TỔNG HỢP TOÁN VẬN DỤNG CAO

Câu 1: Cho 3 số phức $z_1;z_2;z_3$ thỏa $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{8}{3}$ **D.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

Lời giải: Ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-z_3 \\ z_1+z_3=-z_2 \\ z_2+z_3=-z_1 \end{cases} \Rightarrow A=|-z_1|^2+|-z_2|^2+|-z_3|^2=\dfrac{8}{3}$. **Chọn C.**

Câu 2: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên 24850. Tính giá trị của biểu thức $S=\dfrac{1}{u_1u_2}+\dfrac{1}{u_2u_3}+...+\dfrac{1}{u_{48}u_{49}}+\dfrac{1}{u_{49}u_{50}}$?

A. $S=123$ **B.** $S=\dfrac{4}{23}$ **C.** $S=\dfrac{9}{246}$ **D.** $S=\dfrac{49}{246}$

Lời giải: Ta có: $u_{100}+u_1=497\Rightarrow u_{100}=496=1+99d\Rightarrow \boxed{d=5}\Rightarrow u_{50}=246$.

Lại có: $5S=\dfrac{u_2-u_1}{u_1u_2}+\dfrac{u_3-u_2}{u_2u_3}+...+\dfrac{u_{49}-u_{48}}{u_{48}u_{49}}+\dfrac{u_{50}-u_{49}}{u_{49}u_{50}}=\dfrac{1}{u_1}-\dfrac{1}{u_{50}}=1-\dfrac{1}{246}\Rightarrow \boxed{S=\dfrac{49}{246}}$.

Câu 3: Cho số phức $|z^{2017}-1|=1$. Gọi $P=|z|$. Tính $A=2017.(\max P)-2017.(\min P)$.

A. $A=2017.\sqrt[2016]{2}$ **B.** $A=2017.\sqrt[2017]{3}$ **C.** $A=2017.\sqrt[2017]{2}$ **D.** $A=2017$

Lời giải: Ta có : $\max P=\max|z|>0\Leftrightarrow \max P^{2017}=\max|z|^{2017}=\max|z^{2017}|$.

Mặt khác ta cũng có: $\min P=|z|>0\Leftrightarrow \min P^{2017}=\min|z|^{2017}=\min|z^{2017}|$.

Gọi $z^{2017}=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z^{2017} là đường tròn tâm $I(0;1)$ có bán kính $R=1\Rightarrow \begin{cases} \max P^{2017}=2 \\ \min P^{2017}=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \max P=2017.\sqrt[2017]{2} \\ \min P=0 \end{cases}\Rightarrow A=2017.\sqrt[2017]{2}$. **Chọn C.**

Câu 4: Xét số phức z thỏa $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng:

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$ **B.** $|z|>2$ **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$

Lời giải: Ta xét các điểm $A(1;0),B(0;1)$ và $M(x;y)$ với M là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức. Ta có : $2|z-1|+3|z-i|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}+3\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2MA+3MB$.

Ta có : $2MA+3MB=2(MA+MB)+MB\ge 2AB+MB=2\sqrt{2}+MB\ge 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow 2|z-1|+3|z-i|\ge 2\sqrt{2}$. Mà theo giả thuyết ta có : $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}$.

Vậy $2|z-1|+3|z-i|=2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} M\in AB \\ MB=0 \end{cases}\Leftrightarrow M\equiv B\Rightarrow M(0;1)\Rightarrow|z|=1$

Câu 5: Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4=1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right).$$

A. 1. **B.** $\frac{19}{7}$. **C.** $\frac{17}{9}$. **D.** 2.

Lời giải: Ta có: $(z-1)^4=(2z-i)^4\Leftrightarrow\left[(z-1)^2-(2z-i)^2\right]\left[(z-1)^2+(2z-i)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[(z-1)+(2z-i)\right]\left[(z-1)-(2z-i)\right]\left[(z-1)^2+(2z-i)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow(3z-1-i)(-z-1+i)\left[5z^2-(2+4i)z\right]=0$

$\Leftrightarrow z_1=\frac{1+i}{3};\ z_2=-1+i;\ z_3=0;\ z_4=\frac{2+4i}{5}\Rightarrow\boxed{P=\frac{17}{9}}$. **Chọn C.**

Câu 6: Cho $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ và đặt $u_n=\frac{f(1)f(3)...f(2n-1)}{f(2)f(4)...f(2n)}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\log_2 u_n+u_n<-\frac{10239}{1024}$?

A. $n=23$ **B.** $n=29$ **C.** $n=33$ **D.** $n=21$

Lời giải: Ta có: $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1=\left(n^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right)\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Đến đây ta dễ dàng có: $u_n=\frac{\left(1^2+1\right)\left(2^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(4^2+1\right)...\left((2n-1)^2+1\right)\left((2n)^2+1\right)}{\left(2^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(4^2+1\right)\left(5^2+1\right)...\left((2n)^2+1\right)\left((2n+1)^2+1\right)}=\frac{1}{2n^2+2n+1}$.

Ta có: $\log_2 u_n+u_n<-\frac{10239}{1024}=\log_2\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}\Rightarrow u_n<\frac{1}{1024}\Rightarrow\boxed{n\geq 23}$. **Chọn A.**

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của module $|z-2+2i|$.

A. 1. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải: Ta có : $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow\left|(z-1+2i)(z-1-2i)\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|(z-1+2i)\right|=0\\\left|(z-1-2i)\right|=\left|(z+3i-1)\right|\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\left|(z-1+2i)\right|=0\Leftrightarrow z=1-2i\Rightarrow|z-2+2i|=1$.

Trường hợp 2: $\left|(z-1-2i)\right|=\left|(z+3i-1)\right|\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$ với $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

$\Rightarrow z-2+2i=\left(a-\frac{1}{2}i\right)-2+2i=(a-2)+\frac{3}{2}i\Rightarrow|z-2+2i|=\sqrt{(a-2)^2+\frac{9}{4}}\geq\frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1-2i|=2\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a|z-1|+b|\overline{z}+3+4i|$ với a,b là số thực dương.

A. $\sqrt{a^2+b^2}$. **B.** $\sqrt{2a^2+2b^2}$. **C.** $4\sqrt{2a^2+2b^2}$. **D.** a^2+b^2.

Lời giải: Ta gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức . Trong mặt phẳng phức xét các điểm $A(1;0)$, $B(-3;4)$. Khi đó $AB=4\sqrt{2}$.

Ta luôn có : $\begin{cases} MA^2+MB^2=AB^2 \ (py-ta-go) \\ P=aMA+bMB \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{P-bMB}{a}\right)^2+MB^2-AB^2=0$.

$\Rightarrow \left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)MB^2-\frac{2.P.b}{a}MB+\left(\frac{P^2}{a^2}-AB^2\right)=0 \ (*)$.

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì: $\Delta'_{(*)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}P^2-\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)\left(\frac{P^2}{a^2}-AB^2\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow -\frac{P^2}{a^2}+\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)AB^2 \ge 0 \Leftrightarrow P^2 \le AB^2\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow P \le AB\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{2a^2+2b^2}$. **Chọn C.**

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$?

A. $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ **B.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$ **C.** $y=\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ **D.** $y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$

Lời giải: Ta xét $x=0$ ta được $f^2(1)=-f^3(1) \Rightarrow f^2(1)\left(f(1)+1\right)=0 \Rightarrow f(1)=0 \vee f(1)=-1$.

Lại có $4f(1+2x)f'(1+2x)=1+3f^2(1-x)f'(1-x)$ thay $x=0$ ta có $4f(1)f'(1)=1+3f^2(1)f'(1)$.

Trường hợp 1: Nếu $f(1)=0$ thay vào ta thấy $0=1$ vô lý.

Trường hợp 2: Nếu $f(1)=-1$ thì thay vào $-4f'(1)=1+3f'(1) \Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{7}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{7}(x-1)-1=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$.

Câu 10: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=1$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2 \ne A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3 \ne A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n \ne A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $x_n > 5^{100}$.

A. 235 **B.** 234 **C.** 118 **D.** 117

Lời giải: Ta có: $x_k=a \Rightarrow$ Tiếp tuyến tại A_k có phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^3-3x^2+1=2a^3-3a^2+1+\left(6a^2-6a\right)(x-a) \Leftrightarrow (x-a)^2(2x+4a-3)=0 \Leftrightarrow x_{k+1}=-2x_k+\frac{3}{2}$

Vậy $\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=-2x_n+\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x_n=\alpha.(-2)^n+\beta$. Xét $\begin{cases} x_1=-2\alpha+\beta=1 \\ x_2=4\alpha+\beta=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{4} \\ \beta=\frac{1}{2} \end{cases}$

Do đó $x_n=-\frac{1}{4}.(-2)^n+\frac{1}{2}>5^{100}$. Chọn $n=2k+1 \Rightarrow -\frac{1}{4}.4^k.(-2)+\frac{1}{2}>5^{100} \Leftrightarrow 4^k+1>2.5^{100}$

$\Leftrightarrow 4^k>2.5^{100}-1 \Leftrightarrow k>\log_4\left(2.5^{100}-1\right) \Rightarrow$ Chọn $k=117 \Rightarrow \boxed{n=235}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), M(2;4;1), N(1;5;3)$. Tìm tọa độ điểm C nằm trên mặt phẳng $(P): x+z-27=0$ sao cho tồn tại các điểm B, D tương ứng thuộc các tia AM, AN để tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

A. $C(6;-17;21)$ **B.** $C(20;15;7)$ **C.** $C(6;21;21)$ **D.** $C(18;-7;9)$

Lời giải: C là giao của phân giác trong ΔAMN với (P). Ta có: $AM=3; AN=5$.

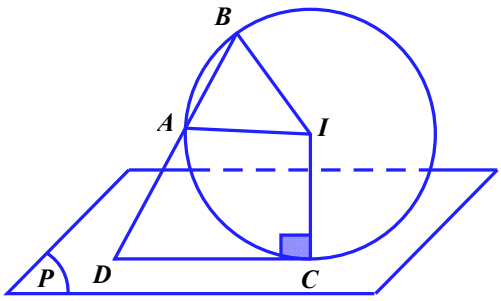
Gọi E là giao điểm phân giác trong ΔAMN và MN. Ta có: $\frac{EM}{EN}=\frac{AM}{AN}=\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{EM}+3\overrightarrow{EN}=\vec{0}\Leftrightarrow E\left(\frac{13}{8};\frac{35}{8};\frac{7}{4}\right)\Rightarrow (AE):\begin{cases}x=1+5t\\y=2+19t\\z=-1+22t\end{cases}\Rightarrow \boxed{C(6;21;21)}.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và tọa độ hai điểm $A(1;1;1), B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó?

A. $R=4$ **B.** $R=\frac{2\sqrt{33}}{3}$ **C.** $R=\frac{2\sqrt{11}}{3}$ **D.** $R=6$

Lời giải: Ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm $D(3;3;3)$ là giao điểm của (AB) và (P). Do đó theo tính chất của phương tích ta được: $DA.DB=DI^2-R^2$. Mặt khác vì DC là tiếp tuyến của mặt cầu (S) cho nên $DC^2=DI^2-R^2$.



Do vậy $DC^2=DA.DB=36$ cho nên $DC=6$ (Là một giá trị không đổi).

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định tâm D với bán kính $\boxed{R=6}$. **Chọn D**.

Câu 13: Xét các số thực với $a\neq 0, b>0$ sao cho phương trình $ax^3-x^2+b=0$ có ít nhất hai nghiệm thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng:

A. $\frac{4}{27}$ **B.** $\frac{15}{4}$ **C.** $\frac{27}{4}$ **D.** $\frac{4}{15}$

Lời giải: $y'=0\Leftrightarrow x=0$ và $x=\frac{2}{3a}$. Từ đây ta có tọa độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;b)$ và $B\left(\frac{2}{3a};b-\frac{4}{27a^2}\right)$. Để có ít nhất 2 giao điểm với trục hoành thì $y_A.y_B\leq 0\Leftrightarrow b\left(b-\frac{4}{27a^2}\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow \left(27a^2b-4\right)b\leq 0\Leftrightarrow a^2b\leq\frac{4}{27}$ (Vì $b>0$). **Chọn A**.

Câu 14: Cho số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo. Khi số phức z có môđun lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

A. $P=0$ **B.** $P=4$ **C.** $P=2\sqrt{2}+1$ **D.** $P=1+3\sqrt{2}$

Lời giải: Ta có: $\frac{z-2i}{z-2}=\frac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi}=\frac{(a+(b-2)i)(a-2-bi)}{(a-2)^2+b^2}$ là số thuần ảo

$$\Leftrightarrow a(a-2)+b(b-2)=0\Leftrightarrow a^2-2a+b^2-2b=0\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=2\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+\sqrt{2}\sin\alpha\\b=1+\sqrt{2}\cos\alpha\end{cases}$$

Ta có: $a^2+b^2=2(a+b)\Leftrightarrow |z|^2=4+2\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\le 4+2\sqrt{2}.\sqrt{1^2+1^2}=8$

$\Rightarrow |z|\max=2\sqrt{2}$ khi $\sin\alpha=\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \boxed{a+b=4}$.

Câu 15: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của A qua D. Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F. Tính thể tích V của khối tứ diện $AECF$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{30}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{60}$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{40}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{15}$

Lời giải: Áp dụng định lý Menelaus: $\dfrac{HB}{HM}.\dfrac{FA}{FB}.\dfrac{EM}{EA}=1\Leftrightarrow 2.\dfrac{FA}{FB}.\dfrac{3}{4}=1\Leftrightarrow\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow AF=\dfrac{2}{5}AB$ và $AE=2AD$. Ta có: $\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABD}}=\dfrac{AE}{AD}.\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow V_{AECF}=\dfrac{4}{5}V_{ABCD}=\dfrac{4}{5}.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

Câu 16: Xét các số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2+3i|=2$. Tính $P=a+b$ khi $|z+2-5i|+|z-6+3i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$ **B.** $P=-3$ **C.** $P=7$ **D.** $P=-7$

Lời giải: Do $|z+2+3i|=2\Rightarrow (a+2)^2+(b+3)^2=2$. Suy ra $M\in(C)$ có tâm $I(-2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$. Gọi $A(-2;5)$, $B(6;-3)$, $I'(2;1)$. Suy ra $P=MA+MB\le\sqrt{2(MA^2+MB^2)}$

Mặt khác ta có $MA^2+MB^2=2MI'^2+\dfrac{AB^2}{2}$. Suy ra $P_{Max}\Leftrightarrow MI'_{Max}\Leftrightarrow I'$ là hình chiếu vuông góc của M trên $AB\Leftrightarrow M,I,I'$ thẳng hàng.Vì ta thấy $IA=IB\Rightarrow MA=MB$ nên xảy ra dấu =.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(a+2;b+3),\overrightarrow{II'}=(4;4)$ nên $AB\Leftrightarrow M,I,I'$ thẳng hàng$\Leftrightarrow 4(a+2)=4(b+3)\Leftrightarrow a=b+1$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2=2\\ a=b+1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-3;b=-4\\ a=-1;b=-2\end{array}\right.$

Mặt khác $\begin{cases}M(-3;-4)\Rightarrow P=MA+MB=2\sqrt{82}\\ M(-1;-2)\Rightarrow P=MA+MB=2\sqrt{50}\end{cases}$. Vậyđể P_{Max} thì $M(-3;-4)$ Suy ra $a+b=-7$.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln(m+2\sin x+\ln(m+3\sin x))=\sin x$ có nghiệm?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải: $[m+2\sin x+\ln(m+3\sin x)]+\ln[m+2\sin x+\ln(m+3\sin x)]=(m+3\sin x)+\ln(m+3\sin x)$

$\Leftrightarrow a+\ln a=b+\ln b\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow m+2\sin x+\ln(m+3\sin x)=m+3\sin x\Leftrightarrow\ln(m+3\sin x)=\sin x$

$\Leftrightarrow m+3\sin x=e^{\sin x}\Leftrightarrow m=e^{\sin x}-3\sin x$. Xét hàm số $f(t)=e^t-3t$ với $t\in[-1;1]$.

Vì $f'(t)=e^t-3<0\ \forall t\in[-1;1]$ nên: $\begin{cases}\max e^{\sin x}-3\sin x=f(-1)=\dfrac{1}{e}+3\\ \min e^{\sin x}-3\sin x=f(1)=e-3\end{cases}\Rightarrow\boxed{e-3\le m\le\dfrac{1}{e}+3}$. **Chọn B.**

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$. Có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm nằm trên mặt phẳng (P) và tiếp xúc với ba trục tọa độ $x'Ox,y'Oy,z'Oz$?

A. 8 mặt cầu **B.** 4 mặt cầu **C.** 3 mặt cầu **D.** 1 mặt cầu

Lời giải: Gọi tâm $I(a,b,c)$, ta có $a+2b+c=4$. Vì $d(I,Ox)=d(I,Oy)=d(I,Oz)$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{c^2+a^2} \Leftrightarrow |a|=|b|=|c|$

- Nếu $a=m,b=m,c=-m \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow m=2 \Rightarrow I(2;2;-2)$
- Nếu $a=m,b=m,c=m \Rightarrow m=1 \Rightarrow I(1;1;1)$
- Nếu $a=m,b=-m,c=m \Rightarrow 0=4$ (Loại)
- Nếu $a=-m,b=m,c=m \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow I(-2;2;2)$

Vậy có tất cả 3 mặt cầu thỏa mãn điều kiện của bài toán đưa ra.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f^2(x)\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$?

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** -1

Lời giải: Ta đặt $I=\int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \Rightarrow |I|=\left|\int\limits_{-1}^{1}(x^2-a)f(x)dx\right| \le \int\limits_{-1}^{1}|x^2-a||f(x)|dx \le \int\limits_{-1}^{1}|x^2-a|dx \ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

Do đó ta suy ra $|I|\le \min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}|x^2-a|dx$. Đến đây ta chia bài toán thành 3 trường hợp như sau:

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min\limits_{a\le 0}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-a)dx=\min\limits_{a\le 0}\left(\frac{2}{3}-2a\right)=\frac{2}{3}$.

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min\limits_{a\ge 1}\int\limits_{-1}^{1}(a-x^2)dx=\min\limits_{a\ge 1}\left(2a-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min\limits_{a\in[0;1]}\left(\int\limits_{-1}^{-\sqrt{a}}(x^2-a)dx+\int\limits_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx+\int\limits_{\sqrt{a}}^{1}(x^2-a)dx\right)$

$\Leftrightarrow \min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min\limits_{a\in[0;1]}\left[\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Big|_{-1}^{-\sqrt{a}}+\left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}+\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Big|_{\sqrt{a}}^{1}\right]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\min\limits_{a\in[0;1]}\left(\frac{8a\sqrt{a}}{3}-2a+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $a=\frac{1}{4}$.

Kết luận: Như vậy $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}|x^2-a|dx=\frac{1}{2}$ do đó $|I|\le\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\min I=-\frac{1}{2}}$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(x)\in[-8;8]$ với mọi $x\in[0;1]$ và $\int\limits_{0}^{1} xf(x)dx=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $\int\limits_{0}^{1} x^3 f(x)dx$?

A. 2 **B.** $\frac{31}{16}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{17}{8}$

Lời giải: Ta đặt $I=\int\limits_{0}^{1} x^3 f(x)dx$ khi đó: $|I-3a|=\left|\int\limits_{0}^{1}(x^3-ax)f(x)dx\right| \le \int\limits_{0}^{1}|x^3-ax||f(x)|dx$

$\Rightarrow |I-3a| \le 8\int_0^1 |x^3-ax|dx \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow I \le 3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow I \le \min\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right)$.

