



TỔNG HỢP CÔNG THỨC TOÁN THPT

Th.S Nguyễn Việt Hiếu



BRVT



089908.3939



viethieu220284@gmail.com



Face:viethieu220284
Zalo:089908.3939





LỜI TỰA

Tác giả xin cảm ơn quý thầy cô, các em học sinh đọc và nghiên cứu tài liệu. Tác giả viết tài liệu với mong muốn góp một phần nhỏ giúp các em học sinh trong việc học môn Toán ở THPT. Thông qua tài liệu tác giả cũng mong nhận được sự chia sẻ từ quý thầy cô giảng dạy. Viết tài liệu trong thời gian ngắn, kinh nghiệm chưa nhiều nên không thể tránh được thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự đóng góp của quý độc giả.

Xuyên Mộc, 9/2021



1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số
Cho K là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

+ Định lí 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên K .

- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên K .

+ Định lí 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .

- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K .

2. Tìm điều kiện a, b, c để hàm số

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

đồng biến, nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

+ Hs $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c > 0 \\ a > 0 \\ \Delta_y \leq 0 \end{cases}$$

+ Hs $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c < 0 \\ a < 0 \\ \Delta_y \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta_y \leq 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$$

3. Tìm điều kiện để hàm số

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0; ad - bc \neq 0)$$

đồng biến, nghịch biến.

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

+ Hs $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow f'(x) > 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad - bc > 0$$

+ Hs $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow f'(x) < 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad - bc < 0$$

+ Hs $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ đb trên khoảng $(\alpha; \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq \alpha \text{ or } -\frac{d}{c} \geq \beta \end{cases}$$

+ Hs $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ nb trên khoảng $(-\infty; \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; \beta) \\ -\frac{d}{c} \notin (-\infty; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \geq \beta \end{cases}$$

+ Hs $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên $(\alpha; \beta]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (\alpha; \beta] \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq \alpha \text{ or } -\frac{d}{c} > \beta \end{cases}$$

4. Cho hs $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$.

$$m \geq f(x), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \geq \max_{[a; b]} f(x)$$

$$m \leq f(x), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \leq \min_{[a; b]} f(x)$$

BT1a/Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$$y = \frac{x+2}{x+5m} \text{ đồng biến trên khoảng}$$

$$(-\infty; -10)? \quad y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}, x \neq -5m$$

Hs đồng biến trên $(-\infty; -10)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty; -10) \\ -5m \notin (-\infty; -10) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2$$

b/ Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của

$$\text{tham số } m \text{ để hs } y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$$

đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

$$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$$

Hs đb trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} \left(-3x^2 - \frac{1}{x^6} \right)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -4.$$

KL: 4 số nguyên âm m thỏa.

T.S Nguyễn Văn Việt - Học 0899083939

5. Cực trị của hàm số

+ Cho hs $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = x_0$

$x = x_0$ là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$

$y_0 = f(x_0)$ là giá trị cực đại (cực đại) của hs.

$M_0(x_0; y_0)$ là điểm cực đại của đths $y = f(x)$.

+ Cho hs $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = x_2$

$x = x_2$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$

$y_2 = f(x_2)$ là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hs.

$M_2(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đths $y = f(x)$.

+ Định lí 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ có

đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt

cực trị tại $x_0 \in (a; b)$ thì $f'(x_0) = 0$.

+ Định lí 2: Giả sử hs $y = f(x)$ liên

tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$

và có đạo hàm trên K hoặc trên

$K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		f_{CD}	
x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		f_{CT}	

+ Định lý 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

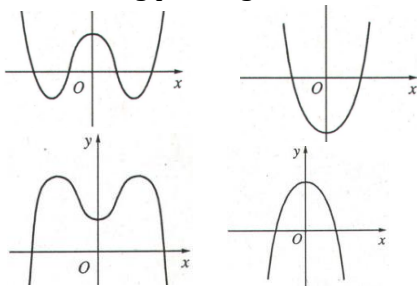
+ Pt đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị
B1. Tìm đk hs có 2 điểm cực trị.
B2. C1: Lấy y chia cho y' ta được thương là $q(x)$ và dư là $r(x) = mx + n$
Ptđt đi qua 2 điểm cực trị: $y = mx + n$
C2: Ptđt đi qua 2 điểm cực trị của đths:

$$y = f(x) - \frac{f'(x) \cdot f''(x)}{18A}$$

7. Cực trị hàm trùng phương
 $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)
 $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

+ Đths trùng phương



+ Hs có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow a \cdot b < 0$
(a, b trái dấu)

+ Hs có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$

+ Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$

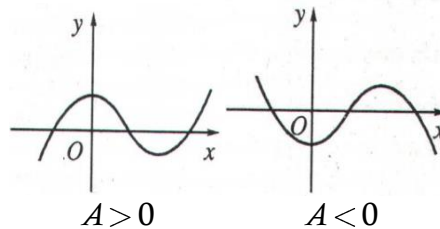
+ Hàm số có 1 điểm cực tiểu và hai điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

+ Khi hs có 3 điểm cực trị ($ab < 0$) thì đths có 3 điểm cực trị $A(0; c)$,

6. Cực trị hàm số bậc 3 ($A \neq 0$)

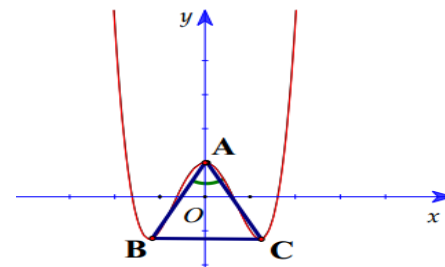
$$y = f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C = ax^2 + bx + c$$



$$B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$.



$$\text{Đặt } \widehat{BAC} = \alpha, \text{ có } \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$$

$$\text{Diện tích } \triangle ABC \text{ bằng } S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$$

- Tam giác ABC vuông cân

$$\Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$$

- Tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$$

- Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$

$$\Leftrightarrow 3b^3 + 8a = 0$$

- Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp:

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S} = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}$$

- Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp:

$$r = \frac{2S}{AB + BC + AC} = \frac{b^2}{4|a|\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$$

+ Tam giác ABC cân tại A,

$$AB = AC = \sqrt{\frac{b^4 - 8ba}{16a^2}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

+ Hs có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B^2 - 3AC > 0 \end{cases}$$

+ Hs ko có cực trị $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$

+ Đths có 2 đ. cực trị nằm về 2 phía Oy

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow a \cdot c < 0$$

+ Đths bậc 3 có hai điểm cực trị nằm về 2 phía trục Ox

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

8. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hs

+ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D.

- Số M đgl giá trị lớn nhất của hs $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max_D f(x)$.

- Số m đgl giá trị nhỏ nhất của hs $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min_D f(x)$.

+ Định lý: Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có GTLN, GTNN trên đoạn đó.

+ PP tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$

B1: Tính $f'(x)$. Tìm $x_1; x_2; \dots; x_n$

thuộc khoảng $(a; b)$ thỏa $f'(x) = 0$ hay $f'(x)$ không xác định.

B2: Tính $f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)$

B3: Tìm số lớn nhất M, số nhỏ nhất m trong các số ở B2.

Kết luận: $M = \max_{[a; b]} f(x)$,

$$m = \min_{[a; b]} f(x).$$

+ Ta có thể sử dụng BBT để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng.

Zalo: 089908 3939

BT2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2; 19]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 24$$

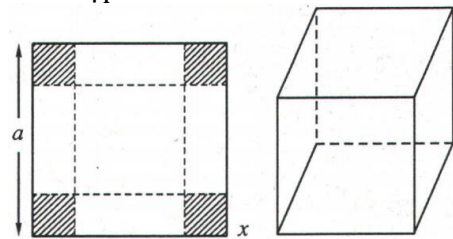
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \notin [2; 19] \end{cases}$$

Ta có: $f(2) = -40$; $f(19) = 6403$

$$f(2\sqrt{2}) = -32\sqrt{2}$$

KL: $\min_{[2; 19]} f(x) = -32\sqrt{2}$.

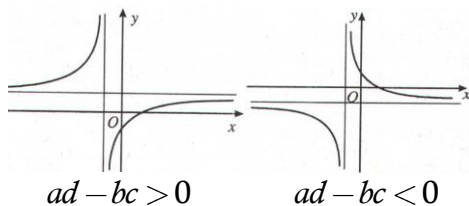
BT3: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại như hình dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tính cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp lớn nhất.



Gọi x là cạnh hình vuông bị cắt.

+Đths trùng phương (7. Cực trị hstp)

+Đths $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$)



BT4. Cho hs $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	1		$+\infty$		1

Trong 3 số a, b, c có bao nhiêu số dương?

-TCĐ: $x = 2 \Leftrightarrow c = -2b$

-TCN: $y = 1 \Leftrightarrow a = b$

-Hs đồng biến trên từng khoảng xác

định: $ac - b > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < b < 0$

KL: Trong 3 số a, b, c có 1 số dương.

11. PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Đk: $0 < x < \frac{a}{2}$.

Thể tích khối hộp:

$$V = (a - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

$$\text{Có } V' = 12\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{6}\right),$$

$$\text{do đó } V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$$

Lập bảng biến thiên của hs $V = V(x)$.

$$\max_{\left(0; \frac{a}{2}\right)} V(x) = \frac{2a^3}{27} \text{ tại } x = \frac{a}{6}.$$

9. Đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đths $y = f(x)$

+ $y = y_0$ là TCN của đths $y = f(x)$ nếu thỏa ít nhất 1 trong hai đk:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0$$

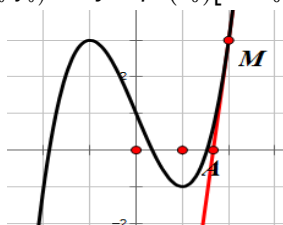
+ Đường thẳng $x = x_0$ đgl tiệm cận đứng của đths $y = f(x)$ nếu thỏa ít nhất 1 trong 4 đk:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty$$

PTTT của đths $y = f(x)$ tại điểm

$$M(x_0; y_0) \text{ là: } y = f'(x_0)[x - x_0] + y_0$$



- x_0 là hoành độ tiếp điểm.
- y_0 là tung độ tiếp điểm.
- $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$.

Cho đường thẳng d: $y = ax + b$

- Tiếp tuyến có hệ số góc k
 $f'(x_0) = k$
- Tiếp tuyến song song với đt d
 $f'(x_0) = a$ (viết pttt kiểm tra song song hay trùng d, nếu trùng loại)
- Tiếp tuyến vuông góc với đt d
 $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$

12. Tương giao của hai đồ thị hàm số

+Đths nhất biến

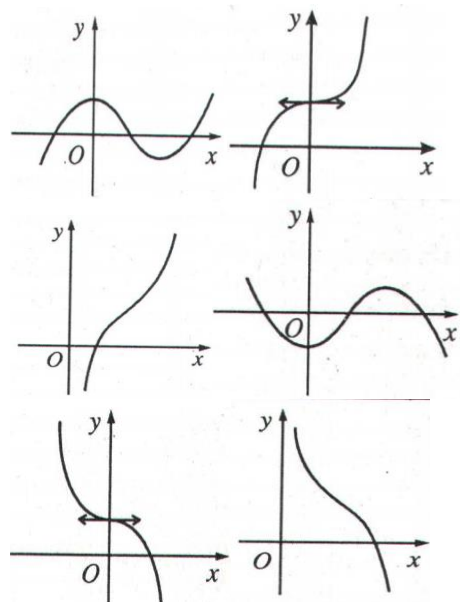
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0; ad - bc \neq 0) \text{ có}$$

một đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$

và một đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

10. Đồ thị hàm số

+Đths bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)



12a/ Dựa vào đths $y = f(x)$, biện luận theo m số nghiệm pt $f(x) = m$.

+Số no pt $f(x) = m$ là số giao điểm của đths $y = f(x)$ và đth $y = m$.

+Lập BBT, vẽ đths $y = f(x)$.

+Dựa vào đths $y = f(x)$ biện luận.

BT5. Tìm m để pt $2x^3 - 6x + m = 0$ có 1 nghiệm.

+Số no pt đã cho là số giao điểm đths $y = -2x^3 + 6x$ và đt $y = m$.

+Xét hs $y = -2x^3 + 6x$

$$y' = -6x^2 + 6$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Lập BBT.

+ pt $2x^3 - 6x + m = 0$ có 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}$$

12b/ Tìm tọa độ giao điểm của 2 đths

$$y = f(x); y = g(x)$$

B1: Lập pt hoành độ giao điểm của

$$2 \text{ đths: } f(x) = g(x) \quad (*)$$

B2: PT(*) vô nghiệm, 2 đths ko cắt nhau
PT(*) có n nghiệm pb $x_1; x_2; \dots; x_n$

KL: 2 đths cắt nhau tại n điểm pb

$$A_1(x_1; f(x_1)), \dots, A_n(x_n; f(x_n))$$

BT6. Tìm m để đths

$f(x) = 2x^3 - mx^2 + mx - 2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

Giải: pt hoành độ giao điểm:

$$2x^3 - mx^2 + mx - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + (2-m)x + 2 = 0(*) \end{cases}$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ pt (*) có 2 nghiệm pb khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases}$$

12c/Tương giao giữa đường thẳng d:

$$y = kx + m \text{ và đths } y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

- Pt hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{ax+b}{cx+d} = kx+m \Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (5)$$

- d cắt (C) tại hai điểm pb $\Leftrightarrow$ pt (5) có hai nghiệm pb khác $-\frac{d}{c}$.

- Khi d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; kx_1 + m), N(x_2; kx_2 + m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của pt (5).

$$MN = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_2 - x_1| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$$

T.S Nguyễn Viết Hiếu 0899083939

13. Đặc biệt

+Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ và $u, v \in (a; b)$

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$$

$$f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$$

$$f(u) \leq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$$

+Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ và $u, v \in (a; b)$

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$$

$$f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$$

$$f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v$$

+Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Pt $f(x) = m$ có nghiệm trên $[a; b]$

$$\Leftrightarrow \min_{[a;b]} f(x) \leq m \leq \max_{[a;b]} f(x).$$

$$m \geq f(x), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \geq \max_{[a;b]} f(x)$$

$$m \leq f(x), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \leq \min_{[a;b]} f(x)$$

+Cho hs $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$.

$$m > f(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m > \max_{(a;b)} f(x)$$

(nếu tồn tại $\max_{(a;b)} f(x)$)

$$m > f(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \geq \sup_{(a;b)} f(x)$$

(nếu không tồn tại $\max_{(a;b)} f(x)$)

$$m < f(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m < \min_{(a;b)} f(x)$$

(Nếu tồn tại $\min_{(a;b)} f(x)$)

$$m < f(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \leq \inf_{(a;b)} f(x)$$

(Nếu không tồn tại $\min_{(a;b)} f(x)$)

BT7. Xét các số thực dương x, y thỏa

$$\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4. \text{ Tìm}$$

giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

(Câu 47 đề 101, THPT Quốc Gia 2017)

$$\text{A. } P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9} \quad \text{B. } P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$$

$$\text{C. } P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{9} \quad \text{D. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$$

Giải: Đk: $x > 0, y > 0, xy < 1$

$$\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4 \Leftrightarrow$$

$$\log_3(3-3xy) + (3-3xy) = \log_3(x+2y) + (x+2y) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$.

Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$, nên

hs $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow f(3-3xy) = f(x+2y)$$

$$\Leftrightarrow 3-3xy = x+2y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3-x}{3x+2}$$

$$\text{Suy ra: } P = x + \frac{3-x}{3x+2}$$

$$P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}. \text{ ĐA: D.}$$

BT8. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để pt $\sqrt[3]{m+3\sqrt{m+3\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực? (Câu 35, Đề MH2018)

Giải:

$$\sqrt[3]{m+3\sqrt{m+3\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow$$

$$(m+3\sin x) + 3\sqrt{m+3\sin x} = \sin^3 x + 3\sin x$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{m+3\sin x}) = f(\sin x)$$

$$(\text{với } f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R},$$

$$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ nên hs}$$

$$f(t) = t^3 + 3t \text{ đồng biến trên } \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+3\sin x} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow m = \sin^3 x - 3\sin x$$

Đặt $u = \sin x, -1 \leq u \leq 1$, có pt

$$m = u^3 - 3u$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \min_{[-1;1]} (u^3 - 3u) \leq m \leq \max_{[-1;1]} (u^3 - 3u)$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

KL: 5 số nguyên m.

