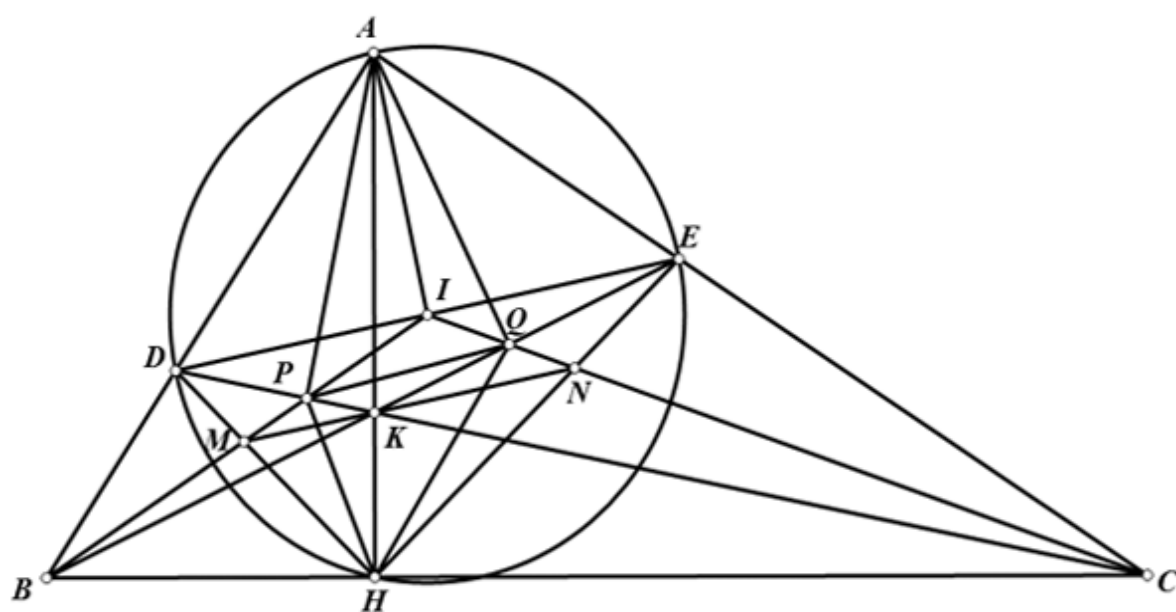


Tạ Công Hoàng - Nguyễn Đăng Khoa



TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG² ÔN THI VÀO LỚP 10 THPT 2018 - 2019



Geometry



Mục lục

Lời nói đầu	5
1 Một số bổ đề và kí hiệu, thuật ngữ sử dụng trong tài liệu	7
1.1 Các kí hiệu, thuật ngữ	7
1.2 Một số bổ đề dùng trong tài liệu	7
2 Các bài toán đã có lời giải	13
3 Một số bài toán chưa có lời giải	115
4 Bài tập rèn luyện	117
Tài liệu tham khảo	119

Lời nói đầu

Hình học là một phần quan trọng trong Toán học và rất phát triển tại Việt Nam. Tôi đã thấy rất nhiều người giỏi Hình học nhưng ngược lại thì lại có nhiều người vẫn đang rất sợ bộ môn mang tên Hình học phẳng này. Bằng sự động lực và đam mê nên tôi đã quyết định biên soạn một tài liệu về hình học cấp THCS dành cho những bạn nào đam mê Hình học hoặc chưa đam mê thì mong qua cuốn tài liệu này các bạn sẽ tìm được thấy vẻ đẹp ẩn chứa trong đó. Cuốn tài liệu này bắt nguồn từ "[TOPIC] HÌNH HỌC ÔN THI VÀO THPT CHUYÊN 2018-2019" do tôi sáng lập ở trên diễn đàn Toán học với tài khoản là **Khoa Linh**. Lúc đó là vào dịp tôi đang ôn thi vào lớp 10 THPT, mặc dù khá là nhiều việc nhưng được sự cho phép của bạn ĐHV THCS **MoMo123** và sự ủng hộ của rất nhiều bạn nên tôi đã sáng lập ra TOPIC này. Trải qua một tháng TOPIC được thành lập thì đã có hơn 100 bài toán được đưa lên với phong trào giải bài rất sôi nổi, nhiệt tình của các bạn. Đó cũng là nơi giao lưu học hỏi thêm về nhiều bài toán hay trong hình học phẳng. Khi kết thúc TOPIC của mình thì tôi đã có dự định trong hè gõ lại tất cả những bài toán có trên đó nhưng do số lượng bài khá nhiều và cũng rất nhiều bài chưa có lời giải nên tôi đã nhờ đến sự trợ giúp của bạn **Tạ Công Hoàng** - THPT chuyên Lê Khiết với tài khoản trên diễn đàn là **taconghoang**. Tôi muốn gửi lời cảm ơn tới các bạn đã tham gia đóng góp rất nhiều bài toán hay, lời giải đẹp cho TOPIC, đặc biệt là các bạn có tên tài khoản sau: **Minhcamgia**, **conankun**, **MoMo123**, **BunhiChySchwarz**, **buingoctu**, **Korkot**, **phamhuy1801**, **khanhdat1**, **Tea coffee**... Tôi cũng đặc biệt cảm ơn anh **Nguyễn Phúc Tăng**- Khóa 9 THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu đã giúp chúng tôi thiết kế bìa, các khung bài tập để cho tài liệu hoàn thiện hơn. Một số bài toán vẫn chưa có lời giải thì tôi đã cho vào mục khác và thay vào đó là những bài toán do tôi hoặc người khác đề xuất. Mặc dù đã cố gắng rất nhiều nhưng sai sót trong tài liệu là không thể tránh khỏi và trong quá trình gõ tài liệu thì tôi cũng đã gặp phải rất nhiều lỗi biên soạn

nên có thể tài liệu nhìn chưa được đẹp như ý muốn. Mong mọi người đóng góp ý kiến thêm tại
hòm thư: ***khoanguyen17112003@gmail.com***.

Chúc các bạn tìm được sự đam mê với môn học này. Xin chân thành cảm ơn!

Phú Thọ, ngày 17 tháng 8 năm 2018

Nguyễn Đăng Khoa - Khóa 36 THPT chuyên Hùng Vương

Chương 1

Một số bổ đề và kí hiệu, thuật ngữ sử dụng trong tài liệu

1.1 Các kí hiệu, thuật ngữ

(ABC) : Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$R_{(ABC)}$: Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

S_{ABC} : Diện tích tam giác ABC

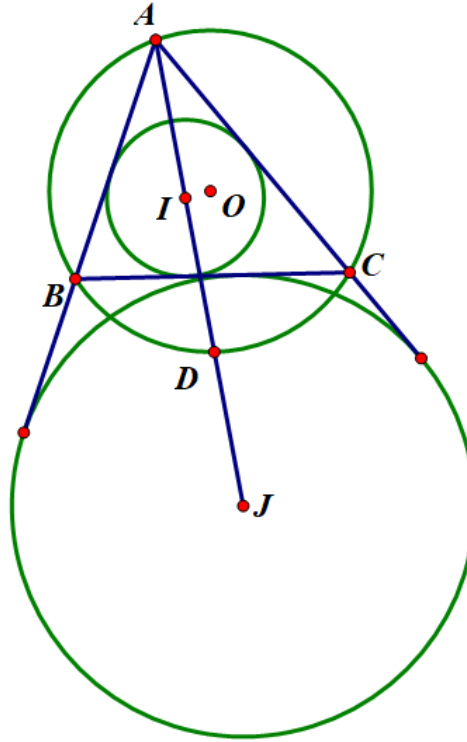
A, B, C, D đồng viên: A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn

đpcm: Điều phải chứng minh

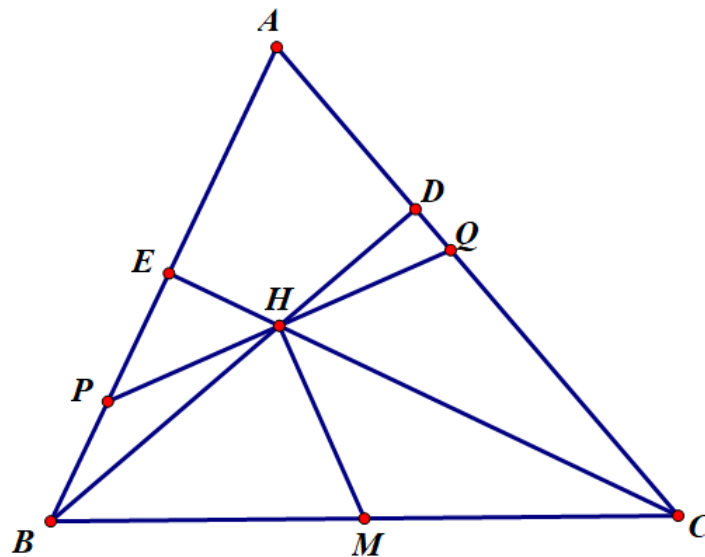
1.2 Một số bổ đề dùng trong tài liệu

Sau đây là các bổ đề hay gặp được chúng tôi sử dụng trong tài liệu và không đưa ra phép chứng minh, bạn đọc sẽ phải tự chứng minh. Ngoài ra còn rất nhiều tính chất, bổ đề quen thuộc bạn đọc sẽ được tiếp cận qua các bài toán.

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , phân giác góc A cắt (O) tại D khác A . I thuộc AD và J thuộc tia đối của tia DA . Khi đó I, J là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc A khi và chỉ khi $DB = DC = DI = DJ$.



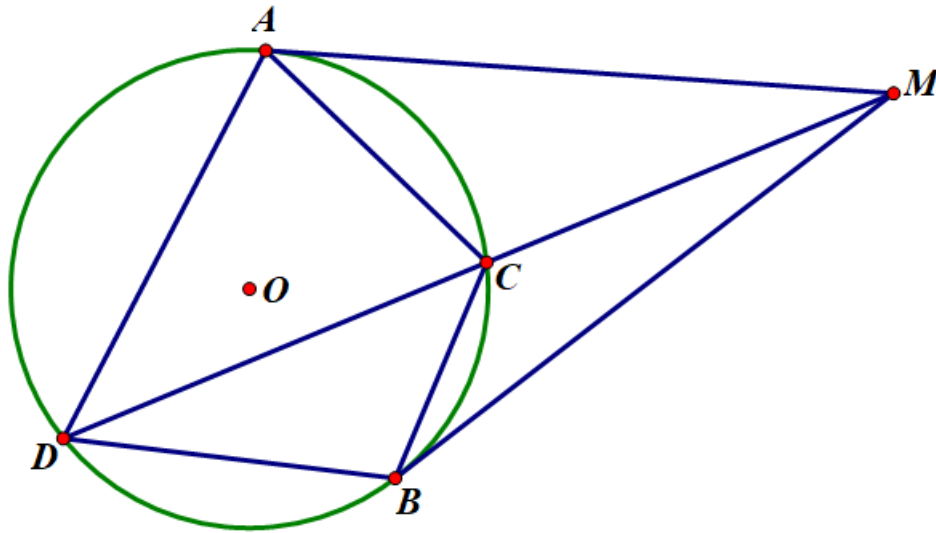
Bổ đề 2: Cho tam giác ABC có trực tâm H . M là trung điểm BC . Đường thẳng qua H cắt AB, AC lần lượt tại P, Q khi đó $MH \perp PQ \Leftrightarrow HP = HQ$



Nhận xét. Đây là trường hợp đặc biệt của bài toán con bướm.

Bổ đề 3: Từ điểm M nằm ngoài (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB . Kẻ cát tuyến MCD tới (O) .

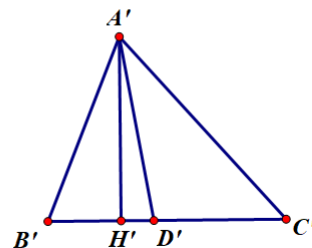
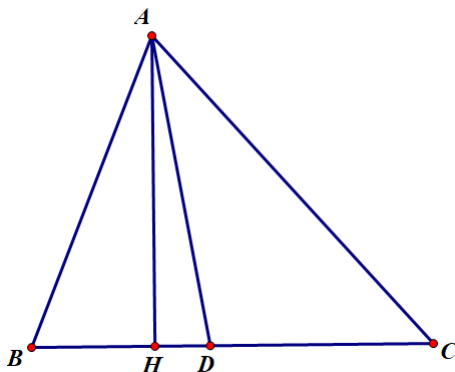
Khi đó ta có $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$



Nhận xét. Tứ giác $ACBD$ như trên được gọi là tứ giác điều hòa. Trong bậc THCS ta chủ yếu nghiên cứu tính chất trên.

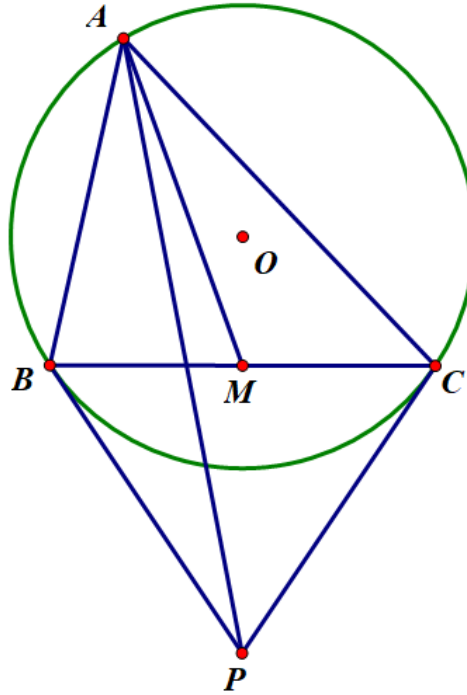
Bổ đề 4: Phép đồng dạng tương ứng (không có định nghĩa).

Ví dụ: Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng có các phân giác AD, AD' và đường cao AH, AH' . Khi đó ta có $\frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'}$; $\frac{AB}{HD} = \frac{A'B'}{H'D'}$; $\frac{R_{(ABD)}}{R_{(A'B'D')}} = \frac{R_{(ADC)}}{R_{(A'D'C')}}$; $\widehat{ADB} = \widehat{A'D'B'}$ và ta có hàng loạt các tỉ số, các góc bằng nhau sao cho chúng có tính tương ứng.



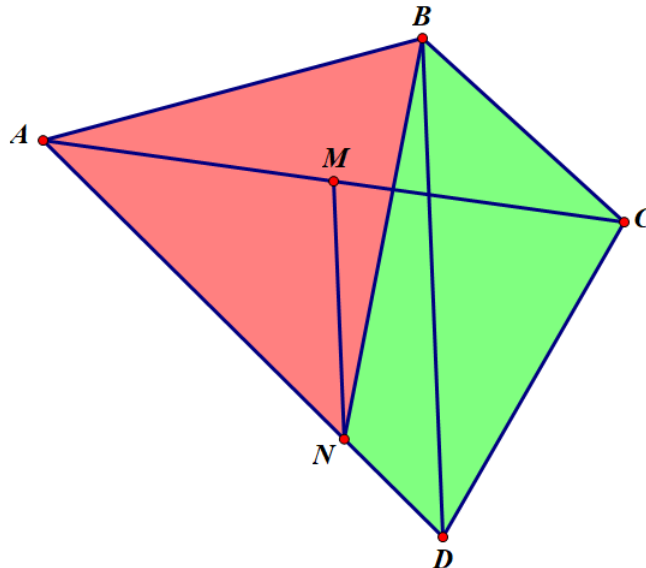
Nhận xét. Phép đồng dạng tương ứng không có trong chương trình học và dạy nhưng chúng ta hoàn toàn chứng minh được bằng phép đồng dạng. Nó giúp chúng ta nhìn hình dễ hơn và lời giải sẽ đẹp, gọn hơn rất nhiều.

Bổ đề 5: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P . Gọi M là trung điểm của BC . Khi đó $\widehat{BAP} = \widehat{CAM}$.

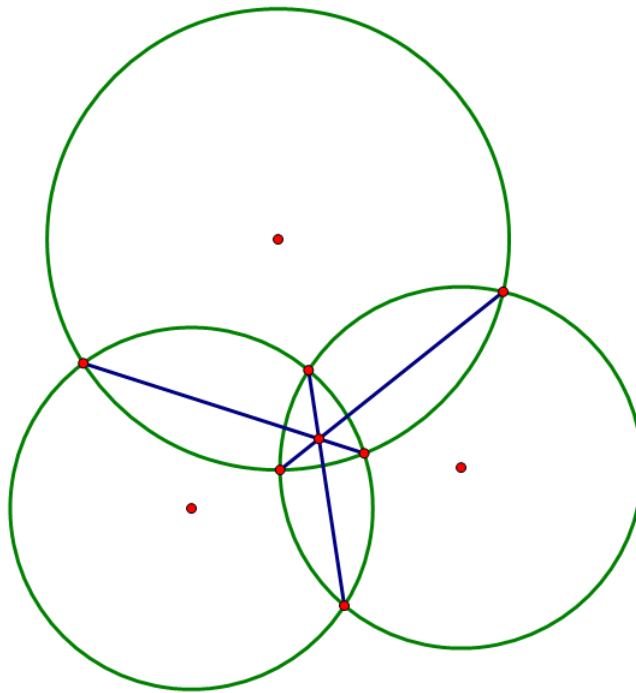


Nhận xét. Đường thẳng AP được gọi là đường đối trung trong tam giác ABC và đã có rất nhiều bài toán đề cập tới đường thẳng này, bạn đọc sẽ thấy ở trong tài liệu.

Bổ đề 6: Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M là trung điểm AC . Điểm N thuộc đoạn thẳng DA hoặc DC sao cho BN chia diện tích tứ giác thành hai phần bằng nhau. Khi đó ta có $MN \parallel BD$.



Bổ đề 7: Cho ba đường tròn phân biệt đôi một cắt nhau tại hai điểm, khi đó ba dây cung chung của ba đường tròn đồng quy.



Nhận xét. Đây là nội dung của định lý trục đẳng phương, trong bậc THCS thì ta chỉ xét trường hợp hai đường tròn có dây cung chung.

Ngoài ra các bạn nên đọc thêm các định lý hay dùng trong bậc THCS như **Menelaus**, **Ceva**, **Ptoleme**... để có thêm nền tảng vững chắc.

Chương 2

Các bài toán đã có lời giải

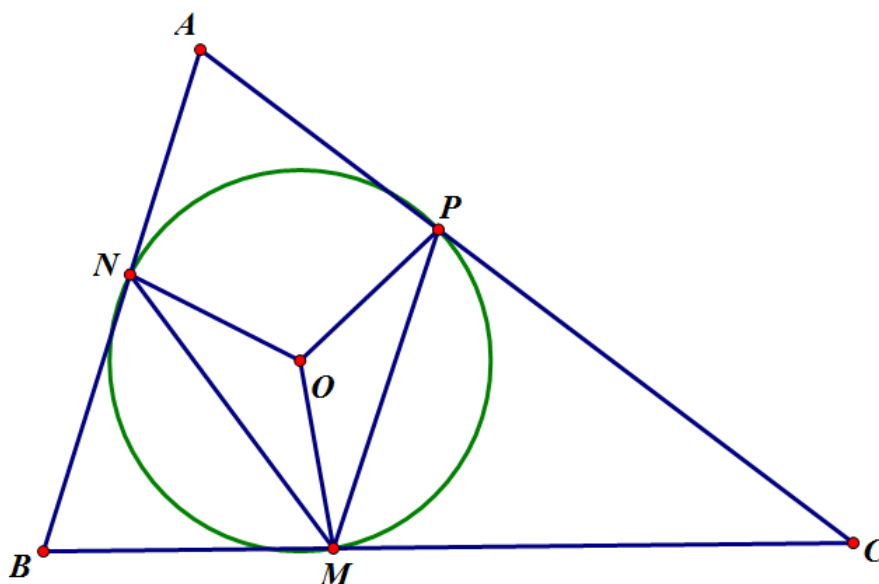
Bài 1

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm (O) . Trên đoạn BC lấy điểm M , trên đoạn BA lấy N , trên đoạn CA lấy P sao cho $BM = BN$ và $CM = CP$.

- a, Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP
- b, Chứng minh tứ giác $ANOP$ nội tiếp
- c, Tìm một vị trí của M, N, P sao cho độ dài đoạn NP nhỏ nhất

(Đề thi TS lớp 10 Sư Phạm 2000-2001)

Lời giải



a, Ta có: $BM = BN; CM = CP$ suy ra BO là trung trực MN và CO là trung trực MP suy ra O là tâm (MNP)

b, Theo tính đối xứng ta có: $\widehat{APO} + \widehat{ANO} = \widehat{OMC} + \widehat{OMB} = 180^\circ$ suy ra tứ giác $ANOP$ nội tiếp

c, Ta có: $\widehat{NOP} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ (không đổi) mà $ON = OP$ nên để NP nhỏ nhất thì $ON = OP = OM$ nhỏ nhất khi đó M, N, P là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với 3 cạnh của tam giác.

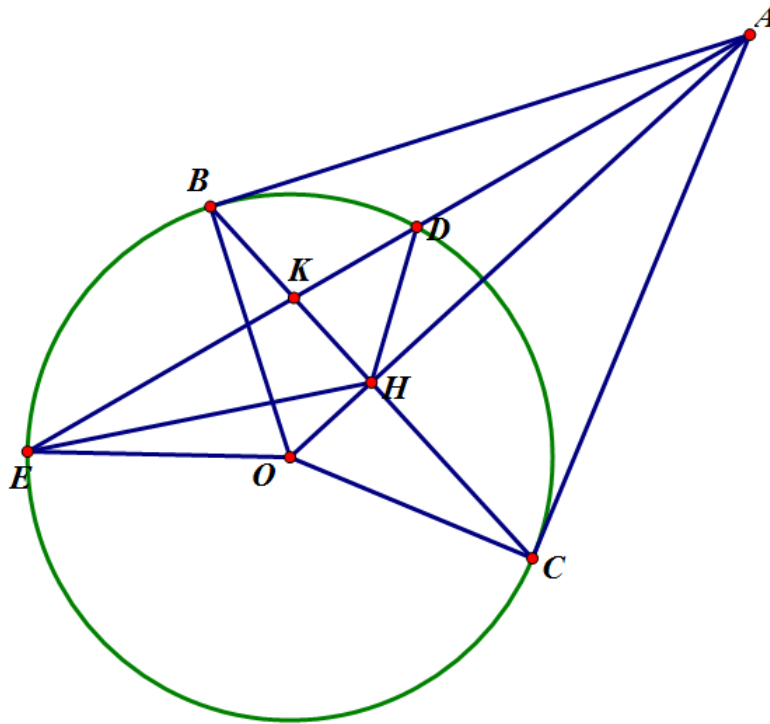
Bài 2

Từ điểm A ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC và cát tuyến ADE . BC cắt DE ở K . Chứng minh hệ thức sau:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{AE} = \frac{2}{AK}$$

(trích đề thi TS lớp 10 tỉnh Phú Thọ 2017-2018)

Lời giải



Gọi giao của AO và BC là H ta có: $AH.AO = AD.AE = AB^2$ suy ra tứ giác $DHOE$ nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{DHA} = \widehat{OED} = \widehat{ODE} = \widehat{OHE}$

Suy ra HK, HA là phân giác trong và phân giác ngoài $\widehat{DHE}$

$$\Rightarrow \frac{DK}{AD} = \frac{KE}{AE} \text{ (Theo tính chất phân giác)}$$

$$\text{Mà } \frac{AK}{AD} + \frac{AK}{AE} = 2 + \frac{DK}{AD} - \frac{EK}{AE} = 2 \Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE} = \frac{2}{AK}$$

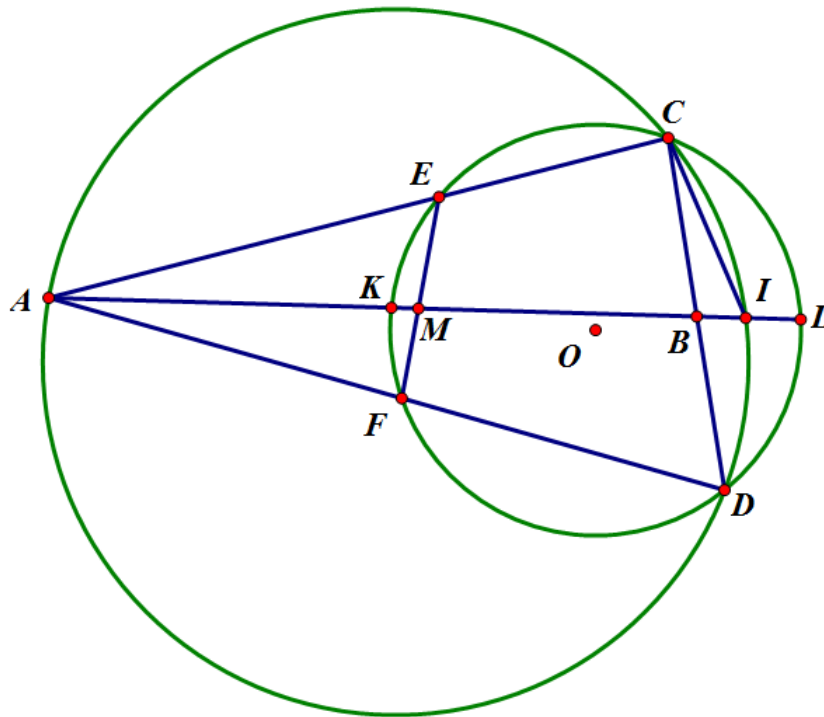
Nhận xét: Đây chính là hệ thức **Descartes**

Bài 3

Cho đường tròn (O) và điểm A, B cố định, trong đó A nằm ngoài và B nằm trong (O) . Dây CD di động và đi qua B . AC, AD lần lượt cắt (O) tại điểm thứ 2 là E và F . Chứng minh EF đi qua một điểm cố định.

(Đề xuất bởi **Khoa Linh**)

Lời giải



$$AB \cap (O) = \{K, L\}; EF \cap AB = \{M\}; (ACD) \cap AB = \{A, I\}$$

Ta có: $AB.BI = CB.BD = BK.BL$ (không đổi) $\Rightarrow I$ cố định.

Mặt khác: $\widehat{AEM} = \widehat{FDC} = \widehat{MIT} \Rightarrow MECI$ nội tiếp

$$\Rightarrow AM.AI = AE.AC = AK.AL \text{ (không đổi)}$$

$\Rightarrow M$ cố định. Vậy EF đi qua điểm M cố định.

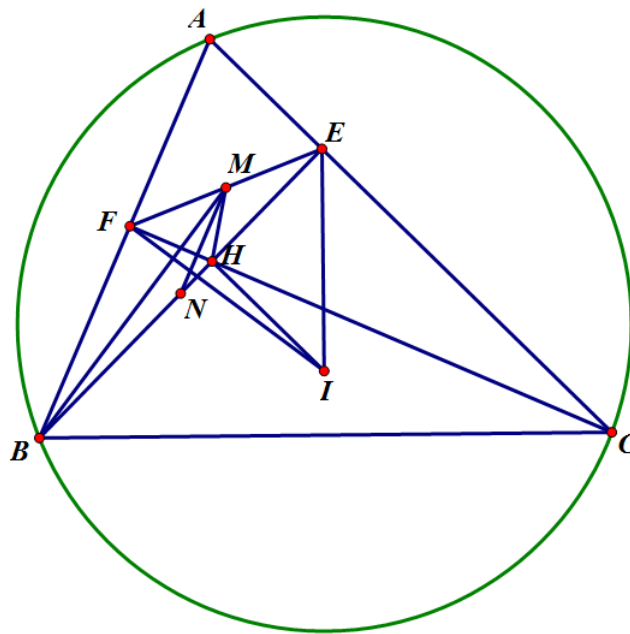
Bài 4

Cho tam giác ABC có đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm EF và dựng hình bình hành $AEIH$. Chứng minh: BM vuông góc với IF .

(Đề xuất bởi **Tự Cường**)

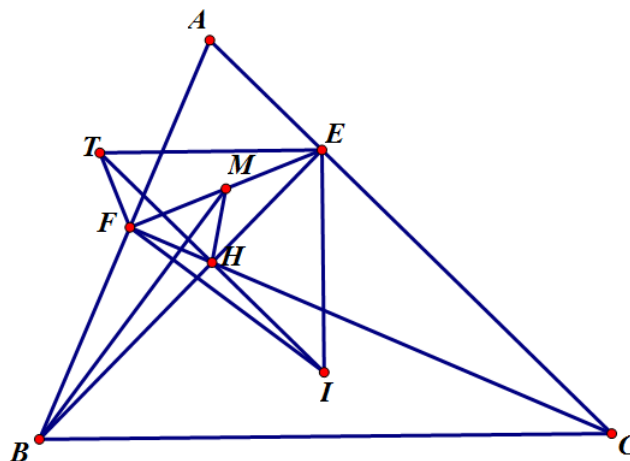
Lời giải

Cách 1:



Gọi N là trung điểm BE . Khi đó ta chứng minh được: $\triangle MNB \sim \triangle FHI$ (c.g.c) suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2:



Lấy T đối xứng với I qua điểm H thì ta có ngay $\widehat{ETI} = \widehat{EIH} = \widehat{EAH} \Rightarrow ATHE$ nội tiếp.

Từ đó A, T, F, H, E cùng thuộc một đường tròn nhận ET là đường kính.

Suy ra $\triangle TFH \sim \triangle EFB(g.g)$ kéo theo $\triangle IFT \sim \triangle BME(c.g.c)$ suy ra đpcm.

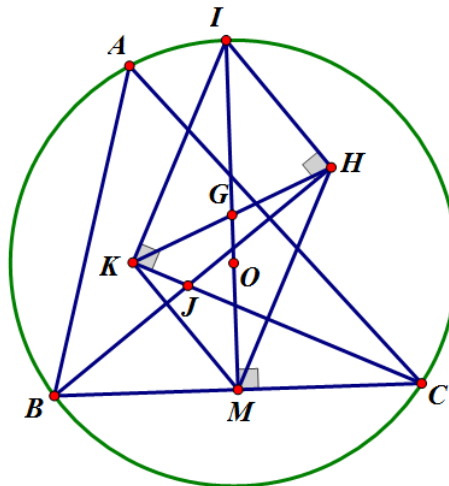
Bài 5

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . I là điểm chính giữa cung lớn BC . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của I lên phân giác góc trong tại B và C .

Chứng minh rằng trung điểm G của HK thuộc trung trực BC

(Đề xuất bởi **Khoa Linh**)

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC . Khi đó ta có IM vuông góc với BC . $KC \cap BH = J$

Ta có: $\widehat{IKC} = \widehat{IMC} = 90^\circ$ suy ra $IKMC$ nội tiếp và $IHMB$ nội tiếp.

suy ra: $\widehat{MKC} = \widehat{MIC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ và $\widehat{KIH} = \widehat{HJC} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}$

Từ đó: $\widehat{IKM} + \widehat{KIH} = 180^\circ$ suy ra $KM \parallel IH$. Tương tự thì ta có: $IKMH$ là hình bình hành

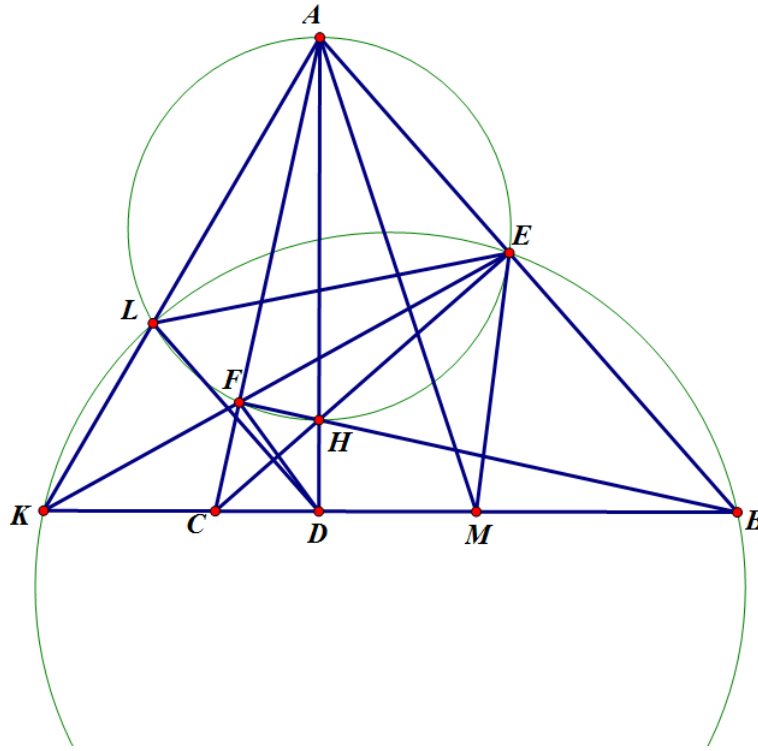
Suy ra G thuộc IM hay ta có điều phải chứng minh.