Trường hợp 1: Nếu $a \le 0$ khi đó $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right) = \min\limits_{a\le 0}\left(3a+8\int_0^1 (x^3-ax)dx\right) = \min\limits_{a\le 0}(2-a) = 2$

Trường hợp 2: Nếu $a \ge 1$ khi đó $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right) = \min\limits_{a\ge 1}\left(3a+8\int_0^1 (ax-x^3)dx\right) = \min\limits_{a\ge 1}(7a-2) = 5$

Trường hợp 3: Nếu $a \in [0;1]$ khi đó ta có đánh giá sau:

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right) = \min_{a\in[0;1]}\left(3a+8\int_0^{\sqrt{a}} (ax-x^3)dx+8\int_{\sqrt{a}}^1 (x^3-ax)dx\right) = \min_{a\in[0;1]}\left(4a^2-a+2\right) = \frac{31}{16}$$

Kết luận: Vậy $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1 |x^3-ax|dx\right) = \frac{31}{16} \Rightarrow I \le \frac{31}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{8}; I=\frac{31}{12} > 3a=\frac{3}{8}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 21: Sau khi khai triển và rút gọn, biểu thức $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{20}+\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10}$ có bao nhiêu số hạng?

A. 27 **B.** 28 **C.** 29 **D.** 32

Lời giải: Ta có: $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{20}+\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (-1)^k x^{20-3k} + \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (-1)^i x^{30-4i}$. Khai triển này bao gồm tất cả $21+11=32$ số hạng. Tuy nhiên ta xét các số hạng bị trùng lũy thừa của nhau.

Ta có: $20-3k=30-4i \Leftrightarrow \boxed{4i-3k=10}$ do đó k phải là số chẵn nhưng không chia hết cho 4. Ta có bảng:

k	2	6	10	14	18
i	4	7	10	13 (L)	16 (L)

Vậy có 3 cặp số hạng sau khi khai triển trùng lũy thừa của nhau. **Chọn C**.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=f(1)=1; f'(0)=2018$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx=-2018$ **B.** $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx=2018$

C. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx=1$ **D.** $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx=-1$

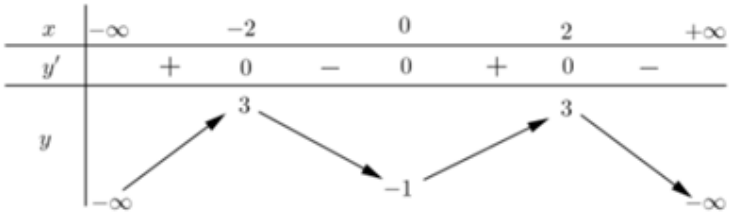
Lời giải: Ta có: $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = \int_0^1 (1-x)df'(x) = f'(x)(1-x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x)dx = -2018$. **Chọn A**.

Câu 23: Cho phương trình $8^x - m2^{2x+1} + (2m^2-1)2^x + m - m^3 = 0$. Biết tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình có ba nghiệm phân biệt là $(a;b)$. Tính $S=ab$?

A. $S=\frac{2}{\sqrt{3}}$ **B.** $S=\frac{4}{3}$ **C.** $S=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $S=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải: Ta đặt $t=2^x$ khi đó phương trình có dạng $(t-m)(t^2-mt+m^2-1)=0$. Do đó điều kiện cần và đủ là 3 nghiệm $t>0$ cho nên: $\begin{cases} m>0; S=m>0 \\ P=m^2-1>0 \\ \Delta=m^2-4(m^2-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{1<m<\frac{2}{\sqrt{3}}}$. **Chọn A.**

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-\infty;-2)$

Lời giải: Ta có: $y'=2xf'(x^2-2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ f'(x^2-2)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ f'(x^2-2)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0; \left[\begin{array}{l} x^2-2<-2 \\ 0<x^2-2<2 \end{array}\right. \\ x<0; \left[\begin{array}{l} x^2-2>2 \\ -2<x^2-2<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}<x<2 \\ x<-4 \\ -\sqrt{2}<x<0 \end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $y=f(x^2-2)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-4),(-\sqrt{2};0),(\sqrt{2};2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-4;-\sqrt{2}),(0;\sqrt{2}),(2;+\infty)$. **Chọn B.**

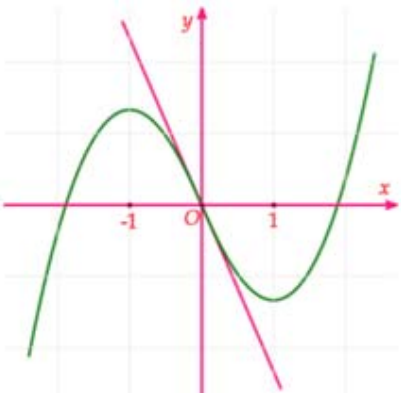
Câu 25: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có ba điểm cực trị?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$ **B.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $(1;+\infty)$

Lời giải: (*Học sinh tự vẽ hình tưởng tượng*) Hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có hai điểm cực trị **không âm**.

Vậy phương trình $3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ khi: $\begin{cases} \Delta'=4m^2-5m+1>0 \\ S=\frac{2(2m+1)}{3}>0;\ P=m\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0\leq m<\frac{1}{4} \\ m>1 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường thẳng trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại gốc tọa độ. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f'(x)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $m<-2$ **B.** $-2<m<0$

C. $0<m<2$ **D.** $m>2$

Lời giải: Dựa vào đồ thị hàm số trên ta thấy rằng $x=0$ chính là nghiệm của phương trình $f''(x)=0$ và là điểm cực trị của hàm số $y=f'(x)$. Mặt khác hàm số $y=f'(x)$ có dạng hàm số bậc 2 với hệ số bậc cao nhất dương. Khi đó giá trị nhỏ nhất này chính là $f'(0)$ đồng thời là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy tiếp tuyến có dạng $y=ax$ và đi qua điểm có tọa độ xấp xỉ $(1;-2,2)$ cho nên ta suy ra $\boxed{-2,2=a=f'(0)=m}$. **Chọn A.**

Câu 27: Cho dãy số (a_n) thỏa mãn điều kiện $a_1=1;\ 5^{a_{n+1}-a_n}-1=\dfrac{3}{3n+2}$ với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$. Tìm số nguyên dương $n>1$ nhỏ nhất để $a_n\in\mathbb{Z}$?

A. $n=39$ **B.** $n=41$ **C.** $n=49$ **D.** $n=123$

Lời giải: Ta có: $5^{a_n-a_{n-1}}=1+\dfrac{3}{3n-1};\ 5^{a_{n-1}-a_{n-2}}=1+\dfrac{3}{3n-4};\ ...5^{a_2-a_1}=1+\dfrac{3}{5}$.

Nhân vế với vế ta được: $5^{a_n-a_1}=\left(1+\dfrac{3}{3n-1}\right)\left(1+\dfrac{3}{3n-4}\right)....\left(1+\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{8.11.14...(3n-1)(3n+2)}{5.8.11....(3n-4)(3n-1)}=\dfrac{3n+2}{5}$.

Khi đó ta có công thức tổng quát $\boxed{a_n=\log_5(3n+2)}$. **Chọn B.**

Chú ý: Tới đoạn này sử dụng lệnh CALC là nhanh nhất. Nhưng nếu bài toán không cho trước đáp số có thể sử dụng Bảng TABLE để truy tìm giá trị nguyên dương $n>1$ nhỏ nhất để $a_n\in\mathbb{Z}$.

Câu 28: Cho số thực z_1 và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2-2i|=1$ và $\dfrac{z_2-z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$. Tính giá trị của biểu thức $T=M+m$?

A. $T=4$ **B.** $T=4\sqrt{2}$ **C.** $T=3\sqrt{2}+1$ **D.** $T=\sqrt{2}+3$

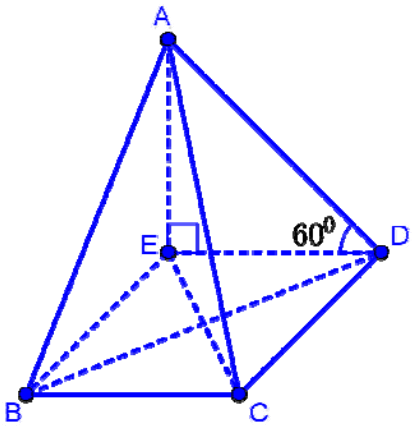
Lời giải: Ta đặt $z_1=a,z_2=b+ci$ khi đó: $\dfrac{z_2-z_1}{1+i}=\dfrac{(a-b-ci)(i-1)}{2}\in\mathbb{R}\Rightarrow\boxed{c=b-a}$ đồng thời ta cũng có $|z_2-2i|=1\Rightarrow\boxed{b^2+(c-2)^2=1}$. Do vậy $|z_1-z_2|=|(a-b)-ci|=|c+ci|=|c|\sqrt{2}$.

Vì $b^2+(c-2)^2=1\ge(c-2)^2\Rightarrow 1\le c\le 3\Rightarrow 1\le|c|\le 3$ do đó $|z_1-z_2|=|c|\sqrt{2}\in\left[\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]\Rightarrow\boxed{T=4\sqrt{2}}$.

Câu 29: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC=3,CD=4,\angle ABC=\angle BCD=\angle ADC=90^0$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60^0. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD)?

A. $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$

C. $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$



Lời giải: Ta dựng $AE\perp(BCD)$ và dễ dàng chứng minh được $BCDE$ là hình chữ nhật. Khi đó $\angle(AD,BC)=\angle ADE=60^0$ khi đó ta suy ra $AE=3\sqrt{3}\Rightarrow V_{ABCD}=6\sqrt{3}$.

Mặt khác ta chú ý công thức tính nhanh:

$$V_{ABCD}=\frac{2S_{ABC}S_{ACD}\sin((ABC),(ACD))}{3AC}$$

Do vậy đặt $\measuredangle\left((ABC),(ACD)\right)=\alpha$ và theo định lý Pythagoras ta suy ra $AB=\sqrt{43};AD=6;AC=2\sqrt{13}$.

Khi đó: $6\sqrt{3}=\dfrac{2}{6\sqrt{13}}\left(\dfrac{1}{2}3\sqrt{43}\right)(12)\sin\alpha\Rightarrow\boxed{\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{43}}{43}}$.

Câu 30: Tìm giá trị lớn nhất của $P=\left|z^2-z\right|+\left|z^2+z+1\right|$ với z là số phức thỏa mãn $|z|=1$.

A. $\max P=\dfrac{13}{4}$ **B.** $\max P=\dfrac{9}{4}$ **C.** $\max P=\dfrac{13}{3}$ **D.** $\max P=\dfrac{11}{3}$

Lời giải: Ta có $\begin{cases}\left|z^2-z\right|^2=\left(z^2-z\right)\left(\bar{z}^2-\bar{z}\right)=2-z-\bar{z}=2-2x\Rightarrow\left|z^2-z\right|=\sqrt{2-2x}\\ \left|z^2+z+1\right|^2=\left(z^2+z+1\right)\left(\bar{z}^2+\bar{z}+1\right)=1+2\left(z+\bar{z}\right)+\left(z+\bar{z}\right)^2\Rightarrow\left|z^2+z+1\right|=\left|2x+1\right|\end{cases}$.

Từ đây ta tìm được $\boxed{\max P=\max\limits_{[-1;1]}\left(\sqrt{2-2x}+\left|2x+1\right|\right)=\dfrac{13}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{8}}$.

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=m^2+2m+5$ với m là số thực. biết rằng tập hợp điểm của số phức $w=(3+4i)z-2i$ là đường tròn. Tính bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $R_{\min}=5$ **B.** $R_{\min}=20$ **C.** $R_{\min}=4$ **D.** $R_{\min}=25$

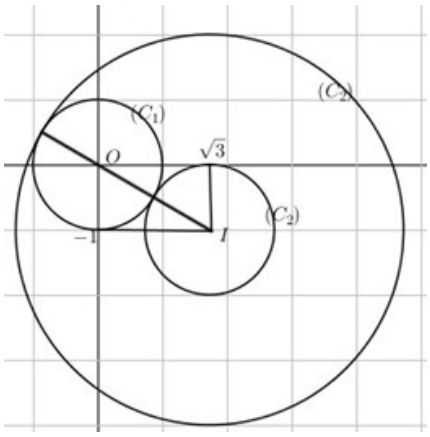
Lời giải: Ta có: $\left|(3+4i)z\right|=5\left(m^2+2m+5\right)\Rightarrow\left|w+2i\right|=5\left(m^2+2m+5\right)$. Vậy $R=5\left(m^2+2m+5\right)\geq 20$.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị của m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải: Gọi $z=x+yi,(x,y\in R)$,ta có hệ:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1(1)\\ (x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2=m^2(m\geq 0)\end{cases}$$



Ta thấy $m=0\Rightarrow z=\sqrt{3}-i$ không thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ suy ra $m>0$. Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0),R_1=1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I(\sqrt{3};-1),R_2=m$,ta thấy $OI=2>R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1). Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều điều này xảy ra khi $OI=R_1+R_2\Leftrightarrow m+1=2\Leftrightarrow m=1$ hoặc $R_2=R_1+OI\Leftrightarrow m=1+2=3$.

Câu 33: Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N'. Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|z+4i-5\right|$.

A. $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải: Gỉa sử $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$

Khi đó số phức liên hợp của z là $\bar{z}=a-bi$ được biểu diễn bởi điểm $M'(a;-b)$

Ta có: $z(4+3i)=(a+bi)(4+3i)=4a+3ai+4bi-3b=(4a-3b)+(3a+4b)i$ do đó số phức $z(4+3i)$ được biểu diễn bởi điểm $N(4a-3b;3a+4b)$

Khi đó điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z(4+3i)$ là $N'(4a-3b;-3a-4b)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MM'}=(a-a;-b-b)\\ \overrightarrow{NN'}=(4a-3b-4a-3b;-3a-4b-3a-4b)\\ \overrightarrow{MN}=(4a-3b-a;3a+4b-b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MM'}=(0;-2b)\\ \overrightarrow{NN'}=(0;-6a-8b)\\ \overrightarrow{MN}=(3a+3b;3a+3b)\end{cases}$

Vì $MM'N'N$ là một hình chữ nhật nên ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MN}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2b=-6a-8b\\ a,b\neq 0\\ -2b(3a+3b)=0\end{cases}\Leftrightarrow a=-b$

$\Rightarrow z=-b+bi\Rightarrow|z+4i-5|=|-b-5+(b+4)i|=\sqrt{(-b-5)^2+(b+4^2)}=\sqrt{2\left(b+\frac{9}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $|z+4i-5|_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow b=\frac{-9}{2}$ hay $z=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i$.

Câu 34: Cho số phức $z=m-2+(m^2-1)i$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox.

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải: Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ.

Vì $z=m-2+(m^2-1)i\Rightarrow\begin{cases}x=m-2\\ y=m^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=x+2\\ y=m^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=x+2\\ y=(x+2)^2-1\end{cases}$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức là đường cong (C) với $y=(x+2)^2-1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox ta có : $(x+2)^2-1=0\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=-1\end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox là $S=\int_{-3}^{-1}\left|(x+2)^2-1\right|dx=\frac{4}{3}$. **Chọn B.**

Câu 35: Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\frac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$.

Lời giải: Ta có: $(|z|+2)+i(2|z|-1)=\frac{\sqrt{10}}{z}\Rightarrow\frac{\sqrt{10}}{|z|}=\sqrt{(|z|+2)^2+(2|z|-1)^2}\Rightarrow\boxed{|z|=1}$. **Chọn D.**

Câu 36: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=4\sqrt{6}$. **B.** $P=2\sqrt{26}$. **C.** $P=5+3\sqrt{5}$. **D.** $P=32+3\sqrt{2}$.

Lời giải: Gọi $\begin{cases} z_1 = a+bi \\ z_2 = c+di \end{cases} (a,b,c,d \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2 = a+c+(b+d)i \\ z_1-z_2 = a-c+(b-d)i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c+(b+d)i = 8+6i \\ \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} |z_1+z_2| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = |8+6i| \\ (a-c)^2+(b-d)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)^2+(b+d)^2 = 100 \\ (a-c)^2+(b-d)^2 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow (a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2 = 104 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 = 52$

Mặt khác $P = |z_1|+|z_2| = \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \overset{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)} = \sqrt{2.52} = 2\sqrt{26}.$

Câu 37: Cho số phức z thỏa mãn $|z-8|+|z+8| = 20$. Gọi m,n lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z|$. Tính $P = m+n$.

A. $P = 16.$ **B.** $P = 10\sqrt{2}.$ **C.** $P = 17.$ **D.** $P = 5\sqrt{10}.$

Lời giải: Gọi $z = x+yi\ (x,y \in \mathbb{R})$ và $M(x,y)$ là điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng phức. Xét các điểm $F_1(-8;0), F_2(8;0)$. Ta có : $MF_1 = \sqrt{(-8-x)^2+(-y)^2} = \sqrt{(x+8)^2+y^2} = |z+8|.$

$MF_2 = \sqrt{(8-x)^2+(-y)^2} = \sqrt{(x-8)^2+y^2} = |z-8|.$

$\Rightarrow |z-8|+|z+8| = 20 \Leftrightarrow \sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{(x-8)^2+y^2} = 20 \Leftrightarrow MF_1+MF_2 = 20$

Do $MF_1+MF_2 \geq F_1F_2 \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là một *elip* có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 20 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = a^2-c^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \max|z| = 10 \\ \min|z| = 6 \end{cases} \Rightarrow m+n = 16.$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)| = 6$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,dx = 0$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int\limits_0^1 x^3 f(x)\,dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$ **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Lời giải: Ta có với mọi số thực $a \in \mathbb{R}$ thì $\int\limits_0^1 ax^2 f(x)\,dx = 0$ do đó:

$$\left|\int\limits_0^1 x^3 f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_0^1 (x^3-ax^2) f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_0^1 |x^3-ax^2||f(x)|\,dx \leq 6\int\limits_0^1 |x^3-ax^2|\,dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Do đó: $\left|\int\limits_0^1 x^3 f(x)\,dx\right| \leq \min\limits_{a\in\mathbb{R}} 6\int\limits_0^1 |x^3-ax^2|\,dx = \min\limits_{a\in\mathbb{R}} g(a)$. Tới đây ta chia các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a \leq 0$ thì $x^3-ax^2 = x^2(x-a) \geq 0\ \ \forall x \in [0;1]$. Khi đó:

$$g(a) = 6\int\limits_0^1 |x^3-ax^2|\,dx = 6\int\limits_0^1 x^3-ax^2\,dx = 6\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{3}\right) \Rightarrow \min\limits_{a\leq 0} g(a) = \frac{3}{2}$$

Trường hợp 2: Nếu $a \geq 1$ thì $x^3-ax^2 = x^2(x-a) \leq 0\ \ \forall x \in [0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^1 ax^2-x^3dx=6\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\min_{a\ge1}g(a)=\frac{1}{2}$$

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ thì $f(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^a ax^2-x^3dx+\int_a^1 x^3-ax^2dx=\frac{2a^4-4a+3}{2}$.

Ta tìm được $\min_{a\in[0;1]}g(a)=\min_{a\in[0;1]}\left(\frac{2a^4-4a+3}{2}\right)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ vậy $\boxed{\min_{a\in\mathbb{R}}g(a)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

Do vậy: $\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le\min_{a\in\mathbb{R}}g(a)\Rightarrow\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}\Rightarrow\boxed{\max_{[0;1]}\int_0^1 x^3f(x)dx=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2021\times2022}$ **B.** $\frac{1}{2018\times2021}$ **C.** $\frac{1}{2018\times2019}$ **D.** $\frac{1}{2019\times2021}$

Lời giải: Ta có: $3f(x)+x.f'(x)\ge x^{2018}\Rightarrow3x^2f(x)+x^3f'(x)\ge x^{2020}$

$$\Rightarrow\left[x^3f(x)\right]'\ge x^{2020}\Rightarrow\int_0^t\left[x^3f(x)\right]'dx\ge\int_0^t x^{2020}dx\ \ \forall t\in[0;1]\Rightarrow f(t)\ge\frac{t^{2018}}{2021}$$

Khi đó $\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1\frac{x^{2018}}{2021}dx=\frac{1}{2019.2021}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ là $\frac{1}{2019.2021}$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0,\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{11}$ và $\int_0^1 x^4f(x)dx=-\frac{1}{55}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{-1}{7}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{-1}{55}$ **D.** $\frac{1}{11}$

Lời giải: $\int_0^1 x^4f(x)dx=\left[\frac{x^5}{5}f(x)\right]\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^5}{5}f'(x)dx$. Suy ra $\int_0^1 x^5f'(x)dx=\frac{1}{11}$. Hơn nữa ta dễ dàng tính được $\int_0^1\left(x^5\right)^2dx=\frac{1}{11}$. Do đó $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx-2\int_0^1 x^5f'(x)dx+\int_0^1\left(x^5\right)^2dx=0\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)-x^5\right]^2dx=0$.