BT9. Cho hs $f(x)$, hs $y = f'(x)$

liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả m để bpt

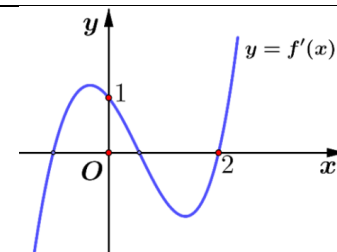
$$f(x) > x + m \text{ nghiệm đúng với mọi}$$

$$x \in (0; 2).$$

Giải: Xét hs $g(x) = f(x) - x, x \in (0; 2)$

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0, \forall x \in (0; 2)$$

Hs $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.



x	0	2
$g'(x)$		-
$g(x)$		

Bpt $f(x) > x + m$ no đúng $\forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow m < g(x), \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow m \leq f(2) - 2$$

1. Lũy thừa mũ số nguyênCho số thực a và số nguyên dương n

$$a^n = a.a. \dots a \text{ (n thừa số } a \text{)}$$

$$a^0 = 1 (a \neq 0) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$$

2. Lũy thừa mũ số hữu tỉ

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a > 0, m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}^*)$$

3. Điều kiện xác định $\sqrt[n]{A}$ ($n \in \mathbb{N}^*; n \geq 2$)+ n chẵn: Điều kiện $A \geq 0$ + n lẻ: Điều kiện A xác định**4. Phương trình $x^n = b$ ($n \in \mathbb{N}^*$)**+ n lẻ: $x^n = b \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{b}$ + n chẵn: $x^n = b (b < 0)$ Vô nghiệm.

$$x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$b > 0: x^n = b \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{b}$$

5. Tính chất $\sqrt[n]{}$ ($n, k \in \mathbb{N}^*; n, k \geq 2$)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a (n \text{ lẻ}) \\ |a| (n \text{ chẵn}) \end{cases}$$

6. Tính chất lũy thừa với mũ số thực
Cho $a, b > 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \quad (a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

+ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$ + Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ **7. Công thức logarit**

$$a^\alpha = b \Leftrightarrow \alpha = \log_a b \quad (0 < a \neq 1; b > 0)$$

$$+ \log_a b \text{ có điều kiện } \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$

$$+ \log_a 1 = 0; \log_a a = 1 \quad (0 < a \neq 1)$$

$$+ \log_a (a^\alpha) = \alpha \quad (0 < a \neq 1; \alpha \in \mathbb{R})$$

$$+ a^{\log_a b} = b \quad (0 < a \neq 1; b > 0)$$

$$+ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (0 < a, c \neq 1; b > 0)$$

$$+ \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \quad (0 < a, b \neq 1; c > 0)$$

$$+ \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (0 < a, b \neq 1)$$

$$+ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad (0 < a, b, c \neq 1)$$

$$+ \log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 \quad \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b_1, b_2 > 0 \end{cases}$$

$$+ \log_a \left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2 \quad \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b_1, b_2 > 0 \end{cases}$$

$$+ \log_a (b^\alpha) = \alpha \log_a b \quad \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0; \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$+ \log_{a^\alpha} (b) = \frac{1}{\alpha} \log_a b \quad \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0; \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$+ \log_{a^\alpha} (b^\beta) = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b \quad \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0; \alpha \neq 0 \end{cases}$$

+ Chú ý: $\log_a (b^\alpha); \alpha \in \mathbb{N}^*; \alpha$ chẵn

$$\log_a (b^2) = 2 \log_a b \quad (0 < a \neq 1; b > 0)$$

$$\log_a (b^2) = 2 \log_a |b| \quad (0 < a \neq 1; b \neq 0)$$

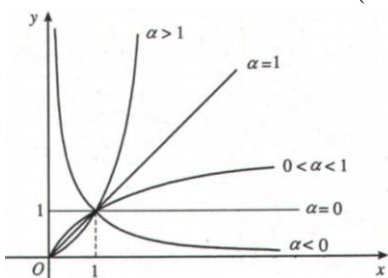
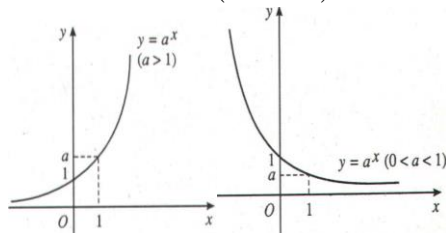
Kí hiệu: $\log_{10} b = \log b = \lg b; \log_e b = \ln b$ **8. Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)**a/Txđ hs lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc α

α	Đk x	TXĐ hs $y = x^\alpha$
α nguyên dương ($y = x^2; y = x^{100}; \dots$)	$x \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ ($y = x^{-2}; y = x^{-100}; \dots$)	$x \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
α ko nguyên ($y = x^{\frac{1}{2}}; y = x^{\sqrt{2}}; \dots$)	$x > 0$	$(0; +\infty)$

b/Đạo hàm của hàm số lũy thừa

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$

c/Đồ thị hs lũy thừa $y = x^\alpha$ trên $(0; +\infty)$ **9. Hàm số mũ $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$)**+ TXĐ: $\mathbb{R}$ + Tập giá trị: $(0; +\infty)$ (Vì $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)+ HS đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$.+ HS nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$.+ Đths mũ $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$)Trục Ox là TCN đths $y = a^x$

+ Đạo hàm hàm mũ:

$$(e^x)' = e^x \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

10. Hs logarit $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$)+ TXĐ: $(0; +\infty)$ + Tập giá trị: $\mathbb{R}$ + HS đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$.+ HS nb trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$.

$$+ \text{Đạo hàm: } (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0)$$

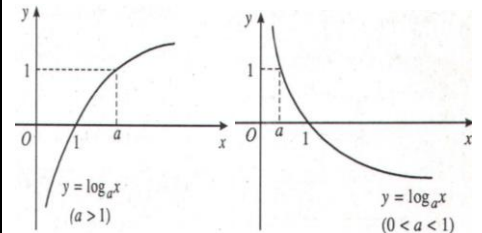
$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u} \quad (u \neq 0)$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x \neq 0)$$

$$(\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (u \neq 0)$$

+ Đồ thị hs $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$)+ Trục Oy là TCĐ đths $y = \log_a x$ + Chú ý: Đồ thị các hs $y = a^x$ và $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) đối xứng nhau qua đt $y = x$.

11. a/Pt mũ cơ bản $a^x = b (0 < a \neq 1)$ $+ \frac{b \leq 0}{b > 0}$: $a^x = b \Leftrightarrow x \in \emptyset$ $+ \frac{b > 0}{b > 0}$: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ b/Phương pháp giải phương trình mũ PP1: Đưa về cùng cơ số $(0 < a \neq 1)$ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $a^{f(x)} = b (b > 0) \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ Bài 1. Giải pt a) $5^{x^2-3x} = 5^4 \sqrt{125}$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x = \log_5 (5^4 \sqrt{125}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$ b/ $8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25 \cdot (\sqrt{2})^{7x}$ (Đk: $x \neq -1$) $\Leftrightarrow 2^{\frac{3(2x-1)}{x+1}} = 2^{\frac{7x}{2}-2}$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) = \frac{7x}{2} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (N) \\ x = \frac{2}{7} (N) \end{cases}$	PP2: Đặt ẩn phụ $a^{2f(x)} = [a^{f(x)}]^2 = (a^2)^{f(x)}$ $3^{2f(x)} = [3^{f(x)}]^2 = 9^{f(x)}$ Bài 2. Giải các pt sau: a) $9^x + 4 \cdot 3^x - 45 = 0$ $\Leftrightarrow 3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 45 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -9 (VN) \\ 3^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_3 5$ b) $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 98$ $\Leftrightarrow (5 + \sqrt{24})^x + \frac{1}{(5 + \sqrt{24})^x} = 98$ $\Leftrightarrow (5 + \sqrt{24})^{2x} - 98(5 + \sqrt{24})^x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = \pm 2$	c) $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$ $\Leftrightarrow 25^x + 10^x - 2 \cdot 4^x = 0$ (Chia hai vế cho 25^x hoặc 4^x) $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ d/ $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$ $\Leftrightarrow 2^{x^2-x} - 2^{2-(x^2-x)} = 3$ $\Leftrightarrow 2^{2(x^2-x)} - 3 \cdot 2^{x^2-x} - 4 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} = 4 \\ 2^{x^2-x} = -1 (VN) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ e/ $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ Đặt $u = 2^{x^2-x}$; $v = 2^{2x}$; $u \cdot v = 2^{x^2+x}$. Pt trở thành: $u \cdot v - 4u - v + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (u-1)(v-4) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$
PP3: Logarit hóa (Lấy logarit 2 vế) Bài 3. Giải pt a/ $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$ Lấy logarit cơ số 3 hai vế ta được pt: $\log_3 (3^x \cdot 2^{x^2}) = \log_3 1$ $\Leftrightarrow x(1 + x \cdot \log_3 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\log_2 3 \end{cases}$ b/ $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$ (Đk: $x \neq 0$) $\Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3x-3}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} = 1$ Lấy logarit cơ số 5 hai vế ta được pt: $(x-3) \left[1 + \frac{1}{x} \log_5 2 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 (N) \\ x = -\log_5 2 (N) \end{cases}$	PP4. Phương pháp hàm số Bài 4. Giải pt a) $3^x = 11 - x$ +Hs $f(x) = 3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. +Hs $g(x) = 11 - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ +x=2 là 1 nghiệm của pt đã cho. KL: x=2 là nghiệm duy nhất của pt. b) $4^x + 6^x = 25x + 2$ Xét hs $f(x) = 4^x + 6^x - 25x - 2$ $f'(x) = 4^x \ln 4 + 6^x \ln 6 > 0$ Ta có: $x=0; x=2$ là nghiệm. KL: Tập nghiệm $S = \{0; 2\}$ c) $2^{x^2-x} - 2^{x+8} = 8 + 2x - x^2$ $\Leftrightarrow 2^{x^2-x} + x^2 - x = 2^{x+8} + 8 + x$	(HS $f(t) = 2^t + t$ đb trên $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow f(x^2 - x) = f(8 + x)$ $\Leftrightarrow x^2 - x = 8 + x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$ 12. a/Pt logarit $\log_a x = b \quad (0 < a \neq 1)$ $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ b/ Phương pháp giải pt logarit PP1: Đưa về cùng cơ số $+ \log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (0 < a \neq 1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 (g(x) > 0) \end{cases}$ $+ \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$
Bài 5. Giải pt: $a/\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$ Đk: $x > 0$ pt $\Leftrightarrow \log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 11$ $\Leftrightarrow \log_3 x = 6 \Leftrightarrow x = 729 (N)$ b/ $\log_2 (x-5) + \log_2 (x+2) = 3$ Đk: $x > 5$ pt $\Leftrightarrow \log_2 [(x-5)(x+2)] = 3$ $\Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 2^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 (N) \\ x = -3 (L) \end{cases}$ PP2: Đặt ẩn phụ Bài 6. Giải pt a) $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$ Đk: $x > 0; x \neq 10^5; x \neq 10^{-1}$ pt $\Leftrightarrow \log^2 x - 5 \log x + 6 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 2 \\ \log x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 (N) \\ x = 1000 (N) \end{cases}$	b) $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$ Đk: $x > 0$ pt $\Leftrightarrow \log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 [3(3^x - 1)] = 6$ $\Leftrightarrow \log_3^2 (3^x - 1) + \log_3 (3^x - 1) - 6 = 0$ $\Leftrightarrow x = \log_3 10; x = \log_3 \left(\frac{28}{27} \right)$ PP3: Mũ hóa Giải pt $\log_2 (5 - 2^x) = 2 - x$ Đk: $5 - 2^x > 0$ pt $\Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (N) \\ x = 2 (N) \end{cases}$ PP4: Hàm số biến thiên Bài 7. Giải các pt: a) $\log_3 (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{5} \right)^{3x-x^2-1} = 2$	Đk: $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$ Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}, u \geq 0$ Pttt: $\log_3 (u + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5^{u^2} = 2$ Hs $f(u) = \log_3 (u + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5^{u^2}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $f(1) = 2$ +u=1 là nghiệm duy nhất. KL: Tập nghiệm $S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$ b) $\log_2 x + \log_3 (x-1) = 3$ Đk: $x > 1$ Hs $f(x) = \log_2 x + \log_3 (x-1)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$; $f(4) = 3$. KL: x=4 là nghiệm duy nhất.

$$c) 2^x - 2^{1-x} = \log_2 \left(\frac{1-x}{x} \right)$$

Đk: $0 < x < 1$

$$pt \Leftrightarrow 2^x + \log_2 x = 2^{1-x} + \log_2 (1-x)$$

+Hs $f(t) = 2^t + \log_2 t$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

$$Pt \Leftrightarrow f(x) = f(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

13. BPT MŨ, BPT LOGARIT

a/Bpt mũ cơ bản $a^x > b (0 < a \neq 1)$

$$+ [b \leq 0]: a^x > b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$+ [b > 0; a > 1]: a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$$

$$+ [b > 0; 0 < a < 1]: a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$$

b/Bpt mũ cơ bản $a^x \leq b (0 < a \neq 1)$

$$+ [b \leq 0]: a^x \leq b \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$+ [b > 0; a > 1]: a^x \leq b \Leftrightarrow x \leq \log_a b$$

$$+ [b > 0; 0 < a < 1]: a^x \leq b \Leftrightarrow x \geq \log_a b$$

c/Bpt logarit cơ bản $\log_a x > b (0 < a \neq 1)$

Đk: $x > 0$

$$+ [a > 1]: \log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$$

$$+ [0 < a < 1]: \log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$$

d/Bpt logarit cơ bản $\log_a x \leq b (0 < a \neq 1)$

Đk: $x > 0$

$$+ [a > 1]: \log_a x \leq b \Leftrightarrow 0 < x \leq a^b$$

$$+ [0 < a < 1]: \log_a x \leq b \Leftrightarrow x \geq a^b$$

e/Công thức BPT mũ, logarit

$$+ [a > 1]: a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$+ [0 < a < 1]: a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Bài 8. Giải các bpt sau:

$$a/ 3^{x^2-2x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$b/ \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 2x) \geq -3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 2x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$c/ 4^x - 2.5^{2x} < 10^x$$

$$\Leftrightarrow -2.25^x - 10^x + 4^x < 0$$

T.S.N. Văn Viết Kế: 089908.3939

$$\Leftrightarrow -2 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{2x} - \left(\frac{5}{2} \right)^x + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2} \right)^x > \frac{1}{2} \\ \left(\frac{5}{2} \right)^x < -1 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$c/ \log_2 (x-3) + \log_2 (x-2) \leq 1$$

Đk: $x > 3$

$$Bpt \Leftrightarrow \log_2 [(x-3)(x-2)] \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

Đối chiếu điều kiện, tập nghiệm của bpt là: $S = (3;4]$

$$d/ \log_{0.5} (5x+10) < \log_{0.5} (x^2 + 6x + 8)$$

$$\text{Đk: } \begin{cases} 5x+10 > 0 \\ x^2+6x+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2$$

$$Bpt \Leftrightarrow 5x+10 > x^2 + 6x + 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

Đối chiếu điều kiện, tập nghiệm của bpt là: $S = (-2;1)$

14. Lãi suất kép

a/Một người gửi số tiền A đồng vào một ngân hàng với lãi suất $r/\text{năm}$. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Hỏi người đó được lĩnh bao nhiêu tiền sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$), nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Giải: Giả sử $n \geq 2$

+Sau năm thứ 1, số tiền lĩnh là:

$$T_1 = A(1+r).$$

+Sau năm thứ 2, số tiền lĩnh là:

$$T_2 = T_1(1+r) = A(1+r)^2$$

+ Tương tự, sau n năm, số tiền lĩnh là:

$$T_n = A(1+r)^n$$

b/BT: Một người gửi 6 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất $7,56\%/năm$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người gửi sẽ có nhiều hơn 12 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi suất không thay đổi)? Giải: $A = 6.10^6$; $r = 7,56\%$

Sau n năm, số tiền thu được $A(1+r)^n$

Theo đề: $A(1+r)^n > 2A$

$$\Leftrightarrow n > \log_{(1+r)} 2 \approx 9,51 \text{ (năm)}$$

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 10$ KL: 10 năm.

15. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi CT:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$

Trong đó: m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$)

+ $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t .

+ T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác).

16. Số các chữ số của số tự nhiên x bằng: $[\log x] + 1$

Với $[\log x]$ là phần nguyên của $\log x$

Vd: Số các chữ số của 2^{2008} bằng:

$$[\log 2^{2008}] + 1 = [2008 \log 2] + 1 \\ = [604,468] + 1 = 605$$

17. Độ pH của dung dịch $pH = -\log [H^+]$

$[H^+]$: nồng độ ion H^+ trong dung dịch

+ $pH < 7$: dung dịch có tính axit.

+ $pH > 7$: dung dịch có tính bazơ.

+ $pH = 7$: dung dịch trung tính.

18. Độ chấn động M của một địa chấn biên độ I được đo trong thang độ Richt (Charles Francis Richter, nhà địa vật lí Mỹ, 1900 – 1985) xác định bởi:

$$M = \ln \frac{I}{I_0} \quad (I_0 \text{ là biên độ của dao}$$

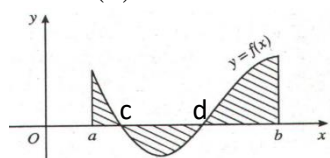
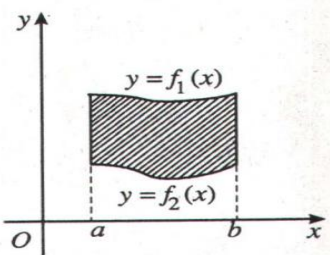
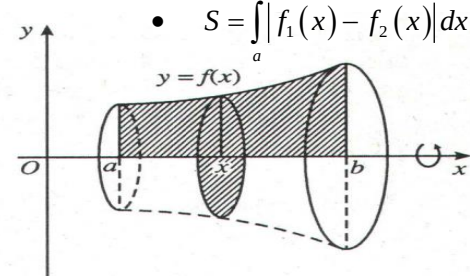
động bé hơn $1\mu m$ trên máy đo địa chấn, đặt cách tâm địa chấn 100km, I_0 được lấy làm chuẩn).

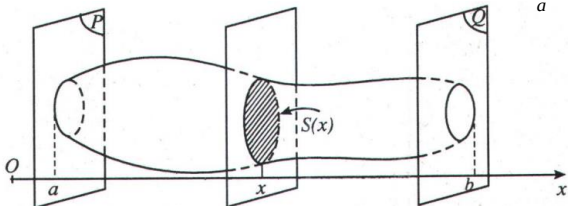
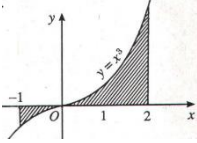
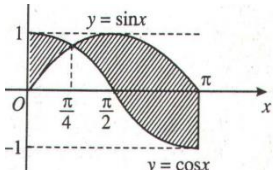
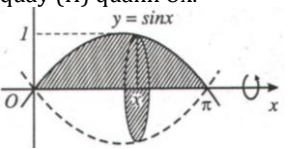
19. Mức cường độ âm được tính theo

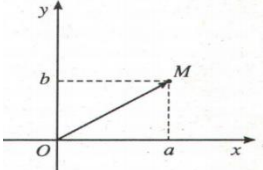
$$CT: L(dB) = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ (Graham Bell)}$$

+ I là cường độ của âm, tức là năng lượng truyền đi bởi sóng âm trong 1 đơn vị thời gian và qua 1 đơn vị diện tích bề mặt vuông góc với phương sóng truyền (đơn vị: W/m^2)

+ $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ là cường độ âm ở ngưỡng nghe.

