường tròn không cắt nhau:**

+ Hai đường tròn ngoài nhau: Dấu hiệu nhận biết d ≥ R + R'

  Có 4 tiếp tuyến chung gồm 2 tiếp tuyến chung trong và hai tiếp tuyến chung ngoài.

  Các tiếp tuyến chung trong; cắt nhau trên đoạn nối tâm OO'.

  Các tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau trong đường nối tâm OO'.

– **Hai đường tròn đựng nhau:**

+ Dấu hiệu nhận biết: $d > R - R'$ hoặc $d = 0$ (đồng tâm).

+ Không có tiếp tuyến chung

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O; R) và (O', r) tiếp xúc ngoài nhau tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC (($B \in (O)$; $C \in (O')$))

a. Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^0$

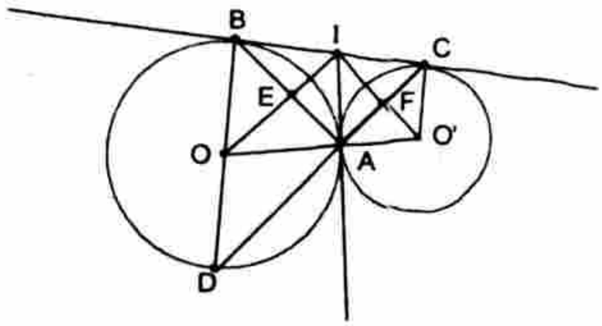
b. Tính BC theo R và r.

c. Gọi D là giao điểm của CA với đường tròn (O; R) và $D \neq A$. Chứng minh 3 điểm B; O; D thẳng hàng

Giải

a. Kẻ tiếp tuyến đường tròn với 2 đường tròn (O) và (O') tại A. Tiếp tuyến này cắt BC tại I. Ta có $IA = IB = IC \Rightarrow \Delta ABC$

Vuông tại A $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$



b. Nối IO; IO'

cắt AB; AC tại E và F

$\Rightarrow$ ◇IEAF là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{OIO'} = 90^0$,

do 3 điểm O, A, O' thẳng hàng

$\Rightarrow$ ◇OIO' vuông tại I có $IA \perp OO'$

$\Rightarrow IA^2 = OA.AO' \Rightarrow IA^2 = R.r$

$\Rightarrow IA = \sqrt{Rr}$ mà $IA = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2\sqrt{Rr}$

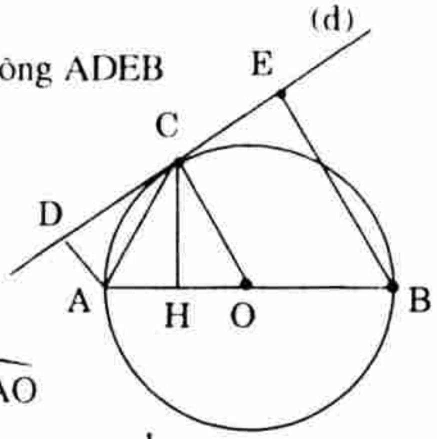
c. Vì $\widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^0 \Rightarrow$ BD là đường kính của (O; R) $\Rightarrow$ 3 điểm B; O; D thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, đường thẳng d tiếp xúc với nữa đường tròn tại C. gọi D và E thứ tự là hình chiếu của A và B lên d

a. Xét vị trí tương tương đối của (A; AD) và (B; BE)

b. Chứng minh AB tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE

Giải



a. Nối $OC \Rightarrow OC \perp DE$

$\Rightarrow$ AC là đường trung bình của hình thang vuông ADEB

$\Rightarrow OC = \frac{1}{2}(DA + EB)$

$\Rightarrow DA + EB = 2OC = AB$

$\Rightarrow$ (A; AD) tiếp xúc ngoài (B; BE)

b. Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$) ta có $OC // AD$

$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{DAC}$ (so le trong) mà $\widehat{COA} = \widehat{CAO}$

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{CAO} \Rightarrow \Delta CHA = \Delta CDA \Rightarrow CH = CD = \frac{1}{2}DE.$

Vậy H nằm trên đường tròn đường kính DE

Hay AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE

3. Bài tập tự luyện

Bài 1; Cho (O; 36 cm) và (O'; 9 cm) tiếp xúc ngoài với nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ($A \in (O); B \in (O')$). Tính bán kính đường tròn tâm I tiếp xúc với đường thẳng AB và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn đã cho .

Bài 2: Cho hai đường tròn(O; R) (O',R'). Tiếp xúc ngoài tại A.

Gọi BC và DE là các tiếp tuyến chung của hai đường tròn: với B và D thuộc đường tròn (O) C và D thuộc đường tròn (O'). Tính diện tích tứ giác BDEC.

Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và (O') ngoài nhau .K ẻ tiếp tuyến chung ngoài AB và tiếp tuyến chung trong EF, với A và E thuộc (O); B và D thuộc (O')

a. Chứng minh $AE \perp BF$.

b. Gọi M là giao điểm của AB và EF. N là giao điểm của AE và BF

Chứng minh 3 điểm O; N; O' thẳng hàng.

II.5. Góc với đường tròn

1. Kiến thức cơ bản:

- **Góc ở tâm:** Góc có đỉnh ở tâm của đường tròn được gọi là góc ở tâm.
- **Góc nội tiếp:**
  + Định nghĩa: Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh của góc chứa hai dây cung của đường tròn.
  + Mối quan hệ giữa góc nội tiếp và cung bị chắn.

Cho $\widehat{BAC}$ nội tiếp trong đường tròn (O) thì sđ $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{BC}$

- **Các hệ quả:**
  + Trong một đường tròn các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau
  + Trong một đường tròn mọi góc nội tiếp không quá 90^0 có số đo bằng một nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.
- **Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung.**
  + Nếu xy là tiếp tuyến với (O) tại A, AB là dây cung của đường tròn đó. Thì $\widehat{xAB}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến Ax và dây cung AB.

    $Sđ\,\widehat{xAB} = \frac{1}{2} sđ\,\widehat{AB}$
  + Số đo của góc giữa tiếp tuyến và một dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
  + Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây không quá 90^0 bằng một nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn cung ấy.
- **Góc có đỉnh ở trong hay bên ngoài đường tròn**
  + Góc có đỉnh bên trong đường tròn có số đo bằng nửa tổng số đo của 2 cung bị chắn.
  + Góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn có số đo bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn (hiệu số đo cung lớn và số đo cung bé)

2. Các ví dụ:

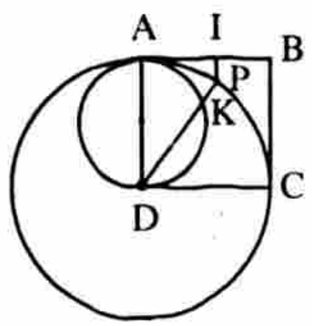
Ví dụ1: Trong hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn đường kính AD và (D) bán kính DA. Nối D với điểm P bất kỳ trên cung nhỏ AC của (D) ; DP cắt nửa đường tròn đường kính AD ở K. I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm P lên AB. Chứng minh rằng PK = PI.

Giải

Gọi giao điểm của PA với đường tròn đường kinh AB là F

Nối FD ta có $\widehat{AFD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow FD \perp AP$ mà ΔDAP cân tại $D \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$.



Ta có $\widehat{D_1} = \widehat{IAP}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$\widehat{PAK} = \widehat{FDK}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{FK}$)

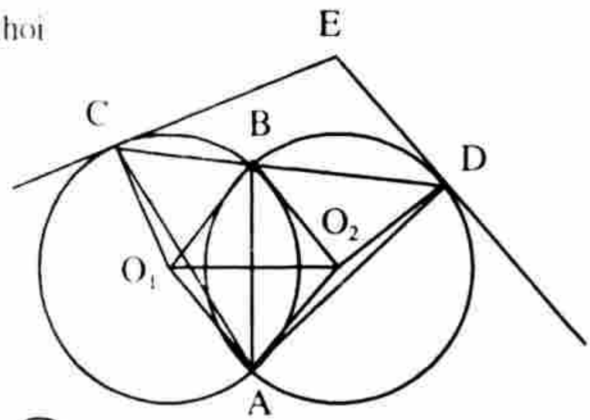
$\Rightarrow$ AP là phân giác của $\widehat{IPK} \Rightarrow PI = PK$

Ví dụ 2: Cho 2 đường tròn tìm (O_1) và (O_2)

biết đường tròn này đi qua tâm đường tròn kia. Qua một giao điểm của 2 đường tròn kẻ một cát tuyến bất kỳ cắt (O_1) tại C và (O_2) tại D.

Tính góc tạo bởi hai tiếp tuyến với 2 đường tròn tại C và D.

Giải



Nối AD và AC

Chứng minh được AO_1O_2B là hình thoi

$\Rightarrow \widehat{AO_1B} = \widehat{AO_2B} = 120^0$

Vậy $Sđ\,\overset{\frown}{ADC} = \dfrac{1}{2} Sđ\,\overset{\frown}{AO_1B} = 60^0$

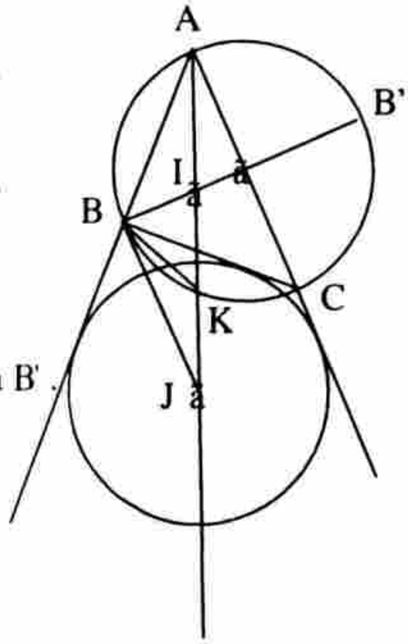
$Sđ\,\overset{\frown}{ACD} = \dfrac{1}{2} Sđ\,\overset{\frown}{AO_2B} = 60^0$

nên ΔACD là tam giác đều:

Ta lại có: $\widehat{DCE} = \widehat{CAB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CB}$);

$\widehat{CDE} = \widehat{DAB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

$\Rightarrow \widehat{DCE} + \widehat{CDE} = \widehat{CAD} = 60^0 \Rightarrow \widehat{CED} = 120^0$.



Ví dụ 3: Gọi I và J là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt đoạn thẳng IS tại K. Chứng minh KI = KJ.

Giải

Ta có 4 điểm A, I, K, J thẳng hàng:

Gọi giao điểm của BI với đường tròn ngoại tiếp là B'.

Ta có: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B'C}$; $\overset{\frown}{KB} = \overset{\frown}{KC}$;

$Sđ\,\widehat{BIK} = \dfrac{1}{2} Sđ(\overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{BK}) = \dfrac{1}{2} Sđ\,\overset{\frown}{B'K})$

$\Rightarrow \widehat{KBI} = \widehat{BIK}$ mà $BI \perp BJ$ hay $\widehat{BIJ} = 90^0$

Từ đó chứng minh được KI = KJ

3. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho đường tròn (O) từ một điểm M nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với (O), A;B là các tiếp điểm. C là một điểm bất kỳ trên đường tròn tâm M bán kính MA và nằm trong đường tròn (O). AB và BC cắt (O). AC và BC cắt(O) lần lượt tại P và Q chứng minh 3 điểm P; O; Q thẳng hàng:

Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại C; cắt (O') tại D. Tia CO cắt (O') tại F và tia DO' cắt (O) tại E. Chứng minh AB là phân giác của góc EAF.

Bài 3: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại M và N đường thẳng O_1M cắt (O_1) và (O_2) thứ tự tại A_1 và A_2. Đường thẳng O_2M cắt (O_1) và (O_2) thứ tự tại B_1 và B_2. Chứng minh 3 đường thẳng A_1B_1; A_2B_2; MN đồng quy.

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp; O là tâm đường tròn ngoại tiếp, phân giác của góc ACB cách đường tròn ngoại tiếp O, K; biết IK = R (R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp). Gọi D và E là chân đường cao của ΔABC hạ từ A và B, gọi P là giao điểm của OK với AB, chứng minh ΔDEP là tam giác đều.

Bài 5: Cho hai đường tròn (O) và (O') ngoài nhau đường nối tâm OO' cắt (O) tại A và B cắt (') tại C và D (Với B và C nằm giữa A và B) kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF; $E \in (O)$; $F \in (O')$ các đường thẳng EB và PC tại N; AE cắt DF tại M chứng minh:

a. Δ MENF là hình chữ nhật.

b. MN vuông góc với AD.

Bài 6: Cho hai đường (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} = 90^0$. Điểm C thuộc đường tròn (O') và nằm ngoài đường tròn (O); CA và CB cắt (O) D"D và E chứng minh rằng khi C thay đổi thì DE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Đường thẳng d thay đổi qua A cắt (O) cắt tại C và cắt (O') tại D. Từ C và D vẽ hai tiếp tuyến với hai đường tròn (O) và (O') hai tiếp tuyến với hai đường tròn (O) và (O') hai tiếp tuyến nà cắt nhau tại M. Chứng minh rằng CMD luôn không đổi.

Bài 8: Cho ◇ABCD nối tiếp đường tròn (O)

Cách điểm O_1; O_2; O_3; O_3 theo thứ tự là tâm đường đường tròn nội tiếp các tam giác ΔABC; ΔBCD; ΔCDA; ΔDAB. Chứng minh ◇$O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

Bài 9: Cho góc xoy và một đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của góc tại A và B. Qua A kẻ đường thẳng song song với OB cắt đường tròn tại C. Gọi K là trọng điểm của OB. Đường thẳng AK cắt đường tròn tai E.

a. Chứng minh điểm O, E, C thẳng hàng.

b. Đường thẳng AB cắt OC tại D chứng minh. $\dfrac{OE}{OC} = \dfrac{DE}{DC}$

Bài 10: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), lấy điểm P tùy ýy trên cung nhỏ BC, AP cắt BC ở Q. đặt PB = a; PC = b; PQ = c.

a. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

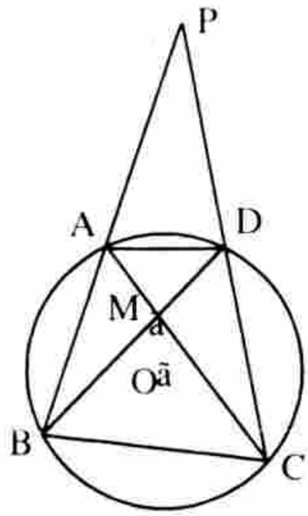
II.6. Tứ giác nội tiếp

1. Kiến thức cơ bản:

- **Định nghĩa:**

Tứ giác nội tiếp là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn.

Khi đó đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.



Cho ◇ABCD; AB cắt CD ở P; AC cắt BD ở M.

Tứ giác ABCD nội tiếp (O) khi và chỉ khi

+ 4 đỉnh cách đều điểm O
+ Tổng hai góc đối diện bằng 180^0.

Hay góc ngoài của một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

(Hai góc đối đều bằng 90^0 là trường hợp đặc biệt nhưng hay gặp trong các bài toán)

+ Hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới một góc bằng nhau
+ PA. PB = PD.PC
+ MA. MC = MD.MB

2. Các ví dụ

Ví dụ1: Cho đường tròn (O) đường kính AB: Một điểm M nằm trên cung AB và điểm C trên đường kính AB sao cho CA < CB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với (O) . Đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt Ax và By theo thứ tự tại P và Q. Gọi R; S là giao điểm của AM với CP; BM với CQ.

a. Chứng minh các tứ giác APMC và PQMC nội tiếp

b. Chứng minh RS // AB

c. Tứ giác ARSC có thể là hình bình hành được không? Tại sao?

Giải

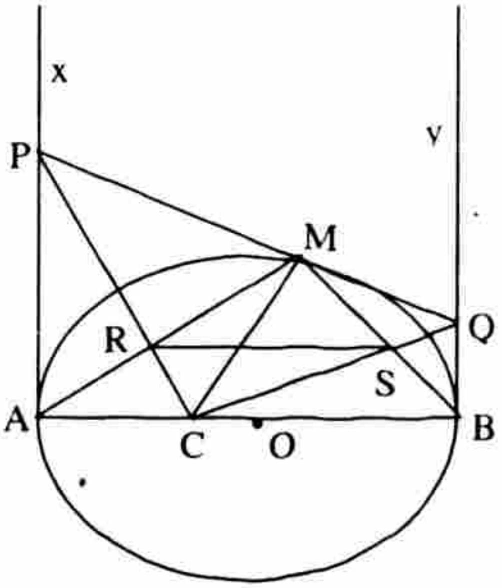
a. Ta có $\widehat{PAC}=\widehat{PMC}=90^0 \Rightarrow$ ◇PMCA nội tiếp. Tương tự ◇PQMC nội tiếp

b. Do $\diamond APMC$ nội tiếp $\widehat{PCA} = \widehat{PMA}$

(góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PA}$)

Tương tự: $\widehat{QCB} = \widehat{QMB}$ mà

$\widehat{AMB} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



$\Rightarrow \widehat{QMB} + \widehat{PMA} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{PCA} + \widehat{QCB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{RCS} = \widehat{RMS} = 90^0$

Nên $\diamond RMSC$ nội tiếp do đó

$\widehat{RMC} = \widehat{RSC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{PC}$)

Ta lại có: $\widehat{AMC} = \widehat{APC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\widehat{APC} = \widehat{BCQ}$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Nên $\widehat{RSC} = \widehat{BCS} \Rightarrow RS // AB$ (đpcm)

c. Giả sử $\diamond ARSC$ là hình bình hành thì ta có

$AM \perp PC \Rightarrow \diamond MRSC$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AR = RM = CS$

Nên R là trung điểm của AM mà $AM \perp PC$ nên PC đi qua O

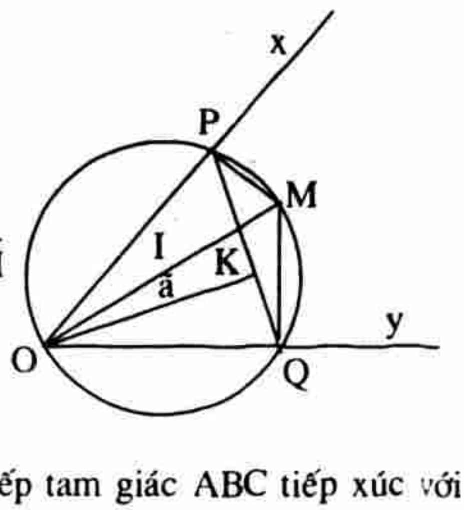
Hay $C \equiv O$ (trái giả thiết $CA < CB$)

Vậy $\Delta ARSC$ không thể là hình bình hành.

Ví dụ2: Từ một điểm M nằm trong góc xOy ($0 < \widehat{xOy} < 180^0$)

Hạ các đường vuông góc MP và MQ xuống Ox và Oy. Kẻ $OK \perp PQ$; $K \in PQ$. Chứng minh rằng: $\widehat{POM} = \widehat{KOQ}$

Giải



Ta có: $\widehat{MPQ} = \widehat{MQO} = 90^0$

Nên OPMQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{POM} = \widehat{PQM}$

(Cùng chắn $\overset{\frown}{PM}$) . Mặt khác $\widehat{KOQ} = \widehat{PQM}$

(Cùng phụ với $\widehat{OQP}$)

Do đó: $\widehat{POM} = \widehat{KOQ}$ (đpcm)

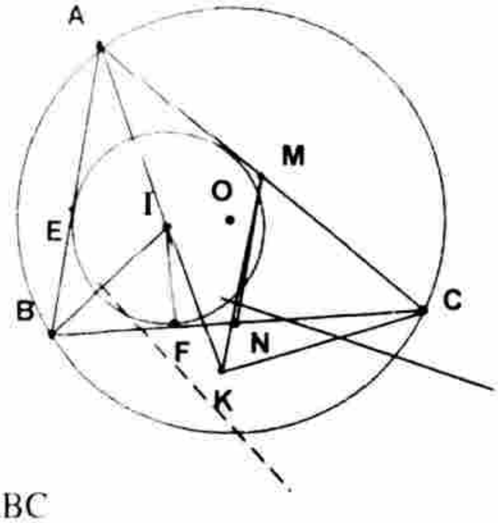
Ví dụ 3: Cho ΔABC đường tròn(I; r) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB và BC thứ tự tại E và F. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Đường thẳng MN cắt AI tại K.

a. Chứng minh rằng CK ⊥ AI.

b. Chứng minh 3 điểm K; F; E thẳng hàng.

c. Gọi giao điểm của AI với đường tròn ngoại tiếp ΔABC là J.
Chứng minh IB.IC = 2r.IJ

Giải



a. Theo (gt) ta có:

MN//AB $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{BAK} = \widehat{KAM}$

Tam giác AMK cân tại M

nên AM = MK = MC

Nên AKC vuông tại K $\Rightarrow$ KC ⊥ AI

b. Ta có IF ⊥ BC

$\Rightarrow$ IFC = IKC = 900 (cùng chắn KC)

$\Rightarrow$ FI, CK nội tiếp được $\Rightarrow$ CIK = CFK

Ta lại có: AIC = 900 + $\dfrac{ABC}{2} \Rightarrow 900 - \dfrac{ABC}{2}$

$\Rightarrow$ CFK = $900 - \dfrac{ABC}{2}$. Do AEF cân tại B $\Rightarrow$ EFB = $900 - \dfrac{ABC}{2}$

$\Rightarrow$ CFK = EFB $\Rightarrow$ 3 điểm K; F; E thẳng hàng.

c. Ta chứng minh được: JI = JB $\Rightarrow$ BIJ cân tại J kẻ JH ⊥ BI (H ∈ BI)

$\Rightarrow$ BJH = $\dfrac{1}{2}$ sđ AB và ICF = $\dfrac{1}{2}$ sđ AB $\Rightarrow$ BJH = ICF $\Rightarrow$ ΔIHJ ~ ΔIFC

$\Rightarrow \dfrac{HI}{IF} = \dfrac{IJ}{IC}$ Mà IH = $\dfrac{1}{2}$ BI Và IF = r $\Rightarrow \dfrac{BI.IC}{2}$ = R.IJ $\Rightarrow$ BIIC = 2r.IJ

3. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho tam giác ABC có các góc nhọn, các đường cao AD; BE; CF cắt nhau tại H. Gọi I; K thứ tự là hình chiếu vuông góc của B và C lên đường thẳng EF

a. Điểm H có vị trí gì đối với tam giác DEF

b. Chứng minh DE + DF = IK

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn và đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn tại C. Gọi AH và BI là các đường cao của tam giác ABC.

a. Chứng minh HI // d

b. Gọi MN và EF lần lượt là hình chiếu của các đoạn thẳng AH và BI lên đường thẳng d chứng minh MN = EF.

Bài 3: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm D khác A và B. Trên đường kính AB lấy điểm C, kẻ CH vuông góc với AD tại H phân giác trong của góc DAB cắt đường tròn tại E và cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt đường tròn tại N. Chứng minh rằng:

a. 3 điểm N, C, E thẳng hàng.

b. Nếu AD = BC thì DN đi qua trung điểm của AC.

Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O. một đường tròn tâm I tùy ý đi qua B và C cắt AB và AC tại am và N . Đường tròn tâm K ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ 2 là D. Chứng minh rằng:

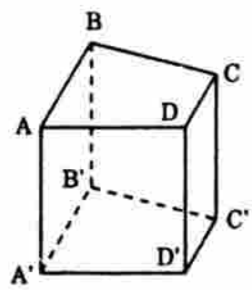
a. Tứ giác AKIO là hình bình hành.