Bài 6

Cho $\triangle ABC$ nhọn có $AB > AC$. Các đường cao AD, BF, CE cắt nhau ở H . BC cắt EF ở K . Gọi M là trung điểm của BC . $(O), (O')$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp 2 tam giác AEF, BKE . Chứng minh H là trực tâm của tam giác AMK .

(Đề xuất bởi **conankun**)

Lời giải



Gọi L là giao điểm thứ 2 của (O) và (O') .

Ta có: $\widehat{ALE} = \widehat{AFE} = \widehat{EBC} = 180^\circ - \widehat{KLE}$. Suy ra A, L, K thẳng hàng.

$$\widehat{HLA} = \widehat{HFA} = 90^\circ \Rightarrow HL \perp AK. (1)$$

Ta lại có:

$$\widehat{EMD} = 2\widehat{MBE} = \widehat{AFE} + \widehat{CFD} = 180^\circ - \widehat{DFE} \text{ suy ra tứ giác } DFEM \text{ nội tiếp.}$$

$$\text{Suy ra: } KL.KA = KF.KE = KD.KM \Rightarrow ALDM \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{MLA} = \widehat{MDA} = 90^\circ \\ \Rightarrow ML \perp AK (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: M, H, L thẳng hàng và H là trực tâm tam giác AKM .

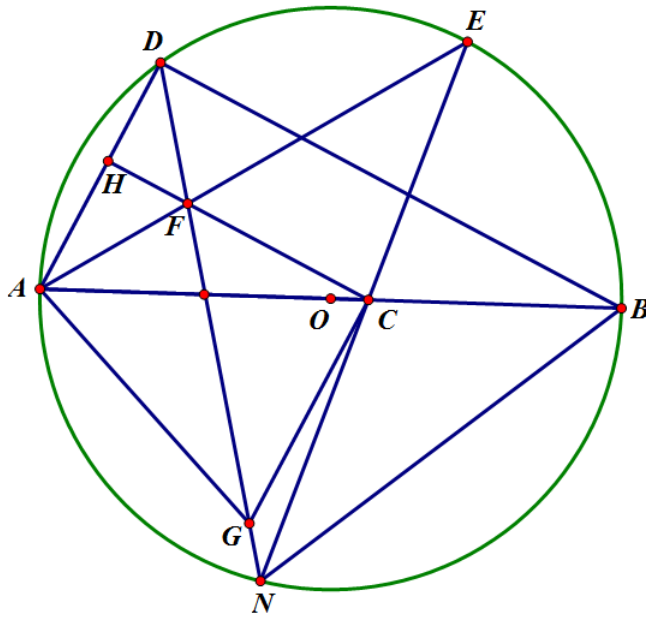
Nhận xét. Bài toán này là bài toán hay có nhiều lời giải bằng các dụng các đường tròn ngoại tiếp khác nhau.

Bài 7

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ cắt (O) tại D và cắt AC tại E . Gọi (w) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB . F là giao BC và (w) , DF cắt (w) tại G , EG cắt AD, BC tại M, N . Chứng minh rằng: $\frac{MA}{MD} \cdot \frac{NB}{NC} = \frac{AB^2}{DC^2}$.

(Đề xuất bởi **Nguyễn Tăng Vũ**)

Lời giải



a, Ta có: $\widehat{NAC} = \widehat{NDB} = \widehat{NFC} \Rightarrow$ Tứ giác $AFCN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FNC} = \widehat{FAC} = \widehat{DAE} = \widehat{DNE} \Rightarrow C, N, E$ thẳng hàng

b) Kẻ CG song song AD ($G \in DN$)

Ta có: $\widehat{CGD} = \widehat{ADN} = \widehat{ABN} \Rightarrow$ Tứ giác $BCGN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CGB} = \widehat{CNB} = \widehat{EAB} = \widehat{FNC} = \widehat{CBG}$

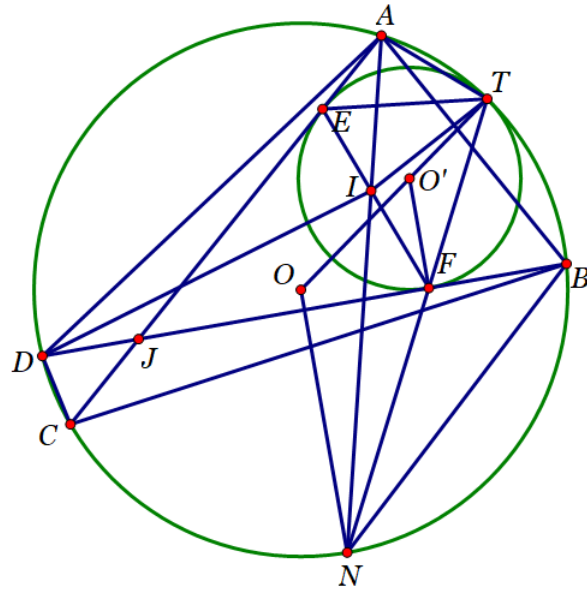
$\Rightarrow \triangle CGB$ cân tại $C \Rightarrow CG = CB = AD \Rightarrow ADCG$ là hình bình hành

$\Rightarrow DN$ đi qua trung điểm AC

Bài 10

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong (O) , AC cắt BD tại J . Đường tròn (O') tiếp xúc với JA, JB tại E, F và tiếp xúc trong với (O) , Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABD$

(Định lý **Lyness**)



Gọi T là tiếp điểm của (O) và (O') , TF cắt (O) tại N , AN cắt EF tại I .

Ta có: $O'F \perp BD$ nên $ON \perp BD$ do đó N là điểm chính giữa cung BD nên AN là phân giác $\angle DAB$.

Dễ dàng chứng minh $BN^2 = NF.NT(1)$ ($\triangle NFB \sim \triangle NBT$)

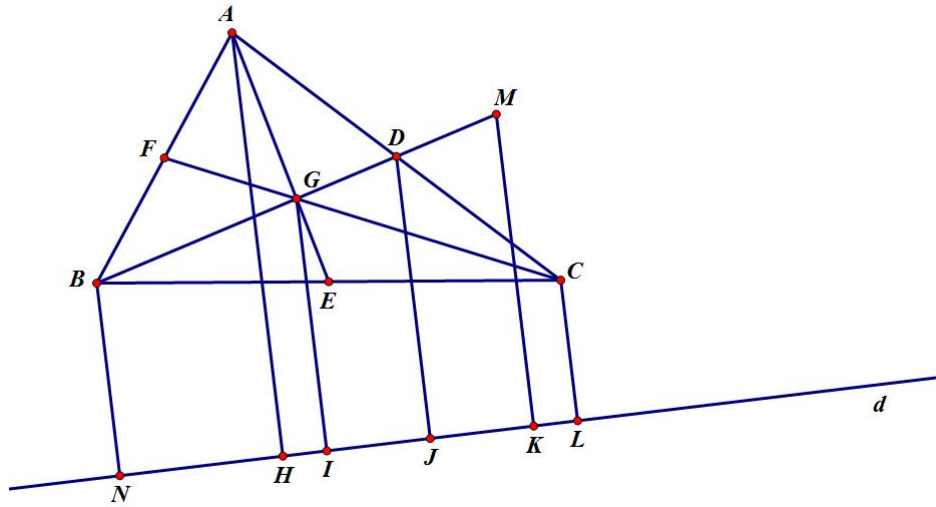
và $\angle NAT = \frac{1}{2}\angle TON = \frac{1}{2}\angle TO'F = \angle IET$ nên tứ giác $IEAT$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AIT = \angle AET = \angle IFT$ nên $\triangle NIF \sim \triangle NTI$ suy ra $NF.NT = NI^2(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $NI = NB = ND$ nên I là tâm nội tiếp tam giác ABD .

Bài 11

Từ 3 đỉnh của một tam giác hạ các đường vuông góc xuống một đường thẳng ở ngoài tam giác đó. Chứng minh rằng tổng độ dài của 3 đường vuông góc đó gấp 3 lần độ dài của đoạn thẳng vuông góc hạ từ trọng tâm của tam giác xuống cùng đường thẳng đó .

(Đề xuất bởi **thanhdatqv2003**)



Dựng các điểm như hình vẽ (M đối xứng với trọng tâm G qua D)

Theo tính chất đường trung bình hình thang ta có:

$$(AH + CL) + BN = 2DJ + BN = GI + MK + BN = GI + (MK + BN) = 3GI$$

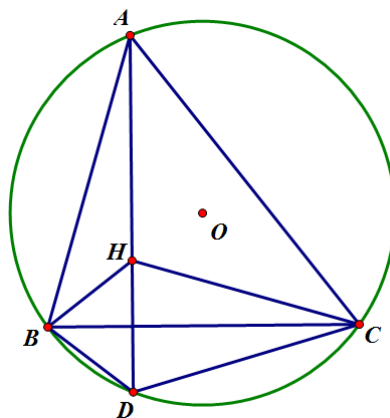
Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 12

Cho $\triangle ABC$ có trực tâm H . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của $\triangle HBC, \triangle HAB, \triangle HCA$ có bán kính bằng nhau.

(Đề xuất bởi **Lao Hạc**)

Lời giải



Gọi D là giao điểm thứ 2 của AH với (ABC) .

Để dàng chứng minh được D đối xứng với H qua BC . Suy ra $R_{(BHC)} = R_{(BDC)} = R_{(ABC)}$.

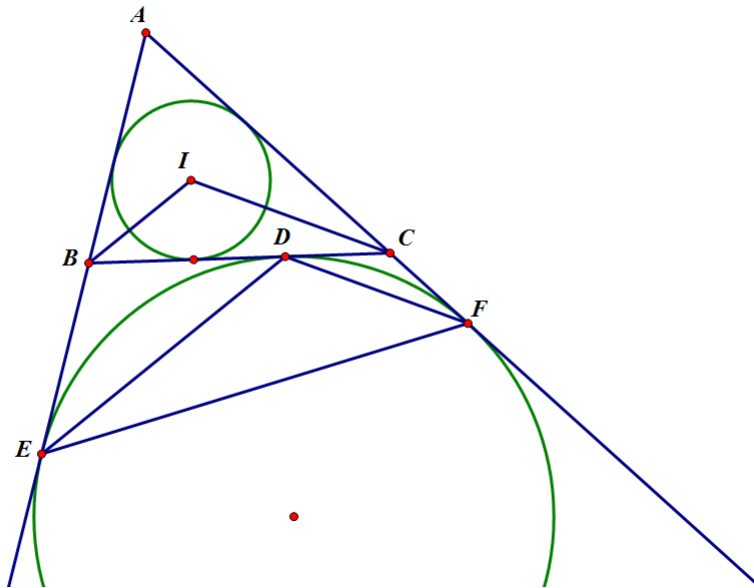
Tương tự ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC, \triangle HAB, \triangle HCA$ bằng nhau và cùng bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Bài 13

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) . Gọi D, E, F là điểm tiếp xúc của đường tròn bàng tiếp đỉnh A với ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng: $S_{BIC} > \frac{1}{4}S_{DEF}$

(Đề xuất bởi **NguyenHoaiTrung**)

Lời giải



Ta dễ dàng chứng minh được: $BI \parallel DE; IC \parallel DF \Rightarrow \triangle BIC \sim \triangle FDE(g.g) \Rightarrow \frac{S_{BIC}}{S_{DEF}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$

Mặt khác $2BC = BC + BE + CF > EF \Rightarrow \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 > \frac{1}{4}$.

Suy ra đpcm.

Bài 14

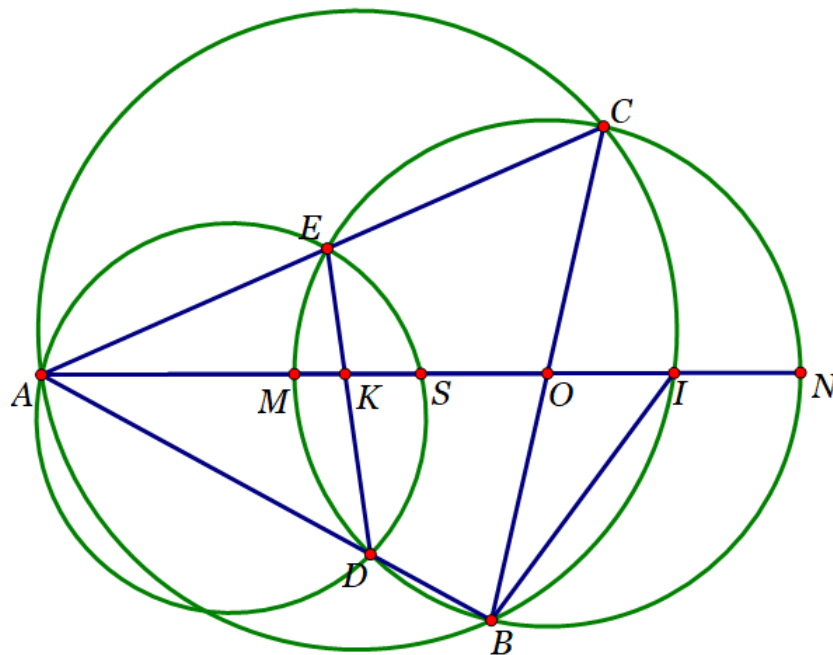
Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định với $OA = 2R$, đường kính BC quay quanh O sao cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng; Đường tròn (ABC) cắt OA tại điểm thứ 2 là I . Đường thẳng AB, AC cắt $(O; R)$ lần lượt tại D, E với $D \neq B, C \neq E$. Nối DE cắt đường thẳng OA tại K .

a) Chứng minh: $OI.OA = OB.OC$ và $AK.AI = AE.AC$

b) Tính độ dài $OI; OK$ theo R

c) Chứng minh: đường tròn (ADE) luôn đi qua 1 điểm cố định (khác A) khi BC quay quanh O .

(TS lớp 10 đại học Sư Phạm ngoại ngữ 2001-2002)

Lời giải

OA cắt (O) tại M, N .

a, Tương tự bài số 3

b, $OI.OA = 2R.OI = OB.OC = R^2$ suy ra $OI = \frac{R}{2}$.

Ta có: $AK.AI = AD.AB = AM.AN = 3R^2$ suy ra $AK \cdot \frac{5}{2}R = 3R^2 \Rightarrow AK = \frac{6}{4}R \Rightarrow OK = \frac{4}{5}R$.

c) Gọi (ADE) giao AO tại S khác A .

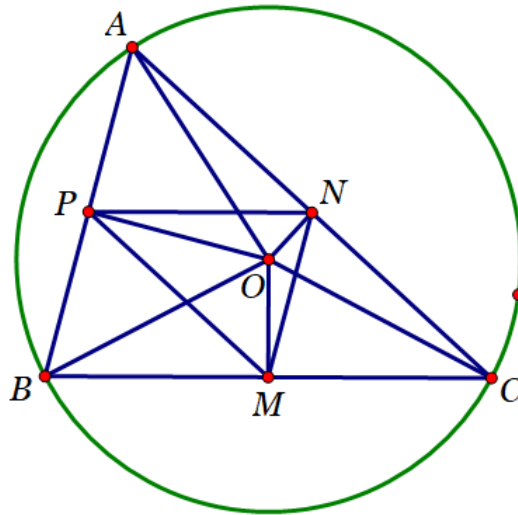
Do K cố định nên $KD.DE$ không đổi và $KD.KE = KA.KS$ nên KS không đổi nên S cố định. Vậy (ADE) đi qua điểm S là điểm cố định.

Bài 15

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp $(O; R)$ và ngoại tiếp $(I; r)$. Gọi x, y, z là khoảng cách từ (O) xuống ba cạnh của tam giác ABC . Chứng minh hệ thức $x + y + z = R + r$

(Định lý **Carnot**)

Lời giải



Gọi M, N, P là trung điểm BC, CA, AB .

Áp dụng định lý **Ptolemy** ta có: $OB.MP = OM.BP + OP.BM \Leftrightarrow R.\frac{b}{2} = x.\frac{c}{2} + z.\frac{a}{2}$

Thiết lập các đẳng thức tương tự rồi cộng lại được.

$$R.\frac{a+b+c}{2} = \frac{b+c}{2}.x + \frac{a+c}{2}.y + \frac{a+b}{2}.z$$

Để ý rằng $2S_{ABC} = 2r(a+b+c) = ax + by + cz$

$$\text{Suy ra } R.\frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b+c}{2}.r = \frac{b+c}{2}.x + \frac{a+c}{2}.y + \frac{a+b}{2}.z + x.\frac{a}{2} + y.\frac{b}{2} + z.\frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow (R+r).\frac{a+b+c}{2} = (x+y+z).\frac{a+b+c}{2}.$$

Suy ra đpcm

Nhận xét. Hệ thức trên chỉ đúng khi $\triangle ABC$ nhọn. Nếu $\triangle ABC$ tù tại A thì ta có hệ thức

$R + r = y + z - x$. Tương tự với góc B, C tù thì ta có các hệ thức còn lại.

Bài 16

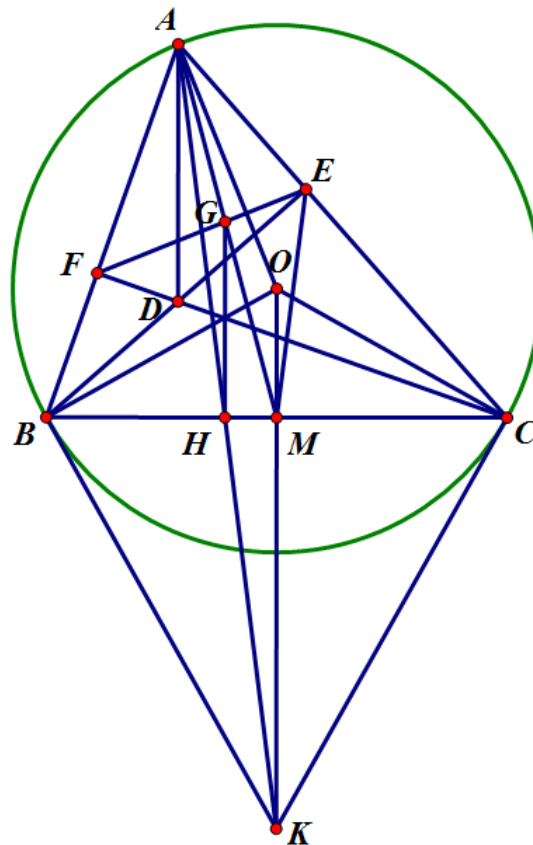
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có các đường cao BE, CF . Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau ở K , gọi M là giao điểm của OK với BC .

1, Chứng minh: $\triangle AEB \sim \triangle CMK$

2, Chứng minh: $\widehat{BAK} = \widehat{MAC}$

3, Gọi G là giao điểm của AM và EF , H là giao điểm của AK và BC . Chứng minh rằng $GH \parallel OM$

(Đề xuất bởi **BunhiChySchwarz**)

Lời giải

1, Ta có: $\triangle AEB \sim \triangle CMK$ (g.g)

2, Ta có: $OM \cdot OK = OC^2 = OA^2 \Rightarrow \triangle OMA \sim \triangle OAK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OKA} = \widehat{DAH}$ (1)

Mặt khác $\widehat{OAC} = \widehat{DAB}$ (2)

Từ (1), (2) ta có: $\widehat{MAC} = \widehat{BAK}$

3, Ta có: $\triangle AGE \sim \triangle AHB$ và $\triangle AEM \sim \triangle ABK$ (g.g)

Suy ra $\frac{AG}{AH} = \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AK} \Rightarrow HG \parallel OM$

Bài 17

Từ M nằm ngoài (O) cho trước dựng hai tiếp tuyến MA, MB . C Chạy trên cung nhỏ AB .
 D, E, F là hình chiếu của C trên AB, MA, MB . S, T là giao của DE, DF với CA, CB .
 Chứng minh rằng:

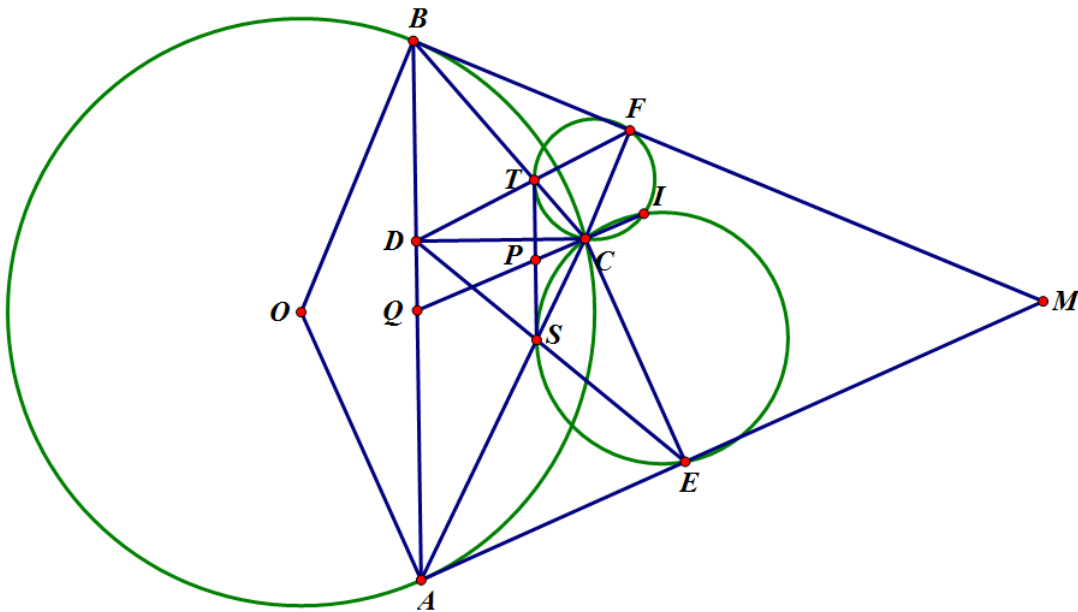
a, $ST \parallel AB$.

b, Chứng minh ST là tiếp tuyến chung của (TFC) và (SCE)

c, Gọi I là giao điểm thứ 2 của (TFC) và (SCE) . Chứng minh: CI đi qua điểm cố định khi C di chuyển trên cung AB

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



a, Dễ dàng chứng minh được tứ giác $CDAE$ và $CDFB$ nội tiếp nên ta có:

$$\angle SDT = \angle CAB + \angle CBA = 180^\circ - \angle SCT$$

Từ đây suy ra tứ giác $SCTD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CST = \angle CDT = \angle CBF = \angle CAB$

Suy ra $ST \parallel AB$

b, Ta có : $\widehat{CST} = \widehat{CAD} = \widehat{CED} \Rightarrow ST$ là tiếp tuyến của (SEC) .

Tương tự ta cũng có ST là tiếp tuyến của (TCF)

c , Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của IC với TS và AB .

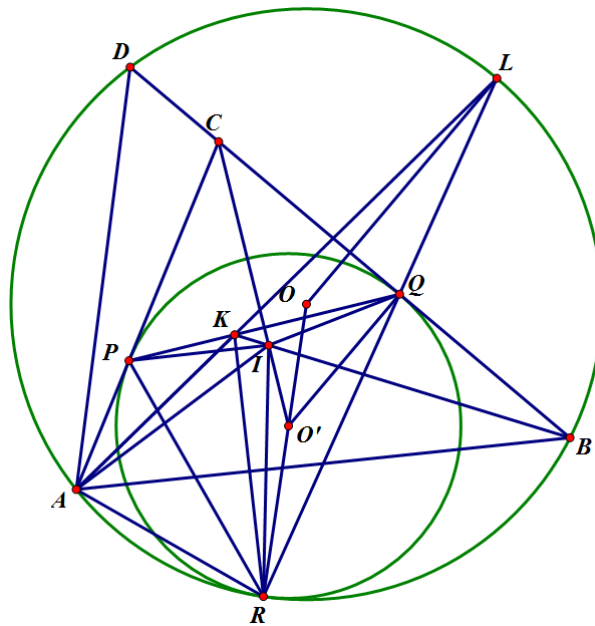
Vì ST là tiếp tuyến chung của (TFC) và (SCE) nên $TP^2 = PS^2 = PC \cdot PI \Rightarrow PT = PS$ mà $TS \parallel AB$ nên Q là trung điểm AB (cố định) Suy ra đpcm.

Bài 18

Cho đường tròn (O) hai điểm A, B nằm trên đường tròn, điểm C nằm trong đường tròn (O) . Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại R và tiếp xúc với CA, CB theo thứ tự ở P, Q . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh : A, P, R, I đồng viên.

(Bổ đề **Sawayama**)

Lời giải



Kéo dài BC cắt (O) tại điểm thứ hai là D . Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DAB và L là điểm chính giữa cung BD .

Theo bài số 10 thì ta có: P, K, Q thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{RPK} = \frac{\widehat{RO'Q}}{2} = \frac{\widehat{ROL}}{2} = \widehat{RAK}$ nên tứ giác $RAPK$ nội tiếp.

Mặt khác: $\widehat{IKQ} = \widehat{CQP} - \widehat{QBK} = 90^\circ - \frac{\widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{CBA}}{2} = \frac{\widehat{CAB}}{2} = \widehat{PAI}$

Suy ra tứ giác $PKIA$ nội tiếp. Từ đó ta có: P, I, R, A đồng viên.

Bài 19

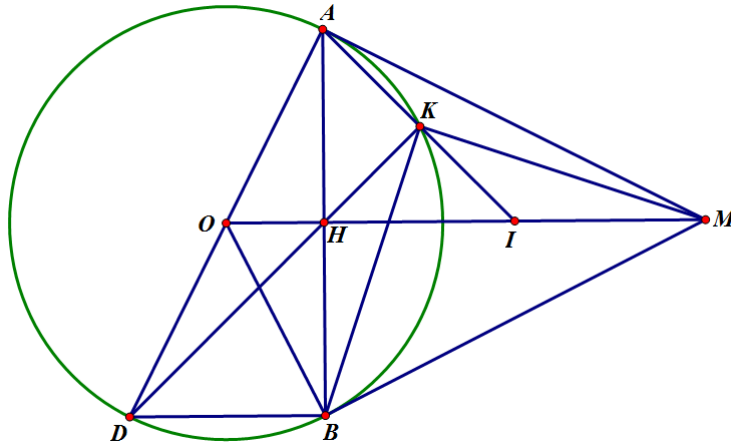
Cho tam giác từ M nằm ngoài (O) vẽ tiếp tuyến MA, MB , gọi MO giao AB tại H , I là trung điểm MO , K là giao của AI và (O) .

a, Chứng minh $IA \perp HK$.

b, Tính $\widehat{MKB}$.

(Đề thi **TP.HCM** 2014-2015)

Lời giải



a, Kẻ đường kính AD của (O) . Ta có: $\triangle AHM \sim \triangle DBA(g.g)$

Vì H là trung điểm AB và I là trung điểm MO nên $\triangle DBH \sim \triangle AHI(c.g.c)$

Suy ra $\widehat{BDH} = \widehat{HAK} = \widehat{BDK}$ nên D, H, K thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{AKH} = \widehat{ABD} = 90^\circ$ nên $AI \perp HK$

b, Vì $AI \perp HK$ nên $\widehat{KHI} = \widehat{HAK} = \widehat{KBM}$. Từ đó ta có tứ giác $KHBM$ nội tiếp.

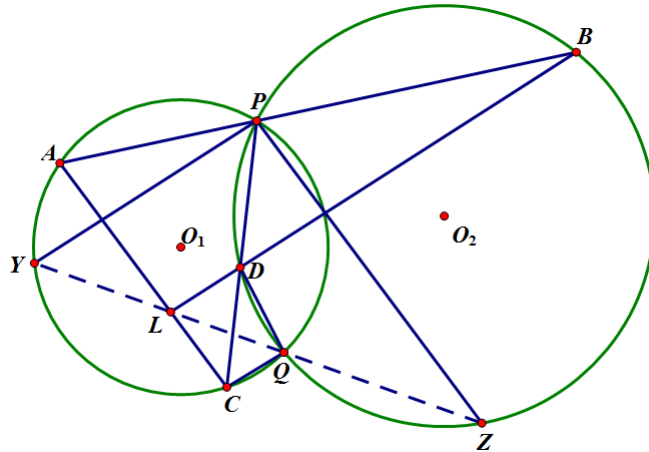
Suy ra $\widehat{BKM} = \widehat{BHM} = 90^\circ$

Bài 20

Đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại P và Q . Qua P vẽ đường thẳng d_1 bất kỳ cắt (O_1) và (O_2) tại A và B . Đường thẳng d_2 qua P cắt (O_1) và (O_2) tại C và D . BD cắt AC tại X . Vẽ dây $PY \parallel BD$ ($Y \in (O_1)$), $PZ \parallel AC$ ($Z \in (O_2)$). Chứng minh rằng : X, Y, Z, Q thẳng hàng.

(Đề xuất bởi **taconghoang**)

Lời giải



Ta có: $\widehat{QDB} = \widehat{QPB} = \widehat{LCQ}$ nên tứ giác $LDQC$ nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{DLQ} = \widehat{DCQ} = \widehat{PYQ}$ mà $DL \parallel PY$ nên Y, L, Q thẳng hàng.

và $\widehat{CLQ} = \widehat{CDQ} = \widehat{PZQ}$ nên L, Q, Z thẳng hàng.

Vậy suy ra Y, L, Q, Z thẳng hàng.

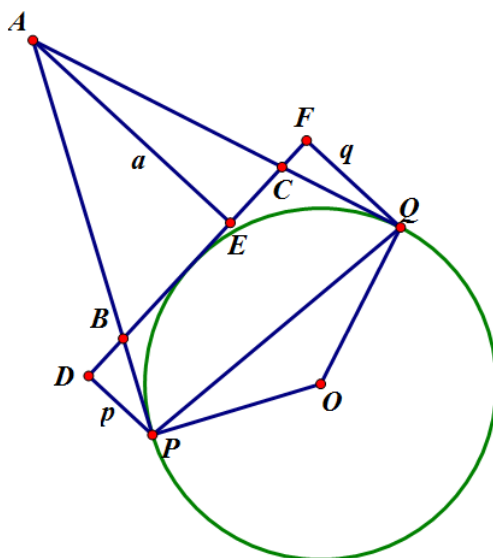
Bài 21

1, Cho $\widehat{x\hat{A}y} = 90^\circ$ và đường tròn (O) tiếp xúc với Ax và Ay lần lượt tại P, Q . Đường thẳng (d) là một tiếp tuyến thay đổi của (O) . Gọi a, p, q là khoảng cách từ A, P, Q xuống đường thẳng (d) . Chứng minh: $\frac{a^2}{pq}$ không đổi khi (d) dịch chuyển

2, Khẳng định trên còn đúng không khi $\widehat{x\hat{A}y}$ không phải góc vuông.