1/ $\int 0 dx = C$	20/ $\int f(x) dx = F(x) + C \quad (F'(x) = f(x))$	39/ $\int f'(x) dx = f(x) + C$
2/ $\int 1 dx = x + C$	21/ $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0)$	40/ $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$ (với k là hằng số).
3/ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	22/ $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	41/ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
4/ $\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{-1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C \quad (n \geq 2)$	23/ $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C$	42/ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
5/ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$ Th.S Nguyễn Việt Hiếu 089908.3939	24/ $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b} + C$ Th.S Nguyễn Việt Hiếu 089908.3939	43/ $\int_a^b f(x) dx = F(x) _a^b = F(b) - F(a)$ (Newton-Leibniz) 44/ $\int u dv = uv - \int v du$ 45/ $\int_a^b u dv = uv _a^b - \int_a^b v du$
6/ $\int \frac{1}{\sqrt[n]{x}} dx = \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1}} + C$	25/ $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}} + C$	46/ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ 47/ $\int_a^a f(x) dx = 0$
d7/ $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$	26/ $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{3} \cdot (ax+b) \cdot \sqrt{ax+b} + C$	48/ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (với $a < c < b$)
8/ $\int \sqrt[n]{x} dx = \frac{n}{n+1} x \sqrt[n]{x} + C$	27/ $\int \sqrt[n]{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n+1} (ax+b) \sqrt[n]{ax+b} + C$	49/ $\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)} dx = \frac{1}{ad-bc} \ln \left \frac{ax+b}{cx+d} \right + C$
9/ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	28/ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	50/ $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
10/ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	29/ $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{ax+b} + C$	51/Hs $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đths $y = f(x)$, trục Ox và hai đt $x = a; x = b$ được tính bởi CT: $S = \int_a^b f(x) dx$ (Chú ý với hình vẽ trên thì: $S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$) 
11/ $\int e^x dx = e^x + C$	30/ $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	
12/ $\int A^x dx = \frac{A^x}{\ln A} + C$	31/ $\int A^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{A^{ax+b}}{\ln A} + C$	
13/ $\int \sin x dx = -\cos x + C$	32/ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$	
14/ $\int \cos x dx = \sin x + C$	33/ $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	
15/ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	34/ $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$	52/Hs $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đths $y = f_1(x)$, đths $y = f_2(x)$ và hai đt $x = a; x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b f_1(x) - f_2(x) dx$ 
16/ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	35/ $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$	
17/ $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	36/ $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + C$	
18/ $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	37/ $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + C$	
19/ $\int \frac{dx}{x^2 + k^2} = \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k} + C \quad (k > 0)$	38/ $\int \frac{dx}{(ax+b)^2 + k^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{k} \arctan \frac{ax+b}{k} + C \quad (k > 0)$	
53/Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đths $y = f(x)$, trục Ox và hai đt $x = a; x = b$. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ 		

55/ Một vật chuyển động với pt vận tốc $v(t)$. Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = a$ đến $t = b, a < b$ là: $S = \int_a^b v(t) dt$ 56/ PP tính nguyên hàm, TP PP1: Đổi biến. PP2: Tính nguyên hàm, TP từng phần. Face: viethieu220284	57a/ HS $y = f(x)$ là hàm chẵn và liên tục trên đoạn $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ 57b/ HS $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên đoạn $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ T.S Nguyễn Văn Việt - Học 089908 3939	54/ Cắt một vật thể T bởi hai mp (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a; x = b (a < b)$. Một mp tùy ý vuông góc với Ox tại điểm $x (a \leq x \leq b)$ cắt T theo thiết diện có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Thể tích của phần vật thể T được tính bởi CT: $V = \int_a^b S(x) dx$ 													
Bài 1. Tính: a) $\int x\sqrt{x^2+7} dx$ Đặt $u = \sqrt{x^2+7} \Rightarrow u^2 = x^2+7$ $udu = xdx$, Tích phân trở thành: $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$ $\int x\sqrt{x^2+7} dx = \frac{1}{3}(x^2+7)\sqrt{x^2+7} + C$	b/ $I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx$ Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\pi/2$</td></tr><tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> $I = \int_0^1 e^t dt = e^t \Big _0^1 = e - 1$	x	0	$\pi/2$	t	0	1	B3.a Tính diện tích hp giới hạn bởi đths $y = x^3$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = -1; x = 2$.  $S = \int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{17}{4}$	B5. Tính a) $\int \ln x dx$ $u = \ln x \Rightarrow dv = \frac{1}{x} dx$ $dv = dx$, chọn $v = x$. $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$						
x	0	$\pi/2$													
t	0	1													
b) $\int \sin 2x \cdot \cos^5 x dx$ Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ Tích phân trở thành: $\int -2t^6 dt = -\frac{2t^7}{7} + C$ $\int \sin 2x \cdot \cos^5 x dx = -\frac{2 \cos^7 x}{7} + C$ T.S Nguyễn Văn Việt - Học 089908 3939	c/ $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$ Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{t^2 + 3t + 2} dt$ $= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2$	x	0	1	t	0	1	 B3b) Tính diện tích hp giới hạn bởi 2 đt $x = 0; x = \pi$ và đt hsts $y = \cos x; y = \sin x$ $S = \int_0^\pi \sin x - \cos x dx = 2\sqrt{2}$	b) $I = \int_0^1 x e^x dx$ $u = x \Rightarrow du = dx$ $dv = e^x dx$, chọn $v = e^x$. $I = x e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$ T.S Nguyễn Văn Việt - Học 089908 3939						
x	0	1													
t	0	1													
c) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$ Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$ Tích phân trở thành: $\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C$ $\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx = -\frac{1}{e^x + 1} + C$	d/ $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>t</td><td>0</td><td>$\pi/4$</td></tr></table> $dx = 1 + \tan^2 t dt$ $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} dt = \int_0^{\pi/4} 1 dt = \frac{\pi}{4}$	x	0	1	t	0	$\pi/4$	B3c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đths $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$. Pt $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1; -2 \end{cases}$ $S = \int_{-2}^1 (x^3 - x) - (x - x^2) dx = \frac{37}{12}$	c) $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ $dv = \frac{1}{x^2} dx$, chọn $v = -\frac{1}{x}$. $I = -\frac{1}{x} \ln x \Big _1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$						
x	0	1													
t	0	$\pi/4$													
Bài 2/ Tính các tích phân sau: a/ $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$ Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow -tdt = xdx$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>t</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> $I = -\int_1^0 t^2 dx = \int_0^1 t^2 dx = \frac{t^3}{3} \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	x	0	1	t	1	0	e/ $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>t</td><td>0</td><td>$\pi/2$</td></tr></table> $dx = \cos t dt$ $I = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{16}$	x	0	1	t	0	$\pi/2$	Bài 3d) Cho hp (H) giới hạn bởi đths $y = \sin x, Ox$, 2 đt $x = 0; x = \pi$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh Ox.  $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$	B4/ Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mp $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mp tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$. $V = \int_1^3 3x \sqrt{3x^2 - 2} dx = \frac{124}{3}$ Face: viethieu220284
x	0	1													
t	1	0													
x	0	1													
t	0	$\pi/2$													

1. Số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1)$ a: phần thực của z. b: phần ảo của z. i: đơn vị ảo. $i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1$ + Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$ + Số phức nghịch đảo của z là: $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ 2. Cho 2 số phức: $a + bi$ $c + di (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ $a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ $a + bi$ là số thực $\Leftrightarrow b = 0$ $a + bi$ thuần ảo $\Leftrightarrow a = 0$	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ $\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)}$ $= \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i$ 3. Điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ là $M(a; b)$ 4. Modun của số phức $z = a + bi$ là z. $z = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ T.S Nguyễn Viết Hiếu 089908.3939	5. 2 số phức z, w: $z \cdot \bar{z} = z ^2$ $z \cdot w = z \cdot w$ $\left \frac{z}{w} \right = \frac{ z }{ w } (w \neq 0)$ $z = \bar{z}$ $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ $\overline{\left(\frac{z}{w} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}; w \neq 0$ 6. 2 số phức z, w có 2 điểm bd lần lượt là M, N thì: $z - w = MN$  T.S Nguyễn Viết Hiếu 089908.3939	7. Số phức w đgl căn bậc hai của số phức z nếu $w^2 = z$. + Số thực $a > 0$ có 2 căn bậc hai $\pm \sqrt{a}$. + Số 0 có 1 CBH là 0. + Số thực $a < 0$ có 2 CBH là $\pm i\sqrt{ a }$. 8. Pt bậc 2 hệ số thực $az^2 + bz + c = 0 (a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R})$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $+ \Delta > 0$, pt có 2 nghiệm thực $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $+ \Delta = 0$, pt có nghiệm kép thực $z = \frac{-b}{2a}$ $+ \Delta < 0$, pt có 2 nghiệm phức $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ 9. Pt bậc n hệ số phức $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ $a_n \neq 0$ có n nghiệm.
10. + Tập hợp điểm bds z thỏa $z - (a + bi) = k$ $(a, b \in \mathbb{R}; k > 0)$ là đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính $R = k$. + Tập hợp điểm bds z thỏa $z - (a + bi) \leq k$ $(a, b \in \mathbb{R}; k > 0)$ là hình tròn tâm $I(a; b)$, bán kính $R = k$. + Tập hợp điểm bds z thỏa $z - (a + bi) = z - (c + di)$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ là đường trung trực của đoạn thẳng PQ, với $P(a; b); Q(c; d)$ + Trong mp Oxy, cho hai điểm $F_1; F_2$ thỏa $F_1 F_2 = 2c > 0$. Tập hợp điểm M trong mp Oxy thỏa $MF_1 + MF_2 = 2a (a > c)$ là 1 đường Elip nhận $F_1; F_2$ là 2 tiêu điểm.	- Nếu O là trung điểm $F_1 F_2$ và $F_1; F_2$ thuộc Ox thì pt chính tắc của đường Elip là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a; a^2 = b^2 + c^2)$ Vd1a/ Tập hợp điểm bds z thỏa $z - 1 + 2i = 5$ là đường tròn tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = 5$. b/ Tập hợp điểm bds z thỏa $z + 3 - 4i \leq 2$ là hình tròn tâm $I(-3; 4)$, bán kính $R = 2$. c/ Tập hợp điểm bds z thỏa $z - 3 = z + 2i$ là đường trung trực d của đoạn thẳng PQ với $P(3; 0); Q(0; -2)$. Pt d: $6x + 4y - 5 = 0$.	Vd2: Cho số phức z thỏa $z = 4$. Tìm tập hợp điểm bds w thỏa $w = (3 + 4i)z + i$. Giải: $z = \frac{w - i}{3 + 4i}$ $z = 4 \Leftrightarrow w - i = 20$ Tập hợp điểm bds w là đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 20$. 11. Trong tất cả số phức z thỏa $z - (a + bi) = R$ $(a, b \in \mathbb{R}; R > 0)$ thì: $z _{\max} = OI + R$ $z _{\min} = OI - R$ Imaginary Axis  Real	12. Dạng lượng giác của số phức $z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i \right)$ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ là modun của z. φ là một argument của z thỏa $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$ Dạng lượng giác của số phức z là: $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ 13. Cho 3 số phức $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ $z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (CT Moirve) T.S Nguyễn Viết Hiếu 089908.3939

1. Hình đa diện, khối đa diện, khối đa diện lồi, khối đa diện đều

+ Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ là khối đa diện lồi có các tính chất sau:

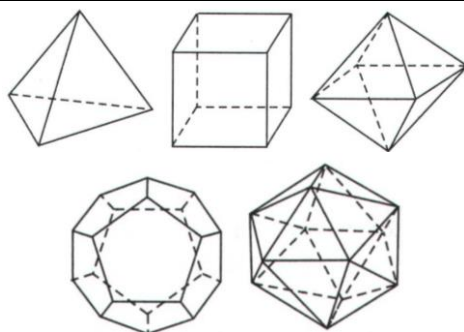
a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

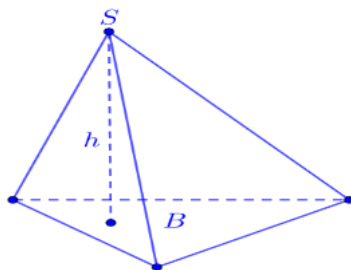
+ Định lí: Chỉ có 5 loại khối đa diện đều.

Đó là loại $\{3;3\}$, loại $\{3;4\}$, loại $\{4;3\}$, loại $\{3;5\}$ và loại $\{5;3\}$.

Loại	Tên khối đa diện	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
$\{3;3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4;3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3;4\}$	Bát diện đều	6	12	8
$\{5;3\}$	12 mặt đều	20	30	12
$\{3;5\}$	20 mặt đều	12	30	20



2. Thể tích khối chóp: $V_{KC} = \frac{1}{3} \cdot S_{day} \cdot h$

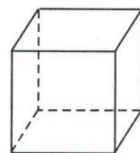


3. Thể tích khối lăng trụ: $V_{LT} = S_{day} \cdot h$

4. Khối lập phương cạnh a

$$V_{KLP} = (cạnh)^3 = a^3$$

Độ dài đường chéo: $a\sqrt{3}$

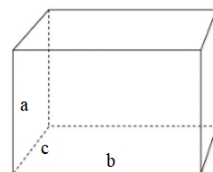


5. Khối hộp chữ nhật: $V_{KHCN} = a \cdot b \cdot c$

Độ dài đường chéo: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Với a, b, c lần lượt

là chiều dài, rộng, cao của hcn.



6. Cho tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Thể tích khối tứ diện ABCD là:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD$$

T.N.S. Nguyễn Văn Việt Học 089908.3939

7. Cho khối chóp S.ABC có $SA = a$; $SB = b$; $SC = c$; $\widehat{BSC} = \alpha$; $\widehat{CSA} = \beta$; $\widehat{ASB} = \gamma$. Thể tích khối chóp S.ABC là:

$$V = \frac{abc}{6} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}$$

8. Thể tích khối chóp $V_{S.A_1A_2...A_n}$:

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_{SA_1A_2} \cdot S_{A_1A_2...A_n} \cdot \sin \alpha}{A_1A_2}$$

Biết $\alpha = ((SA_1A_2); (A_1A_2...A_n))$

9. Thể tích khối tứ diện có khoảng cách và góc giữa cặp cạnh đối diện

$AD = a$; $BC = b$; $d(AD; BC) = d$;

$(\widehat{AD; BC}) = \alpha$ bằng:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} abd \cdot \sin \alpha$$

15. Diện tích $\triangle ABC$ ($a = BC$; $b = AC$; $c = AB$)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$= \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

$$= p \cdot r = \frac{abc}{4R} \left(\text{vs } p = \frac{a+b+c}{2} \right)$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p : nửa chu vi tam giác ABC.

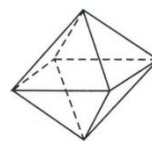
R : bán kính đ tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

r : bán kính đ tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

$h_a; h_b; h_c$ lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ A, B, C của $\triangle ABC$.

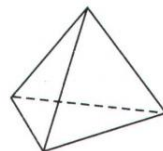
10. Thể tích khối bát diện đều cạnh a

$$V = (cạnh)^3 \frac{\sqrt{2}}{3} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$$



11. Thể tích khối tứ diện đều

$$V = (cạnh)^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$$



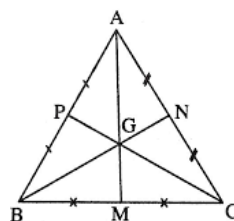
12. $\triangle ABC$ đều:

+ Diện tích:

$$S_{ABC} = (cạnh)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

+ Độ dài đường

$$\text{cao: } (cạnh) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



13. Tam giác ABC vuông A

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}; AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

16. Hình vuông

+ Diện tích: $S = (cạnh)^2$

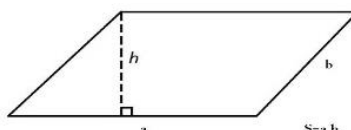
+ Độ dài đường chéo: $(cạnh) \sqrt{2}$

17. Hình chữ nhật có chiều dài, chiều rộng lần lượt là a, b .

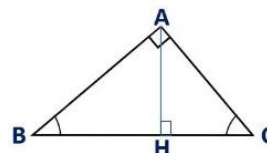
+ Diện tích HCN: $S = a \cdot b$

+ Độ dài đường chéo: $\sqrt{a^2 + b^2}$

18. Diện tích hình bình hành: $S = a \cdot h$



$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}; AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$AI = \frac{1}{2} BC \text{ (I trung điểm BC)}$$

14. $\triangle ABC$ vuông cân tại A ($AB = AC = a$)

$$\text{D.tích: } S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2$$

Độ dài cạnh huyền:

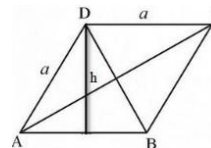
$$BC = a\sqrt{2}$$

$$AI = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

(I là trung điểm BC)

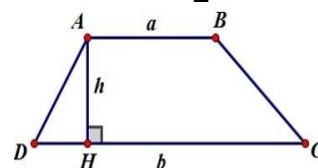
19. Diện tích hình thoi

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$



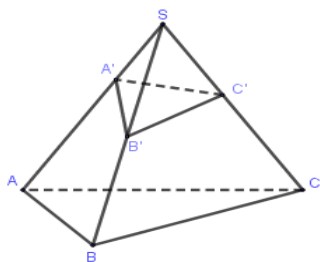
20. Diện tích hình thang:

$$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$



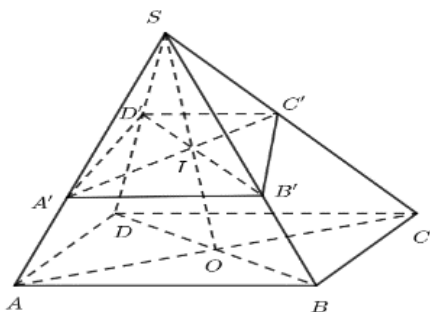
21. Tỷ số thể tích khối chóp tam giác

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



22. Tỷ số thể tích khối chóp tứ giác, đáy ABCD là hình bình hành.

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$$

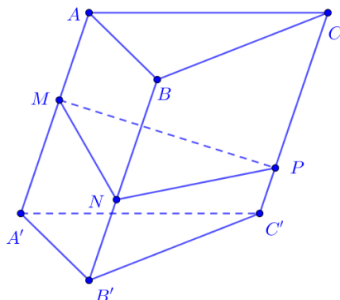


$$a = \frac{SA}{SA'}, b = \frac{SB}{SB'}, c = \frac{SC}{SC'}, d = \frac{SD}{SD'}$$

$$a+c = b+d$$

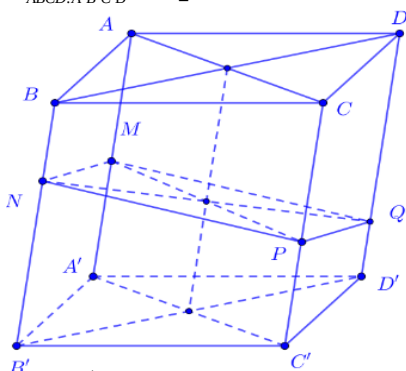
23. Tỷ số thể tích hình lăng trụ

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left[\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right]$$



