

TỔNG HỢP CÁC CÂU HỎI VẬN DỤNG CAO – GROUP NHÓM TOÁN

A.

Câu 1. Nếu đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d): 2x + y = m$ tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB nhỏ nhất thì

A. $m=-1$ B. $m=1$ C. $m=-2$ D. $m=2$

Đáp án chi tiết :

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-4}{x+1} = -2x + m \quad (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m-3)x - m - 4 = 0$$

$$\Delta = (m+1)^2 + 40 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra (d) luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B

$$x_A + x_B = \frac{m-3}{2}; \quad x_A \cdot x_B = \frac{-m-4}{2};$$

$$y_A = -2x_A + m; \quad y_B = -2x_B + m$$

$$y_B - y_A = -2(x_B - x_A)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{5(x_B - x_A)^2}$$

$$= \sqrt{5[(x_B + x_A)^2 - 4x_A x_B]} = \sqrt{5\left[\left(\frac{m-3}{2}\right)^2 - 4\frac{-m-4}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}[(m+1)^2 + 40]} \geq 5\sqrt{2}$$

Vậy AB nhỏ nhất khi $m=-1$

Chọn A

Câu 2. Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

A. $n=2017$ B. $n=2018$ C. $n=2019$ D. $n=2016$

Đáp án chi tiết :

Ta có

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow \log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + 3^3 \log_a 2019 + \dots + n^3 \log_a 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_a 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\frac{2016 \cdot 2017}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow n = 2017$$

Chọn A

Câu 3. Cho hình chóp tam giác S.ABC biết $AB=3, BC=4, CA=5$. Tính thể tích hình chóp SABC biết các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy một góc 30°

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

Đáp án chi tiết :

Để thấy tam giác ABC vuông tại B

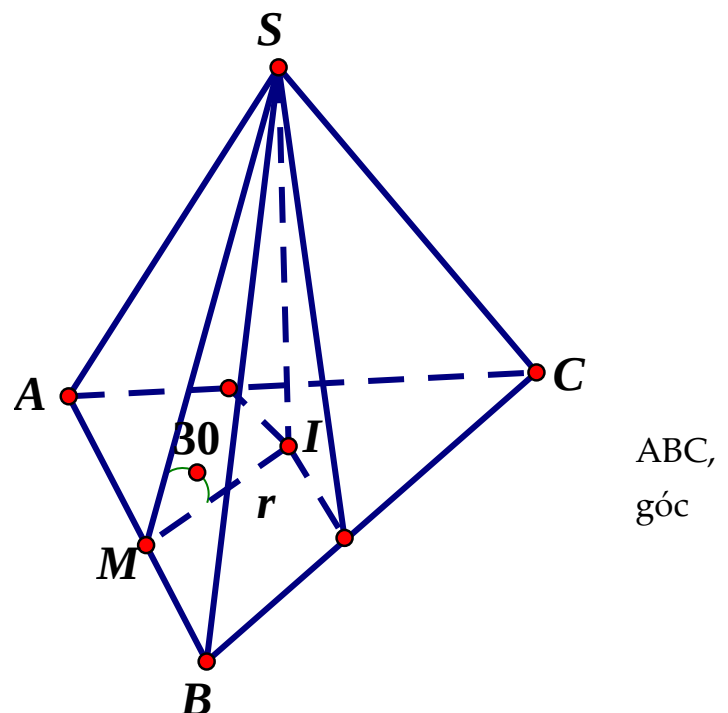
$$S_{\triangle ABC} = 6$$

Gọi p là nửa chu vi

$$p = \frac{3+4+5}{2} = 6$$

$$S = pr \Rightarrow r = 1$$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác từ giả thiết các mặt bên tạo với đáy một



ABC,
góc

30 độ ta suy ra I là chân đường cao của khối chóp

$$\tan 30^\circ = \frac{SI}{MI} \Rightarrow SI = MI \cdot \tan 30^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SI = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Do đó ta chọn A

Câu 4. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 5$. Tính $I = \int_0^1 f(1-x)dx$

- A. 5 B. 10 C. $\frac{1}{5}$ D. $\sqrt{5}$

Đáp án chi tiết :

Đặt

$$t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 0$$

$$I = -\int_1^0 f(t)dt = 5$$

Chọn A

Câu 5. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ và mp (P) : $x+y-2=0$. Tìm phương trình đường

thẳng nằm trong mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với (d).

$$A. \begin{cases} x=1-2t \\ y=1+2t \\ z=0 \end{cases} \quad B. \begin{cases} x=1-3t \\ y=1+3t \\ z=5 \end{cases} \quad C. \begin{cases} x=1-2t \\ y=1-2t \\ z=0 \end{cases} \quad D. \begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=5 \end{cases}$$

Đáp án chi tiết :

Gọi I là giao điểm của (d) và (P)

$$I(1-t; 1-t; 2t)$$

$$I \in (P) \Rightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 1; 0)$$

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; -1; 2)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 0)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là

$$\vec{u}_{\Delta} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-2; 2; 0)$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng cần tìm là } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 6. Biết số phức Z thỏa điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của Z tạo thành một hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng

A. 16π B. 4π C. 9π D. 25π

Đáp án chi tiết :

Đặt $z = x + yi$

$$|z - 3i - 1| = |x - 1 + (y - 3)i| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$$

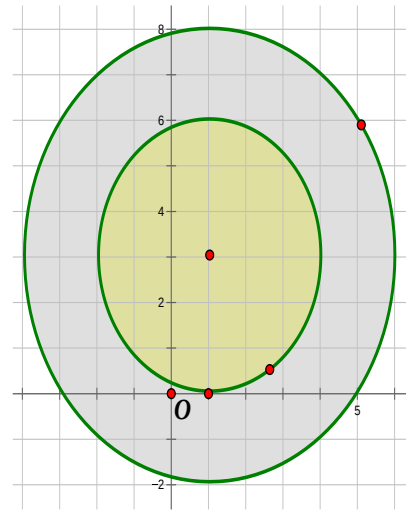
Do đó

$$3 \leq |z - 3i - 1| \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 25$$

Tập hợp các điểm biểu diễn của Z là hình phẳng nằm trong đường tròn

Tâm I (1 ; 3) với bán kính bằng R=5 đồng thời nằm ngoài đường tròn tâm I (1 ; 3) với bán kính r=3

Diện tích của hình phẳng đó là



$$S = \pi.5^2 - \pi.3^2 = 16\pi$$

Câu 7. Trong số các khối trụ có thể tích bằng V , khối trụ có diện tích toàn phần bé nhất thì có bán kính đáy là

A. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. B. $R = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{V}}$ C. $R = \sqrt[3]{\frac{\pi}{V}}$ D. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

Đáp án chi tiết :

$$V = \pi R^2 . h$$

$$\Rightarrow l = h = \frac{V}{\pi R^2}$$

$$S_{TP} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$$

Xét hàm số $f(R) = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$ với $R > 0$

$$f'(R) = \frac{-2V + 4\pi R^3}{R^2}$$

$$f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Bảng biến thiên

R	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$	+	0	-
$f(R)$	$+\infty$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy diện tích toàn phần nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Do đó chọn A

B.

Câu 1. Tìm tham số thực m để bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq x^2 - 4x + m - 1$ có nghiệm thực trong đoạn $[2; 3]$.

- A. $m < -1$ **B. $m \leq -1$** C. $m \leq -\frac{1}{2}$ D. $m < -\frac{1}{2}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 1 \Rightarrow x^2 - 4x = t^2 - 5$.

Khi đó: $-1 \Leftrightarrow t \geq t^2 - 5 + m \Leftrightarrow m \leq -t^2 + t + 5 = g(t)$, $t \in [1; +\infty)$.

Ta có: $g'(t) = -2t + 1$. Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	3
t	$+\infty$			
$g'(t)$	+			0
	-			-
$g(t)$				3
				-1

Dựa vào bảng biến thiên, $m \leq -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m.$$

A. $m \leq \frac{47}{64}; \frac{3}{2} \leq m$

B. $\frac{49}{64} < m \leq \frac{3}{2}$

C. $\frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$

D.

$$\frac{47}{64} \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{3 + \cos 4x}{4} + \cos^2 4x = m$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 4x + \cos 4x = 4m - 3 \quad (1)$$

Đặt $t = \cos 4x$. Phương trình trở thành: $4t^2 + t = 4m - 3, (2)$

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ thì $t \in [-1; 1]$.

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t \in [-1; 1), (3)$

Xét hàm số $g(t) = 4t^2 + t$ với $t \in [-1; 1), g'(t) = 8t + 1$.

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{8}$$

Lập bảng biến thiên

t	-1	$-\frac{1}{8}$	1
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	3	$-\frac{1}{16}$	5

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (3) xảy ra $\Leftrightarrow -\frac{1}{16} < 4m - 3 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$

Vậy giá trị của m phải tìm là: $\frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 3 : Cho phương trình $3\cos^4 x - 5\cos^3 x - 36\sin^2 x - 15\cos x + 36 + 24m - 12m^2 > 0$. Tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải

Đưa về bpt dạng

$$3\cos^4 x - 20\cos^3 x + 36\cos^2 x > 12m^2 - 24m$$

Đặt $t = \cos x$; $-1 \leq t \leq 1$. Khi đó bài toán trở thành

Tìm m để bất phương trình $f(t) = 3t^4 - 20t^3 + 36t^2 > 12m^2 - 24m$ đúng với mọi $-1 \leq t \leq 1$

Lập BBT

A. $m < -1$ B. $m \leq -1$ C. $m \leq -\frac{1}{2}$ D. $m < -\frac{1}{2}$

Câu 4: Đặt vào một đoạn mạch hiệu điện thế xoay chiều $u = U_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$. Khi đó trong

mạch có dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right)$ với φ là độ lệch pha giữa dòng điện

và hiệu điện thế. Hãy Tính công của dòng điện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì.

A. $\frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi$ B. $\frac{U_0 I_0}{2} T \sin \varphi$ C. $\frac{U_0 I_0}{2} T \cos(\varphi + \pi)$ **D. $\frac{U_0 I_0}{2} T \cos \varphi$**

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^T u i dt = \int_0^T U_0 I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \sin \frac{2\pi}{T}t dt \\
&= U_0 I_0 \int_0^T \frac{1}{2} \left(\cos\varphi - \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right) \right) dt \\
&= \frac{U_0 I_0}{2} \int_0^T \frac{1}{2} \left(\cos\varphi - \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right) \right) dt \\
&= \frac{U_0 I_0}{2} \left(t \cos\varphi - \frac{T}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right) \right) \Bigg|_0^T = \frac{U_0 I_0}{2} T \cos\varphi
\end{aligned}$$

Câu 5: Một dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ chạy qua một mạch điện có điện trở thuần R . Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì T .

A. $\frac{RI_0^2}{2}T$

B. $\frac{RI_0^2}{3}T$

C. $\frac{RI_0^2}{4}T$

D. $\frac{RI_0^2}{5}T$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } Q &= \int_0^T R i^2 dt = \int_0^T R I_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) dt \\
&= R I_0^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)}{2} dt \\
&= \frac{R I_0^2}{2} \left(t - \frac{T}{4\pi} \sin 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right) \Bigg|_0^T = \frac{R I_0^2}{2} T
\end{aligned}$$

Câu 6: Một đoàn tàu chuyển động trên một đường thẳng nằm ngang với vận tốc không đổi v_0 . Vào thời điểm nào đó người ta tắt máy. Lực hãm và lực cản tổng hợp cả đoàn tàu bằng $1/10$ trọng lượng P của nó. Hãy các định chuyển động của đoàn tàu khi tắt máy và hãm.

A. $x = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{20}$ B. $x = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{10}$ C. $x = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{30}$ D. $x = v_0 \cdot t - \frac{t^2}{20}$

Lời giải

- Khảo sát đoàn tàu như một chất điểm có khối lượng m , chịu tác dụng của $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_c$.

- Phương trình động lực học là: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_c$ (1)

Chọn trục Ox nằm ngang, chiều (+) theo chiều chuyển động gốc thời gian lúc tắt máy. Do vậy chiếu (1) lên trục Ox ta có:

$$ma_x = -F_c \text{ hay viết: } mx'' = -F \text{ hay } F = \frac{P}{10}; x'' = -\frac{g}{10} \quad (2)$$

$$\text{hay } \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{10} \rightarrow -\frac{g}{10} dt \quad (2')$$

nguyên hàm hai vế (2') ta có: $V = -\frac{g}{10}t + C_1$

$$\text{hay } \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{10}t + C_1 \rightarrow dx = \frac{g}{10}t \cdot dt + C_1 dx$$

nguyên hàm tiếp 2 vế ta được $x = -\frac{g}{20}t^2 + C_1 \cdot t + C_2$ (3)

Dựa vào điều kiện ban đầu để xác định các hằng số C_1 và C_2 như sau:

Tại $t_0 = 0$; $v = v_0$; $v_0 = 0$ Ta có: $C_2 = 0$ và $C_1 = v_0$ thay C_1 và C_2 vào (3)

$$x = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{20}$$

Câu 7: Một thanh AB có chiều dài là $2a$ ban đầu người ta giữ thanh ở góc nghiêng $\alpha = \alpha_0$, một đầu thanh tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy biểu diễn góc α theo thời gian t (Tính bằng công thức tích phân)

$$A. t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3}{2a} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}}$$

$$B. t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a} (\sin \alpha_0 + \sin \alpha)}}$$

$$C. t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{a} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}}$$

$$D. t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}}$$

Lời giải

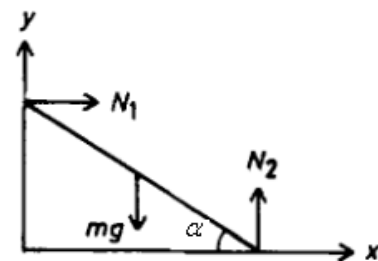
Do trượt không ma sát nên cơ năng của thanh được bảo toàn

$$mg \sin \alpha_0 = mg \sin \alpha + K_q + K_t \quad (1)$$

Do khối tâm chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính a nên: $K_t = \frac{ma^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} ma^2 \alpha'^2$

Động năng quay quanh khối tâm: $K_q = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{12} m(2a)^2 \alpha'^2 = \frac{1}{6} ma^2 \alpha'^2$

Thay vào (1) ta được: $\frac{2}{3} a \alpha'^2 = g(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$



$$\alpha' = -\sqrt{\frac{3g}{2a}}(\sin \alpha_o - \sin \alpha)$$

$$t = -\int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}}(\sin \alpha_o - \sin \alpha)}$$

Câu 8: Một thanh AB có chiều dài là $2a$ ban đầu người ta giữ thanh ở góc nghiêng $\alpha = \alpha_o$, một đầu thanh tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Tính góc $\sin \alpha$ khi thanh rời khỏi tường

A. $\sin \alpha = \frac{1}{3} \sin \alpha_o$ **B. $\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \alpha_o$** C. $\sin \alpha = \frac{2}{5} \sin \alpha_o$ D. $\sin \alpha = \frac{4}{3} \sin \alpha_o$

Lời giải

Xét chuyển động khối tâm của thanh theo phương Ox:

$$N_1 = mx'' . \text{ Tại thời điểm thanh rời tường thì } N_1 = 0 \rightarrow x'' = 0$$

Toạ độ khối tâm theo phương x là:

$$x = a \cos \alpha$$

$$\text{Đạo hàm cấp 1 hai vế: } x' = -a \sin \alpha \cdot \alpha'$$

$$\text{Đạo hàm cấp 2 hai vế: } x'' = -a(\cos \alpha \cdot \alpha'^2 + \sin \alpha \cdot \alpha'') = a(\cos \alpha \cdot \alpha'^2 + \sin \alpha \cdot \alpha'')$$

$$\text{Khi } x'' = 0 \rightarrow \cos \alpha \cdot \alpha'^2 = -\sin \alpha \cdot \alpha'' \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } \frac{2}{3} a \alpha'^2 + g \sin \alpha = g \sin \alpha_o$$

$$\text{Lấy đạo hàm 2 vế: } \frac{4}{3} a \alpha'' \alpha' + g \cos \alpha \cdot \alpha' = 0$$

Hay: $\alpha'' = -\frac{3g}{4a} \cos \alpha$

Thay vào (2) ta có phương trình:

$$\cos \alpha \cdot \frac{3g}{2a} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha) = -\sin \alpha \cdot \left(-\frac{3g}{4a} \cos \alpha \right)$$

$$\sin \alpha = 2(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \alpha_0$$

C.

Câu 1(GT Chương 1). Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một hồ nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là h và có thể tích là 18 m^3 . Hãy tính chiều cao h của hồ nước sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $h = 1 \text{ m}$ B. $h = 2 \text{ m}$ C. $h = \frac{3}{2} \text{ m}$ D. $h = \frac{5}{2} \text{ m}$

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hình hộp

Theo đề bài ta có $y = 3x$ và $V = hxy \Rightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{V}{3x^2}$

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của hồ

nước là nhỏ nhất.

Khi đó ta có: $S_p = 2xh + 2yh + xy = 2x \frac{V}{3x^2} + 2 \cdot 3x \cdot \frac{V}{3x^2} + x \cdot 3x = \frac{8V}{3x} + 3x^2$

Ta có $S_p = \frac{8V}{3x} + 3x^2 = \frac{4V}{3x} + \frac{4V}{3x} + 3x^2 \stackrel{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{16V^2}{3}} = 36$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4V}{3x} = 3x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{4V}{9}} = 2 \Rightarrow h = \frac{V}{3x^2} = \frac{3}{2}$.