(Đề thi PTNK 2000)

Lời giải



Gọi B, C là giao điểm của (d) với AP, AQ . Đặt $AB = c; AC = b; BC = a$ và $m = \frac{a+b+c}{2} = AP = AQ$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{pq}{a^2} &= \frac{BP \cdot CQ}{AB \cdot AC} = \frac{(m-c)(m-b)}{bc} = \frac{m^2 - m(b+c) + bc}{bc} = \frac{m^2 - m(b+c)}{bc} + 1 \\ &= \frac{(a+b+c)^2 - 2(a+b+c)(b+c)}{4bc} + 1 = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}{4bc} + 1 = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{4bc} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1, Nếu $\widehat{xAy} = 90^\circ$ thì $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{4bc} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (không đổi)

2, Nếu $\widehat{xAy}$ không phải góc vuông thì $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{4bc} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos A}{2}$ (không đổi)

Vậy từ đó suy ra $\frac{a^2}{pq}$ không đổi (đpcm)

Bài 22

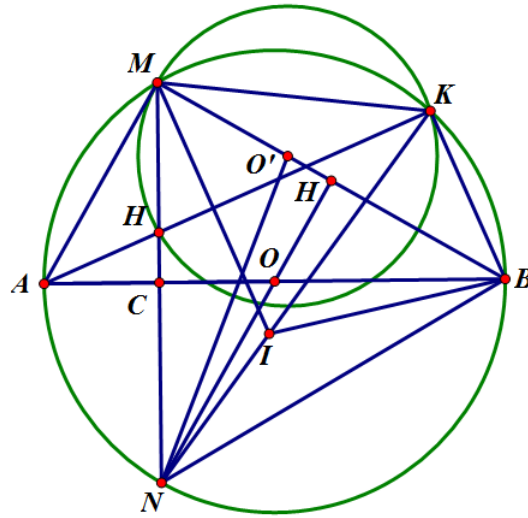
Cho đường tròn (O) , đường kính AB , gọi C là trung điểm AO . Qua C kẻ đường vuông góc với OA cắt (O) tại 2 điểm M và N . Trên cung MN lớn lấy điểm K . Giao điểm của AK với MN là H

a, Tìm vị trí K để cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KMH nhỏ nhất

b, Với K thuộc cung MB , lấy I trên KN sao cho $KI = KM$. Chứng minh: $NI = KB$

(Đề xuất bởi *buingoctu*)

Lời giải



a, Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MHK$ Ta có: $\widehat{AMC} = \widehat{MKH}$ (do cung MA bằng cung NA) nên MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MHK$.

Mà $MA \perp MB$ nên (O') thuộc MB . Kẻ $NH \perp MB$ suy ra H cố định.

Ta có: $NO' \geq NH$. Vậy khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MHK$ nhỏ nhất khi $K \equiv B$

b, Vì C là trung điểm AO nên $\triangle MNB$ đều $\Rightarrow \triangle MIK$ đều.

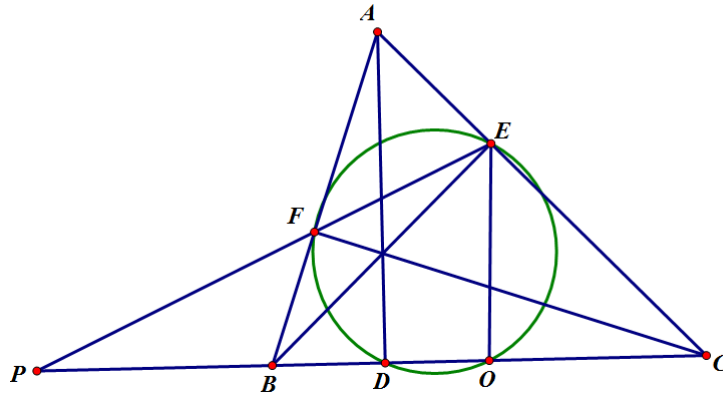
Suy ra $\triangle MNI = \triangle MBK$ (c.g.c) $\Rightarrow NI = KB$ (đpcm)

Bài 23

Cho tam giác ABC với AD, BE, CF là các đường cao tương ứng. EF cắt BC tại P , O là trung điểm BC . Biết rằng $OP = BC$. Chứng minh $DB = DO$.

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



Ta có tính chất quen thuộc là tứ giác $FEOD$ nội tiếp. Kết hợp tứ giác $FECD$ nội tiếp

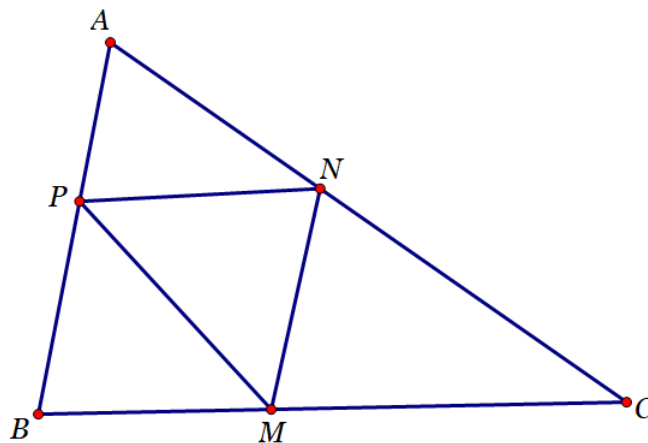
Suy ra: $PD \cdot PO = PE \cdot PF = PB \cdot PC$. Từ đó suy ra được $DB = DO$.

Bài 24

Cho tam giác ABC , M, N, P là các điểm bất kì trên các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng trong các tam giác ANP, BMP, CMN tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC .

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



$$\text{Ta có: } \frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} = \frac{AP \cdot AN}{AB \cdot AC}$$

$$\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \frac{CN \cdot CM}{CA \cdot CB}; \quad \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \frac{BP \cdot BM}{BA \cdot BC}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{S_{ANP} \cdot S_{CMN} \cdot S_{BMP}}{(S_{ABC})^3} = \frac{AP \cdot BP}{AB^2} \cdot \frac{CN \cdot AN}{AC^2} \cdot \frac{CM \cdot BM}{BC^2} \leq \frac{1}{64}$$

Vậy trong 3 tam giác ANP, BMP, CMN tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC .

Bài 25

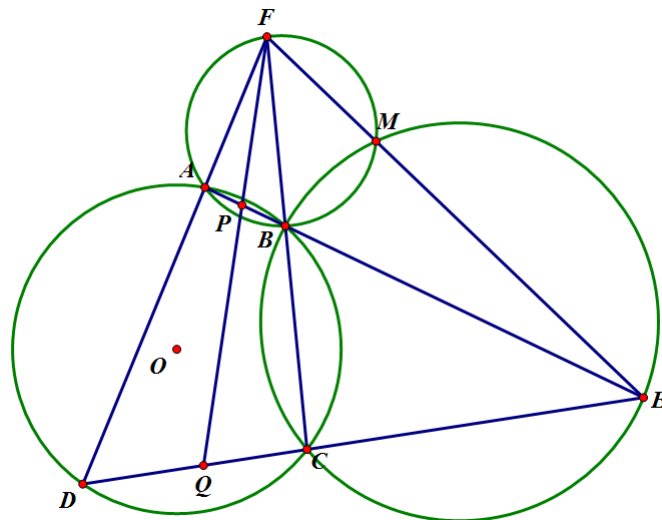
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . $AB \cap CD = \{E\}; AD \cap BC = \{F\}$. Phân giác trong $\widehat{DFC}$ cắt AB, CD lần lượt tại P và Q .

a, Chứng minh: $\triangle PQE$ cân.

b, Chứng minh: $EF^2 = FA \cdot FD + EC \cdot ED$

(Đề thi Quốc học - Huế 2001)

Lời giải



a, Ta có: $\widehat{EPQ} = \widehat{PFB} + \widehat{PBF} = \widehat{DFQ} + \widehat{FDQ} = \widehat{PQE}$ nên $\triangle EPQ$ cân tại E .

b, Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF cắt EF tại M .

Khi đó $\widehat{BMF} = \widehat{BAD} = \widehat{BCE}$ nên tứ giác $CBME$ nội tiếp.

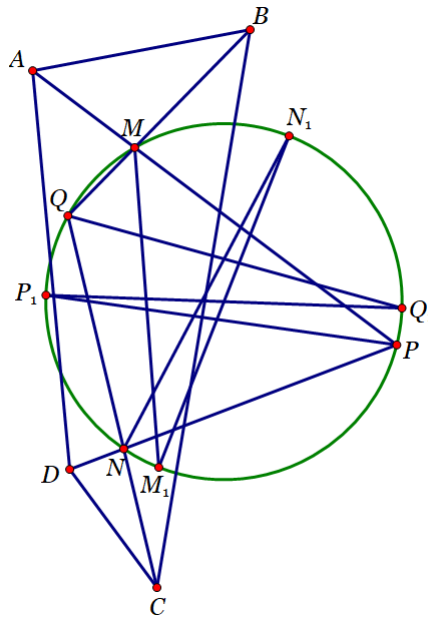
$$\text{Suy ra } FA \cdot FD + EC \cdot ED = FB \cdot FC + EB \cdot EA = FM \cdot FE + EM \cdot EF = EF^2$$

Bài 26

Cho tứ giác $ABCD$, phân giác $\angle DAB$ và $\angle ABC$ cắt nhau tại M , phân giác $\angle ADC$ và $\angle CBD$ cắt nhau tại N , phân giác $\angle BDA$ và $\angle ADC$ cắt nhau tại P , phân giác $\angle ABC$ và $\angle BCD$ cắt nhau tại Q .

1. Chứng minh tứ giác $MPNQ$ nội tiếp.
2. M', N', P', Q' là các tâm nội tiếp MAB, NCD, PAD, QBC , M_1, N_1, P_1, Q_1 là giao của MM', NN', PP', QQ' với $(MNPQ)$. Chứng minh $M_1N_1 = P_1Q_1$

(Đề thi tỉnh Thái Nguyên 2015-2016)

Lời giải

a, Sử dụng phép cộng góc ta có: $\widehat{QMP} = \frac{\widehat{DAB} + \widehat{CBA}}{2}$ và $\widehat{QNP} = \frac{\widehat{ADC} + \widehat{DCB}}{2}$.

Suy ra $\widehat{QMP} + \widehat{QNP} = 180^\circ$ nên ta có tứ giác $MPNQ$ nội tiếp.

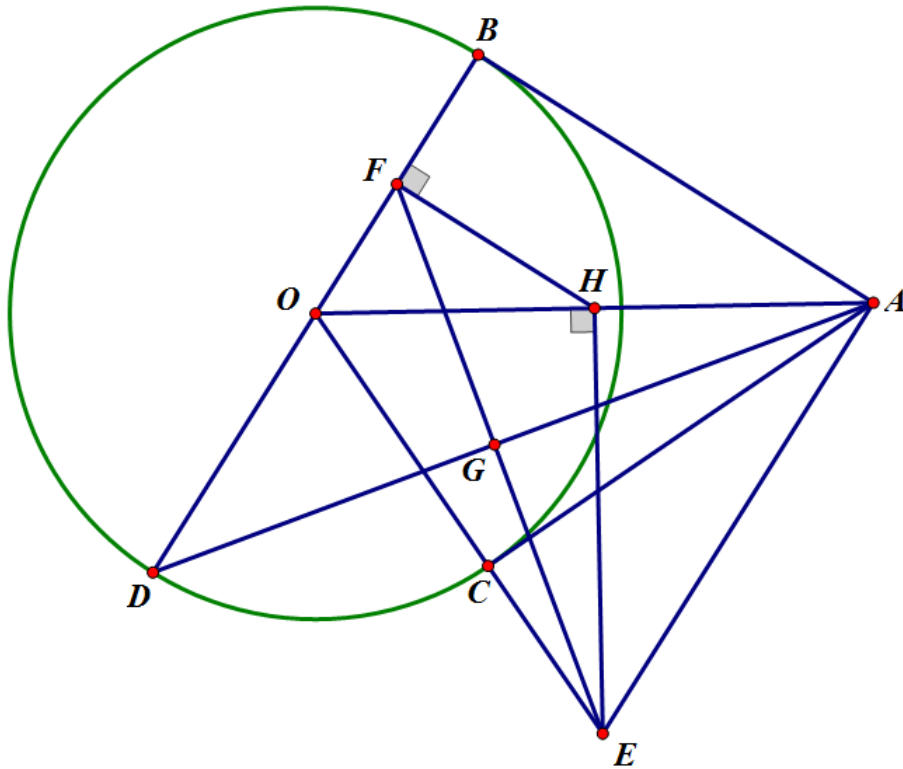
b, Ta có MM_1, NN_1, PP_1, QQ_1 là các phân giác tương ứng nên M_1 là điểm chính giữa cung QP . Tương tự với các điểm còn lại rồi ta có: M_1N_1, P_1Q_1 là đường kính nên suy ra đpcm.

Bài 27

Cho đường tròn (O) , từ một điểm A nằm ngoài (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC . Kẻ đường kính BD , lấy F là trung điểm OB . Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt OC tại E . Chứng minh: $AD \perp EF$

(Đề xuất bởi **BunhiChySchwarz**)

Lời giải



Gọi G là giao của AD và EF , H là trung điểm OA .

Ta có: $\widehat{EAO} = \widehat{BOA} = \widehat{EOA}$ nên $\triangle EOA$ cân tại E .

Ta có: $\triangle OFH \sim \triangle OHE (g.g) \Rightarrow \frac{OF}{FH} = \frac{OH}{HE} \Leftrightarrow \frac{OD}{FH} = \frac{OA}{HE} \Leftrightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{FH}{HE}$

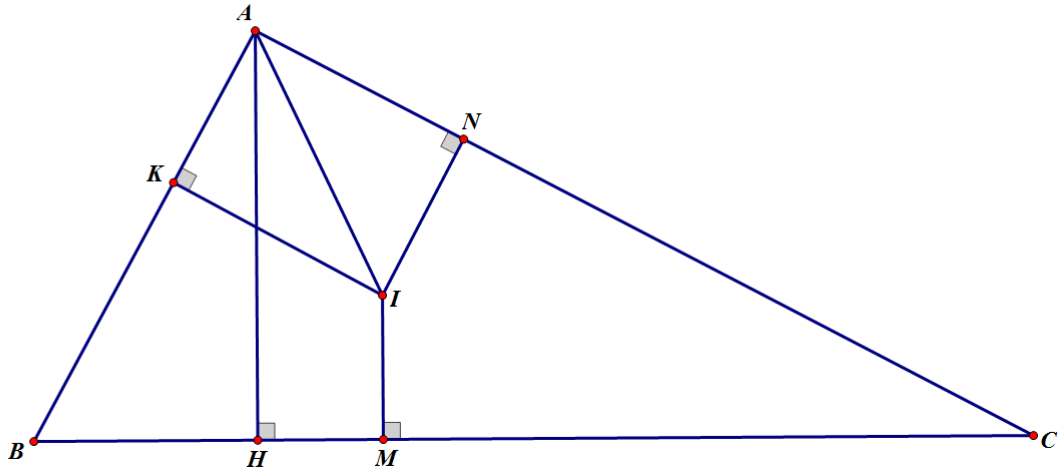
Suy ra $\triangle FHE \sim \triangle DOA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{HEG} = \widehat{HAG} \Rightarrow GHAE$ nội tiếp. Suy ra $EF \perp AD$

Bài 28

Cho tam giác ABC vuông tại A . Từ điểm I thuộc miền trong của tam giác vẽ IM, IN, IK là các đường vuông góc tới BC, CA, AB . Tìm vị trí của điểm I sao cho $IM^2 + IN^2 + IK^2$ bé nhất.

(Đề thi tỉnh Bình Định 2017-2018)

Lời giải



Kẻ đường cao AH của $\triangle ABC$.

Ta có tứ giác $AKIN$ là hình chữ nhật nên $AI = KN$

$$\text{Suy ra: } IK^2 + IN^2 + IM^2 = KN^2 + IM^2 = IA^2 + IM^2 \geq \frac{(AI + IM)^2}{2} \geq \frac{AH^2}{2}$$

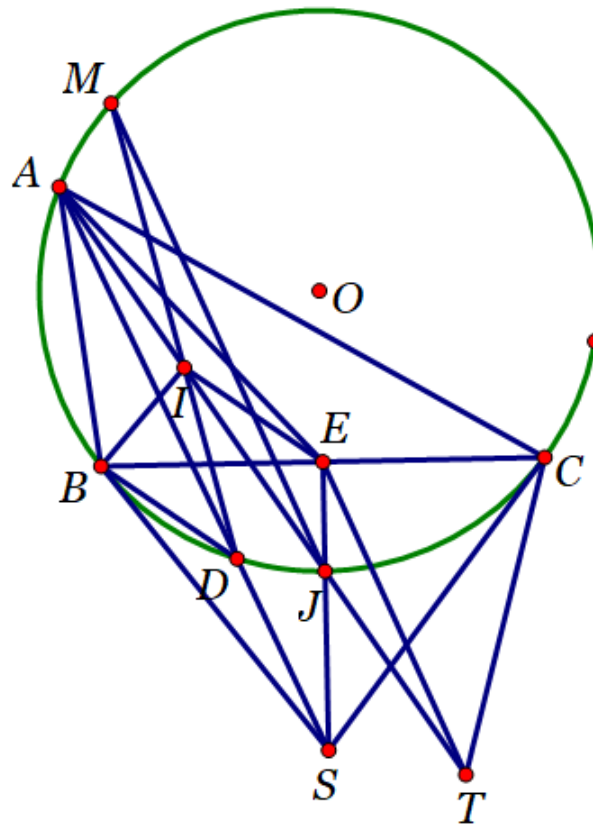
Vậy để $IK^2 + IN^2 + IM^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì I là trung điểm của AH

Bài 29

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , (I) là đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . AI cắt (O) tại A và J . E là trung điểm của BC . Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S . AS cắt (O) tại A và D . DI cắt (O) tại D và M . Chứng minh MJ chia đôi IE .

(Đề thi Bà Rịa-Vũng Tàu 2017-2018)

Lời giải



Áp dụng **Bài 16** ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$

$$\text{Suy ra } \triangle IAD \sim \triangle EAT(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ETA} = \widehat{ADI} = \widehat{AJM} \Rightarrow MJ \parallel ET$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 30

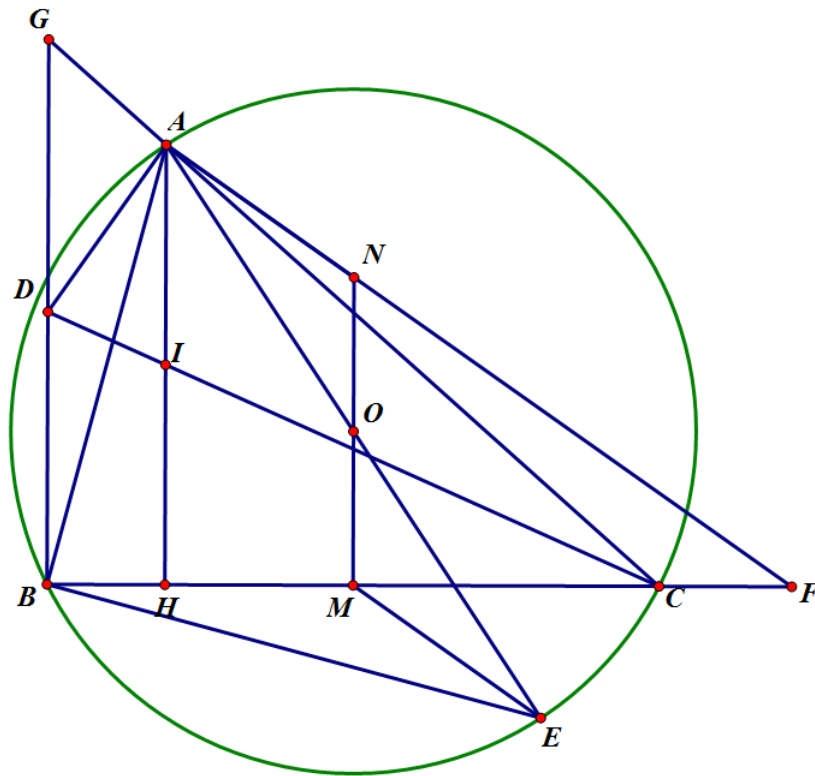
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của cạnh BC và N là điểm đối xứng với M qua O . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc BC tại D . Kẻ đường kính AE của (O) . Chứng minh rằng:

1, $BA \cdot BC = 2BD \cdot BE$

2, CD đi qua trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC .

(Đề thi TP.HCM 2015-2016)

Lời giải

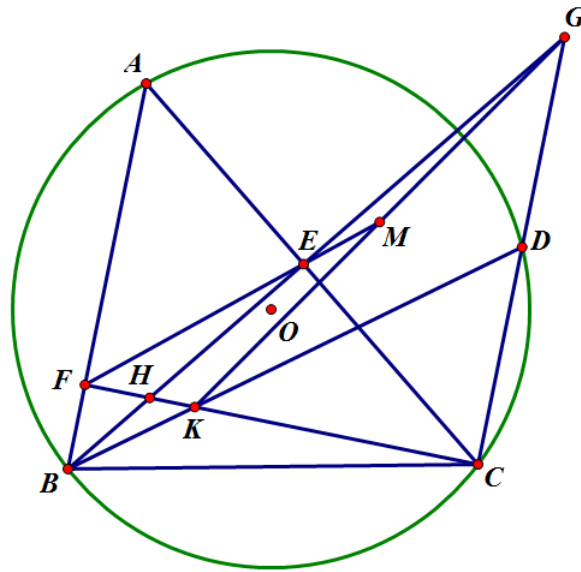


1, Kéo dài AN cắt BC tại F . Ta có: $ANEM$ là hình bình hành nên $ME \parallel AF \Rightarrow \widehat{BME} = 180^\circ - \widehat{EMC} = 180^\circ - \widehat{AFB} = \widehat{BDA}$

Mặt khác: $\widehat{MBE} = \widehat{OAC} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{DBA}$

Suy ra: $\triangle DBA \sim \triangle MBE (g.g) \Rightarrow 2BD \cdot BE = BA \cdot BC$

2, Kéo dài BD cắt CA tại G , CD cắt AH tại I .



Gọi M là giao điểm của FE với GK .

Ta có: $\triangle BFK \sim \triangle CEG(g.g)$ và $\triangle BFH \sim \triangle CEH(g.g)$

Suy ra: $\frac{FK}{GE} = \frac{BF}{CE} = \frac{FH}{HE}$

Áp dụng định lý **Menelaus** vào $\triangle GHK$ ta có:

$$\frac{GE}{EH} \cdot \frac{FH}{FK} \cdot \frac{KM}{MG} = 1 \Rightarrow MK = MG$$

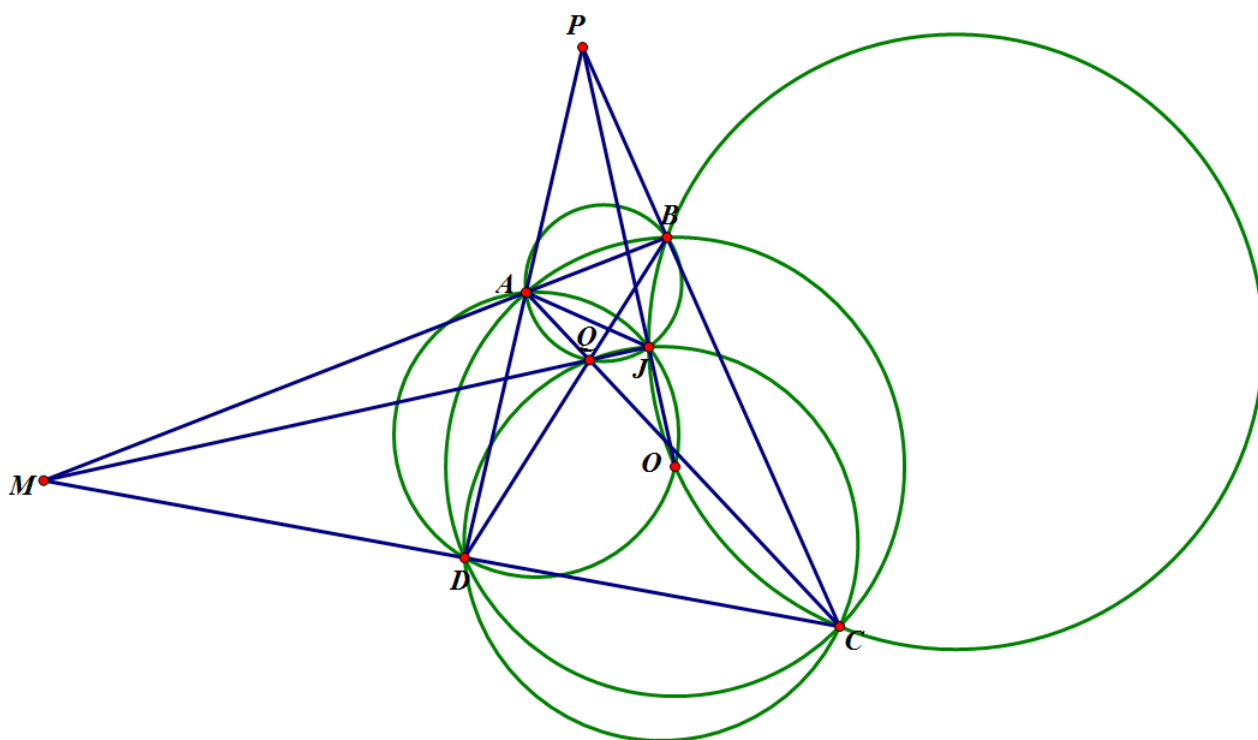
Suy ra đpcm.

Bài 34

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . AD cắt BC tại P , AC cắt BD tại Q . AB cắt CD tại M . Chứng minh: $MQ \perp PO$

(Định lý **Brocard**)

Lời giải



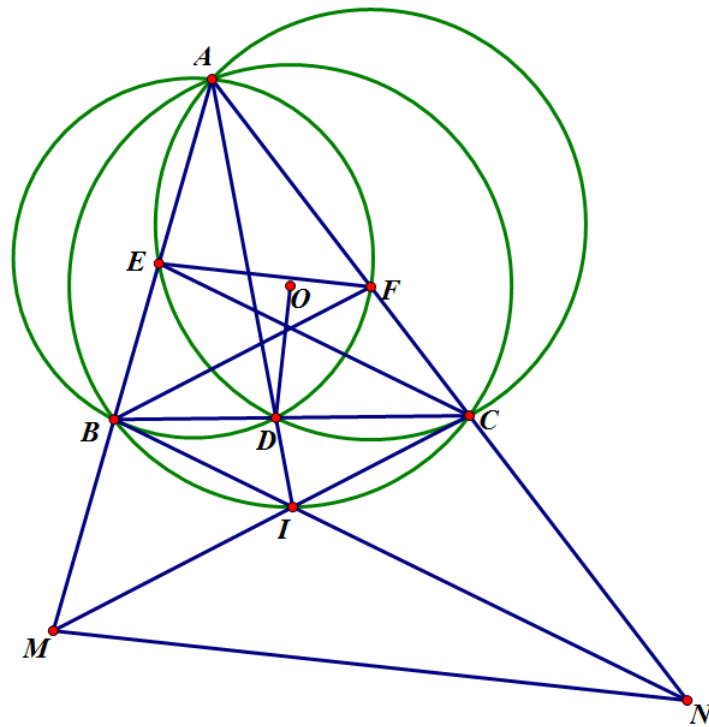
Ta có: $\widehat{AJD} = \widehat{AJQ} + \widehat{QJD} = \widehat{ABQ} + \widehat{QCD} = \widehat{AOD}$ nên tứ giác $AJOD$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{AJQ} + \widehat{ODA} = \widehat{ABD} + \widehat{ADO} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{QJO} = 90^\circ$ nên ta có đpcm.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có phân giác AD . $(ADC) \cap AB = \{A, F\}$; $(ABD) \cap AC = \{A, E\}$. Chứng minh rằng: $OD \perp EF$

Lời giải



Kéo dài AD cắt (O) tại I . $CI \cap AB = \{M\}$; $BI \cap AC = \{N\}$.

Theo định lý **Brocard** ta có: $OD \perp MN$.

Mặt khác ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{CBI} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow BN \parallel CE$ và $BF \parallel CM$

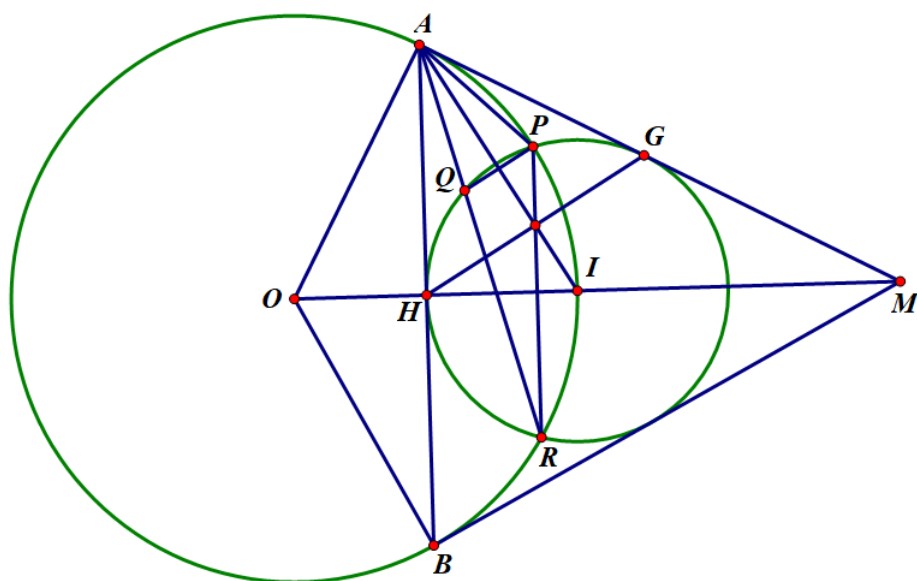
Suy ra: $\frac{AF}{AN} = \frac{AF}{AC} \cdot \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow MN \parallel EF$

Vậy suy ra $OD \perp EF$.

Bài 36

Từ điểm M ngoài (O) , vẽ tiếp tuyến MA, MB . Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABM$ tiếp xúc với AB, AM lần lượt tại H, G ; (I) cắt (O) tại P, R (P nằm trên nửa mặt phẳng bờ OM chứa A), AR cắt (I) tại Q . Chứng minh PR, AI, HG đồng quy và $\triangle APQ$ cân.

(Đề xuất bởi *phamhuy1801*)



Vậy hoàn tất chứng minh.

$$b, \text{ Ta có: } \widehat{OIC} = \widehat{OBC} + \widehat{BOI} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{BOC}) = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + 180^\circ - \widehat{OBC} - \widehat{OCB}) = 90^\circ + \frac{1}{4}(\widehat{ABC} - \widehat{ACB})$$

Bằng phép cộng góc thì ta cũng chứng minh được: $\widehat{CDK} = \widehat{CIO} = 90^\circ + \frac{1}{4}(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}) \Rightarrow IO \parallel DK$

c, G là giao điểm của AO và (O) khi đó G nằm chính giữa cung EF nên D, K, G thẳng hàng.

Gọi H là giao điểm của OA và EF

$$\text{Ta có: } \triangle GHK \sim \triangle ODI(g.g) \Rightarrow \frac{GK}{OI} = \frac{HG}{OD} = \frac{HG}{OE}$$

$$\text{Ta dễ dàng có: } EG \text{ là phân giác } \widehat{HEA} \text{ nên } \frac{HG}{AG} = \frac{HE}{EA} = \frac{EO}{OA} \Rightarrow \frac{HG}{EO} = \frac{AG}{OA}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{GK}{OI} = \frac{GA}{OA} \Rightarrow \triangle GKA \sim \triangle OIA \Rightarrow I, K, A \text{ thẳng hàng.}$$

Suy ra IK luôn đi qua 1 điểm cố định là A .

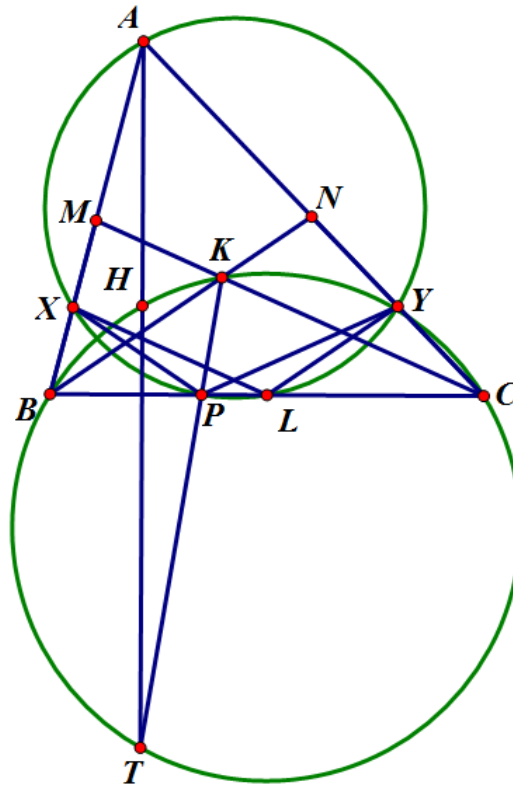
Bài 38

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và P là một điểm trên đoạn BC (P khác B, C). Đường thẳng AH cắt (BHC) tại T khác H . Đường thẳng PT cắt (BHC) tại K khác T . Giả sử BK cắt AC tại M và CK cắt AB tại N . Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của BN, CM .

a, Chứng minh rằng tứ giác $ANKM$ nội tiếp đường tròn.

b, Chứng minh rằng góc XPY có số đo không đổi khi P di động trên BC .