Suy ra $f'(x)=x^5$, do đó $f(x)=\frac{1}{6}x^6+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=-\frac{1}{6}$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^6-1}{6}dx=\frac{-1}{7}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0,\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{3}{2}-2\ln2$ và $\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=2\ln2-\frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1-2\ln2}{2}$ **B.** $\frac{3-2\ln2}{2}$ **C.** $\frac{3-4\ln2}{2}$ **D.** $\frac{1-\ln2}{2}$

Lời giải: Ta có: $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = \int\limits_0^1 f(x)d\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = \left[\left(1-\frac{1}{x+1}\right)f(x)\right]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)dx$.

Suy ra $\int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)dx = \frac{3}{2}-2\ln 2$. Hơn nữa ta tính được:

$$\int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \int\limits_0^1 \left(1-2\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \left[x-2\ln|x+1|-\frac{1}{(x+1)}\right]\Big|_0^1 = \frac{3}{2}-2\ln 2.$$

Do đó $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx - 2\int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)dx + \int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^3 \left[f'(x)+\frac{1}{x+1}-1\right]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x) = 1-\frac{1}{x+1}$, do đó $f(x) = x-\ln(x+1)+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C = \ln 2 - 1$.

Ta được $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \left[x-\ln(x+1)+\ln 2-1\right]dx = \frac{1}{2}-\ln 2$.

Câu 42: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m+\sin(m+\sin 3x) = \sin(3\sin x)+4\sin^3 x$ có nghiệm thực?

A. 9 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 8

Lời giải: Ta có $m+\sin 3x+\sin(m+\sin 3x) = \sin(3\sin x)+4\sin^3 x+\sin 3x$

$\Leftrightarrow (m+\sin 3x)+\sin(m+\sin 3x) = (3\sin x)+\sin(3\sin x) \Rightarrow m+\sin 3x = 3\sin x \Rightarrow \boxed{m = 4\sin^3 x}$. **Chọn A.**

Câu 43: Phương trình $e^x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} - ... - \frac{1}{x-2018} - 2018 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2018 **D.** 2019

Lời giải: Ta có: $f'(x) = e^x + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + ... + \frac{1}{(x-2018)^2} > 0$ do đó lập bảng biến thiên **Chọn D.**

Câu 44: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}; d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}; d_3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}; d_4 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Biết rằng đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}(2;a;b)$ cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Giá trị của biểu thức $2a+3b$ bằng:

A. 5 **B.** -1 **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Lời giải: Ta phát hiện ra 2 đường thẳng đầu đồng phẳng do đó ta viết phương trình mặt phẳng đi qua 2 đường thẳng đó. Tiếp đó xác định giao điểm của 2 đường thẳng d_3, d_4 với mặt phẳng vừa tìm được và Δ chính là đường thẳng đi qua 2 giao điểm đó.

Câu 45: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$ và điểm $A(2;11;-5)$. Biết khi m thay đổi tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua A. Tìm tổng bán kính hai mặt cầu đó.

A. $7\sqrt{2}$ **B.** $15\sqrt{2}$ **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $12\sqrt{2}$

Lời giải: Gọi tâm $I(a,b,c)$ khi đó bán kính mặt cầu: $R = IA = d(I,(P))$

$\Leftrightarrow R=\sqrt{(a-2)^2+(b-11)^2+(c+5)^2}=\dfrac{\left|2ma+(m^2+1)b+(m^2-1)c-10\right|}{(m^2+1)\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow R=\sqrt{(a-2)^2+(b-11)^2+(c+5)^2}=\dfrac{\left|m^2(b+c)+2ma+b-c-10\right|}{(m^2+1)\sqrt{2}}$ đúng với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Do vậy $\begin{cases}a=0\\b+c=b-c-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\c=-5\end{cases}$ nên $R=\sqrt{4+(b-11)^2}=\dfrac{|b-5|}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=9\\b=25\end{array}\right.\Rightarrow\boxed{R_1+R_2=12\sqrt{2}}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m+2$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m<2018$ sao cho với mọi bộ ba số thực $a,b,c\in[-1;3]$ thì $f(a),f(b),f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác nhọn.

A. 1989 **B.** 1969 **C.** 1997 **D.** 2008

Lời giải: Ta đặt $g(x)=x^3-3x+2\Rightarrow\boxed{\max\limits_{[-1;3]}g(x)=20;\min\limits_{[-1;3]}g(x)=0}$ khi đó $f(x)=m+g(x)$.

Ta có: $f(a)+f(b)>f(c)\ \forall a,b,c\in[-1;3]\Rightarrow m>g(c)-(g(a)+g(b))\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow m>\max\limits_{[-1;3]}g(x)-2\min\limits_{[-1;3]}g(x)\Rightarrow\boxed{m>20}$.

Và $f^2(a)+f^2(b)>f^2(c)\ \forall a,b,c\in[-1;3]\Rightarrow(m+g(a))^2+(m+g(b))^2>(m+g(c))^2\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow m^2+2(g(a)+g(b)-g(c))m+g^2(a)+g^2(b)-g^2(c)>0\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow(m+g(a)+g(b)-g(c))^2-2g(a)g(b)+2g(a)g(c)+2g(b)g(c)-2g^2(c)>0\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow(m+g(a)+g(b)-g(c))^2>2(g(a)-g(c))(g(b)-g(c))\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$\Rightarrow(m+g(a)+g(b)-g(c))^2>2\left(\max\limits_{[-1;3]}g(x)-\min\limits_{[-1;3]}g(x)\right)^2\ \forall a,b,c\in[-1;3]$

$m>\max\limits_{[-1;3]}g(x)+20\sqrt{2}-2\min\limits_{[-1;3]}g(x)\Rightarrow\boxed{m\geq 49}$. **Chọn B.**

Câu 47: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình các mặt phẳng $(P):x-y+2z+1=0$ và $(Q):2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Ox đồng thời cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ tồn tại duy nhất một mặt cầu thỏa mãn điều kiện đã cho.

A. $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ **B.** $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $r=\sqrt{3}$ **D.** $r=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

Lời giải: Ta gọi $I(a;0;0)$ là tâm mặt cầu. Khi đó bán kính: $R^2=r^2+d(I,(Q))^2=2^2+d(I,(P))^2$

$\Leftrightarrow r^2+\dfrac{(2a-1)^2}{6}=4+\dfrac{(a+1)^2}{6}$ do đó để có duy nhất 1 tâm mặt cầu thỏa mãn thì giải $\Delta=0$. **Chọn B.**

Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2,1,0)$, song song với mặt phẳng $(P):x-y-z=0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0,2,0),N(4,0,0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất? Vector chỉ phương của Δ là?

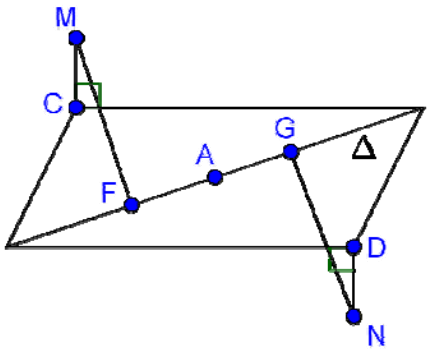
A. $\overrightarrow{u_\Delta}=(1,0,1)$ **B.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(2,1,1)$ **C.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(3,2,1)$ **D.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(0,1,-1)$

Lời giải: Ta gọi $(Q): x-y-z-1=0$ là mặt phẳng qua điểm $A(2,1,0)$, song song với mặt phẳng $(P): x-y-z=0$.

Đồng thời ta phát hiện ra rằng điểm $A(2,1,0)$ là trung điểm MN.

Khi đó tổng khoảng cách $MF+NG \geq MC+ND=2d(M,(Q))$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi Δ là đường thẳng đi qua A và hai hình chiếu C và D của các điểm $M(0,2,0), N(4,0,0)$ tới mặt phẳng (Q). **Chọn A.**



Câu 49: Cho hai số thực a,b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m,n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x)-2\log_a x-3\log_b x-1=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=mn$.

A. $\frac{16875}{16}$ **B.** $\frac{4000}{27}$ **C.** 15625 **D.** 3456

Lời giải: phương trình tương đương với: $\log_b a(\log_a x)^2-(2+3\log_b a)\log_a x-1=0$

Theo vi – ét ta có: $\log_a m+\log_a n=\frac{2+3\log_b a}{\log_b a}=2\log_a b+3=\log_a(a^3b^2)\Leftrightarrow mn=a^3b^2$

Khi đó ta có $S=f(a)=a^3(10-a)^2\leq\max_{(1;9)}f(a)=f(6)=3456$. **Chọn đáp án D.**

Câu 50: Cho ba số thực a,b,c thay đổi lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b+c=100$. Gọi m,n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2-(1+2\log_a b+3\log_a c)\log_a x-1=0$. Tính $S=a+2b+3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\frac{500}{3}$ **B.** $S=\frac{700}{3}$ **C.** $S=\frac{650}{3}$ **D.** $S=200$

Lời giải: Theo vi – ét ta có: $\log_a m+\log_a n=1+2\log_a b+3\log_a c=\log_a(ab^2c^3)\Leftrightarrow mn=ab^2c^3$

Theo $AM-GM$ ta có: $mn=ab^2(100-a-b)^3=\frac{4}{27}\left(3a.\frac{3b}{2}.\frac{3b}{2}(100-a-b)(100-a-b)(100-a-b)\right)$

$$\leq\frac{4}{27}\left(\frac{3a+2\left(\frac{3b}{2}\right)+3(100-a-b)}{6}\right)^6=\frac{625.10^8}{27}.$$

Dấu bằng đặt tại $3a=\frac{3b}{2}=100-a-b\Leftrightarrow a=\frac{50}{3},b=\frac{100}{3},c=\frac{150}{3}\Rightarrow S=\frac{700}{3}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 51: Tìm n biết rằng $a_n(x-1)^n+a_{n-1}(x-1)^{n-1}+...+a_1(x-1)+a_0=x^n$ đồng thời $a_1+a_2+a_3=231$.

A. $n=9$ **B.** $n=10$ **C.** $n=11$ **D.** $n=12$

Lời giải: Ta đặt $x-1=y$ khi đó $a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+...+a_1y+a_0=(y+1)^n$.

Như vậy $C_n^1+C_n^2+C_n^3=231\Rightarrow\boxed{n=11}$. **Chọn C.**

Câu 52: Biết rằng khi m,n là các số dương khác 1, thay đổi thỏa mãn $m+n=2017$ thì phương trình $8\log_m x.\log_n x-7\log_m x-6\log_n x-2017=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt a,b. Biết giá trị

lớn nhất của $\ln(ab)$ là $\frac{3}{4}\ln\left(\frac{c}{13}\right)+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{d}{13}\right)$ với c,d là các số nguyên dương. Tính $S=2c+3d$.

A. $S=2017$ **B.** $S=66561$ **C.** $S=64544$ **D.** $S=26221$

Lời giải: Ta có: $8\log_m x.\log_n m.\log_m x-7\log_m x-6\log_n m.\log_m x-2017=0$

$\Leftrightarrow 8\log_n m(\log_m x)^2-(6\log_n m+7)\log_m x-2017=0$

Theo vi – ét ta có $\log_m a+\log_m b=\frac{6\log_n m+7}{8\log_n m}=\frac{6}{8}+\frac{7}{8}\log_m n\Leftrightarrow\log_m(ab)=\log_m\left(m^{\frac{6}{8}}.n^{\frac{7}{8}}\right)$

Vì vậy $ab=m^{\frac{6}{8}}.n^{\frac{7}{8}}=m^{\frac{3}{4}}(2017-m)^{\frac{7}{8}}\Rightarrow\ln(ab)=f(m)=\frac{3}{4}\ln m+\frac{7}{8}\ln(2017-m)$

Mà $f'(m)=\frac{3}{4m}-\frac{7}{8(2017-m)}=0\Leftrightarrow m=\frac{12102}{13}\Rightarrow\ln(ab)=f\left(\frac{12102}{13}\right)=\frac{3}{4}\ln\frac{12102}{13}+\frac{7}{8}\ln\frac{14119}{13}$

Do đó $c=12102,d=14119\Rightarrow S=66561$. **Chọn đáp án B.**

Câu 53: Cho hàm số $f(x)=\left(x^2+3x+2\right)^{\cos(2017\pi x)}$ và dãy số (u_n) được xác định bởi công thức tổng quát $u_n=\log f(1)+\log f(2)+...+\log f(n)$. Tìm tổng tất cả các giá trị của n thỏa mãn điều kiện $u_n^{2018}=1$?

A. 21 **B.** 18 **C.** 3 **D.** 2018

Lời giải: Ta có: $u_n=\sum_{k=1}^{n}\log f(k)=\sum_{k=1}^{n}\cos(2017\pi k)\left[\log(k+1)+\log(k+2)\right]=$ (k chẵn) – (k lẻ).

Trường hợp 1: $n=2p$ (Chẵn), khi đó ta có khai triển sau:

$u_n=\left(\log3+\log4+...+\log(2p+1)+\log(2p+2)\right)-\left(\log2+\log3+...+\log(2p)+\log(2p+1)\right)$.

Như vậy $\boxed{u_n=\log(p+1)}$ cho nên $u_n^{2018}=1\Leftrightarrow p=9\Leftrightarrow\boxed{n=18}$.

Trường hợp 1: $n=2p+1$ (Lẻ), khi đó ta có khai triển sau:

$u_n=\left(\log3+\log4+...+\log(2p+1)+\log(2p+2)\right)-\left(\log2+\log3+...+\log(2p+2)+\log(2p+3)\right)$.

Như vậy $\boxed{u_n=-\log(4p+6)}$ cho nên $u_n^{2018}=1\Leftrightarrow p=1\Leftrightarrow\boxed{n=3}$.

Kết luận: Tổng các giá trị của n thỏa mãn điều kiện $u_n^{2018}=1$ là 21. **Chọn A.**

Câu 54: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức $\begin{cases}u_1=2\\2018u_{n+1}=u_n^2+2017u_n\end{cases}$. Tìm giới hạn của dãy số $S_n=\frac{u_1}{u_2-1}+\frac{u_2}{u_3-1}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}-1}$?

A. $\lim S_n=\frac{1}{2018}$ **B.** $\lim S_n=2018$ **C.** $\lim S_n=\frac{2017}{2018}$ **D.** $\lim S_n=1$

Lời giải: Ta có: $2018(u_{n+1}-u_n)=u_n(u_n-1)\Rightarrow\frac{u_n}{2018}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-1}\Rightarrow\frac{u_n}{2018(u_{n+1}-1)}=\frac{u_{n+1}-u_n}{(u_n-1)(u_{n+1}-1)}$

$\Rightarrow\frac{u_n}{2018(u_{n+1}-1)}=\frac{u_{n+1}-u_n}{(u_n-1)(u_{n+1}-1)}\Rightarrow\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=2018\left(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$.

Như vậy: $\boxed{S_n=2018\left(\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)}\Rightarrow\lim S_n=2018\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{\lim u_n-1}\right)\Rightarrow\boxed{\lim S_n=2018}$.

Câu 55: Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=1008|1+z|+|1+z^2|+|1+z^3|+...+|1+z^{2017}|$$

A. $P_{\min}=1007$ **B.** $P_{\min}=2018$ **C.** $P_{\min}=1008$ **D.** $P_{\min}=2016$

Lời giải: Ta có: $\begin{cases}|1+z^{2017}|+|1+z^{2016}|\ge|(1+z^{2017})-(1+z^{2016})|=|z|^{2016}|1-z|=|1-z|\\ |1+z^{2015}|+|1+z^{2014}|\ge|(1+z^{2015})-(1+z^{2014})|=|z|^{2014}|1-z|=|1-z|\\ ...\\ |1+z^3|+|1+z^2|\ge|(1+z^3)-(1+z^2)|=|z|^2|1-z|=|1-z|\end{cases}$

Vậy: $P=1008|1+z|+|1+z^2|+|1+z^3|+...+|1+z^{2017}|\ge1008(|1+z|+|1-z|)\ge1008|(1+z)+(1-z)|=2016$.

Do đó $\boxed{P_{\min}=2016}$ và đẳng thức xảy ra có nhiều trường hợp trong đó có $z=-1$.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\le\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải: Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+F(x)\le\sqrt{f(x)}\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{(F(x)+1)^2}-1\ge0\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{(F(x)+1)^2}-1\right)dx=1-t-\frac{1}{F(t)+1}$ là hàm số đồng biến trên $[0;1]$ do vậy ta có đánh giá:

$h(x)\ge h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow1-x-\frac{1}{F(x)+1}\ge0\Rightarrow\frac{1}{F(x)+1}\le1-x\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx\le\frac{1}{2}}$.

Câu 57: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+3\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\ge f^2(x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{9}{5}$

Lời giải: Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+3F(x)\ge f^2(x)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\le0\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{3F(t)+1}-t-\frac{2}{3}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$h(x)\le h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{2}{3}\sqrt{3F(x)+1}-t-\frac{2}{3}\le0\Rightarrow\sqrt{3F(x)+1}\le\frac{3}{2}x+1\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1\sqrt{g(x)}dx\le\frac{7}{4}}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^{x^2} f(t)dt$. Biết $g(x)\geq 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải: Đặt $F(x^2)=\int_0^{x^2} f(t)dt \Rightarrow g(x)=1+F(x^2)\geq 2xf(x^2)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \dfrac{2xf(x^2)}{1+F(x^2)}-1\leq 0\ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\left(\dfrac{2xf(x^2)}{1+F(x^2)}-1\right)dx=\ln(1+F(t))-\sqrt{t}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$h(x)\leq h(0)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \ln(1+F(x))-\sqrt{x}\leq 0\Rightarrow 1+F(x)\leq e^{\sqrt{x}}\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \boxed{\int_0^1 g(x)dx\leq 2}$.

Câu 59: Cho khai triển $(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Biết $S=|a_1|+2|a_2|+...+n|a_n|=34992$, tính giá trị của biểu thức $P=a_0+3a_1+9a_2+...+3^n a_n$?

A. 390625 **B.** −78125 **C.** −1953125 **D.** 9765625

Lời giải: Ta có: $(1+2x)^n=|a_0|+|a_1|x+|a_2|x^2+...+|a_n|x^n$ do vậy lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$2n(1+2x)^{n-1}=|a_1|+2|a_2|x+...+n|a_n|x^{n-1}$$

Thay $x=1$ vào khai triển trên ta được:

$$2n.3^{n-1}=|a_1|+2|a_2|+...+n|a_n|=34992\Rightarrow \boxed{n=8}$$

Vậy với $n=8$ ta có: $P=a_0+3a_1+9a_2+...+3^n a_n=(1-2.3)^8=390625$. **Chọn A.**

Câu 60: Ba tia Ox,Oy,Oz đôi một vuông góc. Gọi C là điểm cố định trên Oz, đặt $OC=1$ hai điểm A,B thay đổi trên Ox,Oy sao cho $OA+OB=OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải: Ta đặt $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;1)$ trong đó $a+b=1\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}\Rightarrow\boxed{a^2+b^2\geq\dfrac{1}{2}}$. Khi đó ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện: $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}\geq\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **Chọn A.**

Câu 61: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$ và điểm $A(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết rằng điểm B thuộc mặt cầu (S), có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

A. $x-y-2z=0$ **B.** $x-y-z=0$ **C.** $x-y+z=0$ **D.** $x-y+2z=0$

Lời giải: Ta có $OA=2\sqrt{2}$ do đó điểm B nằm trên các mặt cầu tâm O và tâm A có cùng bán kính $2\sqrt{2}$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0\\x^2+y^2+z^2=8\\(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\x+y+z=0\\x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow B(2;0;-2)$.