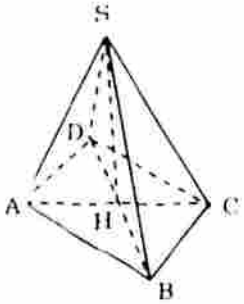
b. Góc ADI bằng 90^0

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD có góc B tù. AC cắt BD tại O. Hình chiếu vuông góc của D lên AB; BC; CA lần lượt là A'; D'; C' chứng minh điểm O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'

III. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Kiến thức cần nhớ:

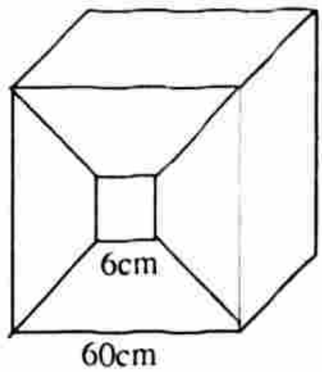
Hình	Diện tích xung quanh	Diện tích toàn phần	Thể tích
			
– ***Lăng trụ đứng*** : Hình có các mặt bên là những hình chữ nhật , đáy là một đa giác – ***Lăng trụ đều*** : Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều – ***Hình hộp chữ nhật*** : Hình có sáu mặt là những hình chữ nhật – ***Hình lập phương*** : Hình hộp chữ nhật có ba kích thước bằng nhau	$S_{xq} = 2p.h$ p – nửa chu vi đáy h – chiều cao $S_{xq} = 2(a + b)c$ a,b, c – các cạnh của hình hộp chữ nhật $S_{xq} = 4a^2$	$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$ $S_{tp} = 2(ab+bc+ac)$ $S_{tp} = 6a^2$	V= S.h S – Diện tích đáy h – Chiều cao V = abc

	a – cạnh của hình lập phương		$V = a^3$
Hình chóp đều là hình chóp có mặt đáy là đa giác đều , các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh	$S_{xq} = pd$ p – nửa chu vi đáy d – chiều cao của mặt bên (Trung đoạn)	$S_{tp} = S_{xq} + S_đ$	$V = \frac{1}{3} Sh$ S: Diện tích đáy h: Chiều cao
Hình trụ 	$S_{xq} = 2\pi rh$	$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$	$V = \pi r^2 h$
Hình nón	$S_{xq} = 2\pi rl$	$S_{tp} = 2\pi rl + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Hình cầu	$S = 4\pi r^2$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- Trong không gian . Dưới các góc nhìn khác nhau các đoạn thẳng , góc có số đo bằng nhau có thể có độ dài khác nhau . Do vậy khi vẽ hình ta lựa chọn góc nhìn phù hợp để vẽ sao cho hình làm nổi bật các đặc điểm và các yếu tố ta đang xét . Tuy vậy không được thay đổi tỷ số của các đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng vì dưới các góc nhìn khác nhau tỷ số này vẫn được bảo toàn
- Một trong những cách để đơn giản hoá bài toán trong không gian là đưa nó về xét bài toán hành học phẳng
- Trong không gian hai đườngthẳng không có điểm chung không có nghĩa là chúng song song với nhau như trong hình học phẳng (Để song song chúng phải cùng nằm trên một mặt phẳng)

2. Bài tập ví dụ:

Ví dụ 1: Một khối gỗ hình lập phương được đục một lỗ xuyên qua hai mặt đối nhau của hình lập phương có các kích thước cho trên hình vẽ. Tính thể tích và diện tích tất cả các mặt của khối gỗ



Giải

Thể tích của hình lập phương lớn là :

$V_1 = 60^3 = 216000cm^3$

Thể tích của lỗ đục (Là một hình hộp chữ nhật là):

$V_2 = 6^2.60 = 2160cm^3$

Thể tích của khối gỗlà : $V = V_1 = -V_2 = 216000 - 2160 = 213840cm^3$

Diện tích tất cả các mặt của khối gỗ là :

$S = 6.\ 60^2 + 4.6.60 - 2.6.6 = 23016\ cm^2$

Ví dụ 2 : Tính thể tích và diện tích toàn phần của một hình chóp cụt đều có đáy lớn là hình vuông cạnh 6cm . Đáy nhỏ là hình vuông cạnh bằng 3 cm . Đường cao bằng 4 cm

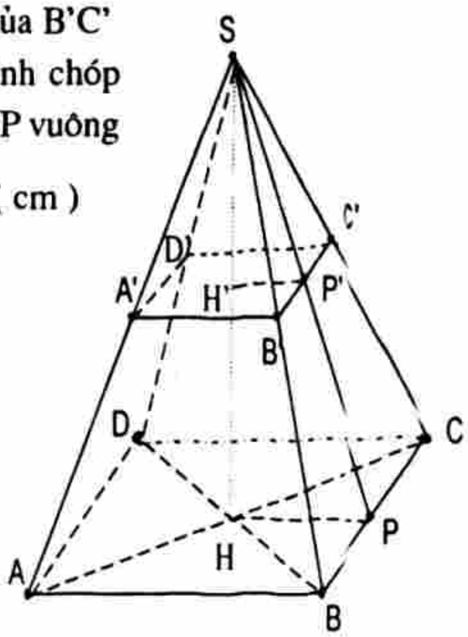
Giải

Giả sử các cạnh bên của hình chóp cắt nhau tại S .

Gọi H và H' lần lượt là tâm đường trong ngoại tiếp các hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Thì S , H ,H' thẳng hàng và SH , SH' lần lượt làcác đường cao của các hình chóp S.ABCD và S.A'B'C'D'

Gọi P là trung điểm của BC, P' là trung điểm của B'C'

Ta có SP và SP' là các trung đoạn của các hình chóp đều S.ABCD và S.A'B'C'D' . Xét tam giác SHP vuông tai H nên : $SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ (\ cm\ )$



Vì B'C'// BC và $B'C' = \frac{1}{2}BC$

nên B'C' là đường trung bình của ΔSBC

Do đó : $SH' = \frac{1}{2}SH = 2\ (cm)$

và $SP' = \frac{1}{2}SP = 2,5(cm)$

Thể tích của hình chóp S. ABCD là : $V_1 = \frac{1}{3}SH.BC^2 = \frac{1}{3}.4.6^2 = 48\left(cm^3\right)$

Thể tích của hình chóp S.A'B'C'D' là: $V_2 = \frac{1}{3}SH'.A'B'^2 = \frac{1}{3}.2.3^2 = 6\left(cm\right)$

Thể tích của hình chóp cụt là: $V = V_1 - V_2 = 48 - 6 = 42\ (cm^3)$

Diện tích xung quanh của hình chóp cụt là:

$$S_{xq} = AB^2 + A'B'^2 + 4.\frac{PP'\left(AB + A'B'\right)}{2} = 6^2 + 3^2 + 4.\frac{2,5\left(6+3\right)}{2} = 90\left(cm^2\right)$$

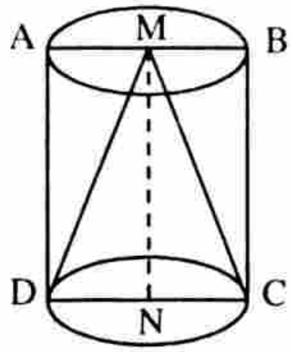
Ví dụ 3 : Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi M ,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Cho hình này quay quanh trục MN .

a. Hình vuông ABCD và hình tam giác DMC quay quanh trục MN sinh ra hình gì ?

b. Chứng tỏ rằng tỷ số thể tích các hình này không phụ thuộc vào a?

Giải

a. Khi hình vuông ABCD quay quanh MN tạo thành hình trụ có là đường tròn tâm M ,N ; bán kính $\frac{a}{2}$. Đường sinh AD = a. Khi tam giác DMC quay quanh MN tạo thành hình nón có đáy . Là $\left(N;\frac{a}{2}\right)$, đường cao MN = a



b. Thể tích của hình trụ là: $V_1 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{4}$

Thể tích của hình nón là: $V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{12}$

Tỷ số thể tích của hai hình là: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{\pi a^3}{12}} = 3$ Không phụ thuộc vào a

3. Bài tập tự luyện

Bài 1: Tính thể tích, diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đềucó đáy là tam giác đều cạnh a và trung đoạn là l .

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a

a. Tính thể tích và diện toàn phần của hình chóp

b. Ta gọi hai cạnh không có chung đỉnh nào của hình chóp là hai cạnh đối nhau. Chứng minh rằng các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối vuông góc với nhau từng đôi một và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Bài 3: Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Từ A và B kẻ các tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Trên Ax lấyđiểm M sao cho $AM = \frac{R}{2}$. Qua M kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt By tại N. Tình thể tích giới hạn bởi nửa đường tròn tâm O và hình thang vuông ABMN khi chúng cùng quay theo một chiều và trọn một vòng quanh MN

Bài 4: Cho tam giác đều ABC cạnh a có O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Cho tam giác AOB quay quanh OA .Hãy tính diện tích của hình được sinh ra

Bài 5: Cho hình chóp tam giác S.ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Chứng minh rằng : AC và MN không thể cùng nằm trong một mặt phẳng

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

PHẦN THỨ NHẤT: ĐẠI SỐ

I. BIẾN ĐỔI ĐỒNG NHẤT

I.1 Dùng hằng đẳng thức

Bài 2:

Ta có : $A = a^4 + \dfrac{1}{a^4} - 2\left(a^3 + \dfrac{1}{a^3}\right) + 3\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right) - 4\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$

Từ $a^2 - \sqrt{5}a + 1 = 0 \Rightarrow a + \dfrac{1}{a} = \sqrt{5} \Rightarrow a^2 + \dfrac{1}{a^2} = 3$

Và $a^3 + \dfrac{1}{a^3} = \left(a + \dfrac{1}{a}\right)\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2} - 1\right) = 2\sqrt{5}$; $a^4 + \dfrac{1}{a^4} = \left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = 7$

Bài 3:

Đặt $x = a - 3$; $y = b - a$; $z = 3 - b$ ta có $xy + yz + xz = -3$ và $x + y + z = 0$

Do đó: $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 6$

Bài 4:

Từ $ab + bc + ca = 1$

Ta có: $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca$

$$= (a^2 + ab) + (bc + ac) = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(a + c)$$

Tương tự $b^2 + 1 = (b + a)(b + c)$; $c^2 + 1 = (c + a)(c + b)$

Vậy $A = 1$

Bài 5:

Ta có: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}\right)$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\frac{(a + b + c)}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$$

Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ

I.2 Phân tích đa thức thành nhân tử

Bài 1:

a) $(x + y + z)(x + y - z)(x - y)^2$

b) $(a - b)(a - c)(c - b)$

c) $(x - 2y)(2x - y)$

Bài 2: Sử dụng phương pháp nhẩm nghiệm . Đáp số

b) $(x+1)(x^2-x-3)$ c) $(x+2)(x^2-x+2)$

d) $(3x-1)(x^2-x+1)$ e) $(x-2)(x^2+3x+4)$

f) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

Bài 3:

a) $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$

b) $(8x^2-12x+9)(8x^2+12x+9)$

c) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

d) $(x^2+x+1)(x^3+x+2)$

e) $(x^2+x+1)(x^6-x^5+x^3-x^2+1)$

f) $(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$

g) $(x^2+x+1)(x^6-x^4+x^3-x+1)$

h) $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

Bài 4:

a) Đặt: $x+y=a \Rightarrow (a-1)(a+3)=(x+y+1)(x+y+3)$

b) Đặt: $x^2-7x+9=y$

$\Rightarrow (y-3)(y+3)-72=(y^2-9^2)=x(x-7)(x^2-7x+18)$

c) Đặt : $x^2+8x+7=y$

$\Rightarrow y(y+8)+15=(y+3)(y+5)=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

d) Đặt : $12x^2+11x-1=y$

$\Rightarrow y(y+3)-4=(y-1)(y+4)=(12x^2+11x-2)(12x^2+11x+3)$

I.3 Phân thức đại số

Bài 1:

Đặt : $a=\dfrac{x}{y-z}$; $b=\dfrac{y}{z-x}$; $c=\dfrac{z}{x-y}$

Ta có : $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$

$\Leftrightarrow (ab+a+b+1)(c+1)=(ab-a-b+1)(c-1)$

$\Leftrightarrow abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=abc-ab-ac-bc+a+b+c-1$

$\Leftrightarrow ab+ac+bc=1$. nên $M=ab+bc+ca=1$

Bài 2: $A=4x+8$

Bài 3: $M=\dfrac{5}{x+3}$

Bài 4: $B=\dfrac{x^2+x}{3x-1}$

Bài 5: Rút gọn được $P=1$ không phụ thuộc vào x

II . BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

II.1 Các phép tính căn thức

Bài 1:

a) $x \geq \frac{1}{2}$ c) $-3 \leq x \leq 2$ e) $\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 1 \end{array}\right.$

b) $x > \frac{1}{2}$ d) $x \geq 5$ g) $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{array}\right.$

Bài 2:

a) $2\sqrt{5}$

b) 4

c) $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} = \sqrt{6+2\sqrt{5-(2\sqrt{3}+1)}} = \sqrt{6+2(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}+1$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức:

a) 1

b) $|a+3|+|a-3| = \begin{cases} -2a \text{ khi } a < -3 \\ 6 \text{ khi } -3 \leq a \leq 3 \\ 2a \text{ khi } a > 3 \end{cases}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2(3-x)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \text{ khi } x > 3 \\ \dfrac{1}{2} \text{ khi } x < 3 \end{cases}$

II.2 Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương

Bài 1: Tính:

a) 1 b) 9 c) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{3(3-2\sqrt{2})}-\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -1$ e) $\left[\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{2}\right].\sqrt{3} = 3$

Bài 2: Rút gọn:

$A = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

$B = x - y$

$C = \dfrac{\sqrt{2x-2.2.\sqrt{2x-4}}}{2} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{2x-4}-2)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2x-4}-2}{2}$ $(x \geq 4)$

$D = \dfrac{\left|\sqrt{y}-1\right|}{(x-1)(\sqrt{y}-1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} \text{ khi } v > 1; x \neq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} \text{ khi } 0 < y < 1\,;\, x \neq 1 \end{cases}$

Bài 3: Tìm x biết:

a) Viết về dạng $\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}-3)=0$ với $(x \geq 3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=6 \end{array}\right.$ (t/m)

b) ĐKXĐ: $x \geq 2$; Viết về dạng $\sqrt{x+2}(\sqrt{x-2}+2)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=0$

(vì $\sqrt{x-2}+2 \neq 0$).

Mà $\sqrt{x+2} \geq 2$ với $\forall x \geq 2 \Rightarrow$ không tìm được giá trị của x.

II.3 Các phép biến đổi đơn giản căn thức bậc hai

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $-8\sqrt{2}$

b) -1

c) Viết biểu thức khử về dạng: $\dfrac{x+y}{y}.\dfrac{|y|}{x+y}\sqrt{x(1+y)}$

Với x = 2; y = 1 $\Rightarrow x+y=3>0$ nên biểu thức trên là: $\sqrt{x(1+y)}$

Thay x = 2; y =1 ta được: $\sqrt{2(1+1)}=2$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{1}=1$

e) $\sqrt{2007}-1$

Bài 2: So sánh:

a) Ta có: $\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}(3\sqrt{7}-5\sqrt{2})}{9.7-25.2}=\dfrac{3\sqrt{35}-5\sqrt{10}}{13}<\dfrac{3.6-5.3}{13}=\dfrac{3}{13}$

b) $\sqrt{30}-\sqrt{29}=\dfrac{1}{\sqrt{30}+\sqrt{29}}$; $\sqrt{29}-\sqrt{28}=\dfrac{1}{\sqrt{29}+\sqrt{28}}$

Mà $\sqrt{30}+\sqrt{29}>\sqrt{29}+\sqrt{28} \Rightarrow \sqrt{30}-\sqrt{29}<\sqrt{29}-\sqrt{28}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức:

a) 1

b) $b=\begin{cases} |a| \text{ khi } a>b \\ -|a| \text{ khi } a<b \end{cases}$

Bài 4: Tìm x biết

a) ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{2}{3}$

Bình phương 2 vế ta được: $3x-2=5-2\sqrt{6} \Leftrightarrow x=\dfrac{7-2\sqrt{6}}{3}$ (t/m)

b) ĐKXĐ: $x \geq 3$

Biến đổi về dạng: $(\sqrt{x-3})^2-7\sqrt{x-3}+12=0$ Đặt $\sqrt{x-3}=t \geq 0$

Ta có: $t^2-7t+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=5 \end{array}\right.$ (t/m). Hoặc $\sqrt{x-3}=2 \Leftrightarrow x=7$

II. 4 Thực hiện phép tính. Rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau:

a) .

b) $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2} = \sqrt{(2\sqrt{6}-3)^2} = 3-\sqrt{6}+2\sqrt{6}-3=\sqrt{6}$

c) $\dfrac{5(4+\sqrt{11})}{5}+\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}-\dfrac{6(\sqrt{7}+2)}{3}-\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}=4+\sqrt{11}-3\sqrt{7}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{2}+\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{2}-\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}=\dfrac{13+\sqrt{5}}{2}$

e) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2=18$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) Biến đổi vế trái ta được:

$$\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ đẳng thức đã cho luôn đúng.

b) Biến đổi vế trái: $\left[\dfrac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(2-\sqrt{2}}-\dfrac{6\sqrt{6}}{3}\right].\dfrac{1}{\sqrt{6}}=(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-2\sqrt{6}).\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}=-1,5$

Vậy đẳng thức đã cho luôn đúng

c) Biến đổi vế trái: $\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}:\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

Vậy đẳng thức đã cho luôn đúng

d) Biến đổi VT: $\left[1+\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+1}\right].\left[1-\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1}\right]=(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})=1-a$

$\Rightarrow$ đẳng thức đã cho luôn đúng.

e) Biến đổi VT:

$$\frac{2}{\sqrt{ab}}.\frac{ab}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}-\frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=-1$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) ĐKXĐ: $x \ge 5$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow$ $x-5-2\sqrt{x-5}-15=0$

Đặt $\sqrt{x-5}=t\ge 0 \Rightarrow x-5=t^2$

Ta có pt: $t^2-2t-15=0$. Giải pt này ta có: $t=5$; $t=-3$ (loại)

$t=5 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}=5 \Leftrightarrow x=30$ (t/m)

Vậy $S=\{30\}$

b) ĐKXĐ: $x \ge 0$; Đặt $\sqrt{x} = t \ge 0$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$ (t/m)

$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (t/m); $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (t/m)

Vậy $S = \{1; 4\}$

c) ĐKXĐ: $x \ge 0$; $x \ne 16$; $x \ne 49$

PT đã cho $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 7) = (\sqrt{x} - 6)(\sqrt{x} - 4) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow x = 100$ (t/m)

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}} = \sqrt{5 - (2\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$

b) $\sqrt{x - 4 + 4\sqrt{x - 4} + 4} + \sqrt{x - 4 - 4\sqrt{x - 4} + 4}$ (với $x \ge 4$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x - 4} + 2 + \left|\sqrt{x - 4} - 2\right| = \begin{cases} 2\sqrt{x - 4} \text{ khi } x \ge 8 \\ 4 \text{ khi } 4 \le x < 8 \end{cases}$

Bài 5: Cho biểu thức: $A = (\dfrac{\sqrt{x}}{x - 4} + \dfrac{2}{2 - \sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}) : (\sqrt{x} - 2 + \dfrac{10 - x}{\sqrt{x} + 2})$

ĐKXĐ: $x \ge 0$; $x \ne 4$

a) Rút gọn được: $A = \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}}$

b) $A > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp với ĐKXĐ thì $A > 0 \Leftrightarrow 0 \le x < 4$

Bài 6: Cho biểu thức: $B = (\dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{y - x}) : \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

ĐKXĐ: $x \ge 0$; $y \ge 0$; $x \ne y$

a) Rút gọn được: $B = \dfrac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}$

b) $x = 3 - 2\sqrt{2}$; $y = 3 + 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} x.y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$

Thay vào biểu thức B ta được: $B = \dfrac{1}{6 - 1} = \dfrac{1}{5}$

c) Với $x \ge 0$; $y \ge 0 \Rightarrow \sqrt{xy} \ge 0$

$x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\sqrt{y}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y$ có $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\sqrt{y}\right)^2 \ge 0$; $\dfrac{3}{4}y \ge 0\ \forall y \ge 0)$

(vì x, y không đồng thời bằng 0)

$\Rightarrow x - \sqrt{xy} + y \ge 0$; $\forall x \ge 0$; $y \ge 0$; $x \ne y$. Vậy $B \ge 0$ (đpcm)

Bài 7: Cho biểu thức.

$$P = \left(\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{4x}{x-9}\right) : \left(\frac{5}{3+\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+x}\right)$$

a) Rút gọn

$$P = \frac{(3+\sqrt{x})^2 - (3-\sqrt{x})^2 - 4x}{x-9} : \left(\frac{5}{3+\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}\right)$$

$$= \frac{(3+\sqrt{x})^2 - (3-\sqrt{x})^2 - 4x}{x-9} : \frac{5\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{12\sqrt{x} - 4x}{x-9} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})} = \frac{4\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{-(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1} = \frac{-4x}{\sqrt{x}-1}$$

$x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 9$ (không thoả mãn ĐK)

Với $x_0 = 2$ thì $P = \dfrac{-4.2}{\sqrt{2}-1} = -\dfrac{8}{\sqrt{2}-1}$

III. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. Hàm số bậc nhất và qui về bậc nhất

Bài 1: Vì hàm số $y = -2x + b$ đi qua điểm $M(3 ; -5)$

nên ta có: $-5 = -2.3 + b \Leftrightarrow b = 1$

Hàm số cần tìm có dạng: $y = -2x + 1$

Bài 2: $y = (a - 1)x + a$

a) Hàm số đồng biến khi $a > 1$; nghịch biến khi $a < 1$

b) Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên hoành độ bằng 0

Ta có: $-2 = (a - 1).0 + a \Leftrightarrow a = -2$

Hàm số có dạng: $y = -3x - 2$

c) Vẽ đồ thị hàm số: $y = -3x - 2$

- $x = 0$ thì $y = -2$; $y = 0$ thì $x = \dfrac{2}{3}$
- Biểu diễn $A(0; -2)$ và $B(-\dfrac{2}{3}; 0)$

  Trên mặt phẳng toạ độ
- Kẻ đường thẳng đi qua A, B ta được đồ thị hàm số $y = -3x - 2$

Bài 3: Hàm số $y = ax + 6$ (d)

a) Vì đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên tung độ bằng 0. Thay vào công thức tìm được: $a = -3$

b) Vẽ đồ thị (HS tự vẽ)

c) $a = -3$ ta có hàm số: $y = -3x + 6$

Khi $x = \frac{1}{3}$ ta có: $y = -3.\frac{1}{3} + 6 = 5$

d) $y = \sqrt{2}$ thì $x = \frac{6-\sqrt{2}}{3}$

Bài 4: Cho hàm số: $y = (m - 1).x + m$

a) +) Đường thẳng đi qua gốc toạ độ nên $m = 0$

+) Đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1-\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 1-\sqrt{2}$

b) +) Góc tạo bởi đường thẳng (1) với tia Ox là góc tù $\Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

+) Góc tạo bởi đường thẳng (1) với tia Ox là góc bằng $45^0 \Leftrightarrow m - 1 = 1$ nên $m = 2$

2. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Bài 1: $y = f(x) = -1,5.x^2$

a) $f(1) = -1,5$; $f(2) = -6$; $f(3) = -13,5$. Ta có $f(1) > f(2) > f(3)$

b) $f(-3) = -13,5$; $f(-2) = -6$; $f(-1) = -1,5$. Ta có $f(-1) > f(-2) > f(-3)$

Bài 2: Vì Parabol cần tìm có đỉnh là O(0; 0) nhận Oy làm trục đối xứng

Nên Parabol có dạng: $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Vì Parabol đi qua A(3; 2) ta có: $2 = 9a \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}$

Parabol cần tìm có dạng: $y = \frac{2}{9}x^2$

Bài 3: Cho hàm số: $y = ax^2$

a) Vì Parabol đi qua A(−1; 2) ta có: $2 = a.(-1)^2 \Leftrightarrow a = 2$

Parabol cần xác định là: $y = 2x^2$

Vẽ đồ thị: HS tự vẽ.

b) Gọi B ∈ Parabol $y = 2x^2$ ta được: $4 = 2.x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thuộc Parabol là: $B(\sqrt{2}\,; 4)$ và $B'(-\sqrt{2}\,; 4)$

3. Đồ thị và tương giao của các đồ thị :

Bài 1: Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng: $y = ax + b$ ($a \neq 0$) (d)

Vì (d) // đường thẳng $y = -3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b \neq 1 \end{cases} \Rightarrow (d): y = -3x + b$

Vì (d) đi qua A(−1; −4) ta có: $-4 = -3.(-1) + b \Leftrightarrow b = -7 \neq 1$

Vậy (d): $y = -3x - 7$

Bài 2: Cho đường thẳng $y = (m - 2)x + 3$ (d_1) và đường thẳng $y = 2mx - 5$ (d_2)

a) $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow m - 2 = 2m$ (vì $3 \neq -5$) $\Leftrightarrow m = -2$

b) $(d_1) \cap (d_2) \Leftrightarrow m - 2 \neq 2m \Leftrightarrow m \neq -2$

c) $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow 2m(m-2) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ m = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Bài 3: $y = \dfrac{x^2}{4}$ (P) ;

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm có dạng: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ (d)

Vì (d) đi qua $A(-1; -2)$ ta có: $-2 = a(-1) + b \Leftrightarrow a - b = 2$ (1)

Vì (d) tiếp xúc với (P)

$\Rightarrow$ phương trình: $ax + b = \dfrac{x^2}{4}$ có nghiệm kép

Xét phương trình: $x^2 - 4ax - 4b = 0$ có $\Delta' = (-2a)^2 + 4b$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b = 0$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow a = 2 + b$ thay vào (2) ta được: $4(2+b)^2 + 4b = 0$

$\Leftrightarrow b^2 + 5b + 4 = 0$ (*)

Giải phương trình (*) ta được: $b = -1$; $b = -4$

- Với $b = -1$ ta có $a = 2 + (-1) = 1$ khi đó ta được (d_1): $y = x - 1$
- Với $b = -4$ ta có $a = 2 + (-4) = -2$ khi đó ta được (d_2): $y = -2x - 4$

* Tìm tọa độ tiếp điểm

– Giả sử đường thẳng (d_1) tiếp xúc (P) tại $A(x_A; y_A)$

Thì x_A là nghiệm của phương trình: $x - 1 = \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow x = 2$.

Khi đó $y_A = x_A - 1 = 2 - 1 = 1$. Vậy A (2; 1)

– Giả sử đường thẳng (d_2) tiếp xúc (P) tại B (x_B, y_B) tương tự ta tìm được: $B(-4; 4)$

Bài 4: Vì đường thẳng $y = mx + n$ đi qua $A(-1; 0)$ ta có: $0 = -m + n \Leftrightarrow m = n$

Vì đường thẳng $y = mx + n$ tiếp xúc Parabol $y = \dfrac{1}{2}x^2$ ta có phương trình hoành độ: $\dfrac{1}{2}x^2 = mx + n$ có nghiệm kép.