(Đề xuất bởi **khanhdat1**)



a, Ta có: $\widehat{PKC} = \widehat{THC} = \widehat{ABC}$ nên tứ giác $MKPB$ nội tiếp, tương tự ta có tứ giác $NKPC$ nội tiếp

Suy ra tứ giác $AMKN$ nội tiếp.

b, Gọi L là trung điểm BC

Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{NKC} = \widehat{NPC} \Rightarrow NPC \sim \triangle BAC (g.g)$ mà PY, AL là hai đường trung tuyến tương ứng nên $\widehat{YPC} = \widehat{LAC}$ nên $APLY$ nội tiếp.

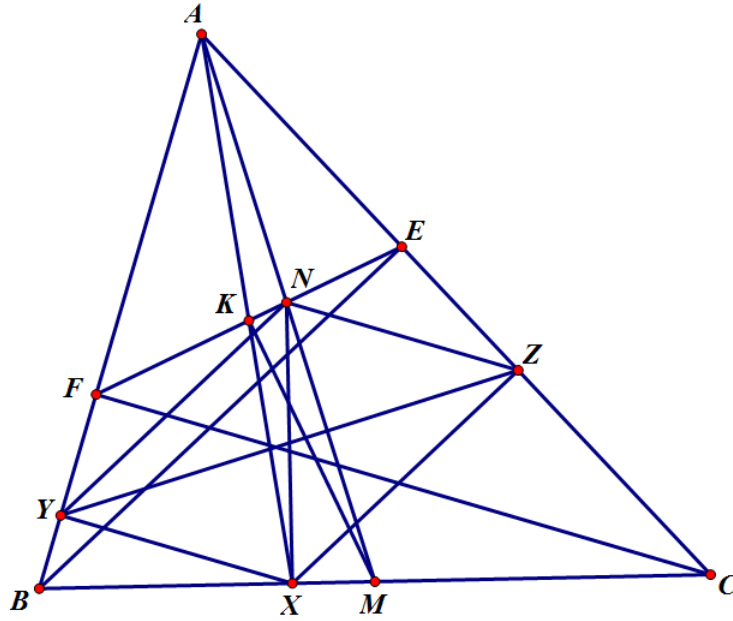
Tương tự ta có: $ALPX$ nội tiếp suy ra $AXPY$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{XPY} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ (không đổi)

Vậy ta có đpcm.

Bài 39

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các đường cao BE, CF . M là trung điểm BC , AM cắt EF tại N . Kẻ $NX \perp BC$, $XY \perp AB$, $XZ \perp AC$. Chứng minh N là trực tâm của tam giác XYZ .

(Đề xuất bởi **taconghoang**)



Kẻ $MK \perp EF$ khi đó tứ giác $MNKKX$ nội tiếp và K là trung điểm EF

Ta có: $\triangle AEF \sim \triangle ABC(g.g)$ và có hai đường trung tuyến tương ứng là AK và AM nên $\widehat{AKE} = \widehat{AMX}$. Từ đó ta có: A, K, X thẳng hàng.

Bằng đồng dạng tương ứng ta dễ dàng có: $\frac{NE}{NF} = \frac{BX}{XC}$

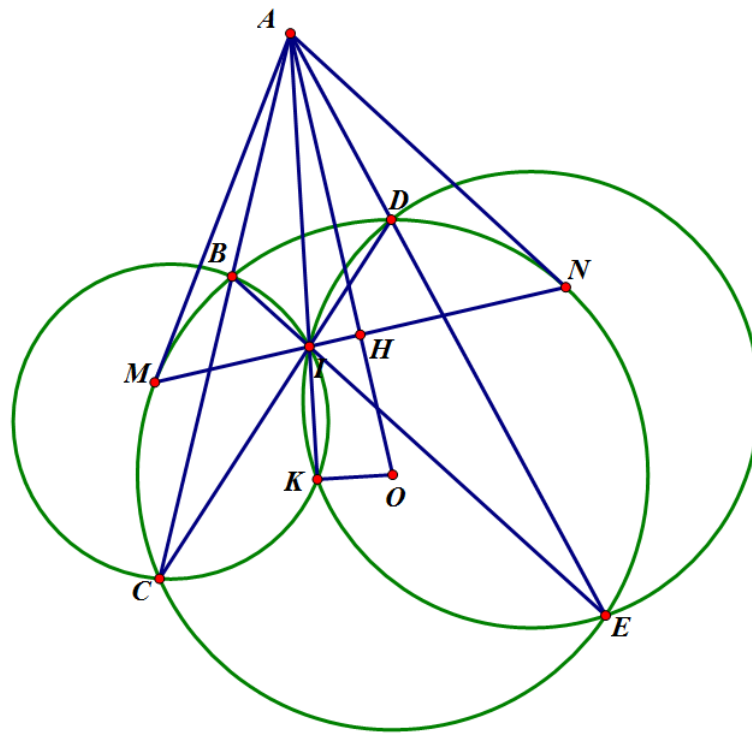
$$\text{Mà } \frac{BX}{XC} = \frac{BY}{YF} = \frac{EZ}{ZC}$$

Suy ra: $YN \parallel BE; ZN \parallel CF \Rightarrow N$ là trực tâm tam giác AYZ

Bài 40

Từ A nằm ngoài (O) kẻ hai cát tuyến ABC và ADE . Chứng minh rằng I là giao của BE và CD chạy trên một đường cố định khi cát tuyến thay đổi.

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)



Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN . $AO \cap MN = \{H\}$. $(BIC) \cap (DIC) = \{K\}$

Áp dụng **bài 34** ta có: A, I, K thẳng hàng và $OK \perp AI$

Ta có: $AI \cdot AK = AM^2 = AH \cdot AO \Rightarrow \triangle AIH \sim \triangle AOK (c.g.c) \Rightarrow IH \perp AO$

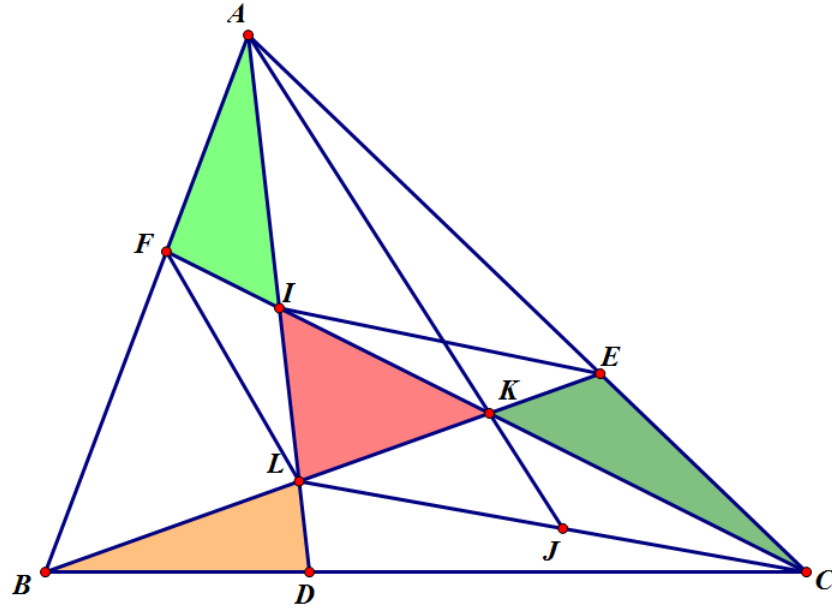
Suy ra: M, I, N thẳng hàng. Từ đó ta có I chạy trên đoạn MN cố định.

Bài 41

Cho tam giác ABC và các điểm như hình vẽ. Giả sử diện tích của các tam giác tô màu đôi một bằng nhau. Chứng minh diện tích của các tứ giác không tô màu cũng đôi một bằng nhau.

(Đề xuất bởi **Korkot**)

Lời giải



Gọi J là giao của AK và LC .

Ta có: $S_{ILK} = S_{KEC} \Rightarrow IE \parallel LC \Rightarrow JL = JC$

Mặt khác: $S_{IFA} = S_{ILK} \Rightarrow FL \parallel AK \Rightarrow K$ là trung điểm CF

Suy ra: $S_{FBK} = S_{CBK} \Rightarrow S_{FILB} = S_{LDCK}$

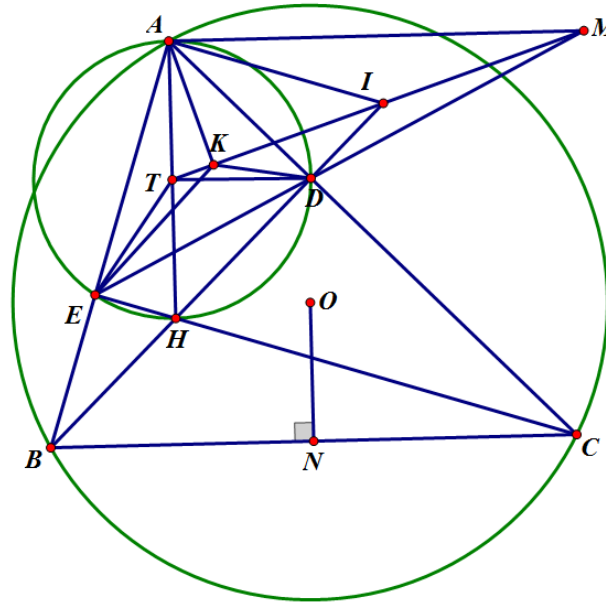
Tương tự thì ta hoàn tất chứng minh.

Bài 42

Cho (O) và dây cung BC cố định, lấy điểm A trên cung lớn BC . Kẻ $BD \perp AC, CE \perp AB$. BD cắt đường thẳng kẻ từ A vuông góc với AB tại I , ED cắt đường thẳng kẻ từ A song song với BC tại M . Chứng minh MI đi qua tâm một đường tròn có đường kính cố định.

(Đề xuất bởi **phamhuy1801**)

Lời giải



$BD \cap CE = \{H\}$; $MI \cap AH = \{T\}$. Kẻ $AK \perp IM$, $ON \perp BC$

Ta có: $MK.MT = MA^2 = MD.ME \Rightarrow$ tứ giác $TKDE$ nội tiếp.

Ta lại có: $\widehat{AKI} = \widehat{ADI} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AKDI$ nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{TED} = \widehat{DKI} = \widehat{DAI}$

Mà $\widehat{AED} = \widehat{DAM} \Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{TEA} \Leftrightarrow \widehat{TEA} = \widehat{TAE}$

Suy ra T là trung điểm AH .

Mặt khác $AH = 2ON$ (không đổi khi A di chuyển trên cung lớn BC).

Vậy suy ra MI đi qua tâm một đường tròn có đường kính cố định.

Bài 43

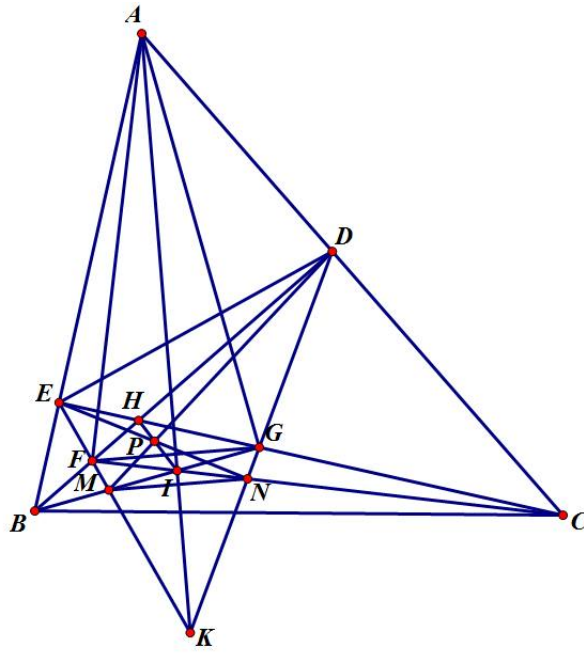
Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Đường tròn đường kính AB cắt CE tại G , đường tròn đường kính AC cắt BD tại F . CF cắt BG tại I , DG cắt EF tại K .

a, Chứng minh 3 điểm A, I, K thẳng hàng.

b, Giả sử EF cắt BG tại M , DG cắt CF tại N . Chứng minh HI, EN, DM đồng quy.

(Đề xuất bởi **phamhuy1801**)

Lời giải



a, Ta có: $AF^2 = AD.AC = AE.AB = AG^2 \Rightarrow AF = AG \Rightarrow \triangle AIG = \triangle AIF(ch - cv) \Rightarrow AF = AG; IF = IG; \widehat{AFG} = \widehat{AGF}(1)$

Mặt khác: $\widehat{AFE} = \widehat{ACE} = \widehat{ABD} = \widehat{AGD}(2)$

Từ (1), (2) suy ra: $\widehat{GFK} = \widehat{FGK} \Rightarrow KF = KG$

Vậy ta có A, K, I thẳng hàng

b, Đây là nội dung của định lý **Pappus**, các bạn đọc tham khảo trên mạng.

Bài 44

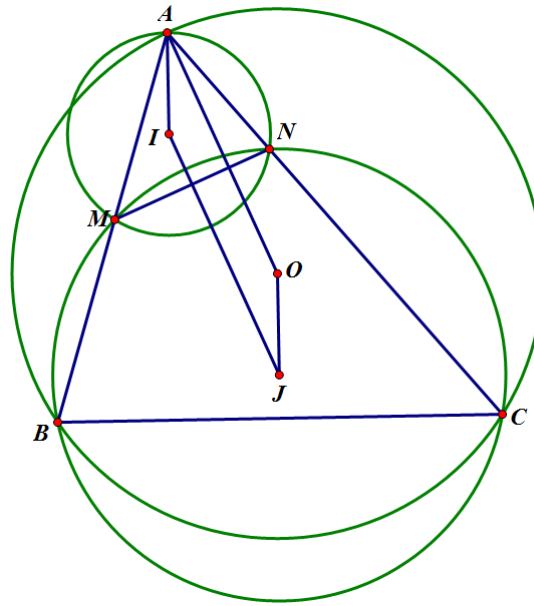
Cho tam giác ABC nhọn, M thay đổi trên cạnh AB . $(BMC) \cap AC = \{C, N\}$.

a, Chứng minh: $\triangle AMN \sim \triangle ACB$. Tính $\frac{MA}{MB}$ để $S_{AMN} = \frac{S_{ABC}}{2}$

b, Gọi I là tâm (AMN) . Chứng minh I thuộc một đường cố định khi M di động.

c, J là tâm (BMC) . Chứng minh độ dài IJ không đổi khi M di động.

(Đề xuất bởi **Korkot**)



a, Ta có: $\triangle AMN \sim \triangle ACB(g.g)$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{AM^2}{AC^2} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} AC}{AB - \frac{\sqrt{2}}{2} AC} = \frac{AC}{\sqrt{2}AB - AC}$$

b, Gọi O là tâm (ABC) .

Bằng phép cộng góc ta dễ dàng có: $AO \perp MN$; $IJ \perp MN \Rightarrow AO \parallel MN$

và $AI \perp BC$; $OJ \perp BC \Rightarrow AI \parallel OJ$

Suy ra tứ giác $AIJO$ là hình bình hành. Vậy I thuộc đường thẳng qua J là song song với AO

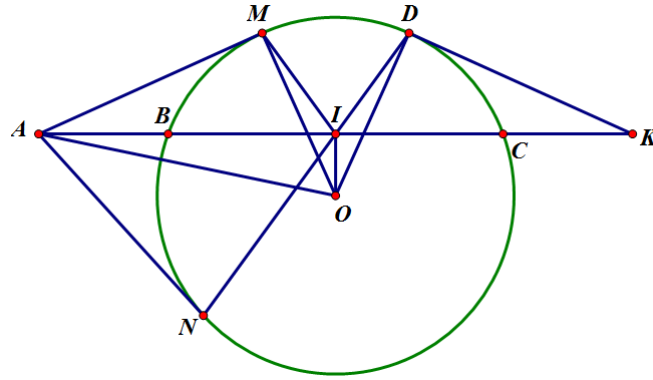
c, Ta có: $IJ = AO$ (không đổi khi M di động).

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

Bài 45

Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự. Đường tròn (O) đi qua B và C . Từ A kẻ tiếp tuyến AM, AN với (O) . Gọi I là trung điểm của BC . NI cắt (O) tại D . Chứng minh rằng: a, Khi (O) thay đổi đi qua B, C thì N, D luôn thuộc một đường tròn cố định
b, Tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AIO$ chạy trên một đường thẳng cố định.

(Đề xuất bởi **MarkGot7**)



a, Ta có: $AN^2 = AB.AC \Rightarrow N \in \left(A; \sqrt{AB.AC}\right)$ (cố định)

Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với OD cắt BC tại K

Ta có:

$$\widehat{MIA} = \widehat{AIN} = \widehat{DIK} \Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{DOK} \Rightarrow \triangle MAO = \triangle DKO (g.c.g)$$

Suy ra: $OA = OK \Leftrightarrow CK = AB$ từ đó ta có K cố định.

Mặt khác: $KD^2 = KC.KB \Rightarrow D \in \left(K; \sqrt{AB.AC}\right)$ (cố định)

b, Ta dễ thấy tâm (AIO) là trung điểm AO nên tâm (AIO) thuộc đường thẳng đi qua trung điểm của AI và vuông góc với BC

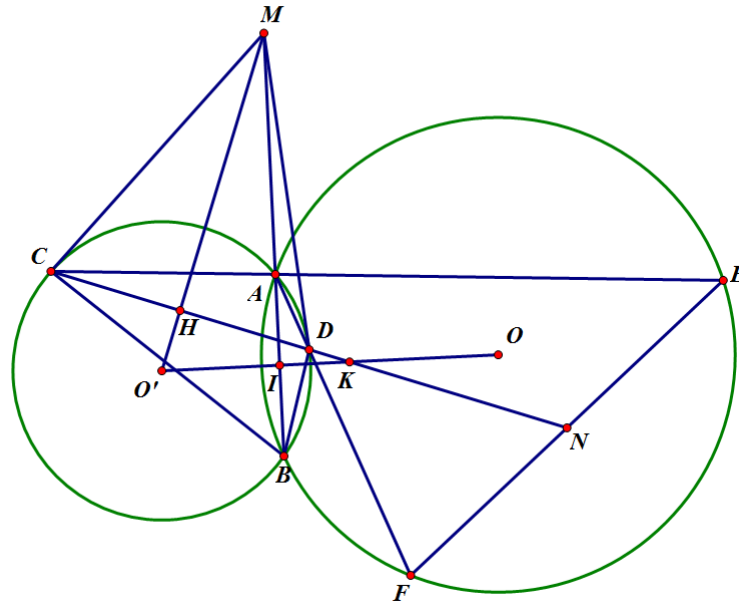
Bài 46

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M từ M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với (O') , AC, AD cắt (O) tại E, F . Chứng minh rằng

a, Chứng minh rằng CD đi qua trung điểm của EF .

b, EF luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên tia đối của tia AB .

(Đề thi tỉnh Nghệ An 2017-2018)



$$a, CD \cap EF = \{N\}$$

$$\text{Ta có: } \triangle DBF \sim \triangle CBE(g.g) \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{DF}{CE}$$

$$\text{Mặt khác: } \triangle ADM \sim \triangle DBM(g.g); \triangle ACM \sim \triangle CMB(g.g) \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{AD}{CA} \Rightarrow \frac{AD}{CA} = \frac{DF}{CE} (*)$$

$$\text{Áp dụng định lý Menelaus ta có: } \frac{EN}{NF} \cdot \frac{FD}{DA} \cdot \frac{AC}{CE} = 1 \Rightarrow NE = NF$$

$$b, CD \cap OO' = \{K\}; MO' \cap CD = \{H\}; AB \cap OO' = \{I\}$$

$$\text{Ta có: } O'C^2 = O'H \cdot O'M = O'I \cdot O'K \Rightarrow K \text{ cố định nên ta có đpcm.}$$

Bài 47

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R cố định và D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác. Gọi E và F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABD và tam giác ACD .

a, Chứng minh $\angle AEO = \angle ADC$ và tứ giác $AEOF$ là tứ giác nội tiếp.

b, Chứng minh tam giác EOF là tam giác cân.

c, Khi BC cố định và A di động trên (O) , chứng minh tứ giác $AEOF$ có diện tích không đổi.

(Đề thi tỉnh Thanh Hóa 2017-2018)



Suy ra J là tâm nội tiếp $\triangle AHI$ mà D, J, E thẳng hàng. Áp dụng **bài 10** ta có đường tròn (O) tiếp xúc với $(AHI) \Rightarrow đpcm$

Bài 49

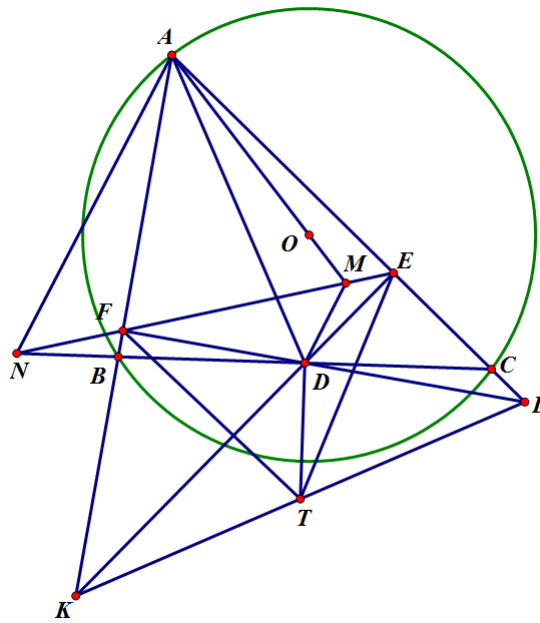
Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định và điểm A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn không cân. Gọi D là trung điểm của BC và E, F tương ứng là hình chiếu của D trên AC, AB .

a, Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng EF cắt AO và BC theo thứ tự tại M và N . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định.

b, Các tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T . Chứng minh rằng T luôn thuộc một đường thẳng cố định.

(Đề xuất bởi **khanhdat1**)

Lời giải



a, Ta có: $\widehat{AMN} = \widehat{OAC} + \widehat{MEA} = 90^\circ - \widehat{ABC} + \widehat{ADF} = \widehat{FDB} + \widehat{ADF} = \widehat{ADB}$

$\Rightarrow AMDN$ nội tiếp hay (AMN) đi qua điểm D cố định.

b, $ED \cap AB = \{K\}$; $FD \cap AC = \{L\}$. Khi đó D là trực tâm $\triangle AKL$

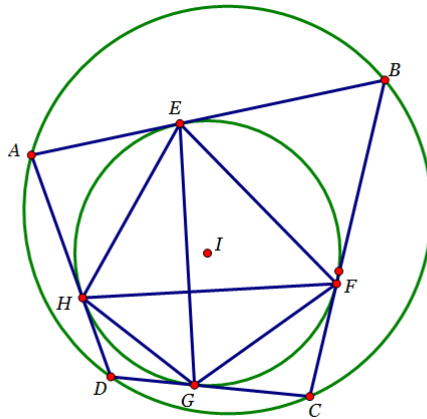
Gọi T' là trung điểm KL . Ta dễ dàng chứng minh được $T'E; T'F$ là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow T$ là trung điểm KL .

Mặt khác: $DB = DC$ nên $TD \perp BC$. Vậy T thuộc một đường thẳng cố định đi qua D và vuông góc với BC .

Bài 50

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong 1 đường tròn và ngoại tiếp một đường tròn khác, các tiếp điểm lần lượt là E, F, G, H . Chứng minh: EG vuông góc với FH .

(Đề xuất bởi **thanhdatqv2003**)

Lời giải

$$\text{Ta có: } \widehat{EGH} + \widehat{GHF} = \widehat{AHE} + \widehat{FGC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAD}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{BCD}}{2} = 90^\circ$$

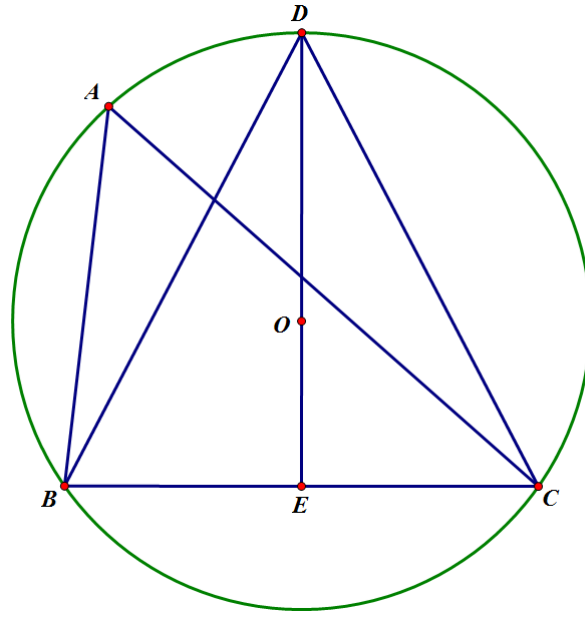
Suy ra: $EG \perp FH$

Bài 51

Tìm kích thước của tam giác ABC có diện tích lớn nhất nội tiếp đường tròn $(O; R)$ cho trước.

(Đề xuất bởi **Korkot**)

Lời giải



Gọi D là điểm chính giữa cung BC chứa A . E là trung điểm BC .

Ta có:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &\leq S_{DBC} = DE \cdot CE = \sqrt{R^2 - OE^2} \cdot (R + OE) = \sqrt{(R + OE)^3 (R - OE)} \\ &= \frac{\sqrt{(R + OE)(R + OE)(R + OE)(3R - 3OE)}}{\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \end{aligned}$$

Vậy để S_{ABC} lớn nhất thì tam giác ABC là tam giác đều nội tiếp (O) .

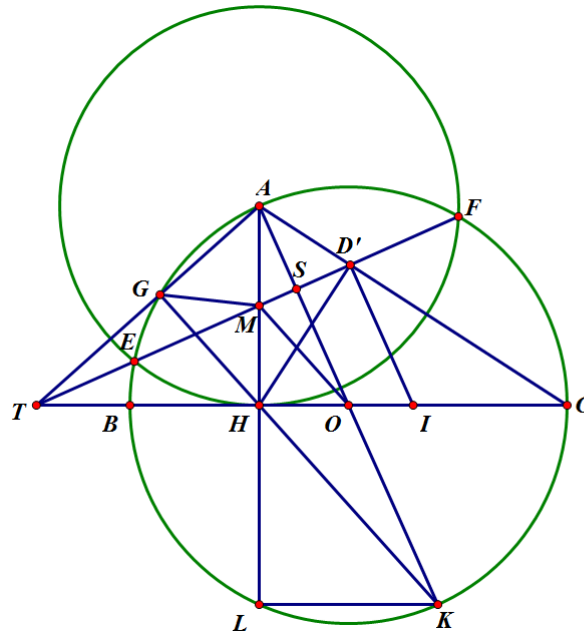
Bài 52

Cho điểm A thuộc đường tròn tâm O đường kính BC (A khác B và C). Vẽ đường tròn tâm A tiếp xúc với BC tại H , cắt đường tròn (O) tại E và F . Gọi I là trung điểm của HC , D là hình chiếu của I trên EF . Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại G .

a, Chứng minh rằng các đường thẳng AG, EF, BC đồng quy.

b, Chứng minh rằng ba điểm A, D, C thẳng hàng.

(Đề xuất bởi **kanhdat1**)


$$AG \cap CB = \{T\}$$

Suy ra: $OM \perp AG \Rightarrow M$ là trực tâm $\triangle ATO \Rightarrow TM \perp AO$

b , Kẻ $HD' \perp AC$. Bằng phép cộng góc ta có: $MD' \perp AO \Rightarrow D' \in EF$.

Mặt khác: $MD' = MH; ID' = IH \Rightarrow \widehat{MD'I} = \widehat{MHI} = 90^\circ \Rightarrow ID' \perp EF \Rightarrow D \equiv D'$

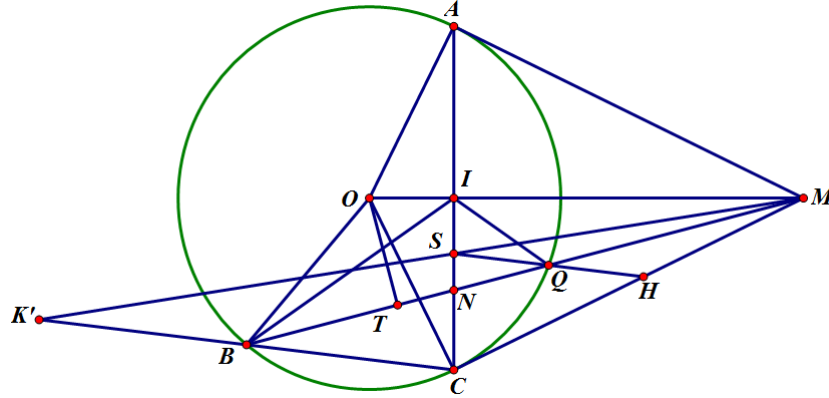
Vậy hoàn tất chứng minh.

Bài 53

a, Gọi T là trung điểm của BQ . Chứng minh rằng $MQ.MB = MN.MT$

b , Gọi K là điểm đối xứng với C qua B . Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC cắt CM tại H . Chứng minh rằng QH, AC, MK đồng quy.

(Đề xuất bởi **khahdat1**)



$$QH \cap AC = \{S\}; MS \cap CB = \{K'\}; OM \cap AC = \{I\}$$

$$a, \text{ Ta có: } MQ.MB = MA^2 = MI.MO = MN.MT$$

$$b, \text{ Ta có: } MI.MO = MQ.MB \Rightarrow IQBO \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{QIM} = \widehat{OBQ} = \widehat{OQB} = \widehat{OIB} \Rightarrow IN,$$

IM lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của $\triangle IBQ$

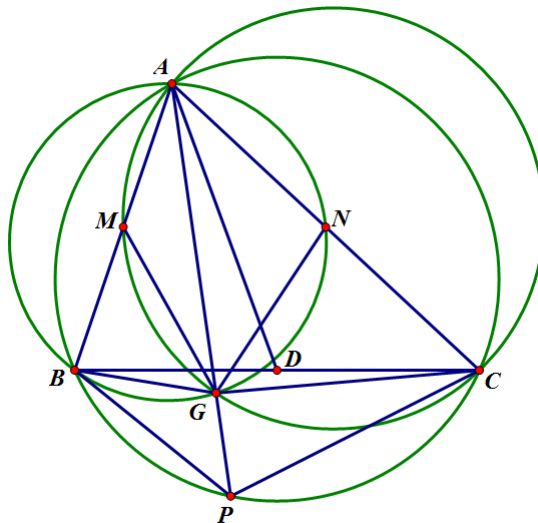
Suy ra: $\frac{QH}{BC} = \frac{QM}{MB} = \frac{QN}{BN} = \frac{QS}{BC} \Rightarrow QS = QH \Rightarrow BK' = BC \Rightarrow K \equiv K'$. Suy ra MK, AC, HQ đồng quy.

Bài 54

Cho tam giác ABC , M, N là trung điểm của AB, AC , đường tròn (AMC) cắt đường tròn (ANB) tại G khác A , D là trung điểm của BC . Chứng minh $\angle DAC = \angle GAB$.

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



$$AG \cap (ABC) = \{A, P\}$$

Ta có: $\triangle GBM \sim \triangle GNC(g.g)$; $\triangle BPC \sim \triangle MGC(g.g) \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{MG}{GC} = \frac{BM}{NC} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow AC.BP = AB.CP$.