Vậy chọn C

Câu 2(GT Chương 2). Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi:

- A. $m < 19$ B. $m > 39$ C. $19 < m < \frac{39}{2}$ D. $19 < m < 39$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) &= 0 & f(x) &= \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 12x - 14 + \frac{2}{x^2} \\ \Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) - \log_2(-14x^2 + 29x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow mx - 6x^3 &= -14x^2 + 29x - 2 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x} & f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 19 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{121}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên suy ra đáp án C.

Câu 3(GT Chương 3). Một lực 50 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 5 cm đến 10 cm. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 10 cm đến 13 cm?

- A. 1,95J B. 1,59 J C. 1000 J D. 10000 J

Hướng dẫn giải

Theo định luật Hooke, khi chiếc lò xo bị kéo căng thêm x m so với độ dài tự nhiên thì chiếc lò xo trở lại với một lực $f(x) = kx$. Khi kéo căng lò xo từ 5 cm đến 10 cm, thì nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m. Bằng cách này, ta được $f(0,05) = 50$ bởi vậy :

$$0.05k = 50 \Rightarrow k = \frac{50}{0.05} = 1000$$

Do đó: $f(x) = 1000x$ và công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 10 cm đến 13 cm là:

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 1000x dx = 1000 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,05}^{0,08} = 1,95J$$

Vậy chọn A

Câu 4(GT Chương 4). Cho số phức z có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô đun của số phức w bằng:

- A. 1 B. 2 C. 2016 D. 2017

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Leftrightarrow \frac{z+w}{zw} - \frac{1}{z+w} = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+w)^2 - zw}{zw(z+w)} = 0$$

$$\Rightarrow z^2 + w^2 + zw = 0 \Leftrightarrow z^2 + zw + \frac{1}{4}w^2 + \frac{3}{4}w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = -\frac{3}{4}w^2$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$$

$$\text{Từ } \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w \Rightarrow w = \frac{z}{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\text{Suy ra: } |w| = \frac{2017}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = 2017$$

Vậy chọn D.

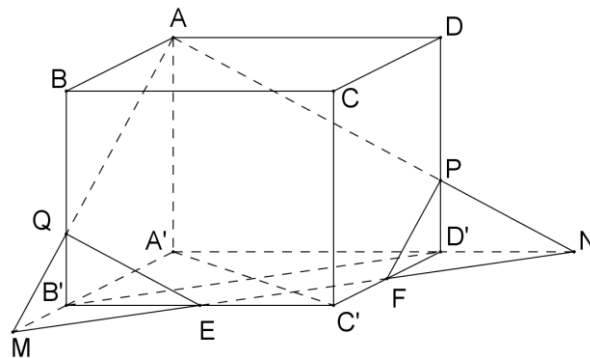
Câu 5(HH Chương 1). Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối chứa điểm C' . Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ là

- A. $\frac{25}{47}$. B. 1. C. $\frac{17}{25}$. D. $\frac{8}{17}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng EF cắt $A'D'$ tại N , M , cắt DD' tại P , AM cắt đó mặt phẳng (AEF) cắt khối lăng khối đó là $ABCD.C'QEFP$ và

Gọi $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$, $V_3 = V_{A.A'MN}$,
 $V_4 = V_{PFD'N}$, $V_4 = V_{QMB'E}$.



cắt $A'B'$ tại BB' tại Q . Từ trư thành hai $AQEFPB'A'D'$.

Do tính đối xứng của hình lập phương nên ta có $V_4 = V_5$.

$$V_3 = \frac{1}{6} AA'.A'M.A'N = \frac{1}{6} a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8},$$

$$V_4 = \frac{1}{6} PD'.D'F.D'N = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{72}$$

$$V_1 = V_3 - 2V_4 = \frac{25a^3}{72},$$

$$V_2 = V - V_1 = \frac{47a^3}{72}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}.$$

Vậy chọn A.

Câu 6(HH Chương 2). Cho một khối trụ có bán kính đáy $r = a$ và chiều cao $h = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục OO' của khối trụ chia khối trụ thành 2 phần, gọi V_1 là thể tích phần khối trụ chứa trục OO' , V_2 là thể tích phần còn lại của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$, biết rằng (P) cách OO' một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{\pi-2}$. B. $\frac{3\pi-2}{\pi-2}$. C. $\frac{2\pi+3}{\pi-2}$. D. $\frac{2\pi-3}{\pi-2}$.

Hướng dẫn giải

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Gọi thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$.

Dựng lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm AB .

Ta có $OH \perp AB \Rightarrow OH \perp (ABB'A') \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow AH = BH = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OH.$$

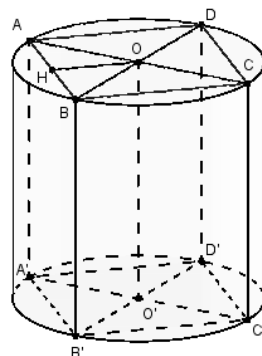
$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại $O \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Từ đó suy ra:

$$V_2 = \frac{1}{4}(V - V_{ABCD.A'B'C'D'}) = \frac{1}{4}(2\pi a^3 - (a\sqrt{2})^2 \cdot 2a) = \frac{a^3(\pi-2)}{2}.$$

$$V_1 = V - V_2 = 2\pi a^3 - \frac{a^3(\pi-2)}{2} = \frac{a^3(3\pi+2)}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3\pi+2}{\pi-2}.$$



Vậy chọn A

Câu 7(HH Chương 3). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ, $B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b)$ với $(a > 0, b > 0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Giả sử $a + b = 4$, hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $A'BDM$?

A. $\max V_{A'MBD} = \frac{64}{27}$

B. $\max V_{A'MBD} = 1$

C. $\max V_{A'MBD} = -\frac{64}{27}$

D. $\max V_{A'MBD} = \frac{27}{64}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $C(a;a;0), B'(a;0;b), D'(0;a;b), C'(a;a;b) \Rightarrow M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{A'B} = (a;0;-b), \overrightarrow{A'D} = (0;a;-b), \overrightarrow{AM} = \left(a;a;-\frac{b}{2}\right)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}] = (ab; ab; a^2) \Rightarrow [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}] \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3a^2b}{2} \Rightarrow V_{A'MBD} = \frac{a^2b}{4}$$

Do $a, b > 0$ nên áp dụng BĐT Côsi ta được: $4 = a + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + b \geq 3\sqrt{\frac{1}{4}a^2b} \Rightarrow a^2b \leq \frac{64}{27}$

Suy ra: $\max V_{A'MBD} = \frac{64}{27}$.

Vậy chọn A

D.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc $[10;10]$ để phương trình

$$\sqrt{1-x^2} - m(2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x} - 3) + 1 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

A. 12

B. 13

C. 8

D. 9

A. 5 B. -1 C. 1 D. 2

A. 0 B. 1 C. 3 D. -1

A. -2^{1008} B. 2^{1008} C. 2^{504} D. 2^{2017}

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

A. $\frac{2\sqrt{21}}{3}a$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}a$ C. $\sqrt{29}a$ D. $\frac{\sqrt{93}}{3}a$

A. $x_M = 3$ B. $x_M = -1$ C. $x_M = 1$ D. $x_M = -3$

Đáp án: 1A; 2A; 3C; 4B; 5A; 6D; 7C

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. (Ứng dụng đạo hàm) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc $[10;10]$ để phương trình $\sqrt{1-x^2} - m(2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x} - 3) + 1 = 0$ có nghiệm?

A. 12

B. 13

C. 8

D. 9

Lời giải

ĐK: $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $u = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Từ BBT $\Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$

PT có dạng: $\frac{t^2}{2} - m(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2m(2t-3) (*)$

Do $t = \frac{2}{3}$ không là nghiệm nên $(*) \Leftrightarrow 2m = \frac{t^2}{2t-3} = f(t)$

PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Đồ thị h/s $y = f(t)$ và đt $y = 2m$ có điểm chung có hoành độ $\sqrt{2} \leq t \leq 2$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t-3}$ trên $[\sqrt{2}; 2]$: $f'(t) = \frac{2t(t-3)}{(2t-3)^2} < 0 \forall t \in [\sqrt{2}; 2]$

BBT:

t	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$f'(t)$	-		-
$f(t)$	$-2(2\sqrt{2}+3)$	$+\infty$	4

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq -2(2\sqrt{2}+3) \\ 2m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -(2\sqrt{2}+3) \\ m \geq 2 \end{cases}$. Đáp án A.

Câu 2. (Mũ – Logarit) Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có nghiệm duy nhất

$x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $a + b$?

A. 5

B. -1

C. 1

D. 2

Lời giải.

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Đk: } \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\begin{aligned} \text{Pt} &\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) - \log_5 x = \log_3 (x-1)^2 - \log_3 4x \\ &\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) + \log_3 4x = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow 4x = (t-1)^2$$

$$(1) \text{ có dạng } \log_5 t + \log_3 (t-1)^2 = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (2)$$

Xét $f(y) = \log_5 y + \log_3 (y-1)^2$, do $x > 1 \Rightarrow t > 3 \Rightarrow y > 1$.

$$\text{Xét } y > 1: f'(y) = \frac{1}{y \ln 5} + \frac{1}{(y-1)^2 \ln 3} \cdot 2(y-1) > 0$$

$\Rightarrow f(y)$ là hàm đồng biến trên miền $(1; +\infty)$

$$(2) \text{ có dạng } f(t) = f(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2} \quad (\text{vn}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2} \quad (tm).$$

Vậy $x = 3 + 2\sqrt{2}$. Đáp án A.

Câu 3. (Tích phân) Biết tích phân $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \frac{a\pi+b}{8}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$. Tính tổng $a+b$?

A. 0

B. 1

C. 3

D. -1

Giải: $I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow I = \frac{\pi+2}{8}$. Đáp án C.

Câu 4. (Số phức) Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2017} .

A. -2^{1008} B. 2^{1008} C. 2^{504} D. 2^{2017}

Lời giải.

Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2013} .

Gọi số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a-bi$ thay vào (1) ta có $a+bi - \frac{a-bi}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$

$$a+bi - \frac{(a-bi)(1-3i)}{10} = \frac{6+7i}{5} \Leftrightarrow 10a+10bi - a+3b+i(b+3a) = 12+14i$$

$$\Leftrightarrow 9a+3b+i(11b+3a) = 12+14i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a+3b=12 \\ 11b+3a=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$a=b=1 \Rightarrow z=1+i \Rightarrow z^{2017} = ((1+i)^4)^{504} (1+i) = (-4)^{504} (1+i) = 2^{1008} + 2^{1008}i$$

Đáp án B.

Câu 5. (Khối đa diện) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, M là trung điểm của AD. Gọi S' là giao của SC với mặt phẳng chứa BM và song song với SA. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S'.BCDM và S.ABCD.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Trong $(ABCD)$, gọi $\{I\} = AC \cap BM$, trong (SAC) , kẻ đường thẳng qua I, // SA, cắt SC tại S' $\Rightarrow$ S' là giao điểm của SC với mp chứa BM, //SA.

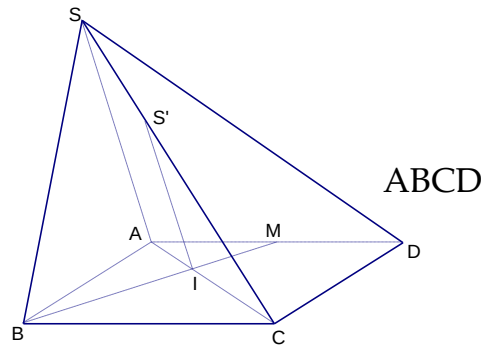
Do M là trung điểm của AD nên

$$dt(BCDM) = \frac{3}{4} dt(ABCD) \Rightarrow V_{S'.BCDM} = \frac{3}{4} V_{S'.ABCD}$$

Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu của S, S' trên

$$\Rightarrow \frac{S'H'}{SH} = \frac{CS'}{CS} = \frac{CI}{CA} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S'.BCDM} = \frac{3}{4} V_{S'.ABCD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$



Đáp án A.

Câu 6. (Mặt tròn xoay) Cho hình chóp S.ABC có $AB = 2a, AC = 3a, BAC = 60^\circ, SA \perp (ABC), SA = a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{2\sqrt{21}}{3}a$

B. $\frac{\sqrt{21}}{3}a$

C. $\sqrt{29}a$

D. $\frac{\sqrt{93}}{3}a$

Lời giải

$$\text{Có } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{4a^2 + 9a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7}a$$

$$\text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp } \triangle ABC \text{ là: } r = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{7}a}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}a}{3}$$

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là } R = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{21}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{93}}{3}a.$$

Đáp án D.

Câu 7. (Hình Oxyz) Cho $A(-1;3;5), B(2;6;-1), C(-4;-12;5)$ và điểm $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ

nhất. Tìm hoành độ điểm M.

A. $x_M = 3$

B. $x_M = -1$

C. $x_M = 1$

D. $x_M = -3$

Lời giải

Gọi I là điểm $\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(3; 7; -3)$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow G(-1; -1; 3)$

Nhận thấy, M, I nằm khác phía so với mp(P).

Có $S = 3(MI + MG) \geq 3GI$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của GI và (P) $\Rightarrow M(1; 3; 1)$

Đáp án C.

E.

Câu 1 (Đạo hàm và ứng dụng).

Từ một miếng tôn hình vuông cạnh a(cm) người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật và hai hình tròn có cùng đường kính để làm thân và các đáy của một hình trụ. Hỏi khối trụ được tạo thành có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu, biết rằng các cạnh của hình chữ nhật song song hoặc trùng với các cạnh ban đầu của tấm tôn.

A. $\frac{a^3\pi}{4(\pi+1)^2}$

B. $\frac{a^3(\pi-1)}{4\pi^2}$

C. $\frac{a^3(\pi+1)}{4\pi^2}$

D. $\frac{a^3\pi}{4\pi^2}$

Giải

Ta có 2 cách để cắt hình để tạo thành hình trụ.

+) Cách 1: Cắt thành 2 phần: Một phần có kích thước x và a. Một phần có kích thước a-x và a. Phần có kích thước x và a để làm hai đáy và phần có kích thước a-x và a cuộn dọc để tạo thành thân (tạo thành hình trụ có chiều cao bằng a). Điều kiện là $x \leq \frac{a}{\pi+1}$ thì

$$V = \frac{\pi ax^2}{4} \leq \frac{a^3\pi}{4(\pi+1)^2}.$$

+) Cách 2: Cắt như trên. Nhưng phần có kích thước $a-x$ và a cuộn ngang để làm thành thân (tạo thành hình trụ có chiều cao là $a-x$). Điều kiện là $x \leq \frac{a}{\pi}$ do chu vi của hình tròn cắt ra phải bằng với phần đáy của hình chữ nhật. Khi đó $V = \frac{\pi(a-x)x^2}{4}$.

Xét hàm số $V = \frac{\pi(a-x)x^2}{4}$, với $x \leq \frac{a}{\pi}$.

Ta có $V = \frac{\pi(a-x)x^2}{4} \leq \frac{a^3(\pi-1)}{4\pi^2}$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối trụ được tạo thành là: $\frac{a^3(\pi-1)}{4\pi^2}$.

Câu 2 (Mũ và lôgarit).

Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết.

A. 45 năm B. 50 năm C. 41 năm D. 47 năm

Giải

Giả sử số lượng dầu của nước A là 100 đơn vị.

Số dầu sử dụng không đổi mà 100 năm mới hết thì suy ra số dầu nước A dùng 1 năm là 1 đơn vị.

Gọi n là số năm tiêu thụ hết sau khi thực tế mỗi năm tăng 4%, ta có

$$\frac{1 \cdot (1+0,04) \cdot ((1+0,04)^n - 1)}{0,04} = 100 \Rightarrow n = \log_{1,04} 4,846 = 40,23 \text{ .}$$

Vậy sau 41 năm thì số dầu sẽ hết.

Câu 3 (Tích phân và ứng dụng).

Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

- A. $8400m^3$ B. $2200m^3$ C. $6000m^3$ D. $4200m^3$

Giải

Ta có $h(t) = \int (3at^2 + bt)dt = at^3 + \frac{bt^2}{2}$.

$$\text{Khi đó ta có hệ: } \begin{cases} 5^3 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 5^2 = 150 \\ 10^3 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 10^2 = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Khi đó $h(t) = t^3 + t^2$.

Vậy thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 8400m^3$.

Câu 4 (Số phức).

Cho hai số phức u, v thỏa mãn $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = \sqrt{2016}$. Tính $M = |4u + 3v|$.

- A. $\sqrt{2984}$ B. $\sqrt{2884}$ C. $\sqrt{2894}$ D. $\sqrt{24}$

Giải

Ta có $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Đặt $N = |3u - 4v|$.

Khi đó $N^2 = (3u - 4v)(3\bar{u} - 4\bar{v}) = 9|u|^2 + 16|v|^2 - 12(u\bar{v} + v\bar{u})$.

Tương tự ta có $M^2 = 16|u|^2 + 9|v|^2 - 12(u\bar{v} + v\bar{u})$.

Do đó $M^2 + N^2 = 25(|u|^2 + |v|^2) = 5000$.

Suy ra $M^2 = 5000 - N^2 = 5000 - 2016 = 2984 \Rightarrow M = \sqrt{2984}$.

