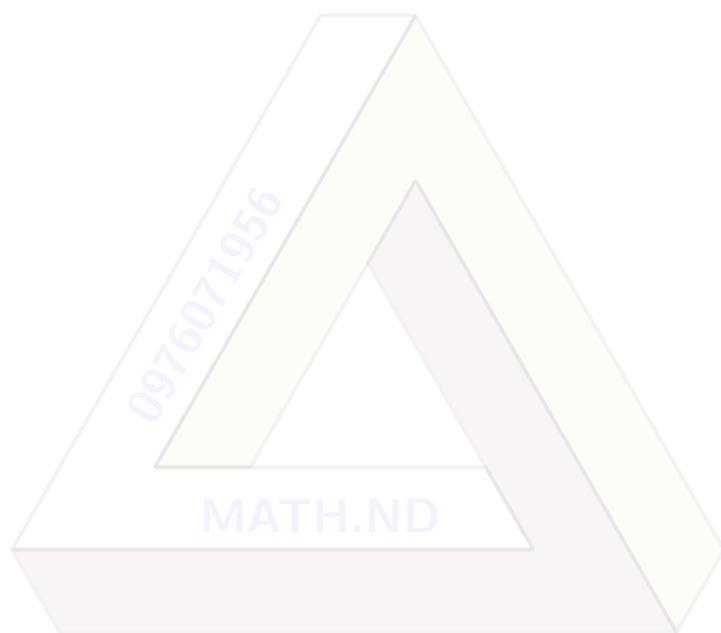


Mục lục

CHƯƠNG 2 Đường tròn		3
1	Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn	3
	Dạng 1. Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn	3
2	Đường kính và dây của đường tròn. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây	5
	Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau. Hai dây bằng nhau	5
	Dạng 2. Tính độ dài một đoạn thẳng - Độ dài một dây cung	6
	Dạng 3. So sánh hai dây cung - Hai đoạn thẳng	6
3	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Tiếp tuyến của đường tròn	8
	Dạng 1. Tính độ dài một đoạn tiếp tuyến	8
	Dạng 2. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn	9
	Dạng 3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau	10
4	Vị trí tương đối của hai đường tròn	12



★ LỚP TOÁN THẦY DŨNG ★

CHỦ ĐỀ 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

- Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .
- Kí hiệu: $(O; R)$.

2 MỘT SỐ LƯU Ý

- Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.
- Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 1. Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn

- ➡ Chứng minh các điểm đã cho cách đều một điểm.
- ➡ Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

🔗🔗🔗 VÍ DỤ MINH HỌA 🔗🔗🔗

🌀 **Ví dụ 1.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính đường tròn đó.

🌀 **Ví dụ 2.** Cho $\triangle ABC$ có các đường cao BD, CE . Chứng minh bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.

🌀 **Ví dụ 3.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Từ M là điểm bất kì trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

🌀 **Ví dụ 4.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , gọi D là điểm đối xứng với A qua cạnh BC . Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

🌀 **Ví dụ 5.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $\triangle AEC$ vuông tại E . Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

📐 **Ví dụ 6.** Cho tam giác đều ABC . AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng bốn điểm B, P, C, N cùng thuộc một đường tròn. Hãy vẽ đường tròn đó.

📐 **Ví dụ 7.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

📐 **Ví dụ 8.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD$; M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

🔗🔗🔗BÀI TẬP VẬN DỤNG🔗🔗🔗

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có góc A nhọn. Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường thẳng BC tại D . Đường tròn (K) đường kính AD cắt các đường thẳng DC và AC lần lượt tại H và E . Chứng minh

(a) H là trung điểm của BC và $HA^2 = HC \cdot HD$.

(b) DH là tia phân giác của $\widehat{ADE}$ và $KH \parallel DE$.

Bài 2. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm O . Trên đường trung trực của AB lấy điểm D sao cho $OD = \frac{a}{2}$. Nối A với D , vẽ BC vuông góc AD tại C .

(a) Tính AD, AC, BC tại a .

(b) Trên tia đối của tia OD lấy điểm E sao cho $OE = a$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, E cùng nằm trên một đường tròn.

