

TOÀN CẢNH ĐỀ THI HSG MÔN TOÁN CÁC TỈNH THÀNH NĂM 2018-2019

Mục lục

Chuyên đề 1+2:Parabol và bài toán quy hoạch.....	2
Chuyên đề 3:Phương trình	8
Chuyên đề 4:Bất hươg trình.....	46
Chuyên đề 5:Hệ phương trình	56
Chuyên đề 6:Bất đẳng thức	101
Chuyên đề 7:Giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất	124
Chuyên đề 8:Lượng giác	168
Chuyên đề 9:Bài toán đếm.....	193
Chuyên đề 10:Xác suất.....	197
Chuyên đề 11:Nhị thức Newton	218
Chuyên đề 12:Dãy số, giới hạn	229
Chuyên đề 13:Hàm số liên tục, đạo hàm	264
Chuyên đề 14:Khảo sát hàm số và các bài toán liên quan.....	271
Chuyên đề 15:Mũ, Logarit.....	343
Chuyên đề 16:Nguyên hàm, tích phân, ứng dụng của tích phân	353
Chuyên đề 17:Số phức	368
Chuyên đề 18:Véc tơ và hình học phẳng.....	372
Chuyên đề 19:Tọa độ trong mặt phẳng.....	409
Chuyên đề 20:Hình học không gian thuần túy	451
Chuyên đề 21: Nón, trụ, cầu	577
Chuyên đề 22:Tọa độ trong không gian	591
Chuyên đề 23:Số học.....	606

Lời nói đầu

Với mục đích giáo viên, sinh viên, học sinh có cái nhìn tổng quan về kỳ thi HSG toán cấp tỉnh vòng 1. Tôi xin bạo gan làm "Toàn cảnh đề thi HSG môn toán năm học 2018-2019 vòng 1". Lời giải trong tài liệu do các thành viên nhóm STRONG TEAM TOÁN VD-VDC thực hiện.

Ngày 29/09/2019

Vũ Ngọc Thành Bản vàng Pheo- Mường So-Phong Thổ-Lai Châu

Chuyên đề

1

Parabol và bài toán quy hoạch

Câu 1. (HSG10 PHÙNG KHẮC KHOAN- HÀ NỘI 2018-2019) Cho hàm số $y = x^2 + x - 1$ có đồ thị là (P). Tìm m để đường thẳng $d: y = -2x - m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Huệ ; Fb: Tran Hue

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + x - 1 = -2x - m \Leftrightarrow x^2 + 3x + m - 1 = 0$ (1)

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow 13 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{4}. (*)$$

Khi đó giả sử $A(x_1; -2x_1 - m); B(x_2; -2x_2 - m)$

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$

Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + (2x_1 + m)(2x_2 + m) = 0$

$$\Leftrightarrow 5x_1 \cdot x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 5(m - 1) - 6m + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^2 - (2m - 3)x - 2m + 2$ (1)

1) Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.

2) Xác định m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho ΔOAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hiền ; Fb: Nguyễn Hiền

1) Khi $m = 0$ ta được hàm số $y = x^2 + 3x + 2$

*) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

*) Tọa độ đỉnh: $I\left(\frac{-3}{2}; \frac{-1}{4}\right)$

*) Sự biến thiên: Vì $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-3}{2}; +\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-3}{2}\right)$.

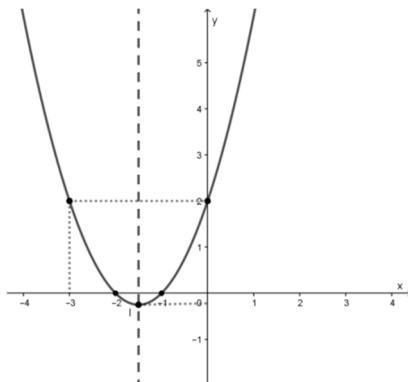
*) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

*) Điểm đặc biệt

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0
y	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	2

*) Đồ thị : Đồ thị là 1 đường parabol có đỉnh $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, hướng bề lõm lên trên và nhận đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$ làm trục đối xứng.



2) Phương trình hoành độ giao điểm của ĐTHS (1) và đường thẳng $y = 3x - 1$ là:

$$x^2 - (2m - 3)x - 2m + 2 = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0 \quad (*)$$

Để ĐTHS (1) cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại 2 điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $(*)$, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = -2m + 3 \end{cases}$

Đặt $A(x_1; 3x_1 - 1), B(x_2; 3x_2 - 1)$

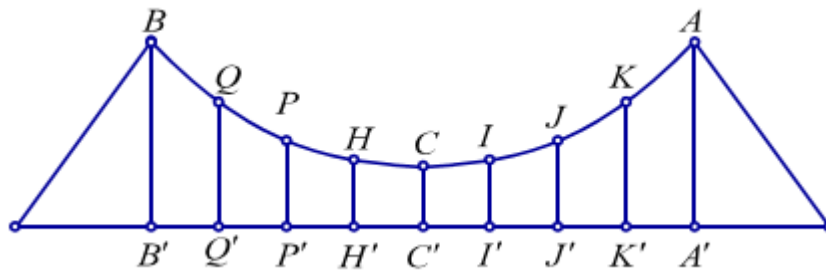
$$\Delta OAB \text{ vuông tại } O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 10x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -26m + 31 = 0$$

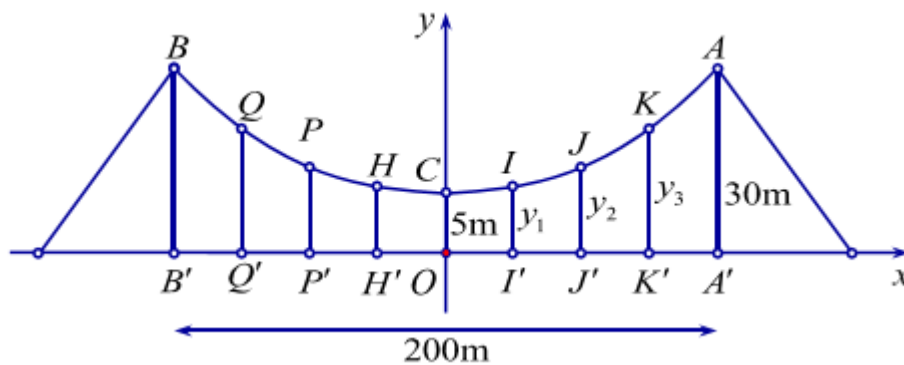
$$\Leftrightarrow m = \frac{31}{26} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{31}{26}.$$

Câu 3. (HSG10 Kim Liên 2018-2019) Một cầu treo có dây truyền đỡ là Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trụ AA' và BB' với độ cao 30 m. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng 200 m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $CC' = 5$ m. Gọi $Q', P', H', C', I', J', K'$ là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền $QQ', PP', HH', CC', II', JJ', KK'$ gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo ?



Lời giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Giả sử Parabol có dạng : $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Vì Parabol đi qua điểm $A(100;30)$ và đỉnh $C(0;5)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10000a + 100b + c = 30 \\ \frac{-b}{2a} = 0 \\ c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy (P): } y = \frac{1}{400}x^2 + 5.$$

Đoạn $A'B'$ chia làm 8 phần bằng nhau, mỗi phần có độ dài là 25 m.

Khi đó, tổng độ dài của các dây cáp treo là:

$$OC + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 5 + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 25^2 + 5\right) + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 50^2 + 5\right) + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 75^2 + 5\right) = 78,75 \text{ m.}$$

Câu 4. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu I, II . Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai sản phẩm trên. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ. Tổng số tiền lãi là lớn nhất có thể đạt được là:

A. 4,0 triệu.

B. 7,2 triệu.

C. 6,8 triệu.

D. 5,7 triệu.

Lời giải

Tác giả: Trịnh Thanh Hải; Fb: Trịnh Thanh Hải

Chọn C

Giả sử phân xưởng sản xuất trong một ngày được x (tấn) sản phẩm loại I và y (tấn) sản phẩm loại II .

Số giờ làm việc của máy M_1 là: $3x + y$.

Số giờ làm việc của máy M_2 là: $x + y$.

Số tiền lãi của phân xưởng mỗi ngày là $T = 2x + 1,6y$ (triệu)

Theo đề bài ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác $OABC$



T đạt giá trị lớn nhất khi nó nằm trong miền tứ giác $OABC$, chỉ đạt được khi tại các đỉnh.

Thử lại ta thấy T đạt giá trị lớn nhất khi (x, y) là tọa độ của điểm $B(1;3)$.

Vậy $T = 2.1 + 3.1,6 = 6,8$ (triệu)

Câu 5. (HSG10 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm loại I và loại II từ 200kg nguyên liệu và một máy chuyên dụng. Để sản xuất được một kilôgam sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và máy làm việc trong 3 giờ. Để sản xuất được một kilôgam sản phẩm loại II cần

4kg nguyên liệu và máy làm việc trong 1,5 giờ. Biết một kilôgam sản phẩm loại I lãi 300000 đồng, một kilôgam sản phẩm loại II lãi 400000 đồng và máy chuyên dụng làm việc không quá 120 giờ. Hỏi xưởng cần sản xuất bao nhiêu kilôgam sản phẩm mỗi loại để tiền lãi lớn nhất.

Lời giải

Giả sử sản xuất $x(kg)$ sản phẩm loại I và $y(kg)$ sản phẩm loại II.

Điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$ và $2x + 4y \leq 200 \Leftrightarrow x + 2y \leq 100$

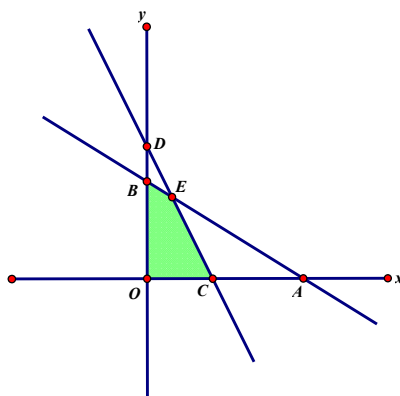
Tổng số giờ máy làm việc: $3x + 1,5y$

Ta có $3x + 1,5y \leq 120$

Số tiền lãi thu được là $T = 300000x + 400000y$ (đồng).

Ta cần tìm x, y thoả mãn:
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 2y \leq 100 \\ 3x + 1,5y \leq 120 \end{cases} \quad (I) \text{ sao cho } T = 300000x + 400000y \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ các đường thẳng $d_1: x + 2y = 100$; $d_2: 3x + 1,5y = 120$



Đường thẳng d_1 cắt trục hoành tại điểm $A(100; 0)$, cắt trục tung tại điểm $B(0; 50)$.

Đường thẳng d_2 cắt trục hoành tại điểm $C(40; 0)$, cắt trục tung tại điểm $D(0; 80)$.

Đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $E(20; 40)$.

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền đa giác $OBEC$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 0; \begin{cases} x = 0 \\ y = 50 \end{cases} \Rightarrow T = 20000000; \begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow T = 22000000; \begin{cases} x = 40 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 12000000$$

Vậy để thu được tổng số tiền lãi nhiều nhất thì xưởng cần sản xuất 20kg sản phẩm loại I và 40kg sản phẩm loại II

Câu 6. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0; 9)$, $B(3; 6)$. Gọi D là miền nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + a \leq 0 \\ 6x + 3y + 5a \geq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $AB \subset D$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng $AB : x + y - 9 = 0$.

Trường hợp 1: Nếu AB là đường thẳng.

Xét hệ $\begin{cases} a \leq -2x + y \\ 5a \geq -6x - 3y \end{cases}$.

Dễ thấy điểm $C(7; 2) \in AB$ nhưng $C \notin D$ vì $\begin{cases} a \leq -12 \\ 5a \geq -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -12 \\ a \geq \frac{-48}{5} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$.

Trường hợp 2: Nếu AB là đoạn thẳng. Ta thay $y = 9 - x$ ($x \in [0; 3]$) vào hệ $\begin{cases} a \leq -2x + y \\ 5a \geq -6x - 3y \end{cases}$

Ta được: $\begin{cases} a \leq 9 - 3x \\ a \geq \frac{-3x - 27}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{-3x - 27}{5} \leq a \leq 9 - 3x \quad (*)$

$(*)$ đúng $\forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow -\frac{27}{5} \leq a \leq 0$.

Vậy $-\frac{27}{5} \leq a \leq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chuyên đề

3

Phương trình

Câu 1. (HSG10 THPT Thuận Thành 2018-2019) Giải phương trình: $(x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đông; Fb: Nguyễn Đông

Điều kiện phương trình có nghĩa: $x \geq 1$.

$$(x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1; 2\}$.**Câu 2. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019)** Giải phương trình:

$$\sqrt{3x+3} - \sqrt{5-2x} - x^3 + 3x^2 + 10x - 26 = 0$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hằng; Fb: Hang Nguyen

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 3x+3 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

Với ĐKXĐ ở trên ta có:

$$\sqrt{3x+3} - \sqrt{5-2x} - x^3 + 3x^2 + 10x - 26 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+3} - 3) - (\sqrt{5-2x} - 1) - (x-2)(x^2 - x - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1} - (x-2)(x^2 - x - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} + (-x^2 + x + 12) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} + (-x^2 + x + 12) = 0 (*) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2, \text{ do } -x^2 + x + 12 > 0, \forall x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right] \text{ nên phương trình } (*) \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2\}$.**Câu 3. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019)** Phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các nghiệm đó.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. $-1 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Tác giả: Mai Hoàng Thái; Fb: Mai Hoàng Thái

Chọn C

Cách 1. Hàm đặc trưng

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^3 + 2x = \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 + 2\sqrt[3]{2x-1} (*)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{2x-1}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là 0.

Cách 2. Liên hợp

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow 2(x - \sqrt[3]{2x-1}) + x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + x\sqrt[3]{2x-1} + (\sqrt[3]{2x-1})^2} + x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 2x + 1) \left(\frac{2}{x^2 + x\sqrt[3]{2x-1} + (\sqrt[3]{2x-1})^2} + 1 \right) = 0$$

$> 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Câu 4. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) $\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \log_{\frac{1}{3}}(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$

Lời giải

Điều kiện: $x < \frac{1}{2}$

Ta có $\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \log_{\frac{1}{3}}(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} - \log_3(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \log_3(1 - 2x) + 1 - 2x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$. Dễ thấy $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \forall t > 0$. Suy ra hàm số đồng biến với $\forall t > 0$.

Ta có

$$f(\sqrt{x^2 - x + 1}) = f(1 - 2x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 = (1 - 2x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Câu 5. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho phương trình sau với m là tham số thực

$$(x^2 - 2x) \log_{2019} \sqrt{x^2 - 2x + 2011} + 1 = m \left[\sqrt{\frac{x^2 - 2x}{8}} \log_{2019}(x^2 - 2x + 2011) - \frac{1}{4} \right]$$

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $1 \leq |x-1| \leq 3$.

Lời giải

$$\text{ĐK.} \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2011 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$$

$$\text{Ta có } 1 \leq |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-2; 0] \cup [2; 4] \quad (*)$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2 - 2x) \log_{2019}^2(x^2 - 2x + 2011) + 1 = m \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 2x} \log_{2019}(x^2 - 2x + 2011) - \frac{1}{4} \right]$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) \log_{2019}^2(x^2 - 2x + 2011) + 4 = m \left[\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - 2x} \log_{2019}(x^2 - 2x + 2011) - 1 \right]$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x} \log_{2019}(x^2 - 2x + 2011)$$

$$\begin{aligned} t' &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \log_{2019}(x^2 - 2x + 2011) + \frac{(2x-2)\sqrt{x^2 - 2x}}{(x^2 - 2x + 2011) \cdot \ln 2019} \\ &= (x-1) \left[\frac{\log_{2019}(x^2 - 2x + 2011)}{\sqrt{x^2 - 2x}} + \frac{2\sqrt{x^2 - 2x}}{(x^2 - 2x + 2011) \ln 2019} \right] \end{aligned}$$

Do đó với $x \in [-2; 0]$ thì $t' < 0$, với $x \in [2; 4]$ thì $t' > 0$

Bảng biến thiên

x	-2	0	1	2	4
t'	-		/ / / / /	+	
t	$\sqrt{8}$	↘ 0	/ / / / /	0 ↗	$\sqrt{8}$
			/ / / / /		

Từ bảng biến thiên ta thấy, với mỗi một $t \in [0; \sqrt{8}]$ sẽ cho ta hai giá trị của $x \in [-2; 0] \cup [2; 4]$

Như vậy bài toán trở thành tìm m để phương trình sau có một nghiệm $t \in [0; \sqrt{8}]$

$$t^2 + 4 = m(\sqrt{2}t - 1)$$

$$\text{Ta có } t^2 + 4 = m(\sqrt{2}t - 1) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 4}{\sqrt{2}t - 1} \quad (\text{do } t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ không là nghiệm của pt})$$

$$m' = \frac{\sqrt{2}t^2 - 2t - 4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t - 1)^2}, \quad m' = 0 \Leftrightarrow t = 2\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}$
m'			
m	-4		$+\infty$
		$-\infty$	4

Từ bảng biến thiên ta thấy khi $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Câu 6. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} 2019^{x+y} = (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y) & (1) \\ 25x^2 + 9x\sqrt{9x^2-4} = 2 + \frac{18y^2}{y^2+1} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Trần Ngọc Quang ; Fb: Quang Tran

Điều kiện $|x| \geq \frac{2}{3}$

$$(1) \Leftrightarrow 2019^x (\sqrt{x^2+1}-x) = 2019^{-y} (\sqrt{(-y)^2+1}-(-y))$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2019 + \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = -y \ln 2019 + \ln(\sqrt{(-y)^2+1}-(-y)) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t \ln 2019 + \ln(\sqrt{t^2+1}-t), t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = \ln 2019 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra hàm số đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow x = -y$.

$$\text{Thay } x = -y \text{ vào (2) ta có } 25x^2 + 9x\sqrt{9x^2-4} = 2 + \frac{18x^2}{x^2+1} \quad (3)$$

Nếu $x \geq \frac{2}{3}$ thì $18x^2 > \frac{18x^2}{x^2+1}, 7x^2 > 2$, suy ra pt (3) vô nghiệm.

$$\text{Nếu } x \leq -\frac{2}{3} \text{ thì (3) } \Leftrightarrow 25 - 9\sqrt{9 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^2+1} (**)$$

Đặt $u = \frac{1}{x^2}, 0 < u \leq \frac{9}{4}$, Pt (**), trở thành

$$25 - 9\sqrt{9-4u} = 2u + \frac{18u}{u+1} \Leftrightarrow \left(\frac{18u}{u+1} - 12 \right) + 2u - 4 + 9\sqrt{9-4u} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(u-2)}{u+1} + 2(u-2) - \frac{36(u-2)}{\sqrt{9-4u}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ \frac{6}{u+1} + 2 - \frac{36}{\sqrt{9-4u}+1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Vì $0 \leq \sqrt{9-4u} < 3 \Rightarrow 9 < \frac{36}{\sqrt{9-4u}+1} \leq 36$, $\frac{6}{u+1} + 2 < 8$, suy ra phương trình (4) vô nghiệm

$$\text{Với } u = 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \leq \frac{-2}{3} \Rightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Câu 7. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho các hàm số $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ thỏa mãn:

$$f_0(x) = \ln x + |\ln x - 2019| - |\ln x + 2019|, f_{n+1}(x) = |f_n(x)| - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Số nghiệm của phương trình là

- A. 6063. B. 6059. C. 6057. D. 6058.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên – Trịnh Quang Hoàng.

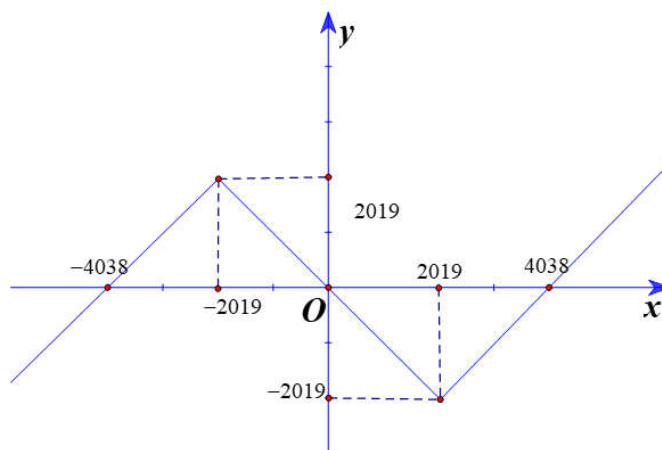
Chọn B

Xét hàm số $f_0(x) = \ln x + |\ln x - 2019| - |\ln x + 2019|$

Đặt $t = \ln x$, ta có

$$f_0(x) = g(t) = t + |t - 2019| - |t + 2019|$$

$$g(t) = \begin{cases} t + 4038 & \text{khi } t \leq -2019 \\ -t & \text{khi } -2019 < t < 2019 \\ t - 4038 & \text{khi } t \geq 2019 \end{cases}$$



$$f_{n+1}(x) = |f_n(x)| - 1 \geq -1, \forall x > 0; \forall n \in \mathbb{N}$$

Có 3 trường hợp cần xét là

-Nếu $f_{n+1}(x) = -1 \Leftrightarrow |f_n(x)| - 1 = -1 \Leftrightarrow f_n(x) = 0$.

-Nếu $f_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow |f_n(x)| - 1 = 0 \Leftrightarrow |f_n(x)| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f_n(x) = -1 \\ f_n(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{n-1}(x) = 0 \\ f_{n-1}(x) = 2 \end{cases}$.

-Nếu $f_{n+1}(x) = k > 0 \Leftrightarrow f_n(x) = k + 1$

Khi đó

$$f_{2020}(x) = 0 \Rightarrow f_{2018}(x) = 0; 2$$

$$\Rightarrow f_{2016}(x) = 0; 2; 4$$

$$\Rightarrow f_{2014}(x) = 0; 2; 4; 6$$

...

$$\Rightarrow f_2(x) = 0; 2; 4; \dots; 2018$$

$$\Rightarrow f_1(x) = -1; 1; 3; 5; \dots; 2019$$

$$\Rightarrow |f_0(x)| = 0; 2; 4; \dots; 2020$$

$$\Rightarrow f_0(x) = 0; \pm 2; \pm 4; \dots; \pm 2020$$

Quan sát đồ thị ta thấy

Mỗi phương trình $f_0(x) = 0; \pm 2; \pm 4; \dots; \pm 2018$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $f_0(x) = \pm 2020$ có 1 nghiệm

Vậy số nghiệm là: $2019 \cdot 3 + 2 = 6059$.

Câu 8. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-8; +\infty)$ để phương trình sau có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt?

$$x^2 + x(x-1)2^{x+m} + m = (2x^2 - x + m) \cdot 2^{x-x^2}.$$

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 8.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đức Hoạch, Fb: Hoạch Nguyễn

Phản biện: Nguyễn Văn Mạnh, FB: Nguyễn Văn Mạnh

Chọn B

Ta có: $x^2 + x(x-1)2^{x+m} + m = (2x^2 - x + m) \cdot 2^{x-x^2} \Leftrightarrow \frac{(x^2 + m) + x(x-1)2^{x+m}}{2^{x-x^2}} = 2x^2 - x + m$

$$\Leftrightarrow (x^2 + m) \cdot 2^{x^2-x} + (x^2 - x) \cdot 2^{x^2+m} = 2x^2 - x + m \Leftrightarrow (x^2 + m) \cdot 2^{x^2-x} + (x^2 - x) \cdot 2^{x^2+m} = (x^2 - x) + (x^2 + m)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + m) \cdot (2^{x^2-x} - 1) + (x^2 - x) \cdot (2^{x^2+m} - 1) = 0 \quad (*)$$

• TH1: $\begin{cases} x^2 + m > 0 \\ x^2 - x > 0 \\ x^2 + m < 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2+m} > 1 \\ 2^{x^2-x} > 1 \\ 0 < 2^{x^2+m} < 1 \\ 0 < 2^{x^2-x} < 1 \end{cases}$ nên $VT(*) > 0$.

• TH2: $\begin{cases} x^2 + m > 0 \\ x^2 - x < 0 \\ x^2 + m < 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2+m} > 1 \\ 0 < 2^{x^2-x} < 1 \\ 0 < 2^{x^2+m} < 1 \\ 2^{x^2-x} > 1 \end{cases}$ nên $VT(*) < 0$.

• TH3: $\begin{cases} x^2 + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - x = 0 \quad (2) \end{cases}$ thì $(*)$ thỏa mãn.

Ta thấy, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x=1$.

Để phương trình đã cho có nhiều hơn 2 nghiệm thì phương trình (1) có nghiệm khác 0 và 1.

$$\Leftrightarrow m < 0. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z}, m \in (-8; +\infty) \text{ nên } m \in \{-7; -6; \dots -1\} \text{ nên có 7 giá trị thỏa mãn.}$$

Câu 9. (HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019) Giải phương trình $8.25^x - 8.10^x - 15.2^{2x+1} = 0$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Hoàng Tú; Fb: Đỗ Hoàng Tú

$$8.25^x - 8.10^x - 15.2^{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $x=1$.

Câu 10. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Giải phương trình $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\sin^2 x} + 5^{\cos 2x} = |x-1| + |x+5|$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Thuần; Fb: Xu Xu

Ta có:

$$0 < \frac{\sqrt{5}}{3} < 1; 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\sin^2 x} \leq \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^0 = 1.$$

$$5 > 1; -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow 5^{\cos 2x} \leq 5^1 = 5.$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\sin^2 x} + 5^{\cos 2x} \leq 6, \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Lại có } |x-1| + |x+5| = |1-x| + |x+5| \geq |1-x+x+5| = 6, \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } (1-x)(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\sin^2 x} + 5^{\cos 2x} = |x-1| + |x+5| \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ -5 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi \\ x = 0 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \pi; x = 0$.

Câu 11. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt:

A. 2.

B. 3.

C. 1.

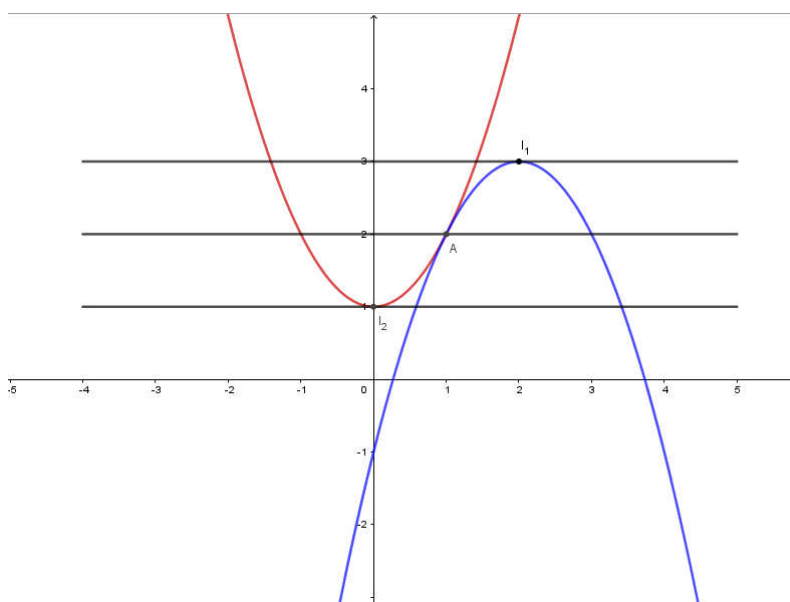
D. 0.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trần Tuấn Minh ; Fb: Tuấn Minh

Phản biện: Bùi Dũng ; Fb: Bùi Dũng

Chọn B



Ta có:

$$3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2) \Leftrightarrow \frac{3^{x^2-2x+3}}{3^{2|x-m|+2}} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2} \cdot \ln(2|x-m|+2) \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = 3^t \cdot \ln t$ trên $(2; +\infty)$.

Có $g'(t) = 3^t \cdot \ln 3 \cdot \ln t + 3^t \cdot \frac{1}{t} > 0 \quad \forall t \in (2; +\infty)$, nên $g(t)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Do đó phương trình (1) tương đương:

$$g(x^2 - 2x + 3) = g(2|x - m| + 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x - m| + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2m \\ -x^2 + 4x - 1 = 2m \end{cases} \quad (2)$$

Xét hai Parabol: $(P_1): y = x^2 + 1$ có đỉnh $I_1(0;1)$ và bề lõm hướng lên.

$(P_2): y = -x^2 + 4x - 1$ có đỉnh $I_2(2;3)$ và bề lõm hướng xuống.

Và dễ thấy hai Parabol tiếp xúc nhau tại điểm $A(1;2)$.

Vậy: (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng nằm ngang $y = 2m$ hoặc đi qua $I_1(0;1)$, hoặc đi qua $I_2(2;3)$, hoặc đi qua $A(1;2)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 3 \\ 2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right\}. \text{ Vậy tổng tất cả các giá trị } m \text{ thỏa đề là } 3.$$

Câu 12. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Giải phương trình $2x^2 + 2x - 3 + 3\sqrt{x^2 + x + 1} = 0$.

Lời giải

Tác giả: Lê Thanh Tịnh – Hồ Thanh Long; Fb: Lê Thanh Tịnh – Phú Long

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn xác định với mọi x .

Ta có:

$$2x^2 + 2x - 3 + 3\sqrt{x^2 + x + 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 - 2 - 3 + 3\sqrt{x^2 + x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 3\sqrt{x^2 + x + 1} - 5 = 0 \quad (*).$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 1}$ với $t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Lúc đó phương trình (*) trở thành:

$$2t^2 + 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{2} \text{ (KTM)} \end{cases}.$$

Với $t = 1$ suy ra $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 0\}$.

Câu 13. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019)

Cho phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2) \cdot 5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$, với m là tham số.

Giá trị nguyên dương lớn nhất của tham số m để phương trình có nghiệm là

A. 5. B. 26. C. 25. D. 6.

Lời giải

Tác giả: face - Bùi Dũng, Phán biện: face - Euro Vũ

Chọn C

Đặt: $5^{1+\sqrt{1-x^2}} = t$

Ta có: $1 \leq 1 + \sqrt{1-x^2} \leq 2 \Rightarrow 5 \leq 5^{1+\sqrt{1-x^2}} \leq 25 \Rightarrow t \in [5; 25]$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - (m+2)t + 2m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - mt - 2t + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = m(t-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2} = m$$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\begin{cases} y = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2} \\ y = m \end{cases}$

Xét hàm số: $y = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2}$ liên tục trên $[5; 25]$, có: $y' = \frac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2} > 0 \forall t \in [5; 25]$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{[5; 25]} y \leq m \leq \max_{[5; 25]} y \Leftrightarrow y(5) \leq m \leq y(25) \Leftrightarrow \frac{16}{3} \leq m \leq \frac{576}{23}$

Vì m là giá trị nguyên dương lớn nhất $\Rightarrow m = 25$

Câu 14. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8^x + 3x \cdot 4^x + (3x^2 + 1)2^x = (m^3 - 1)x^3 + (m-1)x$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $(0; 10)$?

A. 101.

B. 100.

C. 102.

D. 103.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Minh Hải; Fb: Nguyễn Minh Hải

Chọn A

Ta có

$$8^x + 3x \cdot 4^x + (3x^2 + 1)2^x = (m^3 - 1)x^3 + (m-1)x$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^3 + 3x \cdot (2^x)^2 + 3x^2 \cdot 2^x + 2^x = m^3 x^3 - x^3 + (m-1)x$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^3 + 3x \cdot (2^x)^2 + 3x^2 \cdot 2^x + x^3 + 2^x = m^3 x^3 + (m-1)x$$

$$\Leftrightarrow (2^x + x)^3 + 2^x = (mx)^3 + (m-1)x \Leftrightarrow (2^x + x)^3 + 2^x + x = (mx)^3 + mx$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{pt} \Leftrightarrow 2^x + x = mx \Leftrightarrow m = \frac{2^x + x}{x}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{2^x + x}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$$

BBT

x	$0 \quad \frac{1}{\ln 2} \quad 10$
y'	$- \quad 0 \quad +$
y	$+\infty$ $\frac{517}{5}$ $\approx 2,88$

Do m nguyên nên $m \in \{3, 4, 5, \dots, 103\}$ có 101 giá trị **chọn A**

Câu 15. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Tìm m để phương trình

$4^x - 2(m+1)2^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $-1 < m < 9$.

B. $m < \frac{8}{3}$.

C. $\frac{8}{3} < m < 9$.

D. $m < 9$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Kim Thu ; Fb: Thu Tran

Chọn C

Phương trình $4^x - 2(m+1)2^x + 3m - 8 = 0$ (1) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = 2^x > 0, \forall x$ thì phương trình (1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0$ (2).

Đặt $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8$

Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa

$$\text{mãn } 0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 8 > 0 \\ m - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8}{3} < m < 9.$$

Câu 16. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Giải phương trình $4^{x+1} + 4^{1-x} = 2(2^{x+2} - 2^{2-x}) + 8$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Bình ; Fb: Nguyễn Văn Bình

$$\text{Phương trình } 4^{x+1} + 4^{1-x} = 2(2^{x+2} - 2^{2-x}) + 8 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^x + \frac{4}{4^x} = 2\left(4 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x}\right) + 8 \Leftrightarrow 4^x + \frac{1}{4^x} = 2\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) + 2$$

$$\text{Đặt } t = 2^x - \frac{1}{2^x} \text{ Khi đó } 4^x + \frac{1}{4^x} = t^2 + 2$$

$$\text{Ta được phương trình: } t^2 + 2 = 2t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2(1 + \sqrt{2})$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \log_2(1 + \sqrt{2})$

Câu 17. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho phương trình

$$9^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt[3]{3}}(x^2 - 2x + 3) + 3^{-x^2+2x} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2|x-m| + 2) = 0.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có 3 nghiệm?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Tác giả: Cao Xuân Hùng; FB: Cao Hùng

Chọn A

$$9^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt[3]{3}}(x^2 - 2x + 3) + 3^{-x^2+2x} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2|x-m|+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^{2|x-m|}} \cdot 3 \log_3(x^2 - 2x + 3) = \frac{3}{3^{x^2-2x+1}} \cdot \log_3(2|x-m|+2)$$

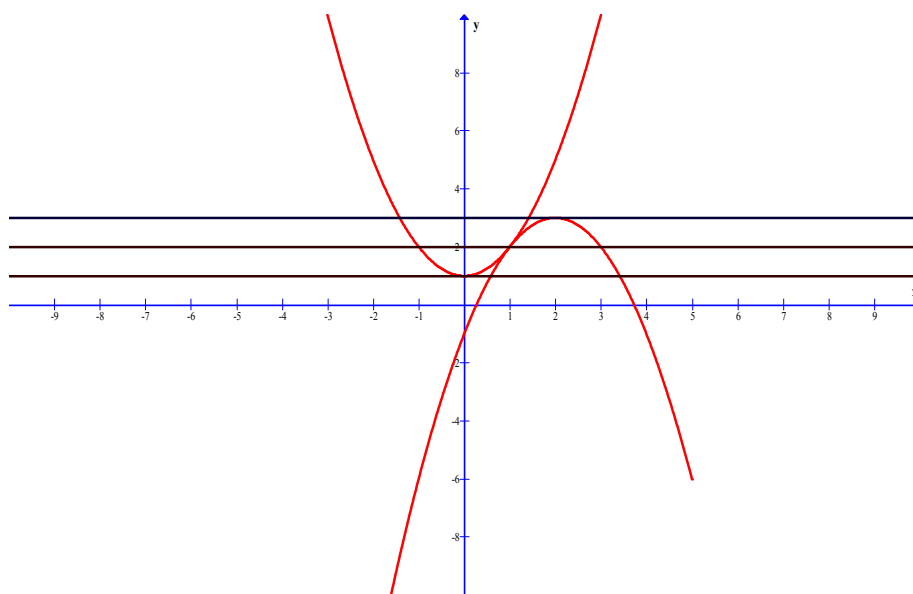
$$\Leftrightarrow 3^{(x-1)^2} \cdot \log_3[(x-1)^2 + 2] = 3^{2|x-m|} \cdot \log_3(2|x-m|+2).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t \cdot \log_3(t+2)$, $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 \cdot \log_3(t+2) + 3^t \cdot \frac{1}{(t+2) \ln 3} > 0$, $\forall t \geq 0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $f[(x-1)^2] = f(2|x-m|)$ nên

$$(x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(x-m) \\ x^2 - 2x + 1 = -2(x-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases}.$$

Ta thấy hai parabol $y = -x^2 + 4x - 1$, $y = x^2 + 1$ tiếp xúc với nhau tại điểm có tọa độ $(1; 2)$ nên đồ thị của chúng trong cùng hệ tọa độ Oxy như sau.



Khi đó để phương trình có 3 nghiệm thì đường thẳng $y = 2m$ cắt hai parabol tại 3 điểm phân biệt, từ

$$\text{đồ thị suy ra } \begin{cases} 2m = 3 \\ 2m = 2 \\ 2m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để phương trình có 3 nghiệm.

Câu 18. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải phương trình:

$$x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1.$$

Lời giải

Điều kiện: $1 \leq x \leq 7$.

$$pt \Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)(7-x)} - 2\sqrt{7-x} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 2) = \sqrt{7-x}(\sqrt{x-1} - 2)$$

$$\text{Cách 1: } \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 2 = 0 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (n)} \\ x = 4 \text{ (n)} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm $S = \{4; 5\}$.

Cách 2:

Đặt $\sqrt{7-x} = u \geq 0; \sqrt{x-1} = v \geq 0$, ta có phương trình:

$$v^2 + 1 + 2u = 2v + 1 + uv \Leftrightarrow 2(u-v) = v(u-v) \Leftrightarrow \begin{cases} v=2 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{7-x} = \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ (n)} \\ x=4 \text{ (n)} \end{cases} \quad \text{Vậy}$$

 tập nghiệm $S = \{4; 5\}$.

Câu 19. (HSG12 tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019) Chứng minh rằng phương trình $-x = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 3}$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị của biểu thức

$$T = (x_1^3 + x_1^2 + 9)(x_2^3 + x_2^2 + 9)(x_3^3 + x_3^2 + 9).$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương $x^3 + x^2 - 6x + 3 = 0$. Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-3) \cdot f(0) < 0, f(0) \cdot f(1) < 0, f(1) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình có nghiệm

$$x_1 \in (-3; 0), x_2 \in (0; 1), x_3 \in (1; 2).$$

Mặt khác, đây là phương trình bậc 3 nên đây là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

Do phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 nên $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

$$\text{Ta có: } T = (6x_1 + 6)(6x_2 + 6)(6x_3 + 6) = -6^3 \cdot (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3) = -6^3 \cdot f(-1) = -6^3 \cdot 9$$

Câu 20. (HSG10 Nam Tiền Hải Thái Bình 2018-2019)

- Tính tổng các nghiệm của phương trình: $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$.
- Giải phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(x^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}) = 2x$

Lời giải

1. Ta có:

$$3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 15x + 3 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 5x + 1) + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} - 5 = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = t$ ($t \geq 0$), ta được phương trình ẩn t :

$$3t^2 + 2t - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (TM)} \\ t = -\frac{5}{3} \text{ (ko TM)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 1} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là -5 .

2. Điều kiện xác định $x \geq -1$.

Ta có vế trái phương trình nhận giá trị dương nên $x > 0$.

Ta giải phương trình này với $x > 0$.

$$\text{Khi đó } (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(x^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}) = 2x \Leftrightarrow \frac{2(x^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3})}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}} = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = x\sqrt{x+3} - x\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x(x - \sqrt{x+3}) - \sqrt{x+1}(\sqrt{x+3} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+3})(x - \sqrt{x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = x \\ \sqrt{x+1} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình là } T = \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Câu 21. (HSG10 THPT Thuận Thành 2018-2019) Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 3x + a = 0; \quad x_3 \text{ và } x_4 \text{ là hai nghiệm của phương trình } x^2 - 12x + b = 0. \text{ Biết rằng } \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}.$$

Tìm a và b.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Phú ; Fb: Nguyễn Văn Phú

$$\text{Phương trình } x^2 - 3x + a = 0 \text{ có hai nghiệm} \Leftrightarrow \Delta = 9 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{9}{4}. \quad (1)$$

$$\text{Phương trình } x^2 - 12x + b = 0 \text{ có hai nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' = 36 - b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq 36. \quad (2)$$

$$\text{Với điều kiện trên, theo Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = a \\ x_3 + x_4 = 12 \\ x_3 \cdot x_4 = b \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Đặt } \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = tx_1 \\ x_3 = tx_2 = t^2 x_1 \\ x_4 = tx_3 = t^3 x_1 \end{cases}$$

$$\text{Thế vào hệ (I) ta được: } \begin{cases} x_1 + tx_1 = 3 \\ x_1 \cdot tx_1 = a \\ t^2 x_1 + t^3 x_1 = 12 \\ t^2 x_1 \cdot t^3 x_1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + tx_1 = 3 & (3) \\ x_1 \cdot tx_1 = a & (4) \\ t^2(x_1 + tx_1) = 12 & (5) \\ t^2 x_1 \cdot t^3 x_1 = b & (6) \end{cases}$$

$$\text{Thế (3) vào (5) ta được } t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ thay vào (3) ta được } x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2; x_3 = 4; x_4 = 8.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = x_1 \cdot x_2 = 1.2 = 2 \\ b = x_3 \cdot x_4 = 4.8 = 32 \end{cases} \text{ (t/m)}$$

Với $t = -2$ thay vào (3) ta được $x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 6; x_3 = -12; x_4 = 24$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = x_1 \cdot x_2 = -3.6 = -18 \\ b = x_3 \cdot x_4 = -12.24 = -288 \end{cases} \text{ (t/m)}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 2 \\ b = 32 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -18 \\ b = -288 \end{cases}.$$

Câu 22. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + a = 0$, x_3 và x_4 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 12x + b = 0$. Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm a, b

Lời giải

Tác giả: Phạm Huyền; FB: Phạm Huyền

Gọi q là công bội của CSN $\Rightarrow x_2 = x_1 q; x_3 = x_1 q^2; x_4 = x_1 q^3$

Theo viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = a \\ x_3 + x_4 = 12 \\ x_3 x_4 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(1+q) = 3 & (1) \\ x_1 x_2 = a & (2) \\ x_1 q^2(1+q) = 12 & (3) \\ x_3 x_4 = b & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) suy ra $q^2 = 4$

+ $q = 2$ từ (3) suy ra $x_1 = 1$, giải ra được $a = 2; b = 32$.

+ $q = -2$ từ (3) suy ra $x_1 = -3$, giải ra được $a = -18; b = -288$.

Câu 23. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 1} + 7 = 2x$

Lời giải

Tác giả: Anh Tuấn ; Fb: Anh Tuan.

Ta có $\sqrt{x^2 - 3x - 1} + 7 = 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 1 = (2x - 7)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ 3x^2 - 25x + 50 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \{5\}$.

Câu 24. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Giải phương trình

$$(x-2)^3 + 2\sqrt{(x-1)^3} = 3(x^2 - 3x + 2).$$

Lời giải

Tác giả: Võ Huỳnh Hiếu ; Fb: Huỳnh Hiếu

Đặt $u = x - 2, v = \sqrt{x-1}$ với $v \geq 0$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$u^3 + 2v^3 = 3uv^2 \Leftrightarrow (u-v)[u(u+v) - 2v^2] = 0$$

$$\text{Với } u = v \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{5+\sqrt{5}}{2} (N) \\ x = \frac{5-\sqrt{5}}{2} (L) \end{cases}$$

$$\text{Với } u(u+v) = 2v^2 \Leftrightarrow (u-v)(u+2v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + 2v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \sqrt{x-1} \\ x - 2 + 2\sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 4 + 2\sqrt{2} (L) \\ x = 4 - 2\sqrt{2} (N) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được: $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}, x = 4 - 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}, x = 4 - 2\sqrt{2}$.

Câu 25. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Giải các phương trình sau trên tập hợp các số thực:

1) $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x = 2\sqrt{x^2 - 3x}$.

2) $7^x - 6\log_7(6x+1) - 1 = 0$.

Lời giải

1) Ta có $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x = 2\sqrt{x^2 - 3x} \Leftrightarrow (x^2 - 3x)^2 - 3(x^2 - 3x) - 2\sqrt{x^2 - 3x} = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x}, t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành $t^4 - 3t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = 2; t = -1$.

Kết hợp với điều kiện $t \geq 0$, ta chỉ có hai trường hợp sau:

Với $t = 0$, ta có $\sqrt{x^2 - 3x} = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 3$.

Với $t = 2$, ta có $\sqrt{x^2 - 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 4$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x = 0, x = 3, x = -1, x = 4$.

2) Điều kiện xác định: $x > -\frac{1}{6}$. Đặt $y = \log_7(6x+1)$, khi đó $7^y = 6x+1$.

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ $\begin{cases} 7^x = 6y + 1 \\ 7^y = 6x + 1 \end{cases}$.

Trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ, ta có

$$7^x - 7^y = 6y - 6x \Leftrightarrow 7^x + 6x = 7^y + 6y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 7^t + 6t$, tập xác định $D = \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(t) = 7^t \ln 7 + 6 > 0, \forall t \in D$ nên hàm số f đồng biến trên D .

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Suy ra $7^x - 6x - 1 = 0 \quad (2)$.

Xét hàm số $g(x) = 7^x - 6x - 1$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Ta có $g'(x) = 7^x \ln 7 - 6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_7 \frac{6}{\ln 7}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\frac{1}{6}$	$\log_7 \frac{6}{\ln 7}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$			

$g\left(\log_7 \frac{6}{\ln 7}\right)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình (2) có không quá hai nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Mà $g(0) = 0, g(1) = 0$ nên $x = 0, x = 1$ là tất cả các nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

Câu 26. (HSG12 tỉnh Quảng Bình năm 2018-2019) Giải phương trình sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}-1).$$

Lời giải

Tác giả: Đặng Mai Hương, Ngô Quốc Tuấn, FB: Đặng Mai Hương, Quốc Tuấn

Cách 1: $x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}-1)$ (điều kiện $x \geq 3$)

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 3x - 3) = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3}) \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x^2 - 3x - 3 = \frac{x^2 - 5x + 6 + 5x\sqrt{x-3} - 15\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (Nhan)} \\ (x^2 - 8x + 12)\sqrt{x-3} = 9 - 2x \text{ (1)} \end{cases}$$

Giải (1): $(x^2 - 8x + 12)\sqrt{x-3} = 9 - 2x$.

Đặt $t = \sqrt{x-3} \geq 0$.

Phương trình (1) trở thành: $t^5 - 2t^3 + 2t^2 - 3t - 3 = 0$ (2).

(Phân tích phương trình (2) như sau: $VT = (t^2 + at + b) \cdot (t^3 + ct^2 + dt + e)$. Đồng nhất hệ số).

$$(2): (t^2 - t - 1)(t^3 + t^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0 \\ t^3 + t^2 + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm do } t \geq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (Nhan)} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (Loai)} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2} \text{ (Nhan)}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ 4; \frac{9+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Cách 2: Điều kiện: $x \geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-4)(x^2-3x-3) = \frac{x^2-5x+6+5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (Nhan)} \\ x^2 - 3x - 3 = \frac{x^2 - 5x + 6 + 5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + 1} \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1):

$$x^2 - 3x - 3 - \frac{x^2 - 5x + 6 + 5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 3)(\sqrt{x-3} + 1) - x^2 + 5x - 6 - 5(x-3)\sqrt{x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2x - (x^2 - 8x + 12)\sqrt{x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 12x^2 - 46x + 57 + (x^2 - 8x + 12)(x - 4 - \sqrt{x-3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)(x^2 - 9x + 19) + (x^2 - 8x + 12)(x - 4 - \sqrt{x-3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)(x-4-\sqrt{x-3})(x-4+\sqrt{x-3}) + (x^2 - 8x + 12)(x-4-\sqrt{x-3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4-\sqrt{x-3}) \left[-(x-3)(x-4+\sqrt{x-3}) + (x^2 - 8x + 12) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4-\sqrt{x-3}) \left[(3-x)\sqrt{x-3} - x \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = x-4 & (2) \\ (3-x)\sqrt{x-3} - x = 0 & (3) \end{cases}$$

$$* \text{Giải (2): } \sqrt{x-3} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = \frac{9+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2}.$$

*Giải (3):

$$(3-x)\sqrt{x-3} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^3} + x = 0 \text{ (vô nghiệm do } x \geq 3)$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm } S = \left\{ 4; \frac{9+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Cách 3: Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-4)(x^2-3x-3) = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3}) \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (Nhan)} \\ x^2 - 3x - 3 = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3}) \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} \end{cases} \quad (1).$$

Giải (1):

$$x^2 - 3x - 3 = (x-3) \frac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 3}{x-3} = \frac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2 + 5(x-4) + 1}{(x-4)+1} = \frac{(x-3)+5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t+1}, t \geq 0.$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t+1)^2} > 0, \forall t \geq 0, \text{ suy ra hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t+1} \text{ đồng biến trên } [0; +\infty).$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x-3} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x-3 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = \frac{9+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm } S = \left\{ 4; \frac{9+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Câu 27. (HSG12 tỉnh Thái Nguyên năm 2018-2019) Giải phương trình

$$x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}-1).$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thành Biên ; Fb: BienNguyenThanh

$$\text{Điều kiện } x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}(x-4)(x^2-3x-3) &= (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}-1) \\ (\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)(x^2-3x-3) &= (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}-1) \\ \left[\begin{aligned} \sqrt{x-3}-1 &= 0 \longrightarrow \sqrt{x-3}=1 \Leftrightarrow x=4 \\ (\sqrt{x-3}+1)(x^2-3x-3) &= (x-3)(x-2+5\sqrt{x-3}) \end{aligned} \right. \quad (*)\end{aligned}$$

Dễ thấy $x=3$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x > 3$, giải phương trình (*) ta được $\frac{x^2-3x-3}{x-3} = \frac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2+5(x-4)+1}{x-4+1} = \frac{x-3+5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1} \Leftrightarrow f(x-4) = f(\sqrt{x-3}).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+5t+1}{t+1}$ trên $(-1; +\infty)$, có $f'(t) = 1 + \frac{3}{(t+1)^2} > 0, \forall t > -1$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ mà $f(x-4) = f(\sqrt{x-3})$.

$$\text{Do đó } x-4 = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ (x-4)^2 = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2-9x+19=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=4$; $x = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 28. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019) Giải phương trình $(x+1)\sqrt{6x^2-6x+25} = 23x-13$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Nghĩa; Fb: Thu Nghĩa

Ta có $(x+1)\sqrt{6x^2-6x+25} = 23x-13$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{6x^2-6x+25} - (2x+3)\right] + 2x^2-18x+16 = 0 \quad (1)$$

$$\text{TH1: } \sqrt{6x^2-6x+25} + (2x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-3}{2} \\ \sqrt{6x^2-6x+25} = -2x-3 \end{cases} \quad (\text{PTVN})$$

TH2: $\sqrt{6x^2-6x+25} + (2x+3) \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (x+1) \frac{(2x^2-18x+16)}{\sqrt{6x^2-6x+25} + (2x+3)} + 2x^2-18x+16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-18x+16) \left[\frac{x+1}{\sqrt{6x^2-6x+25} + (2x+3)} + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 18x + 16 = 0 & (1) \\ \frac{x+1}{\sqrt{6x^2 - 6x + 25} + (2x+3)} + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được $\begin{cases} x = 1 \\ x = 8 \end{cases}$.

Giải (2) $\Leftrightarrow \sqrt{6x^2 - 6x + 25} = -3x - 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-4}{3} \\ 3x^2 + 30x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5 - 2\sqrt{7}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1; 8; -5 - 2\sqrt{7}\}$.

Câu 29. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Chứng minh rằng phương trình $4x^5 + 2018x + 2019 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Chúc; Fb: Chuc Nguyen

Cách 1: (sử dụng kiến thức lớp 12).

Xét hàm số $f(x) = 4x^5 + 2018x + 2019$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 20x^4 + 2018 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm $x \in \mathbb{R}$ (1).

Ta có $f(0) = 2019; f(-1) = -3 \Rightarrow f(0)f(-1) < 0$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $a \in (-1; 0)$ (2).

Từ (1); (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $a \in (-1; 0)$.

Do vậy, phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm thực.

Cách 2: (sử dụng kiến thức lớp 11).

Xét hàm số $f(x) = 4x^5 + 2018x + 2019$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = 2019; f(-1) = -3 \Rightarrow f(0)f(-1) < 0$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $a \in (-1; 0)$.

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $b \neq a$.

Ta có $f(b) - f(a) = 4(b^5 - a^5) + 2018(b - a)$.

Nếu $b < a$ thì $b^5 < a^5$. Suy ra $4(b^5 - a^5) + 2018(b - a) < 0$.

Do vậy $f(b) - f(a) < 0 \Rightarrow f(b) < f(a) = 0$ (vô lí).

Nếu $b > a \Rightarrow b^5 > a^5$. Suy ra $4(b^5 - a^5) + 2018(b - a) > 0$.

Do vậy $f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(b) > f(a) = 0$ (vô lí).

Vậy điều giả sử là sai.

Do vậy, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = a$ (đpcm).

Câu 30. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4}.$$

Lời giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $t = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \Rightarrow \frac{t^2 - 2}{2} = \sqrt{1-x^2}$, với $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Phương trình theo t có dạng

$$t = \frac{7 + \left(\frac{t^2 - 2}{2}\right)^2}{4} \Leftrightarrow (t-2)^2(t^2 + 4t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (nhận)}.$$

Với $t = 2$ ta được $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 \Leftrightarrow 1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

Câu 31. (HSG12 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2018-2019) Giải phương trình

$$2x + 3 + (x+1)\sqrt{x^2 + 6} + (x+2)\sqrt{x^2 + 2x + 9} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 2x + 9} > 0 \\ v = \sqrt{x^2 + 6} > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow u^2 - v^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{u^2 - v^2 - 3}{2}$$

Phương trình đã cho trở thành: $u^2 - v^2 + v \cdot \left(\frac{u^2 - v^2 - 1}{2}\right) + u \cdot \left(\frac{u^2 - v^2 + 1}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2(u^2 - v^2) + (u+v)(u^2 - v^2) + (u-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ 2(u+v) + (u+v)^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + v = -1 \text{ (vn)} \end{cases}$$

Với $u = v$ ta có $\sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{x^2 + 2x + 9} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = -\frac{3}{2}$.

Câu 32. (HSG10 Cụm Hà Đông Hà Đức Hà Nội năm 2018-2019) Giải phương trình

$$4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1).$$

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Diệu Huyền; Fb: Phạm Thị Diệu Huyền

Điều kiện: $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

$$4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1) \Leftrightarrow 4x^2 + 2.2x.3\sqrt{x+1} + 9(x+1) = 36(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3\sqrt{x+1})^2 = 36(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3\sqrt{x+1} = 6\sqrt{x+1} \\ 2x + 3\sqrt{x+1} = -6\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3\sqrt{x+1} \\ 2x = -9\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 9(x+1) \\ x \geq 0 \\ 4x^2 = 81(x+1) \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{81 - 9\sqrt{97}}{8} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 3$ và $x = \frac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$.

Câu 33. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{5x+4}$$

Lời giải

Tác giả: Anh Tuấn ; Fb: Anh Tuan.

$$\text{Ta có } \sqrt{3x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{5x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \\ 3x+1+4x-3+2\sqrt{(3x+1)(4x-3)} = 5x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ \sqrt{(3x+1)(4x-3)} = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \leq x \leq 3 \\ 11x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x = 1 \\ x = -\frac{12}{11} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

Câu 34. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh phương trình $f(x) + [f(1) - f(0)]x = f(1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[0;1]$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Tuấn ; Fb: Nguyễn Thanh Tuấn

Ta viết lại phương trình đề bài: $f(x) + [f(1) - f(0)]x - f(1) = 0$.

Đặt: $g(x) = f(x) + [f(1) - f(0)]x - f(1)$.

Ta có: $g(0) = f(0) - f(1)$; $g(1) = f(1) - f(1) = 0$.

Nhận thấy $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $g(0).g(1) = -[f(0) - f(1)]^2 \leq 0$.

Vì vậy phương trình $g(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $[0;1]$ (đpcm).

Câu 35. (HSG10 Cụm Hà Đông Hà Đức Hà Nội năm 2018-2019) Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 7 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1 - x_2| = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $|x_1 - x_2| = \frac{4}{3} \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Do đó, phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-2)^2 - m(2m-7) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m^2 + 3m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 < m < 4 \end{cases}.$$

Theo định lý Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{2m-7}{m} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$|x_1 - x_2| = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow S^2 - 4P = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2(m-2)}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{2m-7}{m}\right) = \frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 4m + 4}{m^2} - \frac{2m-7}{m} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{-13}{9}m^2 + 3m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-12}{13} \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $\begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-12}{13} \end{cases}.$

Lưu ý: Có thể sử dụng công thức $|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}$.

Câu 36. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

Lời giải

Tác giả: Vĩnh Tín, FB: Vĩnh Tín

Điều kiện xác định của phương trình: $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Khi đó t liên tục trên $[-1; 1]$ và $t \geq 0$.

$$\Rightarrow t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \leq 2 \Rightarrow t \in [0; \sqrt{2}]$$

Phương trình trở thành: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}.$

Xét $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}; t \in [0; \sqrt{2}]$ ta có $f(t)$ liên tục trên $[0; \sqrt{2}]$

$$f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2} < 0, \forall t \in (0; \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } [0; \sqrt{2}]$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm thực khi $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1 = f(0)$

Câu 37. (HSG10 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Cho phương trình $(x^2 + ax + 1)^2 + a(x^2 + ax + 1) + 1 = 0$, với a là tham số. Biết rằng phương trình có nghiệm thực duy nhất. Chứng minh rằng $a > 2$.

Lời giải

Tác giả: Phan Văn Lâm; FB: Lâm Phan

Xét phương trình $(x^2 + ax + 1)^2 + a(x^2 + ax + 1) + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 + ax + 1$, khi đó $x^2 + ax + 1 - t = 0$ (2) và phương trình đã cho trở thành: $t^2 + at + 1 = 0$ (3).

Phương trình (1) có nghiệm khi a và t thỏa mãn: $a^2 - 4 \geq 0$ và $a^2 - 4 + 4t \geq 0$.

$a^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -2$ hay $a \geq 2$. Nếu $a \leq -2$ thì (3) có nghiệm $t > 0$, khi đó $a^2 - 4 + 4t > 0$, suy ra (2) có hai nghiệm phân biệt, mâu thuẫn với giả thiết (1) có nghiệm duy nhất. Nếu $a = 2$ thì phương trình (3) có nghiệm $t = -1$, khi đó điều kiện $a^2 - 4 + 4t \geq 0$ không được thỏa mãn.

Vậy $a > 2$.

Câu 38. (HSG11 Bắc Ninh 2018-2019) Cho tam thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt và $b^2 - 2b - 3 > 4c$ thì phương trình $f[f(x)] = x$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Hà ; Fb: Nguyễn Mạnh Hà

Xét phương trình: $f[f(x)] = x \Leftrightarrow f^2(x) + b.f(x) + c - x = 0$

$$\Leftrightarrow f(x)[f(x) - x] + b[f(x) - x] + x[f(x) - x] + x^2 + bx + c - x = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - x][f(x) + b + x] + f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - x][f(x) + b + x + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - x = 0 & (1) \\ f(x) + b + x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Từ giả thiết phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

- Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2 + (b+1)x + b+c+1 = 0$

có $\Delta = (b+1)^2 - 4(b+c+1) = b^2 - 2b - 3 - 4c > 0$ (vì theo giả thiết $b^2 - 2b - 3 > 4c$)

Do đó phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt.

- Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình (1) khi đó: $x_0^2 + bx_0 + c - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + (b+1)x_0 + c - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + (b+1)x_0 + c = 2x_0$

Khi đó nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì :

$$x_0^2 + (b+1)x_0 + b+c+1 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + b+1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-b-1}{2}$$

Khi đó (1) trở thành: $\left(\frac{-b-1}{2}\right)^2 - \frac{b^2+b}{2} + c + \frac{b+1}{2} = 0 \Leftrightarrow -b^2 + 2b + 3 + 4c = 0 \Leftrightarrow b^2 - 2b - 3 = 4c$ (trái với giả thiết của đề bài $b^2 - 2b - 3 > 4c$).

Do đó x_0 là một nghiệm của phương trình (1) nhưng không là nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình $f[f(x)] = x$ có bốn nghiệm phân biệt.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $(a+b-c)^2 = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^2 \quad \text{Lời giải}$$

Tác giả: Lưu Thị Hạnh ; Fb: Hạnh Lưu

Đặt $a = xc, b = yc$. thay vào biểu thức $(a+b-c)^2 = ab$ ta có: $(xc + yc - c)^2 = c^2 xy \Leftrightarrow (x+y-1)^2 = xy$

$$\text{và } P = \frac{\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy}$$

Ta có:

$$(x+y-1)^2 = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - 4[(x+y)^2 - 2(x+y) + 1] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 8(x+y) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x+y \leq 2$$

Đặt $t = x+y, \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 2\right)$. Từ $xy = (x+y-1)^2$ ta có $xy = (t-1)^2$.

Thay vào biểu thức P ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{t^2 - 2(t-1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{-t^2 + 4t - 2} + \frac{1}{(t-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{2(t-1)^2} + \frac{1}{-t^2 + 4t - 2} + \frac{1}{2(t-1)^2} \\ &\geq \sqrt{\frac{2}{t|t-1|}} + \frac{4}{-t^2 + 4t - 2 + 2(t-1)^2} = \sqrt{\frac{2}{t|t-1|}} + \frac{4}{t^2} \geq 2, \forall t \in \left[\frac{2}{3}; 2\right] \end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

3) Lớp 11 Toán có 34 học sinh tham gia kiểm tra môn Toán để chọn đội tuyển dự thi học sinh giỏi cấp tỉnh. Đề kiểm tra gồm 5 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán luôn có ít nhất 19 học sinh giải quyết được. Chứng minh rằng có 2 học sinh sao cho mỗi bài toán đều được một trong hai học sinh này giải quyết được. **Lời giải**

Tác giả: Vũ Ngọc Phát; Fb: Vũ Ngọc Phát

Giả sử ngược lại: với mỗi 2 học sinh bất kì, luôn tồn tại ít nhất một bài toán mà cả hai học sinh đều không giải được. Gọi (x, y, a) là bộ gồm hai học sinh x, y và bài toán a mà cả hai học sinh x, y đều không giải được. Gọi k là số bộ ba (x, y, a) .

Số cách chọn hai học sinh từ 34 học sinh là C_{34}^2 .

Vì với mỗi 2 học sinh bất kì, luôn tồn tại ít nhất một bài toán mà cả hai học sinh đều không giải được nên $k \geq C_{34}^2 = 561$ (*).

Theo đề ta có mỗi bài toán luôn có ít nhất 19 học sinh giải quyết được nên mỗi bài toán có nhiều nhất 15 học sinh không giải được. Như vậy với mỗi bài toán a có nhiều nhất C_{15}^2 cặp học sinh không giải được bài toán a . Do đó $k \leq C_{15}^2 = 525$. Mâu thuẫn với (*).

Vậy có 2 học sinh sao cho mỗi bài toán đều được một trong hai học sinh này giải quyết được.

Câu 39. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019) Cho phương trình $(m+2)\sqrt{x(x^2+1)} - x^2 + (m-6)x - 1 = 0$ (1). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm thực.

Lời giải

Tác giả: Minh Hạnh; Fb: fb.com/meocon2809

1.

Điều kiện: $x \geq 0$.

- Với $x = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Với $x > 0$, Phương trình (1) $\Leftrightarrow (m+2)\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} - \frac{x^2+1}{x} + m-6 = 0$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} \Rightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{2} \\ t^2 = \frac{x^2+1}{x} \end{cases};$$

Ta được phương trình mới theo ẩn phụ: $(m+2)t - t^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 6}{t+1} = m$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 6}{t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 8}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}$ (l).

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-4	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'	$+$ 0 $-$			$-$ 0 $+$	
y				$2\sqrt{2}-2$ 	 $+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 40. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019) Cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 - 4b + 1 > 0.$$

Lời giải

Giả sử đa thức đã cho có nghiệm trong trường hợp $a^2 + b^2 - 4b + 1 \leq 0$.

Ta có: $a^2 + b^2 - 4b + 1 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 \leq 3$ (1).

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ nên:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ thì phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $t^2 + at + b - 2 = 0$ có nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 2$.

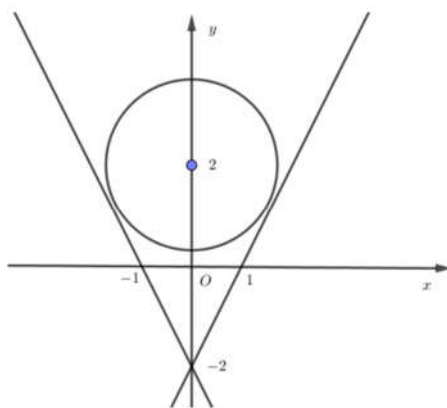
Xét hàm số $g(t) = t^2 + at + b - 2$

Ta có: $g'(t) = 2t + a, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{a}{2}$. Như (1) trên thì $-\frac{a}{2} \notin (-2; 2)$

Do đó ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(t)$	-		+	
$g(t)$	$+\infty$	$-2a + b + 2$	$2a + b + 2$	$+\infty$

Phương trình có nghiệm thì $\begin{cases} -2a + b + 2 \leq 0 & (2) \\ 2a + b + 2 \leq 0 & (3) \end{cases}$



Những điểm $M(a; b)$ thỏa (1) thì nằm bên trong hoặc biên đường tròn tâm $I(0; 2)$ và bán kính bằng $\sqrt{3}$.

Những điểm $N(a; b)$ thỏa mãn (2) và (3) là những điểm thuộc phần không chứa gốc tọa độ của các đường thẳng $\begin{cases} -2x + y + 2 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$

Những phần đó theo hình vẽ là không có điểm chung, vì vậy ta có mâu thuẫn.

Ta có điều phải chứng minh: Nếu đa thức đã cho có nghiệm thì $a^2 + b^2 - 4b + 1 > 0$

Chú ý: Bài có thể giải nhanh như sau:

$$t^2 + at + b - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = -at + 2 - b \Rightarrow t^4 = (-at + 2 - b)^2 \leq [a^2 + (b - 2)^2](1 + t^2)$$

$$\Rightarrow a^2 + (b - 2)^2 > \frac{t^4 - 1}{t^2 + 1} = t^2 - 1 \geq 3 \Rightarrow a^2 + b^2 - 4b + 1 > 0$$

Câu 41. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\left| \tan^4 x - \frac{2}{\cos^2 x} \right| = m \text{ có 6 nghiệm phân biệt thuộc } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \text{ là}$$

A. $m = 3$

B. $2 < m < 3$

C. $2 \leq m \leq 3$

D. $m = 2$

Lời giải

Tác giả: Trần Đức Phương; Fb: Phương Tran Duc.

Phản biện: Tuấn Minh; Fb: Tuấn Minh

Chọn B

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Ta có: $\left| \tan^4 x - \frac{2}{\cos^2 x} \right| = m \Leftrightarrow \left| \tan^4 x - 2 \tan^2 x - 2 \right| = m \quad (*)$

Đặt $t = \tan^2 x, t \geq 0$. Khi đó $(*)$ trở thành: $|t^2 - 2t - 2| = m$.

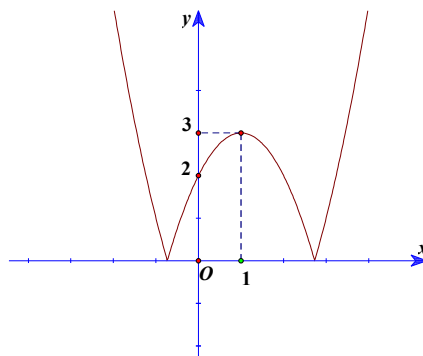
Nhận xét:

☐ Với $t = 0$ thì phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 0$.

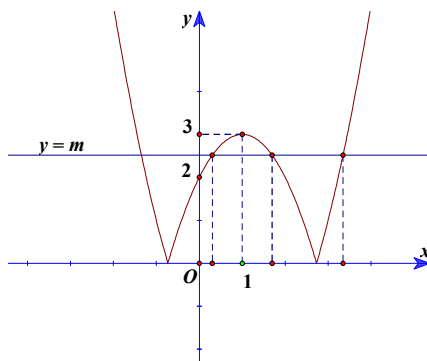
☐ Với mỗi $t > 0$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm x phân biệt thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

☐ Với mỗi $t < 0$ thì phương trình đã cho không tồn tại nghiệm x .

Đồ thị của hàm số $y = |t^2 - 2t - 2|$:



Dựa vào đồ thị, phương trình $\left| \tan^4 x - \frac{2}{\cos^2 x} \right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |t^2 - 2t - 2|$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 0. Lúc đó: $2 < m < 3$.



Câu 42. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho phương trình

$$x^2 + 7 + m\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m(\sqrt{x^2 - x + 1} - 2).$$

Biết tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm là $(-a; b)$. Tính $P = b + a$

A. $-\frac{26}{3}$.

B. $\frac{13}{6}$.

C. $\frac{13}{3}$.

D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$x^2 + 7 + m\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m(\sqrt{x^2 - x + 1} - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 7 - \sqrt{x^4 + x^2 + 1} = m(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} - 2)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow t^2 = 2x^2 - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + 2$$

$$\text{Xét hàm số } t = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ có } t'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{x^2 + x + 1} = (2x+1)\sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1) \cdot (2x+1) \geq 0 \\ (2x-1)^2 (x^2 + x + 1) = (2x+1)^2 (x^2 - x + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{2} \text{ (Vô nghiệm)} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } t'(0) < 0 \Rightarrow t'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$t'(x)$	-	
$t(x)$	1	$\rightarrow -1$

$\Rightarrow t \in (-1; 1)$. Ta có phương trình: $t^2 + 12 = 2m(t - 2) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 12}{t - 2} = 2m$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 12}{t - 2}$, $t \in (-1; 1)$, $f'(t) = \frac{t^2 - 4t - 12}{(t - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (l)} \\ t = 6 \text{ (l)} \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	-1	1
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$-\frac{13}{3}$	$\rightarrow -13$

Phương trình $\frac{t^2 + 12}{t - 2} = 2m$ có nghiệm $t \in (-1; 1) \Leftrightarrow -13 < 2m < -\frac{13}{3} \Leftrightarrow -\frac{13}{2} < m < -\frac{13}{6}$

$\Rightarrow a = \frac{13}{2}, b = -\frac{13}{6} \Rightarrow b + a = \frac{13}{3}$.

Câu 43. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Với giá trị nào của m thì phương trình

$$(m - 5)x^2 + 2(m - 1)x + m = 0$$

có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$?

- A. $m \geq 5$. B. $m < \frac{8}{3}$. C. $\frac{8}{3} \leq m \leq 5$. D. $\frac{8}{3} < m < 5$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Hoàng Tú; Fb: Đỗ Hoàng Tú

Chọn D

$(m - 5)x^2 + 2(m - 1)x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 5 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ (m - 1)^2 - (m - 5)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ 3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó, theo hệ thức Vi – ét ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{2(m-1)}{m-5} \\ P = x_1 x_2 = \frac{m}{m-5} \end{cases}$$

$(m-5)x^2 + 2(m-1)x + m = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m-5} + \frac{4(m-1)}{m-5} + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{9m-24}{m-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} < m < 5.$

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \frac{8}{3} < m < 5.$

Câu 44. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m-1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là:

- A. $(1; +\infty)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tác giả: Phan Thanh Quỳnh; Fb: Thanh Quỳnh Phan

Chọn B

Đặt $t = x^2 \geq 0$, khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2mt + (2m-1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2m+1) = 0$
(1)

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow t = 2m-1$ phải dương và khác 1 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \neq 1.$

Câu 45. (HSG10 Kim Liên 2018-2019) Cho phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} = \sqrt{18+3x-x^2} + m$, (1), (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

Lời giải

Tác giả: Hải Thương; Fb: Hải Thương

Đk: $-3 \leq x \leq 6$.

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$, $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$. Suy ra $\sqrt{18+3x-x^2} = \frac{t^2-9}{2}$.

Phương trình (1) trở thành $t^2 - 2t = 9 - 2m$.

a) Khi $m = 3$ phương trình trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (l)} \\ t = 3 \end{cases}$

$t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 \Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{18+3x-x^2} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -3, x = 6$.

b) Phương trình (1) có nghiệm khi phương trình $t^2 - 2t = 9 - 2m$ có nghiệm $t \in [3; 3\sqrt{2}]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ với $t \in [3; 3\sqrt{2}]$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[3; 3\sqrt{2}]$ nên $3 \leq f(t) \leq 18 - 6\sqrt{2}$ với $t \in [3; 3\sqrt{2}]$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 3 \leq 9 - 2m \leq 18 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{-9 + 6\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 3$.

Câu 46. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho hai phương trình: $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$ (1) và $x^2 - 2(a+1)x + a(a-1) = 0$ (2).

a) Tìm a để phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1) và $x_3; x_4$ là hai nghiệm của phương trình (2) với $x_3 < x_4$. Tìm tất cả các giá trị a để $x_1; x_2 \in (x_3; x_4)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Ái Trinh ; Fb: Trinh Nguyễn

a) Xét phương trình: $x^2 - 2(a+1)x + a(a-1) = 0$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 - a(a-1) > 0 \Leftrightarrow 3a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{3}$.

Vậy với $a > -\frac{1}{3}$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.

b) Xét phương trình:

$$x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1+a)(x-1-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-a \\ x = 1+a \end{cases}$$

Ta có: $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + a(a-1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_3; x_4$ khi $a > -\frac{1}{3}$.

Theo giả thiết $x_1; x_2 \in (x_3; x_4)$ hay $x_3 < x_1 \leq x_2 < x_4$ (giả sử $x_1 \leq x_2$) khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f(x_1) < 0 \\ f(x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1-a) < 0 \\ f(1+a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 3a - 1 < 0 \\ -3a - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < a < 1 \\ a > -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < a < 1.$$

Vậy với $-\frac{1}{4} < a < 1$ thì $x_1; x_2 \in (x_3; x_4)$.

Câu 47. (HSG11 tỉnh Phú Yên năm 2018-2019) Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m :

$$\sqrt{x+2\sqrt{mx-m^2}} + \sqrt{x-2\sqrt{mx-m^2}} \leq 2\sqrt{m} \text{ với } m > 0$$

Lời giải

Cách 1

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} mx - m^2 \geq 0 \\ x + 2\sqrt{mx - m^2} \geq 0 \\ x - 2\sqrt{mx - m^2} \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq m \quad (1)$$

Đặt $t = 2\sqrt{mx - m^2}; t \geq 0$. Thì $x = \frac{t^2 + 4m^2}{4m}$

$$\sqrt{x + 2\sqrt{mx - m^2}} = \sqrt{\frac{t^2 + 4m^2}{4m} + t} = \sqrt{\frac{(t + 2m)^2}{4m}} = \frac{|t + 2m|}{2\sqrt{m}}$$

$$\text{Và } \sqrt{x - 2\sqrt{mx - m^2}} = \sqrt{\frac{t^2 + 4m^2}{4m} - t} = \sqrt{\frac{(t - 2m)^2}{4m}} = \frac{|t - 2m|}{2\sqrt{m}}.$$

Khi đó bất phương trình đã cho là $|t + 2m| + |t - 2m| \leq 4m, m > 0$ (2)

Vì $m > 0, t \geq 0$ nên $|t + 2m| = t + 2m$ nên

$$(2) \Leftrightarrow t + 2m + |t - 2m| \leq 4m \Leftrightarrow |t - 2m| \leq 2m - t, m \geq 0$$

$$\Rightarrow t - 2m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2m$$

$$\text{Nghĩa là } 0 \leq 2\sqrt{mx - m^2} \leq 2m \Leftrightarrow m^2 \leq mx \leq 2m^2 \Leftrightarrow m \leq x \leq 2m$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [m; 2m]$.

Cách 2

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} mx - m^2 \geq 0 \\ x + 2\sqrt{mx - m^2} \geq 0 \\ x - 2\sqrt{mx - m^2} \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq m \quad (*)$$

Với điều kiện trên, hai vế của bất phương trình không âm, bình phương hai vế ta được

$$x + 2\sqrt{mx - m^2} + 2\sqrt{x^2 - 4(mx - m^2)} + x - 2\sqrt{mx - m^2} \leq 4m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4mx + 4m^2} \leq 2m - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2m)^2} \leq 2m - x$$

$$\Leftrightarrow |x - 2m| \leq 2m - x \quad (**)$$

+) Nếu $x \geq 2m$ thì bất phương trình $(**)$ $\Leftrightarrow x - 2m \leq 2m - x \Leftrightarrow x \leq 2m$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 2m$ ta được $x = 2m$ (1)

+) Nếu $x < 2m$ thì bất phương trình $(**)$ $\Leftrightarrow 2m - x \leq 2m - x$ (luôn đúng).

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $m \leq x < 2m$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = [m; 2m]$.

Câu 48. (HSG10 PHÙNG KHẮC KHOAN- HÀ NỘI 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m ($m \in \mathbb{R}$) để phương trình: $x^4 - (3m + 1)x^2 + 6m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt đều lớn hơn -4 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thủy ; Fb: Thuy Nguyen

$$\text{Ta có: } x^4 - (3m + 1)x^2 + 6m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 = 3m - 1 \end{cases}$$

Để phương trình có bốn nghiệm phân biệt đều lớn hơn -4 thì $\begin{cases} 3m-1 \neq 2 \\ 0 < 3m-1 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{1}{3} < m < \frac{17}{3} \end{cases}$

Vậy với $m \in \left(\frac{1}{3}; \frac{17}{3}\right) \setminus \{1\}$ thì thỏa mãn đề bài.

Câu 49. (HSG10 THPT DAN PHƯƠNG 2018-2019) . Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số): $x^2 - 2(m-1)x - m^3 + (m+1)^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2 (3x_1 + 3x_2 + 8).$$

Lời giải

Tác giả: Trần Như Tú; Fb: Tú Tran

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 + m^3 - (m+1)^2 = m^3 - 4m$.

Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 \leq 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m^2 - 4) \geq 0 \\ 2(m-1) \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-2; 0] \cup [2; +\infty) \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-2; 0] \cup [2; 3].$$

Ta có $P = x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2 (3x_1 + 3x_2 + 8)$

$$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 8x_1 x_2$$

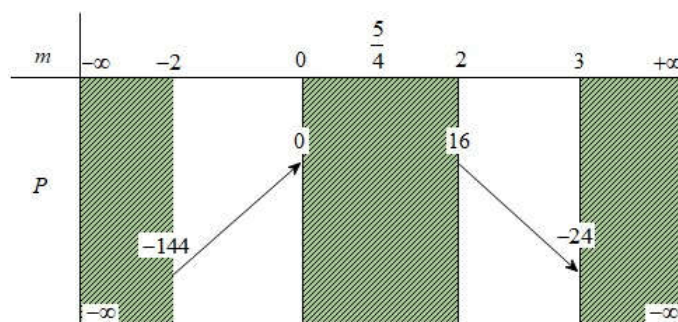
$$= (x_1 + x_2)^3 + 8x_1 x_2$$

$$= [2(m-1)]^3 + 8[-m^3 + (m+1)^2]$$

$$= 8(m^3 - 3m^2 + 3m - 1) - 8m^3 + 8(m^2 + 2m + 1)$$

$$= -16m^2 + 40m$$

Xét $P = -16m^2 + 40m$ với $m \in [-2; 0] \cup [2; 3]$.



Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 16 khi $m = 2$, đạt giá trị nhỏ nhất bằng -144 khi $m = -2$.

Câu 50. (HSG11 tỉnh Phú Yên năm 2018-2019) Cho bốn số thực p, q, m, n thỏa mãn hệ thức $(q-n)^2 + (p-m)(pn-qm) < 0$ (1). Chứng minh rằng 2 phương trình $x^2 + px + q = 0$ (2) và $x^2 + mx + n = 0$ (3) đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.

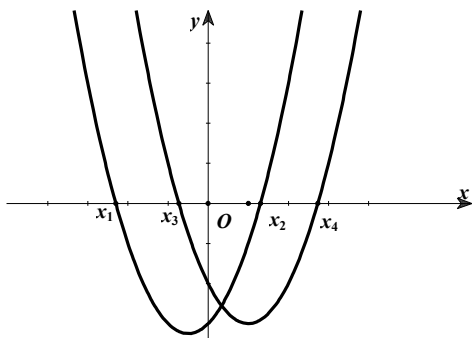
Lời giải

Cách 1:

Từ điều kiện $(q-n)^2 + (p-m)(pn-qm) < 0$ suy ra $p-m \neq 0$ (4).

Các phương trình (2) và (3) đều có hệ số $a = 1 > 0$ nên các parabol biểu diễn đều có bề lõm quay lên trên.

Hai phương trình có nghiệm phân biệt và nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số khi và chỉ khi đồ thị các hàm số $y = x^2 + px + q$ (P) và $y = x^2 + mx + n$ (P') cắt nhau tại 1 điểm nằm dưới trục hoành (5).



(Minh họa hình vẽ)

Hoành độ giao điểm của (P) và (P') là nghiệm của phương trình

$$x^2 + px + q = x^2 + mx + n \Leftrightarrow x = \frac{n - q}{p - m}.$$

Tung độ giao điểm của (P) và (P') là

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{n - q}{p - m} \right)^2 + p \left(\frac{n - q}{p - m} \right) + q \\ &= \frac{1}{(p - m)^2} \left[(n - q)^2 + p(n - q)(p - m) + q(p - m)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(p - m)^2} \left[(n - q)^2 + (p - m)(pn - qm) \right] < 0 \text{ (theo (4)).} \end{aligned}$$

Vậy (5) được chứng minh, nên khẳng định của đề bài đã chứng minh xong.

Cách 2:

$$\text{Ta có } (q - n)^2 + (p - m)(pn - qm) < 0 \Leftrightarrow (q - n)^2 - (q - n)p(p - m) + (p - m)(pq - qm) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(q - n) = (q - n)^2 - (q - n)p(p - m) + q(p - m)^2 < 0. \text{ Vì tồn tại } p, q, m, n \text{ nên}$$

$$\Delta = p^2(p - m)^2 - 4q(p - m)^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq m \\ p^2 - 4q > 0 \end{cases}. \text{ Do đó phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt}$$

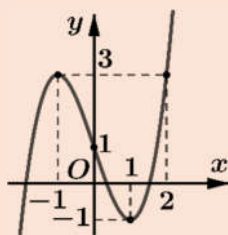
$$x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^2 + mx + n. \text{ Ta có } g(x_1) \cdot g(x_2) = (x_1^2 + mx_1 + n)(x_2^2 + mx_2 + n)$$

$$\begin{aligned}
&= (-px_1 - q + mx_1 + n)(-px_2 - q + mx_2 + n) \\
&= [x_1(m-p) + n-q][x_2(m-p) + n-q] \\
&= x_1x_2(m-p)^2 + (m-p)(n-q)(x_1+x_2) + (n-q)^2 \\
&= q(m-p)^2 + (m-p)(n-q)(-p) + (n-q)^2 \\
&= (q-n)^2 + (p-m)(pn-qm) < 0.
\end{aligned}$$

Suy ra phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 ($x_3 < x_4$) thỏa mãn trong hai số x_1, x_2 có một số thuộc khoảng (x_3, x_4) và một số không thuộc khoảng (x_3, x_4) . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 51. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Với m là tham số thực bất kì thuộc đoạn $[0; 2]$, phương trình $f(x^3 - 2x^2 + 2019x) = m^2 - 2m + \frac{3}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 2

B. 1

C. 4

D. 3.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Vương Duy Tuấn; Fb: Nguyễn Vương Duy Tuấn

Chọn D

Đặt $t = x^3 - 2x^2 + 2019x \Rightarrow t' = 3x^2 - 4x + 2019 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Như vậy với mỗi giá trị x cho ta tương ứng một giá trị t .

$$\text{Ta có: } f(x^3 - 2x^2 + 2019x) = m^2 - 2m + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(t) = m^2 - 2m + \frac{3}{2}$$

Vì m là tham số thực bất kì thuộc đoạn $[0; 2]$ nên ta có:

$$g(m) = m^2 - 2m + \frac{3}{2} \Rightarrow g'(m) = 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ và } \begin{cases} g(1) = \frac{1}{2} \\ g(0) = \frac{3}{2} \\ g(2) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

m	0	1	2
$g'(m)$	-	0	+
$g(m)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow f(t) = g(m) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right]$$

Dựa vào đồ thị ta thấy được phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.

Câu 52. (HSG10 Cụm Hà Đông Hà Đức Hà Nội năm 2018-2019) Cho phương trình $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 52$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Tài; Fb: Nguyễn Tài Tài

Cách 1:

$$x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m + 3 = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$.

$$\text{Phương trình trở thành } t^2 - 2(m+2)t + 2m + 3 = 0 \quad (2).$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(2)} > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (*).$$

$$\text{Áp dụng định lý Vi-et, ta có } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+2) \\ t_1 t_2 = 2m + 3 \end{cases}.$$

$$\text{Đến đây, do } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 52 \text{ nên } 2t_1^2 + 2t_2^2 = 52 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 26 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 - 26 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 12m - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện (*) ta được $m = 1$.

Cách 2:

$$x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2m - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x^2 = 2m + 3 \end{cases} \quad (2).$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt và khác nghiệm $x = 1; x = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 > 0 \\ 1 \neq 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \neq -1 \end{cases} \quad (*).$$

$$\text{Ta có: } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 52 \Leftrightarrow (1)^4 + (-1)^4 + (\sqrt{2m+3})^4 + (-\sqrt{2m+3})^4 = 52$$

$$\Leftrightarrow (2m+3)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}. \text{Đối chiếu điều kiện (*) ta được } m = 1.$$

Chuyên đề

4

Bất phương trình

Câu 1. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = -\frac{mx^3}{3} + \frac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để $f'(x) < 0$ với mọi x .

A. $\left(0; \frac{12}{5}\right)$.

B. $\left[0; \frac{12}{5}\right]$.

C. $\left[0; \frac{12}{5}\right)$.

D. $\left[0; \frac{12}{5}\right)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoàng Huy; Fb: Nguyen Hoang Huy

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = -\frac{mx^3}{3} + \frac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2.$$

Hàm số có tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -mx^2 + mx - 3 + m.$$

$$\text{TH1: } m = 0 \Rightarrow f'(x) = -3 < 0 \text{ (thỏa).}$$

$$\text{TH2: } m \neq 0$$

$$f'(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow -mx^2 + mx - 3 + m < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -m < 0 \\ \Delta = m^2 + 4m(m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 5m^2 - 12m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 5m - 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < \frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{12}{5}.$$

$$\text{Vậy } m \in \left[0; \frac{12}{5}\right).$$

Câu 2. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Tập hợp các giá trị thực của tham số thực m để $\frac{x^2 - mx - 1}{x^2 - 2x + 3} \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$ là đoạn $[a; b]$. Tính $S = a.b$

A. $S = -12$.

B. $S = 2$.

C. $S = 8$.

D. $S = 12$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Anh; Fb: Anh Nguyễn

Chọn A

$$\text{Ta có: } \frac{x^2 - mx - 1}{x^2 - 2x + 3} \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - 1 \leq 2(x^2 - 2x + 3) \Leftrightarrow x^2 - (4-m)x + 7 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (4-m)^2 - 28 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 12 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{7} \leq m \leq 4 + 2\sqrt{7}$$

$$\text{Do đó: } 4 - 2\sqrt{7} \leq m \leq 4 + 2\sqrt{7} \text{ hay } a = 4 - 2\sqrt{7}; b = 4 + 2\sqrt{7}. \text{ Vậy } S = a.b = -12.$$

Câu 3. (HSG10 Cụm Hà Đông Hà Đức Hà Nội năm 2018-2019) Tìm tất cả giá trị của tham số m để

$$\frac{x^2 - 4x - 4}{x^2 - 2(m-1)x + 16} \leq 2 \text{ với mọi giá trị } x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Minh Thu; Fb: nguyen minh thu

Để $\frac{x^2 - 4x - 4}{x^2 - 2(m-1)x + 16} \leq 2$ với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$ trước hết cần điều kiện:

$$x^2 - 2(m-1)x + 16 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 5 \quad (1)$$

Khi đó $x^2 - 2(m-1)x + 16 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 \leq 2x^2 - 4(m-1)x + 32$ với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4(m-2)x + 36 \geq 0 \text{ với mọi giá trị } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 4(m-2)^2 - 36 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 5 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $-1 \leq m < 5$ là tất cả giá trị cần tìm.

Câu 4. (HSG10 CẦU GIẤY – THƯỜNG TÍN - HÀ NỘI 2018-2019) Tìm m để bất phương trình

$$-2 < \frac{x^2 - 4x + m}{x^2 - 2x + 3} \leq 3 \text{ nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R} ?$$

Lời giải

Tác giả: Vũ Quốc Triệu ; Fb: Vũ Quốc Triệu

+/ Ta có $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên :

$$-2 < \frac{x^2 - 4x + m}{x^2 - 2x + 3} \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 4x - 6 < x^2 - 4x + m \\ x^2 - 4x + m \leq 3x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + m + 6 > 0 & (1) \\ 2x^2 - 2x + 9 - m \geq 0 & (2) \end{cases}$$

+/ Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để mỗi bất phương trình (1) và (2) nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Ta thấy : (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'_1 = 4^2 - 3(m+6) < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$.

(2) nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'_2 = 1^2 - 2(9-m) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{17}{2}$.

$$\text{Vậy } m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{17}{2} \right].$$

Câu 5. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2m + 1 - 2x^2 + 4x$, m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của $m \in [-5; 50]$ để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định của nó.

Lời giải

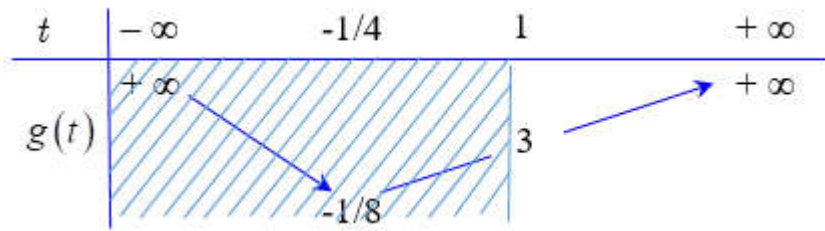
Tác giả: Trần Thị Kim Thu ; Fb: Thu Tran

Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2m + 1 - 2x^2 + 4x$ (1) xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta được (1)} \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 2) + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2m + 5$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1} \geq 1$. Ta được $g(t) = 2t^2 + t \geq 2m + 5$ (2).

Bảng biến thiên của $g(t)$:



Do đó, (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 2m + 5 \leq \min_{[1; +\infty)} g(t)$$

$$\Leftrightarrow 2m + 5 \leq g(1) = 3 \text{ (Vì } g(t) \text{ đồng biến trên } [1; +\infty)).$$

$$\Leftrightarrow m \leq -1$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên và $m \in [-5; 50]$ nên có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-5; -4; -3; -2; -1$.

Vậy, tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là -15 .

Câu 6. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Biết $m \in [a; b]$ thì bất phương trình $x^2 - 2mx + 2m + 3 \geq 0$ có tập nghiệm chứa $[-1; 4]$. Tính $S = a + 6b$.

A. $S = 17$.

B. $S = 3$.

C. $S = \frac{13}{6}$.

D. $S = 20$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Phương; Fb: Phương Phạm

Chọn A

Xét $f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3$ có $\Delta' = m^2 - 2m - 3$

+) TH1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$: Bất phương trình $f(x) \geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán)

+) TH2: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$: Khi đó $f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), bất phương trình $f(x) \geq 0$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

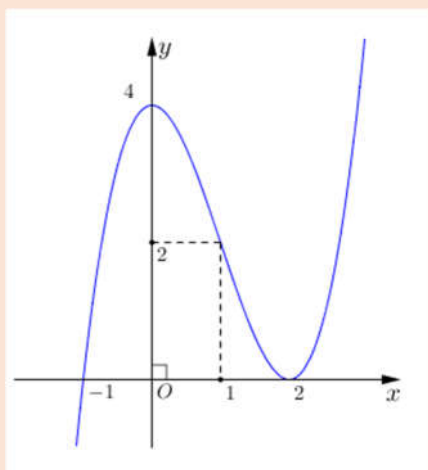
Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi: $[-1; 4] \subset S \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x_1 \\ x_2 \leq -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(4) \geq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -6m + 9 \geq 0 \\ m > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 4m + 4 \geq 0 \\ m < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy bất phương trình $x^2 - 2mx + 2m + 3 \geq 0$ có tập nghiệm chứa $[-1; 4]$ khi $-1 \leq m \leq 3$

Suy ra $S = 17$

Câu 7. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Bất phương trình $f(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x + m$ có nghiệm thuộc nửa đoạn $[-1; +\infty)$ khi và chỉ khi:

A. $m \geq f(-1) - \frac{1}{2}$.

B. $m \leq f(-1) - 2$.

C. $m \geq f(-1) - 2$.

D. $m \geq f(-1) + 2$.

Lời giải

Tác giả: Phan Tự Mạnh ; Fb: Phan Tự Mạnh

Chọn C

Ta có $f(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x + m \Leftrightarrow m \geq f(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ trên $[-1; +\infty)$

Có $g'(x) = f'(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{2} > 0 \quad \forall x \in [-1; +\infty)$ (Dựa vào đồ thị)

Bảng biến thiên

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$g(-1)$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq g(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - 2$

Câu 8. (HSG10 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Giải bất phương trình

$$3x(2x - \sqrt{x^2 + 3}) \geq 2(1 - x^4).$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hương; Fb: Nguyen Huong

$$\begin{aligned}
& 3x(2x - \sqrt{x^2 + 3}) \geq 2(1 - x^4) \\
& \Leftrightarrow 6x^2 - 3x\sqrt{x^2 + 3} \geq 2 - 2x^4 \\
& \Leftrightarrow 2x^2(x^2 + 3) - 3x\sqrt{x^2 + 3} - 2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (x\sqrt{x^2 + 3} - 2)(2x\sqrt{x^2 + 3} + 1) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x^2 + 3} \geq 2 & (1) \\ x\sqrt{x^2 + 3} \leq -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Giải (1):

$$\begin{aligned}
(1) & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2(x^2 + 3) \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 + 3x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x^2 - 1)(x^2 + 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1
\end{aligned}$$

Giải (2):

$$\begin{aligned}
(2) & \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2(x^2 + 3) \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 3x^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \left(x^2 - \frac{-3 + \sqrt{10}}{2}\right)\left(x^2 + \frac{3 + \sqrt{10}}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}}
\end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\infty; -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}}\right] \cup [1; +\infty)$

Câu 9. (HSG10 CẦU GIẤY - THƯỜNG TÍN - HÀ NỘI 2018-2019) Giải bất phương trình sau:

$$(x^2 + 4x)\sqrt{2x^2 + 5x - 3} \geq 0.$$

Lời giải

Tác giả: Thu Hương; Fb: HươngMùa Thu

$$(x^2 + 4x)\sqrt{2x^2 + 5x - 3} \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{ĐKXĐ: } 2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq 0 \\ x = -3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

So sánh điều kiện, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -4] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cup \{-3\}$.

Câu 10. (HSG11 Hạng Nhất tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải bất phương trình

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4.$$

Lời giải

Tác giả: Hồ Xuân Dũng ; Fb: Dũng Hồ Xuân

Giải bất phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4$ (*)

Điều kiện: $x \geq 1$. Suy ra: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4 \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}} \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 + 2x - 3 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq x + 3 + x - 1 + 2\sqrt{(x+3)(x-1)}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 2.$$

Kết luận: Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty)$.

Câu 11. (HSG11 Hạng Nhất tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải bất phương trình

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4.$$

Lời giải

Xét bất phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4$ (1).

Điều kiện $x \geq 1$ (2). Nhận thấy $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} > 0, \forall x \geq 1$. Do đó, với mọi x thỏa mãn (2) ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4 \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 + 2x - 3 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq x + 3 + x - 1 + 2\sqrt{(x+3)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (2) suy ra tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = [2; +\infty)$.

Câu 12. (HSG11 THPT Hạng Nhất tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải bất phương trình

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4.$$

Lời giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2+2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (*)$$

Để ý thấy rằng $(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x-1})^2 = 4$ với mọi $x \geq 1$ nên bất phương trình viết lại là:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2+2x-3}) \geq (\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x-1})^2 \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x^2+2x-3}) \geq (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}) \quad (1) \end{aligned}$$

Vì $x+3 > x-1 \geq 0$ với mọi $x \geq 1$ nên $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > 0$ với mọi $x \geq 1$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+3}) + (\sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x-1}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+3}) - \sqrt{x-1} \cdot (1 - \sqrt{x+3}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+3})(1 - \sqrt{x-1}) \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Lại có } x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+3} \geq 2 \Rightarrow 1 - \sqrt{x+3} \leq -1 < 0.$$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Kết hợp (*) ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty)$.

Câu 13. (HSG10 PHÙNG KHẮC KHOAN- HÀ NỘI 2018-2019) Giải bất phương trình

$$(2x-5-\sqrt{x^2-x+25})\sqrt{x^2-5x+6} \leq 0.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Dương Long ; Fb: Long Nguyễn

$$\text{Điều kiện } x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Trường hợp 1: Nếu $x=3$ hoặc $x=2$ thì bất phương trình nghiệm đúng (*)

$$\text{Trường hợp 2: Nếu } \begin{cases} x > 3 \\ x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Bất phương trình đã cho } \Leftrightarrow 2x-5-\sqrt{x^2-x+25} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+25} \geq 2x-5 \quad (1)$$

$$\text{Bất phương trình (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ 2x-5 \geq 0 \\ x^2-x+25 \geq (2x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x \geq \frac{5}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{19}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{19}{3}.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } \begin{cases} x > 3 \\ x < 2 \end{cases} \text{ của trường hợp 2 có } \begin{cases} 3 < x \leq \frac{19}{3} \\ x < 2 \end{cases} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 2] \cup \left[3; \frac{19}{3}\right]$

Câu 14. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Giải bất phương trình:

$$(x+1)(x+4) \leq 5\sqrt{x^2+5x+28} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Tác giả: Mai Vĩnh Phú; Fb: Mai Vĩnh Phú

Vì $x^2 + 5x + 28 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của bất phương trình đã cho là $\mathbb{R}$.

Ta có

$$(x+1)(x+4) \leq 5\sqrt{x^2+5x+28} \Leftrightarrow x^2+5x+4 \leq 5\sqrt{x^2+5x+28}$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x+28-24 \leq 5\sqrt{x^2+5x+28} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x^2+5x+28}, a > 0 \Rightarrow a^2 = x^2+5x+28.$$

Bất phương trình (*) trở thành $a^2 - 24 \leq 5a \Leftrightarrow a^2 - 5a - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 8$ kết hợp với $a > 0$

$$\text{suy ra } 0 < a \leq 8 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2+5x+28} \leq 8 \Leftrightarrow x^2+5x+28 \leq 64 \Leftrightarrow x^2+5x-36 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 4.$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = [-9; 4]$.

Câu 15. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Bất phương trình

$$\frac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}} - \sqrt{2-3^{2x}}} + \frac{3^{4x} + \sqrt{4-3^{4x}} - 7}{3^{2x}} \geq \frac{3^{2x} - 2}{\sqrt{4-3^{4x}} - 2 + 3^{2x}}$$

có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 2.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Uyên; Fb: Uyen Nguyen

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2-3^{2x} \geq 0 \\ 4-3^{4x} \geq 0 \\ \sqrt{4-3^{4x}} - 2 + 3^{2x} \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{2+3^{2x}} \\ b = \sqrt{2-3^{2x}} \end{cases}, a > \sqrt{2}, 0 \leq b < \sqrt{2}. \text{ Khi đó } \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \cdot 3^{2x} > 0 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ ab = \sqrt{4-3^{4x}} \end{cases}.$$

$$\text{Bất phương trình trở thành: } \frac{a}{a-b} + \frac{4-a^2b^2+ab-7}{\frac{a^2-b^2}{2}} \geq \frac{-b^2}{ab-b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a-b} + \frac{2(-a^2b^2+ab-3)}{a^2-b^2} \geq \frac{-b}{a-b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} + \frac{2(-a^2b^2+ab-3)}{a^2-b^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + 2(-a^2b^2+ab-3) \geq 0 \Leftrightarrow -2a^2b^2+4ab-6+a^2+b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2a^2b^2 + 4ab - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2(ab-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab = 1.$$

$$\text{Với } ab = 1 \Rightarrow \sqrt{4-3^{4x}} = 1 \Leftrightarrow 3^{4x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (tmdk).}$$

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

Câu 16. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Bất phương trình $\sqrt{x^2-4} \geq x+3$ có nghiệm

- A. $x < -3$. B. $x \leq -\frac{13}{6}$. C. $-3 < x \leq 2$. D. $-3 \leq x \leq -\frac{13}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Dương Hoàng Quốc; Fb: Dương Hoàng Quốc

Chọn B

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x+3 < 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -3 \leq x \leq -\frac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{13}{6}.$$

Câu 17. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Giải bất phương trình

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geq x.$$

Lời giải

Tác giả: Mai Vĩnh Phú; Fb: Mai Vĩnh Phú

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Khi đó

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geq x \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \geq x \Leftrightarrow x \left(\frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} - 1 \right) \geq 0. \quad (1)$$

Ta thấy $x = 0$ là nghiệm.

$$\text{Với } x \neq 0, \text{ ta có } (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} < 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} - 1 > 0. \text{ Do đó (1)} \Leftrightarrow x > 0.$$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $0 \leq x \leq 1$.

Câu 18. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Giải bất phương trình

$$\sqrt{x+1} \leq 2(x+1-\sqrt{2x+3})$$

Tác giả: Mai Vĩnh Phú; Fb: Mai Vĩnh Phú

Lời giải

$$\sqrt{x+1} \leq 2(x+1-\sqrt{2x+3}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} \leq 2x+2 \quad (1)$$

Điều kiện $x \geq -1$, đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 - 1 = x, t \geq 0$

$$\text{Thay (1)} \Leftrightarrow 2\sqrt{2t^2+1} \leq 2t^2-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-t \geq 0 \\ 4t^4-4t^3-7t^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t \geq \frac{1}{2} \\ (t-2)(4t^3+4t^2+t+2) \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Th1: $t \leq 0 \Rightarrow t = 0$ suy ra (2) vô nghiệm.

Th2: $t \geq \frac{1}{2}$ khi đó (2) $\Leftrightarrow (t-2)(4t^3+4t^2+t+2) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 3$

Vậy tập nghiệm $S = [3; +\infty)$.

Câu 19. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5) \text{ là}$$

- A. $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(6; +\infty)$. D. $(-1; 6)$.

Lời giải

Tác giả: Minh Anh; Fb: Nguyễn Thị Minh Anh.

Chọn C

Điều kiện: $x > \frac{5}{2}$.

Bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5) \Rightarrow x+1 < 2x-5 \Leftrightarrow x > 6$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x \in (6; +\infty)$.

Câu 20. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \frac{25}{4}.$$

- A. $S = (-\infty; 1]$. B. $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. C. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. D. $S = [1; +\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Trúc Ly; Fb: Nguyễn T. Trúc Ly

Chọn D

Ta có: $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3x-1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [1; +\infty)$.

Chuyên đề

5

Hệ phương trình

Câu 1. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xy + yz + zx = -3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = m \end{cases}$$
 với x, y, z là ẩn số thực, m là tham số. Số giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm là

A. 24. B. 13. C. 12. D. 25.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Bá Long; Fb: Nguyễn Bá Long

Chọn B

Sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Ta có, $x^6 + y^6 + z^6 - 3(xyz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2)$

$$\Leftrightarrow x^6 + y^6 + z^6 - 3(xyz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \left[(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \right]$$

$$\Leftrightarrow m - 3(xyz)^2 = 6 \left[36 - 3(xy + yz + zx)^2 + 6xyz(x + y + z) \right]$$

$$\Leftrightarrow m - 3(xyz)^2 = 6 \left[9 + 6xyz(x + y + z) \right] \quad (1)$$

Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xy + yz + zx = -3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ 2xy + 2yz + 2zx = -6 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \\ x^6 + y^6 + z^6 = m \end{cases}$$

Do đó từ (1) ta được $(xyz)^2 = \frac{m-54}{3}$

Như vậy
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xy + yz + zx = -3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = -3 \\ (xyz)^2 = \frac{m-54}{3} \end{cases} \quad (2)$$

* Trường hợp 1: $m = 54$ khi đó $xyz = 0$ ta được $x = 0$ hoặc $y = 0$ hoặc $z = 0$

Với $x = 0$ ta được
$$\begin{cases} y + z = 0 \\ yz = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \\ z = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm là $(0; -\sqrt{3}; \sqrt{3}), (0; \sqrt{3}; -\sqrt{3})$

Các khả năng $y = 0$ hoặc $z = 0$ cũng tương tự như khả năng $x = 0$

Tức là $m = 54$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

*** Trường hợp 2:** Xét nghiệm của hệ có dạng $(x; x; z)$ với $x \neq z$. Khi đó hệ (2) trở thành

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x^2 + 2xz = -3 \\ x^4 z^2 = \frac{m-54}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ x^2 = 1 \\ x^4 z^2 = \frac{m-54}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ x^2 = 1 \\ 4x^6 = \frac{m-54}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{m-54}{3} = 4 \Leftrightarrow m = 66$$

Các khả năng nghiệm của hệ có dạng $(z; x; x)$ và $(x; z; x)$ với $x \neq z$ cũng tương tự như khả năng $(x; x; z)$.

Tức là $m = 66$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Để nhận thấy hệ (2) không thể có nghiệm dạng $(x; x; x)$

*** Trường hợp 3:** Nghiệm của hệ có dạng $(x; y; z)$ với $x \neq y \neq z$

$$\text{Khi đó với } m > 54 \text{ hệ (2) trở thành } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = -3 \\ xyz = \pm \sqrt{\frac{m-54}{3}} = k \end{cases} \text{ với } k = \pm \sqrt{\frac{m-54}{3}}$$

Áp dụng định lý đảo của định lý Vi-et với phương trình bậc 3 ta được $x; y; z$ là 3 nghiệm của phương trình $t^3 - 3t - k = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t = k$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$, ta phải có $f_{CT}(t) < k < f_{CD}(t) \Leftrightarrow -2 < k < 2$

Do đó $-2 < \pm \sqrt{\frac{m-54}{3}} < 2 \Leftrightarrow 54 < m < 66$, vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{55; 56; \dots; 65\}$, có 11 số

Kết hợp các trường hợp trên ta được 13 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cụ thể $m \in \{54; 55; \dots; 66\}$.

Câu 2. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có

$$\text{nghiệm } \begin{cases} \log_{2018} x + \log_{2019} y = 1 \\ \sqrt{\log_{2019} x} + \sqrt{\log_{2018} y} = m \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} \log_{2018} x + \log_{2019} y = 1 & (1) \\ \sqrt{\log_{2019} x} + \sqrt{\log_{2018} y} = m & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x; y \geq 1$.

Đặt $t = \log_{2019} y$; $0 \leq t \leq 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{2018} x = 1-t \\ y = 2019^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2018^{1-t} \\ y = 2019^t \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \sqrt{(1-t)\log_{2019} 2018} + \sqrt{t\log_{2018} 2019} = m$$

$$\text{Xét } f(x) = \sqrt{(1-t)\log_{2019} 2018} + \sqrt{t\log_{2018} 2019}; 0 \leq t \leq 1.$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{\log_{2019} 2018}}{2\sqrt{(1-t)}} + \frac{\sqrt{\log_{2018} 2019}}{2\sqrt{t}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\log_{2019} 2018}}{\sqrt{(1-t)}} = \frac{\sqrt{\log_{2018} 2019}}{\sqrt{t}}$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \log_{2018} 2019 = (1-t) \log_{2019} 2018.$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log_{2019} 2018}{\log_{2018} 2019 + \log_{2019} 2018} = t_0$$

$$\text{Ta có } f(0) = \sqrt{\log_{2019} 2018}.$$

$$f(1) = \sqrt{\log_{2018} 2019}.$$

$$f(t_0) = \sqrt{\log_{2019} 2018 + \log_{2018} 2019}.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \sqrt{\log_{2019} 2018} \leq m \leq \sqrt{\log_{2019} 2018 + \log_{2018} 2019}.$$

Câu 3. (HSG12 tỉnh Hải Phòng năm 2018-2019) b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 - (y-2)x^2 - xy = m \\ x^2 + 3x - y = 1 - 2m \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} 2x^3 - (y-2)x^2 - xy = m \\ x^2 + 3x - y = 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x)(2x - y) = m \\ (x^2 + x) + (2x - y) = 1 - 2m \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } a = x^2 + x, b = 2x - y \text{ với điều kiện } a = x^2 + x \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Hệ phương trình đã cho có dạng } \begin{cases} a \cdot b = m \\ a + b = 1 - 2m \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } a, b \text{ là hai nghiệm của phương trình } t^2 - (1 - 2m)t + m = 0 \quad (*).$$

$$\text{Hệ ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình } (*) \text{ có nghiệm } t \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 + t}{2t + 1} = g(t), t \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

$$g'(t) = \frac{-2t^2 - 2t + 1}{(2t+1)^2}.$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & (\text{loại}) \\ t = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
		$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	
$g(x)$	$\frac{5}{8}$		$-\infty$

Từ bảng biến thiên trên suy ra $m \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. (HSG11 Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - 2y \\ 3x + 2y - 6 - 6m = 0 \end{cases} \quad (I).$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -6 \end{cases}.$

Ta có HPT (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2}+1\right) + \left(\frac{y}{3}+2\right) - 2\sqrt{\frac{x}{2}+1} - 2\sqrt{\frac{y}{3}+2} = 3 \\ \left(\frac{x}{2}+1\right) + \left(\frac{y}{3}+2\right) = m+4 \end{cases}.$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{x}{2}+1} \\ b = \sqrt{\frac{y}{3}+2} \end{cases}$, điều kiện $a, b \geq 0$. Ta có hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 2b = 3 \\ a^2 + b^2 = m+4 \end{cases} \quad (II)$

Hệ phương trình (I) đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (II) có nghiệm $(a; b)$ với $a, b \geq 0$.

- Nếu $m \leq -4$ hệ (II) vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

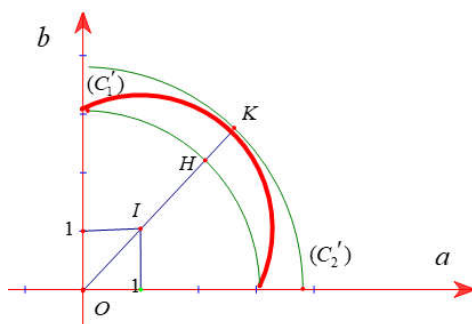
- Nếu $m > 4$. Chọn hệ tọa độ Oab từ hệ (II) ta có:

PT (1) cho ta cung tròn (C_1') là một phần của đường tròn (C_1) tâm $I(1;1)$, $R_1 = \sqrt{5}$ thuộc góc phần

tư thứ nhất vì $a, b \geq 0$.

PT (2) cho ta cung tròn (C_2') là $\frac{1}{4}$ đường tròn (C_2) tâm $O(0;0)$, $R_2 = \sqrt{m+4}$ thuộc góc phần tư

thứ nhất vì $a, b \geq 0$.



Để hệ phương trình (I) có nghiệm $\Leftrightarrow (C_1'), (C_2')$ giao nhau khác rỗng dựa vào hình vẽ trên ta có

$$OH \leq R_2 \leq OK \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{m+4} \leq \sqrt{2} + \sqrt{5} \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}$.

Câu 5. (HSG10 Cụm Hà Đông Hà Đức Hà Nội năm 2018-2019) Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$.

Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_0^2 + 2y_0 + 5$.

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Tấn Phát; Fb: Huỳnh Tấn Phát

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$, $D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2$ và $D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ (*).

Khi đó nghiệm của hệ là: $x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2 + m - 2}{m^2 - 1} = \frac{m+2}{m+1}$ và $y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{m-1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m+1}$.

Ta có: $A = x_0^2 + 2y_0 + 5 = \left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2 + \frac{2}{m+1} + 5 = \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^2 + \frac{2}{m+1} + 6$

$$= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{4}{m+1} + 6 = \left(\frac{1}{m+1} + 2\right)^2 + 2 \geq 2, \forall m \neq \pm 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{m+1} + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy $\min A = 2$ khi $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 6. (HSG11 Hậu Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - 2y \\ 3x + 2y - 6 - 6m = 0 \end{cases} \quad (I).$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -6 \end{cases}$.

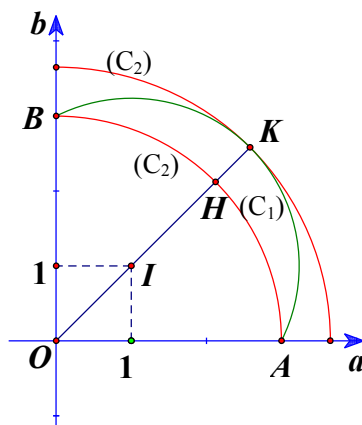
Ta có hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2}+1\right)+\left(\frac{y}{3}+2\right)-2\sqrt{\frac{x}{2}+1}-2\sqrt{\frac{y}{3}+2}=3 \\ \left(\frac{x}{2}+1\right)+\left(\frac{y}{3}+2\right)=m+4 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{x}{2}+1} \\ b = \sqrt{\frac{y}{3}+2} \end{cases}$ (đk $a, b \geq 0$). Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 2b = 3 & (1) \\ a^2 + b^2 = m + 4 & (2) \end{cases} (*)$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (*) có nghiệm $a, b \geq 0$

▣ Nếu $m \leq -4$ hệ (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

▣ Nếu $m > -4$. Chọn hệ tọa độ Oab như hình vẽ



Do điều kiện $a \geq 0, b \geq 0$ nên chỉ xét ở góc phần tư thứ nhất

Phương trình (1) cho ta $\frac{1}{4}$ đường tròn (C_1) tâm $I(1;1), R_1 = \sqrt{5}$, cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(3;0)$, $B(0;3)$.

Phương trình (2) cho ta $\frac{1}{4}$ đường tròn (C_2) tâm $O(0;0), R_2 = \sqrt{m+4}$ thay đổi theo m .

Hệ (*) có nghiệm $a, b \geq 0 \Leftrightarrow (C_1)$ cắt (C_2) có giao điểm ở góc phần tư thứ nhất.

Cho bán kính $R_2 = \sqrt{m+4}$ tăng dần, dễ thấy (C_2) cắt (C_1) đầu tiên tại hai điểm A, B , khi đó $R_2 = OH = 3$ và (C_2) tiếp xúc (C_1) tại điểm cuối cùng K .

Do đó, để (C_1) cắt (C_2) ở góc phần tư thứ nhất $\Leftrightarrow OH \leq R_2 \leq OK$
 $\Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{m+4} \leq \sqrt{2} + \sqrt{5} \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}$.

Câu 7. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - 2y \\ 3x + 2y - 6 - 6m = 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - 2y \\ 3x + 2y - 6 - 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - 2\sqrt{\frac{x}{2}+1} + \frac{y}{3} - 2\sqrt{\frac{y}{3}+2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = m+1 \end{cases}.$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{x}{2}+1} \\ b = \sqrt{\frac{y}{3}+2} \end{cases}$, điều kiện $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}.$

Khi đó hệ trở thành $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 - 2b = 3 \\ a^2 + b^2 = m+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{m+1}{2} \\ ab = \frac{m^2 - 2m - 15}{8} \end{cases} \quad (*)$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ $(*)$ có nghiệm $a, b \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ ab \geq 0 \\ (a+b)^2 \geq 4ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ m^2 - 2m - 15 \geq 0 \\ \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 \geq \frac{m^2 - 2m - 15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}.$$

Vậy $5 \leq m \leq 3 + 2\sqrt{10}.$

Câu 8. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 4 = 2xy \\ 2^{x+y} = m(x + y + \sqrt{x^2 + x + y^2 + y + 5}) \end{cases}$$

có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x \geq 1, y \geq 1.$

Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + y + 4 = 2xy \\ 2^{x+y} = m(x + y + \sqrt{x^2 + x + y^2 + y + 5}) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad (\text{với } x, y \geq 1).$

Từ (1) ta có $x + y = 2xy - 4.$

Thế vào (2) ta được:

$$2^{x+y} = m(x + y + \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + 1}) \Leftrightarrow 2^{x+y} = m(x + y + \sqrt{(x+y)^2 + 1}) \quad (*)$$

Đặt $t = x + y \geq 2$ và $x + y + 4 = 2xy \leq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow x + y \geq 4 \Rightarrow t \geq 4$.

Do $x \geq 1, y \geq 1$ nên $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy - x - y + 1 \geq 0 \Rightarrow xy \geq x + y - 1$

Suy ra $\frac{t+4}{2} \geq t-1 \Rightarrow t \leq 6$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow 2' = m(t + \sqrt{t^2 + 1}) \Leftrightarrow m = 2'(\sqrt{t^2 + 1} - t)$.

Hệ đã cho có nghiệm $x \geq 1, y \geq 1$ khi và chỉ khi phương trình $m = 2'(\sqrt{t^2 + 1} - t)$ có nghiệm $t \in [4; 6]$.

Xét hàm số $f(t) = 2'(\sqrt{t^2 + 1} - t)$, $t \in [4; 6]$, ta có $f'(t) = 2'(\sqrt{t^2 + 1} - t) \left(\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right)$.

Do $\sqrt{t^2 + 1} \geq |t| \geq t$ và $\sqrt{t^2 + 1} \geq \sqrt{17}, \forall t \in [4; 6] \Rightarrow \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{17}} > 0$ nên $f'(t) > 0$ với mọi $t \in [4; 6]$.

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[4; 6]$. Do đó để phương trình $(*)$ có nghiệm thì $f(4) \leq m \leq f(6) \Leftrightarrow 16(\sqrt{17} - 4) \leq m \leq 64(\sqrt{37} - 6)$.

Vậy $16(\sqrt{17} - 4) \leq m \leq 64(\sqrt{37} - 6)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{y^2}{x} \\ \ln(2x-3) + \sqrt{8x^2 - 20x + 12} = \ln y + 2y \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện hệ phương trình $\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 8x^2 - 20x + 12 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ y > 0 \end{cases}.$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{y^2}{x} & (1) \\ \ln(2x-3) + \sqrt{8x^2 - 20x + 12} = \ln y + 2y & (2) \end{cases}.$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = y^2 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}.$

Vì $x > \frac{3}{2}, y > 0$ nên $x+y-1 > \frac{1}{2}$. Do đó trường hợp $x+y-1=0$ không thỏa mãn.

Với $x-y-1=0 \Leftrightarrow y = x-1$ thì phương trình (2) trở thành

$$\ln(2x-3) + \sqrt{8x^2 - 20x + 12} = \ln(x-1) + 2(x-1).$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(2x-3) + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \frac{1}{2} \ln(x-1) + (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(2x-3) + \frac{1}{2} \ln(x-1) + \sqrt{(2x-3)(x-1)} = \ln(x-1) + (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \ln \sqrt{(2x-3)(x-1)} + \sqrt{(2x-3)(x-1)} = \ln(x-1) + (x-1) \quad (3).$$

• Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ với $t > \frac{1}{2}$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > \frac{1}{2}$ nên hàm số $f(t) = \ln t + t$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$\text{Nên } (3) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{(x-1)(2x-3)}\right) = f(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-3)(x-1)} = x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

• Với $x = 2$ thì $y = x - 1 = 1$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2; y = 1$.

Câu 10. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}-y)=1 \\ 3\sqrt{x+2y-2}+x\sqrt{x-2y+6}=10 \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả; Fb:

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}-y)=1 & (1) \\ 3\sqrt{x+2y-2}+x\sqrt{x-2y+6}=10 & (2) \end{cases} \text{ . Điều kiện } \begin{cases} x+2y-2 \geq 0 \\ x-2y+6 \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \sqrt{y^2+1}-y \neq 0.$$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}-y} = \frac{\sqrt{y^2+1}+y}{(\sqrt{y^2+1}-y)(\sqrt{y^2+1}+y)} = \frac{\sqrt{y^2+1}+y}{y^2+1-y^2} = \sqrt{y^2+1}+y$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1})+(x-y)=0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + (x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left[\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + 1 \right] = 0.$$

Chú ý $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| \geq -x - y \Rightarrow 1 + \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} > 0$, vậy $x = y$.

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow 3\sqrt{3x - 2} + x\sqrt{6 - x} = 10 \Leftrightarrow 3(\sqrt{3x - 2} - 2) + (x - 2)\sqrt{6 - x} + 2(\sqrt{6 - x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3x - 6)}{\sqrt{3x - 2} + 2} + (x - 2)\sqrt{6 - x} + \frac{2(2 - x)}{\sqrt{6 - x} + 2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{9}{\sqrt{3x - 2} + 2} + \sqrt{6 - x} - \frac{2}{\sqrt{6 - x} + 2} \right) = 0 \quad (3).$$

$$\text{Điều kiện: } x \leq 6 \Rightarrow \sqrt{3x - 2} + 2 \leq 6 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{3x - 2} + 2} \geq \frac{3}{2}. \text{ Mặt khác } \frac{2}{\sqrt{6 - x} + 2} \leq \frac{2}{2} = 1.$$

$$\text{Do đó } \frac{9}{\sqrt{3x - 2} + 2} + \sqrt{6 - x} \geq \frac{3}{2} > 1 \geq \frac{2}{\sqrt{6 - x} + 2} \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{3x - 2} + 2} + \sqrt{6 - x} - \frac{2}{\sqrt{6 - x} + 2} > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{3}{2}; 6 \right].$$

Từ đó: $(3) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x = y = 2$: thỏa điều kiện. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 2$.

Nhận xét: Có thể xét hàm $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} + t$ và chứng minh $f'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, từ đó $\Rightarrow x = y$, nhưng cách này vượt quá kiến thức lớp 10.

Câu 11. (HSG11 tChuyênDHĐB Bắc Bộ năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (y+1)^2 + y\sqrt{y^2 + 1} = x + \frac{3}{2} & (1) \\ x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2\sqrt{2x - 4y + 2} & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Chí Thành; Fb: Nguyễn Chí Thành

$$\text{Điều kiện: } 2x - 4y + 2 \geq 0.$$

Từ phương trình (1), ta có:

$$2x - 4y + 2 = y^2 + 1 + 2y\sqrt{y^2 + 1} + y^2 \Leftrightarrow 2x - 4y + 2 = (\sqrt{y^2 + 1} + y)^2.$$

Thay vào phương trình (2) và chú ý rằng $\sqrt{y^2 + 1} + y > 0$.

Lúc này ta được:

$$x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2(\sqrt{y^2 + 1} + y) \Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{(x - 1)^2 + 4} = 2(\sqrt{y^2 + 1} + y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{y^2 + 1} + y. \quad (3)$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x - 1}{2}. \text{ Từ (3) trở thành } u + \sqrt{u^2 + 1} = \sqrt{y^2 + 1} + y$$

$$\Leftrightarrow u - y + \sqrt{u^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow u - y + \frac{(u - y)(u + y)}{\sqrt{u^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - y) \left(1 + \frac{u + y}{\sqrt{u^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \right) = 0. \quad (4)$$

$$\text{Do } 1 + \frac{u + y}{\sqrt{u^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{u^2 + 1} + u) + (\sqrt{y^2 + 1} + y)}{\sqrt{u^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} > 0$$

$$\text{Nên từ (4) cho ta } u = y, \text{ hay } \frac{x-1}{2} = y \Rightarrow x = 2y + 1.$$

$$\text{Thay vào phương trình (1) ta được: } (y+1)^2 + y\sqrt{y^2 + 1} = 2y + \frac{5}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{y^2 + 1} + y)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} + y = 2 \quad (\text{vì } \sqrt{y^2 + 1} + y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} = 2 - y \Rightarrow y^2 + 1 = 4 - 4y + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Kết luận: Hệ có đúng một nghiệm } (x; y) \text{ là } \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{4} \right).$$

Câu 12. (HSG12 tỉnh KonTum năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \\ x^2 + x + 12\sqrt{y+1} = 36 \end{cases}.$$

Lời giải

Tác giả: Vũ Việt Tiến; Fb: Vũ Việt Tiến

$$+ \text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} & (1) \\ x^2 + x + 12\sqrt{y+1} = 36 & (2) \end{cases}.$$

+ Điều kiện: $x \geq 1; y \geq 1$.

+ Ta thấy $x = y = 1$ không là nghiệm của hệ phương trình.

$$+ \text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = \sqrt{y+1} - \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} = \frac{y-x}{\sqrt{y+1} + \sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} = \frac{-1}{\sqrt{y+1} + \sqrt{x+1}} \end{cases} (*)$$

+ Ta thấy (*) vô nghiệm vì vế trái luôn dương, vế phải luôn âm với $\forall x \geq 1, \forall y \geq 1, (x; y) \neq (1; 1)$.

$$+ \text{Với } x = y, \text{ thế vào (2) ta được: } x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x + 1 - 12\sqrt{x+1} + 36 \Leftrightarrow (x+1)^2 = (\sqrt{x+1} - 6)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{x+1} - 6 \\ x+1 = -\sqrt{x+1} + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1) - \sqrt{x+1} + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ (x+1) + \sqrt{x+1} - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{x+1} = -3 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

+ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 3)$.

Câu 13. (HSG12 tỉnh Lào Cai năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0 \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Ngọc Tâm; Fb: Nguyễn Ngọc Tâm

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 4-y \geq 0 \\ 2x+y+5 \geq 0 \\ 3x+2y+11 \geq 0 \end{cases} \quad (*).$$

Đặt $\sqrt{5-x} = a \geq 0$; $\sqrt{4-y} = b \geq 0$, phương trình $(17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0$ trở thành:
 $[17-3(5-a^2)] \cdot a + [3(4-b^2)-14] \cdot b = 0 \Leftrightarrow (3a^2+2) \cdot a = (3b^2+2) \cdot b \Leftrightarrow 3a^3+2a = 3b^3+2b$

Xét hàm số $y = f(t) = 3t^3 + 2t$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 9t^2 + 2 > 0$, $\forall t \in [0; +\infty)$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Vì thế với $a \geq 0$, $b \geq 0$ thì $3a^3 + 2a = 3b^3 + 2b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Suy ra $\sqrt{5-x} = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow 5-x = 4-y \Leftrightarrow y = x-1$.

Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình:
 $2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13 \quad (1).$

$$\text{Điều kiện } x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right].$$

Khi đó phương trình $(1) \Leftrightarrow (2\sqrt{3x+4} - 2) + (3\sqrt{5x+9} - 6) = x^2 + 6x + 5$

$$\Leftrightarrow \frac{4(3x+4)-4}{2\sqrt{3x+4}+2} + \frac{9(5x+9)-36}{3\sqrt{5x+9}+6} = (x+1)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x+1)}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15(x+1)}{\sqrt{5x+9}+2} = (x+1)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} = x+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} = x+5 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) tương đương với $\frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} - x = 5$.

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} - x, x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{-9}{(\sqrt{3x+4}+1)^2 \cdot \sqrt{3x+4}} - \frac{75}{2(\sqrt{5x+9}+2)^2 \cdot \sqrt{5x+9}} - 1 < 0, \forall x \in \left(-\frac{4}{3}; 5\right).$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left[-\frac{4}{3}; 5\right]$

Vì thế phương trình $g(x) = 5$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\left[-\frac{4}{3}; 5\right]$.

Ta lại có $x = 0$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 5$ nên đây là nghiệm duy nhất.

Với $x = -1$ thì $y = -2$.

Với $x = 0$ thì $y = -1$.

So sánh điều kiện (*), hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(-1; -2); (0; -1)$.