24. Tỷ số thể tích hình lăng trụ, đáy hình bình hành

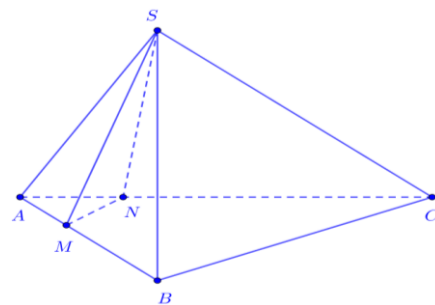
$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{4} \left[\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'} \right]$$



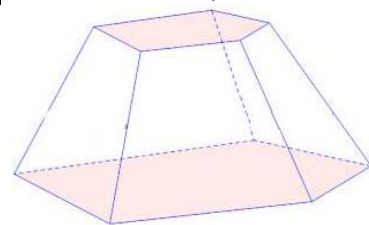
T.S Nguyễn Việt Hiếu 089908.3939

25. Tỷ số V hai khối chóp có chung đường cao.

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AM}{AB}$$



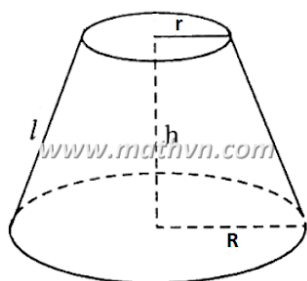
26. Thể tích khối chóp cụt



Gọi B và B' lần lượt là diện tích của đáy lớn và đáy nhỏ của hình chóp cụt, h là chiều cao của nó (h là khoảng cách giữa 2mp chứa 2 đáy). Thể tích khối

$$\text{chóp cụt: } V = \frac{1}{3} h (B + B' + \sqrt{B \cdot B'})$$

27. Thể tích khối nón cụt



Gọi R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ, chiều cao của hình nón cụt.

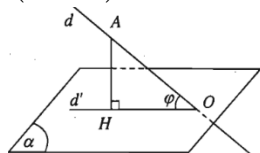
$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

28. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: Cho đt d và mp (α) .

+Nếu $d \perp (\alpha)$ thì $(d;(\alpha)) = 90^\circ$

+Nếu d ko vuông (α) thì

$$(d;(\alpha)) = (d;d')$$



Với d' là hcvg của d trên mp (α) .

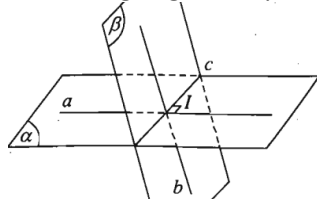
$$+(AO;(\alpha)) = AOH$$

29. Góc giữa 2 mặt phẳng

+Góc giữa 2mp là góc giữa 2 đường

thẳng lần lượt vuông góc 2mp đó.

+Cách xác định góc giữa 2mp cắt nhau

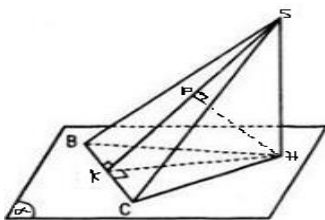


$$(\alpha) \cap (\beta) = c; \text{ Tìm mp } (\gamma) \perp c$$

$$(\gamma) \cap (\alpha) = a; (\gamma) \cap (\beta) = b$$

$$\Rightarrow ((\alpha);(\beta)) = (a;b)$$

$$+((SBC);(\alpha)) = \widehat{HKS}$$



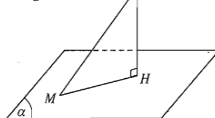
$$SH \perp (\alpha); BC \subset (\alpha).$$

K, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên BC, SK.

$$d(H;(\alpha)) = HP = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}}$$

30. Khoảng cách từ điểm đến mp

nhúng



$$+d(O;(\alpha)) = OH$$

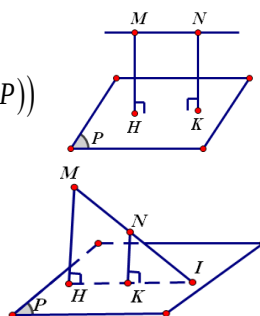
H là hcvg của O trên (α) .

$$+MN \parallel (P)$$

$$d(M;(P)) = d(N;(P))$$

$$+MN \text{ cắt } (P) \text{ tại } I$$

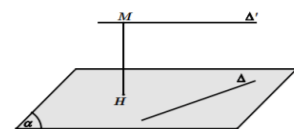
$$\frac{d(M;(P))}{d(N;(P))} = \frac{MI}{NI}$$



31. K/c giữa 2đt chéo nhau $\Delta; \Delta'$

$$CT1: d(\Delta; \Delta') = d(M;(\alpha))$$

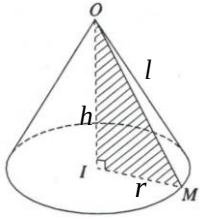
$((\alpha)$ chứa Δ và song song Δ')



$$CT2: d(\Delta; \Delta') = HK$$

(HK: đoạn vuông góc chung của $\Delta; \Delta'$)

1. Hình nón, khối nón



h: chiều cao của hình nón.
r: bán kính đáy hình nón.
l: độ dài đường sinh h.nón.

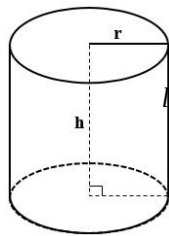
$$l^2 = h^2 + r^2$$

+ Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi r l$.

+ Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$.

+ Thể tích khối nón: $V_{KN} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

2. Hình trụ, khối trụ



h: chiều cao hình trụ
r: bán kính đáy hình trụ.
l: độ dài đường sinh h.trụ.

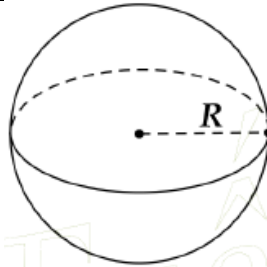
$$h = l$$

+ Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi r l$.

+ Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi r l + 2\pi r^2$.

+ Thể tích khối trụ: $V_{KT} = \pi r^2 h$.

3. Mặt cầu, khối cầu



R là bán kính mặt cầu

+ Diện tích mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2$$

+ Thể tích khối cầu:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Th.S Nguyễn Viết Hiếu
089908.3939

BT1a) Cho hình chóp S.ABC có

$SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B.

$AC = 2a$ $SA = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp h.chóp S.ABC bằng:

$$R_{Cau} = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + \frac{h^2}{4}}$$

$$= \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + \frac{SA^2}{4}} = \sqrt{a^2 + \frac{(2a)^2}{4}} = a\sqrt{2}$$

b) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC. (Minh họa 2017)

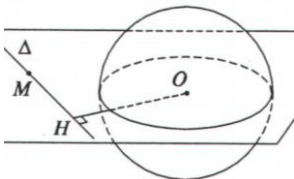
+ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$$S.ABC \text{ bằng: } R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + R_{\text{ben}}^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

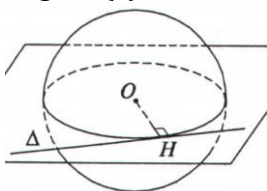
$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1^2}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

4. VTTĐ của đt và mặt cầu
Cho mặt cầu (S), tâm O, bán kính R và đt Δ . Gọi H là hcvg của O trên Δ .

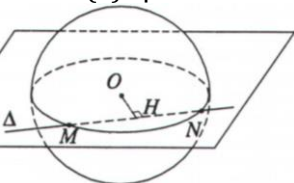
$$d(O; \Delta) = OH$$



+ $d(O; \Delta) > R$ thì Δ không cắt (S).



+ $d(O; \Delta) = R$ thì Δ tiếp xúc với (S) tại H.



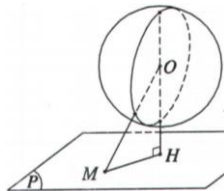
+ $d(O; \Delta) < R$ thì Δ cắt (S) tại 2 điểm pb MN.

$$MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(O; \Delta)}$$

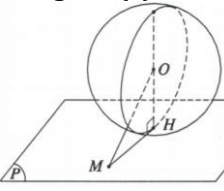
(H là trung điểm MN)

5. VTTĐ của mp và m.cầu
Cho mặt cầu (S), tâm O, bán kính R và mp(P). Gọi H là hcvg của O trên (P).

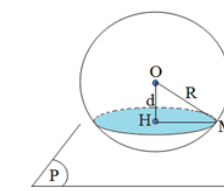
$$d(O; (P)) = OH$$



+ $d(O; (P)) > R$ thì (P) không cắt (S).



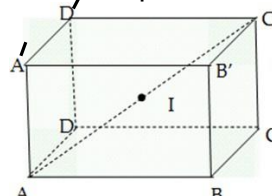
+ $d(O; (P)) = R$ thì (P) tiếp xúc (S) tại H.



+ $d(O; (P)) < R$ thì (P) cắt (S) theo đường tròn (C), tâm H, bk r:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(O; (P))}$$

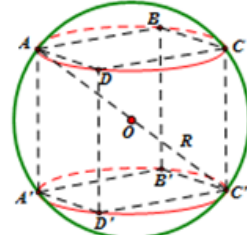
6. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện



a) Mặt cầu ngoại tiếp HHCN ABCD.A'B'C'D' có tâm I là trung điểm $AC', A'C, BD', B'D$ và bk

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

(a, b, c l³ chiều dài, rộng, cao của HHCN)



b) Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có tâm O là trung điểm $AC', A'C, BD', B'D$ và bk

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ với } a \text{ là}$$

cạnh của h.lập phương ABCD.A'B'C'D'.

c) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều có

$$\text{bán kính } R_{Cau} = \frac{(\text{cạnh bên})^2}{2 \cdot \text{chiều cao}}$$

+ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều S.ABCD là:

$$R_{Cau} = \frac{SA^2}{2SE}, E \text{ là}$$

tâm đáy ABCD.

d) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc mặt đáy là:

$$R_{Cau} = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + \frac{h^2}{4}}$$

(h là chiều cao hình chóp).

e/ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc mặt đáy là:

$$R_{Cau} = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + R_{\text{ben}}^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

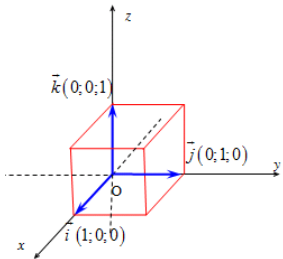
(với AB là giao tuyến mặt bên vuông góc mặt đáy và đáy).

f/ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng (hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp) là:

$$R_{Cau} = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + \frac{h^2}{4}}$$

(h là chiều cao hình lăng trụ đứng)

Th.S Nguyễn Viết Hiếu
089908.3939

**1. Tọa độ vector**

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),$$

$$\vec{b} = (b_1; b_2; b_3), k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$$

$$+ k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$+ \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0)$$

$$\vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$$

$$+ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$+ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

$$+ |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$+ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} =$$

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

(với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)

3. Tọa độ điểm: C ($x_C; y_C; z_C$)

$$A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$$

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = (x; y; z)$$

Th.S Nguyễn Viết Hiếu 089908.3939

$$+ \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

+ I là trung điểm AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

+ G là trọng tâm ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

4. Tích có hướng 2 vector

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$[\vec{a}; \vec{b}] = (a_2 b_3 - a_3 b_2; -(a_1 b_3 - a_3 b_1); a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

5. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$$

6. Diện tích hình bình hành ABCD

$$S_{\square ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$$

7. Diện tích tam giác ABC

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$$

8. Thể tích khối tứ diện ABCD

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$$

9. $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} (k \in \mathbb{R})$$

10. Mpp(P) đi qua

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \text{ và có 1 vtcp}$$

$$\vec{n} = (a; b; c). \text{ Pttq của (P):}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

11. Mpp (P) đi qua 3 điểm

$$A(a; 0; 0), B(0; b; 0),$$

$$C(0; 0; c) \text{ với } a, b, c \neq 0.$$

Pt (P) theo đoạn chắn:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

12. Cho 2 mpp (α); (β) có pt

$$(\alpha): A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$(\beta): A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

+ (α); (β) cắt nhau

$$\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$$

$$+ (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$+ (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$+ (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

13. Đt d đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$

$$\text{và có 1 vtcp } \vec{a} = (a_1; a_2; a_3).$$

$$\text{Ptts của d: } \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

+ Nếu $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ thì pt chính

$$\text{tắc của d: } \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

14. Cho 2 đt

$$d_1 : \begin{cases} x = x_1 + ta_1 \\ y = y_1 + tb_1 \text{ (tham số t)} \\ z = z_1 + tc_1 \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = x_2 + sa_2 \\ y = y_2 + sb_2 \text{ (tham số s)} \\ z = z_2 + sc_2 \end{cases}$$

$$+ d_1 \text{ đi qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \text{ và có 1 vtcp } \vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1).$$

$$+ d_2 \text{ đi qua } M_2(x_2; y_2; z_2) \text{ và có 1 vtcp } \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2).$$

$$\text{Xét hệ (I)} \begin{cases} x_1 + ta_1 = x_2 + sa_2 \\ y_1 + tb_1 = y_2 + sb_2 \\ z_1 + tc_1 = z_2 + sc_2 \end{cases}$$

$$+ d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = k\vec{u}_2 \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$$

$$+ d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = k\vec{u}_2 \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$$

+ d_1 cắt d_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \text{ ko cùng phương } \vec{u}_2 \\ \text{He(I) co nghiem} \end{cases}$$

+ d_1 chéo d_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \text{ ko cùng phương } \vec{u}_2 \\ \text{He(I) vo nghiem} \end{cases}$$

+ d_1 chéo d_2

$$\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1 M_2} \neq 0$$

$$+ d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

15. VTTĐ giữa mpp và đt

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\text{Đt d: } \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

Xét pt (*):

$$A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0$$

$$+ d // (\alpha) \Leftrightarrow (*) \text{ vô nghiệm.}$$

$$+ d \subset (\alpha) \Leftrightarrow (*) \text{ có vô số ng.}$$

$$+ d \text{ cắt } (\alpha) \Leftrightarrow (*) \text{ có}$$

ng nghiệm duy nhất.

(Khi (*) có nghiệm duy nhất $t = t_0$ thì d cắt (α) tại điểm $A(x_0 + t_0 a_1; y_0 + t_0 a_2; z_0 + t_0 a_3)$)

+ d vuông góc (α)

$$\Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \text{ cùng phương } \vec{u}_d$$

$$\Leftrightarrow \vec{n}_\alpha = k \cdot \vec{u}_d$$

16. a/ Khoảng cách từ điểm

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \text{ đến mpp}$$

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ bằng:}$$

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

b/ Cho đt Δ đi qua M_0 và có 1 vtcp $\vec{a}$. Khoảng cách từ điểm A

$$\text{đến đt } \Delta: d(A, \Delta) = \frac{|[\vec{M_0 A}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}$$

c/ Cho 2 đt chéo nhau d_1 và d_2

$$+ d_1 \text{ đi qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \text{ và có 1}$$

$$\text{vtcp } \vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1).$$

$$+ d_2 \text{ đi qua } M_2(x_2; y_2; z_2) \text{ và có 1}$$

$$\text{vtcp } \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2).$$

Khoảng cách giữa 2 đt chéo nhau d_1 và d_2 là:

$$d(d_1, d_2) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1 M_2}|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$$

d/ Cho 2 mpp $(\alpha); (\beta)$ có: $(\alpha) // (\beta)$

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

$$(\beta): Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

Khoảng cách giữa 2 mpp $(\alpha); (\beta)$ là:

$$d((\alpha); (\beta)) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

17. a/Cho 2 đt d_1 và d_2 có 2 vtcp lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Góc giữa 2 đt d_1 và d_2 được tính bởi CT:

$$\cos(d_1; d_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

b/cho 2 mp $(\alpha); (\beta)$ có 2 vtpt lần lượt là $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$; $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Góc giữa 2 mp $(\alpha); (\beta)$ được tính bởi CT:

$$\cos((\alpha); (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

c/Cho đt d có 1 vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mp (α) có 1 vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$. Góc giữa đt d và mp (α) được tính bởi CT:

$$\sin(d, (\alpha)) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

18. +Mặt cầu (S) có tâm $I(x_0; y_0; z_0)$ và bk R. Pt (S) là:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$



+Pt mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

(Đk: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$).

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bk

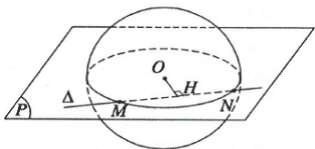
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

19. VTTĐ giữa đt Δ và mặt cầu (S) có tâm O và bk R.

+ Δ ko cắt (S) $\Leftrightarrow d(O, \Delta) > R$

+ Δ tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(O, \Delta) = R$

+ Δ cắt (S) $\Leftrightarrow d(O, \Delta) < R$



Khi Δ cắt (S) tại 2 điểm M, N thì

$$MN = 2MH = 2\sqrt{R^2 - d^2(O, \Delta)}$$

(H là hcvg của O trên Δ ; H là trung điểm MN).