Xét phương trình: $\dfrac{1}{2}x^2 = mx + n \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2n = 0$ mà $m = n$ ta có phương trình: $x^2 - 2mx - 2m = 0$. $\Delta' = m^2 - 2m$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m + m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$

- $m = 0 \Rightarrow n = 0$ ta có đường thẳng $y = 0$
- $m = -2 \Rightarrow n = -2$ ta có đường thẳng $y = -2x - 2$

+) Tìm toạ độ tiếp điểm

Đường thẳng y = 0 tiếp xúc với Parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ tại O(0 ; 0)

Đường thẳng $y = -2x - 2$ tiếp xúc với Parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ tại điểm $C(x_C; y_C)$

$\Rightarrow x_C$ là nghiệm của phương trình: $\frac{1}{2}x^2 = -2x - 2 \Leftrightarrow x = -2$ hay $x_C = -2$

y_C là nghiệm của phương trình: $y = \frac{1}{2}(-2)^2 = 2 \Rightarrow y_C = 2$. Vậy C (–2 ; 2)

IV. PHƯƠNG TRÌNH

IV.1 Giải và biện luận phương trình bậc nhất.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $(2x-1)^2 - (2x-2)(2x+2) = x(2x-1) - (2x^2+5x-3)$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - (4x^2 - 4) = 2x^2 - x - 2x^2 - 5x + 3$

$\Leftrightarrow -4x + 5 - 3 + 6x = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$

Vậy phương trình có nghiệm x = –1.

b) $\frac{3x+1}{2005} + \frac{3x+2}{2004} = \frac{3x+3}{2003} + \frac{3x+4}{2002}$

$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{2005} + 1 + \frac{3x+2}{2004} + 1 = \frac{3x+3}{2003} + 1 + \frac{3x+4}{2002} + 1$

$\Leftrightarrow \frac{3x+2006}{2005} + \frac{3x+2006}{2004} = \frac{3x+2006}{2003} + \frac{3x+2006}{2002}$

$\Leftrightarrow (3x+2006)(\frac{1}{2005} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} - \frac{1}{2002}) = 0$

Do $\frac{1}{2005} < \frac{1}{2003}$ và $\frac{1}{2004} < \frac{1}{2002} \Rightarrow \frac{1}{2005} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} - \frac{1}{2002} \neq 0$

$\Rightarrow 3x + 2006 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2006}{3}$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{2006}{3}$

c) $\frac{x-1050}{956} + \frac{x-1055}{951} + \frac{x-1060}{946} = \frac{x-1065}{941} + \frac{x-1070}{936} + \frac{x-1075}{931}$

$\Leftrightarrow (\frac{x-1050}{956} - 1) + (\frac{x-1055}{951} - 1) + (\frac{x-1060}{946} - 1)$

$= (\frac{x-1065}{941} - 1) + (\frac{x-1070}{936} - 1) + (\frac{x-1075}{931} - 1)$

$\Leftrightarrow \frac{x-2006}{956} + \frac{x-2006}{951} + \frac{x-2006}{946} = \frac{x-2006}{941} + \frac{x-2006}{936} + \frac{x-2006}{931}$

$\Leftrightarrow (x-2006)(\frac{1}{956} + \frac{1}{951} + \frac{1}{946} - \frac{1}{941} - \frac{1}{936} - \frac{1}{931}) = 0$

Ta có:

$$\frac{1}{956}+\frac{1}{951}+\frac{1}{946}-\frac{1}{941}-\frac{1}{936}-\frac{1}{931}\neq 0 \Rightarrow x-2006=0\Rightarrow x=2006$$

d) $\frac{x+3}{201}+\frac{x+4}{100}+\frac{x+6}{66}=-6 \Leftrightarrow (\frac{x+3}{201}+1)+(\frac{x+4}{100}+2)+(\frac{x+6}{66}+3)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x+204}{201}+\frac{x+204}{100}+\frac{x+204}{66}=0 \Leftrightarrow (x+204)(\frac{1}{201}+\frac{1}{100}+\frac{1}{66})=0$

$\Rightarrow x+204=0\Rightarrow x=-204$ (Do $\frac{1}{201}+\frac{1}{100}+\frac{1}{66}\neq 0$)

Vậy phương trình có nghiệm x = – 204.

e) $(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{97.99})(x-1)+x=\frac{148x}{99}-\frac{49}{99}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+...+\frac{2}{97.99})(x-1)=\frac{148x-99x}{99}-\frac{49}{99}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{97}-\frac{1}{99})(x-1)=\frac{49x}{99}-\frac{49}{99}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\frac{1}{99})(x-1)=\frac{49}{99}(x-1)\Leftrightarrow (x-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2.99}-\frac{49}{99})=0$

$\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1.$(Do $\frac{1}{2}-\frac{1}{2.99}-\frac{49}{99}\neq 0$)

Vậy phương trình có nghiệm x = 1.

g) $\frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{2x}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{3x}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4x}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=-\sqrt{7}$

$\Leftrightarrow \frac{x(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1}-\frac{2x(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}-\frac{3x(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}+\frac{4x(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3}=-\sqrt{7}$

$\Leftrightarrow x\left[\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{3}\right]=-\sqrt{7}\Rightarrow x.0=-\sqrt{7}$ (vô lý)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 2: Giải các phương trình sau (với x là ẩn số)

a) $4m^2(x-1)=x-4m+1\Leftrightarrow 4m^2x-4m^2-x=1-4m$

$\Leftrightarrow x(4m^2-1)=4m^2-4m+1\Leftrightarrow x(2m-1)(2m+1)=(2m-1)^2$

* Nếu $(2m-1)(2m+1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2}\\ m=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $m=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\frac{1}{2}-1=0$ phương trình có vô số nghiệm

$m = -\frac{1}{2} \to 2(-\frac{1}{2}) - 1 \neq 0 \Rightarrow$ phương trình vô số nghiệm.

* Nếu $(2m-1)(2m+1) \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{1}{2}$ và

$m \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ phương trình có nghiệm

$$x = \frac{(2m-1)^2}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{2m-1}{2m+1}$$

Kết luận: $m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ phương trình có vô số nghiệm.

$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$m \neq -\frac{1}{2}$; $m \neq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm: $x = \frac{2m-1}{2m+1}$; $x = \frac{2m-1}{2m+1}$

b) $\frac{m(x-1)}{2} - \frac{m+x}{3} = 2 \Rightarrow 3m(x-1) - 2(m+x) = 12$

$\Rightarrow 3mx - 3m - 2m - 2x = 12 \Rightarrow x(3m-2) = 12 + 5m$

* Nếu $3m - 2 = 0 \to m = \frac{2}{3}$

khi đó $12 + 5m = 12 + 5.\frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Nếu $3m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{2}{3} \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = \frac{12+5m}{3m-2}$

Kết luận: $m = \frac{2}{3} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$m \neq \frac{2}{3} \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = \frac{12+5m}{3m-2}$

c) $\frac{x+a-2}{a-1} + \frac{x-a}{a+1} + \frac{x+2a}{1-a^2} = 0$ (đk: $(1-a)(1+a) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+a-2)(a+1) + (x-a)(a-1) - (x+2a)}{a^2-1} = 0$

$\Leftrightarrow x(a+1) + a^2 - a - 2 + x(a-1) - a^2 + a - x - 2a = 0$

$\Leftrightarrow x(a+1+a-1-1) - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow x(2a-1) = 2(a+1)$

* Nếu $2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(a+1) = 2(\frac{1}{2}+1) \neq 0$

$\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm. $2a-1\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a\neq \dfrac{1}{2} \\ a\neq \pm 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x=\dfrac{2(a+1)}{2a-1}$

Kết luận: $\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \\ a=\pm 1 \end{array}\right.$ Phương trình vô nghiệm.

$\begin{cases} a\neq \dfrac{1}{2} \\ a\neq \pm 1 \end{cases}$ phương trình có nghiệm $x=\dfrac{2(a+1)}{2a-1}$

d) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}=1-\dfrac{4x}{a+b+c}$ đk: $a\neq 0; b\neq 0; c\neq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b-x}{c}+1+\dfrac{a+c-x}{b}+1+\dfrac{b+c-x}{a}+1=4-\dfrac{4x}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b-x+c}{c}+\dfrac{a+c-x+b}{b}+\dfrac{b+c-x+a}{a}=4\dfrac{a+b+c-x}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow (a+b+c-x)(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{4}{a+b+c})=0$

Vậy với $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{4}{a+b+c}=0$ Phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in R$

Với $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{4}{a+b+c}\neq 0$ Phương trình có nghiệm duy nhất $x=a+b+c$

IV.2 Phương trình bậc hai – Hệ thức Viét và ứng dụng

Bài 3:

a) $2\sqrt{3}x^2-(\sqrt{3}+1)x-\sqrt{3}+1=0$

Phương trình có dạng a + b + c = 0 nên có hai nghiệm :

$x_1=1,\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm $x_1=\dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{28}}{4\sqrt{3}}; x_2=\dfrac{\sqrt{3}+1+\sqrt{28}}{4\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{2}x^2+(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}-3=0$

Do a − b + c = 0 Nên phương trình có hai nghiệm $x_1=-1$; $x_2=\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm:

c) $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-2)(x+3)}{3}=x-1$

$\Leftrightarrow 3(x^2-2x+1)+2(x^2+x-6)-6(x-1)=0$

$\Leftrightarrow 5x^2-10x-3=0 \Rightarrow \Delta'=25+15=40>0$

$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm: $x_1=\dfrac{5-\sqrt{40}}{5};x_2=\dfrac{5+\sqrt{40}}{5}$.

Bài 4:

+ Với $m-2=0 \Rightarrow m=2$

  Khi đó phương trình $\Leftrightarrow (5.4+4.4-1)x-2+2=0 \Rightarrow x=0$

+ Với $m-2\neq 0$; $\Delta=(5m^2+4m-1)^2+4(m-2)^2\geq 0 \quad \forall m$

  Vậy với $\forall m$ phương trình có nghiệm.

Bài 5: Gọi x_1; x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$

a) $\Delta=1+4=5$

Nên phương trình luôn có 2 nghiệm x_1; x_2

Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$

Khi đó: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1^2+2=3$.

b) $Q=x_1^2+x_2^2+(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=3+9-2=10 \vdots 5$

Bài 6: Ta có: $\Delta=m^2-4(m^2-7)=28-3m^2$

Để phương trình có 2 nghiệm cần: $28-3m^2>0 \Rightarrow -\sqrt{\dfrac{28}{3}}<m<\sqrt{\dfrac{28}{3}}$

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1.x_2=m^2-7 \end{cases}$. Mà: $x_1=2x_2$ nên

$$\begin{cases} 3x_2=m \\ 2x_2^2=m^2-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3x_2 \\ 2x_2^2=(3x_2)^2-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\pm 1 \\ m=\pm 3 \end{cases}$$

thoả mãn $-\sqrt{\dfrac{28}{3}}<m<\sqrt{\dfrac{28}{3}}$

Vậy $m=\pm 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 7: a) Để phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt thì :

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2-4(m^2-3)>0 \\ m^2-3>0 \\ m>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12-3m^2>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-\sqrt{3} \\ m>\sqrt{3} \end{array}\right. \\ m>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m>\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}<m<2$$

Vậy $\sqrt{3}<m<2 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt .

b) Để phương trình chỉ có 1 nghiệm dương thì

$P < 0 \Rightarrow m^2 - 3 < 0 \Rightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

Bài 8: Để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thì $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 + 3m + 2) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - m^2 - 3m - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -m - 1 \geq 0 \Rightarrow m \leq -1$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) & (3) \\ x_1.x_2 = m^2 + 3m + 2 & (4) \end{cases}$

a) Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 12$

$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(m^2 + 3m + 2) = 12 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m + 2 - m^2 - 3m - 2 = 6$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow (m+3)(m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + 3 = 0 \\ m - 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Vì $m < -1$ phương trình có 2 nghiệm nên chỉ có $m = -3$ thoả mãn.

Vậy với $m = -3$ phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thoả mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 12$

b) Từ (3): $x_1 + x_2 = 2m + 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{x_1 + x_2 - 2}{2}$ (*)

Từ (4) ta có: $x_1.x_2 = (m+1)(m+2)$

Kết hợp với (3) và (*) ta được: $\Leftrightarrow x_1.x_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}.\dfrac{x_1 + x_2 + 2}{2}$

$\Leftrightarrow x_1.x_2 = \dfrac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + 2)}{4} \Leftrightarrow 4x_1.x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc m

$$4x_1.x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)$$

Bài 9: Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

a) Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì:

$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m+1)(m-2) > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq -1 \end{cases}$

Vậy để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $m < 3; m \neq 1$

b) Để phương trình có nghiệm $x = 2$ thì $(m+1).2^2 - 2(m+1).2 + m - 2 = 0$

Hay $m = -6$

Khi đó nghiệm còn lại là x_2 thì

$$2x_2 = \frac{m-2}{m+1} \Rightarrow x_2 = \frac{(-6-2)}{2(-6+1)} = \frac{4}{5}$$

c) Ta có

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì: $m < 3; m \neq 1$ (Theo câu a)

Khi đó:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{2(m-1)}{m+1}}{\frac{m-2}{m+1}}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m-2}=\frac{7}{4}$$

$\Rightarrow 8m-8=7m-14 \Rightarrow m=-6.$

Vậy với $m = -6$ phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{7}{4}$

d) Tìm GTNN của biểu thức:

$A = 2x_1^2+2x_2^2+x_1x_2 = 2(x_1+x_2)^2-3x_1x_2$

$= 2.\frac{4(m-1)^2}{(m+1)^2}-3.\frac{m-2}{m+1}=\frac{5m^2-13m+14}{(m+1)^2}$

$\Rightarrow A(m+1)^2 = 5m^2-13m+14 \Rightarrow Am^2+2Am+A=5m^2-13m+14$

$\Rightarrow m^2(A-5)+m(2A+13)+A-14=0(*)$

Với $A = 5$ thì $m=\frac{9}{23}$

Với $A \neq 5$ để (*) có nghiệm đối với m thì: $\Delta \geq 0$

$\Rightarrow (2A+13)^2-4(A-5)(A-14)\geq 0 \Leftrightarrow 128A-111\geq 0 \Rightarrow A\geq \frac{111}{128}$

Dấu bằng xảy ra khi $m=\frac{41}{23}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\frac{111}{128}$.

Bài 10:

a) Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta' \geq 0$

$\Rightarrow (m+1)^2-(2m+10)\geq 0 \Rightarrow m^2-9\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -3 \\ m\geq 3\end{array}\right.$

Vậy với $m\leq -3; m\geq 3$ phương trình (1) có nghiệm.

b) $A = 6x_1x_2+x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2+4x_1x_2 = 4(m+1)^2+4(2m+10)$

$= 4m^2+16m+44=(2m+4)^2+28$

$A = 4\left(m+2\right)^2+28$

Vì $m\leq -3$; $m \geq 3$ nên $m+1\leq -1$; $m+1\geq 4$

Do đó: $m+1\geq 1 \Rightarrow (m+)^2\geq 1 \Rightarrow A=4(m+1)^2+28\geq 32$

Vậy Min A = 32 khi $m=-1$

Bài 11:

a) Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì:

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - (m-1)(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m < 2 \end{cases}$$

Vậy với $m < 2$; $m \neq 1$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Áp dụng hệ thức Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m-1} \\ x_1x_2 = \dfrac{m+2}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+2)-4}{m-1} \\ x_1x_2 = \dfrac{m+2}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+2)}{m-1} - \dfrac{4}{m-1} \\ x_1x_2 = \dfrac{m+2}{m-1} \end{cases}$$

Từ $x_1x_2 = \dfrac{m+2}{m-1} \Rightarrow (m-1)x_1x_2 = m+2 \Rightarrow mx_1x_2 - x_1x_2 = m+2$

$\Leftrightarrow m(x_1x_2 - 1) = 2 + x_1x_2 \Leftrightarrow m = \dfrac{2 + x_1x_2}{x_1x_2 - 1}$

Khi đó từ $x_1x_2 = \dfrac{m+2}{m-1} - \dfrac{4}{m-1} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_1x_2 - \dfrac{4}{\dfrac{2+x_1x_2}{x_1x_2-1} - 1}$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_1x_2 - \dfrac{4(x_1x_2 - 1)}{3} \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) = 2x_1x_2 + 4$

b) Ta có: $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + 6 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} + 6 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{4m^2}{(m-1)^2} - 2\dfrac{m+2}{m-1}}{\dfrac{m+2}{m-1}} + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{4m^2 + 4(m+2)(m-1)}{(m+2)(m-1)} = 0$$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 4(m^2 + m - 2) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 2 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \\ m = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện phương trình có 2 nghiệm thì

$m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ thoả mãn.

Vậy với $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ cần tìm.

Bài 12: Phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (1)

a) Với m = 0 phương trình (1) trở thành:

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -3; x = 1$

Vậy với m = 0 phương trình có 2 nghiệm x = –3 ; x = 1

b) Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 - (m-3) = m^2 - 3m + 4 = (m - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0 \quad \forall m$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm $x_1; x_2$ với $\forall m$.

c) Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ 2x_1x_2 = 2m - 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 6 - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 4$

d) Để phương trình có 2 nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau thì cần điều kiện: $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow 2(m-1) = 0 \Rightarrow m = 1$

Vậy với m = 1 thì phương trình có 2 nghiệm thoả mãn điều kiện.

IV.3 Một số dạng phương trình thường gặp

Bài 13: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-2) - x(x-2) + 6(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^3 - x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x-2)[x^3 + 8 - x - 2] = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)[(x+2)(x^2 - 2x + 4) - (x+2)] = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)[(x-1)^2 + 2] = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$ (vì $(x-1)^2 + 2 > 0 \quad (\forall x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: x = 2 ; x = –3.

b) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 - 7x^2 - 14x + 3x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2(x+2) - 7x(x+2) + 3(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 - 7x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(2x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: x = –2; $x = \frac{1}{2}$; x = 3

c) $(x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x+3)(x-3) = 3 - (x+3)^2$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 9) = 36 - (x^2 + 6x + 9)$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 3)^2 - x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 3 - x + 3)(x^2 - 2x + 3 + x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 6)(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow [(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{15}{4}]x(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$ (vì $(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0 \ \forall x$) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 0$; $x = 1$.

l) $x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 1 = 2x + 100 \\ x^2 + 1 = -2x - 100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 11; x_2 = -9 \\ (x + 1)^2 + 100 = 0 \quad \text{(vô lý)} \end{array}\right.$

$\Rightarrow x_1 = 11; x_2 = -9$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x_1 = 11$; $x_2 = -9$

:) $(2x - \sqrt{5})^3 + (x + \sqrt{7})^3 + (\sqrt{5} - \sqrt{7} - 3x)^3 = 0$

Bạn đọc tự chứng minh bài toán:

" Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ "

Ta có: $(2x - \sqrt{5}) + (x + \sqrt{7}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7} - 3x) = 0$

$\Rightarrow (2x - \sqrt{5})^3 + (x + \sqrt{7})^3 + (\sqrt{5} - \sqrt{7} - 3x)^3$

$= 3.(2x - \sqrt{5})(x + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7} - 3x)$

Do vậy phương trình đã cho tương đương với:

$3(2x - \sqrt{5})(x + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7} - 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 2x - \sqrt{5} = 0 \\ x + \sqrt{7} = 0 \\ \sqrt{5} - \sqrt{7} - 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = -\sqrt{7} \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}; x_2 = -\sqrt{7}; x_3 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{3}$

g) $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) = 4$

$\Leftrightarrow (4x + 1)(3x + 2)(12x - 1)(x + 1) = 4 \Leftrightarrow (12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 11x - 1) = 4$

Đặt $12x^2 + 11x = t$ phương trình trở thành: $(t + 2)(t - 1) = 4$

$\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t + 3)(t - 2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t + 3 = 0 \\ t - 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \end{array}\right.$

+ Với $t = -3 \Rightarrow 12x^2 + 11x = -3 \Rightarrow 12x^2 + 11x + 3 = 0$

Có $\Delta = 11^2 - 12^2 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $t = 2 \Rightarrow 12x^2 + 11x = 2 \Rightarrow 12x^2 + 11x - 2 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-11 - \sqrt{217}}{24}; x_2 = \frac{-11 + \sqrt{217}}{24}$$

Bài 14: Giải các phương trình sau:

a) $$\frac{1-x}{x+2} - \frac{x+1}{3-x} + \frac{21}{x^2 - x - 6} = 2 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x+2} - \frac{x+1}{3-x} - \frac{21}{(3-x)(x+2)} = 2 \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ -x + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (1-x)(3-x) - (x+1)(x+2) - 21 = 2(6 + x - x^2)$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9 + \sqrt{337}}{4} \\ x = \dfrac{9 - \sqrt{337}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{337}}{4}$

b) $$\frac{3}{x-2} + \frac{x-2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(3x-2)(3x+2)}{x^3 - 8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x-2} + \frac{x-2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{9x^2 - 4}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x^2 + 2x + 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \forall x \end{cases} \Rightarrow x \neq 2$

phương trình (1) $\Rightarrow 3(x^2 + 2x + 4) + (x-2)^2 = 9x^2 - 4$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x + 12 + x^2 - 4x + 4 = 9x^2 - 4 \Rightarrow 5x^2 - 2x - 20 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{101}}{5} \\ x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{101}}{5} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đa cho có nghiệm: $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{101}}{5}$; $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{101}}{5}$

c) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Khi đó: $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{x+2}{3x-x^2} = \dfrac{10}{x(x^2-9)} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{x+2}{x^2-3x} = \dfrac{10}{x(x-3)(x+3)}$

$\Rightarrow 2x(x-3) + (x+2)(x+3) = 10 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + x^2 + 5x + 6 = 10$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -1$; $x = \dfrac{4}{3}$

Bài 15: Giải các phương trình sau:

a) $3x - 2|3 - x| = 1 \Leftrightarrow 2|3 - x| = 3x - 1$

+ Nếu $x \le 3$ phương trình trở thành

$2(3 - x) = 3x - 1 \Leftrightarrow 6 - 2x = 3x - 1 \Leftrightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{5}$ (thoả mãn $x \le 3$)

+ Nếu $x > 3$ phương trình trở thành

$2(-3 + x) = 3x - 1 \Leftrightarrow -6 + 2x = 3x - 1 \Leftrightarrow x = -5$

(Không thoả mãn vì $x > 3$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{7}{5}$

b) Lập bảng xét tổng:

x		−		$\frac{3}{2}$	
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$\lvert 2x-3\rvert$	$-2x+3$		$-2x+3$	0	$2x-3$
VT	$-3x+2$		$-x+4$		$3x-2$

Do đó ta có các trường hợp :

TH1: Nếu $x < -1$ phương trình trở thành $-3x + 2 = 5$

$\Leftrightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = 1$ (loại) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

TH2: Nếu $-1 \le x < \dfrac{3}{2}$ phương trình trở thành

$-x + 4 = 5 \Rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$ (thoả mãn)

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm: $x = -1$

TH3: Nếu $x \ge \dfrac{3}{2}$ phương trình trở thành

$3x - 2 = 5 \Leftrightarrow 3x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{3}$ (thoả mãn)

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{7}{3}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -1$; $x = \dfrac{7}{3}$

c) $||x| + 3| + 2x = 4$

Xét các trường hợp

<u>TH1</u>: Nếu $x < 0$: phương trình trở thành

$|-x + 3| + 2x = 4 \Leftrightarrow 3 - x + 2x = 4 \Rightarrow x = 1$ (loại vì $x < 0$)

<u>TH2</u>: Nếu $x > 0$: phương trình trở thành

$|x + 3| + 2x = 4 \Leftrightarrow x + 3 + 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ (thoả mãn)

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm: $x = \frac{1}{3}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \frac{1}{3}$.

Bài 16: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2x + 1 = 0$

nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$x^2 - 2x + 8 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2(x + \frac{1}{x}) + 8 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 2 - 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 6 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 + 5 = 0$$

$\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm vì $(t - 1)^2 + 5 \geq 5$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) $x^5 - x^4 + 6x^3 + 6x^2 - x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^5 + x^4 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^3 - 2x^2 - 2x + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^4(x + 1) - 2x^3(x + 1) + 8x^2(x + 1) - 2x(x + 1)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0$ (vì $x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2x + 1 \neq 0$ theo câu a) $\Rightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\Rightarrow x = 1$

c) $2x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 3x + 2 = 0$

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình: chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$2x^2 - 3x - 9 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3(x - \frac{1}{x}) - 9 = 0$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

Phương trình trở thành: $2(t^2+2)-3t-9=0 \Leftrightarrow 2t^2-3t-5=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Với $t=-1 \Rightarrow x-\dfrac{1}{x}=-1 \Rightarrow x^2-1=-x$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Với $t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 2x^2-2=5x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}; x_3=\dfrac{1}{2}; x_4=2$

d) $2x^4-21x^3+34x^2+105x+50=0$

Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$2x^2-21x+34+105\frac{1}{x}+\frac{50}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2(x^2+\frac{25}{x^2})-21(x-\frac{5}{x})+34=0$$

Đặt $t=x-\dfrac{5}{x} \Rightarrow x^2+\dfrac{25}{x^2}=t^2+10$

phương trình đã cho trở thành:

$$2(t^2+10)-21t+34=0 \Leftrightarrow 2t^2-21t+54=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=6 \\ t_2=\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$$

Với $t=6 \Rightarrow x-\dfrac{5}{x}=6 \Leftrightarrow x^2-5=6x \Leftrightarrow x^2-6x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3-\sqrt{14} \\ x=3+\sqrt{14} \end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{9}{2} \Rightarrow x-\dfrac{5}{x}=\dfrac{9}{2} \Rightarrow 2x^2-10=9x \Leftrightarrow 2x^2-9x-10=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9-\sqrt{161}}{4} \\ x=\dfrac{9+\sqrt{161}}{4} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x_{1,2}=3\pm\sqrt{14}; x_{3;4}=\dfrac{9\pm\sqrt{161}}{4}$

Bài 17: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x-5}=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5\geq 0 \\ 3x-5=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{5}{3} \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow x=6$

Vậy phương trình có nghiệm $x=6$

b) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}=2$

$\sqrt{x-1}=2+\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-1=(2+\sqrt{x+2})^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x-1=4+4\sqrt{x+2}+x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ 4\sqrt{x+2}=-7 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

c) $\sqrt{4x^2-12x+9}+2x=9 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-3)^2}+2x=9 \Leftrightarrow |2x-3|=9-2x$ (1)

+ Nếu $x\geq \dfrac{3}{2}$ phương trình (1): $2x-3=9-2x \Rightarrow x=3$ (thoả mãn)

+ Nếu $x<\dfrac{3}{2}$ phương trình (1): $-2x+3=9-2x \Rightarrow 3=9$ (vô lý)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=3$

d) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2+4x+1}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(2x+1)^2}=5 \Leftrightarrow |x-2|+|2x+1|=5$ (2)

Lập bảng xét tổng

x		$-\frac{1}{2}$		2	
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$		$2-x$	0	$x-2$
$2x+1$	$-2x-1$	0	$2x+1$		$2x+1$
VT	$-3x+1$		$x+3$		$3x-1$

+ Nếu $x<-\dfrac{1}{2}$ phương trình (2) là: $-3x+1=5 \Rightarrow x=-\dfrac{4}{3}$ (TM)

+ Nếu $-\dfrac{1}{2}\leq x<2$ phương trình (2) là: $x+3=5 \Rightarrow x=2$ (loại)

+ Nếu $x\geq 2$ phương trình (2) là: $3x-1=5 \Rightarrow x=2$ (TM)

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=-\dfrac{4}{3}$; $x=2$

e) $\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2}+\sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2}=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-3}-1)^2}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}+1+\left|\sqrt{x-3}-1\right|=3 \quad (3).$

điều kiện: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

+ Nếu $x \geq 4$ phương trình (3) là: $\sqrt{x-3}+1+\sqrt{x-3}-1=3$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}=3 \Leftrightarrow 4(x-3)=9 \Rightarrow x=\dfrac{21}{4}$ (TM)

+ Nếu $3 \leq x \leq 4$ phương trình (3) là:
$\sqrt{x-3}+1-\sqrt{x-3}+1=3 \Rightarrow 2=3$ (vô lý)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{21}{4}$

g) $\sqrt{2x-1+\sqrt{4x-3}}+\sqrt{2x-1-\sqrt{4x-3}}=4\sqrt{2}$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1+\sqrt{4x-3} \geq 0 \\ 2x-1-\sqrt{4x-3} \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \end{cases}$ (*)

Bình phương 2 vế của (1) ta được:

$2x-1+\sqrt{4x-3}+2x-1-\sqrt{4x-3}+2\sqrt{4x^2-8x+4}=32$

$\Leftrightarrow 4x-2+4\sqrt{(x-1)^2}=32 \Leftrightarrow 2|x-1|=17-2x$

+ Nếu $x \geq 1: 2x-2=17-2x \Leftrightarrow 4x=19 \Rightarrow x=\dfrac{19}{4}$ nghiệm $x=\dfrac{19}{4}$ thoả mãn điều kiện trên.