Câu 5 (Thể tích khối đa diện).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=x$, các cạnh còn lại bằng 2. Tìm giá trị của x để thể tích khối chóp lớn nhất

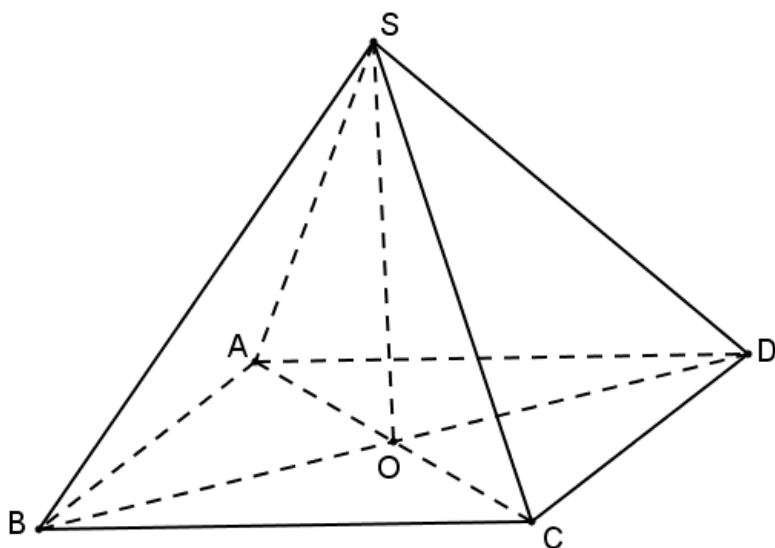
A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{7}$

D. $2\sqrt{6}$

Giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có $OD=OB$ và $SB=SD$ nên $SO \perp BD$, do đó $BO \perp (SAC)$.

Mặt khác $SO^2 = SB^2 - OB^2 = AB^2 - OB^2 = OA^2$ nên $SO = OA = OC$. Do đó tam giác SAC vuông tại S .

Ta có $AC^2 = x^2 + 4 \Rightarrow 4OA^2 = x^2 + 4$.

Do đó $4OB^2 = 12 - x^2 \Rightarrow 0 < x < 2\sqrt{3}$.

Và $16S_{SOA}^2 = x^2(4OA^2 - x^2) = 4x^2$.

Để $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi V_{SOAB} đạt giá trị lớn nhất.

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x^2(12 - x^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Suy ra $x^2 = 12 - x^2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$.

Câu 6 (Hình tròn xoay).

Cho tam giác ABC có độ dài cạnh huyền 5. Người ta quay tam giác ABC quanh một cạnh góc vuông để sinh ra hình nón. Hỏi thể tích V khối nón sinh ra lớn nhất là bao nhiêu.

A. $V = \frac{250\sqrt{3}\pi}{27}$ B. $V = \frac{25\sqrt{2}\pi}{27}$ C. $V = \frac{20\sqrt{3}\pi}{27}$ D. $V = \frac{250\sqrt{6}\pi}{27}$

Giải

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi(25 - y^2)y = \frac{25}{3}\pi y - \frac{1}{3}\pi y^3$.

Xét hàm số $V = \frac{25}{3}\pi y - \frac{1}{3}\pi y^3$ với $0 < y < 5$.

Ta có $V' = \frac{25}{3}\pi - \pi y^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Khi đó thể tích lớn nhất là $V = \frac{250\sqrt{3}\pi}{27}$.

Câu 7 (Hình học Oxyz).

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3-t \\ z = -2 \end{cases}$. Mặt

phẳng (P): $ax + by + cz + d = 0$ (với $a; b; c; d \in \mathbb{R}$) vuông góc với đường thẳng d_1 và chứa d_1, d_2 đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Tính $a + b + c + d$.

A. -14 B. 1 C. -8 D. -12

Giải

Ta có mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d_1 nên (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$.

Phương trình (P) có dạng (P): $x + 2y - z + d = 0$.

Gọi M là giao điểm của (P) với d_1 và N là giao của (P) với d_2 suy ra $M\left(\frac{2-d}{6}; \frac{2-d}{3}; \frac{10+d}{6}\right)$,
 $N\left(\frac{-4-d}{3}; \frac{-1-d}{3}; -2\right)$.

Ta có $MN^2 = \frac{d^2}{18} + \frac{16d}{9} + \frac{155}{9}$.

Để MN nhỏ nhất thì MN^2 nhỏ nhất, nghĩa là $d = -16$.

Khi đó $a+b+c+d = -14$.

F.

Câu 1. Tìm m để bpt sau có tập nghiệm là $(-\infty; +\infty)$. $(x+1)(x+3) + m > 5\sqrt{x^2 + 4x + 29}$

- A. $m < 26$. B. $m \geq 26$. C. $m \geq -\frac{129}{4}$. D. $m \leq -\frac{129}{4}$.

Hướng dẫn giải:

$$(x+1)(x+3) + m > 5\sqrt{x^2 + 4x + 29} \Leftrightarrow m > -x^2 - 4x - 3 + 5\sqrt{x^2 + 4x + 29} \Leftrightarrow m > -t^2 + 5t + 26$$

$$\text{Với } t = \sqrt{x^2 + 4x + 29}, t = \sqrt{(x+2)^2 + 25} \geq 5$$

BPT $(x+1)(x+3) + m > 5\sqrt{x^2 + 4x + 29}$ có nghiệm là $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[5; +\infty)} f(t)$ với

$$f(t) = -t^2 + 5t + 26$$

Do $f(t) = -t^2 + 5t + 26 = t(5-t) + 26 \leq 26$ với $t \geq 5$ nên $\max_{[5; +\infty)} f(t) = 26$

Đáp án: B

Câu 2. Một người vay ngân hàng 1 tỷ đồng với lãi kép là 12%/năm. Hỏi người đó phải trả ngân hàng hàng tháng bao nhiêu tiền để sau đúng 5 năm người đó trả xong nợ ngân hàng?

- A. 88 848 789 đồng. B. 14 673 315 đồng.
 C. 47 073 472 đồng. D. 111 299 776 đồng.

Hướng dẫn giải:

Gọi A là số tiền người đó vay ngân hàng (đồng), a là số tiền phải trả hàng tháng và $r(\%)$ là lãi suất kép. Ta có:

- Số tiền nợ ngân hàng hàng tháng thứ nhất: $R_1 = A(1+r)$

- Số tiền nợ ngân hàng hàng tháng thứ hai : $R_2 = (A(1+r) - a)(1+r) = A(1+r)^2 - a(1+r)$

- Số tiền nợ ngân hàng hàng tháng thứ ba:

$$R_3 = (A(1+r)^2 - a(1+r) - a)(1+r) = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r)$$

....

- Số tiền nợ ngân hàng hàng tháng thứ n : $R_n = A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - \dots - a(1+r)$

Tháng thứ n trả xong nợ: $R_n = a \Leftrightarrow a = \frac{A \cdot r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

Áp dụng với $A = 1.10^9$ đồng, $r = 0,01$, và $n = 24$, ta có $a = 47073472$

Đáp án: C

Câu 3. Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5m, người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được giá 100 nghìn. Tuy nhiên cần có khoảng trống để dựng chòi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6m sao cho 2 đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền (tính theo đơn vị nghìn và bỏ phần số thập phân).

A. 3722

B. 7445

C. 7446

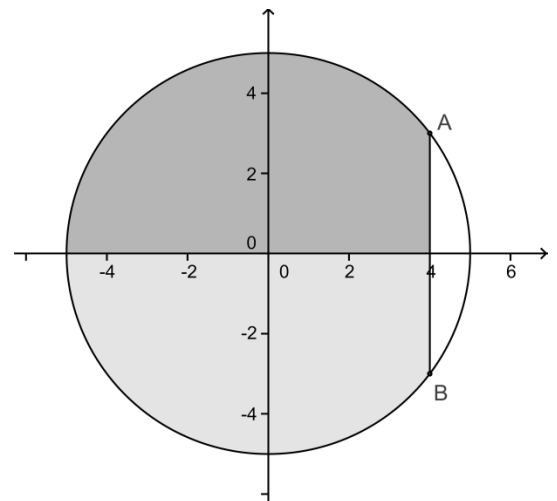
D. 3723

Hướng dẫn giải:

Đặt hệ trục tọa độ 4349582 như hình vẽ.

Phương trình đường tròn của miếng đất sẽ là $x^2 + y^2 = 25$

Diện tích cần tính sẽ bằng 2 lần diện tích phần tô đậm phía trên.



Phần tô đậm được giới hạn bởi đường cong có phương trình là $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục Ox ; $x = -5$; $x = 4$ (trong đó giá trị 4 có được dựa vào bán kính bằng 5 và độ dài dây cung bằng 6)

Vậy diện tích cần tính là $S = 2 \int_{-5}^4 \sqrt{25 - x^2} dx \approx 74,45228...$ Do đó, đáp án là câu **B**

Câu 4. Cho A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức

$Z_A = 2 - i$; $Z_B = 3 + 2i$; $Z_C = -1 + 4i$; $Z_D = -2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

- A. ABCD là hình vuông.
- B. ABCD là hình bình hành.
- C. B và D nhìn đoạn AC dưới góc vuông.
- D. $\triangle ACD = \triangle ABD$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $A(2; -1)$; $B(3; 2)$; $C(-1; 4)$ và $D(-2; 1)$

Do đó: $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$; $\overrightarrow{DC} = (1; 3)$

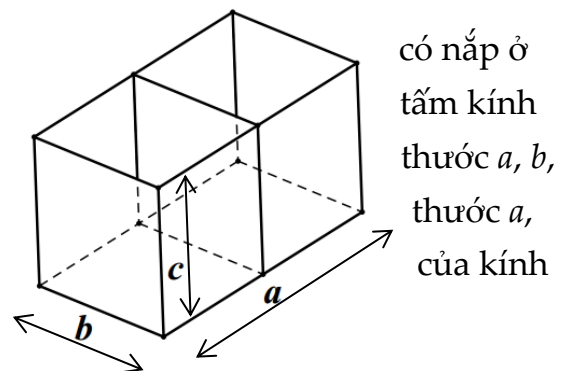
Suy ra, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD là hình bình hành.

Ta lại có, $AB \neq BC, \angle ABC \neq 90^\circ$

Đáp án: B

Câu 5. Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không phía trên với thể tích $1,296 \text{ m}^3$. Người thợ này cắt các ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích b, c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dày không đáng kể.

- A. $a = 3,6\text{m}$; $b = 0,6\text{m}$; $c = 0,6\text{m}$
- B. $a = 2,4\text{m}$; $b = 0,9\text{m}$; $c = 0,6\text{m}$
- C. $a = 1,8\text{m}$; $b = 1,2\text{m}$; $c = 0,6\text{m}$



có nắp ở
tấm kính
thước a, b ,
thước a ,
của kính

D. $a = 1,2m; b = 1,2m; c = 0,9m$

Hướng dẫn giải:

Thể tích bể cá là: $V = abc = 1,296$

Diện tích tổng các miếng kính là $S = ab + 2ac + 3bc$ (kể cả miếng ở giữa)

$$\text{Ta có: } \frac{S}{abc} = \frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} \geq \underbrace{3\sqrt[3]{\frac{1}{c} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{a}}}_{\text{Cauchy cho 3 số } \frac{1}{c}, \frac{2}{b}, \frac{3}{a}} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{1,296}}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{1}{c} = \frac{2}{b} = \frac{3}{a} \\ abc = 1,296 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,8 \\ b = 1,2 \\ c = 0,6 \end{cases}.$$

Đáp án: C

Câu 6. Một phễu đựng kem hình nón bằng giấy bạc có thể tích 12π (cm³) và chiều cao là 4cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần, nhưng chiều cao không thay đổi, diện tích miếng giấy bạc cần thêm là.

A. $(12\sqrt{13} - 15)\pi$ (cm²).

B. $12\pi\sqrt{13}$ (cm²).

C. $\frac{12\sqrt{13}}{15}$ (cm²).

D. $(12\sqrt{13} + 15)\pi$ (cm²).

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đường tròn đáy hình nón lúc đầu; h_1 là chiều cao của hình nón lúc đầu.

Gọi R_2 là bán kính đường tròn đáy hình nón sau khi tăng thể tích; h_2 là chiều cao của hình nón sau khi tăng thể tích.

$$\text{Ta có: } V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{3}\pi R_1^2 \cdot 4 \Rightarrow R_1 = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \\ V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2 \\ h_2 = h_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = 4 \Rightarrow R_2 = 2R_1 = 6$$

Diện tích xung quanh hình nón lúc đầu: $S_{xp1} = \pi R_1 l_1 = \pi 3\sqrt{16+9} = 15\pi (cm^2)$

Diện tích xung quanh hình nón sau khi tăng thể tích: $S_{xp2} = \pi R_2 l_2 = \pi 6\sqrt{16+36} = 12\pi\sqrt{13} (cm^2)$

Diện tích phần giấy bạc cần tăng thêm là: $S = (12\sqrt{13} - 15)\pi (cm^2)$

Đáp án: A

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$

và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 2)$.
- B. (P) qua điểm $A(0; 2; 0)$.
- C. (P) song song với mặt phẳng $(Q): 7x - y + 5z - 3 = 0$.
- D. (P) cắt d_2 tại điểm $B(2; -1; 4)$.

Hướng dẫn giải:

d_1 qua $M(1; -2; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 2; -1)$. Vì $d_1 \subset (P)$ nên $M \in (P)$.

Pt mặt phẳng (P) có dạng: $A(x-1) + B(y+2) + Cz = 0 (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Ta có: $d_1 \subset (P) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow C = A + 2B$.

$$\text{Gọi } \alpha = ((P), d_2) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|4A + 3B|}{3\sqrt{2A^2 + 4AB + 5B^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4A + 3B)^2}{2A^2 + 4AB + 5B^2}}.$$

$$\text{TH1: Với } B = 0 \text{ thì } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{TH2: Với } B \neq 0. \text{ Đặt } t = \frac{A}{B}, \text{ ta được: } \sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(4t + 3)^2}{2t^2 + 4t + 5}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max f(x) = \frac{25}{7}$ khi $t = -7$ khi

$$\frac{A}{B} = -7.$$

$$\text{Khi đó } \sin \alpha = f(-7) = \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

So sánh TH1 và TH2 $\Rightarrow \alpha$ lớn nhất với $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ khi $\frac{A}{B} = -7$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $7x - y + 5z - 9 = 0$.

Đáp án: B

G.

Câu 1(KSHS): Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300km. Vận tốc của dòng nước là 6km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức.

$$E(v) = cv^3t$$

Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. 6km/h B. 9km/h A. 12km/h A. 15km/h

Giải:

Vận tốc của cá bơi khi ngược dòng là: $v - 6$ (km/ h).

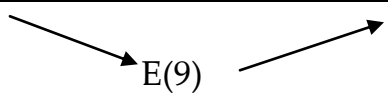
Thời gian để cá bơi vượt khoảng cách 300km là $t = \frac{300}{v-6}$

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là:

$$E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v-6} = 300c \cdot \frac{v^3}{v-6} (\text{jun}), v > 6$$

$$E'(v) = 600cv^2 \frac{v-9}{(v-6)^2}$$

$$\Leftrightarrow E'(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 (\text{loại}) \\ v = 9 \end{cases}$$

V	6	9	$+\infty$
$E'(v)$	-		+
$E(v)$			

Chọn đáp án B

Câu 2(Mũ- loga): Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm ?

$$\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$$

A. 1 nghiệm
nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

4. Vô

Lời giải: $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ (2) Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (16-x^2) \\ \Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2 (16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$$

+ Với $-1 < x < 4$ ta có phương trình $x^2 + 4x - 12 = 0$ (3); (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \text{ (loại)} \end{cases}$

+ Với $-4 < x < -1$ ta có phương trình $x^2 - 4x - 20 = 0$ (4); (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{24} \\ x = 2 + \sqrt{24} \end{cases}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = 2(1 - \sqrt{6})$, chọn B

Câu 3(Tích phân) Một người đứng từ sân thượng một tòa nhà cao 262m, ném một quả bi sắt theo phương thẳng đứng hướng xuống (bỏ qua ma sát) với vận tốc 20m/s. Hỏi sau 5s thì quả bi sắt cách mặt đất một đoạn Δd bao nhiêu mét? (Cho gia tốc trọng trường $a = 10(m/s^2)$)

- A. 35 m B. 36 m C. 37 m D. 40 m

Lời giải: Quả bi sắt chịu tác dụng của trọng lực hướng xuống nên có gia tốc trọng trường $a = 10(m/s^2)$

Ta có biểu thức v theo thời gian t có gia tốc a là:

$$v = \int a dt = \int 10 dt = 10t + C$$

Ở đây, với:

$$t = 0, v = 20m/s$$

$$\Rightarrow C = 20$$

Vậy ta biểu diễn biểu thức vận tốc có dạng:

$$v = 10t + 20(m/s)$$

Lấy nguyên hàm biểu thức vận tốc, ta sẽ được biểu thức quãng đường:

$$s = \int v dt$$

$$= \int (10t + 20) dt$$

$$= 5t^2 + 20t + K$$

Theo đề bài, ta được khi $t = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow K = 0$

Vậy biểu thức tọa độ quãng đường là:

$$s = 5t^2 + 20t(m/s^2)$$

Khi $t = 5s$, ta sẽ được $s = 225(m)$

Vậy quả bi cách mặt đất $\Delta d = 262 - 225 = 37(m)$.

Câu 4(Số phức). Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- A. 20 B. $\sqrt{20}$ C. $\sqrt{7}$ D. 7

Giải: Chọn B

Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

$$w = 3 - 2i + (2 - i)z$$

$$\Rightarrow x + yi = 3 - 2i + (2 - i)z$$

$$\Rightarrow z = \frac{x - 3 + (y + 2)i}{2 - i} = \frac{2x - y - 8}{5} + \frac{x + 2y + 1}{5}i$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2x - y - 8}{5}\right)^2 + \left(\frac{x + 2y + 1}{5}\right)^2} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$$

Bán kính của đường tròn là $r = \sqrt{20}$

Câu 5(Thể tích khối đa diện): Cho khối chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông ở A, $AB = a$, $AC = 2a$. Đỉnh S cách đều A, B, C; mặt bên (SAB) hợp với mặt đáy (ABC) góc 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC.