Câu 62: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=5; u_{n+1}^{n+1}=u_n^n+2^n+2.3^n$ với mọi $n\ge 1$. Tìm số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn $u_n^n-2^n>5^{100}$.

A. 146 **B.** 233 **C.** 232 **D.** 147

Lời giải: Ta có: $\begin{cases} u_n^n-u_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}+2.3^{n-1} \\ u_{n-1}^{n-1}-u_{n-2}^{n-2}=2^{n-2}+2.3^{n-2} \\ \ldots \\ u_2^2-u_1^1=2+2.3 \end{cases} \Rightarrow u_n^n=2+\left(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}\right)+2\left(1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}\right).$

Do vậy: $\boxed{u_n^n=2^n+3^n}$ nên $u_n^n-2^n>5^{100}\Leftrightarrow 3^n>5^{100}\Rightarrow n>100\log_3 5\Rightarrow \boxed{n\ge 147}$. **Chọn D.**

Câu 63: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và hai điểm $A(1;2;3), B(3;4;5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P). Giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{MA+2\sqrt{3}}{MB}$ bằng:

A. $3\sqrt{6+\sqrt{78}}$ **B.** $3\sqrt{3+\sqrt{78}}$ **C.** $\sqrt{54+6\sqrt{78}}$ **D.** $3\sqrt{3}$

Lời giải: Ta dễ dàng nhận thấy $A\in(P)$ và $AB=2\sqrt{3}$ do vậy $P=\dfrac{MA+2\sqrt{3}}{MB}=\dfrac{MA+AB}{MB}$.

Áp dụng định lý hàm số sin: $P=\dfrac{\sin MBA+\sin AMB}{\sin MAB}=2\cot\left(\dfrac{MAB}{2}\right)\cos\left(\dfrac{MBA-AMB}{2}\right)\le 2\left|\cot\left(\dfrac{MAB}{2}\right)\right|$.

Do vậy $P_{\max}\Leftrightarrow \angle MAB$ nhọn và đạt giá trị nhỏ nhất hoặc tù và đạt giá trị lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi M nằm trên đường thẳng hình chiếu của AB trên (P) và tam giác MAB cân tại A. **Chọn C.**

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^5+4x+3\right)=2x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{-2}^{8} f(x)dx$ bằng:

A. 10 **B.** $\dfrac{32}{3}$ **C.** 72 **D.** 2

Lời giải: Ta đặt $x=t^5+4t+3$ và đổi cận: $x=-2$ thì $t=-1$ và $x=8$ thì $t=1$. Do đó:

$$\int\limits_{-2}^{8} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1} f\left(t^5+4t+3\right)d\left(t^5+4t+3\right)=\int\limits_{-1}^{1}(2t+1)\left(5t^4+4\right)dt=10.$$

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $\int\limits_0^1 e^x f(x)dx=\int\limits_0^1 e^x f'(x)dx=\int\limits_0^1 e^x f''(x)dx\ne 0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{ef'(1)-f'(0)}{ef(1)-f(0)}$ bằng:

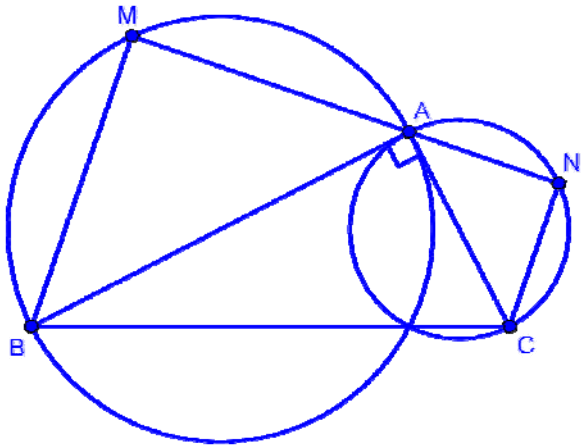
A. -2 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải: Ta đặt $\int\limits_0^1 e^x f(x)dx=\int\limits_0^1 e^x f'(x)dx=\int\limits_0^1 e^x f''(x)dx=a$. Sử dụng tích phân từng phần ta có:

$$\begin{cases} a=\int\limits_0^1 e^x df'(x)=ef'(1)-f'(0)-\int\limits_0^1 e^x f'(x)dx\Rightarrow \boxed{ef'(1)-f'(0)=2a} \\ a=\int\limits_0^1 e^x df(x)=ef(1)-f(0)-\int\limits_0^1 e^x f(x)dx\Rightarrow \boxed{ef(1)-f(0)=2a} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{ef'(1)-f'(0)}{ef(1)-f(0)}=1}$$

Câu 66: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1,0,1), B(-3,4,-1), C(2,2,3)$.

Đường thẳng d đi qua A, cắt các mặt cầu đường kính AB và AC lần lượt tại các điểm M, N không trùng với A sao cho đường gấp khúc $BMNC$ có độ dài lớn nhất có vector chỉ phương là?



A. $\vec{u}=(1,0,2)$ **B.** $\vec{u}=(1,0,1)$

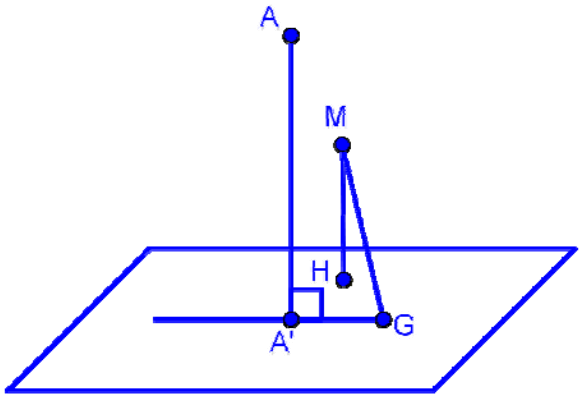
C. $\vec{u}=(1,0,-1)$ **D.** $\vec{u}=(2,0,-1)$

Lời giải: Ta phát hiện được tam giác ABC vuông tại A mặt khác:

$$\begin{cases} MA+MB \le \sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)} = AB\sqrt{2} \\ NA+NB \le \sqrt{2\left(NA^2+NB^2\right)} = AC\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow BM+MN+NC \le (AB+AC)\sqrt{2}$$

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra được bởi vì trong trường hợp các tam giác MAB, NAC vuông cân và tam giác ABC vuông thì A, M, N vẫn thẳng hàng cho nên đường thẳng d khi đó có $\boxed{\vec{u}=(1,0,1)}$. (Học sinh cần tự tìm các tọa độ của M, N sao cho các tam giác MAB, NAC vuông cân tại M, N và nằm trong mặt phẳng (ABC)). **Chọn B**.

Câu 67: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1,0,0)$ có hình chiếu trên mặt phẳng $(P): x-2y-2z+8=0$ là d'. Giả sử giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khoảng cách từ điểm $M(2,-3,-1)$ tới d' là α và β. Tính giá trị của $T=\alpha+\beta$?



A. $\sqrt{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Lời giải: Ta có xét A' là hình chiếu của A trên (P). Khi đó đường thẳng d' đi qua điểm A'. Ta gọi G là hình chiếu của M trên đường thẳng d' và H là hình chiếu của M trên (P). Ta có các đánh giá:

$$MH \le MG \le MA' \Rightarrow \boxed{T=\alpha+\beta=MA'+MH=\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

Câu 68: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $4^a-2^{a+1}+2\left(2^a-1\right)\sin\left(2^a+b-1\right)+2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b$.

A. $\dfrac{\pi}{2}-1$ **B.** $\dfrac{\pi}{2}$ **C.** $\pi-1$ **D.** $\dfrac{3\pi}{2}-1$

Lời giải: Biến đổi giả thiết, ta có:

$\left(2^a\right)^2-2.2^a+2\left(2^a-1\right)\sin\left(2^a+b-1\right)+2=0\Leftrightarrow\left(2^a-1\right)^2+2\left(2^a-1\right)\sin\left(2^a+b-1\right)+1=0$

$\Leftrightarrow\left(2^a-1+\sin\left(2^a+b-1\right)\right)^2+1-\sin^2\left(2^a+b-1\right)=0\Leftrightarrow\left(2^a-1+\sin\left(2^a+b-1\right)\right)^2+\cos^2\left(2^a+b-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(2^a+b-1\right)=0\\2^a-1+\sin\left(2^a+b-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^a+b-1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\2^a-1\pm1=0\end{cases}$

Do đó $a=1,b=\dfrac{\pi}{2}-1+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. Do $b>0\Rightarrow b\ge\dfrac{\pi}{2}-1\Rightarrow S\ge1+2\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=\pi-1$. **Chọn C.**

Câu 69: Cho hai số thực $a>1,b>1$. Biết phương trình $a^xb^{x^2-1}=1$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4\left(x_1+x_2\right)$.

A. 4 **B.** $3\sqrt[3]{2}$ **C.** $3\sqrt[3]{4}$ **D.** $\sqrt[3]{4}$

Lời giải: Ta có: $x^2-1+x\log_b a=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\log_b a\\x_1x_2=-1\end{cases}$

Khi đó $S=\left(\dfrac{1}{\log_b a}\right)^2+4\log_b a=\dfrac{1}{\left(\log_b a\right)^2}+2\log_b a+2\log_b a\ge3\sqrt[3]{\dfrac{1}{\left(\log_b a\right)^2}.2\log_b a.2\log_b a}=3\sqrt[3]{4}$

Dấu bằng đặt tại $\dfrac{1}{\left(\log_b a\right)^2}=2\log_b a\Leftrightarrow\log_b a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\Leftrightarrow a=b^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 70: Cho các số nguyên dương a,b lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1}=b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $b^{x^2-1}=(9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $\left(x_1+x_2\right)\left(x_3+x_4\right)<3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=3a+2b$.

A. 12 **B.** 46 **C.** 44 **D.** 22

Lời giải: Với $a^{x^2+1}=b^x$, lấy logarit cơ số a hai vế ta được: $x^2+1=x\log_a b\Leftrightarrow x^2-x\log_a b+1=0$

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt, khi đó $\Delta=\left(\log_a b\right)^2-4>0\Leftrightarrow\log_a b>2\Leftrightarrow b>a^2$

Tương tự $b^{x^2-1}=(9a)^x\Leftrightarrow x^2-1=x\log_b(9a)\Rightarrow\Delta=\left(\log_b(9a)\right)^2+4>0$

Khi đó theo vi – ét $\begin{cases}x_1+x_2=\log_a b\\x_3+x_4=\log_b(9a)\end{cases}\Rightarrow\log_a b\log_b(9a)<3\Leftrightarrow\log_b(9a)<3\Leftrightarrow9a<a^3\Rightarrow a\ge4$

Vì vậy $b>16\Rightarrow b\ge17\Rightarrow S\ge3.4+2.17=46$. **Chọn đáp án B.**

Câu 71: Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a.4^x-b.2^x+50=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $9^x-b.3^x+50a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $x_3+x_4>x_1+x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=3a+2b$.

A. 49 **B.** 51 **C.** 78 **D.** 81

Lời giải: Ta có: $\begin{cases}\Delta_1>0;S_1>0;P_1>0\\\Delta_2>0;S_2>0;P_2>0\end{cases}\Leftrightarrow b^2-200a>0$

Khi đó $\begin{cases} 2^{x_1+x_2}=2^{x_1}.2^{x_2}=\dfrac{50}{a}\Leftrightarrow x_1+x_2=\log_2\dfrac{50}{a} \\ 3^{x_1+x_2}=3^{x_3}.3^{x_4}=50a\Leftrightarrow x_3+x_4=\log_3(50a) \end{cases}$. Vì vậy:

$x_3+x_4>x_1+x_2\Leftrightarrow\log_3(50a)>\log_2\left(\dfrac{50}{a}\right)\Rightarrow a\ge 3\Rightarrow b^2>200a\ge 600\Rightarrow b\ge 25\Rightarrow S=2a+3b\ge 81$

Câu 72: Cho hai số thực a,b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m,n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x)-2\log_a x-3=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=mn+9a$.

A. $\dfrac{279}{4}$ **B.** 90 **C.** $\dfrac{81}{4}$ **D.** $\dfrac{45}{2}$

Lời giải: Ta có: $\log_a x(\log_b a\log_a x)-2\log_a x-3=0\Leftrightarrow\log_b a(\log_a x)^2-2\log_a x-3=0$

Theo vi – ét ta có: $\log_a m+\log_a n=\dfrac{2}{\log_b a}=2\log_a b=\log_a b^2\Leftrightarrow\log_a(mn)=\log_a b^2\Leftrightarrow mn=b^2$

Vậy $P=b^2+9a=b^2+9(10-b)=\left(b-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{279}{4}\ge\dfrac{279}{4}$

Dấu bằng đặt tại $b=\dfrac{9}{2},a=\dfrac{11}{2}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 73: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0),B(0;b;c),C(0;0;c)$ với $a\ge 4,b\ge 5,c\ge 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x+2y-\sqrt{2}z+6+3\sqrt{2}=0$ **B.** $2x+\sqrt{2}y+2z+7-2\sqrt{2}=0$

C. $\sqrt{2}x+2y-2z+3+2\sqrt{2}=0$ **D.** $\sqrt{2}x+2y+2z+3-2\sqrt{2}=0$

Lời giải: Ta có: $a^2+b^2+c^2=90$ và $a\ge 4,b\ge 5,c\ge 6$. Khi đó: $4\le a\le\sqrt{29};5\le b\le\sqrt{38}$.

Ta có: $OA+OB+OC=a+b+c=a+b+\sqrt{90-a^2-b^2}=f(a,b)$.

Xét $f'(a)=1-\dfrac{a}{\sqrt{90-a^2-b^2}}=0\Leftrightarrow a=\sqrt{45-\dfrac{b^2}{2}}$. Lập bảng biến thiên ta được:

$$\min f(a,b)=\min\left\{f(4);f\left(\sqrt{29}\right)\right\}=\min\left\{b+4+\sqrt{74-b^2};b+\sqrt{29}+\sqrt{61-b^2}\right\}$$

Dễ có: $b+4+\sqrt{74-b^2}<b+\sqrt{29}+\sqrt{61-b^2}\ \ \forall b\in\left[5;\sqrt{38}\right]\Rightarrow\min f(a,b)=b+4+\sqrt{74-b^2}=f(b)$.

Do $f'(b)=1-\dfrac{b}{\sqrt{74-b^2}}=0\Leftrightarrow b=\sqrt{37}$ nên lập bảng biến thiên ta được $\min f(a,b)=f(5)=16$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $OA+OB+OC$ là 16 khi $a=4,b=5,c=7$.

Câu 74: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+2\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\ge\left[f(x)\right]^3$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\sqrt[3]{\left[g(x)\right]^2}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{5}{3}$ **B.** 4 **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 5

Lời giải: Ta đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ khi đó $g(x)=1+2F(x)\ge[f(x)]^3 \ \forall x\in[0;1]$.

Do vậy $\frac{f(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\le 0 \ \forall x\in[0;1]\Leftrightarrow\frac{F'(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\le 0 \ \forall x\in[0;1]$.

Xét hàm số: $h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\right)dx=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2-t-\frac{3}{4}$ $\forall t\in[0;1]$ là hàm nghịch biến trên $[0;1]$ cho nên $h(t)\le h(0) \ \forall t\in[0;1]\Rightarrow\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2-t-\frac{3}{4}\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2\le\frac{4}{3}t+1 \ \forall t\in[0;1]$.

Do đó: $\left(\sqrt[3]{g(x)}\right)^2\le\frac{4}{3}x+1 \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\int_0^1\sqrt[3]{[g(x)]^2}dx\le\int_0^1\left(\frac{4}{3}x+1\right)dx\Rightarrow\boxed{\int_0^1\sqrt[3]{[g(x)]^2}dx\le\frac{5}{3}}$. **Chọn A.**

Câu 75: Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$$\int_1^2[f(x^3)]^2dx+2\int_1^2 f(x^3)dx=\frac{2}{3}\int_1^8 f(x)dx-\int_1^2(x^2-1)^2dx$$

Tính tích phân $\int_1^2[f'(x)]^3dx$ bằng:

A. $\frac{8\ln 2}{27}$ **B.** $\frac{\ln 2}{27}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{5}{4}$

Lời giải: Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2dx$. Khi đó: $\int_1^2[f(x^3)]^2dx+2\int_1^2 f(x^3)dx=\frac{2}{3}\int_1^8 f(x)dx-\int_1^2(x^2-1)^2dx$

$\Rightarrow\int_1^8\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}[f(t)]^2dt+2\int_1^8\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}f(t)\left(1-\sqrt[3]{t^2}\right)dt+\frac{2}{3}\int_1^8\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\left(1-\sqrt[3]{t^2}\right)^2dt=0$

$\Rightarrow\int_1^8\left[\frac{f(t)+1-\sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[3]{t}}\right]^2dt=0\Rightarrow\boxed{f(t)=\sqrt[3]{t^2}-1}\Rightarrow\boxed{\int_1^2[f'(x)]^3dx=\frac{8\ln 2}{27}}$. **Chọn A.**

Câu 76: Cho hai số thực dương a,b lớn hơn 1 và biết phương trình $a^{x^2}b^{x+1}=1$ có nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a(ab)+\frac{4}{\log_a b}$.