+ Nếu $x<1: 2-2x=17-2x \Leftrightarrow 0=15$ Vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{19}{4}$.

f) $\sqrt{3x+2}-5=x \Leftrightarrow \sqrt{3x+2}=x+5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 3x+2=x^2+10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2+7x+23=0 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

i) $\sqrt{2x+9}=\sqrt{25-x}-\sqrt{3x+4} \Leftrightarrow \sqrt{2x+9}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{25-x}$

điều kiện $\begin{cases} 2x+9 \geq 0 \\ 3x+4 \geq 0 \\ 25-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{9}{2} \\ x \geq -\dfrac{4}{3} \\ x \leq 25 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{4}{3} \leq x \leq 25$

Bình phương cả 2 vế của phương trình ta được

$$2\sqrt{(2x+9)(3x+4)} + 2x + 9 + 3x + 4 = 25 - x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6x^2 + 35x + 36} + 5x + 13 = 25 - x \Leftrightarrow \sqrt{6x^2 + 35x + 36} = 6 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x \geq 0 \\ 6x^2 + 35x + 36 = (6-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 3x^2 - 71x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 0; x = \frac{71}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

k) $\sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} = x^2 - 10x + 27$ (3)

Điều kiện: $\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky cho 4 số: $1; \sqrt{6-x}; 1; \sqrt{x-4}$ π Ta có:

$$(\sqrt{6-x} + \sqrt{x-4})^2 \leq 2(6 - x + x - 4) = 4 \Rightarrow \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} \leq 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{6-x} = \sqrt{x-4}$

Mặt khác: $x^2 - 10x + 27 = x^2 - 10 + 25 + 2 = (x-5)^2 + 2 \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi $x - 5 = 0$

Để phương trình (3) xảy ra thì $\begin{cases} \sqrt{6-x} = \sqrt{x-4} \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

Bài 18: Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình:

1) $2x + 13y = 156$

Dùng phương pháp I - Đáp số: $x = 13t$; $y = 12 - 2t$; $t \in Z$

2) $3xy + x - y = 1$

Dùng phương pháp II - Đáp số: (1; 0); (0; −1)

3) $2x^2 + 3xy - y = 1$

Dùng phương pháp II - Đáp số: (3; −1); (−3; 1)

4) $x^3 - y^3 = 91$

Dùng phương pháp II - Đáp số: (6; 5); (−5; −6); (4; −3); (3; −4)

5) $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Dùng phương pháp III - Đáp số: (6; 8); (4; 0); (8; 8); (2; 0)

Bài 19: Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên. Biết rằng f(1). f(2) = 35.

Chứng minh rằng f(x) không có nghiệm nguyên.

Dùng phương pháp phản chứng, rồi dùng phương pháp II

V- HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}(2x-3)(y+5)=2xy\\(x-3)(3y+1)=3xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2xy+10x-3y-15=2xy\\3xy+x-9y-3=3xy\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}10x-3y=15\\x-9y=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{42}{29}\\y=-\dfrac{5}{29}\end{cases}$ Vậy hệ có nghiệm $(\dfrac{42}{29};-\dfrac{5}{29})$

b) $\begin{cases}5x+2y=3 \ (**)\\3|x|-7y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}35x+14y=21 & (1)\\6|x|-14y=2 & (2)\end{cases}$

Cộng (1) với (2): $35x+6|x|=23$ (*)

- Nếu $x \geq 0$ phương trình (*): $41x=23 \Rightarrow x=\dfrac{23}{41}$ (thoả mãn $x \geq 0$)

  Thay vào (**) ta được: $y=\dfrac{4}{41}$

- Nếu $x<0$ phương trình (*): $29x=23 \Rightarrow x=\dfrac{23}{29}$ (loại vì $x<0$)

  Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(\dfrac{23}{41};\dfrac{4}{41})$

c) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}y=4 \ (2')\\\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{4}y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{8}x-\dfrac{1}{4}y=3 & (3)\\\dfrac{2}{15}x+\dfrac{1}{4}y=\dfrac{2}{3} & (4)\end{cases}$

Cộng (3) với (4): $\dfrac{61}{120}x=\dfrac{11}{3} \Rightarrow x=\dfrac{440}{61}$

Thay vào phương trình (2') ta được: $y=-\dfrac{24}{61}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(\dfrac{440}{61};\dfrac{-24}{61})$

d) ĐKXĐ: $y \neq 1$; $y \neq -\dfrac{3}{2}$

$\begin{cases}\dfrac{2x}{2y+3}-\dfrac{x}{y-1}=2\\\dfrac{x}{y-1}-\dfrac{2x}{2y-3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(\dfrac{2}{2y+3}-\dfrac{1}{y-1})=2\\x(\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{2}{2y-3})=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-5x}{(2y+3)(y-1)}=2 & (1)\\\dfrac{-x}{(2y-3)(y-1)}=1 & (2)\end{cases}$

từ (2) $\Rightarrow \dfrac{-x}{y-1} = 2y - 3$ thế vào (1) ta được

$$\frac{5(2y-3)}{2y+3} = 2 \Rightarrow 6y = 21 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$$

thay y vào (1): $\quad = -(2.\frac{21}{6} - 3)(\frac{21}{6} - 1) = -10$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-10; \frac{7}{2})$ thoả mãn ĐK

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{6x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3y} = \dfrac{1}{4} \quad (1) \\ \dfrac{5}{18x} + \dfrac{1}{3y} = \dfrac{2}{9} \quad (2) \end{cases}$ ĐK: $x \neq 0$; $y \neq 0$

Trừ từng vế của phương trình (1) cho phương trình (2): $\dfrac{1}{18x} = \dfrac{1}{36} \Rightarrow x = 2$

thay x = 2 vào (1) ta được: y = 4.

Vậy hệ có nghiệm (2; 4). thoả mãn ĐK

g) ĐK: $x \neq \pm 2$; $y \neq -1$ (*) .

ta có: $\begin{cases} \dfrac{3y+5}{y+1} + \dfrac{2x+3}{x+2} = 1 \\ \dfrac{y+2}{y+1} + \dfrac{5-2x}{x-2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \dfrac{2}{y+1} + 2 - \dfrac{1}{x+2} = 1 \\ 1 + \dfrac{1}{y+1} - 2 + \dfrac{1}{x-2} = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y+1} - \dfrac{1}{x+2} = -4 \\ \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{x-2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y+1} - \dfrac{1}{x+2} = -4 \quad (1) \\ \dfrac{2}{y+1} + \dfrac{2}{x-2} = -4 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (2) trừ (1) theo vế: $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = 0 \Rightarrow \dfrac{3x+2}{x^2-4} = 0$

$\Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ (Thoả mãn (*))

thay vào (1): $\dfrac{2}{y+1} = -4 + \dfrac{1}{-\frac{2}{3} + 2} \Rightarrow y = \dfrac{-21}{13}$ (Thoả mãn (*))

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(\dfrac{-2}{3}; \dfrac{-21}{13})$

Bài 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -17 & (1) \\ 5x - 3y + 6z = 3 & (2) \\ 3x + 5y + 2z = 21 & (3) \end{cases}$$

Nhân (1) với (-6) rồi cộng với phương trình (2) theo vế; nhân (1) với (-2) rồi cộng với phương trình (3) theo vế ta được:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -17 \\ -7x + 21y = 105 \\ -x + 13y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + z = -17 & (4) \\ x - 3y = -15 & (5) \\ -x + 13y = 55 & (6) \end{cases}$$

Cộng (5); (6) ta được: $10y = 40 \Rightarrow y = 4$

thay vào (5): $x = -15 + 12 = -3$

thay $y = 4$; $x = -3$ vào (4): $z = 5$

Vậy hệ có nghiệm $(-3 ; 4 ; 5)$.

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 & (1) \\ mx - y = m + 1 & (2) \end{cases}$

a) Với m = 3 hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x - 3y = 0 & (1') \\ 3x - y = 4 & (2') \end{cases}$

từ (1'): $x = 3y$ thay vào (2'): $8y = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Vậy với m = 3 hệ phương trình có nghiệm $(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2})$

b) Từ (1): $x = my$ thay vào (2)

$m^2y - y = m + 1 \Rightarrow y(m^2 - 1) = m + 1$ (3)

Để hệ có 1 nghiệm nguyên thì $m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 1$

khi đó từ (3): $y = \frac{m+1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m - 1}$

để $y \in Z$ thì $m - 1$ phải là ước của 1. Do đó:

+ Nếu $m - 1 = 1 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$

+ Nếu $m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 0$

Vậy với m = 0 ; m = 2 hệ có 1 nghiệm là cặp số nguyên.

c) Từ (3), để hệ có 1 nghiệm là cặp số dương thì

$$\begin{cases} m^2 - 1 \neq 0 \\ x = my > 0 \\ y = \dfrac{m+1}{m^2 - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ m > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy để hệ có 1 nghiệm là cặp số dương (x; y) thì m > 1.

Bài 4:

a) Với m = –1 hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{y}{y+1} = 0 & (1') \\ 2x + y = 3 & (2') \end{cases}$

ĐK: $x \neq 2$; $y \neq -1$

Từ (2'): $y = 3 - 2x$ thay vào (1'):

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3-2x}{4-2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{2x-4} + \frac{3-2x}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2x-4} = 0 \quad \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện: $x \neq 2$; $y \neq m$

Từ (2): $x = \dfrac{2-m+my}{2}$

Thay vào (1): $\dfrac{1-m+my}{2\left(\dfrac{2-m+my}{2} - 2\right)} - \dfrac{y}{y-m} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-m+my}{my-m-2} - \dfrac{y}{y-m}$

$\Rightarrow 4y - m^2y - 2m + m^2 = 0 \Leftrightarrow (m^2-4)y = m^2 - 2m \qquad (*)$

+ Nếu $m^2 - 4 = 0 \rightarrow m = \pm 2$

  Với m = 2 phương trình (*): 0 = 0 đúng với mọi x

  Vậy m = 2 hệ phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in R \\ y = x \end{cases}$.

  Với m = –2 phương trình (*): 0 = 8 vô nghiệm

  Vậy m= –2 hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \rightarrow m \neq \pm 2$. phương trình (*) có nghiệm:

$$y = \frac{m^2-2m}{m^2-4} = \frac{m(m-2)}{(m+2)(m-2)} = \frac{m}{m+2}$$

Để $\begin{cases} y = \dfrac{m}{m+2} \\ x = \dfrac{2-m+my}{2} \end{cases}$ là nghiệm của hệ thì

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m+2} \neq m \\ \dfrac{2-m+\dfrac{m^2}{m^2+2}}{2} \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-m^2-m}{m+2} \neq 0 \\ \dfrac{2}{m+2} \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \\ m \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Vậy: + m = 2 hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in R \\ y = x \end{cases}$

+ $m \neq \pm 2$; $m \neq 0$; $m \neq 1$ hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} y = \dfrac{m}{m+2} \\ x = \dfrac{2}{m+2} \end{cases}$

+ $m = -2$; $m = -1$; $m = 0$ hệ vô nghiệm.

Bài 5: Cho hệ $\begin{cases} \dfrac{(1-m)x}{2} = my + 1 & (1) \\ 2mx + (m-1)y = m-1 & (2) \end{cases}$

Với $m = 0$ hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Với $m \neq 0$

Từ (1) $\Rightarrow y = (\dfrac{(1-m)x}{2} - 1)\dfrac{1}{m}$ thay vào (2):

$2mx + (\dfrac{(1-m)x}{2} - 1)\dfrac{m-1}{m} = m - 1$

$\Leftrightarrow 2mx - \dfrac{(1-m)^2 x}{2m} + \dfrac{1-m}{m} = m - 1$

$\Leftrightarrow 4m^2x - (1 - 2m + m^2)x + 2 - 2m = 2m^2 - 2m$

$\Leftrightarrow (3m^2 + 2m - 1)x = 2m^2 - 2$

$\Leftrightarrow (m+1)(3m-1)x = 2(m-1)(m+1)$ (3)

a) Ta thấy $(m+1)(3m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$

Với $m = -1$ phương trình (3) trở thành: $0x = 0$ đúng với mọi x

Vậy $m = -1$ hệ (I) có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in R \\ y = 1 - x \end{cases}$

Với $m = \dfrac{1}{3}$ phương trình (3)trở thành : $0x = \dfrac{-19}{6}$ Vô nghiệm

Vậy $m = \dfrac{1}{3}$ hệ (I) vô nghiệm.

- Nếu $(m+1)(3m-1) \neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq -1 \\ m \neq \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$

Khi đó phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2(m-1)}{3m-1}$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2(m-1)}{3m-1} \\ y = \dfrac{m+1}{1-3m} \end{cases}$

Vậy: Với m = –1 hệ (I) có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in R \\ y = 1 - x \end{cases}$

Với m = 0 hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Với $m = \dfrac{1}{3}$ hệ (I) vô nghiệm.

Với $m \neq 0$; $m \neq \dfrac{1}{3}$ và $m \neq -1$

hệ (I) có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{2(m-1)}{3m-1} \\ y = \dfrac{m+1}{1-3m} \end{cases}$

b) Để phương trình có nghiệm duy nhất x < 0 ; y < 0 thì: $m \neq 0$; $m \neq \dfrac{1}{3}$ và

$m \neq -1$ và $\begin{cases} \dfrac{2(m-1)}{3m-1} < 0 \\ \dfrac{m+1}{1-3m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} < m < 1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < m < 1$

Vậy để hệ có nghiệm duy nhất x < 0; y < 0 thì $\dfrac{1}{3} < m < 1$.

Bài 6: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ (x + 2y)^2 - 4xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2xy = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ x ; 2y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 4X + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (X-2)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 2$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (2; 1)

b) ĐK: $x \neq 0$; $y \neq 0$ ta có

$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \\ X = 3 \end{array}\right.$

Do đó hệ có 2nghiệm là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + xy = 11 & (1) \\ (x^2 + y^2) + 3(x + y) = 28 & (2) \end{cases}$

Từ (1): $x + y = 11 - xy$ thế vào (2)

$x^2 + y^2 + 33 - 3xy = 28 \Rightarrow (x + y)^2 - 5xy = -5$ (3)

Thay $x + y = 11 - xy$ vào (3):

$(11 - xy)^2 - 5xy = -5 \Rightarrow x^2y^2 - 27xy + 126 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 21 \\ xy = 6 \end{array}\right.$

+ Với $xy = 21 \Rightarrow x + y = -10 \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình:

$X^2 + 10X + 21 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = 3 \\ X = 7 \end{array}\right.$

Nên hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$

+ Với $xy = 6 \Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình:

$X^2 - 5X + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \\ X = 3 \end{array}\right. \Rightarrow$ hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x; y) là:
(3; 7); (7; 3); (2; 3); (3; 2)

d) ĐK: $x \neq 0$; $y \neq 0$ ta có hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y & (1) \\ y^2 - 3xy = 4x & (2) \end{cases}$

Trừ (1) cho (2) vế với vế ta được:

$x^2 - y^2 = 4y - 4x \Leftrightarrow (x - y)(x + y) - 4(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y = 4 \end{array}\right.$

+ Với $x = y$ thay vào (1): $x^2 - 3x^2 = 4x$

$\Leftrightarrow -2x^2 = 4x \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$, do $x \neq 0$

Nên hệ có nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$

+ Với $x + y = 4 \Rightarrow x = 4 - y$ thay vào (1):

$$(4-y)^2 - 3(4-y)y = 4y \Leftrightarrow 4y^2 - 24y + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3-\sqrt{5} \\ y = 3+\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Từ đó ta có hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 1+\sqrt{5} \\ y = 3-\sqrt{5} \end{cases}; \begin{cases} x = 1-\sqrt{5} \\ y = 3+\sqrt{5} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm (x; y) đó là:

$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{5} \\ y = 3-\sqrt{5} \end{cases}; \begin{cases} x = 1-\sqrt{5} \\ y = 3+\sqrt{5} \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

e) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x & (1) \\ 2y^2 + xy = 3y & (2) \end{cases}$

trừ (1) cho (2) ta được:

$2(x-y)(x+y) = 3(x-y) \Leftrightarrow 2(x-y)(x+y) - 3(x-y) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(2x+2y-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 2x + 2y = 3 \end{array}\right.$

\+ Với $x = y$ thay vào (1) ta có: $2y^2 + y^2 = 3y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$

Hệ có nghiệm (0 ; 0) và (1 ; 1).

\+ Với $2x + 2y = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3-2y}{2}$

Thay vào (2) ta được : $2y^2 + \dfrac{3-2y}{2}y = 3y \Leftrightarrow y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3 \end{array}\right.$

Hệ có nghiệm $(\frac{3}{2}\,;0)$ và $(-\frac{3}{2}\,;3)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x; y) là:

$$(0\,;0);\ (1\,;1)\,;\ (\tfrac{3}{2}\,;0);\ (-\tfrac{3}{2}\,;3).$$

VI. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: Đổi 18 phút = $\dfrac{3}{10}$ giờ.

12 phút = $\dfrac{1}{5}$ giờ.

Đoạn đường đi với vận tốc 60km/h là: $60.\dfrac{3}{10} = 18$ (km)

Gọi quãng đường AB là x (x > 18); tính bằng km.

Thời gian dự định là $\frac{x}{60}$ giờ.

Đoạn đường đi với vận tốc 50km/h là $x - 18$.

Thời gian đi đoạn đường còn lại là: $\frac{x-18}{50}$

Thời gian đi trong thực tế là: $\frac{3}{10} + \frac{x-18}{50} = \frac{x-3}{50}$

Vì xe đến nơi chậm $\frac{1}{5}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{x-3}{50} = \frac{x}{60} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow 6x - 18 = 5x + 60 \Leftrightarrow x = 78 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy quãng đường AB dài 78km.

Bài 2: Gọi năng suất dự kiến theo kế hoạch ban đầu là x chi tiết máy/ngày (đk $x \in N^*$). Số chi tiết máy sản xuất trong 5 ngày đầu là 5x.

Năng suất những ngày sau là $x + 10$.

Thời gian sản xuất số chi tiết máy còn lại và thêm 50 chi tiết vượt mức là:

$$\frac{3500 - 5x + 50}{x + 10}$$

Ta có phương trình: $\frac{3500}{x} = \frac{3550 - 5x}{x+10} + 5 + 1 \Leftrightarrow \frac{3500}{x} = \frac{3610}{x+10}$

$3500x + 35000 = x^2 + 3610x \Rightarrow x^2 + 110x - 35000 = 0$

$\Delta' = 55^2 + 35000 = 38025 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 195$

$x = -110 + 195 = 95$ (TMĐK)

$x_2 = -110 - 195 < 0$ (không TMĐK)

Vậy năng suất dự kiến theo kế hoạch ban đầu là 95 chi tiết máy/ ngày.

Bài 3: Gọi thời gian vòi 1 chảy 1 mình đầy bể là x.

Gọi thời gian vòi 2 chảy 1 mình đầy bể là y ($x ; y > 0$)

Trong 1 giờ, vòi 1 chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi 2 chảy được $\frac{1}{y}$ bể. Hai vòi cùng chảy thì 4 giờ bể đầy nên 1 giờ cả 2 vòi chảy được $\frac{1}{4}$ bể. Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Trong 2 giờ, vòi 2 chảy được: $2.\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$bể.

Trong 6 giờ, vòi 2 chảy được: $6.\frac{1}{y}$ bể.

Ta có phương trình: $2.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{6}{y}=1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} & (1) \\ 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{6}{y}=1 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta có: $2.\frac{1}{4}+\frac{6}{y}=1 \Leftrightarrow \frac{6}{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=12$ (TMĐK)

Thay vào (1) ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{6} \Rightarrow x=6$ (TMĐK)

Vậy thời gian để vòi 1 chảy 1 mình đầy bể là 6 giờ.

thời gian để vòi 2 chảy 1 mình đầy bể là 12 giờ.

Bài 4: Gọi x là thời gian ôtô đi để đến vị trí cách đều người đi xe đạp và người đi xe máy (x tính bằng giờ, x > 0). Trên hình các điểm Đ (chỉ vị trí người đi xe đạp), chữ O(chỉ vị trí người đi ôtô), chữ M (chỉ vị trí người đi xe máy) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta có bảng tóm tắt sau:

	Giờ khởi hành	Thời gian đã đi để đến vị trí như h.vẽ	Vận tốc	Quãng đường đã đi để đến vị trí như h.vẽ
Ôtô	8 giờ	x giờ	40 km/h	4x km
Xe đạp	6 giờ	(x + 2) giờ	10 km/h	10(x + 2) km
Xe máy	7 giờ	(x + 1) giờ	30 km/h	30(x + 1) km

Theo đầu bài ta có phương trình: $40x - 10(x+2) = 30(x+1) - 40x$

Giải ra tìm được: $x = \frac{5}{4}$ giờ (thoả mãn điều kiện)

Kết luận: 8 giờ + $\frac{5}{4}$ giờ = 9 giờ 15' thì ôtô cách đều người đi xe đạp và người đi xe máy.

Bài 5: Ta phân tích bài toán bằng bảng tóm tắt sau và lập hệ phương trình:

	S (km)	V (km/h)	t(giờ)
Dự định	x		Y
Nếu xe chạy chậm	x	35	y + 2
Nếu xe chạy chậm	x	30	y – 1

ĐK: $x > 0;\ y > 1$

$\Rightarrow x = 35(y+2)$ (1)

$\Rightarrow x = 50(y-1)$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = 35(y + 2) \\ x = 50(y - 1) \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x = 350 \\ y = 8 \end{cases}$ (t/m đ/k)

Vậy quãng đường AB là 350 km và điểm xuất phát của ôtô tại A là:

$12 - 8 = 4$(giờ)

Bài 6:

Lập bảng phân tích:

	Thời gian đầy bể	Năng suất chảy 1 giờ
Hai vòi	$\frac{24}{5}$ (h)	$\frac{5}{24}$ (bể)
Vòi I	X (h)	$\frac{1}{x}$ (bể)
Vòi II	Y (h)	$\frac{1}{y}$ (bể)

ĐK : $x, y > \frac{24}{5}$

Lập hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} & (1) \\ \frac{9}{x} + \frac{5}{24}.\frac{6}{5} & (2) \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}$ (t/m đk)

Vậy ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau 8 giờ đầy bể.

Bài 7:

Gọi số tiền phải trả cho mỗi loại hàng không kể thuế VAT lần lượt là x và y (triệu đồng) (ĐK $x, y > 0$)

Vậy loại hàng thứ nhất với mức thuế 10% phải trả $\frac{110}{100}x$ (triệu đồng)

Loại hàng thứ hai với mức thuế 10% phải trả $\frac{108}{100}y$ (triệu đồng)

Ta có phương trình: $\frac{110}{100}x + \frac{108}{100}y = 2,17$ (1)

Cả 2 loại hàng với mức thuế 9% phải trả: $\frac{109}{100}(x + y)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}110x+108y=217\\109(x+y)=218\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}110x+108y=217\\x+y=2\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases}x=0,5\\y=1,5\end{cases}$ (t/m đk)

Vậy số tiền phải trả cho mỗi loại hàng là 0,5 triệu và 1,5 triệu.

Bài 8: Gọi số lớn là x và số nhỏ là y ($x, y \in N$: $y > 124$)

Theo đầu bài tổng 2 số bằng 1006 ta có phương trình: $x + y = 1006$ (1)

Vì lấy số lớn chia cho số nhỏ được thương là 2 và số dư là 124 ta có phương trình: $x = 2y + 124$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=1006\\x=2y+124\end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases}x=712\\y=294\end{cases}$ (t/m đk)

Vậy số lớn là 712; số nhỏ là 294

VII. BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, CỰC TRỊ ĐẠI SỐ

VII.1 - Bất đẳng thức

Bài 1: Theo định lý Pitago ta có $1 = b^2 + c^2$ và $1 > b$; $1 > c$. Vậy $1 = b^2 + c^2 > b^3 + c^3$

Bài 2: a) Vì $x^2 - x + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x

Nên $\frac{7x^2-15x+12}{x^2-x+1} \ge 3 \Leftrightarrow 7x^2-15x+12 \ge 3x^2-3x+3$

$\Leftrightarrow 4x^2-12x+9 \ge 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \ge 0$ (**Đúng**)

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$

b) Ta có: $a^3+b^3 \le ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) \le ab(a+b)$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right) \le 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \le 0$

Đúng vì $a+b<0$ và $(a-b)^2 \ge 0$

c) Ta có: $0 > -2 = x^3+y^3 = (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$

Mà $x^2-xy+y^2 = \left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \ge 0$ Nên $x+y<0$.