(c) CE là tia phân giác của $\widehat{ACB}$. (gợi ý: kẻ $CH \perp AB$)

Bài 3 (*). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A có đường cao AH . Trên đoạn thẳng HC lấy điểm K rồi dựng hình chữ nhật $AHKO$. Lấy O làm tâm vẽ đường tròn bán kính OK , đường tròn này cắt cạnh AB tại D , cắt cạnh AC tại E . Gọi F là giao điểm thứ hai của (O) và AB . Chứng minh rằng:

(a) $\triangle AEF$ là tam giác cân và $DO \perp OE$.

(b) Bốn điểm D, A, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 4 (*). Trên các cạnh AB, BC, CA của $\triangle ABC$ đều ta lấy theo thứ tự các điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$.

(a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$.

(b) Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của AB, MP, AC . Chứng minh rằng ba điểm H, I, K thẳng hàng.

(c) Xác định vị trí các điểm M, N, P để chu vi $\triangle MNP$ nhỏ nhất.

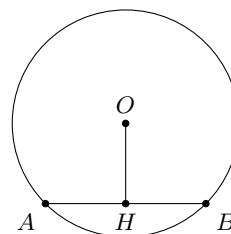
CHỦ ĐỀ 2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 TÍNH CHẤT ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG

Trong đường tròn (O):

- a) $OH \perp AB \Rightarrow H$ là trung điểm của AB .
- b) H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB$.



2 LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

➔ Định lý 1:

- Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây lớn nhất.

➔ Định lý 2:

- Trong một đường tròn, hai dây bằng nhau thì cách đều tâm và ngược lại.
- Trong một đường tròn, dây nào lớn hơn thì gần tâm hơn và ngược lại.

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau. Hai dây bằng nhau

- ➔ Trong một đường tròn, hai dây bằng nhau thì cách đều tâm và ngược lại.
- ➔ Chứng minh hai tam giác bằng nhau.

🔗🔗🔗VÍ DỤ MINH HỌA🔗🔗🔗

🔗 **Ví dụ 1.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD không cắt đường kính. Gọi H, K thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD . Chứng minh rằng

- a) CD và HK có trung điểm trùng nhau;
- b) $DH = CK$.

🔗 **Ví dụ 2.** Cho đường tròn (O) có các dây AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại điểm E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng

- a) $EH = EK$;
- b) $EA = EC$.

🔗 **Ví dụ 3.** Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$, dây $AB = 8 \text{ cm}$.

- Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB ;
- Lấy điểm I thuộc dây AB sao cho $AI = 1 \text{ cm}$. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB . Chứng minh $AB = CD$.

🔗 **Ví dụ 4.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , dây CD , các đường vuông góc với CD tại C và D tương ứng cắt AB ở M và N . Chứng minh rằng $AM = BN$.

🔗 **Ví dụ 5.** Cho đường tròn (O) có tâm nằm trên đường phân giác của góc xAy , cắt tia Ax ở B và C , cắt tia Ay ở D và E . Chứng minh rằng hai dây BC và DE bằng nhau.

🔗 **Ví dụ 6.** Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD bằng nhau và cắt nhau tại I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng

- IO là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây AB và CD .
- Điểm I chia CD và AB thành các đoạn thẳng bằng nhau đôi một.

📁 DẠNG 2. Tính độ dài một đoạn thẳng - Độ dài một dây cung

- ➡ Xác định khoảng cách từ tâm đến dây.
- ➡ Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông có cạnh huyền là bán kính của đường tròn.

🔗🔗🔗 VÍ DỤ MINH HỌA 🔗🔗🔗

🔗 **Ví dụ 1.** Cho đường tròn (O) có bán kính $OA = 3 \text{ cm}$. Dây BC của đường tròn vuông góc với OA tại trung điểm của OA . Tính độ dài dây BC .

🔗 **Ví dụ 2.** Cho $(O; 25 \text{ cm})$, dây $AB = 40 \text{ cm}$. Vẽ dây cung CD song song với AB và có khoảng cách đến AB bằng 22 cm . Tính độ dài dây cung CD .

🔗 **Ví dụ 3.** Cho đường tròn (O) có hai dây cung AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I . Biết $IC = 2 \text{ cm}$, $ID = 14 \text{ cm}$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây cung.