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 10

Lời giải: phương trình tương đương với: $x^2+(x+1)\log_a b=0\Leftrightarrow x^2+x\log_a b+\log_a b=0$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta=(\log_a b)^2-4\log_a b\ge 0\Leftrightarrow\log_a b\ge 4(\log_a b>0)$

Khi đó $P=\log_a b+\frac{4}{\log_a b}+1=f(t)=t+\frac{4}{t}+1\ge\min_{[4;+\infty)}f(t)=f(4)=6$

Với $t=\log_a b\ge 4$. **Chọn đáp án C.**

Câu 77: Giả sử k là số thực lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x}<\frac{1}{x^2}+1-\frac{k}{\pi^2}$ đúng với $\forall x\in(0;\frac{\pi}{2})$. Khi đó giá trị của k là

A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải: $\frac{1}{\sin^2 x}<\frac{1}{x^2}+1-\frac{k}{\pi^2}\Leftrightarrow k<\pi^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)\Leftrightarrow k<\pi^2.f(x)$ với $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}+1.$

Xét hàm số $f(x)$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, ta có $f'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}<0\ \forall x\in\left(o;\frac{\pi}{2}\right).$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{\pi^2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $k<\pi^2.f(x)\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow k\le 4.$

Câu 78: Cho a,b nguyên dương lớn hơn 1. Biết $11\log_a x\log_b x-8\log_a x-20\log_b x-11=0$ có tích hai nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=28$ **B.** $S=10$ **C.** $S=22$ **D.** $S=15$

Lời giải: Phương trình tương đương với: $11\log_b a\left(\log_a x\right)^2-4\left(2+5\log_b a\right)\log_a x-11=0$

Phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt vì $P=-\frac{1}{\log_b a}<0;\forall a,b>1$

Gọi hai nghiệm là x_1,x_2. Theo vi – ét ta có

$$\log_a x_1+\log_a x_2=\frac{4\left(2+5\log_b a\right)}{11\log_b a}=\frac{8}{11}\log_a b+\frac{20}{11}$$

$$\Leftrightarrow\log_a x_1x_2=\frac{8}{11}\log_a b+\frac{20}{11}\Leftrightarrow x_1x_2=a^{\frac{8}{11}\log_a b+\frac{20}{11}}=b^{\frac{8}{11}}a^{\frac{20}{11}}$$

Ta có đánh giá sau $x_1x_2=\left(a^{20}b^8\right)^{\frac{1}{11}}\ge\left(2^{20}b^8\right)^{\frac{1}{11}}=2\left(2^9.b^8\right)^{\frac{1}{11}}$

Và $2^9.b^8=k^{11}\ge 2^9.2^8=2^{17}\Rightarrow k\ge 3,k\vdots 2\Rightarrow k=4\Rightarrow b^8=\frac{4^{11}}{2^9}\notin\mathbb{Z};k=8\Rightarrow b^8=\frac{8^{11}}{2^9}=2^{24}\Leftrightarrow b=8,a=2$

Do đó $x_1x_2\ge 16$ và $S=2.2+3.8=28$. **Chọn đáp án A.**

Câu 79: Cho phương trình: $\left(\cos x+1\right)\left(\cos 2x-m\cos x\right)=m\sin^2 x$. Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ khi:

A. $m>-1.$ **B.** $m\ge -1.$ **C.** $-1\le m\le 1.$ **D.** $-1<m\le-\frac{1}{2}.$

Lời giải: Ta có $\left(\cos x+1\right)\left(\cos 2x-m\cos x\right)=m\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow\left(\cos x+1\right)\left(\cos 2x-m\cos x\right)+m\left(\cos x+1\right)\left(\cos x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\ \ (1)\\ \cos 2x=m\ \ (2)\end{array}\right.$$

Vì $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\cos x\le 1$ nên (1) không có nghiệm trên $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$. Xét $f(x)=\cos 2x,\ x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $f'(x)=-2\sin 2x,\ f'(x)=0\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên:

x		0		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{2\pi}{3}$	
$f'(x)$		0	$-$	0	$+$		
$f(x)$		1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{2}$	

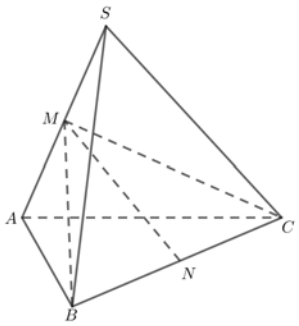
Yêu cầu của bài toán trở thành tìm các giá trị thực của tham số m để (2) có hai nghiệm thực phân biệt trên $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$. Từ bảng biến thiên ta thấy (2) có hai nghiệm thực phân biệt trên $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ khi và chỉ khi $-1<m\le -\dfrac{1}{2}$. Từ đó ta chọn được đáp án đúng là **D.**

Câu 80: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=x, BC=y, AB=AC=SB=SC=1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x+y$ bằng:

A. $\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **C.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ **D.** $4\sqrt{3}$

Lời giải: Ta gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC.

Dễ chứng minh được $SA\perp (MBC)$ và ΔMBC cân tại M



Tính được: $MN^2=MB^2-\dfrac{BC^2}{4}=AB^2-\dfrac{SA^2}{4}-\dfrac{BC^2}{4}=1-\dfrac{x^2+y^2}{4}$.

Do đó: $V=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}xy\sqrt{1-\dfrac{x^2+y^2}{4}}$.

Vì $x^2+y^2\ge 2xy$ nên $V\le \dfrac{1}{6}xy\sqrt{1-\dfrac{xy}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(xy)^2.(2-xy)}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y$. Đến đây, có hai hướng xử lý:

Thứ nhất, sử dụng BĐT Côsi: $(xy)^2(2-xy)=4.\dfrac{xy}{2}.\dfrac{xy}{2}(2-xy)\le 4.\left(\dfrac{\dfrac{xy}{2}+\dfrac{xy}{2}+2-xy}{3}\right)^3=\dfrac{32}{27}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \dfrac{xy}{2}=2-xy \end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow x+y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Thứ hai, đặt $t=xy$ và xét $f(t)=t^2(2-t)$, đạt GTLN khi $t=\dfrac{4}{3}$, suy ra $x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow x+y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

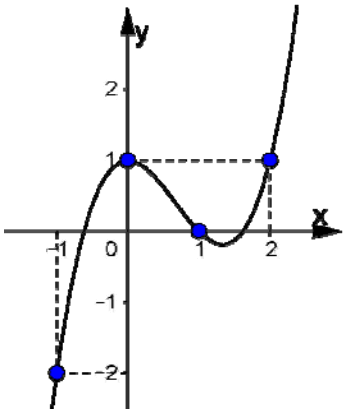
Câu 81: Cho đa thức: $P(x)=(x+1)^8+(x+1)^9+(x+1)^{10}+(x+1)^{11}+(x+1)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_8.

A. 715 **B.** 720 **C.** 700 **D.** 730

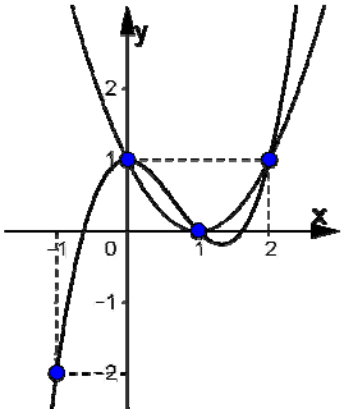
Lời giải: Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newtơn vào bài toán ta có: $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.x^k$

Hệ số của số hạng chứa x^k là: C_n^k. Áp dụng vào bài tập ta thấy hệ số a_8 chính là tổng tất cả hệ số của số hạng chứa x^8. Vậy hệ số a_8 trong khai triển *P(x)* là: $C_8^8+C_9^8+C_{10}^8+C_{11}^8+C_{12}^8=715$.

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ . Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=1$
B. $x=-1$
C. $x=0$
D. $x=2$



Lời giải: Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f'(x)$ và $y=(x-1)^2$; $g'(x)>0$ khi đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên $y=(x-1)^2$ và ngược lại.

Từ đồ thị suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=1\end{array}\right.$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 83: Cho hai số phức z_1,z_2 khác 0 thỏa mãn $z_1^2-z_1z_2+z_2^2=0$. Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2. Tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $2\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** 4

Lời giải: Ta chứng minh được tam giác OAB đều cho nên diện tích bằng $\sqrt{3}$ chứng tỏ $|z_1|=|z_2|=2$.

Khi đấy: $|z_1+z_2|^2=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2OA.OB.\cos 60^0=12\Rightarrow\boxed{|z_1+z_2|=2\sqrt{3}}$.

Câu 84: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $|z-3-4i|=m$. Tính tổng các phần tử thuộc S.

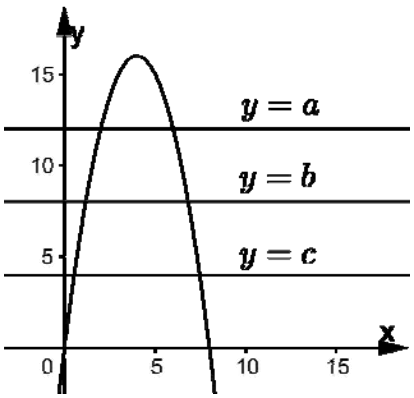
A. 10 **B.** 42 **C.** 52 **D.** 40

Lời giải: Ta có quỹ tích là các đường tròn tâm $O(0;0),R=1$ và tâm $I(3,4),R'=m$. Do đó có hai trường hợp tiếp xúc ngoài và trong cho nên $R+R'=OI\Leftrightarrow\boxed{m=4}$ hoặc $OI=R'-R\Leftrightarrow\boxed{m=6}$. **Chọn A**.

Câu 85: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P):y=8x-x^2$ và trục hoành. Các đường thẳng $y=a,y=b,y=c$ với $0<a<b<c<16$ chia (H) thành bốn phần có diện tích bằng nhau. Giá trị của biểu thức $(16-a)^3+(16-b)^3+(16-c)^3$ bằng:

A. 2048 **B.** 3584 **C.** 2816 **D.** 3480

Lời giải: Ta có công thức tính nhanh: "Nếu hai đồ thị cắt nhau có phương trình hoành độ giao điểm $ax^2+bx+c=0$ khi đó diện tích hình phẳng giữa hai đồ thị đó là $\boxed{S=\dfrac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^3}{6a^2}}$ với $\Delta=b^2-4ac$".



Do đó xét $8x-x^2=a\Leftrightarrow x^2-8x+a=0$ nên $S_a=\dfrac{4\left(\sqrt{16-a}\right)^3}{3}$.

Tương tự ta có: $S_b=\dfrac{4\left(\sqrt{16-b}\right)^3}{3}$; $S_c=\dfrac{4\left(\sqrt{16-c}\right)^3}{3}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P):y=8x-x^2$ và trục hoành là $S_0=\dfrac{4}{3}(64)$.

Mặt khác vì $S_0=\dfrac{4}{3}(64)=4S_a\Rightarrow S_a=\dfrac{64}{3}=\dfrac{4\left(\sqrt{16-a}\right)^3}{3}\Rightarrow\boxed{(16-a)^3=256}$.

Có: $S_b=2S_a=\dfrac{128}{3}=\dfrac{4\left(\sqrt{16-b}\right)^3}{3}\Rightarrow(16-b)^3=1024$ và $S_c=3S_a=64=\dfrac{4\left(\sqrt{16-c}\right)^3}{3}\Rightarrow(16-c)^3=2304$

Như vậy: $(16-a)^3+(16-b)^3+(16-c)^3=3584$. **Chọn B.**

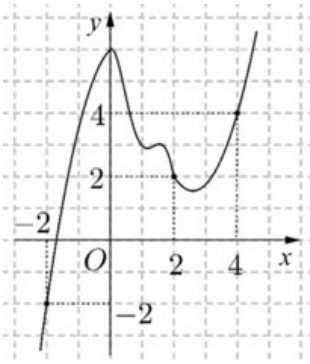
Câu 86: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c(a\neq0)$ có điều kiện $\min\limits_{(-\infty;0)}f(x)=f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ bằng:

A. $c+8a$ **B.** $c-\dfrac{7a}{16}$ **C.** $c+\dfrac{9a}{16}$ **D.** $c-a$

Lời giải: Ta chú ý rằng điểm cực trị của hàm số có $x=0$ cho nên nếu như $\min\limits_{(-\infty;0)}f(x)=f(-1)$ chứng tỏ rằng $x=\pm1$ là các điểm cực tiểu của hàm số cho nên $f(x)=a\left(x^4-2x^2\right)+c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ bằng $\boxed{f(1)=c-a}$. **Chọn D.**

Câu 87: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Khi đó giá trị của biểu thức $\int\limits_0^4 f'(x-2)dx+\int\limits_0^2 f'(x+2)dx$ bằng bao nhiêu:



A. 10 **B.** −2
C. 2 **D.** 6

Lời giải: Ta có: $\int\limits_0^4 f'(x-2)dx+\int\limits_0^2 f'(x+2)dx=\int\limits_{-2}^2 f'(x)dx+\int\limits_2^4 f'(x)dx$.

Như vậy: $\int\limits_0^4 f'(x-2)dx+\int\limits_0^2 f'(x+2)dx=\int\limits_{-2}^4 f'(x)dx=f(4)-f(-2)=6$.

Câu 88: Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2^2 a-2\log_2 a+2+2(\log_2 a-1)\sin(\log_2 a+b)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+3b$.

A. $\frac{3\pi}{2}-1$ **B.** $\frac{3\pi}{2}-2$ **C.** $\pi-1$ **D.** $\frac{9\pi}{2}+2$

Lời giải: Theo điều kiện bài toán ta có: $\left(\log_2 a-1+\sin\left(\log_2 a+b\right)\right)^2+\cos^2\left(\log_2 a+b\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\log_2 a+b\right)=0\\ \log_2 a-1+\sin\left(\log_2 a+b\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \log_2 a-1\pm1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a=1\\ b=\frac{\pi}{2}-1+k\pi\end{cases}\right.\left.\begin{cases}a=4\\ b=\frac{\pi}{2}-2+k\pi\end{cases}\right.$$

Trường hợp 1: Nếu $a=1\Rightarrow b\ge\frac{\pi}{2}-1\Rightarrow S\ge\frac{3\pi}{2}-1$

Trường hợp 2: Nếu $a=4\Rightarrow b\ge\frac{3\pi}{2}-2\Rightarrow S\ge\frac{9\pi}{2}+2$. **Chọn đáp án A.**

Câu 89: Cho các số thực $a,b>1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx)=2018$ có hai nghiệm phân biệt m và n. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(4a^2+9b^2\right)\left(36m^2n^2+1\right)$.

A. 144 **B.** 72 **C.** 36 **D.** 288

Lời giải: Phương trình tương đương với:

$$\left(1+\log_a x\right)\left(1+\log_b x\right)=2018\Leftrightarrow\log_a x\log_b x+\log_a x+\log_b x+1=2018$$

$$\Leftrightarrow\log_b a\left(\log_a x\right)^2+\left(1+\log_b a\right)\log_a x-2017=0$$

Khi đó theo vi – ét ta có: $\log_a m+\log_a n=-\frac{1+\log_b a}{\log_b a}=-\log_a b-1=\log_a\frac{1}{ab}\Leftrightarrow mn=\frac{1}{ab}$

Vì vậy áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $P=\left(4a^2+9b^2\right)\left(\frac{36}{a^2b^2}+1\right)\ge2\sqrt{4a^2.9b^2}.2\sqrt{\frac{36}{a^2b^2}.1}=144$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases}4a^2=9b^2\\ \frac{36}{a^2b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=3,b=2$. **Chọn đáp án A.**

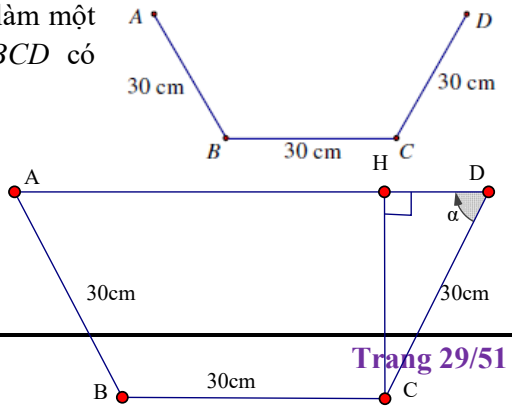
Câu 90: Xét bảng ô vuông gồm 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông đó một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hang và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách?

A. 72 **B.** 90 **C.** 80 **D.** 144

Lời giải: Xét 1 hàng (hay 1 cột bất kì). Giả sử trên hàng đó có x số 1 và y số -1. Ta có tổng các chữ số trên hàng đó là $x-y$. Theo đề bài có $x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

Lần lượt xếp các số vào các hàng ta có số cách sắp xếp là 3!.3!.2.1 =72 (Cách)

Câu 91: Từ một tấm tôn có kích thước 90cm x 3m, người ta làm một máng xối nước trong đó mặt cắt là hình thang $ABCD$ có hình dưới. Tính thể tích lớn nhất của máng xối.



A. $40500\sqrt{6}cm^3$. **B.** $40500\sqrt{5}cm^3$.

C. $202500\sqrt{3}cm^3$. **D.** $40500\sqrt{2}cm^3$.

Lời giải: Ta có:

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)CH=\frac{1}{2}(2BC+2HD)CH=(30+30\cos\alpha)30\sin\alpha=900\left(\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$ Xét hàm số: $y=\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2}$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ có:

$y'=\cos\alpha+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^0$ dễ thấy

$y_{(0)}=0, y_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}=1, y_{(60^0)}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\Rightarrow Max\{S_{ABCD}\}=900\frac{3\sqrt{3}}{4}=675\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

Vậy thể tích lớn nhất của máng xối là: $V=675\sqrt{3}.300=202500\sqrt{3}\left(cm^3\right)$

Câu 92: Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}\le m+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. $m\ge\frac{3\sqrt{5}}{4}$ **B.** $m\ge\frac{3\sqrt{5}+9}{4}$ **C.** $m\ge\frac{\sqrt{65}-9}{2}$ **D.** $m\ge\frac{\sqrt{65}-9}{4}$

Lời giải: Ta có: $y=\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}=\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+2\cos 2x+3}$.

Và $\sin 2x+2\cos 2x+3>0;\ \forall x\in\mathbb{R}$. xét phương trình $y=\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+2\cos 2x+3}\Leftrightarrow$

$(\sin 2x+2\cos 2x+3)y=3\sin 2x+\cos 2x\Leftrightarrow(y-3)\sin 2x+(2y-1)\cos 2x=-3y$

Phương trình trên có nghiệm nên $(y-3)^2+(2y-1)^2\ge(-3y)^2\Leftrightarrow 5y^2-10y+10\ge 9y^2$

$\Leftrightarrow -4y^2-10y+10\ge 0\Leftrightarrow\frac{-5-\sqrt{65}}{4}\le y\le\frac{-5+\sqrt{65}}{4}$. Suy ra giá trị lớn nhất của y là $\frac{-5+\sqrt{65}}{4}$. **Chọn D.**

Câu 93: Cho tập hợp A có n phần tử $(n\ge 4)$. Biết rằng số tập con của A có 8 phần tử nhiều gấp 26 lần số tập con của A có 4 phần tử. Hãy tìm $k\in\{1,2,3,...,n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là nhiều nhất.

A. $k=20$ **B.** $k=11$ **C.** $k=14$ **D.** $k=10$

Lời giải: Ta có $C_n^8=26C_n^4\Leftrightarrow\frac{n!}{8!(n-8)!}=26\frac{n!}{4!(n-4)}\Leftrightarrow(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)=13.14.15.16$

$\Leftrightarrow n-7=13\Leftrightarrow n=20$. Số tập con gồm k phần tử của A là: $C_{20}^k\Rightarrow k=10$ thì C_{20}^k nhỏ nhất.

Câu 94: Biết rằng đồ thị của hàm số $y=P(x)=x^3-2x^2-5x+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lần lượt có hoành độ là x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của $T=\frac{1}{x_1^2-4x_1+3}+\frac{1}{x_2^2-4x_2+3}+\frac{1}{x_3^2-4x_3+3}$?

A. $T=\frac{1}{2}\left[-\frac{P'(1)}{P(1)}+\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$ **B.** $T=\frac{1}{2}\left[-\frac{P'(1)}{P(1)}-\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$

C. $T=\frac{1}{2}\left[\frac{P'(1)}{P(1)}-\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$ **D.** $T=\frac{1}{2}\left[\frac{P'(1)}{P(1)}+\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$

Lời giải: Ta có: $T=\frac{1}{(x_1-1)(x_1-3)}+\frac{1}{(x_2-1)(x_2-3)}+\frac{1}{(x_3-1)(x_3-3)}$

$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x_1-3}+\frac{1}{x_2-3}+\frac{1}{x_3-3}\right)-\left(\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}\right)\right]$ vì $\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}$.

Vì x_1,x_2,x_3 là 3 nghiệm của phương trình $P(x)=0\Rightarrow P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Suy ra $P'(x)=(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)$

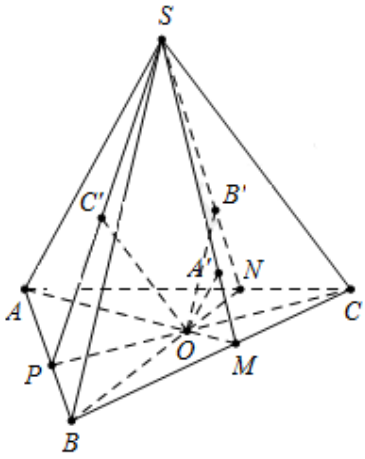
$\Rightarrow \frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}$ (*).

Thay $x=1,x=3$ vào biểu thức (*), ta được $T=\frac{1}{2}\left[\frac{P'(1)}{P(1)}-\frac{P'(3)}{P(3)}\right]$.