20. VTTĐ giữa mp(P) và mặt cầu (S) có tâm O và bk R.

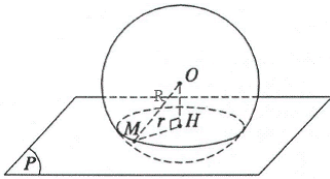
+ (P) ko cắt (S) $\Leftrightarrow d(O, (P)) > R$

+ (P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(O, (P)) = R$

+ (P) cắt (S) $\Leftrightarrow d(O, (P)) < R$.

(Khi (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H và bk r thì:

- H là hcvg của O trên (P).
- $r = \sqrt{R^2 - d^2(O, (P))} = \sqrt{R^2 - OH^2}$



21. Mp $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ đặc biệt

+ $D = 0$: (α) đi qua gốc tọa độ O.

+ $A = 0$: (α) chứa Ox hoặc $\parallel$ Ox.

+ $B = 0$: (α) chứa Oy hoặc $\parallel$ Oy.

+ $C = 0$: (α) chứa Oz hoặc $\parallel$ Oz.

+ $A = B = 0$: $(\alpha) \parallel$ (Oxy) hoặc $(\alpha) \equiv$ (Oxy).

+ $A = C = 0$: $(\alpha) \parallel$ (Oxz) hoặc $(\alpha) \equiv$ (Oxz).

+ $B = C = 0$: $(\alpha) \parallel$ (Oyz) hoặc $(\alpha) \equiv$ (Oyz)

+ Ptmp (Oxy): $z = 0$. + Ptmp (Oxz): $y = 0$

$$\begin{aligned} \text{+ Ptmp (Oyz): } x = 0. \quad \text{+ Pt Ox: } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{+ Pt Oy: } \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{+ Pt Oz: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{+ Pt Ox: } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{+ Pt Oy: } \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{+ Pt Oz: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

22. Điểm M trên đường thẳng, mp

+ $M \in$ (Oxy) $\Rightarrow M(a; b; 0)$

+ $M \in$ (Oxz) $\Rightarrow M(a; 0; b)$

+ $M \in$ (Oyz) $\Rightarrow M(0; a; b)$

+ $M \in$ Ox $\Rightarrow M(t; 0; 0)$

+ $M \in$ Oy $\Rightarrow M(0; t; 0)$

+ $M \in$ Oz $\Rightarrow M(0; 0; t)$

23. a/Tìm hcvg H của điểm

$A(x_A; y_A; z_A)$ trên mp (P):

$$ax + by + cz + d = 0.$$

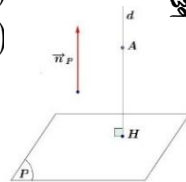
+ Đt AH đi qua $A(x_A; y_A; z_A)$ và có

$$\text{1 vtcp } \vec{n}_p = (a; b; c). \text{ Pt AH: } \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

+ $H \in AH \Rightarrow H(x_A + at; y_A + bt; z_A + ct)$

$$\text{+ } H \in (P) \Rightarrow t = - \left[\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right]$$

KL: $H(x_A + at; y_A + bt; z_A + ct)$



b/Tìm điểm đối xứng A' của A qua mp(P).

+ B1: Tìm hcvg H của A trên (P).

+ B2: H là trung điểm AA' .

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases}$$

Đặc biệt: Điểm $A(x_A; y_A; z_A)$

+ Hcvg của A trên (Oxy) là $H_1(x_A; y_A; 0)$

+ Hcvg của A trên (Oxz) là $H_2(x_A; 0; z_A)$

+ Hcvg của A trên (Oyz) là $H_3(0; y_A; z_A)$

Điểm dx của A qua (Oxy) là $A_1(x_A; y_A; -z_A)$

Điểm dx của A qua (Oxz) là $A_2(x_A; -y_A; z_A)$

Điểm dx của A qua (Oyz) là $A_3(-x_A; y_A; z_A)$

24. a/Tìm hcvg H của $M(x_M; y_M; z_M)$

$$\text{trên đt } d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

B1: $H \in d \Rightarrow H(x_0 + a_1 t; y_0 + a_2 t; z_0 + a_3 t)$

B2: $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$ ($\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$ vtcp của d)

$$t = - \left[\frac{a_1(x_0 - x_M) + a_2(y_0 - y_M) + a_3(z_0 - z_M)}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right]$$

KL: $H(x_0 + a_1 t; y_0 + a_2 t; z_0 + a_3 t)$

b/Tìm điểm đối xứng M' của M qua đt d

B1: Tìm hcvg H của M trên d .

B2: H là trung điểm MM'

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$

Đặc biệt: Điểm $A(x_A; y_A; z_A)$

+ Hcvg của A trên Ox là: $H_4(x_A; 0; 0)$

+ Hcvg của A trên Oy là: $H_5(0; y_A; 0)$

+ Hcvg của A trên Oz là: $H_6(0; 0; z_A)$

Điểm dx của A qua Ox là $A_4(x_A; -y_A; -z_A)$

Điểm dx của A qua Oy là $A_5(-x_A; y_A; -z_A)$

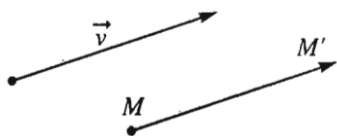
Điểm dx của A qua Oz là $A_6(-x_A; -y_A; z_A)$

25. I là tâm đtròn nội tiếp ΔABC

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{BC \cdot x_A + AC \cdot x_B + AB \cdot x_C}{AB + AC + BC} \\ y_I &= \frac{BC \cdot y_A + AC \cdot y_B + AB \cdot y_C}{AB + AC + BC} \\ z_I &= \frac{BC \cdot z_A + AC \cdot z_B + AB \cdot z_C}{AB + AC + BC} \end{aligned}$$

1. Phép tịnh tiến

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$



$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow T_{-\vec{v}}(M') = M$$

+Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

$$\text{Đt } \Delta: ax + by + c = 0$$

$$T_{\vec{v}}(\Delta) = \Delta'. \text{ Suy ra } \begin{cases} \Delta' // \Delta \\ \Delta' \equiv \Delta \end{cases}$$

$$\text{Pt } \Delta' \text{ có dạng: } ax + by + m = 0$$

+Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, tâm biến thành tâm.

Đường tròn (C) tâm $I(a; b)$ và bk R.

$$\bullet T_{\vec{v}}((C)) = (C')$$

Đường tròn (C') có tâm I' và bk R'
+ $R' = R$

$$+ T_{\vec{v}}(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{II'} = \vec{v}$$

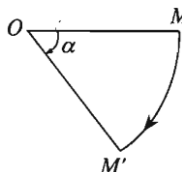
+Biểu thức tọa độ: $M(x; y), M'(x'; y')$

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \text{ với } \vec{v} = (a; b)$$

$$\text{Bttd: } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

2. Phép quay $Q_{(O; \alpha)}$

$$Q_{(O; \alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$$



$$Q_{(O; \alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow Q_{(O; -\alpha)}(M') = M$$

+Phép quay $Q_{(O; \pm \frac{\pi}{2})}$ biến đường thẳng

thành đường thẳng vuông góc với nó.

$$\text{Đt } \Delta: ax + by + c = 0$$

$$Q_{(O; \pm \frac{\pi}{2})}(\Delta) = \Delta'$$

Suy ra $\Delta' \perp \Delta$

$$\text{Pt } \Delta' \text{ có dạng: } bx - ay + m = 0$$

+Phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, tâm biến thành tâm.

$$\bullet Q_{(O; \alpha)}((C)) = (C')$$

Đường tròn (C') có tâm I' và bk R'

$$\bullet R' = R$$

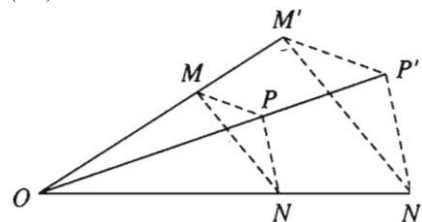
$$Q_{(O; \alpha)}(I) = I'$$

$$+\text{Bttd phép } Q_{(O; \alpha)}: \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

T.S. Nguyễn Văn Việt - Học 089908 3939

3. Phép vị tự $V_{(O; k)}$ ($k \neq 0$)

$$V_{(O; k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$$



$$V_{(O; k)}(M) = M' \Leftrightarrow V_{(O; \frac{1}{k})}(M') = M$$

+Phép vị tự $V_{(O; k)}$ biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó. Đt $\Delta: ax + by + c = 0$

$$V_{(O; k)}(\Delta) = \Delta'$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \Delta' // \Delta \\ \Delta' \equiv \Delta \end{cases}$$

$$\text{Pt } \Delta' \text{ có dạng: } ax + by + m = 0$$

+Phép vị tự $V_{(O; k)}$ biến đường tròn bk R thành đường tròn bk $|k|R$, tâm biến thành tâm.

$$\bullet V_{(O; k)}((C)) = (C')$$

Đường tròn (C') có tâm I' và bk R'

$$\bullet R' = |k|R$$

$$V_{(O; k)}(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'} = k \overrightarrow{OI}$$

$$+\text{Bttd } V_{(O; k)}: \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

4. Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

+Phép đồng nhất, phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm, phép quay là những phép dời hình.

+Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp 2 phép dời hình là một phép dời hình.

+T/c phép dời hình:

-Biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

-Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

-Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

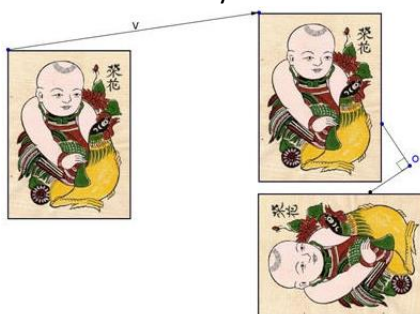
-Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Face: viethieu220284

+Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác A'B'C'.

+Phép dời hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, đỉnh biến thành đỉnh, cạnh biến thành cạnh.

+Hai hình đgl bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

5. Phép biến hình F đgl phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$), nếu với hai điểm M, N bất kỳ và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có $M'N' = kMN$

+Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.

+ Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

+Phép đồng dạng tỉ số k:

-Biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

-Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

-Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

-Biến đường tròn bk R thành đường tròn có bán kính kR.

+Nếu một phép đồng dạng biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác A'B'C'.

+Phép đồng dạng biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, đỉnh biến thành đỉnh, cạnh biến thành cạnh.

+Hai hình đgl đồng dạng với nhau nếu có 1 phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.



6. Hình vẽ đẹp của họa sĩ Maurits Cornelis Escher



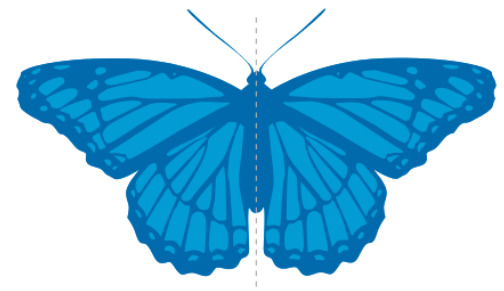
T.S Nguyễn Việt Hiếu 089908 3939



+ Hình đối xứng



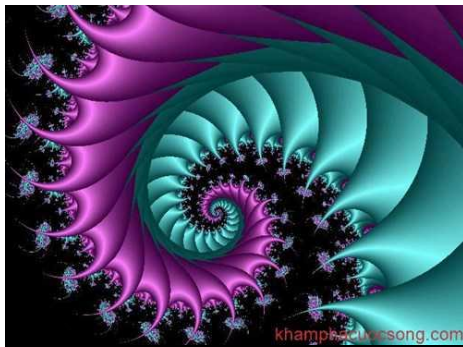
hochtoi.net



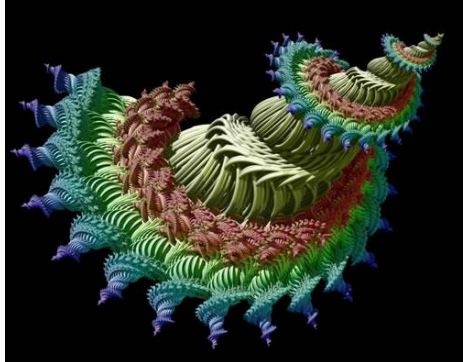
Wikiwand.com

T.S Nguyễn Việt Hiếu 089908 3939

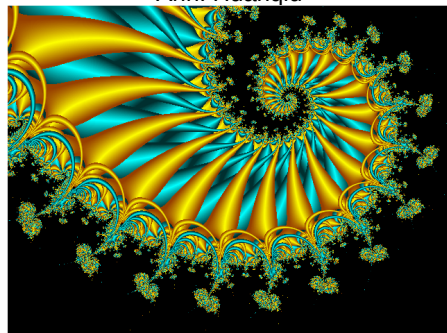
+ Hình Fractal



khampkhaesong.com



Ảnh: Huanqiu



sprott.physics.wisc.edu/fractals/carlson



scp-foundation-database.fandom.com/wiki/SCP-001



khampkhaesong.com



vi.mathigon.org/course/fractals/introduction



<https://vuihocly.wordpress.com/2011/12/18/hinh-hoc-fractal/>



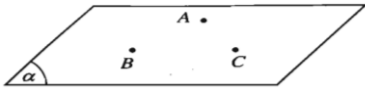
khoahoc.tv



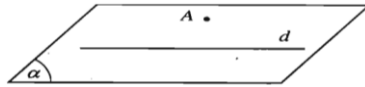
vi.mathigon.org/course/fractals/introduction

1. Cách xác định 1 mặt phẳng

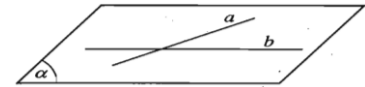
+Mp hoàn toàn được xác định khi biết nó đi qua 3 điểm pb không thẳng hàng.



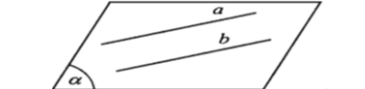
+Mp hoàn toàn được xác định khi biết nó đi qua 1 điểm và chứa 1 đường thẳng không đi qua điểm đó.



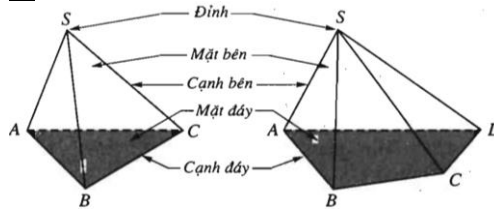
+Mp hoàn toàn được xác định khi biết nó chứa 2 đường thẳng cắt nhau.



+Mp hoàn toàn được xác định khi biết nó chứa 2 đường thẳng song song.

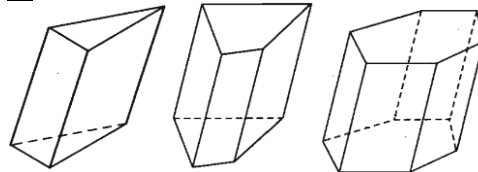


2. Hình chóp, hình tứ diện



+Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy trùng với tâm đa giác đáy.

3. Hình lăng trụ



+Hình lăng trụ có đáy hình bình hành là hình hộp.

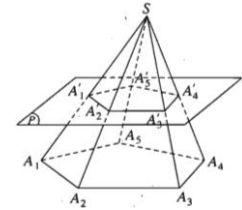
+Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng, có đáy là đa giác đều.

+Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc mặt đáy.

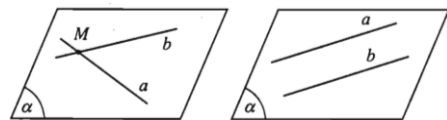
+Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành đgl hình hộp đứng.

+Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật đgl hình hộp chữ nhật.

+Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên là hình vuông đgl hình lập phương.

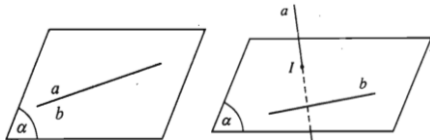
4. Hình chóp cụt: $AA_1A_2A_3A_4A_5A_1A_2A_3A_4A_5$ 5. 4VTĐ của 2đt $a; b$ trong không gian

TH1: a cắt b tại M TH2: $a // b$

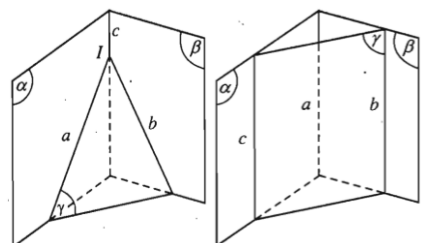


TH3: $a \equiv b$

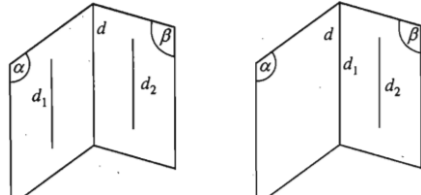
TH4: a chéo b



6. Định lí giao tuyến 3mp và hệ quả
+Nếu 3mp cắt nhau theo 3 giao tuyến phân biệt thì 3 giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi 1 song song với nhau.

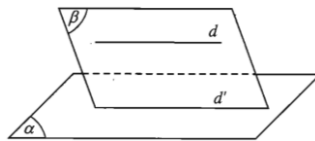


+Nếu 2mp phân biệt lần lượt chứa 2đt song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đt đó hoặc trùng với một trong 2đt đó.



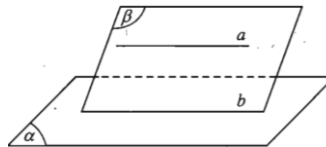
7. Đường thẳng song song mặt phẳng

+ Nếu đường thẳng d không nằm trong mp (α) và d song song với đt d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .



+Định lí: Cho đt a song song mp (α) .

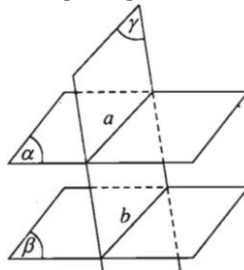
Nếu mp (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì $b // a$.



8. Hai mp song song

+Nếu mp (α) chứa 2 đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mp (β) thì $(\alpha) // (\beta)$.