Câu 14. (HSG12 tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 2 \ln \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ 3^x \cdot 2x = 3^y + 2y + 1 \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Nguyên ; Fb: Ngọc Giang Nguyên

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 2 \ln \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} & (1) \\ 3^x \cdot 2x = 3^y + 2y + 1 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định: $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^3 - y^3 - 2(x-y) = 2 \ln(y + \sqrt{y^2+1}) - 2 \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x + 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y^3 - 2y + 2 \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t + 2 \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$, ta có:

$$f'(t) = 3t^2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1}} = (t^2 + 1) + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} + 2t^2 - 3 \geq 2t^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được: $3^x(2x - 1) = 2x + 1$ (3).

Nhận xét: $x = \frac{1}{2}$ không là nghiệm của (3).

$$\text{Do đó } (3) \Leftrightarrow 3^x - \frac{2x+1}{2x-1} = 0.$$

Xét hàm số $g(x) = 3^x - \frac{2x+1}{2x-1}$, ta có:

$$g'(x) = 3^x \ln 3 + \frac{4}{(2x-1)^2} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty).$$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

Suy ra phương trình (3) có không quá 2 nghiệm.

Mà $g(1) = g(-1) = 0$ do đó (3) có đúng hai nghiệm là $x = \pm 1$.

Vậy tập nghiệm của hệ là: $\{(1; 1); (-1; -1)\}$.

Câu 15. (HSG chọn HSG quốc gia tỉnh ĐỒNG THÁP 2018-2019) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8(x^4 + y^2 - xy^3) - 9x = 0 & (1) \\ 8(y^4 + x^2 - yx^3) - 9y = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0$

Nếu $xy \neq 0$. Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} 8(x^4 y + y^3 - xy^4) - 9xy = 0 \\ 8(xy^4 + x^3 - yx^4) - 9xy = 0 \end{cases}$$

Trừ theo từng vế hai phương trình của hệ ta được:

$$8[2xy(x^3 - y^3) - (x^3 - y^3)] = 0 \Leftrightarrow (x^3 - y^3)(2xy - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

TH1: $x = y$ thế vào phương trình (1) ta được:

$$8(x^4 + x^2 - x^4) - 9x = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8} \text{ (vì } xy \neq 0 \text{)}$$

TH2: $2xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2y}$ thế vào phương trình (1) ta được

$$8\left(\frac{1}{16y^4} + y^2 - \frac{1}{2y} \cdot y^3\right) - \frac{9}{2y} = 0 \Leftrightarrow 8y^6 - 18y^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 1 \\ y^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn các điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(0;0); \left(\frac{9}{8}; \frac{9}{8}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right); \left(1; \frac{1}{2}\right)$

Câu 16. (HSG10 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}-y)=1 \\ 3\sqrt{x+2y-2}+x\sqrt{x-2y+6}=10 \end{cases}$$

Người làm: Nguyễn Quốc Lân (dnhbctoannql@gmail.com)

Lời giải

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}-y)=1 & (1) \\ 3\sqrt{x+2y-2}+x\sqrt{x-2y+6}=10 & (2) \end{cases} \text{ . Điều kiện } \begin{cases} x+2y-2 \geq 0 \\ x-2y+6 \geq 0 \end{cases} .$$

Nhận xét (1) $\sqrt{y^2+1}-y > 0 \forall y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}-y} = \frac{\sqrt{y^2+1}+y}{(\sqrt{y^2+1}-y)(\sqrt{y^2+1}+y)} = \frac{\sqrt{y^2+1}+y}{y^2+1-y^2} = \sqrt{y^2+1}+y$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1})+(x-y)=0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+1\right]=0.$$

Chú ý $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1} > \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = |x|+|y| \geq -x-y \Rightarrow 1+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} > 0$, vậy $x=y$.

$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow 3\sqrt{3x-2}+x\sqrt{6-x}=10 \Leftrightarrow 3(\sqrt{3x-2}-2)+(x-2)\sqrt{6-x}+2(\sqrt{6-x}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3x-6)}{\sqrt{3x-2}+2} + (x-2)\sqrt{6-x} + \frac{2(2-x)}{\sqrt{6-x}+2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{9}{\sqrt{3x-2}+2} + \sqrt{6-x} - \frac{2}{\sqrt{6-x}+2}\right) = 0 \quad (3).$$

Điều kiện: $x \leq 6 \Rightarrow \sqrt{3x-2}+2 \leq 6 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{3x-2}+2} \geq \frac{3}{2}$. Mặt khác $\frac{2}{\sqrt{6-x}+2} \leq \frac{2}{2} = 1$.

Do đó $\frac{9}{\sqrt{3x-2}+2} + \sqrt{6-x} \geq \frac{3}{2} > 1 \geq \frac{2}{\sqrt{6-x}+2} \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{3x-2}+2} + \sqrt{6-x} - \frac{2}{\sqrt{6-x}+2} > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{3}{2}; 6\right]$.

Từ đó: $(3) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x = y = 2$: thỏa điều kiện. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 2$.

Nhận xét: Có thể xét hàm $f(t) = \sqrt{t^2+1} + t$ và chứng minh $f'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, từ đó $\Rightarrow x = y$, nhưng cách này vượt quá kiến thức lớp 10.

Câu 17. (HSG10 CẦU GIẤY – THƯỜNG TÍN – HÀ NỘI 2018-2019) Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Tác giả ; Trần Dung ; Fb: Dung Chang.

Từ phương trình : $2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy - xy - y^2 - x - 4x + 2y - y + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (2x^2 - xy - x) + (2xy - y^2 - y) + (2y - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow x(2x - y - 1) + y(2x - y - 1) - 2(2x - y - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow (2x - y - 1)(x + y - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 & (3) \\ x + y - 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Kết hợp (2) và (3) hoặc (2) và (4) ta có hệ :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2x-1)^2 + x + (2x-1) - 4 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2-x)^2 + x + (2-x) - 4 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - x - 4 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - x - 4 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{13}{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ $S = (x; y) = \left\{ (1; 1), \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5} \right) \right\}$.

Câu 18. (HSG10 Kim Liên 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 - x^3 y = 1 \\ x^3 y + xy - x^2 = -1 \end{cases}.$$

Lời giải

Ta có : $x^4 + x^2 y^2 = (x^2 - xy)^2 + 2x^3 y$.

Đặt $\begin{cases} a = x^2 - xy \\ b = x^3 y \end{cases}$, hệ phương trình trở thành : $\begin{cases} a^2 + b = 1 \\ -a + b = -1 \end{cases}$.

Suy ra $a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$.

Với $a = 1$ ta tính được $b = 0$.

Với $a = -2$ ta tính được $b = -3$.

$$\text{TH1: } \begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^3 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 1 \\ x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x^2 - xy = -2 \\ x^3 y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{3}{x^2} = -2 \\ y = \frac{-3}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^2 + 3 = 0 \\ y = \frac{-3}{x^3} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là: $(-1; 0)$ và $(1; 0)$.

Câu 19. (HSG10 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 3(x^2+y^2)+2 & (1) \\ x^2y+x^2-2x-12=0 & (2) \end{cases}$

2) Giải phương trình $(x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3$

3) Giải bất phương trình $x^3 + (3x^2 - 4x - 4)\sqrt{x+1} \leq 0$

Lời giải

1) Ta có:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 3(x^2+y^2)+2 \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y = 3x^2 + 3y^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2.$$

Thế $y = x-2$ vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$x^2(x-2) - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+2x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \text{ VN} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 1)$.

2) Điều kiện $-1 \leq x \leq 4$.

Ta có

$$(x-3)\sqrt{1+x} - x\sqrt{4-x} = 2x^2 - 6x - 3.$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{1+x}-1)-x(\sqrt{4-x}-1)=2x^2-6x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)x}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{x(x-3)}{\sqrt{4-x}+1} = 2x(x-3).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)=0, (1) \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} = 2, (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } x(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} (tm).$$

$$\text{Giải (2) ta có } \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} < \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 = VP. \text{ Vậy (2) vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0; 3\}$

3) Điều kiện $x \geq -1$.

Ta có:

$$x^3 + (3x^2 - 4x - 4)\sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2\sqrt{x+1} - 4(x+1)\sqrt{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2\sqrt{x+1} - 4(\sqrt{x+1})^3 \leq 0 \quad (1)$$

* Xét $x = -1$, thay vào (1) thỏa mãn.

* Xét $x > -1 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 0$. Chia hai vế của (1) cho $(\sqrt{x+1})^3$ ta được bất phương trình

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^2 - 4 \leq 0.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{\sqrt{x+1}}, \text{ ta có bất phương trình } t^3 + 3t^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$$

$$t \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x \geq 0 \\ x+1 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là: } T = \left[-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Câu 20. (HSG11 Bắc Ninh 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x = 2y^3 + y \\ (x^3 + 3y + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3y^3 + 5x^2 + 2y + 5 \end{cases}$$

Lời giải

Câu 1.
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x = 2y^3 + y & (1) \\ (x^3 + 3y + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3y^3 + 5x^2 + 2y + 5 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $2x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -\frac{5}{2} \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x^3 - y^3) + (xy^2 - y^3) + x - y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + 2y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + 2y^2 + 1 = 0(*) \end{cases}$

Mà $x^2 + xy + 2y^2 + 1 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} + 1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được:

$$(x^3 + 3x + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5)(\sqrt{2x^2 + 5x} - 1) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5 - (x^3 + 3x + 5)$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5) \cdot \frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{2x^2 + 5x} + 1} = x \cdot (2x^2 + 5x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 5x - 1) \left(\frac{x^3 + 3x + 5}{\sqrt{2x^2 + 5x} + 1} - x \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 1 = 0 & (3) \\ x^3 + 3x + 5 = x(\sqrt{2x^2 + 5x} + 1) & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$(4) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 5 = x\sqrt{2x^2 + 5x} \Rightarrow [x^3 + (2x + 5)]^2 = (x \cdot \sqrt{2x^2 + 5x})^2$$

$$\Leftrightarrow (x^3)^2 + 2x^3(2x + 5) + (2x + 5)^2 = x^3(2x + 5)$$

$$\Leftrightarrow (x^3)^2 + x^3(2x + 5) + (2x + 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{2x + 5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot (2x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 2x + 5 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn).}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{-5 + \sqrt{33}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}\right); \left(\frac{-5 - \sqrt{33}}{4}; \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}\right)$.

Câu 21. (HSG11 Nghệ An 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{y^2 + 1} - y - 1 \\ x^3 - (3x^2 + 2y^2 - 6)\sqrt{2x^2 - y - 2} = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{y^2 + 1} - y - 1 & (1) \\ x^3 - (3x^2 + 2y^2 - 6)\sqrt{2x^2 - y - 2} = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Điều kiện $2x^2 - y - 2 \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+1+y) + \sqrt{(x+1)^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1+y) + \frac{(x+1+y)(x+1-y)}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow (x+1+y) \left(1 + \frac{(x+1-y)}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+y=0 \\ 1 + \frac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-1 \\ \sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + (x+1) - y = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + (x+1) - y > |x+1| + (x+1) + |y| - y \geq 0$

nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Thế $y = -x-1$ vào phương trình (2) ta được phương trình

$$x^3 - (5x^2 + 4x - 4)\sqrt{2x^2 + x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + [3x^2 - 4(2x^2 + x - 1)]\sqrt{2x^2 + x - 1} = 0 \quad (3)$$

Đặt $a = \sqrt{2x^2 + x - 1} \geq 0$, phương trình (3) trở thành

$$x^3 + 3x^2a - 4a^3 = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x+2a)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a \end{cases}$$

$$+ x = a \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x - 1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$+ x = -2a \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x - 1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 7x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-2 - 4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y = \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{7}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{-2 - 4\sqrt{2}}{7}; \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{7} \right) \right\}$

Câu 22. (HSG12 Quảng Ngãi 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (2x^2y - 7)(\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 3xy}) = 5 \\ \sqrt{x^2(4 + y^2)} - 1 = \sqrt{1 + 4x^2} - xy \end{cases}.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoàng Kiệt; Fb: Nguyễn Hoàng Kiệt

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2y - 7)(\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3xy}) = 5 & (1) \\ \sqrt{x^2(4+y^2)} - 1 = \sqrt{1+4x^2} - xy & (2) \end{cases}$$

+) Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x+3xy \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} . (*)$$

+) Với điều kiện (*), từ (2) $\Rightarrow \sqrt{(y^2+4)} + y = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4} + \frac{1}{x}$. (3)

+) Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{(t^2+4)} + t, t \geq -\frac{1}{3}$.

$$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{(t^2+4)}} + 1 > 0, \forall t \geq -\frac{1}{3}.$$

☐ Suy ra, hàm số $f(t) = \sqrt{(t^2+4)} + t$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Mặt khác $f(t)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Do đó, từ (3) $\Leftrightarrow f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$.

+) Thay $y = \frac{1}{x}$ vào (1), ta được: $(2x-7)(\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3}) = 5$. (4)

☐ Nhận thấy, $x = \frac{7}{2}$ không là nghiệm của (4), nên (4) có thể viết lại:

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} = \frac{5}{2x-7} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} - \frac{5}{2x-7} = 0.$$

☐ Đặt
$$g(x) = \sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} - \frac{5}{2x-7}, \forall x \geq \frac{2}{3}, x \neq \frac{7}{2}.$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{10}{(2x-7)^2} = \frac{3\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-2}}{2\sqrt{x+3}\sqrt{3x-2}} + \frac{10}{(2x-7)^2} \\ &= \frac{6x+29}{2\sqrt{x+3}\sqrt{3x-2}(3\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2})} + \frac{10}{(2x-7)^2} > 0, \forall x > \frac{2}{3}, x \neq \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{2}{3}; \frac{7}{2}\right)$ và $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Mà $g(1) = g(6) = 0$, nên (4) có hai nghiệm $x = 1, x = 6$.

+) Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là $(1; 1)$ và $\left(6; \frac{1}{6}\right)$.

Câu 23. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (y-2)\sqrt{x+2} - x\sqrt{y} = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}(\sqrt{y}+1) = (y-3)(1+\sqrt{x^2+y-3x}) & (2) \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+2} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}$, ($a \geq 1, b \geq 0$), ta được $\begin{cases} x = a^2 - 2 \\ y = b^2 \end{cases}$. Khi đó phương trình (1) trở thành $(b^2 - 2)a - b(a^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow ab(b - a) + 2(b - a) = 0 \Leftrightarrow (b - a)(ab + 2) = 0 \Leftrightarrow a = b$

(do $ab + 2 > 0$) nên PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x+2 = y$. Thay vào phương trình (2), ta được

$$\sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}+1) = (x-1)(1+\sqrt{x^2-2x+2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(1+\sqrt{(x+1)+1}) = (x-1)(1+\sqrt{(x-1)^2+1}) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t(1+\sqrt{1+t^2})$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } (3) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 5$, ta thấy $x = 3, y = 5$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (3; 5)$.

Nhận xét: Ta có thể biến đổi phương trình (1) đi theo hướng khác như sau:

Từ PT(2), ta có $y \geq 3$, nên PT(1) $\Leftrightarrow \frac{y-2}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ (4), ta có đặt $y-2 = a$, $a \geq 1$ thay vào (4), ta được $\frac{a}{\sqrt{a+2}} = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$, từ đây suy ra $x > 0$. Xét hàm số $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t+2}}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, ta được $a = x$ hay $y = x+2$.

Câu 24. (HSG12 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (3x+1)^2 + 4\sqrt{y} = y^2 + 4\sqrt{3x+1} \quad (1) \\ 3xy = 4x+4+2\sqrt{x+3} \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Nga; Fb: Con Meo

Cách 1:

Điều kiện: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (3x+1)^2 - 4\sqrt{3x+1} = y^2 - 4\sqrt{y} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 4t$ ($t \in [0; +\infty)$); từ (*) ta có $f(\sqrt{3x+1}) = f(\sqrt{y})$.

$$f'(t) = 4t^3 - 4; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

Từ bảng biến thiên ta thấy: hàm số nghịch biến trên $[0; 1]$; đồng biến trên $[1; +\infty)$.

+ Nếu $\sqrt{3x+1}$ và $\sqrt{y}$ cùng thuộc $[0; 1]$ hoặc $[1; +\infty)$ thì ta có :

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = 3x+1 \text{ thay vào (2) ta có :}$$

$$3x(3x+1) = 4x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 9x^2 = x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 9x^2 = (1+\sqrt{x+3})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{x+3} + 1 \\ 3x = -\sqrt{x+3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3x = \sqrt{x+3} + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 9x^2 - 7x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = -\frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4$$

(thỏa mãn).

+ Nếu $\sqrt{3x+1}$ và $\sqrt{y}$ không cùng thuộc $[0; 1]$ hoặc $[1; +\infty)$ thì

$$(\sqrt{3x+1} - 1)(\sqrt{y} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1} + 1} \cdot \frac{y-1}{\sqrt{y} + 1} \leq 0 \Leftrightarrow x(y-1) \leq 0.$$

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow 3x(y-1) = (\sqrt{x+3} + 1)^2 > 0 \text{ vô lý.}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 4)$.

Cách 2:

Điều kiện: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow 4\sqrt{3x+1} - 4\sqrt{y} = (3x+1)^2 - y^2.$$

$$\Rightarrow (3x+1-y)(3x+1+y) = 4 \cdot \frac{3x+1-y}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{y}}.$$

$$\Rightarrow (3x+1-y) \left(3x+1+y - \frac{4}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{y}} \right) = 0 (*).$$

$$\text{Vì } x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow VP(2) > 0 \Rightarrow 3xy > 0 \Rightarrow x > 0.$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow y = \frac{4}{3} + \frac{4}{3x} + \frac{2}{3x} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} > 1.$$

$$\Rightarrow 3x+1+y - \frac{4}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{y}} > 0.$$

Từ (*) $\Rightarrow 3x+1-y=0 \Leftrightarrow y=3x+1$ thay vào (2) ta có:

$$9x^2 = x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 9x^2 = (\sqrt{x+3}+1)^2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{x+3}+1 \\ 3x = -\sqrt{x+3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow 3x = \sqrt{x+3}+1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 9x^2-7x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x=1 \\ x=-\frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=4.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 4)$.

Cách 3:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vì } y \geq 0; x \geq -\frac{1}{3} \text{ nên } 4x+4+2\sqrt{x+3} > 0 \Rightarrow 3xy > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{3x+1} > 1.$$

$$\text{Mặt khác, } 3xy = 4x+4+2\sqrt{x+3} > 4x \Rightarrow y > \frac{4}{3} \Rightarrow \sqrt{y} > 1.$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{y}; b = \sqrt{3x+1}, (a, b > 1).$$

$$(1) \Rightarrow a^4 - 4a = b^4 - 4b \Leftrightarrow (a-b) \left[(a+b)(a^2+b^2) - 4 \right] = 0 (*).$$

$$\text{Vì } a, b > 1 \text{ nên } \begin{cases} a+b > 2 \\ a^2+b^2 > 2 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(a^2+b^2) > 4.$$

$$\text{Từ (*)} \Rightarrow a=b \text{ hay } \sqrt{y} = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow y = 3x+1.$$

$$\text{khi đó ta có: } 3x(3x+1) = 4x+4+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 9x^2 = x+4+2\sqrt{x+3}.$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 = (1 + \sqrt{x+3})^2.$$

$$\Leftrightarrow 3x = 1 + \sqrt{x+3} \text{ (vì } x > 0 \text{)}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ (3x-1)^2 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 7x - 2 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{9} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=4.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 4)$.

Câu 25. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 4y^2 + 4y = \sqrt{x+1}(y^2 - 5y + 4 + \sqrt{x+1}) \\ 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = y^2(x-1)^2 + (y^2 - 1)\sqrt{3x-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Hà ; Fb: Ha Tran

Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$

Phương trình đầu $y^3 - 4y^2 + 4y = \sqrt{x+1}(y^2 - 5y + 4 + \sqrt{x+1})$

$$\Leftrightarrow y(y^2 - 4y + 4) = \sqrt{x+1}(y^2 - 4y + 4 - y + \sqrt{x+1})$$

$$\Leftrightarrow y(y-2)^2 = (y-2)^2 \sqrt{x+1} - (y - \sqrt{x+1})\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (y - \sqrt{x+1})[(y-2)^2 + \sqrt{x+1}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + \sqrt{x+1} = 0 & (1) \\ y - \sqrt{x+1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } (y-2)^2 + \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (Loại)}$$

$$\text{Giải (2): } y - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x+1 \\ y > 1 \end{cases}$$

Thế $y^2 = x+1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = (x+1)(x-1)^2 + x\sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-3x+3}-2+3x-2-x\sqrt{3x-2}-(x+1)(x-1)^2+3x-3=0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2-3x+3}-1)+\sqrt{3x-2}(\sqrt{3x+2}-x)-(x-1)(x^2-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-3x+2)}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}-\sqrt{3x-2}\frac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{3x-2}}-(x+2)(x^2-3x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)\left[\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}-\frac{\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}-x-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 & (3) \\ \frac{2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}-\frac{\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}-x-2=0 & (4) \end{cases}$$

Giải (3): $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (tm)} \\ x=2 \text{ (tm)} \end{cases} \Rightarrow$ hệ có nghiệm $(x; y) = (1; \sqrt{2}); (2; \sqrt{3})$

Giải (4): $\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}-\frac{\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}-x-2=0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}=\frac{\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}+x+2$

Ta thấy với mọi $x \geq \frac{2}{3}$ thì $VT(4) < 2 < VP(4)$ do đó phương trình (4) vô nghiệm.

Câu 26. (HSG12 Hà Nội năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+3y^2+2xy-6x-2y+3=0 & (1) \\ x^2-y+5=2x\sqrt{y+3} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hồng Hạnh; Fb: Nguyễn Hồng Hạnh

Điều kiện: $y \geq -3$.

• Từ (1) ta có: $x^2+3y^2+2xy-6x-2y+3=0$

$$\Leftrightarrow x^2+2(y-3)x+(y-3)^2+2y^2+4y-6=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-3)^2+2y^2+4y-6=0$$

$$\Rightarrow 2y^2+4y-6 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1 \quad (3)$$

• Từ (2) ta lại có: $x^2-y+5=2x\sqrt{y+3} \Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{y+3}+y+3+2(1-y)=0$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{y+3})^2+2(1-y)=0$$

$$\Rightarrow 2(1-y) \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 1 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow y=1$.

Thay $y=1$ vào hệ được $x=2$.

Vậy hệ có nghiệm là $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 27. (HSG12 tỉnh QUẢNG NINH 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2} \log \frac{100x}{y^2} = 1 - \frac{x-2}{y^2} \\ \sqrt{xy-2} = \sqrt[3]{x-1} + y \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $x > 0$ và $xy \geq 2$

Từ phương trình $\frac{1}{y^2} \log \frac{100x}{y^2} = 1 - \frac{x-2}{y^2} \Leftrightarrow \log 100x - \log y^2 = y^2 - x + 2 \Leftrightarrow x + \log x = y^2 + \log y^2 (*)$

Xét hàm số $f(t) = t + \log t, t > 0$ có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 10} > 0, \forall t > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vậy $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(y^2) \Leftrightarrow x = y^2$

Thay $x = y^2$ vào phương trình $\sqrt{xy-2} = \sqrt[3]{x-1} + y$ được $\sqrt{y^3-2} = \sqrt[3]{y^2-1} + y$

Thấy $y=3$ là nghiệm nên biến đổi thành $(\sqrt{y^3-2}-5) = (\sqrt[3]{y^2-1}-2) + y-3$ rồi liên hợp được

$$\frac{y^3-27}{\sqrt{y^3-2}+5} = \frac{y^2-9}{\sqrt[3]{(y^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{y^2-1} + 4} + y-3$$

$$\Leftrightarrow (y-3) \left[\frac{y^2+3y+9}{\sqrt{y^3-2}+5} - \left(\frac{y+3}{\sqrt[3]{(y^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{y^2-1} + 4} + 1 \right) \right] = 0 (**)$$

$$\text{Do } \frac{y^2+3y+9}{\sqrt{y^3-2}+5} > \frac{y^2+3y+9}{\sqrt{y^3}+5} > \frac{y^2+3y+9}{\frac{y^2+y}{2}+5} = \frac{2y^2+6y+18}{y^2+y+10} = 2 + \frac{4y-2}{y^2+y+10} > 2, \forall y \geq \sqrt[3]{2}$$

Và $\sqrt[3]{(y^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{y^2-1} + 4 = \sqrt[3]{(y-1)^2(y+1)^2} + 2\sqrt[3]{y^2-1} + 4 > \sqrt[3]{(y-1)^3} + 4 = y+3, \forall y \geq \sqrt[3]{2}$ nên

$$\frac{y+3}{\sqrt[3]{(y^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{y^2-1} + 4} + 1 < 1+1=2$$

$$\Rightarrow \frac{y^2+3y+9}{\sqrt{y^3-2}+5} - \left(\frac{y+3}{\sqrt[3]{(y^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{y^2-1} + 4} + 1 \right) > 0, \forall y \geq \sqrt[3]{2}$$

Nên $(**) \Leftrightarrow y=3$

Vậy hệ số nghiệm duy nhất $(x; y) = (9; 3)$.

Câu 28. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ (x+1)\sqrt{y+1} + (x+6)\sqrt{y+6} = x^2 - 5x + 12y \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Hoàng Ngọc Huệ ; Fb: Hoàng Ngọc Huệ.

Điều kiện: $y \geq -1$.

Ta có $x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà phương trình (1) có dạng $f(x+1) = f(y)$ nên $x+1 = y$. Do $y \geq -1$ nên $x \geq -2$.

Thế $x+1 = y$ vào phương trình $(x+1)\sqrt{y+1} + (x+6)\sqrt{y+6} = x^2 - 5x + 12y$ ta có

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12 \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2} - 2) + (x+6)(\sqrt{x+7} - 3) = x^2 + 2x - 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{(x+6)(x-2)}{\sqrt{x+7}+3} = (x-2)(x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(TM) \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} = x+4 (*) \end{cases}$$

Giải phương trình (*) :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} = x+4 \Leftrightarrow \frac{2(x+2)}{\sqrt{x+2}+2} - (x+2) - \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{2(x+6)}{\sqrt{x+7}+3} - (x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \left(\frac{-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2} \right) - \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} + (x+6) \left(\frac{-\sqrt{x+7}-1}{\sqrt{x+7}+3} \right) = 0 (**)$$

Dễ thấy vế trái của phương trình (**) luôn âm với mọi $x \geq -2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

Bổ sung: Để đánh giá (*) vô nghiệm cũng có thể xét riêng

Trường hợp 1: $x \geq -1 \Rightarrow VT < \frac{x+1}{2} + \frac{x+6}{2} = x + \frac{7}{2} < x+4$

Trường hợp 2:

$$\begin{aligned} -1 > x \geq -2 \Rightarrow VP - VT &= (x+4) - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} \\ &= \left(\frac{x+6}{3} - \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} \right) + \left(2 + \frac{2x}{3} \right) - \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} > 0. \end{aligned}$$

Câu 29. (HSG10 PHÙNG KHẮC KHOAN- HÀ NỘI 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3\sqrt{2x+y} + \sqrt{x-2y+1} = 5 \\ 2\sqrt{x-2y+1} - 5x = 10y+9 \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Dương Long ; Fb: Long Nguyễn

Điều kiện $\begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \end{cases}$

Ta có hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2x+y} + \sqrt{x-2y+1} = 5 \\ 2\sqrt{x-2y+1} - (5x+10y) = 9 \end{cases}$

Đặt $u = \sqrt{2x+y}$, ($u \geq 0$) và $v = \sqrt{x-2y+1}$, ($v \geq 0$)

Suy ra $\begin{cases} 2x+y = u^2 \\ x-2y+1 = v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y = u^2 \\ x-2y = v^2 - 1 \end{cases}$

Ta có $5x+10y = m(2x+y) + n(x-2y)$, suy ra $\begin{cases} 2m+n = 5 \\ m-2n = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -3 \end{cases}$

Vậy $5x+10y = 4(2x+y) - 3(x-2y) = 4u^2 - 3(v^2 - 1)$.

Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3u + v = 5 \\ 2v - (4u^2 - 3v^2 + 3) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - 3u \\ 4u^2 - 3v^2 - 2v + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - 3u \\ 23u^2 - 96u + 73 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \\ u = \frac{73}{23} \\ v = -\frac{104}{23} \end{cases} \quad \text{Trường}$$

hợp 1: $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y = 1 \\ x-2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Trường hợp 2: $\begin{cases} u = \frac{73}{23} \\ v = -\frac{104}{23} \end{cases}$ (không thỏa mãn điều kiện $v \geq 0$)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Câu 30. (HSG10 THPT Thuận Thành 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Quốc Vương; Fb: Quốc Vương

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y & (1) \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y & (2) \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y \Leftrightarrow (x+1-y)[(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 1] = 0$

$$\Leftrightarrow y = x + 1 \text{ (vì } (x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 1 = \left(x+1+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 > 0 \text{ } \forall x, y).$$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình (2), ta được: $4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)(x+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (\sqrt{x-1} + 3)^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} + 3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x-1 = (2x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (2; 3)$.

Câu 31. (HSG11 Hậu Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{4-x+5y} \\ x^2 + y + 2 = \sqrt{5(2x-y+1)} + \sqrt{3x+2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thu Hằng ; Fb: Nguyễn Thu Hằng

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ y \geq -1 \\ 4-x+5y \geq 0 \\ 2x-y+1 \geq 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} &= \sqrt{4-x+5y} \Leftrightarrow x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 4-x+5y \\ \Leftrightarrow 2x-4y-2+2\sqrt{(x+1)(y+1)} &= 0 \Leftrightarrow x-2y-1+\sqrt{(x+1)(y+1)} = 0 \\ \Leftrightarrow x+1+\sqrt{(x+1)(y+1)}-2(y+1) &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1})(\sqrt{x+1}+2\sqrt{y+1}) = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1} &= \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Thay $x = y$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 2 &= \sqrt{5(x+1)} + \sqrt{3x+2} \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 + (x+2-\sqrt{5x+5}) + (x+1-\sqrt{3x+2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \frac{x^2 - x - 1}{x+2+\sqrt{5x+5}} + \frac{x^2 - x - 1}{x+1+\sqrt{3x+2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - x - 1) \left(1 + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+5}} + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+2}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)} \Rightarrow y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$\text{Vì } 1 + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+5}} + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+2}} > 0, \forall x \geq -\frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là } S = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$$

Câu 32. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{4-x+5y} \\ x^2 + y + 2 = \sqrt{5(2x-y+1)} + \sqrt{3x+2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3}, y \geq -1 \\ 4-x+5y \geq 0 \\ 2x-y+1 \geq 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình (1) ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} &= \sqrt{4-x+5y} \Leftrightarrow x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 4-x+5y \\ \Leftrightarrow x-2y-1+\sqrt{(x+1)(y+1)} &= 0 \Leftrightarrow x+1+\sqrt{(x+1)(y+1)}-2(y+1) = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1})(\sqrt{x+1}+2\sqrt{y+1}) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta có phương trình :

$$x^2 + x + 2 = \sqrt{5x+5} + \sqrt{3x+2} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 + (x+2-\sqrt{5x+5}) + (x+1-\sqrt{3x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{5x+5} + x + 2} + \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{3x+2} + x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5x+5} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3x+2} + x + 2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } 1 + \frac{1}{\sqrt{5x+5} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3x+2} + x + 2} > 0, \forall x \geq -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ: } (x, y) = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$$

Câu 33. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3(2x^2 - y^2 + 2y) + 15x - 10 = 0 \\ \sqrt{2-y} + \sqrt{3-x} = 2x-2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(x-2)^3 + 3(x-2) = (y-1)^3 + 3(y-1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, (t \in \mathbb{R})$.

Khi đó ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên phương trình (1) trở thành $f(x-2) = f(y-1) \Leftrightarrow x-2 = y-1 \Leftrightarrow y = x-1$.

Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$2\sqrt{3-x} = 2x-2 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3-x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Với $x = 2$ thì $y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 34. (HSG12 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 4x - y - 2 = 0 \\ \sqrt{2x+y+5} - \sqrt{3-x-y} = x^3 - 3x^2 - 10y - 10 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} 2x+y+5 \geq 0 \\ 3-x-y \geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương: $(x-1)^3 + (x-1) = y^3 + y$

$$\Leftrightarrow (x-y-1) \left[(x-1)^2 + y(x-1) + y^2 + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x-1$$

Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình:

$$\sqrt{3x+4} - \sqrt{4-2x} = x^3 - 3x^2 - 10x$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-2x}} = x(x-5)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x-5)(x+2)(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-2x}) = 5 \end{cases} (*)$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Do $-\frac{4}{3} \leq x \leq 2$ nên $VT(*) < 0$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ là $(0; -1)$.

Câu 35. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(xy - x + y) & (1) \\ x^3 + 3y^2 + 5x - 12 = (12 - y)\sqrt{3 - x} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Tác giả: Lưu Trung Tín; Fb: Lưu Trung Tín

Điều kiện: $x \leq 3$.

$$(1) \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Thay $y = x + 1$ vào (2) ta được phương trình $x^3 + 3x^2 + 11x - 9 = (11 - x)\sqrt{3 - x}$ (3).

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 8x = (\sqrt{3 - x})^3 + 3(\sqrt{3 - x})^2 + 8\sqrt{3 - x} \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{3 - x}) \left[x^2 + x\sqrt{3 - x} + (\sqrt{3 - x})^2 + 3x + 3\sqrt{3 - x} + 8 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - \sqrt{3 - x}) \left[(x + \sqrt{3 - x} + 3)^2 + x^2 + (\sqrt{3 - x})^2 + 7 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt{3 - x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3 - x} = x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3 - x = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Thử lại, ta nhận nghiệm $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$, suy ra $y = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right) \right\}$.

Câu 36. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x + y} = 16 \\ 2x^2 - 5x + 2\sqrt{x + y} - \sqrt{3x - 2} = 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Tác giả: Phùng Hằng - Đỗ Quốc Trường; Fb: Phùng Hằng - Đỗ Quốc Trường

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x + y > 0 \\ 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y > 0 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \quad (1) \\ 2x^2 - 5x + 2\sqrt{x+y} - \sqrt{3x-2} = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

Với điều kiện xác định: $(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{8xy}{x+y} = 16 \Leftrightarrow (x+y-4)(x+y+4) + 2xy\left(\frac{4}{x+y} - 1\right) = 0.$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)(x+y+4) - 2xy\left(\frac{x+y-4}{x+y}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+y-4)\left(x+y+4 - \frac{2xy}{x+y}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4=0 \\ x+y+4 - \frac{2xy}{x+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2+4(x+y)=0 \end{cases}.$$

+) TH1: $x+y=4$ thay vào (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 4 - \sqrt{3x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 2(3x-2) + \sqrt{3x-2}.$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) + x - \sqrt{3x-2} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) + \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{3x-2}} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)\left(2 + \frac{1}{x + \sqrt{3x-2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 2 + \frac{1}{x + \sqrt{3x-2}} = 0 \text{ (VN)} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=2 \Rightarrow y=2 \end{cases}.$$

+) TH2: $x^2 + y^2 + 4(x+y) = 0$ vô nghiệm vì $x+y > 0$ và $x \geq \frac{2}{3}$ nên $x^2 + y^2 + 4(x+y) > 0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (1;3) và (2;2).

Câu 37. (HSG11 Thuận Thành 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17} = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{y+21} + 1 = 2\sqrt{4y-3x} \end{cases}.$$

Lời giải

$$\begin{cases} x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17} = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad (1) \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{y+21} + 1 = 2\sqrt{4y-3x} \quad (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $y \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x-y+4) + \sqrt{x^2 + 8x + 17} - \sqrt{y^2 + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+4) + \frac{(x+4)^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 8x + 17} + \sqrt{y^2 + 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+4) + \frac{(x+4+y)(x+4-y)}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+4) \left(1 + \frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + 4$$

$$\text{Vì: } 1 + \frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} = \frac{\sqrt{(x+4)^2+1} + (x+4) + \sqrt{y^2+1} + y}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = x + 4$ vào 2 ta được :

$$(2) \Leftrightarrow x + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+25} + 1 = 2\sqrt{x+16}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+4} - 2) + (\sqrt{x+25} - 5) + (x + 8 - 2\sqrt{x+16}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+25}+5} + \frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+25}+5} + \frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}} = 0 (vn) \end{cases}.$$

Câu 38. (HSG12 Quảng Ninh 2018-2019) Cho x, y là các số thực dương. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} (y+1)\log_4[(x+1)(y+1)] = 16 - (x-1)(y+1) \\ 4x^2 + 7xy - 3x + y^2 = 99 \end{cases}.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Chúc; Fb:Chuc Nguyen

$$\text{Ta có } (y+1)\log_4[(x+1)(y+1)] = 16 - (x-1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+1) + \log_4(y+1) = \frac{16}{y+1} - (x-1) \text{ (vì } x, y \text{ dương)}$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+1) + (x+1) - 2 = \frac{16}{y+1} - \log_4(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+1) + (x+1) - 2 = \log_4 \frac{16}{y+1} + \frac{16}{y+1} - 2 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_4 t - 2$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 4} + 1 > 0 \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $y = f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (1) có dạng $f(x+1) = f\left(\frac{16}{y+1}\right)$

$$\Leftrightarrow x+1 = \frac{16}{y+1} \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 16 \Leftrightarrow xy + x + y = 15$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + x(y-1) = 15 \quad (2).$$

$$\text{Ta có } 4x^2 + 7xy - 3x + y^2 = 99 \Leftrightarrow (2x+y)^2 + 3x(y-1) = 99 \quad (3).$$

Từ (2), (3) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (2x+y) + x(y-1) = 15 \\ (2x+y)^2 + 3x(y-1) = 99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^2 - 3(2x+y) = 54 \\ (2x+y) + x(y-1) = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=9 \\ 2x+y=-6 \\ (2x+y) + x(y-1) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=9 \\ x(y-1)=6 \end{cases} \quad (\text{vì } x, y \text{ dương nên } 2x+y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(8-2x)=6 \\ y=9-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \\ x=3 \\ y=3 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện } x, y > 0).$$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{(1; 7); (3; 3)\}$.

Câu 39. (HSG12 tỉnh Bình Thuận năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{xy}(x+y-1) = x^2 + y^2 & (1) \\ x^2 y \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} = x^2 y - x & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện $xy \geq 0$.

Ta có $\sqrt{x^2+1} - x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y=0$ không thỏa mãn (2). Do vậy $y \neq 0$. Suy ra $x=0$ không thỏa mãn (1).

Nếu x, y cùng âm thì (1) vô lí. Do đó x, y cùng dương.

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}(\sqrt{x^2+1} - x) = y(\sqrt{y^2+1} - 1) \Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} = y\sqrt{y^2+1} - y \quad (3).$$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{1+t^2} - t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} - 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (3) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow xy = 1.$$

Thay $xy = 1$ vào (1) ta được:

$$2(x+y-1) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 40. (HSG12 THPT Thuận Thành năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17} = y+\sqrt{y^2+1} \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1 = 2\sqrt{4y-3x} \end{cases}.$$

Lời giải

$$\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17} = y+\sqrt{y^2+1} \quad (1) \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1 = 2\sqrt{4y-3x} \quad (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $y \geq 0, 4y - 3x \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x-y+4) + \sqrt{x^2+8x+17} - \sqrt{y^2+1} = 0 \Leftrightarrow (x-y+4) + \frac{(x+4)^2 - y^2}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+4) + \frac{(x+4+y)(x+4-y)}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} = 0 \Leftrightarrow (x-y+4) \left(1 + \frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + 4.$$

$$(\text{Vi: } 1 + \frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} = \frac{\sqrt{(x+4)^2+1} + (x+4) + \sqrt{y^2+1} + y}{\sqrt{x^2+8x+17} + \sqrt{y^2+1}} > 0 \quad \forall x, y)$$

Thay $y = x + 4$ vào (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow x + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+25} + 1 = 2\sqrt{x+16}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+4} - 2) + (\sqrt{x+25} - 5) + (x+8 - 2\sqrt{x+16}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+25}+5} + \frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \quad (\text{t/m}) \\ \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+25}+5} + \frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Do $x+4 = y \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \Rightarrow x+8 > 0$ nên (3) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 4)$.

Chú ý: Ta có thể giải (1) như sau: $(1) \Leftrightarrow x+4+\sqrt{(x+4)+1} = y+\sqrt{y^2+1}$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$ có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x+4) = f(y) \Leftrightarrow x+4 = y$.

Câu 41. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2 + 1} = 2(y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} \\ x^2 + 2y^2 = 2x - 4y + 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải

Hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2 + 1} = 2(y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2 + 1} - 2(y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x^2 + 1} = (y+1)^2 + (y+1)\sqrt{(y+1)^2 + 1} \quad (*)$$

Xét $f(t) = t^2 + t\sqrt{t^2 + 1} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$f'(t) = 2t + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{t^2 + 1 + 2t\sqrt{t^2 + 1} + t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{t^2 + 1} + t)^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$$

Do $(\sqrt{t^2 + 1} > |t| \geq -t)$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ phương trình (*) ta có: $x = y+1$ thế vào phương trình (2) ta được:

$$(y+1)^2 + 2y^2 - 2(y+1) + 4y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ y = -2 \end{cases}$$

+) Với $y = -2$. Suy ra $x = -1$

+) Với $y = \frac{2}{3}$. Suy ra $x = \frac{5}{3}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là: $(-1; -2); \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 42. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 6 + 2\sqrt{2y+3} = 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoài Phúc; Fb: Nguyen Phuc

Điều kiện: $y \geq -\frac{3}{2}$

Phương trình thứ hai của hệ $\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3(x - y) = 3x^2 + 3y^2 + 2$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow y = x - 2.$$

Thay $y = x - 2$ vào phương trình đầu của hệ ta được

$$x^2 + (x-2)^2 - 2(x-2) - 6 + 2\sqrt{2(x-2)+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{2x-1} = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 2x - 1 - \sqrt{2x-1} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} = -\sqrt{2x-1} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2x-1} & (a) \\ 1-x = \sqrt{2x-1} & (b) \end{cases}$$

Giải (a): $(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Giải (b): $(b) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2}.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=2-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}.$

Chú ý: Có thể giải phương trình (*) bằng cách khác như sau:

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = -\sqrt{2x-1}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 - 11x^2 - 8x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 (x^2 - 4x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}$$

Thử lại, ta thấy $x=1; x=2-\sqrt{2}$ thỏa mãn phương trình (*).

Câu 43. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$$

Lời giải

+ Ta có: $\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 & (1) \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 & (2) \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y) + xy(x^2 - y) + xy = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$

+ Đặt $\begin{cases} a = x^2 - y \\ b = xy \end{cases}$. Hệ trở thành $\begin{cases} a + ab + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases} (**)$

+ Hệ $(**)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + a - 2) = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases}$

Từ đó ta tìm ra $(a; b) \in \{(0; 1); (1; 0); (-2; -3)\}$

• Với $(a; b) = (0; 1)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

• Với $(a; b) = (1; 0)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; -1); (1; 0); (-1; 0)$

• Với $(a; b) = (-2; -3)$ ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ (x+1)(x^2 - x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1; y = 3.$$

Vậy hệ có 5 nghiệm $(x; y) \in \{(1; 1); (0; -1); (1; 0); (-1; 0); (-1; 3)\}$.

Câu 44. (HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - x^2y - y^2 - 2x + 1 = 0 & (1) \\ \sqrt{x} - x - 2 = \sqrt{3y-2} - 2y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Trịnh Văn Điệp; Fb: Trịnh Văn Điệp

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq \frac{2}{3}$.

$$(1) \Leftrightarrow (x^3 - x^2y - x^2) + (x^2 - xy - x) + (xy - x) + (1 - y^2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - y - 1) + x(x - y - 1) + x(y - 1) - (y - 1)(y + 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - y - 1) + x(x - y - 1) + (y - 1)(x - y - 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)(x^2 + x + y - 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x^2 + x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

+) Với $x = y + 1$ thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{y+1} - y - 3 = \sqrt{3y-2} - 2y^2 \Leftrightarrow \sqrt{3y-2} - \sqrt{y+1} - (2y^2 - y - 3) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y-3}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+1}} - (2y-3)(y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+1}} = y+1 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $\frac{1}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+1}} < 1$ và $y+1 > 1, \forall y \geq \frac{2}{3}$.

Trường hợp này có nghiệm $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

+) Với $x^2 + x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - x - x^2 = y$, vì $x \geq 0 \Rightarrow 1 - x - x^2 \leq 1 \Rightarrow y \leq 1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $\frac{2}{3} \leq y \leq 1$.

$$\text{Ta có } -x^2 - x + 1 = y \Rightarrow \frac{2}{3} \leq -x^2 - x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ -x^2 - x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{-3+\sqrt{21}}{6} < 0,3$$

Xét vế trái của (2): $f(x) = \sqrt{x} - x - 2$ với $0 \leq x \leq \frac{-3+\sqrt{21}}{6} \Rightarrow -\frac{7}{4} \leq f(x) \leq -2$.

Xét vế phải ta có $f(y) = \sqrt{3y-2} - 2y^2$ với $\frac{2}{3} \leq y \leq 1$.

$$\text{Ta có } f'(y) = \frac{3}{2\sqrt{3y-2}} - 4y = 0 \Leftrightarrow 8y\sqrt{3y-2} = 3 \Leftrightarrow 192y^3 - 128y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}$$

Suy ra $-1 \leq f(y) \leq -\frac{5}{8}$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 45. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3(x+5)\sqrt{2+x} = 1+3y^2 & (1) \\ 2+\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12} = y^2(3\sqrt{x^2-2x+4}+5\sqrt{x^2-6x+12}+8) & (2) \end{cases}$$

Lời giải

ĐK: $x > -2$

Ta thấy với $y \leq 0$ phương trình (1) vô nghiệm.

Với $y > 0$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow y^3(x+5)\sqrt{2+x} = 1+3y^2 \Leftrightarrow (x+5)\sqrt{2+x} = \frac{1}{y^3} + \frac{3}{y}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{2+x} + 3\sqrt{2+x} = \frac{1}{y^3} + \frac{3}{y} \Leftrightarrow (\sqrt{2+x})^3 + 3\sqrt{2+x} = \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \frac{3}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \sqrt{2+x} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2+x} \quad (3) \quad (\text{vì hàm số } f(t) = t^3 + 3t \text{ có } f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in (0; +\infty))$$

Thế (3) vào (2) ta có

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 12} &= \frac{1}{2+x} (3\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 5\sqrt{x^2 - 6x + 12} + 8) \\ \Leftrightarrow (2+x) \left(2 + \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 12} \right) &= 3\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 5\sqrt{x^2 - 6x + 12} + 8 \\ \Leftrightarrow (2+x) \sqrt{x^2 - 2x + 4} + (2+x) \sqrt{x^2 - 6x + 12} - 3\sqrt{x^2 - 2x + 4} - 5\sqrt{x^2 - 6x + 12} + 2x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) \sqrt{x^2 - 2x + 4} + (x-2) \sqrt{x^2 - 6x + 12} + \sqrt{x^2 - 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 12} + 2(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) \sqrt{x^2 - 2x + 4} + (x-2) \sqrt{x^2 - 6x + 12} + \frac{4x-8}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 12}} + 2(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) \left(\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 12} + \frac{4}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 12}} + 2 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 12} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 12}} + 2 = 0 \end{cases} & (PTVN) \end{aligned}$$

Với $x = 2$ ta có $y = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện đề bài).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(2; \frac{1}{2} \right)$.

Câu 46. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) + 2xy = x + y \\ x^2 - 11x + 6 - 2\sqrt{9x - 5} = \sqrt{x + y} \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Lê Văn Quý; Fb: Lê Văn Quý

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq \frac{5}{9} \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đầu} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y) + 2xy = x + y$$

$$\Leftrightarrow [(x + y)^2 - 2xy](x + y) + 2xy = x + y$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 - (x + y) - 2xy(x + y) + 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)[(x + y)^2 - 1] - 2xy(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)[(x + y)^2 + x + y - 2xy] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x^2 + y^2 + x + y) = 0.$$

Từ đó tìm được $y = 1 - x$ (do $x + y \geq 0$ và $x \geq \frac{5}{9}$)

Thay $y = 1 - x$ vào phương trình thứ 2 của hệ ta được: $x^2 - 11x + 5 - 2\sqrt{9x - 5} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 9x - 5 + 2\sqrt{9x - 5} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (\sqrt{9x-5}+1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{13+\sqrt{133}}{2} \Rightarrow y = \frac{-11-\sqrt{133}}{2}.$$

Câu 47. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x^3 - 3(y+4)x^2 + 3(2-y^2)x = y^3 + 1 \\ 2\sqrt{y+4} = 9x^2 - x - 4 \end{cases}.$$

Lời giải

Tác giả: Lê Văn Quý; Fb: Lê Văn Quý

Điều kiện $y \geq 4$.

Phương trình đầu của hệ $\Leftrightarrow 7x^3 - 3(y+4)x^2 + 3(2-y^2)x = y^3 + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 = (2x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow x+y = 2x-1 \Leftrightarrow y = x-1.$$

Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được $2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{3+x})^2 = 9x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + 1 = 3x \\ \sqrt{x+3} + 1 = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow y=0 \\ x=\frac{-5-\sqrt{97}}{18} \rightarrow y=\frac{-23-\sqrt{97}}{18} \end{cases}.$$

Câu 48. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 - y^2 - 2y + 1 = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{y^2+1}-y) \\ x^3 - x = y^2 + y - 1 \end{cases}.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trường An; Fb: Trường An Nguyễn

$$\begin{cases} y^3 - y^2 - 2y + 1 = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{y^2+1}-y) & (1) \\ x^3 - x = y^2 + y - 1 & (2) \end{cases}$$

Cộng vế (1) và (2) ta có:

$$y^3 - y = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{y^2+1}-y) + x^3 - x$$

$$\Leftrightarrow y^3 - y - \ln(\sqrt{y^2+1}-y) = x^3 - x + \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$$

$$\Leftrightarrow y^3 - y + \ln(\sqrt{y^2+1} + y) = x^3 - x + \ln(\sqrt{x^2+1} + x) \quad (3)$$

$$(\text{do } (\sqrt{y^2+1} - y)(\sqrt{y^2+1} + y) = 1 \text{ nên } \ln(\sqrt{y^2+1} + y) = -\ln(\sqrt{y^2+1} - y))$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t + \ln(\sqrt{t^2+1} + t)$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 3t^2 - 1 + \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + 1}{\sqrt{t^2+1} + t} = 3t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 1$$

$$f''(t) = 6t - \frac{t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}$$

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 6\sqrt{(t^2+1)^3} = 1 \end{cases}$$

(phương trình $6\sqrt{(t^2+1)^3} = 1$ vô nghiệm vì $6\sqrt{(t^2+1)^3} \geq 6 > 1, \forall t \in \mathbb{R}$)

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(t)$	$-$	0	$+$
$f'(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f'(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $(3) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow y = x$.

Thay $y = x$ vào (2) ta có: $x^3 - x = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (4)$

Đặt $t = x - \frac{1}{3}$. Phương trình (4) trở thành: $\left(t + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(t + \frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(t + \frac{1}{3}\right) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^3 - \frac{7}{3}t + \frac{7}{27} = 0 \quad (5).$$

Với $|t| < \frac{2\sqrt{7}}{3}$ thì $\left|\frac{3t}{2\sqrt{7}}\right| < 1$, do đó tồn tại $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = \frac{3t}{2\sqrt{7}}$ hay $t = \frac{2\sqrt{7} \cos \alpha}{3}$

Thay $t = \frac{2\sqrt{7} \cos \alpha}{3}$ vào (5) ta có:

$$\frac{56\sqrt{7}}{27} \cos^3 \alpha - \frac{14\sqrt{7}}{9} \cos \alpha + \frac{7}{27} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{56\sqrt{7}}{27} \cdot \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4} - \frac{14\sqrt{7}}{9} \cos \alpha + \frac{7}{27} = 0 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{-\sqrt{7}}{14}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) + \frac{k2\pi}{3} \\ \alpha = -\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do $\alpha \in [0; \pi]$ nên suy ra

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)}{3} \Rightarrow x = y = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)\right] + \frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)}{3} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = y = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] + \frac{1}{3} \\ \alpha = -\frac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)}{3} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = y = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos\left[-\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] + \frac{1}{3} \end{cases}$$

(Phương trình bậc ba có tối đa 3 nghiệm nên ta không cần xét trường hợp $|t| \geq \frac{2\sqrt{7}}{3}$)

Chuyên đề

6

Bất đẳng thức

Câu 1. (HSG chọn HSG quốc gia tỉnh ĐỒNG THÁP 2018-2019)

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x - \frac{1}{y^2} = y - \frac{1}{z^2} = z - \frac{1}{x^2} = 1$.

Tính giá trị biểu thức $P = x\sqrt{y-1} + y\sqrt{z-1} + z\sqrt{x-1}$.

b) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a - a^3 \geq b + b^3$. Chứng minh $a^2 + b^2 < 1$.

Lời giải

Tác giả: Võ Quang Anh; Fb: Anh Võ Quang.

$$\text{a) Từ giả thiết suy ra: } \begin{cases} x = \frac{1}{y^2} + 1(1) \\ y = \frac{1}{z^2} + 1(2) \\ z = \frac{1}{x^2} + 1(3) \end{cases} \text{ Do đó, } x, y, z > 1.$$

Hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2} + 1$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Nếu $x > y \Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow y < z \Rightarrow f(z) < f(x) \Rightarrow z > x \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow x < y$ (vô lí)

Suy ra: $x = y$. Chứng minh tương tự, ta suy ra $x = y = z$.

Thay $x = y = z$ vào giả thiết ta được: $x^3 - x^2 = 1$.

Lúc đó, $P = 3x\sqrt{x-1} \Rightarrow P^2 = 9x^2(x-1) = 9 \Rightarrow P = 3(P > 0)$.

b) $a - a^3 \geq b + b^3 > 0 \Rightarrow a - a^3 < 1 \Rightarrow a \in (0, 1)$.

Với $a \in (0, 1)$ thì $a - a^3 < 1$. Do đó, $1 > b + b^3 \geq 2\sqrt{b \cdot b^3} \geq 2b^2 \Rightarrow b \in (0, 1)$.

Giả sử, $a^2 + b^2 \geq 1$. Từ giả thiết ta suy ra

$a - b \geq a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)(1 - ab) \Rightarrow ab(a+b) \geq 2$ (vô lí).

Vậy $a^2 + b^2 < 1$.

Câu 2. (HSG12 tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2018-2019) Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2 x \sin^2 y + 1} + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 y + 1} + \frac{1}{\cos^2 x + 1} \leq \frac{9}{2(\sin^2 x \sin 2y + \sin 2x \sin y + \sin 2x \cos y)}.$$

Lời giải

Tác giả: Trần Viết Tường; Fb: Trần Tường

Đặt $a = \sin x \sin y, b = \sin x \cos y, c = \cos x$ thì $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{9}{4(ab+ac+bc)}$.

Thật vậy, $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{1}{(a+b)(a+c)} + \frac{1}{(b+c)(b+a)} + \frac{1}{(c+a)(c+b)} = \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

Mà

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ &\geq (a+b+c)(ab+bc+ca) - \frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) = \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

Nên $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{\pi}{4}$

Câu 3. (HSG12 tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019 (2)) Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 4\sqrt{2} \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 9 + 4\sqrt{2}.$$

Lời giải

Ta có $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9 \geq 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \geq 2\sqrt{2} \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{a^2+b^2+c^2} (*)$$

Không giảm tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{b} \leq \frac{(a-c)^2}{c}$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(a-c)^2}{c} \right] (b+c) &\geq 2 \left[(a-b)^2 + (a-c)^2 \right] \\ \Rightarrow \left[\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(a-c)^2}{c} \right] (b+c) &\geq \frac{2 \left[(a-b)^2 + (a-c)^2 \right]}{a(b+c)} \quad (1) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$.

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM:

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2a^2 + (b+c)^2 \geq 2\sqrt{2}a(b+c) \Rightarrow \frac{2}{a(b+c)} \geq \frac{2\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{2[(a-b)^2 + (a-c)^2]}{a(b+c)} \geq 2\sqrt{2} \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a\sqrt{2} = b + c$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3bc > 2\sqrt{2}bc \text{ (vì } a \geq b \geq c \text{)} \Rightarrow \frac{(b-c)^2}{bc} \geq 2\sqrt{2} \frac{(b-c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = \sqrt{2}b = \sqrt{2}c$ và các hoán vị.

Câu 4. (HSG11 tỉnh Phú Yên năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)} \leq \sqrt{6abc}$. Hãy chỉ ra một trường hợp xảy ra dấu đẳng thức.

Lời giải

a) Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F . Gọi K là điểm đối xứng của I qua AC .

$$\text{Ta có: } \frac{S_{AFIE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{AI \cdot AK}{AB \cdot AC} = \frac{IA^2}{bc}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{S_{BDIF}}{S_{ABC}} = \frac{IB^2}{ca}; \frac{S_{CEID}}{S_{ABC}} = \frac{IC^2}{ab}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = \frac{S_{AFIE} + S_{BDIF} + S_{CEID}}{S_{ABC}} = 1 \text{ Suy ra}$$

$$a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc.$$

b) Theo BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)} &\leq \sqrt{(1+1+1)[a(bc - IA^2) + b(ca - IB^2) + c(ab - IC^2)]} \\ &= \sqrt{3[3abc - (aIA^2 + bIB^2 + cIC^2)]} \end{aligned}$$

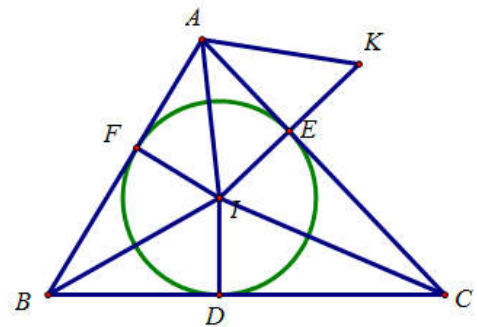
Theo ý a) ta có $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

$$\Rightarrow \sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)} \leq \sqrt{6abc} \quad (\text{ĐPCM})$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$a(bc - IA^2) = b(ca - IB^2) = c(ab - IC^2) \Leftrightarrow aIA^2 = bIB^2 = cIC^2$$

Vậy dễ thấy có một trường hợp xảy ra dấu của đẳng thức là:



$$\begin{cases} a = b = c \\ IA = IB = IC \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Câu 5. (HSG12 tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc.$$

Lời giải

Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c bằng 0 thì điều cần chứng minh đúng.

Do đó chúng ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a, b, c > 0$.

Giả sử ngược lại $a^2 + b^2 + c^2 < abc$. Khi đó $abc > a^2 \Rightarrow a < bc$. Tương tự $b < ca, c < ab$.

Do đó $abc \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca > a + b + c$ (mâu thuẫn). Do đó ta có đpcm.

Câu 6. (HSG11 Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b+c}{\sqrt{a}} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{\frac{bc}{a}}$.

Tương tự ta được $\frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}}$; $\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right).$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}}} = 2\sqrt{c}$.

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq 2\sqrt{a}$; $\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \geq 2\sqrt{b}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Do đó ta suy ra $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.

Ta cần chứng minh được $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$.

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy và giả thiết $abc = 1$.

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu 7. (HSG11 Chuyên ĐHB Bắc Bộ năm 2018-2019) Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} + \frac{b(b-2c+a)}{bc+1} + \frac{c(c-2a+b)}{ca+1} \geq 0.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Uyên; Fb: Uyen Nguyen

Ta có: $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} = \frac{a^2+1+ac+1-2(ab+1)}{ab+1} = \frac{a^2+1}{ab+1} + \frac{ac+1}{ab+1} - 2.$

Tương tự ta có: $\frac{b(b-2c+a)}{bc+1} = \frac{b^2+1}{bc+1} + \frac{ba+1}{bc+1} - 2$ và $\frac{c(c-2a+b)}{ca+1} = \frac{c^2+1}{ca+1} + \frac{cb+1}{ca+1} - 2.$

Vậy $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} + \frac{b(b-2c+a)}{bc+1} + \frac{c(c-2a+b)}{ca+1} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2+1}{ab+1} + \frac{b^2+1}{bc+1} + \frac{c^2+1}{ca+1} \right) + \left(\frac{ac+1}{ab+1} + \frac{ba+1}{bc+1} + \frac{cb+1}{ca+1} \right) - 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2+1}{ab+1} + \frac{b^2+1}{bc+1} + \frac{c^2+1}{ca+1} \right) + \left(\frac{ac+1}{ab+1} + \frac{ba+1}{bc+1} + \frac{cb+1}{ca+1} \right) \geq 6.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số ta có:

$$\frac{ac+1}{ab+1} + \frac{ba+1}{bc+1} + \frac{cb+1}{ca+1} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{ac+1}{ab+1} \cdot \frac{ba+1}{bc+1} \cdot \frac{cb+1}{ca+1}} = 3 \quad (1)$$

$$\frac{a^2+1}{ab+1} + \frac{b^2+1}{bc+1} + \frac{c^2+1}{ca+1} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2+1}{ab+1} \cdot \frac{b^2+1}{bc+1} \cdot \frac{c^2+1}{ca+1}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}.$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Swcharz ta có:

$$\begin{cases} (a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2 \\ (b^2+1)(c^2+1) \geq (bc+1)^2 \\ (c^2+1)(a^2+1) \geq (ca+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \left[(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \right]^2 \geq \left[(ab+1)(bc+1)(ca+1) \right]^2$$

$$\Rightarrow (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (ab+1)(bc+1)(ca+1) \Rightarrow \frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)} \geq 1.$$

Suy ra: $\frac{a^2+1}{ab+1} + \frac{b^2+1}{bc+1} + \frac{c^2+1}{ca+1} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}} \geq 3. \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2:

Ta có: $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} = \frac{a^2+1+ac+1-2(ab+1)}{ab+1} = \frac{a^2}{ab+1} + \frac{1}{ab+1} + \frac{ac+1}{ab+1} - 2.$

Tương tự ta có: $\frac{b(b-2c+a)}{bc+1} = \frac{b^2}{bc+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{ba+1}{bc+1} - 2$

Và $\frac{c(c-2a+b)}{ca+1} = \frac{c^2}{ca+1} + \frac{1}{ca+1} + \frac{cb+1}{ca+1} - 2.$

Vậy suy ra $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} + \frac{b(b-2c+a)}{bc+1} + \frac{c(c-2a+b)}{ca+1} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{ab+1} + \frac{b^2}{bc+1} + \frac{c^2}{ca+1} \right) + \left(\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \right) + \left(\frac{ac+1}{ab+1} + \frac{ba+1}{bc+1} + \frac{cb+1}{ca+1} \right) \geq 6.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số, ta có:

$$\frac{ac+1}{ab+1} + \frac{ba+1}{bc+1} + \frac{cb+1}{ca+1} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{ac+1}{ab+1} \cdot \frac{ba+1}{bc+1} \cdot \frac{cb+1}{ca+1}} = 3 \quad (1)$$

Mặt khác áp dụng dạng phân thức của bất đẳng thức Cauchy-Swcharz, ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2}{ab+1} + \frac{b^2}{bc+1} + \frac{c^2}{ca+1} \right) + \left(\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \right) \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3} + \frac{(1+1+1)^2}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{3(ab+bc+ca)+9}{ab+bc+ca+3} = 3. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 8. (HSG10 Nam Tiền Hải Thái Bình 2018-2019) Cho $0 < a, b, c < \sqrt[3]{\frac{32}{3}}$ và $a+b+c = 2\sqrt[3]{9}$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{32-3a^3} + \frac{1}{32-3b^3} + \frac{1}{32-3c^3} \geq \frac{1}{8} \quad (1)$$

Lời giải

Cách 1:

+ Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz dạng phân thức:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \quad (\text{với } a_i \text{ bất kỳ và } b_i > 0).$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{32-3a^3} + \frac{1}{32-3b^3} + \frac{1}{32-3c^3} \geq \frac{9}{96-3(a^3+b^3+c^3)} \quad (2)$$

+ Áp dụng BĐT Cauchy cho bộ 3 số không âm $\left(a^3, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ ta được:

$$a^3 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3}} = \frac{12}{\sqrt[3]{9}} a. \quad (3)$$

Tương tự ta cũng có: $b^3 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \geq 3\sqrt[3]{b^3 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3}} = \frac{12}{\sqrt[3]{9}} b. \quad (4)$

$$c^3 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \geq 3\sqrt[3]{c^3 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3}} = \frac{12}{\sqrt[3]{9}} c. \quad (5)$$

+ Cộng vế theo vế của (3), (4), (5) ta được:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{12}{\sqrt[3]{9}}(a + b + c) - 16 = \frac{12}{\sqrt[3]{9}} \cdot 2\sqrt[3]{9} - 16 = 8.$$

$$\Rightarrow 96 - 3(a^3 + b^3 + c^3) \leq 72$$

$$\Rightarrow VP(2) \geq \frac{9}{72} = \frac{1}{8} \quad (dpcm)$$

$$+ \text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{32-3a^3} = \frac{1}{32-3b^3} = \frac{1}{32-3c^3} \\ a^3 = \frac{8}{3}; b^3 = \frac{8}{3}; c^3 = \frac{8}{3} \\ a+b+c = 2\sqrt[3]{9} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}.$$

Cách 2:

+ Áp dụng BĐT Cauchy cho bộ 2 số không âm $\left(\frac{1}{32-3a^3}, \frac{32-3a^3}{24^2}\right)$ ta được:

$$\frac{1}{32-3a^3} + \frac{32-3a^3}{24^2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{32-3a^3} \cdot \frac{32-3a^3}{24^2}} = \frac{1}{12}.$$

+ Tương tự ta cũng có: $\frac{1}{32-3b^3} + \frac{32-3b^3}{24^2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{32-3b^3} \cdot \frac{32-3b^3}{24^2}} = \frac{1}{12}$

$$\frac{1}{32-3c^3} + \frac{32-3c^3}{24^2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{32-3c^3} \cdot \frac{32-3c^3}{24^2}} = \frac{1}{12}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{32-3a^3} + \frac{1}{32-3b^3} + \frac{1}{32-3c^3} + \frac{32-3a^3}{24^2} + \frac{32-3b^3}{24^2} + \frac{32-3c^3}{24^2} \geq 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{32-3a^3} + \frac{1}{32-3b^3} + \frac{1}{32-3c^3} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{a^3+b^3+c^3}{192} = \frac{1}{12} + \frac{a^3+b^3+c^3}{192} (*) \end{aligned}$$

+ Ta sẽ chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 8$.

Thật vậy ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) (**)$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^3}{27} = \frac{[2(a+b+c)]^3}{27}$$

Thay vào (**) ta được:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+b+c)^3 - 3 \cdot \frac{[2(a+b+c)]^3}{27} \\ &= (2\sqrt[3]{9})^3 - 3 \cdot \frac{(2 \cdot 2\sqrt[3]{9})^3}{27} = 8 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: (*)} \Leftrightarrow \frac{1}{32-3a^3} + \frac{1}{32-3b^3} + \frac{1}{32-3c^3} \geq \frac{1}{12} - \frac{8}{192} = \frac{1}{8} \text{ (dpcm)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{32-3a^3} = \frac{32-3a^3}{24^2} \\ \frac{1}{32-3b^3} = \frac{32-3b^3}{24^2} \\ \frac{1}{32-3c^3} = \frac{32-3c^3}{24^2} \\ (a+b) = (b+c) = (c+a) \\ a+b+c = 2\sqrt[3]{9} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$$

Câu 9. (HSG11 Hậu Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Dung; Fb: Dung Nguyễn

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\frac{b+c}{\sqrt{a}} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{\frac{bc}{a}}$.

Tương tự: $\frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{b}}$; $\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, ta được: $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Lại có: $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ac}{b}}} = 2\sqrt{c}$.

Tương tự: $\sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq 2\sqrt{a}$; $\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \geq 2\sqrt{b}$.

Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên, ta được: $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ (2)

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Từ (1) và (2) ta được: $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$ (3)

Ta chứng minh $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$.

Thật vậy, ta có: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}$. Mà $abc = 1$ nên $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$.

Từ đó suy ra $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$ (4)

Từ (3) và (4) ta được: $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$.

Vậy: $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$ (Điều phải chứng minh).

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 10. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b+c}{\sqrt{a}} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{\frac{bc}{a}}$

Tương tự ta được $\frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}}$; $\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}}} = 2\sqrt{c}$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq 2\sqrt{a}$; $\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \geq 2\sqrt{b}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

Do đó ta suy ra $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

Ta cần chứng minh được $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy và giả thiết $abc = 1$

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu 11. (HSG10 Kim Liên 2018-2019) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{xyz}.$$

Chứng minh rằng

$$x + y + z > 2\sqrt{xyz}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 6 số dương x^2, y^2, z^2, x, y, z ta được:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 6\sqrt{x^2 y^2 z^2 xyz} = 6\sqrt{xyz}.$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{xyz}$ nên suy ra:

$$4\sqrt{xyz} + x + y + z \geq 6\sqrt{xyz} \Leftrightarrow x + y + z \geq 2\sqrt{xyz}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = z^2 = x = y = z \Rightarrow x = y = z = 1$. Nhưng các giá trị này không thỏa mãn giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{xyz}$ nên đẳng thức không thể xảy ra.

Vậy $x + y + z > 2\sqrt{xyz}$.

Câu 12. (HSG10 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$xy + yz + xz = 3.$$

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \geq 1.$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{x^3+8} = \sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} \leq \frac{(x+2)+(x^2-2x+4)}{2} = \frac{x^2-x+6}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} \geq \frac{2x^2}{x^2-x+6}.$$

Tương tự, ta cũng có $\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} \geq \frac{2y^2}{y^2-y+6}; \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \geq \frac{2z^2}{z^2-z+6}.$

Từ đó suy ra:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \geq \frac{2x^2}{x^2-x+6} + \frac{2y^2}{y^2-y+6} + \frac{2z^2}{z^2-z+6}. \quad (1).$$

Chứng minh bổ đề: Cho $x, y > 0$ và $a, b \in \mathbb{R}$ ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow \frac{a^2y+b^2x}{xy} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (ay-bx)^2 \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Áp dụng bổ đề ta có:

$$2 \left[\frac{x^2}{x^2-x+6} + \frac{y^2}{y^2-y+6} + \frac{z^2}{z^2-z+6} \right] \geq 2 \left[\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2-(x+y)+12} + \frac{z^2}{z^2-z+6} \right] \\ \geq \frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}.$$

Đến đây, ta chỉ cần chứng minh: $\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18} \geq 1$ (3)

Do $x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18 = (x+y+z)^2 - (x+y+z) - 2(xy+yz+zx) + 18 \\ = (x+y+z)^2 - (x+y+z) + 12 > 0$.

Nên (3) $\Leftrightarrow 2(x+y+z)^2 \geq x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x+y+z \geq 6$ (4).

Mặt khác, do x, y, z là các số dương nên ta có: $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx=3$ và $x+y+z \geq \sqrt{3(xy+yz+zx)}=3$.

Nên bất đẳng thức (4) đúng.

Từ (1), (2), (3) và (4), ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Câu 13. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-3b \leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}.$$

Lời giải

Với mọi số thực dương x, y, z, t , ta có:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right)^2 \geq \frac{1}{4} \left(\frac{16}{x+y+z+t} \right)^2 = \frac{64}{(x+y+z+t)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t$.

Ta có: $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} = \frac{4}{(2a+2)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \\ = 4 \left[\frac{1}{(2a+2)^2} + \frac{1}{(b+2)^2} + \frac{1}{(c+3)^2} + \frac{1}{(c+3)^2} \right] \\ \geq 4 \cdot \frac{64}{(2a+2+b+2+c+3+c+3)^2} = \frac{256}{(2a+b+2c+10)^2}.$

Theo giả thiết, ta có: $a^2+b^2+c^2-3b \leq 0$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho các số không âm, ta có:

$$\begin{aligned} 0 < 2a + b + 2c + 10 &= 2a + 4b + 2c + 10 - 3b \\ &\leq (a^2 + 1) + (b^2 + 4) + (c^2 + 1) + 10 - 3b = a^2 + b^2 + c^2 - 3b + 16 \\ &\leq 16 \\ \Rightarrow 0 < (2a + b + 2c + 10)^2 &\leq 256 \end{aligned}$$

Suy ra: $P \geq \frac{256}{(2a + b + 2c + 10)^2} \geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2 = b + 2 = c + 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 3b = 0 \\ a = 1; b = 2; c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy $\min P = 1$.

Bài tập tương tự: (Lê Cảnh Dương-sưu tầm).

Câu 14. (HSG12 tỉnh Quảng Bình năm 2018-2019) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta luôn có:

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

Lời giải

Tác giả: Hoàng Văn Phiên; Fb: Phiên Văn Hoàng

Cách 1

+ Xét $A = \sqrt{\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)}} = \sqrt{\log_{n+1} n \cdot \log_{n+1}(n+2)}$.

+ Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương $\log_{n+1} n$ và $\log_{n+1}(n+2)$ ta được:

$$\sqrt{\log_{n+1} n \cdot \log_{n+1}(n+2)} \leq \frac{\log_{n+1} n + \log_{n+1}(n+2)}{2} = \frac{\log_{n+1} n(n+2)}{2}.$$

+ Mà $n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$ nên $n^2 + 2n < (n+1)^2$.

$$\Rightarrow \frac{\log_{n+1}(n^2 + 2n)}{2} < \frac{\log_{n+1}(n+1)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\log_{n+1}(n^2 + 2n)}{2} < 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log_{n+1} n \cdot \log_{n+1}(n+2)} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)}} < 1 \Leftrightarrow \log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1).$$

Cách 2

Tác giả:; Fb: Nguyen Trang

+ Với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta có:

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2) \Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln n} > \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}.$$

+ Xét hàm số $y = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ với $x > 1$.

$$+ \text{Ta có: } y' = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}.$$

+ Với $\forall x > 1$ thì $x+1 > x > 1$; $\ln(x+1) > \ln x > 0 \Rightarrow x \ln x - (x+1) \ln(x+1) < 0$.

$$\Rightarrow y' < 0, \forall x > 1.$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

+ Do đó với mọi số nguyên dương $n > 1$ thì $y(n) > y(n+1)$.

$$\text{Vậy } \log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2).$$

Câu 15. (HSG10 CẦU GIẤY – THƯỜNG TÍN - HÀ NỘI 2018-2019) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải

Tác giả: Thu Hà ; Fb: Thu Ha

Do a, b, c dương và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nên $0 < a, b, c < 1$ và $1 - a^2, 1 - b^2, 1 - c^2 > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm $2a^2, 1 - a^2, 1 - a^2$, ta được:

$$2a^2 + (1 - a^2) + (1 - a^2) \geq 3\sqrt[3]{2a^2(1 - a^2)(1 - a^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2(1 - a^2)(1 - a^2) \leq \frac{2^3}{27} \quad (*) , \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 3a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} = \frac{a}{1 - a^2} = \frac{a^2}{a(1 - a^2)} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2a^2(1 - a^2)(1 - a^2)}} \stackrel{(*)}{\geq} \frac{a^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{27}}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{b}{c^2 + a^2} = \frac{b}{1 - b^2} = \frac{b^2}{b(1 - b^2)} = \frac{b^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2b^2(1 - b^2)(1 - b^2)}} \geq \frac{b^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{27}}} = \frac{3\sqrt{3}b^2}{2} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{c}{1 - c^2} = \frac{c^2}{c(1 - c^2)} = \frac{c^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2c^2(1 - c^2)(1 - c^2)}} \geq \frac{c^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{27}}} = \frac{3\sqrt{3}c^2}{2} \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) về theo về ta được:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm). Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 16. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Tác giả: Hồ Văn Thảo ; Fb: Thảo Thảo.

Ta có
$$\begin{cases} \frac{4}{a^2+b^2} = \frac{4}{3-c^2} \\ \frac{4}{b^2+c^2} = \frac{4}{3-a^2}, \text{ vì } a^2+b^2+c^2=3 \\ \frac{4}{a^2+c^2} = \frac{4}{3-b^2} \end{cases}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương:

$$\frac{4}{3-a^2} + (3-a^2) \geq 2\sqrt{\frac{4}{3-a^2}(3-a^2)} = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{3-a^2} + 1 \geq a^2 + 2 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2+c^2} + 1 \geq a^2 + 2$$

Tương tự ta chứng minh được:
$$\begin{cases} \frac{4}{c^2+a^2} + 1 \geq b^2 + 2 \\ \frac{4}{a^2+b^2} + 1 \geq c^2 + 2 \end{cases}$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức mới chứng minh ta được:

$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right) \geq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$$

Ta xét: $(a^2+2)(b^2+2) = [(a^2+1)+1][[(b^2+1)+1]] = (a^2+1)(b^2+1) + a^2 + b^2 + 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$(a^2+1)(b^2+1) \geq (a+b)^2, \quad a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$\Rightarrow (a^2+2)(b^2+2) \geq (a+b)^2 + \frac{1}{2}(a+b)^2 + 3 \Leftrightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq \left[\frac{3}{2}(a+b)^2 + 3\right](c^2+2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3\left[\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]\left[(\sqrt{2})^2 + c^2\right] \geq 3\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$$

Vậy nên
$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right) \geq 3(a+b+c)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 17. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0 thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6b$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(a+b+c)^2} + \frac{8}{(b+11)^2} + \frac{1}{(c+6)^2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{(a+b+c)^2} + \frac{8}{(b+11)^2} + \frac{1}{(c+6)^2} = \frac{4}{(2a+2b+2c)^2} + \frac{8}{(b+11)^2} + \frac{4}{(2c+12)^2}$$

$$= 4 \left[\frac{1}{(2a+2b+2c)^2} + \frac{1}{(b+11)^2} + \frac{1}{(b+11)^2} + \frac{1}{(2c+12)^2} \right]$$

$$\geq 4 \cdot \frac{64}{(2a+2b+2c+2b+22+2c+12)^2} = \frac{256}{(2a+4b+4c+34)^2}.$$

Theo giả thiết, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 - 6b \leq 0$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho các số không âm, ta có:

$$0 < 2a + 4b + 4c + 34 = 2a + 10b + 4c + 34 - 6b$$

$$\leq (a^2 + 1) + (b^2 + 25) + (c^2 + 4) + 34 - 6b = a^2 + b^2 + c^2 - 6b + 64$$

$$\leq 64$$

$$\Rightarrow 0 < (2a + 4b + 4c + 34)^2 \leq 64^2$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{256}{(2a+4b+4c+34)^2} \geq \frac{256}{64^2} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+2c=b+11=2c+12 \\ a^2+b^2+c^2-6b=0 \\ a=1; b=5; c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{1}{16}.$$

(4 điểm).

Câu 18. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho n số $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$$

Lời giải

Tác giả: Trần Đức Phương; Fb: Phuong Tran Duc.

Phản biện: Nguyễn Phương Thu; Fb: Nguyễn Phương Thu

$$\text{Xét tam thức } f(x) = x^2 - (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

Ta có:

$$f(1) = 1 - (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

$$= a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + a_3(a_3 - 1) + \dots + a_n(a_n - 1)$$

Mặt khác $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0; 1]$ nên

$$\begin{cases} a_1(a_1 - 1) \leq 0 \\ a_2(a_2 - 1) \leq 0 \\ \dots \\ a_n(a_n - 1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) \leq 0$$

$$\text{Mà } f(0) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0 \Rightarrow f(1) \cdot f(0) \leq 0$$

Mặt khác hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$.

$$\text{Suy ra } \Delta = (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq 0$$

$$\text{Do đó: } (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Câu 19. (HSG10 PHÙNG KHẮC KHOAN- HÀ NỘI 2018-2019) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

Lời giải

Tác giả: Cao Đình Định; Fb: Dinh Cao

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương x, y, z ta được:

$$x^3 + y^2 \geq 2\sqrt{x^3 \cdot y^2} = 2xy \cdot \sqrt{x}$$

$$y^3 + z^2 \geq 2\sqrt{y^3 \cdot z^2} = 2yz \cdot \sqrt{y}$$

$$z^3 + x^2 \geq 2\sqrt{z^3 \cdot x^2} = 2zx \cdot \sqrt{z}$$

Khi đó BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{y}}{2yz\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{z}}{2zx\sqrt{z}} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy} \Rightarrow \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$$

$$\text{CMTT: } \frac{1}{yz} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right); \quad \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được: } \frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 20. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019) Chứng minh rằng với mọi số thực $a, b, c \in [1; 2]$ ta luôn có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq 10.$$

Lời giải

Tác giả: Vũ Quốc Triệu ; Fb: Vũ Quốc Triệu

+ / Bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq 10 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \leq 7.$

+ / Không mất tính tổng quát, giả sử: $a \geq b \geq c$. Khi đó:

$$(a-b)(b-c) \geq 0 \Leftrightarrow ab+bc \geq b^2+ac \Leftrightarrow \frac{a}{c}+1 \geq \frac{b}{c}+\frac{a}{b} \text{ (vì } bc > 0 \text{)}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$ hoặc $b=c$.

$$\text{Cũng có: } (a-b)(b-c) \geq 0 \Leftrightarrow ab+bc \geq b^2+ac \Leftrightarrow 1+\frac{c}{a} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b} \text{ (vì } ab > 0 \text{)}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$ hoặc $b=c$.

$$\text{Do đó: } \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \leq \frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \leq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+2 \quad (1)$$

+ / Ta có: $x = \frac{a}{c} (1 \leq x \leq 2)$ nên:

$$(x-1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \leq 0 \Rightarrow x+\frac{2}{x} \leq 3 \Rightarrow x+\frac{1}{x} \leq 3-\frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ c = 2a \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \leq 7 \text{ (đpcm).}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} a=b=2, c=1 \\ a=c=2, b=1. \\ b=c=2, a=1 \end{cases}$$

Câu 21. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{2a+1}+\frac{b^2}{2b+1}+\frac{c^2}{2c+1} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6}}.$$

Lời giải

Cách 1: Tác giả: Trương Văn Tâm; Fb: Văn Tâm Trương

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\underbrace{\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6}} - \frac{a^2}{2a+1} - \frac{b^2}{2b+1} - \frac{c^2}{2c+1}}_{VT} \geq 0$$

Trong đó

$$-\frac{a^2}{2a+1} = -\frac{a^2}{a+a+1} \geq -\frac{a^2}{3\sqrt[3]{a \cdot a \cdot 1}} = -\frac{1}{3} \cdot a \cdot \sqrt[3]{a} = -\frac{1}{3} \cdot a \cdot \sqrt[3]{a \cdot 1 \cdot 1} \geq -\frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a+1+1}{3} = -\frac{a^2}{9} - \frac{2a}{9}.$$

$$\text{Tương tự ta có } -\frac{b^2}{2b+1} \geq -\frac{b^2}{9} - \frac{2b}{9} \text{ và } -\frac{c^2}{2c+1} \geq -\frac{c^2}{9} - \frac{2c}{9}.$$

$$\text{Suy ra } VT \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6}} - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{2}{3}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{a^2+b^2+c^2+6}. \text{ Ta có } \begin{cases} a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3 \\ a^2+b^2+c^2 \leq (a+b+c)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow t \in [3; \sqrt{15}].$$

Lúc đó, với mọi $t \in [3; \sqrt{15}]$ ta có

$$VT \geq \frac{t^2-6}{t} - \frac{1}{9}(t^2-6) - \frac{2}{3} = \frac{t^2-6}{t} - \frac{t^2}{9} = \frac{9t^2-54-t^3}{9t} = \frac{(3-t)[t(t-6)-18]}{9t} \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $t=3$, suy ra $a=b=c=1$.

Cách 2: Tác giả: Thành Đức Trung; Fb: Thành Đức Trung

$$\text{Ta có } \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2a+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2a+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2a^2+a} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2a+1} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2a^2+a}.$$

$$\text{Tương tự có } \frac{b^2}{2b+1} = \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{2b^2+b} \text{ và } \frac{c^2}{2c+1} = \frac{c}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2c^2+c}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2a^2+a} + \frac{b^2}{2b^2+b} + \frac{c^2}{2c^2+c} \right).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2a^2+a} + \frac{b^2}{2b^2+b} + \frac{c^2}{2c^2+c} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+3} = \frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)+3} \\ \Rightarrow \frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} &\leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)+3} = \frac{3}{2} - \frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)+6}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{3}{2} - \frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)+6} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6}}. \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 6}$. Ta có
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \leq 9 \end{cases}.$$

Suy ra $t \in [3; \sqrt{15}]$. Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{9}{4t^2 - 18} \leq \frac{t^2 - 6}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 6}{t} + \frac{9}{2(2t^2 - 9)} \geq \frac{3}{2}$.

Mặt khác, ta có $0 < 2t^2 - 9 = \frac{2}{9} \cdot 9t^2 - 9 \leq \frac{2}{9} \cdot \frac{t^4 + 81}{2} - 9 = \frac{t^4}{9} \Rightarrow \frac{9}{2(2t^2 - 9)} \geq \frac{81}{2t^4}$.

Ta cần chứng minh $t - \frac{6}{t} + \frac{81}{2t^4} \geq \frac{3}{2}$.

Thật vậy, vì $t \geq 3$ nên
$$\begin{cases} t + \frac{81}{2t^4} = \frac{t}{3} + \frac{t}{6} + \frac{t}{6} + \frac{t}{6} + \frac{t}{6} + \frac{81}{2t^4} \geq \frac{t}{3} + 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{81}{2592}} = \frac{t}{3} + \frac{5}{2} \geq \frac{7}{2} \\ -\frac{6}{t} \geq -2 \end{cases}$$

Suy ra $t - \frac{6}{t} + \frac{81}{2t^4} \geq \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $t = 3$, suy ra $a = b = c = 1$.

Câu 22. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2 + (a+c)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2 + (a+b)^2}.$$

Lời giải

Tác giả: Võ Quang Anh; Fb: Anh Võ Quang.

Ta có:
$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} - 1 = \frac{(1-2a)^2}{a^2 + (1-a)^2} - 1 = \frac{2a^2 - 2a}{2a^2 - 2a + 1} = \frac{2a(a-1)}{1-2a(1-a)}. (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho hai số $2a; 1-a$ ta được:

$$2a(1-a) \leq \frac{(2a+1-a)^2}{4} = \frac{(a+1)^2}{4}. (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra:

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} - 1 \geq \frac{2a(a-1)}{1 - \frac{(a+1)^2}{4}} = \frac{8a(a-1)}{(3+a)(1-a)} = -\frac{8a}{(3+a)} = -8 + \frac{24}{3+a}.$$

Chứng minh tương tự, ta suy ra:

$$P - 3 \geq -24 + 24 \left(\frac{1}{3+a} + \frac{1}{3+b} + \frac{1}{3+c} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – HM ta suy ra: $\frac{1}{3+a} + \frac{1}{3+b} + \frac{1}{3+c} \geq \frac{9}{9+a+b+c} = \frac{9}{10}$.

Do đó, $P \geq \frac{3}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2a=1-a \\ a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{5}$ đạt tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Câu 23. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} + (a+b-3c) \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

Lời giải

Tác giả: Lê Đức Hợp ; Fb: Le Hoop

Bổ đề: Cho m, n là hai số thực dương khi đó ta có

$$a) \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{8}{(m+n)^2} \quad b) \frac{m^3 + n^3}{2} \geq \left(\frac{m+n}{2} \right)^3.$$

Thật vậy

$$a) \text{ Ta có } \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq 2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = 2 \cdot \frac{1}{m \cdot n} \geq 2 \cdot \frac{4}{(m+n)^2} = \frac{8}{(m+n)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = n$.

$$b) \frac{m^3 + n^3}{2} \geq \left(\frac{m+n}{2} \right)^3 \Leftrightarrow 4m^3 + 4n^3 \geq m^3 + 3m^2 \cdot n + 3m \cdot n^2 + n^3 \Leftrightarrow m^3 + n^3 - m^2 \cdot n - m \cdot n^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-n)^2(m+n) \geq 0 \text{ (luôn đúng với } m, n \text{ là hai số thực dương)}.$$

$$\text{Vậy } \frac{m^3 + n^3}{2} \geq \left(\frac{m+n}{2} \right)^3 \quad \forall m, n > 0; \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow m = n.$$

Áp dụng vào bài toán.

$$\text{Ta có } (a+c)(b+c)=4c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c} + 1 \right) \left(\frac{b}{c} + 1 \right) = 4.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{c} > 0; y = \frac{b}{c} > 0. \text{ Từ giả thiết ta có } (x+1)(y+1) = 4.$$

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} + (a+b-3c) \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3} + (a+b-3c) \cdot \sqrt{\frac{8}{(a+b)^2}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3} + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}c}{a+b} = \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3} + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{x+y} = 32 \left[\left(\frac{x}{y+3}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+3}\right)^3 \right] + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{x+y}$$

$$\Rightarrow P \geq 8 \cdot \left(\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3}\right)^3 + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{x+y}.$$

Ta có $\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} = \frac{x^2+3x+y^2+3y}{(x+3)(y+3)} = \frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}.$

Từ $(x+1)(y+1)=4 \Leftrightarrow xy+x+y=3 \Leftrightarrow xy=3-x-y.$

Ta có $3 = xy+x+y \leq \frac{(x+y)^2}{4} + x+y \Leftrightarrow \frac{(x+y)^4}{4} + (x+y) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x+y \geq 2$ (vì $x+y > 0$).

Đặt $t = x+y \geq 2$. Ta có $xy = 3-t$.

Khi đó

$$P \geq 8 \cdot \left[\frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9} \right]^3 + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{x+y} = 8 \cdot \left[\frac{t^2+3t-2(3-t)}{3-t+3t+9} \right]^3 + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{t}.$$

$$\Rightarrow P \geq 8 \cdot \left(\frac{t^2+5t-6}{2t+12} \right)^3 + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{t} = (t-1)^3 - \frac{6\sqrt{2}}{t} + 2\sqrt{2}.$$

Xét hàm $f(t) = (t-1)^3 - \frac{6\sqrt{2}}{t} + 2\sqrt{2}$ trên $[2; +\infty)$.

Ta có

$$f'(t) = 3(t-1)^2 + \frac{6\sqrt{2}}{t^2} > 0 \quad \forall t \in [2; +\infty).$$

Vậy hàm số $f(t) = (t-1)^3 - \frac{6\sqrt{2}}{t} + 2\sqrt{2}$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Từ đó suy ra $P \geq f(t) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2}.$

Vậy $P_{\min} = 1 - \sqrt{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = c.$

Câu 24. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} - \frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}} \geq -5.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Dung; Fb: Dung Nguyen

Cách 1.

Ta có: $\sqrt{ab(a+c)(b+c)} = \sqrt{(a^2+ac)(b^2+bc)} \stackrel{\text{cosi}}{\leq} \frac{a^2+ac+b^2+bc}{2}.$

$$\Rightarrow \sqrt{ab(a+c)(b+c)} \leq \frac{a^2+b^2+c(a+b)}{2} \quad (1).$$

Lại có: $c(a+b) \stackrel{\text{cosi}}{\leq} \frac{c^2+(a+b)^2}{2}$ và $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \Rightarrow c(a+b) \stackrel{\text{cosi}}{\leq} \frac{c^2+2(a^2+b^2)}{2} \quad (2).$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \sqrt{ab(a+c)(b+c)} \leq \frac{a^2+b^2+\frac{c^2+2(a^2+b^2)}{2}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab(a+c)(b+c)} \leq \frac{4a^2+4b^2+c^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} \geq \frac{4}{4a^2+4b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} \geq \frac{36}{4a^2+4b^2+c^2}.$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} - \frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}} \geq \frac{36}{4a^2+4b^2+c^2} - \frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}.$$

Đặt: $t = \sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}$. Vì a, b, c là các số thực dương nên $t > 2$.

Suy ra: $4a^2+4b^2+c^2 = t^2 - 4$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{36}{t^2-4} - \frac{32}{t}$ với $t > 2$.

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-72t}{(t^2-4)^2} + \frac{32}{t^2} = \frac{32t^4 - 72t^3 - 256t^2 + 512}{(t^2-4)^2 \cdot t^2} = \frac{(t-4)(32t^3 + 56t^2 - 32t - 128)}{(t^2-4)^2 \cdot t^2}.$$

Ta có: $32t^3 + 56t^2 - 32t - 128 = (32t^3 - 128) + (56t^2 - 32t) = 32(t^3 - 4) + 4t(14t - 8) > 0$ (vì $t > 2$).

Do đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Bảng biến thiên:

t	2	4	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	-5	0

$$\Rightarrow f(t) \geq -5 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} - \frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}} \geq -5.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2} = 4 \\ a = b \\ c = a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a^2 = 12 \\ a = b \\ c = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Cách 2:

Ta có:

$$\sqrt{ab(a+c)(b+c)} = \sqrt{(ab+bc)(ab+ac)} \leq \frac{ab+bc+ab+ac}{2} \Rightarrow \sqrt{ab(a+c)(b+c)} \leq \frac{2ab+bc+ac}{2}.$$

$$\text{Đồng thời: } \sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2} = \sqrt{4+(2a^2+2b^2)+2a^2+\frac{c^2}{2}+2b^2+\frac{c^2}{2}} \geq \sqrt{4+4ab+2ac+2bc}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2} \geq \sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} - \frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}} \geq \frac{18}{2ab+ac+bc} - \frac{32}{\sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}. \text{ Vì } a, b, c \text{ là các số thực dương nên } t > 2. \Rightarrow 2ab+ac+bc = \frac{t^2-4}{2}.$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{36}{t^2-4} - \frac{32}{t} \text{ với } t > 2.$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-72t}{(t^2-4)^2} + \frac{32}{t^2} = \frac{32t^4 - 72t^3 - 256t^2 + 512}{(t^2-4)^2 \cdot t^2} = \frac{(t-4)(32t^3 + 56t^2 - 32t - 128)}{(t^2-4)^2 \cdot t^2}.$$

$$\text{Ta có: } 32t^3 + 56t^2 - 32t - 128 = (32t^3 - 128) + (56t^2 - 32t) = 32(t^3 - 4) + 4t(14t - 8) > 0 \text{ (vì } t > 2).$$

Do đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$. Bảng biến thiên:

t	2	4	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	-5	0

$$\Rightarrow f(t) \geq -5 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} - \frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}} \geq -5.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \sqrt{4+2(2ab+ac+bc)} = 4 \\ a = b \\ c = a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a^2 = 12 \\ a = b \\ c = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Chuyên đề

7

Giá trị lớn nhất nhỏ nhất

Câu 1. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Cho ba số thực x, y, z thuộc khoảng $(0;3)$ thỏa mãn $\left(\frac{2}{x}-1\right)\left(\frac{3}{y}-1\right)\left(\frac{4}{z}-1\right)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$.

Lời giải

Tác giả: Dương Quang Hưng; Fb: Dương Quang Hưng

Đặt: $a = \frac{x}{2}, b = \frac{y}{3}, c = \frac{z}{4}$.

Khi đó ta có $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right), b \in (0;1), c \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$, thỏa mãn $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=1$ và $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Từ: $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=1 \Rightarrow ab+bc+ca=2abc+a+b+c-1$.

Ta có: $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$.

Do đó: $P = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) - 4abc + 2$

$\geq -\frac{4}{27}(a+b+c)^3 + (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) + 2$

Đặt $t = a+b+c, t \in \left(0; \frac{13}{4}\right)$. Khi đó: $P \geq -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2$.

Xét hàm số $f(t) = -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2, t \in \left(0; \frac{13}{4}\right)$

Ta có: $f'(t) = -\frac{4}{9}t^2 + 2t - 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$ hoặc $t = 3$.

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{13}{4}$		
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$	2		$\frac{3}{4}$	1	$\frac{211}{216}$	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq \frac{3}{4}, \forall t \in (0;3)$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{3}{2}$.

Khi $t = \frac{3}{2}$ ta được: $a = b = c = \frac{1}{2}$ suy ra $x = 1, y = \frac{3}{2}, z = 2$.

Do đó: $\min P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 1, y = \frac{3}{2}, z = 2$.

Câu 2. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M + m$ bằng.

A. 41.

B. 42.

C. 44.

D. 43.

Lời giải

Tác giả: Lê Phan, FB: Lê Phan

Chọn D

$$x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2(y+1)}; \quad \left(DK : \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x + y \geq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq (1+2)(x-1+y+1) \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 3.$$

Đặt $t = x + y \in [0; 3]$

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} \\ &= (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-(x+y)} \\ &= t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t} \end{aligned}$$

Xét $f(t) = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$ với $t \in [0; 3]$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t + 2 - \frac{8}{2\sqrt{4-t}} = 2t + 2 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{4-t}} \right] \\ &= 2t + 2 \left(\frac{\sqrt{4-t} - 2}{\sqrt{4-t}} \right) = 2t + \frac{2(4-t-4)}{\sqrt{4-t}(\sqrt{4-t}+2)} \\ &= 2t \left[1 - \frac{1}{4-t+2\sqrt{4-t}} \right] = \frac{2t(3-t+2\sqrt{4-t})}{\sqrt{4-t}(\sqrt{4-t}+2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0; 3]$$

$$\Rightarrow \min_{[0;3]} f(t) = f(0) = 2 + 8\sqrt{4} = 18 \quad (\text{Khi } x = 1; y = -1)$$

$$\max_{[0;3]} f(t) = f(3) = 9 + 6 + 2 + 8 = 25 \quad (\text{Khi } x = 2; y = 1)$$

Vậy $M + m = 25 + 18 = 43$.

Câu 3. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

- A. $d + 2a$. B. $d + 8a$. C. $d - 16a$. D. $d - 11a$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Thị Phương Thảo; Fb: Phương Thao Bui

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 3ax^2 + c \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{3a}.$$

Do $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2$; $x_2 = 2$ với $a < 0$,

$$-\frac{c}{3a} > 0 \text{ và } -\sqrt{\frac{-c}{3a}} = -2 \Rightarrow c = -12a.$$

x_1 là điểm cực tiểu của hàm số và x_2 là điểm cực đại của hàm số.

$$\text{Khi đó } \max_{[1;3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = d - 16a.$$

Câu 4. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Nhà xe khoán cho hai tài xế taxi Nam và Tiến mỗi người lần lượt nhận 32 lit và 72 lit xăng. Hỏi tổng số ngày ít nhất là bao nhiêu để hai tài xế chạy tiêu thụ hết số xăng của mình được khoán, biết rằng chỉ tiêu cho hai người một ngày tổng cộng chỉ chạy đủ hết 10 lit xăng và mỗi ngày lượng xăng của mỗi người chạy là không thay đổi.

- A. 20 ngày. B. 25 ngày C. 15 ngày. D. 10 ngày

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Ánh Dung; Fb: Nguyễn Ánh Dung

Chọn A

Gọi số lit xăng tài xế taxi Nam tiêu thụ mỗi ngày là x lit.

Gọi số lit xăng tài xế taxi Tiến tiêu thụ mỗi ngày là y lit.

Theo bài ra ta có $x + y = 10$

Tài xế Nam tiêu thụ hết 32 lit xăng trong số ngày là: $\frac{32}{x}$ (ngày)

Tài xế Tiến tiêu thụ hết 72 lit xăng trong số ngày là: $\frac{72}{y}$ (ngày)

Số ngày hai tài xế chạy hết số xăng được khoán là: $\frac{32}{x} + \frac{72}{y}$ (ngày)

Đặt $M = \frac{32}{x} + \frac{72}{y}$, $M > 10$ (Vì số lit xăng hai tài xế nhận được là 104 lit, mỗi ngày tiêu thụ hết 10 lit xăng)

$$M = \frac{32}{x} + \frac{72}{y} = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x} = \frac{32(10-x) + 72x}{x(10-x)} = \frac{320 + 40x}{10x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow M(10x - x^2) = 320 + 40x$$

$$\Leftrightarrow 10Mx - Mx^2 = 320 + 40x$$

$$\Leftrightarrow Mx^2 + 10x(4 - M) + 320 = 0$$

$$\Delta' = 25 \cdot (4 - M)^2 - 320 \cdot M$$

$$= 25 \cdot (16 - 8M + M^2) - 320 \cdot M$$

$$= 400 - 520M + 25M^2$$

$$= (5M - 52)^2 - 2304$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (5M - 52)^2 - 2304 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5M - 52 \geq \sqrt{2304} \\ 5M - 52 \leq -\sqrt{2304} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5M - 52 \geq 48 \\ 5M - 52 \leq -48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5M \geq 100 \\ 5M \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \geq 20 \\ M \leq \frac{4}{5} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $M > 10$ ta có $M \geq 20$

Vậy tổng số ngày ít nhất để hai tài xế chạy hết số xăng mình được khoán là 20 ngày.

Câu 5. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$5(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)(xy + yz + zx) + 15xyz.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2(x + y + z)} - (y^2 + z^2).$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Minh; Fb: Minh Văn Nguyễn

Khi x, y, z dương thì

$$5(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)(xy + yz + zx) + 15xyz$$

$$\Leftrightarrow 5(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 5(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = xy + yz + zx$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 6x(y+z) = 6yz - 5(y^2 + z^2).$$

$$\text{Vì } 6yz - 5(y^2 + z^2) = -4(y-z)^2 - (y+z)^2 \leq -(y+z)^2$$

$$\text{nên } 5x^2 - 6xA \leq -A^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 6xA + A^2 \leq 0 \text{ (với } A = y+z > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{5} \leq x \leq A \text{ hay } \frac{1}{5}(y+z) \leq x \leq y+z.$$

$$\text{Do đó } P = \sqrt{2(x+y+z)} - (y^2 + z^2) \leq 2\sqrt{y+z} - \frac{(y+z)^2}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{y+z}, t > 0 \text{ khi đó } P \leq 2t - \frac{1}{2}t^4.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4 \text{ với } t > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2 - 2t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{3}{2}$	

$$\text{Suy ra } \max P = \frac{3}{2} \text{ khi } t = 1 \Leftrightarrow y+z=1 \Rightarrow \begin{cases} x = y+z=1 \\ y = z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Câu 6. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho các số thực dương x, y thay đổi và thỏa điều kiện $x > y > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \log_{\frac{x}{y}}^2(x^2) + 3\log_y \frac{x}{y}$ là:

A. 19.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Thắng ; Fb: Nguyễn Thắng.

Chọn D

$$\text{Vì } x > y > 1 \text{ nên ta có: } T = \frac{4}{\log_x^2 \frac{x}{y}} + 3(\log_y x - 1) = \frac{4}{(1 - \log_x y)^2} + \frac{3}{\log_x y} - 3.$$

Đặt $t = \log_x y \Rightarrow 0 < t < 1$ (vì $x > y > 1$) thì: $T = \frac{4}{(t-1)^2} + \frac{3}{t} - 3 = \frac{-3t^3 + 9t^2 - 5t + 3}{t(t-1)^2} = -3 + \frac{3t^2 - 2t + 3}{t^3 - 2t^2 + t}$.

$$\Rightarrow T'(t) = \frac{-3t^4 + 4t^3 - 10t^2 + 12t - 3}{t^2(t-1)^4} = \frac{(t-1)(-3t^3 + t^2 - 9t + 3)}{t^2(t-1)^4} = \frac{-3t^3 + t^2 - 9t + 3}{t^2(t-1)^3} = \frac{(-3t+1)(t^2+3)}{t^2(t-1)^3}$$

$$T' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{3}$	1
T'		- 0 +	
T			15

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 15.

Cách 2: Của cô Lê Thị Hồng Vân

Đặt $a = 1 - \log_x y; b = \log_x y \Rightarrow \begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ a + b = 1 \end{cases}$ và $T = \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b} - 3$

Áp dụng BĐT Cô - si cho 2 số dương ta có: $\frac{4}{a^2} + \frac{3}{b} \geq 2\sqrt{\frac{12}{a^2b}} \Rightarrow T \geq 2\sqrt{\frac{12}{a^2b}} - 3$.

Ta lại có: Theo BĐT Cô - si cho 3 số dương: $\frac{a^2}{4} \cdot b \leq \left(\frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$

$$\Rightarrow a^2b \leq \frac{4}{27} \Rightarrow T \geq 2\sqrt{12 \cdot \frac{4}{27}} - 3 = 15.$$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a, b > 0; a + b = 1 \\ \frac{4}{a^2} = \frac{3}{b}; \frac{a}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 15.

Câu 7. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x^4 + y^4 + z^4 \leq 2y^2 + 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \sqrt{2}y(x+z) + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Phạm Minh Trí; Fb: Tri Nguyen

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$\sqrt{2}y(x+z) \leq \frac{\left[(\sqrt{2}y)^2 + (x+z)^2\right]}{2} \leq \frac{(2y^2 + 2x^2 + 2z^2)}{2} = y^2 + x^2 + z^2$$

$$\text{Vậy } P = \sqrt{2}y(x+z) + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \leq x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

Đặt $t = x^2 + y^2 + z^2$ thì ta có $P \leq t + \frac{1}{t+1}$. Ta lại có đánh giá sau đây:

$$2y^2 + 2 \geq x^4 + y^4 + z^4 \Rightarrow 2y^2 + 8 \geq (x^4 + 1) + (y^4 + 4) + (z^4 + 1) \geq 2x^2 + 4y^2 + 2z^2 \Rightarrow 4 \geq x^2 + y^2 + z^2$$

Vậy ta có $t \in (0, 4]$. Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t+1}$ với $t \in (0, 4]$, ta có

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} \geq 0 \text{ với mọi } t \in (0, 4] \text{ nên } f(t) \leq f(4). \text{ Vậy } P \leq t + \frac{1}{t+1} \leq 4 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} x = z = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ x = z = 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (1, \sqrt{2}, 1)$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{21}{4} \text{ khi } (x, y, z) = (1, \sqrt{2}, 1)$$

Câu 8. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Yên Phương; Fb: Yenphuong Nguyen

Phản biện: Fb: Hieu Le

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$2 \cos x - \sin x + 4 = 2(\cos x + 1) + (1 - \sin x) + 1 > 0 \text{ (vì } \sin x \in [-1; 1], \cos x \in [-1; 1])$$

nên

$$y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow y(2 \cos x - \sin x + 4) = \cos x + 2 \sin x + 3$$

$$\Leftrightarrow (y+2)\sin x + (1-2y)\cos x + (3-4y) = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $(y+2)^2 + (1-2y)^2 \geq (3-4y)^2$,

$$\text{tương đương } 11y^2 - 24y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2.$$

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho lần lượt là $m = \frac{2}{11}, M = 2$.

Câu 9. (HSG12 Quảng Ninh 2018-2019) Một hộ gia đình cần xây dựng một bể chứa nước, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $24(m^3)$. Tỉ số giữa chiều cao của bể và chiều rộng bằng 4. Biết rằng bể chỉ có các mặt bên và mặt đáy (không có mặt trên). Chiều dài của đáy bể bằng bao nhiêu để xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Lời giải

Gọi chiều cao, chiều rộng, chiều dài của bể lần lượt là h, x, y (m) (Điều kiện: $h, x, y > 0$)

$$\text{Theo đề bài ta có } \begin{cases} \frac{h}{x} = 4 \\ xyh = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4x \\ y = \frac{6}{x^2} \end{cases}$$

Tổng diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của bể là $S = xy + 2xh + 2yh = 8x^2 + \frac{54}{x}$

Ta đi tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Cách 1 : Áp dụng bất đẳng thức AM-GM :

$$\text{Ta có } S = 8x^2 + \frac{27}{x} + \frac{27}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{27}{x} \cdot \frac{27}{x}} = 54. \text{ Dấu '=' xảy ra khi } x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } S \text{ bằng } 54 \text{ khi } x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{8}{3}.$$

Cách 2 : Xét hàm số $S = 8x^2 + \frac{54}{x}, x > 0$.

$$\text{Có } S' = 16x - \frac{54}{x^2}; S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên :

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
S'		0	
	-		+
S	$+\infty$	54	$+\infty$

$$\text{Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại } x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{8}{3}.$$

Vậy khi chiều dài của bể bằng $\frac{8}{3}$ m thì ta xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Câu 10. (HSG12 tỉnh Bình Thuận năm 2018-2019) Cho x và y là các số thực thỏa mãn $2x \geq y > 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

Lời giải

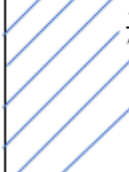
Tác giả: Bùi Văn Lượng; Fb: luonghaihaubui

Ta có $P = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$, với $t = \frac{x}{y} \geq \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$ với $t \geq \frac{1}{2}$.

Tính được $f'(t) = \frac{2t^2 - 2}{(t^2 + t + 1)^2}$, $\begin{cases} f'(t) = 0 \\ t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	1

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{3}$, không có giá trị lớn nhất.

Câu 11. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq -1, y \geq -1, z \geq -4$ và $x + y + z = 0$.

a) Chứng minh

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2 \geq z^2 + 2z.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 4(xy + 1)} + \frac{y^2 - 1}{z(3 + z) + x + y + 2}.$$

Tác giả: Nguyễn Đức Bình ; Fb: Nhân Đại Hoa

Lời giải

a) Do $x \geq -1, y \geq -1$ nên $(x+1)(y+1) \geq 0 \Leftrightarrow xy + 1 \geq -(x+y)$.

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2 = (x+y)^2 + 2(xy+1) \geq (x+y)^2 - 2(x+y) = z^2 + 2z.$$

b) Ta có
$$P = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 4(xy+1)} + \frac{y^2 - 1}{z(3+z) + x + y + 2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 4xy + 2 + 2} + \frac{y^2 - 1}{z(3+z) + (x+y) + 2}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{x^2}{z^2 + 2z + 2} + \frac{y^2 - 1}{z^2 + 2z + 2} \Leftrightarrow P \leq \frac{(x+y)^2 - 2(xy+1) + 1}{z^2 + 2z + 2} \leq \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 2}.$$

Xét $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 2}$ với $-4 \leq z \leq 2$ vì $z = -(x+y) \leq 2$.

$$f'(z) = \frac{(2z-2)(z^2+2z+2) - (2z+2)(z^2-2z+1)}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{4z^2+2z-6}{(z^2+2z+2)^2}$$

$$\text{Cho } f'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } f(1) = 0, f\left(-\frac{3}{2}\right) = 5, f(-4) = \frac{5}{2}, f(2) = \frac{1}{10}.$$

Vậy $P \leq f(z) \leq 5$ với $-4 \leq z \leq 2$.

Hay giá trị lớn nhất $P = 5$ khi $(x; y; z) = \left(-1; \frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ hoặc $(x; y; z) = \left(\frac{5}{2}; -1; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 12. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. -4.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên – Lê Minh Triều

Chọn A

$$f(-1) = |1 - a + b|; f(0) = |b|; f(1) = |1 + a + b| = |-1 - a - b|; f(2) = |4 + 2a + b| \text{ và}$$

$$f(3) = |9 + 3a + b|$$

$$\text{Ta có: } f(3) + f(-1) + 2f(1) \geq |(9 + 3a + b) + (1 - a + b) + 2(-1 - a - b)| = 8$$

$$\text{Vậy } 4M \geq 8 \text{ nên } M_{\min} = 2 \text{ xảy ra khi } \begin{cases} 9 + 3a + b = 2 \\ 1 - a + b = 2 \\ -1 - a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Thử lại khi $a = -2; b = -1$, ta có

$$f(x) = |x^2 - 2x - 1| \text{ trên đoạn } [-1; 3]$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{khi } x \in [-1; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; 3] \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \in [-1; 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; 3] \\ -2x+2 & \text{khi } x \in (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(-1) = 2; f(1) = 2; f(3) = 2; f(1 \pm \sqrt{2}) = 0 \text{ (thỏa } M = 2 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } a + 2b = -4.$$

Cách 2:

Tác giả: Ngô Minh Ngọc Bảo; Fb: Ngô Minh Ngọc Bảo

Chọn C

Xét hàm số $y = f(x) = x^2$ trên đoạn $[-1, 3]$.

Trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ lấy hai điểm $A(-1, 1), B(3, 9)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{8} \Leftrightarrow y = 2x + 3.$$

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song với AB . Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến d là $M(a, a^2)$. Ta có: $2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$ (do $d \parallel AB$).

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là: } y = 2(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

Đường thẳng $-ax - b$ là đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng d và AB , do đó:

$$\begin{cases} -a = 2 \\ -b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a + 2b = -2 + 2 \cdot (-1) = -4.$$

Câu 13. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019) Cho các số thực x, y thỏa mãn: $2(x^2 + y^2) = 1 + xy$.

Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2.$$

Tính $M + m$.

Lời giải

Tác giả: Lâm Thanh Bình; Fb: Lâm Thanh Bình

$$P = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2 = 7[(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2] + 4x^2y^2.$$

$$= 7(x^2 + y^2)^2 - 10x^2y^2 = 7\left(\frac{1+xy}{2}\right)^2 - 10x^2y^2 = \frac{7}{4}(x^2y^2 + 2xy + 1) - 10x^2y^2.$$

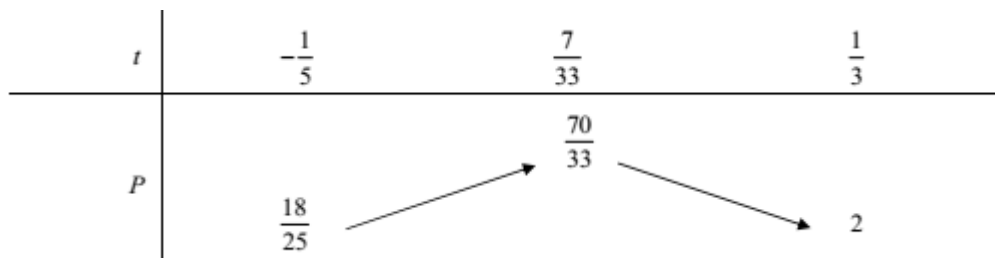
$$P = -\frac{33}{4}x^2y^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{7}{4}.$$

Đặt $t = xy$, ta có

$$1 + xy = 2(x^2 + y^2) \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{3}.$$

$$2[(x+y)^2 - 2xy] = 1 + xy \Leftrightarrow 2(x+y)^2 = 1 + 5xy \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -\frac{1}{5} \Leftrightarrow t \geq -\frac{1}{5}.$$

$$P = -\frac{33}{4}t^2 + \frac{7}{2}t + \frac{7}{4} \text{ với } t \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$$



$$M = \frac{70}{33} \text{ xảy ra khi } t = \frac{7}{33} \text{ hay } xy = \frac{7}{33}. \text{ Khi đó } x^2 + y^2 = \frac{20}{33}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} xy = \frac{7}{33} \\ x^2 + y^2 = \frac{20}{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{\frac{34}{33}} + \sqrt{\frac{2}{11}}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{\frac{34}{33}} - \sqrt{\frac{2}{11}}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{\frac{34}{33}} - \sqrt{\frac{2}{11}}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{\frac{34}{33}} + \sqrt{\frac{2}{11}}}{2} \end{cases}.$$

$$m = \frac{18}{25} \text{ xảy ra khi } t = -\frac{1}{5} \text{ hay } xy = -\frac{1}{5}. \text{ Khi đó } x^2 + y^2 = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} xy = -\frac{1}{5} \\ x^2 + y^2 = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } M + m = \frac{2344}{825}.$$

Câu 14. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Một xe khách chất lượng cao đi từ Cần Thơ đến Hà Nội chở được nhiều nhất 50 hành khách trên một chuyến đi. Theo tính toán của nhà xe, nếu xe chở được k khách thì giá tiền mà mỗi khách phải trả khi đi tuyến đường này là $\left(180 - \frac{3k}{2}\right)^2$ trăm đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe sao cho tổng số tiền thu được từ hành khách nhiều nhất.

Tính số tiền đó.

Lời giải

Cách 1.

Số tiền thu được trên mỗi chuyến xe là $T(k) = k \left(180 - \frac{3k}{2}\right)^2$ với $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 50$.

Xét hàm số $T(k) = k \left(180 - \frac{3k}{2}\right)^2$ với $k \in [0; 50]$.

Dễ thấy $T(k)$ liên tục trên $[0; 50]$.

Ta có $T'(k) = \left(180 - \frac{3k}{2}\right)^2 + 2k \left(180 - \frac{3k}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) = \left(180 - \frac{3k}{2}\right) \left(180 - \frac{9k}{2}\right)$ và

$$T'(k) = 0 \Leftrightarrow \left(180 - \frac{3k}{2}\right) \left(180 - \frac{9k}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 120 \notin [0; 50] \\ k = 40 \in [0; 50] \end{cases}.$$

Ta tính được $T(0) = 0$, $T(50) = 551250$, $T(40) = 576000$.

Do đó $\max_{[0; 50]} T(k) = T(40) = 576000$.

Vậy số tiền thu được nhiều nhất khi xe chở 40 hành khách và số tiền đó là 57600000 đồng.

Cách 2.

Với $k \in [0; 50]$ thì k và $\left(180 - \frac{3k}{2}\right)$ không âm nên

$$T(k) = k \left(180 - \frac{3k}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot 3k \left(180 - \frac{3k}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{3} \left(\frac{3k + \left(180 - \frac{3k}{2}\right) + \left(180 - \frac{3k}{2}\right)}{3} \right)^3 = 576000.$$

Đẳng thức xảy ra khi $3k = 180 - \frac{3k}{2} \Leftrightarrow k = 40$.

Vậy số tiền thu được nhiều nhất khi xe chở 40 hành khách và số tiền đó là 57600000 đồng.

Giải các phương trình sau:

Câu 15. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Một xe khách chất lượng cao đi từ Cần Thơ đến Hà Nội chở được nhiều nhất 50 hành khách trên mỗi chuyến đi. Theo tính toán của nhà xe, nếu chở được k khách thì giá tiền mà mỗi khách phải trả khi đi tuyến đường này là $\left(180 - \frac{3k}{2}\right)^2$ trăm đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe sao cho tổng số tiền thu được từ hành khách nhiều nhất. Tính số tiền đó.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thùy Dung; Fb: Dung Nguyễn

Số tiền thu được trên mỗi chuyến xe là: $T = k \left(180 - \frac{3}{2}k \right)^2$; $0 \leq k \leq 50$.

Gọi $T(k) = k \left(180 - \frac{3}{2}k \right)^2$.

Bài toán trở thành: Tìm k để $T(k) = k \left(180 - \frac{3}{2}k \right)^2$ đạt GTLN, với $0 \leq k \leq 50$.

Ta có: $T'(k) = \left(180 - \frac{3}{2}k \right) \left(180 - \frac{9}{2}k \right)$

$T'(k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 120 \notin (0; 50) \\ k = 40 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	40	50	
y'		+	0	-
y			$T(40)$	

Vậy số tiền thu được nhiều nhất khi xe chở 40 hành khách và số tiền thu được là 576000 trăm đồng (tức là 576.000.000 đồng)

Câu 16. (HSG12 tỉnh Lào Cai năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} - 4\sqrt[4]{a + b + c}.$$

Lời giải

Ta có $\frac{a^2 + bc}{b + c} + a = \frac{a^2 + bc + ab + ac}{b + c} = \frac{(a + b)(a + c)}{b + c} \Rightarrow \frac{a^2 + bc}{b + c} = \frac{(a + b)(a + c)}{b + c} - a$

Tương tự ta có: $\frac{b^2 + ca}{c + a} = \frac{(b + c)(b + a)}{c + a} - b$; $\frac{c^2 + ab}{a + b} = \frac{(a + c)(c + b)}{a + b} - c$

$\Rightarrow P = \frac{(a + b)(a + c)}{b + c} + \frac{(b + c)(b + a)}{c + a} + \frac{(c + a)(c + b)}{a + b} - (a + b + c) - 4\sqrt[4]{a + b + c}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$$\frac{(a + b)(a + c)}{b + c} + \frac{(b + c)(b + a)}{c + a} \geq 2(a + b)$$

$$\frac{(b + c)(b + a)}{c + a} + \frac{(c + a)(c + b)}{a + b} \geq 2(b + c)$$

$$\frac{(c + a)(c + b)}{a + b} + \frac{(a + b)(a + c)}{b + c} \geq 2(c + a)$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{(a + b)(a + c)}{b + c} + \frac{(b + c)(b + a)}{c + a} + \frac{(c + a)(c + b)}{a + b} \right) \geq 4(a + b + c)$$

$$\Rightarrow P \geq a+b+c-4\sqrt[4]{a+b+c}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[4]{a+b+c} > 0 \Rightarrow a+b+c-4\sqrt[4]{a+b+c} = t^4 - 4t.$$

$$\text{Ta có } t^4 - 4t = t^4 - 2t^2 + 1 + 2(t^2 - 2t + 1) - 3 = (t^2 - 1)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow P \geq -3$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } -3 \text{ khi } \begin{cases} a+b+c=1 \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Câu 17. (HSG12 tỉnh QUẢNG NINH 2018-2019) Nhà bạn An muốn đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đáy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được $400000(\text{cm}^3)$ nước. Biết rằng chiều cao của bể gấp 2 lần chiều rộng của bể. Xác định diện tích đáy của bể cá để tiết kiệm nguyên liệu nhất

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Vân; Fb: Trần Thị Vân

Gọi a, b, c lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của khối hộp chữ nhật ($a, b, c > 0$)

$$\text{Theo giả thiết ta có } V = abc = 400000 \text{ và } c = 2a \Rightarrow 2a^2b = 400000 \Rightarrow ab = \frac{200000}{a}$$

Ta có tổng diện tích xung quanh và diện tích 1 mặt đáy của bể cá là

$$S = ab + 2ac + 2bc = ab + 4a^2 + 4ab = 5 \cdot \frac{200000}{a} + 4a^2 = \frac{1000000}{a} + 4a^2 = 4 \left(\frac{250000}{a} + a^2 \right)$$

$$S = 4 \left(\frac{125000}{a} + \frac{125000}{a} + a^2 \right) \geq 4 \cdot 3 \sqrt{\frac{125000}{a} \cdot \frac{125000}{a} \cdot a^2} = 30000$$

$$\text{Suy ra } S \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi } \frac{125000}{a} = a^2 \Leftrightarrow a = 50 \Rightarrow S_{\text{đáy}} = ab = \frac{200000}{a} = 4000(\text{cm}^2)$$

Câu 18. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, ($t > 0$), t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật nhỏ nhất?

A. 3 giây.

B. 1 giây.

C. 2 giây.

D. 6 giây.

Lời giải

Tác giả: Bò Văn Hậu; Fb: Năng Đông

Chọn B

$$\text{Ta có } s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2 \Rightarrow v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$.

Hay tại thời điểm $t = 1$ thì vận tốc của vật nhỏ nhất.

Câu 19. (HSG12 HCM năm 2018-2019) Cho các số thực $a, b, c \in (1; +\infty)$ thỏa mãn $a^{10} \leq b$ và $\log_a b + 2 \log_b c + 5 \log_c a = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2 \log_a c + 5 \log_c b + 10 \log_b a.$$

Lời giải

Tác giả: Phan Tran Bao Bao ; Fb: Phan Tran Bao Bao

Đặt $x = \log_a b; y = \log_b c; z = \log_c a$. Ta có

$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x \cdot y \cdot z = 1 \\ x \geq 10 \\ x + 2y + 5z = 12 \end{cases}$$

Khi đó :

$$P = \frac{2}{z} + \frac{5}{y} + \frac{10}{x} = \frac{2}{z} + \frac{5}{y} + \frac{100}{x} - \frac{90}{x} \geq 3\sqrt{\frac{2}{z} \cdot \frac{5}{y} \cdot \frac{100}{x}} - 9 = 30 - 9 = 21$$

Suy ra $P_{\min} = 21$ đạt được khi

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z = 1 \\ \frac{2}{z} = \frac{5}{y} = \frac{100}{x} \\ x + 2y + 5z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_a b = 10 \\ \log_b c = \frac{1}{2} \\ \log_c a = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow b = c^2 = a^{10}.$$

Câu 20. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}.$$

Tác giả: Phạm Trung Khuê ; Fb: Phạm Trung Khuê

Lời giải

1. Ta có $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{2 - \sin^2 x}{2} \neq 0, \forall x$

Khi đó $f(x) = \frac{4\sin^2 x}{2 - \sin^2 x} = \frac{8}{2 - \sin^2 x} - 4.$

Vì $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \sin^2 x \leq 2$ nên $4 \leq \frac{8}{2 - \sin^2 x} \leq 8$. Do đó $0 \leq f(x) \leq 4.$

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}),$

$f(x) = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 0 đạt được khi $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 4 đạt được khi $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 21. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 3}$. Giả sử a, b là hai số thực thay đổi sao cho $a < b \leq 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(a) - f(b)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}-64}{15}$.

B. $\frac{33\sqrt{3}-64}{15}$.

C. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$.

D. $-\frac{11\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thanh Sơn ; Fb: Trần Thanh Sơn

Phản biện: Đỗ Hữu Nhân; Fb: Do Huu Nhan

Chọn B

Ta có $y' = f'(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 3}$ suy ra $y = f(x) = \int x(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 3} dx$.Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow t^2 - 3 = x^2 \Rightarrow x dx = t dt$. Suy ra

$$\int x(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 3} dx = \int (t^2 - 4)t^2 dt = \int (t^4 - 4t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{4}{3}t^3 + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

$$\text{Từ đó } f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2 \sqrt{x^2 + 3}}{5} - \frac{4(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}{3} + C. \text{ Đây là hàm số chẵn trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Mặt khác } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$f(-1)$		$f(0)$		$f(1)$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét:

☐ Trên khoảng $(-\infty; -1)$ hàm số nghịch biến, do đó với $a < b < -1 \Rightarrow f(a) > f(b)$ nên $f(a) - f(b) > 0$.

☐ Xét trên đoạn $[-1; 1]$, ta có $\begin{cases} \min_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) \\ \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(0) \end{cases}$. Để $f(a) - f(b)$ đạt GTNN thì $f(a)$ đạt

min và $f(b)$ đạt max. Do đó $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$, vì $a < b \leq 1$.

Hay giá trị nhỏ nhất của $f(a) - f(b)$ bằng

$$f(-1) - f(0) = \left(\frac{16.2}{5} - \frac{16.2}{3} \right) - \left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \frac{12\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{33\sqrt{3} - 64}{15} < 0.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(a) - f(b)$ bằng $\frac{33\sqrt{3} - 64}{15}$.

Câu 22. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

của hàm số $y = |x| + \cos 2x$ trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

A. $-\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}$.

C. $\frac{\pi}{4} - 1$.

D. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sqrt{x^2} + \cos 2x$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} - 2\sin 2x, \forall x \neq 0.$$

+) y' không xác định tại $x = 0$.

$$+) y' = 0 \Leftrightarrow x - 2|x| \cdot \sin 2x = 0.$$

$$\text{Với } x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right): y' = 0 \Leftrightarrow x - 2x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{Với } x \in \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right): y' = 0 \Leftrightarrow x + 2x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12}.$$

Ta có : $y(0) = 1$

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

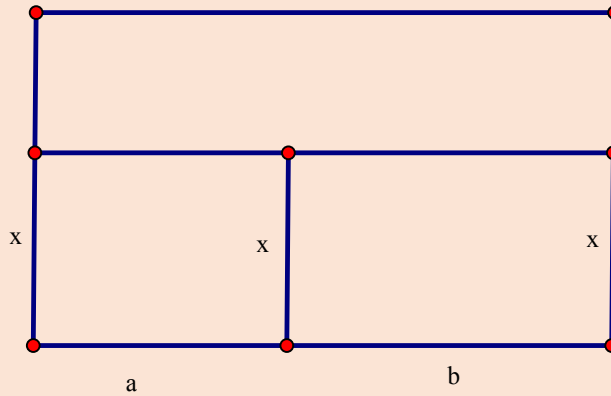
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}; N = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } M - N = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Câu 23. (HSG10 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Một người nông dân có một khu đất rất rộng dọc theo một con sông. Người đó muốn làm một hàng rào hình chữ E (như hình vẽ) để được một khu đất gồm hai phần đất hình chữ nhật để trồng rau và nuôi gà. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì có chi phí nguyên vật liệu là 80 ngàn đồng một mét dài, đối với phần còn lại thì chi phí nguyên vật liệu là 40 ngàn đồng một mét dài. Tính diện tích lớn nhất của phần đất mà người nông dân rào được với chi phí vật liệu là 20 triệu đồng.