Câu 95: Cho hình chóp *S.ABC*. Bên trong tam giác *ABC* ta lấy một điểm *O* bất kỳ. Từ *O* ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với *SA,SB,SC* và cắt các mặt phẳng $(SBC),(SCA),(SAB)$ theo thứ tự tại A',B',C'. Khi đó tổng tỉ số $T=\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?

A. $T=3$ **B.** $T=\frac{3}{4}$ **C.** $T=1$ **D.** $T=\frac{1}{3}$

Lời giải: Gọi M,N,P lần lượt là giao điểm của OA, OB, OC với cạnh BC, CA, AB. Vì $OB'//SA\Rightarrow\frac{OA'}{SA}=\frac{OM}{AM}$ (Định lí Thalet).



Tương tự, ta có $\frac{OB'}{SB}=\frac{ON}{BN'};\frac{OC'}{SC}=\frac{OP}{PC}\Rightarrow T=\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OP}{PC}$.

Với O là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow M,N,P$ lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB $\Rightarrow\frac{OM}{AM}=\frac{ON}{BN}=\frac{OP}{CP}=\frac{1}{3}$. Vậy tổng tỉ số $T=\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=1$.

Chú ý: Bản chất bài toán là yêu cầu chứng minh $\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OP}{PC}=1$. Tuy nhiên với tinh thần trắc nghiệm ta sẽ chuẩn hóa với O là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 96: Tìm số tất cả tự nhiên *n* thỏa mãn $\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}$

A. $n=100$ **B.** $n=98$ **C.** $n=99$ **D.** $n=101$

Lời giải: Ta có $\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{C_{n+1}^1}{2}+\frac{C_{n+1}^2}{3}+\frac{C_{n+1}^3}{4}+...+\frac{C_{n+1}^{n+1}}{(n+2)}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^2+C_{n+2}^3+C_{n+2}^4+...+C_{n+2}^{n+2}\right)=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$.

Khi đó: $=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}\Rightarrow\boxed{n=98}$

Câu 97: Số các giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x+1)(4\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ là:

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải: Ta có: $(\cos x+1)(4\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$

$\Leftrightarrow(\cos x+1)(4.\cos 2x-m\cos x)=m(1-\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow(\cos x+1)(4.\cos 2x-m\cos x)=m(1+\cos x)(1-\cos x)$

$\Leftrightarrow(\cos x+1)(4.\cos 2x-m\cos x-m(1-\cos x))=0$

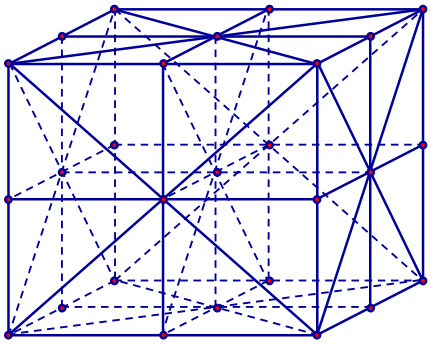
$\Leftrightarrow(\cos x+1)(4.\cos 2x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+1=0\\4\cos 2x-m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\\cos 2x=\frac{m}{4}\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 98: Một khối lập phương có độ dài cạnh là 2cm được chia thành 8 khối lập phương cạnh 1cm. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các đỉnh của khối lập phương cạnh 1cm.

A. 2876. **B.** 2898. **C.** 2915. **D.** 2012.

Lời giải: Có tất cả 27 điểm. Chọn 3 điểm trong 27 có $C_{27}^3=2925$.

Có tất cả $(8.2+6.2+4.2+4+3+2+2+2)=49$ bộ ba điểm thẳng hàng. Vậy $2925-49=2876$ tam giác.



Câu 99: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)+\frac{1}{9}\right]dx\le 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx$. Tính tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$?

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{6}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Lời giải: Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\left(\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx\right)^2\le\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\int_0^1 1dx$.

Như vậy: $9\left(\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)+\frac{1}{9}\right]dx\right)^2\le 4\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\Leftrightarrow 9\left(\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)-\frac{1}{9}\right]dx\right)^2\le 0$.

Do đó: $f'(x)f^2(x)=\frac{1}{9}\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1\Rightarrow\boxed{\int_0^1 f^3(x)dx=\frac{7}{6}}$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1)=\frac{3}{2}$; $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$ và $\int_0^1 (x-1)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2}dx=-\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx=?$

A. $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{53}{60}$ **D.** $\frac{203}{60}$

Lời giải: Sử dụng tích phân từng phần ta có: $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}=f(1)-\int_0^1 xf'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 xf'(x)dx=\frac{2}{3}$.

Mặt khác: $2(1-x)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2}\le(1-x)^2+1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2$.

Tích phân hai vế ta $\Rightarrow\frac{2}{3}\le\frac{4}{3}+\int_0^1\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2dx\Rightarrow\int_0^1\frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2dx\le\frac{2}{3}$.

Áp dụng Holder: $\left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2=\frac{4}{9}=\left(\int_0^1\sqrt{x(2-x)}\sqrt{\frac{x}{2-x}}f'(x)dx\right)^2\le\int_0^1 x(2-x)dx\int_0^1\frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2dx$.

Do vậy $\Rightarrow\int_0^1\frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2dx\ge\frac{2}{3}$ nên dấu bằng $\Leftrightarrow f'(x)=2-x\Rightarrow f(x)=2x-\frac{x^2}{2}\Rightarrow\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{53}{60}$.

Câu 101: Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để GTNN của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+4x$ bằng -1?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải:

Nếu $m\ge1$ thì $y=x^2+2x+m$ có GTNN là $m-1=-1\Leftrightarrow m=0$ (loại).

Nếu $m<1$ thì $y=\begin{cases}x^2+2x+m\\-x^2+6x-m\end{cases}$ nên $\min y=\min\left\{f(-1);f\left(1+\sqrt{1-m}\right);f\left(1-\sqrt{1-m}\right)\right\}$

$$\Rightarrow\min y=\min\left\{|m+3|-4;4\left(1+\sqrt{1-m}\right);4\left(1-\sqrt{1-m}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow\min y=\min\left\{|m+3|-4;4\left(1-\sqrt{1-m}\right)\right\}$$

Trường hợp 1: $\min y=|m+3|-4=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-7\end{array}\right.$

Vì $m<1$ nên $m=-7$ khi đó $4\left(1-\sqrt{1-m}\right)<0$ nên trường hợp này không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\min y=4\left(1-\sqrt{1-m}\right)=0\Leftrightarrow m=0$ khi đó $|m+3|-4=-1<0$ nên trường hợp này không thỏa mãn.

Kết luận: không tồn tại m thỏa mãn. Chọn đáp án A.

Câu 102: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{\ln x+1}{\sqrt{\ln^2 x+1}}+m\right|$ trên $\left[1;e^2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

Lời giải:

Ta có $\max\limits_{[1;e^2]} y = \max\limits_{[0;2]} \left| \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} + m \right|$. Ta xét $f(t) = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} + m \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1-t}{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Mặt khác $f(0) = 1+m; f(1) = \sqrt{2}+m; f(2) = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} + m$. Vậy $\max\limits_{[1;e^2]} y = \max\left\{ |m+1|; \left|m+\sqrt{2}\right| \right\} = M$

Vì $\begin{cases} M \ge |m+1| \\ M \ge \left|-\sqrt{2}-m\right| \end{cases} \Rightarrow 2M \ge \sqrt{2}-1$. Do đó $\min M = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ khi $m+1 = -\sqrt{2}-m = \pm\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ khi $m = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Chọn đáp án C.

Câu 103: Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 + (x+c)^3$ có hệ số góc nhỏ nhất tại tiếp điểm có hoành độ $x = -1$ đồng thời a, b, c là các số thực không âm. Tìm GTLN tung độ của giao điểm đồ thị hàm số với trục tung?

A. 27 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 18

Lời giải: Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất tại điểm uốn.

Mặt khác $y' = 3\left((x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2\right) \Rightarrow y'' = 6(3x+a+b+c)$

Do đó $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{a+b+c}{3} = -1 \Leftrightarrow a+b+c = 3$.

Giao điểm với trục tung có tung độ $y = a^3 + b^3 + c^3$

Vì $a(a^2-9) + b(b^2-9) + c(c^2-9) \le 0 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \le 9(a+b+c)$

Vậy tung độ giao điểm của đồ thị hàm số và Oy là $a = 3; b = c = 0$ và các hoán vị. Chọn đáp án A.

Câu 104: Cho hàm số $f(x) = \log_3 \dfrac{m^2 x}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 3$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \le e(a+b)$. Tính tích các phần tử của S.

A. 27 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $-3\sqrt{3}$ **D.** -27

Lời giải: Từ giả thiết ta có: $a+b = 1$

Và $f(a) + f(b) = f(a) + f(1-a) = \log_3 \dfrac{m^2 a}{1-a} + \log_3 \dfrac{m^2(1-a)}{1-(1-a)} = \log_3 m^4 = 3 \Leftrightarrow m^4 = 27 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt[4]{27}$.

Do đó tích phần tử thuộc S là $-\sqrt{27} = -3\sqrt{3}$. Chọn đáp án C.

Câu 105: Với giá trị thực dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ có các điểm cực trị A và B sao cho tam giác ΔOAB có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $1 < m < 2$ **B.** $2 < m < \dfrac{7}{2}$ **C.** $3 < m < 4$ **D.** $m < 1$

Lời giải: Đường thẳng qua hai điểm cực trị $y = \left(2-2m^2\right)x + m + 1 = px + q$

Điều kiện có hai điểm cực trị là $m^2 > 1$. Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(x_1; px_1+q)$ và $B(x_2; px_2+q) \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}.\left|x_1(px_2+q) - x_2(px_1+q)\right| \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}.|q|.|x_1 - x_2|$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|m+1|.\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|m+1|.\sqrt{4m^2-4}$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=|m+1|.\sqrt{m^2-1}=8\sqrt{2} \Rightarrow (m^2+2m+1)(m^2-1)=128$

$\Rightarrow (m-3)(m^3+5m^2+15m+43)=0 \Rightarrow m=3$. Chọn đáp án B.

Câu 106: Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(1+x)\ge x-ax^2$ luôn đúng với mọi số thực dương x là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $T=2m+3n$.

A. $T=5$ **B.** $T=8$ **C.** $T=7$ **D.** $T=11$

Lời giải: Từ điều kiện ta có: $a\ge\frac{x-\ln(1+x)}{x^2},\forall x>0$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ ta có $f'(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{1+x}\right)x^2-2x(x-\ln(1+x))}{x^4}=\frac{2\ln(1+x)-x-\frac{x}{1+x}}{x^3}$.

Xét $g(x)=2\ln(1+x)-x-\frac{x}{1+x}$ ta có $g'(x)=\frac{2}{1+x}-1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-x^2}{(x+1)^2}<0,\forall x>0$.

Do đó $g(x)<g(0)=0,\forall x>0$. Suy ra $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}<0,\forall x>0$. Do đó lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có giá trị cần tìm là $a\ge\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}$. Vậy $T=2.1+3.2=8$. Chọn đáp án B.

Câu 107: Cho ba số thực x,y,z không âm thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$.

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $1-\log_4 3$

Lời giải: Với $a,b,c\ge1$ ta có $(a-1)(b-1)\ge0\Rightarrow ab\ge a+b-1$.

Do đó $abc\ge(a+b-1)c=ac+bc-c\ge(a+c-1)+(b+c-1)-c=a+b+c-2$.

Áp dụng ta có $2^x.4^y.8^z\ge2^x+4^y+8^z-2=2$. Do đó $x+2y+3z\ge1\Rightarrow S=\frac{x+2y+3z}{6}\ge\frac{1}{6}$. Chọn C.

Câu 108: Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của phần thực số phức $w=z^3+\frac{1}{z^3}$ trong đó $|z|=1$. Tính $P=M^2+m^2$?

A.10 **B.** 5 **C.** 29 **D.** 8

Lời giải: Ta có: $\mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}\left(z^3+\bar{z}^3+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{\bar{z}^3}\right)\Rightarrow\mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}\left(z^3+\bar{z}^3\right)\left(1+\frac{1}{|z|^6}\right)=z^3+\bar{z}^3$

$\Rightarrow\mathrm{Re}(w)=\left(z+\bar{z}\right)^3-3z\bar{z}\left(z+\bar{z}\right)=8a^3-6a=f(a)$ Trong đó $z=a+bi$ với $-1\le a\le1$

Vì $f'(a)=24a^2-6=0\Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{2}$. Và $f(1)=2;f(-1)=-2;f\left(\frac{1}{2}\right)=-2;f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

Vậy $M=2$ và $m=-2$. Chọn đáp án D.

Câu 109: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và dương trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(0)=1$ đồng thời $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$. Tính $T=f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)$?

A. $3-2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $4-2\sqrt{3}$

Lời giải: Ta có: $\int\limits_0^t \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\limits_0^t \dfrac{x}{x^2+1}dx \Rightarrow \ln f(t)=\dfrac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) \Rightarrow f(t)=\sqrt{t^2+1} \Rightarrow T=3-2\sqrt{2}$

Chọn đáp án A.

Câu 110: Cho dãy số $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n^2+2} \end{cases}$ và $S=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_{2018}^2+2018$. Khi đó S có bao nhiêu chữ số?

A.963 **B.** 962 **C.** 607 **D.** 608

Lời giải: Ta có $u_{n+1}^2=3.u_n^2+2 \Rightarrow u_n^2=a.3^n+b$.

Vì $u_2=\sqrt{5} \Rightarrow$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5=9a+b \\ 1=3a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=-1 \end{cases}$. Vậy $u_n^2=\dfrac{2}{3}.3^n-1=2.3^{n-1}-1$

Khi đó $S=2\left(1+3^1+3^2+\ldots+3^{2017}\right)=3^{2018}-1$. Số chữ số của $S=\left[2018\log 3\right]+1=963$.

Chọn đáp án A.

Câu 111: Cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và các điểm $A(3;0;0),B(4;2;1)$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2.MB$?

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $6\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{2}$

Lời giải: Ta thấy cả A và B cùng nằm ngoài mặt cầu đồng thời $\begin{cases} IA=4\sqrt{2}=2R \\ IB=\sqrt{30} \end{cases}$. Mục đích cách giải là tìm C sao cho $MA=2MC$ với mọi điểm M thuộc mặt cầu bằng cách sau: Lấy điểm C trên IA sao cho ΔICM và ΔIMA đồng dạng với nhau tức là $\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{IC}{IM} \Leftrightarrow IC=\dfrac{IM^2}{IA}=\dfrac{R^2}{R.2}=\dfrac{R}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{IA}=4\overrightarrow{IC} \Rightarrow C(0;3;0)$ khi đó $MA+2MB=2(MB+MC)\geq 2BC=3\sqrt{2}$. Chọn đáp án D.

Câu 112: Cho biết $\left|z+\dfrac{4}{z}\right|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z|^2+|z|+1$?

A. $8-3\sqrt{5}$ **B.** $6+\sqrt{5}$ **C.** $6-\sqrt{5}$ **D.** $8+3\sqrt{5}$

Lời giải: Ta có $4=\left(z+\dfrac{4}{z}\right)\left(\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}\right)=|z|^2+\dfrac{16}{|z|^2}+4\left(\dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}\right)$

$\Rightarrow 4=|z|^2+\dfrac{16}{|z|^2}+4.\dfrac{z^2+\overline{z}^2}{|z|^2}=|z|^2+\dfrac{16}{|z|^2}+4.\dfrac{\left(z+\overline{z}^2\right)-2|z|^2}{|z|^2}$

Vì $\left(z+\overline{z}^2\right)=4\left[\text{Re}(z)\right]^2\ge 0$ do đó $4\ge|z|^2+\dfrac{16}{|z|^2}-8$

$\Rightarrow|z|^4-12|z|^2+16\le 0\Rightarrow 6-2\sqrt{5}\le|z|^2\le 6+2\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{5}-1\le|z|\le\sqrt{5}+1\Rightarrow P\le 8+3\sqrt{5}$. Chọn D.

Câu 113: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=2$ và $21\left(x^2-1\right)^2-12(x-1)^2-12xf(x)=\left[f'(x)\right]^2\ \forall x\in[0;1]$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx=?$

A. $\dfrac{3}{4}$ **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** -2 **D.** $-\dfrac{5}{4}$

Lời giải: Ta có $21\left(x^2-1\right)^2-12(x-1)^2-12xf(x)=\left[f'(x)\right]^2$

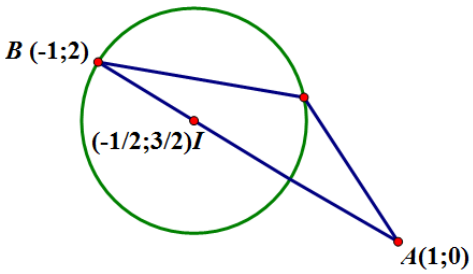
$\Rightarrow\dfrac{36}{5}-6\int\limits_0^1 f(x)d\left(x^2-1\right)=\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx\Rightarrow-\dfrac{24}{5}+6\int\limits_0^1\left(x^2-1\right)f'(x)dx=\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx$

$\Rightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)-3x^2+3\right]^2dx=0\Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$. Chọn đáp án A.

Câu 114: Cho $|2z+1-3i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z-1|+3.|z+1-2i|$?

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $4\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** 4

Lời giải: Ta có: $M(z)\in\left(I;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right):\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.



Gọi $A(1;0),B(-1;2)$. Chú ý I,A,B thẳng hàng đồng thời ta có $IA=3IB$. Ta tìm max $MA+3MB$.

Ta có: $MA^2+3MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Rightarrow MA^2+3MB^2=4MI^2+IA^2+3IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}\right)$

$\Rightarrow MA^2+3MB^2=4MI^2+IA^2+3IB^2=8$. Theo bất đẳng thức Bunhiacopxky ta có:

$MA+3MB\le\sqrt{\left(MA^2+3MB^2\right)(1+3)}=4\sqrt{2}$. Chọn đáp án A.

Câu 115: Cho các số thực $a,b,c\in[2;3]$. Biết giá trị lớn nhất của $S=4^a+4^b+4^c-\dfrac{1}{4}(a+b+c)^3$ là $\dfrac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $P=m+2n$.

A. $P=257$ **B.** $P=258$ **C.** $P=17$ **D.** $P=18$

Lời giải: Ta có: $4^x\le 48x-80,\forall x\in[2;3]$. Dấu bằng đạt tại $x\in\{2;3\}$.

Do đó $S\le 48(a+b+c)-240-\dfrac{1}{4}(a+b+c)^3\le 16$. Dấu bằng đạt tại $(a;b;c)=(3;3;2)$ hoặc các hoán vị.

Chọn đáp án D.

Câu 116: Cho a,b,c,d,e,f là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=1\\(d+3)^2+(e-2)^2+f^2=9\end{cases}$. Gọi M và m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F=(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2$. Tính $P=M+m$?

A. 24 **B.** 80 **C.** 35 **D.** 99

Lời giải: Gọi $I_1(a,b,c)$ và $I_2(d,e,f)$. Khi đó:

- $I_1\in(S_1):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ có tâm $O_1(1;2;3),R_1=1$
- $I_2\in(S_2):(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có tâm $O_2(-3;2;0),R_2=3$

Ta dễ thấy $O_1O_2=5>R_1+R_2\Rightarrow$ 2 mặt cầu nằm ngoài nhau.

Vậy $\begin{cases}M=(O_1O_2+R_1+R_2)^2=81\\m=(O_1O_2-R_1-R_2)^2=1\end{cases}$. Vậy $M-m=80$. Chọn đáp án B.

Câu 117: Cho tam diện vuông $OABC$ có bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp lần lượt là R và r. Khi đó tỷ số $\frac{R}{r}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{a+\sqrt{b}}{2}$. Tính $P=a+b$?