Mặt khác: $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2 \ge xy$

$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) \le xy(x+y)$

$\Leftrightarrow xy(x+y) \ge -2 \Leftrightarrow 3xy(x+y) \ge -6$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \ge -8 \Leftrightarrow (x+y)^3 \ge -8 \Leftrightarrow x + y \ge -2$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = -1$

d) Tương tự câu c

Bài 3:

a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky ta có :

$$(2a+3b)^2 \le (a^2+b^2)(2^2+3^2) = 13(a^2+b^2) = (a^2+b^2)^2$$

$\Rightarrow |2a+3b| \le a^2 + b^2 \Rightarrow 2a + 3b \le a^2 + b^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a = 2$; $b = 3$

b) Ta có: $5(x^2+y^2) - 4(x-y) + 2(xy+1) \ge 0$

$\Rightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) \ge 0$

$\Rightarrow (2x-1)^2 + (2y+1)^2 + (x+y)^2 \ge 0$

Điều này luôn luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$

Bài 4:

a) Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \ge \frac{4}{a+b}$ (*)

Vì a, b > 0; a + b > 0 nên: (*) $\Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$ (Bất đẳng thức Cosi cho 2 số)

Vậy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$ với mọi a , b > 0

b) Đặt $(x-1)^2 = t$ thì $t > 0$ và $x(2-x) = -x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 = 1 - t$

Vì $0 < x < 2$ nên $1 - t > 0$

Áp dụng bất đẳng thức ở câu (a) cho hai số dương t và $1 - t$ ta được

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x(2-x)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \ge \frac{4}{t+1-t} = 4$$

Mà $4 - x^2 < 4$ do $0 < x < 2$. Vậy: $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x(2-x)} > 4 - x^2$

Bài 5: a) Ta có $\sqrt{a} > \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a} > \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$

Bình phương hai vế của bất đẳng thức ta được:

$4a > 2a + 2\sqrt{a^2 - b^2} \Leftrightarrow a > \sqrt{a^2 - b^2} \Leftrightarrow a^2 > a^2 - b^2 \Leftrightarrow 0 > -b^2$ **Đúng**

b) Áp dụng câu a với a = 2006 và b = 1 ta có:

$2\sqrt{2006} > \sqrt{2007} + \sqrt{2005} \Leftrightarrow \sqrt{2006} - \sqrt{2005} > \sqrt{2007} - \sqrt{2006}$

VII.2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

Bài 1:

a) $A = (x-3)^2 - 8$ nên min A = –8 khi x = 3

b) $B = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (3x-2y)^2 + 2007$

Nên Min B = 2007 Khi x = 2; y = 3

c) Điều kiện: $x < -\frac{1}{2}$ hoặc $x > 0$ (*).

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có:

$$C = \sqrt{\frac{x}{2x+1}} + \sqrt{\frac{2x+1}{x}} \ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{x}{2x+1}}\sqrt{\frac{2x+1}{x}}} = 2$$

Vậy MinC = 2 khi $\sqrt{\frac{x}{2x+1}} = \sqrt{\frac{2x+1}{x}} \Leftrightarrow x^2 = (2x+1)^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với (*) ta được x = –1. Vậy Min C = 2 khi x = –1

d) Từ $\sqrt{3}x = \sqrt{5}y + 2 \Rightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 2$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxky ta có:

$$\left(\sqrt{3}x.1 - \sqrt{5}y.1\right)^2 \le \left(3x^2 + 5y^2\right)(1+1) \Leftrightarrow 3x^2 + 5y^2 \ge 2$$

Vậy MinD = 2 khi $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Bài 2: a) $M = 11 - (x-2)^2$. Nên Max M = 11 khi x = 2

b) $N = 2005 - (x-1)^2 - (2y+1)^2 - (x-2y)^2$

Nên MaxN = 2005 khi x = 1; $y = -\frac{1}{2}$

c) $P = (x+1)(2-x) \le \left(\frac{x+1+2-x}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ (Bất đẳng thức Côsi cho 2 số)

Vậy MaxP = $\frac{9}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$

Bài 3: Ta có: $P = \frac{3x-1}{x^2+1} \Leftrightarrow P\left(x^2+1\right) = 3x - 1 \Leftrightarrow Px^2 - 3x + P + 1 = 0$ (*)

Ta thấy P = 0 khi $x = \frac{1}{3}$

Với $P \ne 0$ thì giá trị của P phải thoả mãn cho phương trình (*) có nghiệm với :
Điều này tương đương với:

$$\Delta = 3^2 - 4P(P+1) \ge 0 \Leftrightarrow 4P^2 + 4P - 9 \le 0 \Leftrightarrow (2P+1)^2 \le 10$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{10} \le 2P + 1 \le \sqrt{10} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{10}+1}{2} \le P \le \frac{\sqrt{10}-1}{2}$$

Vậy $\mathrm{Max}(P) = \frac{\sqrt{10}-1}{2}$ khi $x = \frac{\sqrt{10}+1}{3}$, $\mathrm{Min}(P) = -\frac{\sqrt{10}+1}{2}$ khi $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$

VII.3 Bất phương trình

Bài 1:

a) $x \le \frac{5}{13}$;

b) $x > \frac{16m - m^2 - 4}{m^2 + 4}$;

c) $\frac{1}{5} \le x \le 1$;

d) $\left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x < \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Bài 2: a) $|x - 2| \ge 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 \le 0 \\ \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ (x-2)^2 \ge (2x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 3 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \le 1$$

b) Ta có: $1 + 2|x - 1| \le 3x - 5 \Leftrightarrow 2|x - 1| \le 3x - 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ (2x-2)^2 \le (3x-6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (3x - 6 - 2x + 2)(3x - 6 + 2x - 2) \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (x-4)(5x-8) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 4 \\ x \le \frac{8}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 4$$

c) Ta có: $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \ge 3x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \ge 0 \\ 3x + 2 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 \ge (3x+2)^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-2)(x-3) \ge 0 \\ x \le -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x^2 - 5x + 6 \ge 9x^2 + 12x + 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 2; x \ge 3 \\ x \le -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ 8x^2 - 17x + 10 \le 0 \end{cases} \quad (*) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \le -\frac{2}{3}$$

(Hệ (*) vô nghiệm do bất phương trình $8x^2$-17x +10 vô nghiệm)

d) $\sqrt{x^2-3x+2}<\sqrt{2x^2-5x+3}$

Ta có: $\sqrt{x^2-3x+2}<\sqrt{2x^2-5x+3}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+2\ge 0\\x^2-3x+2<2x^2-5x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1\\x\ge 2\end{array}\right.\\x^2-8x+1>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1\\x\ge 2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x\ge 4+\sqrt{15}\\x\le 4-\sqrt{15}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 4-\sqrt{15}\\x\ge 4+\sqrt{15}\end{array}\right.$$

e) Ta có: $\sqrt{3x^2+2x-1}\le x+1\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+2x-1\ge 0\\x+1\ge 0\\3x^2+2x-1\le x^2+2x+1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(3x-1)\ge 0\\x\ge -1\\x^2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -1\\x\ge \dfrac{1}{3}\end{array}\right.\\x\ge -1\\-1\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\\dfrac{1}{3}\le x\le 1\end{array}\right.$$

Bài 3:

a) Điều kiện $x\ge 0$. Ta có:

$x-6\sqrt{x}+8\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-4\right)\le 0\Leftrightarrow 2\le\sqrt{x}\le 4\Leftrightarrow 4\le x\le 16$

b) Ta có: $\dfrac{2x}{2x+1}-\dfrac{x}{x+2}<0\Leftrightarrow\dfrac{2x(x+2)-x(2x+1)}{(x+2)(2x+1)}<0$ (*)

$$\Leftrightarrow\frac{3x}{(x+2)(2x+1)}<0\Leftrightarrow x(x+2)(2x+1)<0$$

Ta có thể lập bảng xét dấu hoặc xét từng khoảng giá trị để giải

– Với $x>0$ thì (*) $\Leftrightarrow(x+2)(2x+1)<0\Leftrightarrow -2<x<-\dfrac{1}{2}$ không thoả mãn $x>0$

– Với $x<0$ thì (*) $\Leftrightarrow(x+2)(2x+1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\x>-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

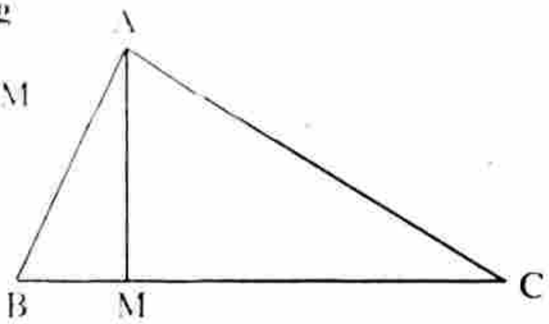
kết hợp với $x<0$ ta được $\left[\begin{array}{l}x<-2\\-\dfrac{1}{2}<x<0\end{array}\right.$

PHẦN THỨ HAI: HÌNH HỌC

I. ĐỊNH LÝ TALET – TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I.2. Định lý Talet – Tam giác đồng dạng

Bài 1:



Kéo dài AM lấy F sao cho AF = 2AM

Khi đó ADFE là hình bình hành.

$\Rightarrow DF = AE = AC$

$CF = AD = AB$

$\widehat{ADE} + \widehat{DAE} = 180^0$

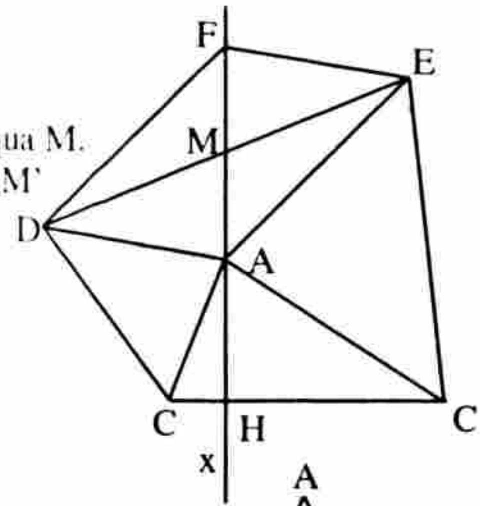
$\Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{AED} = \widehat{BAC}$

Các ΔADF và ΔBAC bằng nhau.

Suy ra $\widehat{DAM} + \widehat{ABC}$

Do vậy $\widehat{ABC} + \widehat{BAx} + \widehat{DAM} = 90^0$

Hay $Ax \perp BC$ tức là $Ax \equiv AH$. Hay AH đi qua M.



Bài 2: Từ D kẻ đường vuông góc với CD cắt CB tại M'

Gọi N là trung điểm của CM'

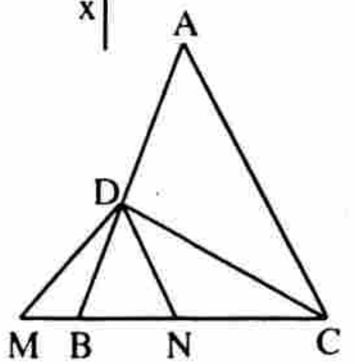
Vì Δ CDN cân tại N

nên $\widehat{DBN} = 2\widehat{DCN} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \Delta DBN$ cân tại D nên DB = DN

$\Rightarrow DB = \dfrac{1}{2}CM'$ do đó $M' \equiv M$

Hay $DM \perp CD$.



Bài 3: Từ ΔABM và ΔACM đồng dạng thì $AM \perp BC$.

Vì tỷ số đồng dạng bằng $\sqrt{3} \neq 1$

nên $\hat{B} \neq \hat{C}$

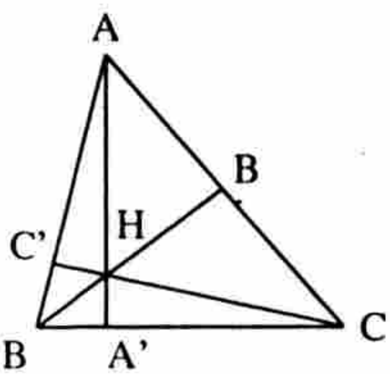
Do vậy $\hat{B} = \widehat{CAM}$; $\hat{C} = \widehat{BAM} \Rightarrow \hat{A} = 90^0$

Tỷ số đồng dạng bằng $\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \hat{B} = 60^0; \hat{C} = 30^0$

Vậy 3 góc của ΔABC là : 30^0 ; 60^0 và 90^0.

Bài 4:



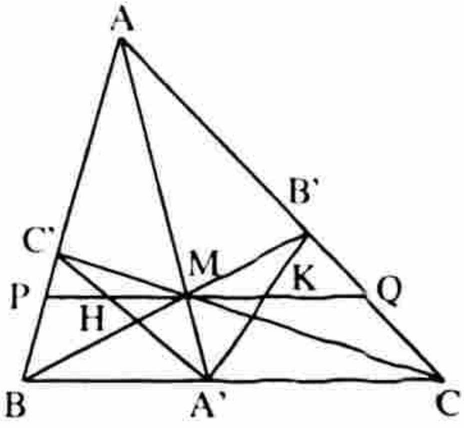
a. $\dfrac{HA'}{AA'} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

$\dfrac{HB'}{BB'} = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$; $\dfrac{HC'}{CC'} = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

b. $\Delta AB'H$ đồng dạng $\Delta BA'H \Rightarrow AH.HA' = HB.HB'$

Tương tự suy ra: HA.HA' = HB. HB' = HC. HC'

Bài 5: HK cắt AB, AC tại P, Q



Ta có: Theo định lý Talét

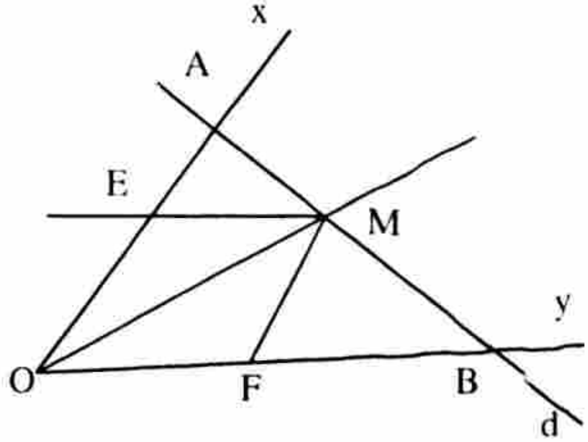
$\frac{MH}{MP}=\frac{CA'}{CB};\ \frac{MQ}{MK}=\frac{BC}{BA'}$

$\frac{MP}{MQ}=\frac{BA'}{CA'}$

$\Rightarrow \frac{MH}{MP}.\frac{MQ}{MK}.\frac{MP}{MQ}=\frac{CA'}{CB}.\frac{CB}{BA'}.\frac{BA'}{CA'}$

$\Rightarrow \frac{MH}{MK}=1 \Rightarrow MH=MK$

Bài 6: Qua M vẽ ME // Oy; MF // Ox.



Cắt Ox, Oy tại E và F

Thì OEMF là hình thoi.

Theo định lý Talét:

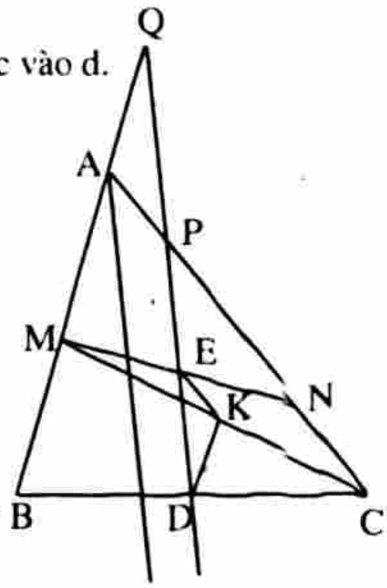
$\frac{OE}{OA}=\frac{BM}{AB};\frac{OF}{OB}=\frac{AM}{AB}$

$OE=OF$

Suy ra : $\frac{OE}{OA}+\frac{OE}{OB}=1$

$\Rightarrow OE(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{OE}$ không phụ thuộc vào d.

Bài 7: Gọi D, E, K là trung điểm của BC, MN, CM.



Ta có EK // AC; EK = $\frac{1}{2}$NC

DK // AB; DK = BM (t/c đường TB)

$\Rightarrow$ EK = DK $\Rightarrow$ Δ DEK cân.

Vậy DE tạo với

AB, AC các góc bằng nhau

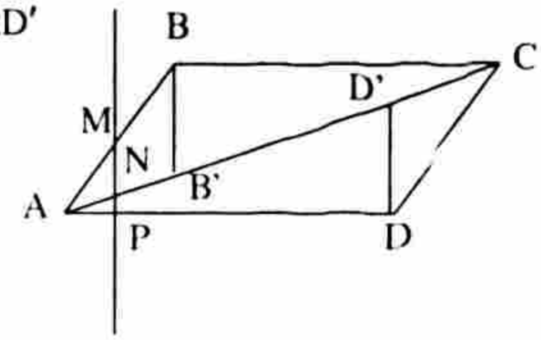
Hay DE // Ax (Ax là phân giác của $\widehat{A}$). D cố định.

Do đó DE cố định

Hay E luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.

Bài 8. Từ B, D kẻ BB'// DD'// d

Cắt AC tại, ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AB'};\frac{AP}{AD}=\frac{AN}{AD'}$

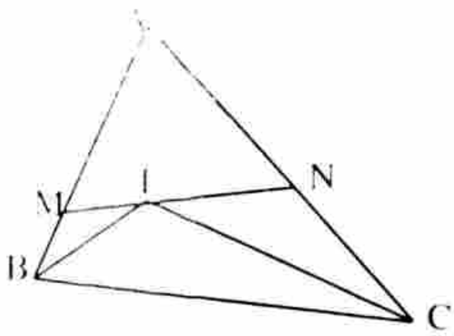


$\Rightarrow \frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AP}=\frac{AB'+AD'}{AN}$

mà Δ ABB' = Δ CDD' $\Rightarrow$ CD' = AB'

$\Rightarrow \frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AP}=\frac{AC}{AN}$

Bài 9: Vì BM.BC = BI^2 ⇒ $\frac{BM}{BI} = \frac{BI}{BC}$



Và $\widehat{IBM} = \widehat{IBC}$

⇒ Δ MBI đồng dạng với Δ IBC

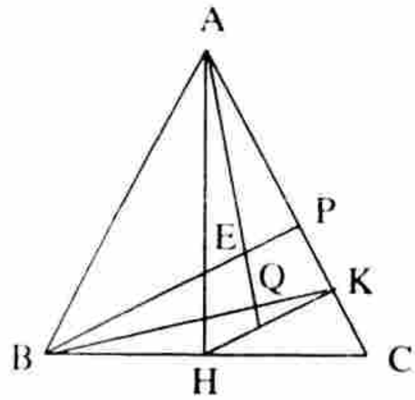
⇒ $\widehat{MIB} = \widehat{ICB}$

Tương tự $\widehat{NIC} = \widehat{IBC}$

$\widehat{MIB} + \widehat{NIC} + \widehat{BIC} = \widehat{IBC} + \widehat{BIC} + \widehat{BCI} = 180^0$

Hay M, I, N thẳng hàng.

Bài 10: Kẻ BP ⊥ AC,



Δ BPC đồng dạng Δ AKH

$\Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{HK}{CP} = \frac{HP}{CK}$

⇒ Δ AHM đồng dạng Δ BCK

Gọi E, Q là giao của AM và BK, AM và BP.

Xét Δ BQE và Δ APE có

$\widehat{EAP} = \widehat{EBQ}$; $\widehat{BEQ} = \widehat{AEP}$

⇒ $\widehat{APE} = \widehat{BQE} = 90^0$ Hay AM ⊥ BK.

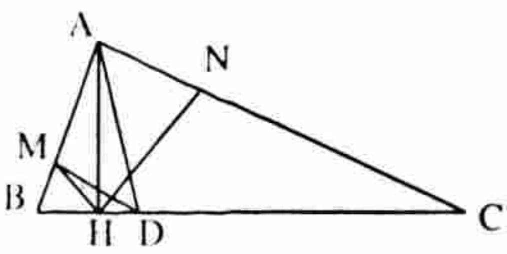
1.3 Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

Bài 1: Kéo dài DA và CB cắt nhau tại M

- Chứng minh M, E, F thẳng hàng
- Tam giác DMC vuông tại M
- Từ đó tính được $EF = \frac{b - a}{2}$

Bài 2: Áp dụng tính chất đường phân giác với các đường phân giác AD, HN, HM và hệ thức trong tam giác vuông ABC với đường cao AH ta được

$\frac{NC}{NA} = \frac{HC}{HA} = \frac{BC.HC}{BC.HA}$



$= \frac{AC^2}{AB.AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$

$\frac{MB}{MA} = \frac{DB}{DC}$

Do đó: ND // AB, MD // AC (Định lý ta lét)

Nên AMDN là hình chữ nhật

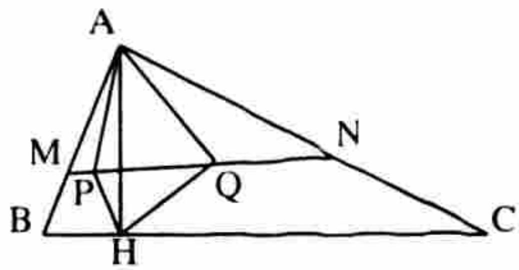
Lại có AD là phân giác của $\widehat{A}$ nên AMDN là hình vuông

Bài 3: Lấy M, N thuộc AB, AC sao cho AM = AN = AH

Kẻ phân giác góc BAH cắt MN tại P.

Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH

Dựa vào hai tam giác AMP và AHP bằng nhau



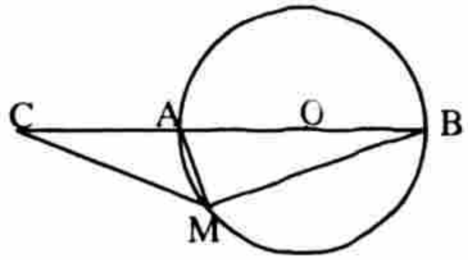
II. ĐƯỜNG TRÒN

II.1. Định nghĩa và sự xác định đường tròn

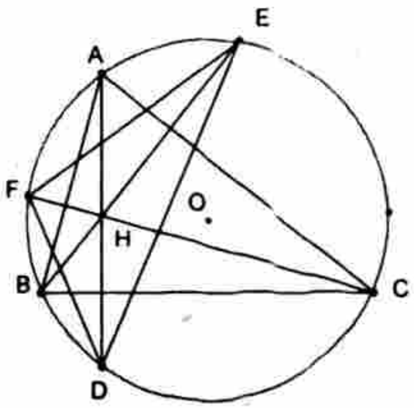
Bài 1: Nối OM, Ta có:

$CO - OM < CM < CO + OM$

hay $CA < CM < BC$



Bài 2: Ta chứng minh được 3 đường cao của ΔABC cũng là 3 đường phân giác của ΔDEF từ đó suy ra D, E, F $\in$ đường tròn ngoại tiếp ΔABC



Bài 3:

a) Ta có: Dễ dàng chứng minh được BD = CN

b) Kẻ trung tuyến AM ;

CO x (0) ≡ E

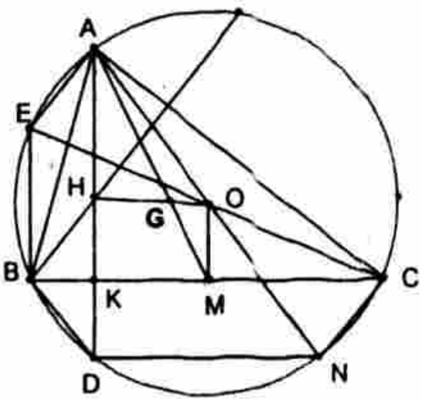
Ta có: $\widehat{EBC} = 90^o$

nên $BE \perp BC$ mà $AA_1 \perp BC$

$\Rightarrow BE \parallel AA_1$

Tương tự: $AE \parallel BH$

$\Rightarrow$ ◇AEBH là hình bình hành nên AH = BE



$DA \perp BC \Rightarrow OM \parallel BE$ nên OM là đường trung bình của Δ EBC

$\Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}BE$. Vậy $OM = \dfrac{1}{2}AH$

Ta có: $\dfrac{OM}{AH} = \dfrac{GM}{GA} = \dfrac{1}{2}$ và GAH = GOM (so le trong)

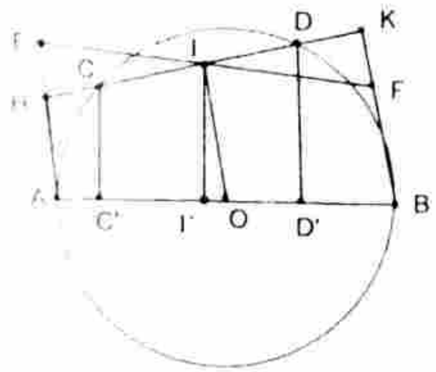
Do đó: Δ AGH $\backsim$ Δ MGO (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{GO}{GH} = \dfrac{1}{2}$ hay GH = 2GO và $\widehat{AGH} = \widehat{MGO}$. V

Vậy 3 điểm H, G,O thẳng hàng

II.2. Tính chất đối xứng của đường tròn

Bài 1:



a. Nối OI

Ta có: AH // DI //BK

(vì cũng vuông góc với CD)

Theo tính chất đường trung bình

IH = IK hay I là trung điểm của HK

b. Qua I kẻ đường thẳng

song song với AB cắt AH và BK tại E và F,

các đường vuông góc với AB là CC' ; DD'; II' (C'; D'; I'; ∈AB).