🔗 **Ví dụ 4.** Cho $(O, 25 \text{ cm})$, hai dây cung AB, CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 40 cm , 48 cm . Tính khoảng cách giữa hai dây cung ấy.

📁 DẠNG 3. So sánh hai dây cung - Hai đoạn thẳng

- ➡ Xác định khoảng cách từ tâm đến dây.
- ➡ Trong hai dây cung của một đường tròn, dây nào lớn hơn thì gần tâm hơn và ngược lại.

- 🔗 Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

🔗🔗🔗VÍ DỤ MINH HỌA🔗🔗🔗

🔗 **Ví dụ 1.** Cho điểm A nằm bên trong đường tròn (O) . Vẽ dây BC vuông góc với OA . Vẽ dây EF bất kỳ đi qua A và không vuông góc với OA . So sánh độ dài hai dây BC và EF .

🔗 **Ví dụ 2.** Cho $(O, 5 \text{ cm})$, điểm M cách O 3 cm.

- Ⓐ Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M .
- Ⓑ Tính độ dài dây dài nhất đi qua M .

🔗 **Ví dụ 3.** Cho AB là dây cung của $(O; R)$ và I là trung điểm của AB ($O \notin AB$).

- Ⓐ Qua I vẽ dây cung EF . Chứng minh $EF \geq AB$. Tìm độ dài lớn nhất, độ dài nhỏ nhất của các dây quay quanh I .
- Ⓑ Cho $R = 5 \text{ cm}$, $OI = 4 \text{ cm}$, tính độ dài dây cung ngắn nhất qua I .

🔗🔗🔗BÀI TẬP VẬN DỤNG🔗🔗🔗

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai bán kính OA, OB sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$, gọi OI là đường cao của $\triangle OAB$. Tia OI cắt đường tròn (O) tại C .

- Ⓐ Tính các góc, cạnh AB , chiều cao OI của $\triangle AOB$ theo R .
- Ⓑ Chứng minh tứ giác $OACB$ là hình thoi, tính diện tích của $OACB$ theo R .

Bài 2. Cho đường tròn (O) có các dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại điểm E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng: $EH = EK$ và $EA = EC$.

Bài 3. Cho điểm A cố định trong đường tròn (O) và dây cung MN quay quanh A .

- Ⓐ Chứng minh các trung điểm H của các dây cung MN di động trên một đường tròn cố định.
- Ⓑ Xác định vị trí của H khi MN ngắn nhất, dài nhất.

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, AC vuông góc với nhau và $AB = R\sqrt{3}$.

- Ⓐ Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 = 4R^2$. Tính các khoảng cách từ tâm O đến AB và AC .
- Ⓑ Trên đoạn thẳng AB lấy điểm P sao cho $AP = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}$. Vẽ dây DE vuông góc với AB tại P . Chứng minh rằng $DE = AB$.

Bài 5. Trong một đường tròn tâm O , hai dây AB và CD song song với nhau. Biết $AB = 30 \text{ cm}$, $CD = 40 \text{ cm}$. Khoảng cách giữa AB và CD là 35 cm. Tính bán kính đường tròn.

Bài 6. Cho đường tròn tâm A bán kính AB , dây EF kéo dài cắt đường thẳng AB tại C (E nằm giữa F và C), hạ $AD \perp CF$, hạ $AD \perp CF$. Cho $AB = 10$ cm; $AD = 8$ cm; $CF = 21$ cm. Tính CE và CA .

Bài 7 (*). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường cao AH . Trên đoạn thẳng HC lấy điểm K rồi dựng hình chữ nhật $AHKO$. Lấy O làm tâm, vẽ đường tròn bán kính OK , đường tròn này cắt cạnh AB tại D , cắt cạnh AC tại E . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường thẳng AB . Chứng minh rằng:

(a) $\triangle AEF$ cân.

(b) $DO \perp OE$.