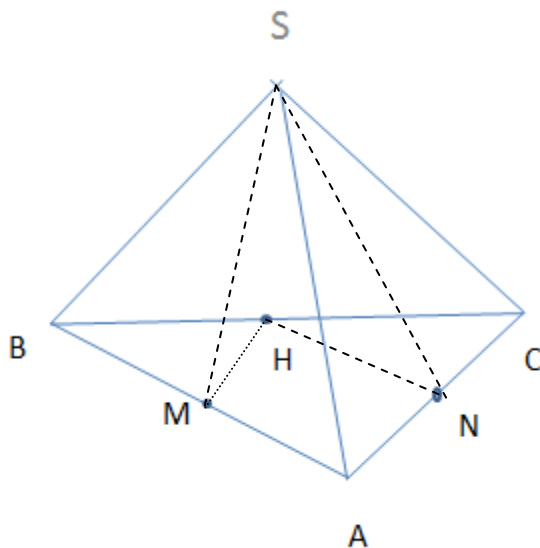
A. $V = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$

B. $V = a^3$

C. $V = \frac{1}{3} a^3$

D. $V = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$

Lời giải:



Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của AB, AC, và BC

Ta có tam giác SAB cân suy ra $SM \perp AB$

$$HM // AC \Rightarrow HM \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMH) \Rightarrow AB \perp SH \quad (1)$$

$$\text{Và } [(SAB), (ABC)] = SMH = 60^\circ$$

$$\text{Tương tự } AC \perp (SNH) \Rightarrow AC \perp SH \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

$$\text{Ta có } SH = MH. \tan 60^\circ = \frac{AC}{2} \sqrt{3} = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = a^2 \quad \text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \text{ (đvdt)} \quad , \text{ CHỌN A}$$

Câu 6(THề tích khối tròn xoay): Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27cm^3 . Với chiều cao h và bán kính đáy là r . Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

$$\text{A. } r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}} \quad \text{B. } r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}} \quad \text{C. } r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}} \quad \text{D. } r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$$

$$\text{BG: Ta có: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{3V}{\pi r^2} \Rightarrow \text{độ dài đường sinh là:}$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{81}{\pi r^2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2}$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón là: } S_{xq} = \pi r l = \pi r \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2} = \pi \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^2} + r^4}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy ta được giá trị nhỏ nhất là khi } r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}.$$

Câu 7(Tọa độ KG). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1)$, $B(0;3;1)$ và mặt phẳng $P: x + y - z + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $|2\vec{MA} - \vec{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-4; -1; 0)$. B. $M(-1; -4; 0)$. C. $M(4; 1; 0)$. D. $M(1; -4; 0)$.

Lời giải : Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$, suy ra $I(4; -1; -3)$.

Ta có $2\vec{MA} - \vec{MB} = 2\vec{MI} + 2\vec{IA} - \vec{MI} - \vec{IB} = \vec{MI}$. Suy ra $|2\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{MI}| = MI$.

Do đó $|2\vec{MA} - \vec{MB}|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng P . Đường thẳng đi qua I và vuông góc với P có là $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1}$.

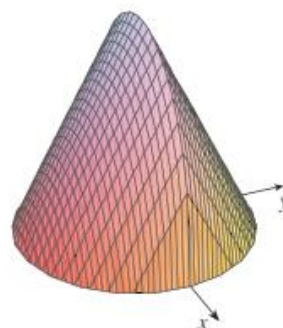
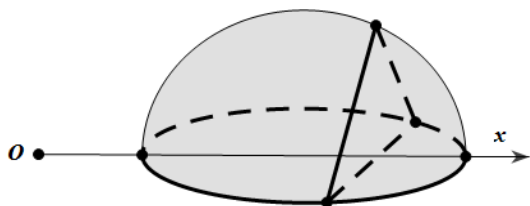
Tọa độ hình chiếu M của I trên P thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1} \\ x+y-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow M(1; -4; 0) \text{ . Chọn D.}$$

G.

Câu 1

Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đây là hình tròn bán kính 4 cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V = \frac{256}{3}$.

B. $V = \frac{32}{3}$.

C. $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{32\sqrt{3}}{3}$.

Đáp án:

Câu 3. Tìm số thực $m = a - b\sqrt{20}$ (a, b là các số nguyên khác 0) để phương trình

$2z^2 + 2(m-1)z + (2m+1) = 0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$. Tìm a .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn

$$\Delta' = m^2 - 6m - 1 \in \mathbb{R}$$

TH1: $\Delta' > 0$ hay $m \in (-\infty; 3 - \sqrt{10}) \cup (3 + \sqrt{10}; +\infty)$

Khi đó $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1 z_2| = 10$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 - (2m+1) + |2m+1| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \geq 0 \\ (1-m)^2 = 10 \\ 2m+1 < 0 \\ m^2 - 6m - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{10} \\ m = 3 - \sqrt{20} \end{cases} \text{ (loại)}$$

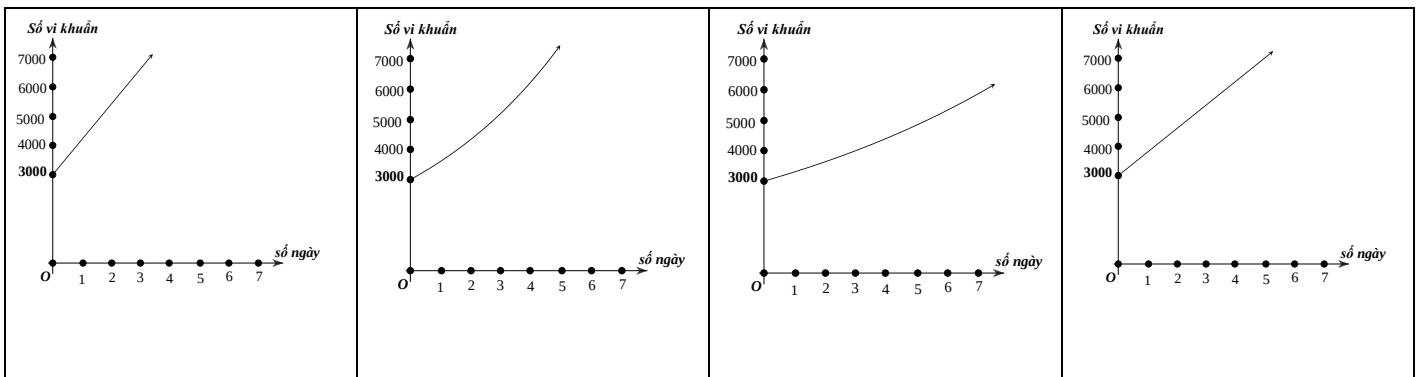
TH2: $\Delta' < 0$ hay $m \in (3 - \sqrt{10}; 3 + \sqrt{10})$

$$\text{Khi đó: } |z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left| \frac{1-m+i\sqrt{-(m^2-6m-1)}}{2} \right| + \left| \frac{1-m-i\sqrt{-(m^2-6m-1)}}{2} \right| = \sqrt{10}$$

$$\text{Hay } \sqrt{(1-m)^2 + (-m^2 + 6m + 1)} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = 3 - \sqrt{20}$

Câu 4. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 3000 con, và tăng 20% một ngày. Đồ thị nào sau đây mô tả hàm số lượng vi khuẩn sau t ngày?



A	B	C	D
---	---	---	---

Hướng dẫn giải.

Công thức số vi khuẩn: $Q(x) = 3000.1,2^x$

Hàm mũ nên loại A, D.

Xét $Q(5) = 3000.(1,2)^5 = 7460$ nên chọn B.

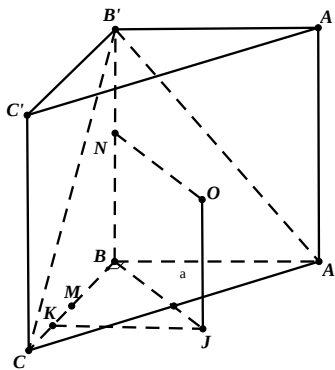
Câu 5. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân $AB=BC=a$. Mặt phẳng $(AB'C)$ tạo với $(BCC'B')$ một góc α với $\tan \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $B'ACM$.

A. $\frac{3\sqrt{10}a}{8}$

B. $\frac{3\sqrt{10}a}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{13}a}{8}$

D. $\frac{\sqrt{13}a}{2}$



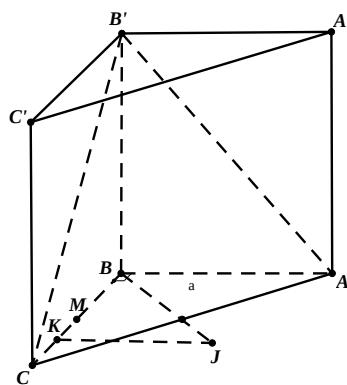
Trục không có tính chất đặc biệt, ta sử dụng phương pháp 4 để giải

$$\begin{aligned} R^2 &= B'O^2 = NO^2 + B'N^2 \\ &= BJ^2 + (\overline{BB'} - \overline{JO})^2 \\ &= OM^2 = OJ^2 + JM^2 \end{aligned}$$

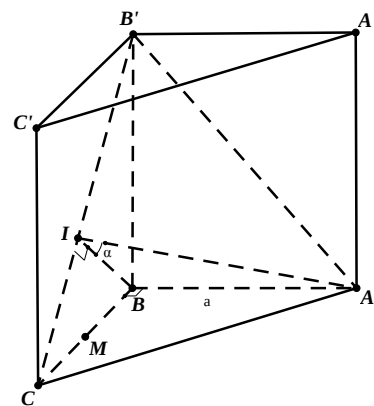
Chú ý $CBJ = 45^\circ$

Giải phương trình ta tìm

$$\text{được } OJ = \frac{5\sqrt{2}a}{8}$$



Xác định tâm đáy: giao của hai đường thẳng trung trực MC và BI.



Dựng góc: chú ý BA vuông góc với giao tuyến CB'

Từ tam giác vuông BIA và góc α , tính được BI. Từ BI sử dụng

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{B'B^2} \text{ tính được } B'B = a\sqrt{2}.$$

$R = \frac{3\sqrt{10}a}{8}$		
-----------------------------	--	--

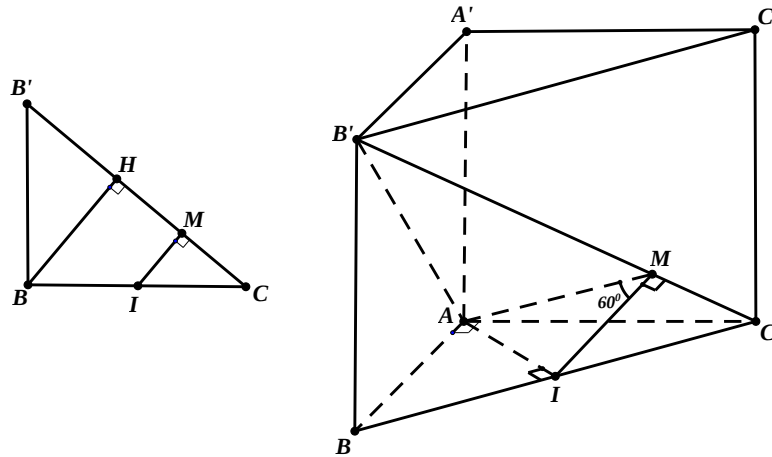
Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC=2a$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 60° . Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $a^3\sqrt{2}$

B. $2a^3$

C. $a^3\sqrt{6}$

D. $\sqrt{3}a^3$



Dựng góc:

Từ A kẻ $AI \perp BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC

$$AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp B'C \quad (1)$$

$$\text{Từ } I \text{ kẻ } IM \perp B'C \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow B'C \perp (IAM)$$

Vậy góc giữa $(AB'C)$ và $(B'CB)$ là $\angle AMI = 60^\circ$

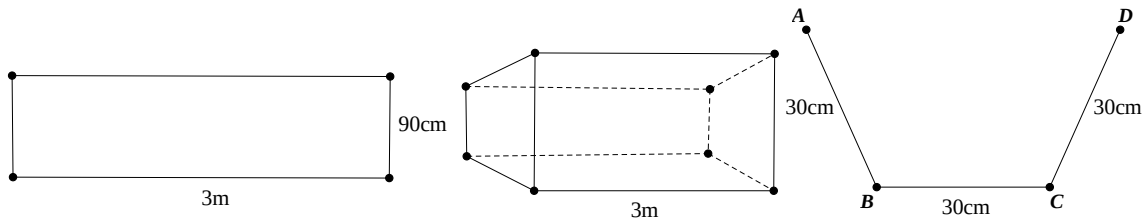
$$\text{Ta có } AI = \frac{1}{2} BC = a; IM = \frac{AI}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$BH = 2IM = \frac{2a}{\sqrt{3}}; \frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{BH^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{3}{4a^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2a^2}.$$

$$\text{Suy ra } BB' = a\sqrt{2}; S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2$$

$$V_{ABC A'B'C'} = a\sqrt{2} \cdot a^2 = a^3\sqrt{2}$$

Câu 7. Từ một tấm tôn có kích thước 90cmx3m người ta làm một máng xối nước trong đó mặt cắt là hình thang $ABCD$ có hình dưới. Tính thể tích lớn nhất của máng xối.



- A. $40500\sqrt{3}cm^3$ B. $40500\sqrt{2}cm^3$ C. $40500\sqrt{6}cm^3$ D. $40500\sqrt{5}cm^3$

Thể tích máng xối: $V = S_{ABCD} \cdot 300 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Vậy thể tích lớn nhất khi diện tích hình thang là lớn nhất.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CE$$

$$CE = CD \sin \theta = 30 \cdot \sin \theta$$

$$AD = BC + 2ED = 30 + 60 \cos \theta$$

$$S_{ABCD} = 90 \sin \theta + \frac{90}{2} \sin 2\theta$$

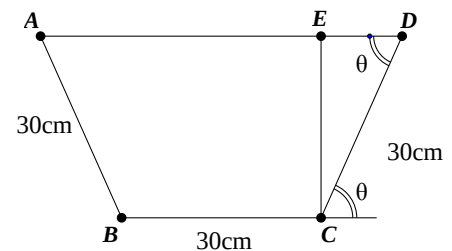
$$\text{Đặt } f(\theta) = 90 \sin \theta + \frac{90}{2} \sin 2\theta, \theta \in [0; \pi]$$

$$f'(\theta) = 90 \cos \theta + \frac{90}{2} \cdot 2 \cos 2\theta$$

$$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos \theta + \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \cos \theta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$f(0) = f(\pi) = 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 135\sqrt{3}. \text{ Vậy GTLN của diện tích } ABCD \text{ là } 135\sqrt{3}cm^2.$$

Vậy thể tích máng xối lớn nhất bằng $40500\sqrt{3}cm^3$ khi ta cạnh CD tạo với BC góc 60° .



H.

Câu 1. KSHS

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

- A. 12 B. -4 C. -3 D. 1

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = (x+1)(kx + 2k + 1); (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \quad (1); \quad (x \neq -1)$$

d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(-1)^2 + (3k-1)(-1) + 2k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Khi đó: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1), B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

$$\text{Theo định lý Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-3k+1}{k} \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } d(A; Ox) = d(B; Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases}.$$

Do hai điểm A, B phân biệt nên ta loại nghiệm $x_1 = x_2$.

$$\text{Do đó } k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

Đáp án C.

Câu 2. Logarit

Cho phương trình $(2 - m^2)5^x - 3 \cdot 3^x + m^2(15x - 5) = 0$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

- A. $\mathbb{R}$ B. $(-2; 3)$ C. $(0; +\infty)$ D. $(-\infty; 1)$

Giải

Đặt $f(x) = (2 - m^2)5^x - 3 \cdot 3^x + m^2(15x - 5)$. Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên f cũng liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $f(0) = (2 - m^2)5^0 - 3 \cdot 3^0 + m^2(15 \cdot 0 - 5) = -6m^2 - 1 < 0, \forall m$.

$$f(2) = (2 - m^2)5^2 - 3 \cdot 3^2 + m^2(15 \cdot 2 - 5) = 13 > 0.$$

Khi đó $f(0) \cdot f(2) < 0, \forall m$.

Vậy $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; 2)$ với mọi giá trị thực của m .

Đáp án A.

Câu 3. HKG

Đáy của hình chóp $SABC$ là tam giác cân ABC có $AB = AC = a$ và $B = C = \alpha$. Các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc β . Tính thể tích hình chóp $SABC$.

- A. $V = \frac{a^3 \tan \beta}{6}$ B. $V = \frac{a^3 \cos \alpha \tan \beta}{6}$ C. $V = \frac{a^3 \cos \alpha \tan \beta}{3}$ D. $V = \frac{a^3 \sin 2\alpha}{6}$

Giải

Kẻ $SO \perp (ABC) \Rightarrow OA$ là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC)

Do đó $(SA; (ABC)) = \angle SAO = \beta$. Tương tự ta cũng có $\angle SBO = \angle SCO = \beta$.

Nên $\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO \Rightarrow AO = BO = CO$.

Theo định lí sin ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{a}{\sin \alpha} = 2OA \Rightarrow OA = \frac{a}{2 \sin \alpha}$.

$$\text{Nên } SO = OA \cdot \tan \beta = \frac{a \tan \beta}{2 \sin \alpha}.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} a^2 \sin(180 - 2\alpha) = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{6} \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2} \cdot \frac{a \tan \beta}{2 \sin \alpha} = \frac{a^3 \cos \alpha \tan \beta}{6}.$$

Vậy đáp án B.