Tác giả: Lê Thái Bình, Face: lebinhle80@gmail.com

Lời giải.

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là $x(m)$; ($x > 0$) và chiều dài của phần đất trồng rau và nuôi gà lần lượt là $a(m), b(m)$; $a > 0; b > 0$.

Khi đó diện tích của khu đất là $S = (a + b)x(m^2)$. Mặt khác theo giả thiết tổng chi phí là 20 triệu đồng nên ta có $3x.40000 + (a + b)80000 = 20000000 \Leftrightarrow 3x + 4(a + b) = 500$.

$$\text{Ta có } 12S = 3x.4(a + b) \leq \frac{[3x + 4(a + b)]^2}{4} = \frac{500^2}{4} \Rightarrow S \leq \frac{15625}{3} \Rightarrow \text{Max} S = \frac{15625}{3} \Leftrightarrow a + b = \frac{175}{2}; x = \frac{250}{3}$$

Câu 24. (HSG10 CẦU GIẤY – THƯỜNG TÍN - HÀ NỘI 2018-2019) Cho tam giác ABC . Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Gọi M là điểm tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo a, b, c .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Phi Thanh Phong; Fb: Nguyễn Phi Thanh Phong.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } P = MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2.$$

$$\text{Với } \begin{cases} \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2 \\ \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2 \\ \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + GC^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

$$\text{Khi đó } P = 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) \text{ và } P_{\min} \Leftrightarrow MG^2_{\min} \Leftrightarrow MG_{\min} \Leftrightarrow M \equiv G.$$

$$\text{Mặt khác} \begin{cases} GA^2 = \frac{4}{9} m_a^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ GB^2 = \frac{4}{9} m_b^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) = \frac{1}{9} (2a^2 + 2c^2 - b^2) \\ GC^2 = \frac{4}{9} m_c^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) = \frac{1}{9} (2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{cases}$$

Từ trên, ta được: $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$. Dấu bằng diễn ra khi và chỉ khi $M \equiv G$.

Câu 25. (HSG11 tỉnh Phú Yên năm 2018-2019) Cho x, y, z là 3 số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + 2019zx$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy + yz + 2zx$.

Lời giải

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + 2019zx$.

Ta có: $0 \leq (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1 + 2(xy + yz + zx)$.

Suy ra $xy + yz + zx \geq -\frac{1}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x + y + z = 0$.

Do vậy $P = (xy + yz + zx) + 2018zx \geq -\frac{1}{2} + 2018zx \geq -\frac{1}{2} - 2018 \left(\frac{z^2 + x^2}{2} \right) \geq -\frac{1}{2} - \frac{2018}{2} = -\frac{2019}{2}$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x = -z \\ z^2 + x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0, x = -z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $\min P = -\frac{2019}{2}$ khi $y = 0, x = -z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy + yz + 2zx$.

Xét các giá trị dương của x, y, z . Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên ta có thể đặt

$$\begin{cases} y = \cos \alpha \\ x = \sin \alpha \cos \beta, \text{ với } \alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \\ z = \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

Thế thì $Q = y(x + z) + 2xz = \cos \alpha \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta) + 2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta$.

Vì $\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ nên $Q \leq \sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha (1)$.

Dấu "=" xảy ra khi $\cos \beta = \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Biến đổi (1) với dạng

$$Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha + \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\sqrt{2} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{-1}{\cos 2\alpha} \\ \sqrt{2} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra} \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} \\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}} \end{cases}; \text{ tức là } y = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}, x = z = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{12}}.$$

$$\text{Vậy } \max Q = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ khi } y = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}, x = z = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{12}}.$$

Câu 26. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn:

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(2x + 2y + z)^2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{8x^3 + 8y^3 + z^3}{(2x + 2y + z)(4xy + 2yz + 2zx)}$$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Kim Xuyên ; Fb: Xuyen Tran

$$\text{Đặt } a = \frac{2x}{2x + 2y + z}; b = \frac{2y}{2x + 2y + z}; c = \frac{2z}{2x + 2y + z}. \text{ Khi đó } a, b, c > 0.$$

$$* \text{ Khi đó } a + b + c = 1 \text{ và điều kiện } 4x^2 + 4y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(2x + 2y + z)^2 \text{ trở thành } a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\text{còn } P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca}$$

$$* \text{ Ta có: } (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc \text{ thế vào P thì:}$$

$$P = \frac{1 - 3(ab + bc + ca) + 3abc}{ab + bc + ca} \Rightarrow P + 3 = \frac{1 + 3abc}{ab + bc + ca}$$

$$\text{Mặt khác từ giả thiết ta có: } 1 = S^2 = \frac{1}{2} + 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1}{4} \text{ thế vào P thì ta được:}$$

$$P + 3 = 4 + 12abc \Rightarrow P = 1 + 12abc. \text{ Ta chứng minh } P = 1 + 12abc \leq \frac{11}{9}$$

$$* \text{ Thật vậy khi đó BĐT} \Leftrightarrow 6abc \leq \frac{1}{9}$$

Ta có: $\left(a^2 + \frac{1}{36}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{36}\right) \geq \frac{a}{3} + \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} - c^2 + \frac{1}{18} \geq \frac{1}{3}(1-c) \Leftrightarrow -c^2 + \frac{1}{3}c + \frac{2}{9} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq c \leq \frac{2}{3}$
 $\Rightarrow c \in \left(0; \frac{2}{3}\right]$

Xét : $Q = 6abc = 2ab \cdot 3c \leq 4ab = 2\left[(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\right] = 2\left[(1-c)^2 - \left(\frac{1}{2} - c^2\right)\right] \leq \frac{1}{9}$
 $\Leftrightarrow 2\left(1 - 2c + c^2 - \frac{1}{2} + c^2\right) - \frac{1}{9} \leq 0 \Leftrightarrow c^2 - c + \frac{2}{9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq c \leq \frac{2}{3}$

BĐT đúng nếu ta lấy c là số lớn nhất thì $1 = a + b + c \leq 3c \Rightarrow \frac{1}{3} \leq c$ Ta có điều phải chứng minh. Vậy

$\max P = \frac{11}{9}$ tại $a = b = \frac{1}{6}, c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}z$

Câu 27. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$. **B. $m = -2$.** **C. $m = -1$.** **D. $m = 1$.**

Lời giải

Tác giả: TRUONG SON; Fb: Truongson

Chọn A

Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{16m^2 + 8m}{4m} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Vậy $m = 2$.

Câu 28. (HSG11 tỉnh Phú Yên năm 2018-2019) Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

Lời giải

Ta có $A^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2(y^2 + z^2 + x^2).$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Ta được $A^2 = (y^2 + z^2 + x^2) + 2(y^2 + z^2 + x^2) = 3(y^2 + z^2 + x^2) = 3.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Vậy $\min A = \sqrt{3}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 29. (HSG12 Cao Bằng năm 2018-2019) Một khách sạn có 50 phòng. Nếu mỗi phòng cho thuê

với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá lên 20 ngàn đồng thì có thêm hai phòng bỏ trống không có người thuê. Hỏi giám đốc khách sạn phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x \geq 400$.

Giá thuê phòng chênh lệch sau khi tăng là: $x - 400$ (ngàn đồng).

Số lượng phòng cho thuê giảm đi khi chọn mức giá thuê phòng mới là:

$$\frac{x-400}{20} \cdot 2 = \frac{x-400}{10} \text{ (phòng)}.$$

$$\text{Số phòng cho thuê với giá } x \text{ là: } 50 - \frac{x-400}{10} = \frac{900-x}{10}.$$

$$\text{Tổng doanh thu trong ngày là: } x \cdot \frac{900-x}{10} = -\frac{x^2}{10} + 90x.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = -\frac{x^2}{10} + 90x \text{ với } x \geq 400.$$

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450.$$

x	400	450	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$			

Qua bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu thuê với giá 450 ngàn đồng thì khách sạn có doanh thu cao nhất trong ngày.

Câu 30. (HSG12 tỉnh Thái Nguyên năm 2018-2019) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + 2y^2 = \frac{8}{3}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 7(x + 2y) - 4\sqrt{x^2 + 2xy + 8y^2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4\sqrt{x^2 + 2xy + 8y^2} = \sqrt{16x^2 + 32xy + 128y^2} = \sqrt{7(x-2y)^2 + (3x+10y)^2} \geq 3x+10y \quad (1).$$

$$\text{Suy ra } P = 7(x + 2y) - 4\sqrt{x^2 + 2xy + 8y^2} \leq 7(x + 2y) - (3x + 10y) = 4(x + y).$$

$$\text{Mặt khác: } x + y = \left(1 \cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}y\right) \leq \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 2y^2)} = 2 \Rightarrow P \leq 4 \cdot 2 = 8 \quad (2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra ở (1) và (2) khi và chỉ khi
$$\begin{cases} 7(x-2y)^2 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{2}y}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ x^2 + 2y^2 = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy GTLN $P = 8$ đạt được khi
$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Câu 31. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Với a, b, c là các số thực lớn hơn 1, đặt $x = \log_a(bc)$, $y = \log_b(ca)$, $z = \log_c(ab)$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + 4z$$

A. 6.

B. 12.

C. 10.

D. 16.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Tuyết Hằng; Fb: Hang Tuyet

Chọn C

Ta có:

$$x = \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

$$y = \log_b(ca) = \log_b c + \log_b a.$$

$$z = \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b.$$

Đặt: $A = \log_a b$, $B = \log_b c$, $C = \log_c a$ với $A, B, C > 0$ (do $a, b, c > 1$)

$$\text{Khi đó: } P = x + y + 4z = A + \frac{1}{C} + B + \frac{1}{A} + 4C + \frac{4}{B} = \left(A + \frac{1}{A}\right) + \left(B + \frac{4}{B}\right) + \left(4C + \frac{1}{C}\right).$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số thực dương:

$$A + \frac{1}{A} \geq 2\sqrt{A \cdot \frac{1}{A}} = 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } A = 1 \Leftrightarrow a = b.$$

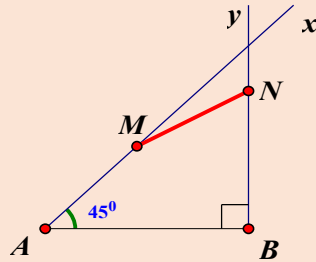
$$B + \frac{4}{B} \geq 2\sqrt{B \cdot \frac{4}{B}} = 4. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } B = 2 \Leftrightarrow \log_b c = 2 \Leftrightarrow c = b^2.$$

$$4C + \frac{1}{C} \geq 2\sqrt{4C \cdot \frac{1}{C}} = 4. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_c a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{c}.$$

Suy ra: $P \geq 10$.

$$\text{Vậy min } P = 10 \text{ khi } \begin{cases} a = b \\ c = a^2 = b^2 \end{cases}.$$

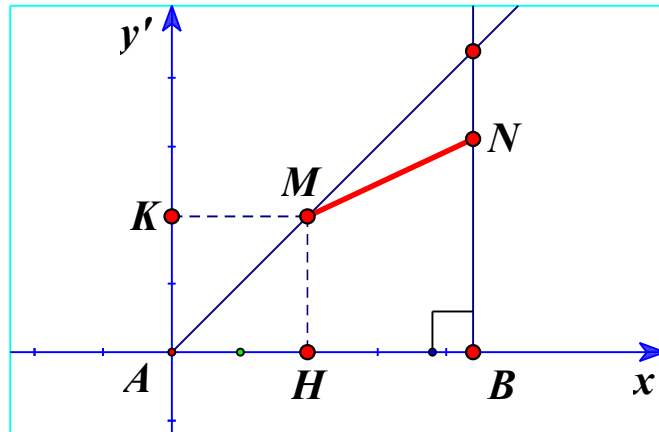
Câu 32. (HSG10 Cụm Hà Đông Hà Đức Hà Nội năm 2018-2019) Cho hai tia Ax, By với $AB = 100$ (cm), $\widehat{xAB} = 45^\circ$ và $By \perp AB$. Chất điểm X chuyển động trên tia Ax bắt đầu từ A với vận tốc $3\sqrt{2}$ (cm/s), cùng lúc đó chất điểm Y chuyển động trên tia By bắt đầu từ B với vận tốc 4 (cm/s). Sau t (giây) chất điểm X di chuyển được đoạn đường AM , chất điểm Y di chuyển được đoạn đường BN . Tìm giá trị nhỏ nhất của MN .



Lời giải

Tác giả: Phan Nhật Hùng; Fb: Hùng Phan Nhật

Sau t (giây) ta có $AM = 3\sqrt{2}t$ (cm), $BN = 4t$ (cm).



Dựng hệ trục Descartes vuông góc $Ax'y'$, $A \equiv O(0;0)$ như hình vẽ trên.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ax' và Ay' .

Với $t > 0$ (tức $M \neq A$) ta có $AHMK$ là hình vuông. Suy ra $AH = AK = 3t$ (cm).

$\Rightarrow M = (3t; 3t)$, $N = (100; 4t)$. (Nói thêm là trường hợp $M \equiv A$ thì tọa độ M vẫn đúng).

Khi đó $MN^2 = (100 - 3t)^2 + t^2 = 10t^2 - 600t + 10000 = 10(t - 30)^2 + 1000 \geq 1000, \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow MN \geq 10\sqrt{10}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $t = 30$.

Vậy min $MN = 10\sqrt{10}$ cm khi $t = 30$ giây.

Câu 33. (HSG11 Hà Tĩnh 2018-2019) Cho tam giác ABC . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt[4]{12} \sqrt{\sin C}.$$

Lời giải

Tác giả: Đặng Ngọc Sáng; Fb: dang ngoc sang

$$\text{Ta có: } \left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}\right)^2 \leq 2(\sin A + \sin B) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 4 \cos \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq 2\sqrt{\cos \frac{C}{2}} \Rightarrow P \leq 2\sqrt{\cos \frac{C}{2}} + 2\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\sqrt{\sin C} \leq 2\sqrt{2\left(\cos \frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)}$$

Ta lại có:

$$\left(\cos \frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)^2 \leq 2\left(\cos^2 \frac{C}{2} + \frac{3}{4}\sin^2 C\right) = 1 + \cos C + \frac{3}{2}(1 - \cos^2 C) = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}\left(\cos C - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow P \leq 2\sqrt{4\frac{\sqrt{6}}{3}} = 2\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $2\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} A = B \\ C = \arccos \frac{1}{3} \end{cases}$

Câu 34. (HSG12 Quảng Ngãi 2018-2019) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $c < a, c < b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a-b)^2 \left[\left(\frac{2a+c}{b^2+c^2} \right)^2 + \left(\frac{2b+c}{a^2+c^2} \right)^2 - \frac{64}{ab+bc+ca} + \frac{8(a^2+1)}{a(a-b)^2} \right].$$

Lời giải

Tác giả: Phạm Hữu Thành ; Fb: Phạm Hữu Thành.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{(a^2+c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4}; \frac{1}{(b^2+c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^4}; \frac{-1}{ab+bc+ca} \geq \frac{-1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)}$$

$$\text{Suy ra } P \geq (a-b)^2 \left[\frac{4\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^4} + \frac{4\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4} - \frac{64}{\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)} \right] + 8\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Đặt } a+\frac{c}{2}=x; b+\frac{c}{2}=y; (x>0; y>0). \text{ Ta có } P \geq (x-y)^2 \left[4\frac{x^2}{y^4} + 4\frac{y^2}{x^4} - \frac{64}{xy} \right] + 16\frac{1}{(a^2+c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4}$$

$$\text{Hay } P \geq 4\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 16 \right] + 16.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, (t \geq 2). \text{ Xét hàm số } f(t) = 4(t-2)(t^3 - 3t - 16)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 4(4t^3 - 6t^2 - 6t - 10), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq -\frac{63}{4}$.

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{1}{4} \text{ và } P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}. \text{ Vậy } P_{\min} = \frac{1}{4}.$$

Câu 35. (HSG11 Nghệ An 2018-2019) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2)(|a-b| + |b-c| + |c-a|).$$

Lời giải

Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + 32 \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 32 (*)$$

Đặt $t = a+b+c$, từ $(*)$ suy ra $t = a+b+c > 0$

$$(*) \Leftrightarrow (a+b+c) \left[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2 \right] = 64$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{64}{a+b+c} + (a+b+c)^2 = \frac{64}{t} + t^2$$

Ta chứng minh

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| \geq \sqrt{2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]} (**)$$

Thật vậy, vì vai trò a, b, c bình đẳng nên không giảm tổng quát giả sử rằng $a \geq b \geq c$, khi đó

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = (a-b) + (b-c) + (a-c) = 2(a-c)$$

Ta có

$$(**) \Leftrightarrow 2(a-c) \geq \sqrt{2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b+b-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a-b)(b-c) \geq 0$$

Điều trên luôn đúng với $a \geq b \geq c$. Vì vậy

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| \geq \sqrt{2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}$$

$$\Leftrightarrow |a-b| + |b-c| + |c-a| \geq \sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)} = 2\sqrt{\frac{32}{a+b+c}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$$

Ta có

$$3P = 3(a^2 + b^2 + c^2)(|a-b| + |b-c| + |c-a|)$$

$$3P \geq \left(\frac{64}{t} + t^2\right) \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{t}} = 8\sqrt{2} \left(\frac{64}{t\sqrt{t}} + t\sqrt{t}\right) \geq 8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{\frac{64}{t\sqrt{t}}} \cdot t\sqrt{t} = 128\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{128\sqrt{2}}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{128\sqrt{2}}{3}$.

Đạt được khi $a = \frac{4+4\sqrt{2}}{3}, b = c = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ và các hoán vị của a, b, c .

Câu 36. (HSG12 Hà Nội năm 2018-2019) Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a + b + c - 4abc.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Phương Mai; Fb: Phương Mai

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ thì từ $1 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 1 \leq 3a^2 \Rightarrow a^2 \geq \frac{1}{3}$.

Mặt khác: $2bc \leq b^2 + c^2 = 1 - a^2 \Rightarrow 0 \leq 2bc \leq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leq bc \leq \frac{1}{3}$.

Ta có:

$$P^2 = [a(1-4bc) + (b+c) \cdot 1]^2 \leq [a^2 + (b+c)^2][1 + (1-4bc)^2] = (1+2bc)[(1-4bc)^2 + 1].$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1-bc} = b+c$ (*).

Đặt $t = bc \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$. Suy ra được $P^2 \leq (1+2t)(16t^2 - 8t + 2) = 32t^3 - 4t + 2$.

Xét hàm số $f(t) = 32t^3 - 4t + 2, t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]; f'(t) = 96t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{6}}{12} \\ t = -\frac{\sqrt{6}}{12} (l) \end{cases}$.

$$f(0) = 2; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{50}{27}; f\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right) \approx 1,4556.$$

Suy ra GTLN $f(t) = 2$ khi $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a = c = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Kết luận: $\max P = \sqrt{2}$, đạt được khi $\begin{cases} a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c = 0 \end{cases}$, hoặc các hoán vị của nó.

Câu 37. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện $a \geq b \geq c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+b} \right) + \frac{5a}{a+c}$$

Lời giải

$$\text{Biến đổi } M = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}} + \frac{1}{1+\frac{b}{c}} \right) + \frac{5}{1+\frac{c}{a}}$$

$$\text{Ta có bất đẳng thức } \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}, (\forall x, y > 0, xy \geq 1).$$

$$\text{Thật vậy } \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (\sqrt{xy} - 1) \geq 0 \text{ đúng } \forall x, y > 0, xy \geq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

$$\text{Do đó } M \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{\frac{a}{c}}} + \frac{5}{1+\frac{c}{a}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{c}. \text{ Vì } a \geq b \geq c \text{ nên } t \geq 1 \Rightarrow t \geq \sqrt{t} \Rightarrow M \geq \frac{1}{1+t} + \frac{5t}{1+t} = \frac{5t+1}{t+1}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{5t+1}{t+1}$, ta có: $f'(t) = \frac{4}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1; +\infty)$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Do đó $f(t) \geq f(1) \forall t \geq 1$.

Vậy $M_{\min} = f(1) = 4$ khi $t = 1 \Leftrightarrow a = b = c$.

Câu 38. (HSG12 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Cho các số dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{6}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Lời giải

Tác giả: Bàn Thị Thiết; Fb: Bàn Thị Thiết

$$\text{Vì } a, b \text{ là các số dương nên: } a + 4b \geq 2\sqrt{a \cdot 4b} \Leftrightarrow a + 4b \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+4b}{4} \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 4b$.

Vì a, b, c là các số dương nên:

$$a + 4b + 16c \geq 3\sqrt[3]{a \cdot 4b \cdot 16c} \Leftrightarrow a + 4b + 16c \geq 12\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+4b+16c}{12} \quad (2).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 4b = 16c$.

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{a+4b}{4} + \frac{a+4b+16c}{12} \Leftrightarrow a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{4(a+b+c)}.$$

$$\text{Do đó: } P \geq \frac{3}{4(a+b+c)} - \frac{6}{\sqrt{a+b+c}}.$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{a+b+c} \ (t > 0).$$

$$\text{Xét: } f(t) = \frac{3}{4t^2} - \frac{6}{t} \ (t > 0) \Rightarrow f'(t) = -\frac{3}{2t^3} + \frac{6}{t^2} = \frac{12t-3}{2t^3}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	-12	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $P \geq f(\sqrt{a+b+c}) \geq f(\frac{1}{4}) = -12, \forall a, b, c > 0.$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} a = 4b = 16c \\ \sqrt{a+b+c} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{21} \\ b = \frac{1}{84} \\ c = \frac{1}{336} \end{cases}.$$

Vậy min $P = -12.$

Câu 39. (HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019) Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a}{2b+3c} + \frac{b}{2c+3a} + \frac{c}{2a+3b}$$

Lời giải

Tác giả: Nhữ Văn Huấn; Fb: Huân Nhu

$$1) \text{ Đặt } \begin{cases} u = 2b + 3c \\ v = 2c + 3a \\ w = 2a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{35}(-6u + 9v + 4w) \\ b = \frac{1}{35}(4u - 6v + 9w) \\ c = \frac{1}{35}(9u + 4v - 6w) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{35} \left(\frac{-6u + 9v + 4w}{u} + \frac{4u - 6v + 9w}{v} + \frac{9u + 4v - 6w}{w} \right) \\ &= \frac{1}{35} \left(-18 + \frac{9v}{u} + \frac{4w}{u} + \frac{4u}{v} + \frac{9w}{v} + \frac{9u}{w} + \frac{4v}{w} \right) \\ &= \frac{1}{35} \left(-18 + \left(\frac{4v}{u} + \frac{4u}{v} \right) + \left(\frac{4w}{v} + \frac{4v}{w} \right) + \left(\frac{4w}{u} + \frac{4u}{w} \right) + \left(\frac{5v}{u} + \frac{5w}{v} + \frac{5u}{w} \right) \right) \\ &\geq \frac{1}{35} \left(-18 + 2\sqrt{16} + 2\sqrt{16} + 2\sqrt{16} + \sqrt[3]{125} \right) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{5} \Leftrightarrow u = v = w \Leftrightarrow a = b = c$.

Câu 40. (HSG12 tỉnh Kon Tum năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$3a^2 + 2b^2 + c^2 = 6.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2(a + b + c) - abc.$$

Lời giải

Với bốn số a, b, x, y ta có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (1)

(Học sinh có thể không cần chứng minh bất đẳng thức (1))

Áp dụng bất đẳng thức (1), ta có

$$P^2 = \left[a(2 - bc) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(b + c) \right]^2 \leq (a^2 + 2) \left[(2 - bc)^2 + 2(b + c)^2 \right] = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) = \frac{1}{6} 3(a^2 + 2) \cdot 2(b^2 + 2)(c^2 + 2) \leq \frac{1}{6} \left[\frac{3(a^2 + 2) + 2(b^2 + 2) + (c^2 + 2)}{3} \right]^3 = 36$$

Từ đó suy ra $P^2 \leq 36$. Suy ra $-6 \leq P \leq 6$.

Mặt khác với $a = 0, b = -1, c = -2$ thì $3a^2 + 2b^2 + c^2 = 6$ và $P = -6$.

Với $a = 0, b = 1, c = 2$ thì $3a^2 + 2b^2 + c^2 = 6$ và $P = 6$

Vậy $\min P = -6$ khi $a = 0, b = -1, c = -2$.

$\max P = 6$ khi $a = 0, b = 1, c = 2$.

Câu 41. (HSG10 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xyz + (x + y + z)^2}{xy + yz + zx} - \frac{1}{xy + yz + zx + 1}$$

Tác giả: Lê Thái Bình, Face: lebinhle80@gmail.com

Lời giải

Ta có các đánh giá sau:

$$\square x^3 + 1 + 1 \geq 3x \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3(x + y + z) \Rightarrow x + y + z \leq 3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \leq 3(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

$$\square \Rightarrow 1 - xyz \leq x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \Rightarrow xyz + (x + y + z)^2 \geq 1 + 3(xy + yz + zx)$$

$$\square 0 \leq xy + yz + zx \leq 3$$

$$\square \text{ Khi đó ta có } P \geq \frac{1 + 3(xy + yz + zx)}{xy + yz + zx} - \frac{1}{xy + yz + zx + 1}.$$

$$\text{Đặt } t = xy + yz + zx \Rightarrow t \in [0; 3]; P \geq \frac{1 + 3t}{t} - \frac{1}{t + 1} = 3 + \frac{1}{t(t + 1)} \geq \frac{37}{12}. \text{ Vậy } \min P = \frac{37}{12} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Câu 42. (HSG10 THPT Thuận Thành 2018-2019) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$x + y = 2019.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{2019 - x}} + \frac{y}{\sqrt{2019 - y}}.$$

Lời giải

Cách 1:

Tác giả: Nguyễn Thị Xuân Trinh ; Fb: Tắc Kè Bông, thế mạnh

Ta có

$$P = \frac{x}{\sqrt{2019 - x}} + \frac{y}{\sqrt{2019 - y}} = \frac{2019 - y}{\sqrt{y}} + \frac{2019 - x}{\sqrt{x}} = 2019 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) - (\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có: } \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{(1+1)(x+y)} = \sqrt{2 \cdot 2019} = \sqrt{4038}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \text{ ta có: } \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{4038}}$$

$$\text{Vậy } P \geq 2019 \cdot \frac{4}{\sqrt{4038}} - \sqrt{4038} = \sqrt{4038}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{1} \\ \sqrt{x} = \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2019}{2}.$$

Cách 2:

Tác giả: Cô Lê Minh Huệ - QTV Strong Team Toán VD – VDC.

Ta có

$$P = \frac{x}{\sqrt{2019-x}} + \frac{y}{\sqrt{2019-y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x\sqrt{y}} + \frac{y^2}{y\sqrt{x}}$$

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu số, ta có:
$$\frac{x^2}{x\sqrt{y}} + \frac{y^2}{y\sqrt{x}} \geq \frac{(x+y)^2}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} = \frac{2019^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{(1+1)(x+y)} = \sqrt{2 \cdot 2019} = \sqrt{4038}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{2019}{2}$$

Vậy
$$P \geq \frac{2019^2}{\frac{2019}{2} \cdot \sqrt{4038}} = \sqrt{4038}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{x}{x\sqrt{y}} = \frac{y}{y\sqrt{x}} \\ \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{1} \\ \sqrt{x} = \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2019}{2}.$$

Câu 43. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$a + b + c = ab + bc + ca.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{a^2 + 3bc} + \frac{b^2}{b^2 + 3ca} + \frac{c^2}{c^2 + 3ab} + \sqrt{a+b+c}.$$

Lời giải

Tác giả: Châu Hòa Nhân ; Fb: Hòa Nhânn

Ta có:
$$\frac{a^2}{a^2 + 3bc} + \frac{b^2}{b^2 + 3ca} + \frac{c^2}{c^2 + 3ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2 + 3bc) + (b^2 + 3ca) + (c^2 + 3ab)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (ab + bc + ca)}$$

Vì $a + b + c = ab + bc + ca$ nên

$$\frac{a^2}{a^2 + 3bc} + \frac{b^2}{b^2 + 3ca} + \frac{c^2}{c^2 + 3ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b+c)} = \frac{a+b+c}{a+b+c+1}.$$

Suy ra
$$P \geq \frac{a+b+c}{a+b+c+1} + \sqrt{a+b+c}.$$

Đặt $t = a + b + c$ (hiển nhiên $t > 0$).

Ta có: $a + b + c = ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow a + b + c \geq 3$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy có $P \geq \frac{t}{t+1} + \sqrt{t}$ với $t \geq 3$.

Hướng 1: Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{t+1} + \sqrt{t}$ với $t \geq 3$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 3$ và hàm số $f(t)$ liên tục trên $[3; +\infty)$.

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[3; +\infty)$ nên $f(t) \geq f(3) = \frac{3}{4} + \sqrt{3}, \forall t \geq 3$.

Do đó $\min_{[3; +\infty)} f(t) = f(3) = \frac{3}{4} + \sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4} + \sqrt{3}$ khi $\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Hướng 2: Ta chứng minh $\frac{t}{t+1} + \sqrt{t} \geq \frac{3}{4} + \sqrt{3}$ (*) với $t \geq 3$.

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{t}{t+1} - \frac{3}{4}\right) + (\sqrt{t} - \sqrt{3}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t-3}{4(t+1)} + \frac{t-3}{\sqrt{t} + \sqrt{3}} \geq 0$

$\Leftrightarrow (t-3) \left(\frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{3}} \right) \geq 0$ luôn đúng $\forall t \geq 3$.

Dấu “=” xảy ra khi $t = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4} + \sqrt{3}$ khi $\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Hướng 3: Ta chứng minh $\frac{t}{t+1} + \sqrt{t} \geq \frac{3}{4} + \sqrt{3}$ (*) với $t \geq 3$.

Ta có: $t \geq 3 \Rightarrow \sqrt{t} \geq \sqrt{3}$ (1)

$t \geq 3 \Rightarrow t+1 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{t+1} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{t+1} \geq 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{t}{t+1} \geq \frac{3}{4}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra (*) luôn đúng $\forall t \geq 3$. Dấu “=” xảy ra khi $t = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4} + \sqrt{3}$ khi $\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Câu 44. (HSG12 Quảng Ninh 2018-2019) Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{16\sqrt{xy} + 2\sqrt{10yz} + 2\sqrt{10xz}} - \frac{10}{45 + x + y + z}$$

Lời giải

Tác giả: Phan Quang Sơn

$$\text{Ta có } 16\sqrt{xy} + 2\sqrt{10yz} + 2\sqrt{10xz} = 16\sqrt{xy} + 2\sqrt{(2y)(5z)} + 2\sqrt{(2x)(5z)}$$

$$\leq 8x + 8y + 2y + 5z + 2x + 5z = 10(x + y + z).$$

$$\text{Vậy ta có } P \geq \frac{1}{10(x+y+z)} - \frac{10}{45+x+y+z} = \frac{1}{10t} - \frac{10}{t+45} = f(t), \text{ với } t = x+y+z > 0.$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{1}{10t} - \frac{10}{t+45} \text{ với } t > 0. \text{ Ta có } f'(t) = -\frac{1}{10t^2} + \frac{10}{(45+t)^2};$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+45)^2 = 100t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = \frac{-45}{11} \xrightarrow{t>0} t = 5. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

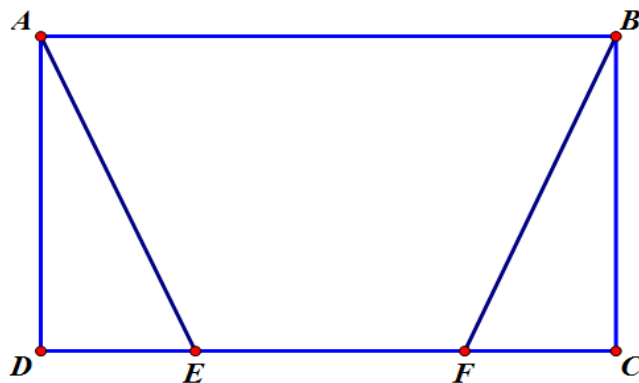
t	0	5	$+\infty$
$f'(t)$		-	0
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{-9}{50}$	0

$$\text{Suy ra } P \geq f(t) \geq \frac{-9}{50} \quad \forall t > 0.$$

$$\text{Do đó giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } \frac{-9}{50} \text{ đạt được khi } \begin{cases} x = y = \frac{5}{2}z \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{25}{12} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Câu 45. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Trên sa mạc có một khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 70$ km, chiều rộng $AD = 10$ km. Vận tốc trung bình của xe máy trên khu đất này là 20 km/h, riêng đi trên cạnh CD thì vận tốc là 40 km/h. Một người đi xe máy xuất phát từ A lúc 8h sáng và muốn đến B sau 3h nữa. Hỏi người đó có thể đến B kịp thời gian không? Xây dựng phương án di chuyển trên khu đất từ A đến B để hết ít thời gian nhất.

Lời giải

**Cách 1.**

Trường hợp: xe máy không chạy trên CD, khi đó thời gian ngắn nhất đi từ A đến B là chạy trên AB

suy ra $t = \frac{70}{20} = 3,5(h)$.

Trường hợp: xe máy có chạy trên CD. Giả sử xe chạy từ A đến B qua EF.

Đặt $DE = x, FC = y, 0 \leq x, y \leq 70 \Rightarrow EF = 70 - (x + y); AE = \sqrt{x^2 + 100}; BF = \sqrt{y^2 + 100}$.

Khi đó thời gian xe chạy là:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{20} + \frac{\sqrt{y^2 + 100}}{20} + \frac{70 - (x + y)}{40} = \frac{1}{20} \left(\sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{y^2 + 100} - \frac{x + y}{2} + 35 \right)$$

$$\geq \frac{1}{20} \left(\sqrt{(x + y)^2 + 400} - \frac{x + y}{2} + 35 \right) \quad (\text{áp dụng } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|)$$

Xét $h(a) = \sqrt{a^2 + 400} - \frac{a}{2} + 35; 0 \leq a \leq 70$

$$h'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 400}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

Dựa vào BBT	
	0 $\frac{20}{\sqrt{3}}$ 70
a	
$h'(a)$	- 0 +
$h(a)$	

$$\Rightarrow h(a) \geq h\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = \frac{30}{\sqrt{3}} + 35 \Rightarrow t \geq \frac{7 + 2\sqrt{3}}{4}(h)$$

$$t_{\min} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = a = \frac{20}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Từ 2 trường hợp trên ta có thể kết luận: Sau 3h xe có thể chạy từ A đến B được, với thời gian chạy ngắn nhất $t = \frac{7 + 2\sqrt{3}}{4}(h)$ khi $DE = CF = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

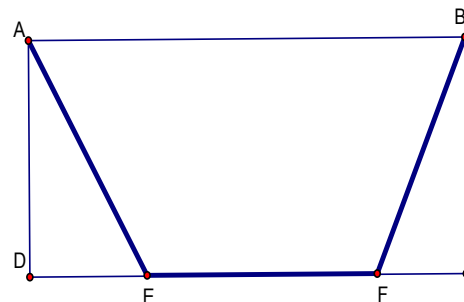
Cách 2.

KN1: Để đi từ A đến B nếu chỉ di chuyển trên đoạn AB thì hết số giờ là

$t = \frac{S}{V} = \frac{70}{20} = 3,5$ (giờ), vậy trong trường hợp này không thể đến B kịp thời gian sau 3 giờ như yêu cầu bài toán.

Vì vận tốc trên khu đất (trừ cạnh CD) là 20km/h, do đó chỉ đi theo AB không kịp thời gian thì mọi con đường khác mà không đi trên CD đều không kịp thời gian.

Do đó ta xét khả năng 2



KN2: Để đi từ A đến B và có đi trên cạnh CD

Giả sử đi từ A đến E, từ E đến F và từ F đến B (như hình vẽ). Đặt $DE = a, FC = b$

Khi đó thời gian để di chuyển từ A đến B là $t = \frac{\sqrt{100+a^2}}{20} + \frac{\sqrt{100+b^2}}{20} + \frac{70-(a+b)}{40}$

Áp dụng bất $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

Ta có $\frac{\sqrt{100+a^2}}{20} + \frac{\sqrt{100+b^2}}{20} \geq \frac{\sqrt{(10+10)^2 + (a+b)^2}}{20} = \frac{\sqrt{400+(a+b)^2}}{20}$,

dấu “=” xảy ra khi $a = b$

Vậy $t = \frac{\sqrt{100+a^2}}{20} + \frac{\sqrt{100+b^2}}{20} + \frac{70-(a+b)}{40} \geq \frac{\sqrt{400+(a+b)^2}}{20} + \frac{70-(a+b)}{40}$

Đặt $a+b = x, (0 \leq x \leq 70)$

Xét $f(x) = \frac{\sqrt{400+x^2}}{20} + \frac{70-x}{40}, 0 \leq x \leq 70$

$f'(x) = \frac{x}{20\sqrt{400+x^2}} - \frac{1}{40}, 0 \leq x \leq 70$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{400+x^2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

BBT

Vậy GTNN của $f(x)$ là $\frac{2\sqrt{3}+7}{4}$

Cách 3:

$t = \frac{1}{20} \left(\sqrt{x^2+10^2} + \sqrt{y^2+10^2} - \frac{x+y}{2} + 35 \right) \geq \frac{1}{20} \left(\sqrt{(x+y)^2+400} - \frac{x+y}{2} + 35 \right).$

$$\text{Xét } A = \sqrt{a^2 + 400} - \frac{a}{2}; f\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}+7}{4} \cdot 0 \leq a \leq 70 \Rightarrow A^2 = \frac{5a^2}{4} + 400 - a\sqrt{a^2 + 400}.$$

$$\text{Ta có: } a\sqrt{a^2 + 400} = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{a^2 + 400} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4a^2 + a^2 + 400}{2} \right) = \frac{5a^2 + 400}{4}$$

$$\Rightarrow -a\sqrt{a^2 + 400} \geq -\frac{5a^2}{4} - 100 \Rightarrow A^2 \geq 300 \Rightarrow A \geq 10\sqrt{3} \Rightarrow t \geq \frac{1}{20}(10\sqrt{3} + 35) = \frac{7+2\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 46. (HSG12 tỉnh Hải Phòng năm 2018-2019) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x \geq y; x \geq z; x^2 + 9yz \leq xz + 9xy.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{\frac{9y-x}{y}} + \frac{2y+x}{x+y} + \frac{2y+z}{y+z} + \frac{2z+x}{x+z}.$$

Lời giải

Tác giả: Nhóm 5 tổ 8 nhóm trong team toán vd – vdc.

+ / Ta sẽ chứng minh:

$$\text{Với mọi } a, b \text{ dương và } ab \geq 1 \text{ thì } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (*)$$

Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{ab} - 1) \geq 0 \text{ (luôn đúng). Đẳng thức xảy ra khi } a = b \text{ hoặc } ab = 1.$$

$$+ / \text{ Ta có: } x^2 + 9yz \leq xz + 9xy \Leftrightarrow (x-z)(x-9y) \leq 0 \Rightarrow x-9y \leq 0 \text{ vì } x \geq z \Rightarrow x-z \geq 0$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \Rightarrow t \in [1; 9]$$

$$\text{Khi đó } P = \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 1 + \frac{y}{y+z} + 1 + \frac{z}{x+z} = \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 2 + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh, ta có:

$$P \geq \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 2 + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z}}} = \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 2 + \frac{2}{1+\sqrt{t}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 2 + \frac{2}{1+\sqrt{t}}, t \in [1; 9] \text{ có}$$

$$f'(t) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(9-t)^2}} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2} < 0, \forall t \in [1; 9]$$

$$\text{từ đó suy ra } P \geq f(t) \geq f(9) = \frac{18}{5}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x}{y} = 9 \\ \frac{x}{z} = \frac{z}{y} \\ \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9y \\ xy = z^2 \\ z = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9y \\ z = 3y \end{cases}$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{18}{5} \text{ khi } \begin{cases} x = 9y \\ z = 3y \end{cases}.$$

Câu 47. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn

$$x \geq y \geq z \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 = 5.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$$

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Đặt } Q = (x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx) \text{ ta có } Q = -P.$$

$$+) \ xy + yz + zx < 0 \text{ ta có } Q < 0.$$

$$+) \ xy + yz + zx \geq 0 \text{ đặt } t = xy + yz + zx \geq 0.$$

$$\text{Áp dụng BĐT Côsi ta có } (x-y)(y-z)(x-z) \leq \left(\frac{x-y+y-z}{2} \right)^2 (x-z) = \frac{(x-z)^3}{4} \quad (1)$$

$$\text{Mà } 4(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 2(x-z)^2 + 2(x-y)^2 + 2(y-z)^2$$

$$\geq 2(x-z)^2 + [(x-y) + (y-z)]^2 = 3(x-z)^2 \text{ hay } 4(5-t) \geq 3(x-z)^2 \geq 0 \quad (2) \Rightarrow t \leq 5$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } Q \leq \frac{1}{4} t \sqrt{\left(\frac{4}{5}(5-t) \right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \sqrt{t^2(5-t)^3}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2(5-t)^3 \text{ với } t \in [0; 5]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = t(5-t)^2(10-5t), f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \\ t = 5 \end{cases}$$

$$f(0) = 0, f(5) = 0, f(2) = 108. \text{ Do đó } Q \leq 4 \text{ nên GTLN của } Q \text{ là } 4 \text{ khi } x = 2, y = 1, z = 0.$$

$$\text{Suy ra } P \geq -4 \text{ nên GTNN của } P \text{ là } -4 \text{ khi } x = 2, y = 1, z = 0.$$

Cách 2:

$$\text{Đặt } t = xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow t \leq 5.$$

$$\text{Ta có: } 10 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 2t \Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 10 - 2t$$

$$\text{Mà } (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq \frac{1}{2}(x-y+y-z)^2 + (z-x)^2 = \frac{3}{2}(z-x)^2 \Rightarrow \frac{(z-x)^2}{4} \leq \frac{5-t}{3}$$

$$(x-y)(y-z) \leq \left(\frac{x-y+y-z}{2}\right)^2 = \frac{(x-z)^2}{4} \Rightarrow (x-y)^2(y-z)^2 \leq \frac{(x-z)^4}{16} \leq \left(\frac{5-t}{3}\right)^2$$

$$\text{Ta có: } P^2 = (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 \cdot (xy+yz+zx)^2 \leq \left(\frac{5-t}{3}\right)^2 \frac{20-4t}{3} t^2 = \frac{4}{27}(5-t)^3 t^2$$

Xét hàm số suy ra $P^2 \leq 16 \Rightarrow \min P = -4$ tại $t = 2$ khi $x = 2, y = 1, z = 0$.

Câu 48. (HSG12 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2018-2019) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2018.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} + \frac{3029}{2}.$$

Lời giải

* Xét bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với mọi $a, b > 0$.

* Dùng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

$$\text{Suy ra: } P \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{3029}{2} = \frac{2018}{4} + \frac{3029}{2} = 2019.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2019 đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{2018}$.

Câu 49. (HSG10 THPT Thuận Thành 2018-2019) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$x + y + z = 2019.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y+z}{\sqrt{2019-y-z}} + \frac{x+z}{\sqrt{2019-x-z}} + \frac{x+y}{\sqrt{2019-x-y}}.$$

Lời giải

Tác giả: Trần Thế Mạnh ; Fb: Tác Kè Bông, thế mạnh

Ta có

$$P = \frac{y+z}{\sqrt{2019-y-z}} + \frac{x+z}{\sqrt{2019-x-z}} + \frac{x+y}{\sqrt{2019-x-y}} = \frac{2019-x}{\sqrt{x}} + \frac{2019-y}{\sqrt{y}} + \frac{2019-z}{\sqrt{z}}$$

$$= 2019 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) - (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{(1+1+1)(x+y+z)} = \sqrt{3 \cdot 2019} = \sqrt{6057}$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, ta có: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \geq \frac{9}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \geq \frac{9}{\sqrt{6057}}$

$$\text{Vậy } P \geq 2019 \cdot \frac{9}{\sqrt{6057}} - \sqrt{6057} = 6 \cdot \sqrt{673}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{1} = \frac{\sqrt{z}}{1} \\ \sqrt{x} = \sqrt{y} = \sqrt{z} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2019}{3}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 6 \cdot \sqrt{673}.$$

Câu 50. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Cho $x, y > 0$ là những số thay đổi thỏa mãn $\frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Lời giải

Tác giả: Đoàn Công Hoàng; Fb: Đoàn Công Hoàng

Tác giả: Đào Thị Thái Hà; Fb: Thái Hà Đào

Cách 1

$$+ \text{Ta có } P = (x + y) \left(\frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} \right) = 2018 + \frac{2018y}{x} + \frac{2019x}{y} + 2019.$$

+Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 2 số dương $\frac{2018y}{x}; \frac{2019x}{y}$ ta được

$$\frac{2018y}{x} + \frac{2019x}{y} \geq 2\sqrt{2018 \cdot 2019}.$$

$$\text{Do đó } P \geq \left(\sqrt{2018} + \sqrt{2019} \right)^2, \text{ dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x > 0; y > 0 \\ \frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} = 1 \\ \frac{2018y}{x} = \frac{2019x}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2018} (\sqrt{2018} + \sqrt{2019}) \\ y = \sqrt{2019} (\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) \end{cases}.$$

Vậy GTNN của P bằng $(\sqrt{2018} + \sqrt{2019})^2$ khi $\begin{cases} x = \sqrt{2018}(\sqrt{2018} + \sqrt{2019}) \\ y = \sqrt{2019}(\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) \end{cases}$.

Cách 2

Từ giả thiết và áp dụng BĐT Cauchy - Schwarz ta có

$$P = (x+y) \left(\frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} \right) \geq \left(\sqrt{x} \sqrt{\frac{2018}{x}} + \sqrt{y} \sqrt{\frac{2019}{y}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow P \geq (\sqrt{2018} + \sqrt{2019})^2.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x > 0; y > 0 \\ \frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} = 1 \\ \frac{\sqrt{2018}}{x} = \frac{\sqrt{2019}}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2018}(\sqrt{2018} + \sqrt{2019}) \\ y = \sqrt{2019}(\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $(\sqrt{2018} + \sqrt{2019})^2$ khi $\begin{cases} x = \sqrt{2018}(\sqrt{2018} + \sqrt{2019}) \\ y = \sqrt{2019}(\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) \end{cases}$.

Bài toán tổng quát

Cho $2n+1$ số thực dương cố định $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; k$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) và n số thực dương thay đổi $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = k$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \dots + \frac{b_n}{x_n}.$$

Câu 51. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$$

Lời giải

Tác giả: Hoàng Gia Hứng; Fb: Hoàng Gia Hứng

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T+5 &= \left(\frac{3b}{2a} + \frac{2a}{3b} \right) + \left(\frac{2a}{3b} + \frac{2a}{2a} \right) + \left(\frac{3c}{2a} + \frac{3c}{3b} \right) + \left[\frac{12(b-c)}{2a+3c} + 4 \right] \\ &= \left(\frac{3b}{2a} + \frac{2a}{3b} \right) + (2a+3c) \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \right) + \frac{4(2a+3b)}{2a+3c}. \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có } \frac{3a}{2b} + \frac{2b}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{3a}{2b} \cdot \frac{2b}{3a}} = 2.$$

$$\text{Áp dụng BĐT } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ với } x, y > 0 \text{ ta có } \frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \geq \frac{4}{2a+3b}.$$

Suy ra $T + 5 \geq 2 + 4 \left(\frac{2a+3c}{2a+3b} + \frac{2a+3b}{2a+3c} \right) \geq 2 + 4.2 = 10$.

Vậy $T \geq 5$.

Dấu "=" xảy ra khi $2a = 3b = 3c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 5.

Câu 52. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019) $x, y, z \in [2018; 2019]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$f(x, y, z) = \frac{|2018.2019 - xy|}{(x+y)z} + \frac{|2018.2019 - yz|}{(y+z)x} + \frac{|2018.2019 - zx|}{(z+x)y}$$

Lời giải

Tác giả: Trần Quang Tiềm ; Fb: Tiem Tran

Cách 1:

Ta đi chứng minh với: $\forall x, y, z \in [a; b], (a > 0)$ ta luôn có

$$\begin{aligned} \left| \frac{ab - xy}{x + y} \right| &\leq \frac{b - a}{2} \\ \Leftrightarrow 4(ab - xy)^2 &\leq (x + y)^2 (b - a)^2 \\ \Leftrightarrow [2ab - 2xy - (x + y)(b - a)][2ab - 2xy + (x + y)(b - a)] &\leq 0 \\ \Leftrightarrow [b(2a - x - y) + x(a - y) + y(a - x)] \cdot [a(2b - x - y) + x(b - y) + y(b - x)] &\leq 0 \quad (\text{đúng}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có } \left| \frac{ab - xy}{(x + y)z} \right| \leq \frac{b - a}{2z} \leq \frac{b - a}{2a}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = a, z = a$ hay $x = y = z = a$

$$\text{Áp dụng ta có: } f(x, y, z) \leq \frac{b - a}{2a} + \frac{b - a}{2a} + \frac{b - a}{2a} = \frac{3(b - a)}{2a}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = a$.

Thay $a = 2018, b = 2019$, ta được $\max f(x, y, z) = \frac{3}{4036}$ khi $x = y = z = 2018$

Cách 2:

Ta có $\frac{|2018.2019 - xy|}{(x + y)} \leq \frac{|2018.2019 - xy|}{2\sqrt{xy}}$ (Theo BDT AM-GM).

Đặt $t = \sqrt{xy}, (2018 \leq t \leq 2019)$, do $g t, x, y \in [2018; 2019]$

Xét hàm $g(t) = \frac{2018.2019 - t^2}{t} = \frac{2018.2019}{t} - t$, liên tục trên $[2018; 2019]$ và nghịch biến trên

$$(2018; 2019) \text{ do đó } \begin{cases} \text{Max}_{[2018; 2019]} g(t) = g(2018) = 1 \\ \text{Min}_{[2018; 2019]} g(t) = g(2019) = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Max}_{[2018; 2019]} |g(t)| = |g(2019)| = |g(2018)| = 1$$

nên $\frac{|2018.2019 - xy|}{(x + y)z} \leq \frac{|2018.2019 - xy|}{2\sqrt{xy} \cdot z} \leq \frac{1}{2z} \leq \frac{1}{4036}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 2018$.

Đánh giá tương tự cho 2 biểu thức còn lại.

Tóm lại $\max f(x, y, z) = \frac{3}{4036}$ khi $x = y = z = 2018$.

Câu 53. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{7}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{121}{14(ab + bc + ca)}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{7}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{121}{7(1 - (a^2 + b^2 + c^2))}.$$

$$\text{Đặt } t = a^2 + b^2 + c^2.$$

Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$.

$$\text{Suy ra } t = a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1.$$

$$\text{Mặt khác } 1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{Suy ra } t = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}. \text{ Vậy } t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{7}{t} + \frac{121}{7(1-t)}; t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right).$$

$$f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 72t^2 + 98t - 49 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18} \text{ hoặc } t = -\frac{7}{4} \text{ (loại)}.$$

Lập BBT của hàm số $f(t)$.

t	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	1
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	$\frac{657}{14}$	$\frac{324}{7}$	$+\infty$

$$\text{Dựa vào BBT suy ra } f(t) \geq f\left(\frac{7}{18}\right) = \frac{324}{7}; \forall t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$$

$$\text{Vậy min } A = \frac{324}{7} \text{ đạt được khi } a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6}.$$

Câu 1. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Hàm số $y = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{4 + \cos x}}$ có tập xác định D là:

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \emptyset$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Minh Thùy; Fb: Phạm Minh Thùy

Chọn D

Điều kiện xác định

$$\begin{cases} 4 + \cos x \neq 0 \\ \frac{\cos x - 1}{4 + \cos x} \geq 0 \end{cases}$$

Ta thấy $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \Leftrightarrow 3 \leq \cos x + 4 \leq 5, \forall x$ suy ra $\cos x + 4 > 0, \forall x$.

Xét $\frac{\cos x - 1}{4 + \cos x} \geq 0$. Ta có $\cos x + 4 > 0, \forall x$.

Nên $\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$ (vì $\cos x \leq 1, \forall x$) $\Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Tìm m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m - \sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x}{\sin^{2017} x - \cos^{2019} x + \sqrt{2}}}$

xác định với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Tác giả: Lê Đức Lộc; Fb: Lê Đức Lộc

Với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $0 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \cos^{2019} x \leq \cos^2 x$.

Khi đó: $\sin^{2017} x - \cos^{2019} x + \sqrt{2} \geq \sin^{2017} x - \cos^2 x + \sqrt{2} = \sin^{2017} x - (1 - \sin^2 x) + \sqrt{2}$

$= \sin^2 x (1 + \sin^{2015} x) + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} - 1 > 0$ với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

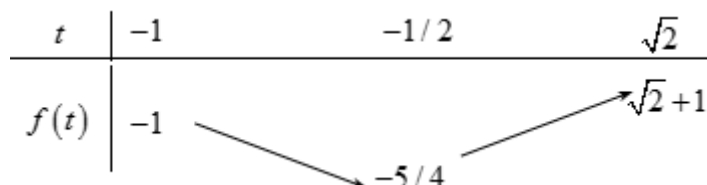
Hàm số $y = \sqrt{\frac{m - \sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x}{\sin^{2017} x - \cos^{2019} x + \sqrt{2}}}$ xác định với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow \frac{m - \sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x}{\sin^{2017} x - \cos^{2019} x + \sqrt{2}} \geq 0$ với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow m \geq \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x \text{ với mọi } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in [-1; \sqrt{2}].$$

$$\text{Suy ra } m \geq f(t) = t^2 + t - 1 \text{ với mọi } t \in [-1; \sqrt{2}]$$



$$\text{Vậy } m \geq \sqrt{2} + 1.$$

Câu 3. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Trong tập giá trị của hàm số $y = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Tác giả: Công Phương; Fb: Nguyễn Công Phương

Chọn C

Phương trình: $\sin 2x - \cos 2x + 3 = 0$ vô nghiệm vì $a^2 + b^2 < c^2$. Do đó hàm số đã cho có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3} \Leftrightarrow y \sin 2x - y \cos 2x + 3y = 2 \sin 2x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (y-2) \sin 2x - (y+1) \cos 2x = -3y$$

Để phương trình ẩn x có nghiệm thì điều kiện là:

$$(y-2)^2 + (y+1)^2 \geq (-3y)^2 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 + y^2 + 2y + 1 \geq 9y^2$$

$$\Leftrightarrow -7y^2 - 2y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{5}{7}$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-1; 0\}$ Vậy có 2 giá trị nguyên y .

Câu 4. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Xét hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số đồng biến và trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số nghịch biến.
 B. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số luôn đồng biến.
 C. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số luôn nghịch biến.
 D. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số nghịch biến và trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số đồng biến.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ nên trên khoảng $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \tan x$ luôn đồng biến.

Câu 5. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin x \cdot \sin 2x + 2 \sin x \cdot \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là:

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Tác giả: Trần Thị Phương Lan; Fb: Trần Thị Phương Lan

$$\text{ĐK: } \sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Với điều kiện trên ta có

$$\frac{\sin x \cdot \sin 2x + 2 \sin x \cdot \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x (\sin x + \cos x) + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x + \cos x)(\sin 2x + 1)}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 1 = \sqrt{3} \cos 2x \text{ (do } \sin x + \cos x \neq 0 \text{)}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với điều kiện trên ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Xét trên khoảng $(-\pi; \pi)$ ta có $-\pi < \frac{\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{13}{12} < k < \frac{11}{12}$. Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-1, 0\}$.

Vậy trên khoảng $(-\pi; \pi)$ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $\frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$.

Câu 6. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3} = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Thu Hồng ; Fb: Thu Hong Le.

Chọn A

Phương trình $\frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3} = m$ xác định với mọi $x \in [0; \pi]$.

Đặt: $t = \sin x$ thì $t \in [0; 1]$.

Phương trình đã cho trở thành: $\frac{2t - 1}{t + 3} = m$.

Đặt $f(t) = \frac{2t - 1}{t + 3}$. Vì $f'(t) = \frac{7}{(t + 3)^2} > 0, \forall t \in [0; 1]$ nên $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\min_{[0; 1]} f(t) \leq m \leq \max_{[0; 1]} f(t)$

$$\Leftrightarrow f(0) \leq m \leq f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{4}.$$

Vậy chỉ có một số nguyên $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. (HSG11 Bắc Ninh 2018-2019) Giải phương trình

$$\frac{4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x - 1 - 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\cos 3x + 1}} = 0.$$

Lời giải

Tác giả: Hà Quốc Vũ ; Fb: Hà Quốc Vũ

$$\frac{4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x - 1 - 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\cos 3x + 1}} = 0 \quad (1).$$

$$\text{ĐKXĐ: } 2\cos 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos 3x > -\frac{1}{2} \quad (*).$$

$$(1) \Leftrightarrow 4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x - 1 - 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1 - \cos x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x - 1 - 2 \cdot \frac{1 + \cos \left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\cos x - \sqrt{3} \cos 2x - 1 - 1 + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2\cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So điều kiện (*), ta loại nghiệm $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ (Do $\cos \left[3\left(\frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2}$). Nhận nghiệm $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ (Do $\cos \left[3\left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right)\right] = 0 > -\frac{1}{2}$).

Vậy $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 8. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019) Giải phương trình sau

$$\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x.$$

Lời giải

Tác giả: phùng minh nam ; Fb: Nam phùng

Ta có : $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 9. (HSG11 Hà Tĩnh 2018-2019) Cho phương trình

$$\frac{(\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1}{2\sin x - \sqrt{2}} = 0.$$

Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(2018\pi; 2019\pi)$?

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Hữu ; Fb: Nguyễn Văn Hữu

$$\frac{(\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1}{2\sin x - \sqrt{2}} = 0 \quad (1a)$$

Xét phương trình:

$$\text{Điều kiện: } 2\sin x - \sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Khi đó (1a) trở thành: $(\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - 2\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) + 2\sin x(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x + 2\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 & (2a) \\ \sin 2x + 2\sin x - 3 = 0 & (3a) \end{cases}.$$

Phương trình (2a) $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Dựa vào điều kiện đầu bài ta được:

$$x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình (3a) $\Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin x = 3$.

Vì $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ và $-2 \leq \sin x \leq 2$ nên $-3 \leq \sin 2x + 2\sin x \leq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\sin 2x + 2\sin x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Mà } x \in (-2018\pi; 2019\pi) \Leftrightarrow -2018\pi < \frac{5\pi}{4} + k2\pi < 2019\pi \Leftrightarrow -2018 < \frac{5}{4} + 2k < 2019.$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1009, -1008, \dots, 1008\}$ suy ra ta có 2018 nghiệm.

Câu 10. (HSG11 Nghệ An 2018-2019) Giải phương trình

$$\cos 2x + 7\cos x - \sqrt{3}(\sin 2x - 7\sin x) = 8$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Tâm; Fb: Tâm Nguyễn

$$\text{Phương trình: } \cos 2x + 7\cos x - \sqrt{3}(\sin 2x - 7\sin x) = 8$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 7(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin \frac{\pi}{3}\sin 2x + 7\left(\cos \frac{\pi}{6}\sin x + \sin \frac{\pi}{6}\cos x\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 7\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 7\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 7\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 3 \text{ (vn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 11. (HSG11 Thuận Thành 2018-2019) Giải phương trình

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}\cos 4x = 4\cos^2 x - 1.$$

Lời giải

Ta có:

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}\cos 4x = 4\cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + \sqrt{3}\cos 4x = 2(1 + \cos 2x) - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x = 2\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 12. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Giải phương trình: $\sin^2 3x \cdot \cos 2x + \sin^2 x = 0$.

Lời giải

Cách 1: Tác giả: Dương Đức Tuấn ; Fb: Dương Tuấn

$$\text{Ta có: } \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x(3 - 4\sin^2 x) = \sin x(1 + 2\cos 2x).$$

$$\text{Vậy ta có: } \sin^2 3x \cdot \cos 2x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \left[\sin^2 x (1 + 2 \cos 2x)^2 \right] \cdot \cos 2x + \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \left[(1 + 2 \cos 2x)^2 \cdot \cos 2x + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x (4 \cos^3 2x + 4 \cos^2 2x + \cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\cos 2x + 1)(4 \cos^2 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{k\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Cách 2: Tác giả: Phạm Hữu Thành ; Fb: Phạm Hữu Thành.

$$\text{Ta có: } \sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 6x}{2} \cos 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \cos 6x \cos 2x + 1 - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 4x - 1)(2 \cos 4x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x - 1 = 0 \quad (2 \cos 4x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 13. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Tính tổng các nghiệm của phương trình sau trên $[0; 1000\pi]$

$$\frac{2 \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - 3}{2 \cos x - \sqrt{2}} = 0$$

Lời giải

Tác giả: Hoàng Vũ; Fb: Hoàng Vũ

Giáo viên phản biện: Lê Đức Lộc ; Fb: Lê Đức Lộc

$$\text{ĐK: } \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\frac{2 \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - 3}{2 \cos x - \sqrt{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \left[\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(2x - \pi) \right] - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin 2x)^2 - [\cos 4x - \sin 2x] - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin 2x + \sin^2 2x - \cos 4x + \sin 2x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin^2 2x + 3 \sin 2x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ (nhận)} \text{ hay } \sin 2x = -2 \text{ (loại)}$$

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tổng số nghiệm trên $[0; 1000\pi]$ là tổng 500 số hạng đầu tiên của một cấp số cộng với $u_1 = \frac{5\pi}{4}$, công sai $d = 2\pi$

$$S = \frac{500}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{5\pi}{4} + 499 \cdot 2\pi \right) = 250125\pi.$$

Câu 14. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Giải các phương trình sau:

$$2 \cos^3 x - \sin 2x \sin x = -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{2019\pi}{4}\right).$$

Lời giải

Tác giả: Fb: Nguyễn Ánh Dương

Ta có:

$$\bullet -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{2019\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(x + 504\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = -2\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) = 2 \cos x + 2 \sin x.$$

$$\bullet 2 \cos^3 x - \sin 2x \sin x = 2 \cos^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = 2(1 - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= 2 \cos x - 2 \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x.$$

Do đó phương trình đã cho tương đương

$$2 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = 2 \cos x + 2 \sin x.$$

$$\Leftrightarrow -4 \sin^2 x \cos x = 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x + 4 \sin^2 x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (2 \sin x \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (\sin 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 15. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Giải phương trình $\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$.

Lời giải

$$\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 16. (HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019) Giải các phương trình sau:

1. $1 + \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x$
2. $9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Phương Thu, FB: Nguyễn Phương Thu

Phản biện 1: Phạm Hoàng Điệp; FB: Hoàng Điệp Phạm

Phản biện 2: Nguyễn Minh Đức; FB: Duc Minh.

$$1 + \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm là: $x = k\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$$2) \quad 9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8$$

$$\Leftrightarrow (6 \cos x - 3 \sin 2x) + (\cos 2x + 9 \sin x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (6 \cos x - 6 \sin x \cos x) + (1 - 2 \sin^2 x + 9 \sin x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x (1 - \sin x) - (2 \sin^2 x - 9 \sin x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x (1 - \sin x) - (\sin x - 1)(2 \sin x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(6 \cos x + 2 \sin x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & (1) \\ 6 \cos x + 2 \sin x = 7 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \text{ vô nghiệm vì có } a^2 + b^2 = 6^2 + 2^2 < 7^2 = c^2$$

$$\text{Vậy phương trình có 1 họ nghiệm là: } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Câu 17. (HSG12 Quảng Ngãi 2018-2019) Giải phương trình $\frac{2\sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos x - 2 \sin x}{(1 - 2 \cos x) \tan x} = \cos x$.

Lời giải

Tác giả: Vĩnh Tín, FB: Vĩnh Tín

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq \frac{1}{2} \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó

$$\frac{2\sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos x - 2 \sin x}{(1 - 2 \cos x) \tan x} = \cos x \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos x - 2 \sin x = \sin x - 2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos x - 3 \sin x + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x (2 \sin x - \sqrt{3}) + \cos x (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - \sqrt{3})(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0 & (1) \\ 2 \sin x - \sqrt{3} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$+) (1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$+) (2) \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta suy ra nghiệm của phương trình là: } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 18. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{6} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Lời giải

Tác giả: Tạ Minh Trang; Fb: Minh Trang

$$\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{6} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x - 1 + \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x + \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x(\cos x - \sin x) + \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ 2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$; $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 19. (HSG12 THPT Thuận Thành năm 2018-2019) Giải phương trình

$$2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3} \cos 4x = 4 \cos^2 x - 1.$$

Lời giải

$$1. 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3} \cos 4x = 4 \cos^2 x - 1$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + \sqrt{3} \cos 4x = 2(1 + \cos 2x) - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = 2 \cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 20. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Với giá trị nào của m thì phương trình $3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = m + 2$ có nghiệm?

A. $m > 0$.B. $m < 0$.C. $0 \leq m \leq 1$.D. $-1 \leq m \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

$$3\sin^2 x + 2\cos^2 x = m + 2 \Leftrightarrow \sin^2 x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = m + 2 \Leftrightarrow \sin^2 x = m \quad (1).$$

Vì $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ nên phương trình (1) có nghiệm khi $0 \leq m \leq 1$.

Câu 21. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải

Tác giả: Phạm Tiến Long; Fb: Long Phạm Tiên

Chọn C

Ta có:

$$\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x = \sin 7x$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos 5x = \sin 7x$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 7x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \frac{\pi}{3} = 7x + k2\pi \\ 5x + \frac{\pi}{3} = \pi - 7x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Với $x = \frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$: Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta có:

$$0 < \frac{\pi}{6} - k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} < -k\pi < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} > k > -\frac{1}{3}.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $k = 0$, suy ra nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6}$.

Với $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$: Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta có:

$$0 < \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{18} < k\frac{\pi}{6} < \frac{4\pi}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{8}{3}.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $k \in \{0; 1; 2\}$. Suy ra các nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{18}$; $x = \frac{2\pi}{9}$; $x = \frac{7\pi}{18}$.

Vậy có 4 nghiệm của phương trình thỏa yêu cầu đề bài là: $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{18}$; $x = \frac{2\pi}{9}$; $x = \frac{7\pi}{18}$.

Câu 22. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Giải phương trình:

$$\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0.$$

Lời giải*Tác giả: Lê Trọng Hiếu ; Fb: Hieu Le**Phản biện: Nguyễn Văn Mạnh ; Fb: Nguyễn Văn Mạnh*

Ta có: $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (1 + 2\cos x)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1 - 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

□

$$\sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

□

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Câu 23. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1.$$

Lời giải*Tác giả: Nguyễn Văn Tú ; Fb: Tu Nguyenvan*

Điều kiện xác định: $\sin 3x \neq 0 \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x(4\cos^2 x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq \pm \frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0(l) \\ \cos x = 0(t/m) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ \cos x = -\frac{1}{2}(l) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 24. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải phương trình :

$$\frac{2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x + 4 + \sqrt{3}}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 1.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hiền ; Fb: Nguyễn Hiền

Điều kiện: $2 \cos x + \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với điều kiện $x \neq \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có :

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x + 4 = 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x \cos x - 2 \cos x + 2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x - 1) + (2 \sin x - 1) \cdot (\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1) \cdot (2 \cos x + \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x = 1 \\ 2 \cos x + \sin x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \cos x = 1 \end{cases} (l)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (l) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25. (HSG12 Hà Nội năm 2018-2019) Giải phương trình $\cos x = 1 - x^2$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Giang; Fb: Thanh Giang

Xét hàm số $f(x) = \cos x + x^2 - 1$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = -\sin x + 2x$, $f''(x) = -\cos x + 2$.

Vì $f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f'(0) = 0$ suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0$.

Câu 26. (HSG12 tỉnh Hải Phòng năm 2018-2019) Giải phương trình $\frac{2\sin^3 x - \sin x + \cos 2x}{\tan x - 1} = 0$.

Lời giải

Tác giả: Nhóm 4 - Tổ 8 nhóm toán team toán vd - vdc

$$\text{a) Điều kiện: } \begin{cases} \tan x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$$2\sin^3 x - \sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin^2 x - 1) + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện xác định của phương trình thì phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 27. (HSG12 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2018-2019) Giải phương trình

$$2\sqrt{2} \cos 2x - \sin 2x \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với:

$$2\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \sin 2x \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + \sin 2x(\cos x + \sin x) - 4(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \quad (1) \\ 4(\cos x - \sin x) + \sin 2x - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Giải (2): Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình trở thành: $4t + 1 - t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \text{ (loại)}$

Với $t = 1$ ta có $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có ba họ nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Câu 28. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Giải phương trình
 $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) + \sin x = \sin 2x.$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tường Linh; Fb: Khoisx Bvkk

Ta có:

$$(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) + \sin x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin x(2 \cos x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - 1 = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 29. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Giải phương trình:

$$(2 \sin x - 3)(4 \sin^2 x - 6 \sin x + 3) = 1 + 3\sqrt{6 \sin x - 4}$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Ái Trinh ; Fb: Trinh Nguyễn

Xét phương trình: $(2\sin x - 3)(4\sin^2 x - 6\sin x + 3) = 1 + 3\sqrt[3]{6\sin x - 4}$ (1)

Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$.

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{aligned}(2t - 3)(4t^2 - 6t + 3) &= 1 + 3\sqrt[3]{6t - 4} \\ \Leftrightarrow 8t^3 - 24t^2 + 24t - 9 &= 1 + 3\sqrt[3]{6t - 4} \\ \Leftrightarrow (2t - 2)^3 + 3(2t - 2) &= 6t - 4 + 3\sqrt[3]{6t - 4} \quad (2)\end{aligned}$$

Phương trình (2) có dạng: $f(2t - 2) = f(\sqrt[3]{6t - 4})$

Với $f(u) = u^3 + 3u$, $u \in \mathbb{R}$

$$f'(u) = 3u^2 + 3 = 3(u^2 + 1) > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } 2t - 2 = \sqrt[3]{6t - 4} \Leftrightarrow 8t^3 - 24t^2 + 18t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ vì } t \in [-1; 1] \text{ nên chọn } t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$.

Câu 30. (HSG11 Hậu Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hữu Nam; Fb: Nam Nguyen Huu.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}.$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x(1 + \sin x + \cos 2x)}{\cos x + \sin x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = 1 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

$$\text{Với } \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là: $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ với $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu 31. (HSG11 Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \quad (2).$$

Với điều kiện (2) thì

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos x (1 + \sin x + \cos 2x)}{\cos x + \sin x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \\ &\Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-1}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases}.$$

Với $\sin x = 1$ thì $\cos x = 0$, không thỏa mãn điều kiện (2).

Với $\sin x = -\frac{1}{2}$ thì $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$, $\tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \neq -1$ nên (2) thỏa mãn.

$$\text{Ta có: } \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 32. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Với mọi x thuộc tập xác định, ta có:

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \Leftrightarrow \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)}{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + m2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Đối chiếu đk, phương trình có nghiệm: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + m2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Câu 33. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x + 6 \sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - \sin^2 x - \sin x.$$

Lời giải

$$\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x + 6 \sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - \sin^2 x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x + 3 \sin 2x = 1 + \sin 2x - \sin^2 x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x = \sqrt{3} \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 34. (HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019) Giải phương trình $(1 + 2 \sin 4x) \tan 2x = 1$.**Lời giải**

Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Khi đó,

$$(1 + 2\sin 4x)\tan 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin 4x \cdot \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x - \cos 6x = \cos 2x.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \cos 6x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 6x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x = 6x + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} - 2x = -6x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 35. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019) Giải phương trình:

$$4\cos^2 x(1 + \sin x) + 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x = 1 + 2\sin x.$$

Lời giải

Phương trình tương đương với: $4\cos^2 x + 4\cos^2 x \cdot \sin x + 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x = 1 + 2\sin x.$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(2\cos^2 x - 1) + 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x + 4\cos^2 x - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x + 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x + 3\cos^2 x - \sin^2 x = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + (\sqrt{3}\cos x + \sin x)(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\cos x + \sin x)(2\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \\ 2\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \end{cases}.$$

$$+) \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$+) 2\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm: } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 36. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 3x - \cos 2x + 9\sin x - 4 = 0$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là:

A. $\frac{25\pi}{6}.$

B. $6\pi.$

C. $\frac{11\pi}{3}.$

D. $5\pi.$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Long; Fb: Nguyễn Thanh Long

Chọn B

$$\checkmark \cos 3x - \cos 2x + 9 \sin x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) + 9 \sin x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (4 \cos^2 x - 3) + 2 \sin^2 x + 9 \sin x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x [4(1 - \sin^2 x) - 3] + (2 \sin x - 1)(\sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (1 - 4 \sin^2 x) + (2 \sin x - 1)(\sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x) - (1 - 2 \sin x)(\sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2 \sin x) [\cos x (1 + 2 \sin x) - (\sin x + 5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2 \sin x) (\cos x + 2 \sin x \cos x - \sin x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 \sin x = 0 \\ \cos x + 2 \sin x \cos x - \sin x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \text{ Với } 1 - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\checkmark \text{ Với } \cos x + 2 \sin x \cos x - \sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = \sin 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x - 5$$

Ta có đánh giá sau $\begin{cases} \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}], \forall x \in (0; 3\pi) \\ \sin 2x - 5 \in [-6; -4], \forall x \in (0; 3\pi) \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \neq \sin 2x - 5, \forall x \in (0; 3\pi).$

Vậy phương trình này vô nghiệm.

$$\checkmark \text{ Trong khoảng } (0; 3\pi), \text{ phương trình có tập nghiệm: } S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} \right\}$$

Suy ra tổng các nghiệm trong khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình là 6π .

Câu 37. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Giải phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$

Lời giải

Tác giả: Trần Đức Nghĩa; Fb: Đ Nghĩa Trần

$$\text{Ta có: } \cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} (n) \\ \cos 2x = -\frac{3}{2} (l) \end{cases}.$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 38. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x + 6 \sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - \sin^2 x - \sin x.$$

Lời giải

$$\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x + 6 \sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - \sin^2 x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x + 6 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \sin x \quad \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x - \sin x = 4 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } x = \frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 39. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019) Giải phương trình:

$$\sin \left(\frac{5\pi}{4} - 3x \right) - 16 = -15 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \frac{\pi}{4} + x \Leftrightarrow x = t - \frac{\pi}{4}. \text{ Phương trình đã cho trở thành:}$$

$$\sin \left[\frac{5\pi}{4} - 3 \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right] + 15 \sin t - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin 3t + 15 \sin t - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^3 t + 12 \sin t - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\sin t - 1)(\sin^2 t + \sin t + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

$$\text{Do đó ta có: } x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 40. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Trên đoạn $[-2018; 2018]$ phương trình $\sin x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm ?

A. 3856. B. 1286. C. 2571. D. 1928.

Lời giải

Tác giả: Phạm Trần Luân; Fb: Phạm Trần Luân

Chọn C

$$\text{Ta có: } \sin x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+ \text{ Với } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ta có } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -2018 \leq k\pi \leq 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \frac{-2018}{\pi} \leq k \leq \frac{2018}{\pi} \end{cases} \text{ nên}$$

$$k \in \{-642; -641; \dots; 0; \dots; 641; 642\}.$$

$$+ \text{ Với } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ta có } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -2018 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 2018 \end{cases} \text{ nên}$$

$$k \in \{-321; -320; \dots; 0; \dots; 320; 321\}.$$

$$+ \text{ Với } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ta có } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -2018 \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 2018 \end{cases} \text{ nên}$$

$$k \in \{-321; -320; \dots; 0; \dots; 320; 321\}.$$

Vậy phương trình có 2571 nghiệm.

Câu 41. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\cos^2 x + \sqrt{m + \cos x} = m$ có nghiệm?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hương; Fb: NguyenHuong

Chọn B

$$\text{Đặt } a = \sqrt{m + \cos x}, a \geq 0 \Rightarrow a^2 = m + \cos x \quad (1). \text{ Ta có } \cos^2 x + a = m \quad (2)$$

$$\text{Thế } \cos^2 x + a = m \text{ từ (2) vào (1) ta được } a^2 - \cos^2 x = a + \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} a + \cos x = 0 \\ a - \cos x = 1 \end{cases}$$

+) Với $a + \cos x = 0 \Rightarrow \sqrt{m + \cos x} = -\cos x$ (3)

Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$, pt (3) trở thành $\sqrt{m+t} = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [-1; 0] \\ m = t^2 - t \end{cases}$

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t) = t^2 - t$ trên $[-1; 0]$

Khi đó phương trình có nghiệm khi $m \in [0; 2]$, $m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow m \in \{1; 2\}$

+) Với $a - \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{m + \cos x} = 1 - \cos x$ (4)

Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$, pt (4) trở thành $\sqrt{m+t} = 1-t \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [-1; 1] \\ m = t^2 + t + 1 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên hàm số $g(t) = t^2 + t + 1$ trên $[-1; 1]$

Khi đó phương trình có nghiệm khi $m \in \left[\frac{3}{4}; 3\right]$, $m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn

Câu 42. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng)

Cho phương trình $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 5(\sqrt{3} \sin x - \cos x) - 6 = 0$. Tính tổng giữa nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình.

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $-\frac{\pi}{2}$.

C. $-\frac{2\pi}{3}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 5(\sqrt{3} \sin x - \cos x) - 6 = 0$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right), |t| \leq 2$$

$$\Rightarrow t^2 = 3 \sin^2 x + \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 - (\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x) \Rightarrow \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 - t^2$$

Phương trình trở thành:

$$-t^2 + 5t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(N) \\ t = 4(L) \end{cases} \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k_1 2\pi \\ x = \pi + k_2 2\pi \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm dương nhỏ nhất là $x_1 = \frac{\pi}{3}$ ứng với $k_1 = 0$. Nghiệm âm lớn nhất là $x_2 = -\pi$ ứng với $k_2 = -1$

$$\text{Do đó: } x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

Chuyên đề

9

Bài toán đếm

Câu 1. (HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019) Hoa có 11 bì thư và 7 tem thư khác nhau. Hoa cần gửi thư cho 4 người bạn, mỗi người 1 thư. Hỏi Hoa có bao nhiêu cách chọn ra 4 bì thư và 4 tem thư, sau đó dán mỗi tem thư lên mỗi bì thư để gửi đi?

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Loan; Fb: Nguyễn Loan.

Chọn 4 bì thư từ 11 bì thư: có C_{11}^4 cách.

Chọn 4 tem thư từ 7 tem thư: có C_7^4 cách.

Dán 4 tem thư và 4 bì thư vừa chọn: có $4!$ cách.

Gửi 4 bì thư đã dán 4 tem thư cho 4 người bạn: có $4!$ cách.

Vậy có tất cả: $C_{11}^4 \cdot C_7^4 \cdot 4! \cdot 4! = 6652800$ cách.

Câu 2. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau. Tính tổng tất cả các số đó.

A. 120.

B. 42000.

C. 2331.

D. 46620.

Lời giải

Tác giả: Phương Thúy; Fb: Phương Thúy

Chọn D

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau là: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ (số).

Vì vai trò các chữ số giống nhau nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số ở mỗi hàng là như nhau và bằng: $120 : 6 = 20$ (lần).

Tổng tất cả các số lập được là: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 20 \cdot 111 = 46620$.

Câu 3. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Từ 8 chữ số trên lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau sao cho tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối?

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Mộng; Fb: Nguyễn Văn Mộng

Do $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, nên để tổng 4 chữ số đầu và tổng 4 chữ số cuối bằng nhau là tổng đó bằng 14.

Ta lập 4 bộ số có tổng là 14 và có chữ số 0 là:

$(0; 1; 6; 7); (0; 2; 5; 7); (0; 3; 4; 7); (0; 3; 5; 6)$. Với mỗi bộ số có số 0 trên ứng với một bộ còn lại không có số 0 và có tổng bằng 14.

TH1: Bộ có số 0 đứng trước: có 4 bộ có chữ số 0, ứng với mỗi bộ có:

+) Xếp 4 số đầu có $3 \cdot 3!$ cách.

+) Xếp 4 số cuối có $4!$ cách.

Áp dụng qui tắc nhân có $4.3.3!.4! = 1728$ số.

TH2: Bộ có số 0 đứng sau: có 4 bộ có chữ số 0, ứng với mỗi bộ có:

+) Xếp bộ không có chữ số 0 đứng trước có $4!$ cách.

+) Xếp bộ có chữ số 0 đứng sau có $4!$ cách.

Áp dụng qui tắc nhân có $4.4!.4! = 2304$ số.

Vậy có $1728 + 2304 = 4032$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Từ 2018 số nguyên dương đầu tiên lấy ra 6 số xếp thành một dãy số có dạng $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Hỏi có bao nhiêu dãy số dạng trên biết a_1, a_2, a_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Tác giả: Võ Quang Anh; Fb: Anh Võ Quang.

a_1, a_2, a_3 là cấp số cộng nên $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$. Suy ra a_1, a_3 cùng tính chẵn lẻ.

TH1: a_1, a_3 cùng lẻ.

a_1, a_3 chọn trong các số $1, 3, 5, \dots, 2017$ nên số cách là A_{1009}^2 .

$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ nên a_2 có 1 cách.

a_4, a_5, a_6 chọn trong 2018 số loại đi ba số a_1, a_2, a_3 nên số cách là A_{2015}^3 .

Do đó số cách là $A_{1009}^2 \cdot A_{2015}^3$.

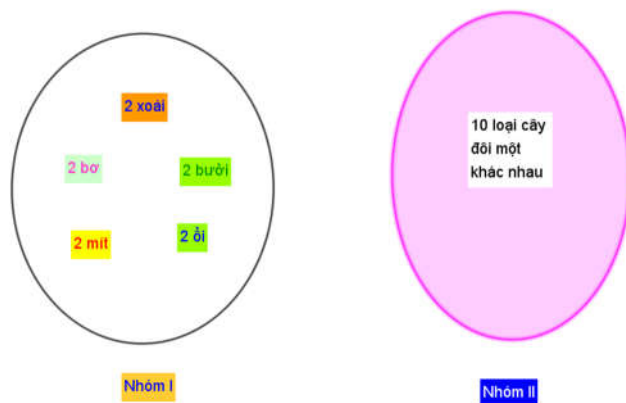
TH2: a_1, a_3 cùng chẵn. Làm tương tự TH1 có $A_{1009}^2 \cdot A_{2015}^3$ cách.

Vậy có $2 \cdot A_{1009}^2 \cdot A_{2015}^3$ cách lập thành dãy số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. (HSG12 tỉnh KonTum năm 2018-2019) Có 20 cây giống trong đó có 2 cây xoài, 2 cây mít, 2 cây ổi, 2 cây bơ, 2 cây bưởi và 10 loại cây khác 5 loại cây trên đồng thời đôi một khác loại nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 cây để trồng trong một khu vườn sao cho không có hai cây nào thuộc cùng một loại.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Huyền; Fb: Huyền Nguyen



Trường hợp 1: Chọn 5 cây nhóm II. Số cách chọn là $C_{10}^5 = 252$ (cách chọn).

Trường hợp 2: Chọn 4 cây nhóm II, chọn 1 cây nhóm I.

Số cách chọn là $C_{10}^4 \cdot C_5^1 \cdot C_2^1 = 2100$ (cách chọn).

Trường hợp 3: Chọn 3 cây nhóm II, chọn 2 cây nhóm I.

Số cách chọn là $C_{10}^3 \cdot C_5^2 \cdot (C_2^1)^2 = 4800$ (cách chọn).

Trường hợp 4: Chọn 2 cây nhóm II, chọn 3 cây nhóm I.

Số cách chọn là $C_{10}^2 \cdot C_5^3 \cdot (C_2^1)^3 = 3600$ (cách chọn).

Trường hợp 5: Chọn 1 cây nhóm II, chọn 4 cây nhóm I.

Số cách chọn là $C_{10}^1 \cdot C_5^4 \cdot (C_2^1)^4 = 800$ (cách chọn).

Trường hợp 6: Chọn 5 cây nhóm I. Số cách chọn là $C_5^5 \cdot (C_2^1)^5 = 32$ (cách chọn).

Vậy số cách chọn cây thỏa mãn yêu cầu bài ra là:

$252 + 2100 + 4800 + 3600 + 800 + 32 = 11584$ (cách chọn).

Câu 6. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Có bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số khác nhau mà có mặt hai chữ số lẻ và ba chữ số chẵn, trong đó mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Cảnh; Fb: Phạm Linh Canh

Gọi các chữ số lẻ khác nhau là x, y thuộc $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ và ba chữ số chẵn khác nhau là a, b, c thuộc $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

+ TH1: Nếu chọn một chữ số x lẻ đứng đầu thì có 5 cách chọn, chữ số y lẻ còn lại và ba chữ số chẵn thì số cách chọn là $4 \cdot C_5^3$ và chọn lại bộ $(a; b; c)$ có một cách. Bây giờ ta sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số

(không kể số lẻ x đứng đầu) thì có các cách khác nhau là: $4 \cdot C_5^3 \cdot 1 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ (Ta nói x có 5 cách chọn nghĩa là đã xếp vị trí cho x , việc còn lại là sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số còn lại).

Vậy trường hợp 1 có các số thỏa mãn bài toán là: $5 \cdot 4 \cdot C_5^3 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 126000$ (số)

+ TH2: Nếu chọn 1 chữ số chẵn a đứng đầu thì có 4 cách, hai chữ số b, c có C_4^2 cách, chọn lại chữ số a có 4 cách, chọn lại cặp $(b; c)$ có một cách. Chọn hai chữ số lẻ có C_5^2 cách. Bây giờ ta sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số (không tính a) thì có các cách khác nhau là: $C_4^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_5^2 \cdot \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 75600$

Vậy trường hợp 2 có các số thỏa mãn bài toán là: $4 \cdot 75600 = 302400$ (số)

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là: $126000 + 302400 = 428400$ số.

Cách 2. Gọi các chữ số lẻ khác nhau là x, y thuộc $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ và ba chữ số chẵn khác nhau là a, b, c thuộc $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

+ TH1: Bộ 3 chữ số chẵn $(a; b; c)$ không có chữ số 0.

Số cách chọn bộ 3 số chẵn C_4^3 cách. Số cách chọn 2 số lẻ x, y là C_5^2 . Bây giờ ta sẽ sắp các chữ số vào 8 vị trí: Chọn 2 vị trí trong 8 vị trí để xếp chữ số chẵn thứ nhất có C_8^2 cách, chọn 2 vị trí trong số 6 vị trí còn lại để xếp chữ số chẵn thứ 2 có C_6^2 , chọn 2 vị trí trong 4 vị trí còn lại để xếp chữ số chẵn thứ 3 có C_4^2 cách, hai vị trí còn lại sắp 2 chữ số lẻ có $2!$ cách.

Vậy số các số thỏa mãn trường hợp 1: $C_4^3 \cdot C_5^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 2! = 201600$ (số)

+ TH2: Bộ 3 chữ số chẵn $(a; b; c)$ có chữ số 0.

Số cách chọn 2 số chẵn còn lại C_4^2 . Số cách chọn 2 số lẻ x, y là C_5^2 . Bây giờ ta sẽ sắp các chữ số vào 8 vị trí: Chọn 2 vị trí trong 7 vị trí để xếp chữ số 0 (trừ vị trí đầu tiên) có C_7^2 cách, chọn 2 vị trí trong số 6 vị trí còn lại để xếp chữ số chẵn thứ 2 có C_6^2 , chọn 2 vị trí trong 4 vị trí còn lại để xếp chữ số chẵn thứ 3 có C_4^2 cách, hai vị trí còn lại sắp 2 chữ số lẻ có $2!$ cách.

Vậy số các số thỏa mãn trường hợp 2: $C_4^2 \cdot C_5^2 \cdot C_7^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 2! = 226800$ (số).

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là: $201600 + 226800 = 428400$ số.

Câu 7. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Khi phân tích số $1000!$ thành tích các thừa số nguyên tố, số các thừa số 3 là:

A. 499. B. 500 C. 501 D. 498.

Lời giải

Tác giả: Hồ Thanh Nhân; Fb: Nhan Ho Thanh

Chọn D

Số các số chỉ chia hết cho 3 là $333-111=222$;

Số các số chỉ chia hết cho 3^2 là $111-37=74$;

Số các số chỉ chia hết cho 3^3 là $37-12=25$;

Số các số chỉ chia hết cho 3^4 là $12-4=8$;

Số các số chỉ chia hết cho 3^5 là $4-1=3$;

Số các số chỉ chia hết cho 3^6 là 1.

Vậy số các thừa số 3 là: $222 \cdot 1 + 74 \cdot 2 + 25 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 498$.

Chuyên đề

10

Xác suất

Câu 1. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9 (mỗi thẻ ghi một số). Rút ngẫu nhiên 3 thẻ và nhân 3 số ghi trên 3 thẻ đó với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là một số lẻ?

A. $\frac{5}{42}$.

B. $\frac{1}{42}$.

C. $\frac{11}{42}$.

D. $\frac{5}{84}$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Minh Thành; Fb: Hoàng Minh Thành

Chọn A

Số cách chọn 3 thẻ bất kì là: $n(\Omega) = C_9^3$ Gọi A là biến cố "Tích của 3 số ghi trên 3 thẻ là một số lẻ"Số phần tử của A là $n(A) = C_5^3$ Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{42}$

Câu 2. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Có 10 đội tuyển bóng đá quốc gia ở khu vực Đông Nam Á tham gia thi đấu AFF Suzuki Cup 2018 trong đó có đội tuyển Việt Nam và đội tuyển Thái Lan, các đội được chia làm hai bảng, kí hiệu là bảng A và bảng B, mỗi bảng có 5 đội. Việc chia bảng được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để hai đội tuyển Việt Nam và Thái Lan nằm ở hai bảng đấu khác nhau.

Lời giải

Số phần tử trong không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^5 = 252$.Gọi C là biến cố: "Hai đội tuyển Việt Nam và Thái Lan nằm ở hai bảng đấu khác nhau".TH 1: Đội tuyển Việt Nam ở bảng A, đội tuyển Thái Lan ở bảng B. Số cách xếp thỏa mãn là $C_8^4 = 70$.TH 2: Đội tuyển Việt Nam ở bảng B, đội tuyển Thái Lan ở bảng A. Số cách xếp thỏa mãn là $C_8^4 = 70$.Số phần tử của biến cố C là $n(C) = 140$.

Vậy xác suất để hai đội tuyển Việt Nam và Thái Lan nằm ở hai bảng đấu khác nhau là

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{140}{252} = \frac{5}{9}.$$

Câu 3. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được các số có bốn chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số đó có chữ số 4.

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoàng Huy; Fb: Nguyen Hoang Huy

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = A_6^4 = 360$.

Gọi A là biến cố “số được chọn có chữ số 4”.

Ta có $n(A) = 4 \cdot A_5^3 = 240$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{240}{360} = \frac{2}{3}$.

Câu 4. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{15}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Hùng; Fb: Hùng Nguyễn

Chọn B

Số cách chọn 2 người từ 10 người là: $C_{10}^2 = 45 \Rightarrow n(\Omega) = 45$.

Gọi A : “2 người được chọn đều là nữ”.

Số cách chọn 2 học sinh nữ từ 3 học sinh nữ là: $C_3^2 = 3 \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.

Câu 5. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019) Trong một hộp kín đựng 100 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên ba tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được ba tấm thẻ mà ba số ghi trên ba tấm thẻ đó lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Tác giả: Lâm Quốc Toàn; Fb: Lam Quoc Toan

Số phần tử của không gian mẫu: $|\Omega| = C_{100}^3$.

Gọi ba số lập thành cấp số cộng lần lượt là: u_1, u_2, u_3 .

Khi đó u_1, u_3 phải cùng là hai số chẵn hoặc cùng là hai số lẻ.

Từ 1 đến 100 có 50 số chẵn, 50 số lẻ.

+ Trường hợp 1: u_1, u_3 là hai số chẵn, có C_{50}^2 cách chọn bộ $\{u_1; u_3\}$.

+ Trường hợp 2: u_1, u_3 là hai số lẻ, có C_{50}^2 cách chọn bộ $\{u_1; u_3\}$.

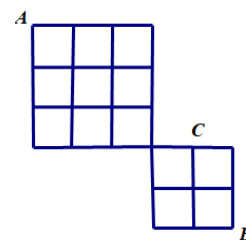
Với mỗi cách chọn bộ $\{u_1; u_3\}$ có duy nhất một cách chọn u_2 để u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng.

Suy ra số cách lấy được 3 thẻ ghi ba số lập thành cấp số cộng là $|\Omega_A| = 2C_{50}^2$.

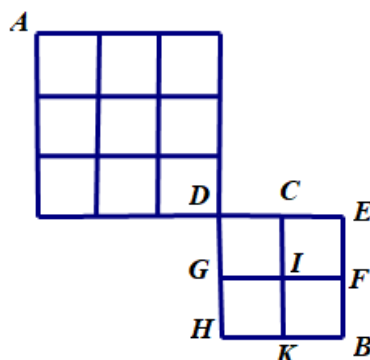
Xác suất lấy được 3 thẻ ghi ba số lập thành cấp số cộng là

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{2C_{50}^2}{C_{100}^3} = \frac{1}{66}.$$

Câu 6. (HSG11 Hà Tĩnh 2018-2019) Cho lưới ô vuông như hình vẽ, có một con kiến di chuyển từ điểm A đến điểm B bằng cách di chuyển trên cạnh để đi qua các điểm nút của lưới (điểm nút là đỉnh của các hình vuông nhỏ), mỗi bước nó di chuyển xuống dưới hoặc di chuyển sang phải để đến điểm nút gần nhất. Biết rằng nếu đến điểm C thì kiến sẽ bị ăn thịt. Giả sử kiến di chuyển một cách ngẫu nhiên và nó không biết tại C sẽ gặp nguy hiểm. Tính xác suất để kiến đến được điểm B.



Lời giải



Kiến muốn đi đến B thì bắt buộc phải qua D.

Gọi m là số cách đi từ A đến D.

Gọi n là số cách đi từ D đến B.

Gọi k là số cách đi từ D đến B mà không đi qua C

Ta có số cách đi từ A đến B là $m.n$; số cách đi từ A đến B mà không đi qua C là mk .

Ta có xác suất mà kiến đi được đến B là $p = \frac{mk}{mn} = \frac{k}{n}$

Các cách đi từ D đến B mà có đi qua C là : DCEFB; DCIFB; DCIKB; suy ra số cách đi từ D đến B mà có đi qua C là 3.

Vì tính đối xứng của lưới ô vuông 2×2 nên số cách đi từ D đến B mà không qua C là 3.

Suy ra $k = 3, n = 6$. Do đó $p = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$.

Câu 7. (HSG11 Nghệ An 2018-2019) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Xác định số phần tử của S . Lấy ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 11 và tổng 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Thảo Facebook: Vũ Thảo

Số phần tử của S là: $A_9^4 = 3024$ (số).

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 3024$.

Gọi A là biến cố số được chọn là số chia hết cho 11 và tổng 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11.

Gọi số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau là: $\overline{abcd}$, ($a \neq 0, a \neq b \neq c \neq d$).

Theo giả thiết ta có: $[(a+c)-(b+d)]:11$ và $[(a+c)+(b+d)]:11$ suy ra $(a+c):11$ và $(b+d):11$.

Trong các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có các bộ số gồm hai chữ số mà tổng chia hết cho 11 là $\{2; 9\}; \{3; 8\}; \{4; 7\}; \{5; 6\}$.

Chọn cặp số (a, c) có 4 khả năng, mỗi khả năng có 2 cách.

Khi đó, chọn cặp số (b, d) còn 3 khả năng, mỗi khả năng có 2 cách.

Vậy $n(A) = 4.2.3.2 = 48$ (số)

Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{3024} = \frac{1}{63}$.

Câu 8. (HSG11 Thuận Thành 2018-2019) Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau. Tính xác suất để chọn được một số có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Lời giải

+) Số phần tử của không gian mẫu: $n_{\Omega} = A_{10}^6 - A_9^5 = 136080$.

+) Số các số tự nhiên có 6 chữ số có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ:

TH1: Số tạo thành không chứa số 0.

☐ Lấy ra 3 số chẵn có: C_4^3 cách;

☐ Lấy ra 3 số lẻ có: C_5^3 cách;

☐ Số các hoán vị của 6 số trên: $6!$

☐ Suy ra số các số tạo thành: $C_4^3 \cdot C_5^3 \cdot 6! = 28800$.

TH2: Số tạo thành có số 0.

☐ Lấy ra hai số chẵn khác 0: C_4^2 .

☐ Lấy ra 3 số lẻ: C_5^3 .

☐ Số các hoán vị không có số 0 đứng đầu: $6! - 5! = 5 \cdot 5!$

Số các số tạo thành: $C_4^2 \cdot C_5^3 \cdot 5 \cdot 5! = 36000$.

+) Gọi biến cố A : “số được chọn có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ”

Suy ra: $n_A = 28800 + 36000 = 64800$.

Xác suất xảy ra biến cố A : $P_A = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{64800}{136080} = \frac{10}{21}$.

Câu 9. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Một người A đứng tại gốc O của trục số $x'Ox$. Do say rượu nên người A bước ngẫu nhiên sang trái hoặc sang phải trên trục tọa độ với độ dài mỗi bước là một đơn vị. Tính xác suất để sau n bước ($n \geq 2$) thì người A quay trở lại gốc tọa độ O .

Lời giải

Tác giả: Tăng Duy Hùng; Fb: Tăng Duy Hùng

Phản biện: Bùi Dũng; Fb: Bùi Dũng

Trường hợp 1: $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) khi đó xác suất người đó quay trở lại O là: $P = 0$

Trường hợp 2: $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Người đó quay trở về O nếu có k bước sang phải và k bước sang trái.

Xác suất bước sang phải là: 0,5

Xác suất bước sang trái là: 0,5

Do đó xác suất để quay về O là: $P = C_n^k \cdot (0,5)^n$

Câu 10. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm năm chữ số được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn có mặt đúng ba chữ số khác nhau.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thủy; Fb: Camtu Lan

Ta có $|S| = 7^5$.

Xét phép thử: Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S .

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 7^5$.

Gọi A là biến cố: “số được chọn có mặt đúng ba chữ số khác nhau”.

Bước 1: Ta chọn ra ba chữ số khác nhau từ tập S , có C_7^3 cách chọn.

Bước 2: Ta chia thành hai trường hợp sau

TH1: Trong ba chữ số được chọn ra từ bước 1, có một chữ số xuất hiện đúng ba lần, hai chữ số còn lại mỗi chữ số xuất hiện đúng một lần, vậy có $\frac{C_3^1 \cdot 5!}{3!}$ cách.

TH2: Trong ba chữ số được chọn ra từ bước 1, có một chữ số xuất hiện đúng một lần, hai chữ số còn lại mỗi chữ số xuất hiện đúng hai lần, vậy có $\frac{C_3^2 \cdot 5!}{2! \cdot 2!}$ cách.

Suy ra $|\Omega_A| = C_7^3 \cdot \left(\frac{C_3^1 \cdot 5!}{3!} + \frac{C_3^2 \cdot 5!}{2! \cdot 2!} \right) = 5250$.

Vậy $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{5250}{7^5} = \frac{750}{2401}$.

Câu 11. (HSG12 Cao Bằng năm 2018-2019) Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà Toán học nam, 5 nhà Vật lý nữ và 3 nhà Hóa học nữ. Người ta chọn ra từ đó 4 người để đi công tác, tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ ba bộ môn.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 4 nhà khoa học trong 16 nhà khoa học có C_{16}^4 cách.

Chọn 4 người đi công tác thỏa mãn yêu cầu bài toán có các trường hợp sau:

Chọn 2 nhà Toán học nam, 1 nhà Vật lý nữ, 1 nhà Hóa học nữ có $C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1$ cách.

Chọn 1 nhà Toán học nam, 2 nhà Vật lý nữ, 1 nhà Hóa học nữ có $C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1$ cách.

Chọn 1 nhà Toán học nam, 1 nhà Vật lý nữ, 2 nhà Hóa học nữ có $C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2$ cách.

Số cách chọn đoàn công tác là $C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2$ cách.

Vậy, xác suất cần tìm là: $P = \frac{C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2}{C_{16}^4} = \frac{3}{7}$

Câu 12. (HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019) Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 5 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án trả lời đúng, 3 phương án sai. Tính xác suất để mỗi học sinh làm bài thi trả lời đúng được ít nhất 3 câu hỏi?

Lời giải

Tác giả: Phạm Hoàng Điệp ; Fb: Hoàng Điệp Phạm

Xác suất để một học sinh trả lời đúng 1 câu là $\frac{1}{4}$, trả lời sai 1 câu là $\frac{3}{4}$.

Xác suất để một học sinh trả lời đúng đúng 3 câu là: $C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{512}$.

Xác suất để một học sinh trả lời đúng đúng 4 câu là: $C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{1024}$.

Xác suất để một học sinh trả lời đúng cả 5 câu là: $C_5^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$.

Vậy xác suất để một học sinh trả lời đúng ít nhất 3 câu là: $\frac{45}{512} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{53}{512}$.

Câu 13. (HSG12 Quảng Ngãi 2018-2019) Có hai chiếc hộp chứa bi, mỗi viên bi chỉ mang màu xanh hoặc đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp đúng 1 viên bi. Biết tổng số bi trong hai hộp là 20 và xác suất để lấy được hai viên bi màu xanh là $\frac{55}{84}$. Tính xác suất để lấy được hai viên bi màu đỏ.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thiện ; Fb: Thien Nguyen

Giả sử hộp thứ nhất có x viên bi, trong đó có a viên bi xanh, hộp thứ hai có y viên bi, trong đó có b viên bi xanh (điều kiện x, y, a, b nguyên dương, $x \geq y, x \geq a, y \geq b$).

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ \frac{ab}{xy} = \frac{55}{84} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow 55xy = 84ab \Rightarrow xy:84$, mặt khác: $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 = 100 \Rightarrow xy = 84$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $\begin{cases} x = 14 \\ y = 6 \end{cases}$.

Từ (2) và (3) suy ra $ab = 55$, mà $a \leq x \leq 14, b \leq y \leq 6 \Rightarrow a = 11, b = 5$.

Vậy xác suất lấy được hai viên bi đỏ là: $P = \frac{x-a}{x} \cdot \frac{y-b}{y} = \frac{1}{28}$.

Câu 14. (HSG12 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Trong cuộc thi: "Thiết kế và trình diễn các trang phục dân tộc" do Đoàn trường THPT tổ chức vào tháng 3 năm 2018 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục. Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó có 4 tiết mục khối 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục biểu diễn chào mừng ngày 26 tháng 3. Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất 2 tiết mục của khối 12.

Lời giải

Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω .

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^5 = 792$.

Gọi A là biến cố "Chọn 5 tiết mục sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12".

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là:

+ 2 tiết mục khối 12, hai tiết mục khối 10, một tiết mục khối 11.

+ 2 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 2 tiết mục khối 11.

+ 3 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^1 + C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2 + C_4^3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1 = 330$.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{330}{792} = \frac{5}{12}$.

Câu 15. (HSG12 THPT Thuận Thành năm 2018-2019) Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau. Tính xác suất để chọn được một số có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = A_{10}^6 - A_9^5 = 136080$.

Gọi biến cố A : "Số được chọn có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ".

Trường hợp 1: Số được chọn không chứa chữ số 0.

Lấy ra 3 chữ số chẵn có C_4^3 cách.

Lấy ra 3 chữ số lẻ có: C_5^3 cách.

Số các hoán vị của 6 chữ số trên là $6!$.

Suy ra số các số tạo thành: $C_4^3 \cdot C_5^3 \cdot 6! = 28800$

Trường hợp 1: Số được chọn có chứa chữ số 0.

Lấy ra 2 chữ số chẵn khác 0 có C_4^2 cách.

Lấy ra 3 chữ số lẻ có: C_5^3 cách.

Số các hoán vị không có chữ số 0 đứng đầu là: $6! - 5! = 5.5!$.

Số các số tạo thành: $C_4^2.C_5^3.5.5! = 36000$.

Suy ra: $n(A) = 28800 + 36000 = 64800$.

Xác suất xảy ra biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{64800}{136080} = \frac{10}{21}$.

Câu 16. (HSG12 tỉnh Quảng Bình năm 2018-2019) Cho sáu thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số của tập $E = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$ (các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ba thẻ, tính xác suất để rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù.

Lời giải

Cách của Admin Nguyễn Trung Kiên.

Lấy ba thẻ từ 6 thẻ có số cách lấy là C_6^3 , nên số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_6^3 = 20$.

Gọi biến cố A : “rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù”.

Giả sử rút được bộ ba số là $(a; b; c)$, với $a < b < c$, do đó $4 \leq c$, nên $c \in \{4; 6; 8\}$.

a, b, c là ba cạnh của tam giác $\triangle ABC$, với $BC = a, CA = b, AB = c$ có góc $\widehat{C}$ tù

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0 \\ 4 \leq c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 < c^2 \\ 4 \leq c < a + b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < c < a + b, \text{ với } c \in \{4; 6; 8\}.$$

+Xét $c = 4$ thì có bộ $(a; b) = (2; 3)$ thỏa mãn.

+Xét $c = 6$, do $a < b < c$, $6 = c < a + b < 2b$, nên $b = 4$ và $a = 3$. Suy ra có bộ $(a; b) = (3; 4)$ thỏa mãn.

+Xét $c = 8$, do $a < b < c$, $8 = c < a + b < 2b$, nên $b = 6$ và $a = 3$ hoặc $a = 4$. Suy ra có hai bộ $(a; b) = (3; 6)$ hoặc $(a; b) = (4; 6)$ thỏa mãn.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 4$.

Nên xác suất cần tìm là $p = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

Câu 17. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho hình vuông cỡ 9.9 tâm O được tạo từ 9.9 hình vuông đơn vị. Hai hình vuông đơn vị được gọi là kề bên nếu chúng có cùng một cạnh chung. Một con bộ ban đầu ở O . Mỗi lần di chuyển con bộ sẽ nhảy ngẫu nhiên từ tâm hình vuông đơn vị nó đứng sang tâm hình vuông đơn vị kề bên. Tính xác suất để con bộ sau 4 bước nhảy sẽ quay lại điểm O .

Lời giải

Tác giả: Bùi Dũng; Fb: Bùi Dũng

Phản biện: Lê Mai Hương; Fb: Lê Mai Hương

Khi con bộ nhảy 4 bước thì không gian mẫu là: $4.4.4.4 = 256$

Ở bước nhảy thứ 2 ta chia các trường hợp sau:

TH1: Bước 2 con bộ nhảy qua $B1 - B2$ có 2 cách nhảy

Bước 3 có hai cách nhảy về $A1 - A2$ (nếu từ $B1$) hoặc nhảy về $A1 - A4$ (nếu từ $B2$)

Bước 4: con bộ có 1 cách nhảy về O

Có: $4.2.2.1 = 16$ cách

TH2: Bước 2 con bộ nhảy qua $B3$ có 1 cách nhảy

Bước 3 có 1 cách nhảy về $A1$

Bước 4: con bộ có 1 cách nhảy về O

Có: $4.1.1.1 = 4$ cách

TH2: Bước 2 con bộ nhảy về O có 1 cách nhảy

Bước 3 có 4 cách nhảy về các ô $A1 - A2 - A3 - A4$

Bước 4: con bộ có 1 cách nhảy về O

Có: $4.1.4.1 = 16$ cách

Vậy xác suất để con bộ nhảy 4 bước quay trở về O là: $\frac{16+4+16}{256} = \frac{9}{64}$.

Câu 18. (HSG12 Quảng Ninh 2018-2019) Có hai chuồng nhốt thỏ, chuồng thứ nhất nhốt 19 con thỏ lông màu đen và 1 con thỏ lông màu trắng. Chuồng thứ hai nhốt 13 con thỏ lông màu đen và 2 con thỏ lông màu trắng. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng đúng 1 con thỏ. Tính xác suất để bắt được hai con thỏ có màu lông khác nhau.

Lời giải

Chuồng thứ nhất bắt ra 1 con thỏ có 20 cách.

Chuồng thứ hai bắt ra 1 con thỏ có 15 cách.

Số cách bắt ra mỗi chuồng 1 con thỏ là: $n(\Omega) = 15.20 = 300$

Gọi A là biến cố: "bắt được hai con thỏ cùng màu"

+ TH1: Hai con thỏ cùng màu đen có $13.19 = 247$ (cách)

+ TH2: Hai con thỏ cùng màu trắng có $1.2 = 2$ (cách)

$$n(A) = 247 + 2 = 249 \text{ (cách)} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{249}{300}$$

Do đó xác suất bắt được hai con thỏ có màu lông khác nhau là: $1 - \frac{249}{300} = \frac{17}{100}$.

Câu 19. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Bạn An có một đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{1}{3}$ và bạn Bình có một đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{2}{5}$. Hai bạn An và Bình lần lượt chơi trò chơi tung đồng xu của mình đến khi có người được mặt ngửa, ai được mặt ngửa trước thì thắng. Các lần tung là độc lập với nhau và bạn An chơi trước. Xác suất bạn An thắng là $\frac{p}{q}$, trong đó p và q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm $q - p$.

Lời giải

Giả sử bạn An thắng ở lần gieo thứ n , $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ khi đó bạn An và bạn Bình tung đồng xu ở $n-1$ lần

trước đó đều là sấp, xác suất để điều này xảy ra là $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Do n có thể tiến tới dương vô cùng, vậy nên áp dụng quy tắc cộng xác suất, ta có xác suất để An

thắng là: $\frac{p}{q} = \frac{1}{3} \cdot \left[1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^m + \dots\right]; m \in \mathbb{N}^*$

Trong đó $S = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^m + \dots$ là tổng của cấp số nhân vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công

$$\text{bội } q_0 = \frac{2}{5} \text{ nên } S = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}, \text{ suy ra } \frac{p}{q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{9}$$

Từ đó $q = 9$; $p = 5$ suy ra $q - p = 9 - 5 = 4$.

Câu 20. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019) Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Trong 9 thẻ đã cho có hai thẻ ghi số 4 và 8 chia hết cho 4, 7 thẻ còn lại ghi số không chia hết cho 4.

Giả sử rút x thẻ với $(1 \leq x \leq 9; x \in \mathbb{N})$, số cách chọn x thẻ từ 9 thẻ trong hộp là C_9^x .

Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_9^x$.

Gọi A là biến cố: “Trong số x tấm thẻ rút ra, có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4”.

Suy ra $\bar{A}$ là biến cố: “Lấy x tấm thẻ không có tấm thẻ nào chia hết cho 4”.

Số cách chọn tương ứng với biến cố $\bar{A}$ là $n(\bar{A}) = C_7^x$.

Ta có
$$P(\bar{A}) = \frac{C_7^x}{C_9^x} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{C_7^x}{C_9^x}$$

Do đó
$$P(A) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow 1 - \frac{C_7^x}{C_9^x} > \frac{5}{6} \Leftrightarrow 1 - \frac{(9-x)(8-x)}{72} > \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 60 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 12.$$

Kết hợp điều kiện: $1 \leq x \leq 9; x \in \mathbb{N} \Rightarrow 5 < x \leq 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của x là 6. Số thẻ ít nhất phải rút là 6.

Câu 21. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Rút ngẫu nhiên một số thuộc tập S . Tính xác suất để rút được số mà trong số đó chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước.

A. $\frac{2}{7}$.

B. $\frac{3}{32}$.

C. $\frac{11}{64}$.

D. $\frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn D

+) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 7.8.8 = 448$.

+) Gọi A là biến cố: “Số tự nhiên rút được có chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước”.

Gọi số tự nhiên cần lập là $\overline{abc}$, $1 \leq a \leq b \leq c$; $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Đặt $a' = a - 1$; $b' = b$; $c' = c + 1$

Khi đó $0 \leq a' < b' < c' \leq 8$

Với mỗi cách chọn được bộ 3 số $(a'; b'; c')$ cho tương ứng 1 bộ 3 số $(a; b; c)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Có C_9^3 cách chọn bộ 3 số $(a'; b'; c')$

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = C_9^3 = 84$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{84}{448} = \frac{3}{16}$.

Câu 22. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho hình lập phương tâm O được ghép từ 9.9.9 hình lập phương đơn vị. Hai hình lập phương đơn vị được gọi là kề bên nếu chúng có chung một mặt. Con bọ ban đầu ở tâm O . Mỗi bước nhảy con bọ sẽ nhảy từ tâm khối lập phương đơn vị nó đứng sang tâm khối lập phương đơn vị kề bên. Tính xác suất để con bọ sau 4 bước nhảy sẽ quay lại điểm O .

Lời giải

Tác giả: Lê Mai Hương; Fb: Le Mai Huong

Mỗi bước con bọ có thể nhảy ngẫu nhiên qua tâm của 6 hình lập phương đơn vị khác.

Do đó không gian mẫu là $n(\Omega) = 6.6.6.6 = 6^4$.

Gọi A là biến cố “con bọ sau 4 bước nhảy sẽ quay lại điểm O ”.

Xét hệ trục tọa độ không gian gốc O với các trục song song các cạnh hình lập phương.

Khi đó có hai trường hợp sau:

TH1: Con bọ nhảy trên một đường thẳng (có 3 đường tương ứng 3 trục tọa độ) có $3.C_4^2 = 18$.

TH2: Con bọ nhảy không nhảy trên một đường thẳng (trong trường hợp này nó chỉ có thể nhảy trên 2 trục tọa độ) có $3.4! = 72$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{18+72}{6^4} = \frac{5}{72}$.

Câu 23. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được chọn từ các số 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

Lời giải

1. Số phần tử của tập S là $n(S) = 9.9.8.7.6 = 27216$.

Gọi số chẵn thuộc tập S có dạng $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$).

Nếu $e \in \{2; 4; 6; 8\}$, trường hợp này ta có: $8.8.7.6.4 = 10752$ số.

Nếu $e = 0$, trường hợp này ta có: $9.8.7.6 = 3024$ số.

Vậy xác suất cần tìm là: $P = \frac{10752 + 3024}{27216} = \frac{13776}{27216} = \frac{41}{81}$.

Câu 24. (HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019) Trong một tiết học môn Toán, giáo viên mời ba học sinh A, B, C thực hiện trò chơi như sau: Mỗi bạn A, B, C chọn ngẫu nhiên một số nguyên khác 0 thuộc khoảng $(-6; 6)$ và lần lượt thế vào ba tham số của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$; nếu đồ thị hàm số thu được có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành thì được nhận thưởng. Tính xác suất để ba học sinh A, B, C được nhận thưởng.

Lời giải

Tác giả: Phạm Tiến Long; Fb: Long Phạm Tiên

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 10^3$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.

Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases}$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} + c\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.

***) Trường hợp 1:**

Nếu $a < 0$ thì A là điểm cực tiểu nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ y_A > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{-5; -4; -3; -2; -1\} \\ b \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \\ c \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \end{cases} \Rightarrow \text{có } 5.5.5 = 125 \text{ (cách).}$$

***) Trường hợp 2:**

Nếu $a > 0$ thì B, C là hai điểm cực tiểu nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ y_B > 0 \\ y_C > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ \frac{b^2}{4a} < c \end{cases}.$$

Suy ra được $c > 0$ và $4a \in \{4; 8; 12; 16; 20\}$.

Ta có các khả năng sau:

$$\text{Với } c = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 1, b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 1, b = -2 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 4 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 1, b = -3 \Rightarrow a \in \{3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 3 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 1, b = -4 \Rightarrow a \in \{5\} \Rightarrow \text{có 1 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 2, b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 2, b = -2 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 2, b = -3 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 4 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 2, b = -4 \Rightarrow a \in \{3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 3 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 2, b = -5 \Rightarrow a \in \{4; 5\} \Rightarrow \text{có 2 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 3, b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 3, b = -2 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 3, b = -3 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 3, b = -4 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có (cách).}$$

$$\text{Với } c = 3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 3, b = -5 \Rightarrow a \in \{3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 3 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 4, b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 4, b = -2 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

$$\text{Với } c = 4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 4, b = -3 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow \text{có 5 (cách).}$$

Với $c = 4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 4, b = -4 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 4 (cách).

Với $c = 4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 4, b = -5 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 4 (cách).

Với $c = 5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 5, b = -1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c = 5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 5, b = -2 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c = 5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 5, b = -3 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c = 5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 5, b = -4 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c = 5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a} < 5, b = -5 \Rightarrow a \in \{2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 4 (cách).

Trong trường hợp này có 101 (cách).

Suy ra có tất cả $125 + 101 = 226$ (cách).

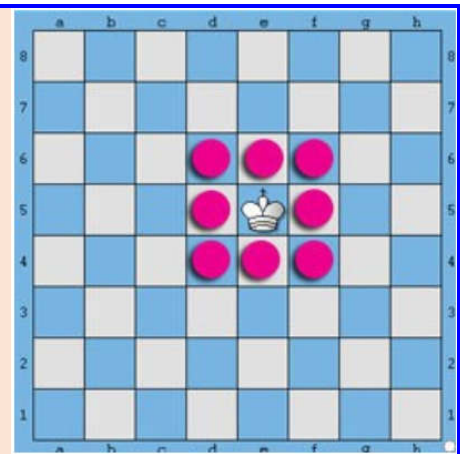
Vậy xác suất là $\frac{226}{1000} = \frac{113}{500}$.

Câu 25. (HSG12 tỉnh Hải Phòng năm 2018-2019)

Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ vua. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô đang đứng

(xem hình minh họa).

Bạn An di chuyển quân vua ngẫu nhiên 3 bước. Tính xác suất để sau 3 bước đi quân vua trở về ô xuất phát.



Lời giải

Tác giả: Nhóm 4 - Tổ 8 nhóm toán team toán vd - vdc

Mỗi bước đi quân vua có thể đi đến 8 ô xung quanh, từ đó suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 8^3$.

Cách 1.

Gắn hệ trục Oxy vào bàn cờ vua sao cho vị trí ban đầu của quân vua là gốc tọa độ, mỗi ô trên bàn ứng với một điểm có tọa độ $(x; y)$. Mỗi bước di chuyển của quân vua từ điểm $(x; y)$ đến điểm có tọa độ $(x + x_0; y + y_0)$ trong đó $x_0; y_0 \in \{-1; 0; 1\}; x_0^2 + y_0^2 \neq 0$. Ví dụ nếu $x_0 = 1; y_0 = 0$ thì quân vua di chuyển đến ô bên phải, $x_0 = -1; y_0 = -1$ thì di chuyển xuống ô đường chéo.

Giả sử tọa độ ban đầu là $(0;0)$, thế thì sau 3 bước đi thì tọa độ của quân vua là $(x_1 + x_2 + x_3; y_1 + y_2 + y_3); x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \{-1; 0; 1\}$. Để về vị trí ban đầu thì $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$. Suy ra các bộ $\{x_1; x_2; x_3\}$ và $\{y_1; y_2; y_3\}$ là một hoán vị của $\{-1; 0; 1\}$.

+) $\{x_1; x_2; x_3\}$ có 6 cách chọn, với mỗi cách chọn $\{x_1; x_2; x_3\}$ có 4 cách chọn $\{y_1; y_2; y_3\}$ vì $(x_i; y_i), i = \overline{1; 3}$ không đồng thời bằng 0.

Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố bằng 24 và xác suất cần tìm là $p = \frac{24}{8^3} = \frac{3}{64}$.

Cách 2.

Nhận xét để quân vua trở về vị trí xuất phát sau 3 bước thì sau bước II quân vua phải ở một trong 8 ô xung quanh ô ban đầu.

Trường hợp 1. Sau bước I quân vua ở 1 trong 4 ô chung cạnh với ô ban đầu.

Từ đây quân vua có 4 cách đi cho bước II (đi ngang hoặc đi chéo).

Ở bước III, quân vua chỉ có 1 cách đi về vị trí xuất phát.

Vậy số cách đi ở TH1: $4 \times 4 \times 1 = 16$ cách.

Trường hợp 2. Sau bước I quân vua ở 1 trong 4 ô chung đỉnh với ô ban đầu.

Từ đây quân vua chỉ có 2 cách đi cho bước II (đi ngang hoặc đi dọc).

Ở bước III, quân vua chỉ có 1 cách đi về vị trí xuất phát.

Vậy số cách đi ở TH2: $4 \times 2 \times 1 = 8$ cách.

Xác suất cần tìm: $p = \frac{16+8}{8^3} = \frac{3}{64}$.

Câu 26. (HSG12 tỉnh QUẢNG NINH 2018-2019) Trong cuộc thi văn nghệ do đoàn thanh niên trường THPT X tổ chức vào tháng 11 năm 2018 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục. Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó: có 4 tiết mục lớp 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục biểu diễn chào mừng ngày 20 tháng 11 (không tính thứ tự biểu diễn). Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn trong đó có ít nhất 2 tiết mục của khối 12.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Minh Nguyệt ; Fb: nguyen nguyet

Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^5 = 792$

Gọi A là biến cố: “Chọn 5 tiết mục sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn trong đó có ít nhất 2 tiết mục của khối 12”.

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là:

+ 2 tiết mục khối 12, 2 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11

+ 2 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 2 tiết mục khối 11

+ 3 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^1 + C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2 + C_4^3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1 = 330$

Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{330}{792} = \frac{5}{12}$.

Câu 27. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019) Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập A . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Lời giải

Tác giả: Duyên Vũ; Fb: Duyên Vũ

Cách 1.

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 9 \cdot 10^5$.

Gọi B là biến cố số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Ta nhận thấy rằng: Số nhỏ nhất có 6 chữ số chia hết cho 13 là: 100009, số lớn nhất có 6 chữ số chia hết cho 13 là: 999999.

Ta có $100009 + 13 = 100022$, do đó số có 6 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 13 và có tận cùng bằng 2 chính là số 100022.

Nhận thấy rằng nếu hai số tự nhiên có 6 chữ số cùng chia hết cho 13 và đều có chữ số tận cùng bằng 2 thì hiệu của chúng cũng chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 0.

Số nhỏ nhất (lớn hơn 0) có chữ số tận cùng bằng 0 chia hết cho 13 là 130.

Điều này chứng tỏ tất cả các số có 6 chữ số chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 100022$, công sai $d = 130$.

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Vì số cần tìm là số có 6 chữ số không vượt quá 999999 nên ta có:

$$100022 + (n-1)130 \leq 999999 \Leftrightarrow n \leq \frac{69230}{10} = 6923,9.$$

Vì n là số tự nhiên nên số hạng lớn nhất trong dãy trên ứng với $n = 6923$.

Vậy số phần tử của biến cố B là $|B| = 6923$.

$$\text{Xác suất của biến cố } B \text{ là: } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6923}{900000}.$$

Cách 2.

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 9 \cdot 10^5$.

Gọi số chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 là $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 2}$.

$$\text{Ta có } \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 2} = 10 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} + 2.$$

Gọi k là số dư của phép chia $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ cho 13 ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 12$).

Khi đó vì $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 2} = 10 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} + 2 \equiv k \pmod{13}$ ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 12$) nên ta có:

$$10k + 2 : 13 \quad (k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 12)$$

Do đó tồn tại số tự nhiên t sao cho $10k + 2 = 13t \Leftrightarrow t = \frac{10k + 2}{13} \in \mathbb{N}, (k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 12)$.

Ta có bảng:

$k = 0$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{2}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 1$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{12}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 2$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{22}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 3$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{32}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 4$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{42}{13} = 4 \in \mathbb{N}$	Thỏa mãn
$k = 5$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{52}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 6$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{62}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 7$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{72}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 8$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{82}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 9$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{92}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 10$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{102}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 11$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{112}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 12$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{122}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại

Từ bảng trên ta có $k = 4$ là số dư của phép chia $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ cho 13. Như vậy, tồn tại số tự nhiên t để

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 13t + 4. \quad \text{Vì} \quad 10000 \leq \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} \leq 99999 \quad \text{nên} \quad \frac{10000 - 4}{13} \leq t \leq \frac{99999 - 4}{13}, \quad \text{hay}$$

$$\frac{9996}{13} \approx 768,923 \leq t \leq \frac{99995}{13} \approx 7691,923$$

$$\Rightarrow 769 \leq t \leq 7691, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Gọi B là biến cố số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Khi đó số phần tử của biến cố B là $|B| = 7691 - 769 + 1 = 6923$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6923}{900000}$.

Câu 28. (HSG12 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2018-2019) Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được chọn từ các phần tử của tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

Lời giải

Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó các chữ số lấy từ tập A .

Số phần tử của tập S là số các số tự nhiên có 5 chữ số với các chữ số khác nhau lấy từ tập A .

Ta có $n(S) = 6A_5^4 = 2160$.

Do n chia hết cho 15 nên n chia hết cho 3 và 5. Suy ra $a_5 = 0$ hoặc $a_5 = 5$.

TH1: $a_5 = 0 \Rightarrow n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 0}$ trong đó 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Khi đó để n chia hết cho 3 thì $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ chia hết cho 3

Do 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ nên xảy ra 2 TH sau:

i) Trong 4 số đó gồm hai số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2.

Có tất cả $A_4^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ số.

ii) Trong 4 số đó gồm hai số chia 3 dư 1, hai số chia 3 dư 2.

Có tất cả $4! = 24$ số.

TH2: $a_5 = 5 \Rightarrow n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 5}$ trong đó 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 6\}$.

Khi đó để n chia hết cho 3 thì $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ chia 3 dư 1.

Do 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 6\}$ nên xảy ra 2 TH sau:

iii) Trong 4 số đó gồm ba số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1.

* Nếu $a_1 = 3$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0; 6; 1\}, \{0; 6; 4\}$ nên có $3! + 3! = 12$ số.

* Nếu $a_1 = 6$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0; 3; 1\}, \{0; 3; 4\}$ nên có $3! + 3! = 12$ số.

* Nếu $a_1 = 1$ hoặc $a_1 = 4$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0; 3; 6\}$ nên có $3! + 3! = 12$ số.

Có tất cả 36 số.

iv) Trong 4 số đó gồm một số chia hết cho 3, hai số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2

* Nếu $a_1 = 3$ hoặc $a_1 = 6$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{1; 2; 4\}$ nên có $3! + 3! = 12$ số.

* Nếu $a_1 = 1$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{2; 4; 6\}, \{2; 4; 3\}, \{2; 4; 0\}$ nên có $3 \cdot 3! = 18$ số.

* Nếu $a_1 = 2$ hoặc $a_1 = 4$ thì tương tự đều có 18 số thỏa mãn.

Có tất cả $12 + 18.3 = 66$ số.

Vậy xác suất cần tính là $\frac{96 + 24 + 36 + 66}{2160} = \frac{37}{360}$.

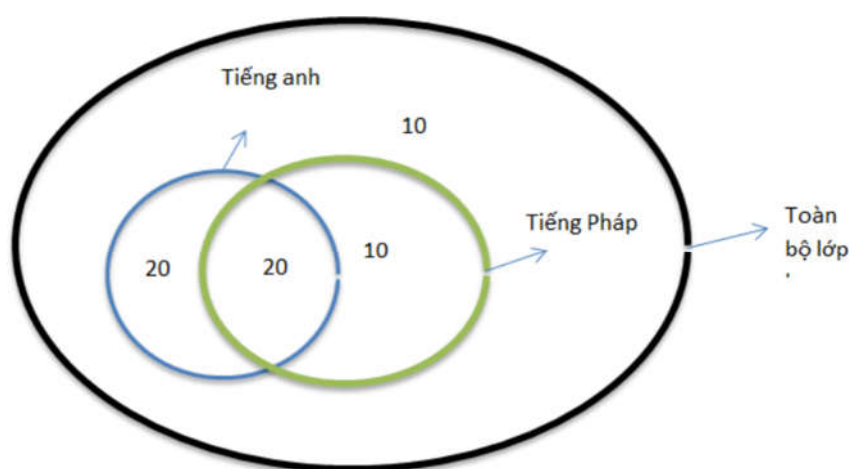
Câu 29. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Một lớp học trong một trường đại học có 60 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên 2 sinh viên của lớp học này. Tính xác suất để 2 sinh viên được chọn không học ngoại ngữ. Biết rằng trường này chỉ dạy hai loại ngoại ngữ là tiếng Anh và tiếng Pháp.