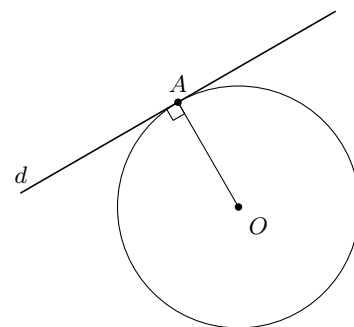
CHỦ ĐỀ 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

(a) $\left. \begin{array}{l} A \in (O), A \in d \\ d \perp OA \end{array} \right\} \Rightarrow d \text{ là tiếp tuyến của } (O).$

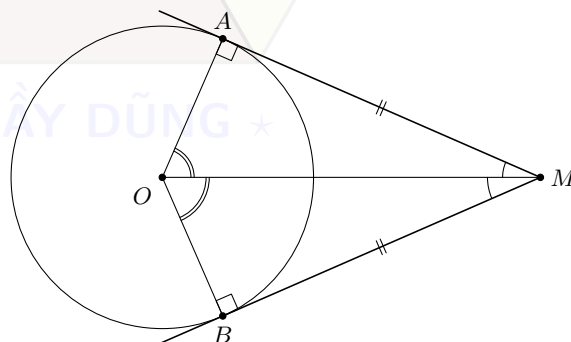
(b) $\left. \begin{array}{l} d \text{ là tiếp tuyến của } (O) \\ A \in (O), A \in d \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp OA.$



2 TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

MA và MB là hai tiếp tuyến của (O) . Khi đó

- $MA = MB$;
- MO là đường phân giác của $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AOB}$.



B MỘT SỐ DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 1. Tính độ dài một đoạn tiếp tuyến

➡ Xác định tam giác vuông có đỉnh góc vuông là tiếp điểm.

➡ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính.

🔗🔗🔗VÍ DỤ MINH HỌA🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA .

- a Chứng minh $OCAB$ là hình thoi.
- b Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B cắt đường thẳng OA tại E . Tính độ dài BE theo R .

Ví dụ 2. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là tiếp điểm).

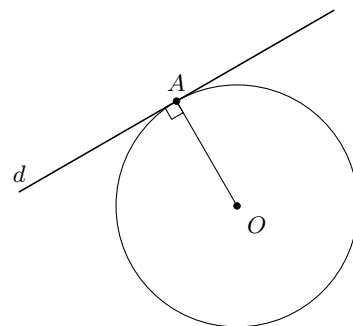
- a Chứng minh rằng $OA \perp BC$.
- b Vẽ đường kính CD . Chứng minh rằng $BD \parallel AO$.
- c Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ biết $OB = 2 \text{ cm}$, $OA = 4 \text{ cm}$.

Ví dụ 3. Từ điểm A nằm bên ngoài $(O; 6 \text{ cm})$ có $OA = 10 \text{ cm}$, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC .

- a Tính độ dài OH .
- b Tính độ dài AB .

📁 DẠNG 2. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

$$\left. \begin{array}{l} A \in (O), A \in d \\ d \perp OA \end{array} \right\} \Rightarrow d \text{ là tiếp tuyến của } (O).$$



💠💠💠 VÍ DỤ MINH HỌA 💠💠💠

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C .

- a Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.
- b Cho bán kính của đường tròn bằng 15 cm , $AB = 24 \text{ cm}$. Tính độ dài OC .

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường tròn tâm I đi qua O có đường kính lớn hơn R cắt (O) tại A, B . Đường thẳng OI cắt I tại M (I nằm giữa O và M). Chứng minh rằng MA, MB là hai tiếp tuyến của (O) .

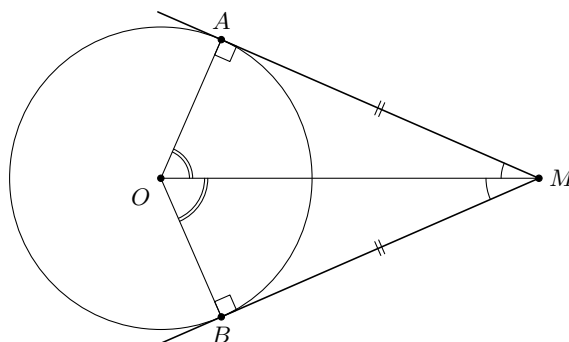
Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn (A, AH) , kẻ các tiếp tuyến BD , CE với đường tròn (A) (D, E là các tiếp điểm khác H). Chứng minh rằng

- a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.
- b) DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .

📁 DẠNG 3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

MA và MB là hai tiếp tuyến của (O) . Khi đó

- $MA = MB$;
- MO là đường phân giác của $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AOB}$.



🔗🔗🔗 VÍ DỤ MINH HỌA 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài (O) . Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) . Vẽ đường kính CD . Chứng minh rằng

- a) $OA \perp BC$;
- b) $BD \parallel OA$.

Ví dụ 2. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến MD, ME với đường tròn đó (D, E là các tiếp điểm). Qua điểm I thuộc cung nhỏ DE , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt MD, ME theo thứ tự ở P và Q . Chứng minh chu vi $\triangle MPQ$ bằng $2 \cdot MD$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho $OA = 2R$. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt BC tại H , cắt cung nhỏ và cung lớn BC lần lượt tại I và K .

- a) Chứng minh $OA \perp BC$ và $HI \cdot OA = R^2$.
- b) Chứng minh $\triangle ABC$ đều và $ABKC$ là hình thoi.
- c) Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Tính theo R bán kính đường tròn này.
- d) Vẽ đường kính CD . Chứng minh $BD \parallel AO$.
- e) Vẽ cát tuyến bất kỳ AMN của $(O; R)$. Gọi E là trung điểm của MN . Chứng minh 5 điểm O, E, A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 4 (*). Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm). Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ B xuống đường kính CD của (O) , gọi I là giao điểm của AD và BH . Chứng minh $IB = IH$.

🔗🔗🔗BÀI TẬP VẬN DỤNG🔗🔗🔗

Bài 1. Trên tiếp tuyến tại M thuộc đường tròn $(O; R)$ lấy $MA = R$, trên (O) lấy N sao cho $AN = R$.

- (a) Chứng minh $AMON$ là hình vuông.
- (b) Chứng minh $\triangle ANO$ vuông cân và AN là tiếp tuyến của (O) .

Bài 2. Cho đường tròn (O) , dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB , cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm C .

- (a) Chứng minh rằng CB là tiếp tuyến của đường tròn.
- (b) Cho bán kính của đường tròn bằng 15 cm, $AB = 24$ cm. Tính độ dài OC .

Bài 3. Trên tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại A lấy điểm S sao cho $AS = R\sqrt{3}$. Kéo dài đường cao AH của $\triangle SAO$ cắt (O) tại B .

- (a) Tính các cạnh và góc của $\triangle SAO$.
- (b) Chứng minh rằng SB là tiếp tuyến của (O) và $\triangle SAB$ đều.

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm D trên bán kính OB . Gọi H là trung điểm của AD . Đường vuông góc tại H với AB cắt nửa đường tròn tại C . Đường tròn tâm I đường kính DB cắt cát tuyến CB tại E .

- (a) Tứ giác $ACED$ là hình gì?
- (b) Chứng minh $\triangle HCE$ cân tại H .
- (c) Chứng minh HE là tiếp tuyến của đường tròn tâm I .

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). Đường tròn tâm O đường kính AB và đường tròn tâm K đường kính AC cắt nhau tại A và D .

- (a) Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.
- (b) Chứng minh OD là tiếp tuyến của (K) và KD là tiếp tuyến của (O) .

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH . Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại E , đường tròn tâm K đường kính HC cắt AC tại F . Chứng minh AH và EF là các tiếp tuyến chung của (I) và (K) .

Bài 7. Cho nửa đường tròn đường kính AB và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên Ax vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn. Kẻ CH vuông góc với AB . Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH .

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ đều có O là trung điểm của BC , $\widehat{xOy} = 60^\circ$ quay quanh O sao cho tia Ox cắt cạnh AB tại M , tia Oy cắt cạnh AC tại N .

- (a) Chứng minh $BC^2 = 4 \cdot BM \cdot CN$.
- (b) Chứng minh MO và NO lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BMN}$ và $\widehat{MNC}$.
- (c) Chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 9 (*). Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Trên cạnh AB lấy điểm M và trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Hai đường thẳng MN và BC cắt nhau tại K . Chứng minh rằng

- (a) $\triangle DBM = \triangle DCN$.
- (b) $\widehat{MDN} = 120^\circ$ và K là trung điểm của MN .