Áp dụng **Ptoleme** ta có: $BP.AC + AB.CP = AP.BC \Leftrightarrow 2BP.AC = 2AP.DC \Leftrightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{DC}{AC}$

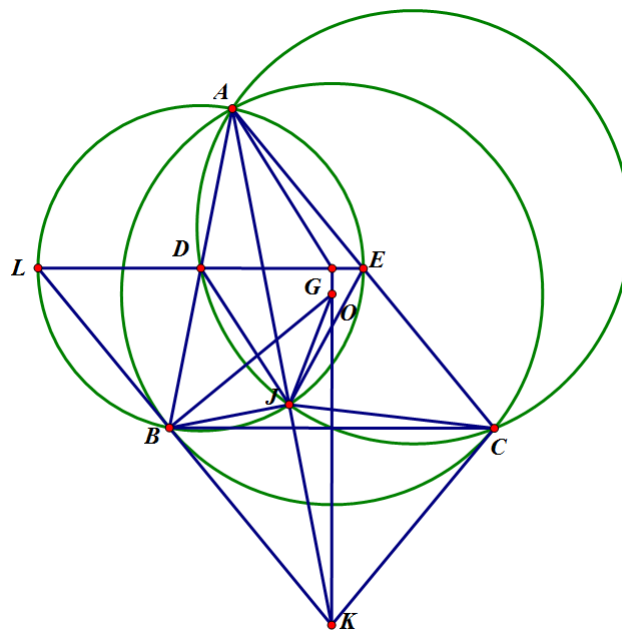
$\Rightarrow \triangle PBA \sim \triangle CDA(c.g.c) \Rightarrow \angle DAC = \angle GAB(\text{đpcm})$

Bài 55

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , D, E là trung điểm AB, AC , đường tròn (ADC) cắt đường tròn (AEB) tại J khác A , trung trực BC cắt DE tại G . Chứng minh $AJOG$ nội tiếp.

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



Gọi L là giao điểm của ED với (AEB) . LB cắt tiếp tuyến tại C của (O) ở K .

Ta có: $\widehat{LBA} = \widehat{LEA} = \widehat{ACB} \Rightarrow LB$ là tiếp tuyến của (O) . Suy ra: A, J, K và G, O, K thẳng hàng.

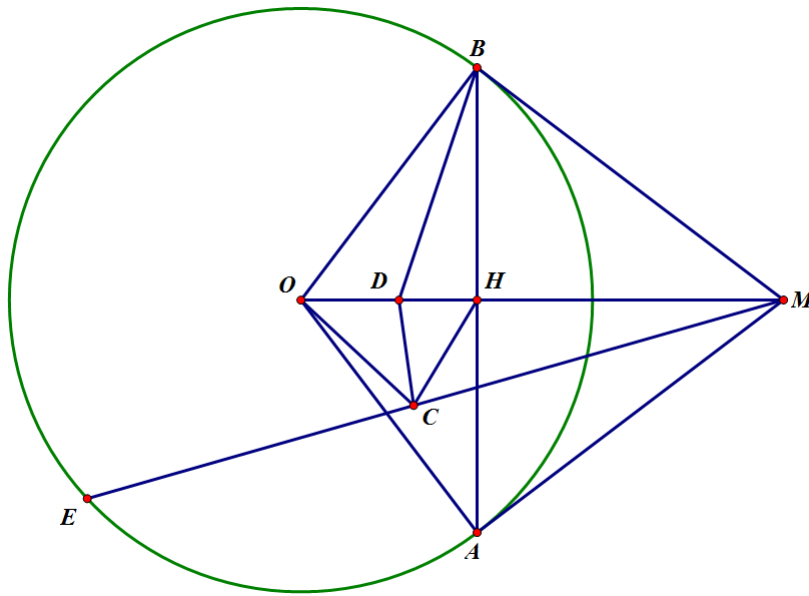
Ta có: $\widehat{OBL} = \widehat{OGL} = 90^\circ \Rightarrow KO.KG = KB.KL = KJ.KA \Rightarrow AJOG$ nội tiếp.

Bài 56

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Lấy E bất kì thuộc cung lớn AB . Trên ME, MO lấy C, D sao cho $MB = MD = MC$. $OM \cap AB = \{H\}$. Chứng minh: CD là phân giác $\angle OCH$

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



Ta có: $MC^2 = MB^2 = MH.MO \Rightarrow \triangle HCM \sim \triangle COM(c.g.c) \Rightarrow \frac{CH}{OC} = \frac{HM}{CM} = \frac{HM}{BM} = \frac{BH}{OB}$

Vì $MD = MB \Rightarrow BD$ là phân giác $\widehat{OBH} \Rightarrow \frac{BH}{OB} = \frac{DH}{OD}$

Suy ra: $\frac{CH}{OC} = \frac{DH}{OD} \Rightarrow CD$ là phân giác $\widehat{OCH}$.

Bài 57

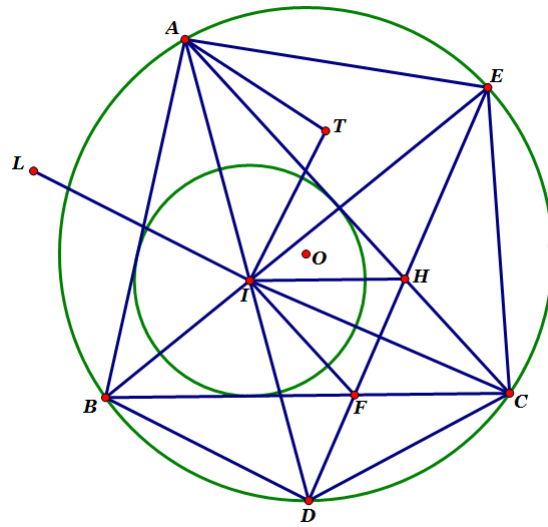
Cho $\triangle ABC$ có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường trung trực đoạn IC cắt AI, BI, AC, BC lần lượt tại D, E, H, F . Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AIH$.

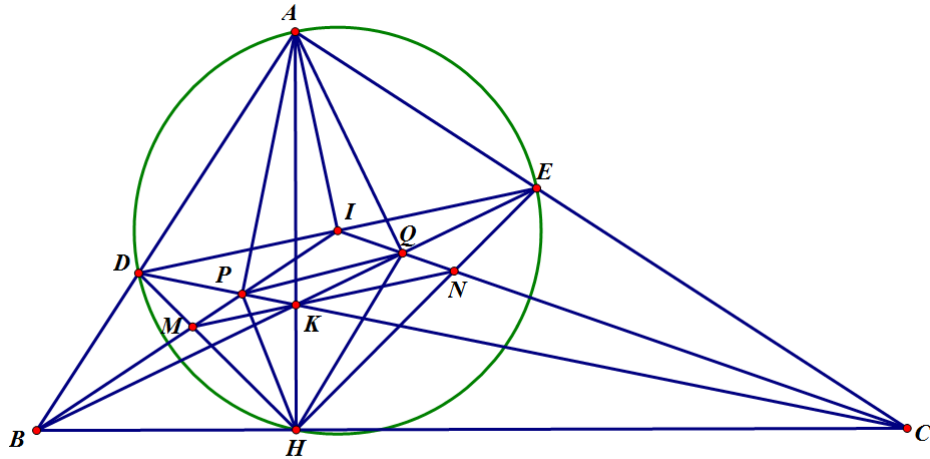
a, Chứng minh (T) đi qua E và 5 điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b, Chứng minh $IT \perp BD$.

(Đề xuất bởi **phamhuy1801**)

Lời giải





a, Ta có: $\widehat{DHE} = \widehat{DAE} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ADHE$ nội tiếp và HA là phân giác $\widehat{DHE} \Rightarrow AD = AE$.

Ta lại có: $\frac{BD}{DA} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow BD \cdot CE = AD \cdot AE = DE \cdot IE \Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle IEC \Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{EIC}$
 $\Rightarrow$ tứ giác $IQBD$ nội tiếp $\Rightarrow EQ \cdot EB = EI \cdot ED = EA^2 \Rightarrow AQ \perp BE \Leftrightarrow \widehat{AQK} = 90^\circ$.

Tương tự thì ta có: $\widehat{APK} = \widehat{AQK} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $APKQ$ nội tiếp.

b, Trước hết bằng định lý **Ceva** ta có: CD, BE, AH đồng quy tại K .

Ta có: $\widehat{AIE} = \widehat{AQE} = 90^\circ \Rightarrow AIQE$ nội tiếp

Suy ra: $\widehat{EQC} = \widehat{EHC} = \widehat{KHN} = 45^\circ \Rightarrow$ tứ giác $KQNH, HQEC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QKN} = \widehat{QHN} = \widehat{QCA} = \widehat{AEI} - \widehat{EIC} = 45^\circ - \widehat{QAE}$

Tương tự ta có:

$\widehat{MKD} = 45^\circ - \widehat{DAP} \Rightarrow \widehat{MKD} + \widehat{QKN} = 90^\circ - \widehat{DAP} - \widehat{QAE} = \widehat{PAQ} = 180^\circ - \widehat{PKQ}$

Vậy ta có: M, K, N thẳng hàng.

Mặt khác: $\widehat{INK} = \widehat{KHQ} = 90^\circ - \widehat{QHC} = 90^\circ - \widehat{AEQ} = \widehat{QAE} = \widehat{QIE} \Rightarrow DE \parallel MN$

Vậy hoàn tất chứng minh.

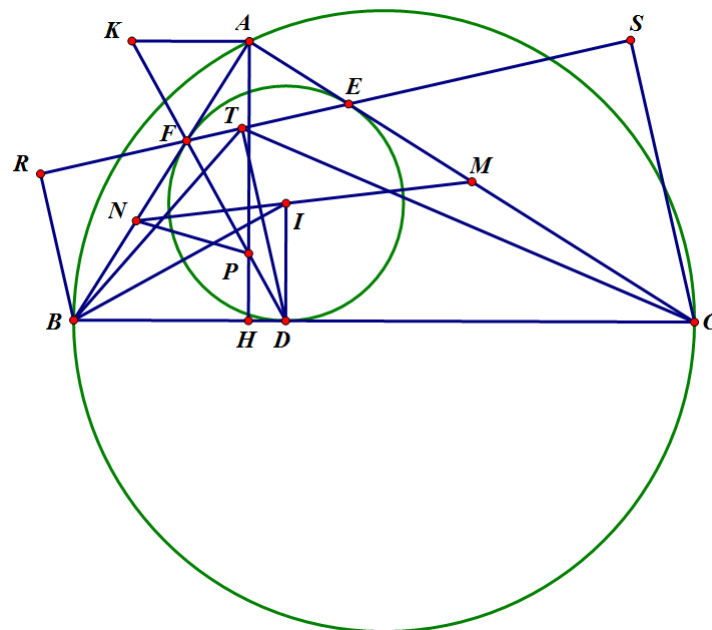
Bài 59

Cho đường tròn (O) có đường kính BC và A là một điểm nằm trên nửa đường tròn. Đường tròn $(I; r)$ tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F . Gọi M là trung điểm cạnh AC . Đường thẳng MI cắt AB tại N , đường thẳng DF cắt đường cao AH tại P .

a, Chứng minh tam giác ANP là tam giác cân.

b, Gọi T là hình chiếu của D trên EF . Chứng minh rằng: $TB \cdot CD = TC \cdot BD$

(Đề xuất bởi **khanhdat1**)

Lời giải

Đặt $AB = c; BC = a; CA = b \Rightarrow r = ID = IE = IF = \frac{b+c-a}{2}$.

Ta có: $EM = AM - AE = \frac{b}{2} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-c}{2} \Rightarrow \frac{EI}{AN} = \frac{EM}{AM} \Leftrightarrow \frac{\frac{b+c-a}{2}}{AN} = \frac{\frac{a-c}{2}}{\frac{b}{2}}$

$\Rightarrow AN = \frac{(b+c-a)b}{2(a-c)} = \frac{a^2 - c^2 - b(a-c)}{2(a-c)} = \frac{b+c-a}{2}$

Qua A kẻ $AK \parallel BC$ ($K \in DF$)

Ta có: $\triangle KAP \sim \triangle IDB(g.g) \Rightarrow AP = AK \cdot \frac{AP}{AK} = AF \cdot \frac{BD}{ID} = BD = \frac{b+c-a}{2}$

Suy ra: $\triangle ANP$ cân tại A .

b, Gọi R, S lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C xuống EF .

Ta có:

$$\frac{RT}{ST} = \frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow \triangle RTB \sim \triangle STC (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{RTB} = \widehat{STC}$$

$$\Leftrightarrow TD \text{ là phân giác } \widehat{BTC} \Rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BT \cdot DC = BD \cdot CT$$

Bài 60

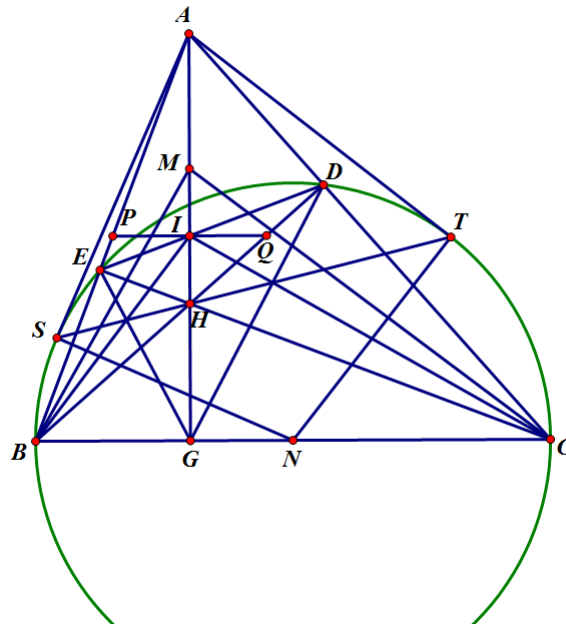
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có ba đường cao AG, BD, CE cắt nhau tại H . Gọi I là giao điểm của DE và AH . Đường thẳng qua I và song song với BC cắt tia AB , tia DB lần lượt tại P và Q . Gọi M là trung điểm của AH .

a, Chứng minh rằng $IP = IQ$ và I là trực tâm của tam giác MBC .

b, Từ A vẽ các tiếp tuyến AS, AT với đường tròn đường kính BC (S, T là các tiếp điểm). Chứng minh rằng ba điểm S, H, T thẳng hàng.

(Đề xuất bởi **khanhdat1**)

Lời giải



a, Ta dễ dàng chứng minh được: DH và DA lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của $\triangle IDG$.

$$\text{Suy ra: } \frac{IQ}{BG} = \frac{IH}{HG} = \frac{ID}{DG} = \frac{AI}{AG} = \frac{IP}{BG} \Rightarrow IQ = IP.$$

$$\text{Ta có: } \triangle MID \sim \triangle MDG (g.g) \Rightarrow MI \cdot MG = MD^2 = MH^2$$

$$\Rightarrow MG \cdot IG = MG^2 - MH^2 = HG \cdot AG = BG \cdot GC \Rightarrow \triangle BGM \sim \triangle IGC (\text{c.g.c}) \Rightarrow CI \perp MB$$

và $BI \perp MC \Rightarrow I$ là trực tâm $\triangle MBC$

b, Ta có: $AS^2 = AT^2 = AE \cdot AB = AH \cdot AG \Rightarrow \triangle AHS \sim \triangle ASG; \triangle AHT \sim \triangle ATG \Rightarrow \widehat{AHS} + \widehat{AHT} = \widehat{ASG} + \widehat{ATG}$

Mặt khác: $\widehat{ASN} = \widehat{ATN} = \widehat{AGN} = 90^\circ \Rightarrow ASGT$ nội tiếp nên suy ra: $\widehat{ASG} + \widehat{ATG} = 180^\circ$

Vậy ta có: S, H, T thẳng hàng.

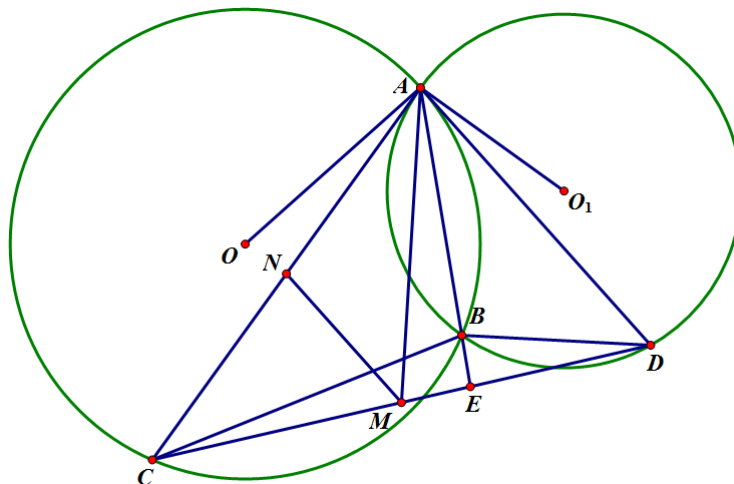
Bài 61

Cho $(O; R)$ và $(O_1; R_1)$ cắt nhau tại A, B , tiếp tuyến tại A của (O) và (O_1) cắt (O_1) , (O) tại D, C , AB cắt CD tại E , M là trung điểm DE .

1. Chứng minh $\frac{EC}{ED} = \frac{R^2}{R_1^2}$.
2. Chứng minh $\angle MAC = \angle BAD$.

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



1, Ta có: $\triangle BAD \sim \triangle BCA(g.g) \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BA} = \frac{AD}{AC} = \frac{R_1}{R}$

Mặt khác ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{DBE} \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{BC}{BD} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BA}{BD} = \frac{R^2}{R_1^2}$

2, Gọi N là trung điểm AC . Ta có: $\widehat{ANM} = 180^\circ - \widehat{NAD} = 180^\circ - \widehat{BAD} - \widehat{BDA} = \widehat{ABD}$

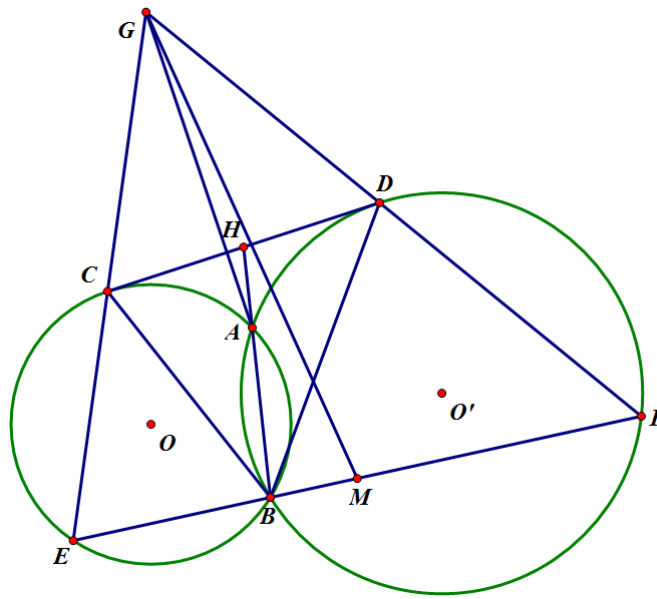
Ta lại có: $\frac{NM}{NA} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \triangle ANM \sim \triangle ABD \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{BAD}$

Bài 62

Cho (O) và (O') cắt nhau tại A, B , tiếp tuyến chung ngoài CD , ($C \in (O), D \in (O')$). Một đường thẳng d bất kì qua B cắt $(O), (O')$ tại E, F , CE cắt DF tại G , M là trung điểm EF . Chứng minh $\angle MGF = \angle AGC$.

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



Kéo dài BA cắt CD tại H . Khi đó ta có: $HC^2 = HA \cdot HB = HD^2 \Rightarrow HC = HD$.

Ta có: $\triangle BCD \sim \triangle GEF(g.g)$ mà hai tam giác có hai đường trung tuyến tương ứng nên $\widehat{MGF} = \widehat{HBD} = \widehat{ADC}$.

Mặt khác ta dễ dàng có tứ giác $GCAD$ nội tiếp nên $\widehat{ADC} = \widehat{AGC}$

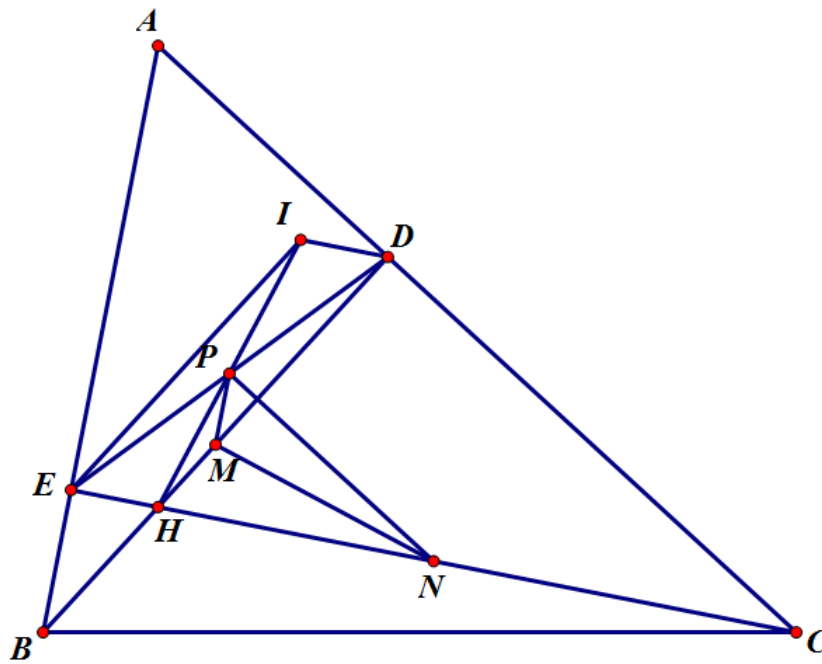
Vậy suy ra: $\widehat{MGF} = \widehat{AGC}$.

Bài 63

Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$), đường cao BD, CE cắt nhau tại H . M, N lần lượt là trung điểm BD, CE . Gọi I là trực tâm $\triangle ADE$. Chứng minh $MN \perp HI$

(Đề xuất bởi **phamhuy1801**)

Lời giải



Gọi P là giao điểm của DE và IH . Ta có: tứ giác $HEID$ là hình bình hành

Dựa vào tính chất đường trung bình thì ta dễ dàng chứng minh được M là trực tâm $\triangle HPN \Rightarrow MN \perp HI$

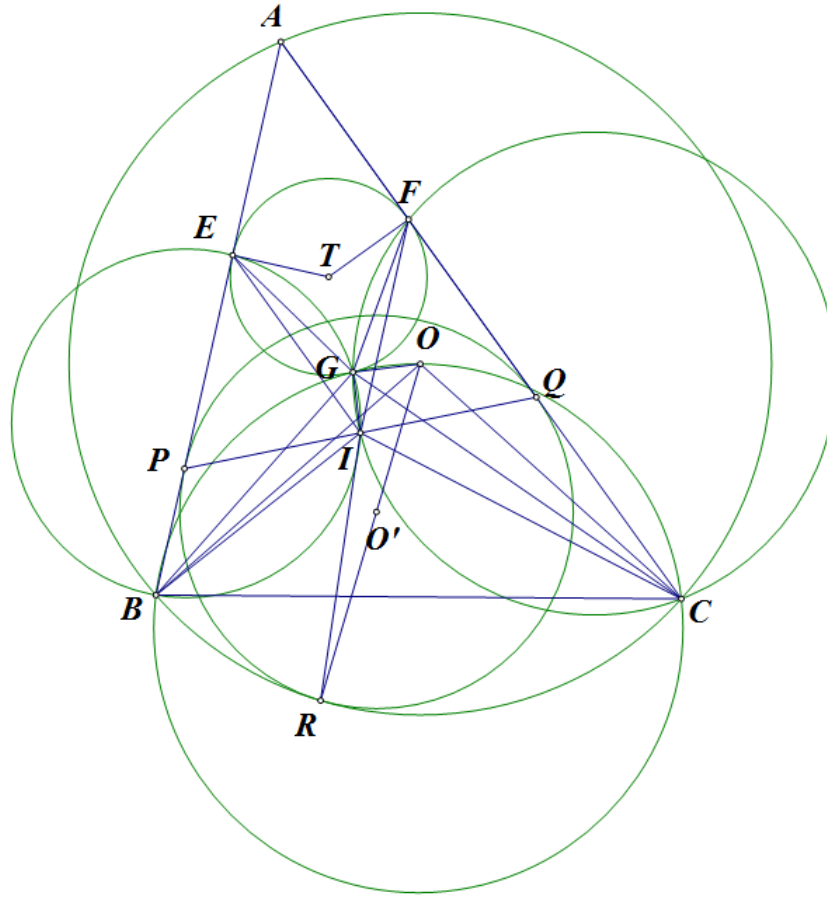
Bài 64

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại R, P, Q . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

a, Chứng minh rằng $\widehat{BRI} = \widehat{CRI}$.

b, Đường trung trực của AI cắt AC, AB theo thứ tự tại E, F . Chứng minh rằng đường tròn tiếp xúc với AC, AB tại E, F tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC

(Đề xuất bởi **khanhdat1**)



a, Theo **bài 18** ta có tứ giác $PIRB, QIRC$ nội tiếp nên $\widehat{BRI} = \widehat{APQ} = \widehat{AQP} = \widehat{CRI}$

b, $(EIB) \cap (FIC) = \{I, G\}$ Gọi T là tâm đường tròn tiếp xúc với AB, AC tại E, F Ta có:

$$\widehat{BGC} = \widehat{BGI} + \widehat{IGC} = \widehat{BEI} + \widehat{IFC} = 2\widehat{EAI} + 2\widehat{FAI} = 2\widehat{BAC} = \widehat{BOC} \Rightarrow G \in (O)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{EGF} = \widehat{EBI} + \widehat{ICF} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{ETF}}{2} \Rightarrow G \in (T)$$

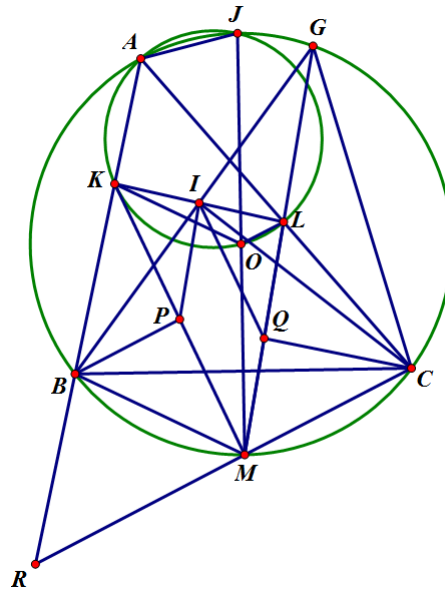
$$\text{Mặt khác: } \widehat{FGC} = \widehat{FIC} = \widehat{FIQ} + \widehat{QIC} = \widehat{FEI} + \widehat{IBC} = \widehat{GEF} + \widehat{GBC}$$

Suy ra: (T) tiếp xúc với (O) tại G .

Bài 65

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , M là trung điểm cung nhỏ BC . Lấy K, L lần lượt thuộc AB, AC sao cho $OK \parallel MB$ và $OL \parallel MC$. ML cắt (O) tại điểm thứ 2 là G . Chứng minh BG chia đôi KL .

(Đề xuất bởi **kekkei**)



Kéo dài MO cắt (O) tại J . Gọi P, Q, I lần lượt là trung điểm KM, LM, KL .

Ta có: $\widehat{AJM} = \widehat{ACM} = \widehat{ALO} \Rightarrow J \in (AKOL)$.

Suy ra: $\triangle JLC = \triangle JKB(g.c.g) \Rightarrow KB = LC$.

Trên tia đối của tia BA lấy R sao cho $BR = BK = CL$

$\Rightarrow \triangle MBR = \triangle MCL(c.g.c) \Rightarrow ML = MR = 2BP \Rightarrow MQ = QL = BP = PI$.

Tương tự ta có: $MP = PK = CQ$

Suy ra ta có: $\triangle MBP = \triangle CMQ; \triangle CLQ = \triangle KBP(c.c.c)$

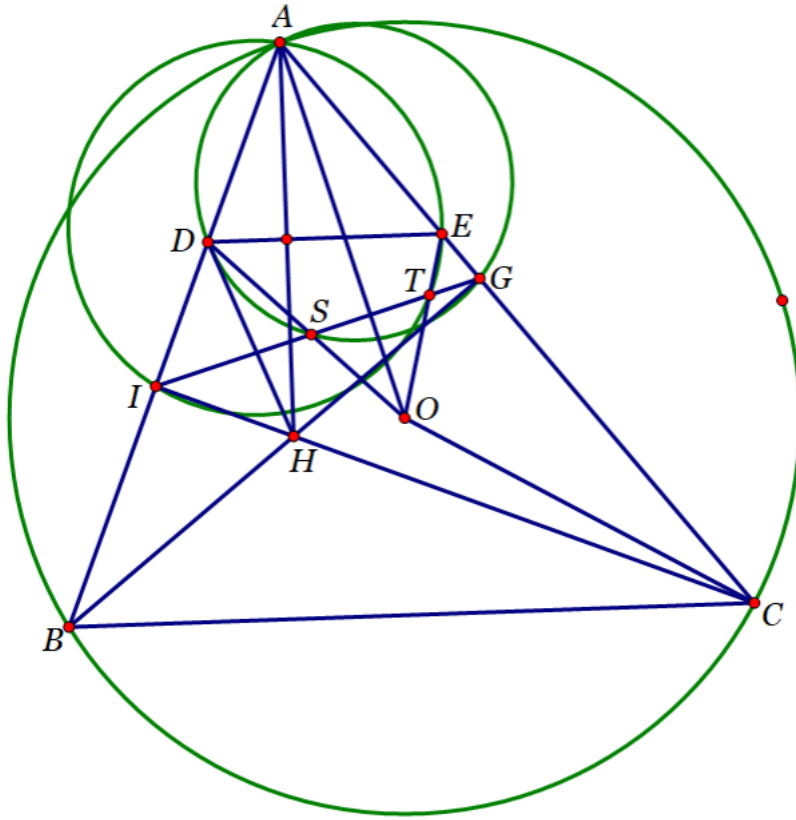
$\Rightarrow \widehat{BPI} = \widehat{KPB} + \widehat{KPI} = \widehat{PBM} + \widehat{PMB} + \widehat{PMQ} = \widehat{BMC} \Rightarrow \widehat{BIP} = \widehat{BCM} = \widehat{BGM}$.

Vì $PI \parallel MG \Rightarrow B, I, G$ thẳng hàng nên ta có đpcm.

Bài 66

Cho $\triangle ABC$ nhọn có đường cao BG, CI cắt nhau tại H . Trung trực của AH cắt AB, AC lần lượt tại D, E . OD, OE cắt IG lần lượt tại S, T . Chứng minh: AO đi qua trung điểm ST .

(Đề xuất bởi *viethoang2002*)



Ta có: $\triangle ADH \sim \triangle AOC(g.g) \Rightarrow \triangle ADO \sim \triangle AHC(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ACH}$.

Tương tự ta có: $\widehat{AOE} = \widehat{ABH} \Rightarrow OA$ là phân giác $\widehat{DOE}$.

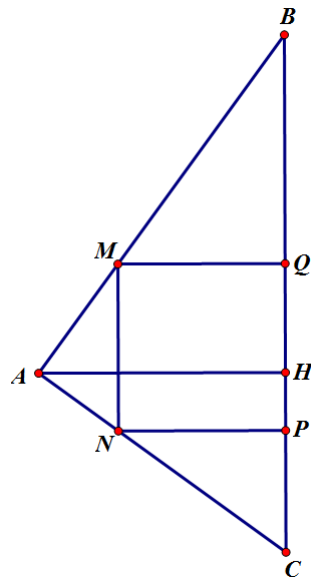
Mặt khác dễ dàng chứng minh: $OA \perp IG \Rightarrow \triangle OST$ cân tại O hay ta có đpcm.

Bài 67

Cho góc xAy vuông tại A và hai điểm B, C trên Ax, Ay . Dựng hình vuông $MNPQ$ có M trên AB , N trên AC và P, Q trên BC . Biết rằng B, C dịch chuyển và thỏa mãn $AB.AC = k^2$ (không đổi). Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình vuông $MNPQ$.