Câu 4. Tròn xoay

Cho hình nón có bán kính đáy là a , đường sinh tạo với mặt phẳng đáy góc α . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình nón.

$$\text{A. } V = \frac{3\pi a^3}{4 \sin^3 2\alpha} \quad \text{B. } V = \frac{4\pi a^3}{3 \sin^3 3\alpha} \quad \text{C. } V = \frac{4\pi a^3}{3 \sin^3 2\alpha} \quad \text{D. } V = \frac{4\pi a^3}{3 \sin^3 \alpha}$$

Giải

Nếu mặt phẳng (P) qua trục của hình nón thì (P) cắt hình nón theo tam giác cân SMN , (P) cắt mặt cầu ngoại tiếp hình nón theo đường tròn có bán kính là R . Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón, O là tâm đường tròn đáy của hình nón.

$$\text{Ta có } S_{\triangle SMN} = MO \cdot SO = a \cdot a \cdot \tan \alpha = a^2 \tan \alpha.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle SMN} = \frac{SM \cdot SN \cdot MN}{4R} = \frac{SM^2 \cdot 2a}{4R} = \frac{\left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^2 \cdot 2a}{4R} = \frac{a^3}{2R \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Do đó } \frac{a^3}{2R \cos^2 \alpha} = a^2 \tan \alpha \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cos^2 \alpha \tan \alpha} = \frac{a}{\sin 2\alpha}.$$

R cũng là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{a^3}{\sin^3 2\alpha}.$$

Đáp án C.

Câu 5.

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$, cắt

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$, sao cho $\cos(d; \Delta_2)$ là nhỏ nhất, biết phương trình của đường thẳng

$\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình đường thẳng d là?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}$

C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

Giải

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1+2t; 2+t; -2-t)$.

d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \overrightarrow{AM} = (2t+2; t+2; -1-t)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 2; 2)$.

$$\cos(d; \Delta_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}$, ta suy ra được $\min f(t) = f(0) = 0$.

Do đó $\min[\cos(d; \Delta_2)] = 0$ khi $t = 0$. Nên $\overrightarrow{AM} = (2; 2; -1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Vập đáp án A.

Câu 6. Tích Phân

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1+a \cos^2 x}}$, biết $F(0) = 0$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)?$$

A. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

B. $\sqrt{5} - 1$

C. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

D. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1+a \cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\tan^2 x + 1 + a}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 x + 1 + a}} d\sqrt{\tan^2 x + 1 + a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{4} + 1 + a} - \sqrt{\tan^2 0 + 1 + a} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+2} = \sqrt{a+1} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a+2 = a+1 + 2\sqrt{a+1}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3 - \sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{a+1} \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx = \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{3} + 2} - \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{4} + 2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Đáp án A.

Câu 7. Số Phức

Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai.

A. Trong ba số đó có hai số đối nhau.

B. Trong ba số đó phải có một số bằng 1.

C. Trong ba số đó có nhiều nhất hai số bằng 1.

D. Tích của ba số đó luôn bằng 1.

Giải

Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Leftrightarrow 1 - z_1 = z_2 + z_3$.

Nếu $1 - z_1 = 0$ thì $z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_2 = -z_3$.

Nếu $1 - z_1 \neq 0$ thì điểm P biểu diễn số phức $1 - z_1 = z_2 + z_3$ không trùng với gốc tọa độ O.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $-z_1$ và A là điểm biểu diễn của số 1.

Khi đó ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}$ (do P là điểm biểu diễn của số $1 + (-z_1)$) nên OAPM là hình bình hành. Mà $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên các điểm biểu diễn cho ba số z_1, z_2, z_3 đều nằm trên đường tròn đơn vị. Ta cũng có $OA = OM = 1$ nên OAPM là hình thoi. Khi đó ta thấy M, A là giao điểm của đường trung trực đoạn OP với đường tròn đơn vị.

Tương tự do P cũng là điểm biểu diễn của $z_2 + z_3$, nếu M' và A' là hai điểm biểu diễn của số z_2, z_3 thì ta cũng có M', A' là giao điểm đường trung trực của OP và đường tròn đơn vị.

Vậy $M' \equiv M, A' \equiv A$ hoặc ngược lại. Nghĩa là $z_2 = 1, z_3 = -z_1$ hoặc $z_3 = 1, z_2 = -z_1$.

Do đó A, B là mệnh đề đúng.

C đúng là hiển nhiên, vì nếu ba số đều 1 một thì tổng bằng 3.

D sai vì với $z_1 = 1, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ thỏa hai tính chất trên của đề bài nhưng

$$z_1 z_2 z_3 \neq 1.$$

Đáp án D.

I.

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1 \leq m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$

B. $-1 < m < 0$ hoặc $m > 1$

C. $1 > m > 0$ hoặc $m < -1$

D. $1 \geq m \geq 0$ hoặc $m \leq -1$

Đáp án B

Giải: gọi hai điểm đối xứng nhau qua O là $A(x_0, y_0), B(-x_0, -y_0)$

Khi đó ta có $y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 + 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2$ và $-y_0 = -x_0^3 - 3mx_0^2 - 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2$

Từ đó suy ra: $-6mx_0^2 + 2 - 2m^2 = 0(*)$

Nếu $x_0 = 0$ thì $2 - 2m^2 = 0$ suy ra $y_0 = 1 - m^2 = 0$. Vậy $A \equiv B \equiv O$

Do đó: đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } (*) \text{ có nghiệm khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2 - 2m^2 \neq 0 \\ \Delta' = 6m(2 - 2m^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0 \text{ hay } m > 1$$

Câu 2: Cho hình nón có chiều cao h , đường tròn đáy bán kính R . Một mặt phẳng (P) song song với đáy cách đáy một khoảng bằng d cắt hình nón theo đường tròn (L). Dựng hình trụ có một đáy là (L), đáy còn lại thuộc đáy của hình nón và trục trùng với trục hình nón. Tìm d để thể tích hình trụ là lớn nhất.

A. $d = \frac{h}{3}$

B. $d = \frac{h}{2}$

C. $d = \frac{h}{6}$

D. $d = \frac{h}{4}$

Đáp án: A

Giải: Gọi r là bán kính của (L).

Ta có $\frac{r}{R} = \frac{h-d}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-d)$

$$\Rightarrow V = \pi \frac{R^2}{h^2} (h-d)^2 \cdot d = \pi \frac{R^2}{2h^2} (h-d)(h-d) \cdot 2d \leq \pi \frac{R^2}{2h^2} \left(\frac{(h-d) + (h-d) + 2d}{3} \right)^3 = \frac{4\pi R^2 h}{27}$$

Dấu bằng xảy ra khi $h-d = 2d \Leftrightarrow d = \frac{h}{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang vuông tại A và B. $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là trung điểm của SB và SD. Tính V hình chóp biết rằng (MAC) vuông góc với (NAC).

- A. $\frac{3a^3}{2}$
- B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$
- C. $\frac{a^3}{2}$
- D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Đáp án C

Giải: Gọi I, H lần lượt là trung điểm AD và AB, O là giao điểm của AC và BI, vẽ $HK \parallel BI$ (K thuộc AC)

Ta có ABCI là hình vuông nên AC vuông góc với BI

Mà AC vuông góc NI (do $NI \parallel SA$)

Suy ra

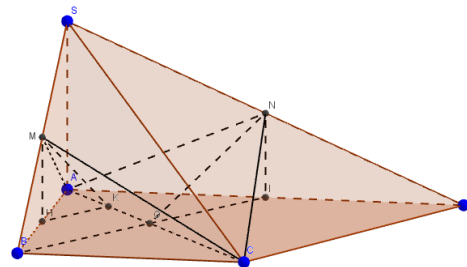
$$AC \perp (NIO) \Rightarrow \angle NOI = ((NAC), (ACD)) = \alpha$$

Tương tự ta có $\angle MKH = ((MAC), (ACB)) = \beta$

Theo đề ta có

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha = \cot \beta \Rightarrow \frac{NI}{NO} = \frac{HK}{MH}$$

$$\text{Suy ra } NI \cdot MH = OI \cdot HK \Rightarrow \frac{SA}{2} \cdot \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SA = a$$



Mà $S_{ABCD} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{2}$

Câu 4: Phương trình $\log_3(x^2 + x + 1) = x(2 - x) + \log_3 x$ có bao nhiêu nghiệm

- A. 1 nghiệm
- B. 2 nghiệm
- C. 3 nghiệm
- D. Vô nghiệm

Đáp án A

Giải: điều kiện $x > 0$

Phương trình tương đương với $\log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) = 2x - x^2$

Ta có $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2 \leq 1$

Và $\log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) = \log_3\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = \log_3\left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 3\right) \geq \log_3 3 = 1$

Do đó $\log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) = 2x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Câu 5: Tính $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$

- A. $\frac{\pi \ln 2}{8}$
- B. $\frac{\pi \ln 2}{4}$
- C. $\frac{\ln 2}{8}$
- D. $\frac{\ln 2}{4}$

Đáp án: A

Giải: Đặt $t = \frac{\pi}{4} - x$. Khi đó:

$$I = - \int_{\pi/4}^0 \ln \left(1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - t \right) \right) dt = \int_0^{\pi/4} \ln \left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} \right) dt = \int_0^{\pi/4} \ln \left(\frac{2}{1 + \tan t} \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln(2) dt - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt = \frac{\pi \ln 2}{4} - I$$

Do đó $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$

Câu 6: Đường thẳng Δ song song với $d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$ và cắt cả hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$. Phương trình nào không phải đường thẳng Δ

A. $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1}$

B. $\Delta: \frac{x-3}{3} = \frac{y-\frac{7}{3}}{-4} = \frac{z-\frac{2}{3}}{1}$

C. $\Delta: \frac{x+9}{3} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z+2}{1}$

D. $\Delta: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{1}$

Đáp án: A

Giải: Gọi M, N là giao điểm của Δ và d_1, d_2 .

Khi đó M, N thuộc d_1, d_2 nên $\begin{cases} x_M = 1+3t \\ y_M = -1+t \\ z_M = 2+2t \end{cases}, \begin{cases} x_N = -2+2t' \\ y_N = 3+4t' \\ z_N = t' \end{cases}$.

Vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{MN} = (-3+2t'-3t; 4+4t'-t; -2+t'-2t)$

Δ song song với $d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$ nên $\frac{-3+2t'-3t}{3} = \frac{4+4t'-t}{-4} = \frac{-2+t'-2t}{1}$

Giải hệ ta được $t' = -1; t = -\frac{4}{3}$. Vậy $N(-4; -1; -1), M\left(-3; -\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Vậy $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1}$

Câu 7: Điểm M biểu diễn số phức $z \neq 0$ và điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1}{z}$. Nếu điểm M di động trên đường tròn tâm A(-1;1) bán kính $R = \sqrt{2}$ thì M' di động trên đường nào?

- A. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$
- B. $2x + 2y + 1 = 0$
- C. $2x - 2y + 1 = 0$
- D. $2x + 2y - 1 = 0$

Đáp án: C

Giải: Ta có $z' = \frac{1}{z} = \frac{z}{|z|^2}$. Do đó
$$\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

M di động trên đường tròn tâm A(-1;1) bán kính $R = \sqrt{2}$ nên

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-1)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2 + y^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

J.

Chương I. Ứng dụng đạo hàm

Một người thợ xây cần xây một bể chứa $108 m^3$ nước, có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông và không có nắp. Hỏi chiều dài, chiều rộng và chiều cao của lòng bể bằng bao nhiêu để số viên gạch dùng xây bể là ít nhất? Biết thành bể và đáy bể đều được xây bằng gạch, độ dày của thành bể và đáy là như nhau, các viên gạch có kích thước như nhau và số viên gạch trên một đơn vị diện tích là bằng nhau.

- A. 6; 6; 3.
- B. $2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 9$.
- C. $3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 6$
- D. $3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; 4$

Gọi $x(m)$ là cạnh của đáy bể, $y(m)$ là chiều cao bể, $x, y > 0$

Ta có: $x^2y = 108 \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}$

Diện tích xây dựng: $S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{432}{x}$

$S' = 2x - \frac{432}{x^2}; S' = 0 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow y = 3$

Chương II. Phương trình mũ, logarit

Cường độ một trận động đất M (Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

A. 8,9

B. 33,2

C. 2,075

D. 11

GIẢI

$$M = \log A - \log A_0 = \log \frac{A}{A_0}$$

Trận động đất ở San Francisco: $M_1 = 8,3 = \log \frac{A_1}{A_0} \quad (1)$

ở Nam Mỹ: $M_2 = \log \frac{A_2}{A_0} \quad (2)$

Biên độ ở Nam Mỹ gấp 4 lần ở San Francisco nên $A_2 = 4A_1 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 4$

Lấy (2) - (1) ta được:

$$M_2 - 8,3 = \log \frac{A_2}{A_0} - \log \frac{A_1}{A_0} = \log \frac{A_2}{A_1} = \log 4 \Rightarrow M_2 = \log 4 + 8,3 \approx 8,9$$

Chương III. Nguyên hàm, tích phân

Một chiếc xe đang chạy với vận tốc 100Km/h thì đạp phanh dừng lại, vận tốc của xe giảm dần theo công thức $v(t) = -5000t + 100$ (Km/h) cho đến khi dừng lại. Hỏi xe chạy thêm được bao nhiêu *met* thì dừng lại.

A. 25

B. 1

C. 10^3

D. 10^{-3}

$$\text{Xe dừng lại nên } v = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{50}$$

$$\text{Phương trình quãng đường } S(t) = \int v(t) dt = -2500t^2 + 100t$$

$$\text{Quãng đường xe đi được } S = -2500 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 + 100 \cdot \frac{1}{50} = 1\text{Km} = 10^3\text{m}$$

Chương IV. Số phức

Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn từng điều kiện sau: $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$.

A. $3x + 4y - \frac{25}{2} = 0$

B. $3x + 4y - 25 = 0$

C. $3x - 4y - \frac{25}{2} = 0$

D. $3x - 4y - 25 = 0$

$$\text{Vì } |z| = |\bar{z}| \text{ nên } |\bar{z} - 3 + 4i| = |\overline{\bar{z} - 3 + 4i}| = |z - 3 - 4i|,$$

$$\text{suy ra } |z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |z| = |z - 3 - 4i| \Leftrightarrow \left| \frac{z - 3 - 4i}{z} \right| = 1$$

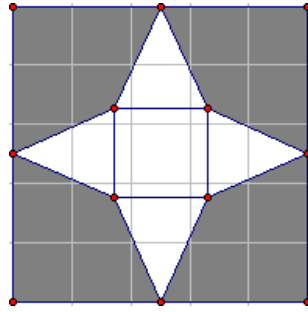
Tập hợp điểm có tọa vị z thỏa mãn $\left| \frac{z - 3 - 4i}{z} \right| = 1$ là đường trung trực của đoạn thẳng OA ,

với $O(0)$ và $A(3 + 4i)$. Đường trung trực này đi qua trung điểm $K\left(\frac{3}{2} + 2i\right)$ của đoạn thẳng OA và nhận vectơ $\overrightarrow{OA}(3 + 4i)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là:

$$3\left(x - \frac{3}{2}\right) + 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - \frac{25}{2} = 0.$$

Hình học – Chương I. Thể tích khối đa diện

Từ một miếng bìa hình vuông có cạnh bằng 5, người ta cắt 4 góc bìa 4 tứ giác bằng nhau và gập lại phần còn lại của tấm bìa để được một khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (xem hình). Nếu chiều cao khối chóp tứ giác đều này bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$ thì x bằng:



- A. $x=1$. B. $x=2$. C. $x=3$. D. $x=4$

Hình học – Chương II. Khối tròn xoay

Một chiếc chén hình trụ có chiều cao bằng đường kính quả bóng bàn. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

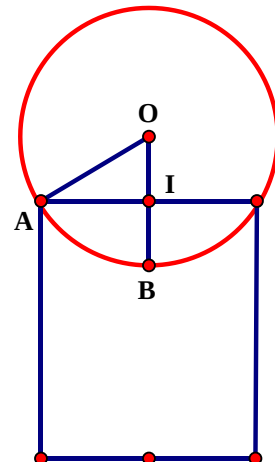
- A. $9V_1 = 8V_2$ B. $3V_1 = 2V_2$ C. $16V_1 = 9V_2$ D. $27V_1 = 8V_2$

Giải: Gọi h là đường cao của hình trụ, r là bán kính của quả bóng, R là bán kính của chén hình trụ

$$\Rightarrow h=2r \Rightarrow r = OA = OB = \frac{h}{2}$$

Theo giả thiết: $IB = \frac{h}{4} \Rightarrow OI = \frac{h}{4}$ (vì phần bên ngoài $= \frac{3}{4}h$)

bán kính đáy của chén hình trụ là $R = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \frac{h\sqrt{3}}{4}$



$$\text{Tỉ số thể tích là } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi R^2 h} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3}{\pi \left(\frac{h\sqrt{3}}{4}\right)^2 h} = \frac{8}{9} \Rightarrow 9V_1 = 8V_2$$

Hình học – Chương III. Phương pháp tọa độ không gian

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;5;0), B(3;3;6) và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho chu vi

tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa độ điểm M và chu vi tam giác ABC là

- A. $M(1;0;2)$; $P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$ B. $M(1;2;2)$; $P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$
 C. $M(1;0;2)$; $P = \sqrt{11} + \sqrt{29}$ D. $M(1;2;2)$; $P = \sqrt{11} + \sqrt{29}$

• Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì $P = AB + AM + BM$.

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

Điểm $M \in \Delta$ nên $M(-1+2t; 1-t; 2t)$. $AM + BM = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vector $\vec{u} = (3t; 2\sqrt{5})$ và $\vec{v} = (-3t+6; 2\sqrt{5})$.