Ta có: AE + BF = KB + AH

$\Rightarrow S_{AHKB} = S_{AEFB} = AB.II'$ (1)

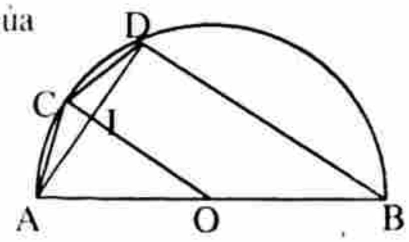
Do $S_{ABC} = \dfrac{CC'.AB}{2}$; $S_{ADB} = \dfrac{DD'.AB}{2}$

Mà II' là đường trung bình của ◊ CC'D'D nên $II' = \dfrac{CC'+DD'}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} + S_{ADB} = AB.\dfrac{(CC'+DD')}{2}$ (2)

Từ (1); (2) suy ra: $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$

Bài 2: Kẻ OC x AD ≡ I. Do OI là đường trung bình của



$\Delta ADB \Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}BD = 5cm$

vì OA = R ⇒ CI = R-5

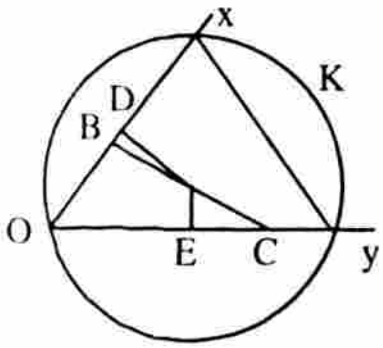
Ta có: $(4\sqrt{3})^2 - (R-5)^2 = R^2 - 25 = AI^2$

$\Leftrightarrow R^2 - 25 = 23 - R^2 + 10R$

$\Leftrightarrow (R-8)(R+3) = 0 \Rightarrow R = 8cm$

Vậy bán kính R= 8cm

Bài 3:

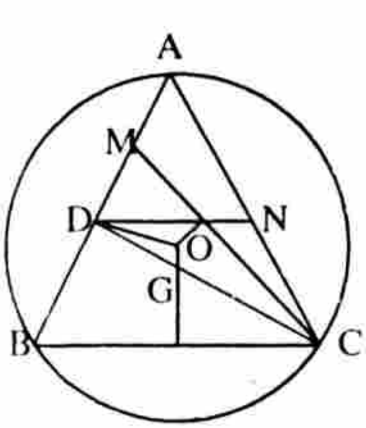


Đường tròn di động

K cố định là giao của

(C; BC) và (B; OC) cố định

Bài 4: Gọi G là trọng tâm của ΔABC



kẻ trung tuyến CM; DN (M∈A; N∈AC)

Ta có: $\dfrac{CE}{CM} = \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow EG // AB$; $OD \perp AB$ nên $EG \perp OD$ (1)

mà $OG \perp BC$ và DN //BC

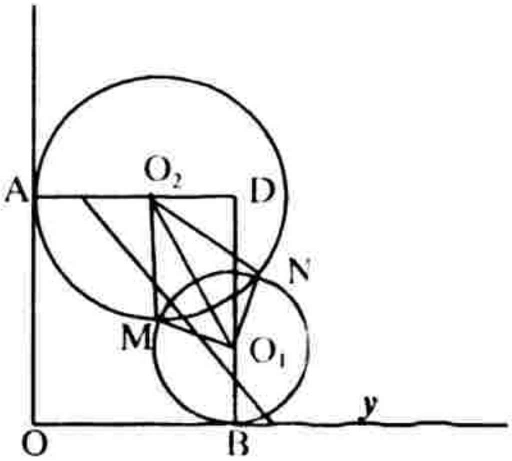
$\Rightarrow OG \perp DE$ (2)

Từ (1); (2) suy ra: G là trực tâm của ΔODE

Do đó $OE \perp GD$ hay $OE \perp CD$

II.3. Vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn tiếp tuyến của đường tròn

Bài 1:



a. Ta có: ΔO_1MB vuông cân tại O_1

$\Rightarrow \widehat{O_1MB} = 45^0$

Tương tự $\widehat{O_2MA} = 45^0$

nên $\widehat{O_1MO_2} = 90^0$

Mà $\Delta MO_1O_2 = \Delta NO_2O_1$

Nên $\widehat{O_1NO_2} = 90^0$

Do đó: O_1N là tiếp tuyến (O_2)

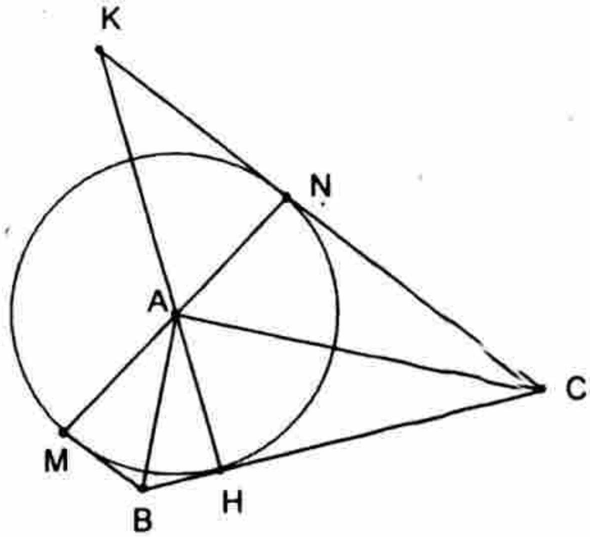
b. Gọi R_1; R_2 là độ dài bán kính O_1; O_2

Ta có: ◇ O_1MO_2D là hình chữ nhật nên $O_1O_2^2 = R_1^2 + R_2^2$ và $R_1 + R_2 = a$

Nên $O_1O_2^2 \geq \dfrac{(R_1 + R_2)^2}{2} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow O_1O_2 \geq \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Vậy O_1O_2 ngắn nhất bằng $\dfrac{a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow R_1 = R_2 = \dfrac{a}{2} \Rightarrow$ M là trung điểm AB

Bài 2:



a. M, A, N thẳng hàng

◇BMNC là hình thang

Ta có: $S_{BMNC} = 2S_{ABC}$

mà AH = 6cm

$\Rightarrow S_{BMNC} = 90cm^2$

b. Ta có:

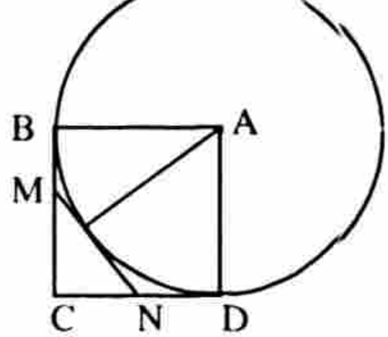
ΔKNA đồng dạng với ΔKHC (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{KN}{KH} = \dfrac{AN}{CH}$

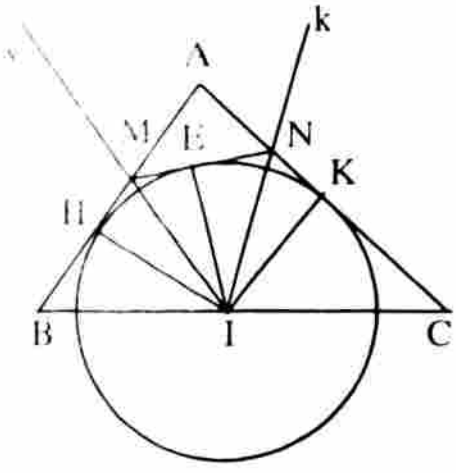
$\Rightarrow \dfrac{AK}{KN + 12} = \dfrac{KN}{AK + 6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AK = 16{,}8cm$; $KN = 19{,}2cm$

Bài 3:

MN luôn đi qua điểm I cố định thuộc cung BD của (A; a) M và MN là tiếp tuyến



Bài 4.



a. Đặt $\widehat{IMB} = \widehat{IMN} = \beta$;

$\widehat{INM} = \widehat{INC} = \varphi$; $\widehat{ABC} = \alpha$

◇BMNC có: $2\alpha + 2\beta + 2\varphi = 360°$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \varphi = 180°$

mà ΔMIN có: $\widehat{MIN} + \beta + \varphi = 180°$

$\Rightarrow \widehat{MIN} = \alpha$

nên: ΔBMI đồng dạng với ΔCIN (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MI}{NI} = \dfrac{BM}{CI} \Rightarrow \dfrac{MI}{NI} = \dfrac{BM}{BI}$

Do đó: ΔBMI đồng dạng với ΔMIN (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BMI} = \widehat{IMN}$

Ta có: MI là tia phân giác BMN $\Rightarrow$ IH = IE $\Rightarrow$ MN là tiếp tuyến (I; IH)

Vậy MN thay đổi luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

b. Theo câu a: $\widehat{MIN} = \alpha \Rightarrow$ ΔBMI đồng dạng với ΔIMN (g.g)

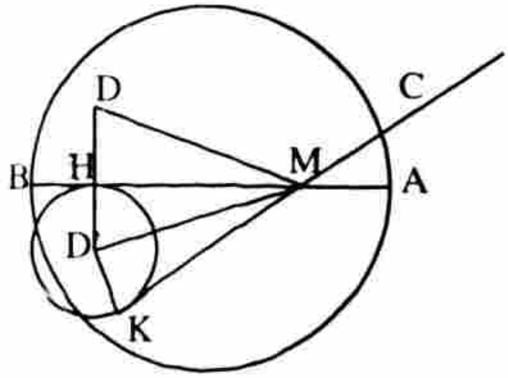
ΔIMN đồng dạng với ΔCIN (g.g) $\Rightarrow$ ΔBMI đồng dạng với ΔCIN

$\Rightarrow \dfrac{BM}{CI} = \dfrac{BI}{CN} \Rightarrow BN.CN = BI.CI = a^2$ (a là độ dài $\dfrac{BC}{2}$)

Do tích BM.CN không đổi nên tổng BM+CN nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ BM = CN khi đó MN // BC

Bài 5:



Lấy D' là điểm đối xứng của D qua AB

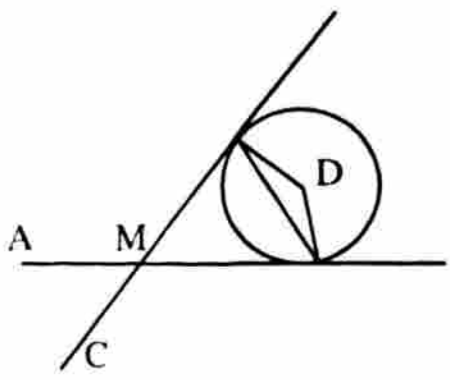
Vẽ (D'; $\dfrac{DD'}{2}$) tiếp xúc với AB tại H.

Vẽ tiếp tuyến của D'K cắt AB tại M là điểm cần xác định

Chứng minh được: $\widehat{DMH} = \widehat{D'MH}$

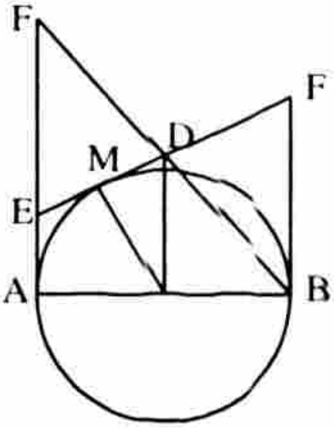
và $\widehat{HMD'} = \widehat{D'MK}$ mà $\widehat{AMC} = \widehat{BMK}$

Nên $\widehat{AMC} = 2\widehat{BMD}$



– Nếu C và D ở 2 phía của AB, dựng (D) tiếp xúc với AB, từ C kẻ tiếp tuyến với (D), cắt AB tại M là điểm cần xác định

Bài 6.



Kẻ tiếp tuyến tại B cắt ED tại K

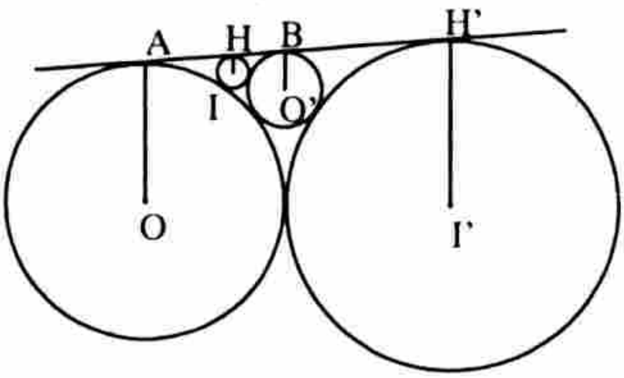
Ta có: EF = BK; BK = MK; AE = ME.

Do đó: AE.EF = ME.MK = $OM^2 = R^2$

(không đổi) $\Rightarrow$ đpcm

II. 4 Vị trí tương đối của hai đường tròn:

Bài 1.



Gọi R, r lần lượt là bán kính (O; 36); (O'; 9)

x là bán kính (I)

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: H thuộc đoạn AB Ta có: AH = $2\sqrt{Rx}$; BH = $2\sqrt{rx}$

Mà AH + BH = AB nên: $2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}$

$\Rightarrow x = \dfrac{Rr}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^2}$ .Thay R = 36cm; r = 9cm $\Rightarrow$ x = 4cm

Trường hợp 2:

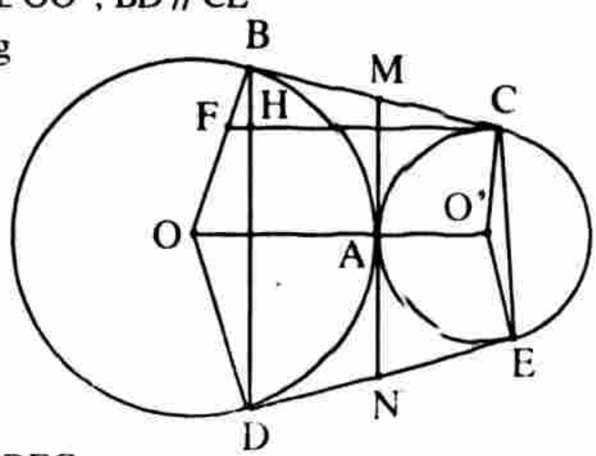
H thuộc tia đối của tia BA; H $\equiv$ H' Ta có: H'A − H'B = AB

Tương tự ta có: I'H' = 36cm

Bài 2:

Theo tính chất đối xứng BD $\perp$ OO' ; CE $\perp$ OO' ; BD // CE

◇BDEC là hình thang tiếp tuyến chung tại A cắt BC và DE tại M và N



Ta có: MN = 24; BC = $2\sqrt{RR'}$

Kẻ CH $\perp$ BD ; CH $\cap$ OB = F

Trong ΔBFC vuông có:

BC^2 = CK . CH $\Rightarrow$ 4RR' = (R+R') CH

$\Rightarrow HC = \dfrac{4RR'}{R+R'}$

Do MN là đường trung bình hình thang BDEC

$\Rightarrow S_{BDEC} = MN \cdot CH = 2\sqrt{RR'} \cdot \dfrac{4RR'}{R+R'} = 8RR' \cdot \dfrac{\sqrt{RR'}}{R+R'}$

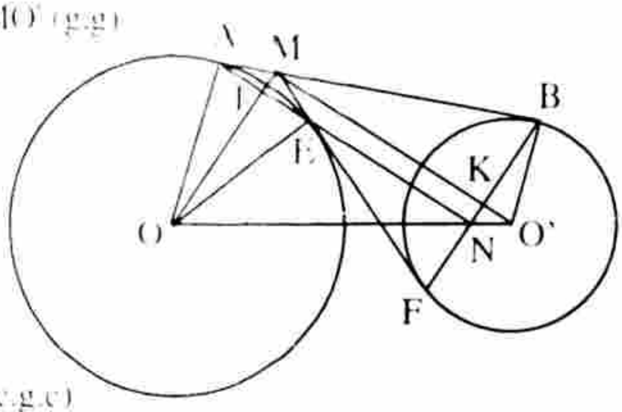
Bài 3:

a. Ta có: MO ⊥ AE ; MO' ⊥ BF

mà MO ⊥ MO' (tia phân giác 2 góc kề bù). Nên AE // BF

b. OM cắt AE tại I

Ta có: ΔAOM đồng dạng với ΔBMO' (g.g)



Nên AI và BK là các đường cao tương ứng

$\Rightarrow \dfrac{OI}{OM} = \dfrac{MK}{MO'}$

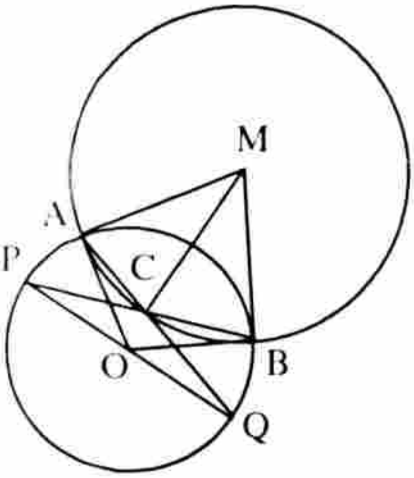
Mà MK = IN

nên $\dfrac{OI}{OM} = \dfrac{MK}{MO'}$

$\Rightarrow$ ΔOIN đồng dạng với ΔOMO' (c.g.c)

Do đó: $\widehat{ION} = \widehat{MOO'} \Rightarrow$ O, N, O' thẳng hàng

II. 5 Góc với đường tròn



Bài 1: Ta có: $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOP}$

CM tương tự: $\widehat{QOP} = \widehat{CMB}$ (2)

Từ đó chứng minh được: $\widehat{AMB} = \widehat{AOP} + \widehat{QOB}$

Suy ra $\widehat{BOA} + \widehat{AOP} + \widehat{QOB} = 180^0$

Nên P, O, Q thẳng hàng

Bài 2: Chứng minh: $\widehat{BCE} = \widehat{BAE}; \widehat{BDF} = \widehat{BAF}; \widehat{BCE} = \widehat{BDF} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BAF}$

Bài 3: Chứng minh A_1B_1 , A_2B_2 , MN đồng qui vì là ba đường cao của tam giác A_1MB_2

Bài 4: Chứng minh tứ giác AEBD nội tiếp

Kết hợp với EP = DP suy ra tam giác DEF đều

Bài 5:

a. Chứng minh MENF là tứ giác có ba góc vuông dựa vào góc nội tiếp

b. Chứng minh $\widehat{AMN} + \widehat{MAD} = 90^0$

Bài 6: Chứng minh D , O , E thẳng hàng suy ra DE luôn đi qua O cố định

Bài 7: Vẽ các tia Ay và Ay' lần lượt là tiếp tuyến của (O) và (O') tại A

Vì 2 cạnh Ay và Ay' cố định nên $\widehat{yAy'}$ không đổi.

Xét ΔCMD có: Chứng minh $\widehat{CMD} = \widehat{yAy'}$ không đổi.

Bài 8: Chứng minh: $\widehat{O_4O_1O_2} = \dfrac{\widehat{DAB} + \widehat{DCB}}{2} = 90^0$

Tương tự cho cos góc khác suy ra được $O_1O_2O_3$ là hình chữ nhật

Bài 9:

a) Ta có: ΔEKB và ΔKAB đồng dạng suy ra

$$\Rightarrow \frac{KB}{KE} = \frac{KA}{KB} \Rightarrow KB^2 = KE.KA \Rightarrow OK^2 = KE.KA$$

$$\Rightarrow \frac{OK}{KE} = \frac{KA}{OK}$$

$\Rightarrow \Delta KCD$ và ΔKEO đồng dạng

Suy ra $\widehat{OEK} = \widehat{OAK} = \widehat{CEA}$. Nên O, E, C thẳng hàng

b) Qua E kẻ đường thẳng song song với OB cắt AO tại I và cắt AB tại F.

Ta có: $EI = EF^{(1)}$; $\dfrac{OE}{OC} = \dfrac{EI}{AC}$; $\dfrac{DE}{DC} = \dfrac{EH}{AC}$

Suy ra: $\dfrac{OE}{OC} = \dfrac{DE}{DC}$

Bài 10: Trên AP lấy PN = PB; PM = PC

Ta có: $\widehat{APB} = \widehat{APC}$ (vì chắn cung $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow \Delta CQP$ và ΔBQN đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{CP}{BN} = \frac{PQ}{QN} \Rightarrow \frac{CP}{PQ} = \frac{NB}{NQ} = \frac{BP}{PN - PQ} = \frac{BP}{BP - PQ}$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{CP} = \frac{BP - PQ}{BP}$$

chia 2 vế cho PQ ta được $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{CP}$ hay $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

II.6 Tứ giác nội tiếp

Bài 1:

a. H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

b. B; C là tâm đường tròn bàng tiếp ΔDEF.

Theo tính chất của tiếp tuyến kẻ đến các đường tròn.

$2EI = EF + DF + DE \Rightarrow 2FK = EF + DF + DE$

$\Rightarrow$ Chu vi $DEF = EI + EK$

$\Rightarrow DE + DF = IF + EF + FK \Rightarrow DE + DF = IK$

Bài 2:

a. Ta có: ◇AIHB nội tiếp đường tròn Suy ra $\widehat{HIC} = \widehat{yOx} \Rightarrow IH \,//\, NE$

b. Theo câu a ta được: ◇IHNE là hình chữ nhật $\Rightarrow HN = IE$ (1)

Ta có: ◇ICFB nội tiếp đường tròn và ◇AHNM nội tiếp

Suy ra: $\Delta MNH = \Delta FEI \Rightarrow MN = EF$

Bài 3:

a. Chứng minh ◇FCAN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FAC} = \widehat{DNC}$

Mặt khác: $DE = BE \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{DNE}$

Từ đó suy ra: N, C, E thẳng hàng

b. Kẻ CK // AD $(K \in AN)$

Chứng minh ◇ADCK là hình bình hành.

Suy ra: DN đi qua trung điểm của AC.

Bài 4:

a. Chứng minh được $OA \perp MN$

$IK \perp MN \Rightarrow OA \,//\, IK$

Tương tự: $AK \,//\, IO$

Vậy ◇AKIO là hình bình hành

b. Gọi E là giao điểm 2 đường chéo của hình bình hành AKIO.

Ta có: $EA = EI$

Ta lại có: OK là trung trực của AD nên $EA = ED \Rightarrow EI = ED$.

Nên $\widehat{ADI} = 90^0$

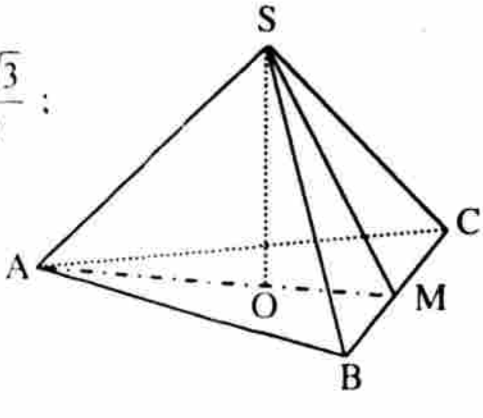
Bài 5: Tứ giác BA'DC nội tiếp $(O; \frac{BD}{2}) \Rightarrow \widehat{A'OB'} = 2\hat{A}$

Tứ giác: ◇AA'C'D nội tiếp $(O; \frac{BD}{2}) \Rightarrow \widehat{B'C'} = 2\hat{A}$

Vậy $O \in$ đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$

III. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN:

Bài 1:



Từ tam giác ABC đều tính được $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Từ đó tính được $SO = \sqrt{\ell^2 - \frac{a^2}{12}}$

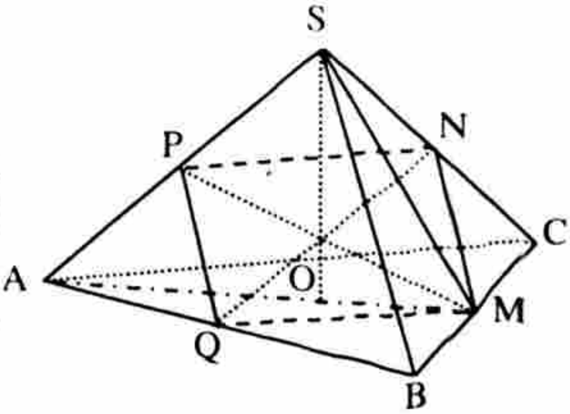
Từ đó tính được $V; S_{xq}; S_{tp}$

Bài 2:

a) Tương tự bài 1 với $l = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Vì các cạnh của hình chóp đều bằng nhau nên ta chứng minh được MNPQ là hình thoi

Do vậy $MP \perp NQ$ và MP ; NQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường



Bài 3: Nửa đường tròn quay quanh AB tạo ra khối cầu tâm O , bán kính R

- Hình thang vuông ABMNquay một vòng quanh AB tạo ra hình nón cụt

  Có bán kính các đáy là AM, BN , đường cao là AB

- Chứng minh ΔMON vuông suy ra : $CM.CN = CO^2 = R^2$

  Mà AM = CM ; BN = CN

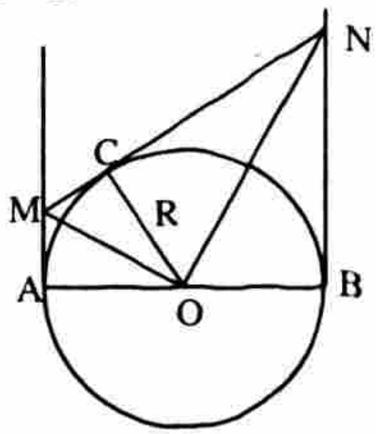
  nên $AM.BN = R^2$ nên BN = 2R

  Đường cao của hình nón đáy NB là h thì

  $$\frac{h - AB}{h} = \frac{AM}{BN} = \frac{1}{4} \Rightarrow h = \frac{4}{3}AB = \frac{8}{3}R$$

  Thể tích của hình nón cụt là :

  $$V = \frac{1}{3}\pi(2R)^2\frac{8}{3}R - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{2}{3}R = \frac{7}{2}\pi R^3$$



Bài 4: Vì tam giác ABC đều nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

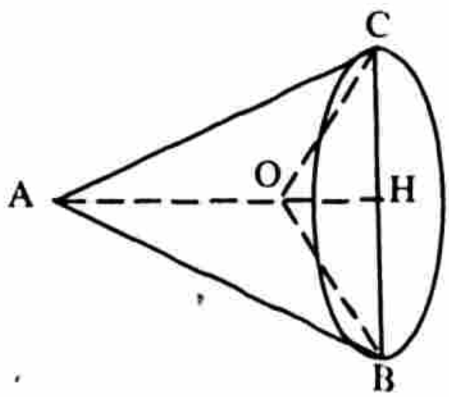
Khi ΔAOB quay trọn một vòng quanh AOthể tích của hình được sinh ra bằng

Thể tích của hình nón đường cao AH đáy là đường tròn đường kính BC trừ đi

Thể tích của hình nón có đường cao là OH có cùng đáy

Do vậy :

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2(AH - OH) = \frac{\pi a^2}{12}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{36}$$



Bài 5: Chứng minh bằng phản chứng

Giả sử MN và AC cùng thuộc một mặt phẳng

Thì M nằm trong mặt phẳng đi qua A,C, N

do đó A và M nằm trong mặt

Phẳng đi qua (A, C ,N)

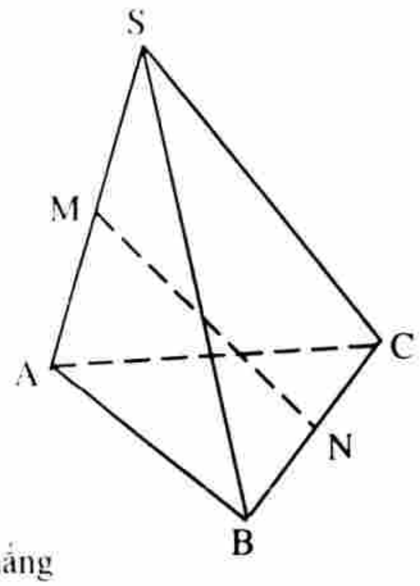
Nên S cũng nằm trong mặt phẳng này

Mà B $\in (A, C, N)$

Vậy A , B , C , S cùng thuộc một mặtphẳng .