CHỦ ĐỀ 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

🔹 Tính chất đường nối tâm

- Nếu 2 đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là trung trực của dây chung.
- Nếu 2 đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

B BÀI TẬP

Bài 1. Cho (O) tiếp xúc ngoài với (O') tại A . Qua A kẻ một cát tuyến bất kì cắt (O) tại C và cắt (O') tại D . Chứng minh rằng $OC \parallel O'D$.

Bài 2. Cho (O) tiếp xúc trong với (O') tại A ((O') nằm bên trong (O)). Qua A kẻ một cát tuyến bất kỳ cắt (O) tại B và (O') tại C . Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại M và N . Biết $OO' = 24$ cm, $MN = 10$ cm. Tính R .

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC tại I . Chứng minh rằng

- (a) $\widehat{OIO'} = 90^\circ$;
- (b) $BC = 2\sqrt{RR'}$.

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) , N thuộc (O') . Biết $R = 9$ cm, $R' = 4$ cm. Tính độ dài đoạn MN .

Bài 6. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B . Gọi I là trung điểm của O_1O_2 . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA , cắt (O_1) tại C và (O_2) tại D (khác A). Chứng minh rằng $CA = AD$.

Bài 7. Cho (O_1) tiếp xúc ngoài với (O_2) tại A . Đường nối tâm O_1O_2 cắt (O_1) tại B và (O_2) tại C . Gọi DE là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn, $D \in (O_1)$, $E \in (O_2)$ và M là giao điểm của BD và CE .

- (a) Tính số đo góc $\widehat{DAE}$.
- (b) Tứ giác $ADME$ là hình gì? Vì sao?
- (c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Bài 8. Cho hai đường tròn $(O_1; R)$ và $(O_2; R')$ (với $R_1 \neq R_2$) tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài BC và DE (với B, D thuộc (O_1) ; C, E thuộc (O_2)). Chứng minh rằng $BC + DE = BD + CE$.

Bài 9. Cho hai đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ và $(O'; 4 \text{ cm})$ cắt nhau tại A và B . Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) tại M ($M \neq A$), cắt (O') tại N ($N \neq A$). Nếu $OO' = 5 \text{ cm}$, hãy tính giá trị lớn nhất của MN .

Bài 10 (*). Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) ngoài nhau. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài AB và CD (với A, D thuộc (O_1) ; B, C thuộc (O_2)). Nối AC cắt (O_1) tại M ; cắt (O_2) tại N ($M \neq A, N \neq C$). Chứng minh rằng $AM = NC$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TRÍCH TỪ CÁC ĐỀ THI

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Qua điểm A kẻ tia tiếp tuyến Ax đến đường tròn (O) . Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC > R$. Từ điểm C kẻ tiếp tuyến CM với đường tròn (O) (M là tiếp điểm).

- (a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, O, M cùng thuộc một đường tròn.
- (b) Chứng minh rằng $MB \parallel OC$.
- (c) Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $BC \cdot BK = 4R^2$.
- (d) Chứng minh rằng $\widehat{CMK} = \widehat{MBC}$.

(Đề thi học kì 1 Bắc Từ Liêm, Hà Nội, 2018)

Bài 2. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , vẽ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm E (E khác A , $AE < R$); trên nửa đường tròn lấy điểm M sao cho $EM = EA$, đường thẳng EM cắt tia By tại F .

- (a) Chứng minh EF là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
- (b) Chứng minh tam giác EOF là tam giác vuông;
- (c) Chứng minh $AM \cdot OE + BM \cdot OF = AB \cdot EF$;
- (d) Tìm vị trí của điểm E trên tia Ax sao cho $S_{\triangle AMB} = \frac{3}{4}S_{\triangle EOF}$.

(Đề thi học kì 1 Đống Đa, Hà Nội, 2018)

Bài 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (O) (C khác A, B) sao cho $AC > BC$. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với dây cung AC tại H . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia OH tại D . Đoạn thẳng DB cắt đường tròn (O) tại E .

- (a) Chứng minh $HA = HC$ và $\widehat{DCO} = 90^\circ$.
- (b) Chứng minh $DH \cdot DO = DE \cdot DB$.
- (c) Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho E là trung điểm cạnh AF . Từ F vẽ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AD tại K . Đoạn thẳng FK cắt đường thẳng BC tại M . Chứng minh $MK = MF$.