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$

$\Rightarrow AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ và $\vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{29}$

Mặt khác, ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ Như vậy $AM + BM \geq 2\sqrt{29}$

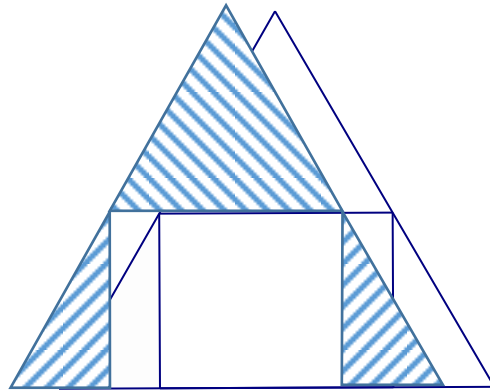
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{3t}{-3t+6} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t=1$

$\Rightarrow M(1;0;2)$ và $\min(AM + BM) = 2\sqrt{29}$. Vậy khi $M(1;0;2)$ thì $\min P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$

K.

1.(Hàm số)

Một miếng gỗ hình tam giác đều chiều dài cạnh là a . Cắt bỏ 3 phần như hình vẽ để được một miếng gỗ hình chữ nhật có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.



A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{a^2}{8}$

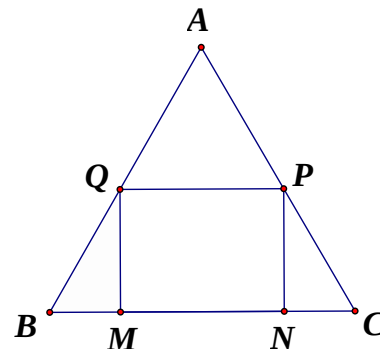
C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$

HD: Gọi $MN = x, 0 < x < a$

Khi đó : $S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} x(a-x)$

KSHS ta tìm được GTLN là $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{a}{2}$



2.(Mũ – Logarit)

Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}, x \in \mathbb{R}$. Tính $P = f(\sin^2 10^\circ) + f(\sin^2 20^\circ) + \dots + f(\sin^2 80^\circ)$

A. 4

B. 8

C. 9

D. 3

HD: Nếu $a+b=1$ thì $f(a) + f(b) = 1$. Do đó $P = 1+1+1+1 = 4$

3. (Tích Phân)

Cho $f(x)$ là hàm liên tục và $a > 0$. Giả sử rằng với mọi $x \in [0; a]$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x)f(a-x)=1$. Tính $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$

A. $\frac{a}{2}$

B. $2a$

C. $\frac{a}{3}$

D. $a \ln(a+1)$

HD: Đặt $t = a - x$ ta có: $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = -\int_a^0 \frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{f(t)dt}{f(t)+1}$

Suy ra: $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{a}{2}$

4. (Số Phức)

Trong các số phức z thỏa mãn $\left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. 1.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

HD: Ta có:

$$\left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2z-i}{2+iz} \cdot \frac{2\bar{z}+i}{2-i\bar{z}} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (2z-i)(2\bar{z}+i) \leq (2+iz)(2-i\bar{z}) \\ 2+iz \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} \leq 1$$

5. (Thể tích)

Một hình chóp có đáy là hình chữ nhật và có chiều cao h . Tính thể tích của hình chóp đó biết năm mặt của hình chóp có diện tích bằng nhau.

A. $\frac{4h^3}{45}$

B. $\frac{h^3}{45}$

C. $\frac{h^3}{3}$

D. $\frac{2h^3}{15}$

HD: Để thỏa mãn yêu cầu thì chân đường cao sẽ phải cách đều các cạnh của hình chữ nhật hay chính là tâm của hình chữ nhật đó và:

$$ab = \frac{a}{2} \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow a = b = \frac{2h}{\sqrt{15}}$$

6. (Tọa độ Oxyz)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2; -1), B(7; -2; 3) và đường

thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Điểm M trên d sao cho tổng khoảng cách từ M

đến A và B là nhỏ nhất có tổng các tọa độ là:

A. 6.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

HD: Nếu M nằm trên d thì điểm I có tọa độ là $M=(2+3t;-2t;4+2t)$. Từ đó ta có :

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (3t+1; -2-2t; 2t+5) \Rightarrow AM = \sqrt{(3t+1)^2 + (-2-2t)^2 + (2t+5)^2}$$

$$\text{Tương tự : } \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = (3t-5; 2-2t; 2t+1) \Rightarrow BM = \sqrt{(3t-5)^2 + (2-2t)^2 + (2t+1)^2}$$

$$\text{Từ (*) : } MA=MB = \sqrt{(3t+1)^2 + (-2-2t)^2 + (2t+5)^2} = \sqrt{(3t-5)^2 + (2-2t)^2 + (2t+1)^2}$$

$$\text{Hay : } \Leftrightarrow \sqrt{17t^2 + 34t + 30} = \sqrt{17t^2 - 36t + 30} \Leftrightarrow 34t + 36t = 0 - 11 \Leftrightarrow 70t = 0 \rightarrow t = 0$$

Tọa độ M thỏa mãn yêu cầu là : $M=(2;0;4)$.

L.

CHỦ ĐỀ 1: HÀM SỐ

Câu 1. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,68.

B. 0,6.

C. 0,12.

D. 0,52.

Hướng dẫn giải

Gọi x ($x > 0$) là bán kính đáy của lon sữa.

$$\text{Khi đó } V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa là

$$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + 2\frac{2}{x} = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, x > 0$$

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số $S(x) = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, x > 0$

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{4}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0,6827$$

Câu 2. Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài $d(m)$ và chiều rộng $r(m)$ với $d = 2r$. Chiều cao bể nước là $h(m)$ và thể tích bể là $2m^3$. Hỏi chiều cao bể nước như thế nào thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(m)$.

B. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(m)$.

C. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(m)$.

D. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(m)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $x(x > 0)$ là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước bằng

$$V = 2x^2.h = 2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là

$$S = 6x.h + 2x^2 = \frac{6}{x} + 2x^2 \quad (x > 0)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6}{x} + 2x^2$ với $x > 0$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Vậy chiều cao cần xây là $h = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(m)$.

Câu 3. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

- A. 480 ngàn. B. 50 ngàn. **C. 450 ngàn.** D. 80 ngàn.

Hướng dẫn giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x : $\frac{(x-400)+2}{20} = \frac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \frac{x-400}{10} = 90 - \frac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x) = x \left(90 - \frac{x}{10} \right) = -\frac{x^2}{10} + 90x$.

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450.$$

Bảng biến thiên:

x	400	450	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$ 20250 $\searrow$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Câu 4. Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là ?

- A. 0.** B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

$$3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \quad (7)$$

$$(7) \Leftrightarrow 27 \cdot 3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81 \cdot 3^x + \frac{81}{3^x} = 10^3 \Leftrightarrow 27 \cdot \left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} \right) + 81 \cdot \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) = 10^3 \quad (7')$$

$$\text{Đặt } t = 3^x + \frac{1}{3^x} \stackrel{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$$

$$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right)^3 = 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} \cdot \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$$

$$\text{Khi đó: } (7') \Leftrightarrow 27(t^3 - 3t) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} > 2 \quad (N)$$

$$\text{Với } t = \frac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3} \quad (7'')$$

$$\text{Đặt } y = 3^x > 0. \text{ Khi đó: } (7'') \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 & (N) \\ y = \frac{1}{3} & (N) \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$$

Câu 5. Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn tỉnh Bình Phước đạt gần 905.300, mức tăng dân số là 1,37% mỗi năm. Tỉnh thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi đều vào lớp 1. Đến năm học 2024-2025 ngành giáo dục của tỉnh cần chuẩn bị bao nhiêu phòng học cho học sinh lớp 1, mỗi phòng dành cho 35 học sinh? (Giả sử trong năm sinh của lứa học sinh vào lớp 1 đó toàn tỉnh có 2400 người chết, số trẻ tử vong trước 6 tuổi không đáng kể)

A.458.

B.222.

C. 459.

D. 221.

Hướng dẫn giải

Chỉ những em sinh năm 2018 mới đủ tuổi đi học (6 tuổi) vào lớp 1 năm học 2024-2025.

Áp dụng công thức $S_n = A(1+r)^n$ để tính dân số năm 2018.

Trong đó: $A = 905300; r = 1,37; n = 8$

Dân số năm 2018 là: $A = 905300 \cdot \left(1 + \frac{1,37}{100}\right)^8 = 1009411$

Dân số năm 2017 là: $A = 905300 \cdot \left(1 + \frac{1,37}{100}\right)^7 = 995769$

Số trẻ vào lớp 1 là: $1009411 - 995769 + 2400 = 16042$

Số phòng học cần chuẩn bị là: $16042 : 35 = 458,3428571$.

Câu 6. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. 25 tháng. B. 23 tháng. C. 24 tháng. D. 22 tháng.

Hướng dẫn giải

Theo công thức tính tỉ lệ % thì cần tìm t thỏa mãn:

$$75 - 20\ln(1+t) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3.25 \Leftrightarrow t \geq 24.79$$

Câu 7. Theo số liệu từ Facebook, số lượng các tài khoản hoạt động tăng một cách đáng kể tính từ thời điểm tháng 2 năm 2004. Bảng dưới đây mô tả số lượng $U(x)$ là số tài khoản hoạt động, trong đó x là số tháng kể từ sau tháng 2 năm 2004. Biết số lượt tài khoản hoạt động tăng theo hàm số mũ xấp xỉ như sau: $U(x) = A \cdot (1 + 0,04)^x$ với A là số tài khoản hoạt động đầu tháng 2 năm 2004. Hỏi đến sau bao lâu thì số tài khoản hoạt động xấp xỉ là 194 790 người, biết sau hai tháng thì số tài khoản hoạt động là 108 160 người.

A. 1 năm 5 tháng. B. 1 năm 2 tháng. C. 1 năm. D. 11 tháng.

Hướng dẫn giải

Do đề đã cho công thức tổng quát và có dữ kiện là sau hai tháng số tài khoản hoạt động là

108 160 người. Do đó thay vào công thức tổng quát ta sẽ tìm được A . Khi đó

$A(1+0.04)^2 = 108160 \Leftrightarrow A = 100000$. Khi đó công việc của ta chỉ là tìm x sao cho

$$100000(1+0.04)^x = 194790 \Leftrightarrow x = \log_{(1+0.04)} \frac{194790}{100000} \approx 17 \text{ hay 1 năm 5 tháng.}$$

CHỦ ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

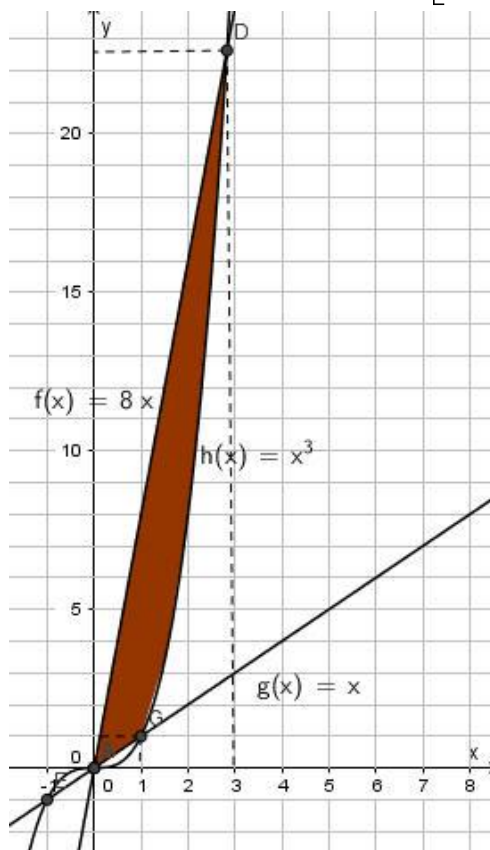
Câu 8. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x, y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ là $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $a+b$ bằng

- A. 68 **B. 67** C. 66 D. 65

Hướng dẫn giải

Ta có

$$8x - x = 0 \Rightarrow x = 0; 8x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}; x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$



$$\text{Nên } S = \int_0^1 8x - x \, dx + \int_1^{2\sqrt{2}} 8x - x^3 \, dx = \frac{63}{4}$$

- Câu 9.** Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn là?
- A.** 10130. **B.** 5130. **C.** 5154. **D.** 10129.

Hướng dẫn giải

Thực chất đây là một bài toán tìm nguyên hàm. Cho $N'(x)$ và đi tìm $N(x)$.

Ta có $\int \frac{2000}{1+x} dx = 2000 \cdot \ln|1+x| + 5000$ (Do ban đầu khối lượng vi khuẩn là 5000). Với $x=12$ thì số lượng vi khuẩn là ≈ 10130 con

- Câu 10.** Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.
- A.** $\frac{4300}{3}$ m. **B.** 4300 m. **C.** 430 m. **D.** $\frac{430}{3}$ m.

Hướng dẫn giải

- Hàm vận tốc $v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$

- Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0) = 10 \Rightarrow C = 10$

Ta được: $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10$

- Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là:

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t \right) \Bigg|_0^{10} = \frac{4300}{3} \text{ m.}$$

CHỦ ĐỀ 4: SỐ PHỨC

- Câu 11.** Trong mặt phẳng phức Oxy , các số phức z thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1,3)$.
- A.** $3+i$. **B.** $1+3i$. **C.** $2-3i$. **D.** $-2+3i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Gọi $E(1, -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$

Gọi $F(0, -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có : $|z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF : x - y - 2 = 0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M(3, 1) \Rightarrow z = 3 + i$

Câu 12. Trong mặt phẳng phức Oxy , trong các số phức z thỏa $|z + 1 - i| \leq 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$.

C. $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

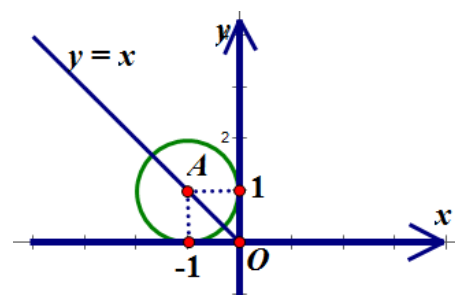
Gọi A là điểm biểu diễn số phức $-1 + i$

Ta có : $|z + 1 - i| \leq 1 \Leftrightarrow MA \leq 1$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là hình tròn tâm $A(-1, 1), R = 1$ như hình vẽ

Để $\max|z| \Leftrightarrow \max(OM)$

$$\Rightarrow M \text{ thỏa hệ : } \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}, x = -\frac{\sqrt{2} + 2}{2}$$



Câu 13. Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|iz_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A. $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

Bài toán này, thực chất là dựa trên kiến thức “ Biểu diễn hình học số phức”. Ta thấy nếu đặt $z_1 = x_1 + y_1 i$ ($x_1; y_1 \in \mathbb{R}$). Khi đó điểm $M(x_1; y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 thỏa mãn:

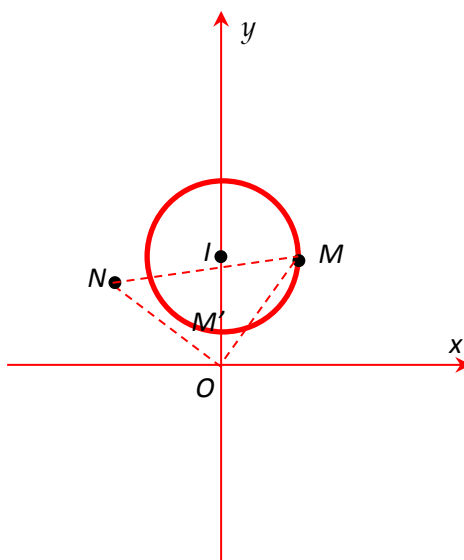
$$\left| i(x_1 + y_1 i) + \sqrt{2} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| ix_1 - y_1 + \sqrt{2} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1^2 + (y_1 - \sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}. \text{ Suy ra tập hợp các điểm } M$$

biểu diễn z_1 là đường tròn (C) có tâm $I(0; \sqrt{2})$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Khi đó nếu N là điểm biểu diễn của số phức z_2 thì việc tìm GTNN của $|z_1 - z_2|$ là việc tìm GTNN của MN .

Theo đề thì $z_2 = iz_1 = -y_1 + x_1 i \Rightarrow N(-y_1; x_1)$ là điểm biểu diễn z_2 . Ta nhận thấy rõ ràng $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -x_1 y_1 + x_1 y_1 = 0 \Rightarrow OM \perp ON$. Dễ nhận thấy $OM = ON = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

Ta có hình vẽ sau:



Do OMN là tam giác vuông cân tại O nên $MN = OM\sqrt{2}$, do đó để MN nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất. Dễ thấy, OM nhỏ nhất khi $M \equiv M'$ (M' là giao điểm của OI với đường tròn như hình vẽ) Tức là $M\left(0; \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$. Khi đó $MN = OM\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

CHỦ ĐỀ 5: KHỐI ĐA DIỆN

khối tứ diện $BMNP$ và $SABC$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

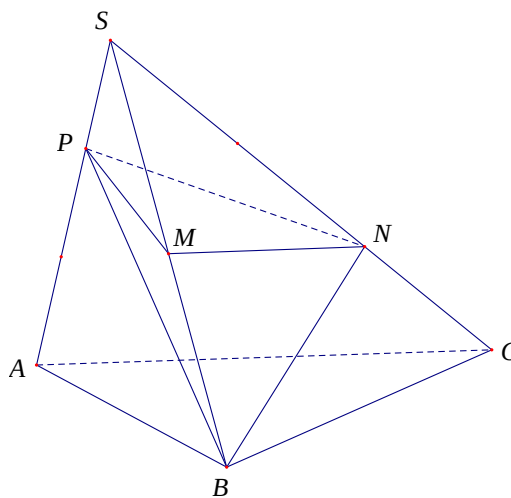
Hướng dẫn giải

$$\frac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(N, (SAB)) \cdot S_{BMP}}{\frac{1}{3} \cdot d(C, (SAB)) \cdot S_{SAB}};$$

$$\frac{d(N,(SAB))}{d(C,(SAB))} = \frac{NS}{CS} = \frac{2}{3},$$

$$S_{BPM} = \frac{1}{2} S_{BPS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{SAB}$$

$$\text{Suy ra, } \frac{V_{N.BMP}}{V_{G.SAB}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$



Câu 14. Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC . Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α) , trong đó, (H_1) chứa điểm S , (H_2) chứa điểm A ; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC .

Ta có $NP//MQ//SC$. Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC) , ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

$$\text{Ta có: } \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \frac{d(N, (SAC))}{d(B, (SAC))} \cdot \frac{S_{SMQC}}{S_{SAC}};$$

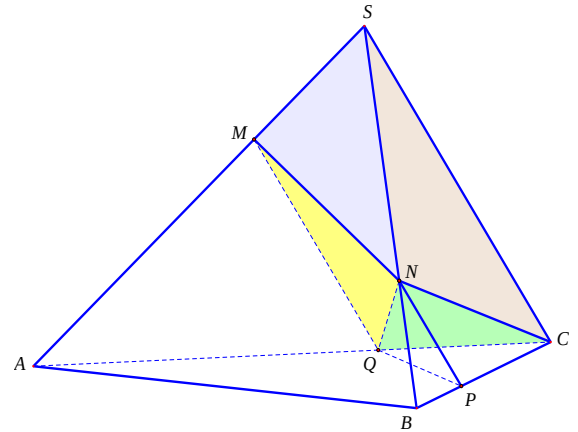
$$\frac{d(N, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{NS}{BS} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{S_{AMQ}}{S_{ASC}} = \left(\frac{AM}{AS}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{SMQC}}{S_{ASC}} = \frac{5}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} &= \frac{d(N, (QPC))}{d(S, (ABC))} \cdot \frac{S_{QPC}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{NB}{SB} \cdot \frac{CQ}{CA} \cdot \frac{CP}{CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} + \frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \frac{10}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow 5V_1 = 4V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$$



CHỦ ĐỀ 6: KHỐI TRÒN XOAY

Câu 15. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là:

A. $R = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2\pi}}.$

B. $R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}; h = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}.$

C. $R = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}; h = 4\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$

D. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$

Hướng dẫn giải

Gọi thể tích khối trụ là V , diện tích toàn phần của hình trụ là S .

Ta có: $S = S_{\text{day}} + S_{\text{xq}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$. Từ đó suy ra:

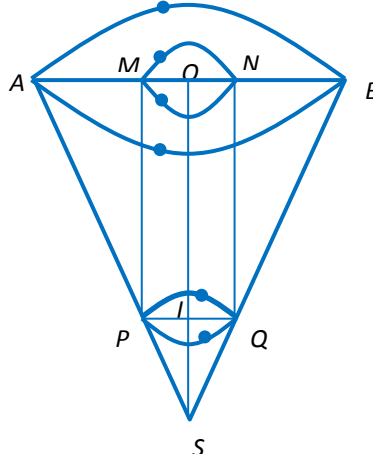
$$\frac{S}{2\pi} = R^2 + Rh \Leftrightarrow \frac{S}{2\pi} = R^2 + \frac{V}{\pi R} = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

$$\text{hay } 27 \frac{V^2}{4\pi^2} \leq \left(\frac{S}{2\pi} \right)^3 \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}.$$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow R^2 = \frac{V}{2\pi R} = \frac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \frac{Rh}{2} \text{ hay } h = 2R.$$

$$\text{Khi đó } S = 6\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \text{ và } h = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Câu 16. Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9} dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:



A. $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2} dm^2$. B. $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10} dm^2$. C. $S_{xq} = 4\pi dm^2$. D. $S_{xq} = \frac{3\pi}{2} dm^2$.

Hướng dẫn giải

Xét hình nón : $h = SO = 3r$, $r = OB$, $l = SA$. Xét hình trụ : $h_1 = 2r = NQ$, $r_1 = ON = QI$

$$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \frac{QI}{BO} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} \Rightarrow \text{Thể tích khối trụ là :}$$

$$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10} dm^2$$

Câu 17. Cho hình vẽ bên:

Tam giác SOA vuông tại O có $MN \perp SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA . Đặt $SO = h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R = OA$. Tìm độ dài của MN để thể tích khối trụ là lớn nhất.

A. $MN = \frac{h}{2}$

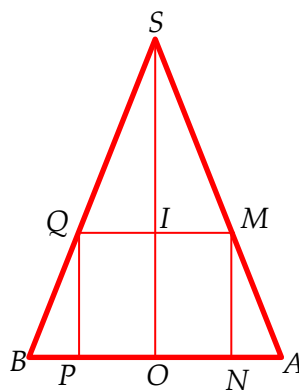
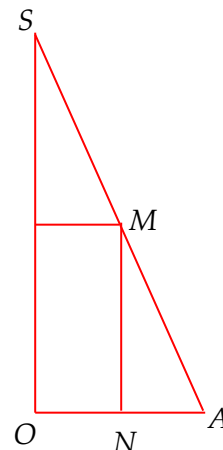
B. $MN = \frac{h}{3}$

C. $MN = \frac{h}{4}$

D. $MN = \frac{h}{6}$

Hướng dẫn giải

Ta thấy khi quay quanh trục SO sẽ tạo nên một khối trụ nằm trong khối chóp. Khi đó thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật $MNPQ$. Ta có hình sau:



Ta có $SO = h$; $OA = R$. Khi đó đặt $OI = MN = x$.

Theo định lí Thales ta có $\frac{IM}{OA} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow IM = \frac{OA \cdot SI}{SO} = \frac{R \cdot (h-x)}{h}$. Thể tích khối trụ

$$V = \pi IM^2 \cdot IH = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot x(h-x)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2x(h-x)^2 \leq \left[\frac{2x + 2(h-x)}{3} \right]^3$$

Vậy $V \leq \frac{4\pi R^2 h}{27}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{h}{3}$. Hay $MN = \frac{h}{3}$.

CHỦ ĐỀ 7: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{7}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{7}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-7}$.

Hướng dẫn giải

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a}_{\Delta} = (1; -2; 2)$

d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = (a; b; c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (2; -1; -1)$

Vì $d \in (P)$ nên $\vec{a}_d \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow \vec{a}_d \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|\vec{a}_{\Delta} \cdot \vec{a}_d|}{|\vec{a}_{\Delta}| |\vec{a}_d|} = \frac{|5a - 4b|}{3\sqrt{5a^2 - 4ab + 2b^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(5a - 4b)^2}{5a^2 - 4ab + 2b^2}}$$

Đặt $t = \frac{a}{b}$, ta có: $\cos(\Delta, d) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}$, ta suy ra được: $\max f(t) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $\max[\cos(\Delta, d)] = \sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{27}} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{5}$

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = -5, c = 7$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x + 4y - 2z - 6 = 0$, $(Q): x - 2y + 4z - 6 = 0$.

Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x + y + z + 6 = 0$.

B. $x + y + z - 6 = 0$.

C. $x + y - z - 6 = 0$.

D. $x + y + z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn $M(6;0;0), N(2;2;2)$ thuộc giao tuyến của $(P), (Q)$

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox, Oy, Oz

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c \neq 0)$$

$$(\alpha) \text{ chứa } M, N \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{a} = 1 \\ \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \end{cases}$$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$

Vậy phương trình $x + y + z - 6 = 0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M, N và tạo với mặt phẳng $(Q): x - y - 4 = 0$ một góc bằng 45° . Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y - 2z + 2 = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - 2z + 2 = 0 \\ 2x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Gọi vectơ pháp tuyến của $mp(P)$ và (Q) lần lượt là $\vec{n}_p(a; b; c)$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), $\vec{n}_q$
 (P) qua $M(1;0;0) \Rightarrow (P): a(x-1) + by + cz = 0$

(P) qua $N(0;0;-1) \Rightarrow a + c = 0$

$$(P) \text{ hợp với } (Q) \text{ góc } 45^\circ \Rightarrow \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{n}_q) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2b \end{cases}$$

Với $a = 0 \Rightarrow c = 0$ chọn $b = 1$ phương trình $(P): y = 0$

Với $a = -2b$ chọn $b = -1 \Rightarrow a = 2$ phương trình mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$.

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến $\text{mp}(P)$ là

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$.

B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$.

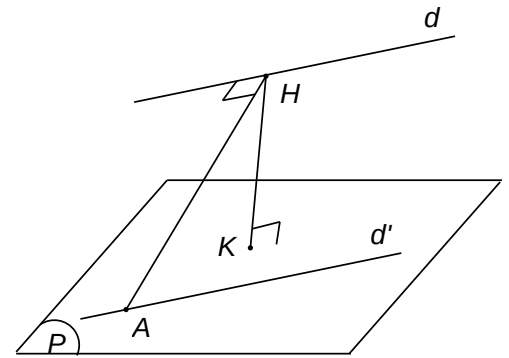
C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Hướng dẫn giải:

(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d .

Gọi H là hình chiếu của A trên d , K là hình chiếu của H trên (P) .



Ta có $d(d, (P)) = HK \leq AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d, (P))$ là AH

$\Rightarrow d(d, (P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P) .

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q) .

$$\Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q] = (98; 14; -70)$$

$$\Rightarrow (P): 7x + y - 5z - 77 = 0 \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{97\sqrt{3}}{15}.$$

L.

Câu 1 Hàm số. Một người dự định làm một thùng đựng đồ hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V . Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng

A. $x = V^{\frac{2}{3}}$

B. $x = \sqrt[3]{V}$

C. $x = V^{\frac{1}{4}}$

D. $x = \sqrt{V}$

Hướng dẫn

Gọi a là độ dài cạnh đáy, x là độ dài đường cao của thùng đựng đồ ($a, x > 0$)

$$\text{Khi đó, } V = a^2x \Rightarrow a = \sqrt{\frac{V}{x}} \Rightarrow S_{\text{tp}} = 2a^2 + 4ax = 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$$

Để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì S_{tp} nhỏ nhất $\Rightarrow 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$ nhỏ nhất.

Cách 1 : Xét hàm số $f(x) = 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx}$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-2V}{x^2} + \frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{x}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\sqrt{V} = V\sqrt{x} \Leftrightarrow x = V^{\frac{1}{3}}$$

x	0	$V^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	-		+
$f(x)$		$f(V^{\frac{1}{3}})$	

Từ BBT ta thấy để làm thùng hàng tốn ít nguyên liệu nhất thì chiều cao của thùng đựng đồ bằng $V^{\frac{1}{3}}$.

$$\text{Cách 2: ta có } 2\frac{V}{x} + 4\sqrt{Vx} = 2\frac{V}{x} + 2\sqrt{Vx} + 2\sqrt{Vx} \geq 6\sqrt[3]{V^2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra tại } \frac{V}{x} = \sqrt{Vx} \Leftrightarrow x^3 = V \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{V}$$

Câu 2 Mũ - Loga. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $3.10^6 (m^3)$. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong khu rừng đó là 5% mỗi năm. Sau 10 năm nữa, trữ lượng gỗ trong rừng là

A. $4886683,88(m^3)$

B. $4668883(m^3)$

C. $4326671,91(m^3)$

D. $4499251(m^3)$

Hướng dẫn

Gọi A là trữ lượng gỗ ban đầu của khu rừng (m^3); r là tốc độ sinh trưởng hàng năm(%);
 M_n là trữ lượng gỗ sau n năm (m^3).

Năm đầu tiên, $M_1 = A + A.r = A(1+r)$

Năm thứ hai, $M_2 = M_1 + M_1.r = M_1(1+r) = A(1+r)^2$

Năm thứ ba, $M_3 = M_2 + M_2.r = M_2(1+r) = A(1+r)^3$

Tương tự năm thứ n , $M_n = A(1+r)^n$

Áp dụng công thức ta có $M_{10} = A(1+r)^{10} = 3.10^6 (1+0,05)^{10} = 4886683,88 (\text{m}^3)$

Câu 3 Tích phân. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $24,5 (\text{m/s})$ và gia tốc trọng trường là $9,8 (\text{m/s}^2)$. Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là (coi như viên đạn được bắn lên từ mặt đất)

A. $61,25 (\text{m})$ B. $30,625 (\text{m})$ C. $29,4 (\text{m})$ D. $59,5 (\text{m})$

Hướng dẫn.

Chọn chiều dương từ mặt đất hướng lên trên, mốc thời gian $t = 0$ bắt đầu từ khi vật chuyển động.

Ta có vận tốc viên đạn theo thời gian t là $v(t) = v_0 - gt = 24,5 - 9,8t (\text{m/s})$

Khi vật ở vị trí cao nhất thì có vận tốc bằng 0 tương ứng tại thời điểm $t = \frac{5}{2}$

Quãng đường viên đạn đi được từ mặt đất đến vị trí cao nhất là

$$S(t) = \int_0^{\frac{5}{2}} |v(t)| dt = \int_0^{\frac{5}{2}} |24,5 - 9,8t| dt = \frac{245}{8}$$

Vậy quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là $2 \cdot \frac{245}{8} = 61,25 (\text{m})$

Câu 4 Số phức. Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)}$ ($m \in \mathbb{R}$). Số các giá trị nguyên của m để $|z-i| < 1$ là

A. 0 B. 1 C. 4 D. Vô số

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } z-i = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} - i = \frac{m+1-i(1+2mi-m)}{1+m(2i-1)} = \frac{3m+1+(m-1)i}{1-m+2mi}$$

$$\Rightarrow |z-i| = \left| \frac{3m+1+(m-1)i}{1-m+2mi} \right| = \frac{|3m+1+(m-1)i|}{|1-m+2mi|} < 1$$

$$\Leftrightarrow |3m+1+(m-1)i| < |1-m+2mi| \Leftrightarrow (3m+1)^2 + (m-1)^2 < (1-m)^2 + 4m^2$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 6m + 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{5}$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Không có giá trị của m thỏa mãn.

Câu 5 Hình học không gian. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , góc BAC nhọn. Góc giữa AA' và BC' là 30° , khoảng cách giữa AA' và BC' là a . Góc giữa hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ là 60° . Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn

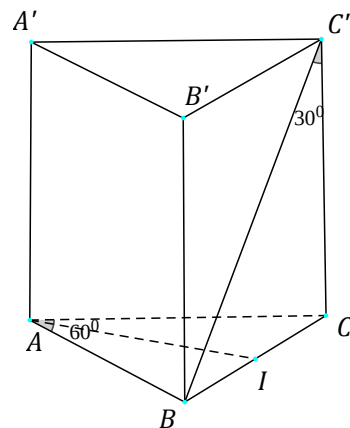
Ta có góc giữa hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ là

$$\angle BAC = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ đều.

$$\text{Vì } AA' // CC' \Rightarrow \angle(AA'; BC') = \angle(CC'; BC') = \angle BC'C = 30^\circ$$

$$\text{Kẻ } AI \perp BC \Rightarrow AI \perp (BB'C'C)$$

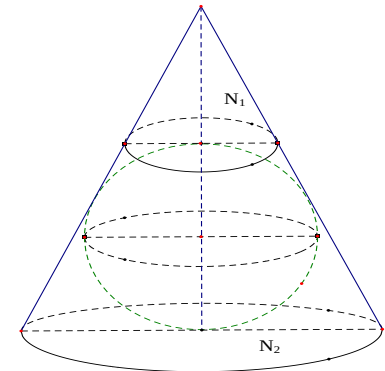


$$d(AA'; BC') = d(AA'; (BB'C'C)) = AI = a$$

$$\Rightarrow BC = \frac{2a}{\sqrt{3}}, CC' = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = 2a$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a^3 \sqrt{3}}{3}$$

Câu 6 Tròn xoay. Một hình nón bị cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng (P) chia hình nón làm hai phần (N_1) và (N_2). Cho hình cầu nội tiếp (N_2) như hình vẽ sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2). Một mặt phẳng đi qua trục hình nón và vuông góc với đáy cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tang góc nhọn của hình thang cân là



A. 2 B. 4 C. 1 D. $\sqrt{3}$

Hướng dẫn

Giả sử ta có mặt cắt của hình nón cắt và các đại lượng như hình vẽ.

Gọi α là góc cần tìm.

Xét $\triangle AHD$ vuông tại H có $DH = h, AH = R - r$

$$\Rightarrow h = 2r_0 = AH \cdot \tan \alpha = (R - r) \tan \alpha \quad (1)$$

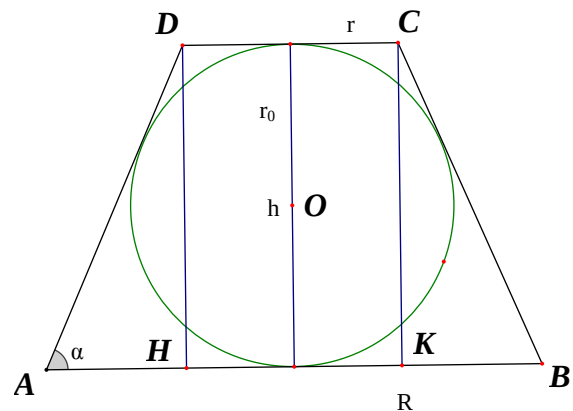
$$\text{Thể tích khối cầu là } V_1 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 = \frac{\pi h^3}{6}$$

$$\text{Thể tích của } (N_2) \text{ là } V_2 = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h^2 = R^2 + r^2 + Rr \quad (2)$$

Ta có $BC = R + r$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{Mà } h^2 = BC^2 - (R - r)^2 = 4Rr \quad (3)$$



Từ (2),(3) $\Rightarrow (R-r)^2 = Rr$ (4)

Từ (1),(3),(4) $\Rightarrow h^2 = (R-r)^2 \cdot \tan^2 \alpha = 4(R-r)^2 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = 2$ (vì α là góc nhọn)

Câu 7 Hình học Oxyz. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2;-2;0)$, đường

thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$. Biết mặt phẳng (P) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ đi qua A, song song với Δ và khoảng cách từ Δ tới mặt phẳng (P) lớn nhất. Biết a,b là các số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1. Hỏi tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. -1.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ .

Do $H \in \Delta \Rightarrow H(-1-t; 3t; 2+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-t-3; 3t+2; t+2)$

Do $AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_{\Delta}} = 0$ với $\overrightarrow{u_{\Delta}} = (-1; 3; 1)$

$\Leftrightarrow -1 \cdot (-t-3) + 3 \cdot (3t+2) + 1 \cdot (t+2) = 0 \Leftrightarrow 11t = -11$

$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(0; -3; 1)$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của H trên (P), khi đó: $d(\Delta, (P)) = d(H, (P)) = HF \leq HA$

Suy ra $d(\Delta, (P))_{\max} = HA$. Dấu “=” xảy ra khi $F \equiv A \Rightarrow AH \perp (P)$, hay bài toán được phát biểu lại là:

“Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AH”

Ta có $\overrightarrow{AH} = (-2; -1; 1) = -(2; 1; -1)$, suy ra $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2; 1; -1)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-2)+y+2-z=0 \Leftrightarrow 2x+y-z-2=0$.

Do $\begin{cases} a, b \in \mathbb{N}^* \\ (a, b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ c = -1, d = -2 \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d = 0$.

M.

Câu 1. Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $(\sqrt{5}-1)^x + (\sqrt{5}+1)^x = 5 \cdot 2^{x-1}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào *sai*?

A. $(x_1, +\infty) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$

B. $(x_2, +\infty) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$

C. $(x_1, x_2) \cap (-1, 0) = (-1, 0)$

D. $(x_1, x_2) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$

HDG: $(\sqrt{5}-1)^x + (\sqrt{5}+1)^x = 5 \cdot 2^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x = \frac{5}{2}(1).$

Nhận xét: $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x = 1^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{-x}$

+ Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x > 0, (1) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} 2, x_2 = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{1}{2}.$

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

A. $m_1 + m_2 = 0.$

B. $m_1^2 + 2m_2 > 4.$

C. $m_2^2 + 2m_1 > 4.$

D. $m_1 - m_2 = 0.$

HDG: $p_{thdgd}: x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \text{ (DK: } m \neq 0) \\ x = -3m \end{cases}$

$ycbt \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + m^4 + 81m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 0.$

Câu 3. Thang đo Richter được Charles Francis Richter đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị là độ Richter. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L = \lg A - \lg A_0$, với M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là một biên độ chuẩn. (nguồn: *Trung tâm tư liệu khí tượng thủy văn*). Hỏi theo thang độ Richter, với cùng một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một trận động đất 7 độ Richter sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richter ?

A. 2.

B. 20.

C. $10^{\frac{7}{5}}.$

D. 100.

HDG: Gọi A_1 và A_2 lần lượt là biên độ tối đa của hai trận động đất 7 độ Richter và 5 độ

Richter. Theo công thức, ta có: $\begin{cases} 7 = \lg A_1 - \lg A_0 \\ 5 = \lg A_2 - \lg A_0 \end{cases}$

Trừ vế theo vế của hai đẳng thức trên, ta có: $2 = \lg A_1 - \lg A_2 = \lg \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 10^2 = 100.$

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa $A'C$ và $C'D'$ là 1 cm. Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là:

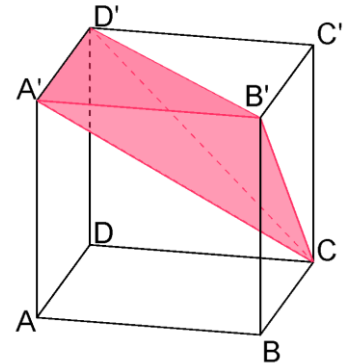
- A. 8 cm^3 . B. $2\sqrt{2} \text{ cm}^3$. C. $3\sqrt{3} \text{ cm}^3$. D. 27 cm^3 .

HĐG: Để tìm khoảng cách giữa $A'C$ và $C'D'$, ta dựng một mặt phẳng chứa $A'C$ và song song với $C'D'$. Dễ thấy đó là mặt phẳng $(CA'B')$.

Gọi a là độ dài cạnh của khối lập phương, lúc này ta có:

$$d(C'D', A'C) = d[C'D', (CA'B')] = d[D', (CA'B')]$$

Để tính khoảng cách từ điểm D' đến mặt phẳng $(CA'B')$, ta xét khối



$$V_{D'CA'B'} = \frac{1}{3} \cdot CC' \cdot S_{B'A'D'} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6} \text{ (cm}^3\text{)}$$

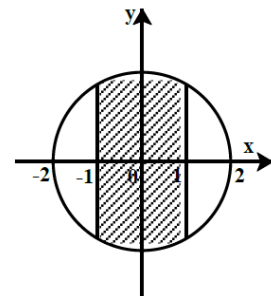
$$S_{CA'B'} = \frac{1}{2} \cdot CB' \cdot B'A' = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ (do tam giác } CA'B' \text{ vuông tại } B')$$

$$\text{Suy ra: } d[D', (CA'B')] = \frac{3V_{D'CA'B'}}{S_{CA'B'}} = \frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \text{ (cm)} \Rightarrow a = \sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Do đó } V = a^3 = 2\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Câu 5. Số phức z thỏa mãn điều nào thì có biểu diễn là phần gạch như trên hình.

- A. Số phức $M(x, y)$.
 B. Số phức $z = x + yi \text{ (} x, y \in \mathbb{R} \text{)}$.
 C. Số phức $A(-1, 1)$.
 D. Số phức $-1 + i$.



chéo

Hướng dẫn giải

Từ hình biểu diễn ta thấy tập hợp các điểm $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ biểu diễn số phức z trong phần gạch chéo đều thuộc đường tròn tâm $\Leftrightarrow 1 \leq MA \leq 2$ và bán kính bằng 2 ngoài ra $R_1 = 2, R_2 = 1$

Vậy $M(a, b)$ là điểm biểu diễn của các số phức $\Rightarrow P = S_1 - S_2 = 2\pi(R_1 - R_2) = 2\pi$ có mô đun nhỏ hơn hoặc bằng 2 và có phần thực thuộc đoạn $[-1; 1]$. Ta có đáp án là A.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $4\pi(dm^2)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần với giá trị nào nhất sau đây ?

- A. $\frac{2}{7} dm$. B. $\frac{3}{7} dm$. C. $\frac{4}{7} dm$. D. $\frac{6}{7} dm$.

Câu 7. Trong mặt phẳng phức Oxy , cho số phức z thỏa lần lượt một trong bốn điều kiện $(I): |z + \bar{z}| = 2$; $(II): z\bar{z} = 5$; $(III): |z - 2i| = 4$, $(IV): |i(z - 4i)| = 3$. Hỏi điều kiện nào để số phức Z có tập hợp biểu diễn là đường thẳng.

- A. $(II), (III), (IV)$. B. $(I), (II)$. C. $(I), (IV)$. D. (I) .

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi (x, y \in R)$

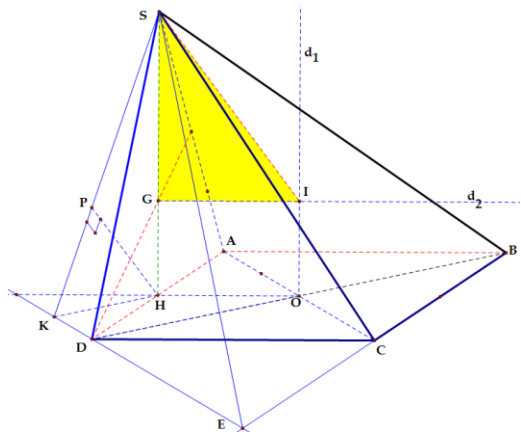
$$(I): |z + \bar{z}| = 2 \Leftrightarrow |2x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1; \quad (\text{Đường thẳng})$$

$$(II): z\bar{z} = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad (\text{Đường tròn})$$

$$(III): |z - 2i| = 4 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 16; \quad (\text{Đường tròn})$$

$$(IV): |i(z - 4i)| = 3 \Leftrightarrow |4 + iz| = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 9 \quad (\text{Đường tròn})$$

Vậy đáp án D.



HDG: Gọi $x > 0$ là cạnh của hình vuông $ABCD$ và H là trung điểm cạnh AD

Dễ dàng chứng minh $SH \perp (ABCD), SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm $\triangle SAD$, đồng thời d_1, d_2 lần lượt là 2 trục đường tròn ngoại tiếp $ABCD, \triangle SAD$
(d_1 qua O và $\parallel SH, d_2$ qua G và $\parallel AB$)

$\Rightarrow I = d_1 \cap d_2$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD \Rightarrow R = SI$

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 1 = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{21}}{7} (dm)$$

Gọi E là điểm thỏa $ADEC$ là hình bình hành $\Rightarrow ED \parallel AC \Rightarrow d(AC; SD) = d(AC; (SDE))$

$\Rightarrow d(AC; SD) = d(A; (SDE)) = 2d(H; (SDE)) = 2HP$ (phần chứng minh $HP \perp (SDE)$ xin dành cho bạn đọc)

$$\triangle SKH : \frac{1}{HP^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{KH^2} = \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2} \Rightarrow HP = \frac{x\sqrt{21}}{14} = \frac{3}{7} dm \Rightarrow d(AC; SD) = \frac{6}{7} dm \text{ Câu}$$

8: Tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}} dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002.2^{1001}}$

B. $\frac{1}{2001.2^{1001}}$

C. $\frac{1}{2001.2^{1002}}$

D. $\frac{1}{2002.2^{1002}}$

Hướng dẫn giải

$$I = \int_1^2 \frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3 \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^{1002}} dx. \text{ Đặt } t = \frac{1}{x^2} + 1 \Rightarrow dt = -\frac{2}{x^3} dx.$$

Câu 9: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

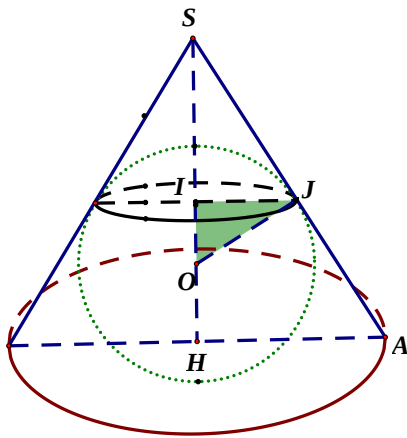
A. $10\sqrt{2}cm$

B. $20cm$

C. $50\sqrt{2}cm$

D. $25cm$

HDG



Đặt $a = 50\text{cm}$

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là x, y ($x, y > 0$). Ta có

$$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2} &= \pi a^2 \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2 \\ \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} &= a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 (x^2 + y^2) = a^4 + x^4 - 2a^2 x^2, (DK : x < a) \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \end{aligned}$$

Khi đó thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \cdot y = \frac{1}{3} \pi a^4 \cdot \frac{y}{y^2 + 2a^2}$$

V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{y}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25cm$

Lưu ý: Bài trên các em xét hàm số và lập bảng biến thiên cũng được nhé

N.

Phần 1: Khảo sát hàm số

Câu hỏi : Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất ?

A. $M_1(0; -3)$ và $M_2(-2; 5)$

B. $M_1(1; -1)$ và $M_2(-3; 3)$

C. $M_1\left(2; -\frac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4; \frac{7}{3}\right)$

D. $M_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{11}{3}\right)$

Hướng dẫn giải : Gọi $M\left(m; \frac{m-3}{m+1}\right)$ thuộc đồ thị, có $I(-1; 1)$

$$IM = \sqrt{(m+1)^2 + \frac{16}{(m+1)^2}}, \quad IM = \sqrt{(m+1)^2 + \frac{16}{(m+1)^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{16}} \geq 2\sqrt{2}$$

IM nhỏ nhất khi $IM = 2\sqrt{2}$. Khi đó $(m+1)^2 = 4$. Tìm được hai điểm $M_1(1; -1)$ và $M_2(-3; 3)$.

Chọn B

Phần 2: Mũ – Logarit

Câu hỏi : Phương trình $\sqrt{1 + \log_9 x} - \sqrt{3 \log_9 x} = \log_3 x - 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải : Giải phương trình: $\sqrt{1 + \log_9 x} - \sqrt{3 \log_9 x} = \log_3 x - 1$. Điều kiện xác định: $x \geq 1$

$$\sqrt{1 + \log_9 x} - \sqrt{3 \log_9 x} = \log_3 x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \log_9 x} - \sqrt{3 \log_9 x} = 2 \log_3 x - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \log_3 x = 2 \log_3 x - 1 \quad \sqrt{1 + \log_9 x} + 3 \sqrt{\log_9 x} \Leftrightarrow 2 \log_3 x - 1 \quad \sqrt{1 + \log_9 x} + 3 \sqrt{\log_9 x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_9 x = 1 \text{ vì: } \sqrt{1 + \log_9 x} + \sqrt{3\log_9 x} + 1 > 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy nghiệm phương trình đã cho: $x = 3$. **Chọn đáp án B**

Phần 3: Nguyên Hàm – Tích Phân - Ứng dụng

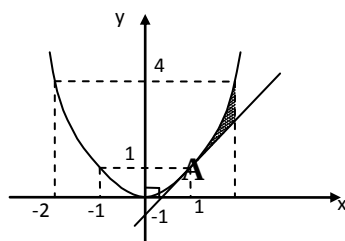
Câu hỏi : Phần bôi đen trên hình vẽ là hình phẳng (D) giới hạn giữa parabol (P) và tiếp tuyến d của (P) tại điểm A(1;1) và đường thẳng $x = 2$. Tính diện tích hình phẳng (D).

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. Một đáp số khác



Hướng dẫn giải :

Vì parabol (P) nhận gốc O làm đỉnh và đối xứng qua Oy nên phương trình parabol (P) có dạng $y = ax^2 (a \neq 0)$.

Vì (P) đi qua A(1;1) nên $a = 1$, suy ra phương trình (P) : $y = x^2$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (P) tại A nên có phương trình : $y = 2x - 1$

$$\text{Diện tích hình phẳng (D) là : } S = \int_1^2 [x^2 - (2x - 1)] dx = \int_1^2 (x - 1)^2 dx = \frac{1}{3} (x - 1)^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Chọn A

Lưu ý : Bài này cần phải tìm phương trình của các đường dựa trên hình vẽ

Phần 4 : Số Phức

Câu hỏi : Gọi $z_1; z_2$ là các nghiệm phức của phương trình: $z^2 - 4z + 5 = 0$. Tính :

$$(z_1 - 1)^{2017} + (z_2 - 1)^{2017}$$

A. 2^{2017}

B. 2^{1007}

C. 2^{2009}

D. 2^{1009}

Hướng dẫn giải :

$$\text{Ta có: } \Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - i \\ z_2 = 2 + i \end{cases}$$

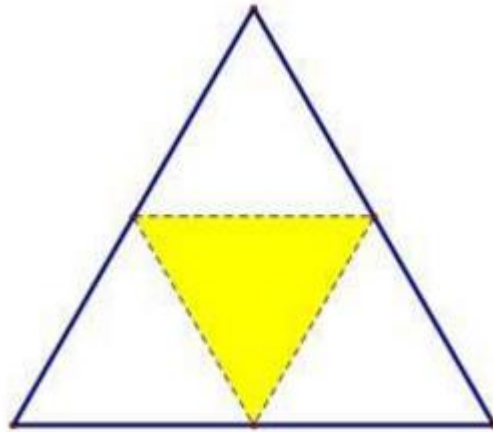
$$\text{Khi đó: } z_1 - 1^{2017} + z_2 - 1^{2017} = 1 - i^{2016} (1 - i) + 1 + i^{2016} (1 + i)$$

$$= \left[(1 - i)^2 \right]^{1008} (1 - i) + \left[(1 + i)^2 \right]^{1008} (1 + i) = -2i^{1008} (1 - i) + 2i^{1008} (1 + i)$$

$$= 2^{1008} (1 - i) + 2^{1008} (1 + i) = 2^{1009} . \text{ Chọn đáp án D}$$

Phần 5: Thể tích khối đa diện

Câu hỏi : Người ta cắt miếng bìa tam giác đều như hình vẽ và gấp lại theo các đường kẻ, sau đó dán các mép lại để được hình tứ diện đều có thể tích $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$. Tính độ dài cạnh của miếng bìa theo a ?



A. a

B. $2a$

C. $\frac{a}{2}$

D. $3a$

Hướng dẫn giải :

Đặt $2x$ là cạnh của miếng bìa. Khi đó cạnh của tứ diện đều là x , suy ra thể tích tứ diện đều là :

$$V = x^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}. \text{ Do đó } x = a, \text{ suy ra cạnh của miếng bìa là } 2a. \text{ Chọn B}$$

Lưu ý : Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì thể tích của nó là $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Phần 6: Khối tròn xoay

Câu hỏi : Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng a . Tính diện tích của thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° .

A. $\frac{a^2}{2}$

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{a^2}{3}$

Hướng dẫn giải :

	Gọi thiết diện qua trục là $\triangle SAB$ vuông cân tại S, $SA = SB = a$ Gọi O là tâm của đáy, $SO = \frac{a}{\sqrt{2}}$ Gọi thiết diện qua đỉnh, tạo với đáy góc 60° là $\triangle SAC$. Gọi M là trung điểm AC, góc giữa mặt phẳng (SAC) với mặt đáy là $\angle SMO = 60^\circ$ * $SM = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ($\triangle SMO$ vuông tại O).
--	---

Vậy PTTS của Δ là : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$. **Đáp án A.**