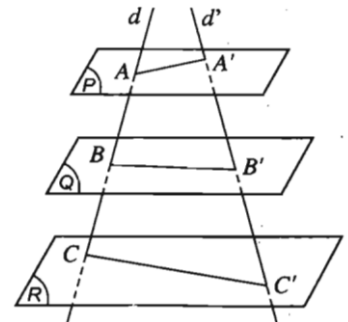
+Định lí: Cho hai mp song song. Nếu một mp cắt mp này thì cũng cắt mp kia và hai giao tuyến song song với nhau.



9. Định lí Thales

+Ba mp đôi một song song chắn trên 2 cát tuyến bất kì những đoạn thẳng

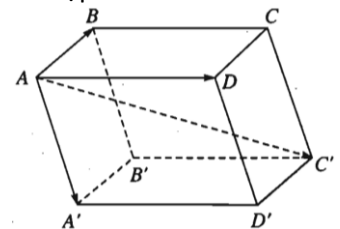
$$\text{tỉ lệ: } \left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \right)$$



10. Vectơ trong không gian

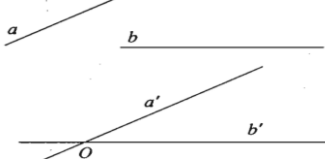
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

QT hình hộp: $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'} = \overline{AC'}$



11. Trong kg cho 3 vectơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ ta đều tìm được bộ 3 số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ 3 số m, n, p là duy nhất.

12. Góc giữa 2 đt a, b trong không gian là góc giữa 2 đt a', b' cùng đi qua 1 điểm và lần lượt song song với a, b .

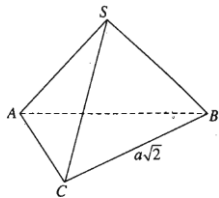


+Cho $\vec{u}; \vec{v}$ lần lượt là vtcp của 2 đt a, b và $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha$.

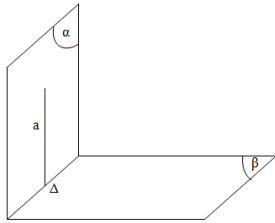
Nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ thì $(a; b) = \alpha$

Nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ thì $(a; b) = 180^\circ - \alpha$

Vd. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$
 $SA = SB = SC = AB = AC = a$. Tính góc giữa 2 đt AB và SC .

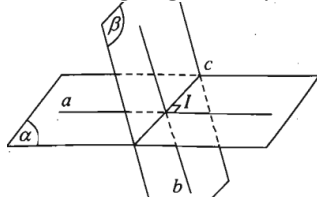


+Định lí: nếu 2mp vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mp này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mp kia.



16. Góc giữa 2 mặt phẳng
 +Góc giữa 2mp là góc giữa 2 đt lần lượt vuông góc 2mp đó.

+Cách xác định góc giữa 2mp cắt nhau



$(\alpha) \cap (\beta) = c$; Tìm mp $(\gamma) \perp c$

$(\gamma) \cap (\alpha) = a; (\gamma) \cap (\beta) = b$

$\Rightarrow ((\alpha); (\beta)) = (a; b)$

17. Diện tích hình chiếu của đa giác

Cho đa giác (H) nằm trong mp (α) có diện tích S và (H') là hình chiếu vuông góc của (H) trên mp (β) . Khi đó diện tích S' của (H') là: $S' = S \cos \varphi$.

Với φ là góc giữa (α) và (β) .

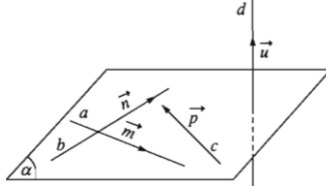
$$\cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{SC \cdot AB} = \frac{1}{a^2} (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1}{a^2} \cdot AS \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}) = 120^\circ \Rightarrow (SC; AB) = 60^\circ$$

13. Đt vuông góc mặt phẳng

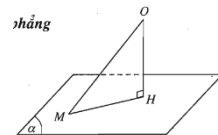
+Nếu một đt vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mp ấy.



+Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mp vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó.

+Định lí: Nếu một đường thẳng và 1mp (không chứa đt đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

18. Khoảng cách từ điểm đến mp



$$+ d(O; (\alpha)) = OH$$

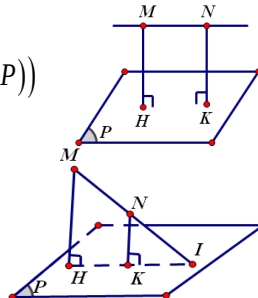
H là hcvg của O trên (α) .

+MN // (P)

$$d(M; (P)) = d(N; (P))$$

+MN cắt (P) tại I

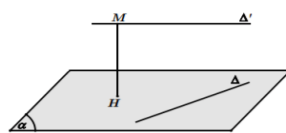
$$\frac{d(M; (P))}{d(N; (P))} = \frac{MI}{NI}$$



19. K/c giữa 2 đt chéo nhau $\Delta; \Delta'$

$$CT1: d(\Delta; \Delta') = d(M; (\alpha))$$

$((\alpha)$ chứa Δ và song song Δ')



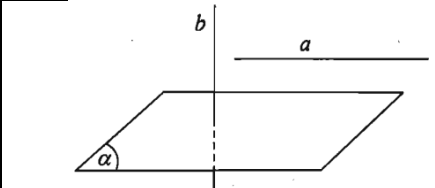
$$CT2: d(\Delta; \Delta') = HK$$

(HK: đoạn vuông góc chung của $\Delta; \Delta'$)

20. Định lí Thales trong mặt phẳng

+Nếu 1 đt song song với 1 cạnh của tam giác và cắt 2 cạnh còn lại thì nó định ra trên 2 cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Th.S Nguyễn Viết Hiếu 089908.3939



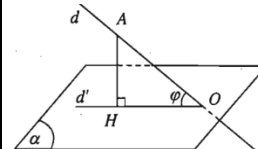
14. Góc giữa đt và mặt phẳng

Cho đt d và mp (α) .

+Nếu $d \perp (\alpha)$ thì $(d; (\alpha)) = 90^\circ$

+Nếu d ko vuông (α) thì

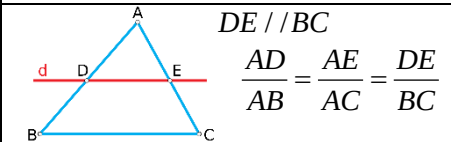
$$(d; (\alpha)) = (d; d')$$



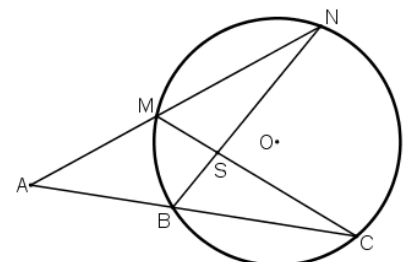
Với d' là hcvg của d trên mp (α) .

15. Hai mp vuông góc

Định lí: Đk cần và đủ để hai mp vuông góc với nhau là mp này chứa 1 đường thẳng vuông góc với mp kia.

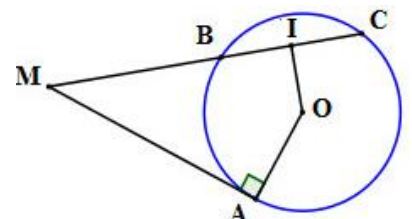


21. Cho đường tròn (O) ; 2 cát tuyến của đt (O) là AMN và ABC cắt nhau tại A. Ta có: $AM \cdot AN = AB \cdot AC$



+Từ 1 điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ cát tuyến MBC và tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A. Ta có:

$$MB \cdot MC = MA^2$$



22. Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

+Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó vuông.

T.S Nguyễn Viết Hiếu 089908.3939

T.S Nguyễn Viết Hiếu 089908.3939

1. Quy tắc cộng + Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện. + Quy tắc cộng phát biểu dưới dạng tập hợp: Nếu A, B là hai tập hợp hữu hạn không giao nhau ($A \cap B = \emptyset$) thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ + Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động. 2. Quy tắc nhân + Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc. + Quy tắc nhân có thể mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.	3. Hoán vị + Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A đgl một hoán vị của n phần tử đó. + Số các hoán vị của n ($n \geq 1$) phần tử là: $P_n = n! = 1.2.3...(n-1).n$ Quy ước: $0! = 1$ 4. Chỉnh hợp + Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của A và sắp xếp chúng theo thứ tự nào đó đgl một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho. + Số các chỉnh hợp chập k ($1 \leq k \leq n$) của n phần tử là: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 5. Tổ hợp: + Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A đgl một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.	+ Số các tổ hợp chập k ($0 \leq k \leq n$) của n phần tử là: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Tính chất: $A_n^k = C_n^k . k!$ ($0 \leq k \leq n$) $C_n^k = C_n^{n-k}$ ($0 \leq k \leq n$) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ ($1 \leq k < n$) 6. Phép thử, biến cố, xác suất: + Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử đgl không gian mẫu của phép thử, kí hiệu Ω. + Biến cố là tập con của không gian mẫu. + Tập $\emptyset$ là biến cố không thể (biến cố không). + Tập Ω là biến cố chắc chắn. + Cho A là 1 biến cố liên quan 1 phép thử. Tập $\bar{A} = \Omega \setminus A$ đgl biến cố đối của biến cố A. + $A \cap B = \emptyset$ thì A, B đgl hai biến cố xung khắc. T. S. Nguyễn Văn Việt - Học 089908 3939
+ Định nghĩa cổ điển của xác suất Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ Với $n(A)$ là số phần tử của A hay số khả năng thuận lợi cho biến cố A. $n(\Omega)$ là số phần tử không gian mẫu.	Tính chất xác suất: $P(\emptyset) = 0; P(\Omega) = 1$ $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A - Nếu 2 biến cố A, B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ T. S. Nguyễn Văn Việt - Học 089908 3939	
7. Tam giác Pascal: Khai triển $(x + y)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) $n = 1:$ 1 1 $(x + y)^1 = x + y$ $n = 2:$ 1 2 1 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ $n = 3:$ 1 3 3 1 $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ $n = 4:$ 1 4 6 4 1 $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ $n = 5:$ 1 5 10 10 5 1 $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$		
8. Công thức nhị thức Newton $\underbrace{(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} . b + C_n^2 a^{n-2} . b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} . b^k + ... + C_n^{n-1} a . b^{n-1} + C_n^n b^n}_{(1)} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} . b^k$ Trong vế phải (1) có $(n + 1)$ hạng tử; tính từ trái sang phải các hạng tử có: số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n và tổng số mũ của a, b bằng n. Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} . b^k$. T. S. Nguyễn Văn Việt - Học 089908 3939		

Đặc biệt:

$$+ 2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

+ Cho tập hợp A có n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$)

- Số tập con có 1 phần tử của A là: C_n^1
- Số tập con có k ($0 \leq k \leq n$) phần tử của A là: C_n^k .
- Số tất cả tập hợp con của A là:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

$$0 = (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$$

$$+ 2^{2n} = (1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} (*)$$

$$0 = (1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots + (-1)^k C_{2n}^k + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} (**)$$

Từ (*), (**) có:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

$$+ 2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\text{Mà } C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1}; C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}; \dots; C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$$

$$\text{Suy ra: } 2^{2n} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$+ \text{Đa thức } f(x) = (a+bx)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Tổng tất cả các hệ số trong khai triển đa thức $f(x)$ bằng:

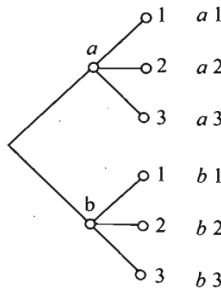
$$T = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(1) = (a+b)^n$$

BT1. Bạn H có 2 áo màu khác nhau và ba quần kiểu khác nhau. Hỏi H có bao nhiêu cách chọn 1 bộ quần áo?

Giải: Hai áo được ghi chữ a và b, ba quần được đánh số 1,2,3. Để chọn 1 bộ quần áo, ta phải thực hiện liên tiếp hai hành động:

HĐ1: Chọn áo. Có hai cách chọn (chọn a hoặc b).

HĐ2: Chọn quần. Ứng với cách chọn áo có ba cách chọn quần (Chọn 1, hoặc 2, hoặc 3). Vậy số cách chọn 1 bộ quần áo là: $2.3 = 6$ cách.



2. Cho đa giác lồi (H) có n cạnh ($n \geq 4$).

+ Số vector khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là hai đỉnh của (H) là: A_n^2 .

+ Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) là: C_n^3 .

+ Số đoạn thẳng có 2 điểm đầu mút là 2 đỉnh của (H) là: C_n^2 .

+ Số đường chéo của đa giác (H) là: $C_n^2 - n$

BT3. Từ khai triển biểu thức

$(3x-4)^{17}$, hãy tính tổng tất cả các hệ số của đa thức nhận được.

$$G: f(x) = (3x-4)^{17} = a_{17}x^{17} + \dots + a_1x + a_0$$

+ Tổng tất cả các hệ số từ khai triển biểu thức $(3x-4)^{17}$ là:

$$a_{17} + a_{16} + \dots + a_1 + a_0 = f(1) = -1$$

4. Quy tắc cộng mở rộng cho 2 tập hữu hạn A, B và $A \cap B \neq \emptyset$

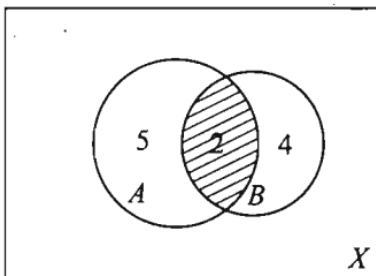
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(Quy tắc bao hàm và loại trừ)

BT4. Một tổ 10 học sinh sẽ được chơi 2 môn thể thao là cầu lông và bóng bàn. Có 5 bạn đăng kí chơi cầu lông, 4 bạn đăng kí chơi bóng bàn, trong đó có 2 bạn đăng kí chơi cả 2 môn. Hỏi có bao nhiêu bạn đăng kí chơi thể thao? Bao nhiêu bạn không đăng kí chơi thể thao?

T. S. Nguyễn Văn Viết - 089908 3939

Giải: Kí hiệu X là tập hợp 10 học sinh trong tổ; A là tập hợp các học sinh đăng kí chơi cầu lông; B là tập hợp các học sinh đăng kí chơi bóng bàn.



$$n(X) = 10; n(A) = 5; n(B) = 4$$

$$n(A \cap B) = 2.$$

$A \cup B$ là tập hợp các bạn đăng kí chơi thể thao.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7$$

Số bạn không đăng kí chơi thể thao là:

$$n(X) - n(A \cup B) = 3$$

BT5. Bài kiểm tra trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời và chỉ có 1 phương án trả lời đúng, điểm cho mỗi câu trả lời đúng là 0,2. Bạn H làm chắc chắn đúng 30 câu và 20 câu còn lại bạn chọn ngẫu nhiên. Tính gần đúng xác suất bạn H được đúng 7 điểm.

Giải:

Số phần tử không gian mẫu:

$$n(\Omega) = 4^{20}$$

Gọi A là biến cố: "H được 7 điểm".

$$n(A) = C_{20}^5 \cdot 3^{15}$$

Vậy xác suất bạn H được đúng 7 điểm là:

$$P(A) = \frac{C_{20}^5 \cdot 3^{15}}{4^{20}} \approx 20,233\%$$

9. Quy tắc nhân xác suất:

+ Hai biến cố A và B đgl độc lập với

nau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

+ Nếu hai biến cố A, B độc lập với nhau thì A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và B; $\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng độc lập với nhau.

+ Quy tắc: Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì $P(A.B) = P(A).P(B)$

$$A.B = A \cap B$$

BT6. Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7. Hãy tính xác suất để cả 2 động cơ đều không chạy tốt.

Giải: Gọi A là bc "Động cơ I chạy tốt", B là biến cố "Động cơ II chạy tốt", D là biến cố "Cả 2 động cơ đều không chạy tốt".

$$P(D) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}).P(\bar{B}) = 6\%$$

1. CẤP SỐ CỘNG

$+(u_n)$ là CSC (vô hạn) với công sai d:

$$u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$+(u_n)$ là CSC (hữu hạn, m phần tử) với công sai d

$$u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \overline{1, m-1}$$

2. Tính chất CSC (u_n) có số

hạng đầu u_1 , công sai d

$$+ u_n = u_1 + (n-1)d$$

$$+ u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 2$$

$(u_{k-1}; u_k; u_{k+1})$ là 3 số hạng liên tiếp của CSC (u_n)

+ Tổng n số hạng đầu của CSC (u_n) là: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 $= \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$

3. CẤP SỐ NHÂN

$+(u_n)$ là CSN (vô hạn) với công bội q: $u_{n+1} = u_n * q, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$+(u_n)$ là CSN (hữu hạn, m phần tử) với công bội q

$$u_{n+1} = u_n * q, \forall n \in \overline{1, m-1}$$

4. Tính chất CSN (u_n) , có số

hạng đầu u_1 , công bội q:

$$+ u_n = u_1 * q^{n-1}$$

$$+ u_k^2 = u_{k-1} * u_{k+1}, \forall k \geq 2$$

$(u_{k-1}; u_k; u_{k+1})$ là 3 số hạng liên tiếp của CSN (u_n)

+ Tổng n số hạng đầu của CSN (u_n) là: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 Nếu q=1 thì $S_n = n.u_1$

$$\text{Nếu } q \neq 1 \text{ thì } S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$$

Trần Văn Việt - 0999083939

5. Giới hạn dãy số (u_n)

$$\lim \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\lim n^k = +\infty, k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\lim C = C, C \text{ hằng số.}$$

$$\lim q^n = 0, |q| < 1$$

$$\lim q^n = +\infty, q > 1$$

6. Định lý về giới hạn hữu

hạn của dãy số

Nếu $\lim u_n = a; \lim v_n = b$ thì

$$\lim(u_n + v_n) = a + b$$

$$\lim(u_n - v_n) = a - b$$

$$\lim(u_n * v_n) = a * b$$

$$\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b} (b \neq 0)$$

+ Nếu $u_n \geq 0$ và

$$\lim u_n = a \text{ thì } a \geq 0 \text{ và}$$

$$\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$$

7. Tổng của CSN lùi vô hạn

(u_n) , công bội q, $|q| < 1$ bằng:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}$$

8. Nếu $\lim u_n = a$ và

$$\lim v_n = \pm \infty \text{ thì } \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

+ Nếu $\lim u_n = a > 0$;

$$\lim v_n = 0 \text{ và } v_n > 0, \forall n \text{ thì}$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty.$$

+ Nếu $\lim u_n = a < 0$;

$$\lim v_n = 0 \text{ và } v_n > 0, \forall n \text{ thì}$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty.$$

+ Nếu $\lim u_n = +\infty$ và

$$\lim v_n = a > 0 \text{ thì } \lim(u_n.v_n) = +\infty$$

+ Nếu $\lim u_n = +\infty$ và

$$\lim v_n = a < 0 \text{ thì } \lim(u_n.v_n) = -\infty$$

9. Định lý giới hạn hữu hạn hs

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L; \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) * g(x)] = L * M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} (M \neq 0)$$

Nếu $f(x) \geq 0; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì

$$L \geq 0; \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

10. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

11. Giới hạn hàm số đặc biệt

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} C = C, C$ hằng số.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x^k} = 0, k \text{ nguyên dương.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty, k \text{ nguyên dương.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty, k \in \mathbb{Z}^+, k \text{ chẵn.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty, k \in \mathbb{Z}^+, k \text{ lẻ.}$$

12. Giới hạn tích, thương hs

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
Số L	$\pm\infty$	Tùy	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
$L<0$		−	$-\infty$
		+	$-\infty$
		−	$+\infty$

13. Hàm số liên tục

+Hs $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

• Hs $y = f(x)$ liên tục tại x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

+ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên 1 khoảng khi nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

“Đồ thị hs liên tục trên 1 khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó”.