Lời giải

Tác giả: Mai Ngọc Thi; Fb: Mai Ngọc Thi

Cách 1:

Sử dụng biểu đồ ven như hình vẽ bên dưới



Như vậy lớp đại học đã cho có 10 sinh viên không học ngoại ngữ.

Ta xét phép thử: Chọn 2 sinh viên bất kỳ trong số 60 sinh viên của lớp học.

Số khả năng xảy ra của phép thử là $n(\Omega) = C_{60}^2$.

Xét biến cố A : Chọn ra 2 sinh viên không học ngoại ngữ.

Như vậy điều kiện thuận lợi của biến cố A là chọn 2 sinh viên trong 10 sinh viên không học ngoại ngữ. Do đó $n(A) = C_{10}^2$.

Suy ra xác suất để chọn được 2 sinh viên không học ngoại ngữ là

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10}^2}{C_{60}^2} = \frac{3}{118}.$$

Cách 2: Gọi A, P, K lần lượt là tập hợp sinh viên học tiếng Anh, học tiếng Pháp và không học ngoại ngữ. Khi đó $n(A \cup P \cup K) = 60$, $n(A) = 40$, $n(P) = 30$, $n(P) = 20$.

Ta có

$$n(A \cup P \cup K) = n(A) + n(P) + n(K) - n(A \cap P) - n(A \cap K) - n(P \cap K) + n(A \cap P \cap K)$$

$$\text{Nên } 60 = 40 + 30 + n(K) - 20 - 0 - 0 + 0 \Leftrightarrow n(K) = 10.$$

Gọi X là biến cố " 2 sinh viên được chọn không học ngoại ngữ".

Ta có $n(\Omega) = C_{60}^2$; $n(X) = C_{10}^2$.

Do đó $P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10}^2}{C_{60}^2} = \frac{3}{118}$.

Câu 30. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Xếp mười học sinh gồm bốn học sinh lớp 12, ba học sinh lớp 11 và ba học sinh lớp 10 ngồi vào một hàng ngang gồm 10 ghế được đánh số từ 1 đến 10. Tính xác suất để không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Minh Thành ; Fb: Hoàng Minh Thành

Số cách xếp bất kỳ 10 học sinh là: $n(\Omega) = 10!$

Gọi A là biến cố "Không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau"

Số cách xếp 6 học sinh gồm lớp 11 và lớp 10 là : $6!$. Vì 6 học sinh được xếp ở trên tạo ra 7 khoảng trống (5 khoảng giữa 2 học sinh và 2 khoảng ở vị trí hai đầu) nên chọn 4 trong 7 vị trí đó để xếp 4 học sinh lớp 12 có A_7^4 cách

Suy ra : $n(A) = 6! \cdot A_7^4$

Xác suất của biến cố A là : $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

Vậy xác suất để không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau là: $\frac{1}{6}$.

Câu 31. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Có 6 bi gồm 2 bi đỏ, 2 bi vàng, 2 bi xanh (các bi này đôi một khác nhau). Xếp ngẫu nhiên các viên bi thành hàng ngang, tính xác suất để hai viên bi vàng không xếp cạnh nhau?

A. $P = \frac{2}{3}$.

B. $P = \frac{1}{3}$.

C. $P = \frac{5}{6}$.

D. $P = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Tác giả: Dương Hồng ; Fb: Dương Hồng

Chọn A

Cách 1: Số phần tử của không gian mẫu là $P_6 = 6! = 720$.

Xếp 4 viên bi gồm 2 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh thành hàng ngang có $4!$ cách.

Với mỗi cách xếp 4 viên bi nói trên, cứ giữa 2 viên bi có 1 khoảng trống, tính cả khoảng trống 2 đầu hàng ta có 5 khoảng trống. Chọn 2 trong 5 khoảng trống trên để xếp 2 viên bi vàng vào ta có $A_5^2 = 20$ cách.

Vậy số cách xếp 6 viên bi vào hàng ngang sao cho 2 viên bi vàng không xếp cạnh nhau là $4! \cdot 20 = 480$ cách.

Vậy $P = \frac{480}{720} = \frac{2}{3}$.

Cách 2: Dùng phần bù

Số phần tử của không gian mẫu là $P_6 = 6! = 720$.

Coi 2 viên bi vàng là 1 nhóm, xếp cùng 4 viên bi còn lại thành 1 hàng ngang có $5! = 120$ cách.

Hoán vị 2 viên bi vàng trong nhóm trên có $2! = 2$ cách.

Số cách xếp 6 viên bi vào hàng ngang sao cho 2 viên bi vàng xếp cạnh nhau là $2 \cdot 120 = 240$ cách. Vậy xếp 6 viên bi vào hàng ngang sao cho 2 viên bi vàng không xếp cạnh nhau là $720 - 240 = 480$ cách.

$$\text{Vậy } P = \frac{480}{720} = \frac{2}{3}.$$

Câu 32. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho tập $X = \{1; 2; \dots; 8\}$. Gọi A là tập các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X . Lấy ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để số được lấy chia hết cho 2222.

A. $\frac{C_8^2 C_6^2 C_4^2}{8!}$.

B. $\frac{192}{8!}$.

C. $\frac{4!4!}{8!}$.

D. $\frac{348}{8!}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $n(\Omega) = 8!$. Gọi số được lấy từ A có dạng $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_8}$.

$$\text{Vì } 2222 = 2.1111, \text{ hơn nữa 2 và 1111 là 2 số nguyên tố cùng nhau nên } a : 2222 \Leftrightarrow \begin{cases} a : 2 \\ a : 1111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_8 : 2 \\ a : 1111 \end{cases}.$$

Từ $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 1 + 2 + \dots + 8 = 36 : 9$ nên $a : 9999$.

$$\text{Lại có } a = \overline{a_1 a_2 \dots a_8} = 10000 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} = 9999 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + (\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8}) \text{ suy ra } (\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8}) : 9999.$$

$$\text{Nhưng vì } 2000 < \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} < 18000 \text{ nên } \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} = 9999 \text{ hay } a_1 + a_5 = a_2 + a_6 = a_3 + a_7 = a_4 + a_8 = 9.$$

Dễ thấy mỗi số tự nhiên a thỏa mãn điều kiện trên và a_8 là số chẵn đều chia hết cho 2222.

Chia 8 số từ X thành bốn bộ có tổng bằng 9 là $(1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5)$.

a_8 có 4 cách chọn.

Mỗi cách chọn a_8 ta có duy nhất một cách chọn a_4 .

Ba bộ còn lại $(a_1; a_5), (a_2; a_6), (a_3; a_7)$ có thể hoán vị cho nhau, đồng thời hai phần tử trong mỗi bộ có cũng có thể hoán vị cho nhau nên có tất cả $3! \cdot (2!)^3$ cách chọn.

$$\text{Tóm lại, ta có } n(A) = 4 \cdot 3! \cdot (2!)^3 = 192.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{192}{8!}.$$

Chuyên đề

11

Nhị thức Newton

Câu 1. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho $T(x) = \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{20} + \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{22}$ ($x \neq 0$). Sau khi khai triển và rút gọn $T(x)$ có bao nhiêu số hạng?

A. 36.

B. 39.

C. 44.

D. 38.

Lời giải

Tác giả: Bùi Đức Thắng; Fb: Đức Thắng

Chọn D

$$\begin{aligned} T(x) &= \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{20} + \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{22} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (x^3)^{20-k} \cdot \frac{1}{x^k} + \sum_{k=0}^{22} C_{22}^k x^{22-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{60-4k} + \sum_{k=0}^{22} C_{22}^k x^{22-3k} = T_1 + T_2 \end{aligned}$$

Số các số hạng của $T(x)$ chính là số các số mũ khác nhau của x .

Trong T_1 số mũ của x là các bội của 4 trong đoạn $[-20, 60]$.

Trong T_2 dễ thấy số mũ của x là các số: 22; 19; 16; 13; 10; 7; 4; 1; -2; -5; -8; -11; -14; -17; -20; ...

Dễ thấy có 4 số mũ trùng nhau của T_1 và T_2 là 16; 4; -8; -20.

Vậy số số hạng trong $T(x)$ là $20 + 22 - 4 = 38$.

Chọn D

Câu 2. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho khai triển nhị thức Newton $(x^2 - x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, ($n \in N^*$). Tìm hệ số a_{10} . Biết rằng $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 21$

Lời giải

Tác giả: Võ Văn Trung; Fb: Van Trung

Giải phương trình tìm n:

$$C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 21 \quad (n \in N^*, n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 21 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 21 \Leftrightarrow n^2 + n - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6(1) \\ n = -7(1) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (x^2 - x)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k (x^2)^{6-k} \cdot (-x)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k (-1)^k x^{12-k}$$

Mà $(x^2 - x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$ nên a_{10} là hệ số của x^{10}

$$\text{Suy ra: } x^{10} = x^{12-k} \Rightarrow k = 2$$

$$\text{Vậy hệ số } a_{10} \text{ là: } C_6^2 (-1)^2 = 15$$

Câu 3. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho khai triển $(3x+2)^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$.

Hệ số lớn nhất trong khai triển đó là

A. a_{15} .

B. a_{12}

C. a_9 .

D. a_8 .

Lời giải

Tác giả: Phạm Tiến Long; Fb: Long Phạm Tiến

Chọn C

Số hạng tổng quát T_{k+1} trong khai triển đã cho là: $C_{15}^k 2^{15-k} (3x)^k = C_{15}^k 2^{15-k} 3^k x^k$ ($k \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq 15$)

Hệ số của số hạng tổng quát T_{k+1} là $a_k = C_{15}^k 2^{15-k} 3^k$.

- Với $k=0$: Ta có $a_0 = C_{15}^0 2^{15} 3^0$.

- Với $k=15$: Ta có $a_{15} = C_{15}^{15} 2^0 3^{15}$.

- Với $0 < k < 15$: a_k lớn nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_{15}^k 2^{15-k} 3^k \geq C_{15}^{k+1} 2^{14-k} 3^{k+1} \\ C_{15}^k 2^{15-k} 3^k \geq C_{15}^{k-1} 2^{16-k} 3^{k-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15!}{k!(15-k)!} 2^{15-k} 3^k \geq \frac{15!}{(k+1)!(14-k)!} 2^{14-k} 3^{k+1} \\ \frac{15!}{k!(15-k)!} 2^{15-k} 3^k \geq \frac{15!}{(k-1)!(16-k)!} 2^{16-k} 3^{k-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{15-k} \geq \frac{3}{k+1} \\ \frac{3}{k} \geq \frac{2}{16-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5k \geq 43 \\ 5k \leq 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{43}{5} \\ k \leq \frac{48}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Mà $k \in \mathbb{N}$ nên suy ra $k=9$. Suy ra hệ số lớn nhất là $a_9 = C_{15}^9 2^6 3^9$.

So sánh các hệ số a_0, a_9 và a_{15} ta thấy a_9 lớn nhất. Vậy a_9 là hệ số lớn nhất trong khai triển đã cho.

Câu 4. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019) Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển:

$$\left(\frac{2}{x} - 3x^2 \right)^{10} \quad (x \neq 0).$$

Lời giải

Tác giả: Hoàng Thị Mến; Fb: Hoàng Mến

Hướng 1: Trình bày theo lớp 12 như sau:

$$\text{Ta có: } \left(\frac{2}{x} - 3x^2 \right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{2}{x} \right)^{10-k} \cdot (-3x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{3k-10} \cdot (x \neq 0) \text{ với } k=0,1,2,\dots,10.$$

Khi $3k-10=5 \Leftrightarrow k=5$ thì số hạng chứa x^5 trong khai triển là: $C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot (-3)^5 \cdot x^5 = -1959552 \cdot x^5$.

Hướng 2: Trình bày theo lớp 11 như sau:

Ta có $\left(\frac{2}{x} - 3x^2\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{2}{x}\right)^{10-k} \cdot (-3x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-3)^k \cdot \frac{x^{2k}}{x^{10-k}}, (x \neq 0)$ với $k = 0, 1, 2, \dots, 10$.

Số hạng chứa x^5 ứng với số k thỏa mãn $\frac{x^{2k}}{x^{10-k}} = x^5 \Rightarrow x^{2k} = x^{15-k} \Rightarrow 2k = 15 - k \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $C_{10}^5 \cdot 2^{10-5} \cdot (-3)^5 \cdot x^5 = -1959552 \cdot x^5$.

Câu 5. (HSG11 Hà Tĩnh 2018-2019) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ 5 và thứ 15 của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$\left(C_{2n+1}^0\right)^2 + \left(C_{2n+1}^2\right)^2 + \left(C_{2n+1}^4\right)^2 + \dots + \left(C_{2n+1}^{2n}\right)^2 = \frac{1}{2} C_{46}^{23}$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Công Hạnh, Fb: Nguyễn Công Hạnh

a. Theo giả thiết ta có $C_n^2 = C_n^1 + 4d; C_n^3 = C_n^1 + 14d \Rightarrow \frac{C_n^2 - C_n^1}{4} = \frac{C_n^3 - C_n^1}{14}$

$$\Leftrightarrow 7(C_n^2 - C_n^1) = 2(C_n^3 - C_n^1) \Leftrightarrow 2C_n^3 - 7C_n^2 + 5C_n^1 = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 7 \frac{n(n-1)}{2} + 5n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 27n + 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = \frac{5}{2}(L) \end{cases}$$

Với $n = 11$, thử lại thỏa mãn cấp số cộng.

Ta cần chứng minh $\left(C_{23}^0\right)^2 + \left(C_{23}^2\right)^2 + \left(C_{23}^4\right)^2 + \dots + \left(C_{23}^{22}\right)^2 = \frac{1}{2} C_{46}^{23}$.

Ta sẽ chứng minh tổng quát $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \left(C_n^4\right)^2 + \dots + \left(C_n^{n-1}\right)^2 = \frac{1}{2} C_{2n}^n$ với n lẻ.

Xét khai triển $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (x+1)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n)$.

Đồng nhất hệ số của x^n của đẳng thức trên ta có $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \left(C_n^3\right)^2 \dots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$ (1)

Do n lẻ và $C_n^0 = C_n^n; C_n^1 = C_n^{n-1}; \dots; C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$

Nên $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \left(C_n^3\right)^2 \dots + \left(C_n^n\right)^2 = 2\left(\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \left(C_n^4\right)^2 + \dots + \left(C_n^{n-1}\right)^2\right)$.

Thay vào (1) ta có $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \left(C_n^4\right)^2 + \dots + \left(C_n^{n-1}\right)^2 = \frac{1}{2} C_{2n}^n$ (đpcm).

Câu 6. (HSG11 Thuận Thành 2018-2019) Tính tổng $S = 2 \cdot 1 C_n^2 + 3 \cdot 2 C_n^3 + 4 \cdot 3 C_n^4 + \dots + n(n-1) C_n^n$.

Lời giải

Ta có: $S = 2 \cdot 1C_n^2 + 3 \cdot 2C_n^3 + 4 \cdot 3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n$ với số hạng tổng quát là

$$u_k = k(k-1)C_n^k = k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)![(n-2)! - (k-2)!]}$$

$$= n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \quad (2 \leq k \leq n).$$

Từ đó:

$$S = n(n-1)(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-2})$$

$$= n(n-1)2^{n-2}.$$

Câu 7. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Cho k là số tự nhiên thỏa mãn: $5 \leq k \leq 2014$. Chứng minh rằng:

$$C_5^0 \cdot C_{2014}^k + C_5^1 \cdot C_{2014}^{k-1} + \dots + C_5^5 \cdot C_{2014}^{k-5} = C_{2019}^k$$

Lời giải

Tác giả: Đinh Thị Phương Trâm, Facebook: trâm đình

$$\text{Ta có: } (x+1)^5 \cdot (x+1)^{2014} = (x+1)^{2019}$$

$$\text{Đặt } M = (x+1)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$$

$$N = (x+1)^{2014} = C_{2014}^0 + C_{2014}^1 x + C_{2014}^2 x^2 + \dots + C_{2014}^k x^k + \dots + C_{2014}^{2014} x^{2014}$$

$$P = (x+1)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^k x^k + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$$

Vì $P = M \cdot N$ nên số hạng chứa x^k trong P có dạng:

$$\begin{aligned} C_{2019}^k x^k &= C_5^0 \cdot C_{2014}^k x^k + C_5^1 x \cdot C_{2014}^{k-1} x^{k-1} + C_5^2 x^2 \cdot C_{2014}^{k-2} x^{k-2} + \dots + C_5^5 x^5 \cdot C_{2014}^{k-5} x^{k-5} \\ &= C_5^0 \cdot C_{2014}^k x^k + C_5^1 \cdot C_{2014}^{k-1} x^k + C_5^2 \cdot C_{2014}^{k-2} x^k + \dots + C_5^5 \cdot C_{2014}^{k-5} x^k \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào } (*) \text{ ta có: } C_5^0 \cdot C_{2014}^k + C_5^1 \cdot C_{2014}^{k-1} + \dots + C_5^5 \cdot C_{2014}^{k-5} = C_{2019}^k$$

Câu 8. (HSG12 THPT Thuận Thành năm 2018-2019) Tính tổng

$$S = 2 \cdot 1C_n^2 + 3 \cdot 2C_n^3 + 4 \cdot 3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n.$$

Lời giải

$$S = 2 \cdot 1C_n^2 + 3 \cdot 2C_n^3 + 4 \cdot 3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n$$

$$\text{Số hạng tổng quát: } u_k = k(k-1)C_n^k = k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)![(n-2)! - (k-2)!]}$$

$$= n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \quad (2 \leq k \leq n)$$

$$S = n(n-1)(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-2}) = n(n-1)2^{n-2}$$

Câu 9. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1+x+x^2)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512$.

Giải:

*) Ta có $0 = (1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$.

Suy ra: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } 2^{2n} &= (1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{2n} \\ &= (C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}) + (C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}) \\ &= 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}) \\ &= 2.512 = 2^{10} \text{ (do } C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512 \text{)}. \\ &\Rightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5 \end{aligned}$$

*) Xét khai triển

$$\begin{aligned} (1+x+x^2)^5 &= [1+x(1+x)]^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^k (1+x)^k \\ &= \sum_{k=0}^5 C_5^k x^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i x^i \right) = \sum_{k=0}^5 \left(\sum_{i=0}^k C_5^k C_k^i x^{k+i} \right) \text{ (với } i, k \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k \leq 5 \text{ (*))}. \end{aligned}$$

) Vì số hạng chứa x^5 nên $k+i=5$. Kết hợp với điều kiện () ta được các trường hợp sau:

$$\begin{cases} i=0 \\ k=5 \end{cases}, \begin{cases} i=1 \\ k=4 \end{cases}, \begin{cases} i=2 \\ k=3 \end{cases}$$

*) Hệ số cần tìm là: $C_5^5.C_5^0 + C_5^4.C_4^1 + C_5^3.C_3^2 = 51$.

Câu 10. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho n là một số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$?

Lời giải*Tác giả: Nguyễn Đức Hoạch, Fb: Hoạch Nguyễn**Phản biện: Nguyễn Văn Mộng, FB: Nguyễn Văn Mộng*

$$\text{Ta có: } (x^2+1)^n(x+2)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{n-k} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^n C_n^m x^{n-m} \cdot 2^m \right) = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2n-2k} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^n C_n^m x^{n-m} \cdot 2^m \right)$$

$$(m, n, k \in \mathbb{N}; 0 \leq m, k \leq n).$$

Xét số hạng chứa x^{3n-3} thì ta suy ra $(2n-2k) + (n-m) = 3n-3 \Leftrightarrow 2k+m=3$.

Do $k, m \in \mathbb{N}$ nên suy ra $(k, m) \in \{(0; 3), (1; 1)\}$.

$\Rightarrow$ Hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} là $a_{3n-3} = C_n^0.C_n^3.2^3 + C_n^1.C_n^1.2$.

Theo giả thiết $a_{3n-3} = 26n$ nên $C_n^0 \cdot C_n^3 \cdot 2^3 + C_n^1 \cdot C_n^1 \cdot 2 = 26n \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot 8 + \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)!} \cdot 2 = 26n$
 $\Leftrightarrow \frac{4n(n-1)(n-2)}{3} + 2n^2 = 26n \Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow n = 5$ (Do $n \in \mathbb{N}$).

Vậy $n = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11. (HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển Newton của biểu thức $(2+3x)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

Lời giải

Tác giả: Phạm Ngọc Hưng; Fb: Hưng Phạm Ngọc

Phản biện: Nguyễn Văn Mến; FB: Nguyễn Văn Mến

Ta có $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1 \Leftrightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20}.$

Do $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+3} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}.$

Suy ra $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}.$

$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{20} \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2^{21} \Leftrightarrow 2n+1 = 21 \Leftrightarrow n = 10.$

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = C_{10}^k 2^{10-k} (3x)^k = C_{10}^k 2^{10-k} 3^k x^k.$

Theo yêu cầu đề bài suy ra $k = 10$. Vậy hệ số của x^{10} trong khai triển là $C_{10}^{10} 3^{10} = 59049.$

Câu 12. (HSG12 Quảng Ngãi 2018-2019) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3).$

Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Niu-tơn

$$P = \left(2x^2 - \frac{3}{x^3} \right)^n, \quad (x \neq 0).$$

Lời giải

Tác giả: Trần Văn Đức; Fb: Đức trần văn

Ta có:

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+1)! \cdot 3!} - \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3!} = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+3)(n+2)}{2} = 7(n+3) \Leftrightarrow n+2 = 14 \Leftrightarrow n = 12 \text{ (tm)}$$

Với $n = 12$, $P = \left(2x^2 - \frac{3}{x^3} \right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^{12-k} (-3)^k x^{24-5k}.$

Số hạng chứa x^4 ứng với $24-5k = 4 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy hệ số chứa x^4 là $C_{12}^4 \cdot 2^8 \cdot 3^4$

Câu 13. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}, x \neq 0.$$

A. C_{10}^3 .

B. C_{10}^{10} .

C. C_{10}^5 .

D. C_{10}^6 .

Lời giải

Tác giả: Giáp Văn Khương; Fb: Giáp Văn Khương

Chọn D

$$\text{Ta có } \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{10-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{20-5k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $x^{20-5k} = x^0 = 1 \Leftrightarrow 20-5k=0 \Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng không chứa x là C_{10}^4 . Mà ta có $C_{10}^4 = C_{10}^6$, nên số hạng không chứa x là C_{10}^6 .

Câu 14. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho khai triển

$$(3x^2 - 2)^3 (2x - 3)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{14}x^{14}. \text{ Tìm } a_{11}$$

Lời giải

Tác giả: Trần Đức Nghĩa; Fb: Đ Nghĩa Trần

Xét khai triển: $(3x^2 - 2)^3$ có số hạng tổng quát:

$$T_1 = C_3^k (3x^2)^{3-k} (-2)^k \quad (k \in \{0; 1; 2; 3\}).$$

Khai triển $(2x - 3)^8$ có số hạng tổng quát:

$$T_2 = C_8^i (2x)^{8-i} (-3)^i \quad (i \in \{0; 1; 2; \dots; 8\}).$$

Khi đó số hạng tổng quát của khai triển $(3x^2 - 2)^3 (2x - 3)^8$ là:

$$T = C_3^k (3x^2)^{3-k} (-2)^k \cdot C_8^i (2x)^{8-i} (-3)^i = C_3^k \cdot C_8^i 3^{3-k} (-3)^i 2^{8-i} (-2)^k x^{-2k-i+14}.$$

a_{11} là hệ số đứng trước x^{11} , khi đó ta có:

$$-2k - i + 14 = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ i=3 \\ k=1 \\ i=1 \end{cases}$$

$$a_{11} = C_3^0 \cdot 3^3 \cdot (-2)^0 \cdot C_8^3 \cdot 2^5 \cdot (-3)^3 + C_3^1 \cdot 3^2 \cdot (-2) \cdot C_8^1 \cdot 2^7 \cdot (-3) = -1140480.$$

Câu 15. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa mãn

$$3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 \geq 0?$$

A. 2.

B. 0.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } 3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot x!}{(x-2)!} - \frac{(2x)!}{(2x-2)!} + 42 \geq 0 \Leftrightarrow 3x(x-1) - 2x(2x-1) + 42 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 42 \geq 0 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 6 \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Vậy có 5 số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 16. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = 64n.$$

Lời giải

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \quad (1) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta có:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1} \quad (2)$$

Thay $x=1$ vào (2) ta được:

$$n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n \quad . \quad \text{Từ} \quad \text{giả} \quad \text{thiết}$$

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = 64n$$

$$\text{Ta có: } 64n = n \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^6 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 6 = n-1 \Leftrightarrow n=7 \text{ (thỏa mãn } n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là:

$$T = C_7^k (\sqrt{x})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k = \frac{1}{2^k} C_7^k \cdot x^{\frac{7-k}{2}} \cdot x^{-\frac{k}{4}} = \frac{1}{2^k} C_7^k \cdot x^{\frac{14-3k}{4}}; 0 \leq k \leq 7, k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Để } T \text{ chứa } x^2 \text{ ta cần tìm số } k \text{ sao cho } 0 \leq k \leq 7, k \in \mathbb{N} \text{ và } \frac{14-3k}{4} = 2 \Leftrightarrow k=2 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy hệ số của số hạng chứa } x^2 \text{ là: } \frac{1}{2^2} \cdot C_7^2 = \frac{21}{4}.$$

Câu 17. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho nhị thức $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$ trong đó tổng 3 hệ số đầu tiên của khai triển của nhị thức đó là 36. Khi đó số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức đã cho bằng:

A. 525. B. 252. C. -252. D. -525.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \left(x - \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C_n^k \cdot x^{n-2k}.$$

Do tổng 3 hệ số đầu tiên của khai triển là 36 nên ta có phương trình:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 = 36, \quad n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow 1 - n + \frac{n(n-1)}{2} = 36.$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ n = -7(l). \end{cases}$$

Khi đó nhị thức $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ có số hạng tổng quát trong khai triển là $(-1)^k \cdot C_{10}^k \cdot x^{10-2k}$.

Ta tìm k sao cho $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy số hạng cần tìm là $(-1)^5 C_{10}^5 = -252$.

Câu 18. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019) Tính tổng

$$S = 2^2 C_{2019}^2 - 3^2 C_{2019}^3 + \dots + (-1)^k k^2 C_{2019}^k + \dots - 2019^2 C_{2019}^{2019}.$$

Lời giải

Tác giả: Nhóm 2 - Tổ 8 nhóm toán team toán vd - vdc

Trước hết ta chứng minh đẳng thức: $k^2 C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$ (1) ($2 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}^*$).

Thật vậy: do $k^2 C_n^k = k(k-1)C_n^k + kC_n^k$ (2).

Mà:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1} \quad (3)$$

Áp dụng (3) hai lần ta được: $(k-1) \cdot kC_n^k = (k-1) \cdot nC_{n-1}^{k-1} = n \cdot (k-1) \cdot C_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ (4)

Từ (2), (3), (4) ta được (1).

Áp dụng (1) ta được:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^{2019} (-1)^k \cdot k^2 \cdot C_{2019}^k = \sum_{k=2}^{2019} (-1)^k \cdot (2019 \cdot 2018 \cdot C_{2017}^{k-2} + 2019 \cdot C_{2018}^{k-1}) \\ &= 2018 \cdot 2019 \cdot \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k \cdot (-1)^k - 2019 \cdot \sum_{k=1}^{2018} C_{2018}^k \cdot (-1)^k \\ &= 2018 \cdot 2019 \cdot (1-1)^{2017} - 2019 \cdot ((1-1)^{2018} - 1) = 2019. \end{aligned}$$

Vậy $S = 2019$.

Câu 19. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = (n - 304) \cdot 2^n$$

A. 608.

B. 2019.

C. 305.

D. 2018.

Lời giải

Tác giả: Tuyetnguyen; Fb: Tuyetnguyen

Chọn A

$$\text{Xét số hạng } k.C_n^k = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

$$\text{Do đó ta có: } C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) = n \cdot 2^{n-1}.$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết ta được: } n \cdot 2^{n-1} = (n - 304) \cdot 2^n \Leftrightarrow n = 2(n - 304) \Leftrightarrow n = 608$$

Câu 20. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho khai triển

$$(1 + x + x^2)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4038}x^{4038}.$$

$$\text{Tính } S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{4038}.$$

A. $S = 1$.B. $S = 3^{4038}$.C. $S = 0$.D. $S = 3^{2019}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thuyền; Fb:Thuyền Nguyễn.

Chọn D

$$\text{Theo bài ra ta có: } (1 + x + x^2)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4038}x^{4038} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta thay } x = 1 \text{ vào thì được: } (1 + 1 + 1)^{2019} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{4038} \cdot \Leftrightarrow 3^{2019} = S.$$

$$\text{Vậy } S = 3^{2019}.$$

Câu 21. (HSG12 tỉnh Lào Cai năm 2018-2019) Tính tổng

$$S = \frac{1}{2019} (C_{2019}^1)^2 + \frac{2}{2018} (C_{2019}^2)^2 + \dots + \frac{2018}{2} (C_{2019}^{2018})^2 + \frac{2019}{1} (C_{2019}^{2019})^2.$$

Lời giải

Tác giả: Mai Ngọc Thi; Fb: Mai Ngọc Thi

Xét số hạng tổng quát :

$$T_k = \frac{k}{2020-k} \cdot (C_{2019}^k)^2 = \frac{k}{2020-k} \cdot \frac{2019!}{(2019-k)!k!} \cdot C_{2019}^k = \frac{2019!}{(2020-k)!(k-1)!} \cdot C_{2019}^k = C_{2019}^{k-1} \cdot C_{2019}^{2019-k},$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, 2019$$

$$\text{Suy ra } S = C_{2019}^0 \cdot C_{2019}^{2018} + C_{2019}^1 \cdot C_{2019}^{2017} + \dots + C_{2019}^{2017} \cdot C_{2019}^1 + C_{2019}^{2018} \cdot C_{2019}^0$$

Xét

$$(1+x)^{2019} (1+x)^{2019} = (C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}) (C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019})$$

Hệ số của x^{2018} trong khai triển $(1+x)^{2019} (1+x)^{2019}$ là :

$$C_{2019}^0 \cdot C_{2019}^{2018} + C_{2019}^1 \cdot C_{2019}^{2017} + \dots + C_{2019}^{2017} \cdot C_{2019}^1 + C_{2019}^{2018} \cdot C_{2019}^0 \quad (1)$$

Xét khai triển : $(1+x)^{4038} = C_{4038}^0 + C_{4038}^1 x + \dots + C_{4038}^{2018} x^{2018} + \dots + C_{4038}^{4038} x^{4038}$

Hệ số của x^{2018} trong khai triển $(1+x)^{4038}$ là C_{4038}^{2018} (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } S = \frac{1}{2019} (C_{2019}^1)^2 + \frac{2}{2018} (C_{2019}^2)^2 + \dots + \frac{2018}{2} (C_{2019}^{2018})^2 + \frac{2019}{1} (C_{2019}^{2019})^2 = C_{4038}^{2018}$$

Câu 22. (HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019) Chứng minh rằng C_{3n}^n chia hết cho 3 với mọi n nguyên dương.

Lời giải

$$\text{Ta có } C_{3n}^n = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} = \frac{1.2.3 \dots (3n-1).3n}{1.2.3 \dots n.(2n)!} = 3 \cdot \frac{1.2.3 \dots (3n-1)}{1.2.3 \dots (n-1).(2n)!} = 3 \cdot \frac{(3n-1)!}{(n-1)!(2n)!} = 3C_{3n-1}^{n-1}.$$

Nên C_{3n}^n chia hết cho 3 với mọi n nguyên dương.

Chuyên đề

12

Dãy số, giới hạn

Câu 1. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2851} \\ (u_{n+1})^2 = (u_n)^2 + n, n \geq 1 \end{cases} \text{ . Số hạng thứ 2020 của dãy số } (u_n) \text{ là:}$$

- A. 1427. B. 1429. C. 2019. D. 1428.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trần Hữu; Fb: Nguyễn Trần Hữu

Chọn B

Ta có: $(u_{n+1})^2 = (u_n)^2 + n \Leftrightarrow (u_{n+1})^2 + (n+1)^2 = (u_n)^2 + n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + 3n + 1$
với $v_n = (u_n)^2 + n^2, n \geq 1$ (1).

Xét dãy số (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 = (u_1)^2 + 1^2 = 2852 \\ v_{n+1} = v_n + 3n + 1, n \geq 1 \end{cases}$ (2).

Ta có: $v_2 - v_1 = 4; v_3 - v_2 = 7; \dots; v_{n+1} - v_n = 3n + 1, n \geq 1$.

Suy ra: $v_{n+1} - v_1 = 4 + 7 + \dots + 3n + 1, n \geq 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_1 = \frac{(4 + 3n + 1)n}{2}, n \geq 1$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = v_1 + \frac{3n^2 + 5n}{2}, n \geq 1 \text{ (3)}.$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra: $(u_{n+1})^2 = v_{n+1} - (n+1)^2 = v_1 + \frac{3n^2 + 5n}{2} - (n+1)^2 = v_1 + \frac{n^2 + n - 2}{2}, n \geq 1$.

Suy ra: $(u_{2020})^2 = 2852 + \frac{2019^2 + 2019 - 2}{2} = 2042041 \Rightarrow u_{2020} = 1429$ (do $u_n > 0, n \geq 1$).

Câu 2. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Tìm số

hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trên.

- A. $u_1 = -9; q = -2$. B. $u_1 = 9; q = -2$. C. $u_1 = 9; q = 2$. D. $u_1 = -9; q = 2$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Dung; Fb: Nguyễn Dung

Chọn C

Ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 54 \\ u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 54 \\ q(u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q) = 108 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 54 \\ q \cdot 54 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot 2^3 - u_1 \cdot 2 = 54 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 9, q = 2$.

Câu 3. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 2; u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a.2^n + bn + c$, với a, b, c là các số nguyên, $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$. Khi đó tổng $a + b + c$ có giá trị bằng?

A. 3 . B. 4 . C. -4 . D. -3 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Phương ; Fb: Phương Nguyễn

Chọn D

Từ công thức truy hồi $u_1 = 2; u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$ ta suy ra:
$$\begin{cases} u_2 = 9 \\ u_3 = 26 \\ u_4 = 63 \end{cases}$$

Mà $u_n = a.2^n + bn + c, n \geq 2$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 9 \\ 8a + 3b + c = 26 \\ 16a + 4b + c = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = -5 \end{cases}$$

Do đó $a + b + c = -3$.

Câu 4. (HSG11 Thuận Thành 2018-2019) Cho các số $x + 5y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $(y - 1)^2; xy - 1; (x + 2)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x, y .

Lời giải

$x + 5y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự lập thành CSC nên ta có:

$$x + 5y + 8x + y = 2(5x + 2y) \Leftrightarrow x = 2y \quad (1)$$

$(y - 1)^2; xy - 1; (x + 2)^2$ theo thứ tự lập thành CSN nên ta có:

$$(y - 1)^2 (x + 2)^2 = (xy - 1)^2 \quad (2)$$

+Thay (1) vào (2) ta được: $(y - 1)^2 (2y + 2)^2 = (2y^2 - 1)^2 \Leftrightarrow 4(y^4 - 2y^2 + 1) = 4y^4 - 4y^2 + 1$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$$

:

Câu 5. (HSG12 THPT Thuận Thành năm 2018-2019) Cho các số $x + 5y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $(y - 1)^2; xy - 1; (x + 2)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x, y .

Lời giải

$x + 5y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có:

$$x + 5y + 8x + y = 2(5x + 2y) \Leftrightarrow x = 2y \quad (1)$$

$(y-1)^2; xy-1; (x+2)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có:

$$(y-1)^2 (x+2)^2 = (xy-1)^2 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$(y-1)^2 (2y+2)^2 = (2y^2-1)^2 \Leftrightarrow 4(y^4-2y^2+1) = 4y^4-4y^2+1$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (x; y) = \left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right), (x; y) = \left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Câu 6. (HSG12 tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019) Xét sự hội tụ của dãy số (x_n) biết $x_0 = 2$,

$$x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{\sqrt{3}}{x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lời giải

Tác giả: Phan Thị Hiền; Fb: Phan Hiền

Cách 1:

+) Ta thấy $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$x_0 = 2; x_1 = \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1,433; x_2 = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \approx 2,239.$$

+) Xét $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{3}}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{2\sqrt{3}}{x^3} < 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $y = f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

+) Xét dãy số (x_{2n}) là một dãy con của dãy số (x_n) .

Dãy số (x_{2n}) là một dãy số tăng.

Thật vậy:

-) $x_0 < x_2$.

-) Giả sử $x_{2k-2} < x_{2k}, k \in \mathbb{N}$. Vì $y = f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên $x_{2k+1} = f(x_{2k}) < f(x_{2k-2}) = x_{2k-1} \Rightarrow x_{2k+2} = f(x_{2k+1}) > f(x_{2k-1}) = x_{2k}$. Vậy $x_{2k} < x_{2k+2}$.

Theo nguyên lý quy nạp, $(x_{2n}), n \in \mathbb{N}$ là một dãy số tăng và ngoài ra $x_{2n} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

+) Giả sử $\exists \lim x_n = a \Rightarrow \lim x_{2n} = a$ và $a \geq 2$.

$$\text{Do } x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{\sqrt{3}}{x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ nên } \lim x_{n+1} = \lim \left(\frac{2}{x_n} + \frac{\sqrt{3}}{x_n^2} \right) \Rightarrow a = \frac{2}{a} + \frac{\sqrt{3}}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow (a - \sqrt{3})(a^2 + a\sqrt{3} + 1) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} \text{ (mâu thuẫn với } a \geq 2 \text{)}.$$

Vậy giả sử sai. Dãy số (x_n) là dãy số phân kì.

Cách 2:

+) Ta thấy $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$x_0 = 2; x_1 = \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2^2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1,433; x_2 = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \approx 2,239.$$

+) Ta chứng minh $x_{2n} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}, (1)$

Thật vậy: Với $n = 0$ thì $x_0 = 2 > \sqrt{3}$ nên (1) đúng với $n = 0$.

Giả sử (1) đúng $\forall n = k, k \in \mathbb{N}$ tức là $x_{2k} \geq 2$ ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$.

$$\text{Ta có: } x_{2k} \geq 2 \Rightarrow 0 < x_{2k+1} \leq \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x_{2k+2} \geq \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} > 2.$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có $x_{2n} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

+) Xét dãy số (x_{2n}) là một dãy con của dãy số (x_n) .

Giả sử $\exists \lim x_n = a \Rightarrow \lim x_{2n} = a$ và $a \geq 2$.

$$\text{Do } x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{\sqrt{3}}{x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ nên } \lim x_{n+1} = \lim \left(\frac{2}{x_n} + \frac{\sqrt{3}}{x_n^2} \right) \Rightarrow a = \frac{2}{a} + \frac{\sqrt{3}}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow (a - \sqrt{3})(a^2 + a\sqrt{3} + 1) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} \text{ (mâu thuẫn với } a \geq 2 \text{)}.$$

Vậy giả sử sai. Dãy số (x_n) là dãy số phân kì.

Câu 7. (HSG12 tỉnh Bình Thuận năm 2018-2019) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết

$$u_1 = 2 \text{ và } u_{n+1} = 2u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Thanh Thủy; Fb: Phạm Thủy

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ ta có } u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5).$$

Đặt $w_n = u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $w_{n+1} = 2w_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó (w_n) là cấp số nhân có $w_1 = u_1 + 5 = 7$, công bội $q = 2$.

Suy ra $w_n = w_1 \cdot q^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $u_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 8. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases}$.

Số hạng đầu và công sai lần lượt là

A. $u_1 = 3; d = 1$. B. $u_1 = 3; d = 2$. C. $u_1 = 2; d = -3$. D. $u_1 = 1; d = 3$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thủy; Fb: diephoang

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ (u_1 + 2d) + (u_1 + 3d) = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Câu 9. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = \sin 1; u_n = u_{n-1} + \frac{\sin n}{n^2}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.

Lời giải

Tác giả: Cao Hoàng Nam; FB: Hoang Nam

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\text{Vì } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\text{Bằng qui nạp ta chứng minh được: } u_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}$$

$$\text{Suy ra: } -2 < -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số (u_n) xác định như trên là một dãy số bị chặn.

Câu 10. (HSG12 tỉnh Bình Thuận năm 2018-2019) Cho dãy số (v_n) thỏa mãn

$$v_1 = \frac{1}{2018}, v_{n+1} = \frac{2v_n}{1+2018v_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng $v_{n+1} \geq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Hồng Lê; Fb: Lê Hồng

Chứng minh được $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Khi đó } v_{n+1} = \frac{2v_n}{1+2018v_n^2} \leq \frac{2v_n}{2\sqrt{2018} \cdot v_n} = \frac{1}{\sqrt{2018}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2v_n}{1+2018v_n^2} - v_n = \frac{v_n - 2018v_n^3}{1+2018v_n^2} = \frac{v_n(1-2018v_n^2)}{1+2018v_n^2} \geq 0$$

Vậy $v_{n+1} \geq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 11. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Một quả bóng cao su được thả rơi từ độ cao $h = 18m$. Sau mỗi lần chạm đất, quả bóng lại nảy lên cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó. Giả sử quả bóng khi rơi và nảy đều theo phương thẳng đứng. Tính tổng độ dài quãng đường quả bóng đã di chuyển từ lúc được thả đến lúc không nảy nữa.

Lời giải

Sau lần chạm đất đầu tiên, quả bóng nảy lên độ cao $h_1 = \frac{3}{4}h$. Tiếp theo quả bóng rơi xuống trên quãng đường đúng bằng h_1 . Lần chạm đất thứ hai quả bóng nảy lên $h_2 = \frac{3}{4}h_1$ và cũng rơi xuống trên quãng đường đúng bằng h_2 ... Cứ như thế đến lần chạm đất thứ n thì quả bóng nảy lên đến độ cao $h_n = \frac{3}{4}h_{n-1}$ và cũng rơi xuống trên quãng đường đúng bằng h_n .

Ta thấy dãy $h, h_1, h_2, \dots, h_n$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{3}{4}$.

Tổng quãng đường quả bóng đi được là:

$$s = (h + h_1 + h_2 + \dots + h_n) + (h_1 + h_2 + \dots + h_n) = \frac{h}{1-q} + \frac{h_1}{1-q} = 126m.$$

Câu 12. (HSG12 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1}{u_n}, \forall n \geq 1. X$$

ét tính đơn điệu và bị chặn của (u_n) .

Lời giải

1) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1}{u_n}, \forall n \geq 1$. Xét tính đơn điệu và bị chặn của (u_n) .

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1}{u_n} = \frac{u_n^2}{u_n(\sqrt{1+u_n^2} + 1)} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2} + 1}; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mà $u_1 = 1 > 0$; giả sử với $n = k \geq 1$ ta có $u_k = \frac{u_{k-1}}{\sqrt{1+u_{k-1}^2} + 1} > 0; \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó ta có $u_{k+1} = \frac{u_k}{\sqrt{1+u_k^2} + 1} > 0; \forall k \in \mathbb{N}^*$.

$$+ \text{ Xét } u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1}{u_n} - u_n = -\frac{u_n(\sqrt{1+u_n^2})}{\sqrt{1+u_n^2} + 1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do dãy số (u_n) giảm nên $u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 13. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoà Đức Hà Nội năm 2018-2019)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2 \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Quang Thái ; Fb: Nguyễn Quang Thái

Cách 1: Dự đoán $u_n = 3^{n-1} + 2^{n-1} - 1$. Thật vậy, ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Kiểm tra dễ có mệnh đề đúng với $n = 1; n = 2$.

Giả sử mệnh đề đúng với mọi $n \leq k$, nghĩa là ta có được

$$u_k = 3^{k-1} + 2^{k-1} - 1 \text{ và } u_{k-1} = 3^{k-2} + 2^{k-2} - 1 (*).$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Theo giả thiết ta có:

$$u_{k+1} = 5u_k - 6u_{k-1} - 2 = 5(3^{k-1} + 2^{k-1} - 1) - 6(3^{k-2} + 2^{k-2} - 1) = 5 \cdot 3^{k-1} + 5 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1} - 3 \cdot 2^{k-1} - 1 = 3^k + 2^k - 1.$$

Vậy mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Cách 2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2 \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) . **Lời giải**

Tác giả: Ngô Mạnh Cường ; Fb: Cuong Ngo Manh

Theo bài ra, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2 \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, ta có

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n) - 2 \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ ($\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) ta có

$$\begin{cases} v_1 = u_2 - 2u_1 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2 \Leftrightarrow v_{n+1} - 1 = 3(v_n - 1) \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Đặt $w_n = v_n - 1$ ($\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) thì $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Nhận thấy (w_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$ và $w_1 = 1$. Do đó $w_n = 3^{n-1}$. Suy ra $v_n = 3^{n-1} + 1$ và $u_{n+1} - 2u_n = 3^{n-1} + 1$ ($\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$).

Từ đó ta có $u_{n+1} - 2u_n = 3^{n-1} + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - 3^n + 1 = 2(u_n - 3^{n-1} + 1)$

Đặt $t_n = u_n - 3^{n-1} + 1$ thì $\begin{cases} t_1 = u_1 - 3^0 + 1 = 1 \\ t_{n+1} = 2t_n \end{cases}$. Nhận thấy (t_n) là cấp số nhân với công bội bằng 2 và $t_1 = 1$ nên $t_n = 2^{n-1}$.

Vậy $u_n = 2^{n-1} + 3^{n-1} - 1$ ($\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$).

Cách 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2 \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) . **Lời giải**

Tác giả: Đinh Thị Thu Huế ; Fb: HueDinh

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2 \Leftrightarrow u_{n+2} - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n) - 2$$

Đặt $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ thì $\begin{cases} v_1 = u_2 - 2u_1 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} kw_{n+1} + l &= 3(kw_n + l) - 2 \Leftrightarrow kw_{n+1} = 3kw_n + 2l - 2 \\ \text{Đặt } v_n &= kw_n + l, \quad k, l \text{ là hằng số, } k \neq 0 \text{ thì} \\ &\Rightarrow w_{n+1} = 3w_n + \frac{2l-2}{k} \end{aligned}$$

Chọn $k = 1, l = 1$ thì $v_n = w_n + 1$ và $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n \end{cases}$. Nhận thấy (w_n) là cấp số nhân công bội $q = 3$ và $w_1 = 1$. Do đó $w_n = 3^{n-1}$, $v_n = 3^{n-1} + 1$ và $u_{n+1} - 2u_n = 3^{n-1} + 1$.

Đặt $u_n = t_n + a3^{n-1} + b$, a, b là các hằng số. Khi đó

$$\begin{aligned} t_{n+1} + a3^n + b - 2(t_n + a3^{n-1} + b) &= 3^{n-1} + 1 \\ \Leftrightarrow t_{n+1} - 2t_n &= (1-a)3^{n-1} + b + 1 \end{aligned}$$

Chọn $a = 1, b = -1$ khi đó $u_n = t_n + 3^{n-1} - 1$, $t_1 = u_1 = 1$ và $t_{n+1} = 2t_n$. Nhận thấy (t_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$ và $t_1 = 1$. Do đó $t_n = 2^{n-1}$. Suy ra $u_n = 2^{n-1} + 3^{n-1} - 1$.

Câu 14. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 4}, n \geq 1 \end{cases}$$
 Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số đã cho.

Lời giải

Tác giả: Đinh Mạnh Thắng ; Fb: Đinh Thang

Nhận xét: $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có:
$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 4}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{u_n}.$$

Đặt $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$ ta được: $v_{n+1} = \frac{1}{2} + 2v_n, v_1 = 1 \Rightarrow v_{n+1} + \frac{1}{2} = 1 + 2v_n = 2\left(v_n + \frac{1}{2}\right).$

Do đó $v_{n+1} + \frac{1}{2} = 2\left(v_n + \frac{1}{2}\right) = 2^2\left(v_{n-1} + \frac{1}{2}\right) = \dots = 2^n\left(v_1 + \frac{1}{2}\right).$

Suy ra $v_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot 2^n - \frac{1}{2}$ hay $v_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2}.$

Vậy $u_n = \frac{2}{3 \cdot 2^{n-1} - 1}.$

Câu 15. (HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019) tam giác ABC có độ dài 3 cạnh lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng tam giác đó có 2 góc trong mà số đo không vượt quá 60° .

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Hồng Vân ; Fb: Hồng Vân

Phản biện : Trần Đại Lộ, Fb : Trần Đại Lộ

Gọi a, b, c lần lượt là độ dài 3 cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC .

Không mất tổng quát giả sử 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân khi đó $b^2 = ac$

Mà theo định lý cosin ta có $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ nên $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2ac}$

Mặt khác theo bất đẳng thức cauchy thì $a^2 + c^2 \geq 2ca$ nên $\cos B \geq \frac{2ac - ac}{2ac} = \frac{1}{2}$

Do B là góc trong của một tam giác và $\cos B \geq \frac{1}{2}$ nên $0^\circ < B \leq 60^\circ$

Hơn nữa từ $b^2 = ac$ ta suy ra $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ c \leq b \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \leq B \leq C \\ C \leq B \leq A \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} A \leq B \leq 60^\circ \\ C \leq B \leq 60^\circ \end{cases}$ hay ta có điều cần chứng minh.

Câu 16. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát

$$u_n = \ln \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right], (n \in \mathbb{N}).$$

Tìm giá trị của biểu thức $H = 2019.e^{u_1}.e^{u_2}...e^{u_{2018}}$

Lời giải

Tác giả: Lê Ngọc Hùng ; Fb: Hung Le

Ta có: $u_n = \ln \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$

Do đó $\sum_{k=1}^n u_k = \ln \prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \ln \frac{1.2.3...n.(1+2).(2+2)...(n+2)}{2^2.3^2...(n+1)^2} = \ln \frac{n!(n+2)!}{[(n+1)!]^2.2!} = \ln \frac{n+2}{2(n+1)}.$

Suy ra $H = 2019.e^{u_1}.e^{u_2}...e^{u_{2018}} = 2019.e^{\sum_{k=1}^{2018} u_k} = 2019.e^{\ln \frac{2018+2}{2(2018+1)}} = 2019.\frac{2020}{2.2019} = 1010.$

Câu 17. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\log_2 u_1.\log_2 u_5 - 2\log_2 u_1 + 2\log_2 u_5 = 20$ và $u_n = 2u_{n-1}; u_1 > 1$ với mọi $n \geq 2$.

Tính tổng tất cả các giá trị của n thỏa mãn $2018^{29} < u_n < 2018^{30}$.

A. 3542 . **B.** 3553. **C.** 3870. **D.** 4199.

Lời giải

Tác giả: Phan Thị Quyên ; Fb: Quyên Phan

Chọn B

Dãy (u_n) có $u_n = 2u_{n-1}; n \geq 2$ là cấp số nhân có công bội $q = 2$.

Khi đó: $\log_2 u_1.\log_2 u_5 - 2\log_2 u_1 + 2\log_2 u_5 = 20$.

$$\Leftrightarrow \log_2 u_1.\log_2(u_1.2^4) - 2\log_2 u_1 + 2\log_2(u_1.2^4) = 20.$$

$$\Leftrightarrow \log_2 u_1.(\log_2 u_1 + 4) - 2\log_2 u_1 + 2(\log_2 u_1 + 4) = 20.$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 u_1 + 4\log_2 u_1 - 12 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 u_1 = 2 \\ \log_2 u_1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_1 = 2^{-6} \end{cases}.$$

Do $u_1 > 1$ nên $u_1 = 4$ thỏa mãn. Suy ra: $u_n = 4.2^{n-1}, n \geq 2$.

Khi đó: $2018^{29} < u_n < 2018^{30} \Leftrightarrow 2018^{29} < 4.2^{n-1} < 2018^{30} \Leftrightarrow 2018^{29} < 2^{n+1} < 2018^{30}.$

$$\Leftrightarrow 29.\log_2 2018 < n+1 < 30.\log_2 2018.$$

$\Rightarrow n \in \{318; \dots; 328\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị của n là $318 + \dots + 328 = 3553$.

Câu 18. (HSG11 tỉnh Phú Yên năm 2018-2019) Cho dãy số thực (x_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 0 < x_n < 1 \\ x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4}, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

b) Tìm giới hạn của dãy (x_n) .

Lời giải

a) Với $n = 1$, bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ (với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$), ta có $x_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$.

$$\text{Vì } x_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \Rightarrow 1 - x_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} = \frac{k+1}{2k}.$$

$$\text{Lại có: } x_{k+1}(1-x_k) \geq \frac{1}{4} \text{ suy ra } x_{k+1} > \frac{2k}{4(k+1)} = \frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$. Vậy bất đẳng thức đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Vì $0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (x_n) bị chặn.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương x_{n+1} và $1-x_n$ ta được:

$$x_{n+1} + (1-x_n) \geq 2\sqrt{x_{n+1}(1-x_n)} \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n.$$

$\Rightarrow (x_n)$ là dãy tăng.

Theo định lý Weierstrass thì dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn, giả sử $\lim x_n = a$.

$$\text{Từ bất đẳng thức } x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4} \text{ cho } n \rightarrow +\infty \text{ ta được } a(1-a) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \lim x_n = \frac{1}{2}.$$

Câu 19. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Cho dãy số được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n u_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Tìm số hạng thứ 10 của dãy số đã cho.

2. Chứng minh rằng u_{2019} là số vô tỷ.

Lời giải

1. Từ giả thiết dễ thấy $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Khi đó } u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n u_{n+1}} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = 1 + 2u_n u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 2u_n u_{n+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + \sqrt{1 + u_n^2}$$

Đặt $u_n = \cot \alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ (do $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$), khi đó

$$u_{n+1} = \cot \alpha + \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Ta thấy $u_1 = 1 = \cot \frac{\pi}{4}$ nên $u_2 = \cot \frac{\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{2^3}, u_3 = \cot \frac{\pi}{2^4} \dots$, từ đó ta tìm được công thức tổng quát của dãy số là: $u_n = \cot \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Vậy $u_{10} = \cot \frac{\pi}{2^{11}}$.

2. Từ giả thiết ta viết lại $u_n = \frac{u_{n+1}^2 - 1}{2u_{n+1}}$, nên nếu u_{n+1} hữu tỷ thì u_n hữu tỷ.

Do đó $u_{2019} = \cot \frac{\pi}{2^{2020}}$ số hữu tỷ thì u_{2018} hữu tỷ....và $u_2 = \cot \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ hữu tỷ, vô lý.

Vậy $u_{2019} = \cot \frac{\pi}{2^{2020}}$ vô tỷ.

Câu 20. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n + \frac{3}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tính u_{2018} .

A. $u_{2018} = \frac{2019}{2018}$.

B. $u_{2018} = \frac{6053}{2019}$.

C. $u_{2018} = \frac{2018}{2019}$.

D. $u_{2018} = \frac{3029}{6053}$.

Lời giải

Tác giả: Cao Xuân Hùng; FB: Cao Hùng

Chọn B

Ta có $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n + \frac{3}{n+2} \Leftrightarrow (n+2)u_{n+1} = (n+1)u_n + 3$

$\Leftrightarrow (n+2)u_{n+1} = (n+1)u_n + 3(n+2) - 3(n+1) \Leftrightarrow (n+2)u_{n+1} - 3(n+2) = (n+1)u_n - 3(n+1).$

Đặt $v_n = (n+1)u_n - 3(n+1)$. Khi đó $v_1 = 2u_1 - 6 = 2 \cdot 1 - 6 = -4$ và $v_{n+1} = v_n$ nên suy ra

$v_n = v_{n-1} = v_{n-2} = \dots = v_1 = -4 \Leftrightarrow (n+1)u_n - 3(n+1) = -4 \Leftrightarrow u_n = \frac{3n-1}{n+1}.$

Vậy $u_{2018} = \frac{3 \cdot 2018 - 1}{2018 + 1} = \frac{6053}{2019}.$

Câu 21. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 - 2019) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:

$u_1 = 1, u_2 = 11, u_3 = 111, \dots, u_n = 11\dots 1$ (n chữ số 1, $n \in \mathbb{N}^*$). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Giá trị của S_{2019} bằng

A. $\frac{1}{9} \left(\frac{10^{2012} - 10}{9} + 2019 \right).$

B. $\frac{10}{9} (10^{2019} - 1) + 2019.$

C. $\frac{1}{9}(10^{2019} - 1).$

D. $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{2020} - 10}{9} - 2019\right).$

Lời giải

Tác giả: Trịnh Thị Ánh Ngọc; Fb: Ngọc Trịnh

Chọn D

Nhận xét:

$$u_1 = 1 = 10 \cdot 0 + 1; u_2 = 11 = 10 \cdot 1 + 1 = 10 \cdot u_1 + 1; u_3 = 111 = 10 \cdot 11 + 1 = 10 \cdot u_2 + 1$$

....

$$u_{n+1} = 11...1 = 10 \cdot u_n + 1$$

$$\Rightarrow u_{n+1} + \frac{1}{9} = 10 \cdot u_n + \frac{10}{9} = 10 \cdot \left(u_n + \frac{1}{9}\right).$$

Khi đó ta đặt: $v_n = u_n + \frac{1}{9}$ ta được dãy số (v_n) : $\begin{cases} v_1 = \frac{10}{9} \\ v_{n+1} = 10 \cdot v_n \end{cases}$ là CSN có số hạng đầu: $v_1 = \frac{10}{9}$, công bội:

$$q = 10$$

$$\text{Tổng } n \text{ số hạng đầu của dãy } (v_n) \text{ là: } S'_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{10}{9} \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$

$$\text{Suy ra tổng } n \text{ số hạng đầu của dãy } (u_n) \text{ là: } S_n = \frac{10}{9} \cdot \frac{10^n - 1}{9} - n \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{10^n - 10}{9} - n\right)$$

$$\text{Khi đó, } S_{2019} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{10^{2020} - 10}{9} - 2019\right).$$

Cách 2:

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên; Fb: Nguyễn Trung Kiên.

$$9S_{2019} = 9 + 99 + \dots + 99\dots9 \text{ (2019 chữ số 9)} = (10 - 1) + (10^2 - 1) + \dots + (10^{2019} - 1)$$

$$= (10 + 10^2 + \dots + 10^{2019}) - 2019 = 10 \cdot \frac{1 - 10^{2019}}{1 - 10} - 2019 = \frac{10^{2020} - 10}{9} - 2019.$$

$$\text{Do đó, } S_{2019} = \frac{1}{9} \left[\frac{10^{2020} - 10}{9} - 2019 \right].$$

Câu 22. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}}{5 + (-4)^{n+1}}$ là

A. $-\frac{1}{4}.$

B. $-\infty.$

C. 4.

D. 0.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Minh Quân; Fb: Nguyễn Minh Quân

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}}{5 + (-4)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-1)^n \cdot 4^n}{5 - 4 \cdot (-4)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n + (-1)^n \cdot (-1)^n}{\frac{5}{(-4)^n} - 4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n + 1}{\frac{5}{(-4)^n} - 4} = \frac{0+1}{0-4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}}{5 + (-4)^{n+1}} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 23. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Với m là hằng số dương. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4mx + 2019} + x)$$

ta được kết quả bằng

A. $-2m$.

B. $\frac{1}{2m}$.

C. $2m$.

D. $-\frac{1}{2m}$.

Lời giải

Tác giả: Hoa Mùi; Fb: Hoa Mùi

Chọn C

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4mx + 2019} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4mx + 2019}{\sqrt{x^2 - 4mx + 2019} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4m + \frac{2019}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{4m}{x} + \frac{2019}{x^2}} - 1} = 2m.$$

Câu 24. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5$. Khi đó giá trị a là

A. 10.

B. -10.

C. -6.

D. 6.

Lời giải

Tác giả: Trần Vinh; Fb: Vinh Trần

Chọn B

Đặt $t = -x$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2 - at + 5} - t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-at + 5}{\sqrt{t^2 - at + 5} + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-a + \frac{5}{t}}{\sqrt{1 - \frac{a}{t} + \frac{5}{t^2}} + 1} = \frac{-a}{2}$$

Theo giả thiết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5 \Leftrightarrow \frac{-a}{2} = 5 \Leftrightarrow a = -10$.

Câu 25. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Tìm giới hạn sau $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{1 - \sqrt{2-x^2}}$.

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Lê; Fb: Lê phạm

Chọn D

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{1-\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)(1+\sqrt{2-x^2})}{(x^2-1)(\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1+\sqrt{2-x^2})}{(x+1)(\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1)} = \frac{2}{3}.$$

Câu 26. (HSG11 Chuyên Duyên Hải Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2018-2019) Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện $u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \forall n=1,2,3,\dots$ Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải

Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện $u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \forall n=1,2,3,\dots$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Ta có $u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{3}{5}u_{n+1} \geq u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \forall n=1,2,3,\dots$ (1)

Đặt $v_n = u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \forall n=1,2,3,\dots$

Từ (1) ta có $v_{n+1} \geq v_n, \forall n=1,2,3,\dots$ (2)

Vì dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn trên nên tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \forall n=1,2,3,\dots$

suy ra $v_n \leq M + \frac{3}{5}M = \frac{8}{5}M, \forall n=1,2,3,\dots$ (3)

Từ (2) và (3) ta thấy dãy (v_n) không giảm và bị chặn trên. Do đó, dãy (v_n) là dãy hội tụ.

Đặt $\lim v_n = a$ và $b = \frac{5}{8}a$. Ta sẽ chứng minh $\lim u_n = b$.

Thật vậy, vì $\lim v_n = a$ nên $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $|v_n - a| < \frac{\varepsilon}{5}, \forall n \geq n_0$

Mặt khác $|u_{n+1} - b| - \frac{3}{5}|u_n - b| < \left| (u_{n+1} - b) + \frac{3}{5}(u_n - b) \right| = \left| u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n - \frac{8b}{5} \right| < \frac{\varepsilon}{5},$

nên ta có $|u_{n+1} - b| < \frac{3}{5}|u_n - b| + \frac{\varepsilon}{5}, \forall n \geq n_0.$

$$\text{Suy ra } |u_{n_0+1} - b| < \frac{3}{5}|u_{n_0} - b| + \frac{\varepsilon}{5};$$

$$|u_{n_0+2} - b| < \frac{3}{5}|u_{n_0+1} - b| + \frac{\varepsilon}{5} < \left(\frac{3}{5}\right)^2 |u_{n_0} - b| + \frac{3}{5} \cdot \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5};$$

.....

$$|u_{n_0+k} - b| < \left(\frac{3}{5}\right)^k |u_{n_0} - b| + \frac{\varepsilon}{5} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} + \dots + \frac{3}{5} + 1 \right].$$

$$\Rightarrow |u_{n_0+k} - b| < \left(\frac{3}{5}\right)^k |u_{n_0} - b| + \frac{\varepsilon}{5} \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^k}{1 - \frac{3}{5}} < \left(\frac{3}{5}\right)^k |u_{n_0} - b| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vậy, ta có $|u_{n_0+k} - b| < \varepsilon$ với k đủ lớn, tức là $|u_n - b| < \varepsilon$ với n đủ lớn và $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý. Hay ta chứng minh được $\lim u_n = b$.

Vậy, dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn (đpcm).

Câu 27. (HSG12 HCM ngày 2 năm 2018-2019) Xét dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_1 = 3, a_2 = 7 \text{ và } a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

a) Chứng minh rằng $\frac{a_1^2}{7} + \frac{a_2^2}{7^2} + \dots + \frac{a_n^2}{7^n} < \frac{142}{3}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

b) Với mỗi $n \geq 1$, đặt $b_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$. Chứng minh rằng dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Tác giả: Hà Lê, Phạm Thị Phương Thúy; Fb: Ha Le, thuypham

Kiến thức sử dụng: Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai là phương trình sai phân dạng: $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$, $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = f(n)$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Nếu λ_1, λ_2 là hai nghiệm thực khác nhau thì $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$, trong đó A, B được xác định khi biết u_1, u_2 .

Ta có: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$.

Xét phương trình đặc trưng của dãy (a_n) là $x^2 - 3x + 1 = 0$ với hai nghiệm $x = \lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x = \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn $\lambda_1 + \lambda_2 = 3, \lambda_1 \lambda_2 = 1$.

Khi đó ta có $a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$.

Với $n = 1$ ta có $a_1 = A\lambda_1 + B\lambda_2 \Leftrightarrow A\lambda_1 + B\lambda_2 = 3$ (1).

Với $n = 2$ ta có $a_2 = A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 \Leftrightarrow A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 = 7$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A=1, B=1$ và $a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n \forall n \geq 1$.

Ta có $\frac{a_n^2}{7^n} = \frac{(\lambda_1^n + \lambda_2^n)^2}{7^n} = \left(\frac{\lambda_1^2}{7}\right)^n + \left(\frac{\lambda_2^2}{7}\right)^n + \frac{2}{7^n}, \forall n \geq 1$

Đặt $\varphi_1 = \frac{\lambda_1^2}{7}, \varphi_2 = \frac{\lambda_2^2}{7}$. Có $\varphi_1, \varphi_2 \in (0;1)$ và $\varphi_1 + \varphi_2 = 1, \varphi_1 \varphi_2 = \frac{1}{49}, \frac{a_n^2}{7^n} = \varphi_1^n + \varphi_2^n + \frac{2}{7^n}, \forall n \geq 1$

Ta có
$$\frac{a_1^2}{7} + \frac{a_2^2}{7^2} + \dots + \frac{a_n^2}{7^n} = (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \dots + \varphi_1^n) + (\varphi_2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_2^n) + \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{7^n}\right)$$
$$< \frac{\varphi_1}{1-\varphi_1} + \frac{\varphi_2}{1-\varphi_2} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_1} + \frac{\varphi_2}{1-\varphi_2} + \frac{1}{3} = \frac{142}{3} \quad \forall n \geq 1 \text{ (đpcm).}$$

b) Trước hết ta chứng minh $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = 5$ với mọi $n \geq 1$ (bằng phương pháp quy nạp).

Với $n=1$ mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đã cho đúng với $n=k$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$), ta có $a_k a_{k+2} - a_{k+1}^2 = 5$.

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$. Thật vậy:

$$a_{k+1} a_{k+3} - a_{k+2}^2 = a_{k+1} (3a_{k+2} - a_{k+1}) - a_{k+2}^2 = a_{k+2} (3a_{k+1} - a_{k+2}) - a_{k+1}^2 = a_{k+2} \cdot a_k - a_{k+1}^2 = 5 \text{ (đpcm).}$$

Ta có $\frac{1}{a_{i+1} a_{i+2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a_i a_{i+2} - a_{i+1}^2}{a_{i+1} a_{i+2}} = \frac{1}{5} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} \right), \forall i \geq 1$.

Ta có thể định nghĩa thêm $a_0 = 2$ thì dãy số vẫn thỏa mãn hệ thức truy hồi.

Từ đó $b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_{i+1} a_{i+2}} = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right), \forall n \geq 1$.

Theo câu a) ta có $a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n, \forall n$. Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{3} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{-5+3\sqrt{5}}{30} \text{ (đpcm).}$

Câu 28. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Tính giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} + \cos x - 3}{x^2}$

Lời giải

Tác giả: Đỗ Văn Dương ; Fb: Dương Đỗ Văn

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} + \cos x - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2 + \cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4} - 2)(\sqrt{x^2+4} + 2)}{x^2(\sqrt{x^2+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}, \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2} \cdot 2} \cdot \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2} \cdot 2} = -\frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} + \cos x - 3}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 29. (HSG11 Hà Tĩnh 2018-2019) Tùy theo giá trị của tham số m , tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right).$$

Lời giải

Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right).$

▣ Nếu $m = -3$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} - 3x \right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x \right) - \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} \right)^3 - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} \right)^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} + x^2} - \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} \right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - 2x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 + 2x^2 + 1 - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} \right)^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} + x^2} - \frac{4x^2 + 2x + 3 - 4x^2}{|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left[\left(\sqrt[3]{1 + 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1 \right]} - \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2 \right)} \right] \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

▣ Nếu $m < -3$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x \right) - \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x \right) + (m+3)x \right] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

▣ Nếu $m > -3$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x \right) - \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x \right) + (m+3)x \right]$$

$$= -\infty.$$

Câu 30. (HSG12 tỉnh KonTum năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}$.

Lời giải

Tác giả: Ngọc Thanh; Fb: Ngọc Thanh

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1) \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Ta có $(2) \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + 2$.

Suy ra (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 2$ và công sai $d = 2$.

Nên $v_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$.

Khi đó: $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1$

$$= v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + u_1 = 2((n-1) + (n-2) + \dots + 1) + 1 = 2 \frac{n(n-1)}{2} + 1 = n(n-1) + 1.$$

Do đó: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1) + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = 1$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = 1$.

Câu 31. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019) Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{2018}(2 - \cos 2x)}{x^2}$.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{2018}(2 - \cos 2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{2018} e^{\ln(2 - \cos 2x)}}{x^2}$$

$$= 2 \log_{2018} e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + 2 \sin^2 x)}{2 \sin^2 x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right]$$

$$= 2 \log_{2018} e$$

Câu 32. (HSG12 tỉnh Thái Nguyên năm 2018-2019) Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = n^2 u_n, n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm giới hạn $\lim(n^2 u_n)$.

Lời giải

Tác giả: HoàngQuỳên ; Fb: HoàngQuỳên

Theo giả thiết ta có :

$$\begin{aligned}
 (n+1)^2 u_{n+1} &= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + u_{n+1} = n^2 u_n + u_{n+1} \\
 \Rightarrow (n^2 + 2n) u_{n+1} &= n^2 u_n \Rightarrow (n+2) u_{n+1} = n u_n \\
 \Rightarrow u_{n+1} &= \frac{n}{n+2} u_n = \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n+1} u_{n-1} = \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} u_{n-2} \\
 &= \dots = \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} u_1 = \frac{4}{(n+2)(n+1)} \\
 \Rightarrow u_n &= \frac{4}{n(n+1)} \Rightarrow n^2 u_n = \frac{4n}{n+1} \Rightarrow \lim n^2 u_n = \lim \left(\frac{4n}{n+1} \right) = 4
 \end{aligned}$$

Câu 33. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$.

Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)}$ bằng

A. 10.

B. $\frac{5}{3}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Tác giả: Trịnh Văn Điệp; Fb: Trịnh Văn Điệp

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$ suy ra được giới hạn có dạng vô định $0/0$.

Khi đó ta có $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 10) = 0 \Rightarrow f(1) = 10$.

$$\begin{aligned}
 \text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - 10}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{4f(x) + 9} + 3} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{4f(x) + 9} + 3} = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{4f(1) + 9} + 3} = 1.
 \end{aligned}$$

Câu 34. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \frac{2}{3}$. Giá trị của a

thuộc khoảng nào sau đây:

A. $(-4; -1)$.B. $(-7; -4)$.C. $(1; 4)$.D. $(3; 5)$.

Lời giải

Tác giả: Giáp Văn Khương; Fb: Giáp Văn Khương

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{|x| \left(a - \frac{17}{|x|} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{\left(a - \frac{17}{|x|} \right)} = \frac{2}{a}.$$

Vậy ta có $\frac{2}{a} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = 3$. Vậy $a \in (1; 4)$.

Câu 35. (HSG11 Bắc Ninh 2018-2019) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 2019; u_2 = 2020; u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Tính $\lim u_n$.

Lời giải

Tác giả: Đình Công Huấn ; Fb: Đình Công Huấn

$$\text{Ta có: } u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3} \Leftrightarrow 3(u_{n+1} - u_n) = -(u_n - u_{n-1}) (*)$$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n, n \geq 1$. khi đó $v_1 = u_2 - u_1 = 1$

$$(*) \Leftrightarrow 3v_n = -v_{n-1} \Rightarrow (v_n) \text{ là cấp số nhân công bội } q = -\frac{1}{3}.$$

Ta có:

$$v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_2 = u_3 - u_2$$

$$v_3 = u_4 - u_3$$

.....

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

cộng vế với vế ta được

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = u_{n+1} - u_1 \Leftrightarrow v_1 \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{4}{3}} = u_{n+1} - 2019 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] + 2019$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] + 2019 \Rightarrow \lim u_n = \lim \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] + 2019 = \frac{8079}{4}.$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \frac{8079}{4}.$$

Câu 36. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019) Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{C_{2018}^0 + C_{2018}^2 x^2 + C_{2018}^4 x^4 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018} - 2^{2017}}{x - 1}.$$

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Phạm Minh Nguyên ; Fb: Nguyen Huynh

$$S_1 = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018} = (1+x)^{2018}$$

$$S_2 = C_{2018}^0 - C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 - \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018} = (1-x)^{2018}$$

$$\Rightarrow S = C_{2018}^0 + C_{2018}^2 + C_{2018}^4 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018} = \frac{1}{2} \left[(1+x)^{2018} + (1-x)^{2018} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{C_{2018}^0 + C_{2018}^2 + C_{2018}^4 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018} - 2^{2017}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)^{2018} + (1-x)^{2018} - 2^{2018}}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(1+x)^{2018} - 2^{2018}}{2(x-1)} + \frac{(x-1)^{2017}}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x-1) \left[(1+x)^{2017} + (1+x)^{2016} \cdot 2 + (1+x)^{2015} \cdot 2^2 + \dots + 2^{2017} \right]}{2(x-1)} + \frac{(x-1)^{2017}}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(1+x)^{2017} + (1+x)^{2016} \cdot 2 + (1+x)^{2015} \cdot 2^2 + \dots + 2^{2017}}{2} + \frac{(x-1)^{2017}}{2} \right]$$

$$= 2018 \cdot 2^{2016}$$

Câu 37. (HSG11 Thuận Thành 2018-2019) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{4n^2+3n} - 2n}$?

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{4n^2+3n} - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{4n^2+3n} + 2n)}{3n(\sqrt{n^2+n} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+3n} + 2n}{3(\sqrt{n^2+n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2}{3\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{2}{3}.$$

Câu 38. (HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019) Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Mến; Fb: Nguyễn Văn Mến.

Phản biện: Hồng Vân.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} + \frac{2 - \sqrt{5-x^2}}{x-1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1) \left((\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + \frac{x^2-1}{(x-1)(2+\sqrt{5-x^2})} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} + \frac{x+1}{2+\sqrt{5-x^2}} \right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

Câu 39. (HSG12 Hà Nội năm 2018-2019) Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}; n \in \mathbb{N}^*$$

a) Chứng minh dãy số (a_n) là dãy số giảm.

b) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Lời giải

Tác giả: Công Phương; Fb: Nguyễn Công Phương

a) Xét hiệu $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} - a_n = \frac{-a_n(a_n - 1)^2}{a_n^2 - a_n + 1}$.

Từ cách xác định dãy số ta có $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $a_n^2 - a_n + 1 > 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (a_n) là dãy số giảm.

b) Ta có
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 1 + a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1} = 1 + \frac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1}.$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n - 1} = a_n + \frac{1}{a_n - 1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1}$$

$$\text{Suy ra } b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_1 - 1} = \frac{1}{a_{n+1} - 1} + 2. \quad (1)$$

Lại có: Dãy số (a_n) là dãy số giảm, bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn

$$\text{Giả sử } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = a \Rightarrow a = \frac{a^2}{a^2 - a + 1} \Rightarrow a = 0 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$.

Câu 40. (HSG12 tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019) Cho dãy (x_n) xác định bởi

$$x_1 = x_2 = 1, x_n \cdot x_{n+2} = x_{n+1}^2 + 3 \cdot (-1)^{n-1}.$$

1) Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy (x_n) đều là số nguyên

2) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$.

Lời giải

1) Ta có từ giả thiết $x_n \cdot x_{n+2} = x_{n+1}^2 + 3 \cdot (-1)^{n-1}$, $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = x_n^2 + 3 \cdot (-1)^{n-2}$ từ đây suy ra

$$x_n \cdot x_{n+2} - x_{n+1}^2 = x_n^2 - x_{n-1} \cdot x_{n+1}, \forall n = 2, 3, \dots$$

$$\text{Hay suy ra } \frac{x_{n+2} - x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_{n-1}} = \dots = \frac{x_3 - x_1}{x_2} = 3$$

Từ đó ta có: $x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Mà $x_1 = 1, x_2 = 1$ nên ta có $x_n \in \mathbb{Z}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

2) Dãy đã cho là dãy sai phân thuần nhất cấp hai nên có phương trình đặc trưng là $x^2 - 3x - 1 = 0$ với hai nghiệm $t_1 > 0 > t_2 > -1$ nên có công thức tổng quát là $x_n = At_1^n + Bt_2^n$.

$$\text{Khi đó, } x_1 + x_2 + \dots + x_n = A \cdot \frac{t_1^{n+1} - 1}{t_1 - 1} + B \cdot \frac{t_2^{n+1} - 1}{t_2 - 1}.$$

$$\text{Từ đó ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{At_1^{n+1} + Bt_2^{n+1}}{A \cdot \frac{t_1^{n+1} - 1}{t_1 - 1} + B \cdot \frac{t_2^{n+1} - 1}{t_2 - 1}} = t_1 - 1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Câu 41. (HSG12 THPT Thuận Thành năm 2018-2019) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n}$.

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n)}{3n(\sqrt{n^2 + n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n}{3(\sqrt{n^2 + n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2}{3\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{2}{3}.$$

Câu 42. (HSG12 tỉnh Lào Cai năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = 3 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}u_n + 1}{u_{n+1} + u_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Nguyệt ; Fb: Nguyetle

$$\text{Từ } u_{n+2} = \frac{u_{n+1}u_n + 1}{u_{n+1} + u_n} \text{ được } u_{n+2} + 1 = \frac{(u_{n+1} + 1)(u_n + 1)}{u_{n+1} + u_n} \text{ và } u_{n+2} - 1 = \frac{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)}{u_{n+1} + u_n}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{u_{n+2} - 1}{u_{n+2} + 1} = \frac{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)}{(u_{n+1} + 1)(u_n + 1)}.$$

$$\text{Đặt } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \text{ ta có } v_{n+2} = v_n \cdot v_{n+1} \text{ nên } |v_{n+2}| = |v_n| \cdot |v_{n+1}|.$$

Đặt $x_n = \ln|v_n|$ ta được $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Phương trình đặc trưng $t^2 - t - 1 = 0$ có nghiệm $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\text{Vậy } x_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

$$\text{Từ } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{1}{3} \\ v_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\ln 3 \\ x_2 = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \beta = -\ln 3 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \alpha + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \beta = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \approx -0.38 \\ \beta \approx 0.78 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| > 1; \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1 \text{ nên } \lim x_n = \lim \left[\alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = -\infty$$

Suy ra $\lim |v_n| = \lim \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = 0$. Vậy dãy (u_n) có giới hạn là 1.

Câu 43. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \sqrt[n+1]{u_n^n + \frac{1}{2019^n}} \end{cases}.$$

Tìm công thức số hạng tổng quát và tính $\lim u_n$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thanh Sơn ; Fb: Trần Thanh Sơn

Phản biện: Dương Hà Hải; Fb: Dương Hà Hải

Ta có $u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + \frac{1}{2019^n} \Rightarrow u_{n+1}^{n+1} - u_n^n = \frac{1}{2019^n}$ do đó

$$\begin{cases} u_2^2 - u_1^1 = \frac{1}{2019^1} \\ u_3^3 - u_2^2 = \frac{1}{2019^2} \\ \dots \\ u_n^n - u_{n-1}^{n-1} = \frac{1}{2019^{n-1}} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } u_n^n - u_1^1 = \frac{1}{2019^1} + \frac{1}{2019^2} + \dots + \frac{1}{2019^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2019} \right)^{n-1}}{2018}.$$

$$\text{Vậy } u_n = \sqrt[n]{2019 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2019} \right)^{n-1}}{2018}}.$$

Ta có

$$1 < u_n = \sqrt[n]{2019 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2019}\right)^{n-1}}{2018}} < \sqrt[n]{2020} = \sqrt[n]{1.1 \dots 1.2020} < \frac{1+1+\dots+1+2020}{n} = 1 + \frac{2019}{n}$$

(AM-GM cho $n-1$ số 1 và số 2020).

Mặt khác $\lim \left(1 + \frac{2019}{n}\right) = 1$. Vậy $\lim u_n = 1$.

Câu 44. (HSG11 Hà Tĩnh 2018-2019) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{5u_n+1}+1}, n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Đặt $S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2$. Chứng minh dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải

Tác giả: Đặng Ngọc Sáng ; Fb: dang ngoc sang

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Ta có: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{5u_n+1}+1} = \frac{2(\sqrt{5u_n+1}-1)}{5} \Leftrightarrow 5u_{n+1}+2 = 2\sqrt{5u_n+1}$

$$25u_{n+1}^2 + 20u_{n+1} + 4 = 20u_n + 4 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = \frac{4}{5}(u_n - u_{n+1})$$

Do đó: $S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = u_1^2 + \frac{4}{5}(u_1 - u_n) = \frac{9}{5} - \frac{4}{5}u_n$.

Chứng minh (u_n) là dãy giảm.

Thật vậy: $u_2 = \frac{2(\sqrt{6}-1)}{5} < u_1$. Giả sử $u_k > u_{k+1}$. Ta sẽ chứng minh $u_{k+1} > u_{k+2}$

$$u_{k+1} = \frac{2(\sqrt{5u_k+1}-1)}{5} \text{ và } u_{k+2} = \frac{2(\sqrt{5u_{k+1}+1}-1)}{5} \Rightarrow u_{k+1} > u_{k+2}.$$

Vì (u_n) là dãy giảm mà $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ nên tồn tại $\lim u_n = l$ ($l \geq 0$ và l hữu hạn). Do đó dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn.

Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức $5u_{n+1}+2 = 2\sqrt{5u_n+1}$ ta có: $5l+2 = 2\sqrt{5l+1} \Leftrightarrow l = 0$.

Vậy $\lim S_n = \frac{9}{5}$.

Câu 45. (HSG11 Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2018 \\ (3n^2 + 9n)u_{n+1} = (n^2 + 5n + 4)u_n, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn $\lim \left(\frac{3^n}{n^2} u_n \right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{1}{3} \frac{(n+1)^2 + 3(n+1)}{n^2 + 3n} u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2 + 3(n+1)} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n^2 + 3n}.$$

Đặt $v_n = \frac{u_n}{n^2 + 3n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n \Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{3}$ và số hạng đầu

$$v_1 = \frac{u_1}{4} = \frac{2018}{4} = \frac{1009}{2} \Rightarrow v_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n^2 + 3n).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \lim \left(\frac{3^n}{n^2} u_n \right) &= \lim \left(\frac{3^n}{n^2} u_n \right) = \lim \left(\frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n^2 + 3n) \cdot \frac{3^n}{n^2} \right) \\ &= \lim \left(\frac{3027}{2} \cdot \frac{n^2 + 3n}{n^2} \right) = \frac{3027}{2} \lim \left(1 + \frac{3}{n} \right) = \frac{3027}{2}. \end{aligned}$$

Câu 46. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho dãy số xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát u_n và tính giới hạn $\lim \frac{2n^2 + 3n + 1}{u_n}$

Lời giải

Số hạng tổng quát có dạng $u_n = 4^n (an + b), n \in \mathbb{N}^*$ thật vậy

Ta có $u_1 = 2, u_2 = 20 \Rightarrow a = \frac{3}{4}; b = \frac{-1}{4} \Rightarrow u_n = 4^{n-1} (3n - 1) \Rightarrow u_{n+1} = u_n = 4^n (3n + 2)$ thay vào công thức $u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n$ thấy thỏa mãn.

$$\text{Do đó: } \lim \frac{2n^2 + 3n + 1}{u_n} = \lim \frac{2n^2 + 3n + 1}{4^{n-1} (3n - 1)} = 4 \lim \frac{(2n + 1)(n + 1)}{4^n (3n - 1)} = 4 \lim \left(\frac{n}{4^n} + \frac{1}{4^n} \right) \left(\frac{n + 1}{3n - 1} \right) = 0$$

Câu 47. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2018^2}{u_n^2 - u_n + 4036}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2 + 2018}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim v_n$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Thuần; Fb: Xu Xu

Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n = 2019, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy, với $n = 1$ thì $u_1 = 2019$.

$$\text{Với } n=2 \text{ thì } u_2 = \frac{u_1^3 + 2018^2}{u_1^2 - u_1 + 4036} = \frac{2019^3 + 2018^2}{2019^2 - 2019 + 4036} = 2019.$$

Giả sử khẳng định đúng với $n = k (k \geq 2, k \in \mathbb{N})$ tức là $u_k = 2019$. Khi đó

$$u_{k+1} = \frac{u_k^3 + 2018^2}{u_k^2 - u_k + 4036} = \frac{2019^3 + 2018^2}{2019^2 - 2019 + 4036} = 2019.$$

Vậy $u_n = 2019, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Khi đó } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2 + 2018} = \frac{n}{2019^2 + 2018}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Vậy } \lim v_n = \lim \frac{n}{2019^2 + 2018} = +\infty, \text{ vì } \lim n = +\infty; \lim \frac{1}{2019^2 + 2018} = \frac{1}{2019^2 + 2018}.$$

vietanhda1983@gmail.com

Câu 48. (HSG11 Hậu Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2018 \\ (3n^2 + 9n)u_{n+1} = (n^2 + 5n + 4)u_n, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn $\lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{1 + 3(n+1)}{3(n^2 + 3n)} u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2 + 3(n+1)} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n^2 + 3n}$$

Đặt $v_n = \frac{u_n}{n^2 + 3n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n \Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{3}$ và số hạng đầu

$$v_1 = \frac{u_1}{4} = \frac{2018}{4} = \frac{1009}{2} \Rightarrow v_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n^2 + 3n)$$

$$\text{Khi đó } \lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right) = \lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right) = \lim \left(\frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n^2 + 3n) \cdot \frac{3^n}{n^2} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{3027}{2} \cdot \frac{n^2 + 3n}{n^2} \right) = \frac{3027}{2} \lim \left(1 + \frac{3}{n} \right) = \frac{3027}{2}.$$

Câu 49. (HSG11 Nghệ An 2018-2019) Cho dãy số (u_n) , biết

$$u_1 = 12, \frac{2u_{n+1}}{n^2 + 5n + 6} = \frac{u_n + n^2 - n - 2}{n^2 + n} \text{ với } n \geq 1.$$

Tìm $\lim \frac{u_n}{2n^2 + 1}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trần Quyền; Fb: Nguyễn Trần Quyền

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2u_{n+1}}{n^2+5n+6} &= \frac{u_n+n^2-n-2}{n^2+n} \Leftrightarrow \frac{2u_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{u_n}{n(n+1)} + \frac{(n+1)(n-2)}{n(n+1)} \\ \Leftrightarrow \frac{2u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)} &= \frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} + \frac{(n-2)}{n(n+1)(n+2)} \\ \Leftrightarrow \frac{2u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)} &= \frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \right] (*) \end{aligned}$$

Đặt $v_n = \frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$, từ (*) ta có $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ nên (v_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$,

$v_1 = \frac{1}{2}$ suy ra

$$v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow u_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n} + n^2 + 3n + 2$$

Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n(2n^2+1)} + \frac{n^2+3n+2}{2n^2+1} \right]$$

$$\text{Ta có } 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n > C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad (n \geq 3)$$

Do đó ta có bất đẳng thức sau

$$0 < \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n(2n^2+1)} < \frac{6n(n+1)^2(n+2)}{n(n-1)(n-2)(2n^2+1)} \quad (n \geq 3)$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n(n+1)^2(n+2)}{n(n-1)(n-2)(2n^2+1)} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n(2n^2+1)} = 0$$

$$\text{hơn nữa } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n+2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2n^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Câu 50. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2018 \\ (3n^2 + 9n)u_{n+1} = (n^2 + 5n + 4)u_n, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{n^2} u_n \right)$.

Lời giải

Ta có:

$$(3n^2 + 9n)u_{n+1} = (n^2 + 5n + 4)u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)(n+4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u_n}{n(n+3)}.$$

Đặt $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{(n+1)(n+4)}$, $v_n = \frac{u_n}{n(n+3)}$, suy ra $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

Để thấy (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = \frac{u_1}{1(1+3)} = \frac{1009}{2} \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow v_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3027}{2 \cdot 3^n}.$

Mặt khác $v_n = \frac{u_n}{n(n+3)} \Rightarrow u_n = \frac{3027(n^2 + 3n)}{2 \cdot 3^n}.$

Như vậy ta có:

$$\lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right) = \lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot \frac{3027(n^2 + 3n)}{2 \cdot 3^n} \right) = \lim \left(\frac{3027n^2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{2n^2} \right) = \frac{3027}{2}.$$

Câu 51. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) . Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3^n}.$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn xuân Giao; FB: giaonguyen

Phản biện: Vũ Ngọc Tân; FB: Vũ Ngọc Tân

Ta có $u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 2(u_n - n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $v_n = u_n - n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó ta có dãy (v_n) thỏa mãn $\begin{cases} v_1 = 2018 \\ v_{n+1} = 2v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

là một cấp số nhân có công bội $q = 2 \Rightarrow v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 2018 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow u_n = 2018 \cdot 2^{n-1} + n$.

Vậy $u_n = 2018 \cdot 2^{n-1} + n$.

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2018 \cdot 2^{n-1} + n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1009 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n}{3^n} \right) = 0$

(Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3^n} = 0$).

Câu 52. (HSG11 Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) xác định

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}(u_n^2 - u_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn sau $\lim \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right)$.

Lời giải

1. Tính giới hạn $\lim \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right)$.

*) Đặt $f(x) = x + \frac{x(x-1)}{2018}$. Theo giả thiết ta có $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \geq 1$. (1)

Nhận thấy nếu $x \geq 2$ thì $f(x) > 2$, mà $u_1 = 2$ nên từ (1) suy ra $u_n \geq 2, \forall n \geq 1$.

Do đó $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}u_n(u_n - 1) > 0, \forall n \geq 1$, nên dãy (u_n) là dãy tăng.

Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên, khi đó dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = L$, ta có $L \geq 2$ do $u_n \geq 2, \forall n \geq 1$. Lấy giới hạn hai vế của (1), ta được

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(u_n + \frac{u_n(u_n - 1)}{2018} \right) \Leftrightarrow L = L + \frac{L(L-1)}{2018} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = 1 \end{cases} \text{ (vô lý vì } L \geq 2 \text{)}.$$

Như vậy dãy (u_n) không bị chặn trên, do đó $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = 0$.

*) Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}(u_n^2 - u_n) \Leftrightarrow u_n(u_n - 1) = 2018(u_{n+1} - u_n)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} &= \frac{u_n(u_n - 1)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = \frac{2018(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = \frac{2018((u_{n+1} - 1) - (u_n - 1))}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} \\ &= 2018 \cdot \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S_n = \frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$$

$$\Rightarrow S_n = 2018 \left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2018 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \Rightarrow \lim S_n = 2018.$$

Câu 53. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$

Lời giải

Tác giả: Vũ Ngọc Tân ; Fb: Vũ Ngọc Tân.

Phản biện: Đỗ Hải Thu; Fb: Đỗ Hải Thu.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2x+1} - (x+1)}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{3x+1} - (x+1)}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+1 - (x+1)^2}{x^2 (\sqrt{2x+1} + (x+1))} - \frac{3x+1 - (x+1)^3}{x^2 (\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} \cdot (x+1) + (x+1)^2)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x^2}{x^2 (\sqrt{2x+1} + (x+1))} - \frac{-x^3 - 3x^2}{x^2 (\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} \cdot (x+1) + (x+1)^2)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\sqrt{2x+1} + x + 1} - \frac{-x - 3}{(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} \cdot (x+1) + (x+1)^2)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } L = \frac{1}{2}.$$

Câu 54. (HSG12 tỉnh Hải Phòng năm 2018-2019) Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_n^2 + 5u_n} + u_n), n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{cases}$$

Ta thành lập dãy số $\{v_n\}$ với $v_n = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2}$. Chứng minh rằng dãy số $\{v_n\}$ có giới hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải

Tác giả: Nhóm 5 tổ 8 nhóm strong team toán vd – vdc.

Ta dễ có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ngoài ra $u_{n+1} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_n^2 + 5u_n} + u_n) > \frac{1}{2} (\sqrt{u_n^2} + u_n) = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó dãy $\{u_n\}$ tăng.

Giả sử $\{u_n\}$ bị chặn, khi đó $\lim u_n = a, a \geq 3 = u_1, a \in \mathbb{R}$. Cho qua giới hạn hệ thức

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_n^2 + 5u_n} + u_n) \Rightarrow a = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 5a} + a) \Rightarrow a = 0 \text{ vô lý.}$$

Từ đó suy ra $\{u_n\}$ không bị chặn và $\lim u_n = +\infty, \lim \frac{1}{u_n} = 0$.

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{1}{2} (\sqrt{u_n^2 + 5u_n} + u_n) \Leftrightarrow 2u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 5u_n} \Leftrightarrow 4u_{n+1}^2 - 4u_{n+1}u_n = 5u_n, \text{ (vì}$$

$$u_{n+1} > u_n > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{u_{n+1}^2} = 4 \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \Rightarrow v_n = \frac{1}{u_1^2} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} \right)$$

Suy ra $\lim v_n = \frac{1}{9} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{45}$.

Câu 55. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$

B. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2}$

C. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+4}{x^2-4x+4}$

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+4}{x-2}$

Lời giải

Tác giả: Hồ Thanh Nhân; Fb: Nhan Ho Thanh

Chọn D

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+4}{x^2-4x+4} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty.$$

Câu 56. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Tìm giá trị của m để $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{mx-m+1}-1}{x-1} = 2$.

A. $m = -4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 0$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Kim Loan; FB: Kim Loan.

Chọn D

Theo đề ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{mx-m+1}-1}{x-1} = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx-m}{(x-1)(\sqrt{mx-m+1}+1)} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m}{\sqrt{mx-m+1}+1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = 4.$$

Vậy $m = 4$.

Câu 57. (HSG11 Hậu Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) xác định

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}(u_n^2 - u_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Tính $\lim \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Quý Thành; Fb: Thành Nguyễn

Theo giả thiết ta có: $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2018} + u_n$ mà $u_1 = 2$ suy ra $2 = u_1 < u_2 < u_3 < \dots$

Do đó dãy (u_n) là dãy tăng.

Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ với $L \geq 2$, khi đó:

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 2017u_n}{2018} \Leftrightarrow L = \frac{L^2 + 2017L}{2018} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = 1 \end{cases} \text{ (Vô lý do } L \geq 2 \text{)}.$$

Vậy dãy (u_n) không bị chặn trên hay $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = 0$.

$$\text{Ta có: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}(u_n^2 - u_n) \Leftrightarrow u_n(u_n - 1) = 2018(u_{n+1} - u_n)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} &= \frac{u_n(u_n - 1)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = \frac{2018(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} \\ &= \frac{2018(u_{n+1} - 1 - (u_n - 1))}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = 2018 \cdot \left[\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S_n = \frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}.$$

$$\Rightarrow S_n = 2018 \left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2018 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \Rightarrow \lim S_n = 2018.$$

$$\text{Vậy } \lim \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right) = 2018.$$

Câu 58. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho dãy số (u_n) xác định

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2018}(u_n^2 - u_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Tính $\lim \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{1}{3} \frac{(n+1)^2 + 3(n+1)}{n^2 + 3n} u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2 + 3(n+1)} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n^2 + 3n}$$

Đặt $v_n = \frac{u_n}{n^2 + 3n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n \Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{3}$ và số hạng đầu

$$v_1 = \frac{u_1}{4} = \frac{2018}{4} = \frac{1009}{2} \Rightarrow v_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n^2 + 3n)$$

$$\text{Khi đó } \lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right) = \lim \left(\frac{3^n}{n^2} \cdot u_n \right) = \lim \left(\frac{1009}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n^2 + 3n) \cdot \frac{3^n}{n^2} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{3027}{2} \cdot \frac{n^2 + 3n}{n^2} \right) = \frac{3027}{2} \lim \left(1 + \frac{3}{n} \right) = \frac{3027}{2}$$

Chuyên đề

13

Hàm số liên tục, đạo hàm

Câu 1. (HSG11 Bắc Ninh 2018-2019) Tìm a để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{(a+2)x}{4} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

liên tục tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Tác giả: Đàm Thị Lan Anh ; Fb: Đàm Anh

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$f(1) = \frac{a+2}{4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(a+2)x}{4} = \frac{a+2}{4};$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x+1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow \frac{a+2}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = -1$.

Vậy $a = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.**Câu 2. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019)** Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{1}{6 + \tan^2 x}$

B. $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

C. $y = \sqrt{x^4 - 7x^2 - 8}$

D. $y = \frac{\sin 3x - 1}{2 \sin x - \cos x - 3}$

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Anh Kiệt; Fb: Huỳnh Kiệt

Chọn D

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta xét:

Câu A: $y = \frac{1}{6 + \tan^2 x} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$

Câu B: $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{x+3}{|x-2|} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Câu C: $y = \sqrt{x^4 - 7x^2 - 8} = \sqrt{(x^2+1)(x^2-8)} \Rightarrow D = (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$

Câu D: Ta có: $-\sqrt{2^2+(-1)^2}-3 \leq 2\sin x - \cos x - 3 \leq \sqrt{2^2+(-1)^2}-3 \Leftrightarrow -\sqrt{5}-3 \leq 2\sin x - \cos x - 3 \leq \sqrt{5}-3$
 $\Rightarrow 2\sin x - \cos x - 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

Theo định lý thừa nhận ở sgk thì hàm lượng giác liên tục trên tập xác định của nó nên câu D hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Câu 3. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ ax + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ với a là tham số. Khi hàm số liên tục tại $x=1$ thì giá trị của a bằng
A. 0. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đức Duẩn; Fb: Duan Nguyen Duc

Chọn D

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+) Có $f(1) = 3$.

+) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 2) = a + 2.$$

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 2 = 3 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $a=1$ thì hàm số liên tục tại $x=1$.

Câu 4. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Biết rằng phương trình $x^5 + x^3 + 3x - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm x_0 , mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x_0 \in (1; 2)$. **B.** $x_0 \in (0; 1)$. **C.** $x_0 \in (-1; 0)$. **D.** $x_0 \in (-2; -1)$.

Lời giải

Tác giả: Trần Công Sơn; Fb: Trần Công Sơn

Chọn B

Đặt $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 1$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -4 < 0$.

Nên tồn tại $x_0 \in (0;1)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Câu 5. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{\sin x - 2}{\sin x - m}$. Tìm các giá trị m

để $y' > 0$, với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $m > 2$.

B. $m \leq -1$ hoặc $0 \leq m < 2$.

C. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Tác giả: Phan Minh Quốc Vinh; Fb: Vinh Phan

Chọn B

Trường hợp $|m| > 1$:

Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ và $y' = \cos x \cdot \frac{2-m}{(\sin x - m)^2}$.

Khi đó, $y' > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Leftrightarrow 2-m > 0 \Leftrightarrow m < 2$ (vì $\cos x > 0, (\sin x - m)^2 > 0$ với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$).

Kết hợp với điều kiện m đang xét ta có $m < -1$ hoặc $1 < m < 2$.

Trường hợp $|m| \leq 1$:

Điều kiện $\sin x \neq m$. Ta có $y' = \cos x \cdot \frac{2-m}{(\sin x - m)^2}$.

Khi đó, $y' > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m > 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \leq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ 0 \leq m < 2 \end{cases} \end{cases}$ (vì $\cos x > 0, (\sin x - m)^2 > 0$ và

$\sin x \in (-1; 0)$ với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$).

Kết hợp với điều kiện đang xét ta có $m = -1$ hoặc $0 \leq m \leq 1$.

Tổng hợp kết quả hai trường hợp đang xét, giá trị m cần tìm là $m \leq -1$ hoặc $0 \leq m < 2$.

Cách trắc nghiệm:

Nhận xét: Bài toán trắc nghiệm nên có thể làm theo cách:

Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Rightarrow t \in (-1; 0)$.

Ta có $y = \frac{t-2}{t-m}$, $t \in (-1; 0)$, và $y' = \frac{-m+2}{(t-m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (-1; 0) \\ -m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty) \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup [0; 2)$.

Câu 6. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)(x + 3) \dots (x + 2018)$ và $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Tính $g'(1)$

- A. 2. B. -2019! C. 0. D. 2019!.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Trăng; Fb: Trăng Nguyễn

Chọn D

Ta có $g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$ (1).

Mặt khác $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)(x + 3) \dots (x + 2018)$ suy ra $f(1) = 0$.

$$f'(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+2018) + (x-1)[(x+2) \dots (x+2018) + (x+1)(x+3) \dots (x+2018) + \dots + (x+1)(x+2) \dots (x+2017)]$$

Suy ra $f'(1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2019 = 2019!$

Thay vào (1) suy ra $g'(1) = 2019!$

Câu 7. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho biết $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{(2ax-b+1)\sqrt{4x-1}}{(4x-1)^2}$,

với a, b là số nguyên. Tính giá trị biểu thức $P = 3b - 2a$

- A. $P = 29$. B. $P = -13$. C. $P = 19$. D. $P = 23$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tường Linh; Fb: Khoisx Bvkk

Chọn C

$$\begin{aligned} * \text{ Ta có } \left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' &= \frac{(3-2x)' \cdot \sqrt{4x-1} - (3-2x) \cdot (\sqrt{4x-1})'}{4x-1} \\ &= \frac{-2 \cdot \sqrt{4x-1} - \frac{(3-2x) \cdot 2}{\sqrt{4x-1}}}{4x-1} = \frac{-2(4x-1) - 2(3-2x)}{(4x-1)\sqrt{4x-1}} = \frac{(-4x-4)\sqrt{4x-1}}{(4x-1)^2} \end{aligned}$$

$$* \text{ Suy ra } \begin{cases} 2a = -4 \\ -b+1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

* Vậy $P = 19$.

Câu 8. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-2)x^3 - (m-2)x^2 + (2m+1)x - 5m$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m trên khoảng $(-3; 7)$ sao cho $y'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng các phần tử của tập S ta được kết quả là

A. 19.

B. 20.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Anh Kiệt; Fb: Huỳnh Kiệt

Chọn B

TH1: $m = 2 \Rightarrow y = 5x - 10$, Do là hàm số bậc nhất và $a = 5 > 0$ nên $y'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $m = 2$ thỏa mãn.

$$\text{TH2: } m \neq 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(m-2)x^3 - (m-2)x^2 + (2m+1)x - 5m.$$

$$y' = (m-2)x^2 - 2(m-2)x + 2m+1.$$

Ta có:

$$y'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ (m-2)^2 - (m-2)(2m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ (m-2)(-m-3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Do $m \in (-2; 7)$ và là số nguyên nên $m \in \{3; 4; 5; 6\}$.

Kết hợp 2 TH ta có $S = \{2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$ Tổng là 20.

Câu 9. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hàm số hàm số $y = x \cdot \cos x$. Chọn khẳng định Đúng?

A. $2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 1$.

B. $2(\cos x - y') - x(y'' + y) = 0$.

C. $2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 0$.

D. $2(\cos x - y') - x(y'' + y) = 1$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Minh Thành; Fb: Hoàng Minh Thành

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ Ta có: $y' = \cos x - x \sin x$

$$y'' = -2 \sin x - x \cos x$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} 2(\cos x - y') = 2x \sin x \\ x(y'' + y) = -2x \sin x \end{cases} \Rightarrow 2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 0$$

Câu 10. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 2018!$.

B. $f'(0) = -2018!$.

C. $f'(0) = 0$.

D. $f'(0) = 2018$.

Lời giải

Tác giả: Trần Ngọc Diễm; Fb: Trần Ngọc Diễm

Chọn A

$$f'(x) = 1 \cdot (x-1)(x-2)\dots(x-2018) + x \cdot 1 \cdot (x-2)\dots(x-2018) + \dots + x(x-1)(x-2)\dots(x-2017) \cdot 1$$

$$f'(0) = 1 \cdot (-1)(-2)\dots(-2018) = 1 \cdot 2 \dots 2018 = 2018!.$$

Câu 11. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x^2}{1-x}$. Tính $y^{(100)}(0)$.

A. $y^{(100)}(0) = 100!$.

B. $y^{(100)}(0) = 99!$.

C. $y^{(100)}(0) = -100!$.

D. $y^{(100)}(0) = -99!$.

Lời giải

Tác giả: Bồ Văn Hậu; Fb: Năng Đông

Chọn A

Với mọi số thực $x \neq 1$ thì $y = \frac{x^2}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x}$, suy ra ta có:

$$y' = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$y''' = \frac{6}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^4}$$

$$y^{(4)} = \frac{24}{(1-x)^5} = \frac{4!}{(1-x)^5}$$

.....

Ta dự đoán và dễ dàng chứng minh được $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, với $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó: $y^{(100)}(0) = 100!$

Câu 12. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Chọn kết quả đúng.

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

B. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

C. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

D. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Văn Trụ; Fb: Trụ Vũ

Chọn C

$$df(x) = d\sqrt{1 + \cos^2 2x} = \left(\sqrt{1 + \cos^2 2x}\right)' \cdot dx = \frac{(1 + \cos^2 2x)'}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} \cdot dx$$

$$= \frac{2 \cos 2x \cdot (\cos 2x)'}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} \cdot dx = \frac{2 \cos 2x \cdot (-2 \sin 2x)}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} \cdot dx = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} \cdot dx.$$

Câu 13. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2y' + xy'' = -xy$. B. $2y' + xy'' = xy$. C. $y' + xy'' = -xy$. D. $y' + xy'' = xy$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Công Anh; Fb: conganhmai

Chọn A

Ta có $y = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow xy = \cos x \quad (1)$.

Lấy đạo hàm 2 vế của (1) ta được: $y + xy' = -\sin x \quad (2)$.

Lấy đạo hàm 2 vế của (2) ta được: $y' + y' + xy'' = -\cos x \Leftrightarrow 2y' + xy'' = -xy$.

Chuyên đề

14

Khảo sát hàm số và bài toán liên quan

Câu 1. (HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx + 8$, m là tham số.

- a) Tìm m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung.
 c) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 0]$ bằng -24 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Oanh; Fb: Oanh Nguyen

a) Ta có $y' = 6x^2 - 6(m+3)x + 18m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $\Delta'_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow 9(m+3)^2 - 108m \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 \leq 0 \Leftrightarrow m = 3$.

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung khi $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0 \text{ có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow m < 0.$$

c) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 0]$ bằng -24 .

$$\text{Ta thấy } y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 3 \notin [-1; 0] \end{cases}$$

+ Nếu $m = 3$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên hàm số đồng biến trên $[-1; 0]$, suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 0]$ là $y(-1) = -66 \neq -24$, nên $m = 3$ không thỏa mãn.

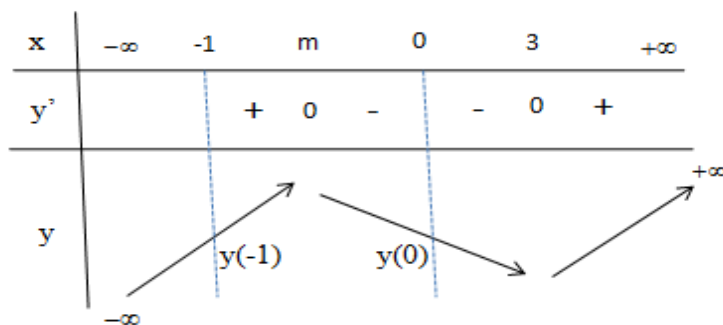
$$+ \text{ Nếu } m \neq 3, \text{ khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 3 \notin [-1; 0] \end{cases}$$

*)TH1: $m \notin [-1; 0]$, ta tính được $y(0) = 8$, $y(-1) = -3 - 21m$, $\min_{[-1; 0]} y = \min\{y(0), y(-1)\}$.

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 0]$ bằng -24 thì

$$\begin{cases} m \notin [-1; 0] \\ y(-1) = -24 \\ y(-1) \leq y(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [-1; 0] \\ -3 - 21m = -24 \\ -3 - 21m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

*)TH2: $m \in [-1; 0]$, từ bảng biến thiên của hàm số



Suy ra $\min_{[-1;0]} y = \min\{y(0), y(-1)\}$.

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng -24 (do $y(0) = 8 \neq -24$) thì

$$\begin{cases} m \in [-1;0] \\ y(-1) = -24 \\ y(-1) \leq y(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1;0] \\ m = 1 \end{cases} \text{ do đó, không tồn tại giá trị của } m.$$

Vậy $m = 1$.

Câu 2. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty)$ là

- A. $[3; 4)$. B. $[0; 3)$. C. $[4; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Lê Đức Lộc; Fb: Lê Đức Lộc

Phản biện: Hà Ngọc Ngô

Chọn D

$$f(x) = x^2 - 4x + m \Rightarrow f'(x) = 2x - 4.$$

$$g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3 = a_{12}x^{12} + a_{10}x^{10} + \dots + a_2x^2 + a_0$$

$$\Rightarrow g'(x) = 12a_{12}x^{11} + 10a_{10}x^9 + \dots + 2a_2x.$$

$$\begin{aligned} [g(f(x))]' &= f'(x) \cdot g'(f(x)) = (2x - 4)[12a_{12}f^{11}(x) + 10a_{10}f^9(x) + \dots + 2a_2f(x)] \\ &= (2x - 4) \cdot f(x) \cdot [12a_{12}f^{10}(x) + 10a_{10}f^8(x) + \dots + 2a_2] \end{aligned}$$

Vì $a_{12}; a_{10}; \dots; a_2; a_0 > 0$ và $2x - 4 > 0 \forall x \in (3; +\infty)$ nên

$$(2x - 4)[12a_{12}f^{10}(x) + 10a_{10}f^8(x) + \dots + 2a_2] > 0 \forall x \in (3; +\infty).$$

$$\text{Hàm số } g(f(x)) \text{ đồng biến trên } (3; +\infty) \Leftrightarrow [g(f(x))]' \geq 0 \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow x^2 - 4x + m \geq 0 \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow m \geq g(x) = -x^2 + 4x \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Rightarrow m \geq \max_{x \in [3; +\infty)} g(x) = 3.$$

Câu 3. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Tìm các giá trị của tham số thực m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + (4-2m)x - 8 \text{ đồng biến trên } \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tiến Hoàng ; Fb: Nguyễn Tiến Hoàng

$$\text{Ta có } y' = x^2 + 2(2-m)x + 4 - 2m$$

Theo yêu cầu bài toán :

$$y' \geq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 2mx + 2m \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{(x+2)^2}{2(x+1)} \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

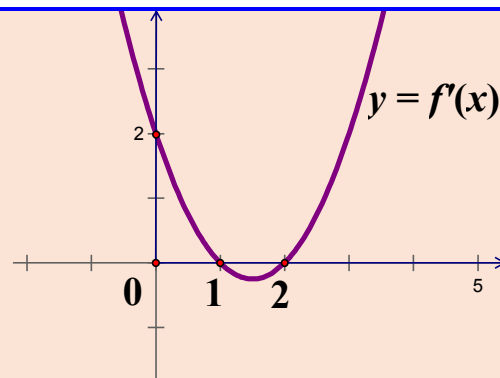
$$\text{Đặt } g(x) = \frac{(x+2)^2}{2(x+1)} \text{ Khi đó } g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{2(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy $m \leq 2$.

Câu 4. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019)

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(1-x^2)$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $(-2; -1)$. D. $(-1; 1)$.



Lời giải

Tác giả: Vũ Xuân Định ; Fb: Vu Xuan Dinh

Chọn A

$$\text{Ta có } y = f(1-x^2) \Rightarrow y' = -2x.f'(1-x^2).$$

$$\text{Hàm số } y = f(1-x^2) \text{ thì } y' < 0 \Leftrightarrow -2x.f'(1-x^2) < 0 \Leftrightarrow x.f'(1-x^2) > 0.$$

+ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(1-x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-x^2 < 1 \\ 1-x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 0 \\ x^2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty).$$

+ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} x < 0 \\ f'(1-x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 < 1-x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$.

Câu 5. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + (4-2m)x - m^2 - 3m - 8.$$

Tìm các giá trị tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Gia Hứng; Fb: Hoàng Gia Hứng

Hàm số là hàm đa thức nên luôn xác định trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ta có: $y' = x^2 + 2(2-m)x + 4 - 2m$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi: $y' \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(2-m)x + 4 - 2m \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1} \geq 2m, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) (*)$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$ trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \\ x = -2 \notin \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$	$\frac{9}{2}$	4	$+\infty$

Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow g(x) \geq 2m, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$\Leftrightarrow \min_{\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)} g(x) \geq 2m \Leftrightarrow 2m \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 2$$

Vậy $m \leq 2$ là giá trị cần tìm.

Cách khác : Ta có $\frac{x^2 + 4x + 4}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} + 2 \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} + 2 = 4$. Suy ra $m \leq 2$.

Câu 6. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 12.

B. 0.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Tác giả: Ngô Thị Oanh; Fb: Oanh Ngô.

Chọn D

Để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$ và $y' = 0$ tại một số hữu hạn điểm

$$\Leftrightarrow 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0 \quad \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 + \frac{1}{x^6} \geq -m \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6}$ trên $(0; +\infty)$.

$$f'(x) = 6x - \frac{6}{x^7} = \frac{6(x^8 - 1)}{x^7}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (TM)} \\ x = -1 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

BBT

x	0	1	$+\infty$
y'		0	
		-	+
y	$+\infty$		$+\infty$

YCBT $\Leftrightarrow -m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$. Mà m là số nguyên âm $\Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 7. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(3; 4)$. Tính số phần tử của S .

A. 10.

B. 9.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2x + m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(3; 4)$ khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 1 < 2 \leq x_2 \leq 3$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 - m > 0 \\ 1 - \sqrt{1 - m} \leq 1 \\ 2 \leq 1 + \sqrt{1 - m} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 1 \leq \sqrt{1 - m} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -3 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0.$$

Suy ra $S = \{-3; -2; -1; 0\}$.

Câu 8. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019) Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases} \text{ (Hai nghiệm phân biệt với mọi } m \text{)}$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$m-1$	$m+1$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	y_1	y_2	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow (2; +\infty) \subset (m + 1; +\infty) \Leftrightarrow m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m \leq 1$.

Câu 9. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}(m + 1)x^2 + 3mx - m^2$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Văn Lâm; Fb: LamHoang

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^2 + 3(m + 1)x + 3m.$$

$$y' \geq 0 \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow 4x^2 + 3(m + 1)x + 3m \geq 0 \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$\text{Với } x + 1 > 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Rightarrow -3m \leq \frac{4x^2 + 3x}{x + 1} \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{4x^2 + 3x}{x + 1} \quad \forall x \in (-1; +\infty) \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^2 + 8x + 3}{(x + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} (tm) \\ x = -\frac{3}{2} (l) \end{cases}$$

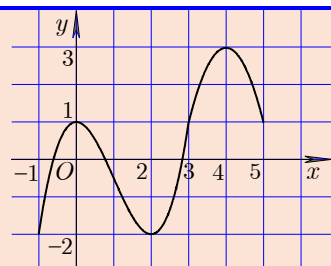
Bảng biến thiên

x		-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
y'			$-$	0	$+$
y		$+\infty$		-1	$+\infty$

Vậy $-3m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$.

Câu 10. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng

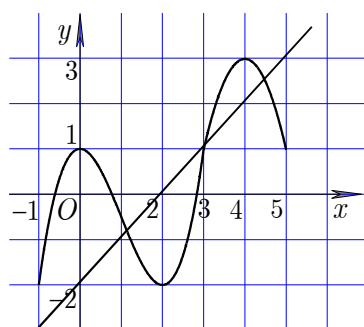
- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -1)$.
C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.



Lời giải

Tác giả: Phan Văn Trí; Fb:facebook.com/tri.phanvan.3304

Chọn C



Ta có

$$y = -2f(2-x) + x^2 \Rightarrow y' = -(2-x)' 2f'(2-x) + 2x = 2f'(2-x) + 2x$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) + x < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < (2-x) - 2$$

Đặt $t = 2-x$ suy ra $f'(t) < t-2$.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy đường thẳng $y = t-2$ cắt đồ thị

$y = f'(t)$ tại ba điểm có hoành độ liên tiếp là $a, 3, b$ sao cho $1 < a < 2$; $4 < b < 5$

Do đó cùng từ đồ thị ta có

$$f'(t) < t-2 \Leftrightarrow \begin{cases} a < t < 3 \\ b < t < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 2-x < 3 \\ b < 2-x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2-a \\ -3 < x < 2-b \end{cases}$$

+ Vì $1 < a < 2 \Rightarrow 0 < 2-a < 1$ nên $(-1; 0) \subset (-1; 2-a)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2-a)$ nên cũng nghịch biến trên $(-1; 0)$.

+ Vì $4 < b < 5 \Rightarrow -3 < 2 - b < -2$ nên $(-3; 2 - b) \subset (-3; -2)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2 - b)$ thì chưa chắc nghịch biến trên $(-3; -2)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 11. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				$\frac{5}{2}$				$+\infty$
			0			0			

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây:

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Trúc Ly; Fb: Nguyễn T. Trúc Ly

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 12. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = \log_{2020} \left(\frac{1}{x} \right)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_2) . Biết (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Hỏi hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Đặng Phước Thiên ; Fb: Đặng Phước Thiên

Chọn B

Ta có $y = \log_{2020} \left(\frac{1}{x} \right) = -\log_{2020} x$.

(C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua gốc tọa độ, suy ra hàm số $y = \log_{2020}(-x)$ có đồ thị (C_2) .

Xét hàm số $y = |\log_{2020}(-x)| = \begin{cases} \log_{2020}(-x), & x \leq -1 \\ -\log_{2020}(-x), & -1 < x < 0 \end{cases}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 13. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m - 1)x - (3m + 2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$. B. $-3 < m < -\frac{1}{5}$. C. $m < -3$. D. $m \geq -\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (2m-1) + (3m+2)\sin x$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \leq 0 \Leftrightarrow (2m-1) + (3m+2)\sin x \leq 0$ (1)

+) TH1: Với $m = -\frac{2}{3}$ thì (1) trở thành $-\frac{7}{3} \leq 0$, luôn đúng với $\forall x$ (2)

+) TH2: Với $m > -\frac{2}{3}$ thì (1) trở thành:

$$\sin x \leq \frac{1-2m}{3m+2} \Rightarrow \frac{1-2m}{3m+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5m+1}{3m+2} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m \leq -\frac{1}{5} \quad (3)$$

+) TH3: Với $m < -\frac{2}{3}$ thì (1) trở thành:

$$\sin x \geq \frac{1-2m}{3m+2} \Rightarrow \frac{1-2m}{3m+2} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{m+3}{3m+2} \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m < -\frac{2}{3} \quad (4).$$

Kết hợp (2), (3) và (4) ta được $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$.

Câu 14. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Tìm m để hàm số sau đồng biến trên $(0; +\infty)$:

$$y = x^3 + mx - \frac{1}{3x}.$$

A. $m \leq 1$.

B. $m \leq 0$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \geq -2$.

Lời giải

Tác giả: Phùng Hằng; Fb: Phùng Hằng

Chọn D

$$y = x^3 + mx - \frac{1}{3x} \Rightarrow y' = 3x^2 + m + \frac{1}{3x^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 + m + \frac{1}{3x^2} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \frac{1}{3x^2}, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x) = -3x^2 - \frac{1}{3x^2}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Ta có: $3x^2 + \frac{1}{3x^2} \geq 2\sqrt{3x^2 \cdot \frac{1}{3x^2}} = 2$ (Áp dụng bất đẳng thức côsi cho 2 số dương $3x^2$ và $\frac{1}{3x^2}$). Dấu

$$\text{bằng xảy ra} \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{1}{3x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow f(x) \leq -2$$

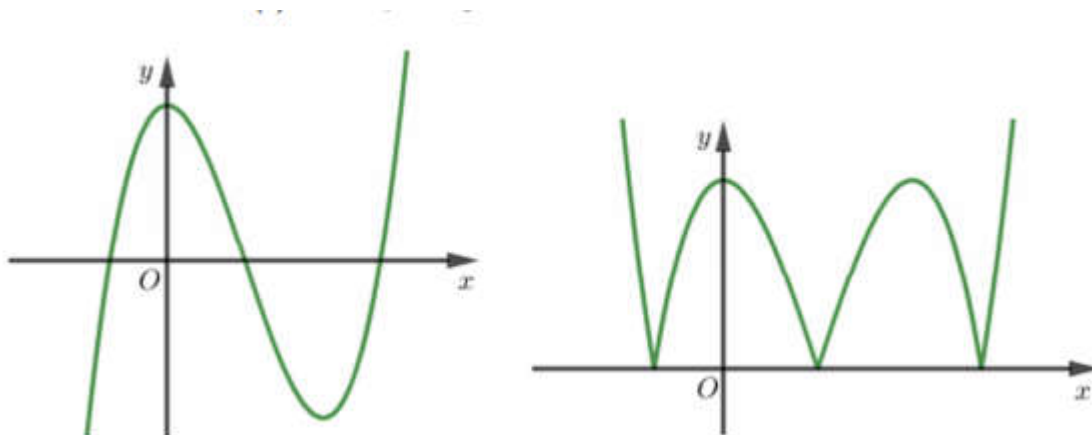
Khi đó (1) $\Leftrightarrow m \geq -2$.

Câu 15. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m - 2|$ có đúng năm điểm cực trị

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Anh Kiệt ; Fb: Huỳnh Kiệt

Hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m - 2|$ có đúng năm điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m - 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 2 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.



Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 2 - m$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < 2 - m < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Câu 16. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Biết $m \in (a; b)$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ thì hàm số $y = |x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 10m - 1|$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng $a + b$?

A. $\frac{14}{5}$.

B. $-\frac{27}{10}$.

C. $\frac{1}{10}$.

D. $-\frac{13}{5}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Yến ; Fb: Nguyễn Yến.

Chọn D

Đặt $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 10m - 1, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10x = 5x(x+2)(x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-2		0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10m+27$	$\searrow$	$10m-1$	$\nearrow$
						$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên trên của hàm số $f(x)$ ta suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi: $10m-1 < 0 < 10m+27 \Leftrightarrow \frac{-27}{10} < m < \frac{1}{10}$. Suy ra $a+b = \frac{-27}{10} + \frac{1}{10} = \frac{-13}{5}$.

Câu 17. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x + m - 2$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Gia Hứng; Fb: Hoàng Gia Hứng

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3(m+1)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi: $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3(m+1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Với $m = 0$ ta có: $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'' = 6x$.

Khi đó: $y''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow x = -1$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 18. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có đồ thị (C_m) . Xác định tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Gia Hứng; Fb: Hoàng Gia Hứng

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 - 8(m-1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8(m-1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2(m-1) \end{cases} \quad (2)$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $\neq 0 \Leftrightarrow 2(m-1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là:

$A(0; 2m-1); B(\sqrt{2(m-1)}; -4(m-1)^2 + 2m-1); C(-\sqrt{2(m-1)}; -4(m-1)^2 + 2m-1)$ ABC luôn là tam giác cân vì $AB = AC = \sqrt{2(m-1) + 16(m-1)^4}$; $BC = 2\sqrt{2(m-1)}$

Do đó tam giác ABC đều khi $AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{2(m-1) + 16(m-1)^4} = 2\sqrt{2(m-1)}$

$$\Leftrightarrow 16(m-1)^4 - 6(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ (m-1)^3 = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 (ktm) \\ m=1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} (tm) \end{cases}$$

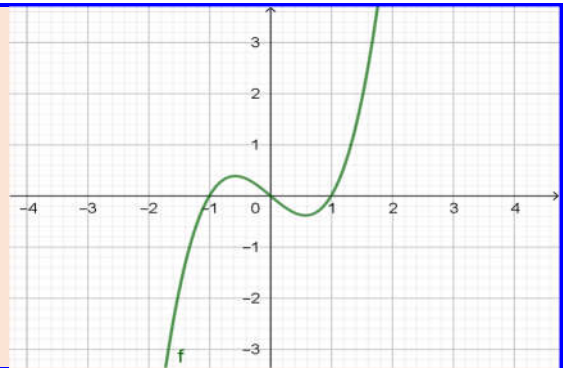
Vậy $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 19. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là

- A. 8. B. 11.
C. 7. D. 9.



Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên – Nguyễn Văn Xuất

Chọn C

Do đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm $-1; 0; 1$.

$$y = f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x+1)x(x-1) = x^3 - x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 1;$$

$$y = f[f'(x)] \text{ có } y' = f'[f'(x)] \cdot f''(x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'[f'(x)] \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'[f'(x)] = 0 \\ f''(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = -1 \\ f'(x) = 0 \\ f'(x) = 1 \\ f''(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 < -1 \\ x = 0; \pm 1 \\ x = x_1 > 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f[f'(x)]$ có 7 điểm cực trị.

Câu 20. (HSG12 Quảng Ninh 2018-2019) Cho hàm số $y = x^4 + 2(m+1)x^2 + m^2 + m - 1$, với m là tham số. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải

Tác giả: Lê Đình Năng, FB: Lê Năng

Hàm số y xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $y' = 4x^3 + 4(m+1)x = 4x(x^2 + m + 1)$.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -(m+1) \end{cases}$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow -(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < -1$ (*).

Với điều kiện (*) thì đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

$$A(0; m^2 + m - 1), B(\sqrt{-m-1}; -m-2), C(-\sqrt{-m-1}; -m-2).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB = \sqrt{(m+1)^4 - (m+1)} = AC \\ BC = 2\sqrt{-m-1} \end{cases} \Rightarrow \text{Tam giác } ABC \text{ cân tại đỉnh } A \text{ với } \forall m < -1.$$

$$\text{Do đó để tam giác } ABC \text{ đều thì } AB = BC \Leftrightarrow (m+1)^4 + 3(m+1) = 0 \Leftrightarrow m = -1 - \sqrt[3]{3}.$$

Vậy với $m = -1 - \sqrt[3]{3}$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác đều.

Câu 21. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^4 - 8mx^2 + 16m^2 - m + 1$ ($m \in \mathbb{R}$) có đồ thị (C) và điểm $H(0;1)$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị (C) có 3 cực trị là A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Cường; Fb: Cuong Nguyen

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}, y' = 4x^3 - 16mx = 4x(x^2 - 4m), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4m \end{cases}$$

Để đồ thị (C) có 3 điểm cực trị thì $m > 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0; 16m^2 - m + 1), B(2\sqrt{m}; 1 - m), C(-2\sqrt{m}; 1 - m)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AH} = (0; m - 16m^2); \overrightarrow{BC} = (-4\sqrt{m}; 0); \overrightarrow{CH} = (2\sqrt{m}; m); \overrightarrow{AB} = (2\sqrt{m}; -16m^2)$$

$$\text{Điểm } H \text{ là trực tâm tam giác } ABC \text{ khi } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot (-4\sqrt{m}) + (m - 16m^2) \cdot 0 = 0 \\ 2\sqrt{m} \cdot 2\sqrt{m} + m(-16m^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4m - 16m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Kết hợp với điều kiện } m > 0 \text{ tìm được } m = \frac{1}{2}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 22. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^4 - 8mx^2 + 16m^2 - m + 1$ (với m là tham số thực) có đồ thị (C) và điểm $H(0;1)$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Tác giả: Phó Văn Giang; Fb: Giang Phó.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 - 16mx = 4x(x^2 - 4m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4m \end{cases}$$

Đồ thị (C) có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$ (1)

Giả sử các điểm cực trị là $A(0; 16m^2 - m + 1)$, $B(2\sqrt{m}; 1 - m)$, $C(-2\sqrt{m}; 1 - m)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (0; m - 16m^2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4\sqrt{m}; 0)$

$\overrightarrow{CH} = (2\sqrt{m}; m)$, $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{m}; -16m^2)$.