(Đề thi học kì 1 Cầu Giấy, Hà Nội, 2018)

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10$ cm. C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC = 8$ cm. Vẽ $CH \perp AB$ ($H \in AB$).

- (a) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông. Tính độ dài CH và số đo $\widehat{BAC}$ (làm tròn đến độ);
- (b) Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại D . Chứng minh $OD \perp BC$;
- (c) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại E . Chứng minh $CE \cdot CB = AH \cdot AB$;
- (d) Gọi I là trung điểm của CH . Tia BI cắt AE tại F . Chứng minh FC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

(Đề thi học kì 1 Đan Phượng, Hà Nội, 2018)

Bài 5. Cho điểm M bất kì nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB . Tiếp tuyến tại M và tại B của (O) cắt nhau tại D . Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OD cắt MD tại C và cắt BD tại N .

- (a) Chứng minh $DC = DN$.
- (b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn tâm O .
- (c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống AB , I là trung điểm MH . Chứng minh B, C, I thẳng hàng.
- (d) Qua O kẻ đường vuông góc với AB , cắt (O) tại K (K và M nằm khác phía với đường thẳng AB). Tìm vị trí của M để diện tích tam giác MHK lớn nhất.

(Đề thi học kì 1 Đống Đa, Hà Nội, 2018)

Bài 6. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng d vuông góc với OA tại A . Trên d lấy điểm M , qua M kẻ hai tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn $(O; R)$, tiếp điểm lần lượt là E và F . Nối EF cắt OM tại H , cắt OA tại B .

- (a) Chứng minh OM vuông góc với EF .
- (b) Cho biết $R = 6$ cm, $OM = 10$ cm. Tính OH .
- (c) Chứng minh 4 điểm A, B, H, M cùng thuộc một đường tròn.
- (d) Chứng minh tâm I đường tròn nội tiếp tam giác MEF thuộc một đường tròn cố định khi M chuyển động trên d .

(Đề thi học kì 1 Hà Đông, Hà Nội, 2018)

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường tròn tâm O đường kính AC cắt cạnh BC tại D ($D \neq C$). Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AD và DC . Tia OH cắt cạnh AB tại E . Chứng minh:

- (a) AD là đường cao của tam giác ABC .
- (b) DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- (c) Tứ giác $OHDK$ là hình chữ nhật.

(Đề thi học kì 1 Sở giáo dục Bến Tre, 2018)

Bài 8. Cho đường tròn tâm O đường kính BC , điểm A thuộc đường tròn ($A \neq B, A \neq C$). Vẽ bán kính OK song song với BA (K và A nằm cùng phía đối với BC). Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt OK ở I , OI cắt AC tại H .

- (a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- (b) Chứng minh rằng IA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- (c) Cho $BC = 30\text{cm}$, $AB = 18\text{cm}$. Tính các độ dài OI , CI .
- (d) Chứng minh rằng CK là phân giác của $\widehat{ACI}$.

(Đề thi học kì 1 Sở GD & ĐT Bình Phước, 2018)

Bài 9. Cho đường tròn (O) tâm O đường kính AB . Lấy điểm C thuộc đường tròn (O) , với C không trùng A và B . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AC . Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại tiếp điểm C cắt tia OI tại điểm D .

- (a) Chứng minh OI song song với BC .
- (b) Chứng minh DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- (c) Vẽ CH vuông góc với AB , $H \in AB$ và vẽ BK vuông góc với CD , $K \in CD$. Chứng minh $CK^2 = HA \cdot HB$.

(Đề thi học kì 1 Sở GD & ĐT Đồng Nai, 2018)

Bài 10. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d cố định không cắt đường tròn. Từ một điểm A bất kì trên đường thẳng d kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AO tại H , trên tia đối của HB lấy điểm C sao cho $HC = HB$.