Điều này mâu thuẫn với S.ABC là hình chóp

Vậy AC và MN không thuộc cùng một mặt phẳng



BÀI TẬP NÂNG CAO

I. PHẦN ĐẠI SỐ

Bài 1: Giải phương trình: $\dfrac{|2x+3|-|x|}{|2x+3|-5}=2$

Bài 2: Cho phương trình: $\dfrac{1}{1-mx}=\dfrac{m}{1-x}$

a) Giải phương trình với $m = 3$

b) Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình chỉ có nghiệm nguyên .

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $|x^2+2x+3|=2x-1$.

b. $|3x+2|=2x^2-3x-4$

c. $|x^3-x-1|=x^3+x+1$

Bài 4: Giải phương trình: $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}\pi$

Bài 5: Cho phương trình: $3x^4-4x^3+mx^2+4x+3=0$

a) Giải phương trình với $m = -5$

b) Với giá trị nào của m thì phương trình vô nghiệm.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a. $(x+3)^4+(x+5)^4=16$

b. $2x^4+x^2-\sqrt{3}.x+1=0$

c. $x^4-5x^2+18x-5=0$

Bài 7: Giải phương trình: $(x-2005)^6+(x-2006)^8=1$

Bài 8: Giải phương trình: $x+\dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}=1$

Bài 9: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x+3}+2}=\dfrac{\sqrt{2}(x+1)}{2}$ b) $\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}}=2$

Bài 10: Giải các phương trình sau

a) $4x^2+y^2-12x+2y+10=0$

b) $x^2+y^2+x-y+xy+1=0$

c) $x^2+5y^2+4xy-2y-2x+2=0$

Bài 11: Tìm tất cả các cặp số (x; y) nghiệm đúng phương trình:

$$(16x^4 + 1)(y^4 + 1) = 16x^2y^2$$

Bài 12: Tìm các số nguyên n để các nghiệm của phương trình sau là các số nguyên

$$x^2 - 2(2n + 1)x + 4(n - 2) = 0$$

Bài 13: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 15 = 0$. Gọi các nghiệm của phương trình là $x_1; x_2$

a) Tìm m sao cho $x_1 + 5x_2 = 4$

b) Tìm số nguyên m sao cho $F = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ cũng là số nguyên.

Bài 14: Cho phương trình: $x - m^2 = 3 - \sqrt{2} - mx\sqrt{2}$ (1)

a) Tìm tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tính nghiệm đó với $m = \sqrt{2} + 1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) nhận $x = 5\sqrt{2} - 6$ là nghiệm.

c) Gọi m_1; m_2 là hai nghiệm của phương trình (1) ẩn m, tìm x để m_1; m_2 là số đo 2 cạnh góc vuông của 1 tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{4\sqrt{2} - 2}$

Bài 15: Giải phương trình: $x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0$

Bài 16: Giải phương trình: $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$

Bài 17: Giải các hệ phương trình

a. $\begin{cases} 3\sqrt{4x + 2y} - 5\sqrt{2x - y} = 2 \\ 7\sqrt{4x + 2y} + 2\sqrt{2x - y} = 32 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x + 1}{2y - 1}} + \sqrt{\dfrac{2y - 1}{x + 1}} = \dfrac{5}{2} \\ x - y = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x + 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

Bài 18: Cho $x \geq \sqrt{2}$; $y \geq \sqrt{2}$. Chứng minh rằng: $(x + y)(x^2 + y^2) \leq x^5 + y^5$

Bài 19: Cho a, b, c > 0.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} + \frac{c}{1 + c^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}$

Bài 20: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3(1 + \sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \frac{1}{7(\sqrt{3} + \sqrt{4})} + \ldots + \frac{1}{4003(\sqrt{2001} + \sqrt{2002})} < \frac{2001}{4006}$$

Bài 21: Cho a, b, c > 0; a + b + c = 6.

Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{729}{512}$

Bài 22: Cho abc = 1; $a^3 > 36$, Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$

Bài 23: Chứng minh rằng .

Nếu x, y, z ≥ 0 thì $x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$

Bài 24: Cho a, b, c ∈ [0; 2] có a + b + c = 3. CMR: $a^2 + b^2 + c^2 < 5$

Bài 25: Cho các số thực dương a , b , c thoả mãn abc = 1.

Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a^5+b^5+c^5} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ac} < 1$

Bài 26: CMR. nếu $x, y \in \mathbb{Z}^+$ thì một trong hai bất đẳng thức sau là sai:

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \quad \text{và} \quad \frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

Bài 27: Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+a}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

Bài 28: Chứng minh rằng: Mọi a, b, c, d, p, q > 0 ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{p+q'}{pa+qb} + \frac{p+q}{pb+qc} + \frac{p+q}{pc+qa}$$

Bài 29: Cho x, y thay đổi sao cho $0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4$

Tìm Max của $P = (3-x)(4-y)(2x+3y)$

Bài 30: Tìm GTLN và GTNN của xy với x, y là nghiệm của phương trình:

$x^4 + y^4 - 3 = xy(1-2xy)$

Bài 31: Giải bất phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 3 \geq 0$

Bài 32: Cho abc = 1, biết biểu thức sau được xác định.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1}$

II. PHẦN HÌNH HỌC

Bài 1; Cho hình bình hành ABCD với O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy E trên AD sao cho AD = 3DE. Tỷ số diện tích của tam giác DEO và tứ giác ABOE là:

a) 1:2 b) 1:3 c) 1:5 d) 1:7 e) 1:6

Bài 2: Trong hình vẽ cho góc BAD bằng góc BDC. Biết AD = 4cm, AB = 6cm, BD = 5cm, DC = 7,5cm. Độ dài của BC là:

a) Không tính được c) 5,5 cm

b) 4 cm d) 6 cm e) 6,25 cm

Bài 3: Độ dài các cạnh của tam giác ABC là 13, 14, 15. Gọi H là trực tâm của tam giác. Nếu AM là đường cao ứng với cạnh có độ dài là 14 thì tỉ số HM : HA là

a) [illegible]:11 b) 5:11 c) 1:2 d) 2:3

e) 25:33

Bài 4: Một hình thoi nội tiếp tam giác ABC (có một đỉnh là A, hai cạnh nằm trên AB và AC, đỉnh đối diện với đỉnh A nằm trên BC). Biết AC = 3, AB = 6, BC = 4. Độ dài cạnh của hình thoi là:

a) 1 b) 1,5 c) 1,75 d) 2

e) 2,5

Bài 5: Cho tứ giác ABCD, trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BA.

Để $\widehat{ACE} = 90^0$ thì tứ giác ABCD là:

a) Hình chữ nhật b) Hình thoi c) Hình bình hành

d) Có một cặp cạnh bằng nhau e) Có một cặp góc bằng nhau.

Bài 6: Một hình chữ nhật có chiều dài bằng 5, chiều rộng nhỏ hơn 4. Nếu gấp hình chữ nhật lại sao cho hai đỉnh đối diện của nó trùng nhau thì chiều dài của nếp gấp là $\sqrt{6}$, chiều rộng của hình chữ nhật là:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\sqrt{5}$

e) $\sqrt{\dfrac{11}{2}}$

Bài 7: Độ dài các cạnh của tam giác ABC tỉ lệ với 2: 3: 4. Biết đường phân giác BD cắt cạnh ngắn nhất AC của tam giác tại D. Khi AC =10 thì độ dài của đoạn lớn hơn trong hai đoạn AD và CD là:

a) 3,5 b) 5 c) $\dfrac{40}{7}$ d) 6

e) 7,5

Bài 8: Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Biết BO = 4, DO = 6, AO = 8, CO = 3, AB = 6. Độ dài của cạnh AD là:

a) 9 b) 10 c) $6\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{2}$

e) $\sqrt{166}$

Bài 9: Lấy các điểm D, E, F lần lượt trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC sao cho AD : DB = BE : EC = CF : FA = $\frac{1}{n}$. Tỷ số diện tích của tam giác DEF và tam giác ABC là;

a) $\frac{n^2 - n + 1}{(n+1)^2}$ c) $\frac{2n^2}{(n+1)^3}$

b) $\frac{1}{(n+1)^2}$ d) $\frac{n^3}{(n+1)^3}$ e) $\frac{n(n-1)}{n+1}$

Bài 10: Cho tứ giác ABCD. Kéo dài AD và BC cắt nhau Tại E.

Đặt : $x = \widehat{CDE} + \widehat{DCE}; y = \widehat{BAD} + \widehat{ABC}$ và $k = \frac{x}{y}$. Ta có:

a) $k \geq 1$ b) $k \leq 1$ c) $0 < k < 1$ d) $k > 1$

e) $k = 1$

Bài 11: Một tam giác đều và một lục giác đều có chu vi bằng nhau. Nếu diện tích của tam giác bằng 1 thì diện tích của lục giác đều là:

a) 1 b) 1,5 c) 2 d) 3

e) 6

Bài 12: Một tam giác có hai góc bằng 30^0 và 45^0. Nếu cạnh đối diện với góc 45^0 có độ dài bằng 4 thì cạnh đối diện với góc 30^0 có độ dài là:

a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{6}$

e) 3

Bài 13: Giả sử có hai mảnh bìa là hai tam giác vuông bằng nhau, có cạnh huyền bằng 12, các góc nhọn bằng 30^0 và 60^0. Ta đặt sao cho chúng không trùng nhau mà chỉ có cạnh huyền trùng nhau và có một phần chung. Diện tích phần chung của chúng là :

a) $6\sqrt{3}$ b) $8\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{3}$ d) $12\sqrt{3}$

e) 24

Bài 14: Cho tam giác ABC. Gọi D , E , F lần lượt là trung điểm của AB , BD , BC . Biết diện tích tam giác ABC là 96 . Dện tích tam giác AEF là :

a) 16 b) 24 c) 32 d) 36

e) 48

Bài 15: Trong tam giác ABC có $\widehat{A} = 70^0$ > Lấy các điểm D, E ,F lần lượt trên các cạnh BC , CA , AB sao cho CE = CD ; BD = BF . Số đo $\widehat{EDF}$ là :

a) 40^0 b) 45^0 c) 50^0 d) 55^0

e) Đáp số khác

Bài 16: Tính cạnh của hình thoi ABCD biết bán kính đường tròn ngại tiếp các tam giác ABC và ABD lần lượt là 3 và 4

Bài 17: Cho tam giác nhọn ABC cân tại A. Đường cao BH

Chứng minh rằng : $\frac{AB}{2CH} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

Bài 18: Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 20^0$.

Chứng minh rằng : $\frac{AB}{BC} + \frac{BC^2}{AB^2} = 3$

Bài 19: Cho tam giác ABC vuông tại A .

Chứng minh rằng: $\tan\frac{\widehat{ABC}}{2} + 1 = \frac{AC}{2p - AC}$ với p là nửa chu vi của tam giác ABC

Bài 20: Cho góc nhọn xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho OM + ON = 2a không đổi .

a) Chứng minh rằng : Khi M, N chạy trên Ox , Oy thì trung điểm của MN luôn nằm trên một đoạn thẳng cố định

b) Xác định vị trí của M và N để tam giác OMN có diện tích lớn nhất

Bài 21: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D; E; F thứ tự là trọng điểm của BC; AC và AB. Kẻ các đường thẳng DP' // OA; EE'//OB; EF//OC. Chứng minh các đường thẳng DD'; EE'; FE' đồng quy.

Bài 22: Cho đường tròn (O) và một điểm A bên trong đường tròn đó kẻ cát tuyến BAC bất kỳ. Gọi (P) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với (O) tại B, (Q) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với (O) tại C

a) Tứ giác APOQ là hình gì?

b) Gọi giao điểm thứ hai của (P) và (Q) là E; (E $\neq$ A). Tìm tập hợp điểm E khi cát tuyến BAC quay quanh A.

Bài 23: Cho góc vuông xOy. Các điểm P, Q thứ tư di chuyển trên tia Ox và Oy sao cho OP + OQ = 2007. Vẽ đường tròn (P; OQ) và (Q; OP)

a) Chứng minh hai đường tròn (P) và (Q) ở trên luôn cắt nhau

b) Gọi M, N là giao điểm của hai đường tròn (P) và (Q) chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P và Q thay đổi .

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP NÂNG CAO

I. PHẦN ĐẠI SỐ

Bài 1: Giải phương trình : $\dfrac{|2x+3|-|x|}{|2x+3|-5} = 2 \quad (1)$

Đk: $|2x+3|-5 \neq 0 \Leftrightarrow |2x+3| \neq 5 \Rightarrow x \neq 1; x \neq -4$

+ Nếu $x < -\dfrac{3}{2}$ phương trình (1) trở thành:

$$\frac{-2x-3+x}{-2x-3-5} = 2 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{-2x-8} = 2$$

$$\Rightarrow x+3 = 4x+16 \Rightarrow 3x = -13 \Rightarrow x = -\frac{13}{3}$$

+ Nếu $-\dfrac{3}{2} \leq x < 0$ phương trình (1) trở thành:

$$\frac{2x+3+x}{2x+3-5} = 2 \Leftrightarrow \frac{3x+3}{2x+2} = 2 \Rightarrow 3x+3 = 4x-4 \Rightarrow x = 7 \text{ (loại)}$$

+ Nếu $x \geq 0$ phương trình (1) trở thành:

$$\frac{2x+3-x}{2x+3-5} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x-2} = 2 \Rightarrow x+3 = 4x-4 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = \dfrac{7}{3}$; $x = -\dfrac{13}{3}$

Bài 2: Cho phương trình: $\dfrac{1}{1-mx} = \dfrac{m}{1-x}$.

Điều kiện: $\begin{cases} 1-mx \neq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx \neq 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$

* Với $m = 3$ phương trình trở thành $\dfrac{1}{1-3x} = \dfrac{3}{1-x}$

$$\Rightarrow 1-x = 3-9x \Rightarrow 8x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thoả mãn)}$$

Từ phương trình đã cho ta được: $1-x = m-m^2x \Leftrightarrow m^2x - x + 1 - m = 0$

$\Leftrightarrow x(m-1)(m+1) - (m-1) = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)x = (m-1)$

Để phương trình chỉ có nghiệm nguyên thì cần phải có:

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{vì } m = 1 \text{ phương trình có nghiệm } \forall x \in R)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \text{ khi đó nghiệm } x = \frac{1}{m+1}$$

Để $x \in Z$ thì $m + 1$ phải là ước của 1

* $m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x = 1$; * $m + 1 = -1 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow x = -1$

Vậy với $m = 0$; $m = 2$ thì phương trình chỉ có nghiệm nguyên.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 + 2x + 3| = 2x - 1$

$\Rightarrow |(x+1)^2 + 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 2x - 1$

$\Rightarrow x^2 = -4$ (vô lý) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) $|3x + 2| = 2x^2 - 3x - 4$

- Nếu $x \geq -\frac{2}{3}$ phương trình trở thành $3x + 2 = 2x^2 - 3x - 4$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2} \quad (\text{loại}) \\ x = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- Nếu $x \leq -\frac{2}{3}$ phương trình trở thành

$$-3x - 2 = 2x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$x = 1$ loại vì $x \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -1$; $\Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$

c) $|x^3 - x - 1| = x^3 + x + 1$ (1).

ĐK: $x^3 + x + 1 \geq 0$. (*)

$$\Leftrightarrow (x^3+x+1)^2=(x^3+x+1)^2 \Leftrightarrow (x^3+x+1)^2-(x^3+x+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+x+1+x^3-x-1)(x^3+x+1-x^3+x+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^3(x+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm: $x = 0$; (vì $x = -1$ loại vì không thoả mãn ĐK(*))

Bài 4: Giải phương trình : $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-2x+2\neq 0 \\ x^2-2x+3\neq 0 \\ x^2-2x+4\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+1\neq 0 \\ (x-1)^2+2\neq 0 \\ (x-1)^2+3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x\in R$

Đặt: $x^2-2x+2=t \quad (t\geq 1)$. Phương trình đã cho trở thành :

$$\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}=\frac{6}{t+2} \Rightarrow (t+1)(t+2)+2t(t+2)=6t(t+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3t^2-t-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

$t=-\dfrac{2}{3}$ loại vì $t\geq 1$.

Với $t=1 \Rightarrow x^2-2x+2=1 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1$

Bài 5: Cho phương trình: $3x^4-4x^3+mx^2+4x+3=0$. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$3x^2-4x+m+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}=0 \Rightarrow 3(x^2+\frac{1}{x^2})-4(x-\frac{1}{x})+m=0$$

Đặt $x-\dfrac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$

Phương trình đã cho trở thành: $3(t^2+2)-4t+m=0$

$$\Rightarrow 3t^2-4t+6+m=0 \qquad (*)$$

a) Với m = −5 phương trình trở thành: $3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Với $t = \frac{1}{3} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2 - 3 = x \Leftrightarrow 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{37}}{6} \\ x = \frac{1+\sqrt{37}}{6} \end{array}\right.$

Vậy với m = −5 phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_{3;4} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$

b) Để phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm $\Rightarrow \Delta'_t \geq 0$

$\Rightarrow 4 - 3(6 + m) \geq 0 \Rightarrow -3m - 14 \geq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{14}{3}$

Vậy với $m \leq -\frac{14}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 6: Giải các phương trình:

a) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$

Đặt $t = x + 4$. Phương trình đã cho trở thành:

$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0$

$\Leftrightarrow (t^2 + 7)(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0$ (vì $t^2 + 7 > 0$ $\Rightarrow t = \pm 1$

Với $t = -1 \Rightarrow x + 4 = -1 \Rightarrow x = -5$; Với $t = 1 \Rightarrow x + 4 = 1 \Rightarrow x = -3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với $x = -3; x = -5$

b) $2x^4 + x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^4 + \frac{1}{4} + x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 2x^4 + \frac{1}{4} + (x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 0$ (1)

Vì $(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 \geq 0$, $2x^4 + \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm hay phương trình đã cho vô nghiệm.

c. $x^4-5x^2+18x-5=0$

$\Leftrightarrow x^4+4x^2+4-(9x^2-18x+9)=0 \Leftrightarrow (x^2+2)^2-(3x-3)^2=0$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-1)(x^2-3x+5)=0. \Rightarrow x^2+3x-1=0$

(vì $x^2-3x+5>0\ \ \forall x$). $\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}; x_2=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

Bài 7: Giải phương trình: $(x-2005)^6+(x-2006)^8=1 \quad (1)$

Nhận thấy $x=2005$; $x=2006$ là nghiệm của (1)

Xét các giá trị còn lại của x.

\+ Nếu: $\left.\begin{array}{c} x<2005 \rightarrow (x-2005)^6>0 \\ |x-2006|>1 \rightarrow (x-2006)^8>1 \end{array}\right\} \rightarrow$ VT $>1 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

\+ Nếu $2005<x<2006$

$\Rightarrow 0<x-2005<1 \Rightarrow (x-2005)^6<|x-2005|=x-2005$

$0<2006-x<1 \Rightarrow (2006-x)^6<|2006-x|=2006-x$

VT của (1) $>1 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2005$; $x=2006$

Bài 8: Giải phương trình: $x+\dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}=1 \qquad (1)$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}=1-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\geq 0 \\ \dfrac{8x^2}{1+x^2}=1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ 8x^2=(1+x^2)(1-2x+x^2) \quad (*) \end{cases}$

Giải (*): $8x^2=1+2x^2-2x-2x^3+x^4 \Leftrightarrow x^4-2x^3-6x^2-2x+1=0$

Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình .

Chia cả 2 vế cho x^2 ta được: $x^2+\dfrac{1}{x^2}-2(x+\dfrac{1}{x})-6=0$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$ phương trình trở thành: $t^2-2-2t-6=0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 4; t = -2$

Với $t = 4 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{3} \\ x_2 = 2 + \sqrt{3} \text{ (loại vì } x < 1) \end{array}\right.$

Với $t = -2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{3}$; $x_2 = -1$

Bài [illegible]: Giải các phương trình

a) $\sqrt{x + \sqrt{2x+3} + 2} = \dfrac{\sqrt{2}(x+1)}{2}$ (1). điều kiện : $\begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ x + \sqrt{2x+3} + 2 \geq 0 \end{cases}$

đặt $\sqrt{2x+3} = t \Rightarrow x = \dfrac{t^2 - 3}{2}$ $(t \geq 0)$

thay vào (1) ta có:

$$\sqrt{\frac{t^2-3}{2} + t + 2} = \frac{\frac{t^2-3}{2} + 1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(t+1)^2}{2}} = \frac{t^2-1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{t+1}{\sqrt{2}} = \frac{(t-1)(t+1)}{2\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{t-1}{2} = 1$ (vì $\dfrac{t+1}{\sqrt{2}} > 0; \forall t \geq 0$) $\Rightarrow t = 3 \Rightarrow x = 3$

Nghiệm $x = 3$ thoả mãn điều kiện. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

b) $\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}} + \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2x}{1+x}} + \sqrt{\dfrac{1+x}{2x}} = 2$

Điều kiện: $\dfrac{2x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1; x > 0$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho 2 số dương ta có:

$$\sqrt{\frac{2x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{2x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\sqrt{\frac{1+x}{2x}}} = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{2x}{1+x} = \dfrac{1+x}{2x}$

$\Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -\dfrac{1}{3}$

Đối chiếu điều kiện: $x = 1$ thoả mãn. Vậy phương trình có **nghiệm $x = 1$.**

Bài 1[illegible]: Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 + y^2 - 12x + 2y + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 + (y+1)^2 = 0$

Do $\begin{cases}(2x-3)^2 \geq 0 \\ (y+1)^2 \geq 0\end{cases} \Rightarrow (2x-3)^2 + (y+1)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}(2x-3)^2 = 0 \\ (y+1)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{3}{2} \\ y = -1\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{3}{2}$; $y = -1$

b. $x^2 + y^2 + x - y + xy + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + x - y + xy + 1) = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0$

$\Rightarrow (x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$

$\Rightarrow$ Do $\begin{cases}(x+y)^2 \geq 0 \\ (x+1)^2 \geq 0 \\ (y-1)^2 \geq 0\end{cases} \rightarrow (x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi: $\Rightarrow \begin{cases}x + y = 0 \\ x + 1 = 0 \\ y - 1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = -1 \\ y = 1\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases}x = -1 \\ y = 1\end{cases}$

c. $x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x(2y-1) + 5y^2 - 2y + 2 = 0$ (2)

Ta có: $\Delta' = (2y-1)^2 - 5y^2 + 2y - 2 = 4y^2 - 4y + 1 - 5y^2 + 2y - 2$

$= -y^2 - 2y - 1 = -(y+1)^2 \leq 0$

Nên để phương trình (2) có nghiệm đối với x thì $\Delta'_y = 0 \Leftrightarrow y = -1$

Khi đó phương trình (1) có nghiệm kép: $x_{1;2} = \dfrac{-(2y-1)}{1} = -(-2-1) = 3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 3$; $y = -1$

Bài 11: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có:

$16x^4 + 1 \geq 2\sqrt{16x^4.1} = 2\sqrt{16x^4} = 8x^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 16x^4 = 1$

$y^4 + 1 \geq 2\sqrt{y^4.1} = 2\sqrt{y^4} = 2y^2$. Dấu "=" xảy ra <=> $y^4 = 1$

$\Rightarrow (16x^4 + 1)(y^4 + 1) \geq 16x^2y^2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 16x^4 = 1 \\ y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = \dfrac{1}{16} \\ y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{2} \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Vậy có các cặp số (x; y) là: $(\frac{1}{2};1); (\frac{1}{2};-1); (-\frac{1}{2};1); (-\frac{1}{2};-1)$ thoả mãn

phương trình đã cho $x^2 - 2(2n+1)x + 4(n-2) = 0$

Bài 12: $\Delta' = (2n+1)^2 - 4(n-2) = 4n^2 + 9 > 0$

Vì n nguyên nên để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương

Đặt: $4n^2 + 9 = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow k^2 - 4n^2 = 9 \Leftrightarrow (k-2n)(k+2n) = 9$ mà $k, n \in \mathbb{Z}$ nên ta có:

- Nếu $\begin{cases} k - 2n = 1 \\ k + 2n = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = 2 \end{cases}$ — Nếu $\begin{cases} k - 2n = -1 \\ k + 2n = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -5 \\ n = -2 \end{cases}$

- Nếu $\begin{cases} k - 2n = 3 \\ k + 2n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 0 \end{cases}$ — Nếu $\begin{cases} k - 2n = -3 \\ k + 2n = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ n = 0 \end{cases}$

- Nếu $\begin{cases} k - 2n = 9 \\ k + 2n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = -2 \end{cases}$ — Nếu $\begin{cases} k - 2n = -9 \\ k + 2n = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -5 \\ n = 2 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm : $x_1 = 2n + 1 - \sqrt{4n^2 + 9}$

$$x_2 = 2n + 1 + \sqrt{4n^2 + 9}$$

Luôn là các số nguyên khi n nguyên và Δ là số chính phương

Vậy giá trị cần tìm là: $n = \pm 2;\ n = 0$

Bài 13: Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - (2m-15) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 16 \geq 0$

Đúng với mọi m .