Do $H(0; 1)$ là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot (-4\sqrt{m}) + (m - 16m^2) \cdot 0 = 0 \\ 4m - 16m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có: $m = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = \frac{1}{2}$.

Câu 23. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m + 1)x + 3 - m$ (1), với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị A và B sao cho khoảng cách từ điểm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)$ đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Nhóm Tác giả: Nguyễn Thị Huỳnh Như; Fb: Nhu Nguyen; Vũ Kiều Oanh; Fb: Rio Vũ Vũ. Trần Ngọc Hiếu; FB: Trần Ngọc Hiếu

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3mx^2 - 6mx + 2m + 1$.

Để hàm số (1) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT: $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3m^2 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có: $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}mx + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}m + \frac{10}{3}$.

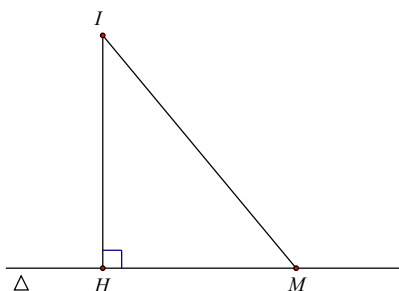
Khi đó đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B của đồ thị hàm số (1) là
 $(\Delta): y = -\frac{2}{3}(m-1)x - \frac{m-10}{3} \Leftrightarrow 2(m-1)x + 3y + m - 10 = 0.$

Giả sử đường thẳng (Δ) luôn đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ cố định với mọi giá trị của m .

Suy ra: $2(m-1)x_0 + 3y_0 + m - 10 = 0, \forall m \Leftrightarrow m(2x_0 + 1) - 2x_0 + 3y_0 - 10 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 1 = 0 \\ -2x_0 + 3y_0 - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 3\right).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ như hình vẽ



Khi đó: $d(I, \Delta) = IH \leq IM.$

Do đó $d(I, \Delta)$ lớn nhất khi $H \equiv M$

$$\Leftrightarrow IM \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow -3 - \frac{3}{2}(1-m) = 0 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn (*))}$$

$$(\text{vì } \overrightarrow{IM} = \left(-1; -\frac{3}{4}\right); \vec{u}_\Delta = (3; 2(1-m)))$$

Vậy $m = 3.$

Nhận xét: (Lê Thanh Bình)

Xử lý bài toán khoảng cách từ $I\left(\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)$ đến đường thẳng $AB: 2(m-1)x + 3y + m - 10 = 0$ bằng đại số

$$\text{nghư sau: Ta có } d(I; AB) = \frac{\left|m-1 + \frac{45}{4} + m - 10\right|}{\sqrt{4(m-1)^2 + 9}} = \frac{\left|2(m-1) + \frac{9}{4}\right|}{\sqrt{4(m-1)^2 + 9}}$$

$$\text{Đặt } t = 2(m-1) \text{ ta được } d(I; AB) = \frac{\left|t + \frac{9}{4}\right|}{\sqrt{t^2 + 9}} \stackrel{\text{Bunhiacovsky}}{\leq} \frac{\sqrt{\left[1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right](t^2 + 3^2)}}{\sqrt{t^2 + 9}} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \frac{t}{1} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow 2(m-1) = 4 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Câu 24. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C_m) và

điểm $C(1;4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4?

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị thì điều kiện là: $m \neq 0$ (*).

Tọa độ hai điểm cực trị là: $A(0; 4m^2 - 2)$, $B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2)$.

Phương trình đường thẳng $AB: 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$

$$d(C; AB) = \frac{|6 - 2m^2|}{\sqrt{1 + 4m^2}}; \overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{1 + 4m^4}$$

$$\text{Do đó: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} d(C; AB) \cdot AB = |6m - 2m^3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases} (tm(*)).$$

Vậy có 4 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Cho hàm số $y = 2x - 2 - m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực tiểu.

Lời giải

Xét $y = 2x - 2 - m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$

TXĐ: $\mathbb{R}$

$$y' = 2 - \frac{m(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

+) Hàm số có cực tiểu thì trước hết phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

$$y' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} (*)$$

Đặt $g(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2}$

$$g'(x) = \frac{\frac{2(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}(x-2) - 2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 5}} < 0, \forall x \neq 2.$$

BBT:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
g'	$-$		$-$
g	-2	$+\infty$	2

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

$$+) y'' = -m \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}}{x^2 - 4x + 5} = \frac{-m}{(x^2 - 4x + 5)\sqrt{x^2 - 4x + 5}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Với $m > 2 \Rightarrow y'' < 0$: Hàm số không có cực tiểu.

Với $m < -2 \Rightarrow y'' > 0$: Hàm số có cực tiểu.

Vậy $m < -2$ thì hàm số có cực tiểu.

Câu 26. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^5}{\sqrt[3]{x-4}}$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Tác giả: Phan Thị Thanh Lệ; Fb: Lê Phan;

Chọn C

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$f'(x)$ không xác định tại $x = 4$.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số xác định tại $x = 4$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0		+
$f(x)$						

Từ bảng biến thiên trên, suy ra hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = 1; x = 3; x = 4$.

Câu 27. (HSG12 tỉnh Hải Phòng năm 2018-2019)

a) Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là hai điểm cực trị của (C). Tính diện tích của tam giác OAB, trong đó O là gốc tọa độ

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x + m\sqrt{x^2 + 4x + 6}$ có cực tiểu.

Lời giải

a)

$$+) \text{ Tập xác định } D = \mathbb{R}. \quad y' = 3x^2 + 6x - 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

+) (C) có hai điểm cực trị là $A(-3; 28), B(1; -4)$

$$+) \overrightarrow{OA} = (-3; 28), \overrightarrow{OB} = (1; -4) \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} |-3 \cdot (-4) - 1 \cdot 28| = 8$$

b)

$$+) \text{ Tập xác định } D = \mathbb{R}; y' = 2 + m \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}}$$

+) Ta có: Hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số có cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ phải có nghiệm.

$$+) \text{ Xét phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-2\sqrt{x^2+4x+6}}{x+2}, (x \neq -2)$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{-2\sqrt{x^2+4x+6}}{x+2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}. \text{ Ta có } g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+6}} > 0, \forall x \neq -2. \text{ Ngoài ra}$$

ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$, từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ như

sau

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'			
y	2		-2

Diagram showing arrows: from 2 to $+\infty$ and from $-\infty$ to -2 .

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $y' = 0$ có nghiệm khi và chỉ $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

+) Xét trường hợp 1 $m > 2$

Phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 , khi đó ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = 2 + m > 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} y' = 2 - m < 0$ nên ta có bảng biến thiên của hàm số có dạng

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y'			
y			

Diagram showing arrows: from $-$ to 0 and from 0 to $+$. A label $f(x_0)$ is placed below the table.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có cực tiểu.

+) Trường hợp 2 $m < -2$ suy luận tương tự ta suy ra hàm số chỉ có cực đại, không thỏa mãn.

Vậy $m > 2$

Câu 28. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 4x_2 = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 3^2 + 3.3(m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 0. (*)$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 1 - m^2 \end{cases}$ kết hợp điều kiện đề bài ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 1 - m^2 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \\ 1 - m^2 = -\frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \\ m^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{5}{3} \text{ thỏa mãn } (*)$$

$$\text{Vậy } m = \pm \frac{5}{3}.$$

Câu 29. (HSG12 tỉnh QUẢNG NINH 2018-2019) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Vân; Fb: Trần Thị Vân

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x(x^2 - m)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt tức là $m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(-\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$, $B(0; 2m - 1)$, $C(\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$

Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên tam giác ABC cân tại $B \in Oy$; A, C đối xứng nhau qua trục Oy .
Nên để tam giác ABC là tam giác vuông thì tam giác ABC vuông và cân tại B .

$$\text{Khi đó } AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow m^4 = m \Leftrightarrow m^2 = \sqrt{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \end{cases}$$

Do $m > 0$ nên chọn $m = 1$.

Kết luận $m = 1$.

Câu 30. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị là (C_m) .

Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4, với $C(1; 4)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, khi $m \neq 0$

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(0; 4m^2 - 2); B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3)$ $\Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{1 + 4m^4}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $2m^2x - y - 4m^2 + 2 = 0$

Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB là: $d(C, AB) = \frac{|6 - 2m^2|}{\sqrt{1 + 4m^4}}$.

Suy ra, diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2} \cdot d(C, AB) \cdot AB = |6m - 2m^3|$.

Từ giả thiết suy ra: $|6m - 2m^3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}$

Câu 31. (HSG12 tỉnh Bình Thuận năm 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3mx + m$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục hoành.

Lời giải

Tác giả: Phùng Đức Cường; Fb: Phùng Đức Cường

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm của hàm số là $y' = 3x^2 - 6x - 3m$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $y(x_1) \cdot y(x_2) < 0$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (*).

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Ta có $y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot y' - 2(m+1)x$.

Do đó $y_1 = y(x_1) = -2(m+1)x_1, y_2 = y(x_2) = -2(m+1)x_2$.

$y(x_1) \cdot y(x_2) < 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 x_1 \cdot x_2 < 0$

$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $m > 0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 32. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 + 2(m+1)x^2 + (8m-3)x + 8m-6$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu trong đó có một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ Oxy .

Lời giải

Cách 1: Ta có $y' = 3x^2 + 4(m+1)x + 8m-3$.

Hàm số trên có cực đại, cực tiểu khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 3(8m-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{4+\sqrt{3}}{2} \\ m < \frac{4-\sqrt{3}}{2} \end{cases} (1).$$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình:

$$y = \frac{2}{9}(-4m^2 + 16m - 13)x + \frac{2}{9}(-8m^2 + 31m - 24)$$

Gọi $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số. Ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4(m+1)}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{8m-3}{3} \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{2}{9}(-4m^2 + 16m - 13)x_1 + \frac{2}{9}(-8m^2 + 31m - 24)$$

$$y_2 = \frac{2}{9}(-4m^2 + 16m - 13)x_2 + \frac{2}{9}(-8m^2 + 31m - 24)$$

Hàm số $y = x^3 + 2(m+1)x^2 + (8m-3)x + 8m-6$ có hệ số $a=1 > 0$ nên không xảy ra trường hợp đồ thị hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ nhất, một điểm thuộc góc phần tư thứ ba của hệ trục tọa độ Oxy .

Để một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ Oxy thì $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 < 0 \\ y_1 \cdot y_2 < 0 \end{cases}$.

Với $x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{8} (2).$

Với

$$y_1 \cdot y_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow [(-4m^2 + 16m - 13)x_1 + (-8m^2 + 31m - 24)][(-4m^2 + 16m - 13)x_2 + (-8m^2 + 31m - 24)] < 0$$

$$\Leftrightarrow (-4m^2 + 16m - 13)^2 x_1 x_2 + (-8m^2 + 31m - 24)(-8m^2 + 31m - 24)(x_1 + x_2) + (-8m^2 + 31m - 24)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases} (3).$$

Từ (1) (2) (3) suy ra $m < \frac{3}{8}$ thì thỏa đề.

Cách 2: Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số có hai điểm cực trị trái dấu và đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

+ Ta có $y' = 3x^2 + 4(m+1)x + 8m - 3$, hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow 3 \cdot (8m - 3) < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{8}$.

+ Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^3 + 2(m+1)x^2 + (8m-3)x + 8m - 6 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (x+2)(x^2 + 2mx + 4m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 2mx + 4m - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4m + 3 > 0 \\ (-2)^2 - 4m + 4m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \\ m < \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{8}.$$

Câu 33. (HSG12 tỉnh Lào Cai năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^{2018} \left(e^{2x} - e^x + \frac{1}{3} \right) (x^2 - 2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 50$, trong đó x_1, x_2, x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.

Lời giải

Cách 1.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Trong đó, } x = 3 \text{ là nghiệm bội chẵn.}$$

Xét hàm $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có $g'(x) = (2x - 8)f'(x^2 - 8x + m)$. Khi đó,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 3 \\ x^2 - 8x + m = 2 \\ x^2 - 8x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x = 3 - m \quad (1) \\ x^2 - 8x = 2 - m \quad (2) \\ x^2 - 8x = -m \quad (3) \end{cases}$$

Ta xét hàm $h(x) = x^2 - 8x$. Hàm số này có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	-16	$+\infty$

Nếu $3 - m < -16 \Leftrightarrow m > 19$ thì các phương trình (1), (2), (3) đều vô nghiệm. Do đó, hàm số $g(x)$ chỉ có một cực trị.

Nếu $2 - m \leq -16 \leq 3 - m \Leftrightarrow 18 \leq m \leq 19$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn hoặc nghiệm kép, phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, phương trình (3) vô nghiệm. Do đó, hàm số $g(x)$ chỉ có một cực trị.

Nếu $-m \leq -16 < 2 - m \Leftrightarrow 16 \leq m < 18$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) có 2 nghiệm bội lẻ, phương trình (3) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép. Do đó, hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Khi đó, giả sử $x_1 = 4$ thì x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện $x_2^2 + x_3^2 = 34 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 34$.

Kết hợp với định lý Vi-et ta có $64 - 2(m - 2) = 34 \Leftrightarrow m = 17$ (thỏa điều kiện $16 \leq m < 18$).

Nếu $-m > -16 \Leftrightarrow m < 16$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) có 2 nghiệm đơn, phương trình (3) có 5 nghiệm đơn. Do đó, hàm số $g(x)$ không thỏa mãn có ba cực trị.

Vậy $m = 17$ là giá trị cần tìm.

Cách 2.

Xét hàm $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có

$$g'(x) = (2x - 8)f'(x^2 - 8x + m)$$

$$= (2x - 8)(x^2 - 8x + m - 3)^{2018} \left(e^{2x^2 - 16x + 2m} - e^{x^2 - 8x + m} + \frac{1}{3} \right) \left[(x^2 - 8x + m)^2 - 2(x^2 - 8x + m) \right].$$

Dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $(2x - 8) \left[(x^2 - 8x + m)^2 - 2(x^2 - 8x + m) \right]$.

$$\text{Ta có } (2x - 8) \left[(x^2 - 8x + m)^2 - 2(x^2 - 8x + m) \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 0 \\ x^2 - 8x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x = -m \\ x^2 - 8x = 2 - m \end{cases}.$$

Ta xét hàm $h(x) = x^2 - 8x$. Hàm số này có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	-16	$+\infty$

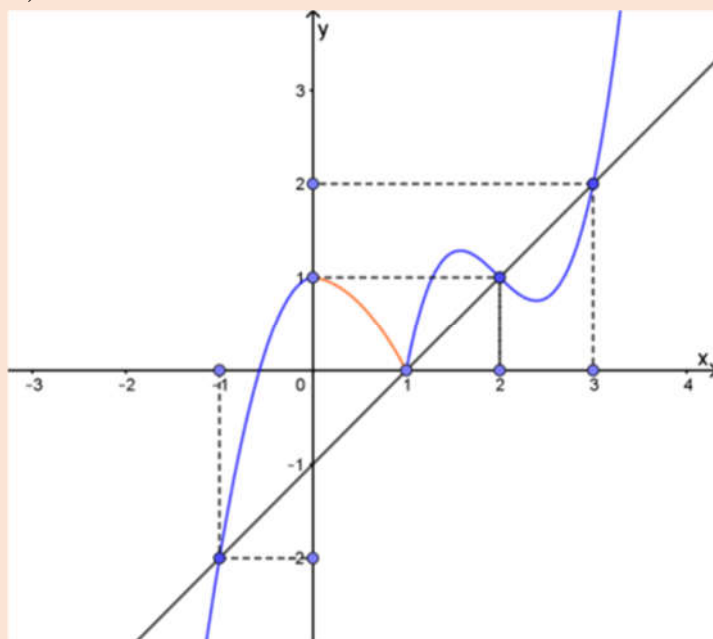
Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $-m \leq -16 < 2-m \Leftrightarrow 16 \leq m < 18$. Khi đó, giả sử $x_1 = 4$ thì x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 8x = 2 - m$ thỏa mãn điều kiện

$$x_2^2 + x_3^2 = 34 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 34.$$

Kết hợp với định lý Vi-et ta có $64 - 2(m - 2) = 34 \Leftrightarrow m = 17$ (thỏa điều kiện $16 \leq m < 18$).

Vậy $m = 17$ là giá trị cần tìm.

Câu 34. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3) > 8, f(4) > \frac{9}{2}, f(2) < \frac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Lời giải

Tác giả: Tô Minh Trường; Fb: Tô Minh Trường

$$\text{Đặt } g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$$

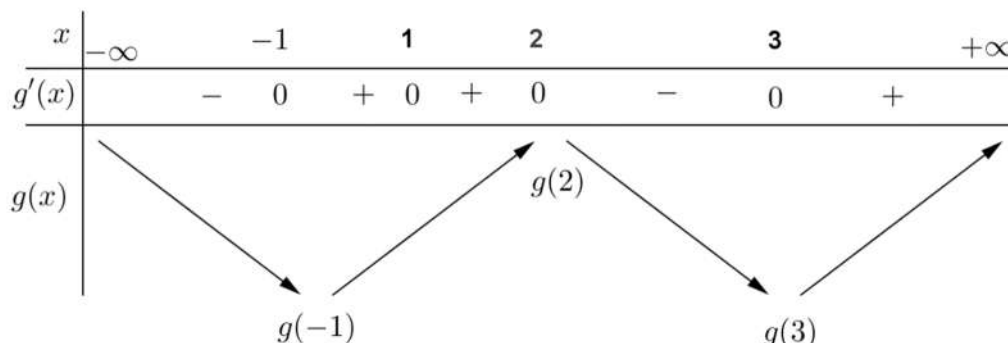
Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ và số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ không trùng với điểm cực trị.

$$\text{Ta có, } g'(x) = 2f'(x) - 2(x-1) = 2[f'(x) - (x-1)].$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$ ta được:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị. Theo giả thiết

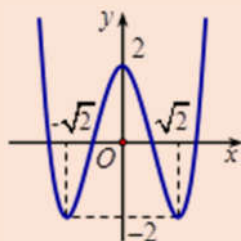
$$f(-3) > 8 \Rightarrow g(-3) = 2f(-3) - 16 > 0$$

$$f(2) < \frac{1}{2} \Rightarrow g(2) = 2f(2) - 1 < 0$$

$$f(4) > \frac{9}{2} \Rightarrow g(4) = 2f(4) - 9 > 0$$

Từ đó suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác các điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$. Vậy hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 35. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 6^{f(x)} + 8^{f(x)}$.



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đăng Trúc; Fb: Trúc Xinh

Chọn B

$$\text{Đặt } y = g(x) = 6^{f(x)} + 8^{f(x)}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 6^{f(x)} + 8^{f(x)} \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot 6^{f(x)} \cdot \ln 6 + f'(x) \cdot 8^{f(x)} \cdot \ln 8; \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \quad (1) \\ 6^{f(x)} \cdot \ln 6 + 8^{f(x)} \cdot \ln 8 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy:

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt và liên tục đổi dấu khi qua các nghiệm.

Phương trình (2) vô nghiệm vì $6^{f(x)} \cdot \ln 6 + 8^{f(x)} \cdot \ln 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt liên tục đổi dấu khi qua các nghiệm hay hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 36. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

B. Hàm số có hai điểm cực đại.

C. Hàm số có 3 điểm cực trị.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.

Lời giải

Tác giả: Dương Hồng ; Fb: Dương Hồng

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực tiểu là 3 khi $x_{ct} = 0$. Vậy mệnh đề ở đáp án D sai.

Câu 37. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2$. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x| - 1)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Tác giả: Trần Quốc An; Fb: Tran Quoc An

Phản biện: Lê Tuấn Anh

Chọn C

Nhận xét: Hàm số $g(x) = f(|x| - 1)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận Oy làm trục đối xứng, do đó ta chỉ xét đồ thị của hàm số $g_1(x) = f(x - 1)$ với $x \geq 0$ sau đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| - 1)$.

Xét $g_1(x) = f(x - 1) = (x - 1)^3 - 4(x - 1)^2$, với $x \geq 0$.

Ta có: $g_1'(x) = 3(x - 1)^2 - 8(x - 1)$

$$g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x - 11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{11}{3}$	-1	0	1	$\frac{11}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$			0		0	$+\infty$
					-3		
		$-\frac{256}{27}$				$-\frac{256}{27}$	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, ta thấy hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

Cách 2 : Xét đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 4x^2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		0		$-\frac{256}{27}$	$+\infty$
	$-\infty$				

Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua phải 1 đơn vị, ta có bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ như sau :

x	$-\infty$	1	$\frac{11}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		0		$-\frac{256}{27}$	$+\infty$
	$-\infty$				

Hàm số $g(x) = f(|x|-1)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục Oy làm trục đối xứng, do đó ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ ứng với $x \geq 0$ sau đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|-1)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(|x|-1)$:

x	$-\infty$	$-\frac{11}{3}$	-1	0	1	$\frac{11}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$			0		0	$+\infty$
					-3		
		$-\frac{256}{27}$				$-\frac{256}{27}$	

Câu 38. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$. Tìm m để hàm số có cực đại,

cực tiểu và đường thẳng qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số cắt đường tròn tâm $I(1; -1)$, bán kính $R = 2$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

- A. $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{7}{2} \end{cases}$. B. $m \in [1; 2]$. C. $m = \frac{7}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$

Lời giải

Tác giả: Ngô Gia Khánh; Fb: Khánh Ngô Gia

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \Rightarrow y = -2m\sqrt{m} + 2 \\ x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = 2m\sqrt{m} + 2 \end{cases}$ nên tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$M(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m}), N(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m})$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số:

$y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$.

(Phương trình đường thẳng $\Delta: y = r(x)$ đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có thể tìm

bằng cách xác định $r(x) = -2mx + 2$ là phần dư của phép chia $y = x^3 - 3mx + 2$ cho

$y' = 3x^2 - 3m$).

Diện tích tam giác IAB là: $S = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} \leq \frac{1}{2} R^2 = 2$. Diện tích S lớn nhất khi và chỉ khi $IA \perp IB$ hay tam giác IAB vuông cân tại I .

Khi đó, khoảng cách từ I đến Δ : $d(I, \Delta) = \frac{R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(I, \Delta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2m - 1 - 2|}{\sqrt{4m^2 + 1}} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (2m - 3)^2 = 8m^2 + 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 12m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m > 0$ suy ra $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 39. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

$$\text{A. } m \in \left[-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right].$$

$$\text{B. } m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1 \right] \cup \{-1\}.$$

$$\text{C. } m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty \right).$$

$$\text{D. } m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right] \cup \{-1\}.$$

Lời giải

Tác giả: Vũ Huỳnh Đức; Fb: Vũ Huỳnh Đức.

Phản biện: Hương Nguyễn; Fb: Hương Nguyễn.

Chọn D

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x = 2x[2x^2 + 6mx + 3(m+1)].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 2x^2 + 6mx + 3(m+1) = 0 \end{cases}$$

Nhận xét:

1) Hàm số $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ chỉ xảy ra hai trường hợp về cực trị

+ Trường hợp 1: Có 3 điểm cực trị trong đó có 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.

+ Trường hợp 2: Có đúng 1 điểm cực trị, đó là điểm cực tiểu.

2) Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Do đó, ta tìm m thỏa yêu cầu đề bài theo trình tự sau

+ $f(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $2x^2 + 6mx + 3(m+1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9m^2 - 6m - 6 > 0 \\ m+1 \neq 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty \right). \quad (1)$$

+ Lấy phần bù kết quả vừa tìm được ở (1):

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ có 1 điểm cực trị} \Leftrightarrow m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right] \cup \{-1\}.$$

Vậy hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi

$$m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right] \cup \{-1\}.$$

Câu 40. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho góc $\widehat{AOB} = 120^\circ$ với O là gốc tọa độ.

Lời giải

Tác giả: Fb:

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Đồ thị Hàm số luôn có hai điểm cực trị A, B:

$$A(0; m); \quad B(-2; 4 + m)$$

$$OA = |m|; \quad OB = \sqrt{m^2 + 8m + 20}$$

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} \Leftrightarrow \frac{m^2 + 4m}{|m| \cdot \sqrt{m^2 + 8m + 20}} = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |m| \cdot \sqrt{m^2 + 8m + 20} = -2m^2 - 8m$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} -2m^2 - 8m \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 0$$

Khi đó:

$$|m| \cdot \sqrt{m^2 + 8m + 20} = -2m^2 - 8m$$

$$\Leftrightarrow m^2(m^2 + 8m + 20) = 4m^4 + 32m^3 + 64m^2$$

$$\Leftrightarrow 3m^4 + 24m^3 + 44m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2(3m^2 + 24m + 44) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{Loại}) \\ m = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{3} \\ m = \frac{-12 - 2\sqrt{3}}{3} & (\text{Loại}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy các giá trị } m \text{ cần tìm là: } m = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{3}$$

Câu 41. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1; 1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$. B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Xuân Chính, Fb: Chính Nguyễn

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 3m$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m.$$

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Ta có: } y = x^3 - 3mx + 2 = \frac{1}{3}x(3x^2 - 3m) + (-2mx + 2) = \frac{1}{3}x.y' + (-2mx + 2).$$

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực trị là $y = -2mx + 2$.

Đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 < 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m > 0.$$

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin I = \frac{1}{2} \sin I \leq \frac{1}{2}.$$

Diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi ΔIAB vuông cân tại I .

$$\text{Do đó: } d(I, \Delta) = \frac{IA}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(4m^2 - 4m + 1) = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Câu 42. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 6.

B. 5.

C. 0.

D. 7.

Lời giải

Tác giả: Kiều Thị Thúy; Fb: Thúy Kiều

Chọn A

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị thì $f'(x)$ đổi dấu đúng một lần.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x = -1 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0 \end{cases}$$

Đặt $g(x) = x^2 + 2mx + 5$. Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị xảy ra các khả năng sau:

+) TH1: $g(x) = 0$ có nghiệm kép, điều kiện là $\Delta' = m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$ không thỏa mãn m nguyên.

+) TH2: $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng 0 (không thể xảy ra) hoặc

$$\text{có một nghiệm bằng } -1. \text{ TH này xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 5 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

+) TH3: $g(x) = 0$ vô nghiệm tức $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 5 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$, do m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$: có 5 giá trị của m . Vậy có 6 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

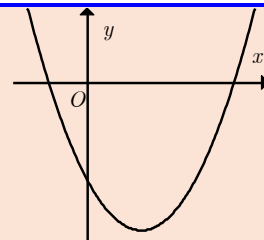
Câu 43. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

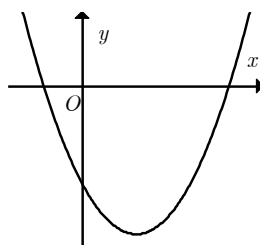
D. $a > 0, b > 0, c > 0$.



Lời giải

Tác giả: Công Phương; Fb: Nguyễn Công Phương

Chọn A



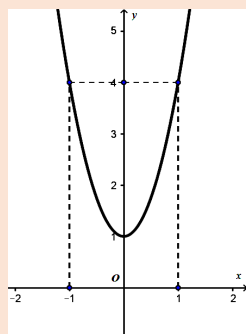
Vì đồ thị quay bề lõm lên trên nên $a > 0$, ta loại B

Đồ thị cắt trục oy tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$, ta loại C, D

Vậy A thỏa mãn.

Ghi chú: Với điều kiện trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b < 0$ (do $a > 0$) ta có thể loại được D

Câu 44. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?



A. $H = 64$.

B. $H = 51$.

C. $H = 45$.

D. $H = 58$.

Lời giải

Chọn D

Tác giả: Nguyễn Hoàng Anh; Fb: Nguyễn Hoàng Anh

+) Ta tính: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $d = 0$ và $a > 0$

+) Theo đồ thị: $f'(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$$f'(1) = 4 \Leftrightarrow 3a + 2b + 1 = 4$$

$$f'(-1) = 4 \Leftrightarrow 3a - 2b + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$+) f(4) - f(2) = 64a + 16b + 4c - 8a - 4b - 2c$$

$$= 56a + 12b + 2c$$

$$= 56.1 + 12.0 + 2.1 = 58$$

Câu 45. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x}$ có đồ thị (C) . Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Bá Đại; Fb: Nguyễn Bá Đại

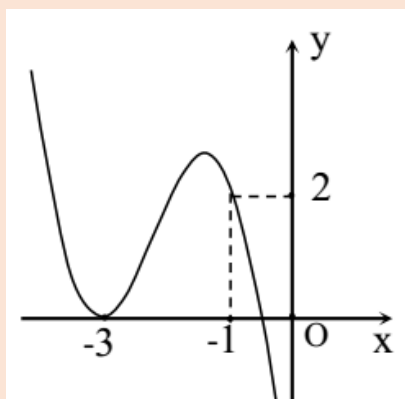
Chọn D

Tập xác định của hàm số là $D = [-2; 2] \setminus \{0\}$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x} = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x} = +\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng.

Câu 46. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Mai Hoa; Fb: Mai Hoa

Xét hàm số: $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ (1)

Điều kiện để $\sqrt{x^2 + x}$ có nghĩa khi $x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (*)

Vậy: Nếu $x = a$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (1) thì: $\begin{cases} a \leq -1 \\ a \geq 0 \end{cases}$.

Xét các phương trình:

1) $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$. (là các nghiệm của tử thức)

2) $\sqrt{x^2 + x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$. (là các nghiệm của tử thức).

3) $x = 0$ có nghiệm $x_1 = 0$.

Với $x \geq 0$, ta có: $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}[f^2(x) - 2f(x)]}$. Trường hợp này có một tiệm cận đứng $x = x_1$.

Với $x \leq -1$, ta có: $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{-x-1}}{\sqrt{-x}[f^2(x) - 2f(x)]}$. Khi đó nghiệm $x_1 = 0$ (loại).

4) $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$.

+ Xét $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_2 = -3$ (là nghiệm bội) và $x_3 \in (-1; 0)$ loại. Trường hợp này có một tiệm cận đứng: $x = x_2$.

+ Xét $f(x) = 2$ có 3 nghiệm gồm $x_4; x_5$ ($x_3; x_4 \neq -3$ và $x_4 < -1; x_5 < -1$) và $x_6 = -1$ (loại vì cả tử và mẫu thức cùng có nghiệm $x = -1$). Trường hợp này có hai tiệm cận đứng: $x = x_4, x = x_5$.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng gồm: $x = x_1, x = x_2, x = x_4, x = x_5$.

Cách khác

Xét phương trình $x[f^2(x) - 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị đề bài ta có:

Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = 3$ và nghiệm đơn $x = a \in (-1; 0)$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc 3 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ Suy ra $f(x) = -(x+3)^2(x-a)$.

Phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm phân biệt $x = \{-1; b; c\}$, với $c < -3; b \in (-3; -1)$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc 3 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ Suy ra $f(x) - 2 = -(x+1)(x-b)(x-c)$.

$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)}$$

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} y = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} y = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} \text{ không tồn tại.}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]}$ có 4 đường tiệm cận đứng $x=0, x=-3, x=b, x=c$.

Câu 47. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ (C) có đúng hai đường tiệm cận?

A. 19.

B. 18.

C. 20.

D. 17.

Lời giải

Tác giả: Trần Xuân Hiệp; Fb: xuanhiiep.tienthinh

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Bậc trên tử nhỏ hơn bậc dưới mẫu nên (C) có đường TCN $y=0$

$$y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \frac{-1}{(x+m+2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})}$$

$$\text{Để có 2 tiệm cận, ta cần thêm 1 TCD nữa: suy ra } \begin{cases} -m-2 \leq -3 \\ -m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

Vậy có 19 giá trị của m.

Câu 48. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2(m-1)x+4}$ có hai đường tiệm cận đứng nằm ở phía bên trái trục tung.

A. $m > 3$ và $m \neq \frac{7}{2}$.B. $m > 1$ và $m \neq \frac{7}{2}$.C. $m < -1$.D. $m < -1$ và $m \neq \frac{-3}{2}$.

Lời giải

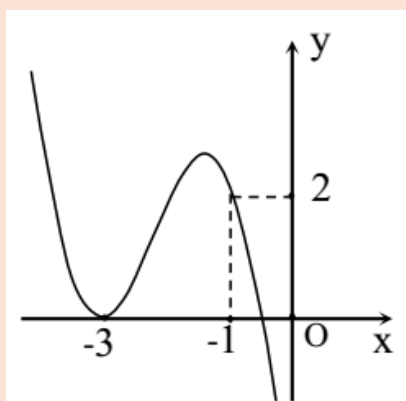
Tác giả: Nguyễn Thị Hoa ; Fb: Hoa Nguyen

Chọn D

Để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2(m-1)x + 4}$ có hai đường tiệm cận đứng nằm ở phía bên trái trục tung thì phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ có 2 nghiệm âm phân biệt và khác -1 . (1)

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - 4 > 0 \\ P = 4 > 0 \\ S = 2(m-1) < 0 \\ 2m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \\ m < 1 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Câu 49. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Mai Hoa ; Fb: Mai Hoa

Xét hàm số: $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ (1)

Điều kiện để $\sqrt{x^2 + x}$ có nghĩa khi $x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (*)

Vậy: Nếu $x = a$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (1) thì: $\begin{cases} a \leq -1 \\ a \geq 0 \end{cases}$.

Xét các phương trình:

1) $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$. (là các nghiệm của tử thức)

2) $\sqrt{x^2 + x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$. (là các nghiệm của tử thức).

3) $x = 0$ có nghiệm $x_1 = 0$.

Với $x \geq 0$, ta có: $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}[f^2(x) - 2f(x)]}$. Trường hợp này có một tiệm cận đứng $x = x_1$.

Với $x \leq -1$, ta có: $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{-x-1}}{\sqrt{-x}[f^2(x) - 2f(x)]}$. Khi đó nghiệm $x_1 = 0$ (loại).

4) $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$.

+ Xét $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_2 = -3$ (là nghiệm bội) và $x_3 \in (-1; 0)$ loại. Trường hợp này có một tiệm cận đứng: $x = x_2$.

+ Xét $f(x) = 2$ có 3 nghiệm gồm $x_4; x_5$ ($x_3; x_4 \neq -3$ và $x_4 < -1; x_5 < -1$) và $x_6 = -1$ (loại vì cả tử và mẫu thức cùng có nghiệm $x = -1$). Trường hợp này có hai tiệm cận đứng: $x = x_4, x = x_5$.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng gồm: $x = x_1, x = x_2, x = x_4, x = x_5$.

Cách khác

$$\text{Xét phương trình } x[f^2(x) - 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị đề bài ta có:

Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = 3$ và nghiệm đơn $x = a \in (-1; 0)$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc 3 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ Suy ra $f(x) = -(x+3)^2(x-a)$.

Phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm phân biệt $x = \{-1; b; c\}$, với $c < -3; b \in (-3; -1)$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc 3 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ Suy ra $f(x) - 2 = -(x+1)(x-b)(x-c)$.

$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)}$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} y = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} y = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = +\infty.$$

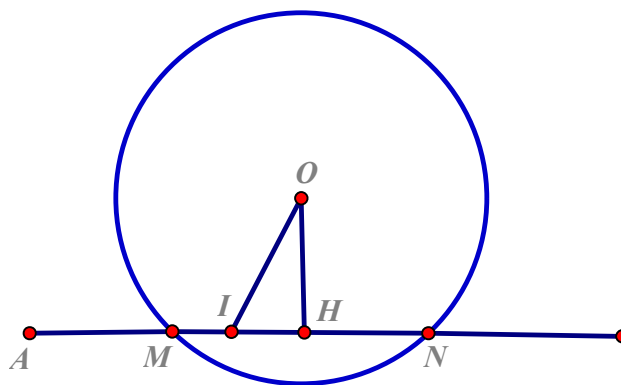
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x(x+3)^2(x-a)(x+1)(x-b)(x-c)} \text{ không tồn tại.}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có 4 đường tiệm cận đứng $x = 0, x = -3, x = b, x = c$.

Câu 50. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + 2m - 2 (C)$ với m là tham số. Gọi A là một điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(T): x^2 + y^2 = 4$ tại hai điểm phân biệt tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



Ta có $A(1; m-1)$.

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A . Phương trình đường thẳng d là:

$$y = (4-2m)(x-1) + m-1 \Leftrightarrow (4-2m)x - y + 3m - 5 = 0.$$

Đường thẳng d luôn đi qua điểm cố định $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ nằm trong đường tròn.

Do đó d luôn cắt đường tròn tại hai điểm M, N . Gọi H là trung điểm MN .

$$\text{Ta có: } MN = 2MH = 2\sqrt{4-OH^2} \geq 2\sqrt{4-OI^2} = \sqrt{3}$$

$$MN_{\min} \Leftrightarrow H \equiv I \Leftrightarrow OI \perp d \Leftrightarrow \frac{4-2m}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow m = \frac{11}{4}.$$

Vậy với $m = \frac{11}{4}$ thì MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{3}$.

Câu 51. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = -x + \frac{6}{7}.$

B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}.$

C. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}.$

D. $y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}.$

Lời giải

Tác giả: Trần Vinh; Fb: Vinh Trần

Chọn C

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$$\text{Ta có } [f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3 \Rightarrow 4f'(1+2x) \cdot f(1+2x) = 1 + 3f'(1-x) \cdot [f(1-x)]^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra} \quad & \begin{cases} [f(1)]^2 = 0 - [f(1)]^3 \\ 4f'(1) \cdot f(1) = 1 + 3f'(1) \cdot [f(1)]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \\ 4f'(1) \cdot f(1) = 1 + 3f'(1) \cdot [f(1)]^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} f(1) = 0 \\ 4f'(1) \cdot f(1) = 1 + 3f'(1) \cdot [f(1)]^2 \end{cases} \quad (\text{vn}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = -\frac{1}{7} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} f(1) = -1 \\ 4f'(1) \cdot f(1) = 1 + 3f'(1) \cdot [f(1)]^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

$$y = -\frac{1}{7}(x-1) - 1 \text{ hay } y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}.$$

Câu 52. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + x + 2m+1$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + m + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 19.

Khi đó, $m_1 + m_2$ bằng

- A. -4. B. 0. C. 2. D. -2.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Bá Long; Fb: Nguyễn Bá Long

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là:

$$x^3 - (m+1)x^2 + x + 2m+1 = x + m + 1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (m+1)x^2 + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - mx - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - mx - m = 0 \end{cases}$$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt A, B, C khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt, khi đó phương trình $x^2 - mx - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\text{Do đó } \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ \Delta = m^2 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát, ta gọi $A(1; m+2)$, $B(x_1; x_1 + m + 1)$, $C(x_2; x_2 + m + 1)$

Khi đó, x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx - m = 0$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B, C với đồ thị (C) tương ứng là $y'(1)$, $y'(x_1)$, $y'(x_2)$

Với $y' = 3x^2 - 2(m+1)x + 1$

Theo giả thiết $y'(1) + y'(x_1) + y'(x_2) = 19$, ta được

$$4 - 2(m+1) + 3x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 1 + 3x_2^2 - 2(m+1)x_2 + 1 = 19$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 2(m+1)(x_1 + x_2) + 6 - 2(m+1) = 19 \quad (2)$$

Thay $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$ vào phương trình (2) ta được

$$3m^2 + 6m - 2m(m+1) - 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*))}$$

Vậy $m_1 + m_2 = -2$.

Câu 53. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thủy; Fb: diephoang

Chọn C

Hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0; \frac{2x_0+1}{x_0+1}\right)$ song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ nên ta có

$$y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

• Với $x_0 = 0$ ta có $M(0;1)$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0;1)$ là $y = x + 1$ (loại).

• Với $x_0 = -2$ ta có $M(-2;3)$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2;3)$ là $y = x + 5$.

Vậy có 1 tiếp tuyến của (C) thỏa mãn đề bài.

Câu 54. (HSG12 Cao Bằng năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $y = -3x + 1$.

Lời giải

a) Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ nên hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $3x^2 - 6x = -3 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$. Phương trình tiếp tuyến: $y = -3(x - 1) + 2$ hay $y = -3x + 5$ (thỏa mãn song song với đường thẳng $y = -3x + 1$).

Câu 55. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) .

b) Gọi A, B là các điểm cực trị của (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc Parabol $(P): y = x^2$ sao cho tam giác AMB vuông tại M .

Lời giải

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta có các điểm cực trị của (C) là: $A(0; 4)$ và $B(2; 0)$.

Gọi $M(x; x^2)$ thuộc (P) . Khi đó: $\overrightarrow{AM} = (x; x^2 - 4)$ và $\overrightarrow{BM} = (x - 2; x^2)$. Vì A, B không thuộc (P) nên

tam giác AMB vuông tại $M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) + x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 3x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x(x + 1)^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy có ba điểm thuộc (P) để tam giác AMB vuông tại M là $M_1(0; 0)$, $M_2(-1; 1)$, $M_3(2; 4)$.

Câu 56. (HSG12 HCM năm 2018-2019) Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2$ có đồ thị (C) . Xét M di chuyển trên (C) và có hoành độ $m \in (-1; 1)$. Tiếp tuyến của (C) ở M cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt và khác M . Tìm giá trị lớn nhất của tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Lời giải

Tác giả: Lương Thị Hương Liễu ; Fb: Hương Liễu Lương.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$.

Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $(m; (m^2 - 1)^2)$:

Câu 1. $(\Delta): y = (4m^3 - 4m)(x - m) + (m^2 - 1)^2 \Leftrightarrow y = (4m^3 - 4m)x - 3m^4 + 2m^2 + 1$.

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (Δ) :

Câu 3. $(x^2 - 1)^2 = (4m^3 - 4m)x - 3m^4 + 2m^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - (4m^3 - 4m)x + 3m^4 - 2m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - m)^2(x^2 + 2mx + 3m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ g(x) = x^2 + 2mx + 3m^2 - 2 = 0(*) \end{cases}$$

Điều kiện: (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác $m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -2m^2 + 2 > 0 \\ g(m) = 6m^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$

Giả sử (C) và (Δ) cắt nhau tại hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Ta có $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -m$.

Suy ra, $y_I = (4m^3 - 4m)(-m - m) + (m^2 - 1)^2 = -7m^4 + 6m^2 + 1 = f(m)$.

Xét $f'(m) = -28m^3 - 12m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm \frac{\sqrt{21}}{7} \end{cases}.$

Bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{\sqrt{21}}{7}$	0	$\frac{\sqrt{21}}{7}$	1
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$		$\frac{16}{7}$	1	$\frac{16}{7}$	

Từ BBT, ta có $\max_{(-1;1)} f(m) = \frac{16}{7}$ khi $m = \pm \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $y_I = \frac{16}{7}$ là giá trị cần tìm.

Câu 57. (HSG12 Hà Nội năm 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{-x}{2x+1}$ có đồ thị là (C) và đường thẳng d có phương trình $y = x + m$, m là tham số. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B là lớn nhất.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoàng Huy; Fb: Nguyen Hoang Huy

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Ta có $y = \frac{-x}{2x+1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(2x+1)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{-x}{2x+1} = x + m \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m = 0$ (1).

Ta có: $\begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m + 1 - 2m = m^2 + 1 > 0, \forall m \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0, \forall m \end{cases}$ nên đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị thực m .

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của điểm A và B khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1)

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -(m+1) \\ P = x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}.$$

Suy ra tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là

$$K = -\left[\frac{1}{(2x_1+1)^2} + \frac{1}{(2x_2+1)^2} \right] = -\frac{4S^2 - 8P + 4S + 2}{(4P + 2S + 1)^2} = -(4m^2 + 2) \leq -2.$$

Vậy tổng hệ số góc lớn nhất của các tiếp tuyến với (C) tại A và B bằng -2 đạt được khi $m = 0$.

Câu 58. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó song song với d .

Lời giải

Tác giả: Lê Hoàn; Fb: Lê Hoàn

1. $d: x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow d: y = x - 1 \Rightarrow d$ có hệ số góc $k_d = 1$.

Xét hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$+ y' = \frac{1}{(x-2)^2}, \forall x \neq 2.$$

Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ (với $x_0 \neq 2$).

Δ có hệ số góc là $k_\Delta = \frac{1}{(x_0-2)^2}$ và phương trình $\Delta: y = \frac{1}{(x_0-2)^2} \cdot x - \frac{x_0}{(x_0-2)^2} + \frac{2x_0-3}{x_0-2}$.

$$+ \text{Giả sử } \Delta // d \text{ ta được } k_\Delta = k_d \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-2)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{cases}.$$

+ Thử lại:

- $x_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = x + 3$ thỏa mãn $\Delta // d$.
- $x_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = x - 1 \Rightarrow \Delta \equiv d$ không thỏa mãn.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y = x + 3$.

Câu 59. (HSG12 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B .

- a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
 b) Xác định tọa độ điểm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Trọng Nghĩa; Fb: Huỳnh Trọng Nghĩa

a) Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. Gọi $M\left(a; \frac{2a-1}{a-1}\right) (a \neq 1)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm M là: $y = -\frac{1}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{2a-1}{a-1}$

Giả sử A, B lần lượt là giao điểm của d với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Suy ra: $A\left(1; \frac{2a}{a-1}\right), B(2a-1; 2)$

Khi đó: $\begin{cases} x_A + x_B = 1 + (2a-1) = 2a = 2x_M \\ y_A + y_B = \frac{2a}{a-1} + 2 = \frac{4a-2}{a-1} = 2y_M \end{cases} \Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

b) Ta có $IA = \frac{2}{|a-1|}; IB = 2|a-1| \Rightarrow IA \cdot IB = 4$

Tam giác IAB vuông tại I nên:

$$IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 4 + 2\sqrt{2}$$

Vậy chu vi tam giác IAB nhỏ nhất bằng $4 + 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi:

$$IA = IB \Leftrightarrow \frac{2}{|a-1|} = 2|a-1| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow M(0; 1) \\ a = 2 \Rightarrow M(2; 3) \end{cases}$$

Câu 60. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Cho hàm số $y = x^4 - 14x^2 + 20x + 4$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = -4x + 15$.

Lời giải

Tác giả: Hoa Mùi; Fb: Hoa Mùi

Ta có: $y = x^4 - 14x^2 + 20x + 4 \Rightarrow y' = 4x^3 - 28x + 20$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = -4x + 15$

$\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là: $k_t = -4 \Leftrightarrow y'(x_0) = -4$

$$y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 28x_0 + 20 = -4 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 28x_0 + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 11 \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -101 \end{cases} .$$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_1(1;11)$ là: $y = -4(x-1) + 11 = -4x + 15$ (loại)

Phương trình tiếp tuyến tại $M_2(2;4)$ là: $y = -4(x-2) + 4 = -4x + 12$ (nhận)

Phương trình tiếp tuyến tại $M_3(-3;-101)$ là: $y = -4(x+3) - 101 = -4x - 113$ (nhận)

Vậy các tiếp tuyến thỏa yêu cầu là: $y = -4x + 12$, $y = -4x - 113$.

Câu 61. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc trục Oy , có tung độ là số nguyên nhỏ hơn 2019 và thỏa mãn từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục Ox ?

Lời giải

Tác giả: Lê Hoàn ; Fb: Lê Hoàn

$$y = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow y = 1 + \frac{3}{x-1}.$$

Gọi $M(0; m) \in Oy$.

Gọi tiếp tuyến của (C) đi qua M là đường thẳng $d: y = kx + m$.

$$\text{Yêu cầu của đề bài, điều kiện là hệ phương trình } \begin{cases} kx + m = 1 + \frac{3}{x-1} & (1) \\ k = \frac{-3}{(x-1)^2} & (2) \end{cases} \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \neq 1 \text{ và thỏa}$$

$$\text{mãn } \begin{cases} y(x_1) < 0 \\ y(x_2) > 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét điều kiện } \begin{cases} y(x_1) < 0 \\ y(x_2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{3}{x_1-1} < 0 \\ 1 + \frac{3}{x_2-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_1-1} < -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x_2-1} > -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{-3x}{(x-1)^2} + m = 1 + \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{6}{x-1} + 1 - m = 0 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x-1} = t \quad (t \neq 0), \text{ phương trình (3) trở thành } 3t^2 + 6t + 1 - m = 0 \quad (4)$$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (4) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < -\frac{1}{3} < t_2 \neq 0$

Đặt $f(t) = 3t^2 + 6t + 1 - m$, với điều kiện trên ta có bảng biến thiên như sau

t	$-\infty$	t_1	$-\frac{1}{3}$	t_2	$+\infty$
$f(t)$					

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện là

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{3}\right) < 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 - m < 0 \\ 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{2}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Do m là số nguyên nhỏ hơn 2019 nên $m \in \{0; 2; 3; \dots; 2018\}$

$\Rightarrow$ có 2018 điểm M .

Cách 2 *Tác giả: Nguyễn Ngọc Như Trang ; Fb: nhutrangnguyenngoc*

$$y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Gọi Δ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại $K(x_0; y_0)$

$$\text{Ta có: } (\Delta): y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1}$$

$$M \in Oy \Rightarrow M(0; m).$$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow m = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ m(x_0-1)^2 = 3x_0 + (x_0+2)(x_0-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ f(x_0) = (m-1)x_0^2 - 2(m+2)x_0 + m+2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 sao cho $y(x_1) \cdot y(x_2) < 0$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 3(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -2 \end{cases} \quad (2).$$

$$\square y(x_1) \cdot y(x_2) < 0 \Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+2}{x_2-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{m+2}{m-1} + \frac{4(m+2)}{m-1} + 4}{\frac{m+2}{m-1} - \frac{2(m+2)}{m-1} + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{9m+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow m > \frac{-2}{3} \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra: $\begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{-2}{3} \end{cases}$

Do $m \in \mathbb{Z}, m < 2019$

nên $m \in \{0; 2; 3; \dots; 2018\}$. Vậy có 2018 giá trị m thỏa đề.

Câu 62. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019)

Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 2$ có đồ thị (C) và $M(m; 2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để qua M có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) . Tổng các phần tử S là

A. $\frac{20}{3}$. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{12}{3}$. D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Quân ; Fb: Quân Nguyễn

Chọn A

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $M(m; 2)$ có hệ số góc k .

$$\Rightarrow \Delta: y = k(x - m) + 2.$$

Δ là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -x^3 + 6x^2 + 2 = k(x - m) + 2 & (1) \\ k = -3x^2 + 12x & (2) \end{cases} \quad (*)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $-x^3 + 6x^2 + 2 = (-3x^2 + 12x)(x - m) + 2$.

$$\Leftrightarrow x[2x^2 - (3m + 6)x + 12m] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - (3m + 6)x + 12m = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị $(C) \Leftrightarrow$ hệ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có một nghiệm kép khác 0 hoặc có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 x_2 = 0$.

$$+ \text{Phương trình (3) có một nghiệm kép khác 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 6)^2 - 96m = 0 \\ \frac{6 + 3m}{4} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = \frac{2}{3} \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$+ \text{Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa } x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3m+6)^2 - 96m > 0 \\ 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < \frac{2}{3} \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

$$\text{Suy ra } S = \left\{ 0; \frac{2}{3}; 6 \right\}.$$

$$\text{Vậy tổng các phần tử của } S \text{ là } 0 + \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3}.$$

Câu 63. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019)

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) biết (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{10} \cdot OA$ (với O là gốc tọa độ).

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq \frac{1}{2}$

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \neq \frac{1}{2}$ nên tiếp tuyến của (C) luôn có hệ số góc âm.

Tam giác OAB vuông tại O mà $AB = \sqrt{10} \cdot OA$ từ đó ta có $OB = 3OA$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến (d) . Khi đó ta có $k < 0$ nên $k = -\tan \widehat{OAB} = -\frac{OB}{OA} = -3$.

Gọi m là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với đồ thị (C) .

$$\text{Ta có } -\frac{3}{(2m-1)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}.$$

+) Nếu $m = 0$, khi đó tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với đồ thị (C) là $M(0; -1)$.

Phương trình của (d) là: $y = -3(x-0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1$.

+) Nếu $m = 1$, khi đó tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với đồ thị (C) là $N(1; 2)$.

Phương trình của (d) là: $y = -3(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = -3x + 5$.

Vậy có hai tiếp tuyến của (C) cần tìm là $y = -3x - 1$ và $y = -3x + 5$.

Câu 64. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019)

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại $A(0;-1)$, tiếp tuyến tại A có hệ số góc $k = -3$. Các giá trị của $a; b$ là

- A. $a = 2; b = 1$. B. $a = 1; b = 2$. C. $a = 1; b = 1$. D. $a = 2; b = 2$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Phương Mai; Fb: Phương Mai.

Chọn A

Vì đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại $A(0;-1)$ nên: $-1 = \frac{a \cdot 0 + b}{0-1} \Leftrightarrow b = 1$.

Ta có: $y' = \frac{-a-b}{(x-1)^2}$. Tiếp tuyến tại $A(0;-1)$ có hệ số góc là $k = -3 \Leftrightarrow y'(0) = -3 \Leftrightarrow -a-b = -3 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $a = 2; b = 1$.

Câu 65. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019)

Số phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 8x - \frac{97}{3}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương là:

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tường Linh; Fb: Khoisx Bvkk

Chọn A

* $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, $y' = x^2 - 4x + 3$.

* Ta có: $x^2 - 4x + 3 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1, y = -\frac{13}{3} \\ x = 5, y = \frac{23}{3} \end{cases}$.

* Phương trình tiếp tuyến:

+ $y = 8(x+1) - \frac{13}{3} \Leftrightarrow y = 8x + \frac{11}{3}$.

+ $y = 8(x-5) + \frac{23}{3} \Leftrightarrow y = 8x - \frac{97}{3}$ (Loại).

* Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành:

$8x + \frac{11}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{24}$ (Loại).

Câu 66. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019)

Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau?

A. 5. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Nam ; Fb: Jonr Nguyễn Nam

Chọn B

+ Để đồ thị cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 2mx + m = 0(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m^2 + 2m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \\ m \neq 0; m \neq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \\ m \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

+ Gọi $A(x_1; 0); B(x_2; 0)$ là giao điểm của đồ thị và trục Ox . Khi đó $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (*).

$$+ \text{ Tính đạo hàm } y' = \frac{x^2 + 2mx - 2m^2 - m}{(x + m)^2}$$

+ Hệ số góc của tiếp tuyến tại A:

$$k_A = \frac{x_1^2 + 2mx_1 - 2m^2 - m}{(x_1 + m)^2} = \frac{2mx_1 - m + 2mx_1 - 2m^2 - m}{(x_1 + m)^2} = \frac{4mx_1 - 2m^2 - 2m}{(x_1 + m)^2}$$

+ Hệ số góc của tiếp tuyến tại B:

$$k_B = \frac{x_2^2 + 2mx_2 - 2m^2 - m}{(x_2 + m)^2} = \frac{2mx_2 - m + 2mx_2 - 2m^2 - m}{(x_2 + m)^2} = \frac{4mx_2 - 2m^2 - 2m}{(x_2 + m)^2}$$

$$\text{Vì tiếp tuyến tại A và B vuông góc lên ta có } k_A \cdot k_B = -1 \Leftrightarrow \frac{4mx_1 - 2m^2 - 2m}{(x_1 + m)^2} \cdot \frac{4mx_2 - 2m^2 - 2m}{(x_2 + m)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{16m^2 x_1 x_2 - (x_1 + x_2)(8m^3 + 8m^2) + (2m^2 + 2m)^2}{[(x_1 + m)(x_2 + m)]^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{16m^2 x_1 x_2 - (x_1 + x_2)(8m^3 + 8m^2) + (2m^2 + 2m)^2}{[x_1 x_2 + (x_1 + x_2)m + m^2]^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{16m^2(m) - (2m)(8m^3 + 8m^2) + (2m^2 + 2m)^2}{[m + (2m)m + m^2]^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{16m^3 - (16m^4 + 16m^3) + (2m^2 + 2m)^2}{[m + 2m^2 + m^2]^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{16m^3 - (16m^4 + 16m^3) + (2m^2 + 2m)^2}{[m + 3m^2]^2} = -1 \Leftrightarrow 3m^4 + 14m^3 + 5m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0(l) \\ m = \frac{-7 - \sqrt{34}}{3} (c) \\ m = \frac{-7 + \sqrt{34}}{3} (c) \end{cases}$$

Câu 67. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2 (C)$. Biết rằng đường thẳng $d: y = mx + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C . Tiếp tuyến tại ba điểm A, B, C của đồ thị (C) cắt đồ thị (C) lần lượt tại các điểm A', B', C' (tương ứng khác A, B, C). Biết rằng A', B', C' thẳng hàng, tìm giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua ba điểm A', B', C' song song với đường thẳng $\Delta: y = 9x + 1$.

- A. $m = 1$. B. $m = 10$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Lời giải

Tác giả: Trần Xuân Hiệp; Fb: xuanhiep.tienthinh

Chọn C

Xét phương trình: $x^3 - 3x + 2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^3 - (3+m)x + 1 = 0 (*)$

Gọi a là nghiệm của phương trình ta có tọa độ giao điểm là: $M(a; a^3 - 3a + 2)$

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y = (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a + 2 = (3a^2 - 3)x - 2a^3 + 2$

Xét phương trình giao điểm của (C) và tiếp tuyến: $x^3 - 3x + 2 = (3a^2 - 3)x - 2a^3 + 2$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0;$$

Vậy tiếp tuyến tại M cắt (C) tại điểm N khác; $N(-2a; -8a^3 + 6a + 2)$;

Nhận xét: $-8a^3 + 6a + 2 = -8[a^3 - (3+m)a + 1] + (-8m - 18)a + 10 = (-8m - 18)a + 10$ {vì a là nghiệm của phương trình (*)}

Ta có $N(-2a; (-8m - 18)a + 10) = (-2a; (4m + 9)(-2a) + 10)$; suy ra N nằm trên đường thẳng có phương trình: $y = (4m + 9)x + 10$

Theo giả thiết ta có: $4m + 9 = 9 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 68. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019)

Cho hàm số $y = \frac{-5x - 6}{x + 2}$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với trục tung một góc 45° .

Lời giải

Tác giả: Đỗ Văn Dương; Fb: Dương Đỗ Văn

Ta có: $f'(x_0) = \frac{-4}{(x_0 + 2)^2}$. Tiếp tuyến tạo với trục Oy góc $45^\circ \Rightarrow k = \pm 1$

Với $k = 1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0 + 2)^2} = 1$ (Vô nghiệm)

Với $k = -1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0 + 2)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -3 \Rightarrow$ PTTT có dạng: $y = -1(x - 0) - 3 = -3$

Với $x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = -7 \Rightarrow$ PTTT có dạng: $y = -1(x + 4) - 7 = -x - 11$

Câu 69. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019)

Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$?

- A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. C. $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. D. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Văn Lưu; Fb: Bùi Văn Lưu

Chọn D

Từ $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$, cho $x = 0$ ta được: $[f(1)]^2 = -[f(1)]^3 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$.

Từ $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$, lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$4f(1+2x) \cdot f'(1+2x) = 1 + 3f^2(1-x) \cdot f'(1-x).$$

Cho $x = 0$ ta được: $4f(1) \cdot f'(1) = 1 + 3f^2(1) \cdot f'(1)$ (*).

Với $f(1) = 0$ thì (*) vô lý.

Với $f(1) = -1$ thì (*) trở thành: $-4f'(1) = 1 + 3f'(1) \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{1}{7}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{7}(x-1) - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

Câu 70. (HSG10 Nam Tiền Hải Thái Bình 2018-2019)

Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + 2m^2 - 4m$ có đồ thị là (P_m) .

- Tìm m để (P_m) cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.
- Tìm các giá trị của k để phương trình $|x^2 - 4x| = k$ có 4 nghiệm phân biệt

Lời giải

1. Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa (P_m) và Ox :

$$x^2 - 2mx + 2m^2 - 4m = 0 \quad (1).$$

(P_m) cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu

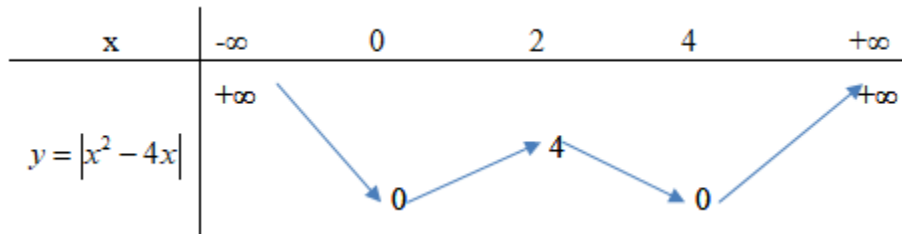
$$\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (2m^2 - 4m) < 0 \Leftrightarrow 2m \cdot (m - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2.$$

Vậy $0 < m < 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

2. Xét (P_0) : $y = x^2 - 4x$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$, đỉnh $I(2; -4)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_0) và Ox là $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |x^2 - 4x|$ là



Từ bảng biến thiên phương trình $|x^2 - 4x| = k$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < k < 4$.

Vậy $0 < k < 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 71. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019)

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng d có phương trình: $y = 2x + m$. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{5}{4}$ (với O là gốc tọa độ).

Lời giải

+ Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x+1 = (x-1)(2x+m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = 2x^2 + (m-4)x - (m+1) = 0 \end{cases}$$

+ Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-4)^2 + 8(m+1) > 0 \\ g(1) = -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 24 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ g(1) = -3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 24 > 0 \quad (\forall m \in \mathbb{R})$$

+ Gọi $A(x_1; 2x_1 + m); B(x_2; 2x_2 + m)$

Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$

Theo định lý Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m-4}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{m+1}{2} \end{cases}$$

+ Ta có $d: y = 2x + m \Leftrightarrow 2x - y + m = 0$

Mặt khác ta có: $d(O, d) = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$

$$AB^2 = 5(x_1 - x_2)^2 = 5\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 5\left[\left(\frac{m-4}{2}\right)^2 + \frac{4m+4}{2}\right] = \frac{5(m^2 + 24)}{4}$$

$$+ \text{ Khi đó } S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot d(O, d) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5(m^2 + 24)}}{2} = \frac{|m|\sqrt{m^2 + 24}}{4}$$

$$S_{OAB} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow |m|\sqrt{m^2 + 24} = 5$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 24m^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 25) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m = \pm 1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 72. (HSG12 tỉnh Thái Nguyên năm 2018-2019)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) , đường thẳng (d) đi qua $A(1; 2)$ và có hệ số góc m . Tìm m để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $BC = 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thế Quốc; Fb: Quốc Nguyễn.

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A có hệ số góc m là $y = m(x - 1) + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (C)

$$x^3 - 3x^2 + 4 = m(x - 1) + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases}$$

Giả sử $g(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , trong đó x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của điểm B và C

Theo định lý Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -m - 2 \end{cases}$$

Vì hai điểm B và C thuộc đường thẳng (d) nên $B(x_1; m(x_1 - 1) + 2), C(x_2; m(x_2 - 1) + 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } BC^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + [m(x_2 - 1) - m(x_1 - 1)]^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + [m(x_2 - x_1)]^2 = (x_2 - x_1)^2 (m^2 + 1) = (m^2 + 1)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] \\ &= (m^2 + 1)[4 - 4(-m - 2)] = (m^2 + 1)[4m + 12] = 4m^3 + 12m^2 + 4m + 12 = 32 \\ &\Leftrightarrow m = 1. \end{aligned}$$

Thử lại, thay $m = 1$ vào $g(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1; x_2 = 3$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 1$.

Câu 73. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019)

Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $a > 0$. Xét hai hàm số $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ và $g(x) = x^2 + ax + b$. Tìm tất cả các giá trị của a và b biết giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 8 đơn vị và đồ thị của hai hàm số trên có đúng một điểm chung.

Lời giải

Tác giả: Phan Thị Quyên ; Fb: Quyên Phan

Ta có giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là: $f(1) = 3$

Giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ là: $g\left(-\frac{a}{2}\right) = b - \frac{a^2}{4}$

Do giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 8 đơn vị nên ta có phương trình:

$$b - \frac{a^2}{4} + 8 = 3 \Leftrightarrow b = \frac{a^2}{4} - 5 \quad (1)$$

Mặt khác đồ thị hai hàm số trên có đúng một điểm chung nên phương trình:

$$2x^2 - 4x + 5 = x^2 + ax + b \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a+4)x + 5 - b = 0 \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+4)^2 - 4(5-b) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được: } (a+4)^2 - 4\left(5 - \frac{a^2}{4} + 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -6 \end{cases}$$

Do $a > 0$ nên $a = 2$ thỏa mãn. Thế $a = 2$ trở lại (1) ta được $b = -4$.

Vậy: $a = 2, b = -4$.

Câu 74. (HSG12 tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019) Cho hai hàm số $y = x^3 + x^2 - 3x - 1$, $y = 2x^3 + 2x^2 - mx + 2$ có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$ và m là tham số thực. Tìm m để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt có tung độ là y_1, y_2, y_3 thỏa $\frac{1}{y_1+4} + \frac{1}{y_2+4} + \frac{1}{y_3+4} = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Giả sử A, B, C là giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho thì tọa độ A, B, C thỏa hệ

$$\begin{cases} y = x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ y = 2x^3 + 2x^2 - mx + 2 \end{cases}$$

Nên cũng thỏa phương trình hệ quả của hệ là: $y = (m-6)x - 4$.

Khi đó, ta có: $y_1 + 4 = (m-6)x_1$, $y_2 + 4 = (m-6)x_2$, $y_3 + 4 = (m-6)x_3$ với x_1, x_2, x_3 là nghiệm phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x^2 + (3-m)x + 3 = 0$.

Theo Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3 - m \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}.$$

Và từ giả thiết thì:
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{y_1+4} + \frac{1}{y_2+4} + \frac{1}{y_3+4} = \frac{1}{m-6} \cdot \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{m-3}{3(m-6)}.$$

Từ đây giải ra được $m=9$.

Thử lại, $m=9$ thì phương trình $x^3 + x^2 - 6x + 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt theo câu 1 nên $m=9$ là giá trị cần tìm.

Câu 75. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019)

Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị là (C) và hai điểm $M(-3;0)$, $N(-1;-1)$. Tìm trên đồ thị hàm số (C) hai điểm A, B sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng MN .

Lời giải

Phương trình đường thẳng MN là: $x + 2y + 3 = 0$.

Phương trình đường thẳng AB là: $y = 2x + m$.

Khi đó hai điểm A, B có hoành độ thỏa mãn: $\frac{2x-4}{x+1} = 2x + m$. Điều kiện: $x \neq -1$.

Phương trình tương đương với: $2x^2 + mx + m + 4 = 0$ (1)

Đường thẳng AB cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2 - m + m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 8m - 32 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 + 4\sqrt{3} \\ m < 4 - 4\sqrt{3} \end{cases}.$$

Trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ là $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; x_1+x_2+m\right)$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Mà $x_1+x_2 = -\frac{m}{2}$ nên $I\left(-\frac{m}{4}; \frac{m}{2}\right)$.

Hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng MN khi và chỉ khi điểm I thuộc đường thẳng MN , khi và chỉ khi

$$-\frac{m}{4} + 2\frac{m}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Suy ra $A(0;-4)$, $A(2;0)$ hoặc $A(2;0)$, $B(0;-4)$.

Câu 76. (HSG10 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) : $y = x^2 - 4x + 3$, điểm $I(1, 4)$ và đường thẳng d : $y = mx + m + 8$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB cân tại I

Lời giải

Người giải: Nguyễn Thị Thảo ; Fb: Cỏ Vô Ưu

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d là:

$$x^2 - 4x + 3 = mx + m + 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+4)x - m - 5 = 0 \quad (1)$$

Để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow \Delta = (m+6)^2 > 0$

$$\Leftrightarrow m \neq -6.$$

Tam giác IAB cân tại I khi và chỉ khi I, A, B không thẳng hàng và $IA^2 = IB^2$

* I, A, B không thẳng hàng $\Leftrightarrow I \notin d \Leftrightarrow 2m+8 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq -2$

* $IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 4)^2 = (x_2 - 1)^2 + (y_2 - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (mx_1 + m + 4)^2 = (x_2 - 1)^2 + (mx_2 + m + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \left[(1+m^2)(x_1 + x_2) + 2m^2 + 8m - 2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ (1+m^2)(x_1 + x_2) + 2m^2 + 8m - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (1+m^2)(x_1 + x_2) + 2m^2 + 8m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 9m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 - \sqrt{3} \\ m = -2 + \sqrt{3} \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của m thỏa yêu cầu đề bài là $m = -2 - \sqrt{3}$, $m = -2 + \sqrt{3}$

Câu 77. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $O(0;0)$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + 3m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn trọng tâm G của tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - y + m^3 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+3}{x+2} = 2x + 3m$ (với x là ẩn số) (1).

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ 2x^2 + 3(m+1)x + 6m - 3 = 0 \end{cases}$$

Khi đó $2x^2 + 3(m+1)x + 6m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 9(m+1)^2 - 8(6m-3) > 0 \\ 8 - 6(m+1) + 6m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 30m + 33 > 0 \text{ luôn đúng với mọi } m \in \mathbb{R}.$$

Ta có $O \notin d \Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

Theo Định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -\frac{3(m+1)}{2}$.

Giả sử $A(x_1; 2x_1 + 3m)$, $B(x_2; 2x_2 + 3m)$.

Khi đó $G\left(\frac{x_1 + x_2}{3}; \frac{2(x_1 + x_2) + 6m}{3}\right)$ hay $G\left(-\frac{m+1}{2}; m-1\right)$.

Ta có $G \in \Delta \Leftrightarrow m^3 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện $m \neq 0$ ta được tất cả các giá trị cần tìm của m là $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$.

Câu 78. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019)

Cho hàm số $y = (m-3)x - 2m + 1$ có đồ thị là đường thẳng d . Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt trục Ox , Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân. Số tập con của tập S là

A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hương Thom; Fb: Thom Nguyen

Chọn D

+) Do đường thẳng d cắt trục Ox , Oy tại hai điểm A, B tạo thành một tam giác nên $m \neq 3$ và $m \neq \frac{1}{2}$. Với điều kiện đó ta có

+) d cắt trục Ox tại điểm $A\left(\frac{2m-1}{m-3}; 0\right)$

+) d cắt trục Oy tại điểm $B(0; -2m+1)$

+) Tam giác OAB cân nên $OA = OB$.

+) $OA = OB \Rightarrow \left|\frac{2m-1}{m-3}\right| = |-2m+1| \Rightarrow \begin{cases} |2m-1| = 0 \\ |m-3| = 1 \end{cases}$

+) $|2m-1| = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (loại)

+) $|m-3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 = 1 \\ m-3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 2 \end{cases}$

Vậy $S = \{2; 4\}$ nên số tập con của S là 4.

Cách 2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (10k+15)^2 + 4 \cdot 12^2 \cdot k > 0 \\ -12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k > \frac{-219+84\sqrt{6}}{50} \\ k < \frac{-219-84\sqrt{6}}{50} \end{cases} \quad (1).$$

+ Với k thỏa mãn (1), gọi $x_1; x_2$ lần lượt là hoành độ của hai điểm M, N , với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (*).

+ Theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-5(2k+3)}{12k}$.

+ I là trung điểm của MN khi và chỉ khi:

$$x_1 + x_2 = 2x_I \Leftrightarrow \frac{-5(2k+3)}{12k} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 2k+3 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn (1))}.$$

+ Với $k = \frac{3}{2}$ ta có phương trình đường thẳng d là: $3x - 2y + 5 = 0$.

Cách 2:

+ $M\left(m; \frac{1}{m}\right) \in (C)$, I là trung điểm của MN nên ta có:

$$N(2x_I - x_M; 2y_I - y_M) = \left(-\frac{5}{3} - m; \frac{5}{2} - \frac{1}{m}\right) = \left(\frac{-5-3m}{3}; \frac{5m-2}{2m}\right)$$

+ Vì $N \in (C)$ suy ra $\frac{5m-2}{2m} = \frac{3}{-5-3m} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0; m \neq \frac{-5}{3} \\ (5m-2)(-5-3m) = 6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0; m \neq \frac{-5}{3} \\ 3m^2 + 5m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}.$

+ Với $m = -2$ ta có $M\left(-2; \frac{-1}{2}\right); N\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

+ Với $m = \frac{1}{3}$ ta có $M\left(\frac{1}{3}; 3\right); N\left(-2; \frac{-1}{2}\right)$.

+ Đường thẳng d đi qua hai điểm M , nhận $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{7}{3}; \frac{7}{2}\right) = \frac{7}{6}(2; 3)$ làm vectơ chỉ phương, hay nhận $\vec{n} = (3; -2)$ làm vectơ pháp tuyến:

$$3(x+2) - 2\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 5 = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng d cần tìm là: $3x - 2y + 5 = 0$.

b. Cho hàm số $y = x + |x^2 - 2x + m|$, với m là tham số. Tìm m để hàm số có cực đại. **Lời giải**

Tác giả: Đặng Ân; Fb: Đặng Ân

Nguyễn Văn Diệu; Fb Dieupt Nguyễn

Hàm số $y = x + |x^2 - 2x + m|$. TXĐ: $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m \geq 1 \Rightarrow x^2 - 2x + m \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ $y = x + |x^2 - 2x + m| = x^2 - x + m$, hàm số này có đồ thị là một Parabol nên chỉ có cực tiểu, suy ra $m \geq 1$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m < 1$

$$+ y = x + |x^2 - 2x + m| = \begin{cases} x^2 - x + m & \text{khi } x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1-m}] \cup [1 + \sqrt{1-m}; +\infty) \\ -x^2 + 3x - m & \text{khi } x \in (1 - \sqrt{1-m}; 1 + \sqrt{1-m}) \end{cases}$$

$$+ y' = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1-m}) \cup (1 + \sqrt{1-m}; +\infty) \\ -2x + 3 & \text{khi } x \in (1 - \sqrt{1-m}; 1 + \sqrt{1-m}) \end{cases}$$

$$+) 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Dễ thấy } 1 + \sqrt{1-m} > \frac{1}{2} \text{ với mọi } m < 1 \text{ và } 1 - \sqrt{1-m} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}.$$

$$+) -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \text{ Dễ thấy } 1 - \sqrt{1-m} < \frac{3}{2} \text{ với mọi } m < 1 \text{ và } \frac{3}{2} < 1 + \sqrt{1-m} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}.$$

+) Với $m < \frac{3}{4}$, ta có bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{1 - m}$	$\frac{3}{2}$	$1 + \sqrt{1 - m}$	$+\infty$			
y'		-		+	0	-		+

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{3}{2}$.

+) Với $\frac{3}{4} < m < 1$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$1-\sqrt{1-m}$	$1+\sqrt{1-m}$	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$

Hàm số không có cực đại.

Dễ thấy khi $m = \frac{3}{4}$ hàm số không có cực đại.

Vậy hàm số có cực đại với $m < \frac{3}{4}$.

Câu 81. (HSG10 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019)

1) Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) . Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d_m): y = x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$

2) Cho hàm số $y = (m-1)x^2 - 2mx + m + 2$ (m là tham số). Tìm m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Lời giải

1) Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 4x + 3 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 - m = 0 \quad (*)$$

Xét theo yêu cầu bài toán thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt và khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m + 13 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{13}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Ta có:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 0 \quad (**).$$

Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = 3 - m \end{cases}$. Thế vào (**) ta được: $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Với $m = 1 \Rightarrow y = -2x + 3$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

Với $m \neq 1$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ (-\infty; 2) \subset \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ \frac{m}{m - 1} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \frac{2 - m}{m - 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 2.$$

Vậy $1 \leq m \leq 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 82. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019)

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y = x^2 + mx + 3m - 2$, đường thẳng (d): $x - y + m = 0$ (m là tham số thực) và hai điểm $A(-1; -1)$, $B(2; 2)$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho A, B, M, N là bốn đỉnh của hình bình hành.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Khoa ; Fb: Khoa Nguyen

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 + mx + 3m - 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m - 1)x + 2m - 2 = 0 \quad (1).$$

⊕ Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m - 1)^2 - 4(2m - 2) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 9 \end{cases}.$$

Khi đó, (d) cắt (P) tại hai điểm $M(x_1; x_1 + m)$, $N(x_2; x_2 + m)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1) (giả sử $x_1 < x_2$).

⊕ Bốn điểm A, B, M, N là bốn đỉnh của hình bình hành xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Bốn điểm lập thành hình bình hành $ABNM$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow 3 = x_2 - x_1.$$

Kết hợp với định lý Vi-et ta có hệ:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 2 \\ x_2 - x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2+m}{2} \\ x_2 = \frac{4-m}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } -\frac{2+m}{2} \cdot \frac{4-m}{2} = 2m - 2 \Leftrightarrow m^2 - 10m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 10 \end{cases}.$$

Với $m = 0$, (1) trở thành: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-1; -1) \equiv A \\ N(2; 2) \equiv B \end{cases}$ (loại).

Với $m = 10$, (1) trở thành: $x^2 + 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-6; 4) \\ N(-3; 7) \end{cases}$ thỏa mãn $ABNM$ tạo thành hình bình hành.

Trường hợp 2: Bốn điểm lập thành hình bình hành $ANBM$.

Khi đó, $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AB cũng là trung điểm của MN nên
$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x_1 + x_2 + 2m}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

(loại)

Vậy $m = 10$.

Câu 83. (HSG10 THPT Thuận Thành 2018-2019)

Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 4 - m$; (P_m) .

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.

b) Tìm m để (P_m) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ cùng thuộc đoạn $[-1; 4]$.

Lời giải

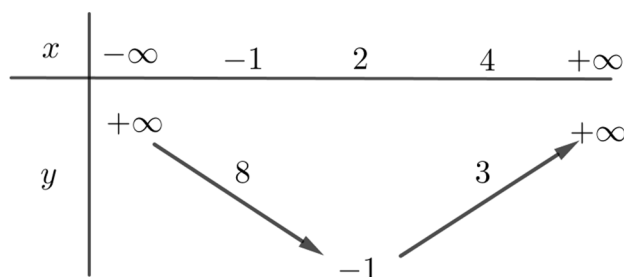
Tác giả: Nguyễn Thị Thùy Linh ; Fb: Nguyễn Linh

a) Với $m = 1$ hàm số trở thành $y = x^2 - 4x + 3$; (P_1) .

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

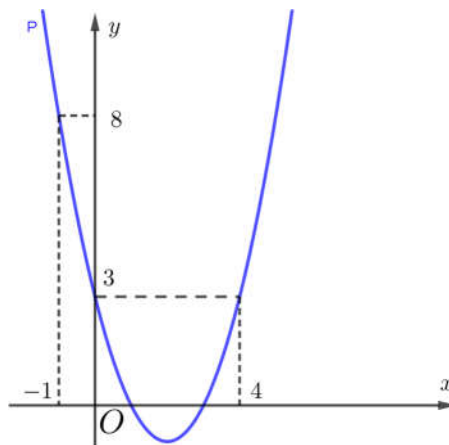
Đồ thị (P_1) là một parabol có đỉnh $I(2; -1)$ và hệ số $a = 1 > 0$ nên bề lõm của parabol hướng lên trên.

BBT



Đồ thị (P_1) cắt trục hoành tại điểm $A(1;0), B(3;0)$, cắt trục tung tại điểm $C(0;3)$ và nhận đường thẳng $x=2$ làm trục đối xứng.

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P_m) và trục hoành:

$$x^2 - 4x + 4 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = m - 1 \quad (1).$$

Dựa vào đồ thị ta thấy, (1) có 2 nghiệm cùng thuộc đoạn $[-1; 4]$ khi và chỉ khi $-1 < m - 1 \leq 3$ hay $0 < m \leq 4$.

Câu 84. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019)

Cho parabol $(P): y = 2x^2 + 6x - 1$. Tìm giá trị của k để đường thẳng $\Delta: y = (k+6)x + 1$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho trung điểm của đoạn thẳng MN nằm trên đường thẳng $d: y = -2x + \frac{3}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Dũng; Fb: Nguyễn Văn Dũng

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (Δ) là

$$2x^2 + 6x - 1 = (k+6)x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - kx - 2 = 0 \quad (1).$$

Phương trình (1) có $\Delta = k^2 + 16 > 0, \forall k \in \mathbb{R}$ nên nó luôn có hai nghiệm phân biệt. Suy ra với mọi giá trị của tham số k thì đường thẳng Δ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N .

Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm của (1). Khi đó theo Vi-et ta có $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}$.

Ta có $M(x_1; (k+6)x_1 + 1); N(x_2; (k+6)x_2 + 1)$, nên tọa độ trung điểm I của MN là $I\left(\frac{k}{4}; \frac{(k+6)k}{4} + 1\right)$.

Điểm $I \in d$ khi và chỉ khi $\frac{(k+6)k}{4} + 1 = -\frac{k}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow k^2 + 8k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -4 \pm 3\sqrt{2}$.

Vậy $k = -4 \pm 3\sqrt{2}$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 85. (HSG11 Huyện Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019)

Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*) và đường thẳng $d: y = 2mx - 4$. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (*). Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6.$$

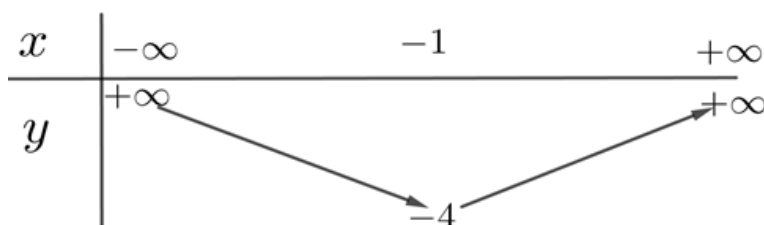
Lời giải

Tác giả: Trần Phương ; Fb: Trần Phương

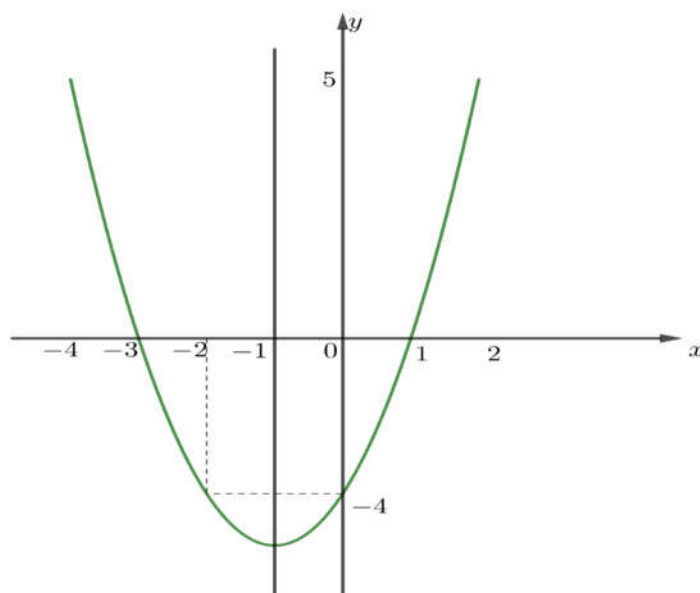
+ Lập bảng biến thiên và vẽ (P): $y = x^2 + 2x - 3$

Ta có đỉnh $I: \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow I(-1; -4)$

+ Bảng biến thiên:



+ Đồ thị: Đồ thị là parabol có bề lõm hướng lên có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$ cắt trục hoành tại điểm $(1; 0); (-3; 0)$ cắt trục tung tại điểm $(0; -3)$.



Điều kiện: $\begin{cases} x_1 \neq 1 \\ x_2 \neq 1 \end{cases}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 2x - 3 = 2mx - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0$ (1)

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2 \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1; x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - 1 > 0 \\ 1 - 2(m-1) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 4 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$$

Khi đó theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$.

Ta có $\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + (m-1)(x_1 + x_2) - 2m}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -6$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) - 2m}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -6 \Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2 - 2 + 2(m-1)^2 - 2m}{1 - 2(m-1) + 1} = -6$$

$$\Leftrightarrow 6(m-1)^2 - 2m - 2 = -6(4 - 2m) \Leftrightarrow 3m^2 - 13m + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $m = \frac{7}{3}$.

Câu 86. (HSG11 Hạng Lục Thanh Hóa năm 2018-2019)

Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*) và đường thẳng $d: y = 2mx - 4$.

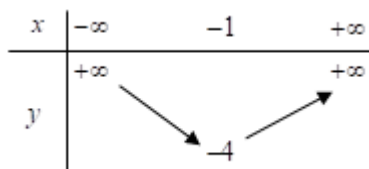
Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (*). Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6$.

Lời giải

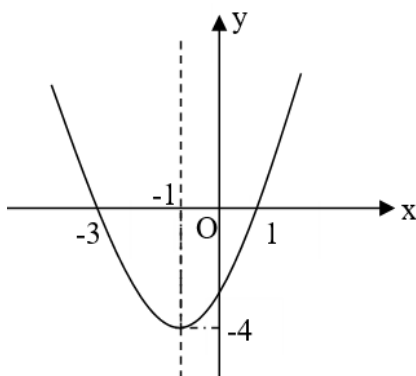
Xét hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*) và đường thẳng $d: y = 2mx - 4$.

+ Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*).

Hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x - 3$ (*) có $a = 1, b = 2, c = -3$, $-\frac{b}{2a} = -1$. Với $x = -1$ thì $y = -4$. Bảng biến thiên hàm số (*) như sau



Đồ thị (P) là parabol có bề lõm hướng lên trên, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$, cắt trục hoành tại hai điểm $(1; 0)$, $(-3; 0)$, cắt trục tung tại điểm $(0; -3)$, và có đỉnh là $I(-1; -4)$ (xem hình vẽ sau).



+ Xét phương trình hoành độ điểm chung của d và (P)

$$x^2 + 2x - 3 = 2mx - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0 \quad (1).$$

Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1)

$$\text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases} \quad (2).$$

Khi đó, theo định lý Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases} \quad (3)$. Như vậy

$$\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + (m-1)(x_1 + x_2) - 2m}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) - 2m}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -6$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2 - 2 + 2(m-1)^2 - 2m}{1 - 2(m-1) + 1} = -6 \quad (\text{do (3)})$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2 - 2 + 2(m-1)^2 - 2m}{4 - 2m} = -6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(m-1)^2 - 2m - 2 = -6(4-2m) \\ 4-2m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 13m + 14 = 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

Giá trị $m = \frac{7}{3}$ thỏa mãn điều kiện (2). Vậy $m = \frac{7}{3}$ là giá trị cần tìm.

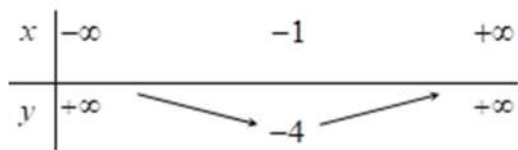
Câu 87. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*) và đường thẳng $d : y = 2mx - 4$.

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (*). Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có

$$\text{hoành độ } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{x_1+m}{x_2-1} + \frac{x_2+m}{x_1-1} = -6$$

Lời giải

Bảng biến thiên:



Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) : $x^2 + 2x - 3 = 2mx - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2(1-m)x + 1 = 0$.

$$d \text{ cắt } (P) \text{ tại hai điểm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó áp dụng hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x_1+m}{x_2-1} + \frac{x_2+m}{x_1-1} = -6 \Leftrightarrow \frac{(x_1+m)(x_1-1) + (x_2+m)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)} = -6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + (m-1)(x_1+x_2) - 2m}{x_1 x_2 - (x_1+x_2) + 1} = -6 \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2 + (m-1)(x_1+x_2) - 2x_1 x_2 - 2m}{x_1 x_2 - (x_1+x_2) + 1} = -6$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(m-1)^2 - 2m - 2}{2 - 2(m-1)} = -6 \Leftrightarrow 6(m-1)^2 - 2m - 2 = -6(4-2m)$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 - 26m + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 (L) \\ m = \frac{7}{3} (TM) \end{cases}.$$

Vậy $m = \frac{7}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 88. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (H) và đường thẳng $d: y = (m^2+1)x - 2$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt (H) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = 12(x_1+x_2) + 11x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và d là: $\frac{2x+1}{x-1} = (m^2+1)x - 2$ (1), ĐK: $x \neq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (m^2+1)x^2 - (m^2+5)x + 1 = 0 \quad (2).$$

Để đường thẳng d cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 5)^2 - 4(m^2 + 1) > 0 \\ (m^2 + 1) \cdot 1^2 - (m^2 + 5) \cdot 1 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 3)^2 + 12 > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \text{ (luôn đúng với mọi } m \in \mathbb{R} \text{)}.$$

Suy ra $\forall m \in \mathbb{R}$ thì d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt.

Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (2)

Ta có: $x_1 + x_2 = \frac{m^2 + 5}{m^2 + 1}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m^2 + 1}$, khi đó:

$$P = 12(x_1 + x_2) + 11x_1 \cdot x_2 = 12 \left(\frac{m^2 + 5}{m^2 + 1} \right) + 11 \left(\frac{1}{m^2 + 1} \right) = 12 + \frac{59}{m^2 + 1} \leq 71.$$

Do đó P đạt giá trị lớn nhất là 71 khi $m = 0$.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 89. (HSG12 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $\triangle PAB$ đều, biết $P(2;5)$.

Lời giải

Tác giả: Đoàn Thị Uyên ; Fb: Đoàn Uyên

1) **Cách 1:**

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là nghiệm phương trình.

$$\frac{2x-1}{x+1} = -x + m \quad (x \neq -1) \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x - m - 1 = 0 \quad (1).$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt và $x \neq -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 + (3-m)(-1) - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 9 + 4m + 4 = (m-1)^2 + 12 > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \text{ (luôn đúng)}.$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; -x_1 + m)$, $B(x_2; -x_2 + m)$.

Khi đó ta có: $AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2}$.

$$PA = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (-x_1 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2}$$

$$PB = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (-x_2 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2}.$$

Suy ra $\triangle PAB$ cân tại P .

Do đó $\triangle PAB$ đều $\Leftrightarrow PA^2 = AB^2$.

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) - 6x_1x_2 - 8 = 0.$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}. \text{ Vậy giá trị cần tìm là } m = 1, m = -5.$$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

$$\frac{2x-1}{x+1} = -x + m \quad (x \neq -1).$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = -x^2 - x + mx + m.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m-3)x - m - 1 = 0 \quad (*).$$

Đường thẳng d và đồ thị (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 + (3-m)(-1) - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 9 + 4m + 4 = (m-1)^2 + 12 > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{luôn đúng}).$$

Vậy phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x \neq -1$.

Gọi $A(x_1; -x_1 + m)$; $B(x_2; -x_2 + m)$ là giao điểm của (d) và (C) .

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên áp dụng hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -m - 1 \end{cases}.$

Vì $\triangle PAB$ đều nên H là trung điểm của AB . Do đó, tọa độ của H là:

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_H = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{m-3}{2} \\ y_H = \frac{-x_A + m - x_B + m}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{m-3}{2} \\ y_H = \frac{-m+3+m+m}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{m-3}{2} \\ y_H = \frac{m+3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{m-3}{2}; \frac{m+3}{2}\right).$$

$$\triangle PAB \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{PH} \perp \overline{AB} \\ PH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ với } \overline{AB} = (x_2 - x_1; x_1 - x_2); \overline{PH} = \left(\frac{m-7}{2}; \frac{m-7}{2}\right).$$

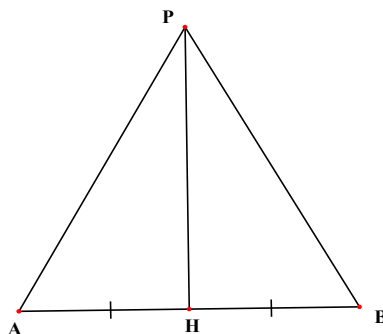
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-7}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{m-7}{2} \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (1) \\ 2\left(\frac{m-7}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot (x_2 - x_1)^2 \quad (2) \end{cases}.$$

Do phương trình (1) luôn đúng nên hệ phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow (m-7)^2 = 3(x_2 - x_1)^2.$$

$$\Leftrightarrow (m-7)^2 = 3[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 \cdot x_2].$$

$$\Leftrightarrow (m-7)^2 = 3[(m-3)^2 + 4(m+1)].$$



$$\Leftrightarrow m^2 - 14m + 49 = 3(m^2 - 6m + 9 + 4m + 4).$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 14m + 49 = 3m^2 - 18m + 27 + 12m + 12.$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m - 10 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}. \text{ Vậy giá trị cần tìm là } m = 1, m = -5.$$

Câu 90. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$$y = \sqrt{x-m+1} + \frac{2x}{\sqrt{-x+2m}} \text{ xác định trên khoảng } (-1; 3).$$

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Kim Xuyên ; Fb: Xuyen Tran

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x-m+1 \geq 0 \\ -x+2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m-1 \\ x < 2m \end{cases}$$

Với điều kiện $m-1 < 2m \Leftrightarrow m > -1$ thì hàm số có tập xác định là $D = [m-1; 2m)$

$$\text{Vậy hàm số } y = \sqrt{x-m+1} + \frac{2x}{\sqrt{-x+2m}} \text{ xác định trên khoảng } (-1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} (-1; 3) \subset [m-1; 2m) \\ m > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq -1 < 3 \leq 2m \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{3}{2} \\ m > -1 \end{cases} \text{ Hệ vô nghiệm.}$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán đã cho.

Câu 91. (HSG12 Cao Bằng năm 2018-2019) Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln\left(\frac{2x-1}{x+3} - 3\right)$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \ln\left(\frac{2x-1}{x+3} - 3\right)$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{2x-1}{x+3} - 3 > 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-x-10}{x+3} > 0 \Leftrightarrow -10 < x < -3$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-10; -3)$.

b) Giải phương trình: $\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x$. **Lời giải**

Ta có: $\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x + 1 = 6 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos x + \sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 3 \text{ (VNo)} \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi$. Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x = k\pi$.

Câu 92. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Tập xác định của hàm số $y = (4 - 3x - x^2)^{-2019}$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

B. $[-4; 1]$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(-4; 1)$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Thị Ngân; Fb: Ngân Bùi

Chọn A

Điều kiện xác định: $4 - 3x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

Câu 93. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Giang; Fb: Thanh Giang

Chọn B

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$ nên có 5 giá trị của m .

Chuyên đề

15

Mũ, logarit

Câu 1. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$. B. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$. C. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. D. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Chí Thành; Fb: Nguyễn Chí Thành

Chọn D

Vì $a > 1$ nên $a^{-\sqrt{3}} > a^{-\sqrt{5}} \Leftrightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 2. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho x, y là hai số thực dương khác 1 và α, β là hai số thực tùy ý. Mệnh đề nào sau đây SAI?

- A. $\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$. B. $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. C. $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$. D. $\frac{x^\alpha}{y^\beta} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-\beta}$.

Lời giải

Tác giả: Đặng Thị Ngọc Bích; Fb: Cô Bích Toán ĐHT

Chọn D

Dễ thấy câu D.

Câu 3. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019) Cho $a = \log_5 6$ và $b = \log_6 12$. Tính $\log_3 60$ theo a và b .

Lời giải

Tác giả: Phạm Hải Dương; Fb: DuongPham

Ta có

$$\begin{cases} \log_5 6 = a \\ \log_6 12 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_5 6 = a \\ \log_6 2 = b - 1 \\ \log_5 12 = a \cdot b \\ \log_5 2 = a(b - 1) \end{cases}.$$

$$\log_3 60 = \frac{\log_5 60}{\log_5 3} = \frac{1 + \log_5 12}{\log_5 6 - \log_5 2} = \frac{1 + ab}{a - a(b - 1)} = \frac{1 + ab}{a(2 - b)}.$$

Câu 4. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Anh Đua muốn tiết kiệm tiền để sắm Iphone - X nên mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền a đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,7% mỗi tháng. Biết rằng sau 2 năm anh Đua có số tiền trong ngân hàng là 40 triệu đồng. Hỏi số tiền a gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

- A. 1.500.000 đồng. B. 1.525.717 đồng. C. 1.525.718 đồng. D. 1.525.500 đồng.

Lời giải

Chọn B

Ta có thiết lập công thức tính: Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng một khoản tiền a đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất $r\%$ mỗi tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng (nhận cuối tháng khi ngân hàng đã tính lãi suất) là S_n .

+ Cuối tháng thứ nhất, số tiền nhận được: $S_1 = a(1+r)$

+ Cuối tháng thứ hai, số tiền nhận được: $S_2 = [a(1+r) + a](1+r) = a(1+r)^2 + a(1+r)$.

+ Cuối tháng thứ n , số tiền nhận được: $S_n = \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1](1+r)$. (1)

Với $S_n = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \dots + a(1+r) = a(1+r)[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1]$.

Thay vào công thức (1) với $n = 24$ ta được:

$$40.000.000 = \frac{a}{0,7\%} [(1+0,7\%)^{24} - 1](1+0,7\%) \text{ (đồng)}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{40.000.000 \cdot 0,7\%}{[(1+0,7\%)^{24} - 1](1+0,7\%)} \approx 1.525.717 \text{ (đồng)}.$$

Vậy $a \approx 1.525.717$ (đồng).

Câu 5. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Ông B gửi ngân hàng 100 triệu đồng (kỳ hạn tháng) với lãi suất không đổi 0,5% một tháng. Hỏi sau ít nhất mấy tháng thì ông B rút cả vốn và lãi đủ tiền để mua một chiếc xe máy trị giá 130 triệu đồng?

A. 52. B. 53. C. 60 D. 61

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trần Hữu; Fb: Nguyễn Trần Hữu

Chọn B

Gọi T_k là số tiền ông B có được cả vốn lẫn lãi sau k tháng gửi ngân hàng với lãi suất không đổi $r = 0,5\%$ / tháng. Ta có:

Sau 1 tháng ($k = 1$) thì có số tiền là: $T_1 = A + A.r = A(1+r)$.

Sau 2 tháng ($k = 2$) thì có số tiền là: $T_2 = T_1 + T_1.r = A(1+r) + A(1+r)r = A(1+r)^2$.

.

Sau n tháng ($k = n$) thì có số tiền là: $T_n = T_{n-1} + T_{n-1}.r = A(1+r)^{n-1} + A(1+r)^{n-1}r = A(1+r)^n$.

Do đó, để ông B rút cả vốn và lãi đủ tiền để mua một chiếc xe máy trị giá 130 triệu đồng thì

$$T_n \geq 130.10^6 \Leftrightarrow 100.10^6 (1+0,5\%)^n \geq 130.10^6 \Leftrightarrow (1+0,5\%)^n \geq 1,3 \quad (1)$$

Do n là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn (1) nên ta thử từng đáp án bằng MTCT ta được $n = 53$ thỏa mãn yêu cầu

(Do h/s khối 11 chưa học bpt lôgarit nên ta chưa dùng công thức nghiệm được).

Câu 6. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Vào ngày 15 hàng tháng ông An đều đến gửi tiết kiệm tại ngân hàng SHB số tiền 5 triệu đồng theo hình thức lãi kép với kì hạn một tháng, lãi suất tiết kiệm không đổi trong suốt quá trình gửi là $7,2\%/năm$. Hỏi sau đúng 3 năm kể từ ngày bắt đầu gửi ông An thu được số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng)?

- A. 195 251 000 (đồng). B. 201 453 000 (đồng).
C. 195 252 000 (đồng). D. 201 452 000 (đồng).

Lời giải

Tác giả: Trần Phạm Văn Hiến; Fb: Trần Hiến.

Chọn B

Lãi suất hàng tháng $r = \frac{7,2\%}{12} = 0,6\%$ và ông An gửi tổng cộng $n = 36$ tháng.

Áp dụng công thức lãi kép tích lũy: $T_n = \frac{a}{r} \left[(1+r)^{n+1} - 1 \right] - a \approx 201\,453\,000$ (đồng).

Chú ý: Bài toán lãi kép tích lũy

Hàng tháng, một người gửi vào ngân hàng số tiền là a đồng. Biết lãi suất hàng tháng không đổi là r .
Hỏi sau n tháng, người ấy thu được bao nhiêu tiền cả gốc lẫn lãi? **Lời giải**

Sau tháng thứ nhất, số tiền cả gốc lẫn lãi là: $a + a.r = a(r+1)$. Tiếp tục gửi vào a đồng nên tổng số tiền là: $T_1 = a(r+1) + a = a[(r+1) + 1] = \frac{a}{r} \left[(r+1)^2 - 1 \right]$.

Tổng số tiền sau tháng thứ hai: $T_2 = a \left[(1+r)^2 + (1+r) + 1 \right] = \frac{a}{r} \left[(r+1)^3 - 1 \right]$.

....

Sau n tháng, tổng số tiền là: $T_n = \frac{a}{r} \left[(1+r)^{n+1} - 1 \right]$ (Dễ dàng chứng minh được bằng quy nạp).

Tuy nhiên, sau n tháng, người đó quyết định rút hết tiền ra (tức là không gửi thêm a đồng vào tháng thứ $n+1$ nữa) thì số tiền thực nhận được là: $T_n - a$ (đồng).

Câu 7. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Gọi x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\log_2(3x+1)}{2\log_2 3} = \frac{\log_3(y-2)}{2\log_3 2+1} = \log_2 \sqrt[4]{3x+y-1} \text{ và } \frac{3x+1}{y-2} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}, \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương.}$$

Tính $P = a.b$

- A. $P = 6$. B. $P = 5$. C. $P = 8$. D. $P = 4$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Phương; Fb: Phương Nguyen

Chọn B

Giải sử

$$\frac{\log_2(3x+1)}{2\log_2 3} = \frac{\log_3(y-2)}{2\log_3 2+1} = \log_2 \sqrt[4]{3x+y-1} = t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(3x+1) = 2t\log_2 3 \\ \log_3(y-2) = (2\log_3 2+1)t \\ \log_2 \sqrt[4]{3x+y-1} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 9^t \\ y-2 = 4^t \cdot 3^t \\ 3x+y-1 = (2^t)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-1 = 9^t + 12^t \\ 3x+y-1 = 16^t \end{cases}$$

Từ đó ta có phương trình: $9^t + 12^t = 16^t$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{16}\right)^t + \left(\frac{12}{16}\right)^t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{4}\right)^t = 1$$

Đặt $\left(\frac{3}{4}\right)^t = X$ ($X > 0$), phương trình trên trở thành $X^2 + X - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} (tm) \\ X = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} (loại) \end{cases}$

Suy ra $\left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó $\frac{3x+1}{y-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$

Vậy $P = ab = 5$

Câu 8. (HSG12 HCM năm 2018-2019)

Giải phương trình: $\log_5(x+2) + \log_3 x = \log_{2018}(x+2015) + \log_{2019}(x+2016)$. (1)

Lời giải

Tác giả: Tú Tam Tạng Fb: Tú Tam Tạng

Điều kiện: $x > 0$.

Với điều kiện trên phương trình (1) trở thành:
 $\log_5(x+2) + \log_3 x - \log_{2018}(x+2015) - \log_{2019}(x+2016) = 0$.

Đặt $f(x) = \log_5(x+2) + \log_3 x - \log_{2018}(x+2015) - \log_{2019}(x+2016)$ với $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+2)\ln 5} + \frac{1}{x\ln 3} - \frac{1}{(x+2015)\ln 2018} - \frac{1}{(x+2016)\ln 2019} \\ &= \left(\frac{1}{(x+2)\ln 5} - \frac{1}{(x+2015)\ln 2018} \right) + \left(\frac{1}{x\ln 3} - \frac{1}{(x+2016)\ln 2019} \right) \\ &= \left(\frac{(\ln 2018 - \ln 5) \cdot x + 2015 \cdot \ln 2018 - 2 \ln 5}{(x+2)(x+2015)\ln 5 \cdot \ln 2018} \right) + \left(\frac{(\ln 2019 - \ln 3) \cdot x + 2016 \cdot \ln 2019}{x(x+2016)\ln 3 \cdot \ln 2019} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(3) = 0 \Rightarrow x = 3$ là nghiệm duy nhất.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.

Câu 9. (HSG12 HCM năm 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện: $a > 2018^{\log_{2019} b} \geq 1$; $f(\log_{2018} a) + 2 = f(\log_{2019} b)$. Tính $\log_{2019}(a+b)$.

Câu 1. Lời giải

Tác giả: Tạ Thị Huyền Trang ; Fb: Tạ Thị Huyền Trang

$$\text{Đặt } \begin{cases} \log_{2018} a = a_1 \\ \log_{2019} b = b_1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } a > 2018^{\log_{2019} b} \geq 1 \Rightarrow 2018^{\log_{2018} a} > 2018^{\log_{2019} b} \geq 2018^0$$

$$\text{Câu 2.} \Rightarrow \log_{2018} a > \log_{2019} b \geq 0 \Rightarrow a_1 > b_1 \geq 0.$$

$$\text{Xét hàm: } f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

$$\text{Đặt } a_1 = b_1 + m, (m > 0). \text{ Ta có } f(\log_{2018} a) + 2 = f(\log_{2019} b) \Rightarrow f(a_1) + 2 = f(b_1)$$

$$\text{Câu 3.} \Rightarrow a_1^3 - 3a_1 + 2 = b_1^3 - 3b_1 \Rightarrow (b_1 + m)^3 - 3(b_1 + m) + 2 - b_1^3 + 3b_1 = 0$$

$$\text{Câu 4.} \Rightarrow 3b_1^2 m + 3b_1 m^2 + m^3 - 3m + 2 = 0.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3b_1^2 m + 3b_1 m^2 \geq 0, \forall b_1 \geq 0; m > 0 \\ m^3 - 3m + 2 \geq 0, \forall m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ a_1 = b_1 + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Câu 5.} \Rightarrow \begin{cases} \log_{2019} b = 0 \\ \log_{2018} a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2018 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \log_{2019}(a+b) = \log_{2019} 2019 = 1.$$

HƯỚNG GIẢI 2

$$\text{Đặt } u = \log_{2018} a, v = \log_{2019} b$$

$$\text{Ta có : } a > 2018^{\log_{2019} b} \Rightarrow \log_{2018} a > \log_{2019} b \geq 0 \Rightarrow u > v \geq 0.$$

$$\text{Lại có : } f(\log_{2018} a) + 2 = f(\log_{2019} b)$$

$$\Rightarrow f(u) + 2 = f(v) \Rightarrow f(v) > f(u) \text{ với mọi } u > v \geq 0.$$

Do đó : $u, v \in [0; 1]$. Khi đó từ $f(v) - f(u) = 2 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$

Suy ra $a = 2018$ và $b = 1$. Vậy $\log_{2019}(a + b) = 1$

Câu 10. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Giải phương trình

$$\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \log_{\frac{1}{3}}(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

Lời giải

Điều kiện: $x < \frac{1}{2}$

Ta có $\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \log_{\frac{1}{3}}(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} - \log_3(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \log_3(1 - 2x) + 1 - 2x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$. Dễ thấy $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \forall t > 0$. Suy ra hàm số đồng biến với $\forall t > 0$.

Ta có

$$f(\sqrt{x^2 - x + 1}) = f(1 - 2x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 = (1 - 2x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Câu 11. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Giải các phương trình sau

$$\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \log_{\frac{1}{3}}(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

Lời giải

a) Điều kiện $x < \frac{1}{2}$

$$\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \log_{\frac{1}{3}}(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \log_3(1 - 2x) + (1 - 2x)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$

Suy ra hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó phương trình $f(\sqrt{x^2 - x + 1}) = f(1 - 2x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ x^2-x+1=(1-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$.

Câu 12. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho phương trình sau với m là tham số thực

$$(x^2-2x)\log_{2019}^2 \sqrt{x^2-2x+2011}+1=m\left[\sqrt{\frac{x^2-2x}{8}}\log_{2019}(x^2-2x+2011)-\frac{1}{4}\right]$$

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $1 \leq |x-1| \leq 3$.

Lời giải

$$\text{ĐK.} \begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ x^2-2x+2011 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$$

Ta có $1 \leq |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-2; 0] \cup [2; 4]$ (*)

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-2x)\log_{2019}^2(x^2-2x+2011)+1=m\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2x}\log_{2019}(x^2-2x+2011)-\frac{1}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x)\log_{2019}^2(x^2-2x+2011)+4=m\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2-2x}\log_{2019}(x^2-2x+2011)-1\right]$$

Đặt $t = \sqrt{x^2-2x}\log_{2019}(x^2-2x+2011)$

$$t' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\log_{2019}(x^2-2x+2011) + \frac{(2x-2)\sqrt{x^2-2x}}{(x^2-2x+2011)\ln 2019}$$

$$= (x-1)\left[\frac{\log_{2019}(x^2-2x+2011)}{\sqrt{x^2-2x}} + \frac{2\sqrt{x^2-2x}}{(x^2-2x+2011)\ln 2019}\right]$$

Do đó với $x \in [-2; 0]$ thì $t' < 0$, với $x \in [2; 4]$ thì $t' > 0$

Bảng biến thiên

x	-2	0	1	2	4
t'	-				+
t	$\sqrt{8}$				$\sqrt{8}$

Từ bảng biến thiên ta thấy, với mỗi một $t \in [0; \sqrt{8}]$ sẽ cho ta hai giá trị của $x \in [-2; 0] \cup [2; 4]$

Như vậy bài toán trở thành tìm m để phương trình sau có một nghiệm $t \in [0; \sqrt{8}]$

$$t^2 + 4 = m(\sqrt{2}t - 1)$$

Ta có $t^2 + 4 = m(\sqrt{2}t - 1) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 4}{\sqrt{2}t - 1}$ (do $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ không là nghiệm của pt)

$$m' = \frac{\sqrt{2}t^2 - 2t - 4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t - 1)^2}, \quad m' = 0 \Leftrightarrow t = 2\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}$
m'		-	-
m	-4	$-\infty$	$+\infty$
			4

Từ bảng biến thiên ta thấy khi $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Câu 13. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} 2019^{x+y} = (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 + 9x\sqrt{9x^2-4} = 2 + \frac{18y^2}{y^2+1} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Trần Ngọc Quang ; Fb: Quang Tran

Điều kiện $|x| \geq \frac{2}{3}$

$$(1) \Leftrightarrow 2019^x (\sqrt{x^2+1} - x) = 2019^{-y} (\sqrt{(-y)^2+1} - (-y))$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2019 + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -y \ln 2019 + \ln(\sqrt{(-y)^2+1} - (-y)) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t \ln 2019 + \ln(\sqrt{t^2+1} - t), t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = \ln 2019 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra hàm số đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow x = -y$.

Thay $x = -y$ vào (2) ta có $25x^2 + 9x\sqrt{9x^2-4} = 2 + \frac{18x^2}{x^2+1}$ (3)

Nếu $x \geq \frac{2}{3}$ thì $18x^2 > \frac{18x^2}{x^2+1}, 7x^2 > 2$, suy ra pt (3) vô nghiệm.

Nếu $x \leq \frac{-2}{3}$ thì (3) $\Leftrightarrow 25 - 9\sqrt{9 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^2 + 1}$ (**)

Đặt $u = \frac{1}{x^2}, 0 < u \leq \frac{9}{4}$, Pt (**) trở thành

$$25 - 9\sqrt{9 - 4u} = 2u + \frac{18u}{u+1} \Leftrightarrow \left(\frac{18u}{u+1} - 12 \right) + 2u - 4 + 9\sqrt{9 - 4u} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(u-2)}{u+1} + 2(u-2) - \frac{36(u-2)}{\sqrt{9-4u}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ \frac{6}{u+1} + 2 - \frac{36}{\sqrt{9-4u}+1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Vì $0 \leq \sqrt{9-4u} < 3 \Rightarrow 9 < \frac{36}{\sqrt{9-4u}+1} \leq 36$, $\frac{6}{u+1} + 2 < 8$, suy ra phương trình (4) vô nghiệm

Với $u = 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Vì $x \leq \frac{-2}{3} \Rightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Câu 14. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m$ (*).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019; 2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

A. 2020.

B. 2019.

C. 2021.

D. 4038.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Thu Hà; Fb: Phạm Thị Thu Hà

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + m \geq 0 \end{cases}$

Phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m$ (*)

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x = m + \log_2 x + \sqrt{m + \log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 x - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\sqrt{m + \log_2 x} + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \frac{1}{2} = \sqrt{m + \log_2 x} + \frac{1}{2} \\ \log_2 x - \frac{1}{2} = -\sqrt{m + \log_2 x} - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - 1 = \sqrt{m + \log_2 x} & (1) \\ -\log_2 x = \sqrt{m + \log_2 x} & (2) \end{cases}$$

a) Trường hợp (1):

Điều kiện: $\log_2 x \geq 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)^2 = m + \log_2 x \Leftrightarrow m = \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1.$$

Đặt $t = \log_2 x, t \geq 1$. Ta có: $m = f(t) = t^2 - 3t + 1, t \geq 0$.

$$f'(t) = 2t - 3 \text{ nên } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}.$$

Bảng biến thiên

Trường hợp này để có nghiệm thì $-\frac{5}{4} \leq m \leq -1$.

b) Trường hợp (2):

Điều kiện $-\log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

Khi đó $(2) \Leftrightarrow m = \log_2^2 x - \log_2 x$

Đặt $u = \log_2 x, u \leq 0$

Phương trình (1) có dạng: $m = u^2 - u$

Xét hàm $g(u) = u^2 - u$ trên $(-\infty; 0] \Rightarrow g'(u) = 2u - 1$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(u) = u^2 - u$ trên $(-\infty; 0]$

x	$-\infty$	0
y'		$-$
y	$+\infty$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra điều kiện để pt (1) có nghiệm trên $(-\infty; 0]$ là $m \geq 0$.

Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $[-2019; 2019]$ ta có $m = -1$ hoặc $0 \leq m \leq 2019$.

Vậy có 2021 giá trị m nguyên thỏa mãn. Đáp án đúng là đáp án C.

Chuyên đề

16

Nguyên hàm, tích phân, ứng dụng

Câu 1. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$ và có đạo

hàm $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$, $f(1) = 1$ và $f(7) = \frac{-1}{3} \ln 2$. Giá trị của biểu thức $f(0) + f(-3)$ bằng

- A. $\frac{1}{6} \ln 10 + 1$. B. $\frac{1}{6} \ln 10 + 1$. C. $\ln 10 + 1$. D. $\ln 10 \frac{2}{3} (\ln(2018))^{\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Huy; Fb: Huypham01

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 4x - 5} dx = \int \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-5}{x+1} \right| + C$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \ln \frac{x-5}{x+1} + C_1 & \text{khi } x < -1; x > 5 \\ \frac{1}{6} \ln \frac{5-x}{x+1} + C_2 & \text{khi } -1 < x < 5 \end{cases} \quad \text{trong đó } C_1, C_2 \text{ là các hằng số cần tìm.}$$

$$+ \text{ Xét } x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty). \text{ Ta có } f(7) = \frac{-1}{3} \ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \ln \frac{1}{4} + C_1 = \frac{-1}{6} \ln 4 \Leftrightarrow C_1 = 0.$$

$$\text{Suy ra } f(-3) = \frac{1}{6} \ln 4 \quad (1).$$

$$+ \text{ Xét } x \in (-1; 5). \text{ Ta có } f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \ln 2 + C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1 - \frac{1}{6} \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } f(0) = \frac{1}{6} \ln 5 + 1 - \frac{1}{6} \ln 2 \Leftrightarrow f(0) = 1 + \frac{1}{6} \ln \frac{5}{2} \quad (2).$$

$$+ \text{ Từ (1) và (2) ta có: } f(0) + f(-3) = 1 + \frac{1}{6} \ln \frac{5}{2} + \frac{1}{6} \ln 4 = 1 + \frac{1}{6} \ln 10.$$

$$+ \text{ Vậy } f(0) + f(-3) = \frac{1}{6} \ln 10 + 1.$$

Câu 2. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

- A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$. B. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$.
C. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoàng Hải; Fb: Nguyễn Hoàng Hải

Chọn C

$$\text{Ta đặt } I = \int \sqrt{2x+1} dx; \text{ đặt } t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow 2tdt = 2dx$$

$$\text{Nên } I = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

Câu 3. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Tính giá trị $f(2)$.

A. 5.

B. 20.

C. 10

D. 15.

Lời giải

Tác giả: NAT; Fb: NAT

Chọn B

Xét $x \in [1; 2]$, ta có

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Rightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 2x + 3 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \int (2x + 3) dx \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 + Cx.$$

Vì $f(1) = 4$ nên $C = 0$ hay là $f(x) = x^3 + 3x^2$. Vậy $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 20$.

Câu 4. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Biết $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}-1} = a\sqrt{5} + b\sqrt{2} + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P = a + b + c$.

A. $\frac{5}{2}$.B. $\frac{7}{2}$.C. $-\frac{5}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Tác giả: Lưu Công Chính; Fb: Chính Công Lưu

Chọn A

$$+) \text{ Ta có } \int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}-1} = \int_1^2 \frac{x^3(\sqrt{x^2+1}+1)dx}{x^2} = \int_1^2 x(\sqrt{x^2+1}+1)dx = \int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx + \int_1^2 xdx.$$

$$+) \text{ Tính } \int_1^2 xdx = \frac{3}{2}.$$

$$+) \text{ Tính } \int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \text{ suy ra } xdx = tdt.$$

$$\text{Khi đó: } \int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t^2 dt = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Vậy } a = \frac{5}{3}, b = \frac{-2}{3}, c = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } P = a + b + c = \frac{5}{2}.$$

Câu 5. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa $f'(x) + 2f'(-x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ với mọi số thực x . Giả sử $f(2) = m$, $f(-3) = n$. Tính giá trị biểu thức $T = f(-2) - f(3)$.

A. $T = m + n$. B. $T = n - m$. C. $T = m - n$. D. $T = -m - n$.

Lời giải

Tác giả: Ngô Ngọc Hà ; Fb: Hà Ngọc Ngô

Phản biện: Nguyễn Thắng.

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) + 2f'(-x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1} \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f'(-x) + 2f'(x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1} \quad (2)$$

$$\text{Lấy } 2 \cdot (2) - (1) \text{ ta được: } 3f'(x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{|x|}{x^6 + x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vì } \int_{-3}^2 f'(x) dx = f(2) - f(-3) = m - n$$

$$\text{Ta có } \int_{-2}^3 f'(x) dx = f(3) - f(-2) \Rightarrow -\int_{-2}^3 f'(x) dx = f(-2) - f(3)$$

$$\text{Xét } -\int_{-2}^3 f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = -2 \Rightarrow t = 2; \quad x = 3 \Rightarrow t = -3.$$

$$\Rightarrow \int_2^{-3} f'(-t) dt = -\int_{-3}^2 f'(-t) dt = -\int_{-3}^2 f'(t) dt = -(m - n) = n - m.$$

$$\text{Hay: } f(-2) - f(3) = n - m.$$

Câu 6. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề sau

$$1) \quad k \cdot \int f(x) dx = \int k \cdot f(x) dx \text{ với } k \text{ là hằng số bất kì.}$$

$$2) \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$3) \quad \int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx.$$

$$4) \quad \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx = f(x) \cdot g(x).$$

Tổng số mệnh đề đúng là:

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Tác giả: Phạm Văn Mạnh; Fb: Phạm Văn Mạnh

Chọn D

Ta có mệnh đề đúng là mệnh đề số 2. Mệnh đề này đúng theo tính chất cơ bản của nguyên hàm.

Mệnh đề số 1 sai khi $k = 0$.

Mệnh đề số 3 sai về tính chất của nguyên hàm.

Mệnh đề số 4 sai vì $\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x).g(x) + C$.

Câu 7. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$ thỏa mãn $[f(x)]^8 [f'(x)]^2 (x^2 + 2x + 3) = 1 + [f(x)]^5$ và $f(x) > 0$ với $\forall x \in [0;1]$, biết $f(0) = 2$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $2 < f(1) < \frac{5}{2}$.

B. $\frac{5}{2} < f(1) < 3$.

C. $\frac{7}{2} < f(1) < 4$.

D. $3 < f(1) < \frac{7}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thuyền; Fb: Thuyền Nguyễn.

Chọn A

Ta có: $[f(x)]^8 [f'(x)]^2 (x^2 + 2x + 3) = 1 + [f(x)]^5$

$$\Leftrightarrow \frac{5f'(x)[f(x)]^4}{\sqrt{1+[f(x)]^5}} = \frac{5}{\sqrt{x^2+2x+3}} \quad \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{5f'(x)[f(x)]^4}{\sqrt{1+[f(x)]^5}} dx = \int_0^1 \frac{5}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+[f(x)]^5} \Rightarrow t^2 = 1+[f(x)]^5 \Rightarrow 2t dt = 5f'(x)[f(x)]^4 dx.$$

$$\text{Thay vào (1) ta có: } \int_{\sqrt{33}}^{\sqrt{1+[f(1)]^5}} \frac{2tdt}{t} = \int_0^1 \frac{5d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+2}} \Rightarrow 2t \Big|_{\sqrt{33}}^{\sqrt{1+[f(1)]^5}} = 5 \ln \left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+2} \right) \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow 2 \left[\sqrt{1+[f(1)]^5} - \sqrt{33} \right] = 5 \left[\ln(2+\sqrt{6}) - \ln(1+\sqrt{3}) \right] \Rightarrow \sqrt{1+[f(1)]^5} = \sqrt{33} + \frac{5}{2} \ln \left(\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \right)$$

$$1+[f(1)]^5 = \left(\sqrt{33} + \frac{5}{2} \ln \frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \right)^2 \Rightarrow f(1) = \sqrt[5]{\left(\sqrt{33} + \frac{5}{2} \ln \frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \right)^2} - 1 \in \left(2; \frac{5}{2} \right).$$

Câu 8. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa

$$\text{mãn } \int_{-5}^1 f(x)dx = 9. \text{ Tính tích phân } \int_0^2 [f(1-3x)+9]dx$$

A. 75.

B. 27.

C. 21.

D. 15.

Lời giải

Tác giả: Võ Thị Thanh Thùy; Fb: Thuy Lymuc

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx = \int_0^2 f(1-3x) dx + \int_0^2 9 dx = \int_0^2 f(1-3x) dx + 18.$$

$$\text{Đặt } t = 1 - 3x \Rightarrow dt = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{3} dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1.$$

$$x = 2 \Rightarrow t = -5$$

$$\text{Suy ra } I = -\frac{1}{3} \int_1^{-5} f(t) dt + 18 = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(t) dt + 18 = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(x) dx + 18 = \frac{1}{3} \cdot 9 + 18 = 21.$$

Câu 9. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30}$, $\int_0^1 (2x-1)f(x)dx = -\frac{1}{30}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{30}$.

B. $\frac{11}{30}$.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $\frac{11}{12}$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thái Ly; Fb: Thai Ly Pham

Chọn D

$$\text{Xét } \int_0^1 (2x-1)f(x)dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (2x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = x^2 - x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2x-1)f(x)dx = (x^2-x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2-x)f'(x)dx = -\frac{1}{30} \Leftrightarrow \int_0^1 (x^2-x)f'(x)dx = \frac{1}{30}.$$

$$\text{Ta tìm hằng số } k \text{ để } \int_0^1 [f'(x) + k(x^2-x)]^2 dx = 0. \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^1 f'(x)(x^2-x)dx + \int_0^1 [k(x^2-x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{30} + 2k \cdot \frac{1}{30} + k^2 \cdot \frac{1}{30} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2k + k^2 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f'(x) - (x^2-x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (x^2-x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2-x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

Theo giả thiết $f(0) = 1$ nên $C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$.

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1 \right) dx = \frac{11}{12}.$$

Câu 10. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng:

A. $-\frac{2}{15}$. B. $-\frac{19}{36}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $-\frac{35}{36}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Minh Lộc ; Fb: Trần Lộc

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x$$

$$\text{Do đó ta có } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \frac{-1}{f(x)} + C_1 \text{ và } \int 2x dx = x^2 + C_2. \text{ Suy ra } \frac{-1}{f(x)} = x^2 + C$$

$$\text{Mặt khác } f(2) = -\frac{2}{9} \text{ nên ta có } C = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} = \frac{-2}{2x^2 + 1}, \text{ do đó } f(1) = -\frac{2}{3}.$$

Câu 11. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} dx = \frac{a}{b} \ln 2 + \frac{\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. B. -6 . C. 6 . D. $-\frac{8}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Đào Hải Nam; Fb: Dao Nam

Chọn D

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(\sin x + \cos x) \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \\ v = \tan x + 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} dx = (\tan x + 1) \cdot \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} (\tan x + 1) dx$$

$$= (\tan x + 1) \cdot \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx = (\tan x + 1) \cdot \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx$$

$$= (\tan x + 1) \cdot \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\ln \cos x + x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(2 \ln \sqrt{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - (1 \cdot \ln 1 - \ln 1 - 0) = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

Do đó: $a = 3; b = 2; c = -4$, suy ra: $\frac{bc}{a} = -\frac{8}{3}$.

Câu 12. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$, khi đó $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Liêu; Fb: Nguyen Lieu

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Đổi cận: Với $x = 1 \Rightarrow t = 1$; với $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó, $I = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \int_1^2 f(x) dx = 4$.

Câu 13. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Một chiếc xe ô tô đang chạy với vận tốc v_0 (m/s) thì người lái xe đạp phanh. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + v_0$ (m/s), trong đó t (tính bằng giây) là khoảng thời gian kể từ lúc người lái đạp phanh. Tính vận tốc v_0 (m/s), biết rằng từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn ô tô còn chạy tiếp một quãng đường dài 8 mét.

Lời giải

Với vận tốc chuyển động chậm dần đều $v(t) = -4t + v_0$, thì sau thời gian $\frac{v_0}{4}$ ô tô mới dừng hẳn. Khi

đó ô tô đã đi được quãng đường $s = \int_0^{\frac{v_0}{4}} (-4t + v_0) dt = (-2t + v_0 t) \Big|_0^{\frac{v_0}{4}} = \frac{v_0^2}{8} (m)$.

Theo yêu cầu bài toán, ô tô chạy thêm được quãng đường 8(m), ta có phương trình :

$$\frac{v_0^2}{8} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 8 \\ v_0 = -8 \end{cases}$$

Vì ban đầu vật chuyển động có vận tốc, sau đó mới hãm phanh nên $v_0 = 8 \text{ (m/s)}$.

b)

Câu 14. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x+1) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} \\ &= \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx}{\sqrt{x} \cdot (x+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \\ &= \left(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2. \end{aligned}$$

Câu 15. (HSG12 tỉnh Quảng Bình năm 2018-2019) Cho tích phân $I(t) = \int_0^t (x \sin x)^2 dx$.

a. Tính $I(t)$ khi $t = \pi$.

Lời giải

Tác giả: Trần Quốc Khang, Hà Lê; Fb: Bi Trần, Ha Le

a. Khi $t = \pi$, ta có:

$$+ I(\pi) = \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} J.$$

$$+ \text{Với } J = \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

$$+ \text{Ta có } J = \frac{x^2}{2} \sin 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \sin 2x dx = - \int_0^\pi x \sin 2x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = - \left(-\frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2} \cos 2x dx \right) = \left(\frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

$$+ \text{Vậy } I(\pi) = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} J = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

b. Chứng minh rằng: $I(t) + I(-t) = 0$ **Lời giải**

Tác giả: Nguyễn Thị Bình; Fb: Nguyễn Bình

$$+ \text{Xét } I(-t) = \int_0^{-t} (x \sin x)^2 dx. \text{ Đặt } x = -u, \text{ suy ra } dx = -du.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow u = 0; x = -t \Rightarrow u = t.$$

$$\text{Khi đó: } I(-t) = -\int_0^t [-u \sin(-u)]^2 du = -\int_0^t (x \sin x)^2 dx.$$

$$\text{Vậy } I(t) + I(-t) = \int_0^t (x \sin x)^2 dx - \int_0^t (x \sin x)^2 dx = 0 \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét: Nếu làm trắc nghiệm thì có thể làm nhanh hơn.

$$\text{Do hàm số } y = (x \sin x)^2 \text{ là hàm chẵn nên ta có tính chất: } \int_{-t}^0 (x \sin x)^2 dx = \int_0^t (x \sin x)^2 dx.$$

$$\text{Khi đó: } I(t) + I(-t) = \int_0^t (x \sin x)^2 dx + \int_0^{-t} (x \sin x)^2 dx = \int_0^t (x \sin x)^2 dx - \int_{-t}^0 (x \sin x)^2 dx = 0$$

Câu 16. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Một chiếc xe ô tô đang chạy với vận tốc v_0 (m/s) thì người lái xe đạp phanh. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + v_0$ (m/s), trong đó t (tính bằng giây) là khoảng thời gian kể từ lúc người lái xe đạp phanh. Tính vận tốc v_0 , biết rằng từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn chạy tiếp một quãng đường dài 8 mét.