+Hs $y = f(x)$ liên tục trên

đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

14. +Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

+Hàm số phân thức hữu tỉ và các hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

15. Cho hs $y = f(x)$ và

$y = g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:

+ Các hs $y = f(x) \pm g(x)$;

$y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0 .

$$+ \text{Hs } y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ liên tục tại } x_0$$

nếu $g(x_0) \neq 0$.

16. Nếu hs $y = f(x)$ liên

tục trên $[a; b]$ và

$f(a).f(b) < 0$ thì pt $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

17. Đạo hàm

Cho hs $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ hữu hạn thì}$$

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

18. Định lý: Nếu hs $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

19. Pt tiếp tuyến của đths $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ là:

$$y = f'(x_0)[x - x_0] + y_0$$

+ x_0 là hoành độ tiếp điểm.

+ y_0 là tung độ tiếp điểm.

$$+ f'(x_0) = \left. \frac{d}{dx} (f(x)) \right|_{x=x_0}$$

là hệ số góc của tiếp tuyến.

Chú ý: cho đt d: $y = ax + b$.

+ Tiếp tuyến vuông góc d

$$f'(x_0) = -\frac{1}{a}$$

+ Tiếp tuyến //d

$$\Rightarrow f'(x_0) = a$$

(Tìm x_0 , viết pttt, loại tt $\equiv d$)

20. CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

Th.S Nguyễn Văn Hiếu 089908.3939

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm sơ cấp	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$ $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0)$ $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$(C)' = 0$ (C là hằng số) $(x)' = 1$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (v \neq 0)$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$ $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ (k là hằng số)
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \quad (\sin x \neq 0)$ T.S Nguyễn Văn Hiếu 089908.3939	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$ $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u) \quad (\sin u \neq 0)$ Th.S Nguyễn Văn Hiếu 089908.3939	21. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm Xét chuyển động thẳng có pt quỹ đạo chuyển động theo thời gian t là $s=s(t)$ (Với $s=s(t)$ là hàm số có đạo hàm cấp hai). + Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0)=s'(t_0)$ + Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $a(t_0)=s''(t_0)$.
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (0 < a \neq 1)$ $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$ $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(x > 0, 0 < a \neq 1)$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(x \neq 0, 0 < a \neq 1)$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (0 < a \neq 1)$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u \neq 0)$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ $(u > 0, 0 < a \neq 1)$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ $(u \neq 0, 0 < a \neq 1)$	22. Vi phân: Cho hs $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x. Vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x ứng với số gia Δx là: $dy=df(x)=f'(x) \cdot \Delta x$ 23. Ứng dụng vi phân tính gần đúng: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ 24. Đạo hàm cấp n: $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

Zalo 089908.3939

T.S Nguyễn Văn Hiếu 089908.3939

Đặc biệt: $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{adx^2+2aex+\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx+e)^2} = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$$

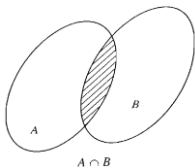
$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{(dx^2+ex+f)^2} = \frac{(ae-bd)x^2+2(af-dc)x+(bf-ec)}{(dx^2+ex+f)^2}$$

23. Ứng dụng vi phân tính gần đúng giá trị của $\sqrt{3,99}$. Xét hàm số $y=\sqrt{x}, x>0$ và $x_0=4$ $\Delta_{x_0}=-0,01$ là số gia của $x_0=4$.	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ta có công thức tính gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$	$\sqrt{3,99} = f(4-0,01) \approx f(4) + f'(4) \cdot (-0,01)$ Vậy: $\sqrt{3,99} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-0,01) = 1,9975$.
--	---	--

1. Giao của 2 tập hợp

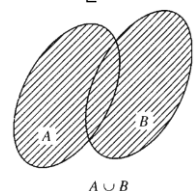
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

**2.** Hợp của 2 tập hợp

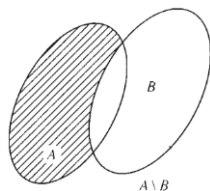
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

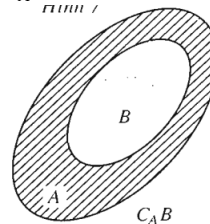
**3.** Hiệu của 2 tập hợp

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$



+ Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ đgl phần bù của B trong A, kí hiệu $C_A B = A \setminus B$



T.S Nguyễn Văn Việt - Điện: 0999083939

6. Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

+ Chú ý: A, B là hai đa thức

$$\sqrt{A} \text{ xác định} \Leftrightarrow A \geq 0$$

$$\frac{A}{B} \text{ xác định} \Leftrightarrow B \neq 0$$

$$\frac{A}{\sqrt{B}} \text{ xác định} \Leftrightarrow B > 0$$

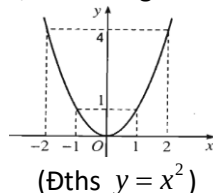
7. Hs $y = f(x)$ đgl hàm đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1; x_2 \in (a; b)$ thỏa $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

+ Hs $y = f(x)$ đgl hàm nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1; x_2 \in (a; b)$ thỏa $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

8. Hs $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

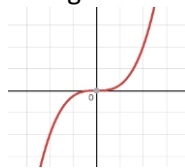
Hs $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

+ Đồ thị hs chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng



$$(\text{Đths } y = x^2)$$

+ Đồ thị hs lẻ nhận gốc O làm tâm đối xứng.



$$(\text{Đths } y = x^3)$$

9. Hs bậc nhất $y = ax + b (a \neq 0)$

+ Txđ: $D = \mathbb{R}$

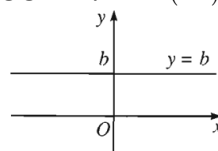
+ $a > 0$: hs đồng biến trên $\mathbb{R}$

+ $a < 0$: hs nghịch biến trên $\mathbb{R}$

+ Đths là 1 đường thẳng đi qua 2 điểm $A(0; b), B(1; a+b)$.

(a là hệ số góc của đường thẳng d: $y = ax + b$)

10. Đths hằng $y = b$ là một đt vuông góc Oy tại $A(0; b)$

**4.** Các tập hợp số

+ Tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

+ Tập hợp các số nguyên

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

+ Tập hợp các số hữu tỉ

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}; n \neq 0 \right\}$$

+ Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$

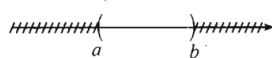
+ Tập hợp các số phức $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

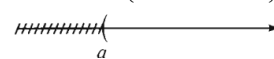
5. Các tập con thường gặp của $\mathbb{R}$:

+ Khoảng

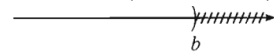
$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



$$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

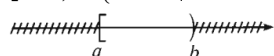


+ Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

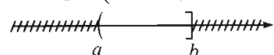


+ Nửa khoảng

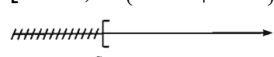
$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



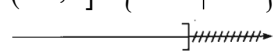
$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$



11. Hsbậc 2: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

+ Txđ: $D = \mathbb{R}$

+ $a > 0$: hs nb trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$

Hs đb trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

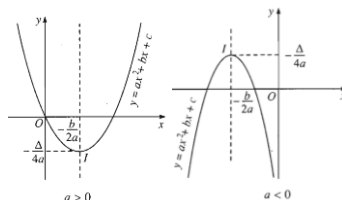
+ $a < 0$: hs đb trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$

Hs nb trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

+ Đths bậc 2 là 1 đường

parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

, trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.



12. Pt $ax + b = 0$

+ pt có no duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$

(No duy nhất $x = -\frac{b}{a}$)

+ Pt có vô số no $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

+ Pt có vô no $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

13. Định lí Viet ($a \neq 0$)

+ Nếu ptb2 $ax^2 + bx + c = 0$

có 2 no $x_1; x_2$ thì $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Chú ý: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$|x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\mathbf{14.} \quad |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$$

$$+ |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

$$+ |A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (or } A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

15. Pt bậc 2 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$

+Pt có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

+Pt vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

+Pt có 2 no pb $\Leftrightarrow \Delta > 0$

+Pt có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$

+Pt có 2 no dương pb

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

+Pt có 2 no âm pb

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

+Pt có 2no trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$

+pt có 2 no pb $x_1; x_2$ thỏa

$$x_1 < \alpha < x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \end{cases}$$

+pt có 2 no pb $x_1; x_2$ thỏa

$$x_1 < x_2 < \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \end{cases}$$

+pt có 2 no pb $x_1; x_2$ thỏa

$$\alpha < x_1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

16. Tính chất đẳng thức

Điều kiện	Nội dung
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$
	$a < b \text{ và } c < d \Rightarrow a + c < b + d$
$a > 0, c > 0$	$a < b \text{ và } c < d \Rightarrow ac < bd$
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

Điều kiện	Nội dung
	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$a > 0$	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ hoặc } x \geq a$
	$ a - b \leq a + b \leq a + b $

17. Bất Cauchy

$$+ \forall a, b \geq 0 \text{ thì } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$)

$$+ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \forall a, b > 0$$

$$+ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}, \forall a, b, c > 0$$

$$+ \forall a, b, c \geq 0 \text{ thì } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

(Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$)

18. Bất Bunhiacopski

$$+ (ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

$$+ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}, \forall a, b > 0; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

$$+ \frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

18. Nhị thức bậc nhất

$$f(x) = ax + b (a \neq 0)$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Trái dấu	0	Cùng dấu
	a		a

"phải cùng, trái trái"

19. Tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

+ $\Delta < 0$ (Pt $f(x) = 0$ vô nghiệm)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu	a

+ $\Delta = 0$ (pt $f(x) = 0$ có

ng nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu	0	Cùng dấu
	a		a

+ $\Delta > 0$ (pt $f(x) = 0$ có

ng nghiệm 2no pb $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu	0	0	Cùng dấu
	a	a	a	a

"Trong trái, ngoài cùng"

20. Tam thức không đổi dấu

$$f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

$$+ f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$21. \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A} \leq \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \leq B \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$$

$$+ |A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2$$

$$\Leftrightarrow (A-B)(A+B) < 0$$

$$+ |A| \leq |B| \Leftrightarrow A^2 \leq B^2$$

$$\Leftrightarrow (A-B)(A+B) \leq 0$$

$$+ |A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases}$$

$$+ |A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B \\ A \geq -B \end{cases}$$

$$+ |A| \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B \\ A \leq -B \end{cases} \quad + |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ A < -B \end{cases}$$

22. Trong mp Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là no của bpt $ax+by \leq c$ đgl miền nghiệm của nó.

+ Quy tắc biểu diễn miền nghiệm của bpt $ax+by \leq c$

B1: Vẽ đt $\Delta: ax+by=c$

B2: Lấy 1 điểm $M_0(x_0; y_0)$

không thuộc Δ .

B3. Tính ax_0+by_0 và so sánh

ax_0+by_0 với c .

B4. KL: Nếu $ax_0+by_0 < c$ thì

nửa mp bờ Δ chứa M_0 là miền

no của bpt $ax+by \leq c$.

+ Nếu $ax_0+by_0 > c$ thì nửa mp

bờ Δ không chứa M là miền no

của bpt $ax+by \leq c$

23. Thống kê

+ Tần số n , tần suất f

+ Biểu đồ hình cột, hình quạt, đường gấp khúc.

+ Số trung bình cộng $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n}$$

$$= f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k$$

($n_i; f_i$ lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i)

+ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ là số các số liệu thống kê.

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k}{n}$$

$$= f_1c_1 + f_2c_2 + \dots + f_kc_k$$

($n_i; f_i; c_i$ lần lượt là tần số, tần suất, giá trị đại diện của lớp ghép thứ i)

+ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ là số các số liệu thống kê)

+ Số trung vị M_e

Sắp các số liệu thống kê thành 1 dãy không giảm

(hoặc không tăng). Số trung

vị của các số liệu thống kê

đã cho là số đứng giữa dãy

nếu số phần tử là lẻ và trung

biên cộng của 2 số đứng

giữa dãy nếu số phần tử là

chẵn.

+Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_o. +Phương sai của dãy số liệu $s^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{n}$ $= f_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \bar{x})^2$ $+ s^2 = \frac{n_1(c_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2}{n}$ $= f_1(c_1 - \bar{x})^2 + \dots + f_k(c_k - \bar{x})^2$ +Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2}$. 24. Độ và radian: $\pi(\text{rad}) = 180^\circ$ 25. Cung có số đo $\alpha(\text{rad})$ của đường tròn bán kính R có độ dài là: $l = \alpha R$. 26. CT lượng giác cơ bản $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} (\cos x \neq 0)$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} (\sin x \neq 0)$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x (\cos x \neq 0)$ $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x (\sin x \neq 0)$ $\tan x \cdot \cot x = 1 (\sin 2x \neq 0)$ 27. Cos đối, sin bù, phụ chéo $+ \cos(-x) = \cos x (\text{cos đối})$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan x$ $\cot(-x) = -\cot x$ $+ \sin(\pi - x) = \sin x (\text{sin bù})$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\cot(\pi - x) = -\cot x$ $+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x (\text{phụ chéo})$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$	$+ \tan(x + k\pi) = \tan x (k \in \mathbb{Z})$ $\cot(x + k\pi) = \cot x (k \in \mathbb{Z})$ $\sin(x + k\pi) = \begin{cases} \sin x & \text{khi k chẵn} \\ -\sin x & \text{khi k lẻ} \end{cases}$ $\cos(x + k\pi) = \begin{cases} \cos x & \text{khi k chẵn} \\ -\cos x & \text{khi k lẻ} \end{cases}$ $+ -\sin x = \sin(-x) = \sin(\pi + x)$ $- \cos x = \cos(\pi + x)$ $- \tan x = \tan(-x)$ $- \cot x = \cot(-x)$ $+ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$ 28. Công thức cộng $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$	$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$ 29. CT nhân đôi $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ Áp dụng: $\sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$ $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$ $\cos 6x = \cos^2(3x) - \sin^2(3x)$ $= 2 \cos^2(3x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(3x)$ $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ $= 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ 30. CT hạ bậc $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ 31. CT nhân 3 $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ 32. CT biến tổng thành tích $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cdot \cos \frac{u-v}{2}$ $\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \cdot \sin \frac{u-v}{2}$ $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cdot \cos \frac{u-v}{2}$ $\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cdot \sin \frac{u-v}{2}$ 33. CT BĐ tích thành tổng $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$ 34. CT $t = \tan \frac{x}{2}$. $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	35. CT đặc biệt $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $= -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ $= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$ $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ $= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$ 36. Pt $\sin x = a$ + Pt $\sin x = a$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1 \quad \Leftrightarrow a \leq 1$ +Pt $\sin x = a$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow a > 1$ $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ $\sin u = \sin \beta^0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \beta^0 + k360^\circ \\ u = 180^\circ - \beta^0 + k360^\circ \end{cases}$	$\sin u = a (-1 \leq a \leq 1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u = \arcsin a + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ +Đb: $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ 37. PT $\cos x = a$ + Pt $\cos x = a$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1 \quad \Leftrightarrow a \leq 1$ +Pt $\cos x = a$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow a > 1$ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ $\cos u = \cos \beta^0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \beta^0 + k360^\circ \\ u = -\beta^0 + k360^\circ \end{cases}$ $\cos u = a (-1 \leq a \leq 1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u = \arccos a + k2\pi \\ u = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ +Đb: $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ 38. PT $\tan x = a$ +Đk $\cos x \neq 0$. $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ $\tan u = \tan \beta^0 \Leftrightarrow u = \beta^0 + k180^\circ$ $\tan u = a \Leftrightarrow u = \arctan a + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 39. PT $\cot x = a$ +Đk $\sin x \neq 0$. $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ $\cot u = \cot \beta^0 \Leftrightarrow u = \beta^0 + k180^\circ$ $\cot u = a \Leftrightarrow u = \text{arccot } a + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 40. Pt $a \sin x + b \cos x = c$ +Pt có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$ +Pt vô nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2$ +PP giải khi $a^2 + b^2 \geq c^2$: B1: Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} (*)$ Với $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ B2: Giải (*).