- (a) Chứng minh C thuộc đường tròn (O, R) và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O, R) .
- (b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với d tại I , $OI \cap BC = K$. Chứng minh $OH \cdot OA = OI \cdot OK = R^2$.
- (c) Chứng minh rằng khi A thay đổi trên đường thẳng d thì đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi học kì 1 Sở GD & ĐT Nam Định, 2018)

Bài 11. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và đường thẳng (Δ) không có điểm chung với đường tròn (O) , H là hình chiếu vuông góc của O trên Δ . Từ một điểm M bất kỳ trên Δ ($M \neq H$), vẽ hai tiếp tuyến MA , MB đến đường tròn (O) (A , B là hai tiếp điểm). Gọi K , I thứ tự là giao điểm của AB với OM và OH .

- (a) Chứng minh $AB = 2AK$ và năm điểm M , A , O , B , H cùng nằm trên một đường tròn.
- (b) Chứng minh $OI \cdot OH = OK \cdot OM = R^2$.
- (c) Trên đoạn OA lấy điểm N sao cho $AN = 2ON$. Đường trung trực của BN cắt OM ở E . Tính tỷ số $\frac{OE}{OM}$.

(Đề thi học kì 1 Sở GD & ĐT Thái Bình, 2018)

Bài 12. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d cố định không cắt đường tròn. Từ một điểm A bất kỳ trên đường thẳng d kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AO tại H , trên tia đối của tia HB lấy điểm C sao cho $HC = HB$.

- (a) Chứng minh rằng C thuộc đường tròn (O, R) và AC là tiếp tuyến của (O, R) .
- (b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng d tại I , OI cắt BC tại K . Chứng minh rằng $OH \cdot OA = OI \cdot OK = R^2$.

(Đề thi học kì 1 Tam Đảo, Vĩnh Phúc, 2018)

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường tròn tâm O đường kính AC . Đường tròn (O) cắt BC tại điểm thứ hai là I .

- (a) Chứng minh $AI^2 = BI \cdot CI$.
- (b) Kẻ $OM \perp BC$ tại M , AM cắt (O) tại điểm thứ hai là N . Chứng minh $\triangle AIM \sim \triangle CNM$. Từ đó suy ra $AM \cdot MN = CM^2$.
- (c) Từ I kẻ $IH \perp AC$ tại H . Gọi K là trung điểm của IH . Tiếp tuyến tại I của (O) cắt AB tại P . Chứng minh ba điểm C , K , P thẳng hàng.
- (d) Chứng minh OI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$.

(Đề thi học kì 1 Thanh Trì, Hà Nội, 2018)

Bài 14. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn lấy điểm C sao cho $AC = R$. Vẽ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Gọi K là giao điểm của đường thẳng BC với Ax .

- (a) Chứng minh tam giác ABC vuông và tính số đo góc ABC .
- (b) Từ A kẻ AE vuông góc với KO tại E . Chứng minh rằng $KC \cdot BC = OE \cdot OK$.
- (c) Đường thẳng AE cắt đường tròn tâm O tại điểm thứ hai M . Chứng minh KM là tiếp tuyến của (O) .

- (d) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N . Chứng minh rằng $IO = IN$.

(Đề thi học kì 1 Thuận An, Bình Dương, 2018)

Bài 15. Cho $(O; R)$, đường kính CD , dây BC khác đường kính. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A .

- (a) Chứng minh $AO \perp BC$.
- (b) Giả sử $R = 15$ cm, dây $BC = 24$ cm. Tính OA .
- (c) Kẻ BH vuông góc với CD tại H , gọi I là giao điểm của AD và BH . Chứng minh rằng I là trung điểm của BH .

(Đề thi học kì 1 Phòng GD & ĐT Ninh Bình, 2018)

Bài 16. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến (d) và (d') với đường tròn (O) . Một đường thẳng đi qua O cắt đường thẳng (d) ở M và cắt đường thẳng (d') ở P . Từ O kẻ một tia vuông góc với MP và cắt đường thẳng (d') ở N . Kẻ $OI \perp MN$ tại I .

- (a) Chứng minh $OM = OP$ và $\triangle NMP$ cân.
- (b) Chứng minh $OI = R$ và MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- (c) Tính $\widehat{AIB}$.
- (d) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $AMNB$ là nhỏ nhất?

(Đề thi học kì 1 Đống Đa, Hà Nội, 2018)

★ LỚP TOÁN THẦY DŨNG ★