A.6 **B.** 27 **C.** 30 **D.** 60

Lời giải: Ta có: $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với $OA=a,OB=b,OC=c$

Chú ý $S_{\Delta ABC}^2=S_{\Delta OAB}^2+S_{\Delta OAC}^2+S_{\Delta OBC}^2\Rightarrow S_{tp}=\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)\frac{1}{2}$

Vậy $r=\frac{3V}{S_{tp}}=\frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

$$\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)}{abc}$$

$$\Rightarrow\frac{R}{r}\ge\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}.\left(3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt{3.\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\right)}{abc}\Rightarrow\frac{R}{r}\ge\frac{3\sqrt{3}+3}{2}=\frac{\sqrt{27}+3}{2}$$. Chọn đáp án C.

Câu 118: Tính module của $z=1+2i+3i^2+4i^3+...+2017.i^{2016}$.

A. $|z|=\sqrt{2036164}$ **B.** $|z|=\sqrt{2030113}$ **C.** $|z|=\sqrt{2034145}$ **D.** $|z|=\sqrt{2032130}$

Lời giải:

Ta có $z=\left(1+i+...+i^{2016}\right)+i\left(1+i+...+1^{2015}\right)+...+i^{2015}(1+i)+i^{2016}$

$$=\frac{i^{2017}-1}{i-1}+\frac{i\left(i^{2016}-1\right)}{i-1}+...+\frac{i^{2015}\left(i^2-1\right)}{i-1}+\frac{i^{2016}(i-1)}{i-1}$$

$$=\frac{2017.i^{2017}-\left(1+i+...+i^{2016}\right)}{i-1}=\frac{2017.i^{2017}(i-1)-i^{2017}+1}{(i-1)^2}$$

$= \dfrac{2017.i^{2018} - 2018.i^{2017} + 1}{-2i} = -\dfrac{-2017 - 2018i + 1}{2i} = 1009 - 1008i \Rightarrow |z| = \sqrt{2034145}$. Chọn C.

Câu 119: Cho $u_n = -\dfrac{C_n^1}{2.3} + \dfrac{2C_n^2}{3.4} - \dfrac{3C_n^3}{4.5} + ... + \dfrac{(-1)^n.C_n^n.n}{(n+1)(n+2)}$. Tính $\lim(n.u_n) = ?$

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải: Xét $\dfrac{k.C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k.n!}{k!(k+1)(k+2).(n-k)!}$

$= \dfrac{k}{(n+1)(n+2)}.\dfrac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!} = \dfrac{k}{(n+1)(n+2)}.C_{n+2}^{k+2} = \dfrac{(k+2)C_{n+2}^{k+2} - 2C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} - \dfrac{2.C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$. Vậy $u_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k.\dfrac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{1}{n+1}.\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.C_{n+1}^{k+1} - \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}.\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.C_{n+2}^{k+2}$

$= \dfrac{1}{n+1}\left(-C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - ... + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}\right) - \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}.\left(-C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 - ... + (-1)^n C_{n+2}^{n+2}\right)$

$\Rightarrow u_n = -\dfrac{n}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \lim(n.u_n) = -1$. Chọn đáp án A.

Câu 120: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 (f'(x))^2\,dx = \int_0^1 (x+1).e^x.f(x)\,dx = \dfrac{e^2-1}{4}$ và $f(1) = 0$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx = ?$

A. $2+e$ **B.** $2-e$ **C.** e **D.** $1-e$

Lời giải: Ta có: $\dfrac{e^2-1}{4} = \int_0^1 (x+1).e^x.f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,d(x.e^x) = -\int_0^1 x.e^x.f'(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2\,dx = -\int_0^1 x.e^x.f'(x)\,dx = \dfrac{e^2-1}{4} = \int_0^1 x^2.e^{2x}\,dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2\,dx + \int_0^1 x^2.e^{2x}\,dx + 2\int_0^1 x.e^x.f'(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) + x.e^x)^2\,dx = 0$

$\Rightarrow f'(x) = -x.e^x \Rightarrow f(x) = e^x(x-1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 2-e$. Chọn đáp án B.

Câu 121: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,dx = 4$ và $\int_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,dx = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx = ?$

A. 8 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 6

Lời giải: Đặt $\tan x = t \Rightarrow 4 = \int_0^1 f(t).\dfrac{1}{t^2+1}\,dt$. Vậy $6 = \int_0^1 f(x)\,dx$. Chọn đáp án D.

Câu 122: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và không âm trên $[1;4]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $x+2xf(x)=[f'(x)]^2$ đồng thời $f(1)=\frac{3}{2}$. Tính $\int_1^4 f(x)dx=?$

A. $\frac{1186}{45}$ **B.** $\frac{2507}{90}$ **C.** $\frac{848}{45}$ **D.** $\frac{1831}{90}$

Lời giải: Ta có: $x.(2f(x)+1)=[f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x}\sqrt{2f(x)+1}=f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{2f(x)+1}}=\sqrt{x}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{2f(x)+1}}d2f(x)=\int \sqrt{x}dx \Rightarrow \sqrt{2f(x)+1}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

Vì $f(1)=\frac{3}{2} \Rightarrow C=\frac{4}{3} \Rightarrow \int_1^4 f(x)dx=\frac{1186}{45}$. Chọn đáp án A.

Câu 123: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $S(0;0;1), M(m;0;0), N(0;n;0)$ với $m,n>0$ và $m+n=1$. (SMN) luôn tiếp xúc với 1 mặt cầu cố định có bán kính là bao nhiêu biết mặt cầu đó đi qua $M(1;1;1)$.

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải: Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu. Khi đó: $R=d(I,(MSN))=\frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{1}-1\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}}}=I$.

Chú ý: $1+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=1+\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{2}{mn}=1+\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\left|\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1\right|^2$.

Vậy $R=\frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{1}-1\right|}{\left|\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1\right|}$. Chọn $a=b=1-c \Rightarrow R=|a|$ và tâm $I(a;a;1-a)$.

$\Rightarrow IM=\sqrt{2(a-1)^2+a^2}=|a| \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow R=1$. Chọn đáp án C.

Câu 124: Cho $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+1-3i|+|z-1+i|$. Tính $P=M^2+m^2$?

A. $P=240$ **B.** $P=250$ **C.** $P=270$ **D.** $P=320$

Lời giải: $(I;\sqrt{5}):(x-4)^2+(y-3)^2=5$. Gọi $I(4;3) \Rightarrow M(z)\in(I;\sqrt{5})$.

Gọi $A(-1;3), B(1;-1) \Rightarrow IA=IB=5>R$

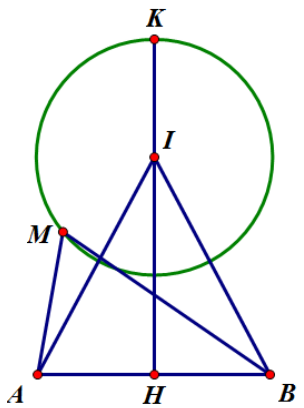
+) $MA+MB \le \sqrt{2(MA^2+MB^2)} \Rightarrow MA+MB \le \sqrt{4MH^2+AB^2}$

$\Rightarrow MA+MB \le \sqrt{4KH^2+AB^2}=10\sqrt{2}$.

Dễ có $HK=HA=HB=\sqrt{5}$. Lấy C sao cho H trung điểm CK.

Ta có Ptolemy:

$MA.CB+MB.CA \ge MC.AB \Rightarrow MA+MB \ge MC.\frac{AB}{CB} \ge KC.\sqrt{2}$



$\Rightarrow MA+MB_{\min}=2\sqrt{10}$

Câu 125: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ và $\int_3^7 f(x)dx=4$. Tính $I=\int_3^7 xf(x)dx$.

A. 40 **B.** 80 **C.** 20 **D.** 60

Lời giải: Ta có: $I=\int_7^3 (10-x)f(10-x)d(10-x)$

$\Rightarrow I=\int_3^7 (10-x)f(x)dx \Rightarrow 2I=\int_3^7 10f(x)dx \Rightarrow I=20$. Chọn đáp án C.

Câu 126: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a)+f(b)=1$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $e^{a+b}\le e^2(a+b-1)$. Tính tích các phần tử của S.

A. 81 **B.** –3 **C.** 3 **D.** –9

Lời giải: Theo giả thiết ta có: $e^{a+b-2}\le a+b-1\Leftrightarrow e^{a+b-2}\le 1+(a+b-2)$.

Mặt khác ta có: $e^{a+b-2}\ge 1+(a+b-2)$. Do đó dấu bằng phải xảy ra $\Leftrightarrow a+b-2=0\Leftrightarrow a+b=2$.

Chọn đáp án D.

Câu 127: Cho các số thực x,y,z không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4^x+4^y+4^z+\ln(x^4+y^4+z^4)-\dfrac{3}{4}(x+y+z)^4$ là $\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=13$ **B.** $S=42$ **C.** $S=54$ **D.** $S=71$

Lời giải: Từ giả thiết ta có: $2\ge 2x^2\Rightarrow x\le 1$; Tương tự ta có: $0\le x,y,z\le 1$.

Và $2(x^2+y^2+z^2)\le 2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\le 2\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1$.

Ta có: $x^4+y^4+z^4\le x^2+y^2+z^2\Rightarrow \ln(x^4+y^4+z^4)\le \ln(x^2+y^2+z^2)\le 0$.

Xét hàm số $f(t)=4^t-3t-1$ ta có: $f'(t)=4^t\ln 4-3; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_4\dfrac{3}{\ln 4}\in[0;1]$.

Lập bảng biến thiên từ đó suy ra:

$$f(t)\le \max_{[0;1]} f(t)=\max\left\{f(0);f(1);f\left(\log_4\frac{3}{\ln 4}\right)\right\}=f(0)=f(1)=0.$$

Vậy ta có: $4^t\le 3t+1,\forall t\in[0;1]$. Áp dụng ta có: $4^x+4^y+4^z\le 3(x+y+z)+3$.

Từ đó suy ra: $P\le 3(x+y+z)+3-\dfrac{3}{4}(x+y+z)^4\le\dfrac{21}{4}$. Chọn đáp án C.

Câu 128: Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $0<(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 18$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4^{\frac{x}{3}}+4^{\frac{y}{3}}+4^{\frac{z}{3}}-\dfrac{1}{108}(x+y+z)^4$ là $\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=13$ **B.** $S=42$ **C.** $S=54$ **D.** $S=71$

Lời giải: Từ giả thiết ta có: $2x^2\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)\le (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\le 18\Rightarrow x\in[0;3]$.

Một cách tương tự ta có $y,z\in[0;3]$.

Do đó ta có $4^{\frac{x}{3}}\le x+1, 4^{\frac{y}{3}}\le y+1, 4^{\frac{z}{3}}\le z+1, \forall x,y,z\in[0;3]$.

Vì vậy $P\le x+y+z+3-\frac{1}{108}(x+y+z)^4$.

Đặt $t=x+y+z\in[0;9]$, ta có $P\le f(t)=t+3-\frac{1}{108}t^4\le \max_{[0;9]} f(t)=f(3)=\frac{21}{4}$.

Dấu bằng đạt tại $(x;y;z)=(3;0;0);(0;3;0);(0;0;3)$. Vậy $S=2.21+3.4=54$. Chọn đáp án C.

Câu 129: Cho hàm số $f(t)=\frac{4^t}{4^t+m}$ (với $m>0$ là tham số thực). Biết $f(x)+f(y)=1$ với mọi số thực dương x,y thỏa mãn $(x+y)^{\frac{1}{2}}\ge\frac{1}{2}.(x+y)+\frac{1}{2}$. Tìm GTNN của hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

A. $\min_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(t)=\frac{3}{4}$ **B.** $\min_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(t)=\frac{1}{2}$ **C.** $\min_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(t)=\frac{1}{4}$ **D.** $\min_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(t)=\frac{5}{4}$

Lời giải: Từ điều kiện bài toán ta có: $(x+y)^{\frac{1}{2}}\ge\frac{1}{2}.(x+y)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+y=1$.

Khi đó $1=f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+m}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+m}=\frac{8+m\left(4^x+4^{1-x}\right)}{4+m\left(4^x+4^{1-x}\right)+m^2}\Leftrightarrow m=2>0$.

Khi đó $f(t)=\frac{1}{1+\frac{2}{4^t}}\Rightarrow \min_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Chọn đáp án B.

Câu 130: Cho hai số thực x,y phân biệt thỏa mãn $x,y\in(0;2018)$. Đặt $S=\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{2018-y}-\ln\frac{x}{2018-x}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S\ge\frac{2}{1009}$ **B.** $S\le\frac{2}{1009}$ **C.** $S\ge\frac{4}{1009}$ **D.** $S\le\frac{4}{1009}$

Lời giải: Theo định lý Lagrange ta có:

$$S=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(u)=\frac{2018}{u(2018-u)}\ge\frac{2018}{\left(\frac{u+2018-u}{2}\right)^2}=\frac{2}{1009}.$$

Trong đó $f(t)=\ln\left(\frac{t}{2018-t}\right)$ và u là số nằm giữa x và y. Chọn đáp án A.

Câu 131: Có bao nhiêu giá trị của α trong $[0;2\pi]$ để ba phần tử của $S=\{\sin\alpha,\sin 2\alpha,\sin 3\alpha\}$ trùng với ba phần tử của $T=\{\cos\alpha,\cos 2\alpha,\cos 3\alpha\}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải: Ta có: $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

$$\Leftrightarrow (2\cos\alpha+1)\sin 2\alpha=(2\cos\alpha+1)\cos 2\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}\\ \tan 2\alpha=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ \alpha=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.$$

Khi $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$ thì ta có thể chia các trường hợp sau:

+) $\begin{cases}\sin\alpha=\cos\alpha\\ \sin 3\alpha=\cos 3\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \alpha=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}\end{cases}$ (Loại)

+) $\begin{cases}\sin\alpha=\cos 3\alpha\Rightarrow 3\alpha=\pm\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+k2\pi\\ \sin 3\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}$. Chọn đáp án D.

Câu 132: Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $3^{x^2+y^2-2}\log_2(x-y)=\dfrac{1}{2}\left[1+\log_2(1-xy)\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=2\left(x^3+y^3\right)-3xy$.

A. 7 **B.** $\dfrac{13}{2}$ **C.** $\dfrac{17}{2}$ **D.** 3

Lời giải: Ta có: $3^{(x-y)^2}\log_2(x-y)^2=3^{2-2xy}\log_2(2-2xy)$.

Vậy $(x-y)^2=2-2xy\Leftrightarrow x^2+y^2=2\Rightarrow(x+y)^2=2+2xy$. Khi đó $M=2(x+y)^3-6xy(x+y)-3xy$.

Đặt $t=x+y\Rightarrow M=f(t)=2t^3-6t\left(\dfrac{t^2-2}{2}\right)-3\left(\dfrac{t^2-2}{2}\right)$.

Với $t^2=2+2xy<4\Rightarrow t\in(-2;2)$. Chọn đáp án B.

Câu 133: Cho tập $A=\{1;2;3;4;5;...;100\}$. Gọi S là tập các tập con của A. Mỗi tập con này gồm 3 phần tử và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân là?

A. $\dfrac{4}{645}$ **B.** $\dfrac{2}{1395}$ **C.** $\dfrac{3}{645}$ **D.** $\dfrac{1}{930}$

Lời giải: "Bài toán chia kẹo của Euler: Cho k cái kẹo chia cho t đứa trẻ hỏi có bao nhiêu cách? Bài toán tương đương với số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1+x_2+...+x_t=k$. Giả sử có $k-1$ chỗ trống tại k cái kẹo. Xếp $t-1$ vách ngăn vào $k-1$ chỗ trống có C_{k-1}^{t-1} cách."

Nếu $\begin{cases}a=b=c\\ a+b+c=91\end{cases}$, loại. Nếu $\begin{cases}a=b\neq c\\ a+b+c=91\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq c\\ 2a+c=91\end{cases}$.

Vậy chọn a có 45 cách từ 1 đến 45 và chọn c chỉ có 1 cách.

Tương tự cho $b=c,c=a$ nên số phần tử không gian mẫu: $|\Omega|=\left(\dfrac{C_{90}^2-45.3}{3!}\right)=\dfrac{3870}{6}=645$

Nếu $a+qa+qa^2=91\Rightarrow 1+q+q^2\in U(91)=\{1;7;13;91\}\Rightarrow q\in\{2;3;9\}$

$\Rightarrow(a;b;c)\in(1;9;81);(7;21;63);(13;26;52)$. Vậy $|\Omega_A|=3$. Chọn đáp án C.

Câu 134: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$ **B.** $\sqrt{20}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $6\sqrt{5}$

Lời giải: Gọi $A(1;0), B(-1;0)$, ta có $P=MB+3MA$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxky: $MB+3MA\le\sqrt{(1^2+3^2)(MA^2+MB^2)}=2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án C.

Câu 135: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho (P) là mặt phẳng đi qua $M(1;4;9)$ và cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó (P) đi qua điểm nào trong các đáp án sau?

A. $(12;0;0)$ **B.** $(0;6;0)$ **C.** $(0;12;0)$ **D.** $(0;0;6)$

Lời giải: Gọi mặt phẳng $(P)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\ge\frac{(1+2+3)^2}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge 36$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\\ a+b+c=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\ b=12\\ c=18\end{cases}$. Chọn đáp án C.

Câu 136: Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x+9^y+16^z=2^x+3^y+4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2^{x+1}+3^{y+1}+4^{z+1}$.

A. $\frac{9+\sqrt{87}}{2}$ **B.** $\frac{5+\sqrt{87}}{2}$ **C.** $\frac{7+\sqrt{87}}{2}$ **D.** $\frac{3+\sqrt{87}}{2}$

Lời giải: Đặt $a=2^x, b=3^y, c=4^z$ ta có: $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=a+b+c\end{cases}$.

Ta cần tìm $\min P=2a+3b+4c\Rightarrow P-\frac{9}{2}=2\left(a-\frac{1}{2}\right)+3\left(b-\frac{1}{2}\right)+4\left(c-\frac{1}{2}\right)$.

$\Rightarrow\left(P-\frac{9}{2}\right)^2\le(2^2+3^2+4^2)\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\right]\Rightarrow\left(P-\frac{9}{2}\right)^2\le 29.\frac{3}{4}\Rightarrow P_{\max}=\frac{9+\sqrt{87}}{2}$.

Chọn đáp án A.

Câu 137: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $H(a;b;c)$ trong đó $ab+bc+ca=-1$. Mặt phẳng (α) qua H và cắt Ox,Oy,Oz tại A,B,C sao cho H là trực tâm ΔABC. Mặt cầu tâm O tiếp xúc (α) có bán kính nhỏ nhất là?

A. 1 **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải: Ta có: $OH\perp(\alpha)\Rightarrow R=OH=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lại có: $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2+2\ge 2$.

Vậy $R\ge\sqrt{2}$. Chọn đáp án C.

Câu 138: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int_0^1\frac{[f'(x)]^2}{e^x}dx=\frac{1}{e-1}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=?$

A. $\dfrac{e-2}{e-1}$ **B.** $\dfrac{e-1}{e-2}$ **C.** 1 **D.** $\dfrac{1}{(e-1)(e-2)}$

Lời giải: Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\int\limits_0^1 \dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}dx.\int\limits_0^1 e^x dx \ge \left[\int\limits_0^1 f'(x)dx\right]^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e-1}.(e-1)\ge 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} = k.\sqrt{e^x} \Leftrightarrow f'(x) = k.e^x$. Vì $\int\limits_0^1 f'(x)dx = 1 \Rightarrow k = \dfrac{1}{e-1}$

Vậy $f(x) = \dfrac{e^x + C}{e-1}$. Mà $f(0) = 0, f(1) = 1$ và $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e-1}$. Vậy $I = \dfrac{e-2}{e-1}$. Chọn đáp án A.