Lời giải

$$\text{Ô tô dừng hẳn khi } v(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{4}$$

$$\text{Khi đó ô tô đã đi được quãng đường: } s = \int_0^{\frac{v_0}{4}} (-4t + v_0) dt = \left(-2t^2 + v_0 t\right) \Big|_0^{\frac{v_0}{4}} = \frac{v_0^2}{8} \text{ (m).}$$

Theo yêu cầu bài toán, ô tô chạy thêm được quãng đường 8(m),

$$\text{nên ta có phương trình: } \frac{v_0^2}{8} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 8 \\ v_0 = -8 \end{cases}.$$

Vì ban đầu vận chuyển động có vận tốc, sau đó mới hãm phanh, ta chọn $v_0 = 8$ (m/s).

Câu 17. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} + \frac{\sin x - 2x \cos x}{e^x (1 + \sin 2x)} \right) dx$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Việt ; Fb: Nguyễn Thanh Việt

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} + \frac{\sin x - 2x \cos x}{e^x (1 + \sin 2x)} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - 2x \cos x}{e^x (1 + \sin 2x)} dx = I_1 + I_2$$

$$\text{+) Tính } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = |\cos x + \sin x| = \cos x + \sin x \quad \left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right] \right)$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \ln |\cos x + \sin x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \sqrt{2}$$

+) Tính $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - 2x \cos x}{e^x (1 + \sin 2x)} dx$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{\sin x - 2x \cos x}{e^x} \\ dv = \frac{dx}{1 + \sin 2x} = \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{dx}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} du = \frac{(2x-1)(\sin x + \cos x)}{e^x} dx \\ v = -\frac{1}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \end{cases}$

$$I_2 = \left(\frac{\sin x - 2x \cos x}{e^x} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \cdot \frac{(2x-1)(\sin x + \cos x)}{e^x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2x-1)(\cos x - \sin x)}{e^x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x (2x \cos x - 2x \sin x - \cos x + \sin x)}{e^{2x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2 \sin x + 2x \cos x - \sin x) e^x - e^x (2x \sin x + \cos x)}{e^{2x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2x \sin x + \cos x}{e^x} \right)' dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x \sin x + \cos x}{e^x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}}{8e^{\frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{2}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \ln \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}}{8e^{\frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{2}$

Câu 18. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$ thỏa mãn

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x)(3-x)] dx = -\frac{109}{12}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1} dx.$$

A. $\ln \frac{7}{9}.$

B. $\ln \frac{2}{9}.$

C. $\ln \frac{5}{9}.$

D. $\ln \frac{8}{9}.$

Lời giải

Tác giả: Lê Phương; Fb: lephuongtt1

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3-x)^2 dx = -\frac{(3-x)^3}{3} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{109}{12}.$$

$$\text{Do đó } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x)(3-x) + (3-x)^2] dx = 0.$$

$$\text{Hay } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x) - (3-x)]^2 dx = 0.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = 3-x \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x^2-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x+1} dx = \ln \frac{2}{9}.$$

Câu 19. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x) dx = 1, \quad \int_1^5 \frac{f(x)}{x^2} dx = 3. \text{ Tính } \int_1^5 f(x) dx.$$

A. $-15.$

B. $-2.$

C. $-13.$

D. $0.$

Lời giải

Tác giả: Lê Mai Hương; Fb: Le Mai Huong

Phản biện: Dương Chiến; Fb: Dương Chiến

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x) dx = 1.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+5} - x (*)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ dễ thấy } t > 0 \text{ và } t \in [1; 5], \text{ với } \forall x \in [-2; 2].$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow t + x = \sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow t^2 + 2tx = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2t} - \frac{t}{2} \Leftrightarrow dx = -\left(\frac{5}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) dt.$$

Đối cận $x = 2 \Rightarrow t = 1; x = -2 \Rightarrow t = 5$.

$$\text{Do đó } 1 = \int_1^5 \left(\frac{5}{2t^2} + \frac{1}{2} \right) f(t) dt = \frac{5}{2} \int_1^5 \frac{f(t)}{t^2} dt + \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) dt = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } \int_1^5 f(x) dx = -13.$$

Câu 20. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 0$, $\int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x) dx$.

A. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{3}{2}$.

B. $\ln \frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{4} - 2 \ln \frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \right) f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12} - \ln \frac{3}{2}, \int_1^2 2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = 2 \left(-\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2} \right), \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{5}{12} - \ln \frac{3}{2}.$$

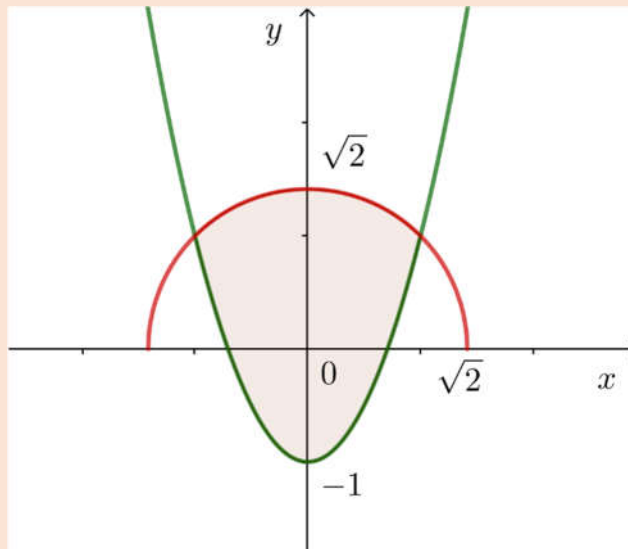
$$\Rightarrow \int_1^2 \left(f'(x) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right) \right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \int f'(x) dx = \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \right) dx.$$

$$\Rightarrow f(x) = -\ln(x+1) + \frac{1}{2}x + C \quad (\forall x \in [1; 2]), \text{ vì } f(2) = 0 \text{ nên } C = \ln 3 - 1.$$

$$\text{Ta có: } f(x) = -\ln(x+1) + \frac{1}{2}x + \ln 3 - 1, \forall x \in [1; 2].$$

$$\text{Vậy: } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\ln(x+1) + \frac{1}{2}x + \ln 3 - 1 \right) dx = \frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}.$$

Câu 21. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x^2 - 1$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$ (với $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của hình (H) bằng



A. $\frac{3\pi+2}{6}$.

B. $\frac{3\pi-2}{6}$.

C. $\frac{3\pi+10}{6}$.

D. $\frac{3\pi+10}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Lưu Công Chính ; Fb: Chính Công Lưu

Chọn C

+) Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - 1 = \sqrt{2 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ (2x^2 - 1)^2 = 2 - x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{1}{2} \\ x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

+) Diện tích hình phẳng cần tìm là : $S = 2 \int_0^1 [\sqrt{2 - x^2} - (2x^2 - 1)] dx$

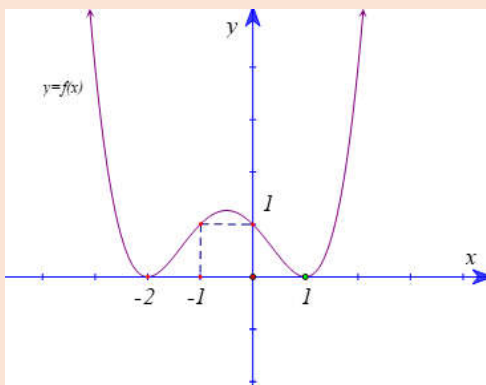
+) Tính $\int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx$. Đặt $x = \sqrt{2} \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $dx = \sqrt{2} \cos t dt$.

Khi đó: $\int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

+) Tính $\int_0^1 (2x^2 - 1) dx = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.

Vậy $S = \frac{3\pi + 10}{6}$.

Câu 22. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng



A. $\frac{127}{40}$.

B. $\frac{107}{5}$.

C. $\frac{13}{5}$.

D. $\frac{127}{10}$.

Lời giải

Tác giả: Hồ Bình Minh; Fb: Hồ Bình Minh

Chọn A

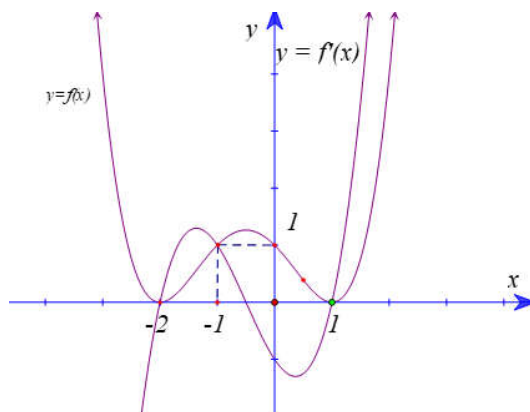
Đặt $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

Khi đó $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Theo hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $(-2; 0)$, $(-1; 1)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ và $f'(1) = 0$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0 \\ a - b + c - d + e = 1 \\ e = 1 \\ a + b + c + d + e = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{3}{4} \\ d = -1 \\ e = 1 \end{cases}$$

Xét phương trình $f(x) = f'(x)$ dễ thấy phương trình có ba nghiệm -2 ; -1 ; 1 .



Vậy hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$ và $f'(x)$ là:

$$S = -\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \right) dx = \frac{127}{40}.$$

Câu 23. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích là V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.

A. 19.

B. 20.

C. 18.

D. 21.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Lan Anh; Fb: Lan Anh

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{m^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \end{cases}$

TH1: $m \geq 0$

$$V = \pi \int_{-m}^m (\sqrt{m^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-m}^m (m^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi m^3.$$

mà $0 < V < 1000\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{4}{3} \pi m^3 < 1000\pi \Leftrightarrow 0 < m < 9,086 \Rightarrow$ có 9 giá trị nguyên m .

TH2: $m < 0$

$$V = \pi \int_m^{-m} (\sqrt{m^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_m^{-m} (m^2 - x^2) dx = -\frac{4}{3} \pi m^3.$$

mà $0 < V < 1000\pi \Leftrightarrow 0 < -\frac{4}{3} \pi m^3 < 1000\pi \Leftrightarrow 0 > m > -9,086 \Rightarrow$ có 9 giá trị nguyên m .

Vậy 18 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 1. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. 4.

B. 7.

C. 6.

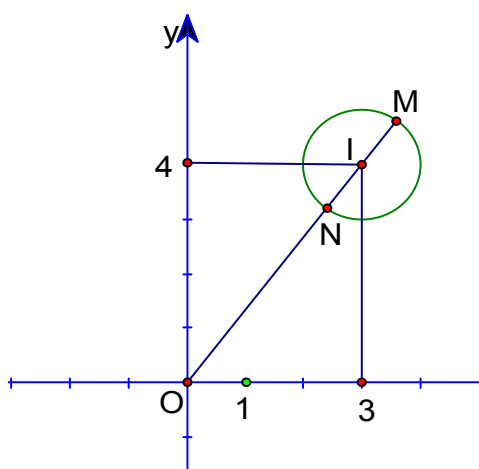
D. 5.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Mến; Fb: Nguyễn Mến

Chọn B

Cách 1:



Ta có: $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| z + \frac{1-7i}{1+i} \right| = \frac{\sqrt{2}}{|1+i|} \Leftrightarrow |z - (3+4i)| = 1$.

Gọi số phức z có dạng $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1$).

$$|z - (3+4i)| = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1.$$

Tập hợp các điểm biểu diễn z thỏa mãn $|z - (3+4i)| = 1$ là đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 1$.

Khi đó, $|z|_{\max} = OM = OI + IM = OI + R = \sqrt{3^2 + 4^2} + 1 = 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là 6.

Cách 2:

Ta có: $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| z + \frac{1-7i}{1+i} \right| = \frac{\sqrt{2}}{|1+i|} \Leftrightarrow |z - (3+4i)| = 1$.

Khi đó, $|z| \leq |3+4i| + 1 \Leftrightarrow |z| \leq 6$. Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là 6.

Câu 2. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$|z-8|i + |z-6i| = 5(1+i)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = 1$.

B. $P = 14$.

C. $P = 2$.

D. $P = 7$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Huy ; Fb: Huypham01

Chọn D

Cách 1: Ta có

$$|z-8|i + |z-6i| = 5(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \left\| |z-8|i + |z-6i| \right\| = |5(1+i)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|z-6i|^2 + |z-8|^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-6)^2 + (a-8)^2 + b^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 16a - 12b + 100 = 50$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 8a - 6b + 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-4=0 \\ b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy $P = 7$.

Cách 2: Ta có

$$|z-8|i + |z-6i| = 5(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-8)^2 + b^2} \cdot i + \sqrt{a^2 + (b-6)^2} = 5 + 5i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + (b-6)^2} = 5 \\ \sqrt{(a-8)^2 + b^2} = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 12b + 36 = 25 & (1) \\ a^2 + b^2 - 16a + 64 = 25 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) theo từng vế ta có: $-12b + 16a - 28 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3b+7}{4}$

Thay $a = \frac{3b+7}{4}$ vào (1) ta được:

$$\left(\frac{3b+7}{4} \right)^2 + b^2 - 12b + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}b^2 - \frac{117}{8}b + \frac{225}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow a = 4.$$

Vậy $P = 7$.

Cách 3: Ta có

$$|z - 8| + |z - 6i| = 5(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-8)^2 + b^2} + i + \sqrt{a^2 + (b-6)^2} = 5 + 5i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + (b-6)^2} = 5 \\ \sqrt{(a-8)^2 + b^2} = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b-6)^2 = 25 & (1) \\ (a-8)^2 + b^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Xét trên hệ trục tọa độ Oxy :

Phương trình (1) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm $I_1 = (0; 6)$ và bán kính $R_1 = 5$

Phương trình (2) là phương trình đường tròn (C_2) có tâm $I_2 = (8; 0)$ và bán kính $R_2 = 5$

Ta có $I_1I_2 = R_1 + R_2 = 10 \Rightarrow (C_1)$ tiếp xúc ngoài (C_2) tại 1 điểm duy nhất $M = (a; b) = (4; 3)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(a; b) = (4; 3)$

Vậy $P = 7$.

Câu 3. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Khi đó $z_1 \cdot z_2 + |z_1|$ bằng:

- A. 26. B. $13 + \sqrt{13}$. C. 13. D. $13 + \sqrt{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Quân ; Fb: Quân Nguyễn

Chọn B

$$\text{Ta có } z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + 3i \\ z_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } z_1 \cdot z_2 + |z_1| = (2 + 3i)(2 - 3i) + |2 + 3i| = 13 + \sqrt{13}.$$

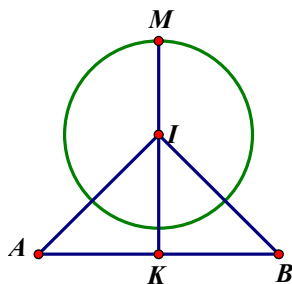
Câu 4. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Xét các số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 2$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 2 - 5i| + |z - 6 + 3i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 3$. B. $P = -3$. C. $P = 7$. D. $P = -7$.

Lời giải

Tác giả: Trần Duy Thúc ; Fb: Trần Duy Thúc

Chọn D



Đặt $M(a, b)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$, $A(-2, 5)$, $B(6; -3)$ và $K(2; 1)$ là trung điểm của AB . Từ phương trình $|z + 2 + 3i| = 2$ cho ta điểm M thuộc đường tròn (C) tâm

$I(-2, -3)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Ta có:

$$T = |z + 2 - 5i| + |z - 6 + 3i| = MA + MB \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{MA^2 + MB^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4MK^2 + AB^2}{2}}.$$

$$\Leftrightarrow T \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4(IK + R)^2 + AB^2}{2}} = 2\sqrt{82}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} MA = MB \\ 5\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IK} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow M(-3; -4).$$

Vậy: $P = a + b = -7$.

Bình luận.

Ta thực hiện được **Lời giải** trên khi $IA = IB$. Nếu trắc nghiệm thì giải $5\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IK} = \vec{0}$ là xong.

Trong bài toán trên ta thấy $IA = IB = 8\sqrt{2}$. Nếu $IA \neq IB$ thì dấu bằng sẽ không xảy ra.

Chuyên đề

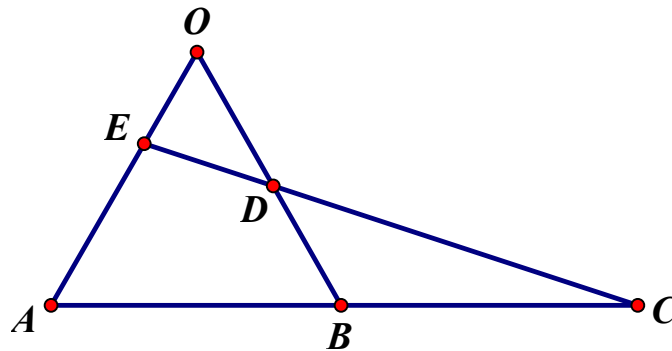
18

Véc tơ và hình học phẳng

Câu 1. (HSG10 THPT THUẬN THÀNH 2018-2019) Cho tam giác OAB . Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Gọi C, D, E là các điểm sao cho $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Từ đó chứng minh C, D, E thẳng hàng.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thu Thuận; Fb: Bon Bin



$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + 2\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{b} - (-\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} \quad (1).$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{DE}$. Vậy 3 điểm C, D, E thẳng hàng.

Câu 2. (HSG10 PHÙNG KHẮC KHOAN- HÀ NỘI 2018-2019) Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau

Lời giải

Tác giả: Thanh Bình ; Fb: Minh Hoàng

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } 3\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

$$\text{Vậy: } AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow 2AB^2 - 3AC^2 - 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

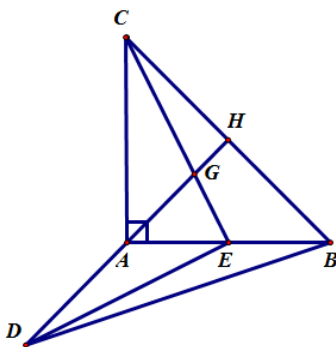
$$\Leftrightarrow 2c^2 - 3b^2 - \frac{5bc}{2} = 0 \Leftrightarrow 4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0 \Leftrightarrow c = 2b$$

Câu 3. (HSG10 THPT Thuận Thành 2018-2019) Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có trọng tâm G . Gọi E, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ; D là điểm đối xứng với H qua A . Chứng minh $EC \perp ED$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hương ; Fb: NT Hương

Cách 1:



Vì $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{2}AC^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}AB^2$
 $= \frac{1}{2}(AB^2 - AC^2) = 0$. Vậy $EC \perp ED$.

Cách 2:

Xét hai tam giác EHC và EAD có:

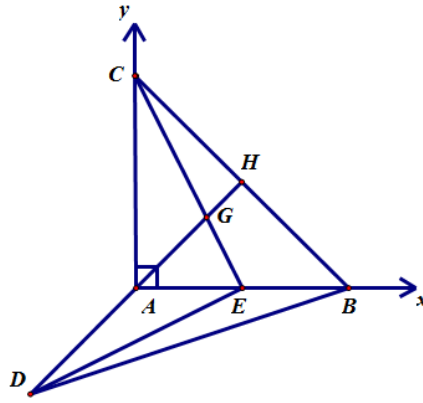
$$EH = AE = \frac{AC}{2} \quad (1).$$

$$\widehat{EHC} = \widehat{EAD} = 135^\circ \quad (2).$$

$$AD = AH = \frac{BC}{2} \text{ và } CH = \frac{BC}{2} \text{ nên } CH = AD \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\triangle EHC = \triangle EAD$. Suy ra $\widehat{HEC} = \widehat{AED}$. Mà $EH \perp AE \Rightarrow EC \perp ED$.

Cách 3:



Chọn hệ trục tọa độ Axy sao cho: $A(0;0), B(a;0), C(0;a)$ với $a > 0$.

Khi đó $E\left(\frac{a}{2};0\right), H\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right), D\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{EC} = \left(-\frac{a}{2}; a\right), \overrightarrow{ED} = \left(-a; -\frac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = -\frac{a}{2} \cdot (-a) + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) = 0$. Vậy $EC \perp ED$.

Câu 4. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có $AB=1, AC=x$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm x để AM và CN vuông góc với nhau.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Huỳnh ; Fb: Nguyễn Văn Huỳnh

Điều kiện: $x > 0$

Ta có:

$$+) \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow -3\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$$

$$+) \overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB} = -2(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{NC} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = -2\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Vậy: } AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB})(3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3AC^2 - 2AB^2 + 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 3AC^2 - 2AB^2 + 5|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 + \frac{5}{2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (Thỏa mãn)} \\ x = -\frac{4}{3} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. (HSG10 YÊN PHONG 2 năm 2018-2019) Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng với G là trọng tâm tam giác ABC , ta có

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Lời giải

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} &= GA \cdot GB \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) \\
 &= GA \cdot GB \cdot \cos \widehat{AGB} \\
 &= GA \cdot GB \cdot \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{2GA \cdot GB} \\
 &= \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{4m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} - AB^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{BC^2 + BA^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \right) - AB^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{AC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} + AB^2 \right) - AB^2}{2} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{BA^2}{4} + \frac{CA^2}{4} + BC^2 \right) - BC^2}{2} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{CB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} + AC^2 \right) - AC^2}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta có:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} &= \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{AC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} + AB^2 \right) - AB^2}{2} + \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{BA^2}{4} + \frac{CA^2}{4} + BC^2 \right) - BC^2}{2} \\
 &\quad + \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{CB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} + AC^2 \right) - AC^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{3AB^2}{2} + \frac{3BC^2}{2} + \frac{3AC^2}{2} \right) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)}{2} \\
 &= \frac{\frac{2}{3} (AB^2 + BA^2 + CA^2) - (AB^2 + BA^2 + CA^2)}{2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)}{2}$$

$$= \frac{-1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Câu 6. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$.

Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

A. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

B. $3a^2$.

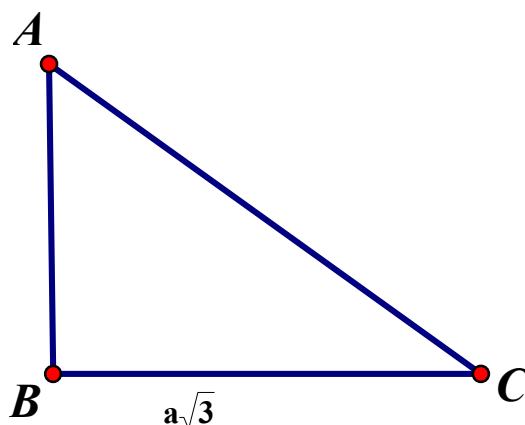
C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

D. $-3a^2$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Nguyễn Phi Hùng; Fb: Bùi Nguyễn Phi Hùng

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}^2 = 0 - BC^2 = -3a^2.$$

Câu 7. (HSG12 tỉnh KonTum năm 2018-2019) Cho tam giác ABC vuông tại A , đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Cho biết $a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Tính B, C .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Ngọc Lan ; Fb: Ngoclan nguyen

Do tam giác ABC vuông tại A nên ta có $b = a \sin B$, $c = a \cos B$.

$$a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c \text{ lập thành cấp số nhân} \Leftrightarrow ac = \frac{2}{3}b^2 \Leftrightarrow a^2 \cos B = \frac{2}{3}a^2 \sin^2 B \Leftrightarrow 3 \cos B = 2 \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos B = 2(1 - \cos^2 B) \Leftrightarrow 2 \cos^2 B + 3 \cos B - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = -2 \\ \cos B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } -1 \leq \cos B \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow B = 60^\circ \text{ (vì } 0^\circ < B < 180^\circ \text{)}.$$

Vậy $B = 60^\circ$, $C = 30^\circ$.

Câu 8. (HSG10 CẦU GIẤY – THƯỜNG TÍN - HÀ NỘI 2018-2019) Giả sử $a = \sqrt{6}$ cm, $b = 2$ cm, $c = (1 + \sqrt{3})$ cm. Tính số đo góc nhỏ nhất của tam giác ABC và diện tích tam giác ABC .

Lời giải

Tác giả: Hoàng Thị Mến ; Fb: Hoàng Mến

Do $a = \sqrt{6}$ cm, $b = 2$ cm, $c = (1 + \sqrt{3})$ cm nên b là cạnh nhỏ nhất trong ba cạnh của tam giác. Từ đó góc B là góc có số đo nhỏ nhất trong tam giác.

Áp dụng hệ quả của định lý Cosin trong tam giác ABC ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6 + (1 + \sqrt{3})^2 - 4}{2\sqrt{6} \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy góc } B \text{ có số đo là } 45^\circ.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \sin 45^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Hoặc: Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC . Ta có:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{3 + \sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}.$$

$$p - a = \frac{3 + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}.$$

$$p - b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} - 1}{2}.$$

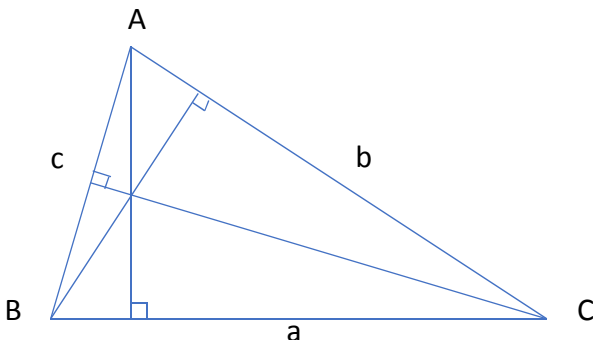
$$p - c = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3} + 1}{2}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Câu 9. (HSG10 Cụm Hà Đông Hà Đức Hà Nội năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, độ dài ba đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C lần lượt là h_a, h_b, h_c . Biết rằng $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$, chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thu Hằng; Fb: Nguyễn Thu Hằng



Trong tam giác ABC ta có $\sin A = \frac{2S}{bc}$, $\sin B = \frac{2S}{ac}$, $\sin C = \frac{2S}{ab}$

và $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$, với S là diện tích của tam giác ABC .

Ta có $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

$$\Leftrightarrow a \frac{2S}{bc} + b \frac{2S}{ac} + c \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{ab + ac + bc}{abc}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy tam giác ABC đều.

Câu 10. (HSG10 PHÙNG KHẮC KHOAN- HÀ NỘI 2018-2019) Cho tam giác ABC có $BC = a$; $CA = b$; $BA = c$ và diện tích là S . Biết $S = b^2 - (a-c)^2$. Tính $\tan B$?

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Cảnh; Fb: Phạm Linh Canh

$$\text{Ta có: } S = b^2 - (a-c)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ac \sin B = a^2 + c^2 - 2ac \cos B - a^2 - c^2 + 2ac$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ac \sin B = 2ac(1 - \cos B) \Leftrightarrow \sin B = 4(1 - \cos B) \Leftrightarrow \cos B = 1 - \frac{1}{4}\sin B (*)$$

$$\text{Mặt khác: } \sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Leftrightarrow \sin^2 B + (1 - \frac{1}{4}\sin B)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{17}{16}\sin^2 B - \frac{1}{2}\sin B = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B = \frac{8}{17} (\text{do } \sin B > 0)$$

$$\text{Kết hợp với (*) ta được } \cos B = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan B = \frac{8}{15}.$$

Câu 11. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{2r}{R} = 4$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Nguyễn Luân Lưu; Fb: Huỳnh Nguyễn Luân Lưu

$$\text{Ta có: } S = \frac{abc}{4R} = pr \Rightarrow S^2 = \frac{abc}{4} \cdot p \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{abc}{4} \cdot p \cdot \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{2r}{R} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{abc}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + \frac{2r}{R} = 4$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=4abc$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+\left[a^2-(b-c)^2\right](b+c-a)=4abc$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+\left[-a^3+a^2(b+c)-(b^2-c^2)(b-c)+a(b-c)^2\right]=4abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+a^2c=6abc (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cachy, ta có: $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+a^2c \geq 6abc$ □

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều (Đpcm)

Câu 12. (HSG10 Cụm Hà Đông Hà Đức Hà Nội năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$, độ dài ba đường trung tuyến kẻ từ A, B, C lần lượt là m_a, m_b, m_c . Chứng minh rằng: $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Đức Mạnh; Fb: Tran Manh

Áp dụng bất đẳng thức: $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}, \forall x, y \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x=y$.

$$\text{Ta có: } am_a = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} m_a \right) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{3}{4}a^2 + m_a^2}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Tương tự: } bm_b \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}; cm_c \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}.$$

Vì vậy:

$$\begin{aligned} \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} &= \frac{a^2}{am_a} + \frac{b^2}{bm_b} + \frac{c^2}{cm_c} \geq \frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2\sqrt{3}b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2\sqrt{3}c^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \\ &\geq \frac{2\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$ hay tam giác ABC đều.

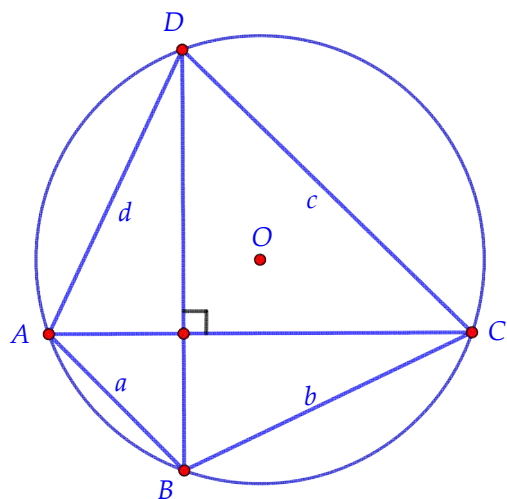
----- Hết -----

Câu 13. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AC \perp BD$ và nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $R=1$. Đặt diện tích tứ giác $ABCD$ bằng S và $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$.

$$\text{Tính giá trị biểu thức } T = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{S}.$$

Lời giải

Tác giả: Khổng Vũ Chiến ; Fb: Vũ Chiến



Ta có : $S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot AC}{4R} \Rightarrow ab = \frac{S_{ABC} \cdot 4R}{AC}$

Tương tự ta cũng có : $cd = \frac{S_{ADC} \cdot 4R}{AC}$, $ad = \frac{S_{ABD} \cdot 4R}{BD}$, $bc = \frac{S_{BCD} \cdot 4R}{BD}$

$$T = \frac{(ab + cd)(ad + bc)}{S}$$

$$= \frac{\left(\frac{S_{ABC} \cdot 4R}{AC} + \frac{S_{ADC} \cdot 4R}{AC} \right) \left(\frac{S_{ABD} \cdot 4R}{BD} + \frac{S_{BCD} \cdot 4R}{BD} \right)}{S}$$

$$= \frac{4 \left(\frac{S_{ABC}}{AC} \cdot \frac{S_{ABD}}{BD} + \frac{S_{ABC}}{AC} \cdot \frac{S_{BCD}}{BD} + \frac{S_{ADC}}{AC} \cdot \frac{S_{ABD}}{BD} + \frac{S_{ADC}}{AC} \cdot \frac{S_{BCD}}{BD} \right)}{S}$$

$$= \frac{4(S_{ABC} \cdot S_{ABD} + S_{ABC} \cdot S_{BCD} + S_{ADC} \cdot S_{ABD} + S_{ADC} \cdot S_{BCD})}{S \cdot AC \cdot BD}$$

$$= \frac{4[S_{ABC} \cdot S + S_{ADC} \cdot S]}{S \cdot AC \cdot BD} = \frac{4S(S_{ABC} + S_{ADC})}{S \cdot AC \cdot BD} = \frac{4S \cdot S}{S \cdot 2S} = 2 = \frac{4[S_{ABC}(S_{ABD} + S_{BCD}) + S_{ADC}(S_{ABD} + S_{BCD})]}{S \cdot AC \cdot BD}.$$

Vậy $T = 2$.

Câu 14. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Cho tam giác ABC có $BC = a$; $AC = b$ và diện tích bằng S .

Tính các góc của tam giác này biết $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thanh Thương; Fb: Nguyễn Thương

Ta có: $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \geq \frac{ab}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab \sin C \geq \frac{ab}{2} \Leftrightarrow \sin C \geq 1$ (1)

Mặt khác $\sin C \leq 1$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\sin C = 1 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$.

Khi $\sin C = 1$ thì (1) xảy ra dấu "=" hay $a = b$.

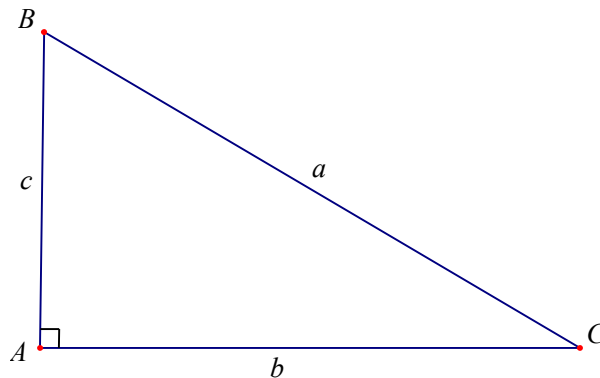
Vậy tam giác ABC vuông cân tại C nên $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$.

Câu 15. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có $BC = a, AB = c, AC = b$. Biết góc $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và $a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính số đo góc B, C .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Mạnh ; Fb: Nguyễn Văn Mạnh

Phản biện: Nguyễn Đức Hoạch ; Fb: Hoạch Nguyễn



Do $a, \sqrt{\frac{2}{3}}b, c$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có $\frac{2}{3}b^2 = ac$ (*)

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ mà $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \sin A = 1$

Do đó $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = a \Rightarrow b = a \sin B, c = a \sin C = a \cos B$ (vì tam giác ABC vuông tại A)

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \frac{2}{3}a^2 \sin^2 B = a^2 \cos B \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 B) = 3 \cos B \Leftrightarrow 2 \cos^2 B + 3 \cos B - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = \frac{1}{2} \\ \cos B = -2 (\text{loại}) \end{cases}$$

Với $\cos B = \frac{1}{2}$ vì B là góc của tam giác ABC nên $B = 60^\circ \Rightarrow C = 30^\circ$

Vậy $B = 60^\circ, C = 30^\circ$.

Câu 16. (HSG10 Nam Tiền Hải Thái Bình 2018-2019) Chứng minh rằng: $a \sin A + b \sin B + c \sin C = \frac{2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{3R}$ với mọi tam giác ABC . ($a = BC, b = AC, c = AB; m_a, m_b, m_c$ lần lượt là độ dài đường trung tuyến hạ từ $A, B, C; R$ bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Lời giải

Tác giả ; Fb:

Ta có:

$$\begin{aligned} 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) &= 2\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \\ &= b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} + a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} + a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} \\ &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} VP &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2.3R} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} = a \cdot \frac{a}{2R} + b \cdot \frac{b}{2R} + c \cdot \frac{c}{2R} \\ &= a \cdot \sin A + b \cdot \sin B + c \cdot \sin C = VT \end{aligned}$$

Câu 17. (HSG12 Quảng Ninh 2018-2019) Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, $AB = c$ thỏa mãn $\sqrt{2a-c} \cdot \cos \frac{B}{2} = \sqrt{2a+c} \cdot \sin \frac{B}{2}$, với $2a > c$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

Lời giải

Tác giả: Trần Hải; Fb: Trần Minh Hải

Bình phương hai vế ta có phương trình:

$$(2a-c) \cdot \cos^2 \frac{B}{2} = (2a+c) \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \quad (2a > c)$$

$$\Leftrightarrow (2a-c) \cdot (1 + \cos B) = (2a+c) \cdot (1 - \cos B) \Leftrightarrow 2a \cdot \cos B = c \Leftrightarrow 4R \cdot \sin A \cdot \cos B = 2R \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin A \cdot \cos B = \sin C \Leftrightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) = \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(180^\circ - C) + \sin(A-B) = \sin C \Leftrightarrow \sin(A-B) = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} \text{ do } 0 < A, B < \Pi.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

Câu 18. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, h_a là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A và $b+c = \frac{a}{2} + h_a \sqrt{3}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải

Ta có:

$$b+c = \frac{a}{2} + h_a \sqrt{3} \Rightarrow b+c = \frac{a}{2} + \frac{2S_{ABC}}{a} \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow b+c = \frac{a}{2} + (b \sin C) \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin B + \sin C = \frac{\sin(B+C)}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin B \sin C$$

$$\Rightarrow \sin B + \sin C = \sin B \left(\frac{1}{2} \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C \right) + \sin C \left(\frac{1}{2} \cos B + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B \right)$$

$$\Rightarrow \sin B \left[\cos \left(C - \frac{\pi}{3} \right) - 1 \right] + \sin C \left[\cos \left(B - \frac{\pi}{3} \right) - 1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \cos \left(B - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(C - \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

Vậy tam giác ABC đều.

Câu 19. (HSG10 Kim Liên 2018-2019) Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ. $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

a) Chứng minh rằng $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$.

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MB^2 + MC^2 = MA^2$

Lời giải

a.

$$\begin{aligned} VP &= a \cdot \left(c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) = \dots = \frac{(b^4 - c^4) - a^2(b^2 - c^2)}{2bc} \\ &= \frac{(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = (b^2 - c^2) \cdot \cos A \end{aligned}$$

b.

Gọi D là điểm xác định bởi hệ thức: $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$. Ta có:

$$\begin{aligned} MB^2 + MC^2 - MA^2 &= MD^2 + DB^2 + DC^2 - DA^2 = \\ &= MD^2 + DB^2 + DC^2 - (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})^2 = \dots = MD^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A. \end{aligned}$$

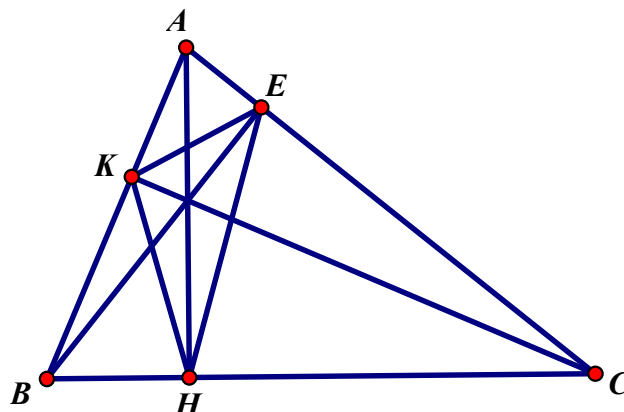
Nếu A tù, tập hợp các điểm M là tập $\emptyset$

Nếu A vuông, tập hợp các điểm M là $\{D\}$

Nếu A nhọn, tập hợp các điểm M là đường tròn $(D; \sqrt{2AB \cdot AC \cdot \cos A})$

Câu 20. (HSG10 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Cho tam giác nhọn ABC , gọi H, E, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C . Gọi diện tích các tam giác ABC và HEK lần lượt là $S_{\Delta ABC}$ và $S_{\Delta HEK}$. Biết rằng $S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta HEK}$, chứng minh $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{9}{4}$.

Lời giải



Đặt $S = S_{ABC}$ thì từ giả thiết suy ra

$$S_{EAK} + S_{KBH} + S_{HCE} = \frac{3}{4}S \Rightarrow \frac{S_{EAK}}{S} + \frac{S_{KBH}}{S} + \frac{S_{HCE}}{S} = \frac{3}{4}$$

Ta có:

$$\frac{S_{EAK}}{S} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot AK \sin A}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A} = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AK}{AC} = \cos A \cdot \cos A = \cos^2 A$$

$$\frac{S_{KBH}}{S} = \frac{\frac{1}{2}BK \cdot BH \cdot \sin B}{\frac{1}{2}AB \cdot BC \sin B} = \frac{BK}{BC} \cdot \frac{BH}{AB} = \cos B \cdot \cos B = \cos^2 B$$

$$\frac{S_{HCE}}{S} = \frac{\frac{1}{2}CH \cdot CE \cdot \sin C}{\frac{1}{2}AC \cdot BC \sin C} = \frac{CH}{AC} \cdot \frac{CE}{BC} = \cos C \cdot \cos C = \cos^2 C$$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{EAK}}{S} + \frac{S_{KBH}}{S} + \frac{S_{HCE}}{S} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{9}{4}$$

Câu 21. (HSG12 tỉnh QUẢNG NINH 2018-2019) Cho tam giác ABC không có góc vuông và có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 2c^2$ và $\tan A + \tan C = 2 \tan B$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Minh Nguyệt ; Fb: nguyen nguyet

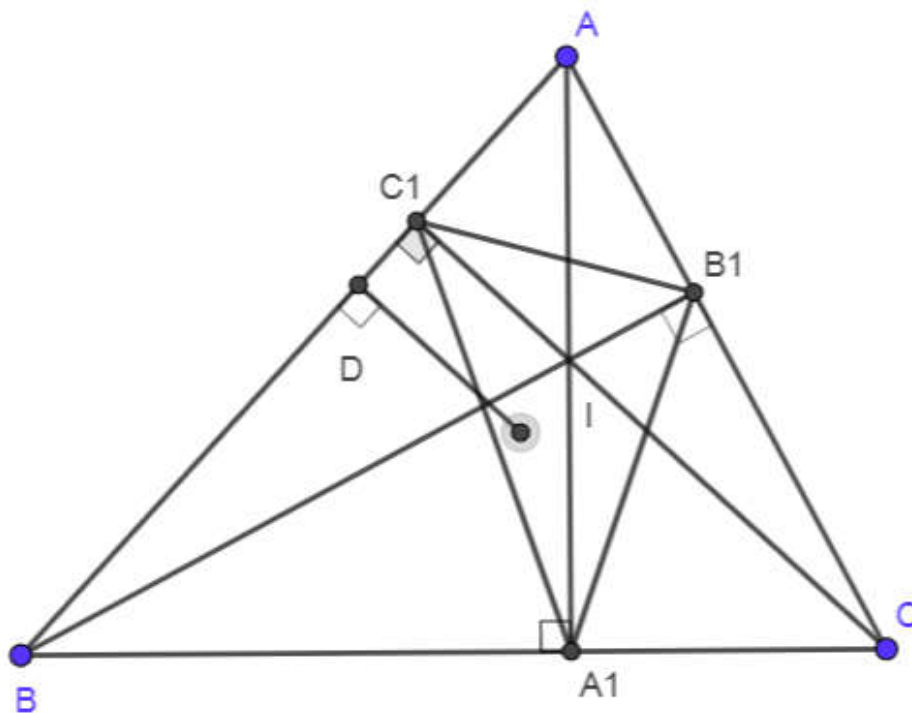
Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tan A + \tan C = 2 \tan B \\ a^2 + b^2 = 2c^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin C}{\cos C} = 2 \frac{\sin B}{\cos B} \\ a^2 = 2c^2 - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin(A+C)}{\cos A \cos C} = 2 \frac{\sin B}{\cos B} \\ a^2 = 2c^2 - b^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = 2 \cos A \cos C \\ a^2 = 2c^2 - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ a^2 = 2c^2 - b^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow b^2(3c^2 - 2b^2) = (2b^2 - c^2)c^2 \Leftrightarrow b^2c^2 + c^4 - 2b^4 = 0 \Leftrightarrow (c^2 - b^2)(c^2 + 2b^2) \Leftrightarrow c = b \end{aligned}$$

Kết hợp với $a^2 + b^2 = 2c^2 \Rightarrow a = b = c$. Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 22. (HSG10 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có chu vi bằng 20, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng $\sqrt{3}$. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên BC, AC, AB và M là điểm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{BCM} = \widehat{CAM} = \varphi$. Tính $\cot \varphi$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1 B_1 C_1$.

Lời giải



Gọi $BC = a, CA = b, AB = c$ và S, p, r lần lượt là diện tích, nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Theo đề bài ta có $\widehat{ABM} = \widehat{BCM} = \widehat{CAM} = \varphi$

Vậy M là điểm Brocard của tam giác ABC . Khi đó ta có tính chất quen thuộc sau

$$\cot \varphi = \cot A + \cot B + \cot C$$

Lại sử dụng đẳng thức lượng giác sau: $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$, ta được

$$\cot \varphi = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{4S}.$$

Vậy ta cần tìm độ dài 3 cạnh tam giác ABC

$$\text{Có: } S = pr = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{BAC} = 10\sqrt{3} \Rightarrow bc = 40 \quad (1)$$

Gọi I, D lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và hình chiếu của I lên cạnh AB

Theo công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp ta được:

$$r = \frac{b+c-a}{2} \Rightarrow b+c-a=6 \text{ và } b+c+a=20$$

$$\text{Do đó: } (b+c-a)(b+c+a) = 120 \Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = 120 \Rightarrow (a+6)^2 - a^2 = 120 \Rightarrow a = 7$$

thay $a = 7$ vào đẳng thức $b+c+a=20$, ta được $b+c=13 \quad (2)$

Từ (1), (2) ta được $\begin{cases} bc = 40 \\ b + c = 13 \end{cases}$ không giải tổng quát ta giả sử $b < c$ thì giải được $b = 5, c = 8$

$$\text{vậy } \cot \varphi = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{4S} = \frac{5^2 + 7^2 + 8^2}{4 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}} = \frac{23\sqrt{3}}{20}$$

Gọi R_0 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1 B_1 C_1$.

$$\text{Ta có } \widehat{B_1 A_1 C_1} = 180^\circ - \widehat{B A_1 C_1} - \widehat{B_1 A_1 C}$$

$$\text{Mà } \triangle B_1 A_1 C \sim \triangle BAC \text{ và } \triangle B A_1 C_1 \sim \triangle BAC \text{ nên } \widehat{B A_1 C_1} = \widehat{B_1 A_1 C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B_1 A_1 C_1} = 60^\circ$$

$$\text{tương tự ta có } \triangle B_1 A_1 C_1 \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB} = \sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow B_1 C_1 = \frac{7}{2}$$

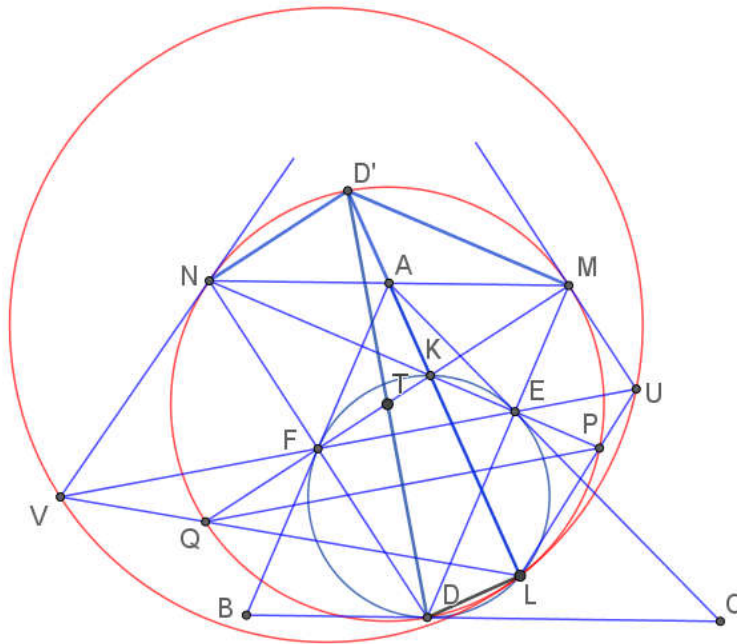
$$\text{Vậy } R_0 = \frac{B_1 C_1}{2 \sin \widehat{B_1 A_1 C_1}} = \frac{\frac{7}{2}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

Câu 23. (HSG11 Chuyên Duyên Hải Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2018-2019) Cho $\triangle ABC$ có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB ở D, E, F . Đường thẳng qua A song song BC cắt DE, DF lần lượt tại M, N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN cắt đường tròn (I) tại điểm L khác D , $NE \cap MF = K$.

a) Chứng minh A, K, L thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tại M, N cắt EF tại U, V . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác UVL tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

Lời giải



a. Chứng minh A, K, L thẳng hàng.

Trước hết ta chứng minh K là trực tâm $\triangle MDN$

Do $AN \parallel BC$ nên $\widehat{ANF} = \widehat{FDB}$.

Do D, E, F là tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB nên $BD = BF$

$$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{ANF} = \widehat{BFD} = \widehat{AFN} \Rightarrow \Delta ANF \text{ cân tại } A \Rightarrow AN = AF.$$

Chứng minh tương tự ta có $AM = AE$ mà $AE = AF$ nên $AN = AF = AE = AM$

$$\Rightarrow \Delta NEM \text{ vuông tại } E; \Delta NFM \text{ vuông tại } F$$

$$\Rightarrow NE \perp MD; MF \perp ND \text{ mà } NE \cap MF = K \text{ suy ra } K \text{ là trực tâm } \Delta MDN$$

Bây giờ ta chứng minh A, K, L thẳng hàng:

+ Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN . Gọi D' là điểm đối xứng của D qua T .

Ta có $ND' \parallel KM$ (vì cùng vuông góc với ND), $MD' \parallel KN$ (vì cùng vuông góc với MD).

Do đó $ND'MK$ là hình bình hành.

Do A là trung điểm MN nên A cũng là trung điểm KD' .

Do đó D', A, K thẳng hàng. (1)

$$+ \text{ Hơn nữa, } \begin{cases} KF \perp DF \\ KE \perp DE \end{cases} \text{ (do } K \text{ là trực tâm)}$$

Suy ra tứ giác $DFKL$ nội tiếp đường tròn đường kính DK

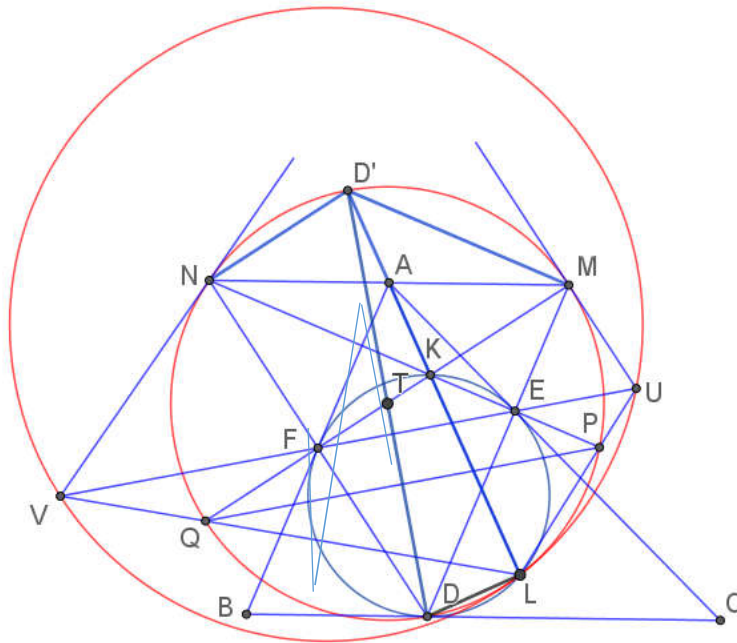
Suy ra DL vuông góc với LK .

Mặt khác DD' là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN nên DL vuông góc với LD' .

Do đó L, K, D' thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, K, L thẳng hàng (đpcm).

b. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tại M, N cắt EF tại U, V . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác UVL tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .



Gọi P là giao của UL và (T) ($P \neq L$); Q là giao LV và (T) ($Q \neq L$).

Do MU tiếp xúc (T) tại M nên $\widehat{DMU} = \widehat{DNM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Do $NE \perp ME, MF \perp NF$ nên $NMEF$ nội tiếp đường tròn đường kính MN

$$\Rightarrow \widehat{MEU} = \widehat{FNM} \text{ (cùng bù } \widehat{FEM} \text{)}$$

$$\text{Nên } \widehat{UME} = \widehat{UEM} \Rightarrow \Delta UME \text{ cân tại } U \Rightarrow UM = UE.$$

$$\text{Ta có } \widehat{PMU} = \widehat{MLU} = \frac{1}{2} \widehat{MP} \Rightarrow \Delta MUP \text{ đồng dạng } \Delta LUM$$

$$\Rightarrow UM^2 = UP \cdot UL \Rightarrow UP \cdot UL = UE^2 \Rightarrow \frac{UE}{UP} = \frac{UL}{UE} \Rightarrow \triangle UEP \sim \triangle ULE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{UPE} = \widehat{UEL} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{UPE} = 180^\circ - \widehat{UEL} \Rightarrow \widehat{EPL} = \widehat{LEF} \quad (3)$$

Lại có $\widehat{LEF} = 180^\circ - \widehat{LDF}$ (do $LEFD$ nội tiếp) và $\widehat{LPN} = 180^\circ - \widehat{LDN}$ (do $LPND$ nội tiếp) nên $\widehat{LPN} = \widehat{LEF} \quad (3)$.

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{LPN} = \widehat{EPL} \Rightarrow P, E, N$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có Q, F, M thẳng hàng.

Do $MNQP$ nội tiếp nên $\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ}$.

Do $NMEF$ nội tiếp nên $\widehat{NMF} = \widehat{NEF}$.

Do đó $\widehat{NEF} = \widehat{NPQ} \Rightarrow EF \parallel PQ \Rightarrow UV \parallel PQ$.

Do đó (LQP) tiếp xúc với (LUV) tại L suy ra (UVL) tiếp xúc với (DMN) tại L (đpcm).

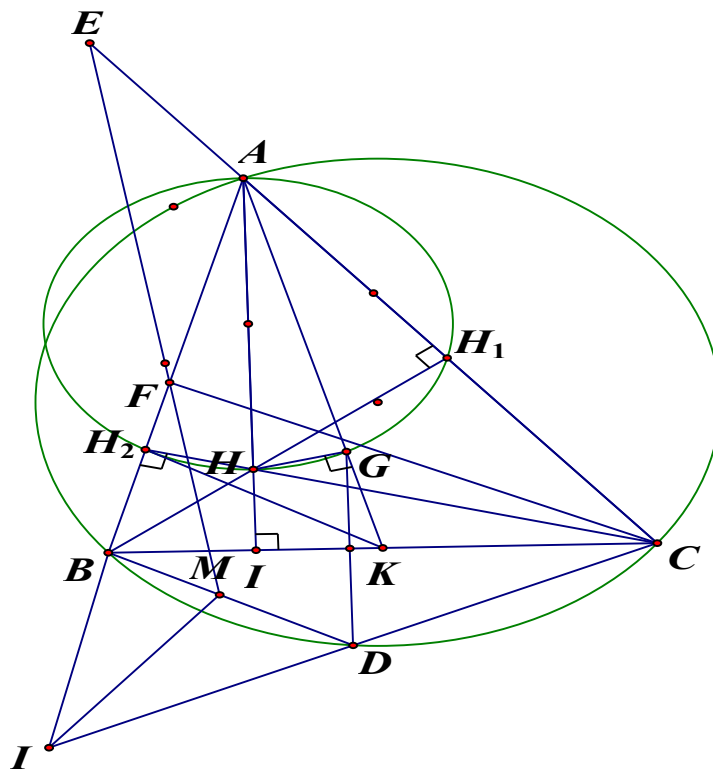
Câu 24. (HSG12 tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019) Cho tam giác $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H , K là trung điểm BC và G là

hình chiếu vuông góc của H trên AK . Lấy D đối xứng G qua BC và I đối xứng C qua D . Tia phân giác $\widehat{ACB}$ cắt AB tại F và tia phân giác $\widehat{BID}$ cắt BD ở M , MF cắt AC tại E .

1) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn (O) .

2) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở X , XE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EBM ở điểm thứ hai là Y . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EYD tiếp xúc đường tròn (O) .

Lời giải



1) Do G thuộc đường tròn đường kính AH và KH_1, KH_2 tiếp xúc (AH) với H_1, H_2 là chân đường cao hạ từ B lên AC , C lên AB .

Từ đó ta có đẳng thức $KB^2 = KC^2 = KH_1^2 = KG.KA$.

Từ đó suy ra $\widehat{KBG} = \widehat{KAB}$, $\widehat{KCG} = \widehat{KAC}$. Kết hợp tính đối xứng, suy ra ABDC nội tiếp

2) Theo câu 1) ta có ABDC nội tiếp và AD là đối trung trong tam giác ABC.

Hay ta có tứ giác ABDC điều hòa.

Điều này dẫn đến $\triangle BDI$ đồng dạng $\triangle BAC$ theo trường hợp cạnh – góc – cạnh. Suy ra $\frac{IB}{ID} = \frac{CB}{CA}$, mà

IM, CF là hai đường phân giác nên ta có $\frac{MB}{MD} = \frac{FB}{FA}$ hay $MF \parallel AD$

Do $MF \parallel AD$ nên $\widehat{BMF} = \widehat{BDA} = \widehat{BCA}$, dẫn đến BMCE nội tiếp.

Khi đó, lại có tứ giác ABDC điều hòa nên XD cũng tiếp xúc (O) và hơn nữa $XE.XY = XA^2 = XB.XC = XD^2$.

Điều này suy ra (DEY) tiếp xúc XD hay (DEY) tiếp xúc (O) ở D.

Câu 25. (HSG12 tỉnh KonTum năm 2018-2019) Cho tam giác ABC ($AB > AC$) là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm tam giác. Gọi J là trung điểm của BC. Gọi D là điểm đối xứng với A qua O.

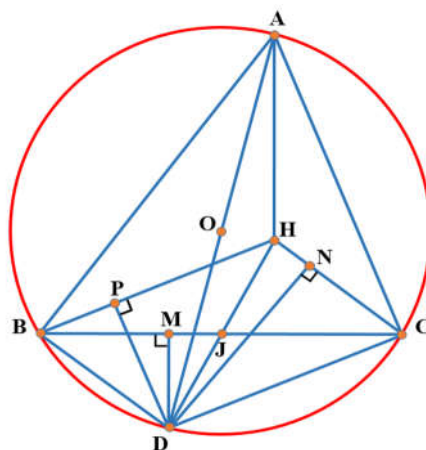
1) (3,0 điểm) Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BC, CH, BH. Chứng minh rằng tứ giác PMJN nội tiếp.

2) (2,0 điểm) Cho biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $2\widehat{AHI} = 3\widehat{ABC}$.

Lời giải

Tác giả: Minh Tuấn + Thúy Minh ; Fb: Minh Tuấn Hoàng Thị, Thúy Minh

1)



Ta có $BH \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel BD$ (vì cùng vuông góc với AB) nên BHCD là hình bình hành, do đó J cũng là trung điểm của HD.

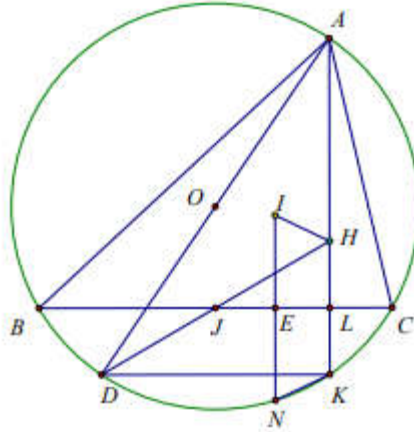
Từ giả thiết ta được tứ giác HPDN nội tiếp đường tròn tâm J suy ra:

$$\widehat{PJN} = 2\widehat{PDN} = 2(180^\circ - \widehat{BHC}) \quad (1)$$

Ta có các tứ giác $BPMD, CNMD$ nội tiếp nên: $\widehat{PMN} = 360^\circ - (\widehat{PMD} + \widehat{NMD}) = \widehat{HBD} + \widehat{HCD}$
 $= 360^\circ - (\widehat{BHC} + \widehat{BDC}) = 360^\circ - 2\widehat{BHC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PJN} = \widehat{PMN}$ nên tứ giác $PMJN$ nội tiếp. Điều phải chứng minh.

2)



Gọi L là giao điểm của AH với BC , K là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC .

Kẻ đường thẳng đi qua I vuông góc với BC cắt BC và cắt cung nhỏ BC lần lượt tại E và N .

Ta có $JL \parallel DK$ (vì cùng vuông góc với AK) mà J là trung điểm của HD nên JL là đường trung bình của tam giác HDK , suy ra L là trung điểm của HK . Do đó K đối xứng với H qua đường thẳng BC suy ra $\widehat{BHC} = \widehat{BKC} = 120^\circ$.

Mà $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 120^\circ$ nên B, I, H, C đồng viên thuộc đường tròn đối xứng với (O) qua BC , suy ra N chính là điểm đối xứng với I qua BC . Suy ra $HINK$ là hình thang cân.

Ta có $\widehat{ABI} = \widehat{IBC} = \widehat{CBN} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$.

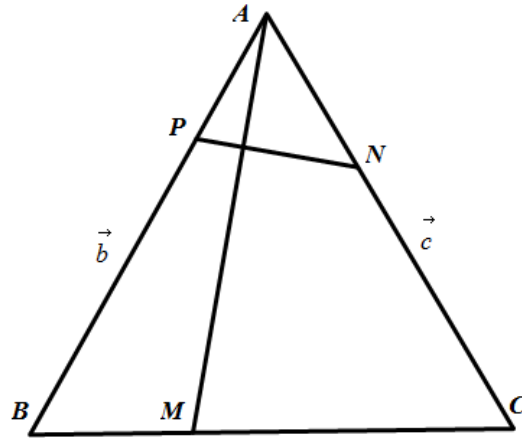
Từ đó $\widehat{AHI} = 180^\circ - \widehat{IHK} = 180^\circ - \widehat{AKN} = \widehat{ABN} = \widehat{ABI} + \widehat{IBC} + \widehat{CBN} = \frac{3}{2}\widehat{ABC}$

Suy ra $2\widehat{AHI} = 3\widehat{ABC}$. Điều phải chứng minh.

Câu 26. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019) Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 15. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 5, CM = 10, AP = 4$. Chứng minh rằng $AM \perp PN$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tuấn ; Fb: Nguyễn Tuấn



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{225}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{4}{15}\vec{b}$.

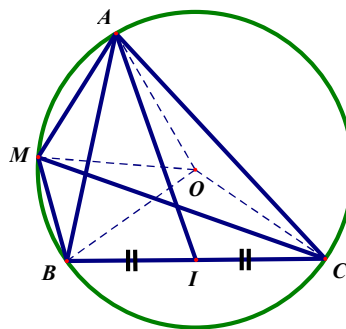
Khi đó $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = \left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{4}{15}\vec{b}\right) = \frac{1}{9}\vec{c}^2 - \frac{8}{45}\vec{b}^2 + \frac{2}{15}\vec{b} \cdot \vec{c} = \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{45} + \frac{1}{15}\right) \cdot 225 = 0$.

Suy ra $AM \perp PN$.

Câu 27. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho tam giác ABC , M là điểm di động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm vị trí điểm M để $MB^2 + MC^2 - 2MA^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tác giả: Võ Thanh Hiệp; Fb: Võ Hiệp



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , I là trung điểm BC .

Theo đề bài suy ra $OM^2 = OA^2 = OB^2 = OC^2 = R^2$

Ta có

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})^2 - 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2$$

$$= -2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OM} \cdot (2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

$$= 2\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) = -4\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AI}$$

$$= -4OM \cdot AI \cdot \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AI}) \geq -4OM \cdot AI$$

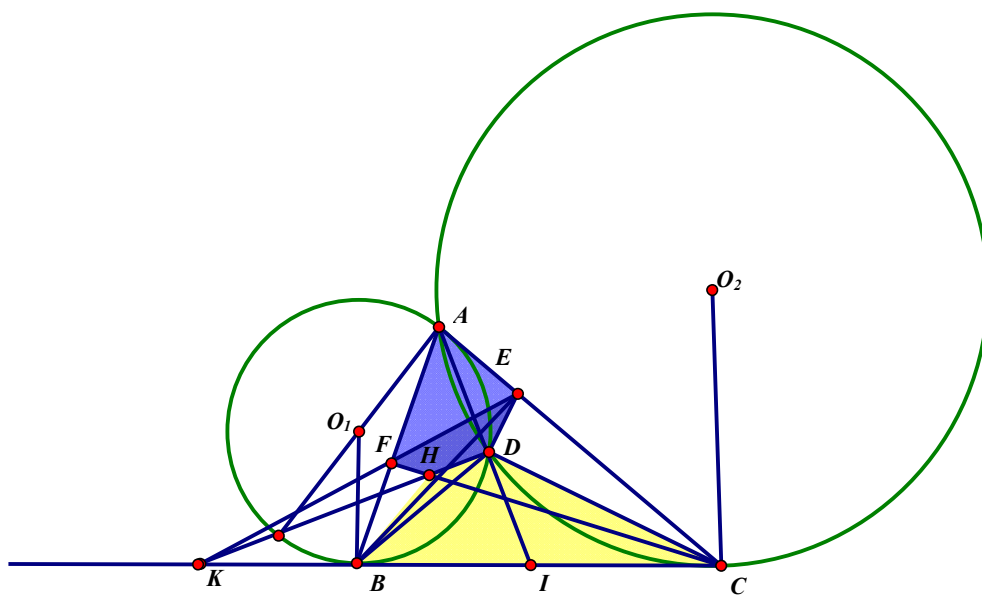
Vì OM và AI không đổi. Do đó $MB^2 + MC^2 - 2MA^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AI}) = 1$. Khi đó M thuộc đường tròn (O) sao có $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AI}$ cùng hướng.

Câu 28. (HSG12 tỉnh Bình Thuận năm 2018-2019) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Các đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B, C . Gọi D là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) .

- a) Chứng minh đường thẳng AD đi qua trung điểm của cạnh BC ;
b) Chứng minh ba đường thẳng BC, EF, HD đồng quy.

Lời giải

Tác giả: Trần Công Dũng; Fb: Dung Tran



- a. Gọi I là giao điểm của AD và BC .

Ta có $IB^2 = IA \cdot ID = IC^2$.

Suy ra $IB = IC$.

Do đó I là trung điểm của BC . Hay đường thẳng AD đi qua trung điểm I của BC .

- b) Chứng minh ba đường thẳng EF, BC, HD đồng quy.

Ta có $\widehat{BHC} = \widehat{BDC}$. Suy ra tứ giác $BCDH$ nội tiếp đường tròn (O_3)

Ta có $\widehat{AFH} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $AFHD$ nội tiếp đường tròn (O_4)

Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn (O_5) đường kính BC

Ta có HD là dây cung chung của hai đường tròn $(O_3) \& (O_4)$.

HD là trục đẳng phương hai đường tròn $(O_3) \& (O_4)$

Tương tự ta được:

EF là trục đẳng phương hai đường tròn (O_3) & (O_5)

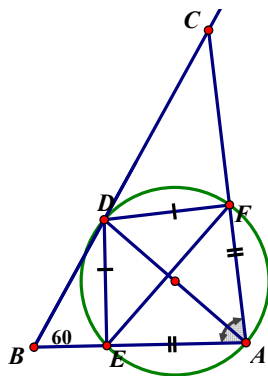
BC là trục đẳng phương hai đường tròn (O_5) & (O_4)

Suy ra ba đường thẳng BC , EF , HD đồng quy

Câu 29. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi D là giao điểm của chân đường phân giác trong góc A với BC , điểm E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên AB và BC . Đặt $\frac{AB}{AC} = x$, tính tỉ số $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$ theo x và tính tỉ số đó khi $BD = 3, BC = 9$.

Lời giải

Tác giả: Trần Duy Thúc ; Fb: Trần Duy Thúc



Tác giả: Trần Duy Thúc ; Fb: Trần Duy Thúc

Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = x (x > 0) \Rightarrow DB = \frac{x}{x+1} BC$.

Do $\widehat{EDF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và $DE = DF$ nên ta có: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} DE \cdot DF \cdot \sin \widehat{EDF}}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}} = \frac{DE^2}{x AC^2}$.

Mặt khác: $DE = DB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} DB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x}{x+1} BC$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos 60^\circ = AC^2 \Leftrightarrow BC^2 - xAC \cdot BC + x^2 AC^2 - AC^2 = 0.$$

Với $\Delta = AC^2(4 - 3x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Khi đó : $BC = AC \cdot \frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$ hay $BC = AC \cdot \frac{x - \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$. Nhưng $BC = AC \cdot \frac{x - \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$ khi

$x - \sqrt{4 - 3x^2} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{4 - 3x^2} \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow 1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Vậy:

Khi $0 < x \leq 1$ thì $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot AC^2 \cdot \left(\frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{x AC^2} = \frac{3x}{16} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{x+1}\right)^2$.

$$\text{Khi } 1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ thì } \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 \cdot AC^2 \cdot \left(\frac{x + \sqrt{4-3x^2}}{2} \right)^2 \frac{1}{xAC^2} = \frac{3x}{16} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{4-3x^2}}{x+1} \right)^2$$

$$\text{hoặc } \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 \cdot AC^2 \cdot \left(\frac{x - \sqrt{4-3x^2}}{2} \right)^2 \frac{1}{xAC^2} = \frac{3x}{16} \cdot \left(\frac{x - \sqrt{4-3x^2}}{x+1} \right)^2.$$

Trường hợp $BD=3, BC=9$.

Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = x = \frac{1}{2}, 0 < x < 1$. Áp dụng kết quả trên ta có:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{16} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} + \sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}+1} \right)^2 = \frac{7+\sqrt{13}}{48}.$$

Câu 30. (HSG12 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2018-2019) Cho tam giác đều OAB có $AB=a$. Trên đường thẳng (d) đi qua O vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy một điểm M sao cho $OM=x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB . Đường thẳng EF cắt đường thẳng (d) tại N .

a) Chứng minh rằng $AN \perp BN$.

b) Xác định x theo a để thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Tác giả: Phan Trung Hiếu; Fb: Hieu Pt

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp OM \end{cases} \Rightarrow AF \perp (OMB) \Rightarrow AF \perp MB,$$

mà $AE \perp MB$ nên $BM \perp (AEF)$.

Do $AN \subset (AEF)$ nên $AN \perp BM$.

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

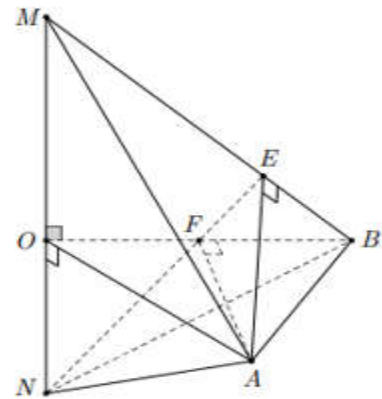
$$\Leftrightarrow -OM \cdot ON + OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow ON = \frac{OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ}{OM} = \frac{a^2}{2x}.$$

Do $MN \perp (OAB)$ nên

$$V_{ABMN} = V_{MOAB} + V_{NOAB} = \frac{1}{3} MN \cdot S_{OAB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \left(x + \frac{a^2}{2x} \right) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} \left(x + \frac{a^2}{2x} \right).$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy thì } x + \frac{a^2}{2x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{a^2}{2x}} = \sqrt{2}a \Rightarrow V_{ABMN} \geq \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

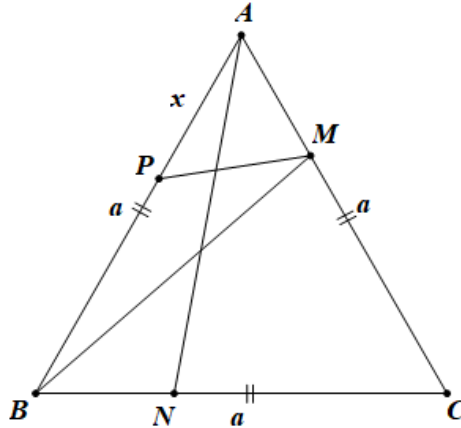


Vậy thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$ là $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh a . Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm N, M, P sao cho $BN = \frac{a}{3}; CM = \frac{2a}{3}; AP = x$ ($0 < x < a$). Tìm x theo a để đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM .

Lời giải

Tác giả: Ngô Yến; Fb: Nguyen



Ta có:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

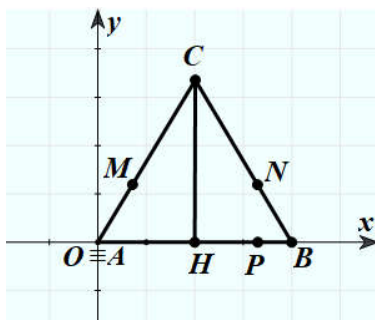
$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{x}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM} &= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(-\frac{x}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\frac{2x}{3a} \cdot AB^2 + \frac{1}{9} \cdot AC^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{x}{3a}\right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{2x}{3a} \cdot a^2 + \frac{1}{9} \cdot a^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{x}{3a}\right) \frac{a^2}{2} \\ &= -\frac{5xa}{6} + \frac{2a^2}{9}\end{aligned}$$

$$AN \perp PM \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \Leftrightarrow -\frac{5xa}{6} + \frac{2a^2}{9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4a}{15} \\ a = 0(L) \end{cases}$$

Vậy đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM khi $x = \frac{4a}{15}$.

Cách 2. Tác giả: Nguyễn Trọng Lễ; Fb: Nguyễn Trọng Lễ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0), B(a;0), C\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), P(x;0) (0 < x < a)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \Rightarrow N\left(\frac{5a}{6}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \left(\frac{5a}{6}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right).$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow M\left(\frac{a}{6}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{PM} = \left(\frac{a}{6} - x; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right).$$

$$AN \perp PM \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{6} \left(\frac{a}{6} - x\right) = -\frac{3a^2}{36} \Rightarrow x = \frac{4a}{15}.$$

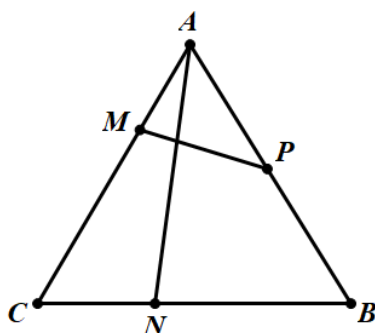
Vậy với $x = \frac{4a}{15}$ thì đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM .

Câu 32. (HSG10 THPT ĐAN PHƯƠNG 2018-2019) Cho tam giác ABC là tam giác đều có độ dài cạnh bằng a . Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm N, M, P sao cho $BN = na, CM = ma, AP = x$ với $0 < n < 1, 0 < m < 1, 0 < x < a$. Tìm giá trị của x theo m, n, a để đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trọng Lễ; Fb: Nguyễn Trọng Lễ

Tác giả: Trần Quang; Fb: Quang Trần



Ta có

$$+) \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + \frac{NC}{CB} \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{NC}{BC} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{NC}{BC} \overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{NC}{BC}\right) \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{NC}{BC} \overrightarrow{AB} + \frac{NB}{BC} \overrightarrow{AC} = (1-n) \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC}.$$

$$+) \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{x}{a} \overrightarrow{AB} + (1-m) \overrightarrow{AC}.$$

$$AN \perp PM \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \Leftrightarrow \left[n \overrightarrow{AC} + (1-n) \overrightarrow{AB} \right] \cdot \left[-\frac{x}{a} \overrightarrow{AB} + (1-m) \overrightarrow{AC} \right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow (1-n) \left(\frac{-x}{a} \right) a^2 + n(1-m) a^2 + \left[(1-n)(1-m) + n \left(\frac{-x}{a} \right) \right] \frac{a^2}{2} = 0.$$

$$\text{Tìm được } x = \frac{(1-m)(1+n)a}{2-n}.$$

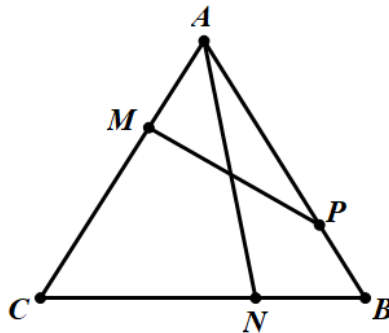
Vậy với $x = \frac{(1-m)(1+n)a}{2-n}$ thì đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM .

Câu 33. (HSG10 THPT ĐÀN PHƯỢNG 2018-2019) Cho tam giác ABC là tam giác đều có độ dài cạnh bằng a . Trên các cạnh BC , CA , AB lần lượt lấy các điểm N , M , P sao cho $BN = \frac{a}{3}$, $CM = \frac{2a}{3}$, $AP = x$ với $0 < x < a$. Tìm giá trị của x theo a để đường thẳng AN tạo với đường thẳng PM một góc 60° .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trọng Lễ; Fb: Nguyễn Trọng Lễ

Tác giả: Trần Quang; Fb: Quang Trần



Ta có

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow AN^2 = \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right)^2 = \frac{7}{9} a^2.$$

$$\overrightarrow{PM} = -\frac{x}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow PM^2 = \left(-\frac{x}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right)^2 = \frac{1}{9} a^2 + x^2 - \frac{1}{3} ax.$$

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(-\frac{x}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{2}{9} a^2 - \frac{5}{6} ax.$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } \cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM}|}{AN \cdot PM} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\left| \frac{2}{9} a^2 - \frac{5}{6} ax \right|}{\frac{\sqrt{7}}{3} a \cdot \sqrt{\frac{1}{9} a^2 + x^2 - \frac{1}{3} ax}}.$$

$$\Leftrightarrow 162x^2 - 99ax + 9a^2 = 0 \Leftrightarrow 162 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 99 \cdot \frac{x}{a} + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{a} = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{9} \end{cases}.$$

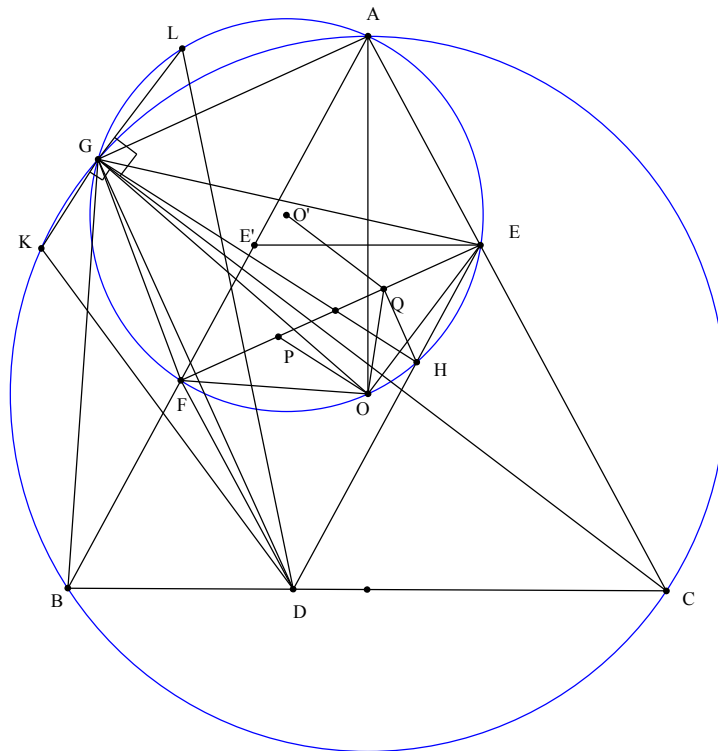
Vậy với $x = \frac{a}{2}$ và $x = \frac{a}{9}$ thì đường thẳng AN tạo với đường thẳng PM một góc 60° .

Câu 34. (HSG11 tChuyênDHĐB Bắc Bộ năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có $AB=AC$, các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại các điểm A, G . Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm $H (H \neq E)$. Đường thẳng qua G vuông góc với GH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm $K (K \neq G)$, đường thẳng qua G vuông góc với GC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm $L (L \neq G)$. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GDK, GDL . Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên cạnh BC thì:

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF luôn đi qua hai điểm cố định.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác GPQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Nhung; Fb: Nguyễn Thị Hồng Nhung



- Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF . Gọi E' là điểm đối xứng với E qua đường thẳng AO . Khi đó $EE' \parallel BC$ vì cùng vuông góc với AO suy ra tứ giác $BDEE'$ là hình bình hành suy ra $DE = BE'$, kết hợp với $DE = AF$ ta được $BF = AE$

(Có thể không cần dựng điểm E' , dễ thấy tam giác BFD cân tại F và có tứ giác $AEDF$ là hình bình hành, nên ta có $BF = DF = AE$).

Suy ra $\triangle OAE' = \triangle OBF \Rightarrow OE = OF$. Kết hợp với OA là phân giác của góc $\widehat{EAF}$ suy ra $O \in (AEF)$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF luôn đi qua hai điểm cố định A, O .

b) Tam giác FBD cân tại F suy ra $FB = FD$, $\widehat{GBF} = \frac{1}{2}\widehat{GOA} = \frac{1}{2}\widehat{GFA}$ nên tam giác FGB cân tại F suy ra $FB = FG$. Từ đó suy ra F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DGB .

Chứng minh tương tự ta được E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DGC .

Từ đó EF là trung trực của DG , kết hợp với AG vuông góc với DG suy ra $EF \parallel AG$.

$\widehat{FHD} = \widehat{EAF} = \widehat{EDF} \Rightarrow \triangle FHD$ cân tại F suy ra $FH = FD \Rightarrow H \in (GBD)$.

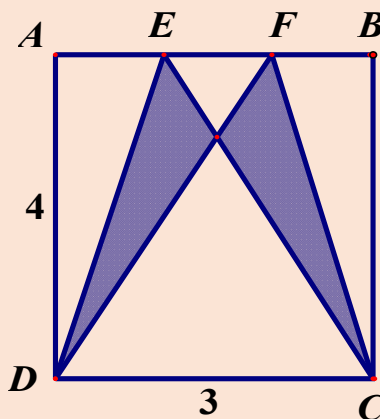
P là giao điểm của đường thẳng qua O song song với GH và EF , Q là giao điểm của đường thẳng qua O' song song với GC và EF .

E là tâm đường tròn (GDC) và O là tâm đường tròn ngoại tiếp (GAC) suy ra $OE \perp GC$, kết hợp với GC vuông góc với GL suy ra GL song song OE . Do đó $OE \perp O'Q \Rightarrow QE = QO$ (1).

Tương tự ta được $PO = PF$ (2).

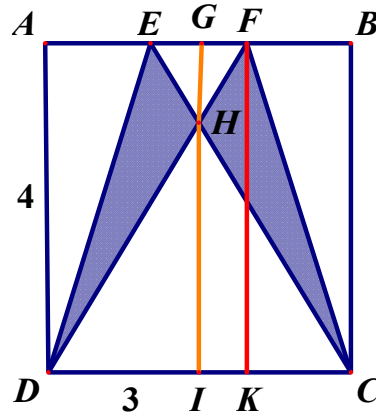
Mặt khác $OE = OF$, kết hợp với (1) và (2) ta được $\triangle QOE = \triangle POF \Rightarrow OP = OQ \Rightarrow OO'$ là trung trực của PQ , kết hợp với OO' là trung trực của GA nên tứ giác $AQPG$ là hình thang cân hay nó nội tiếp suy ra (GPQ) luôn đi qua điểm A cố định.

Câu 35. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019) Một biển quảng cáo có dạng hình chữ nhật $ABCD$ được sơn trang trí như hình bên. Chi phí để sơn phần tô đậm là 250.000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 160.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên là bao nhiêu?



Biết $AD = 4m$, $CD = 3m$ và $AE = EF = FB$.

Lời giải



Gọi G, I lần lượt là trung điểm AB, CD .

Gọi H là giao điểm của EC, DF và K là điểm thỏa $FK \perp DC$.

Xét tam giác vuông DFK và DHI có

$$\tan HDI = \frac{HI}{DI} = \frac{FK}{DK} \Leftrightarrow \frac{HI}{1,5} = \frac{4}{2} \Rightarrow HI = 3 \Rightarrow GH = 1.$$

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = AD \cdot AB = 4 \cdot 3 = 12 (\text{m}^2)$$

$$S_{ADE} = S_{BCF} = \frac{1}{2} DA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2 (\text{m}^2)$$

$$S_{DHC} = \frac{1}{2} HI \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5 (\text{m}^2)$$

$$S_{EHF} = \frac{1}{2} GH \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5 (\text{m}^2)$$

$$\Rightarrow 2S_{EHD} = S_{ABCD} - (2S_{ADE} + S_{DHC} + S_{EHF}) = 3 (\text{m}^2)$$

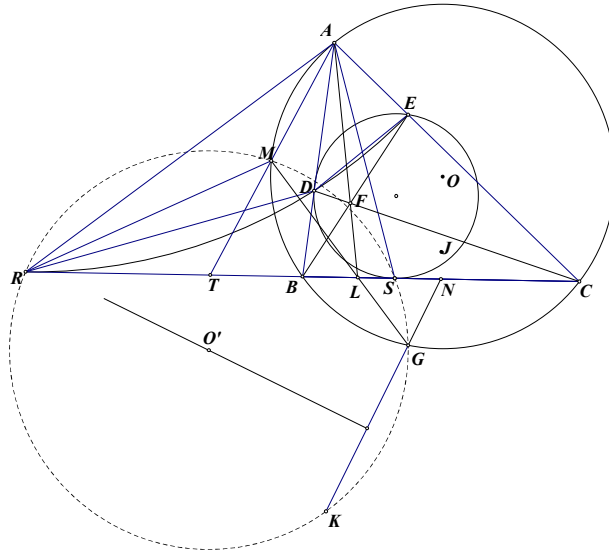
Vậy số tiền để sơn biển quảng cáo là $T = 3.250000 + 9.160000 = 2190000$ (đồng).

Câu 36. (HSG12 Hồ Chí Minh Ngày 2 năm 2018-2019) (HSG12 Hồ Chí Minh Ngày 2 năm 2018-2019) Cho tam giác ABC nhọn, không cân và nội tiếp (O) . Một đường tròn (J) thay đổi đi qua B, C và cắt các đoạn thẳng AB, AC lần lượt tại D và E . Trên đường thẳng BC lấy hai điểm phân biệt R, S sao cho (DER) và (DES) tiếp xúc với đường thẳng BC . Giả sử (ADE) cắt (O) tại M khác A . Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác RSM .

a) Chứng minh rằng đường tròn (O') đi qua trực tâm của tam giác ARS .

b) Chứng minh rằng điểm O' luôn di động trên một đường thẳng cố định khi (J) thay đổi.

Lời giải



a) Giả sử $DE \cap BC = T$ thì M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BCEDAT$ nên điểm $M \in AT$.

Ta có: $TM.TA = TD.TE = TS^2 = TR^2$ nên T là trung điểm của RS .

Từ đó ta có $\triangle TMS \sim \triangle TSA \Rightarrow \widehat{TSM} = \widehat{TAS}$. Tương tự thì $\widehat{TRM} = \widehat{TAR}$.

Do đó: $\widehat{TSM} + \widehat{TRM} = \widehat{TAS} + \widehat{TAR} = \widehat{RAS}$ hay $\widehat{RSM} + \widehat{RAS} = 180^\circ$.

Mặt khác, gọi H là trực tâm của $\triangle ARS$ thì $\widehat{RHS} + \widehat{RAS} = 180^\circ$ nên $\widehat{RHS} = \widehat{RMS}$.

Từ đây suy ra đường tròn (O') đi qua trực tâm của tam giác ARS .

b) Vì đường tròn (O') đi qua trực tâm của tam giác ARS nên nó đối xứng với đường tròn (ARS) qua BC , mà (ARS) đi qua điểm A cố định nên đường tròn (O') đi qua điểm K đối xứng với A qua BC , cũng cố định.

Gọi $F = BE \cap CD$, $L = AF \cap BC$ thì $(TL, BC) = -1$.

Ta có $TS^2 = TR^2 = TM.TA = TB.TC$ nên $(RS, BC) = -1$.

Gọi N là trung điểm của BC , khi đó $NS.NR = NB^2 = \frac{BC^2}{4} = \text{const}$.

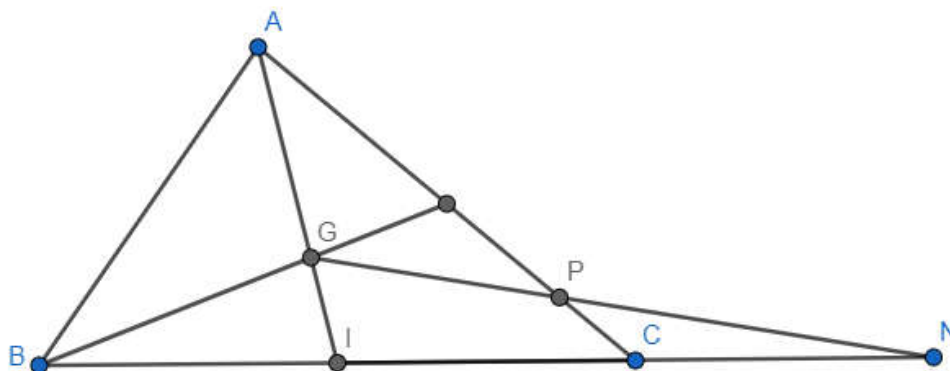
Gọi G là giao điểm của đường thẳng NK với (O') , $G \neq K$.

Suy ra $NG.NK = NS.NR = \frac{BC^2}{4} = \text{const}$. Do đó, suy ra $NG = \text{const} \Rightarrow G$ cố định.

Vậy O' di động trên đường trung trực của KG cố định.

Câu 37. (HSG10 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có trọng tâm G và điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Gọi P là giao điểm của AC và GN , tính $\frac{PA}{PC}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC . Gọi $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(k - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{7}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}.$$

Mặt khác, do ba điểm G, P, N thẳng hàng nên hai vector $\overrightarrow{GP}, \overrightarrow{GN}$ cùng phương. Do đó:

$$\frac{k - \frac{1}{3}}{\frac{7}{6}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{6}} \Leftrightarrow \frac{k - \frac{1}{3}}{\frac{7}{6}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k - \frac{1}{3} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow k = \frac{4}{5}.$$

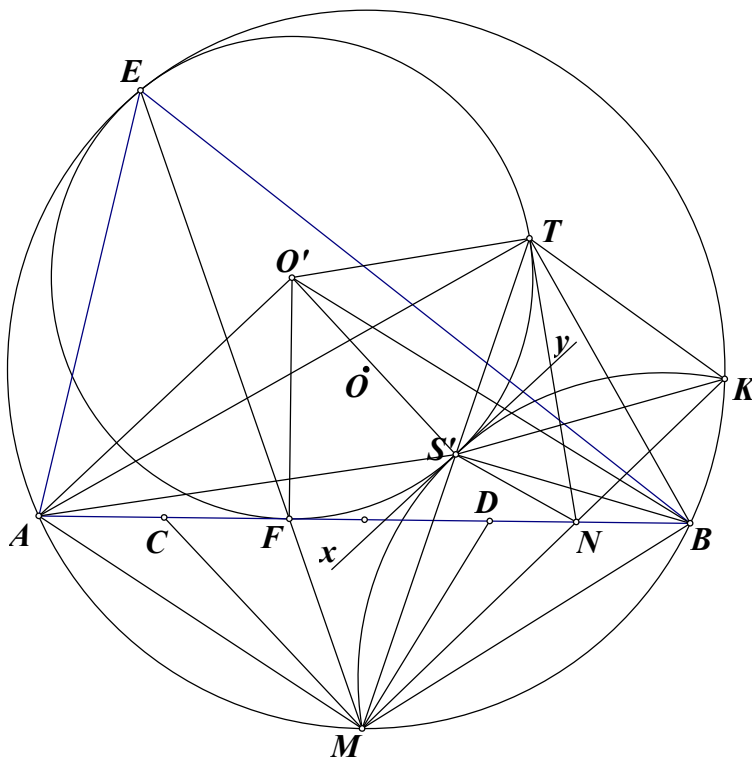
$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow AP = \frac{4}{5}AC \Rightarrow PC = \frac{1}{5}AC \Rightarrow \frac{PA}{PC} = 4.$$

Câu 38. (HSG12 HCM ngày 2 năm 2018-2019) Cho AB là một dây cố định khác đường kính của đường tròn (O) cố định. Gọi M là trung điểm của cung nhỏ AB . Xét đường tròn (O') thay đổi tiếp xúc với đoạn thẳng AB và tiếp xúc trong với (O) (sao cho O' khác phía với M so với đường thẳng AB). Các đường thẳng qua M vuông góc với $O'A, O'B$ cắt đường thẳng AB lần lượt tại các điểm C, D .

a) Chứng minh rằng $AB = 2CD$.

b) Gọi T là một điểm thuộc (O') sao cho $\widehat{ATB} = 90^\circ$. Tiếp tuyến của (O') tại T cắt đoạn AB tại N và đường thẳng MN cắt (O) tại K khác M . Vẽ đường tròn qua M, K và tiếp xúc ngoài với (O') tại S . Chứng minh rằng điểm S luôn di động trên một đường tròn cố định khi (O') thay đổi.

Lời giải



a) Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (O') với (O) và AB .

Cách 1.1. Do $OM \parallel O'F$ nên $\widehat{EOM} = \widehat{EO'F}$. Do đó

$$\widehat{O'EF} = \frac{180^\circ - \widehat{EO'F}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{EOM}}{2} = \widehat{OEM} . \text{ Suy ra } EF \text{ đi qua } M .$$

Khi đó, dễ thấy rằng $XY \parallel AB$. Ta có $AF^2 = AX \cdot AE$, $BF^2 = BY \cdot BE$ nên

$$\left(\frac{AF}{BF}\right)^2 = \frac{AX}{BY} \cdot \frac{AE}{BE} = \left(\frac{AE}{BE}\right)^2 \Rightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BE}.$$

Do đó, EF là phân giác của $\widehat{AEB}$ nên EF đi qua M .

Tiếp theo, vì $\widehat{FAM} = \widehat{EAM}$ nên $\triangle AFM \sim \triangle EAM \Rightarrow \frac{AM}{EM} = \frac{FM}{AM} \Rightarrow MA^2 = ME.MF$.

Xét đường tròn điểm A và đường tròn (O') thì từ đẳng thức trên, ta thấy M có cùng phương tích đến hai đường tròn. Suy ra MC chính là trục đẳng phương của đường tròn điểm A và đường tròn (O') .

Do đó, $CA^2 = CF^2$ nên $CA = CF$

Tương tự thì $DB = DF$ nên $AB = 2CD$.

Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned} CD &= NC + ND = NM \cdot \tan \widehat{NMC} + NM \cdot \tan \widehat{NMD} \\ &= MN \cdot (\tan \widehat{O'AB} + \tan \widehat{O'BA}) = MN \cdot \left(\frac{O'F}{FA} + \frac{O'F}{FB} \right) \\ &= MN \cdot \frac{O'F \cdot AB}{FA \cdot FB} = MN \cdot \frac{OM \cdot AB}{FE \cdot FN} \cdot \frac{EF}{EM} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{MN \cdot 2MO}{ME \cdot MF} = \frac{AB}{2} \end{aligned}$$

b) Ta sẽ chứng minh M, S, T thẳng hàng và $MS.MT = MA^2 = MB^2$.

Cách 1. Gọi S' là giao điểm của đường thẳng TM với (O') , $S' \neq T$.

Lúc đó $MS'.MT = MF.ME = MA^2 = MN.MK$ nên tứ giác $NKTS'$ nội tiếp.

Gọi $xS'y$ là tiếp tuyến của (O') tại S' , ta có $(xy, S'M) = \widehat{S'TN} = \widehat{S'KM}$ suy ra xy cũng là tiếp tuyến của đường tròn (MKS') . Do đó (MKS') tiếp xúc với (O') .

Suy ra $S' \equiv S$. Suy ra M, S, T thẳng hàng và $MS.MT = MA^2 = MB^2$ **(2 điểm)**

Cách 2. Ta thấy rằng với mọi điểm $E_o \in (O)$; $F_o \in AB$ sao cho E_oF_o đi qua M thì chứng minh tương tự trên, ta đều có $MA^2 = MB^2 = ME_o.MF_o$

Xét phép nghịch đảo Ω tâm M , phương tích MA^2 thì:

$$AB \leftrightarrow (O),$$

$$(O') \leftrightarrow (O').$$

Ảnh của TN qua Ω sẽ là một đường tròn đi qua M và tiếp xúc với (O') . Chú ý rằng $\Omega: N \leftrightarrow K$ nên ảnh của TN là (MSK) . Suy ra $S \leftrightarrow T$ hay M, S, T thẳng hàng và

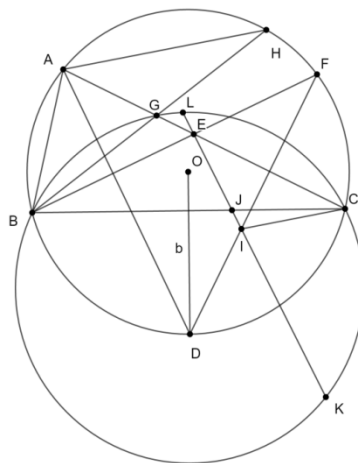
$$MS.MT = MA^2 = MB^2. \text{ (2 điểm)}$$

Tiếp theo, bằng cách xét tam giác đồng giác, ta có $\widehat{SAM} = \widehat{ATS}$, $\widehat{SBM} = \widehat{BTS}$ nên $\widehat{SAM} + \widehat{SBM} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AMBS$ có $\widehat{AMB} = \alpha$ không đổi và tổng $\widehat{SAM} + \widehat{SBM} = 90^\circ$ nên $\widehat{ASB} = 270^\circ - \alpha$, chứng tỏ S luôn thuộc cung chứa góc $270^\circ - \alpha$ dựng trên AB . Ta có đpcm

Câu 39. (HSG12 tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2018-2019) Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại điểm D khác A , lấy E đối xứng B qua AD , đường thẳng BE cắt (O) tại F khác B . Lấy điểm G di chuyển trên cạnh AC (G khác A, C), đường thẳng BG cắt (O) tại H khác B . Đường thẳng qua C song song AH cắt FD tại I . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt EI tại hai điểm phân biệt K, L . Chứng minh rằng đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Gọi giao điểm của đường thẳng EI và BC là J . Ta có DF là trục đối xứng của EC $\widehat{CEJ} = \widehat{ECI} = \widehat{HAC} = \widehat{HBC}$ nên tứ giác $BGEJ$ nội tiếp.

Phép nghịch đảo $N_C^{k=CE.CG=CJ.CB}$ biến đường tròn (BCG) thành đường thẳng EJ nên biến K, L thành chính nó.

Do đó $CK^2 = CL^2 = k$ hay đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua điểm C cố định.

Câu 4:

Câu 40. (HSG12 tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019 (2)) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) , đường tròn tâm I tiếp xúc với các tia AB, AD lần lượt tại E và F , đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại điểm T . Hai tiếp tuyến tại A và T của đường tròn (O) cắt nhau tại K . Các đường thẳng TE, TF lần lượt cắt đường tròn (O) thứ tự tại các điểm M, N (M, N khác T).

- Chứng minh rằng ba điểm K, M, N thẳng hàng.
- Đường phân giác của góc BAC cắt đường thẳng MC tại P , đường thẳng KP cắt đường thẳng CN tại Q . Chứng minh rằng: Nếu N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ thì bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD bằng nhau.

Lời giải

Tác giả: Võ Thanh Phong; Fb: Võ thanh Phong

Phép vị tự tâm T , tỉ số k biến đường tròn (I) thành đường tròn (O) .

Khi đó vì T, E, M thẳng hàng và $E \in (I), M \in (O)$ nên $V_T^k : E \mapsto M$.

Do T, F, N thẳng hàng và $F \in (I), N \in (O)$ nên $V_T^k : F \mapsto N$.

Gọi L là giao điểm của AT và (I) suy ra $V_T^k : L \mapsto A$.

Tiếp tuyến tại E, F của (I) và TL đồng quy tại $A \Rightarrow TELF$ là tứ giác điều hòa.

Phép vị tự tâm T , tỉ số k biến tứ giác $TELF$ thành $TMAN$ nên $TMAN$ là tứ giác điều hòa.

Suy ra K, M, N thẳng hàng.

Từ $IE // OM$ nên $OM \perp AB \Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB của (O) .

Tương tự: N là điểm chính giữa cung AD của (O) .

Phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt CM tại P , mà CM là phân giác góc $\widehat{ACB}$ nên P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ngoài ra, Q thuộc CN là phân giác góc $\widehat{ACD}$ và $NQ = NA = ND$ nên Q là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD .

Gọi r_1, r_2 là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ADC .

Do K, P, Q thẳng hàng nên theo định lý Menelaus cho tam giác MCN với cát tuyến $\overline{K, P, Q}$ ta có:

$$\frac{PC}{PM} \cdot \frac{KM}{KN} \cdot \frac{QN}{QC} = 1.$$

Tam giác $\triangle KAM \sim \triangle KNA$.

Mặt khác: $\frac{KM}{KN} = \frac{KM}{KA} \cdot \frac{KA}{KN} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$.

Suy ra $\frac{QC}{PC} = \frac{AM}{AN} = \frac{\sin \widehat{ACM}}{\sin \widehat{ACN}} \Rightarrow QC \cdot \sin \widehat{NCA} = PC \cdot \sin \widehat{MCA}$.

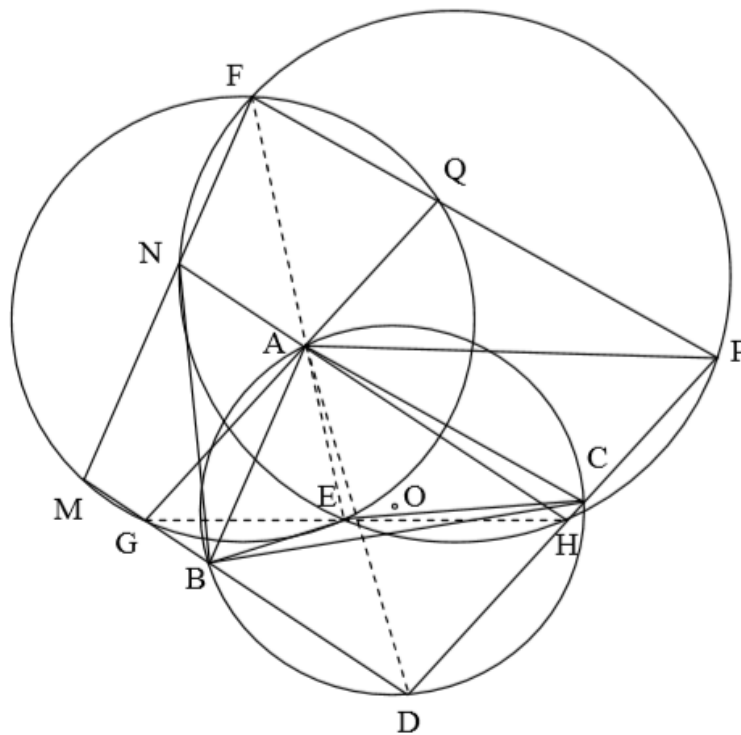
Suy ra $r_1 = r_2$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 41. (HSG12 tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABMN$ và $ACPQ$ sao cho tam giác ABN đồng dạng với tam giác CAP . Gọi G là giao điểm của AQ và BM , H là giao điểm của AN và CP . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác GMQ , HNP cắt nhau tại E và F (E nằm trong đường tròn (O)).

- a) Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng.
b) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Duy Thắng; Fb: Hoàng Duy Thắng



Gọi $(O_1), (O_2)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp của tam giác GMQ, HNP suy ra EF là trục đẳng phương của $(O_1), (O_2)$.

Gọi D là giao điểm của BM và CP suy ra $AGDH$ là hình bình hành.

Vì $\triangle ABN \sim \triangle CAP \Rightarrow (\widehat{AB}, \widehat{AN}) = (\widehat{CA}, \widehat{CP})$

$(\widehat{BA}, \widehat{BD}) = (\widehat{AB}, \widehat{AN}) = (\widehat{CA}, \widehat{CP}) = (\widehat{CA}, \widehat{CD})$

$\Rightarrow A, B, C, D$ đồng viên.

Suy ra $(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = (\widehat{DA}, \widehat{DG}), (\widehat{AB}, \widehat{AC}) = (\widehat{DG}, \widehat{DC}) = (\widehat{GD}, \widehat{GA})$

Suy ra hai tam giác ABC và GAD đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{GD}{GA} = \frac{AH}{AG}$$

$$\text{Mà } \triangle ABN \sim \triangle CAP \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{CP}{AN}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AG} = \frac{CP}{AN} = \frac{AQ}{AN}$$

$$\Rightarrow AH \cdot AN = AG \cdot AQ$$

$$\Rightarrow P_{A/(O_1)} = P_{A/(O_2)}$$

Mà EF là trục đẳng phương của $(O_1), (O_2) \Rightarrow A \in EF$.

Vậy A, E, F thẳng hàng.

b) Gọi $F' = MN \cap PQ$

Ta có: $(F'M, F'Q) = (AB, AC) = (GM, GQ)$.

Suy ra $F' \in (O_1)$. Tương tự $F' \in (O_2)$. Suy ra $F' \equiv F$.

Ta có E, F', M, G đồng viên $\Rightarrow (GB, GE) = (GM, GE) = (FM, FE) = (AB, AE)$

Suy ra A, B, E, G đồng viên.

Tương tự A, C, E, H đồng viên.

Suy ra $(EB, EC) = (EB, EA) + (EA, EC) = (GB, GA) + (HA, HC) = 2(DB, DC)$.

Mà A, B, C, D đồng viên suy ra $D \in (O) \Rightarrow (OB, OC) = 2(DB, DC)$.

$$\Rightarrow (EB, EC) = (DB, DC)$$

Suy ra B, C, O, E đồng viên.

Câu 42. (HSG chọn HSG quốc gia tỉnh ĐỒNG THÁP 2018-2019) Cho đường thẳng d và điểm A cố định không thuộc d , H là hình chiếu của A trên d . Các điểm B, C thay đổi trên d sao cho $\overline{HB} \cdot \overline{HC} = -1$. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N .

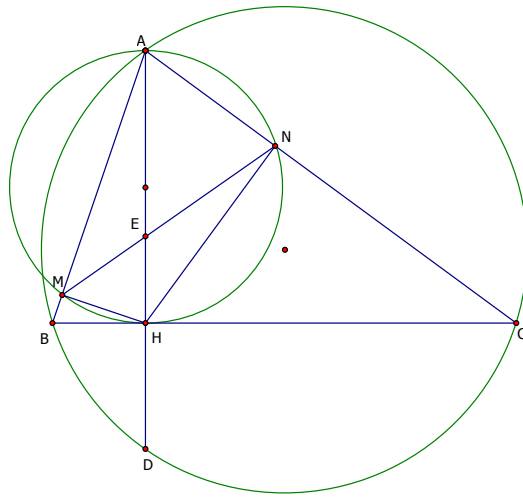
a) Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC . Chứng minh O chạy trên một đường thẳng cố định.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trọng Nghĩa; Fb: Nghĩa Nguyễn

a)



Gọi D là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường thẳng AH .

Ta có $\overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HC} = -1$.

Do đó D cố định (Vì A, H cố định).

Gọi E là giao điểm của MN với AH . Ta có tứ giác $AHMN$ nội tiếp nên $\widehat{AMN} = \widehat{AHN} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$

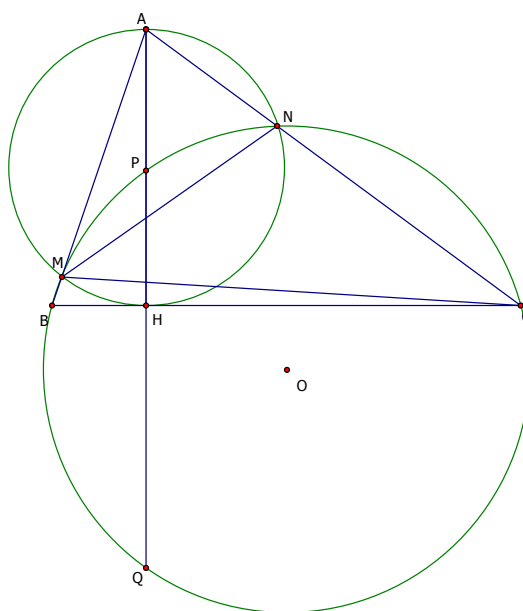
Suy ra tứ giác $MBDE$ nội tiếp. Do đó $\overline{AE} \cdot \overline{AD} = \overline{AM} \cdot \overline{AB} = AH^2 \Rightarrow E$ cố định. Vậy đường thẳng MN đi qua một điểm E cố định.

b) Do $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AN} \cdot \overline{AC} = AH^2$ nên tứ giác $BMNC$ nội tiếp. Do đó, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$.

Giả sử đường tròn $(BMNC)$ cắt đường thẳng AH tại P, Q . Ta có $\overline{HP} \cdot \overline{HQ} = \overline{HB} \cdot \overline{HC} = -1$.

$$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AM} \cdot \overline{AB} = AH^2$$

Do đó P, Q cố định. Vậy O thuộc trung trực của PQ cố định.



Chuyên đề

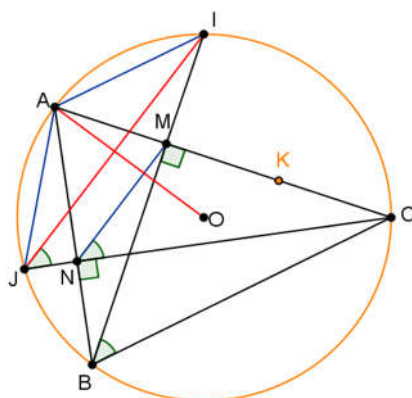
19

Tọa độ trong mặt phẳng

Câu 1. (HSG11 Hậu Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$, đường thẳng AC đi qua điểm $K(2;1)$. Gọi M, N là chân các đường cao kẻ từ đỉnh B và C . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC , biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Mai. Facebook: Mai Nguyen



Gọi I, J lần lượt là giao điểm của BM, CN với đường tròn (C) .

Do tứ giác $BCMN$ nội tiếp nên $\widehat{MBC} = \widehat{CNM}$, lại có $\widehat{CJI} = \widehat{IBC}$ (cùng chắn cung IC) do đó $\widehat{CJI} = \widehat{CNM} \Rightarrow MN \parallel IJ$

$$\text{Lại có } \begin{cases} \widehat{ACI} = \widehat{ABI} \\ \widehat{JBA} = \widehat{JCA} \\ \widehat{ABI} = \widehat{JCA} (\text{do } \widehat{NBM} = \widehat{NCM}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{JBA} = \widehat{ICA} \Rightarrow AI = AJ \Rightarrow AO \perp IJ \Rightarrow AO \perp MN$$

Từ đó ta có:

+) Do OA đi qua $O(0;0)$ và vuông góc với $MN: 4x - 3y + 10 = 0$ nên Phương trình đường thẳng $OA: 3x + 4y = 0$.

$$\text{+) Tọa độ điểm } A \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-4;3) \\ A(4;-3) \text{ (loại)} \end{cases}$$

+) Do AC đi qua $A(-4;3)$ và $K(2;1)$, nên phương trình đường thẳng $AC: x + 3y - 5 = 0$.

$$\text{Tọa độ điểm } C \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-4;3) \equiv A \text{ (loại)} \\ C(5;0) \end{cases}$$

+) Do M là giao điểm của AC và MN nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x - 3y + 10 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 2)$$

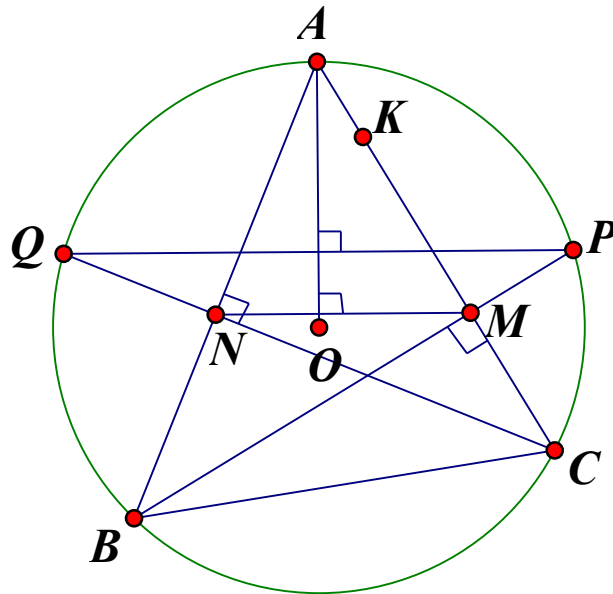
+) Đường thẳng BM đi qua $M(-1; 2)$ và vuông góc với AC nên phương trình đường thẳng $BM: 3x - y + 5 = 0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0; 5) \\ B(-3; -4) \end{cases}$

Vậy $A(-4; 3), B(-3; -4), C(5; 0)$ hoặc $A(-4; 3), B(0; 5), C(5; 0)$.

Câu 2. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$, đường thẳng AC đi qua điểm $K(2; 1)$. Gọi M, N là chân các đường cao kẻ từ đỉnh B và C . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC , biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

Lời giải



Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BM và CN với đường tròn (C) .

Tứ giác $BCMN$ nội tiếp nên $\widehat{MBC} = \widehat{MNC}$ (cùng chắn cung $\widehat{CM}$)

Tứ giác $BCPQ$ nội tiếp nên $\widehat{MBC} = \widehat{PQC}$ (cùng chắn cung $\widehat{CP}$)

Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{PQC} \Rightarrow MN \parallel PQ$.

$\widehat{ABP} = \widehat{MBN} = \widehat{MCN} = \widehat{ACQ}$ (cùng chắn cung $\widehat{NM}$) $\Rightarrow \widehat{AP} = \widehat{AQ} \Rightarrow AO \perp PQ \Rightarrow AO \perp MN$.

$\Rightarrow AO$ có phương trình là $3x + 4y = 0$.

Tọa độ của điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \\ x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ do điểm A có hoành độ âm nên $A(-4;3)$.

Đường thẳng AC đi qua K nên có phương trình là: $x + 3y - 5 = 0$.

C là giao điểm của AC và đường tròn (C) nên tọa độ của C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \\ x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$$

Lại có M là giao điểm của AC và MN nên tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 4x - 3y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;2)$

Đường thẳng BM vuông góc với AC nên có phương trình $3x - y + 5 = 0$.

$$\text{Điểm } B \text{ có tọa độ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow B(0;5) \text{ hoặc } B(-3;-4)$$

Vậy $A(-4;3)$, $B(0;5)$, $C(5;0)$ hoặc $A(-4;3)$, $B(-3;-4)$, $C(5;0)$.

Câu 3. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Số đường thẳng đi qua điểm $M(5;6)$ và tiếp xúc với đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Dung; Fb: Nguyễn Dung

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=1$.

$$\text{Ta có } IM = \sqrt{(5-1)^2 + (6-2)^2} = 4\sqrt{2}.$$

Ta thấy $IM > R$ suy ra điểm M nằm ngoài đường tròn (C) .

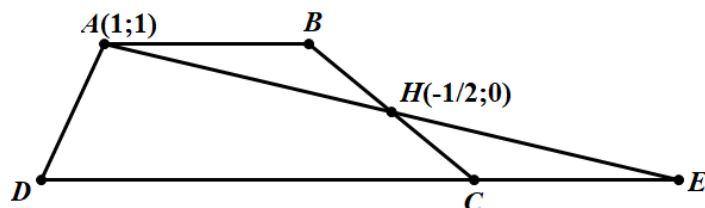
Vậy qua M nằm ngoài đường tròn (C) sẽ có 2 đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) .

Câu 4. (HSG10 THPT ĐAN PHƯỢNG 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD . Biết diện tích hình thang bằng 14 (đơn vị diện tích), đỉnh $A(1;1)$

và trung điểm cạnh BC là $H\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D nằm trên đường thẳng $d: 5x - y + 1 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Phan Đình Công; Fb: Công Phan Đình



Gọi E là giao điểm của AH và DC , ta có $E(-2; -1)$, $AE = \sqrt{13}$ và $\triangle ABH = \triangle ECH$.

Do đó $S_{ADE} = S_{ABCD} = 14$ (1).

Phương trình đường thẳng $AE: 2x - 3y + 1 = 0$.

Ta có: $D(x; 5x+1)$, $x > 0$; $d(D, AE) = \frac{|2x - 3(5x+1) + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|13x + 2|}{\sqrt{13}}$.

Suy ra: $S_{ADE} = \frac{1}{2} d(D, AE) \cdot AE = \frac{|13x + 2|}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{|13x + 2|}{2} = 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{30}{13} \end{cases} (L) \Rightarrow D(2; 11)$.

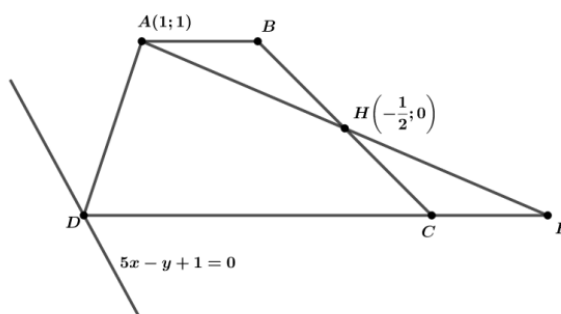
Đường thẳng AB đi qua A và nhận véc tơ $\vec{n} = \frac{1}{4} \overrightarrow{ED} = (1; 3)$ là véc tơ chỉ phương.

Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là: $3x - y - 2 = 0$.

Câu 5. (HSG10 THPT ĐAN PHƯƠNG 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ với hai đáy AB và CD . Biết diện tích hình thang là 14 (đơn vị diện tích), đỉnh $A(1; 1)$, $CD = 3AB$ và trung điểm cạnh BC là $H\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang biết đỉnh D có hoành độ dương và D nằm trên đường thẳng $d: 5x - y + 1 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Hà Bích Vượng; Fb: Vượng Mỡ



Gọi E là giao điểm của AH và DC .

Dễ thấy $\triangle ABH = \triangle ECH$ nên $S_{ABCD} = S_{AED} = 14$ và H là trung điểm của AE .

$$\Rightarrow E(-2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (-3; -2) \Rightarrow (AE): 2x - 3y + 1 = 0.$$

Gọi $D(x_D; 5x_D + 1)$.

$$\text{Ta có: } S_{ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot d(D; AE)$$

$$\Leftrightarrow 14 = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} \cdot \frac{|2x_D - 3(5x_D + 1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |-13x_D - 2| = 28$$

$$\Leftrightarrow x_D = 2 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x_D = -\frac{30}{13} \text{ (loại)} \Rightarrow D(2; 11).$$

Vì $CD = 3AB$, mà $AB = CE$ nên $\overrightarrow{DE} = 4\overrightarrow{CE}$.

$$\overrightarrow{DE} = (-4; -12) \Rightarrow \overrightarrow{CE} = (-1; -3) \Rightarrow C(-1; 2).$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} = (-1; -3) \Rightarrow B(0; 2).$$

Câu 6. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho tam giác ABC có $A(0; 1)$, trọng tâm $G(1; -1)$, đường cao $AH: 2x + y - 1 = 0$, khi đó đường thẳng BC có phương trình:

- A. $-2x + y - 3 = 0$. B. $x - 2y - 2 = 0$. C. $2x - 4y - 11 = 0$. D. $x - 2y - 4 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Hoàng Tú; Fb: Đỗ Hoàng Tú

Chọn C

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{2} \\ y_M = -2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -2\right).$$

$$BC \perp AH \Rightarrow BC \text{ có véc tơ pháp tuyến } \vec{n} = (1; -2).$$

$$BC \begin{cases} \text{qua } M\left(\frac{3}{2}; -2\right) \\ \text{VTPT } \vec{n} = (1; -2) \end{cases} \Rightarrow BC: \left(x - \frac{3}{2}\right) - 2(y + 2) = 0 \Rightarrow BC: 2x - 4y - 11 = 0.$$

Câu 7. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Xác định a để hai đường thẳng $d_1: ax + 3y + 4 = 0$

và $d_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

- A. $a = 1$. B. $a = -1$. C. $a = -2$. D. $a = 2$.

Lời giải

Tác giả: Phương Thúy; Fb: Phương Thúy

Chọn D

Gọi $d_1 \cap d_2 = A$. Vì A nằm trên trục hoành nên $y = 0$. Thay $y = 0$ vào phương trình đường thẳng d_2 ta được: $t = -1$ và $x = -2$.

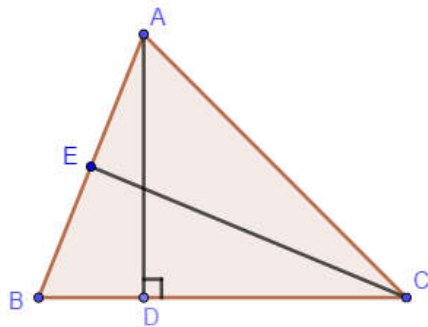
Thay $x = -2$ và $y = 0$ vào phương trình đường thẳng d_1 ta được $a = 2$.

Câu 8. (HSG10 Nam Tiền Hải Thái Bình 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy

- Viết phương trình đường cao AD , phân giác trong CE của $\triangle ABC$ biết $A(4; -1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; -5)$.
- Cho $B(0; 1)$, $C(3; 0)$. Đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ của BC cắt Oy tại $M\left(0; -\frac{7}{3}\right)$ và chia $\triangle ABC$ thành hai phần có tỉ số diện tích bằng $\frac{10}{11}$ (phần chứa điểm B có diện tích nhỏ hơn diện tích phần chứa điểm C). Gọi $A(a; b)$ và $a < 0$. Tính $T = a^2 + b^2$.

Lời giải

1.



Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-5; -10)$, $\overrightarrow{AC} = (-8; -4)$

$$\Rightarrow AB = 3\sqrt{5}, BC = 5\sqrt{5}, AC = 4\sqrt{5}$$

□ Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-5; -10) = -5\vec{v}$ với $\vec{v} = (1; 2)$.

Đường cao AD đi qua $A(4; -1)$ và nhận $\vec{v} = (1; 2)$ làm vector pháp tuyến

$$\Rightarrow \text{Phương trình } AD: 1(x-4) + 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0.$$

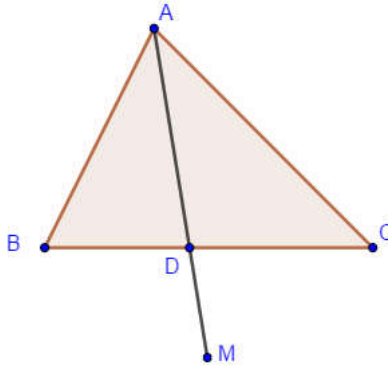
□ Gọi $E(x; y)$ là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{ACB}$, ta có: $\frac{EA}{EB} = \frac{CA}{CB} = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EA} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{EB}, \text{ với } \overrightarrow{EA} = (4-x; -1-y), \overrightarrow{EB} = (1-x; 5-y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x = -\frac{4}{5}(1-x) \\ -1-y = -\frac{4}{5}(5-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

Đường thẳng CE đi qua $C(-4; -5)$ và $E\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right)$ có phương trình $x + y + 9 = 0$

2.



Ta có:

Gọi $D(x; y)$ là chân đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$.

$$\text{Ta có: } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}d(A, BC) \cdot DB}{\frac{1}{2}d(A, BC) \cdot DC} = \frac{10}{11}.$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{10}{11} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{10}{11}\overrightarrow{DC} \text{ với } \overrightarrow{DB} = (-x; 1-y), \overrightarrow{DC} = (3-x; -y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -\frac{10}{11}(3-x) \\ 1-y = -\frac{10}{11}(-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{11}{21} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{10}{7}; \frac{11}{21}\right)$$

Đường thẳng AD đi qua $D\left(\frac{10}{7}; \frac{11}{21}\right)$ và $M\left(0; -\frac{7}{3}\right)$ có phương trình $6x - 3y - 7 = 0$.

$$\text{Có } A \in AD \Rightarrow A\left(a; 2a - \frac{7}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \left(a; 2a - \frac{7}{3} - 1\right), \overrightarrow{CA} = \left(3-a; 2a - \frac{7}{3}\right).$$

$$\text{Mà } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{10^2}{11^2} \Leftrightarrow \frac{a^2 + \left(2a - \frac{7}{3} - 1\right)^2}{(3-a)^2 + \left(2a - \frac{7}{3}\right)^2} = \frac{100}{121}$$

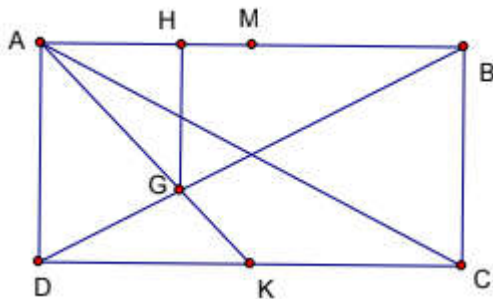
$$\Leftrightarrow 105a^2 - 80a - 100 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{7} \text{ (l)} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{11}{3}.$$

$$\text{Vậy } T = a^2 + b^2 = \frac{125}{9}.$$

Câu 9. (HSG11 Nghệ An 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB và G là trọng tâm tam giác ACD . Viết phương trình đường thẳng AD . Biết rằng $M(1; 2)$ và $G\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Minh ; Fb: Minh Nguyễn



Gọi H là hình chiếu của G lên AB và K là trung điểm của CD .

Đặt $BC = 3a > 0$, suy ra $AB = 6a$, $GH = 2a$, $HM = a$.

$$MG^2 = MH^2 + HG^2 \Leftrightarrow \frac{40}{9} = 5a^2 \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } AM = 3a = 2\sqrt{2}, AG = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3}(3a\sqrt{2}) = \frac{8}{3}.$$

Giả sử $A(x; y)$. Khi đó

$$\begin{cases} AM = 2\sqrt{2} \\ AG = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 + (2-y)^2 = 8 \\ \left(\frac{5}{3}-x\right)^2 + y^2 = \frac{64}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 3 \\ x = 3y - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ y = 0 \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 0 \\ x = \frac{19}{5}, y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Nếu $A(-1; 0)$ thì đường thẳng AD qua A và vuông góc với AM nên có phương trình là $x + y + 1 = 0$.

Nếu $A\left(\frac{19}{5}; \frac{8}{5}\right)$ thì đường thẳng AD qua A và vuông góc với AM nên có phương trình là $7x - y - 25 = 0$.

Câu 10. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 13$, đường tròn $(C_2): (x-6)^2 + y^2 = 25$.

a) Tìm giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

b) Gọi giao điểm có tung độ dương của (C_1) và (C_2) là A , viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Lời giải

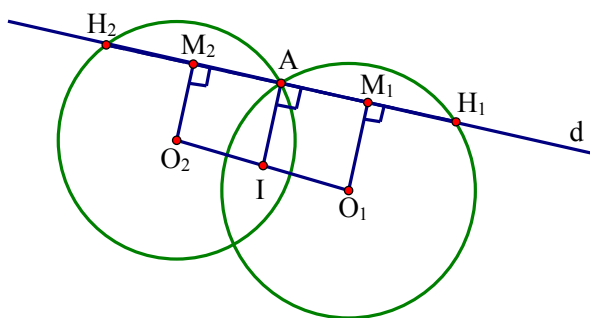
Tác giả: Yến Lâm; Fb: Yen Lam

a) Tọa độ các giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ (x-6)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Vậy (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm $A(2;3)$ và $B(2;-3)$.

b)



+) TH1: Đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) tại 2 điểm khác A

Theo giả thiết ta có:

(C_1) có tâm $O_1(0;0)$, bán kính $R_1 = \sqrt{13}$.

(C_2) có tâm $O_2(6;0)$, bán kính $R_2 = 5$.

$A(2;3)$.

Gọi H_1 và H_2 là giao điểm của đường thẳng d đi qua A cắt (C_1) và (C_2) thỏa $AH_1 = AH_2$, với H_1 không trùng H_2 .

Gọi M_1 và M_2 lần lượt là trung điểm của AH_1 , AH_2 . Vì A là trung điểm của đoạn H_1H_2 nên A là trung điểm của đoạn M_1M_2 .

Gọi I là trung điểm của đoạn $O_1O_2 \Rightarrow I(3;0)$.