(Đề xuất bởi **Korkot**)

Lời giải



Đặt độ dài cạnh hình vuông là x và $AH = h$, $BC = a$.

$$\text{Ta có: } \frac{MQ}{AH} + \frac{MN}{BC} = \frac{BM}{AB} + \frac{AM}{AB} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{h} + \frac{x}{a} = 1 \Rightarrow x = \frac{ah}{a+h} = \frac{k^2}{a+h}$$

$$\text{Ta có: } a^2 = AB^2 + AC^2 \geq 2AB \cdot AC = 2k^2 \Rightarrow a \geq \sqrt{2}k$$

$$\text{Suy ra: } a + h = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + h \geq 3\sqrt[3]{\frac{ah \cdot a}{4}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}k \Rightarrow x^2 \leq \frac{2k^2}{9}.$$

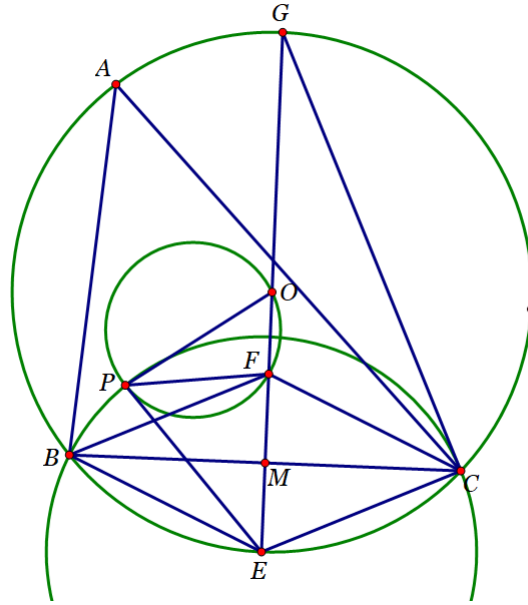
Vậy giá trị lớn nhất của $S_{MNPQ} = \frac{2}{9}k^2$ khi $AB = AC = |k|$

Bài 68

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . M là trung điểm BC , E là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Lấy F đối xứng với E qua M . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và P thay đổi trên (IBC) sao cho P, O, F không thẳng hàng. Chứng minh tiếp tuyến tại P của (POF) luôn đi qua 1 điểm cố định khi A di chuyển trên cung lớn BC .

(Đề xuất bởi **Korkot**)

Lời giải



Kéo dài EM cắt (O) tại điểm G .

Ta có: $MI = MB = MC$. Suy ra: $EP^2 = EC^2 = EM.EG = EM.2EO = EF.EO$

$\Rightarrow EP$ là tiếp tuyến của (POF) . Suy ra đpcm.

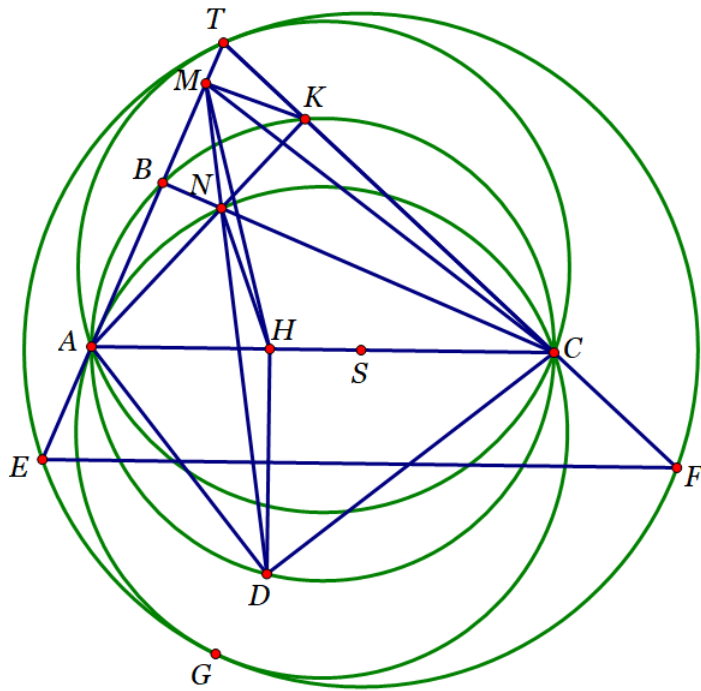
Bài 69

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O) . Lấy điểm M trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = AD$. Đường thẳng DM cắt BC tại N . Gọi H là hình chiếu của D trên AC và K là hình chiếu của C trên AN .

a, Chứng minh rằng $\widehat{MHN} = \widehat{MCK}$. (USMO 2009)

b, Gọi T là giao điểm của AB và CK . Lấy các điểm E, F lần lượt trên đoạn AT và CT sao cho EF song song với AC và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác TEF nằm trên AC . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TEF và đường tròn ngoại tiếp tam giác NAC tiếp xúc với nhau.

(Đề xuất bởi **khahdat1**)



a, Ta có $AM^2 = AD^2 = AH.AC \Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle ACM$.

$$\widehat{CND} = 90^\circ - \widehat{AMD} = 90^\circ - \widehat{ADM} = \widehat{NDC} \Rightarrow CN = CD \Rightarrow CN^2 = CH.CA$$

$$\Rightarrow \triangle CNH \sim \triangle CAN \Rightarrow \widehat{MHN} = \widehat{MHA} - \widehat{NHA} = \widehat{AMC} - \widehat{BNA} = \widehat{AMC} - \widehat{MTC} = \widehat{MCK}.$$

b, Vì $AC \parallel EF$ nên dễ dàng chứng minh (TAC) và (TEF) tiếp xúc với nhau.

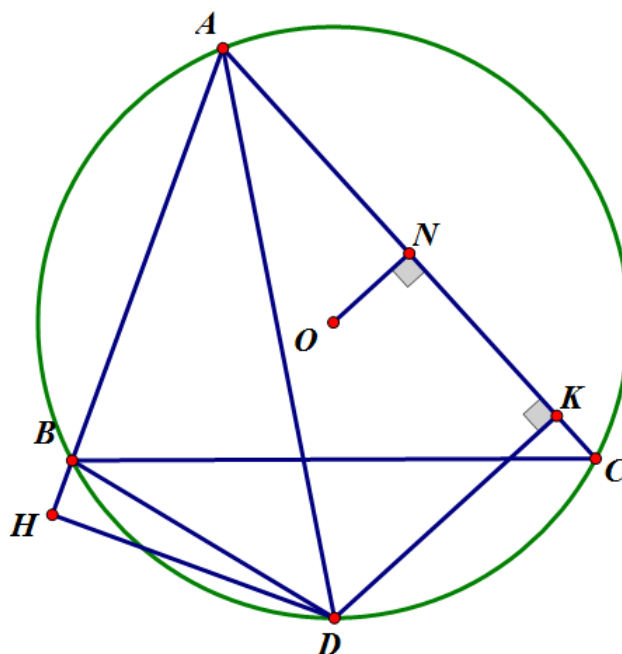
Mặt khác dễ dàng chỉ ra (ANC) và (TAC) đối xứng qua AC , AC là trục đối xứng của (O) , (TEF)

Suy ra (TEF) tiếp xúc (ANC) theo tính đối xứng.

Bài 70

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) , phân giác góc BAC cắt (O) tại D . Gọi N, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ O, D xuống AC . Chứng minh $AB = 2NK$.

(Đề xuất bởi **phamhuy1801**)



Ke $DH \perp AB$.

Ta có: $\triangle DCK = \triangle DBH(g.c.g) \Rightarrow BH = CK$

$$\text{Vĩ } AK = AK \Rightarrow AC = AB + 2CK \Rightarrow NK = NC - CK = \frac{AC - 2CK}{2} = \frac{AB}{2}$$

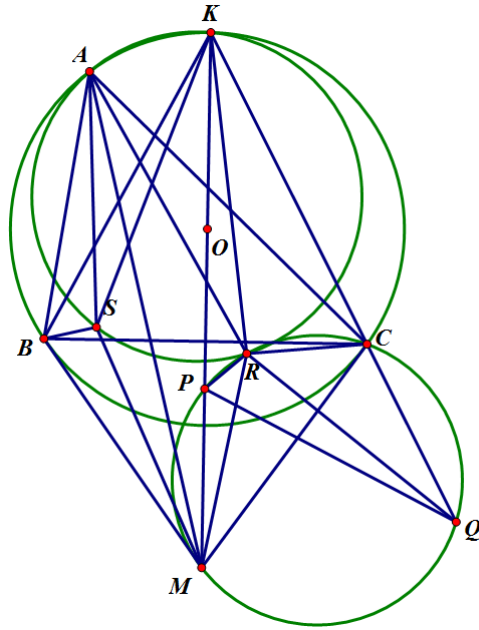
Suy ra đpcm.

Bài 71

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . M là điểm bất kì thuộc trung trực của BC . R, S lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ACM, ABM . Chứng minh (ARS) qua 1 điểm cố định khác A khi M thay đổi.

(Đề xuất bởi *taconghoang*)

Lời giải



Gọi K là điểm chính giữa cung lớn BC . $(MRC) \cap KM = \{M, P\}$; $(MRC) \cap KC = \{C, Q\}$

Ta có: $\Delta KPQ \sim \Delta KBM(g.g)(1)$

Ta lại có: $\widehat{SMR} = \frac{\widehat{BMC}}{2} = \widehat{BMP} \Rightarrow \widehat{BMS} = \widehat{PMR}$.

Mặt khác: $\widehat{KCR} = \frac{\widehat{KCM} + \widehat{KCA}}{2} = \frac{\widehat{KBM} + \widehat{ABK}}{2} = \widehat{SBM}$

$$\Rightarrow \Delta PRQ \sim \Delta BSM(g.g)(2)$$

Từ (1), (2) ta có: $\triangle KRP \sim \triangle KSB \Rightarrow \widehat{SKR} = \widehat{BKP} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{SAR} \Rightarrow K \in (ASR)$.

Vậy (ASR) đi qua điểm K cố định khi M di động.

Bàì 72

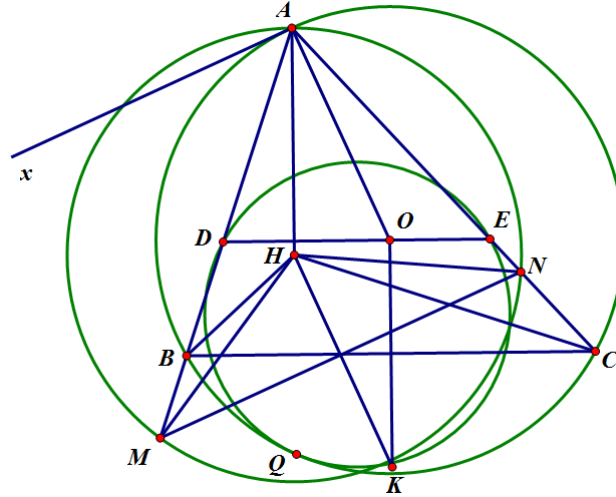
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có BC cố định và A di động sao cho tam giác ABC luôn nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Đường tròn tâm H bán kính AH cắt AB, AC theo thứ tự tại M, N .

a , Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với MN cũng đi qua một điểm cố định.

b , Gọi D và E theo thứ tự là giao điểm của AB, AC với tiếp tuyến tại O của đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC . Gọi Q là điểm đối xứng với A qua DE . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QDE tiếp xúc với đường tròn (O) .

(Đề xuất bởi **khahdat1**)

Lời giải



a, Ta có: $\widehat{BMH} = \widehat{BAH} = \widehat{BCH} \Rightarrow BHCM$ nội tiếp. Tương tự thì ta có 5 điểm M, B, H, N, C cùng thuộc 1 đường tròn.

Lấy K đối xứng với O qua $BC \Rightarrow AHKO$ là hình bình hành. Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) .

Ta có: $\widehat{MAx} = \widehat{BCA} = \widehat{BMN} \Rightarrow Ax \parallel MN$. Vì $Ax \perp AO \Leftrightarrow Ax \perp HK \Rightarrow HK \perp MN$.

Vậy đường thẳng qua H và vuông góc với MN đi qua điểm cố định là K .

b, Ta có: $DE \parallel BC \Rightarrow (ADE)$ tiếp xúc với (O) .

Mà $(ADE); (QDE)$ đối xứng qua DE và DE là trục đối xứng của (O)

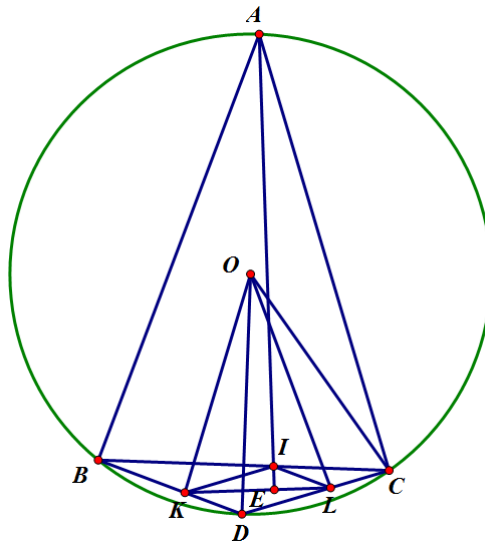
$\Rightarrow (QDE)$ tiếp xúc với (O) .

Bài 73

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O) . D là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Lấy I bất kì trên đoạn BC , dựng hình bình hành $IKDL$ ($K \in BD, L \in CD$). Chứng minh: $AI \perp KL$

(Đề thi chuyên Lê Quý Đôn 2016-2017)

Lời giải



$$AI \cap KL = \{E\}.$$

Ta có: $KD = IL = LC$; $OL = OC$; $\widehat{OCL} = \widehat{ODC} = \widehat{ODK} \Rightarrow \triangle OLC = \triangle OKD (c.g.c)$

$$\Rightarrow \widehat{OKD} = \widehat{OLC} \Rightarrow OKDL \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{COL} = \widehat{KOD} = \widehat{KLD}.$$

Mặt khác ta có: $\triangle AOC \sim \triangle ILC (g.g) \Rightarrow \triangle OLC \sim \triangle AIC \Rightarrow \widehat{LOC} = \widehat{IAC}$

Suy ra: $\widehat{KLD} = \widehat{IAC} \Rightarrow AELC \text{ nội tiếp. Từ đó ta có đpcm.}$

Bài 74

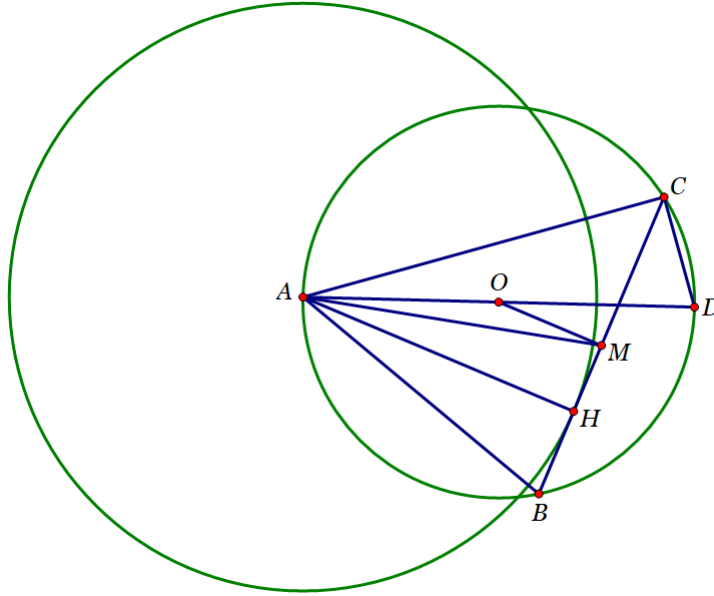
Cho điểm A cố định thuộc $(O; R)$. Hai dây cung thay đổi AB, AC thỏa mãn $AB \cdot AC = 3R^2$.

Chứng minh:

a, BC tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

b, Xác định vị trí các dây AB, AC để diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

(Đề xuất bởi **eLcouQTai**)



Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$, kẻ đường kính AD .

Dễ dàng chứng minh $\triangle HAB \sim \triangle CAD(g.g) \Rightarrow AB.AC = 2R.AH \Rightarrow AH = \frac{3}{2}R$

$\Rightarrow BC$ tiếp xúc với $\left(A; \frac{3}{2}R\right)$.

S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow BC$ lớn nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Rightarrow M \equiv L$. Trong đó L là giao của AD và $\left(A; \frac{3}{2}R\right)$.

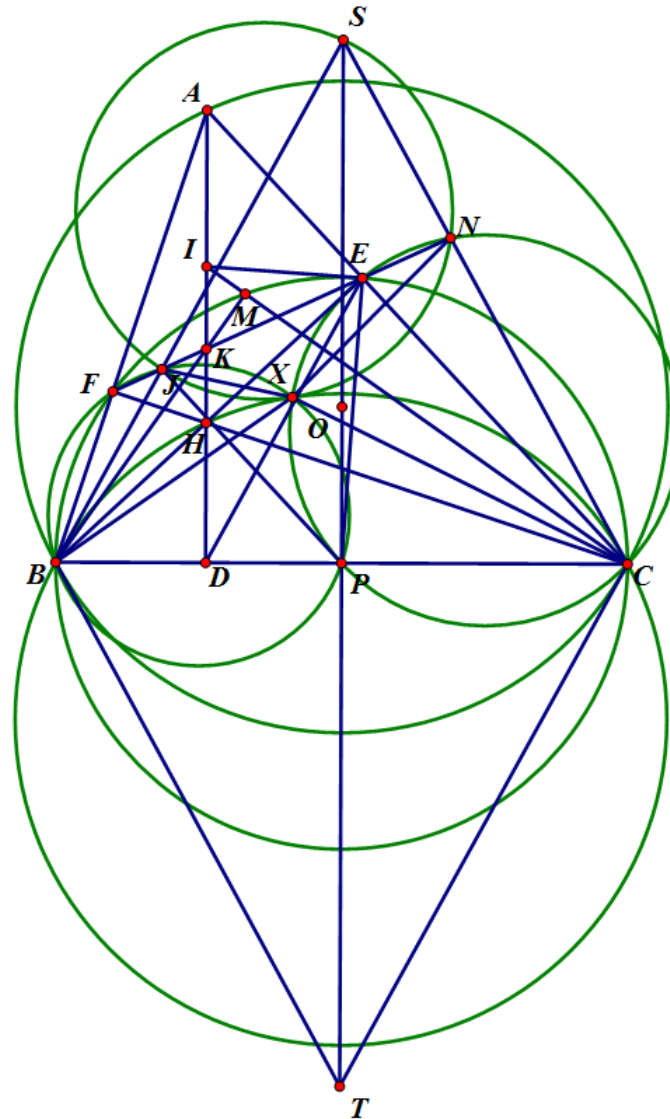
Bài 75

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn tâm P đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F và E . Gọi giao điểm của BE và CF là H . Vẽ HD vuông góc với BC tại D . Gọi K là giao điểm của EF và AH . Gọi I là trung điểm của AH . IC cắt đường tròn (P) tại M khác C . Chứng minh rằng :

- A, H, D thẳng hàng và B, K, M thẳng hàng.
- Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) . Gọi S là điểm đối xứng T qua BC . Gọi J, N theo thứ tự là giao điểm của EF với SB, SC . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác SJN .

(Đề xuất bởi **khanhdat1**)

Lời giải



a) Vì $E, F \in (P, \frac{BC}{2})$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ hay BE, CF là các đường cao của tam giác ABC . Suy ra : H là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

Mà $HD \perp BC$ nên A, H, D thẳng hàng.

Dễ dàng ta chứng minh được IE là tiếp tuyến của (P) nên $\widehat{IEK} = \widehat{ABE}$.

Mặt khác ta có : $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow AEDB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{IDE}$. Suy ra : $\widehat{IEK} = \widehat{IDE}$.

Do đó : $\triangle IDE \sim \triangle IEK(g.g) \Rightarrow IE^2 = IK.ID$. (1)

Ngoài ra do IE là tiếp tuyến của (P) nên dễ có $IE^2 = IM.IC$. Kết hợp với (1) ta được :

$IK.ID = IM.IC \Rightarrow \triangle IMK \sim \triangle IDC(c.g.c) \Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{IDC} = 90^\circ \Rightarrow KM \perp IC$.

Mà $M \in (P, \frac{BC}{2})$ nên $BM \perp IC$ hay B, K, M thẳng hàng.

b) Ta có : $\widehat{NCF} = \widehat{SCB} - \widehat{BCH} = \widehat{TCB} - \widehat{BCH} = \widehat{BAC} - \widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \widehat{NFC} \Rightarrow \triangle NCF$
cân tại $N \Rightarrow \widehat{CNE} = 180^\circ - 2\widehat{NFC} = 2\widehat{ACB} = \widehat{BPE} \Rightarrow CPEN$ nội tiếp.

Tương tự ta cũng có $BFJP$ nội tiếp.

Gọi X là giao điểm thứ 2 của (BPF) và (CNE) . Khi đó : $\widehat{BXC} = \widehat{BXP} + \widehat{CXP} = \widehat{BFP} + \widehat{CEP} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{BHC} \Rightarrow BHXC$ nội tiếp.

Do tính chất đối xứng của S và T nên $SNXJ$ cũng nội tiếp.

Ta lại có : $\widehat{BXJ} = \widehat{AFE} = \widehat{ACB} = \widehat{XCB} + \widehat{XCA} = \widehat{XCB} + \widehat{XNJ}$.

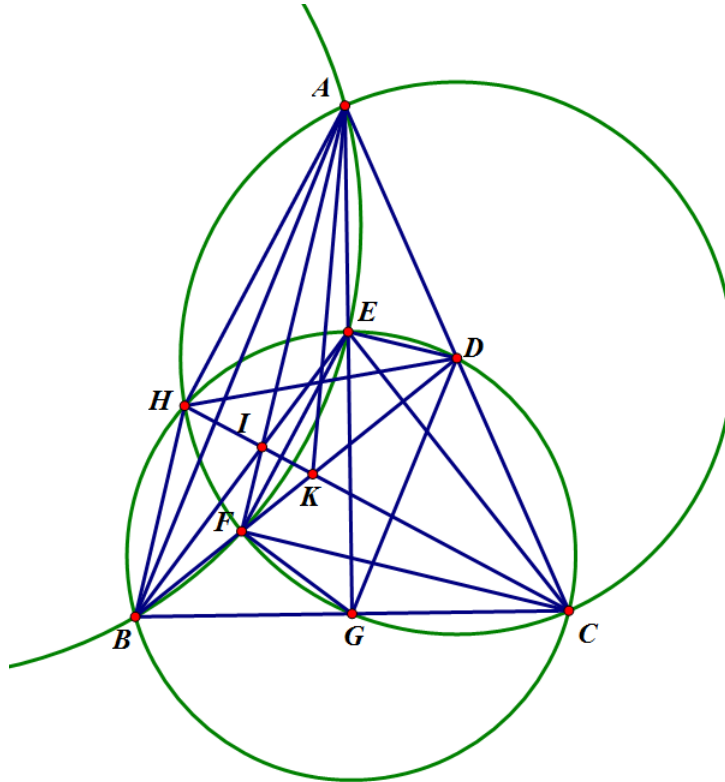
Từ đó suy ra (BXC) tiếp xúc với (NXJ) hay (BHC) tiếp xúc với (SNJ) .

Bài 76

Cho tam giác ABC với $AB = AC$ và D là trung điểm AC . Phân giác $\widehat{BAC}$ cắt (BCD) tại E ở miền trong tam giác. BD cắt (ABE) tại F (Khác B). AF cắt BE tại I và CI cắt BD tại K . Chứng minh rằng : I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KAB .

(Đề xuất bởi **BurakkuYokuro11**)

Lời giải



Vì AE là tia phân giác của tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{EBA} = \widehat{ECA}$.

Mà $\widehat{ECA} = \widehat{EBD}$ nên $\widehat{EBD} = \widehat{EBA}$ hay BI là tia phân giác của $\widehat{ABK}$.

Ta đi chứng minh AI là tia phân giác BAK .

Gọi G là trung điểm BC , H là giao điểm thứ 2 của IC với (BDC) .

Ta có : $DG \parallel AB \Rightarrow \widehat{AGD} = \widehat{BAE} = \widehat{EFD} \Rightarrow DEFG$ nội tiếp.

Do đó : $\widehat{AFG} = \widehat{AFE} + \widehat{EFG} = \widehat{ABE} + 180^\circ - \widehat{EDG} = \widehat{ABE} + \widehat{ADE} + \widehat{GDC} = \widehat{ABE} + \widehat{EBC} + \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ACB} \Rightarrow AFGC$ nội tiếp.

Lại có : $IH.IC = IE.IB = IF.IA \Rightarrow AHFC$ nội tiếp hay A, H, F, G, C cùng thuộc một đường tròn đường kính $AC \Rightarrow DH = DC \Rightarrow BD$ là tia phân giác $\widehat{HBC}$.

Suy ra : $\triangle CKD \sim \triangle BCD (g.g) \Rightarrow CD^2 = DK.DB \Rightarrow AD^2 = DK.DB$

$\Rightarrow \triangle ADK \sim \triangle BDA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{KAD} = \widehat{ABD}$.

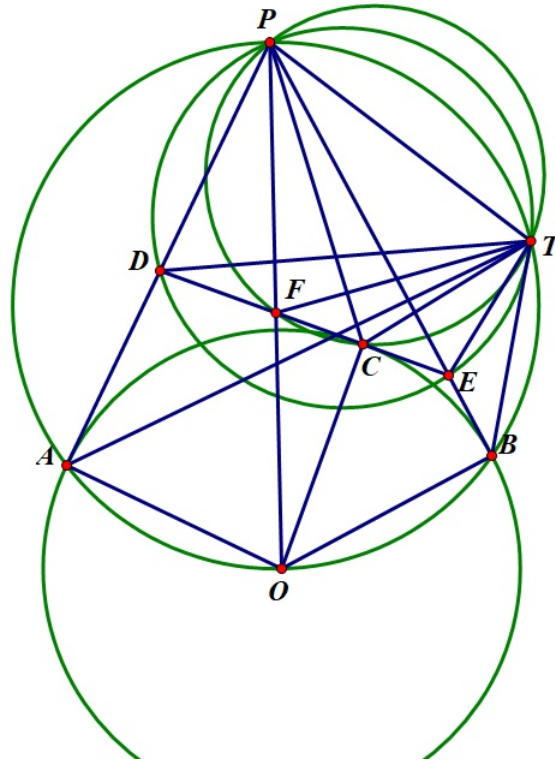
Do đó : $\widehat{IAB} = \widehat{IEF} = \widehat{BED} - \widehat{DEF} = (180^\circ - \widehat{ACG}) - (180^\circ - \widehat{DGF}) = \widehat{DGF} - \widehat{ACG} = (90^\circ - \frac{\widehat{GDF}}{2}) - (90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}) = \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{GDF}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{ABD}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{DAK}}{2} = \frac{\widehat{KAB}}{2}$

$\Rightarrow AI$ là tia phân giác của $\widehat{KAB}$. Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AKB .

Bài 77

Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại P . Trên cung nhỏ AB , lấy điểm C sao cho không phải là điểm chính giữa cung đó. Tiếp tuyến tại C cắt OP tại F và cắt PA, PB lần lượt tại D và E . Chứng minh rằng $(PCF); (PAB); (PDE)$ đồng quy tại một điểm khác P .

(Đề xuất bởi **Badong2211**)



Giả sử C, B nằm cùng phía so với OP . Gọi $\{P, T\} = (PCF) \cap (PDE)$.

$$\text{Ta có: } \widehat{CTE} = \widehat{FCT} - \widehat{CET} = (180^\circ - \widehat{FPT}) - (180^\circ - \widehat{DPT}) = \widehat{DPF} = \frac{\widehat{DPE}}{2} = \frac{\widehat{DTE}}{2}$$

$$\Rightarrow TC \text{ là phân giác góc } DTE \Rightarrow \frac{DC}{DT} = \frac{CE}{ET} \Leftrightarrow \frac{AD}{DT} = \frac{BE}{ET} \Rightarrow \triangle BET \sim \triangle ADT (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{DAT} = \widehat{EBT} \Rightarrow T \in (PAB)$$

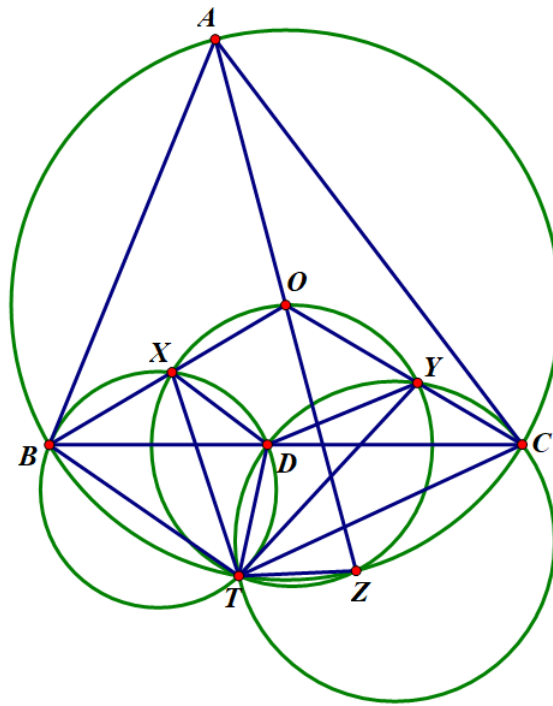
Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 78

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có đường kính AZ . Lấy D bất kì trên BC và lấy X, Y trên OB, OC sao cho $\widehat{BXD} + \widehat{ABC} = \widehat{CYD} + \widehat{ACB} = 180^\circ$. Chứng minh: $\widehat{XZY}$ không đổi khi D di chuyển trên BC .

(Đề xuất bởi **Fabffriver**)

Lời giải



Gọi $\{D, T\} = (BXD) \cap (CYD)$

Ta có: $\widehat{BTC} = \widehat{BTD} + \widehat{DTC} = \widehat{OXD} + \widehat{OYD} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC}$

$\Rightarrow T \in (ABC) \Rightarrow \widehat{OYT} = \widehat{OYD} + \widehat{DYT} = \widehat{ACB} + \widehat{DCT} = \widehat{ACT} = \widehat{OZT}$

$\Rightarrow O, Y, Z, T$ đồng viên. Tương tự ta có: X, O, Z, T đồng viên $\Rightarrow \widehat{XZY} = 180^\circ - \widehat{BOC}(\text{const})$

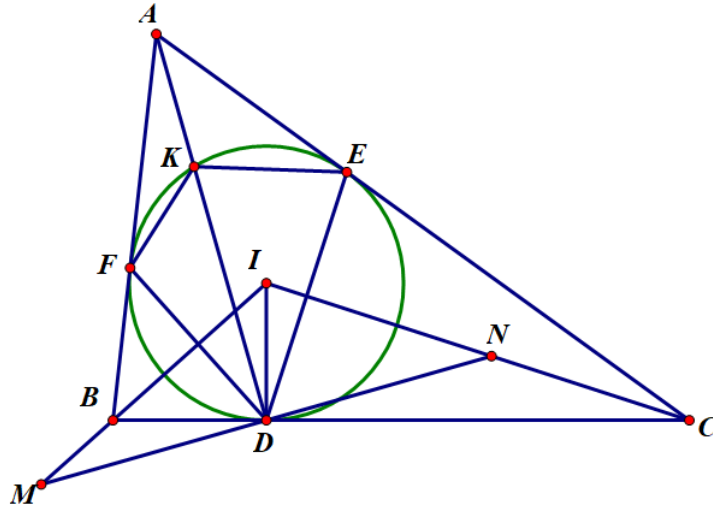
Vậy ta có đpcm.

Bài 79

Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) và (I) tiếp xúc với BC tại D . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt BI, CI lần lượt tại M, N . Chứng minh: $\triangle AMN$ cân.

(Đề xuất bởi **Nguyễn Minh Hà**)

Lời giải



Gọi K là giao điểm thứ 2 của AD với (I) . E, F lần lượt là các tiếp điểm của AC, AB với (I) .

Bằng phép biến đổi góc ta có: $\triangle KFD \sim \triangle IDM$; $\triangle IDN \sim \triangle KED(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{DM}{ID} = \frac{DF}{FK}; \frac{DN}{ID} = \frac{DE}{EK}.$$

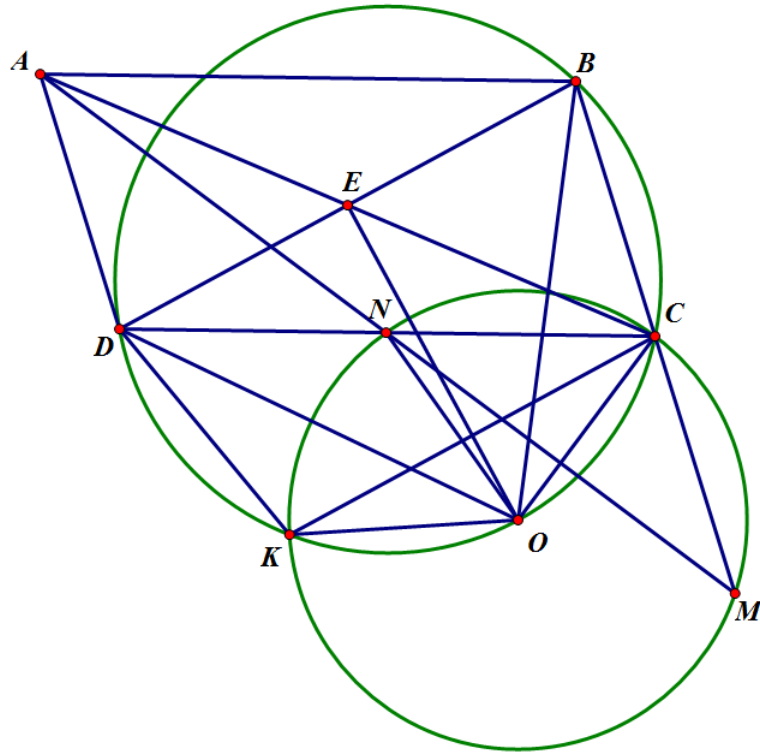
$$\text{Mặt khác dễ dàng chỉ ra được: } \frac{DF}{FK} = \frac{DE}{EK} \Rightarrow DM = DN.$$

Suy ra $\triangle AMN$ cân tại A .