Câu 139: Với m để hàm số $y = \left|x^2 + mx + 1\right|$ trên $[-1;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là 1 thì mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $2 < |m| < 4$ **B.** $1 < |m| < 2$ **C.** $0 < |m| < 1$ **D.** $|m| > 4$

Lời giải: Ta có $\min\limits_{[-1;2]} y = \min\left\{f(-1), f(2), f\left(-\dfrac{m}{2}\right)\right\} = \min\left\{|2-m|; |5+2m|; \left|\dfrac{m^2}{4} - 1\right|\right\}$

Trường hợp 1: $|2-m| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$. Tuy nhiên khi thay vào kiểm tra ta thấy chỉ có $m = 3$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $|5+2m| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -3 \end{array}\right.$. Khi thay vào kiểm tra ta thấy chỉ có $m = -3$ thỏa mãn.

Trường hợp 3: $\left|\dfrac{m^2}{4} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 2\sqrt{2} \\ m = 0 \end{array}\right.$. Tuy nhiên khi thay vào kiểm tra ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn. Chọn đáp án A.

Câu 140: Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A \in (C)$. Tiếp tuyến với (C) tại A tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất là bao nhiêu?

A. $2 + 2\sqrt{2}$ **B.** $4 - 2\sqrt{2}$ **C.** $3 - \sqrt{2}$ **D.** $4 + 2\sqrt{2}$

Lời giải: Giả sử M và N là hai giao điểm với đường tiệm cận. Khi đó $IM = 2\left|x_A + 1\right|; IN = \dfrac{8}{\left|x_A + 1\right|}$

Khi đó $C_{\Delta IMN} = IM + IN + \sqrt{IM^2 + IN^2} \ge 2\sqrt{IM.IN} + \sqrt{2}.\sqrt{IM.IN}$

$\Rightarrow C_{\Delta IMN} \ge 8 + 4\sqrt{2}$. Vậy $r_{\Delta IMN} = \dfrac{s}{p} = \dfrac{8}{4 + 2\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$. Chọn đáp án B.

Câu 141: Cho khối lập phương $3 \times 3 \times 3$ gồm 27 khối lập phương đơn vị. Một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của khối lập phương lớn tại trung điểm của nó. Mặt phẳng này cắt ngang (không đi qua đỉnh) bao nhiêu khối lập phương đơn vị?

A. 16 **B.** 17 **C.** 18 **D.** 19

Lời giải: Đưa vào hệ tọa độ $Oxyz$, xét mặt phẳng đi qua trung điểm OA và vuông góc OA với $A(3;3;3)$ là $(P): x+y+z-\frac{9}{2}=0$. Mặt phẳng này cắt hình lập phương đơn vị nếu điểm $(i;j;k)$ và $(i+1;j+1;k+1)$ nằm về hai phía (P). Vậy $\begin{cases} i+j+k-\frac{9}{2}<0 \\ i+1+j+1+k+1-\frac{9}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<i+j+k<\frac{9}{2}$

Các họ không thỏa mãn là $i+j+k\le\frac{3}{2}$ hoặc $i+j+k\ge\frac{9}{2}$ tức

$$S=\{(0;0;0),(0;0;1),(0;1;0),(1;0;0),(1;2;2),(2;1;2),(2;2;1),(2;2;2)\}.$$

Vậy có $27-8=19$ khối lập phương bị cắt. Chọn đáp án D.

Câu 142: Cho biết $x\in(0;+\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t)dt=x^3-5x^2$. Tính $f(4)=?$

A. -2 **B.** -8 **C.** 2 **D.** 8

Lời giải: Ta có $\int_0^{x^2} f(t)dt=F(x^2)-F(0)=x^3-5x^2$. Vậy $2x.F'(x^2)=3x^2-10x$

$f(x^2)=F'(x^2)=\frac{3}{2}x-5\Rightarrow f(4)=-2$. Chọn đáp án A.

Câu 143: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ΔABC có đỉnh $A(4;1;0)$, trực tâm $H(8;1;0)$ và $M(1;1;0)$ là trung điểm BC. Tìm tâm I đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

A. $I(1;1;0)$ **B.** $I(-1;0;1)$ **C.** $I(-1;1;1)$ **D.** $I(-1;1;0)$

Lời giải: Theo tính chất về đường tròn Euler ta có: $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}\Rightarrow(4;0;0)=2(1-x;1-y;-z)$

Vậy $I(-1;1;0)$. Chọn đáp án D.

Câu 144: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|+|z+2+i|=4\sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z-6+5i|$?

A. $4\sqrt{5}$ **B.** $5\sqrt{5}$ **C.** $6\sqrt{5}$ **D.** $7\sqrt{5}$

Lời giải: Gọi $A(2;-3),B(-2;-1),C(6;-5)$. Ta thấy A là trung điểm của BC.

Mà $\begin{cases} MA+MB=4\sqrt{5}=2a \\ AB=2\sqrt{5}=2c=AC \end{cases}\Rightarrow a=2\sqrt{5},c=\sqrt{5},b=\sqrt{15}$.

Do đó MC max khi và chỉ khi: $MC=CA+\frac{1}{2}AB+a=2\sqrt{5}+\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$.

Câu 145: Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max_{[1;3]} f(x)=2;\min_{[1;3]} f(x)=\frac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int_1^3 f(x)dx\int_1^3\frac{1}{f(x)}dx$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tính $\int_1^3 f(x)dx$?

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{7}{5}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Lời giải: Ta có: $\frac{1}{2}\le f(x)\le 2\Rightarrow (2f(x)-1)(f(x)-2)\le 0\Rightarrow f(x)+\frac{1}{f(x)}\le \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}\le \frac{5}{2}-f(x)\Rightarrow S\le \int_1^3 f(x)dx\left(\int_1^3 \frac{5}{2}-f(x)dx\right)$. Ta tìm được $\max S=\frac{25}{4}$ khi $\int_1^3 f(x)dx=\frac{5}{2}$.

Câu 146: Cho hai số phức z và w biết chúng thỏa mãn $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1$ và $w=iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M=|z-w|$.

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{3}$

Lời giải: Ta có: $|(1+i)z+2(1-i)|=\sqrt{2}\Leftrightarrow |z-2i|=1$. Vậy quỹ tích $M(z)$ là đường tròn tâm $I(0;2), R=1$. Lại có $|w-z|=|iz-z|=\sqrt{2}.|z|\le 3\sqrt{2}$. Chọn đáp án C.

Câu 147: Gọi a,b là các số nguyên thỏa mãn $(1+\tan 1^0)(1+\tan 2^0)...(1+\tan 43^0)=2^a.(1+\tan b^0)$ đồng thời $a,b\in[0;90]$. Tính $P=a+b$?

A. 22 **B.** 46 **C.** 27 **D.** 44

Lời giải: Vì $1+\tan x=1+\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{2}\left(\frac{\sin(x+45^0)}{\cos x}\right)$.

Do đó $P=\left(\sqrt{2}\right)^{43}.\frac{\sin 46^0\sin 47^0...\sin 88^0}{\cos 1^0\cos 2^0...\cos 43^0}=\left(\sqrt{2}\right)^{43}.\frac{\sin 46^0}{\cos 1^0}=2^{21}.(1+\tan 1^0)$. Chọn đáp án A.

Câu 148: Cho cấp số cộng (a_n); cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2>a_1\ge 0; b_2>b_1\ge 1$ và hàm số $f(x)=x^3-3x$ sao cho $f(a_2)+2=f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2)+2=f(\log_2 b)$. Số nguyên dương $n>1$ nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $b_n>2018a_n$ là?

A. 16 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 18

Lời giải: Tính bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	2	↘	0	↘	-2	↗	

Vì $f(a_2)<f(a_1)\Rightarrow a_1,a_2\in(0;1)$ và $a_2=1; a_1=0$.

Tương tự $\log_2 b_2=1$ và $\log_2 b_1=0$.

Khi đó $a_n=n-1$ và $b_n=2^{n-1}$.

Vậy $b_n>2018a_n\Leftrightarrow 2^{n-1}>2018(n-1)$. Chọn đáp án A.

Câu 149: Biết rằng $L=\lim\frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+...+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+...+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\frac{a^{2019}+b}{c}$ trong đó (u_n) xác định bởi $u_1=0; u_{n+1}=u_n+4n+3$ và a,b,c là các số nguyên dương và $b<2019$. Tính $S=a+b-c$?

A. -1 **B.** 0 **C.** 2017 **D.** 2018

Lời giải: $u_n-u_{n-1}=4n-1\Rightarrow u_n=2n^2+n-3$.

Xét $S_1=\left\{n,4n,4^2n,...4^{2018}n\right\}$ và $S_2=\left\{n,2n,2^2n,...2^{2018}n\right\}$.

Ta có: $\sqrt{u_k}=\sqrt{2k^2+k-3}-\sqrt{2}.k+\sqrt{2}.k=\dfrac{k-3}{\sqrt{2k^2+k-3}+\sqrt{2}.k}+\sqrt{2}.k$.

Vậy $L=\lim\dfrac{\sum\limits_{k\in S_1}\dfrac{k-3}{\sqrt{2k^2+k-3}+\sqrt{2}.k}+\sqrt{2}n.\left(\dfrac{4^{2019}-1}{3}\right)}{\sum\limits_{k\in S_2}\dfrac{k-3}{\sqrt{2k^2+k-3}+\sqrt{2}.k}+\sqrt{2}n.\left(2^{2019}-1\right)}=\dfrac{2^{2019}+1}{3}$. Chọn đáp án B.

Câu 150: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(3;4;5\right)$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng qua M sao cho $\left(P\right)$ cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ tới $\left(P\right)$ là lớn nhất. Thể tích khối tứ diện $OABC$ là?

A. $\dfrac{6250}{3}$ **B.** $\dfrac{3125}{9}$ **C.** $\dfrac{24}{5}$ **D.** $\dfrac{144}{5}$

Lời giải: Ta có: $d\left(O;\left(P\right)\right)\max=OM$ khi $\left(P\right)$ có $\vec{n}=\overrightarrow{OM}=\left(3;4;5\right)$.

$\Rightarrow\left(P\right):3x+4y+5z-50=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\dfrac{50}{3}}+\dfrac{y}{\dfrac{25}{2}}+\dfrac{z}{10}=1\Leftrightarrow a=\dfrac{50}{3},b=\dfrac{25}{2},c=10\Rightarrow V_{OABC}=\dfrac{3125}{9}$.

Chọn đáp án B.

Câu 151: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c\left(a\neq0\right)$ có $\min\limits_{(-\infty;0)}f\left(x\right)=f\left(-1\right)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ bằng?

A. $c+8a$ **B.** $c-\dfrac{7a}{16}$ **C.** $c+\dfrac{9a}{16}$ **D.** $c-a$

Lời giải: Dễ dàng suy ra được $a>0,b<0$ và $x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vì $y'=4ax^3+2bx\Rightarrow y'\left(-1\right)=0$ khi $b=-2a$. Vậy $y=ax^4-2ax^2+c$.

Do đó $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=c-a$. Chọn đáp án D.

Câu 152: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1\end{cases}$ và $A\left(0;4;0\right)$. Gọi M là điểm cách đều d và trục $x'Ox$. Khoảng cách ngắn nhất giữa A và M bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{6}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$

Lời giải: Gọi $M\left(a;b;c\right)$ ta có: $\begin{cases}d\left(M,Ox\right)=\sqrt{b^2+c^2}\\d\left(M,d\right)=\sqrt{a^2+\left(c-1\right)^2}\end{cases}$.

Do đó $b^2+c^2=a^2+\left(c-1\right)^2\Leftrightarrow a^2=b^2+2c-1$.

Khi đó $AM=\sqrt{a^2+\left(b-4\right)^2+c^2}=\sqrt{2\left(b-2\right)^2+\left(c+1\right)^2+6}$. Chọn đáp án C.

Câu 153: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=f(x^2)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải: Ta có: $y'=2x.f'(x^2)=2x^5(x^2+1)(x^4+2mx^2+4)$.

Do đó $y'=0$ khi $\left[\begin{array}{l}x=0\\x^4+2mx^2+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\m=-x^2-\dfrac{2}{x^2}\end{array}\right.$. Khảo sát bảng biến thiên ta kết luận $m\ge -2$.

Chọn đáp án B.

Câu 154: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int\limits_0^1[f'(x)]^2\sqrt{1+x^2}\,dx=\dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$ bằng?

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2})$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2})$

C. $\dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$ **D.** $(\sqrt{2}-1)\ln(1+\sqrt{2})$

Lời giải: Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\int\limits_0^1[f'(x)]^2\sqrt{1+x^2}\,dx.\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\ge\left[\int\limits_0^1 f'(x)\,dx\right]^2=1$

Mặt khác $\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $f'(x).\sqrt[4]{1+x^2}=\dfrac{k}{\sqrt[4]{1+x^2}}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{k}{\sqrt{1+x^2}}$

Vì $\int\limits_0^1 f'(x)\,dx=1$ nên $k=\dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$. Vậy $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$

Vì $\begin{cases}f(0)=0\\f(1)=1\end{cases}$ nên $C=0$. Do đó $\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx=\dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. Chọn đáp án C.

Câu 155: Cho $x,y>0$ và thỏa mãn $\begin{cases}x^2-xy+3=0\\2x+3y-14\le 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$?

A. 8 **B.** 0 **C.** 12 **D.** 4

Lời giải: Ta có $y=\dfrac{x^2+3}{x}$. Thay vào ta có $P=5x-\dfrac{9}{x}=f(x)$ với $x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$

Khi đó $\max P+\min P=0$. Chọn đáp án B.

Câu 156: Cho mặt phẳng $(P_{a,b,c}):bcx+cay+abz-abc=0$ với $a,b,c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Gọi $M(x_0,y_0,z_0)$ là điểm cố định của họ mặt phẳng $(P_{a,b,c})$. Tính giá trị của biểu thức $E=x_0+y_0+z_0$?

A. $E=1$ **B.** $E=3$ **C.** $E=\frac{1}{3}$ **D.** $E=\frac{1}{2}$

Lời giải: Ta có $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Vậy $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Chọn đáp án A.

Câu 157: Cho các số thực dương a,b,c lần lượt là số hạng thứ m,n,p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính $P=(b-c)\log_3 a+2(c-a)\log_9 b+3(a-b)\log_{27} c$.

A. $P=3$ **B.** $P=1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=2$

Lời giải: Ta có: $\begin{cases} a=u_1+(m-1)d=v_1.q^{m-1} \\ b=u_1+(n-1)d=v_1.q^{n-1} \\ c=u_1+(p-1)d=v_1.q^{p-1} \end{cases}$. Và $P=\log_3\left(a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b}\right)$

$\Leftrightarrow P=\log_3\left(\left(\frac{a}{c}\right)^b.\left(\frac{c}{b}\right)^a.\left(\frac{b}{a}\right)^c\right)\Leftrightarrow P=\log_3\left(q^{(m-p)b+(n-m)c+(p-n)a}\right)$. Vì:

$(m-p)b+(n-m)c+(p-n)a=(m-p).(u_1+(n-1)d)+(n-m).(u_1+(p-1)d)+(p-n).(u_1+(m-1)d)=0$

(học sinh tự khai triển). Vậy $P=0$

Chú ý: Mẹo thay $a=b=c=1$. Chọn đáp án C.

Câu 158: Tìm m để phương trình $(m+1)\cos x+(m-1)\sin x=2m+3$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=\frac{\pi}{3}$.

A. $m=2+\sqrt{3}$ **B.** $m=2-\sqrt{3}$ **C.** $m=2\pm\sqrt{3}$ **D.** Không tồn tại m

Lời giải: Phương trình có nghiệm $(m+1)^2+(m-1)^2\ge(2m+3)^2\Leftrightarrow\frac{-6-\sqrt{22}}{2}\le m\le\frac{-6+\sqrt{22}}{2}$ $(*)$

PT $\Leftrightarrow\frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\cos x+\frac{m-1}{\sqrt{2m^2+2}}\sin x=\frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$

$\Leftrightarrow\cos(x+\alpha)=\cos\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\beta+\alpha+k_1 2\pi \\ x=\beta-\alpha+k_2 2\pi \end{array}\right.$ với $\cos\alpha=\frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}};\cos\beta=\frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$

- Nếu $x_1;x_2$ cùng thuộc một họ nghiệm $\Rightarrow x_1-x_2=k2\pi$ (loại)
- Nếu $x_1;x_2$ cùng thuộc hai họ nghiệm $\Rightarrow x_1=\beta+\alpha+k_1 2\pi;x_2=\beta-\alpha+k_2 2\pi$

Do đó $|x_1-x_2|=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow|2\alpha+(k_1-k_2)2\pi|=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\cos|2\alpha+(k_1-k_2)2\pi|=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=2\left(\frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\right)^2-1\Leftrightarrow\frac{3}{4}=\frac{(m+1)^2}{2m^2+2}$

$\Leftrightarrow m^2-4m+1=0\Leftrightarrow m=2\pm\sqrt{3}$ (không thỏa mãn $(*)$)

Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D.

Câu 159: Cho parabol $(P):y=x^2$ và hai điểm A,B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Lời giải: Gọi $A\left(a;a^2\right),B\left(b;b^2\right)$ với $a<b$. Ta có: $AB=2\Leftrightarrow\left(b-a\right)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=4$

$AB:\dfrac{x-a}{b-a}=\dfrac{y-a^2}{b^2-a^2}\Leftrightarrow\dfrac{x-a}{1}=\dfrac{y-a^2}{b+a}\Leftrightarrow y=\left(a+b\right)\left(x-a\right)+a^2\Leftrightarrow y=\left(a+b\right)x-ab$

$S=\int\limits_a^b\left(\left(a+b\right)x-ab-x^2\right)dx=\int\limits_a^b\left(x-a\right)\left(b-x\right)dx$. Đặt $t=x-a$. Suy ra:

$$S=\int\limits_0^{b-a}t\left(b-a-t\right)dt=\int\limits_0^{b-a}\left(\left(b-a\right)t-t^2\right)dt=\dfrac{\left(b-a\right)t^2}{2}\Big|_0^{b-a}-\dfrac{t^3}{3}\Big|_0^{b-a}=\dfrac{\left(b-a\right)^3}{6}$$

Ta có: $\left(b-a\right)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=4\Leftrightarrow\left(b-a\right)^2\left(1+\left(b+a\right)^2\right)=4\Leftrightarrow\left(b-a\right)^2=\dfrac{4}{1+\left(a+b\right)^2}\le4$

Suy ra: $b-a\le2\Rightarrow S=\dfrac{\left(b-a\right)^3}{6}\le\dfrac{2^3}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+b=0\\b-a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow A\left(-1;1\right);B\left(1;1\right)$

Chú ý: Khi làm trắc nghiệm ta có thể đặc biệt hóa AB song song với Ox, từ đó cũng tìm được $a+b=0$.

Câu 160: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0;-1\right\}$ thỏa mãn điều kiện $f\left(1\right)=-2\ln2$ và $x\left(x+1\right).f'\left(x\right)+f\left(x\right)=x^2+x$. Biết $f\left(2\right)=a+b\ln3\ \left(a,b\in Q\right)$. Tính $a^2+b^2=?$

A. $\dfrac{3}{4}$ **B.** $\dfrac{13}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{9}{2}$

Lời giải: Ta có $f'\left(x\right)+\dfrac{1}{x\left(x+1\right)}.f\left(x\right)=1\Rightarrow\dfrac{x}{x+1}.f'\left(x\right)+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}.f\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1}$

$$\Rightarrow\left[f\left(x\right).\dfrac{x}{x+1}\right]'=\dfrac{x}{x+1}\Rightarrow f\left(x\right).\dfrac{x}{x+1}=x-\ln\left|x+1\right|+C$$

Ta có $f\left(1\right).\dfrac{1}{2}=1-\ln2+C\Rightarrow C=-1$. Khi đó $f\left(2\right).\dfrac{2}{3}=2-\ln3-1=1-\ln3$

$\Leftrightarrow f\left(2\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln3$ do đó $a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$. Chọn đáp án D.