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 2m - 15 \end{cases}$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1 & (*) \\ x_1 + 5x_2 = 4 & (**) \\ x_1.x_2 = 2m - 15 & (***) \end{cases}$

Từ (*) và (**) ta được: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-m}{2} \\ x_2 = \dfrac{3+5m}{2} \end{cases}$

Thay vào (***) ta được: $\dfrac{1-m}{2}.\dfrac{3+5m}{2} = 2m - 15$

$\Leftrightarrow 3 + 2m - 5m^2 = 8m - 60 \Leftrightarrow 5m^2 + 6m - 63 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{-21}{5} \end{array}\right.$

Vậy với $m = 3$ hoặc $m = \dfrac{-21}{5}$ thì phương trình có các nghiệm x_1; x_2 sao cho $x_1 + 5x_2 = 4$

b. Ta có: $F = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{2(m+1)}{2m-15} = \dfrac{2m - 15 + 17}{2m-15} = 1 + \dfrac{17}{2m-15}$

Vì m nguyên nên để F nguyên thì $(2m - 15) \in Ư(17) = \{-17, -1, 1, 17\}$

+ Với $2m - 15 = 1 \Rightarrow 2m = 16 \Rightarrow m = 8$
+ Với $2m - 15 = -1 \Rightarrow 2m = 14 \Rightarrow m = 7$
+ Với $2m - 15 = 17 \Rightarrow 2m = 32 \Rightarrow m = 16$
+ Với $2m - 15 = -17 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$

Vậy với $m = -1$; $m = 7$; $m = 8$; $m = 16$ thì $F = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ là số nguyên.

Bài 14: Phương trình: $x - m^2 = 3 - \sqrt{2} - mx\sqrt{2}$ (1)

$\Leftrightarrow x + mx\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + m^2 \Leftrightarrow x(1 + m\sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} + m^2$

a) Để phương trình có nghiệm duy nhất thì $1 + m\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow m \neq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Với $m = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x\left[1 + (\sqrt{2}+1)\sqrt{2}\right] = 3 - \sqrt{2} + (\sqrt{2}+1)^2$

$\Rightarrow x(3 + \sqrt{2}) = 6 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \dfrac{6 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$

b) Để phương trình (1) nhận $x = 5\sqrt{2} - 6$ là nghiệm thì ta có:

$(5\sqrt{2} - 6)(1 + m\sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} + m^2 \Leftrightarrow 5\sqrt{2} - 6 + 10m - 6\sqrt{2}m = 3 - \sqrt{2} + m^2$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m(3\sqrt{2} - 5) + 9 - 6\sqrt{2} = 0$

$\Delta' = (3\sqrt{2} - 5)^2 - (9 - 6\sqrt{2}) = 34 - 24\sqrt{2} = (3\sqrt{2} - 4)^2$

Phương trình có 2 nghiệm:

$m_1 = 5 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 = 1$ (TM)

$m_2 = 5 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4 = 9 - 6\sqrt{2}$ (TM)

Vậy với $m = 1$; $m = 9 - 6\sqrt{2}$ thì phương trình (1) nhận $x = 5\sqrt{2} - 6$ là nghiệm.

c) Ta có phương trình: $x - m^2 = 3 - \sqrt{2} - mx\sqrt{2}$

$\Rightarrow m^2 - mx\sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} - x = 0$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $m_1; m_2$ thì $\Delta > 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 4(3 - \sqrt{2} - x) > 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12 + 4\sqrt{2} + 4x > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 4\sqrt{2} - 12 > 0$

$\Rightarrow x < -1 - \sqrt{7 - 2\sqrt{2}}; x > -1 + \sqrt{7 - 2\sqrt{2}}$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} m_1 + m_2 = x\sqrt{2} \\ m_1 m_2 = 3 - \sqrt{2} - x \end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$m_1^2 + m_2^2 = (\sqrt{4\sqrt{2} - 2})^2 \Leftrightarrow (m_1 + m_2)^2 - 2m_1m_2 = 4\sqrt{2} - 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(3 - \sqrt{2} - x) = 4\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow x^2x - (2 + \sqrt{2}) = 0$

$\Delta = 1 + 8 + 4\sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2})^2$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-1 - 1 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2};\ x_2 = \frac{-1 + 1 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Vậy $x = \sqrt{2}$ là giá trị phải tìm.

Bài 15: Xét phương trình : $x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2(1 + 5x - x^2)a + x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x = 0$ (1)

Xem phương trình (1) là phương trình bậc 2 của a, ta có:

$\Delta' = (1 + 5x - x^2)^2 - (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = (x - 1)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a = x^2 - 4x - 2 & (3) \\ a = x^2 - 6x & (4) \end{array}\right.$$

phương trình (3) $x^2 - 4x - (2 + a) = 0$ có $\Delta' = 4 + 2 + a = 6 + a$

Nếu $a + 6 < 0 \rightarrow a < -6$ phương trình (3) vô nghiệm.

Nếu $a + 6 = 0 \rightarrow a = -6$ phương trình (3) có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = 2$

Nếu $a + 6 > 0 \rightarrow a > -6$ phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1 = 2 - \sqrt{a+6}$; $x_2 = 2 + \sqrt{a+6}$

phương trình (4) $x^2 - 6x - a = 0$ có $\Delta' = 9 + a$

Nếu $9 + a < 0 \rightarrow a < -9$ phương trình (4) vô nghiệm.

Nếu $9 + a = 0 \rightarrow a = -9$ phương trình (4) có nghiệm kép $x_3 = x_4 = 3$. .

Nếu $9 + a > 0 \rightarrow a > -9$ phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt:

$x_3 = 3 - \sqrt{a+9}$; $x_4 = 3 + \sqrt{a+9}$

Vậy: nếu $a < -9$ phương trình đã cho vô nghiệm.

$a = -9$ phương trình đã cho có nghiệm kép bằng 3.

$-9 < a < -6$ phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 3 - \sqrt{a+9}$; $x = 3 + \sqrt{a+9}$

$a = -6$ phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x = 2; x = 3 - \sqrt{3}; x = 3 + \sqrt{3}$

$a > -6$ phương trình đã cho có 4 nghiệm $x = 2 \pm \sqrt{a+6}; x = 3 \pm \sqrt{a+9}$

Bài 16: Giải phương trình: $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$

Đặt $\sqrt{2} = a$, phương trình là: $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0$

$$\Delta = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$* \; a_1 = \dfrac{(2x^2 + 1) + (2x + 1)}{2} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - a = 0$

thay $a = \sqrt{2}$, ta có: $x^2 + x + 1 - \sqrt{2} = 0$

$$\Delta = 1 - 4(1 - \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 3; \; x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$$

$* \; a_2 = \dfrac{(2x^2 + 1) - (2x + 1)}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - a = 0$

thay $a = \sqrt{2}$, ta có: $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$, $\Delta = 1 + 4\sqrt{2}$; $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{2}}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2};$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

Bài 17: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 3\sqrt{4x+2y} - 5\sqrt{2x-y} = 2 \\ 7\sqrt{4x+2y} + 2\sqrt{2x-y} = 32 \end{cases}$ (II)

Điều kiện: $\begin{cases} 4x+2y \geq 0 \\ 2x-y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y \geq 0 \\ 2x \geq y \end{cases}$

Từ (II) $\Rightarrow \begin{cases} 6\sqrt{4x+2y} - 10\sqrt{2x-y} = 4 & (1) \\ 35\sqrt{4x+2y} + 10\sqrt{2x-y} = 160 & (2) \end{cases}$

Cộng (1) với (2)

$\Rightarrow 41\sqrt{4x+2y} = 164 \Rightarrow \sqrt{4x+2y} = 4 \Rightarrow 4x+2y = 16$ (3)

thay $\sqrt{4x+2y} = 4$ vào (1): $\sqrt{2x-y} = 2 \Rightarrow 2x - y = 4$ (4)

từ (3) và (4): $\Rightarrow \begin{cases} 4x+2y = 16 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y = 16 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ có 1 nghiệm (x; y) là (3; 2).

b) Điều kiện $\dfrac{x+1}{2y-1} > 0$ (*)

Ta xét : $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{2y-1}} + \sqrt{\dfrac{2y-1}{x+1}} = \dfrac{5}{2} & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$

Bình phương 2 vế của (1) ta được:

$\dfrac{x+1}{2y-1} + 2 + \dfrac{2y-1}{x+1} = \dfrac{25}{4} \Rightarrow \dfrac{x+1}{2y-1} + \dfrac{2y-1}{x+1} = \dfrac{17}{4}$

Từ (2) : $x = y + 2$ thay vào phương trình trên ta được:

$$\dfrac{y+3}{2y-1} + \dfrac{2y-1}{y+3} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow \dfrac{y^2+6y+9+4y^2-4y+1}{2y^2+5y-3} = \dfrac{17}{4}$$

$$\Rightarrow 14y^2 + 77y - 91 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 11y - 13 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{13}{2} \end{array}\right.$$

Với $y = 1 \Rightarrow x = 3$ (Thoả mãn *)

Với $y = -\dfrac{13}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{9}{2}$ (Thoả mãn *)

Vậy hệ có nghiệm (3; 1); $(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{13}{2})$

c) $\begin{cases}\sqrt{4x^2-4x+1}=x+2\\ 3x-2y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(2x-1)^2}=x+2\\ 3x-2y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|2x-1|=x+2 & (1)\\ 3x-2y=4 & (2)\end{cases}$

+ Nếu $x \geq \frac{1}{2}$: từ (1): $2x-1=x+2 \Rightarrow x=3$ (thoả mãn)

thay vào (2): $y=\frac{5}{2} \rightarrow$ hệ có nghiệm $(3;\frac{5}{2})$

+ Nếu $x<\frac{1}{2}$: từ (1): $1-2x=x+2 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ (thoả mãn)

thay vào (2): $y=-\frac{5}{2} \rightarrow$ hệ có nghiệm $(-\frac{1}{3};-\frac{5}{2})$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm (x; y) là: $\left(3;\frac{5}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{3};-\frac{5}{2}\right)$.

Bài 18: Vì $x \geq \sqrt{2}$; $y \geq \sqrt{2} \Rightarrow x^2+y^2 \geq 4 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq 2$

$$\Rightarrow 2.\frac{x+y}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{2}.\frac{x+y}{2} \Rightarrow 2.\frac{x+y}{2} \leq \frac{x^3+y^3}{2}$$

$$\Rightarrow 2.\left(x+y\right)(x^2+y^2)^2 \leq \left(x^3+y^3\right)(x^2+y^2) \leq x^5+y^5$$

Bài 19: Ta có : $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$ Tương tự cho b , c ta được

$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1

* Mặt khác: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$

Đặt a + b = x ; b + c = y ; c + a = z ta có

$\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ (**Đúng**)

Bài 20: Xét $\frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{4n^2+4n+1}}<\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

Vậy $S_n<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$$2S_n<1-\frac{2}{\sqrt{4n+4}}<1-\frac{2}{\sqrt{n^2+4n+4}}=1-\frac{2}{n+2} \Rightarrow S_n<\frac{n}{2(n+2)}$$

với $n = 2001$ ta có: $2S_{2001} < 1 - \frac{2}{2003} = \frac{2001}{2003} \Rightarrow S_{2001} < \frac{2001}{4006}$

Bi 21: Đặt $A = \left(1 + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 + \frac{1}{b^3}\right)\left(1 + \frac{1}{c^3}\right)$

Ta có $A = 1 + \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + \left(\frac{1}{a^3b^3} + \frac{1}{b^3c^3} + \frac{1}{a^3c^3}\right) + \frac{1}{a^3b^3c^3}$

$A \geq 1 + \frac{3}{abc} + \frac{3}{a^2b^2c^2} + \frac{1}{a^3b^3c^3} = \left(1 + \frac{1}{abc}\right)^3$ (Bất đẳng thức Cosicho 3 số dương)

Theo bất đẳng thức cosi: $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 8 \Rightarrow abc \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{8}$

Vậy $A \geq \left(1 + \frac{1}{8}\right)^3 = \frac{729}{512}$ (Dấu bằng xảy ra: $a = b = c = 2$)

Bi 22: Ta có : $\frac{a^3}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - a(b+c) - bc > 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + (b+c)^2 - a(b+c) - 3bc > 0$ (*)

Thay $bc = \frac{1}{a}$ ta được: (*) $\Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + (b+c)^2 - a(b+c) - \frac{3}{a} > 0$

$\Leftrightarrow a(b+c)^2 - a^2(b+c) + \frac{a^3}{3} - 3 > 0$

Đặt $b + c = x$ ta có: $ax^2 - a^2x + \frac{a^3}{3} - 3 > 0$ Với mọi x

Điều này tương đương: $\Delta = a^4 - 4a\left(\frac{a^3}{3} - 3\right) < 0$

$\Leftrightarrow a^4 - \frac{4a^4}{3} + 12a < 0 \Leftrightarrow 12a(36 - a^3) < 0$ đúng vì $a^3 > 36$

Bi 2.3: Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên có thể giả sử $z \geq y \geq x$

Khi đó: $x(x - y)(x - z) \geq 0$ (1)

Mặt khác: $z(z - x) \geq y(y - z)$. Do vậy: $z(z - x)(z - y) \geq y(y - x)(z - y)$

$\Rightarrow z(z - x)(z - y) + y(y - z)(y - x) \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ dpcm.

Bi 2.4: Do $a, b, c \in [0; 2]$ nên $(2 - a)(2 - b)(2 - c) \geq 0$

$\Leftrightarrow 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ac) - abc \geq 0$

$\Leftrightarrow 2(ab + ac + bc) \geq 4(a + b + c) + abc - 8$

$\Leftrightarrow 2(ab + ac + bc) \geq 4 + abc \geq 4$

$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) < 5$

Dấu "=" xảy ra khi a, b, c có một số bằng 2; một số bằng 0; một số bằng 1.

Bài 25: Ta có: $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a^5 + b^5) \geq a^2b^2(a + b)$

$$\text{Do đó : } \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b) + ab} \times \frac{c^2}{c^2} = \frac{c}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{bc}{a^5 + b^5 + ab} < \frac{a}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\frac{ca}{c^5 + a^5 + ac} < \frac{b}{a+b+c} \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3) ta có điều cần chứng minh

Bài 26: Giả sử cả hai bất đẳng thức đều đúng khi đó:

$\sqrt{5}\, xy \geq x^2 + y^2$ và $\sqrt{5}\, x(x + y) \geq x^2(x + y)^2$

$\Rightarrow \sqrt{5}\,(x^2 + 2xy) \geq 3x^2 + 2xy + 2y^2 \Rightarrow 2y^2 - 2(\sqrt{5} - 1)xy + (3 - \sqrt{5})x^2 \leq 0$

$\Rightarrow 4y^2 - 4(\sqrt{5} - 1)xy + (6 - 3\sqrt{5})x^2 \leq 0$

$\Rightarrow (2y)^2 - 2 . 2y(\sqrt{5} - 1)x + [(\sqrt{5} - 1)]^2 \leq 0$

$\Rightarrow [2y - (\sqrt{5} - 1)x]^2 \leq 0$

Điều này không xảy ra vì $(\sqrt{5} - 1)x$ là số vô tỷ không thể bằng 2y khi $x, y \in \mathbb{Z}^+$

Bài 27: Theo bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \left(\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right) + \left(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}}\right) + \left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3\sqrt[6]{abc}$$

$$= \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

(Bất đẳng thức cosi cho 3 số). Dấu bằng xảy ra khi a = b= c =1

Bài 28: Theo bất đẳng thức Bunhiacopki ta có:

$$(p+q)^2 = \left(\sqrt{\frac{p}{a}}.\sqrt{pa} + \sqrt{\frac{q}{b}}.\sqrt{qb}\right)^2 \leq \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right)(pa + qb)$$

Tương tự $(p+q)^2 \le \left(\frac{p}{b}+\frac{q}{c}\right)(pb+qc)$; $(p+q)^2 \le \left(\frac{p}{c}+\frac{q}{a}\right)(pc+qa)$

Do đó $(p+q)^2\left(\frac{1}{pa+qb}+\frac{1}{pb+qc}+\frac{1}{pc+qa}\right) \le (p+q)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{p+q}{pa+qb}+\frac{p+q}{pb+qc}+\frac{p+q}{pc+qa}$$

Bài 29: Ta có: $P = \frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y)$

$$6P \le \left(\frac{6-2x+12-3y+2x+3y}{3}\right)^3 = 6^3;\quad P \le 36$$

$$P_{max} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x = 12-3y = 2x+3y \\ 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài 30: Ta có: $x^4+y^4-3 = xy(1-2xy) \Leftrightarrow xy+3 = x^4+y^4+2x^2y^2$

$\Leftrightarrow xy+3 = (x^2+y^2)^2$. Do $(x^2+y^2)^2 \ge 4x^2y^2$ do đó: $xy+3 \ge 4x^2y^2$

Đặt $xy = t$ ta có: $4x^2y^2 - xy - 3 \le 0$ hay $4t^2 - t - 3 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le t \le 1$

Vậy $(xy)_{max} = 1$ khi $x = y = \pm 1$; $(xy)_{min} = -\frac{3}{4}$ khi $x = y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 31: Ta có:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3 \ge 0 \Leftrightarrow [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-3 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3 \ge 0$$

Đặt $x^2+5x+4 = t$ thì $x^2+5x+6 = t+2$

Bất phương trình trở thành: $t^2+2t-3 \ge 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 1 \\ t \le -3 \end{array}\right.$

Với $t \le -3$ ta có: $x^2+5x+8 \le 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4} \le 0$ Vô nghiệm

Với $t \ge 1$ ta có: $x^2+5x+4 \ge 1 \Leftrightarrow x^2+5x+3 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 \ge \frac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\frac{5}{2}\geq\frac{\sqrt{13}}{2}\\ x+\frac{5}{2}\leq-\frac{\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\geq\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\\ x\leq-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Bài 32: $P=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}$

$$=\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{ac}{abc^2+abc+ac}+\frac{1}{ca+c+1}$$

$$=\frac{c}{ca+c+1}+\frac{ac}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}=\frac{ca+c+1}{ca+c+1}=1.$$

II. PHẦN HÌNH HỌC

Bài tập trắc nghiệm

Bài	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Đáp án	C	E	B	D	D	D	C	E	A	E	B	B	D	D	D

Bài 1: Tỷ số diện tích của hai tam giác có chung một góc bằng tỷ số của tích các cạnh kề góc ấy

Bài 2: Suy ra từ tam giác BDA và tam giác CBD đồng dạng

Bài 3: Đặt BM = x , CM = y ta có $x^2-y^2=AB^2-AC^2\Rightarrow x-y=4$ kết hợp với x+y = 14 tính được x và y . Từ tam giác BHM và tam giác ACM đồng dạng suy ra $\frac{HM}{HA}=\frac{5}{11}$

Bài 4: Suy ra từ tam giác BDE và tam giác BAC đồng dạng

Bài 5: CB là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác ACE ; $CB=\frac{1}{2}AE=AB$

Bài 6: Giả sử hình chữ nhật được gấp theo chiều EF sao cho A trùng với C. Đặt BE = x thì AE = EC = 5 − x.

Ta lập được phương trình: $4x^2-30x+44=0\Rightarrow x=2$ (Vì x < 4)

Bài 7: Áp dụng tính chất đường phân giác

Bài 8: Kẻ AF ⊥ BD . Đặt BF = x , AF = y ta lập được hệ $\begin{cases}x^2+y^2=6^2\\(x+4)^2+y^2=8^2\end{cases}$

Từ đó suy ra $AD^2=(x+10)^2+y^2=166$

Bài 9: Tương tự bài 1

Bài 10: $x = y = 180^0 - \hat{E}$

Bài 11: Cạnh của lục giác đều bằng nửa cạnh của tam giác đều. Chia lục giác đều thành 6 tam giác đều suy ra diện tích của lục giác bằng $\frac{3}{2}$ diện tích của tam giác

Bài 12: Vẽ đường cao AH sau đó áp dụng công thức tỷ số lượng giác của góc nhọn

Bài 13: Giả sử hai cạnh góc vuông cắt nhau tại N, vẽ thêm đường cao NM

Bài 14: Tương tự bài 1

Bài 15: Dùng tính chất của tam giác cân có hai góc ở đáy bằng nhau và tổng ba góc trong tam giác bằng 180^0

Bài 16: Tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC là giao của đường trung trực của AB và BD, AC. Các tam giác O_1AM và ABO ; O_2BM và ABO đồng dạng (O_1,O_2, O là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ABC , giao điểm hai đường chéo của tứ giác ABCD)

Bài 17: Lấy E đối xứng với C qua A thì tam giác BEC vuông tại B có BH là đường cao

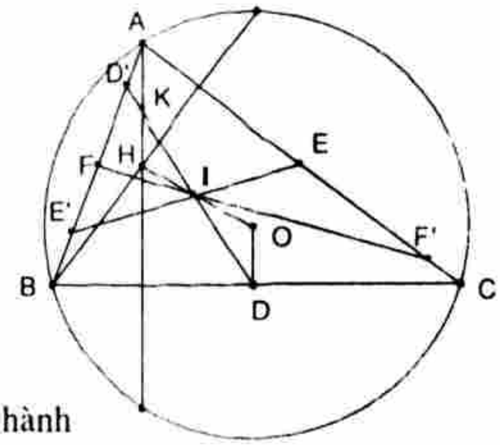
Bài 18: Vẽ tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = 60^0$ cắt AC tạiE . Từ A kẻ AD $\perp$ Bx thì tam giác ABC và BEC đồng dạng và tam giác BEC cân tại B

Bài 19: Kẻ phân giác BD , dùng tính chất của tia phân giác

Bài 20: a. Trên Ox , Oy lấy các điểm A và B sao cho OA = OB = a . Gọi I là giao của MN và AB . Từ N kẻ NC // Ox cắt AB tại N . Chứng minh ANCM là hình bình hành suy ra I là trung điểm của MN .

b. Từ câu a suy ra diện tích OMN lớn nhất khi OM = ON = a

Bài 21: Lấy H là trực tâm của ΔABC.



Ta có DE // BH; OD // AH; DE // AB

$\Rightarrow \Delta ODE$ và Δ HAB đồng dạng nên

$$\frac{OD}{AH} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2DE = AH$$

Lấy K là trung điểm AH

$\Rightarrow$ OD = AK $\Rightarrow$ KH = OD

mà OD // KH $\Rightarrow$ $\diamond$ OKHD là hình bình hành

Do đó DD' đi qua trung điểm I của OH

c/m tương tự: EE' ; FF' cũng đi qua I

Vậy DD' ; EE' ; FF' đồng quy.

Bài 22:

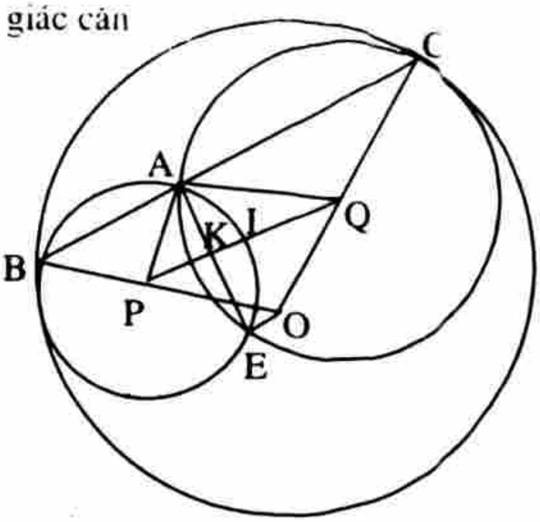
a) Chứng minh.

$\widehat{BAP} = \widehat{ABO} = \widehat{OCA}$ Dựa vào các tam giác cân

Suy ra AP // QO

Tương tự: AQ// PO

Do đó: APOQ là hình bình hành.



b. Ta có: AE $\perp$ PQ

Gọi I , K

Là giao của PQ và AO ;

PQ và AE. Thì I , K là

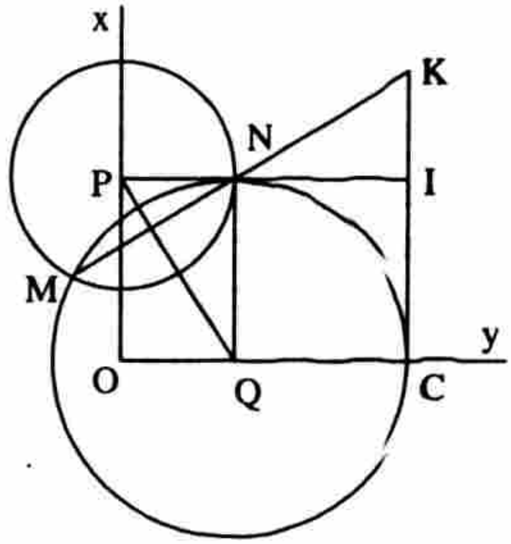
trung điểm của AO , AE

Do đó OE // IK hay $\widehat{OEA} = 90^0$

Vậy tập hợp điểm E

là đường tròn đường kính AO cố định

Bài 23:



a) Ta có:

$|OO_1 - OO_2| < O_1O + O_2O$

nên (O_1) và (O_2) cắt nhau

b. Gọi C là giao điểm của

(O_2) và tia Oy.

Ta có: $OC = OO_2 + O_2C$

$= OO_2 + OO_1 = 2007$

$\Rightarrow$ C cố định.

Kẻ đường vuông góc với O_2C tại C, cắt Oy ở K

Ta có: O_1O_2O = CKM (vì cùng bù với O_1O_2C)

Kẻ O_1N cắt CK tại I nên

◇OO_1IC là hình chữ nhật

$\Rightarrow OO_1 = IC$ và $\Delta O_1OO_2 = \Delta NIK \Rightarrow OO_2 = IK$.

Do đó: $CK = IC + IK = OO_1 + OO_2 = 2007$ (không đổi).

Vậy MN luôn đi qua điểm K cố định.