Bài 80

Cho hình bình hành $ABCD$. Đường phân giác $\widehat{BAD}$ cắt cạnh CD và đường thẳng BC tại M, N . Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác CMN . Vẽ dây cung CK của (O) sao cho CK song song BD . Chứng minh rằng: B, K, O, C, D cùng thuộc một đường tròn.

(Đề xuất bởi **Tea Coffee**)



Gọi E là giao điểm của AC và BD .

Do AN là tia phân giác của $\widehat{DAB}$ nên $\widehat{DNA} = \widehat{NAB} = \widehat{DAN} \Rightarrow \triangle DAN$ cân tại $D \Rightarrow DN = AD = BC$.

Mặt khác : $\widehat{CMN} = \widehat{DAN} = \widehat{DNA} = \widehat{CNM} \Rightarrow \triangle OMN$ cân tại $C \Rightarrow CN = CM \Rightarrow OC$ là trung trực của $MN \Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{OCN} = \widehat{ONC} \Rightarrow \widehat{BCO} = \widehat{DNO}$.

Mà O là tâm (CMN) nên $OC = ON$. Suy ra : $\triangle OND = \triangle OCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ODN} = \widehat{OBC} \Rightarrow ODBC$ nội tiếp.(1)

Vì $\triangle OND = \triangle OCB$ nên $OD = OB \Rightarrow OE$ là trung trực của BD .

Ta lại có : $CK \parallel BD$ nên OE cũng là trung trực của CK hay OE là trục đối xứng của hình thang $BCKD \Rightarrow BCKD$ là hình thang cân $\Rightarrow BCKD$ nội tiếp.(2)

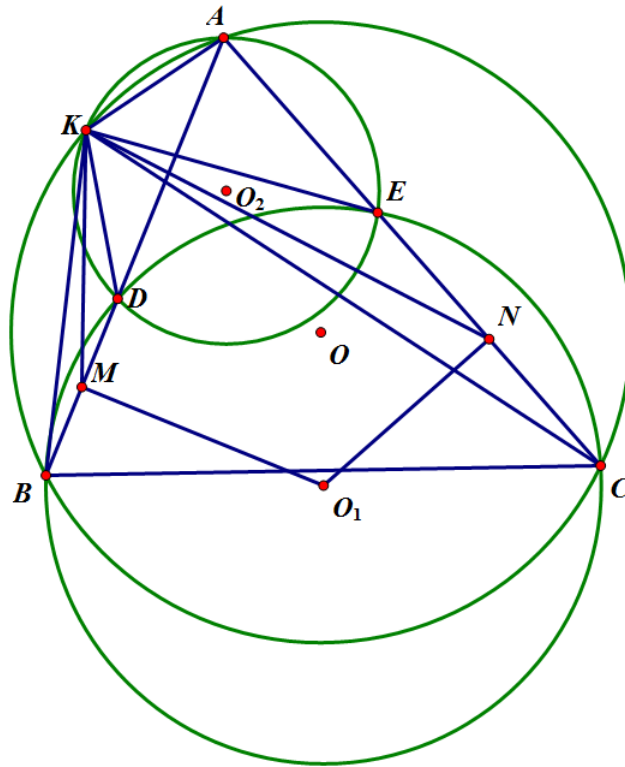
Từ (1) và (2) suy ra : B, K, O, C, D đồng viên.

Bài 81

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Đường tròn (O_1) qua B, C cắt cạnh AB, AC tại D, E . Đường tròn (O_2) qua A, D, E cắt (O) tại K (K khác A). Gọi M, N lần lượt là trung điểm BD, CE . Chứng minh rằng A, K, N, O_1, M cùng thuộc một đường tròn.

(Đề xuất bởi **Tea Coffee**)

Lời giải



Vì O_1 là tâm $(BDEC)$ mà M, N lần lượt là trung điểm của BD, CE nên $\widehat{O_1MA} = \widehat{O_2NA} = 90^\circ \Rightarrow AMO_1N$ nội tiếp.

Ta có : $\widehat{KDA} = \widehat{KEA} \Rightarrow \widehat{KDB} = \widehat{KEC}$ và $\widehat{KBD} = \widehat{KCA}$.

Nên $\triangle KBD \sim \triangle KCE$ (g.g).

Mà KM, KN là các trung tuyến tương ứng nên $\widehat{KMA} = \widehat{KNA} \Rightarrow AKMN$ nội tiếp.

Do đó : A, K, M, O_1, N đồng viên.

Bài 82

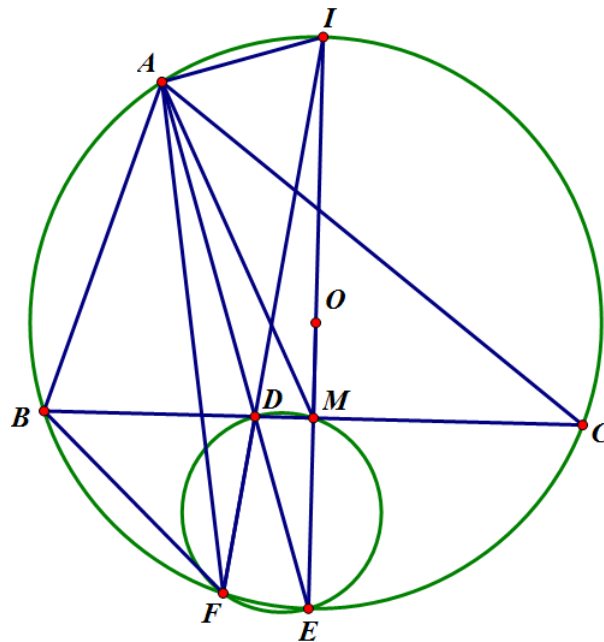
Cho tam giác ABC không cân nội tiếp (O) , BD là phân giác $\widehat{ABC}$. BD cắt (O) tại E . Đường tròn (O_1) đường kính DE cắt (O) tại F .

- a) Chứng minh : đường thẳng đối xứng với BF qua BD đi qua trung điểm của AC .
- b) Giả sử tam giác ABC vuông tại B , $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và bán kính của (O) bằng R . Tính bán kính (O_1) theo R .

(Đề xuất bởi **quynhanh7**)

Lời giải

a)



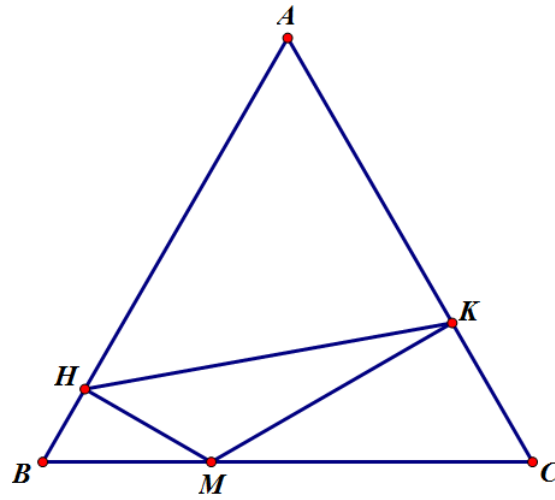
Gọi M là trung điểm BC , kẻ đường kính EI của (O) suy ra I, D, F thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{IMD} = \widehat{IAD} = 90^\circ \Rightarrow AIMD$ nội tiếp.

Từ đó ta có:

$$\widehat{FAE} = \widehat{FIE} = \widehat{DAM} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

b)



Ta có : $\widehat{HMK} = 120^\circ$ không đổi nên để S_{HMK} lớn nhất thì $MH.MK$ phải lớn nhất.

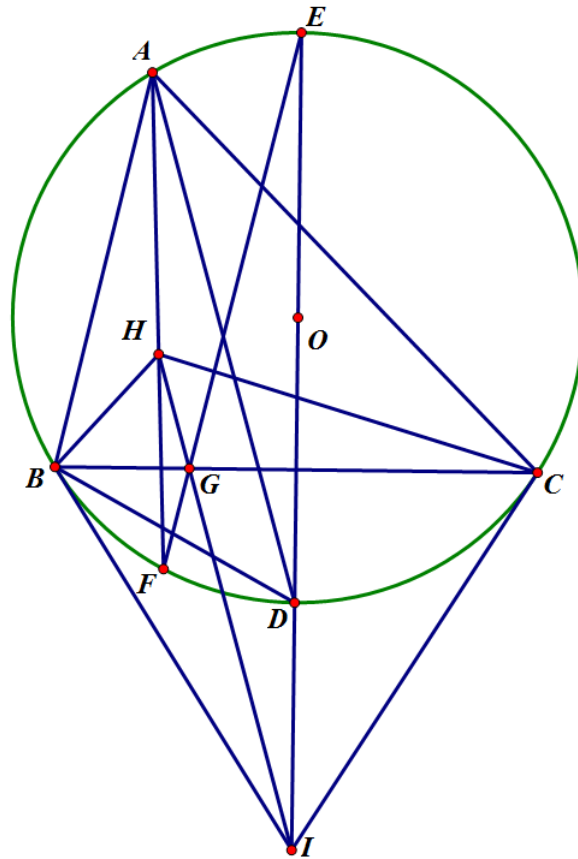
$$\text{Ta lại có : } MH.MK = \frac{\sqrt{3}}{2}BM . \frac{\sqrt{3}}{2}MC = \frac{3}{4}MC.MB \leq \frac{3}{16}.BC^2.$$

Vậy với M là trung điểm BC thì diện tích tam giác HMK lớn nhất.

Bài 85

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp (O) . Phân giác góc BAC cắt (O) tại D khác A , E đối xứng D qua O . Gọi F là một điểm trên cung BD không chứa A, C của (O) ; FE cắt BC tại G , H thuộc AF sao cho GH song song với AD . Chứng minh HG là phân giác $\widehat{BHC}$.

(Đề xuất bởi **Diepnguyencva**)



Gọi I là giao của HG và DE .

Ta có : $\widehat{FHI} = \widehat{FAD} = \widehat{FED} \Rightarrow FHEI$ nội tiếp $\Rightarrow GH.GI = GF.GE = GB.GC \Rightarrow BHCI$ nội tiếp.

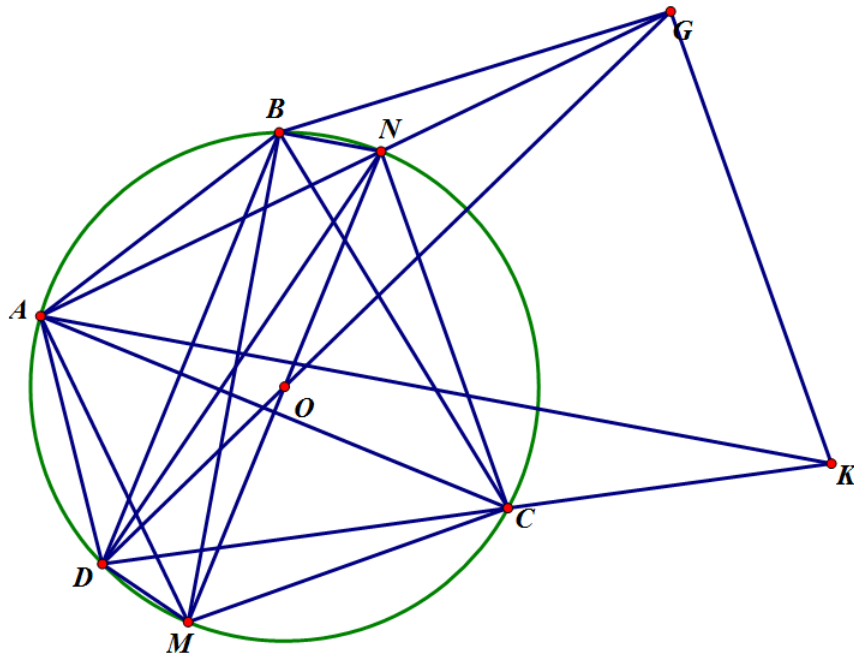
Suy ra : $\widehat{BHI} = \widehat{BCI} = \widehat{CBI} = \widehat{CHI} \Rightarrow HG$ là tia phân giác $\widehat{BHC}$.

Bài 86

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O có các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Các điểm M và N lần lượt là điểm chính giữa các cung ADC và ABC . Đường kính qua D của (O) giao dây cung AN tại G . Đường thẳng qua G song song với NC cắt CD tại K . Chứng minh rằng $BM \perp AK$.

(Đề xuất bởi **quangminhltv99**)

Lời giải



Ta có: $ADCN$ nội tiếp và $NC \parallel GK$ nên $AGKD$ nội tiếp .

Suy ra $\widehat{NGD} = \widehat{CKA}$ mà $\widehat{ACD} = \widehat{AND} \Rightarrow \widehat{NDG} = \widehat{CAK}$.

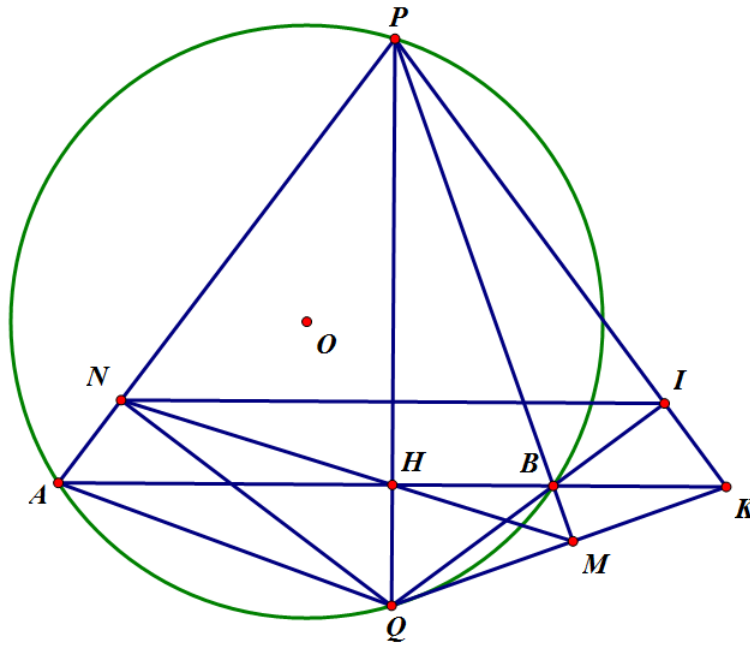
Ta lại có: $\widehat{NDG} = \widehat{OND} = \widehat{DBM} \Rightarrow \widehat{DBM} = \widehat{CAK}$.

Từ đó ta có đpcm.

Bài 87

Cho (O) và dây AB không đi qua tâm. Dây PQ vuông góc với AB tại H ($HA > HB$). M là hình chiếu của Q trên PB , QM cắt AB tại K . Tia MH cắt AP tại N . Từ N kẻ đường thẳng song song với AK cắt QB tại I . Chứng minh : P, I, K thẳng hàng.

(Đề xuất bởi **MarkGot7**)



Gọi $\{I'\} = QB \cap PK$.

Ta có : $\widehat{PHK} = \widehat{PMK} = \widehat{QHB} = \widehat{QMB} = 90^\circ$ nên các tứ giác $HBMQ, HPKM$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{MQB} = \widehat{MHB} = \widehat{MPI'} \Rightarrow PI'MQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PI'Q} = \widehat{PMQ} = 90^\circ$.

Tam giác PAB nội tiếp (O) có $QM \perp PB$, $QH \perp AB$ mà M, H, N thẳng hàng nên theo tính chất của đường thẳng Simson ta có : $QN \perp AP$.

Lại có : $\widehat{MKH} = \widehat{MPH} = \widehat{QAB} \Rightarrow \triangle QAK$ cân tại $Q \Rightarrow \widehat{PQA} = \widehat{PQK}$.

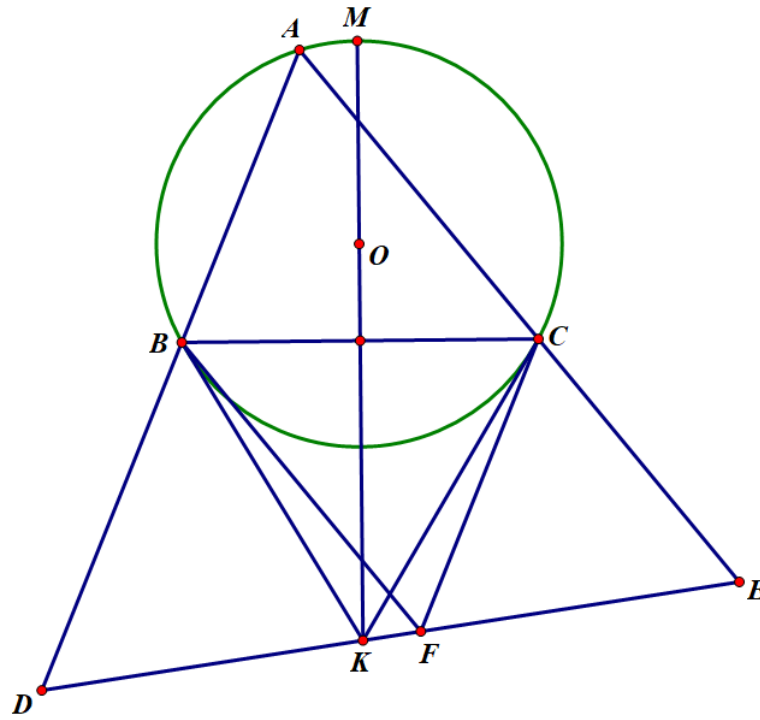
Mà $\widehat{NQA} = \widehat{I'QK} = 90^\circ - \widehat{PKQ} = 90^\circ - \widehat{PAQ}$ nên $\widehat{PQN} = \widehat{PQI'}$.

Mặt khác : $\widehat{QPN} = \widehat{QPI'}$ nên PQ là trung trực của NI' hay $PQ \perp NI' \Rightarrow NI \parallel AK \Rightarrow I' \equiv I \Rightarrow P, I, K$ thẳng hàng.

Bài 88

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . M là điểm chính giữa cung lớn BC . Lấy D, E thuộc tia đối của tia AB, AC sao cho $BD = AC$ và $CE = AB$. Gọi K là điểm đối xứng với M qua BC . Chứng minh: D, K, E thẳng hàng.

(Đề xuất bởi **Phan Quế Sơn**)



Dựng hình bình hành $ABFC$. Từ đó ta có: $\triangle BDF$ và $\triangle CEF$ cân tại B và C .

Ta có: $\widehat{CFE} = \widehat{BFD} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$ và $\widehat{BFC} = \widehat{BAC} \Rightarrow D, F, E$ thẳng hàng.

Mặt khác: $\widehat{BFC} = \widehat{BAC} = \widehat{BKC} \Rightarrow BKFC$ nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{BFK} = \widehat{BCK} = 90^\circ - \frac{\widehat{BKC}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BFD} \Rightarrow D, K, F$ thẳng hàng.

Tương tự K, F, E thẳng hàng nên ta có đpcm.

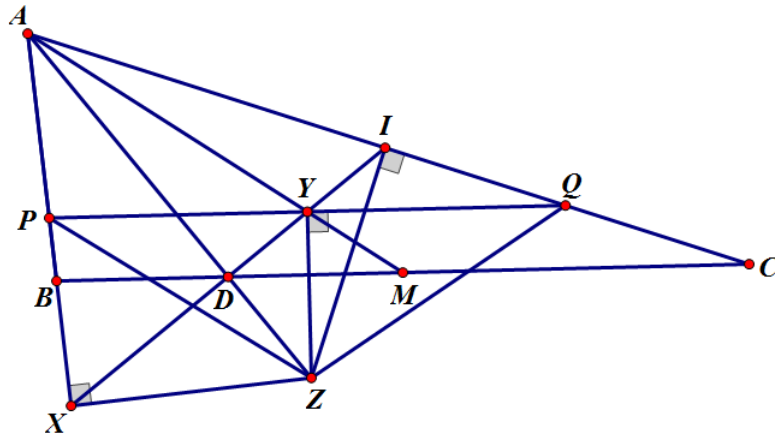
Bài 89

Cho tam giác ABC , phân giác AD , trung tuyến AM . Đường vuông góc với AD tại D cắt AB, AM lần lượt tại X, Y . Đường vuông góc với AB tại X cắt AD tại Z . Chứng minh YZ vuông góc với BC .

(Đề xuất bởi **viaaiv**)

Lời giải

Cách 1 :



Kéo dài DY cắt AC tại I .

Suy ra $ZI \perp AC$.

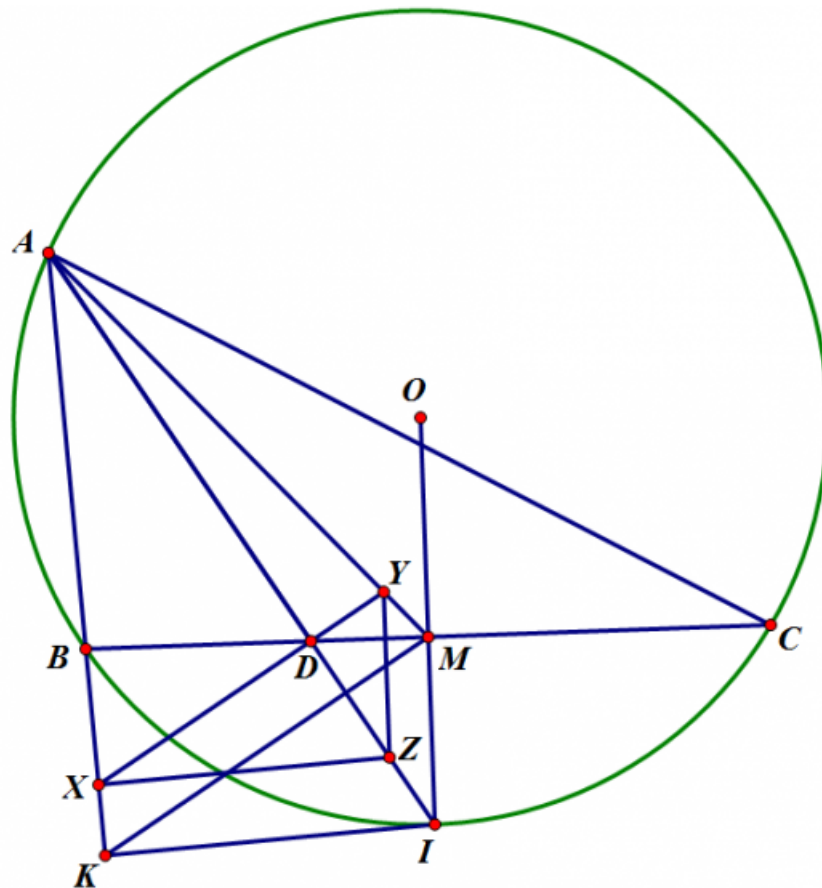
Từ Y kẻ đường thẳng vuông góc với YZ cắt AB, AC tại P, Q .

Ta có hai tứ giác $ZYPX$ và $ZYIQ$ nội tiếp.

Kết hợp với $\widehat{ZXY} = \widehat{ZIY}$ thì ta có: $\widehat{ZPY} = \widehat{ZQY}$.

Suy ra $YP = YQ$ mà $MB = MC$ từ đó ta có $PQ \parallel BC$. Suy ra đpcm.

Cách 2 :



Ta có : AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại I .

Kẻ IK vuông góc với AB suy ra tứ giác $IMBK$ nội tiếp nên $\widehat{IKM} = \widehat{IBM} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{KAI} \Rightarrow KM \perp AI \Rightarrow KM \parallel XY \Rightarrow YZ \parallel MI \Rightarrow đpcm.$

Bài 90

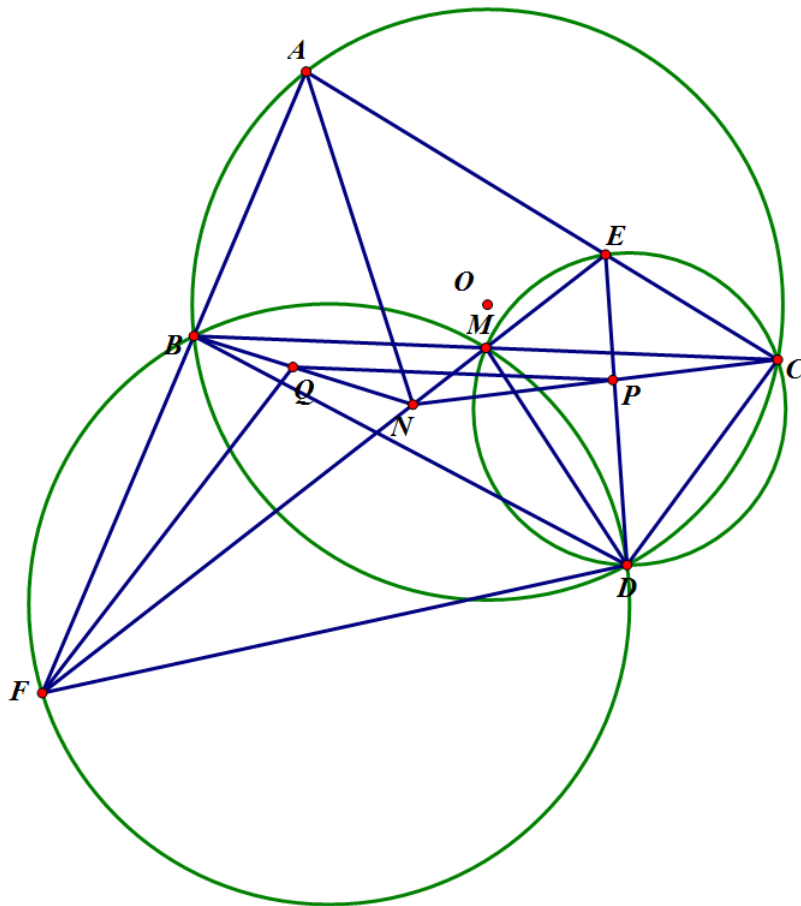
Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm BC . AM cắt (O) tại điểm thứ hai là D . Đường tròn ngoại tiếp $\triangle MDC$ cắt AC tại E . Đường tròn ngoại tiếp $\triangle MBD$ cắt đường thẳng AB tại F .

a) Chứng minh $\triangle CED \sim \triangle BFD$ và E, M, F thẳng hàng.

b) Phân giác $\angle BAC$ cắt EF tại N . Phân giác $\angle CEM$ cắt CN tại P . Phân giác $\angle BFN$ cắt BN tại Q . Chứng minh $PQ \parallel BC$.

(Đề xuất bởi **MoMo123**)

Lời giải



a) Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{FBD} = \widehat{ECD}$. (1)

Mặt khác tứ giác $BMDF$ và $DMEC$ nội tiếp nên $\widehat{BFD} = \widehat{DMC} = \widehat{DEC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\triangle CED \sim \triangle BFD(g.g)$

$$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{CDE} \Rightarrow \widehat{BMF} = \widehat{CME} \Rightarrow \widehat{FMC} + \widehat{CME} = \widehat{BMF} + \widehat{FMC} = 180^\circ.$$

$\Rightarrow E, F, M$ thẳng hàng.

b) Tam giác BFN có tia phân giác FQ nên : $\frac{QN}{QB} = \frac{FN}{FB}$.

Tam giác CEN có tia phân giác EP nên : $\frac{PN}{PC} = \frac{EN}{EC}$.

Tam giác AEF có tia phân giác AN nên : $\frac{NF}{NE} = \frac{AF}{AE}$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC có cát tuyến FME , ta có :

$$\frac{EC}{EA} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

Theo giả thiết ta có : M là trung điểm BC nên $MB = MC$. Suy ra : $\frac{EC}{EA} = \frac{FB}{FA}$.

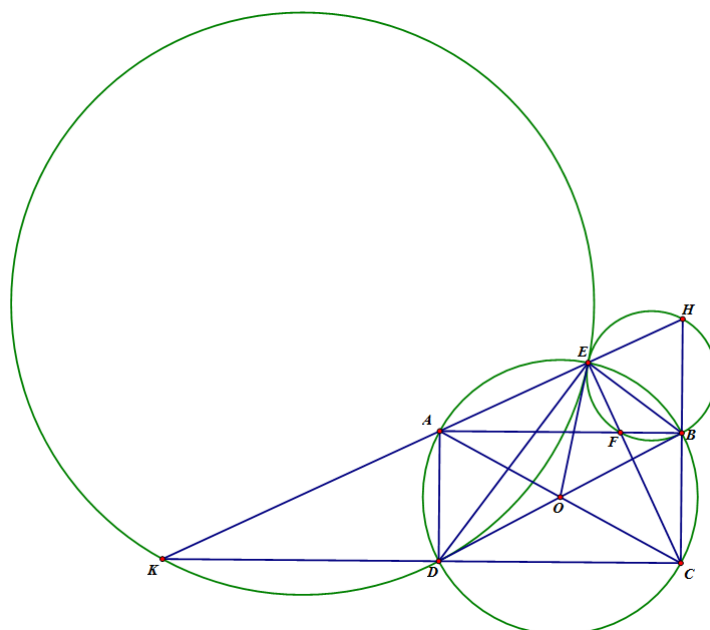
$$\Rightarrow \frac{FA}{EA} = \frac{FB}{EC} \Rightarrow \frac{NF}{NE} = \frac{FB}{EC} \Rightarrow \frac{FN}{FB} = \frac{EN}{EC} \Rightarrow \frac{QN}{QB} = \frac{PN}{PC} \Rightarrow PQ \parallel BC.$$

Bài 91

Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp (O) . Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AB . AE cắt BC tại H . AB cắt CE tại F . AE cắt DC tại K . Chứng minh rằng : đường tròn ngoại tiếp $\triangle FBE$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\triangle KED$.

(Đề xuất bởi **MarkGot7**)

Lời giải



Ta sẽ đi chứng minh OE là tiếp tuyến chung của (KDE) và (EFB) .

Thật vậy, ta có : $\widehat{OEC} = \widehat{OCE} = \widehat{ACE} = \widehat{ABE} \Rightarrow OE$ là tiếp tuyến của (EFB) . (1)

Tương tự ta cũng có : $\widehat{OED} = \widehat{ODE} = \widehat{BDE} = \widehat{BAE}$.

Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB \parallel KC \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DKE}$. Suy ra : $\widehat{OED} = \widehat{DKE}$ hay OE là tiếp tuyến của (KDE) . (2)

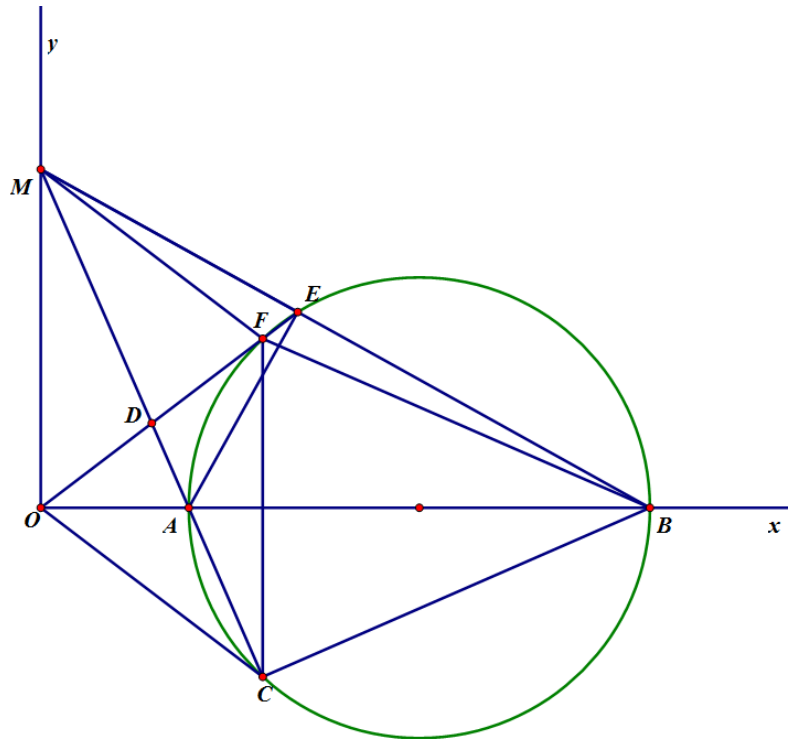
Từ (1) và (2) suy ra : OE là tiếp tuyến chung của (KED) và (EFB) . Do đó : (KED) tiếp xúc (EFB) .