Ta có $IA \parallel O_1M_1$ và $O_1M_1 \perp d$ nên $IA \perp d \Rightarrow (d)$ có vtpt $\vec{IA} = (-1;3)$ và qua $A(2;3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d : $-1(x-2) + 3(y-3) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y - 7 = 0$.

+) TH2: Đường thẳng đi qua 2 điểm A, B cũng thỏa mãn.

Ta có $\vec{AB} = (0; -6) \Rightarrow$ Chọn VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n} = (1;0)$.

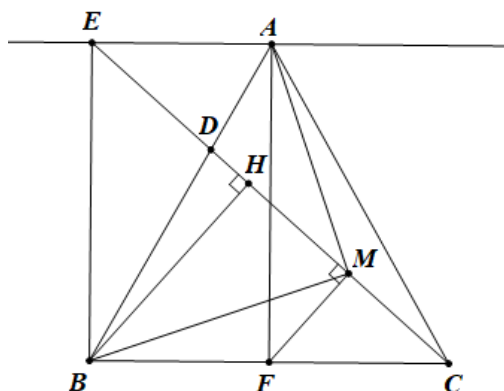
Khi đó phương trình đường thẳng AB là $1(x-2)+0(y-3)=0 \Leftrightarrow x-2=0$.

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn cần tìm là $-x+3y-7=0$ và $x-2=0$.

Câu 11. (HSG10 HÀ NAM 2018-2019) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC cân tại $A(-1;3)$. Gọi D là điểm trên cạnh AB sao cho $AB=3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD . Điểm $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm HC . Xác định tọa độ đỉnh C , biết đỉnh B nằm trên đường thẳng có phương trình $x+y+7=0$.

Lời giải

Tác giả: Dương Nguyễn, Hạnh Bích; Fb: Dương Nguyễn, Hạnh Bích



Gọi F là trung điểm của BC .

Gọi E là giao điểm của CD với đường thẳng qua A và song song với BC

$\Rightarrow AEBF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AEBF$ nội tiếp đường tròn (T) có đường kính là AB và EF .

Ta có MF là đường trung bình của tam giác $BHC \Rightarrow MF$ song song với $BH \Rightarrow \widehat{EMF} = 90^\circ \Rightarrow E, M, F$ nằm trên đường tròn đường kính $EF \Rightarrow A, E, B, F, M$ nằm trên đường tròn $(T) \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BM$.

Vì $B \in (d): x+y+7=0 \Rightarrow B(b; -7-b)$.

Vì $AM \perp BM \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow B(-4; -3)$.

Do D nằm trên cạnh AB và $AB = 3AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD} \Rightarrow D(-2; 1)$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng CD là: $x+y+1=0 \Rightarrow C(c; -1-c)$.

Do $AB = AC \Rightarrow (c+1)^2 + (-4-c)^2 = 45 \Rightarrow \begin{cases} c = -7 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-7; 6) \\ C(2; -3) \end{cases}$.

Câu 12. (HSG10 Kim Liên 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $A(3;1)$, $B(-1;2)$.

a) Tìm tọa độ điểm N trên trục hoành Ox sao cho khoảng cách AN nhỏ nhất

b) Cho điểm M di động trên đường thẳng $d: y = x$. Đường thẳng MA cắt trục hoành tại P và đường thẳng MB cắt trục tung tại Q . Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) $N \in$ sao cho AN nhỏ nhất khi N là hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox . Vậy $N(3;0)$

b) $M \in d : y = x \Rightarrow M(m; m)$

Đường thẳng AM có phương trình $(m-1)x - my - 2m = 0$

AM cắt trục hoành tại $P\left(\frac{2m}{m-1}; 0\right)$

Đường thẳng MB có phương trình $(m-2)x - (m-1)y + 3m = 0$

MB cắt trục tung tại $Q\left(0; \frac{3m}{m-1}\right)$

Phương trình $PQ: \frac{m-1}{2m}x + \frac{m-1}{3m}y = 1, (m \neq \pm 1, m \neq 0)$

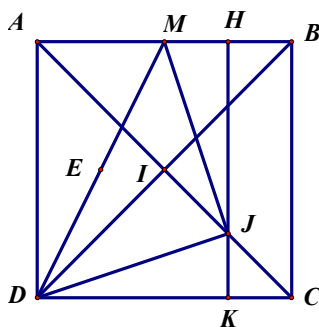
PQ đi qua $I(x_0; y_0)$ cố định khi và chỉ khi $(3x_0 + 2y_0 - 6)m - 3x_0 + 2y_0 = 0, (\forall m \neq \pm 1; 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + 2y_0 = 6 \\ 3x_0 + 2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ . Vậy } I\left(1; \frac{3}{2}\right)$$

Câu 13. (HSG11 Bắc Ninh 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có tâm I . Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Lương Đức Tuấn ; Fb: Tuấn Lương Đức



+ Gọi cạnh hình vuông là a .

+ Qua J kẻ đường thẳng song song với cạnh BC của hình vuông $ABCD$, đường thẳng này cắt các cạnh AB, CD của hình vuông $ABCD$ lần lượt tại H và K .

+ Ta có, $JC = \frac{1}{4}AC$ nên $\begin{cases} MH = JK = \frac{a}{4} \\ JH = DK = \frac{3a}{4} \end{cases}$.

$$+ \quad JM^2 = MH^2 + HJ^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{8}, \quad JD^2 = JK^2 + DK^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{8},$$

$$MD^2 = MA^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

+ Có $MD^2 = JM^2 + JD^2$ nên tam giác JMD vuông tại J , hay $JM \perp JD$.

+ Đường thẳng JD đi qua $J(1;0)$ nhận $\overrightarrow{MJ} = (1; -3)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình tổng quát: $x - 3y - 1 = 0$.

+ Có $D = \Delta \cap DJ$ nên tọa độ điểm D là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$. Giải hệ phương trình ta được $D(-2; -1)$.

+ Có $MD = 2\sqrt{5} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ nên $a = 4$.

+ Gọi E là trung điểm MD . Ta có $E(-1; 1)$.

+ Gọi $A(x; y)$. Có A và J khác phía với MD .

$$\text{Ta có } \begin{cases} MA = \frac{1}{2}AB = 2 \\ EA = \frac{1}{2}MD = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) theo từng vế ta được $-2x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow x = 4 - 2y$.

Thay $x = 4 - 2y$ vào phương trình (1) ta được $(4 - 2y)^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 22y + 21 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = \frac{7}{5} \end{cases}$$

+ Với $y = 3$, ta có $x = -2 \Rightarrow A(-2; 3)$ (thỏa mãn).

+ Với $y = \frac{7}{5}$, ta có $x = \frac{6}{5} \Rightarrow A\left(\frac{6}{5}; \frac{7}{5}\right)$ (loại vì A và J cùng phía với MD).

+ Có M là trung điểm của AB nên tọa độ điểm B là $B(2; 3)$.

+ Gọi $C(x_C; y_C)$. Có $\overrightarrow{DC} = (x_C + 2; y_C + 1)$, $\overrightarrow{AB} = (4; 0)$.

$$\text{Có } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \text{ nên } \begin{cases} x_C + 2 = 4 \\ y_C + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = -1 \end{cases} \Rightarrow C(2; -1).$$

Vậy $A(-2; 3)$, $B(2; 3)$, $C(2; -1)$, $D(-2; -1)$.

Cách 2: Theo đáp án của tỉnh Bắc Ninh:

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$.

$$\text{Ta có } AC = a\sqrt{2} \Rightarrow JD^2 = DI^2 + IJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{8}$$

$$JM^2 = JA^2 + AM^2 - 2JA \cdot AM \cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM^2 = DJ^2 + JM^2 \Rightarrow \triangle DMJ \text{ vuông tại } J.$$

Do đó JM vuông góc với JD . (1)

D thuộc Δ nên $D(t; t+1) \Rightarrow \overline{JD} = (t-1; t+1), \overline{JM} = (-1; 3)$. Theo (1)

$$\overline{JD} \cdot \overline{JM} = 0 \Leftrightarrow -t+1+3t+3=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow D(-2; -1).$$

$$\text{Để thấy } DM = 2\sqrt{5} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow a = 4.$$

$$\text{Gọi } A(x; y). \text{ Vì } \begin{cases} AM = 2 \\ AD = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; y = 3 \\ x = \frac{6}{5}; y = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Với $A(-2; 3)$ (thỏa mãn) (vì khi đó A, J cùng phía so với DM).

$$\Rightarrow B(2; 3) \Rightarrow I(0; 1) \Rightarrow C(2; -1) \Rightarrow J(1; 0)$$

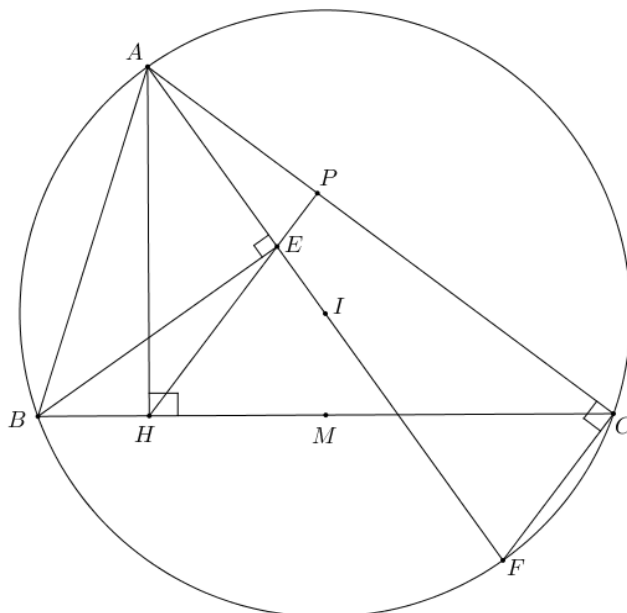
Với $A\left(\frac{6}{5}; \frac{7}{5}\right)$ (loại). (vì khi đó A, J cùng phía so với DM).

Vậy tọa độ các đỉnh hình vuông là $A(-2; 3), B(2; 3), C(2; -1), D(-2; -1)$.

Câu 14. (HSG12 Hà Nội năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I , có đường cao AH . Gọi E là hình chiếu của B lên tia AI , HE cắt AC tại P . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $H(6; -4); P(11; 1)$ và $M(10; -4)$ là trung điểm của BC .

Lời giải

Tác giả: Bui Bai; Fb: Bui Bai



Nhận xét: Theo giả thiết thì H không thể trùng với $M \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác thường.

Kẻ đường kính AF của đường tròn (I) $\Rightarrow \Delta ACF$ vuông tại C .

Xét tứ giác $AEHB$ có $\widehat{AEB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ và cùng nhìn cạnh AB .

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHB$ nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm AB .

$\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{AEP}$.

Mà $\widehat{AFC} = \widehat{ABH}$ (cùng nhìn cạnh AC).

$\Rightarrow \widehat{AFC} = \widehat{AEP} \Rightarrow HP \parallel FC$.

Lại có $FC \perp AC \Rightarrow HP \perp AC$.

Có $\overrightarrow{HP} = (5; 5) = 5(1; 1)$. Chọn $\overrightarrow{n_{AC}} = (1; 1)$.

$P(11; 1) \in AC$.

$\Rightarrow AC: x + y - 12 = 0$.

$\overrightarrow{HM} = (4; 0)$.

Do đường thẳng BC chứa $H, M \Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}} = (0; 1)$.

$H(6; -4) \in BC$.

$\Rightarrow BC: y + 4 = 0$.

Có $C = BC \cap AC \Rightarrow$ tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 12 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(16; -4).$$

Lại có $M(10; -4)$ là trung điểm của $BC \Rightarrow B(4; -4)$.

Có $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{n_{AH}} = (1; 0)$.

$$H(6; -4) \in AH.$$

$$\Rightarrow AH: x - 6 = 0.$$

Có $A = AH \cap AC \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

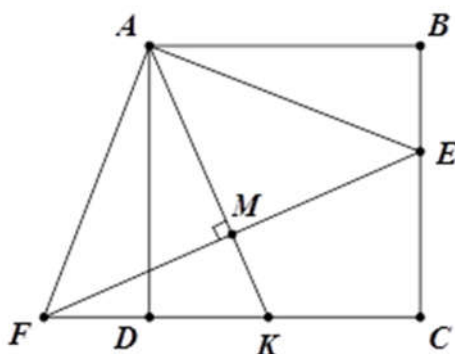
$$\begin{cases} x + y - 12 = 0 \\ x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(6; 6).$$

Vậy $A(6; 6); B(4; -4); C(16; -4)$.

Câu 15. (HSG12 Quảng Ngãi 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ và điểm E thuộc cạnh BC . Đường thẳng qua A và vuông góc với AE cắt CD tại F . Gọi M là trung điểm EF , đường thẳng AM cắt CD tại K . Tìm tọa độ điểm D biết $A(-6; 6)$, $M(-4; 2)$, $K(-3; 0)$ và E có tung độ dương.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Phong Vũ; Fb: Nguyễn Phong Vũ



Ta có $\triangle ABE = \triangle ADF$ vì $AB = AD$ và $\widehat{BAE} = \widehat{DAF}$ (cùng phụ với $\widehat{DAE}$).

Suy ra $\triangle AEF$ vuông cân

Do M là trung điểm $EF \Rightarrow AM \perp EF$ và $ME = MA = MF$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2; -4)$ và $AM = \sqrt{20}$.

Đường thẳng EF đi qua M và vuông góc với MA nên có phương trình $x - 2y + 8 = 0$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $AFE: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 20$

Tọa độ điểm E, F thỏa hệ
$$\begin{cases} (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 20 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được tọa độ $E(0; 4)$, $F(-8; 0)$, ($y_E > 0$).

Với $E(0; 4)$, $F(-8; 0)$

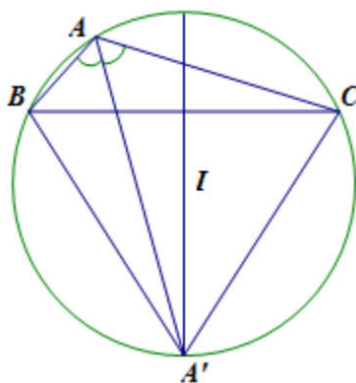
Đường thẳng CD qua $F(-8;0)$ và $K(-3;0)$ nên có phương trình $y=0$.

Đường thẳng AD qua $A(-6;6)$ và vuông góc với FK nên có phương trình $x+6=0$.

$$D = CD \cap AD \Rightarrow D(-6,0).$$

Câu 16. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn tâm I có phương trình $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$, tam giác ABC nội tiếp đường tròn và đường phân giác trong góc A có phương trình $x-y-1=0$. Biết rằng hai điểm A và I cách đều đường thẳng BC và điểm A có hoành độ dương. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Ta có $I(1;-1)$. Tọa độ giao điểm của đường phân giác trong góc A và (I) là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, y=1 \\ x=-1, y=-2 \end{cases}.$$

Suy ra có hai giao điểm $A(2;1)$, $A'(-1;-2)$. (Vì A có hoành độ dương)

Đường thẳng BC vuông góc $A'I$ nên phương trình BC có dạng: $2x+y+m=0$ ($BC \perp A'I$).

$$d(A;BC) = d(I;BC) \Leftrightarrow \frac{|4+1+m|}{\sqrt{5}} = \frac{|2-1+m|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow m=-3.$$

Phương trình $BC: 2x+y-3=0$.

Tìm được tọa độ điểm B, C là: $\left(\frac{9-\sqrt{21}}{5}; \frac{-3+2\sqrt{21}}{5}\right), \left(\frac{9+\sqrt{21}}{5}; \frac{-3-2\sqrt{21}}{5}\right)$.

Vậy diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot d(A;BC) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{84}{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$.

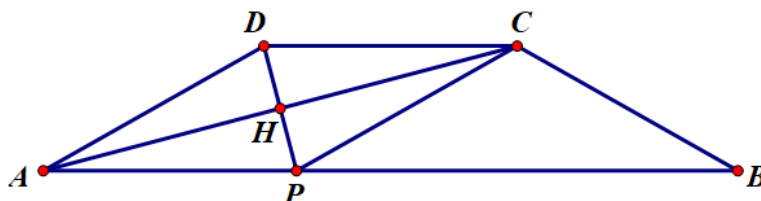
Chú ý: có thể không cần tìm tọa độ của B, C mà ta cũng có thể tính được diện tích như sau:

$$d(I;BC) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{5}} \text{ (sử dụng pitago)}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot d(A;BC) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{21}{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$$

Câu 17. (HSG12 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB > CD$) có $AD = DC, D(3;3)$. Đường thẳng AC có phương trình $x - y - 2 = 0$, đường thẳng AB đi qua $M(-1;-1)$. Viết phương trình đường thẳng BC .

Lời giải



Kẻ $CP \parallel AD$ và cắt AB tại P , suy ra tứ giác $ADCP$ là hình thoi.

Gọi $H = AC \cap DP$ ta có $DH \perp AC$ suy ra đường thẳng DH có phương trình là $x + y - 6 = 0$.

Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ sau $\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(4;2)$.

Gọi $P(x; y)$ ta có $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HP} \Rightarrow P(5;1)$.

Đường thẳng PM có phương trình là $x - 3y - 2 = 0$.

Mặt khác đường thẳng $DC \parallel PM$ nên đường thẳng DC có phương trình là: $x - 3y + 6 = 0$.

Tọa độ của điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6;4)$.

Xét tam giác $\triangle BCP$ ta có $AD = DC = CP = CB$ nên tam giác $\triangle BCP$ cân tại C .

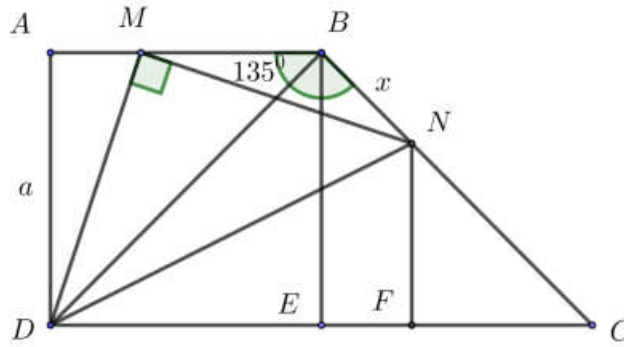
Vì $B \in PM \Rightarrow B(3t+2; t)$, ta có $CP = CB \Rightarrow \sqrt{10} = \sqrt{(3t-4)^2 + (t-4)^2} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{11}{5} \end{cases}$.

Với $t = 1 \Rightarrow B(5;1) \equiv P$ (loại).

Với $t = \frac{11}{5} \Rightarrow B\left(\frac{43}{5}; \frac{11}{5}\right)$. Vậy đường thẳng BC có phương trình là $9x + 13y - 106 = 0$.

Câu 18. (HSG12 tỉnh Lào Cai năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , có $CD = 2AD = 2AB$. Gọi $M(2;4)$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AM$. Điểm N thuộc cạnh BC sao cho tam giác DMN cân tại M . Phương trình đường thẳng MN là $2x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang $ABCD$ biết D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ và điểm A thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$

Lời giải



+) Đặt $BN = x, AB = a \Rightarrow MA = MN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Xét $\triangle BMN$ có $MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2MN \cdot NB \cdot \cos \widehat{MBN} \Leftrightarrow \frac{10a^2}{9} = \frac{4a^2}{9} + x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2a}{3} \cdot \cos 135^\circ$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2a^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ B , kẻ NF vuông góc với DC . Ta có $\frac{NF}{BE} = \frac{CN}{CB} = \frac{CF}{CE}$

$\Leftrightarrow \frac{NF}{a} = \frac{2}{3} = \frac{CF}{a} \Leftrightarrow NF = CF = \frac{2a}{3} \Rightarrow DN = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$.

Nhận thấy $MD^2 + MN^2 = \frac{10a^2}{9} + \frac{10a^2}{9} = \frac{20a^2}{9} = DN^2$. Suy ra $\triangle DMN$ vuông tại M .

+) Vì D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ nên $D(d; -d) \Rightarrow \overrightarrow{MD} = (d - 2; -d - 4)$.

Phương trình đường thẳng $MN: 2x + y - 8 = 0$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{MD} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow d = -2 \Rightarrow D(-2; 2)$

+) Điểm A thuộc đường thẳng $d': 3x + y + 8 = 0$ nên $A(a; -3a + 8)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA} = (a + 2; -3a + 6), \overrightarrow{MA} = (a - 2; -3a + 4) \Rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

*) Trường hợp 1: $a = 1 \Rightarrow A(1; 5)$

Giả sử $B(x; y)$ ta có $\overrightarrow{AB} = (x - 1; y - 5); \overrightarrow{AM} = (1; -1) \Rightarrow 3\overrightarrow{AM} = (3; -3)$

Vì $AB = 3AM \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \\ y - 5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(4; 2)$

Giả sử $C(x; y)$ ta có $\overrightarrow{DC} = (x + 2; y - 2); \overrightarrow{AB} = (3; -3) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = (6; -6)$

Vì $DC = 2AB \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 6 \\ y - 2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(4; -4)$

*) Trường hợp 2: $a = 2 \Rightarrow A(2; 2)$

Giả sử $B(x; y)$ ta có $\overrightarrow{AB} = (x-2; y-2)$; $\overrightarrow{AM} = (0; 2) \Rightarrow 3\overrightarrow{AM} = (0; 6)$

$$\text{Vì } AB = 3AM \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow B(2; 8)$$

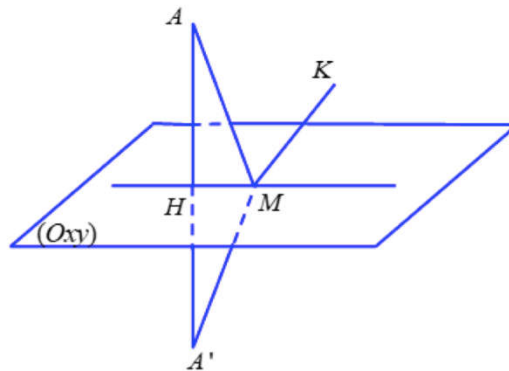
Giả sử $C(x; y)$ ta có $\overrightarrow{DC} = (x+2; y-2)$; $\overrightarrow{AB} = (0; 6) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = (0; 12)$

$$\text{Vì } DC = 2AB \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ y-2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=14 \end{cases} \Rightarrow C(-2; 14)$$

Câu 19. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;0;3), B(-3;1;3), C(1;5;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $T = 2|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tác giả: Nhóm 2 - Tổ 8 nhóm toán team toán vd - vdc



Gọi K là trung điểm của BC , ta có : $K(-1;3;2)$ và $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MK}$. Suy ra:

$$T = 2|\overrightarrow{MA}| + 2|\overrightarrow{MK}| = 2(MA + MK).$$

Nhận xét: A, K nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) . Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (Oxy) . Khi đó $T = 2(MA + MK) = 2(MA' + MK)$.

Suy ra T đạt GTNN $\Leftrightarrow (MA' + MK)$ đạt GTNN $\Leftrightarrow A', M, K$ thẳng hàng hay M là giao điểm của $A'K$ với mặt phẳng (Oxy) .

Ta có $H(1;0;0) \Rightarrow A'(1;0;-3) \Rightarrow \overrightarrow{A'K} = (-2;3;5)$. Do đó phương trình tham số của $A'K$ là

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = -3 + 5t \end{cases} \Rightarrow M(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 0).$$

Câu 20. (HSG10 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC , biết diện tích tam giác ABC bằng 36 và đỉnh A có hoành độ dương.

Lời giải

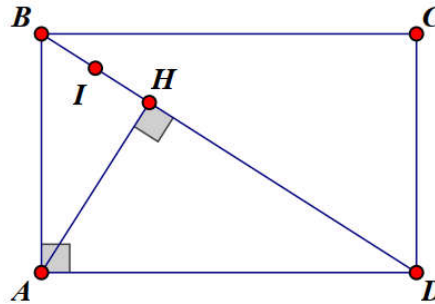
Tác giả: Trịnh Thúy; Fb: Catus Smile

Câu 21. (HSG10 CẦU GIẤY – THƯỜNG TÍN - HÀ NỘI 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD ; I là trung điểm của BH . Biết đỉnh $A(2;1)$, phương trình đường chéo BD là: $x+5y-19=0$, điểm $I\left(\frac{42}{13}; \frac{41}{13}\right)$.

- a) Viết phương trình tham số đường thẳng AH . Tìm tọa độ điểm H .
b) Viết phương trình tổng quát cạnh AD .

Lời giải

Tác giả: Lê Quang Nhân ; Fb: Lê Quang Nhân



$BD: x+5y-19=0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{BD} = (1;5)$

$AH \perp BD$ nên AH nhận $\vec{n}_{BD} = (1;5)$ làm véc tơ chỉ phương.

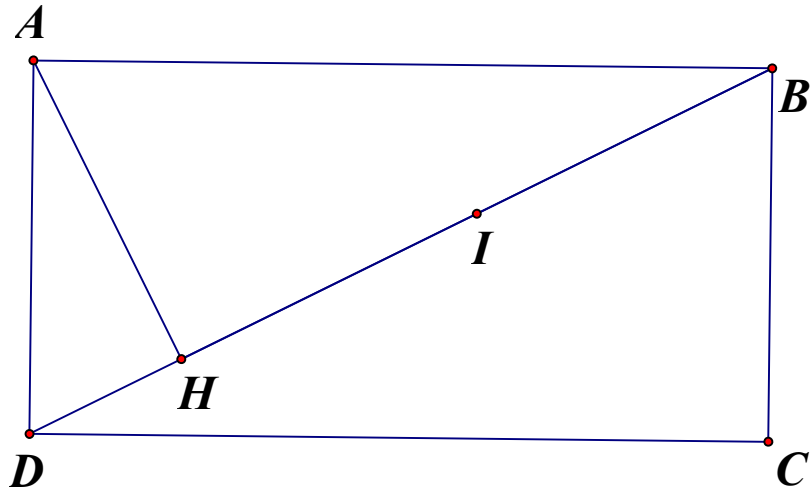
$$\Rightarrow \vec{u}_{AH} = \vec{n}_{BD} = (1;5)$$

+ Đường thẳng AH đi qua $A(2;1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{AH} = (1;5)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

+ H là giao điểm của AH và BD nên tọa độ của H thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+5t \\ x+5y-19=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=1+5t \\ t=\frac{6}{13} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{32}{13}; \frac{43}{13}\right).$$

b) *Tác giả: Nguyễn Mạnh Quyền; Fb: Nguyễn Mạnh Quyền*

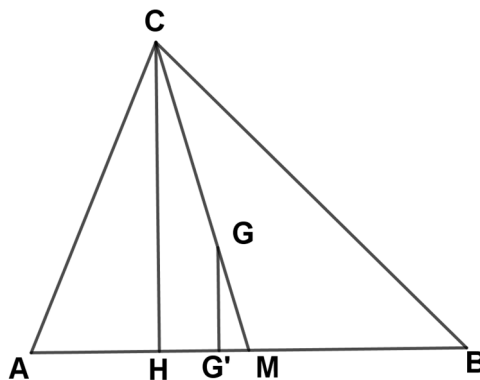


Theo câu a) ta có $H\left(\frac{32}{13}; \frac{43}{13}\right)$ mà I là trung điểm của BH nên suy ra $B(4;3)$ nên tọa độ của vectơ là $\overrightarrow{AB} = (2;2) = 2(1;1)$.

Đường thẳng AD đi qua điểm $A(2;1)$, nhận $\vec{n} = (1;1)$ làm một vectơ pháp tuyến, có phương trình tổng quát là: $(x-2) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$.

Câu 22. (HSG11 Thuận Thành 2018-2019) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; 4)$, $B(1; 2)$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x + 2y + 1 = 0$, trọng tâm G . Biết diện tích tam giác GAB bằng 3 đơn vị diện tích. Hãy tìm tọa độ đỉnh C .

Lời giải



Cách1: Tỷ luận

Vì $\frac{CM}{GM} = \frac{CH}{GG'} = 3$ nên $S_{ABC} = 3S_{GAB} = 9$ (đvdt).

Gọi $C(-2t-1; t) \in d$.

$\overrightarrow{AB} = (-2; -2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$ và $AB: \begin{cases} x = t'+1 \\ y = t'+2 \end{cases}$.

Gọi $H(t'+1; t'+2)$. Khi đó $\overrightarrow{CH} = (t'+2t+2; t'-t+2)$.

Vì $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ nên $2t'+t+4=0 \Rightarrow t' = \frac{-t-4}{2}$ (*)

Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB \Leftrightarrow CH = \frac{9\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (t'+2t+2)^2 + (t'-t+2)^2 = \frac{81}{2}$$

Từ (*) suy ra $t = \pm 3$. Do đó $C(-7; 3)$, $C(5; -3)$.

Cách 2: Trắc nghiệm

$$\text{Vì } \frac{CM}{GM} = \frac{CH}{GG'} = 3 \text{ nên } S_{ABC} = 3S_{GAB} = 9 \text{ (đvdt).}$$

Gọi $C(-2t-1; t) \in d$.

Ta có $\overrightarrow{CA} = (4+2t; 4-t)$, $\overrightarrow{CB} = (2+2t; 2-t)$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |(4+2t)(2-t) - (4-t)(2+2t)| = \frac{1}{2} |-6t| = 3|t|$$

Khi đó $S_{ABC} = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3$. Do đó $C(-7; 3)$, $C(5; -3)$.

Câu 23. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC, với $A(2;1)$, $B(1;-2)$, trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $x+y-2=0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Cao Hoàng Nam; FB: Hoang Nam

Gọi M là trung điểm AB, ta có: $M\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right)$. Gọi $C(a;b)$,

$$\text{suy ra } G\left(\frac{a+3}{3}; \frac{b-1}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{a+3}{3} + \frac{b-1}{3} - 2 = 0 \Rightarrow a+b-4=0, (1),$$

$$\text{mặt khác } AB: 3x-y-5=0 \Rightarrow d(C; AB) = \frac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}},$$

$$\text{Diện tích } S = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; AB) = \frac{27}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{10} \frac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}} = \frac{27}{2} \Rightarrow |3a-b-5| = 27, (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ:

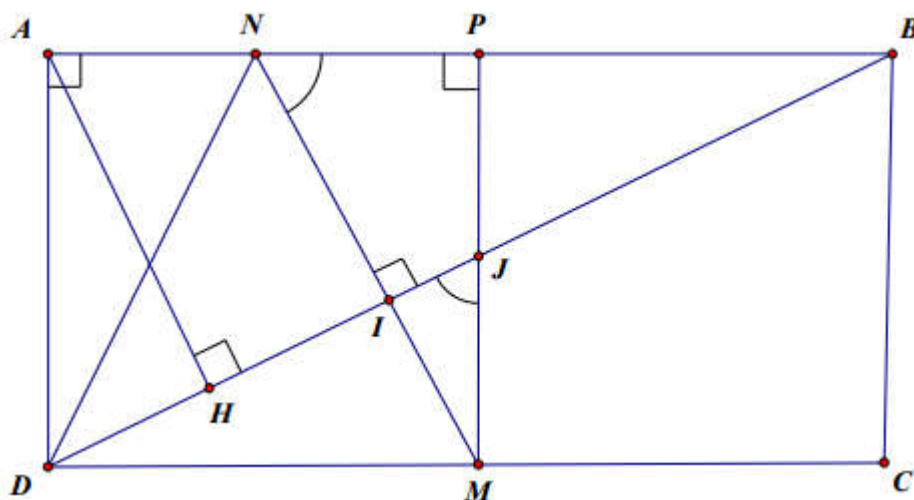
$$\begin{cases} \begin{cases} a+b=4 \\ 3a-b=32 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=4 \\ 3a-b=-22 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=9 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow C(9; -5) \\ \begin{cases} a=-\frac{9}{2} \\ b=\frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{9}{2}; \frac{17}{2}\right) \end{cases}$$

Câu 24. (HSG12 Quảng Ninh 2018-2019) Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, $AB=2AD$. Điểm N thuộc cạnh AB sao cho $AN = \frac{1}{4}AB$, M là trung điểm của DC. Gọi I là giao

điểm của MN và BD . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN . Biết điểm $A(2;1)$, đường thẳng BD có phương trình $11x - 2y + 5 = 0$, điểm B có hoành độ là số nguyên.

Lời giải

Tác giả: Cao Hữu Trường; Fb: Cao Hữu Trường



Gọi P là trung điểm của AB , J là giao điểm của PM và BD .

Ta có P, M là trung điểm của AB và DC nên $AP = PM = MD = AD$

$\Rightarrow APMD$ là hình vuông.

Xét hai tam giác vuông MNP và DJM có $\begin{cases} DM = DM \\ MN = DI \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle MNP = \triangle DJM \Rightarrow \widehat{MNP} = \widehat{DJM} \Rightarrow MN \perp BD$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BD , ta có $AH = d(A, BD) = \sqrt{5}$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AB = 5$.

Gọi $B \in BD \Rightarrow B\left(t; \frac{11t+5}{2}\right)$. Vì điểm B có tọa độ nguyên nên $t \in \mathbb{Z}$.

Mà $AB = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2 + \left(\frac{11t+5}{2}\right)^2} = 5 \Leftrightarrow 125t^2 + 50t - 75 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{3}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow B(-1; -3)$ vì t là số nguyên.

Ta có $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow N\left(\frac{5}{4}; 0\right)$.

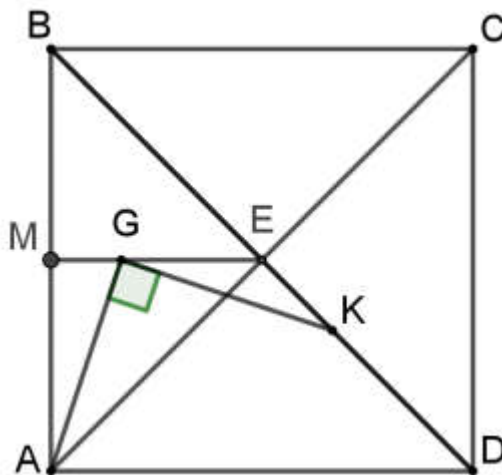
Gọi K là trung điểm của BN , khi đó $K\left(\frac{1}{8}; -\frac{3}{2}\right)$, $KB = \frac{15}{8}$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN là: $\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{225}{64}$.

Câu 25. (HSG12 tỉnh Hải Phòng năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ tâm E , gọi G là trọng tâm tam giác ABE . Điểm $K(7; -2)$ thuộc đoạn ED sao cho $GA = GK$. Tìm tọa độ đỉnh A và viết phương trình cạnh AB , biết đường thẳng AG có phương trình $3x - y - 13 = 0$ và đỉnh A có hoành độ nhỏ hơn 4.

Lời giải

Tác giả: Nhóm 5 tổ 8 nhóm strong team toán vd – vdc.



+) Ta có $GA = GB = GK$ nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABK .
 $\Rightarrow \widehat{AGK} = 2\widehat{ABK} = 2.45^\circ = 90^\circ \Rightarrow$ tam giác AGK vuông cân tại G .

+) Đường thẳng GK đi qua $K(7; -2)$ và vuông góc với AG

$$\Rightarrow GK: x + 3y - 1 = 0$$

$$\text{Ta có } G = GK \cap AG \Rightarrow G(4; -1).$$

Do AG có phương trình $3x - y - 13 = 0$ nên $A(t; 3t - 13), t < 4$.

$$\text{Có } GA = GK = d(K; AG) = \sqrt{10}.$$

$$\text{Từ } GA = \sqrt{10} \Leftrightarrow (t - 4)^2 + (3t - 12)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases} \xrightarrow{t < 4} t = 3. \text{ Vậy } A(3; -4).$$

$$\text{+) Ta có } \tan \widehat{MAG} = \frac{MG}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \widehat{MAG} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Gọi $\vec{n}_1 = (a; b), (a^2 + b^2 > 0)$ là VTPT của đường thẳng AB và $\vec{n}_2 = (3; -1)$ là VTPT của đường thẳng AG .

$$\text{Khi đó: } \cos \widehat{MAG} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|3a - b|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 6ab + 8b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3a = -4b \end{cases}.$$

$$\text{+) Với } 3a = -4b \Rightarrow AB: 4x - 3y - 24 = 0.$$

$$\text{Thấy } d(K; AB) = 2 < d(K; AG) = \sqrt{10} \text{ (loại).}$$

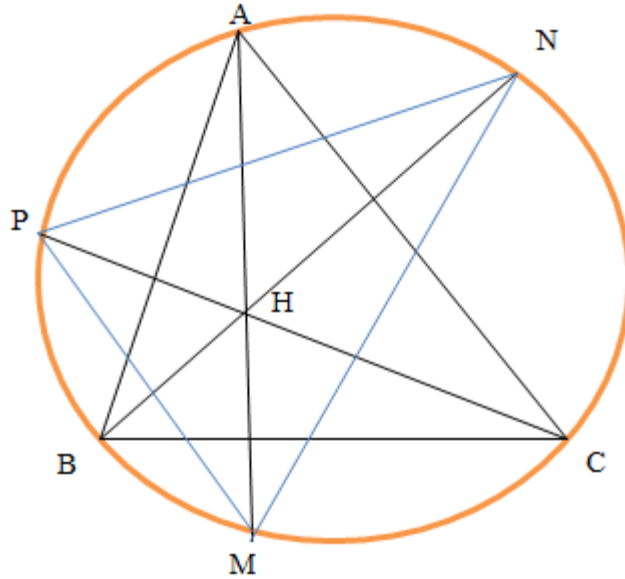
$$\text{+) Với } b = 0 \Rightarrow AB: x - 3 = 0.$$

Ghi chú: Nếu học sinh công nhận hoặc ngộ nhận trong chứng minh các kết quả ở bước 1 và làm đúng các bước còn lại thì cho 0.5 điểm.

Câu 26. (HSG12 tỉnh QUẢNG NINH 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có 3 góc đều nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC ; M, N, P lần lượt là giao điểm của AH, BH, CH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC biết $M\left(-\frac{16}{9}; -\frac{5}{9}\right), N\left(-\frac{7}{8}; \frac{5}{4}\right), P\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$.

Lời giải

Tác giả: Tuyetnguyen; Fb: Tuyetnguyen



Ta có
$$\begin{cases} \widehat{PNB} = \widehat{PCB} \\ \widehat{PCB} = \widehat{BAM} \\ \widehat{BAM} = \widehat{BNM} \end{cases} \Rightarrow \widehat{PNB} = \widehat{BNM}. \text{ Suy ra } BN \text{ là đường phân giác trong của góc } \widehat{PNM}.$$

Tương tự ta có PC, AM lần lượt là phân giác trong của góc $\widehat{MPN}, \widehat{PMN}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{65}{72}; \frac{65}{36}\right)$.

Phương trình đường thẳng MN đi qua $M\left(-\frac{16}{9}; -\frac{5}{9}\right)$ và nhận $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{65}{72}; \frac{65}{36}\right)$ làm vtcp, là:

$$2x - y + 3 = 0.$$

Tương tự ta có phương trình đường thẳng $MP: 3x - 6y + 2 = 0$, đường thẳng $NP: 4x + 2y + 1 = 0$.

Từ đó ta có phương trình đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{MPN}$: $\frac{3x - 6y + 2}{\sqrt{45}} = \pm \frac{4x + 2y + 1}{\sqrt{20}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 18y - 1 = 0 \\ 18x - 6y + 7 = 0 \end{cases}.$$

Do M, N nằm khác phía đối với đường phân giác trong nên suy ra phương trình của đường thẳng $PC: 6x + 18y - 1 = 0$.

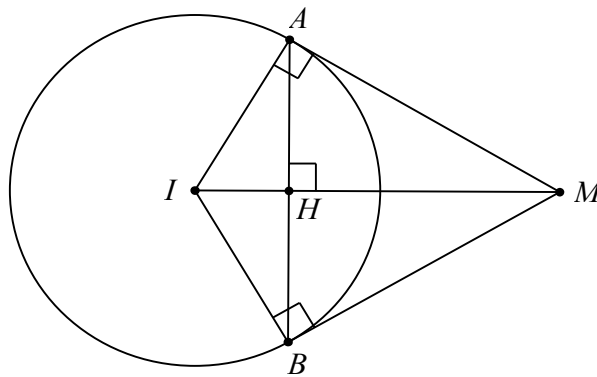
Tương tự phương trình đường thẳng $NB: 8x + 7 = 0$.

$$\text{Lại có } H = NB \cap PC \Rightarrow H\left(\frac{-7}{8}; \frac{25}{72}\right).$$

Câu 27. (HSG12 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: 5x - 2y - 19 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Từ 1 điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là 2 tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB = \sqrt{10}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huỳnh Như ; Fb: Nhu Nguyen



*Các tam giác IAM, IBM là các tam giác vuông nên đường tròn đường kính IM đi qua 2 điểm A, B nên đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB là đường tròn đường kính IM .

* Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$.

$$\text{Ta có } IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow IM = \frac{IA^2}{IH} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Gọi } M\left(a; \frac{5a-19}{2}\right) \in \Delta. \text{ Ta có } IM^2 = 10 \Leftrightarrow (a-2)^2 + \left(\frac{5a-19}{2} - 1\right)^2 = 10.$$

$$\text{Giải phương trình ta được } \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{139}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(3; -2) \\ M\left(\frac{139}{29}; \frac{72}{29}\right) \end{cases}$$

*Với $M(3; -2)$ thì trung điểm IM là $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, phương trình đường tròn đường kính IM là

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

* Với $M\left(\frac{139}{29}; \frac{72}{29}\right)$ thì trung điểm IM là $\left(\frac{197}{58}; \frac{37}{26}\right)$, phương trình đường tròn đường kính IM là $\left(x - \frac{197}{58}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{26}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

Câu 28. (HSG10 PHÙNG KHẮC KHOAN- HÀ NỘI 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1;2)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $\triangle ABC$ vuông tại C và có góc B bằng 60° .

Lời giải

Tác giả: Ao Thị Kim Anh; Fb: Kim Anh

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -6)$, giả sử $C(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (x-1; y-2)$, $\overrightarrow{BC} = (x-3; y+4)$.

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } C \text{ và có góc } B \text{ bằng } 60^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} AC \perp BC \\ BC = \frac{1}{2} AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ BC^2 = \frac{1}{4} AB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (x-3) + (y-2) \cdot (y+4) = 0 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - 6y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \\ x = 3y + 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 + 60y + 100 + y^2 - 12y - 40 + 2y - 5 = 0 \\ x = 3y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 + 50y + 55 = 0 \\ x = 3y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, y = \frac{-5-\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, y = \frac{-5+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } C\left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2}; \frac{-5-\sqrt{3}}{2}\right) \text{ hoặc } C\left(\frac{5+3\sqrt{3}}{2}; \frac{-5+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Câu 29. (HSG10 THPT Thuận Thành 2018-2019) Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;4)$

- a) Tìm điểm C trên trục Ox sao cho tam giác ABC vuông tại B .
b) Tìm điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A .

Lời giải

Tác giả: Cao Hoàng Đức; Fb: Cao Hoang Duc

a) Vì C thuộc trục Ox nên $C(x;0)$.

Tam giác ABC vuông tại B , do đó: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 3(x-2) - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy $C(6;0)$.

b) Tìm điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A .

Tác giả: Nguyễn Công Thiện, Fb: Nguyễn Công Thiện

Gọi $D(x; y)$ là điểm cần tìm. Để tam giác ABD vuông cân tại A thì: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ AB = AD \end{cases} \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; 3)$, $\overrightarrow{AD} = (x+1; y-1)$. Từ (1) suy ra:

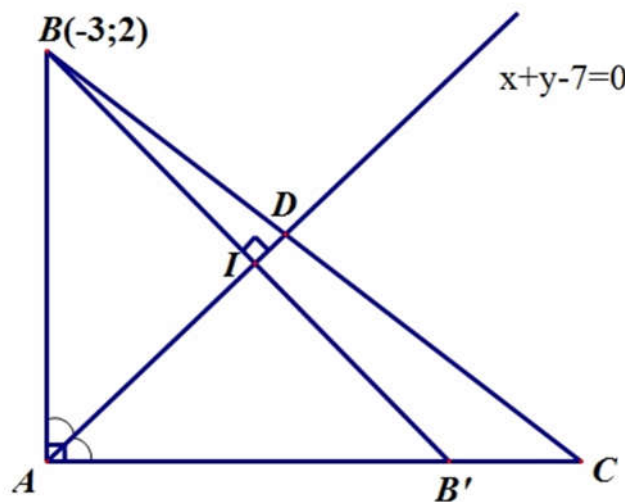
$$\begin{cases} 3(x+1) + 3(y-1) = 0 \\ \sqrt{18} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (x+1)^2 + (-x-1)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm D thỏa điều kiện bài toán là: $D(2; -2)$ hoặc $D(-4; 4)$.

Câu 30. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , có đỉnh $B(-3; 2)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x + y - 7 = 0$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC , biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải

Tác giả: Phạm Minh Tuấn ; Fb: Bánh Bao Phạm



Gọi d là đường phân giác trong của góc A .

Đường thẳng Δ đi qua điểm $B(-3; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $d: x + y - 7 = 0$ có phương trình là: $x - y + 5 = 0$.

Gọi $I = \Delta \cap d$.

Khi đó tọa độ điểm I thỏa mãn của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow I(1; 6)$.

Gọi $\Delta \cap AC = B'$. Tam giác ABB' có AI vừa là đường cao, vừa là đường phân giác, do đó tam giác ABB' cân tại $A \Rightarrow I$ là trung điểm của $BB' \Rightarrow B'(5; 10)$.

Gọi $A(t; 7-t) \in d: x + y - 7 = 0, (t > 0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3-t; t-5) \\ \overrightarrow{AB'} = (5-t; t+3) \end{cases}$.

Vì $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = 0 \Leftrightarrow (-3-t) \cdot (5-t) + (t-5) \cdot (t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \Rightarrow A(5; 2) \\ t = -3(l) \end{cases}$.

Đường thẳng AC đi qua hai điểm $A(5;2)$ và $B'(5;10)$ có phương trình là: $x-5=0$.

Gọi $C(5;c) \in AC : x-5=0$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-8;0) \\ \overrightarrow{AC} = (0;c-2) \end{cases}$.

Theo bài ra ta có $S_{\triangle ABC} = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 24$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot |c-2| = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} c=8 \\ c=-4 \end{cases}$$

Với $c=-4 \Rightarrow C(5;-4)$. Khi đó: $(5-4-7)(-3+2-7) > 0$ nên hai điểm B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng d (loại).

Với $c=8 \Rightarrow C(5;8)$. Khi đó: $(5+8-7)(-3+2-7) < 0$ nên hai điểm B và C nằm khác phía đối với đường thẳng d . Điểm $C(5;8)$ thỏa mãn.

Ta có: $\begin{cases} AB=8 \\ AC=6 \\ BC=10 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{AB+AC+BC}{2} = 12$.

Mà $S = p \cdot r \Leftrightarrow 24 = 12 \cdot r \Leftrightarrow r = 2$

Vậy đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính $r = 2$

Cách 1:

Phương trình đường thẳng BC là: $-3x+4y-17=0$.

Gọi tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là $H(a;7-a) \in d : x+y-7=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(H;AC)=r \\ d(H;BC)=r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-5|=2 \\ \left| \frac{-3a+4(7-a)-17}{5} \right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-5|=2 \\ |7a-11|=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=7 \\ a=3 \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow H(3;4) \\ a=\frac{1}{7} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Cách 2:

Sử dụng tính chất: Với H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, ta có:

$$BC \cdot \overrightarrow{HA} + AC \cdot \overrightarrow{HB} + AB \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

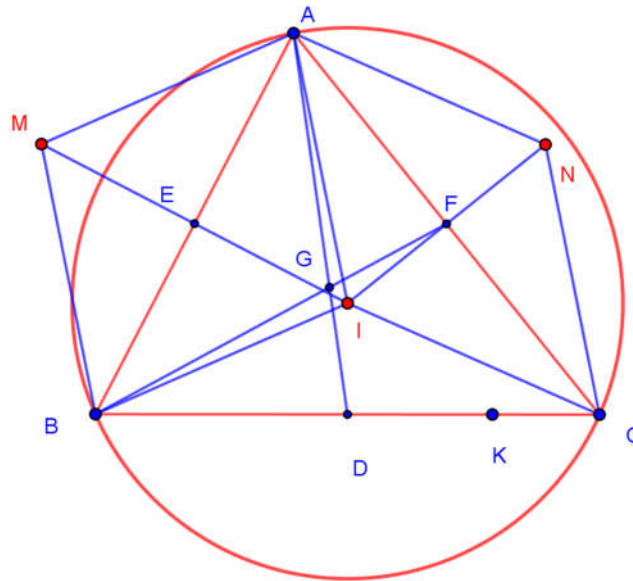
Gọi $H(a;b) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA} = (5-a;2-b) \\ \overrightarrow{HB} = (-3-a;2-b) \\ \overrightarrow{HC} = (5-a;8-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \cdot (5-a) + 6(-3-a) + 8(5-a) = 0 \\ 10 \cdot (2-b) + 6(2-b) + 8(8-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Câu 31. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I , trọng tâm $G\left(\frac{8}{3};0\right)$, các điểm $M(0;1)$, $N(4;1)$ lần lượt đối xứng với I qua AB và AC , điểm $K(2;-1)$ thuộc đường thẳng BC . Viết phương trình đường tròn (C) .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Kim Đông ; Fb: Nguyễn Kim Đông



Ta thấy IM và IN vuông góc với các dây cung AB , AC nên đi qua các trung điểm E , F của AB và AC . Kết hợp tính đối xứng của các điểm M , N qua các cạnh AB , AC , ta có các tứ giác $AINC$, $AIBM$ là các hình thoi. Do đó, $AM = AN = NC = BM = AI = IC = IB = R$.

Hơn nữa, ta có $BM \parallel NC$ (vì cùng song song AI) và bằng nhau nên $BMNC$ là hình bình hành. Suy ra $BC \parallel MN$.

Phương trình MN là $y=1$, và BC đi qua K nên có phương trình là $y=-1$.

Gọi $D(d; -1)$ là trung điểm của BC thì tọa độ của B và C là $B(d-b; -1)$ và $C(d+b; -1)$.

Vì $y_G = 0$, $y_B = y_C = -1 \Rightarrow y_A = 2$.

$$x_G = \frac{8}{3} \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 8 \Rightarrow x_A + 2d = 8 \Rightarrow x_A = 8 - 2d \Rightarrow A(8 - 2d; 2).$$

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN} = (4; 0) \Rightarrow 2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$.

$$\text{Mà } MB = MA = R \Rightarrow (d-2)^2 + 4 = (8-2d)^2 + 1 \text{ nên } d = 3 \text{ hoặc } d = \frac{19}{3}.$$

$$\text{Tương tự } NC = NA \text{ nên } (d-2)^2 + 4 = (4-2d)^2 + 1 \Leftrightarrow 3d^2 - 12d + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Suy ra $d = 3$ là nghiệm chung của hai phương trình trên và khi đó tọa độ ba đỉnh $B(1; -1)$, $C(5; -1)$, $A(2; 2)$.

$$\text{Gọi } I(3; m), \text{ từ } IA = MA = R = \sqrt{5}, \text{ ta có } 1 + (m-2)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}.$$

Với $m = 0$, suy ra $I(3; 0)$.

Với $m = 4$, suy ra $I(3; 4)$ (loại vì $IC \neq \sqrt{5}$).

Vậy đường tròn (C) là $(x-3)^2 + y^2 = 5$.

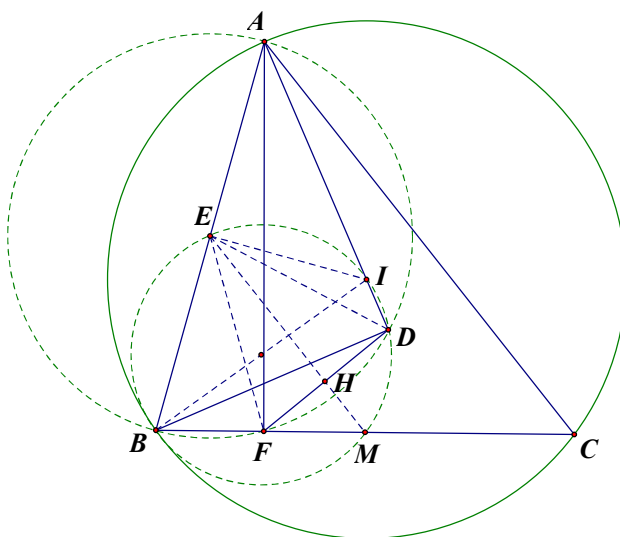
Câu 32. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn tâm I . Gọi E, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC ; các điểm F và D tương ứng là hình chiếu vuông góc của A và B trên các đường thẳng BC và AI .

a) Chứng minh rằng ME là đường trung trực của đoạn thẳng DF .

b) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết rằng $M(2; -1)$, $D\left(\frac{9}{5}; -\frac{8}{5}\right)$ và đường thẳng AC có phương trình $x + y - 5 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Nhóm 3 tổ 8 nhóm strong team vd- vdc



a) Ta có $\widehat{BFA} = \widehat{BDA} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $ABFD$ nội tiếp đường tròn tâm E , đường kính AB .

Mặt khác $\widehat{IEB} = \widehat{IDB} = \widehat{IMB} = 90^\circ$, suy ra ngũ giác $BEIDM$ nội tiếp đường tròn đường kính BI .

Từ đó ta có $\widehat{DEM} = \widehat{DBM} = \widehat{DBF}$ (cùng chắn cung $\widehat{DM}$).

Mà góc $\widehat{DBF} = \frac{1}{2}\widehat{DEF}$ (số đo góc ở tâm bằng nửa cung bị chắn).

Suy ra $\widehat{DEM} = \widehat{DBM} = \widehat{DBF} = \frac{1}{2}\widehat{DEF}$, suy ra EM là tia phân giác của $\widehat{DEF}$.

Mà $DE = FE = \frac{1}{2}AB$ (do cung nằm trên đường tròn tâm E , đường kính AB).

Suy ra ME là đường trung trực của cạnh FD .

b) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết rằng $M(2; -1)$, $D\left(\frac{9}{5}; -\frac{8}{5}\right)$ và đường thẳng AC có phương trình $x + y - 5 = 0$.

Ta có $ME \parallel AC \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $ME: x + y - 1 = 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng ME suy ra $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.

Vì D và F đối xứng qua ME nên H là trung điểm của DF suy ra $F\left(\frac{13}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

Đường thẳng BC đi qua $M(2; -1)$ và $F\left(\frac{13}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ nên có phương trình: $x - 3y - 5 = 0$.

Ta có $C = AC \cap BC \Rightarrow C(5; 0)$. Mà M là trung điểm của BC suy ra $B(-1; -2)$.

Đường thẳng AF đi qua điểm $F\left(\frac{13}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ và vuông góc với BC nên có phương trình: $3x + y - 7 = 0$.

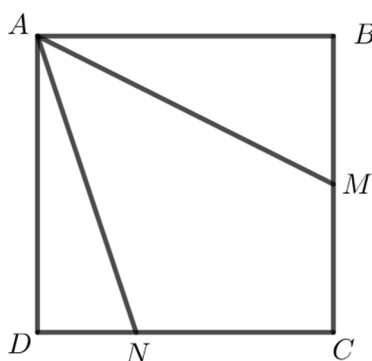
Ta có $A = AF \cap AC \Rightarrow A(1; 4)$.

Vậy: $A(1; 4), B(-1; -2), C(5; 0)$.

Câu 33. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, $M(1; 0)$ là trung điểm cạnh BC , N là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CN = 2ND$, đường thẳng AN có phương trình là $x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm A biết A có hoành độ dương.

Lời giải

Tác giả: Phạm Sơn; Fb: Phạm Sơn



$$+ \text{Ta có: } \tan \widehat{NAD} = \frac{ND}{AD} = \frac{1}{3}, \tan \widehat{MAB} = \frac{MB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan(\widehat{NAD} + \widehat{MAB}) = \frac{\tan \widehat{NAD} + \tan \widehat{MAB}}{1 - \tan \widehat{NAD} \cdot \tan \widehat{MAB}} = 1 \Rightarrow \widehat{NAD} + \widehat{MAB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{NAM} = 45^\circ.$$

+ Đường thẳng AM qua $M(1; 0)$ nên có dạng: $a(x - 1) + by = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

$$\cos(\widehat{AM}, \widehat{AN}) = \frac{|a - b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = |a - b| \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Với $a = 0$ thì $AM: y = 0$. Mà $A = AM \cap AN$ nên $A(-2; 0)$ (loại).

Với $b = 0$ thì $AM: x - 1 = 0$. Mà $A = AM \cap AN$ nên $A(1; 3)$ (nhận).

+ Vậy $A(1; 3)$.

Cách 2 <Nguyễn Viết Hòa>

$$+ \text{Ta có: } \tan \widehat{NAD} = \frac{ND}{AD} = \frac{1}{3}, \tan \widehat{MAB} = \frac{MB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan(\widehat{NAD} + \widehat{MAB}) = \frac{\tan \widehat{NAD} + \tan \widehat{MAB}}{1 - \tan \widehat{NAD} \cdot \tan \widehat{MAB}} = 1 \Rightarrow \widehat{NAD} + \widehat{MAB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{NAM} = 45^\circ.$$

$$d(M, AN) = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow MA = 3. A \in AN \Rightarrow A(x; x+2) \Rightarrow AM = \sqrt{(x-1)^2 + (x+2)^2}.$$

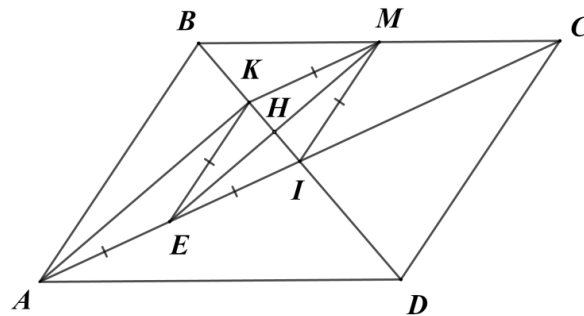
$$MA = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow A(1;3) \text{ (vì } x_A > 0).$$

Câu 34. (HSG10 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $AC = 2AB$, phương trình đường chéo $BD: x + y - 1 = 0$, điểm B có hoành độ âm. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $E(3;4)$ là điểm thuộc đoạn thẳng AC thỏa mãn $AC = 4AE$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D , biết diện tích tam giác DEC bằng 4.

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Triết Khiêm

Vũ Kim Giang



* Gọi $\{I\} = AC \cap BD$, mà $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\begin{cases} IA = IC = \frac{1}{2} AC \\ IB = ID = \frac{1}{2} BD \end{cases}.$$

Trên đoạn thẳng AC ta có

$$\begin{cases} AE = \frac{1}{4} AC \\ IA = \frac{1}{2} AC \end{cases} \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AI.$$

Khi đó $IE = \frac{1}{2} IA = \frac{1}{4} AC = \frac{1}{4} \cdot 2AB = \frac{1}{2} AB$.

Gọi K là trung điểm của BI . Suy ra KE là đường trung bình của tam giác $ABI \Rightarrow KE = \frac{1}{2} AB$.

Ta có: MI là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MI = \frac{1}{2} AB$.

Ta có: MK là đường trung bình của tam giác $BIC \Rightarrow MK = \frac{1}{2} IC = \frac{1}{4} AC = \frac{1}{2} AB$.

Như vậy $IE = KE = MI = MK = \frac{1}{2} AB$. Suy ra tứ giác $IMKE$ là hình thoi.

* Gọi $H = KI \cap ME$ suy ra H là hình chiếu của E lên BD .

Vì $H \in BD \Rightarrow H(h; 1-h) \Rightarrow \overrightarrow{EH} = (h-3; -h-3)$. Đường thẳng BD có vtcp $\overrightarrow{u_{BD}} = (1; -1)$.

Khi đó $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{u_{BD}} = 0 \Leftrightarrow h-3 + (-1)(-h-3) = 0 \Leftrightarrow h = 0 \Rightarrow H(0; 1)$.

Do đó, $\overrightarrow{EH} = (-3; -3) \Rightarrow EH = 3\sqrt{2}$.

Hình thoi $IMKE$ có H là trung điểm $EM \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2x_H - x_E \\ y_M = 2y_H - x_E \end{cases} \Rightarrow M(-3; -2)$.

* Ta có $IE = \frac{1}{3}EC \Rightarrow S_{\triangle DIE} = \frac{1}{3}S_{\triangle DEC}$. Mặt khác, $IB = ID \Rightarrow S_{\triangle EIB} = S_{\triangle EID} = \frac{1}{3}S_{\triangle DEC} = \frac{4}{3}$.

Khi đó $S_{\triangle EIB} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}EH \cdot IB = \frac{4}{3} \Leftrightarrow IB = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Ta có K là trung điểm BI , H là trung điểm $KI \Rightarrow BH = \frac{3}{4}BI = \frac{3}{4} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Vì $B \in BD \Rightarrow B(b; 1-b) \Rightarrow \overrightarrow{BH} = (-b; b)$. Khi đó, $BH^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow (-b)^2 + b^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \pm \frac{1}{3}$. Mà

$x_B < 0$ nên chọn $b = -\frac{1}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Với M là trung điểm BC , suy ra $C\left(-\frac{17}{3}; -\frac{16}{3}\right)$.

* Ta có $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$ với $\overrightarrow{BH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, suy ra $\begin{cases} x_I - 0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ y_I - 1 = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{9} \\ y_I = \frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{9}; \frac{8}{9}\right)$.

Vì I là trung điểm AC nên suy ra $A\left(\frac{53}{9}; \frac{64}{9}\right)$.

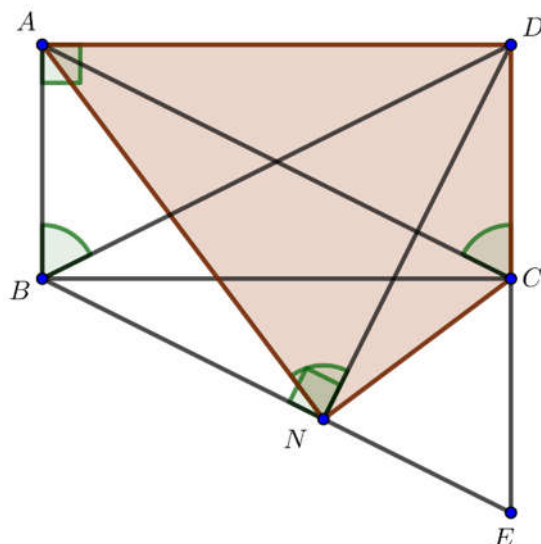
Mặt khác, I là trung điểm BD nên suy ra $D\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$.

Vậy $A\left(\frac{53}{9}; \frac{64}{9}\right), B\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right), C\left(-\frac{17}{3}; -\frac{16}{3}\right), D\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$.

Câu 35. (HSG11 Hậu Lộc tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, có đỉnh $A(-3; 1)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6; -2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE . Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$.

Lời giải

Tác giả: ; Fb:



Ta có $\widehat{BAD} + \widehat{BND} = 180^\circ$, suy ra tứ giác $ADBN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AND} = \widehat{ABD}$.

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật).

Suy ra tứ giác $ANCD$ nội tiếp được một đường tròn.

Mặt khác, $\widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ANC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Do đó $AN \perp CN$.

Theo đề bài ta có điểm C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$, suy ra $C(2c + 5; c)$.

Ta có $\overrightarrow{AN} = (9; -3)$ và $\overrightarrow{CN} = (1 - 2c; -2 - c)$.

Do $AN \perp CN$, suy ra $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow 9(1 - 2c) - 3(-2 - c) = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow C(7; 1)$.

Ta có

$\left. \begin{array}{l} CE \parallel AB \\ CE = AB \end{array} \right\} \Rightarrow ACEB$ là hình bình hành, suy ra $BE \parallel AC$.

Ta có BE qua N , song song AC nên có phương trình $y + 2 = 0$.

Gọi $B(b; -2)$, ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -2 \end{cases}$.

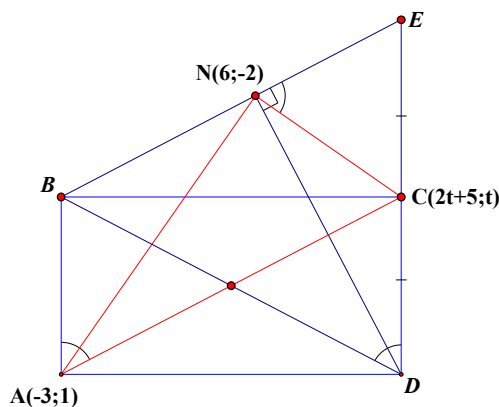
Với $b = 6 \Rightarrow B(6; -2)$, loại do trùng với N .

Với $b = -2 \Rightarrow B(-2; -2)$.

Gọi $D(x_D; y_D)$, ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_D + 3; y_D - 1) = (9; 3) \Rightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D(6; 4)$.

Câu 36. (HSG11 THPT Hậu Lộc Thanh Hóa năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, có đỉnh $A(-3; 1)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6; -2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE . Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$.

Lời giải



Ta có tứ giác $BNCD$ nội tiếp nên $\widehat{BDC} = \widehat{ENC}$ (cùng bù với $\widehat{BNC}$).

Mà $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ ($ABCD$ là hình chữ nhật) nên $\widehat{BAC} = \widehat{ENC}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABNC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$.

Vì C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$ nên $C(2t+5; t)$.

$$\overrightarrow{NC} = (2t-1; t+2), \overrightarrow{NA} = (-9; 3).$$

$$\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{NA} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow C(7; 1).$$

$ABEC$ là hình bình hành nên $BE \parallel AC$. Đường thẳng BE qua N và song song với AC nên có phương trình: $y + 2 = 0$.

B thuộc đường thẳng BE nên $B(b; -2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (b+3; -3); \overrightarrow{BC} = (7-b; 3)$$

$$AB \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \Rightarrow B(6; -2) \equiv N \\ b = -2 \Rightarrow B(-2; -2) \end{cases}$$

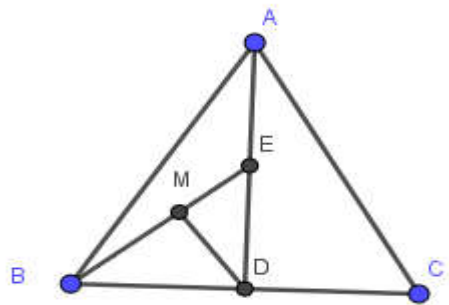
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow D(6; 4).$$

)

Câu 37. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A , phương trình đường thẳng AB, AC lần lượt là $5x - y - 2 = 0, x - 5y + 14 = 0$. Gọi D là trung điểm của BC , E là trung điểm của AD , $M\left(\frac{9}{5}; \frac{8}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của D trên BE . Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Duy Mạnh; Fb: Nguyễn Mạnh Toán



Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 5x - y - 2 = 0 \\ x - 5y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ Vậy $A(1;3)$.

Gọi $B(a;5a-2), C(5b-14;b)$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC \Leftrightarrow (a-1)^2 = (b-3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ a = 4 - b \end{cases}$.

TH1: Với $a = b - 2$ Ta có $B(a;5a-2), C(5a-4;a+2)$ nên $D(3a-2;3a)$

Ta có $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0 \Leftrightarrow 18a^2 - 28a + \frac{63}{5} = 0$ (vô nghiệm)

TH2: Với $a = 4 - b$ Ta có $B(a;5a-2), C(6-5a;4-a)$ nên $D(3-2a;1+2a)$

Ta có $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0 \Leftrightarrow 8a^2 - \frac{27}{5}a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{27}{40} \end{cases}$.

*Với $a = 0$ có $b = 4$ thì $B(0;-2), C(6;4)$ nên $D(3;1), E(2;2)$.

Kiểm tra có M, E, B thẳng hàng(thỏa mãn).

*Với $a = \frac{27}{40}$ có $b = \frac{133}{40}$ thì $B\left(\frac{27}{40}; \frac{11}{8}\right), C\left(\frac{21}{8}; \frac{133}{40}\right)$ nên $D\left(\frac{33}{20}; \frac{47}{20}\right), E\left(\frac{53}{40}; \frac{107}{40}\right)$

Kiểm tra có M, E, B không thẳng hàng(không thỏa mãn).

Kết luận: Vậy $A(1;3), B(0;-2), C(6;4)$.

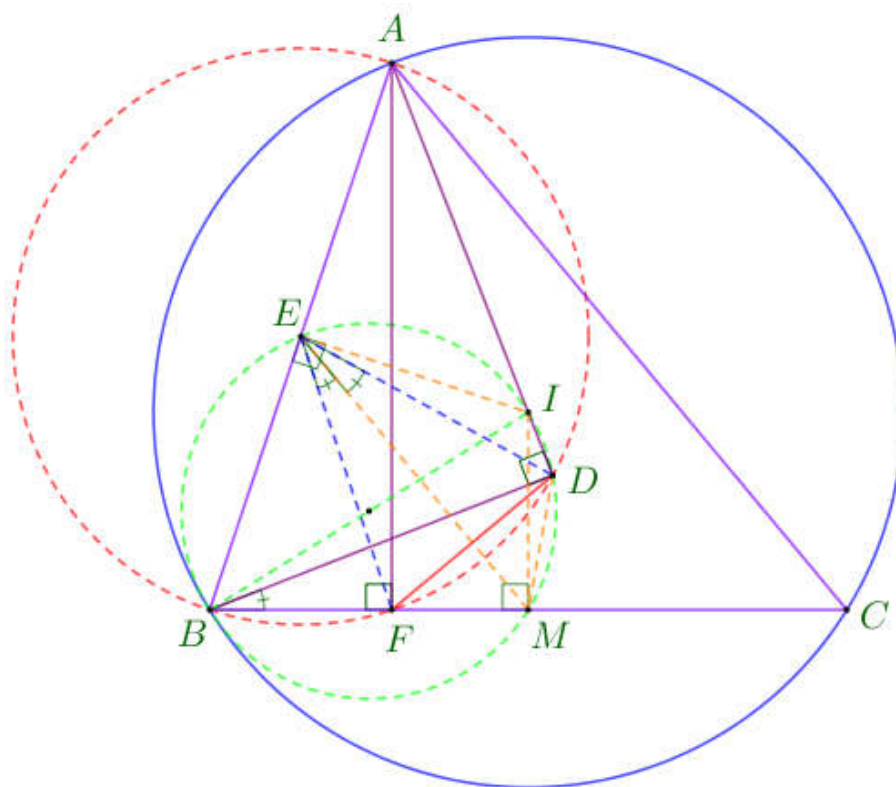
Câu 38. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn tâm I . Gọi E, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC ; các điểm F và D tương ứng là hình chiếu vuông góc của A và B trên các đường thẳng BC và AI .

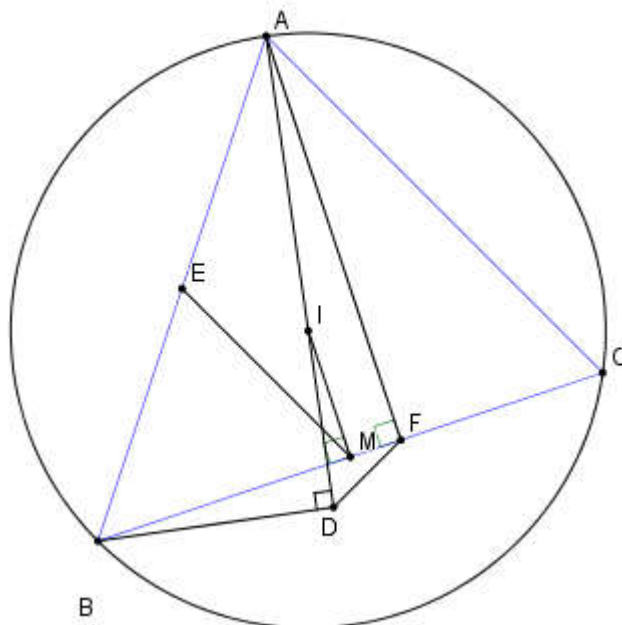
a) Chứng minh rằng ME là đường trung trực của đoạn thẳng DF .

b) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết rằng $M(2;-1), D\left(\frac{9}{5}; -\frac{8}{5}\right)$ và đường thẳng AC có phương trình $x + y - 5 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thành Biên ; Fb: BienNguyenThanh





Gọi I là trung điểm DF nên $I\left(\frac{11}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ (do $I = DF \cap ME$). Do đó $F\left(\frac{13}{5}; -\frac{4}{5}\right)$

Mà $F, M \in BC$ nên phương trình đường thẳng BC : $\frac{x-2}{\frac{13}{5}-2} = \frac{y+1}{-\frac{4}{5}+1} \Leftrightarrow x-3y-5=0$

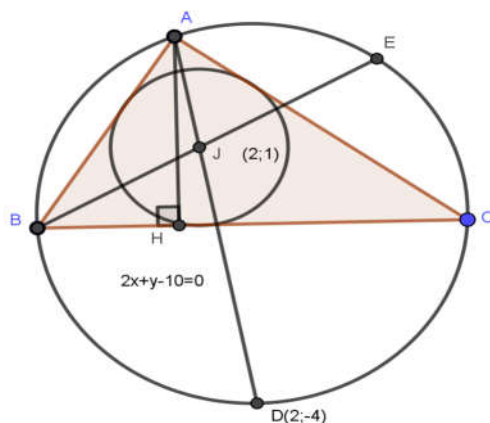
Mặt khác: $AD \perp BD$ nên phương trình đường thẳng AD :

$$7\left(x-\frac{9}{5}\right)+\left(y+\frac{8}{5}\right)=0 \Leftrightarrow 7x+y-11=0$$

Vậy tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$ là: $A(1;4)$, $B(-1;-2)$, $C(5;0)$.

Câu 39. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy) , cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2;1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình: $2x + y - 10 = 0$ và $D(2; -4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.

Lời giải



AJ đi qua $J(2;1)$ và $D(2;-4)$ nên AJ có phương trình : $x-2=0$

Goi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A . Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases} x-2=0 \\ 2x+y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow A(2;6).$$

Gọi E là giao điểm thứ hai của BJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có $\widehat{DB} = \widehat{DC} \Rightarrow DB = DC$ và $\widehat{EA} = \widehat{EC}$

$$\widehat{DBJ} = \frac{1}{2}(sd\widehat{EC} + sd\widehat{DC}) = \frac{1}{2}(sd\widehat{EA} + sd\widehat{DB}) = \widehat{DJB} \Rightarrow \Delta DBJ \text{ cân tại } D.$$

$DB = DC = DJ$ hay D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC .

Suy ra B, C nằm trên đường tròn tâm $D(2; -4)$ bán kính $JD = \sqrt{0+5^2} = 5$ có phương trình $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$.

Khi đó tọa độ B là hệ của nghiệm:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ x+y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-3;-4) \\ B(2;-9) \end{cases}$$

Do B có hoành độ âm nên $B(-3; -4)$.

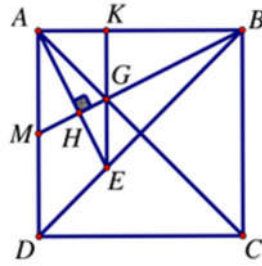
BC đi qua $B(-3; -4)$ và vuông góc AH nên có phương trình: $x - 2y - 5 = 0$.

Khi đó C là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ x-2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$$

Vậy $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$.

Câu 40. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, điểm $G(3;3)$ là trọng tâm tam giác ABD . Đường thẳng đi qua A vuông góc với BG và cắt BD tại điểm $E(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A có tung độ lớn hơn 1.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh AD , H là giao điểm của AE và BM , K là giao điểm của GE và AB .
 Vì $AG \perp BE$ (do $AC \perp BD$) và $BG \perp AE$ (gt) nên G là trực tâm tam giác $ABE \Rightarrow GE \perp AB$,
 $GE \parallel AD$.

Ta có $\frac{KG}{AM} = \frac{BG}{BM}$ do $KG \parallel AM$ và $\frac{GE}{MD} = \frac{BG}{BM}$ do $GE \parallel MD$

Suy ra $\frac{KG}{AM} = \frac{GE}{MD}$, mà $AM = MD \Rightarrow KG = GE$

$\Rightarrow G$ là trung điểm của $KE \Rightarrow \begin{cases} x_K = 2x_G - x_E \\ y_K = 2y_G - y_E \end{cases} \Rightarrow K(5;3).$

AB đi qua $K(5;3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{EG} = (2;0) \Rightarrow AB: x - 5 = 0$.

Vì $A \in AB \Rightarrow A(5; y_A)$ với $y_A > 1$. Mặt khác $\widehat{KAG} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AKG$ vuông cân nên $KA = KG$.

$\Rightarrow (y_A - 3)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y_A = 5 \\ y_A = 1 \end{cases}$, mà $y_A > 1$ nên $A(5;5)$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \begin{cases} x_C - 5 = -6 \\ y_C - 5 = -6 \end{cases} \Rightarrow C(-1; -1).$

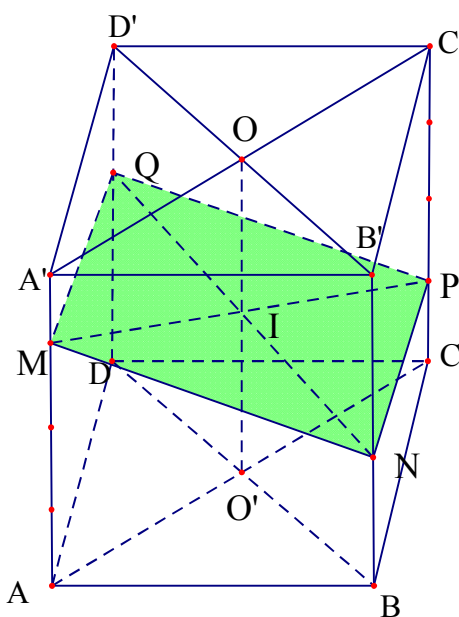
$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GE} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 5 = -6 \\ y_D - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 5).$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_B - 5 = 0 \\ y_B - 5 = -6 \end{cases} \Rightarrow B(5; -1).$

Câu 1. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O cạnh có độ dài bằng 1. Gọi M, P là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CC'}$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua M, P đồng thời cắt hai cạnh BB', DD' lần lượt tại N và Q . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $MNPQ$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Đắc; Fb: Đắc Nguyễn.



Gọi $I = MP \cap OO' \Rightarrow I$ là trung điểm của MP .

Do đó trong hình thang $AMPC$ ta có $AM + CP = 1$, tương tự $DQ + BN = 2.OI = 1$.

Đặt $BN = x, DQ = y$ thì $x, y \in [0;1]$ và $x + y = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} (MNPQ) \cap (ABB'A') = MN \\ (MNPQ) \cap (CDD'C') = QP \\ (ABB'A') \parallel (CDD'C') \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel QP$$

Chứng minh tương tự $MQ \parallel NP$, suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Suy ra của chu vi tứ giác $MNPQ = 2MN + 2MQ$.

$$\text{Ta tính được } MN = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2}; MQ = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - y\right)^2}.$$

$$\text{chu vi tứ giác } MNPQ = 2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - y\right)^2} \right] (*).$$

$$*) \text{ Áp dụng BĐT } \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - y\right)^2} \geq \sqrt{4 + \left(\frac{3}{2} - x - y\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác } MNPQ = \sqrt{17}.$$

) Thế $y = 1 - x$ vào () ta có

$$\text{chu vi tứ giác } MNPQ = 2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} - x\right)^2} \right] = 2f(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Với } f(x) &= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} - x\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} - \left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{4}x + \frac{5}{4}\right) + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} - x\right)^2} - \left(\frac{-5 - \sqrt{17}}{4}x + \frac{\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \\ &= \frac{-13 + 5\sqrt{17}}{8}(x^2 - x) + \frac{-13 + 5\sqrt{17}}{8}(x^2 - x) + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \\ &= \frac{-13 + 5\sqrt{17}}{8}(x^2 - x) + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Do } x^2 - x \leq 0, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow f(x) \leq \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{Suy ra } \max f(x) = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \text{ khi } x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

$$\text{Suy ra giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác } MNPQ = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } x - \frac{3x^2}{4} = \frac{1}{4}x(4 - 3x) = \frac{1}{12} \cdot 3x \cdot (4 - 3x) \leq \frac{1}{12} \left(\frac{3x + 4 - 3x}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó: } S_{MNPQK} \leq \frac{1}{3} \cdot SB \cdot AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow S_{MNPQK} \text{ lớn nhất bằng } \frac{1}{3} \cdot SB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow 3x = 4 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}.$$

Câu 3. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$, biết $\overrightarrow{HN} = -3\overrightarrow{HM}$, trong đó M, N lần

lượt là trung điểm của AB, CD . Mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc 60° . Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{7}}{6}$.

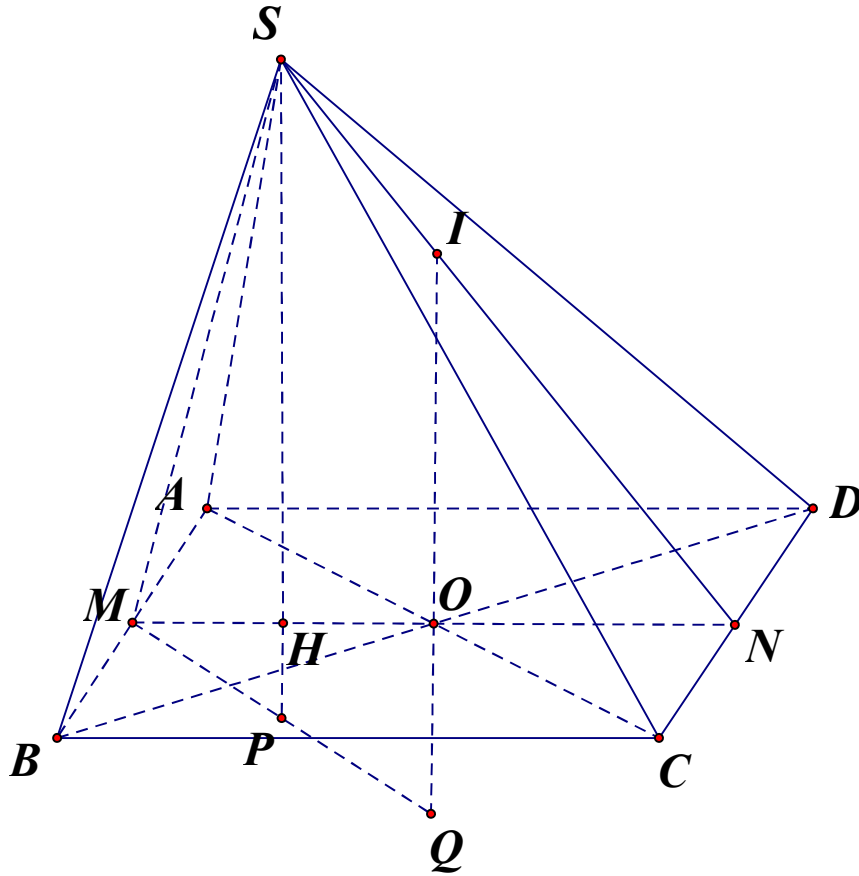
B. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ MN \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMH)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ là góc SMH và bằng 60° .

Vì $MH = \frac{a}{4}$ nên $SM = \frac{MH}{\cos 60^\circ} = \frac{a}{4} : \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$.

Mặt khác, ta có M là trung điểm của AB nên $AM = MB = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SAB có SM là đường trung tuyến và $SM = AM = MB$ suy ra tam giác SAB là tam giác vuông tại S .

Dựng tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ như sau:

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SMN) , dựng đường thẳng đi qua O và song song với SH cắt SN tại I .

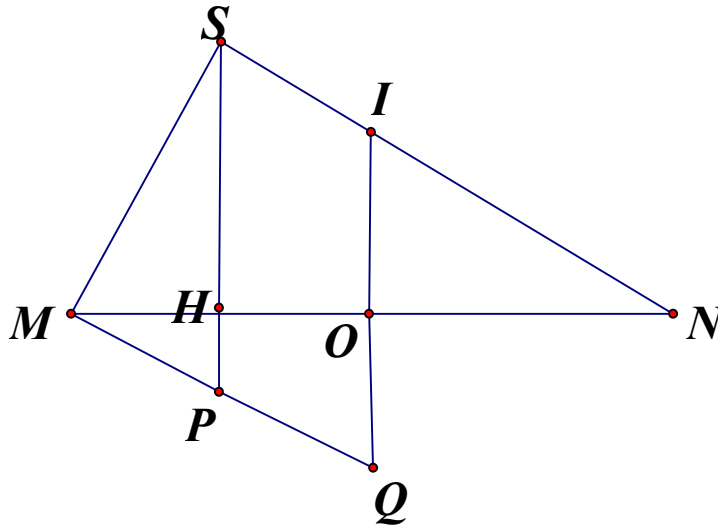
Trong mặt phẳng (SMN) , dựng đường thẳng đi qua M và vuông góc với SM cắt SH, OI lần lượt tại P, Q .

Khi đó Q chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Thật vậy:

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $IQ \perp (ABCD)$ mà O là tâm của hình vuông $ABCD$ suy ra $QA = QB = QC = QD$. (1)

Mặt khác, ta có $\begin{cases} MQ \perp AB \\ MQ \perp SM \end{cases} \Rightarrow MQ \perp (SAB)$ mà M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB nên $QA = QB = QS$. (2)

Từ (1), (2) suy ra Q chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng $QM = 2MP$.

Xét tam giác SMP vuông tại M có góc $MSP = 30^\circ$ nên $MP = SM \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $BAD = 120^\circ$, SA vuông góc với đáy. SC tạo với đáy một góc 60° . Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

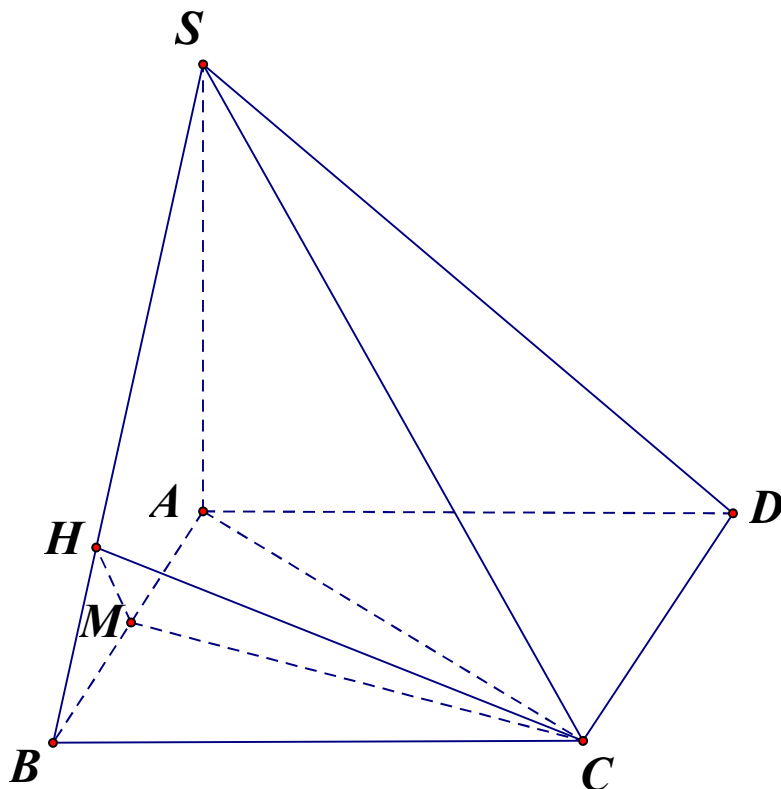
B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng góc SCA và bằng 60° .

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi có góc BAD bằng 120° nên tam giác ACD là tam giác đều. Do đó $AC = a$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi CM là đường cao của tam giác ACD .

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi có góc BAD bằng 120° nên tam giác ACD là tam giác đều. Do đó M là trung điểm của AD .

Ta có $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$.

Trong mặt phẳng (SAD) , dựng đường thẳng đi qua M và vuông góc với SD cắt AD lần lượt tại H .

Ta có $\begin{cases} CM \perp SD \\ MH \perp SD \end{cases} \Rightarrow SD \perp (CMH)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) là góc CHM .

Ta có $\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SDA = 60^\circ$.

Vì M là trung điểm của AD nên $MD = \frac{a}{2}$. Suy ra $MH = MD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta lại có tam giác CMH vuông tại M nên theo định lý Pytago có $CH = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Vậy Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng $\cos CHM = \frac{MH}{CH} = \frac{a\sqrt{3}}{4} : \frac{a\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 6. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng từ điểm B đến mặt phẳng $(AB'C)$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

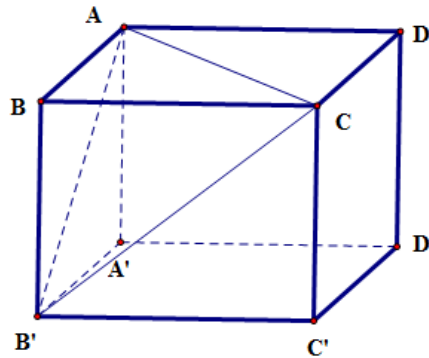
C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Minh Quân; Fb: Nguyễn Minh Quân

Chọn C



Từ giả thiết suy ra hình chóp $B.ACB'$ có các cặp cạnh BA, BC, BB' đôi một vuông góc.

Suy ra $d(B, (ACB')) = h$ với h là đường cao của hình chóp $B.ACB'$ kẻ từ đỉnh B .

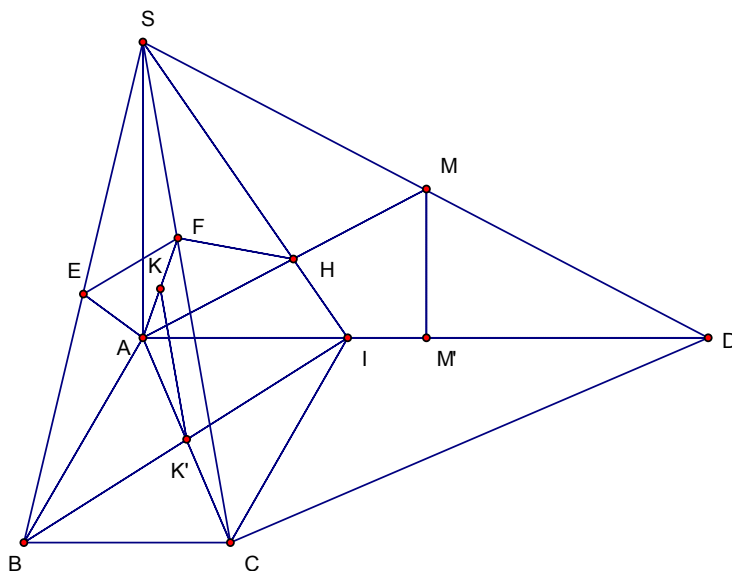
$$\text{Có } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (ACB')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 7. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 3BC = 3a$, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD và I thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$.

- Tính thể tích của khối tứ diện $CDMI$. Tính góc giữa hai đường thẳng AM và SC .
- Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SC . Gọi H là giao điểm của SI và AM . Tính thể tích của khối nón có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Trong tam giác SAD , có $\begin{cases} SA // MM' \\ MS = MD \end{cases} \Rightarrow MM' = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong hình thang $ABCD$, có $\begin{cases} AD // CD \\ AI = BC = AB . \text{ Suy ra } ABCI \text{ là hình vuông.} \\ \widehat{A} = 90^\circ \end{cases}$

Diện tích của tam giác CDI là $S_{CDI} = \frac{1}{2} CI.DI = a^2$.

Vậy thể tích của khối tứ diện $CDMI$ là $V = \frac{1}{3} S_{CDI} .MM' = \frac{1}{3} a^2 . \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Ta có: $\begin{cases} CI \perp AD \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAD) \Rightarrow CI \perp AM \text{ (1)}.$

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}a \Rightarrow SM = AM = SA = a\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAM} = 60^\circ.$$

$$\tan \widehat{ASI} = \frac{AI}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASI} = 30^\circ.$$

Suy ra $\widehat{SHA} = 90^\circ$ (H là giao điểm của SI và AM). Do đó $SI \perp AM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AM \perp (SIC) \Rightarrow AM \perp SC$.

b. Ta có $\begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp BC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AE \perp SC \\ AE \perp EF \end{cases}$ (3). $SM \perp (SIC) \Rightarrow AH \perp (SIC) \Rightarrow \begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp HF \end{cases}$ (4).

$$AF \perp SC \text{ (6).}$$

Từ (3),(4),(5) suy ra bốn điểm A, E, F, H đồng phẳng; mặt phẳng $SC \perp (AEFH)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH là trung điểm K của đoạn AF .

Gọi K' là trung điểm của đoạn AC .

Vì $KK' \parallel FC$ và $SC \parallel (AEFH)$ nên $KK' \perp (EFH)$ hay K' là đỉnh của hình nón đang cần xét.

Trong tam giác SAC , có:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AF = \frac{AS \cdot AC}{\sqrt{AS^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{5} \Rightarrow KF = \frac{a\sqrt{30}}{10}$$

và

$$FC = \frac{AC^2}{SC} = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow KK' = \frac{1}{2}FC = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy thể tích V' của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ là

$$V' = \frac{1}{3}\pi \cdot KF^2 \cdot KK' = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2 30}{100} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{\pi a^3 \sqrt{5}}{50}.$$

Câu 8. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, có M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Vector $\overrightarrow{A'M}$ được biểu thị qua các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}$ như sau

A. $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}$.

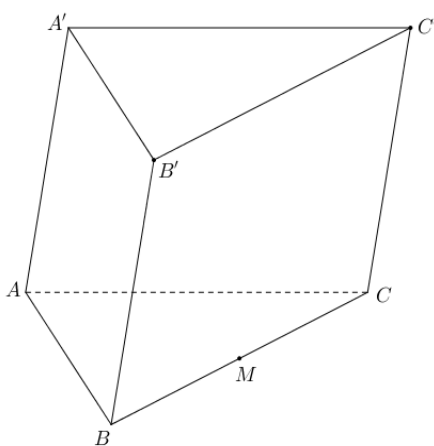
B. $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}$.

D. $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

Tác giả: Bui Bai; Fb: Bui Bai



Chọn C

Do M là trung điểm $BC \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}.$$

Câu 9. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm M của cạnh CD . Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAD đến mặt phẳng (SBM) bằng

A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

B. $\frac{3a\sqrt{10}}{15}$.

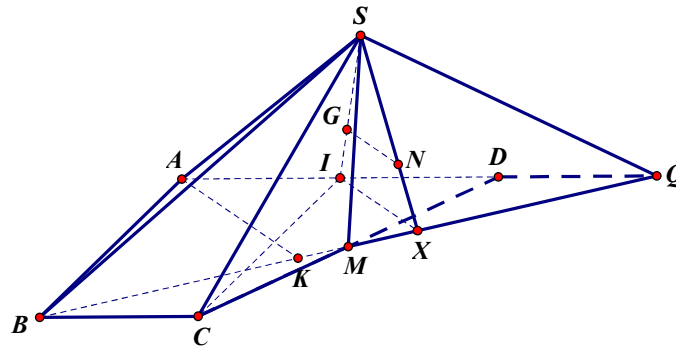
C. $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$.

D. $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Tác giả: Lê Thanh Long; Fb: Lê Thanh Long



+ Kẻ $CI \perp AD$ mà $AD = 2AB = 2BC$ nên suy ra I là trung điểm của AD

$\Rightarrow CID$ là tam giác vuông cân tại I

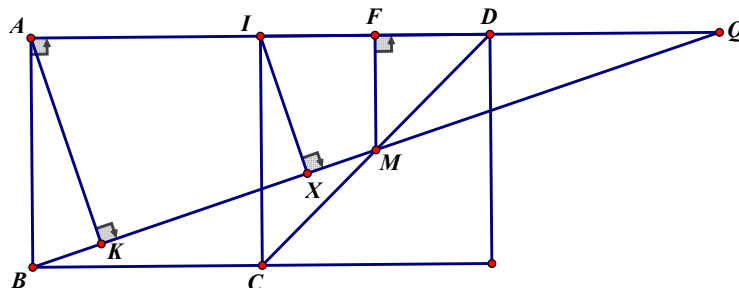
+ Ta có $SM \perp (ABCD) \Rightarrow (SMB) \perp (ABCD)$

Nên từ I ta kẻ $IX \perp BM \Rightarrow IX \perp (SBM)$

+ Trong (SIX) ta kẻ $GN \parallel IX \Rightarrow GN \perp (SBM) \Rightarrow d[G, (SBM)] = GN$

+ Xét hai tam giác đồng dạng SGN và SIX : $\frac{GN}{IX} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3} \Rightarrow GN = \frac{2}{3}IX$

Ta xét $(ABCD)$:



+ Kẻ $MF \perp AD$ mà M là trung điểm của $CD \Rightarrow MF = \frac{1}{2}AB$ suy ra F là trung điểm của AQ

Ta có: $CD = 2a\sqrt{2}$, mà $\triangle CID$ vuông cân tại I nên $ID = 2a$

$MF = \frac{1}{2}AB$ suy ra F là trung điểm của $AQ \Rightarrow AQ = 6a$

$$+ \text{ Xét } \Delta \text{ vuông } ABQ, \text{ ta kẻ } AK \perp BQ \Rightarrow AK = \frac{AQ \cdot AB}{\sqrt{AQ^2 + AB^2}} = \frac{3a\sqrt{10}}{5}$$

$$+ \text{ Ta xét 2 tam giác đồng dạng } QIX \text{ và } QAK : \Rightarrow IX = \frac{QI \cdot AK}{QA} = \frac{2a\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Vậy: } GN = \frac{2}{3}IX = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{10}}{5} = \frac{4a\sqrt{10}}{15}$$

Câu 10. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB là đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCM) là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $a\sqrt{2}$.

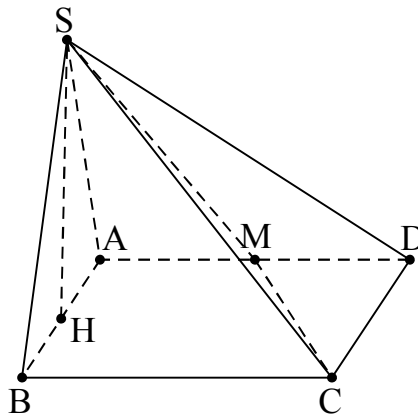
C. $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

D. $3a\sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả: Hoa Mù; Fb: Hoa Mù

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB , tam giác SAB là đều cạnh $2a \Rightarrow SH \perp AB, SH = a\sqrt{3}$.

Ta có:

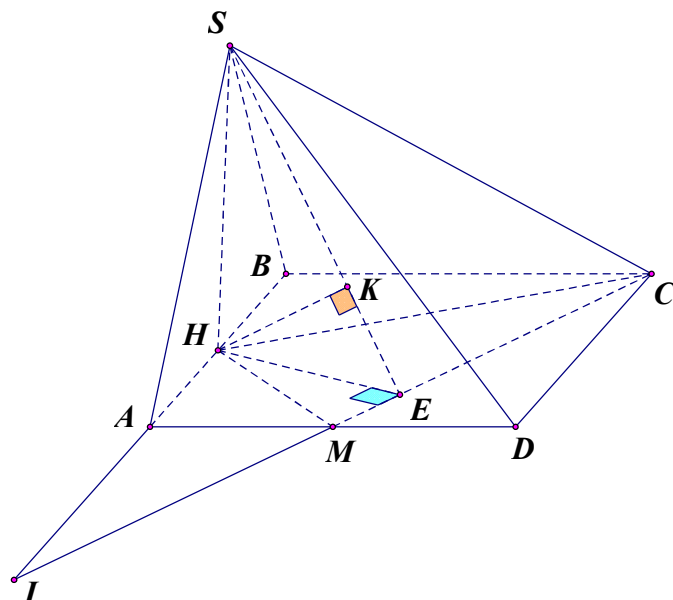
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) (gt) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ AH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta BCM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2. V_{S.BCM} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta BCM} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a^2 = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Mặt khác: } HM = a\sqrt{2}; SM = CM = HC = a\sqrt{5} \Rightarrow SC = a\sqrt{8} \Rightarrow S_{\Delta SCM} = a^2\sqrt{6}.$$

$$\text{Khi đó: } d(B; (SCM)) = \frac{3V_{S.BCM}}{S_{\Delta SCM}} = 3 \cdot 2a^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} : a^2\sqrt{6} = a\sqrt{2}.$$

Cách 2: Lớp 11



$$\frac{d(B, (SMC))}{d(H, (SMC))} = \frac{BI}{HI} = \frac{2AB}{\frac{3}{2}AB} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow d(B, (SMC)) = \frac{4}{3} d(H, (SMC)) = \frac{4}{3} HK$$

$$HK^2 = \frac{HE^2 \cdot HS^2}{HE^2 + HS^2} \Rightarrow HS = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; HE = \frac{2S_{\Delta HMC}}{CM}$$

$$+) S_{\Delta HMC} = S_{ABCD} - S_{\Delta AHM} - S_{\Delta MDC} - S_{\Delta BHC} = 4a^2 - \frac{1}{2}a^2 - a^2 - a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

$$CM = \sqrt{MD^2 + DC^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow HE = \frac{3a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } HK^2 = \frac{\frac{9a^2}{5} \cdot 3a^2}{\frac{9a^2}{5} + 3a^2} = \frac{9a^2}{8} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow d(B, (SMC)) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = a\sqrt{2}.$$

Câu 11. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho bốn điểm không đồng phẳng, ta có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ bốn điểm đã cho?

A. 2. B. 4. C. 6. D. 3.

Lời giải

Tác giả: Bui Bai; Fb: Bui Bai

Chọn B

* Cách 1:

Vì qua 3 điểm phân biệt không thẳng hàng ta xác định được một mặt phẳng duy nhất

$\Rightarrow$ Số mặt phẳng được xác định từ 4 điểm không đồng phẳng là $C_4^3 = 4$.

* Cách 2:

Gọi A, B, C, D lần lượt là 4 điểm không đồng phẳng

$\Rightarrow$ Các mặt phẳng nhiều nhất được xác định là: $(ABC), (ABD), (ACD), (BCD)$.

Câu 12. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60° . Cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $a\sqrt{3}$.

B. $2a$.

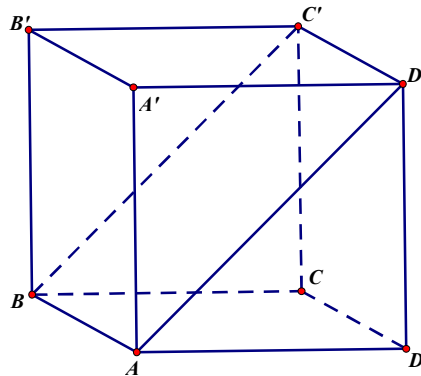
C. $a\sqrt{2}$.

D. $3a$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Lê; Fb: Lê phạm

Chọn A



Vì $C'D' \parallel AB$ nên $D' \in (ABC')$.

Ta có $\begin{cases} (ABCD) \cap (ABC'D') = AB \\ AD \perp AB \\ AD' \perp AB \end{cases}$. Suy ra góc giữa 2 mp $(ABCD), (ABC')$ bằng góc giữa 2 mp

$(ABCD), (ABC'D')$ và bằng $\widehat{DAD'}$. Từ giả thiết ta có $\widehat{DAD'} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông DAD' có $DD' = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy cạnh bên của hình lăng trụ bằng $a\sqrt{3}$.

Câu 13. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = h$ ($a, h > 0$). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo a, h .

A. $\frac{ah}{\sqrt{5a^2 + h^2}}$.

B. $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 5h^2}}$.

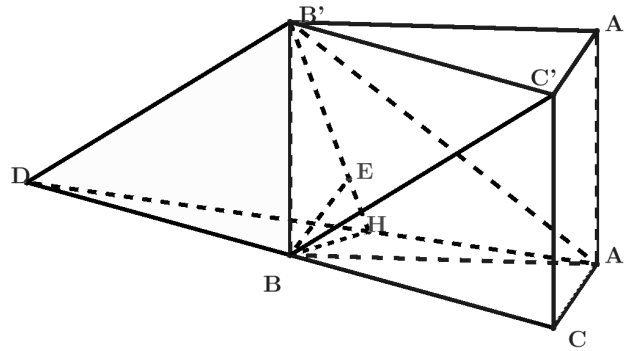
C. $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

D. $\frac{ah}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$.

Lời giải

Tác giả: Việt Hưng; Fb: VietHung

Chọn B



Gọi D là điểm đối xứng với C qua $B \Rightarrow BC' \parallel DB'$

$$\Rightarrow BC' \parallel (DB'A) \Rightarrow d(BC'; AB') = d(BC'; (DB'A)) = d(B; (DB'A)) = d$$

Kẻ $BH \perp AD$ và $BE \perp B'H \Rightarrow d(BC'; AB') = d = BE$

Xét $\triangle ABD$ ta có: $AB = AC = a$; $BC = BD = a\sqrt{2}$; $\widehat{ABC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DBA} = 135^\circ$; $AD = a\sqrt{5}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AB \cdot \sin \widehat{DBA} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a \cdot \sin 135^\circ = \frac{a^2}{2} \Rightarrow BH = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABD}}{AD} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Xét } \triangle BB'H \text{ vuông tại } B, \text{ ta có } \frac{1}{d^2} = \frac{1}{(BB')^2} + \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{5}{a^2} \Rightarrow d = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 5h^2}}$$

Câu 14. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$ và $AA'=a$ ($a > 0$).

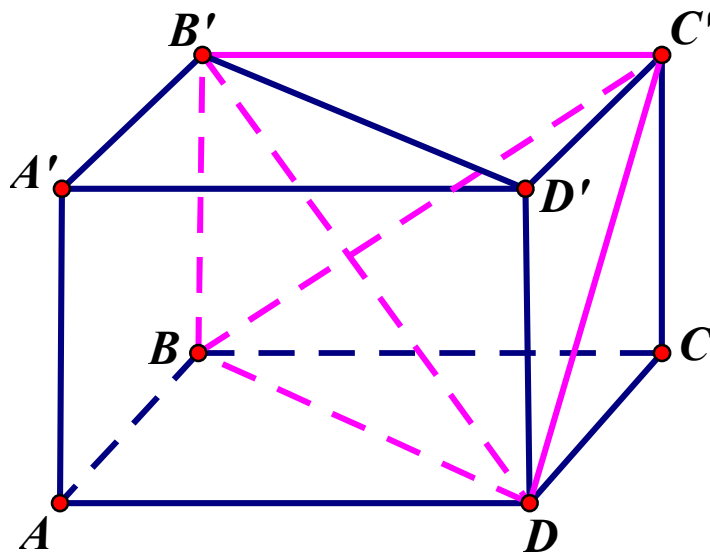
a) Tính thể tích khối tứ diện $BDB'C'$.

b) Khi a thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của góc tạo bởi đường thẳng $B'D$ và mặt phẳng (BDC') .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Công Đức ; Fb:

a) Tính thể tích khối tứ diện $BDB'C'$.



Cách 1: (Tính trực tiếp)

Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow DC \perp (BB'C'C)$

Vậy $V_{D.BB'C'} = \frac{1}{3} \cdot DC \cdot S_{\triangle BB'C'} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot BB' \cdot B'C' = \frac{a}{6}$ (đvtt).

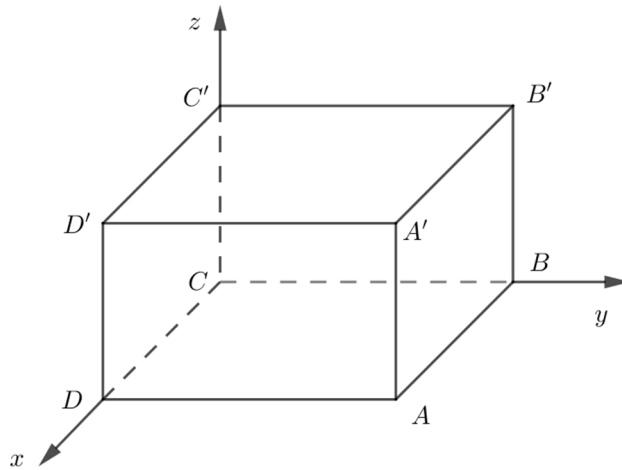
Cách 2: (Dùng tỉ lệ)

Khối lăng trụ $BCD.B'C'D'$ được chia thành các khối tứ diện $C'CBD$; $DD'B'C'$; $BDB'C'$.

Trong đó $V_{D.D'B'C'} = V_{C'.CBD} = \frac{1}{3} V_{BCD.B'C'D'}$

Suy ra $V_{BDB'C'} = \frac{1}{3} V_{BCD.B'C'D'} = \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a}{6}$ (đvtt).

b) Khi a thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của góc tạo bởi đường thẳng $B'D$ và mặt phẳng (BDC') .



Cách 1

Đặt độ dài $CB = b (b > 0)$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz gốc tọa độ trùng điểm C, CD nằm trên Ox, CB nằm trên Oy, CC' nằm trên Oz

Với giả thiết đề cho ta có $D = (1, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$, $C' = (0, 0, a)$, $B' = (0, b, a)$

Phương trình $(BDC') : x + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1 \Rightarrow$ VTPT $\vec{n} = (1, \frac{1}{b}, \frac{1}{a})$

$$\text{Mà } \overrightarrow{DB'} = (-1, b, a) \Rightarrow \sin(\widehat{DB', (BDC')}) = \frac{|-1 + b \cdot \frac{1}{b} + a \cdot \frac{1}{a}|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S $\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1)} \geq |a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + 1| = 3$ (dấu "=" xảy ra khi $a = b = 1$)

$$\sin(\widehat{DB', (BDC')}) \leq \frac{1}{3} \text{ để thấy } 0 \leq (\widehat{DB', (BDC')}) \leq 90 \text{ mà trong khoảng này hàm } y = \sin x \text{ đồng biến}$$

$$\Rightarrow (\widehat{DB', (BDC')})_{\max} = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

Cách 2 : Đặt $CB = b (b > 0)$

Để thấy CB' cắt BC' tại trung điểm của mỗi đường

$$\text{Nên } d(B', (BDC')) = d(C, (BDC')) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{CB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

$$DB' = \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \Rightarrow \sin(\widehat{DB', (BDC')}) = \frac{d(B', (BDC'))}{DB'} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1\right)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S $\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1\right)} \geq a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + 1 = 3$ (dấu “=” xảy ra khi $a = b = 1$)

$$\sin(\widehat{DB', (BDC')}) \leq \frac{1}{3} \text{ để thấy } 0 \leq (\widehat{DB', (BDC')}) \leq 90 \text{ mà trong khoảng này hàm } y = \sin x \text{ đồng biến}$$

$$\Rightarrow (\widehat{DB', (BDC')})_{\max} = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

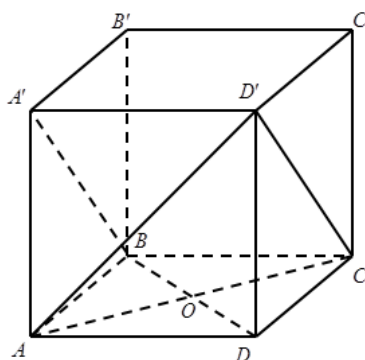
Câu 15. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng AC và BA' là:

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 120° .

Lời giải

Tác giả: Phạm Minh Thùy; Fb: Phạm Minh Thùy

Chọn B



Ta thấy $A'B$ song song với $D'C$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và BA' bằng góc giữa hai đường thẳng AC và $D'C$. (1)

Xét tam giác $AD'C$ có $AC = D'C = AD' = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Nên tam giác $AD'C$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{ACD'} = 60^\circ$. Từ đó ta có góc giữa hai đường thẳng AC và $D'C$ bằng 60° . (2)

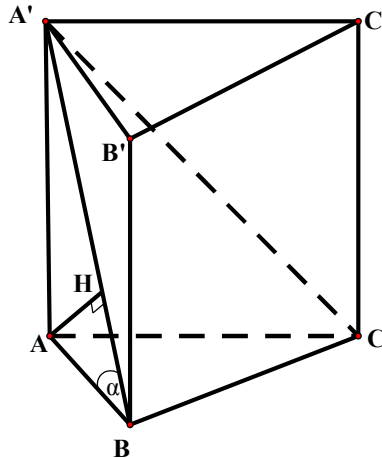
Từ (1) và (2) ta có góc giữa hai đường thẳng AC và BA' bằng 60° .

Câu 16. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B . Mặt phẳng $(A'BC)$ cách điểm A một khoảng bằng 2 và tạo với mặt phẳng (ABC) một góc α .

- a) Tính thể tích khối lăng trụ theo α .
b) Tìm α để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tác giả: Bùi Văn Thanh; Fb: Thanh Bùi



a) Dựng $AH \perp A'B$ (1)

Ta có: $BC \perp AB, BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (AA'B)$;

$AH \subset (AA'B) \Rightarrow AH \perp BC$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow AH \perp (A'BC)$ hay $d(A, (A'BC)) = AH = 2$

Ta có: $BC = (ABC) \cap (A'BC)$ (3)

$BC \perp (AA'B); A'B \subset (AA'B) \Rightarrow A'B \perp BC$ (4);

$AB \perp BC$ ($\triangle ABC$ vuông tại B) (5)

Từ (3); (4); (5) $\Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{ABA'} = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

Xét $\triangle AHB$: $\sin \widehat{ABA'} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2}{\sin \alpha}$; Xét $\triangle AHA'$: $\sin \widehat{AA'H} = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AA' = \frac{2}{\cos \alpha}$

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AA' \cdot AB \cdot BC = \frac{4}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{4}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

b) Đặt $t = \cos \alpha$ ($0 < t < 1$) $\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4}{t(1-t^2)} = V(t)$

$$\text{Ta có } V'(t) = \frac{4(3t^2 - 1)}{(t - t^3)^2}; V'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{3}}(N) \\ t = -\frac{1}{\sqrt{3}}(L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
V'	-	0	+
V			

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \approx 54,74^\circ$

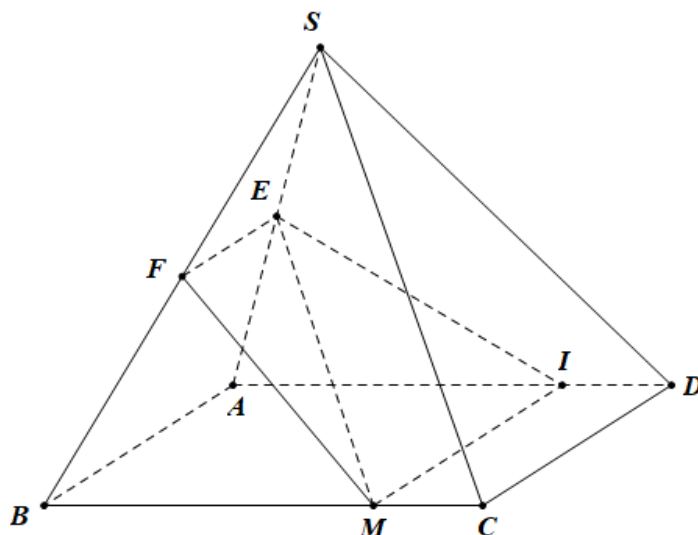
Câu 17. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB . Gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC (không trùng với B, C). Thiết diện của mặt phẳng (MEF) với hình chóp $S.ABCD$ là

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình thoi. **D.** Hình thang.

Lời giải

Tác giả: Phan Minh Quốc Vinh; Fb: Vinh Phan

Chon D



Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và $(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (ABCD) \\ EF // AB \\ EF \subset (MEF) \\ AB \subset (ABCD) \end{cases}$ Giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và $(ABCD)$ là đường thẳng Mx

đi qua M và song song với AB, EF .

Tìm thiết diện của (MEF) với $S.ABCD$.

Giả sử $Mx \cap AD = I$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (MEF) \cap (SAB) = EF \\ (MEF) \cap (SBC) = FM \\ (MEF) \cap (ABCD) = MI \\ (MEF) \cap (SAD) = IE \end{cases}$$

Vậy thiết diện giữa (MEF) và $S.ABCD$ là tứ giác $EFMI$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} EF = \frac{1}{2} AB \\ AB = MI \\ EF \parallel MI \end{cases} \text{ nên tứ giác } EFMI \text{ là hình thang.}$$

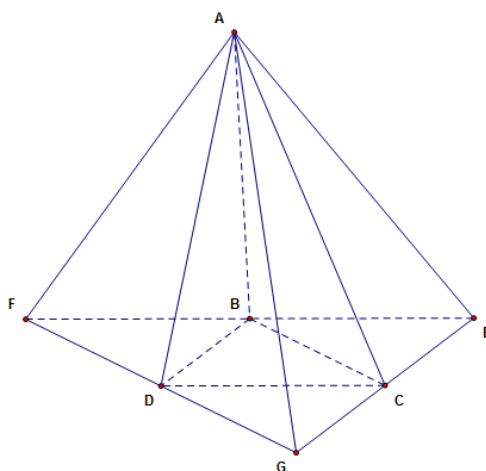
Câu 18. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD = BC = 3; AC = BD = 4; AB = CD = 2\sqrt{3}$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2047}}{12}$. B. $\frac{\sqrt{2074}}{12}$. C. $\frac{\sqrt{2740}}{12}$. D. $\frac{\sqrt{2470}}{12}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Minh Lộc ; Fb: Trần Lộc

Chọn D



Từ tứ diện $ABCD$ ta vẽ tứ diện $AEFG$ sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của FE, EG, GF . Ta có $AB = DC = \frac{1}{2} EF$ suy ra $\triangle AEF$ vuông tại A hay $AF \perp AE$.

Tương tự ta có $AF \perp AG, AG \perp AE$. Do đó ta có $V_{AEFG} = \frac{1}{6} AG \cdot AE \cdot AF$ và $V_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{AEFG}$

Xét các tam giác AEF, AEG, AFG ta có

$$\begin{cases} AE^2 + AF^2 = 4DC^2 = 48 \\ AE^2 + AG^2 = 4DB^2 = 64 \\ AG^2 + AF^2 = 4BC^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AF = \sqrt{10} \\ AE = \sqrt{38} \\ AG = \sqrt{26} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{AEFG} = \frac{1}{4.6} \sqrt{10.26.38} = \frac{\sqrt{2470}}{12}$$

Câu 19. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a // b$.
 B. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.
 C. Nếu $a \perp b$ thì $b // (P)$.
 D. Nếu $b \subset (P)$ thì $a \perp b$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Văn Lưu; Fb: Bùi Văn Lưu

Chọn C

Xét đáp án A: Có $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a // b \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

Xét đáp án B: Có $\begin{cases} a \perp (P) \\ b // a \end{cases} \Rightarrow b \perp (P) \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

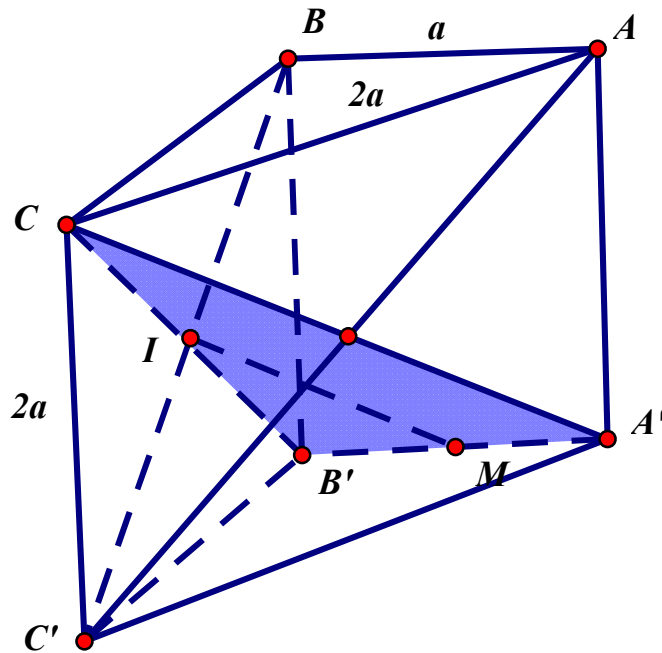
Xét đáp án C: Có $\begin{cases} a \perp (P) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \subset (P) \\ b // (P) \end{cases} \Rightarrow$ Mệnh đề **sai**.

Xét đáp án D: Có $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

Câu 20. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , biết $AB = a$; $AC = 2a$; $CC' = 2a$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm $A'B'$ và BC' . Tính góc giữa hai đường thẳng IM và AC' .

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Vân; Fb: Trần Thị Vân



Cách 1:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

Khi đó $B'(0;0;0), A'(a;0;0), C'(0;a\sqrt{3};0), A(a;0;2a), B(0;0;2a), C(0;a\sqrt{3};2a)$

$$\Rightarrow I\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\right), M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM}\left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; -a\right), \overrightarrow{AC'}(-a; a\sqrt{3}; -2a)$$

Đường thẳng IM & AC' lần lượt có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right), \vec{u}_2 = (-1; \sqrt{3}; -2)$

Gọi φ là góc giữa IM & AC' . Khi đó:

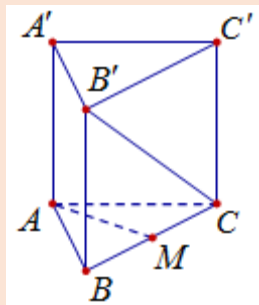
$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{\left|\frac{1}{2}(-1) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} + (-1)(-2)\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1} \sqrt{1+3+2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

Cách 2: Do I là trung điểm của BC' , M là trung điểm của $A'B'$

nên $MI \parallel CA' \Rightarrow \widehat{(IM, AC')} = \widehat{(CA', AC')}$

Do $ACC'A'$ là hình vuông $\Rightarrow AC' \perp CA' \Rightarrow \widehat{(AC', CA')} = 90^\circ$.

Câu 21. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a (tham khảo hình bên dưới). Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là

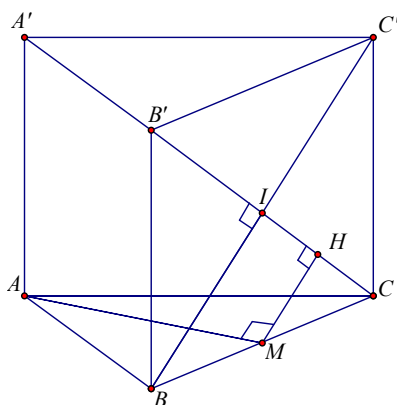


- A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. a .

Lời giải

Tác giả: Nhữ Văn Huấn; Fb: Huân Nhu

Chọn A



Từ giả thiết suy ra ABC là tam giác đều cạnh bằng a , các mặt bên của lăng trụ là các hình vuông cạnh bằng a .

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $BCC'B'$. Từ M kẻ $MH \perp B'C$ tại H (1).

Dễ thấy $AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp MH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $d(AM, B'C) = MH$.

Ta có $MH = \frac{1}{2}BI$, $BI = \frac{1}{2}BC'$.

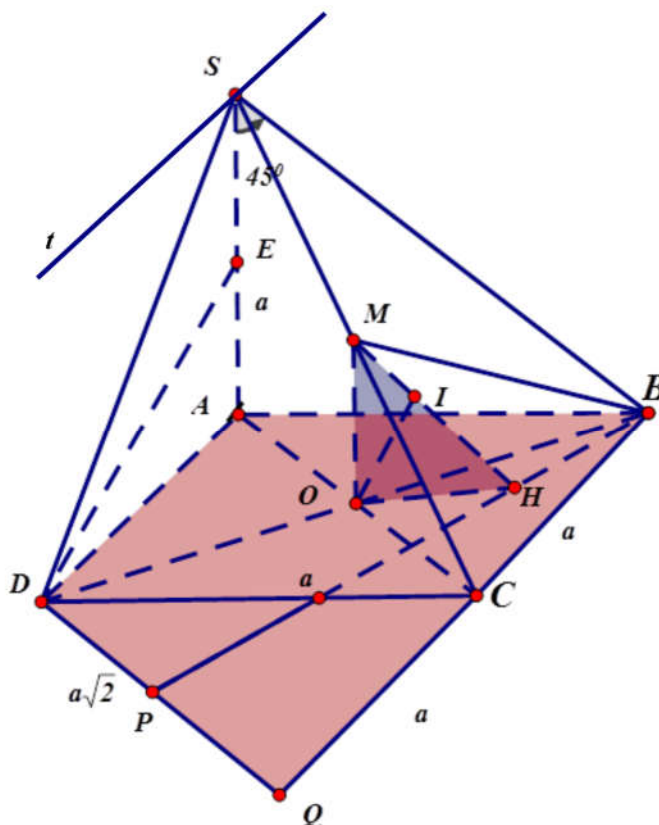
Mà $BCC'B'$ là hình vuông cạnh bằng a suy ra $BC' = a\sqrt{2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 22. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, biết SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng 45° . Gọi E, M lần lượt là trung điểm của SC và SA. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và BE.

Lời giải

Tác giả:Trần Thị Vân; Fb: Trần Thị Vân



Tam giác SAB vuông và cân tại $A \Rightarrow SA = AB = a$.

Ta có: $OE \perp BP(OE // SA, SA \perp (ABCD))$

$$\text{Kẽ } OH \perp BP = \{H\} \Rightarrow (OEH) \perp BP \Rightarrow (OEH) \perp (BEP) = EH.$$
$$\text{Ké } OI \perp EH = \{I\} \Rightarrow OI = d(O; (BEP)).$$

Tìm OI :

$$S_{BDQ} = 2S_{BDC} = 2S_{BPD} \Rightarrow S_{BPD} = S_{BCD} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}OH.BP = \frac{a^2}{2} \Rightarrow OH.BP = a^2$$

BP là đường trung tuyến tam giác BDQ .

$$\Rightarrow BP = \sqrt{\frac{2(BD^2 + BQ^2) - DQ^2}{4}} = \sqrt{\frac{2(2a^2 + 4a^2) - 2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a^2}{BP} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Ta có $OE = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OH^2} = \frac{13}{2a^2} \Rightarrow OI = \frac{\sqrt{26}a}{13} \Rightarrow d(DM; BE) = 2 \cdot \frac{\sqrt{26}a}{13}.$$

Câu 23. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh $AB = AD = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1D_1 và A_1B_1 . Tính thể tích V của khối chóp $A.BDMN$.

A. $V = \frac{5}{2}$.

B. $V = \frac{3}{2}$.

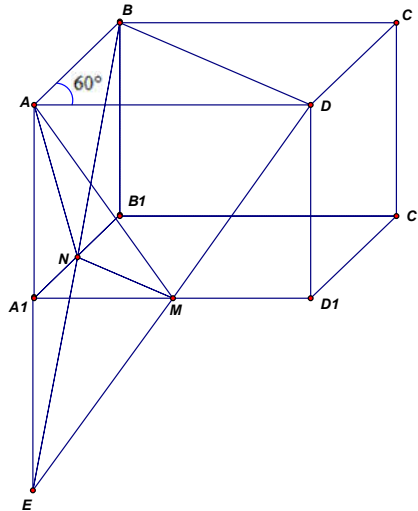
C. $V = 4$.

D. $V = 2$.

Lời giải

Tác giả: Lưu Quý Hiền; Fb: lưu quý hiền

Chọn B



Gọi E là điểm đối xứng với A qua A_1 , ta có:

$$\begin{cases} A_1N \parallel AB \\ A_1N = \frac{AB}{2} \end{cases} \Rightarrow N \text{ là trung điểm của đoạn } EB$$

$$\begin{cases} A_1M \parallel AD \\ A_1M = \frac{AD}{2} \end{cases} \Rightarrow M \text{ là trung điểm của đoạn } ED$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$ABCD.A_1B_1C_1D_1 \text{ là hình hộp đứng, } AA_1 = \sqrt{3} \Rightarrow EA = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{E.ABD} = \frac{1}{3} EA \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2$$

$$\frac{V_{E.AMN}}{V_{E.ABD}} = \frac{EM}{ED} \cdot \frac{EN}{EB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{E.AMN} = \frac{1}{4} V_{E.ABD} \Rightarrow V_{A.BDMN} = \frac{3}{4} V_{E.ABD} = \frac{3}{2}.$$

Câu 24. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1,

lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi H là điểm chia $EH = \frac{1}{3}ED$ và S là điểm nằm trên tia đối của HB sao cho $SH = \frac{1}{3}HB$. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{7}{6}$.