41. Giải pt đẳng cấp bậc 2 đối với $\sin x$ và $\cos x$
 $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$
B1: Kiểm tra $\cos x = 0$ thỏa pt hay ko. Nếu $\cos x = 0$ thỏa thì $KL x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ là no của pt. Nếu $\cos x = 0$ ko thỏa, ta chuyển B2.
B2: Xét $\cos x \neq 0$. Chia 2 vế pt cho $\cos^2 x$ ta được pt:
 $a \tan^2 x + b \tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$
 Giải pt trên. **B3:** Kết luận B1+B2.

Vd Giải $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$
 + Ta có: $\cos x = 0$ ko thỏa pt.
 + Xét $\cos x \neq 0$, chia 2 vế pt cho $\cos^2 x$ ta được pt:
 $1 - 2\sqrt{3} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x$
 $\Leftrightarrow \tan^2 x + \sqrt{3} \tan x = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$
 Vậy no của pt là
 $x = k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

42. Hàm số $y = \sin x$
 + TXĐ: $D = \mathbb{R}$
 + Tập giá trị: $[-1; 1]$
 + Hs $y = \sin x$ tuần hoàn chu kì $T = 2\pi$.
 + Đồ thị hs $y = \sin x$:

43. Hàm số $y = \cos x$
 + TXĐ: $D = \mathbb{R}$
 + Tập giá trị: $[-1; 1]$
 + Hs $y = \cos x$ tuần hoàn chu kì $T = 2\pi$.
 + Đồ thị hs $y = \cos x$:

44. Hàm số $y = \tan x$
 + TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 + Tập giá trị: $\mathbb{R}$
 + Hs $y = \tan x$ tuần hoàn chu kì $T = \pi$.
 + Đồ thị hàm số $y = \tan x$:

45. Hàm số $y = \cot x$
 + TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 + Tập giá trị: $\mathbb{R}$
 + Hs $y = \cot x$ tuần hoàn chu kì $T = \pi$.
 + Đồ thị hàm số $y = \cot x$:

46. $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$
 $\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$
 $\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$
 $\cot a - \cot b = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}$
 $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$
 $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$
 $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$
 $\cot^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$
 $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$
 $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$

47. Hệ thức lượng tam giác V

 ΔABC vuông tại A, đường cao AH.
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $AB^2 = BH \cdot BC$; $AC^2 = CH \cdot CB$
 $AH^2 = BH \cdot CH$
 $AH \cdot BC = AB \cdot AC$
 $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
 $AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$

$\sin B = \frac{AC}{BC}$ $\cos B = \frac{AB}{BC}$
 $\tan B = \frac{AC}{AB}$ $\cot B = \frac{AB}{AC}$
48. Hệ thức lượng trong ΔABC

 $AB = c; AC = b; BC = a$
 Độ dài trung tuyến AM; BN; CP được kí hiệu LLL $m_a; m_b; m_c$
 + Định lí Cosin
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

+ Định lí sin
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
 (R: bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).
 + Độ dài trung tuyến
 $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$
 $m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$
 $m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$
 + Diện tích tam giác ABC
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$
 ($h_a; h_b; h_c$ LLL độ dài đường cao ΔABC kẻ từ đỉnh A, B, C)
 $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$ $S_{ABC} = pr$
 (Với $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi ΔABC)

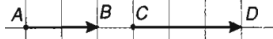
r: bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC .
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$
 $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (CT Herong)
49. Ứng dụng đo đạc
 BT1. Đo chiều cao của tháp mà không đến được chân tháp.
 Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn 2 điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo khoảng cách AB và các góc $\widehat{CAD}, \widehat{CBD}$. Chẳng hạn ta đo được $AB = 24m$;
 $\widehat{CAD} = \alpha = 63^\circ$
 $\widehat{CBD} = \beta = 48^\circ$

Áp dụng DL sin vào ΔABD :
 $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D}$
 $D = \alpha - \beta = 15^\circ$
 $AD = \frac{AB \sin \beta}{\sin D} = \frac{24 \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91$
 Trong tam giác vuông ACD:
 $h = CD = AD \sin \alpha \approx 61,4m$
 T.S Nguyễn Văn Việt
 089908 3939

1. Vecto' là 1 đoạn thẳng có hướng.

+ Giá của vecto' là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vecto' đó.

+ Hai vecto' đgl cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



+ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{CD}$

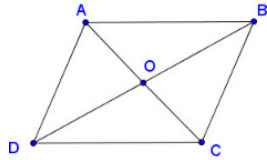


+ $\overrightarrow{PQ}$ cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{RS}$.

+ Khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vecto' là độ dài của vecto'.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB$$

2. Hai vecto' $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đgl bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.



Với hnh ABCD có tâm O, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$$

+ Vecto' không là vecto' có điểm đầu và cuối trùng nhau.

+ Vecto' không cùng phương, cùng hướng với mọi vecto'.

$$+\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

3. Quy tắc tổng hiệu 2 vecto'

$$+\text{QT 3 điểm: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$+\text{QT trừ: } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

+ QT hnh: Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

4. Tính chất phép toán vecto'
Với 3 vecto' $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ tùy ý, với mọi số h, k ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$$

$$1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

5. Vecto' đối

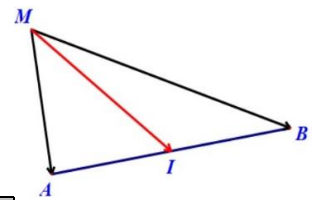
Cho $\vec{a}$. Vecto' có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ đgl vecto' đối của $\vec{a}$, kí hiệu $-\vec{a}$

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

6. Trung điểm đoạn thẳng AB
+ I là trung điểm AB

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$



7. Trọng tâm ΔABC

+ G là trọng tâm ΔABC

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

(M tùy ý)

8. Đk cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có 1

số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

9. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C

+ A, B, C thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} (k \neq 0)$$



10. Tích vô hướng 2 vecto'

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

+ Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}; \vec{b} \neq \vec{0}$ thì:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

+ Bình phương vô hướng

$$\text{của } \vec{a} \text{ là: } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$$

11. Tính chất tích vô hướng

Với 3 vecto' $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ tùy ý, với mọi số k ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

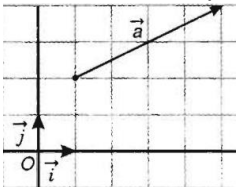
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$$

$$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

12. Hệ trục tọa độ Oxy



$$\vec{i} = (1; 0), \vec{j} = (0; 1)$$

$$\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

Điểm $M(x_M; y_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$

+ Cho $\vec{u} = (u_1; u_2); \vec{v} = (v_1; v_2)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$$

$$k\vec{u} = (ku_1; ku_2), k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

+ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) cùng phương

$$\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = kv_1 \\ u_2 = kv_2 \end{cases}$$

13. Trong mp Oxy, cho tam

giác ABC có $A(x_A; y_A);$

$B(x_B; y_B); C(x_C; y_C)$

$$+\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

+ I là trung điểm AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

+ G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\cos BAC = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$$

14. Tích vô hướng trong Oxy

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2); \vec{b} = (b_1; b_2)$

$$+\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$+|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

+ Góc giữa 2 vecto' $\vec{a}; \vec{b} \neq \vec{0}$:

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

15. Đường thẳng trong Oxy

+ $\vec{u}$ đgl vecto' chỉ phương

của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng Δ .

+ $\vec{u}$ là 1 vtcp của Δ thì $k\vec{u} (k \neq 0)$ là vtcp của Δ .

+ $\vec{n}$ đgl vecto' pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu

$\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ vuông góc Δ .

+ $\vec{n}$ là 1 vtpt của Δ thì

$k\vec{n} (k \neq 0)$ là vtpt của Δ .

+ Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có 1 vtcp

$\vec{u} = (u_1; u_2)$. Pt tham số của

$$\Delta \text{ là: } \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

+ Δ có 1 vtcp $\vec{u} = (u_1; u_2), u_1 \neq 0$

thì Δ có hệ số góc $k = \frac{u_2}{u_1}$.

+ Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có 1 vtpt

$\vec{n} = (a; b)$. Pt tổng quát của

$$\Delta \text{ là: } a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

+ Đt Δ có 1 vtcp $\vec{u} = (u_1; u_2)$

thì Δ có 1 vtpt $\vec{n} = (u_2; -u_1)$.

+ Đt Δ có 1 vtpt $\vec{n} = (a; b)$ thì

Δ có 1 vtcp $\vec{u} = (b; -a)$.

+ Đt Δ có hệ số góc k thì

Δ có 1 vtcp $\vec{u} = (1; k)$ và 1

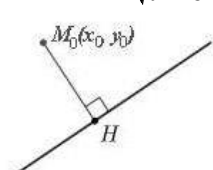
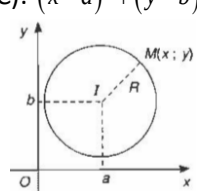
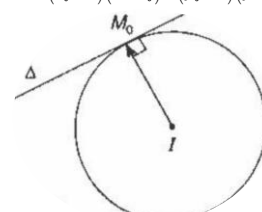
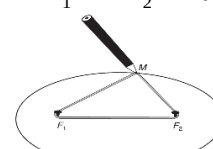
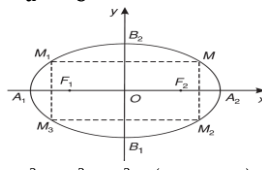
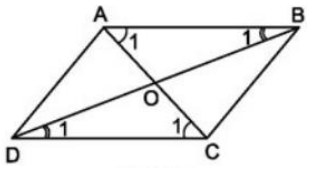
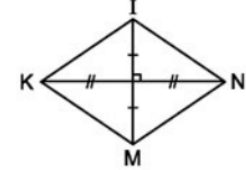
vtpt $\vec{n} = (k; -1)$.

+ Đt Δ có hệ số góc k thì pt

Δ có dạng: $y = kx + m$

+ Trục Ox: $y = 0$.

+ Trục Oy: $x = 0$.

16. Đt đặc biệt trong Oxy Đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ $+c=0$: Δ đi qua gốc $O(0;0)$. $+a=0$: $\Delta // Ox$ hoặc $\Delta \equiv Ox$. $+b=0$: $\Delta // Oy$ hoặc $\Delta \equiv Oy$. 17. Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a, b \neq 0$. Pt đt $\Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. 18. VTTĐ của 2 đt Cho 2 đt $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ + Xét hệ: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} (I)$	+ (I) có 1 no duy nhất $(x_0; y_0)$ Thì $\Delta_1; \Delta_2$ cắt nhau tại $M_0(x_0; y_0)$ + (I) có vô số no thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ + (I) vô nghiệm thì $\Delta_1 // \Delta_2$ Đặc biệt: Nếu $a_2; b_2; c_2 \neq 0$ thì + Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ + $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ + $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ 19. Góc giữa 2 đt Cho 2 đt $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$	và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ Δ_1 có 1vtp $\vec{n}_1=(a_1; b_1)$ Δ_2 có 1vtp $\vec{n}_2=(a_2; b_2)$ Góc giữa 2 đt $\Delta_1; \Delta_2$ tính bởi: $\cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \vec{n}_2 } = \frac{ a_1a_2+b_1b_2 }{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$ + Nếu $\Delta_1: y=k_1x+m_1$ $\Delta_2: y=k_2x+m_2$ Δ_1 có 1vtp $\vec{n}_1=(k_1; -1)$ Δ_2 có 1vtp $\vec{n}_2=(k_2; -1)$ $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$	20. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đt $\Delta: ax+by+c=0$ $d(M_0; \Delta) = \frac{ ax_0+by_0+c }{\sqrt{a^2+b^2}}$  + Khoảng cách giữa 2 đt song song $\Delta_1: ax+by+c_1=0$ và $\Delta_2: ax+by+c_2=0 (c_2 \neq c_1)$ $d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{ c_1-c_2 }{\sqrt{a^2+b^2}}$
21. Đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và có bk R. Pt đường tròn (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  + Pt đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ $(a^2 + b^2 - c > 0)$. Đt (C) có tâm $I(a;b)$ và bk $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$	22. VTTĐ giữa đường tròn (C) và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ (C) có tâm $I(a;b)$ và bk R. + $d(I; \Delta) > R$: Δ ko cắt (C). + $d(I; \Delta) = R$: Δ tiếp xúc (C) + $d(I; \Delta) < R$: Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Gọi H là hcvg của I trên Δ. H là trung điểm của AB. $AB = 2HB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I; \Delta)}$	23. Tiếp tuyến của đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$, bk R, tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là Δ. + Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có 1 vtp $\vec{IM}_0 = (x_0 - a; y_0 - b)$ + Pt $\Delta: (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$ 	24. Trong mp cho hai điểm cố định $F_1; F_2$ và một độ dài không đổi $2a$, lớn hơn F_1F_2. Elip là tập hợp các điểm M trong mp thỏa: $MF_1 + MF_2 = 2a$  + 2 điểm $F_1; F_2$ là 2 tiêu điểm của Elip. Độ dài $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự của Elip.
25. PT chính tắc của Elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < a)$  $c^2 = a^2 - b^2 (0 < c < a)$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ + Tiêu điểm: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ + Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$ + 4 đỉnh: $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$ $B_1(0; -b), B_2(0; b)$ + Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$ + Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$ + Đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ tiếp xúc (E) khi $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$	26. Dấu hiệu nhận biết hình bình hành:  + Tứ giác có các cặp cạnh đối song song là hbh. + Tứ giác có các cặp cạnh đối bằng nhau là hbh. + Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hbh. + Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hbh. + Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường là hbh. 27. Dấu hiệu nhận biết hcn + Tứ giác có 3 góc vuông là hcn	+ Hình thang cân có 1 góc vuông là hình chữ nhật. + Hình bình hành có 1 góc vuông là hình chữ nhật. + Hình bình hành có 2 đường chéo bằng nhau là hcn. 28. Dấu hiệu nhận biết hình vuông + Hcn có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông. + Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là h.vuông. + HCN có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông. + Hình thoi có 1 góc vuông là hình vuông. + Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông. 29. Dấu hiệu nhận biết hình thoi	 + Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau là hình thoi. + Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi. + Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi. + Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi. 30. Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC. Ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}; \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}$

G. Polya (1887-1985)

Giải một bài toán như thế nào?

- Theo G.Polya giải toán không chỉ đơn thuần là tìm ra đáp số của lời giải, mà “Giải bài toán” là bao quát toàn bộ quá trình suy ngẫm, tìm tòi lời giải, tìm mối liên hệ mật thiết giữa giả thiết kết luận, giải toán và tìm hướng phát triển cho lời giải.
- 4 bước giải toán theo G.Polya: 1.Understand, 2.Plan, 3.Solve, 4.Check.

1. UNDERSTAND

- Đây là ẩn? Đây là dữ kiện? Đây là điều kiện? Có thể thỏa mãn điều kiện bài toán hay không? Điều kiện có đủ để xác định ẩn không? Hay chưa đủ? Hay thừa? Hay có mâu thuẫn?
- Vẽ hình. Sử dụng kí hiệu thích hợp.
- Phân biệt các phần khác nhau của điều kiện. Có thể diễn tả các điều kiện đó thành công thức không?

2. PLAN

- Bạn đã gặp bài toán này lần nào chưa? Hay đã gặp bài toán này ở một dạng hơi khác?
- Bạn có biết một bài toán nào liên quan không? Một định lí có thể dùng được không?
- Xét kĩ cái chưa biết (ẩn) và thử nhớ lại một bài toán quen thuộc có cùng ẩn hay có ẩn tương tự.
- Đây là một bài toán có liên quan mà bạn đã có lần giải rồi. Có thể sử dụng nó không? Có thể sử dụng kết quả của nó không? Hay sử dụng phương pháp? Có cần phải đưa thêm một số yếu tố phụ thì mới sử dụng được nó không?
- Có thể phát biểu bài toán một cách khác không? Một cách khác nữa? Quay về định nghĩa.
- Nếu bạn chưa giải được bài toán đã đề ra, thì hãy thử giải một bài toán có liên quan. Bạn có thể nghĩ ra một bài toán có liên quan mà dễ hơn không? Một bài toán tổng quát hơn? Một trường hợp riêng? Một bài toán tương tự? Bạn có thể giải một phần bài toán không? Hãy giữ lại một phần của điều kiện, bỏ qua phần kia. Khi đó ẩn được xác định đến một chừng mực nào đó; nó biến đổi như thế nào? Bạn có thể từ các dữ kiện rút ra một yếu tố có ích không? Bạn có thể nghĩ ra những dữ kiện khác có thể giúp bạn xác định được ẩn không? Có thể thay đổi ẩn, hay các dữ kiện, hay cả hai nếu cần thiết, sao cho ẩn mới và các dữ kiện mới được gần nhau không?
- Bạn đã sử dụng mọi dữ kiện hay chưa? Đã sử dụng toàn bộ điều kiện hay chưa? Đã để ý đến mọi khái niệm chủ yếu trong bài toán chưa?

3. SOLVE

- Khi thực hiện giải bạn hãy kiểm tra lại từng bước giải. Bạn đã thấy rõ ràng là mỗi bước đều đúng chưa? Bạn có thể chứng minh là nó đúng không?

4. CHECK

- Bạn có thể kiểm tra lại kết quả? Bạn có thể kiểm tra lại toàn bộ quá trình giải bài toán không?
- Có thể tìm được kết quả một cách khác không? Có thể thấy trực tiếp ngay kết quả không?
- Bạn có thể sử dụng kết quả hay phương pháp giải cho một bài toán nào khác không?

1. HÀM SỐ	Trang 1
2. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ LOGARIT	Trang 5
3. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN, ỨNG DỤNG	Trang 9
4. SỐ PHỨC	Trang 10
5. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN	Trang 11
6. KHỐI TRÒN XOAY	Trang 13
7. KHÔNG GIAN OXYZ	Trang 14
8. PHÉP BIẾN HÌNH	Trang 16
9. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN	Trang 18
10. ĐẠI SỐ TỔ HỢP	Trang 20
11. CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN, GIỚI HẠN, ĐẠO HÀM	Trang 22
12. TẬP HỢP, HÀM SỐ, PHƯƠNG TRÌNH, BPT, THỐNG KÊ, LƯỢNG GIÁC	Trang 24
13. VECTƠ, CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ, TÍCH VÔ HƯỚNG	Trang 28
14. HÌNH OXY	Trang 28