Bài 92

Cho $\widehat{xOy}$ vuông và hai điểm cố định A, B trên Ox (A nằm giữa O và B). Điểm M chạy trên Oy (M khác O). Đường tròn đường kính AB cắt MA, MB lần lượt tại C, E . Tia OE cắt đường tròn tại F . Xác định vị trí của M để tứ giác $OCFM$ là hình bình hành.

(Đề xuất bởi **MarkGot7**)

Lời giải



Gọi $D = MC \cap OF$.

Ta có : $\widehat{AOM} + \widehat{AEM} = 180^\circ$ mà hai góc này nằm ở vị trí đối nhau nên tứ giác $OAEM$ nội tiếp. Suy ra : $\widehat{OEA} = \widehat{OMA}$. (1)

Mặt khác, tứ giác $MOCB$ có : $\widehat{MOB} = \widehat{MCB} = 90^\circ$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh MB nên tứ giác $MOCB$ nội tiếp. Do đó : $\widehat{CBO} = \widehat{CMO}$. (2)

Theo giả thiết ta có tứ giác $AFEB$ nội tiếp nên $\widehat{ABF} = \widehat{AEF}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $\widehat{CBA} = \widehat{CMO} = \widehat{AEO} = \widehat{ABF} \Rightarrow BA$ là tia phân giác $\widehat{FBC}$.

Mà BA là đường kính của đường tròn qua A, F, B, C nên BA là trung trực của CF .

Suy ra : $CF \perp AB \Rightarrow CF \parallel MO \Rightarrow MOCF$ là hình thang.

Giả sử $OCFM$ là hình bình hành $\Rightarrow D$ là trung điểm OF .

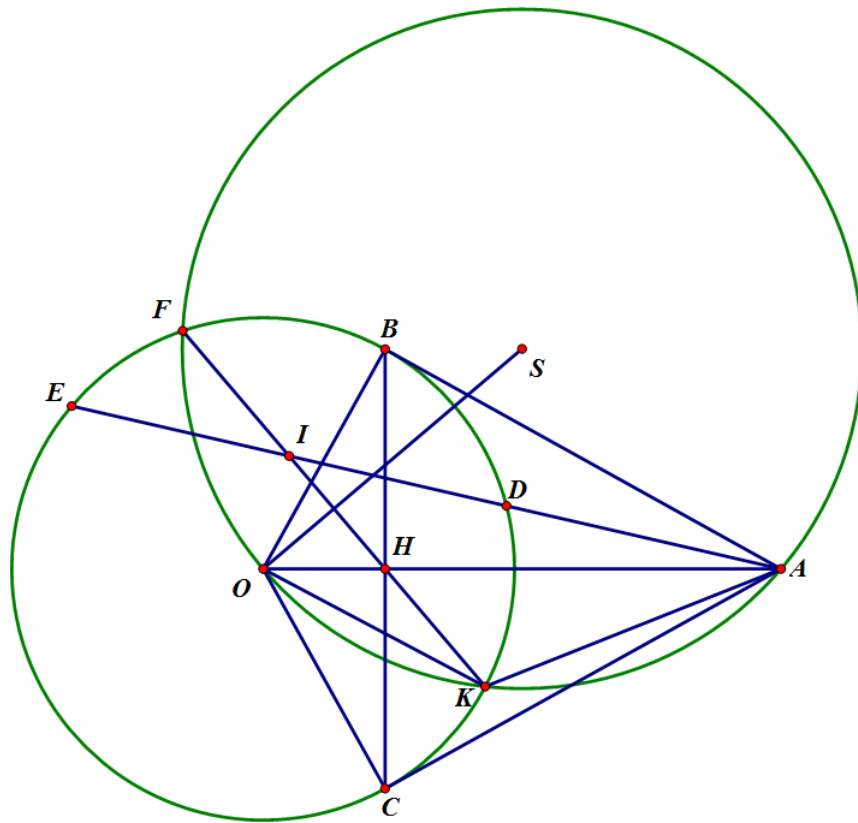
Ngoài ra BA là trung trực của CF nên OA là trung tuyến của $\triangle OCF$. Suy ra : A là trọng tâm của tam giác $OFC \Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CA}{AM} = \frac{1}{2}$.

Vì tứ giác $MOCB$ nội tiếp nên $CA \cdot AM = OA \cdot AB \Rightarrow \frac{AM^2}{2} = OA \cdot AB \Rightarrow AM^2 = 2OA \cdot AB \Rightarrow AM = \sqrt{2OA \cdot AB}$. Vậy với M chạy trên Oy thoả $AM = \sqrt{2OA \cdot AB}$ thì tứ giác $OCFM$ là hình bình hành.

Bài 93

Cho tam giác ABC nhọn và cân tại C . Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại E và F . Gọi H là giao điểm BF và CE . Đường tròn đường kính EC cắt AC tại M . Gọi K là giao điểm của BM và (O) . Chứng minh KC đi qua trung điểm HF .

(Đề xuất bởi **Diepnguyencva**)



Gọi F là giao điểm thứ hai của IH với đường tròn (O) .

Vì tứ giác $FBKC$ nội tiếp nên : $HF.HK = HB.HC$

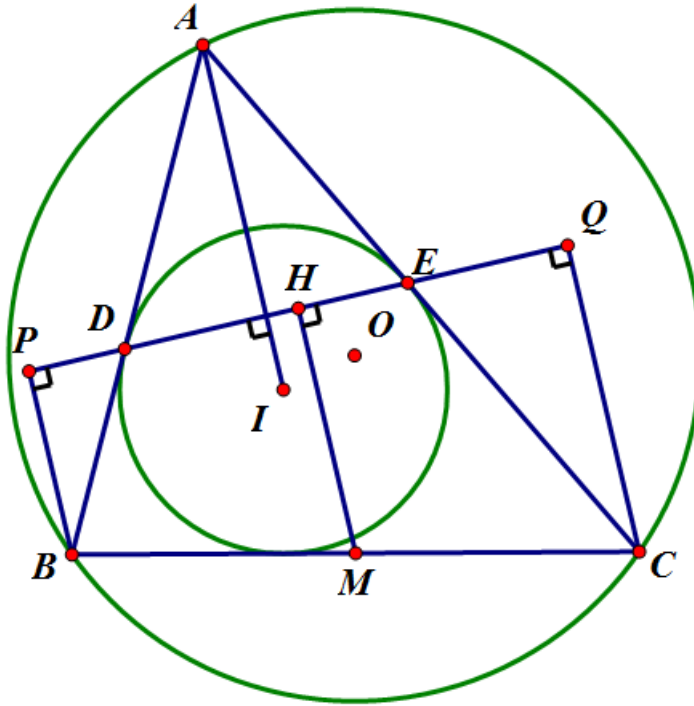
Mà tứ giác $BOCA$ nội tiếp nên : $HB.HC = HO.HA$

Suy ra : $HF.HK = HO.HA \Rightarrow AKOF$ nội tiếp. Do đó : FK là dây chung của hai đường tròn (O) và (S) nên $OS \perp FK$ hay $OS \perp IK$.

Bài 95

Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua tâm, điểm A di động trên cung lớn BC , (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC tại D, E . Chứng minh rằng ED luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi A di động.

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)



Gọi M là trung điểm BC . Kẻ BP, MH, CQ vuông góc với PQ .

Vì BC cố định nên $\widehat{DBP} = \widehat{ECQ} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \alpha = \text{const.}$

Hình thang $BPQC$ có MH là đường trung bình của hình thang nên : $MH = \frac{BP + CQ}{2}$.

Mà $BP = BD \cdot \cos \widehat{DBP} = BD \cdot \cos \alpha$; $CQ = CE \cdot \cos \widehat{ECQ} = CE \cdot \cos \alpha$

Nên $BP + CQ = (BD + CE) \cdot \cos \alpha = BC \cdot \cos \alpha = \text{const} \Rightarrow MH = \text{const.}$

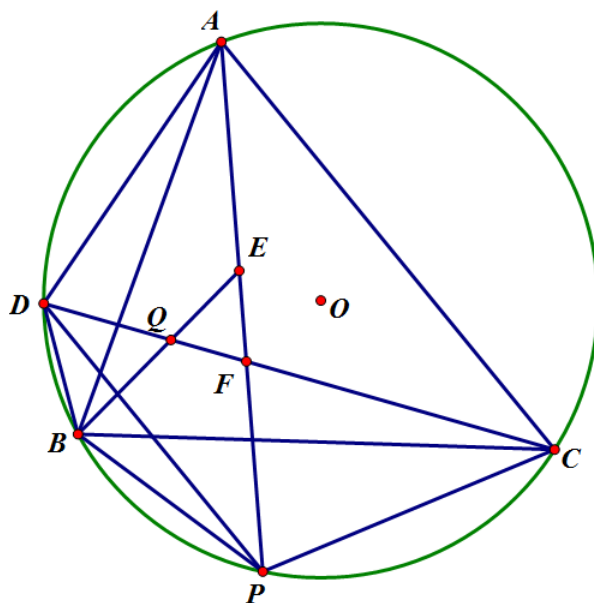
Vậy DE luôn tiếp xúc (M, MH) cố định.

Bài 96

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) và P là điểm nằm trên cung nhỏ BC , , trung trực AB, AC cắt AP tại E, F , BE cắt CF tại Q . Chứng minh rằng $AP = BQ + CQ$

(Đề xuất bởi **Minhcamgia**)

Lời giải



Gọi $\{D\} = CQ \cap (O)$.

Vì F thuộc trung trực của AC nên $FA = FC \Rightarrow \triangle FAC$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{FAC} = \widehat{FCA}$.

Mà $\widehat{DAP} = \widehat{DCP}$ (cùng chắn cung DP của (O)) nên $\widehat{DAC} = \widehat{PCA} \Rightarrow ADPC$ là hình thang cân. Do đó : $AP = CD$.

Ta có : $\widehat{QBD} = \widehat{EBA} + \widehat{ABD} = \widehat{EAB} + \widehat{ACD} = \widehat{EAB} + \widehat{FAC} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} \Rightarrow \triangle BDQ$ cân tại $Q \Rightarrow BQ = QD$.

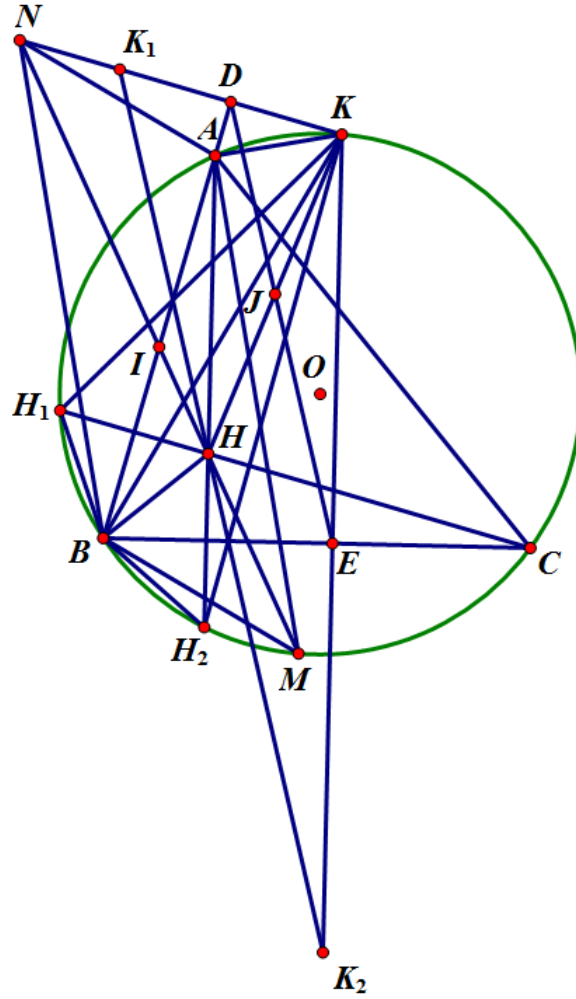
Do đó : $BQ + CQ = QD + CQ = CD = AP$.

Bài 97

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BC . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trung điểm I của AB .

- Chứng minh trực tâm K của tam giác ABN thuộc một đường tròn cố định.
- Giả sử $NK \cap AB = D$, hạ $KE \perp BC$. H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh DE đi qua trung điểm J của HK .

(Tuyển sinh lớp 10 PTNK 2004-2005)



a) Vì $ANBM$ là hình bình hành nên : $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$.

Mà K là trực tâm của tam giác ABN nên $\widehat{AKB} = \widehat{ANB} = (90^\circ - \widehat{KBN})$.

Suy ra : $\widehat{AKB} = \widehat{AMB}$ hay $AKMB$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $K \in (O)$ cố định.

b) Gọi H_1, H_2 lần lượt là giao của CH và AH với (O) , K_1, K_2 lần lượt là điểm đối xứng của K qua AB và BC .

Dễ dàng ta chứng minh được : BC là trung trực của HH_2 và AB là trung trực của HH_1 .

Theo tính chất trung trực ta có : $\widehat{BH_1K} = \widehat{BHK_1}$ và $\widehat{BH_2K} = \widehat{BHK_2}$.

Do đó : $\widehat{BHK_1} + \widehat{BHK_2} = \widehat{BH_1K} + \widehat{BH_2K} = 180^\circ$ hay K_1, H, K_2 thẳng hàng.

Tam giác KK_1K_2 có DE là đường trung bình nên $DE \parallel K_1K_2$.

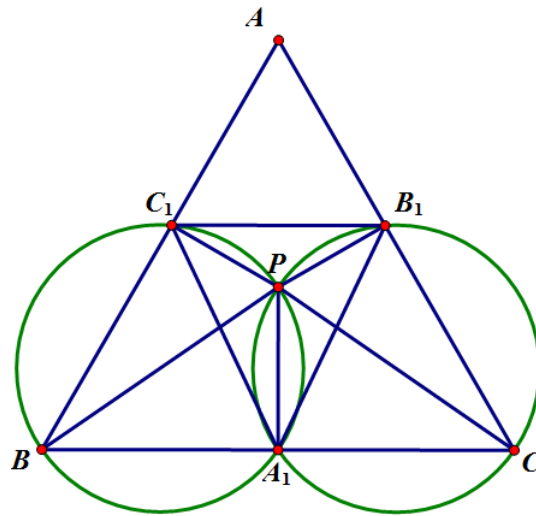
Gọi $J = DE \cap HK$. Ta có $DJ \parallel K_1H \Rightarrow DJ$ là đường trung bình của tam giác KK_1H . Do đó

J là trung điểm của HK hay DE đi qua trung điểm J của HK .

Bài 98

Cho tam giác ABC đều. P nằm trong tam giác. Hạ PA_1, PB_1, PC_1 vuông góc xuống BC, CA, AB . Tìm quỹ tích điểm P để tam giác $A_1B_1C_1$ cân

(Đề xuất bởi **Korkot**)

Lời giải

Giả sử tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại A_1 thì ta có $A_1B_1 = A_1C_1$

Xét 2 đường tròn đường kính BP và CP như hình vẽ:

Ta thấy 2 dây $A_1B_1 = A_1C_1$ và $\widehat{C_1BA_1} = \widehat{B_1CA_1} = 60^\circ$

Suy ra 2 đường tròn bằng nhau hay $BP = CP$ suy ra P thuộc trung trực BC

Chứng minh tương tự ta có quỹ tích điểm P để $A_1B_1C_1$ cân là 3 đường trung trực của tam giác ABC

Bài 99

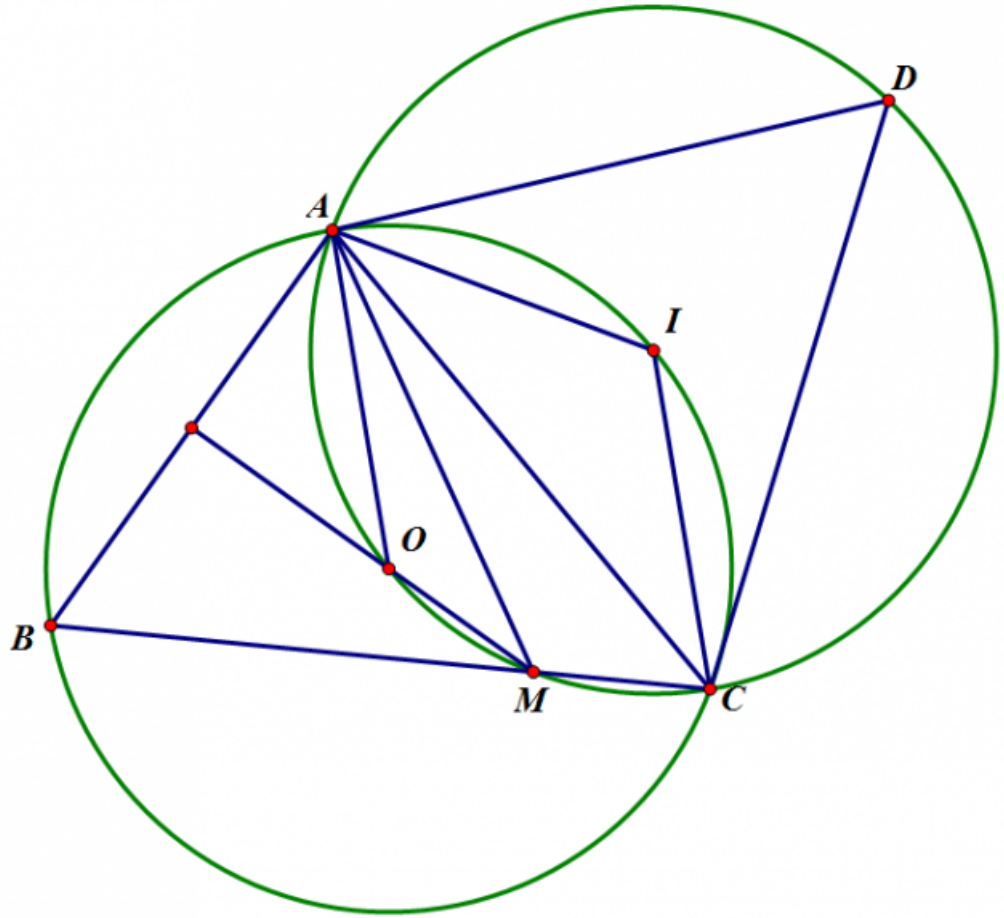
Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$. Đường trung trực của AB cắt BC tại M .

a) Tính $\widehat{MAC}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn (AMC) . Chứng minh tứ giác $ABCI$ nội tiếp.

(Tuyển sinh 10 PTNK 2005-2006)

Lời giải



a) Theo giả thiết ta có : $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$. Suy ra : $\widehat{BAC} = 75^\circ$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Mà M thuộc trung trực của AB nên $\widehat{MBA} = \widehat{MAB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MAC} = 15^\circ$.

b) Gọi D bất kì nằm trên cung lớn AC của (I) .

Ta có : $\widehat{AIC} = 2\widehat{ADC} = 2(180^\circ - \widehat{AMC}) = 120^\circ$.

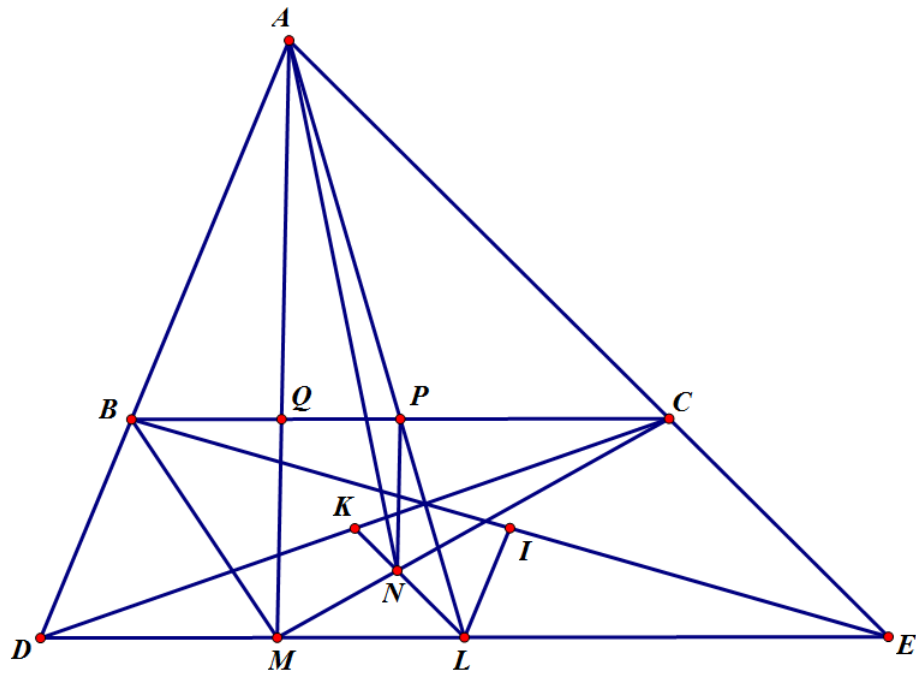
Do đó : $\widehat{ABC} + \widehat{AIC} = 180^\circ \Rightarrow AICB$ nội tiếp.

Bài 100

Cho tam giác ABC và đường thẳng d song song với BC và khác phía với A . Lấy M thuộc d sao cho tứ giác $ABMC$ lồi. Điểm N trên MB hoặc MC sao cho AN chia diện tích tứ giác $ABMC$ thành hai phần bằng nhau. Tìm quỹ tích điểm N khi M di động.

(Đề xuất bởi **Korkot**)

Lời giải



Kéo dài AB, AC cắt d tại D, E . Gọi K, I, L, P lần lượt là trung điểm CD, BE, DE, BC

Giả sử N thuộc đoạn MC . Áp dụng **bổ đề 6** ta có: $S_{ABMN} = S_{ANC} \Rightarrow PN \parallel AM$

Suy ra: $\frac{MN}{NC} = \frac{PQ}{PC} = \frac{ML}{LE} \Rightarrow NL \parallel CE \Rightarrow N \in KL$.

Tương tự với N thuộc đoạn BM thì $N \in IL$

Chương 3

Một số bài toán chưa có lời giải

Sau đây là năm bài toán vẫn chưa có lời giải trên diễn đàn Toán học. Bạn đọc hãy thử tự tìm lời giải cho riêng mình nhé.

Bài 101. (*Diepnguyencva*) Cho đường tròn (O) ; $AB = 2R$. Lấy C thuộc đường tròn ($AC > BC$). Tiếp tuyến tại A và C của (O) cắt nhau tại D , DB cắt (O) tại E . Kẻ CH vuông góc AB . DH cắt AE tại I ; CI cắt AD tại K . Lấy F đối xứng với E qua AB .

a, Chứng minh KE là tiếp tuyến của (O)

b, Qua E kẻ đường thẳng song song AB cắt KB tại S . OS cắt AE tại Q . Chứng minh: D, Q, F thẳng hàng.

Bài 102. (*phamhuy1801*) Cho $\triangle ABC$ nhọn. Đường tròn $(O; \frac{BC}{2})$ cắt AB, AC thứ tự tại E, D . Các tiếp tuyến kẻ từ E, D của (O) cắt nhau tại I và lần lượt cắt tiếp tuyến kẻ từ B, C của (O) tại F, G . FG cắt AI tại H và cắt (O) tại M, N . Chứng minh H là trực tâm của $\triangle ABC$ và MA, NA lần lượt các tiếp tuyến của (O)

Bài 103. (*khanhdat1*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có E, F thuộc đoạn CA và BA sao cho EF song song với BC . Đường trung trực của đoạn thẳng BC cắt AC tại M , đường trung trực của đoạn EF cắt AB tại N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM cắt CF tại P khác C , đường tròn ngoại tiếp tam giác EFN cắt CF tại Q khác F .

a, Chứng minh rằng đường trung trực của PQ đi qua trung điểm của MN .

b, Gọi L là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O) và I là một điểm bất kì trên đoạn AL . Gọi J là hình chiếu của I trên BC . Đường tròn tâm I bán kính IJ cắt AB, AC theo thứ tự tại X, Y . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY và đường tròn tâm L

bán kính LB tiếp xúc với nhau.

Bài 104. (*khanhdat1*) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trục tâm H , đường cao AF và M là trung điểm của BC . Đường tròn đường kính AH cắt HM tại Q khác H . Lấy điểm X thuộc BC sao cho XH vuông góc với QM . Gọi L, P lần lượt là trung điểm của QH và QA . Đường thẳng qua Q song song với LX cắt MP tại N . Vẽ đường tròn tâm X bán kính XH cắt đường tròn (O) tại K sao cho K cùng phía với A so với BC

a, Chứng minh rằng ba điểm K, Q, N thẳng hàng.

b, Chứng minh rằng (MNF) tiếp xúc với đường tròn đường kính QH .

Bài 105. (*khanhdat1*) Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB và một điểm M bất kì nằm trong (O) nhưng không nằm trên đường kính AB . Gọi N là giao điểm của đường phân giác trong của góc AMB với đường tròn (O) . Đường phân giác ngoài của góc AMB cắt đường thẳng NA, NB lần lượt tại P và Q . Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R , đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S (R, S khác M). Qua R kẻ đường thẳng song song với PQ cắt AN tại C , qua S kẻ đường thẳng song song với PQ cắt BN tại D . Gọi I là trung điểm của CD .

a, Chứng minh rằng ba điểm N, O, I thẳng hàng.

b, Chứng minh rằng ba điểm R, S, I thẳng hàng.

Chương 4

Bài tập rèn luyện

Bài 1. (Nguyễn Văn Linh) Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) . Lấy E, F bất kì trên AB và AC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm CE, BF, EF . K là chân đường cao hạ từ O xuống EF . Chứng minh M, N, P, K đồng viên

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I) . Giả sử $AB + AC = 2BC$.

Chứng minh $\widehat{AIO} = 90^\circ$

Bài 3. (VMO 2011) Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy P trên tiếp tuyến tại B của (O) . PA cắt (O) tại điểm thứ hai là C . Kẻ đường kính CD của (O) . PD cắt (O) tại điểm thứ hai là E . Chứng minh rằng AE, BC, PO đồng quy.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ không cân nội tiếp (O) . Kẻ đường kính AD , tiếp tuyến tại D cắt BC tại P . PO lần lượt cắt AB, AC tại E, F . Chứng minh rằng $OE = OF$

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC < BC$ và nội tiếp (O) . Trên tia BA, BC lấy D, E sao cho $BD = BE = AC$. (BDE) cắt (O) tại điểm thứ hai là P . Chứng minh rằng $BP = AP + CP$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) có đường cao BD, CE . Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau ở P . Chứng minh AP đi qua trung điểm DE .

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) có trực tâm H . Gọi M là trung điểm AH , E trên AC sao cho $OE \parallel BC$. F là điểm đối xứng của E qua O . Chứng minh rằng: $BM \perp ME$ và BF là phân giác $\widehat{MBE}$

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I) . Kẻ đường kính AD của (O) . AI cắt (O) tại E . Tia DI cắt (O) tại K . KE cắt BC tại L . Chứng minh rằng: $IL \perp BC$.

Bài 9. Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) . BC tiếp xúc với (I) tại D . Gọi K là chân đường cao

hạ từ I xuống AD . Chứng minh KD là phân giác $\widehat{BKC}$.

Bài 10. (*IMO 2018*) Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) . Trên AB, AC lấy D, E sao cho $AD = AE$. Trung trực của BD, CE lần lượt cắt cung nhỏ AB, AC tại F, G . Chứng minh $GF \parallel DE$

Bài 11. (*Russian MO 2015*) Cho tam giác ABC nhọn không cân. Kẻ đường cao AH và trung tuyến AM . Lấy Q, P nằm trên AB, AC sao cho $QM \perp AC, PM \perp AB$. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle PMQ$ cắt BC tại điểm thứ hai là X . Chứng minh $BH = CX$

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên AB lấy D sao cho $BD = 2AD$. Kẻ $BE \perp CD$, lấy F là trung điểm CE . Chứng minh: $\widehat{AFB} = 90^\circ$

Bài 13. (*Stan Fulger*) Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ hình vuông $MNPQ$ với $M \in AB, N \in AC$ và $P, Q \in BC$. NB cắt MQ tại R, MC cắt NP tại S . Chứng minh $AR = AS$

Bài 14. Cho đường tròn (O) có dây cung AB . Lấy D là điểm chính giữa cung nhỏ AB , C là điểm bất kì trên cung lớn AB . Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường (O) tại C đồng thời tiếp xúc AB tại F . Kẻ tiếp tuyến XA, XC của đường tròn (O) . Gọi giao điểm XD và AB là M . Chứng minh M là trung điểm AF .

Bài 15. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có I là tâm nội tiếp. N là điểm chính giữa cung BAC của (O) . NI cắt BC tại D . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt IB, IC lần lượt tại K và L . Chứng minh $DK = DL$.

Bài 16. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có phân giác BE và CF cắt nhau tại I . Gọi K là trung điểm EF . Chứng minh $KI \perp BC$.

Bài 17. (*Tạp chí Kvant*) Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) có đường cao AH . Qua H kẻ đường thẳng song song với OA cắt OA tại D . Chứng minh D thuộc đường trung bình $\triangle ABC$.

Bài 18. (*China TST*) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại C, D . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB sao cho C gần AB hơn D . Lấy E thuộc OO' sao cho $AE \perp BC$. Chứng minh $\widehat{ACE} = 90^\circ$.

Bài 19. Cho $\triangle ABC$ không cân có đường cao AD, BE, CF . EF cắt BC tại I . Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB, AC lần lượt tại K, L . Chứng minh (IKL) luôn đi qua một điểm cố định khi A di động và BC cố định.

Bài 20. (*Nguyễn Đăng Khoa*) Cho lục giác $ABCDEF$ ngoại tiếp (O) . $AE \cap BD = K, BF \cap CE = I, AC \cap DF = L$. Chứng minh K, I, L thẳng hàng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Tài liệu chuyên Toán trung học cơ sở - Vũ Hữu Bình (Chủ biên). Nxb Giáo dục Việt Nam
- [2] Vẽ thêm yếu tố phụ để giải một số bài toán hình học 7,8,9 - Nguyễn Đức Tấn. Nxb Giáo dục Việt Nam
- [3] Bài tập Hình học chọn lọc cho học sinh trung học cơ sở - GS. Nguyễn Tiến Dũng, GS. Đỗ Đức Thái (Chủ biên) - Nxb thông tin và truyền thông
- [4] Nâng cao và phát triển toán 6,7,8,9 - Vũ Hữu Bình. Nxb Giáo dục Việt Nam
- [5] Các chuyên đề chọn lọc Toán 8,9 - Tôn Thân (Chủ biên). Nxb Giáo dục Việt Nam
- [6] Các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán lớp 9, tập hai: Hình học - Nguyễn Bá Đương. Nxb Giáo dục Việt Nam
- [7] Tạp chí Toán tuổi thơ 2, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Tạp chí Pi.

Internet:

- [9] [TOPIC] HÌNH HỌC ÔN THI VÀO THPT CHUYÊN 2018-2019
<https://diendantoanhoc.net/topic/182061-topic-hinh-hoc-on-thi-vao-thpt-chuyen-2018-2019/>
- [9] AoPS forum.
<https://artofproblemsolving.com/>
- [10] Diễn đàn Mathscope
<http://mathscope.org/>
- [11] Trần Quang Hùng, Blog hình học sơ cấp
<https://anageomatica.blogspot.com/>
- [12] Blog Toán học của Khoa Nguyễn
<https://khoalinhmathematics.blogspot.com/>