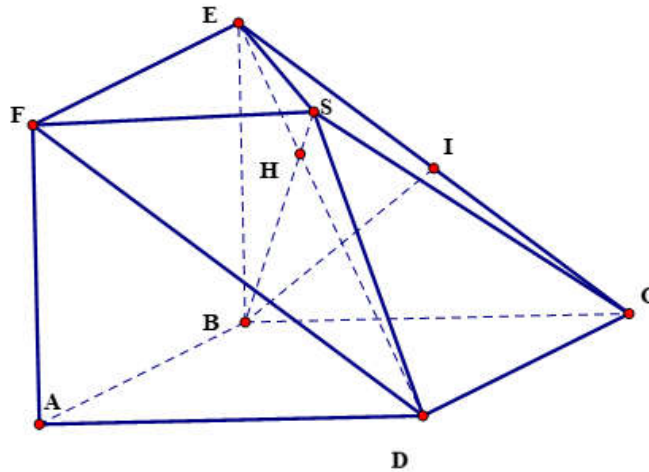
C. $\frac{11}{12}$.

D. $\frac{11}{18}$.

Lời giải

Chọn D

Tác giả: Trần Duy Thúc ; Fb: Trần Duy Thúc



Đặt V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp $S.CDFE$ và thể tích khối lăng trụ đứng $AFD.BEC$. Khi đó tích khối đa diện cần tính bằng $V_1 + V_2$.

Ta có : $V_2 = AB.S_{\triangle AFD} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Ta có : $V_1 = \frac{1}{3} \cdot d(S, (EDEF)) \cdot S_{CDEF}$.

Dễ dàng chúng ta kiểm tra được $CDEF$ là hình chữ nhật với $CD = 1, EF = \sqrt{2}$.

Từ đây ta tính được $S_{CDEF} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Hơn nữa, kẻ $BI \perp EC$, ta dễ dàng kiểm tra được $BI = d(B, (EDEF)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mặt khác, $d(S, (EDEF)) = \frac{1}{3}d(B, (EDEF)) \Rightarrow d(S, (EDEF)) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Ta tính được : $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{9}$. Vậy thể tích cần tính là : $V_1 + V_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$.

Bình luận.

Trong **Lời giải** trên, ta cứ hờn nhiên mà ta chấp nhận cạnh SA bị che khuất thì luôn đúng chẳng? Câu trả lời là **không**. **Lời giải** trên chưa giải thích tại sao không nối cạnh SA mà lại nối DF . Khi gọi K là hình chiếu của S trên BD ta có thể chứng minh được điểm K nằm trong đoạn BD với $BK = \frac{4}{9}BD$,

do đó cạnh SA bị che khuất. Nếu cho khoảng cách BS tăng lên đến mức cần thiết thì DF sẽ trở thành cạnh bị che khuất.

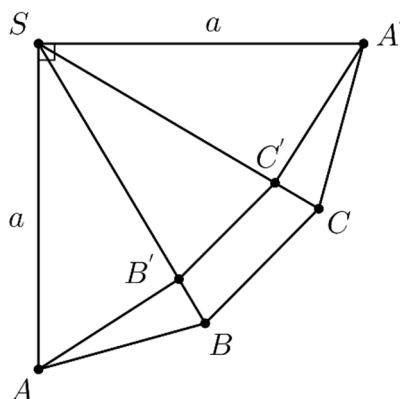
Câu 25. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 30^\circ$. Mặt phẳng (α) bất kì qua A cắt SB, SC tại B', C' . Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\triangle AB'C'$.

A. $a\sqrt{3}$.B. $a\sqrt{2}$.C. a .D. $2a$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên – Triệu Minh

Chọn B



Trải các tam giác SAB, SBC, SCA trên một mặt phẳng như hình trên. Tam giác SAC trở thành tam giác $SA'C$. Khi đó $C = AB' + B'C' + C'A' \geq AA' = a\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi A, B', C', A' thẳng hàng.

Vậy chu vi tam giác $\triangle AB'C'$ nhỏ nhất bằng $a\sqrt{2}$.

Câu 26. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Đáy của hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh bằng 4. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

A. $\sqrt{3}$.B. $2\sqrt{3}$.

C. 3.

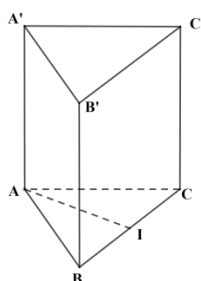
D. 4.

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Triết Khiêm

Chọn

B



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$ (1)

Ta có:
$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ AI \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow AI \perp AA' \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có: $d(AA'; BC) = AI = 2\sqrt{3}$.

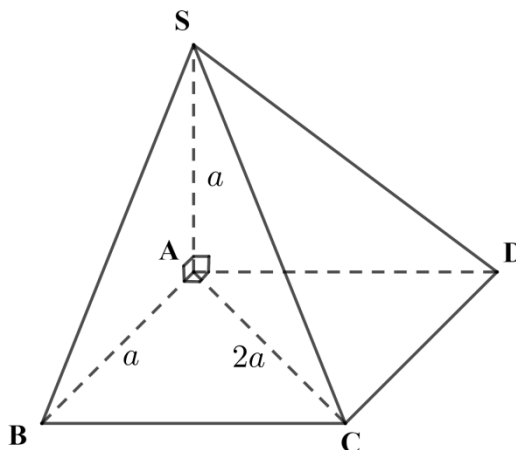
Câu 27. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$. $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy. $AB = a$, $AC = 2a$, $SA = a$. Tính góc giữa SD và BC .

A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Triết Khiêm

Chọn A



Tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow BC = AD = \sqrt{3}a$.

Ta có $BC \parallel AD$ nên $(\widehat{BC, AD}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA}$.

Khi đó: $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 30^\circ$.

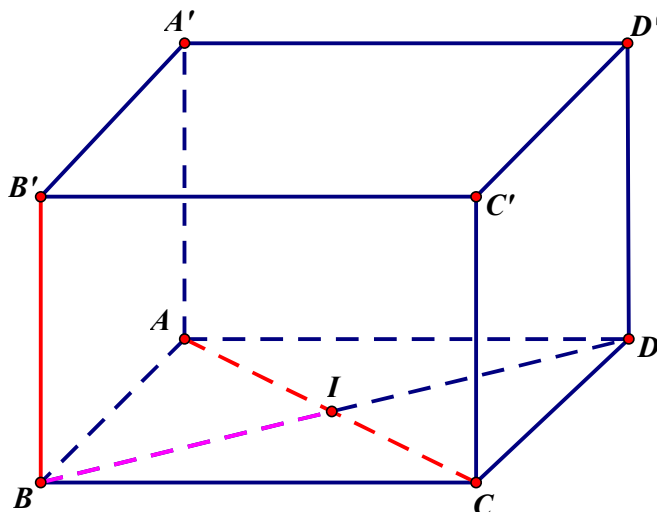
Câu 28. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Nguyễn Phi Hùng; Fb: Bùi Nguyễn Phi Hùng

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp BB' \end{cases} \Rightarrow BI = d(AC, BB') = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

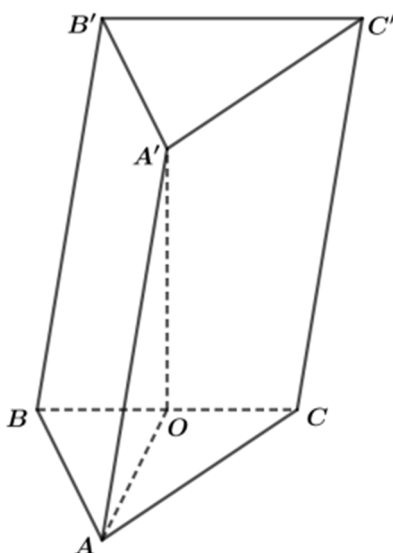
Câu 29. (HSG12 HCM năm 2018-2019) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A với $BC = 2a$ và hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm BC . Biết rằng diện tích của tứ giác $BCC'B'$ bằng $6a^2$.

- a) Tính theo a thể tích của hình lăng trụ đã cho.
b) Tính theo a thể tích của hình trụ nhỏ nhất có hai đáy lần lượt nằm trên hai mặt phẳng (ABC) , $(A'B'C')$ và chứa toàn bộ lăng trụ đã cho bên trong.

Lời giải

Tác giả: Phạm Hoàng Hải; Fb: Phamhoang Hai

a)



Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A , $BC = 2a \Rightarrow \begin{cases} AO = BO = CO = \frac{BC}{2} = a \\ AB = AC = a\sqrt{2} \end{cases}$.

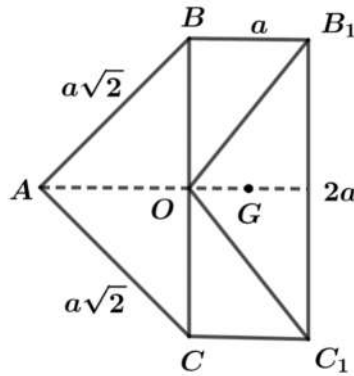
Để chứng minh $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Mà $S_{BCC'B'} = 6a^2 \Rightarrow BB' = 3a \Rightarrow AA' = 3a$.

Xét $\triangle AOA'$ vuông tại O có $AO = a$, $AA' = 3a \Rightarrow A'O = 2a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot A'O = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$ (đvtt).

b) Dựng hình chiếu vuông góc $A'B'C'$ lên (ABC) ta được tam giác OB_1C_1 tương ứng.



Hình trụ chứa $ABCA'B'C'$ có đáy là hình tròn chứa ABB_1C_1CA (H).

Gọi (C) là hình tròn cần tìm; (C) chứa $(H) \Leftrightarrow (C)$ chứa mọi tam giác trong (H) .

$\Rightarrow$ Nếu (C) ngoại tiếp ít nhất một tam giác trong (H) và chứa (H) thì (C) có diện tích nhỏ nhất.

Xét đường tròn ngoại tiếp $\triangle AB_1C_1$ có tâm G .

Có $AB_1 = AC_1 = a\sqrt{5}$, $S_{AB_1C_1} = 2a^2$.

$$\Rightarrow R_G = \frac{AB_1 \cdot B_1C_1 \cdot AC_1}{4S_{AB_1C_1}} = \frac{a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5} \cdot 2a}{4 \cdot 2a^2} = \frac{5}{4}a.$$

$$GB = GC = \sqrt{BO^2 + OG^2} = \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{1}{2}R_G\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9}{64}a^2} = \frac{a\sqrt{73}}{8} < R_G.$$

Vậy B, C thuộc đường tròn $\left(G; \frac{5}{4}a\right)$.

$\Rightarrow$ Đường tròn $\left(G; \frac{5}{4}a\right)$ ngoại tiếp $\triangle AB_1C_1$ và chứa (H) là đường tròn cần tìm.

$$\Rightarrow V = \left(\frac{5}{4}a\right)^2 \cdot \pi \cdot 2a\sqrt{2} = \frac{25\sqrt{2}}{8} \pi a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Câu 30. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH = \frac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

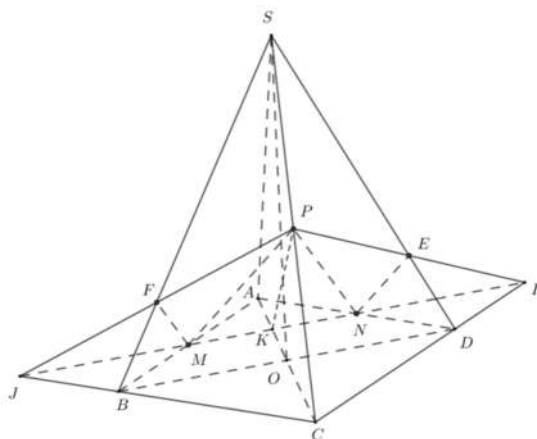
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Tác giả: Nguyễn Thị Anh; Fb: Anh Nguyễn

Câu 31. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $AB = a$, chiều cao là h . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD và SC . Tính diện tích thiết diện tạo thành khi cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (MNP) .

Tác giả: Hùng Cường ; Fb: nhc6362



Thiết diện tạo thành khi cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (MNP) là: $PFMNE$.

Dễ thấy $ANBJ$ và $AIDM$ là các hình bình hành nên M, N lần lượt là trung điểm của JN và MI
 $\Rightarrow JM = MN = NI$.

Dễ thấy $\frac{DI}{DC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{BC}{BJ} = 2$.

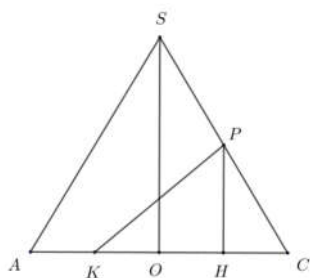
Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle PCI$ có: $\frac{EP}{EI} \cdot \frac{DI}{DC} \cdot \frac{SC}{SP} = 1 \Leftrightarrow \frac{EP}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow EP = EI$.

Suy ra E là trung điểm của PI , tương tự có F là trung điểm của PJ .

$$\text{Mà: } \frac{S_{INE}}{S_{IPJ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot IE \cdot IN \cdot \sin \hat{I}}{\frac{1}{2} \cdot IP \cdot IJ \cdot \sin \hat{I}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot IE \cdot IN \cdot \sin \hat{I}}{\frac{1}{2} \cdot 2IE \cdot 3IN \cdot \sin \hat{I}} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{INE} = \frac{1}{6} S_{IPJ}.$$

$$\text{Vì } \triangle IEN = \triangle JFM (c.g.c) \text{ nên } S_{PFMNE} = S_{PLJ} - 2S_{INE} = \frac{2}{3} S_{PLJ} \quad (*).$$

Gọi $K = MN \cap AC$; O là tâm hình vuông $ABCD$ và H là trung điểm của OC .



$$\text{Xét } \triangle PHK \text{ vuông tại } H \text{ có } KP = \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2}.$$

$$\text{Mà } IJ = 3MN = \frac{3}{2} BD = \frac{3}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}a}{2}.$$

Ta có: $\triangle PCJ = \triangle PCI (c.g.c) \Rightarrow PJ = PI$ và PK là đường trung tuyến nên PK là đường cao:

$$S_{PLJ} = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot IJ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}a}{2} = \frac{3\sqrt{2}a\sqrt{2a^2 + h^2}}{8} \text{ thay vào } (*) \text{ ta được:}$$

$$S_{PFMNE} = \frac{\sqrt{2}a\sqrt{2a^2 + h^2}}{4}.$$

Vậy diện tích thiết diện cần tìm là: $S_{PFMNE} = \frac{\sqrt{2}a\sqrt{2a^2 + h^2}}{4}.$

Câu 32. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 4. Điểm M là trung điểm của đoạn BC , điểm E nằm trên đoạn BM , E không trùng với B và M . Mặt phẳng (P) qua E và song song với mặt phẳng (AMD) . Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Độ dài đoạn BE bằng

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{4}{3}$.

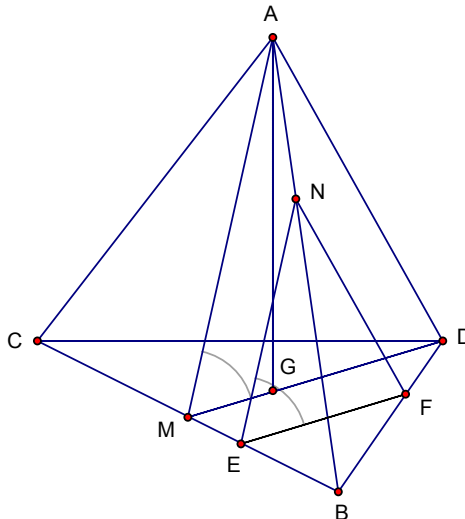
C. 1.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Tuấn Việt; Fb: Vũ Tuấn Việt

Chọn D



Đặt cạnh của tứ diện đều là a thì diện tích thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a^2\sqrt{2}}{36}$

Ta có $\begin{cases} (ABC) \cap (AMD) = AM \\ (P) \parallel (AMD) \\ E \in (P) \end{cases}$ nên suy ra $(P) \cap (ABC)$ theo giao tuyến song song với AM . Từ đó,

qua E ta kẻ $EN \parallel AM$ ($N \in AB$) thì $(P) \cap (ABC) = EN$.

Lập luận tương tự với mặt phẳng (BCD) thì $(P) \cap (BCD) = EF$ và $EF \parallel MD$.

Khi đó thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$ là tam giác EFN .

Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , khi đó $GD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$$AG = \sqrt{AD^2 - GD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Khi đó diện tích tam giác } S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} AG \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \quad (1).$$

$$\text{Đặt } BE = x, \text{ vì } EN \parallel AM \text{ nên theo Ta-let trong tam giác } ABM \text{ ta có } \frac{EN}{MA} = \frac{BE}{BM} \Rightarrow \frac{EN}{MA} = \frac{x}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{2x}{a}$$

(2).

$$\text{Tương tự, trong tam giác } BMD \text{ với } EF \parallel MD, \text{ ta suy ra } \frac{EF}{MD} = \frac{2x}{a} \quad (3).$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{EF} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{MD} \text{ và } \overrightarrow{EN} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{MA} \text{ nên } \widehat{AMD} = \widehat{NEF} \quad (4).$$

$$\text{Từ (2),(3),(4) ta có } \frac{S_{\triangle ENF}}{S_{\triangle AMD}} = \frac{\frac{1}{2} EN \cdot EF \cdot \sin \widehat{NEF}}{\frac{1}{2} MA \cdot MD \cdot \sin \widehat{AMD}} = \frac{4x^2}{a^2} \Rightarrow S_{\triangle ENF} = \frac{4x^2}{a^2} \cdot S_{\triangle AMD}.$$

$$\text{Khi đó, từ (1) và theo giả thiết, ta có } \frac{a^2\sqrt{2}}{36} = \frac{4x^2}{a^2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{36} \Rightarrow x = \frac{a}{6}.$$

$$\text{Thay } a = 4 \text{ vào, ta được } x = \frac{2}{3}.$$

Câu 33. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

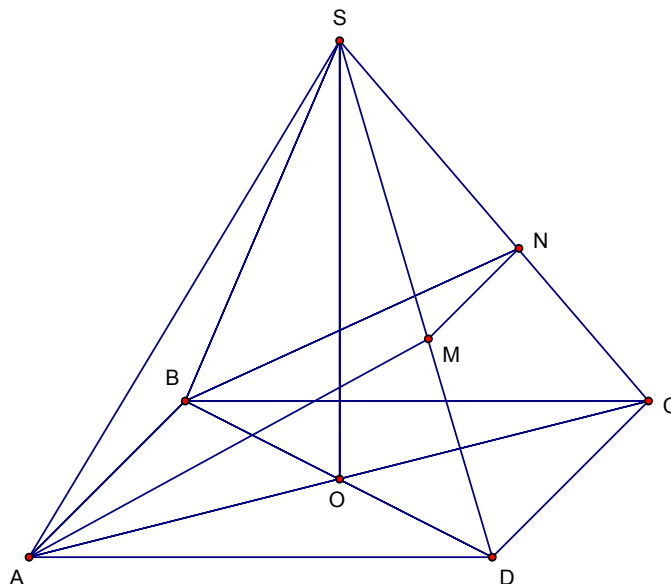
- A. Hình thang vuông.
C. Tam giác cân.

- B. Hình bình hành.
D. Hình thang cân.

Lời giải

Tác giả: Vũ Tuấn Việt; Fb: Vũ Tuấn Việt

Chọn D



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $AB \parallel (SCD)$, mà $AB \subset (\alpha)$ từ đó suy ra $d \parallel AB$.

Khi đó, mặt phẳng (α) không cắt hình chóp. Suy ra không tạo thành thiết diện.

TH3: Đường thẳng d trùng với đường thẳng DC , khi đó mặt phẳng (α) là mặt phẳng $(ABCD)$ không cắt hình chóp. Suy ra không tạo thành thiết diện.

Goi $M = d \cap SD, N = d \cap SC$ thì thiết diện là hình thang $AMNB$.

Vì đoạn MN song song và không trùng với CD nên ta suy ra $MN < CD$ hay hình thang $AMNB$ không là hình bình hành.

Ta chứng minh $AM = BN$.

Trong $\triangle SDC$ có $MN \parallel CD$ nên $MD = NC$. Mặt khác ta có $AD = BC$, $\widehat{ADM} = \widehat{BCN}$ (tính chất hình chóp đều).

Từ đó hai tam giác AMD và BNC bằng nhau (c-g-c), suy ra $AM = BN$.

Suy ra thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là hình thang cân.

Ta chứng minh thiết diện không là hình thang vuông.

Giả sử hình thang cân $AMNB$ là hình thang vuông thì ta suy được nó là hình chữ nhật, mâu thuẫn với $MN < CD$.

Kết luận: Thiết diện đã cho là hình thang cân.

Câu 34. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình

thoi cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh SC lấy điểm M sao cho $MC = 2MS$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

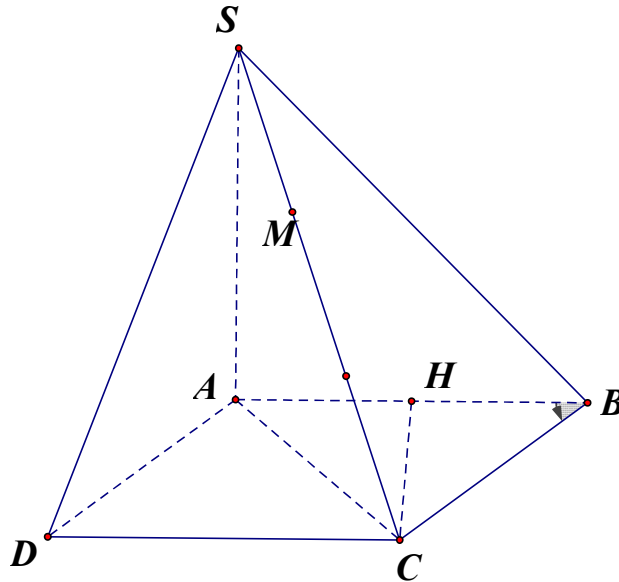
C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Công Sơn; Fb: Trần Công Sơn

Chọn C



Ta có: $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều.

Gọi H là trung điểm AB . Từ đó suy ra $CH \perp AB$ (1) và $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $CH \perp (SAB)$.

$$\text{Khi đó } d(M; (SAB)) = \frac{1}{3} d(C; (SAB)) = \frac{1}{3} CH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 35. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\sqrt{3}a^3$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

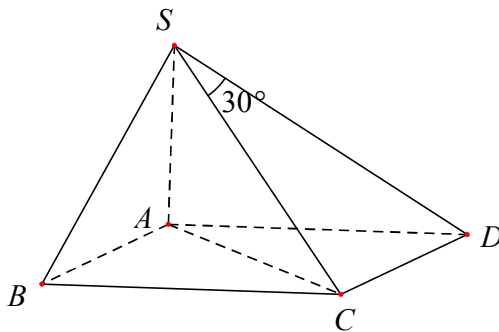
C. $\frac{2a^3}{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Nhung; Fb: Nguyễn Thị Hồng Nhung

Chọn D



Ta có

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

$$\text{Và } (\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SB}) = \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

$$\text{Tam giác } SBC \text{ vuông tại } B \text{ và } \widehat{CSB} = 30^\circ \text{ nên } SB = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = 3a.$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông tại } A \text{ nên } SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối chóp } S.ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot BC \cdot SA = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 36. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB , CD sao cho thiết diện đó là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

A. $\frac{24}{7}$.

B. $\frac{18}{7}$.

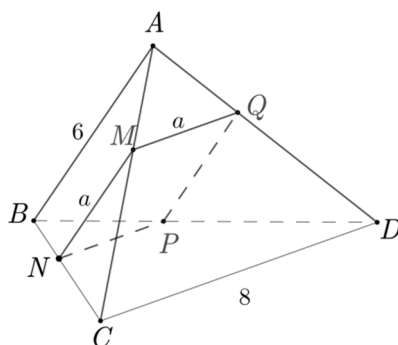
C. $\frac{31}{7}$.

D. $\frac{15}{7}$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Văn Trụ; Fb: Trụ Vũ

Chọn A



Vì thiết diện song song với AB nên nó cắt (ABC) theo giao tuyến $MN \parallel AB$ như hình vẽ.

Vì thiết diện song song với CD nên nó cắt (ACD) , (BCD) lần lượt theo các giao tuyến MQ , NP cùng song song với AB .

Do đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng song song với AB , CD là hình bình hành $MNPQ$.

Theo bài ra ta có thiết diện là hình thoi $MNPQ$.

Gọi a là cạnh của hình thoi $MNPQ$ ($0 < a < 6$).

Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA}$.

$$\frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{AC - MC}{AC} = 1 - \frac{CM}{CA} = 1 - \frac{MN}{AB} \Leftrightarrow \frac{a}{8} = 1 - \frac{a}{6} \Leftrightarrow a = \frac{24}{7}.$$

Câu 37. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = a\sqrt{6}$. Gọi E là trung điểm của $B'C'$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng $(ABB'A')$ thì:

A. $\sin\varphi = \frac{1}{6}$.

B. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

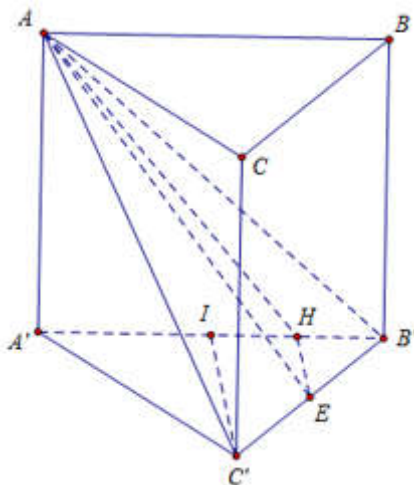
C. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Lê Ngọc Hùng; Fb: Hung Le

Chọn A



Gọi I là trung điểm $A'B' \Rightarrow C'I \perp (ABB'A')$. Trong $(A'B'C')$ từ E kẻ $EH \parallel C'I$ cắt $A'B'$ tại $H \Rightarrow EH \perp (ABB'A') \Rightarrow \varphi = \widehat{(AE; (ABB'A'))} = \widehat{EAH}$.

Mà $AE = \sqrt{AB'^2 - B'E^2} = \frac{a\sqrt{27}}{2}$, $EH = \frac{1}{2}C'I = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ nên $\sin\varphi = \frac{EH}{AE} = \frac{1}{6}$.

Câu 38. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P thứ tự là trung điểm của AC, CB, BD . Gọi d là giao tuyến của (MNP) và (ABD) . Kết luận nào sau đây đúng?

A. $d \parallel AC$.

B. $d \subset (ABC)$.

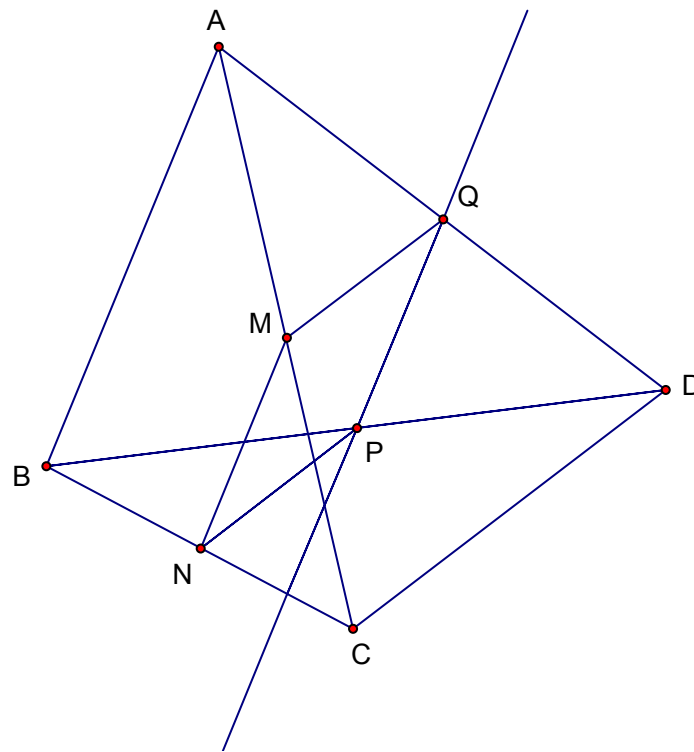
C. $d \parallel BC$.

D. $d \parallel (ABC)$.

Lời giải

Tác giả: TRUONG SON; Fb: Truongson

Chọn D



Do (ABD) và (MNP) có điểm P chung và lần lượt chứa hai đường thẳng AB , MN song song với nhau, nên giao tuyến d sẽ đi qua điểm P và song song AB . Mặt khác $AB \subset (ABC)$ nên $d \parallel (ABC)$.

Câu 39. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SAB là tam giác đều, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và SD . Khoảng cách giữa DM và CN là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{8}$.

D. $\frac{a\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Tác giả: Lê Tiếp ; Fb: Lê Tiếp

Chọn A

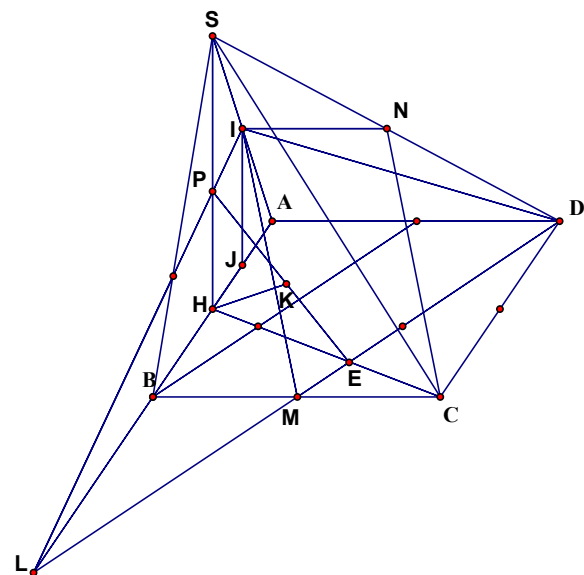
Cách 1

Gọi H là trung điểm của AB , ta có SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$

Gọi I là trung điểm của SA , ta có
 $CN \parallel IM \Rightarrow CN \parallel (IMD) \Rightarrow d(CN, DM)$
 $= d(CN, (IMD)) = d(C, (IMD))$

Gọi $L = DM \cap AB$, $P = IL \cap SH$, $E = CH \cap MD$, dựng
 $HK \perp PE$ tại K . Vì $ABCD$ là hình vuông, M , H lần
lượt là trung điểm của BC , AB nên $DM \perp HC$ tại E ,
mà $DM \perp PH$ nên
 $DM \perp (PHE) \Rightarrow HK \perp DM$
 $\Rightarrow HK \perp (IMD) \Rightarrow d(H, (IMD)) = HK$

$$\text{Ta có } HE = \frac{3}{5}HC = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{3a}{2\sqrt{5}}, \frac{HE}{CE} = \frac{3}{2}$$



Lại có $MB \parallel \frac{1}{2}AD \Rightarrow LB = BA = a$. Gọi J là trung điểm của HA , suy ra $PH \parallel IJ$,

$$\text{do đó } \frac{PH}{IJ} = \frac{LH}{HJ} = \frac{6}{7} \Rightarrow PH = \frac{6}{7}IJ = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2}SH = \frac{3}{7} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{14}$$

$$\text{Trong tam giác vuông PHE có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HP^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{256}{27a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{256}}$$

$$\text{mà } \frac{d(C, (IMD))}{d(H, (IMD))} = \frac{CE}{HE} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(C, (IMD)) = \frac{2}{3}d(H, (IMD)) = \frac{a\sqrt{3}}{8}$$

Cách 2 :

Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ ($H \equiv O$). Ta có:

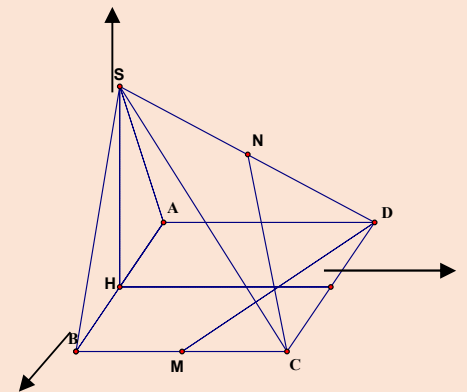
$$H(0;0;0), B(\frac{1}{2};0;0), C(\frac{a}{2};1;0), D(-\frac{a}{2};1;0), S(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2})$$

Vì M, N lần lượt là trung điểm của BC, SD nên

$$M(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0), N(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DC} = (a;0;0) \\ \overrightarrow{CN} = (\frac{-3a}{4};\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}) \\ \overrightarrow{DM} = (a;-\frac{a}{2};0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}] = (\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{7a}{8})$$

$$d(CN, DM) = \frac{|\overrightarrow{DC} \cdot [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}]|}{|[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}]|} = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$$



Câu 40. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC ; I là giao điểm của BM và AC . Tỉ số thể tích của hai khối chóp $ANIB$ và $S.ABCD$ là

A. $\frac{1}{16}$.

B. $\frac{1}{8}$.

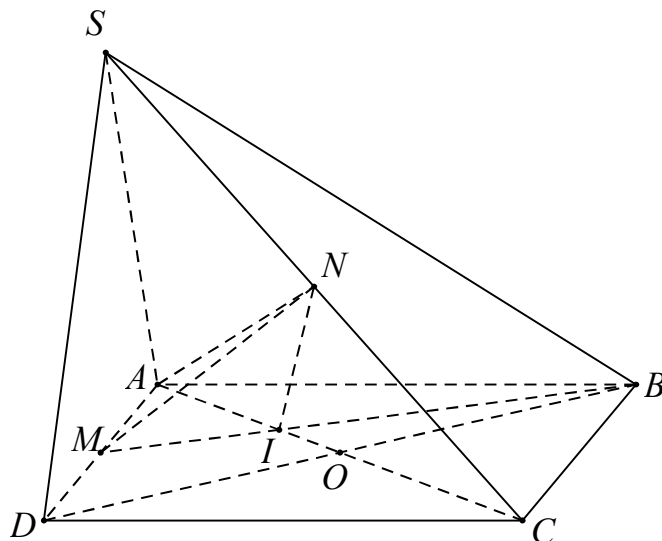
C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Tác giả: Đặng Phước Thiên ; Fb: Đặng Phước Thiên

Chọn C



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Ta có I là trọng tâm tam giác ABD .

$$\text{Suy ra } AI = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC \Rightarrow d(I, AB) = \frac{1}{3}d(C, AB).$$

$$\text{Khi đó } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}d(I, AB) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}d(C, AB) \cdot AB = \frac{1}{6}S_{ABCD}. \quad (1)$$

$$\text{Lại có } N \text{ là trung điểm } SC, \text{ do đó } d(N, (ABCD)) = \frac{1}{2}d(S, (ABCD)). \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$V_{ANIB} = V_{N.IAB} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta IAB} \cdot d(N, (ABCD)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2}d(S, (ABCD)) = \frac{1}{12}V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{ANIB}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}.$$

Câu 41. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}.$

B. $V = 3\pi a^2 h.$

C. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}.$

D. $V = \pi a^2 h.$

Lời giải

Tác giả: Lê Phương; Fb: lephuongtt1

Chọn A

Đáy của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là hình tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a .

Chiều cao của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là chiều cao h của lăng trụ $ABC.A'B'C'$

$$\text{Diện tích đáy bằng của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ bằng } \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{3}.$$

Do đó thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho là $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$.

Câu 42. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông, SA vuông góc đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB, SD . Gọi P là giao điểm của SC và (AMN) . Khi đó góc giữa hai đường thẳng AP và MN bằng

A. $\frac{2\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{6}$.

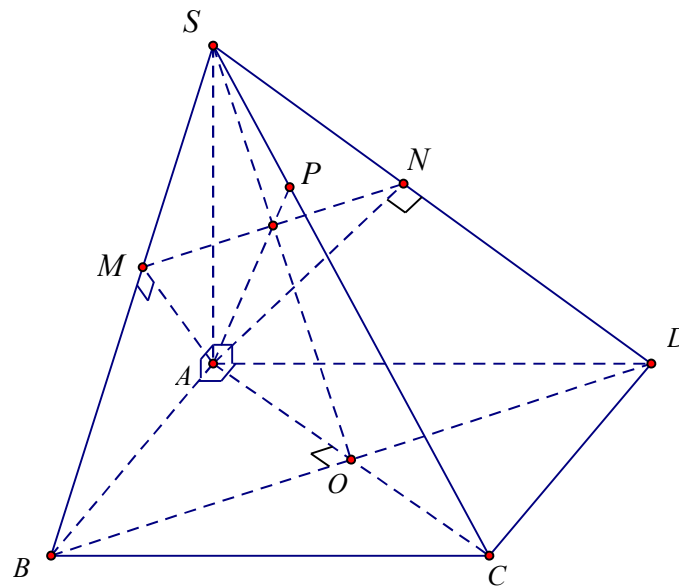
C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Trịnh Văn Điệp; Fb: Trịnh Văn Điệp

Chọn D



Từ giả thiết suy ra $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} \Rightarrow BD \parallel MN$ (1).

Mà $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (t/c hình vuông)} \\ BD \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \supset AP \Rightarrow BD \perp AP$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AP \perp MN \Rightarrow (\widehat{AP, MN}) = 90^\circ$.

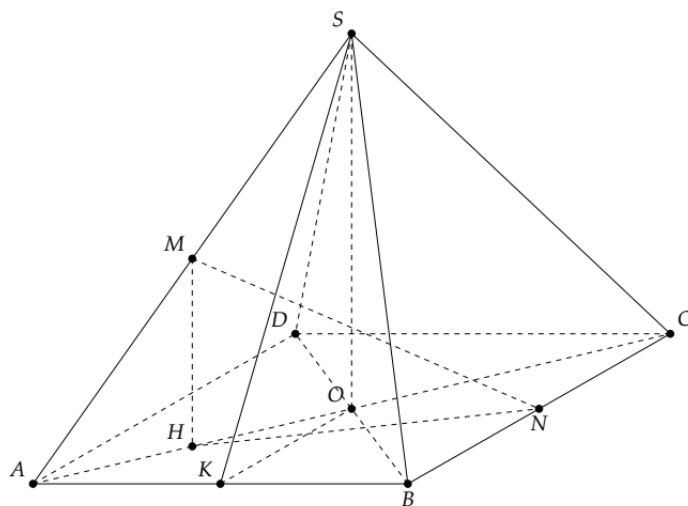
Câu 43. (HSG11 Hà Tĩnh 2018-2019) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a, AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, BC . Biết rằng $SA = SB = SC = SD$ và góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ là 60° .

a. Tính diện tích tam giác SBM theo a .

b. Tính sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

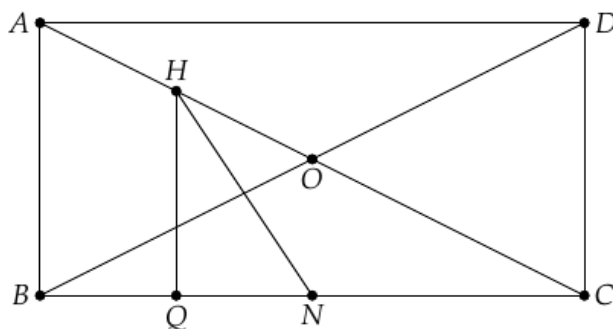
Tác giả: Đỗ Tiến Tuấn ; Fb: Đỗ Tiến Tuấn.



a. Vì $SA = SC$ nên $SO \perp AC$. Vì $SB = SD$ nên $SO \perp BD$. Do đó $SO \perp (ABCD)$.

Trong tam giác SAC , $MH \perp AC$ ($H \in AC$) $\Rightarrow MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

Theo giả thiết $\widehat{MNH} = 60^\circ$.



Kẻ $HQ \parallel AB$. Ta có $HQ = \frac{3}{4}a$; $QN = \frac{a}{2}$

$$NH^2 = HQ^2 + QN^2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{16}. \text{ Suy ra } NH = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Do đó $MH = NH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{39}}{4}$ suy ra $SO = 2MH = \frac{a\sqrt{39}}{2}$.

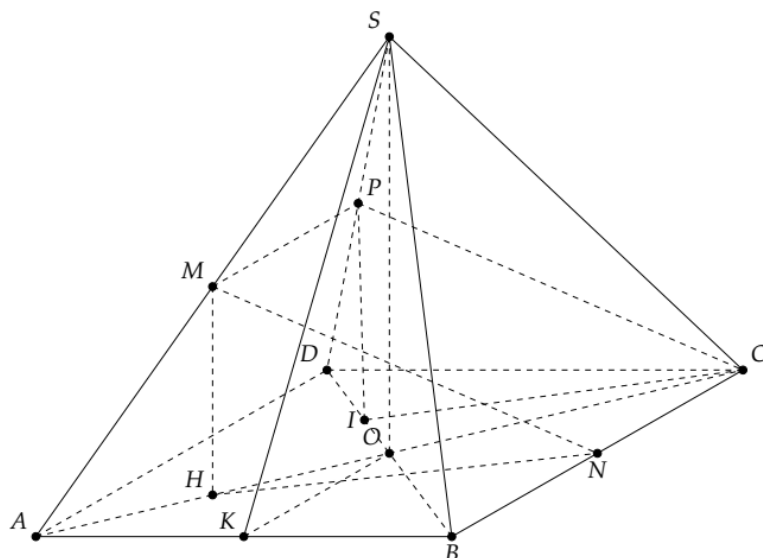
$$\text{Ta có } S_{\Delta SMB} = \frac{1}{2} S_{\Delta SAB} = \frac{1}{4} SK \cdot AB; SK = \sqrt{SO^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{39a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{43}}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta SMB} = \frac{1}{4} SK \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{43}}{8}$$

b. Gọi P là trung điểm của SD , ta có tứ giác $MPCN$ là hình bình hành suy ra $MN \parallel CP$.

Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) , ta thấy α bằng góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (SBD) .

Kẻ $CI \perp BD \Rightarrow CI \perp (SBD) \Rightarrow \alpha = \widehat{CPI}$.



Tam giác BCD vuông tại C có CI là đường cao, suy ra

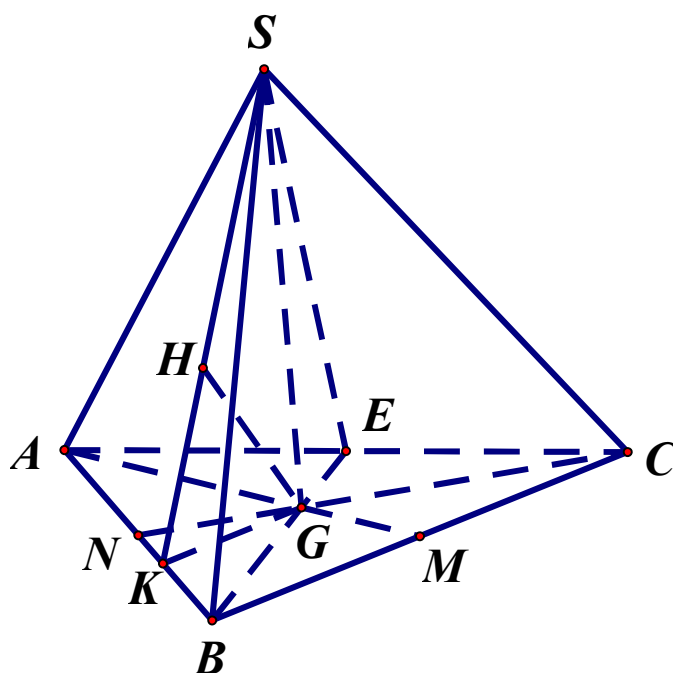
$$\frac{1}{CI^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow CI = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Ta có $CP = MN = 2NH = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$

$$\sin \alpha = \frac{CI}{CP} = \frac{4}{\sqrt{65}}.$$

Câu 44. (HSG12 Cao Bằng năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC , gọi E là trung điểm AC biết $SE = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB .

Theo giả thiết có: $SG \perp (ABC)$.

a) Xét tam giác ABC là tam giác vuông tại B có:

$$AC = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = 2a, \quad BC = \frac{AB}{\tan \widehat{ACB}} = a, \quad GE = \frac{BE}{3} = \frac{a}{3}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SGE \text{ vuông tại } G \text{ có: } SG = \sqrt{SE^2 - GE^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{26}}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SG \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{26}}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{78}}{18} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{d(C, (SAB))}{d(G, (SAB))} = \frac{CN}{GN} = 3 \Rightarrow d(C, (SAB)) = 3 \cdot d(G, (SAB)).$$

$$\text{Dựng } GK \parallel BM \text{ với } K \in AB. \text{ Ta có: } \begin{cases} AB \perp SG \\ AB \perp GK \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SGK).$$

$$\text{Trong } (SGK) \text{ dựng } GH \perp SK \text{ với } H \in SK. \text{ Ta có: } \begin{cases} GH \perp AB \\ GH \perp SK \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SAB).$$

$$\text{Suy ra } d(G, (SAB)) = GH. \text{ Do đó } d(C, (SAB)) = 3 \cdot GH.$$

$$\text{Ta có: } GK \parallel BM \Rightarrow \frac{GK}{BM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK = \frac{2}{3} \cdot BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{a}{3}.$$

Tam giác SGK vuông tại G và có đường cao GH nên:

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GK^2} = \frac{9}{26a^2} + \frac{9}{a^2} = \frac{243}{26a^2} \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{78}}{27}.$$

$$\text{Vậy: } d(C, (SAB)) = 3 \cdot GH = \frac{a\sqrt{78}}{9}.$$

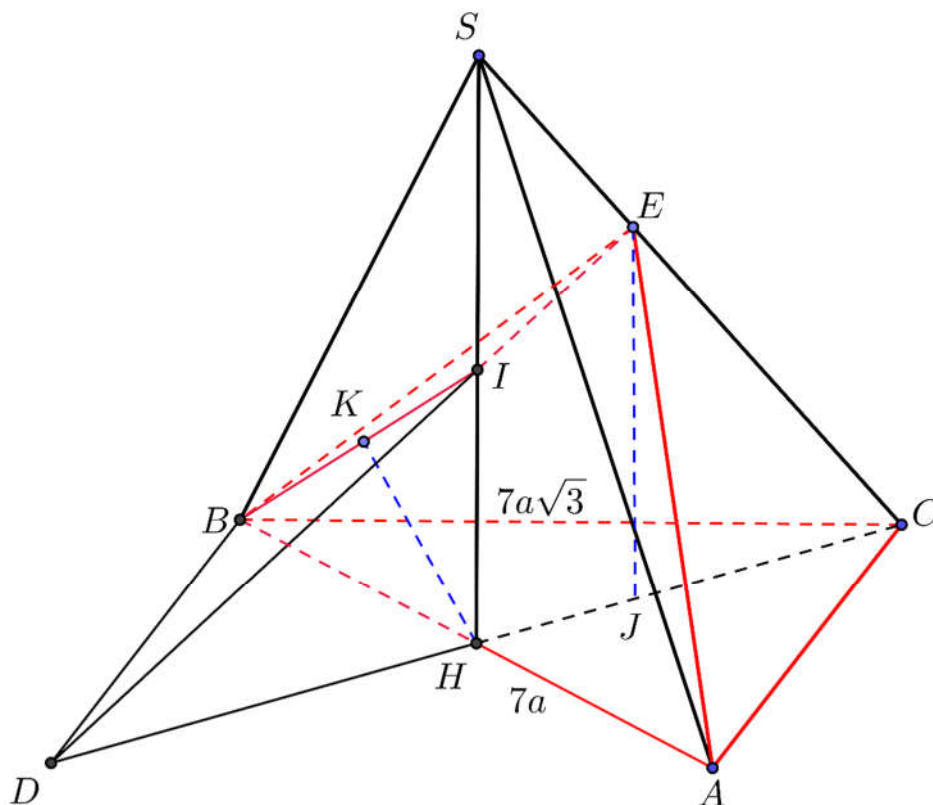
Câu 45. (HSG12 Quảng Ngãi 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $AB = 7a, BC = 7a\sqrt{3}$. E là điểm trên cạnh SC sao cho $CE = 2ES$.

a) Tính thể tích khối chóp $E.ABC$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BE .

Lời giải

Tác giả: Bùi Thu Hương ; Fb: Cucai Duong



a) Tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{(7a\sqrt{3})^2 - (7a)^2} = 7a\sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm của AB

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SH \perp (ABC), \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Tam giác SAB đều nên $SH = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$

Cách 1: Ta có $\frac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{E.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{2}{3}$

$$V_{E.ABC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7a \cdot 7a\sqrt{2} = \frac{343a^3\sqrt{6}}{18}.$$

Cách 2: Dựng $EJ \parallel SH$ cắt HC tại J . Khi đó $\Rightarrow EJ \perp (ABC)$,

$$\frac{EJ}{SH} = \frac{2}{3} \Rightarrow EJ = \frac{2}{3} \cdot \frac{7a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a\sqrt{3}}{3} \quad V_{E.ABC} = \frac{1}{3} \cdot EJ \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7a \cdot 7a\sqrt{2} = \frac{343a^3\sqrt{6}}{18}.$$

b) Dựng D sao cho $BCAD$ là hình bình hành. Khi đó $AC \parallel (BED)$.

$$d(AC, BE) = d(AC, (BED)) = d(A, (BED)) = 2d(H, (BED))$$

Vì $BD \perp (SAB) \Rightarrow (BDE) \perp (SAB)$. Gọi $I = SH \cap DE \Rightarrow (SAB) \cap (BDE) = BI$.

Từ H kẻ $HK \perp BI$ tại K . Khi đó $HK \perp (BDE) \Rightarrow d(AC, BE) = 2HK$

$$\text{Ta có } HI = \frac{1}{2}SH = \frac{7a\sqrt{3}}{4}$$

Trong tam giác vuông BIH :

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HB^2} = \left(\frac{4}{7a\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{7a}\right)^2 = \frac{4}{21a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

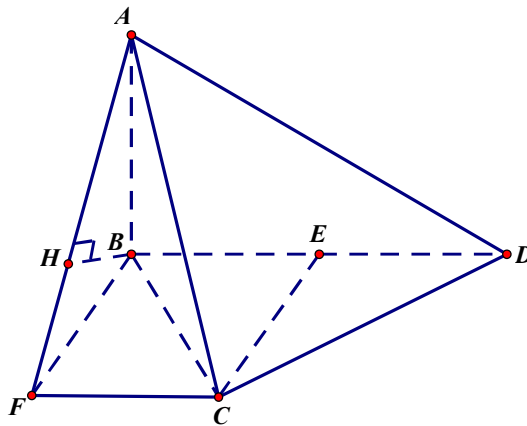
$$\Rightarrow d(AC, BE) = 2HK = a\sqrt{21}.$$

Câu 46. (HSG12 Tỉnh Đồng Nai 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Tam giác BCD là tam giác đều, $AB = a$, $BC = 2a$.

- 1) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) .
- 2) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường AC và BD .

Lời giải

Tác giả: Yến Lâm; Fb: Yen Lam



- 1) Ta có $AB \perp (BCD)$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (BCD)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là 90° .

- 2) Gọi E là trung điểm BD , dựng hình chữ nhật $BFCE$. Gọi H là hình chiếu của B trên AF .

Ta có $BD \parallel FC \Rightarrow BD \parallel (AFC)$.

Suy ra $d(BD, AC) = d(BD, (AFC)) = d(B, (AFC))$.

Mặt khác ta có: $BH \perp AF$ (1).

$$\begin{cases} CF \perp BF \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow CF \perp (ABF) \Rightarrow CF \perp BH \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (ACF)$.

Vậy $BH = d(B, (ACF)) = d(BD, AC)$.

Xét tam giác vuông ABF ta có:

$$BH \cdot AF = AB \cdot BF \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BF}{AF} = \frac{AB \cdot BF}{\sqrt{AB^2 + BF^2}} = \frac{AB \cdot CE}{\sqrt{AB^2 + CE^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(BD, AC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 47. (HSG12 tỉnh Hải Phòng năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

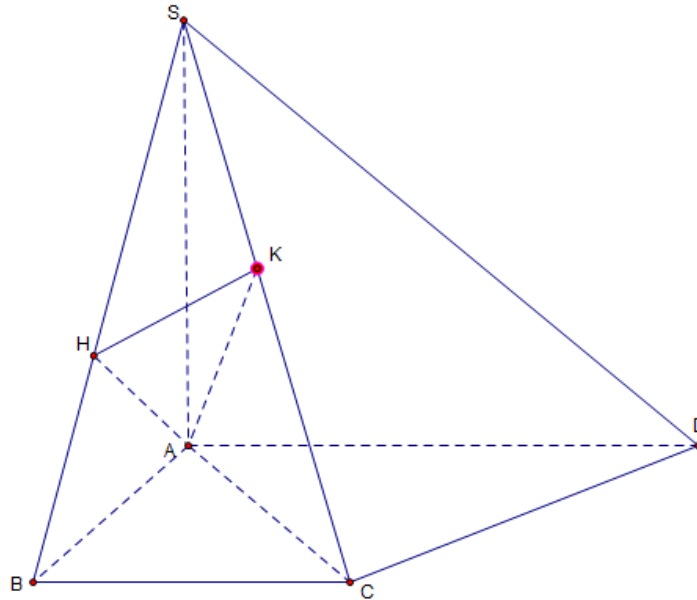
a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

b) Cho M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $SM = x$, $(0 < x < 2a)$. Mặt phẳng (BCM) chia hình chóp thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 (trong đó V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh S). Tìm x để $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nhóm 4 - Tổ 8 nhóm toán team toán vd - vdc

a) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .



Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC .

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Ngoài ra $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

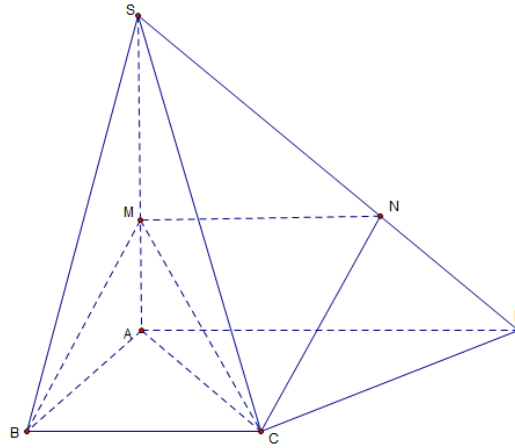
Tương tự $AK \perp (SCD)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AH và AK , hay $\cos \varphi = \cos \widehat{HAK} = \left| \frac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2 \cdot AH \cdot AK} \right|$.

$$\text{Ta có } AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \quad AK = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Mặt khác } \triangle SHK \sim \triangle SCB \text{ nên } HK = \frac{BC \cdot SH}{SC} = \frac{4a}{\sqrt{30}}.$$

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

b) Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (BCM) là hình thang $BCNM$.



Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Ta có $V_{S.BCNM} = V_{S.BCM} + V_{S.CNM}$; $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}V$, $V_{S.ACD} = \frac{2}{3}V$.

Đặt $k = \frac{SM}{SA}$ suy ra: $\frac{V_{S.BCM}}{V_{S.BCA}} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow V_{S.BCM} = \frac{1}{3}k.V$; $\frac{V_{S.CMN}}{V_{S.CAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = k^2 \Rightarrow V_{S.CMN} = \frac{2}{3}k^2.V$.

Từ đó suy ra $V_1 = \left(\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}k^2\right).V$. Mà $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}V$.

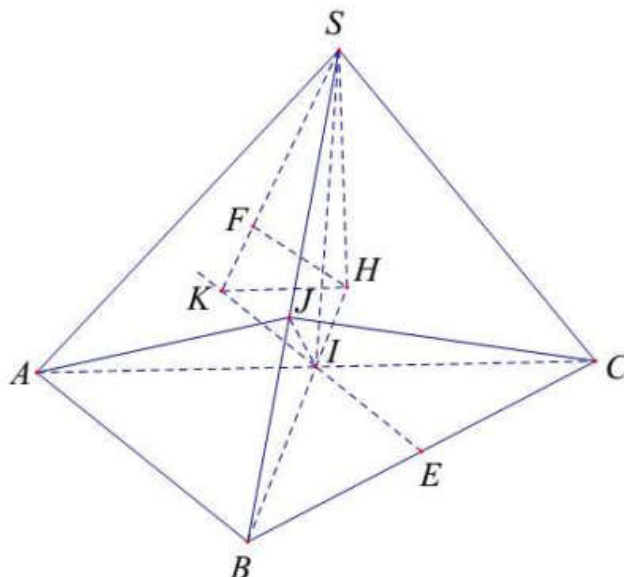
Suy ra $\frac{1}{3}V = \left(\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}k^2\right).V \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = a$.

Câu 48. (HSG12 tỉnh Thái Nguyên năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC . Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng ABC là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{IH}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) ; (SBC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ đã cho và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB , SI theo a .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thùy Linh; Fb: Nguyễn Thùy Linh

Cách 1:



Kẻ $IJ \perp SB \Rightarrow \begin{cases} AJ \perp SB \\ CJ \perp SB \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng góc giữa hai đường thẳng AJ và CJ .

TH1: $\widehat{AJC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AJI} = 30^0$.

TH2: $\widehat{AJC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{AJI} = 60^0$.

$$\Delta BIJ \sim \Delta BSH \Rightarrow SH = \frac{IJ \cdot BH}{BJ}. \text{ Mặt khác } IB = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

b) Gọi E là trung điểm của $BC \Rightarrow IE \parallel AB$. Do vậy ta có $d(AB, SI) = d(AB, (SIE)) = d(B, (SIE))$.

$$\text{Ké } HK \perp IE, K \in IE.$$

Mặt khác ta lại có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp IE \Rightarrow IE \perp (SHK) \Rightarrow (SIE) \perp (SHK)$.

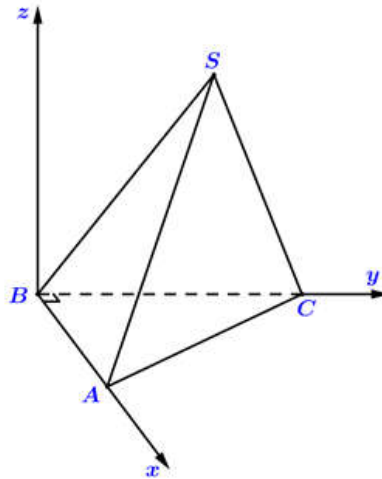
$$\text{K\acute{e}} \quad HF \perp SK \Rightarrow HF \perp (SIE) \Rightarrow d(H, (SIE)) = HF \Rightarrow d(AB, SI) = 3HF.$$

Xét tam giác vuông SHK ta có : $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HF = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}}$.

Mặt khác $\frac{HK}{BE} = \frac{IH}{IB} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{1}{3} BE = \frac{a}{6} \Rightarrow HF = \frac{2a\sqrt{17}}{51}$.

Vậy $d(AB, SI) = 3HF = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ với $A \in Bx, C \in By, Bz \parallel SH$. Không mất tính tổng quát ta chọn $a = 1$.

Ta có : $B(0;0;0), A(1;0;0), C(0;1;0) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Do $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{IH} \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$. Gọi $S\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; h\right)$ với $h > 0$.

$\overrightarrow{BA} = (1; 0; 0), \overrightarrow{BS} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; h\right), \overrightarrow{BC} = (0; 1; 0)$.

$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; -h; \frac{2}{3}\right), \vec{n}_2 = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = \left(h; 0; -\frac{2}{3}\right)$.

Do góc giữa (SAB) và (SBC) bằng 60° nên $\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Rightarrow h = \frac{2}{3} \Rightarrow S\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$. Do chọn $a = 1$ nên $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{9}$ (đvtt).

Ta có : $\overrightarrow{BA} = (1; 0; 0), \overrightarrow{SI} = \left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; 0\right), [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SI}] = \left(0; 0; -\frac{1}{6}\right), \overrightarrow{BI} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

$d(AB, SI) = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot [\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{BI}]|}{\|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SI}]\|} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$. Do chọn $a = 1$ nên $d(AB, SI) = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

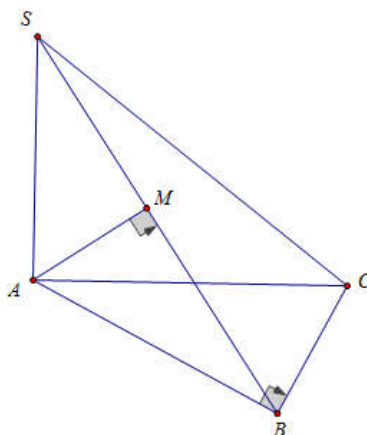
Câu 49. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, BC, AB đôi một vuông góc với nhau. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. $SA \perp (ABC)$. B. $AM \perp (SBC)$. C. $AB \perp (SBC)$. D. $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Tác giả: Lê Ngọc Hùng Fb: Hung Le

Chọn C



Cách 1:

Do các cạnh SA, BC, AB đôi một vuông góc với nhau nên $SA \perp (ABC)$, $BC \perp (SAB)$.

Mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$ và $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

Nên các đáp án A, B, D đúng.

Cách 2:

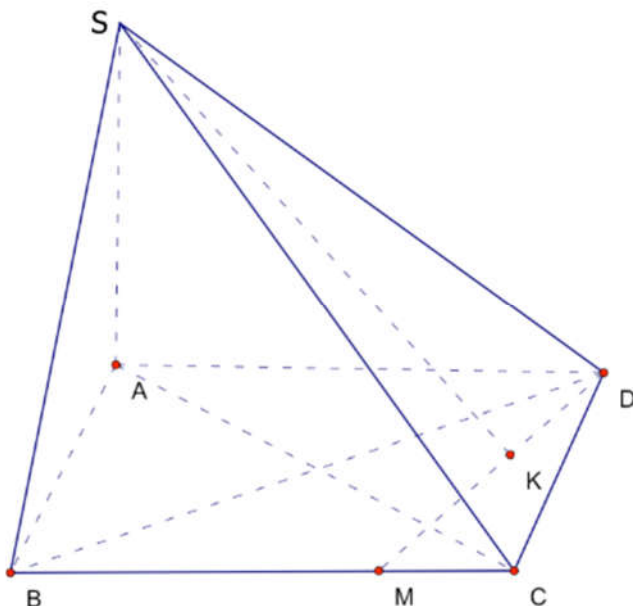
Từ đáp án C, nếu $AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp SB$. Theo giả thiết M là hình chiếu vuông góc của A trên SB nên $M \equiv B$ vô lý vì khi đó $\triangle SAB$ có hai góc vuông. Suy ra đáp án C sai.

Câu 50. (HSG11 Nho Quan Ninh Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

- a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.
b) M là điểm di động trên đoạn BC và $BM = x$, K là hình chiếu của S trên DM . Tính độ dài đoạn SK theo a và x . Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn SK .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Xuân Tiến Fb: Tien nguyen Ckte



Theo giả thiết $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$

Do vậy $\triangle SAB$ và $\triangle SAD$ vuông tại A .

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \\ SA \cap AB = \{A\} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B .

Tương tự, $\triangle SDC$ vuông tại D . (đpcm)

b) Theo giả thiết $BM = x \Rightarrow CM = a - x$.

$\triangle AKD \sim \triangle DCM$ ($\widehat{AKD} = \widehat{DCM} = 90^\circ$, $\widehat{DAK} = \widehat{CDM}$: góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$$\Rightarrow \frac{AK}{CD} = \frac{AD}{DM} \Rightarrow AK = DC \cdot \frac{AD}{DM} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2}}.$$

$$\triangle SAK \text{ vuông tại } A, SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^4}{x^2 - 2ax + 2a^2}} = a \sqrt{1 + \frac{a^2}{(x-a)^2 + a^2}}.$$

Do $0 \leq x \leq a \Rightarrow (x-a)^2 \leq a^2$, dấu = xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

SK đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ giá trị biểu thức $\frac{a^2}{(x-a)^2 + a^2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (x-a)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

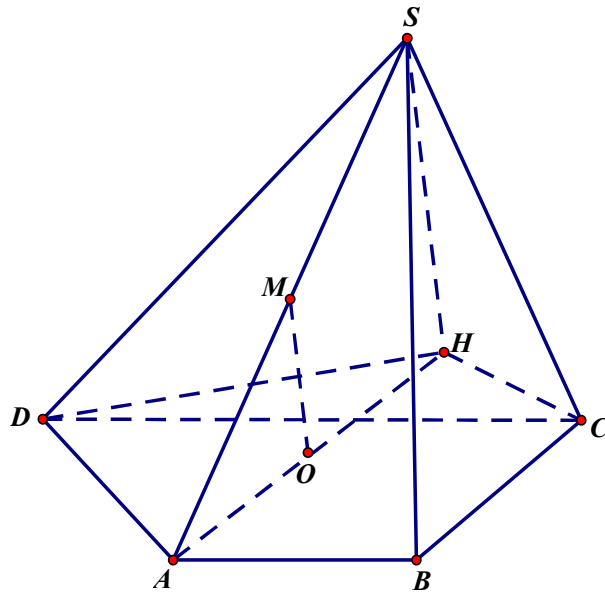
Do vậy $SK_{\min} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, đạt khi $M \equiv B$.

Câu 51. (HSG11 Nghệ An 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AB \parallel CD$) nội tiếp đường tròn tâm O và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh SA .

a) Chứng minh rằng: $MO \perp (ABCD)$.

b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và SC . Chứng minh rằng $\cos \varphi < \frac{BC}{SA}$.

Lời giải



a), Gọi O' là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$. Do các tam giác SBA và SCA lần lượt vuông tại B và C nên ta có $MA = MB = MC \Rightarrow O'A = O'B = O'C \Rightarrow O' \equiv O$ hay $MO \perp (ABCD)$.

b) **Cách 1:** Ký hiệu (a, b) là góc giữa hai đường thẳng a, b .

Gọi $\varphi = (SC, AB) = (SC, CD) = \widehat{SCD} > \widehat{SAD}$.

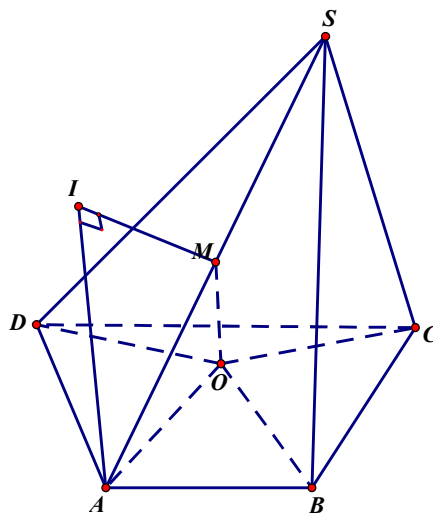
Mặt cầu đường kính SA ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ nên cũng ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ do đó $\widehat{SDA} = 90^\circ$.

Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAD, \triangle SCD$. Ta có:

$$SD = 2r \sin \widehat{SCD} = 2R \sin \widehat{SAD}. \text{ Do } r < R \text{ nên } \sin \widehat{SCD} > \sin \widehat{SAD} \Rightarrow \varphi = \widehat{SCD} > \widehat{SAD}$$

$$\cos \varphi < \cos \widehat{SAD} = \frac{AD}{SA} = \frac{BC}{SA}.$$

Cách 2: (Đáp án chính)



Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và SC là góc giữa CD và SC

suy ra $\cos \varphi = |\cos SCD| = \sqrt{1 - \sin^2 SCD}$ (*)

Gọi I hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (SCD) ta có $MD = MC = \frac{1}{2}SA$ nên tam giác SAD vuông tại D .

Mặt khác $MS = MD = MC$ suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD . Khi đó $\sin SCD = \frac{SD}{2.ID} > \frac{SD}{2.MD} = \frac{SD}{SA}$ (Vì tam giác MID vuông tại I)

Từ (*) suy ra: $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 SCD} < \sqrt{1 - \frac{SD^2}{SA^2}} = \sqrt{\frac{SA^2 - SD^2}{SA^2}} = \sqrt{\frac{AD^2}{SA^2}} = \frac{BC}{SA}$

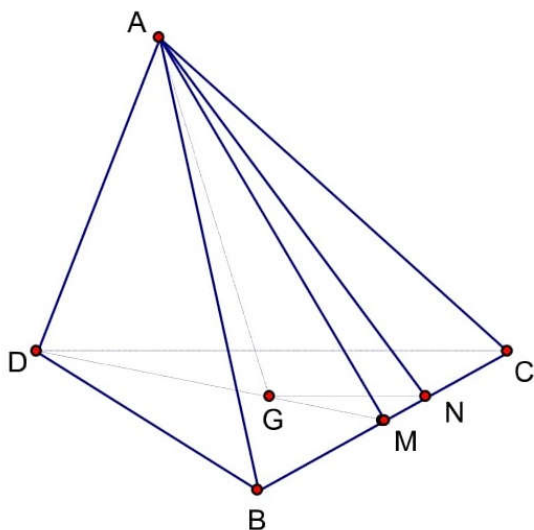
Vậy ta có đpcm.

Câu 52. (HSG11 Thị Xã Quảng Trị năm 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh bằng a và tam giác BCD cân tại D với $DC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

1. Chứng minh rằng: $AD \perp BC$.
2. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , tính cosin góc giữa hai đường thẳng AG và CD , biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng 30° .

Lời giải

Tác giả: *Bùi Thu Hương ; Fb: Cucai Duong*



1) Gọi M là trung điểm BC , ta có: $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$, $\triangle DBC$ cân nên $DM \perp BC$
 $\Rightarrow BC \perp (AMD) \Rightarrow BC \perp AD$

2) Ta có $\begin{cases} (ABC) \cup (DBC) = BC \\ AM \subset (ABC), AM \perp BC \\ DM \subset (DBC), DM \perp BC \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD)

là góc giữa hai đường thẳng MA, MD .

Từ đó, góc giữa hai đường thẳng MA, MD bằng 30° . Kẻ $GN \parallel CD$, nối AN

+ TH1: $\widehat{DAM}$ bằng 30° , ta có: $MD = a \Rightarrow MG = \frac{a}{3}$, $\triangle ABC$ đều nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lí cosin cho $\triangle AMG$:

$$AG^2 = AM^2 + MG^2 - 2 \cdot AM \cdot MG \cdot \cos 30^\circ$$

$$AG^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13a^2}{36}$$

ta có $AG = \frac{a\sqrt{13}}{6}$, $GN = \frac{CD}{3} = \frac{a\sqrt{5}}{6}$. $\triangle ANC$ có $AN = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Trong $\triangle ANG$

có $\cos \widehat{AGN} = \frac{-5}{\sqrt{65}}$. Gọi $(\widehat{AG; CD}) = \alpha$ thì $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{65}}$

+ TH2: $\widehat{AMD}$ bằng 150° . Tính tương tự ta có: thì $\cos \alpha = \frac{13}{7\sqrt{5}}$.

Câu 53. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Trong không gian cho 4 điểm A, B, C, D thỏa mãn $AB = 3, BC = 7, CD = 11, DA = 9$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

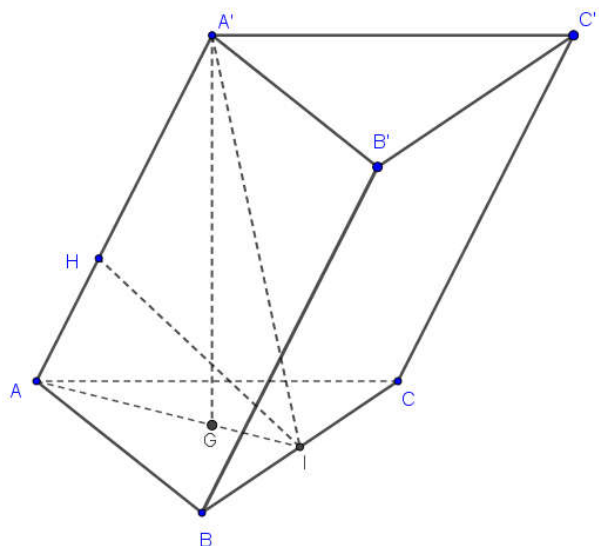
Ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}) \\ &= AD^2 - AB^2 + BC^2 - DC^2. \end{aligned}$$

Thay số vào ta được $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Câu 54. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a .

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên AA' .

Ta có $BC \perp A'G$; $BC \perp AI$ nên suy ra $BC \perp (AA'I) \Rightarrow BC \perp IH$.

Suy ra $d(AA', BC) = IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

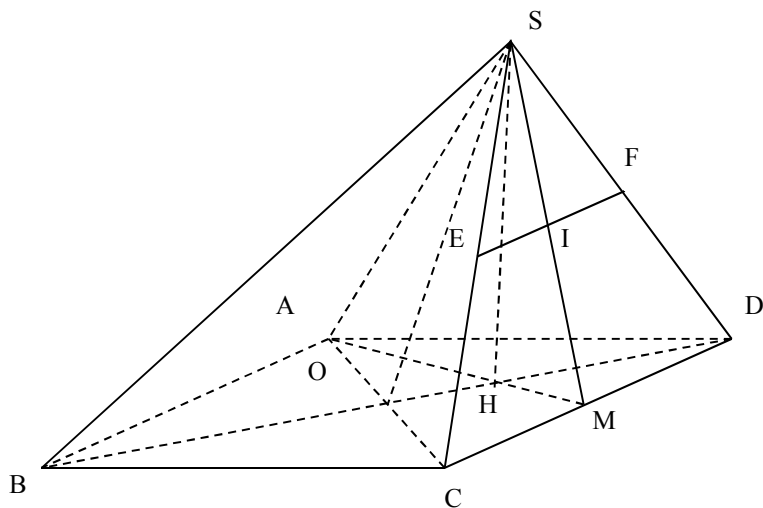
Đặt $A'G = h$. Ta có: $A'G \cdot AI = IH \cdot AA' \Leftrightarrow h \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} \Rightarrow h = \frac{a}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = h \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 55. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SC, SD . Biết $SA = SC = SD$ và mặt phẳng $(ABEF)$ vuông góc với mặt bên (SCD) , tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Lời giải

Tác giả: Trần Tố Nga; Fb: Trần Tố Nga



Gọi M là trung điểm của CD , I là giao điểm của EF và SM , H là giao điểm của AM và DO .

Có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ACD$ đều cạnh $2a$.

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; HM = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \\ H \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp } \triangle ACD. \end{cases}$$

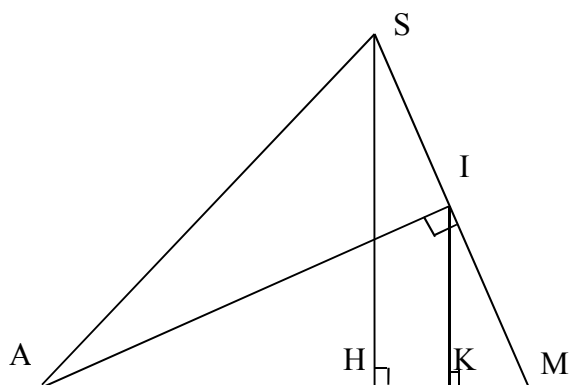
Có $SA = SC = SD$ nên hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với H hay $SH \perp (ABCD)$.

Có $(ABEF) \perp (SCD)$ theo giao tuyến EF

Mà $SM \perp EF$ (Do $SM \perp CD; EF \parallel CD$)

$$\Rightarrow SM \perp (ABEF) \Rightarrow SM \perp AI$$

$$\Rightarrow \triangle AIM \text{ vuông tại } I.$$



+) Gọi K là trung điểm của $HM \Rightarrow IK$ là đường trung bình của $\triangle SHM$.

$$\Rightarrow \begin{cases} IK \perp AM \text{ (do } SH \perp AM) \\ SH = 2IK. \end{cases}$$

Xét $\triangle AIM$ vuông tại I có $IK \perp AM$ nên

$$IK^2 = AK \cdot KM = \left(AH + \frac{1}{2} HM \right) \cdot \frac{1}{2} HM = \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{15}{36} a^2$$

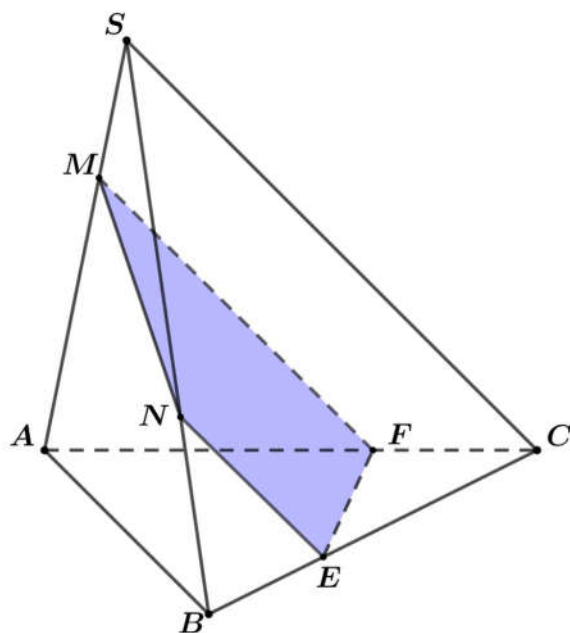
$$\Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{15}}{6} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{3} (2a)^2 \sin 60^\circ = \frac{2a^3\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 56. (HSG12 tỉnh Quảng Bình năm 2018-2019) Cho khối tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{NB} = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm M, N và song song với đường thẳng SC .

a. Trong trường hợp $SABC$ là tứ diện đều cạnh a , xác định và tính theo a diện tích thiết diện của khối tứ diện $S.ABC$ với mặt phẳng (P) .

Lời giải



*) Xác định thiết diện

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC // (P) \\ SC \subset (SAC) \\ M \in (P) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = MF \quad (MF // SC; F \in AC).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC // (P) \\ SC \subset (SBC) \\ N \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = NE \quad (NE // SC; E \in BC).$$

$\Rightarrow$ Thiết diện là tứ giác $MNEF$.

Mặt khác ta có:

$$+) NE // MF (// SC).$$

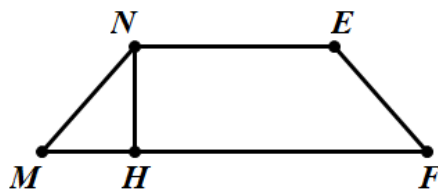
$$+) \Delta SMN = \Delta CFE \Rightarrow MN = FE.$$

$$+) NE // SC \Leftrightarrow \frac{NE}{SC} = \frac{BN}{BS} = \frac{1}{3} \Rightarrow NE = \frac{a}{3}.$$

$$+) MF // SC \Leftrightarrow \frac{MF}{SC} = \frac{AM}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow MF = \frac{2a}{3}.$$

Vậy thiết diện $MNEF$ là hình thang cân.

*) Tính diện tích thiết diện



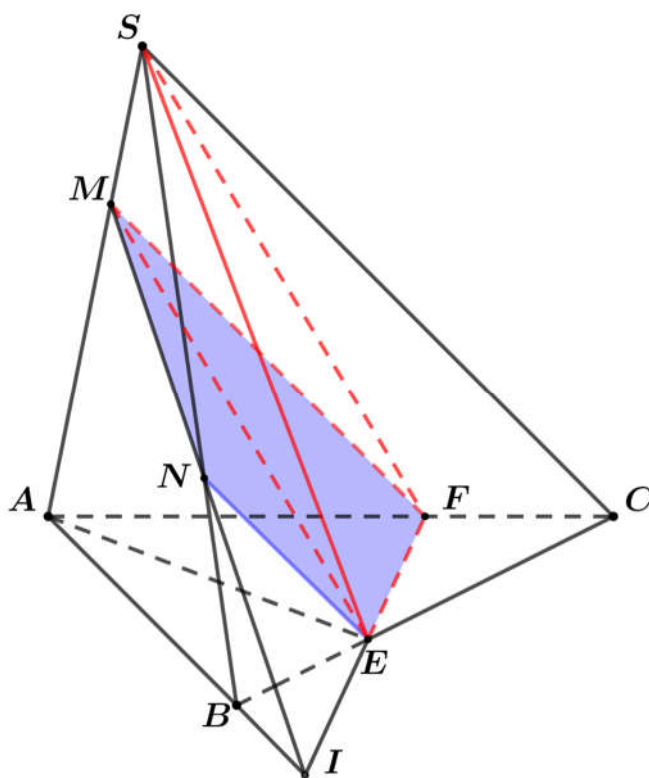
Xét $\triangle SMN$ có $MN = \sqrt{SM^2 + SN^2 - 2 \cdot SM \cdot SN \cdot \cos \widehat{MSN}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Kẻ $NH \perp MF$, $MNEF$ là hình thang cân $\Rightarrow MH = \frac{MF - NE}{2} = \frac{a}{6} \Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{11}}{6}$.

Vậy diện tích thiết diện là: $S_{MNEF} = \frac{1}{2}(NE + MF) \cdot NH = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3} \right) \frac{a\sqrt{11}}{6} = \frac{a^2\sqrt{11}}{12}$.

b. Trong trường hợp bất kì, mặt phẳng (P) chia tứ diện $SABC$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó. **Lời giải**

Tác giả: Trương Hồng Hà & Vũ Việt Tiến; Fb: Trương Hồng Hà & Vũ Việt Tiến



Cách 1: Vì $mp(P)$ đi qua M, N và song song với SC nên: $(P) \cap (SAC) = MF, (F \in AC, MF \parallel SC)$; $(P) \cap (SBC) = NE, (E \in BC, NE \parallel SC)$.

Khi đó $\frac{CF}{CA} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}; \frac{CE}{CB} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$.

Mặt phẳng (P) chia khối tứ diện $SABC$ thành hai khối: $MNEFSC$ và $MNEFAB$.

+ Gọi $V_{SABC} = V, V_{MNEFSC} = V_1, V_{MNEFAB} = V_2$.

+ Ta có $V_1 = V_{MNEFSC} = V_{CSEF} + V_{SFME} + V_{SMNE}$.

$$+ \frac{V_{CSEF}}{V_{CSBA}} = \frac{CE}{CB} \cdot \frac{CF}{CA} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{CSEF} = \frac{2}{9}V.$$

$$+ \frac{V_{SFME}}{V_{SFAE}} = \frac{SN}{SA} = \frac{1}{3} \quad (1).$$

$$+ \text{Mà } \frac{V_{SFAE}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3}d(S, (AEF)) \cdot S_{AEF}}{\frac{1}{3}d(S, (ABC)) \cdot S_{ABC}} = \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}d(E, AF) \cdot FA}{\frac{1}{2}d(B, AC) \cdot AC} = \frac{\frac{2}{3}d(B, AC) \cdot \frac{2}{3}AC}{d(B, AC) \cdot AC} = \frac{4}{9}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{SFAE}}{V_{SABC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{SFAE} = \frac{4}{9}V \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } V_{SFME} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}V = \frac{4}{27}V.$$

$$+ \frac{V_{SMNE}}{V_{SABE}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \quad (3).$$

$$+ \text{Mà } \frac{V_{SABE}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3}d(S, (ABE)) \cdot S_{ABE}}{\frac{1}{3}d(S, (ABC)) \cdot S_{ABC}} = \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}d(A, BE) \cdot BE}{\frac{1}{2}d(A, BC) \cdot BC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{SABE}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{SABE} = \frac{1}{3}V \quad (4).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } V_{SABE} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{2}{27}V.$$

$$+ \text{Do đó } V_1 = V_{CSEF} + V_{SFME} + V_{SMNE} = \frac{2}{9}V + \frac{4}{27}V + \frac{2}{27}V = \frac{4}{9}V \Rightarrow V_2 = \frac{5}{9}V.$$

$$+ \text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5} \text{ hoặc } \frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{4}.$$

Cách 2: Vì $MF \parallel NE \parallel SC$ nên tứ giác $MNEF$ là hình thang.

Gọi $I = FE \cap MN \Rightarrow I \in AB$.

Theo định lý Mennelaus, ta có

$$+ \frac{SM}{AM} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{BN}{SN} = 1 \Rightarrow \frac{AI}{BI} = 4 \Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{1}{4}.$$

$$+ \frac{AB}{IB} \cdot \frac{IE}{FE} \cdot \frac{FC}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{IE}{FE} = 1 \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } FI.$$

$$+ \frac{V_{IBNE}}{V_{IAMF}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IE}{IF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow V_2 = V_{MNEFAB} = V_{IAMF} - V_{IBNE} = \frac{15}{16}V_{IAMF}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{IAMF}}{V_{BAMF}} = \frac{IA}{BA} = \frac{4}{3} \Rightarrow V_{IAMF} = \frac{4}{3}V_{BAMF}.$$

$$+ S_{ABF} = \frac{2}{3} S_{ABC}; \frac{AM}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{BAMF} = \frac{4}{9} V_{SABC}.$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{9} V_{SABC} = \frac{5}{9} V \Rightarrow V_1 = \frac{4}{9} V.$$

$$+ \text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5} \text{ hoặc } \frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{4}.$$

Câu 57. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}.$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}.$

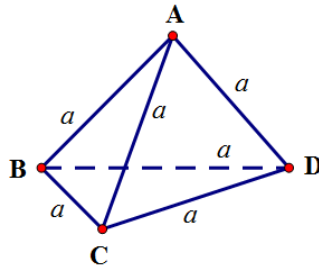
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}.$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trần Vũ; Fb: Nguyễn Trần Vũ

Chọn D



Ta có:

+) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$ suy ra đáp án A đúng.

+) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ suy ra đáp án B đúng.

+) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 0$ suy ra đáp án C đúng.

Vậy đáp án D sai.

Câu 58. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$, tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}.$

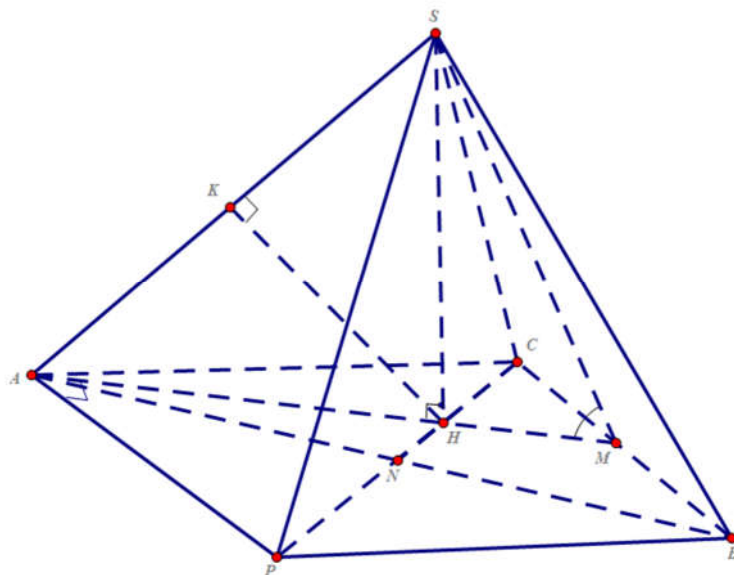
D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$

Lời giải

Tác giả: Vũ Ngọc Tân ; Fb: Vũ Ngọc Tân.

Phản biện: Lê Mai Hương; Fb: Lê Mai Hương.

Chọn D



Dựng $SH \perp (ABC)$, mà $S.ABC$ là hình chóp đều nên H là trọng tâm $\triangle ABC$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB .

Theo giả thiết thì $\widehat{SMA} = 60^\circ$, khi đó ta đặt $AB = AC = BC = x$ nên $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có : $SH = \tan 60^\circ \cdot HM = \tan 60^\circ \cdot \frac{1}{3} AM = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2}$, $AH = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Dựng hình bình hành $ACBP$, khi đó $d(BC, SA) = d(BC, (SAP)) = d(M, (SAP)) = \frac{3}{2} d(H, (SAP))$

$$\Leftrightarrow d(H, (SAP)) = \frac{2}{3} d(BC, AB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{7}}{14} = \frac{a}{\sqrt{7}}.$$

Vì $\triangle HAP$ vuông tại A, nên ta dựng $HK \perp SA$ do đó $d(H, (SAP)) = HK = \frac{a}{\sqrt{7}}$.

Khi đó ta được : $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow \frac{7}{a^2} = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^2}$ nên $x = a$.

Vậy $SH = a$, $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, nên $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 59. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. M và I là hai điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$, $4\overrightarrow{IS} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Mặt phẳng (AIM) cắt SC tại N .

d) Chứng minh rằng đường thẳng SD vuông góc với mặt phẳng (AIM) .

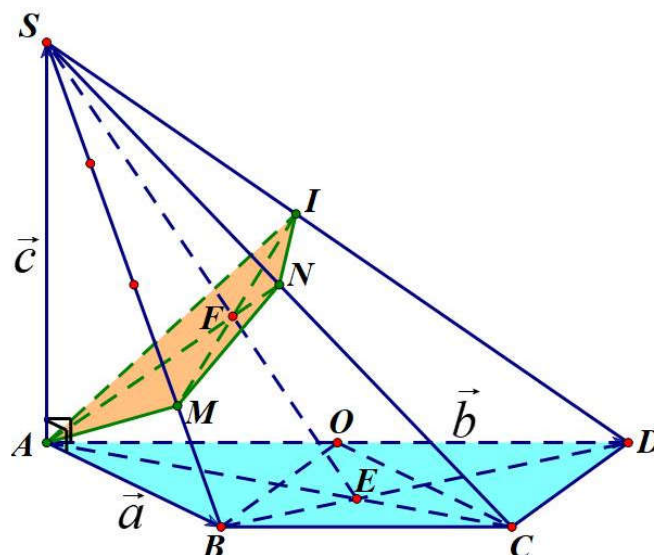
e) Chứng minh $\widehat{ANI} = 90^\circ$; $\widehat{AMI} = 90^\circ$.

f) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMI) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Tác giả: Dương Hà Hải ; Fb: Dương Hà Hải.

Phản biện: Vũ Huỳnh Đức; Fb: Vũ Huỳnh Đức



a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AS} = \vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}, |\vec{a}| = a, |\vec{b}| = 2a, |\vec{c}| = a\sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = a^2, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{SD} = \vec{b} - \vec{c}, \overrightarrow{AI} = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}, \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

Suy ra $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AI} = 0, \overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Do đó $SD \perp AI, SD \perp AM$.

Vậy $SD \perp (AMI)$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, AC cắt BD tại E . Trong mặt phẳng (SBD) , SE cắt MI tại F .

Khi đó, trong mặt phẳng (SAC) , AF cắt SC tại N .

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{NI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{NI} = 0 \Rightarrow AN \perp NI \Rightarrow \widehat{ANI} = 90^\circ$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}, \overrightarrow{MI} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{9}{28}\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Rightarrow AM \perp MI \Rightarrow \widehat{AMI} = 90^\circ$.

c) Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMI) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AMNI$.

Ta có $S_{AMNI} = S_{ANI} + S_{AMN}$

Ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}, NI = \frac{a\sqrt{42}}{14}$

$\Rightarrow S_{ANI} = \frac{1}{2} AN \cdot NI = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{15a^2}{16} \Rightarrow \cos \widehat{MAN} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{AM \cdot AN} = \frac{5}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \widehat{MAN} = \frac{\sqrt{14}}{8}$

$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2} AN \cdot AM \cdot \sin \widehat{MAN} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{32}$

$$\text{Vậy } S_{AMNI} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28} + \frac{3a^2\sqrt{7}}{32} = \frac{45a^2\sqrt{7}}{224}.$$

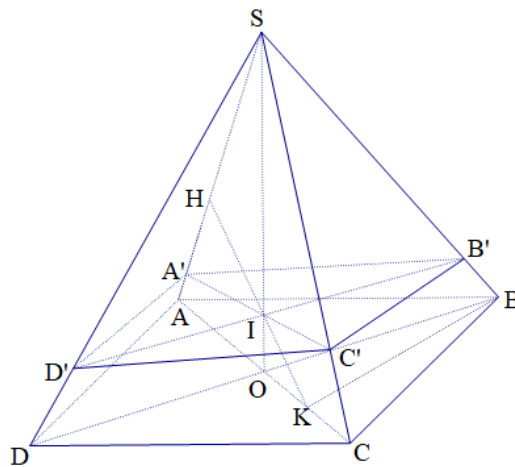
Câu 60. (HSG11 Bắc Ninh 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC và H là hình chiếu vuông góc của K trên SA .

a) Tính độ dài đoạn HK theo a .

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK, SO . Mặt phẳng (α) đi động, luôn đi qua I và cắt các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = SA' \cdot SB' \cdot SC' \cdot SD'$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hà; Fb: Ha Nguyen



a) + Ta có $AB = a\sqrt{3}; BC = a \Rightarrow AC = 2a = BD$.

+ Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow BO = a$.

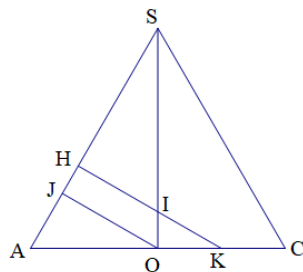
+ Xét $\triangle OBC$ có: $OB = OC = BC = a \Rightarrow \triangle OBC$ đều, mà K là hình chiếu vuông góc của B lên AC

$\Rightarrow BK \perp OC \Rightarrow K$ là trung điểm của $OC \Rightarrow AK = \frac{3a}{2}$.

+ Xét $\triangle SOB$ có: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

+ Xét $\triangle SAK$ có: $2S_{SAK} = SO \cdot AK = HK \cdot SA \Rightarrow HK = \frac{SO \cdot AK}{SA} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{3a}{2}}{2a} = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$.

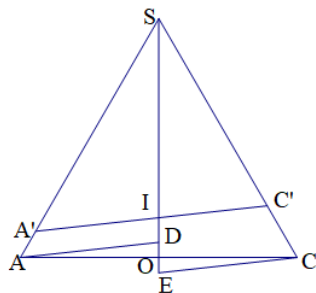
b) + Xét $\triangle AHK$ có: $AH = \sqrt{AK^2 - HK^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{27a^2}{16}} = \frac{3a}{4} \Rightarrow SH = SA - AH = 2a - \frac{3a}{4} = \frac{5a}{4}$



+ Từ O kẻ đường song song với HK , cắt SA tại điểm J .

$$+ \text{ Xét } \triangle AHK \text{ có: } \frac{HJ}{HA} = \frac{KO}{AK} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow HJ = \frac{1}{3} \cdot HA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{a}{4}$$

$$+ \text{ Xét } \triangle SJO \text{ có: } \frac{SH}{HJ} = \frac{SI}{IO} \Rightarrow \frac{SI}{IO} = \frac{SH}{HJ} = \frac{\frac{5a}{4}}{\frac{a}{4}} = 5$$



+ Từ A và từ C kẻ các đường song song với $A'C'$ cắt đường SO tại các điểm D và E .

+ Xét 2 tam giác ADO và OEC có: $\widehat{DAO} = \widehat{OCE}$ (so le trong)

$$AO = OC$$

$$\widehat{DOA} = \widehat{EOC} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADO = \triangle CEO \text{ (g.c.g)} \Rightarrow DO = EO$$

$$+ \text{ Trong } \triangle SAD \text{ có: } \frac{SA}{SA'} = \frac{SD}{SI}; \text{ trong } \triangle SEC \text{ có: } \frac{SC}{SC'} = \frac{SE}{SI}$$

$$\Rightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SD}{SI} + \frac{SE}{SI} = \frac{SD + SE}{SI} = \frac{2SO}{SI} = \frac{12}{5}$$

$$+ \text{ Tương tự có: } \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{12}{5}$$

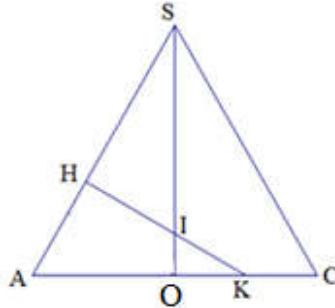
$$+ \text{ Áp dụng BĐT Cô - si ta có: } \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'} \geq 4\sqrt[4]{\frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} \cdot \frac{SD}{SD'}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{24}{5} \geq 4\sqrt[4]{\frac{16a^4}{SA' \cdot SB' \cdot SC' \cdot SD'}}$$

$$\Leftrightarrow SA' \cdot SB' \cdot SC' \cdot SD' \geq \left(\frac{5a}{3}\right)^4 = \frac{625}{81} a^4.$$

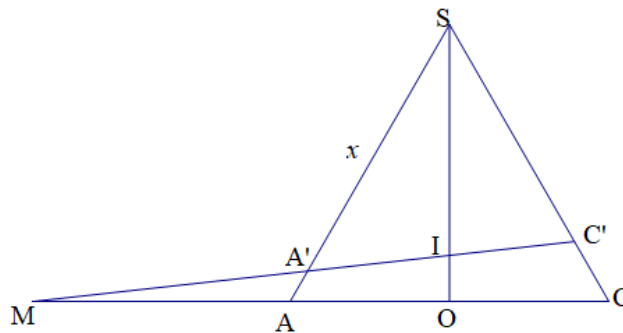
$$+ \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{SD}{SD'} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow SA' = SB' = SC' = SD' = \frac{5}{3} a.$$

Cách 2: Sử dụng định lý Menelaus.



$$+ \text{ Ta có: } \frac{SH}{HA} \cdot \frac{AK}{KO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{5a}{4}}{\frac{3a}{4}} \cdot \frac{\frac{3a}{2}}{a} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{OI}{IS} = \frac{1}{5}$$

+ Gọi giao điểm của $A'C'$ và AC là M , đặt $SA' = x$



$$+ \text{ Ta có: } \frac{SA'}{A'A} \cdot \frac{AM}{MO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2a-x} \cdot \frac{AM}{MO} \cdot \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{MO}{AM} = \frac{x}{10a-5x} \Rightarrow \frac{AO}{AM} = \frac{6x-10a}{10a-5x}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{AM} = 2 \cdot \frac{6x-10a}{10a-5x} + 1 = \frac{7x-10a}{10a-5x}$$

$$+ \text{ Ta lại có: } \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CC'}{C'S} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2a-x} \cdot \frac{10a-5x}{7x-10a} \cdot \frac{CC'}{C'S} = 1 \Rightarrow \frac{CC'}{C'S} = \frac{7x-10a}{5x} \Rightarrow \frac{CS}{C'S} = \frac{12x-10a}{5x}$$

$$+ \text{ Khi đó: } \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{2a}{x} + \frac{12x-10a}{5x} = \frac{12}{5}$$

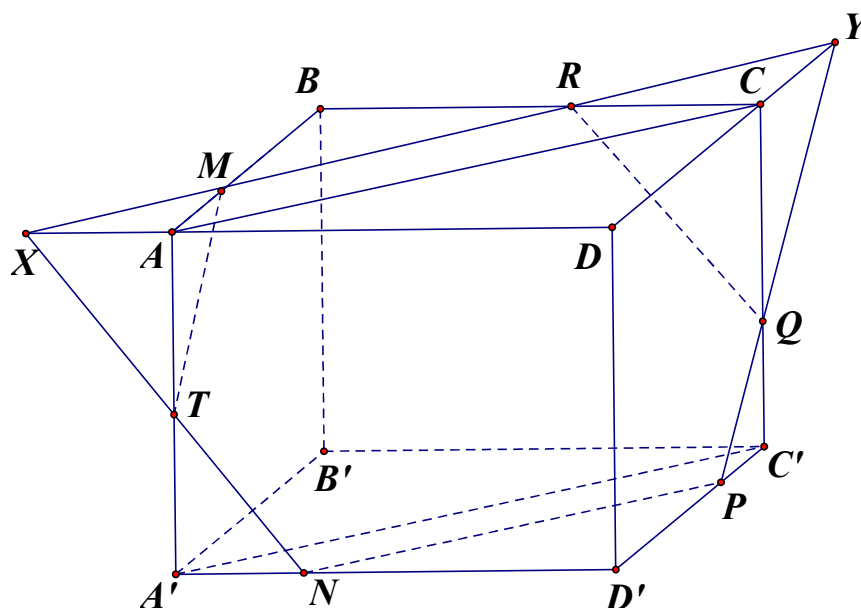
+ Các bước tiếp theo làm tương tự như cách 1.

Câu 61. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019) Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Điểm M di động trên cạnh AB , điểm N di động trên cạnh $A'D$ sao cho $A'N = 2AM$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và song song với AC . Dựng thiết diện của hình hộp bởi (α) và chứng minh rằng (α) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Lời giải

Tác giả: thuy hoang; Fb: thuy hoang

* Dựng thiết diện của hình hộp bởi (α) :



$$\square \text{ Xét } (\alpha) \cap (ABCD) = d \text{ có: } \begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ AC // (\alpha) \\ AC \subset (ABCD) \end{cases}$$

Nên d là đường thẳng qua M và song song với AC , d cắt AD tại X , cắt CD tại Y cắt BC tại R .

$\square$ Tương tự xét $(\alpha) \cap (A'B'C'D') = d'$, d' qua N và song song với AC cắt $C'D'$ tại P . XN cắt AA' tại T , YP cắt CC' tại Q .

Vậy thiết diện cần tìm là lục giác $MRQPNT$.

* Chứng minh rằng (α) luôn chứa một đường thẳng cố định:

$$\text{- Ta có: } \begin{cases} AC // (\alpha) \\ AC \subset (ACC'A') \\ (\alpha) \cap (ACC'A') = TQ \end{cases} \Rightarrow TQ // AC \quad (1)$$

$$\text{- Trong mặt phẳng } (ADD'A') \text{ có } AX // A'N \Rightarrow \frac{AT}{TA'} = \frac{AX}{A'N}$$

Mà tứ giác $AXRC$ là hình bình hành suy ra $AX = CR$ (*)

$$\text{- Xét tam giác } ABC \text{ cân có } MR // BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{CR}{CB}$$

Mà $AB = BC$ nên $AM = RC$. Suy ra $AX = AM$ (kết hợp (*))

$$\text{Suy ra } \frac{AT}{TA'} = \frac{AX}{A'N} = \frac{AM}{A'N} = \frac{1}{2}, \text{ hay } \frac{AT}{TA'} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra điểm } T \text{ cố định.}$$

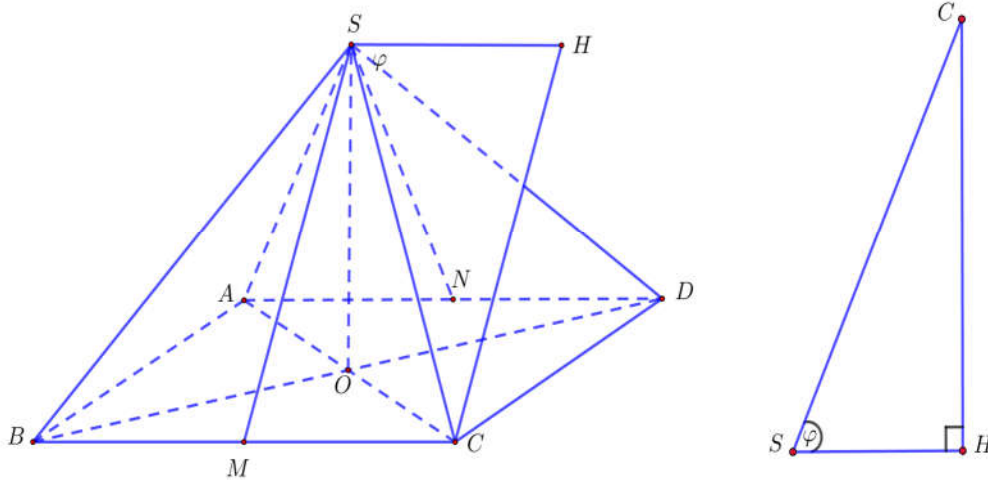
Kết hợp (1) suy ra TQ cố định. Vậy (α) luôn chứa đường TQ cố định. (đpcm).

Câu 62. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AD = 2a, AB = a$; O là giao điểm của AC và

BD, SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2}$. Gọi M là trung điểm của BC .

- a. Chứng minh đường thẳng SM vuông góc với mặt phẳng (SAD) .
b. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) , tính $\sin \varphi$.

Lời giải



a) Gọi N là trung điểm của AD .

Ta có $\begin{cases} AD \perp MN \\ AD \perp SO \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SMN) \Rightarrow AD \perp SM$ (1).

Mặt khác $SM = SN = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $MN = a$ suy ra $SM^2 + SN^2 = MN^2$.

Theo định lý Pitago ta có $SM \perp SN$ (2).

Mà $AD, SN \subset (SAD)$; $AD \cap SN = \{N\}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta được $SM \perp (SAD)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên (SAD) . Khi đó: $\varphi = \widehat{CSH}$.

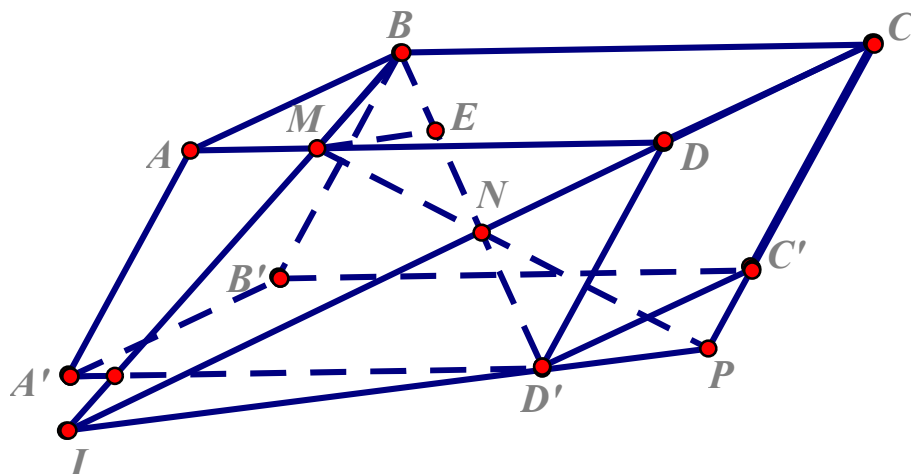
Do $CM \parallel (SAD)$ nên $d(C, (SAD)) = d(M, (SAD)) \Rightarrow CH = MS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác $SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $\sin \varphi = \frac{CH}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 63. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là một điểm trên cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{4}AD$, N là một điểm trên đường thẳng BD' , P là điểm trên đường thẳng CC' sao cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{MN}{MP}$

Lời giải



Vì 2 đường thẳng BD', MP cắt nhau tại điểm N nên 4 điểm B, M, D', P đồng phẳng.

Xét 3 mặt phẳng $(ABCD), (CDD'C'), (BMD'P)$ đôi một cắt nhau theo 3 giao tuyến là $DC, BM, D'P$.
Mà BM cắt DC . Do đó 3 đường thẳng $DC, BM, D'P$ đồng quy.

Trong mặt phẳng $(ABCD): BM \cap CD = I$.

Trong mặt phẳng $(CDD'C'): ID' \cap CC' = P$.

Trong mặt phẳng $(IBP): BD' \cap MP = N$.

Trong mặt phẳng $(IBP): ME \parallel IP (E \in BD')$.

$$\text{Ta có } \frac{BM}{BI} \cdot \frac{D'I}{D'P} \cdot \frac{NP}{NM} = \frac{ME}{ID'} \cdot \frac{D'I}{D'P} \cdot \frac{D'P}{ME} = 1 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{IM}{IB} = \frac{MD}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BM}{BI} = \frac{1}{4} \quad (2).$$

$$\frac{ID'}{IP} = \frac{ID}{IC} = \frac{MD}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{D'I}{D'P} = 3 \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } \frac{NP}{NM} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{3}{7}.$$

Câu 64. (HSG12 Cụm Thanh Xuân năm 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$

1) Gọi E, F, G lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD, ABD .

a) Chứng minh $(EFG) \parallel (BCD)$.

b) Tính diện tích tam giác EFG theo diện tích tam giác BCD .

2) Cho tứ diện $ABCD$.

M là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Kẻ qua M đường thẳng $d \parallel AB$.

a) Xác định giao điểm B' của đường thẳng d và mặt phẳng (ACD) .

b) Kẻ qua M các đường thẳng lần lượt song song với AC và AD cắt các mặt phẳng (ABD) và

(ABC) theo thứ tự tại C', D' . Chứng minh rằng $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = 1$.

c) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}}$.

Lời giải

1) Gọi E, F, G lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD, ABD .

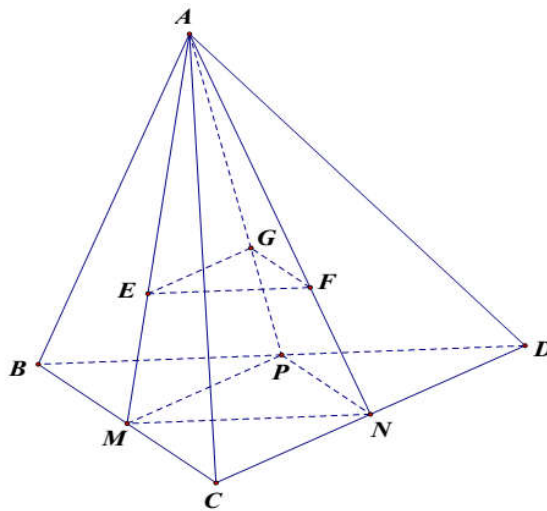
a) Chứng minh $(EFG) \parallel (BCD)$.

b) Tính diện tích tam giác EFG theo diện tích tam giác BCD . **Lời giải**

Tác giả: Nguyễn Thị Trà My ; Fb: Nguyễn My

Phản biện: Trần Trung; Fb: Trung Tran

Phản biện: Đỗ Hữu Nhân; Fb: Do Huu Nhan



a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB .

Theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF \parallel MN$.

Ta có $MN \subset (BCD)$ nên $EF \parallel (BCD)$. (1)

Chứng minh tương tự ta có $EG \parallel (BCD)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $(EFG) \parallel (BCD)$.

b) Ta có $\frac{EF}{MN} = \frac{FG}{NP} = \frac{EG}{MP} = \frac{2}{3}$ theo định lý Talet.

$\Rightarrow \triangle EFG \sim \triangle MNP$ theo tỉ số $\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{4}{9}$ (3) (Do tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng)

Mặt khác $\triangle MNP \sim \triangle DBC$ theo tỉ số $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{1}{4}$. (4)

Từ (3) và (4) ta có $\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle EFG} = \frac{1}{9} S_{\triangle DBC}$.

2) Cho tứ diện $ABCD$.

M là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Kẻ qua M đường thẳng $d // AB$.

a) Xác định giao điểm B' của đường thẳng d và mặt phẳng (ACD) .

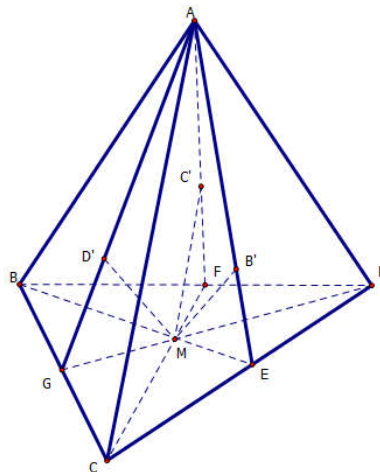
b) Kẻ qua M các đường thẳng lần lượt song song với AC và AD cắt các mặt phẳng (ABD) và (ABC) theo thứ tự tại C', D' . Chứng minh rằng $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = 1$.

c) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}}$. **Lời giải**

Tác giả: Trần Mạnh Trung ; Fb: Trung Tran

PB: Nguyễn Phương Thu ; Fb: Nguyễn Phương Thu

PB: Đỗ Hữu Nhân; Fb: Do Huu Nhan



a) Trong mặt phẳng (BCD) gọi $BM \cap CD = \{E\}$.

Trong mặt phẳng (ABE) kẻ $MB' // AB (B' \in AE) \Rightarrow d \equiv MB'$.

Ta có $\begin{cases} B' \in d \\ B' \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow d \cap (ACD) = \{B'\}$

b) Trong mặt phẳng (BCD) gọi $CM \cap BD = \{F\}, DM \cap BC = \{G\}$.

Trong mặt phẳng (ACF) kẻ $MC' // AC (C' \in AF)$.

Trong mặt phẳng (ADG) kẻ $MD' // AD (D' \in AG)$.

Ta có $MB' // AB \Rightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{ME}{BE} = \frac{S_{\triangle MCD}}{S_{\triangle BCD}} (1)$.

Tương tự ta có $\frac{MC'}{AC} = \frac{S_{\triangle MBD}}{S_{\triangle BCD}} (2); \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle BCD}} (3)$.

Từ (1), (2) và (3) Suy ra $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{\Delta MCD} + S_{\Delta MBD} + S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = 1$

c) Ta có $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MB' \cdot MC' \cdot MD'}{AB \cdot AC \cdot AD}} \Leftrightarrow \frac{1}{MB' \cdot MC' \cdot MD'} \geq \frac{27}{AB \cdot AC \cdot AD}$.

Ta có $T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{MB' \cdot MC' \cdot MD'}}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{27 \cdot AB \cdot AC \cdot AD}{AB \cdot AC \cdot AD}}} = 3\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MB'}{AB} = \frac{MC'}{AC} = \frac{MD'}{AD} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{MF}{CF} = \frac{MD}{DG} = \frac{1}{3}$.

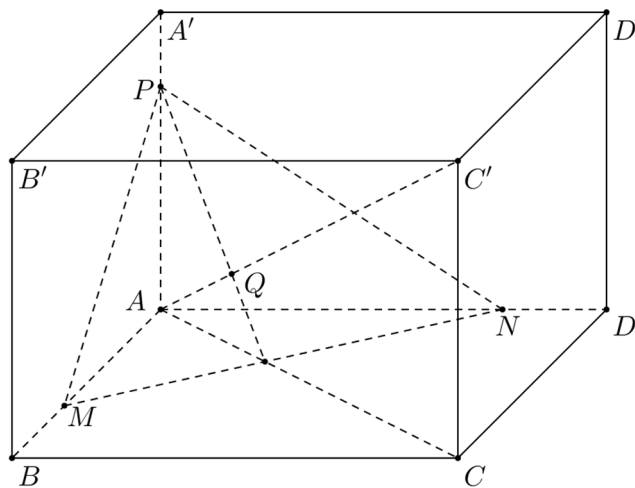
Câu 65. (HSG12 Hà Nội năm 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (P) cắt các tia AB, AD, AA', AC' lần lượt tại M, N, P, Q .

a) Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}}{AQ} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP}$.

b) Gọi H là hình chiếu của A lên (P) . Chứng minh rằng $AQ < \sqrt{3}AH$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Văn Lưu; Fb: Bùi Văn Lưu



a) Theo quy tắc hình hộp ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \frac{AC'}{AQ} \overrightarrow{AQ} = \frac{AB}{AM} \overrightarrow{AM} + \frac{AD}{AN} \overrightarrow{AN} + \frac{AA'}{AP} \overrightarrow{AP}.$$

Ta có AC' là đường chéo của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D' \Rightarrow AB = AD = AA' = \frac{1}{\sqrt{3}} AC'$.

Mà M, N, P, Q đồng phẳng nên $\frac{AC'}{AQ} = \frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} + \frac{AA'}{AP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{AQ} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP}$.

b) Ta có $AMNP$ là tứ diện vuông $\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2}$.

Mà $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2} < \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} \right)^2$.

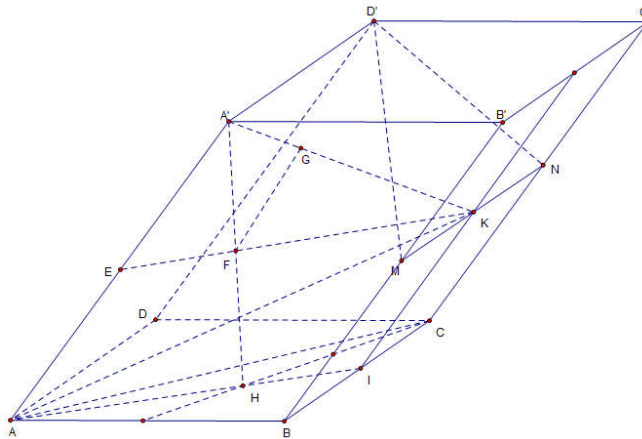
$$\Rightarrow \frac{1}{AH} < \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP} \Rightarrow \frac{1}{AH} < \frac{\sqrt{3}}{AQ} \Rightarrow AQ < \sqrt{3}AH.$$

Câu 66. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết các đường thẳng $A'A, A'B, A'C$ cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC' .

- a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.
b) Tính khoảng cách giữa AD và mặt phẳng $(D'MN)$

Lời giải

Tác giả: Nhóm 3 tổ 8 nhóm strong team vd- vdc



- a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Gọi I là trung điểm của BC .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ vì các đường thẳng $A'A, A'B, A'C$ cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° nên $\widehat{HAA'} = \widehat{HBA'} = \widehat{HCA'} = 60^\circ$. Tam giác ABC đều

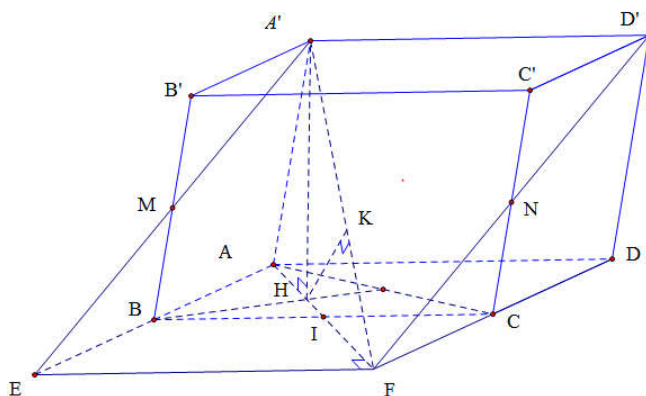
Do tam giác ABC tam giác đều nên $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều.

$$\text{Ta có } AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A'H = AH \tan \widehat{A'AH} = a, S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ } ABCD.A'B'C'D' \text{ là } V = A'H \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

- b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng $(D'MN)$

Cách 1.



Do $MN \parallel A'D'$ nên A' thuộc mặt phẳng $(D'MN)$

Gọi $E = A'M \cap AB$, $F = D'N \cap DC \Rightarrow EF \parallel BC \parallel AD$ và B, C lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE, DF . Suy ra A, H, F thẳng hàng và $AF = \frac{3}{2}HF$.

Ta có $AD \parallel (D'MN) \Rightarrow d(AD, (D'MN)) = d(A, (A'EF)) = \frac{3}{2}d(H, (A'EF))$.

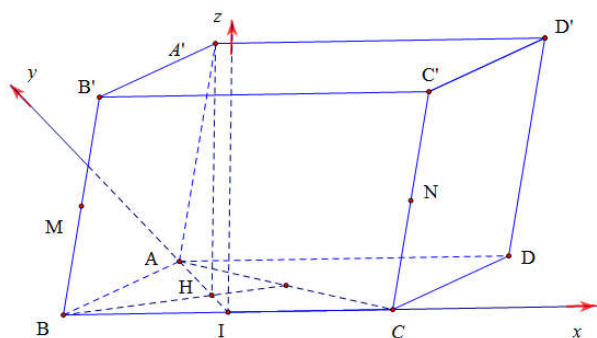
Do $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp EF \Rightarrow EF \perp (A'HF) \Rightarrow (A'EF) \perp (A'HF)$

Trong tam giác $A'HF$, kẻ $HK \perp A'F \Rightarrow HK \perp (A'EF) \Rightarrow d(H, (A'EF)) = HK$

Ta có $A'H = a, HF = 2HA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA'^2} + \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4a^2} = \frac{7}{4a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$.

Suy ra $d(AD, (D'MN)) = \frac{3}{2}HK = \frac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 2.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $I \equiv O(0;0;0), B\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$

$H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right), A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A'\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};a\right)$

Do $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$ nên $B'\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{3};a\right), C'\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{3};a\right); \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow D'\left(a;\frac{a\sqrt{3}}{6};a\right)$

M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC' nên $M\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (a; 0; 0), \overrightarrow{D'N} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{3}; -\frac{a}{2}\right)$

Suy ra $[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{D'N}] = \left(0; \frac{a^2}{2}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{a^2}{6}(0; 3; -2\sqrt{3})$

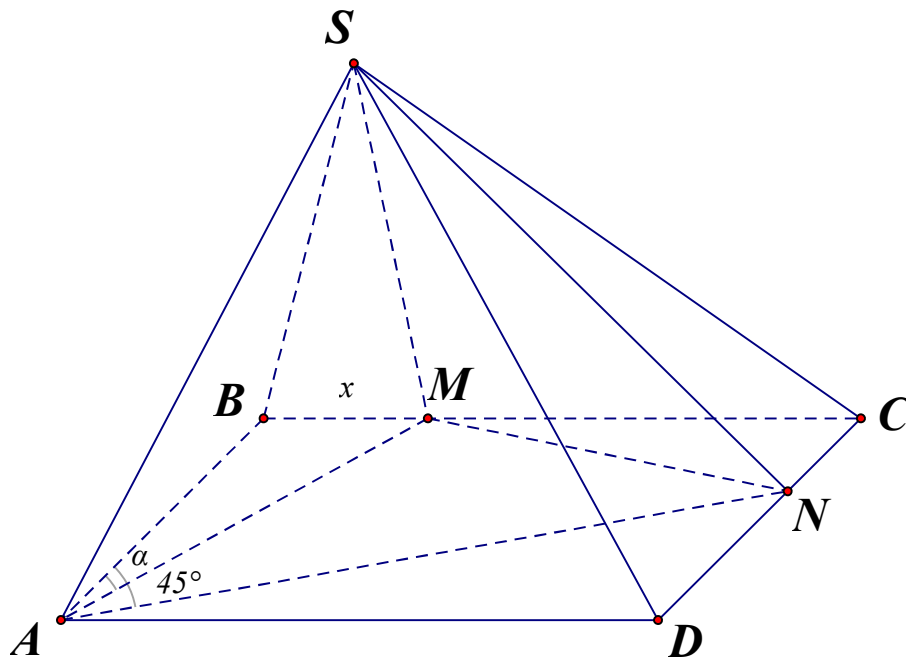
Mặt phẳng $(D'MN)$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 3; -2\sqrt{3})$

Phương trình mặt phẳng $(D'MN)$: $3y - 2\sqrt{3}z + \frac{3a\sqrt{3}}{2} = 0$

Do đó $d(AD, (D'MN)) = d(A, (D'MN)) = \frac{\left|\frac{3a\sqrt{3}}{2} + \frac{3a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{9+12}} = \frac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 67. (HSG12 tỉnh GIA LAI 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , chiều cao h không đổi. Gọi M, N lần lượt là hai điểm di động trên hai cạnh BC, CD sao cho góc $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Đặt $BM = x$. Tìm x theo a sao cho thể tích khối chóp $S.AMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Ta có $V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{AMN} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 45^\circ = \frac{h\sqrt{2}}{12} \cdot AM \cdot AN$.

Đặt $\widehat{MAB} = \alpha, 0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \Rightarrow \widehat{NAD} = 45^\circ - \alpha$

Khi đó $AM \cdot AN = \frac{AB}{\cos \alpha} \cdot \frac{AD}{\cos(45^\circ - \alpha)} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{2a^2 \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} \sin(2\alpha + 45^\circ)}$.

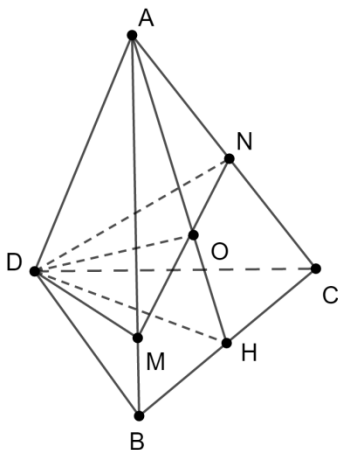
Khi đó $V_{S.AMN}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM.AN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \sin(2\alpha + 45^\circ)$ lớn nhất $\Leftrightarrow \alpha = 22,5^\circ$.

Vậy khi $x = a \cdot \tan 22,5^\circ = a(\sqrt{2} - 1)$ thì thể tích khối chóp $S.AMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 68. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đặt $AM = x, AN = y$. Tìm x, y để tam giác DMN có diện tích nhỏ nhất, lớn nhất.

Lời giải

Tác giả: Trần Duy Khương ; Fb: Tran Duy Khuong



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều ABC . Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $DO \perp (ABC)$. Theo đề bài, mặt phẳng $(DMN) \perp (ABC)$ nên suy ra $O \in MN$.

Tam giác DMN có $DO \perp MN$ nên $S_{\triangle DMN} = \frac{1}{2} DO \cdot MN$. Mà DO là hằng số nên $S_{\triangle DMN}$ lớn nhất khi MN lớn nhất, nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác AMN ta có $MN^2 = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy$.

Như vậy M, N thay đổi sao cho đoạn thẳng MN luôn đi qua O . Ta có $0 < x, y \leq 1$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} - x\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Vì $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MO}$ cùng hướng nên $\frac{\frac{1}{3}}{y} = \frac{\frac{1}{3} - x}{-x} > 0 \Leftrightarrow y\left(\frac{1}{3} - x\right) = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow 3xy = x + y$.

Từ $0 < x, y \leq 1$, ta có $x + y = 3xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ta có $MN^2 = (x + y)^2 - (x + y)$.

Đặt $t = x + y$. Ta có $t = x + \frac{x}{3x-1}$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $t'(x) = \frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}$. Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
t'	$-$	0	$+$
t	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$

Quan sát bảng biến thiên, ta có $\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{3}{2}$.

Ta có $MN^2 = f(t) = t^2 - t$. Khảo sát sự biến thiên của hàm $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$ ta được

$$MN \text{ min} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}, MN \text{ max} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = \frac{1}{2} \\ y = 1, x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Câu 69. (HSG12 tỉnh Hải Dương năm 2018-2019) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông.

1) Gọi S là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. SA, BC có trung điểm lần lượt là M và N . Tính thể tích của

khối chóp $S.ABC$ theo a , biết MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° và $AB = a$.

2) Khi $AA' = AB$. Gọi R, S lần lượt nằm trên các đoạn thẳng $A'D, CD'$ sao cho RS vuông góc với mặt

phẳng $(CB'D')$ và $RS = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a .

3) Cho $AA' = AB = a$. Gọi G là trung điểm BD' , một $mp(P)$ thay đổi luôn đi qua G cắt các đoạn thẳng

$AD', CD', D'B'$ tương ứng tại H, I, K .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{1}{D'H.D'I} + \frac{1}{D'I.D'K} + \frac{1}{D'K.D'H}$.

Lời giải

Tác giả: Đoàn Tấn Minh Triết; Fb: Đoàn Minh Triết

1) Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow SH$ là trung tuyến trong tam giác SAC . Mặt khác tam giác SAC cân tại $S \Rightarrow SH$ là đường cao $\Rightarrow SH \perp AC$.

$$\left. \begin{aligned} (SAC) \perp (ABC); (SAC) \cap (ABC) = AC \\ SH \subset (SAC); SH \perp AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Gọi I là trung điểm của AH , mà M là trung điểm của $SA \Rightarrow IM$ là đường trung bình trong tam

$$\text{giác } SAH \Rightarrow \begin{cases} IM \parallel SH \\ IM = \frac{1}{2} SH \end{cases}.$$

$$\left. \begin{array}{l} SH \perp (ABC) \\ IM // SH \end{array} \right\} \Rightarrow IM \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{MNI} = (\widehat{MN, (ABC)}) = 60^\circ.$$

Tam giác ABC vuông cân tại B , có $AB = a \Rightarrow BC = a$; $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$.

$NC = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$; tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$.

Xét tam giác CNI có $NI = \sqrt{CI^2 + CN^2 - 2CI \cdot CN \cdot \cos \widehat{ICN}} = \frac{a\sqrt{10}}{4} \Rightarrow MI = IN \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}$.

$$\Rightarrow SH = 2MI = \frac{a\sqrt{30}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{30}}{12}.$$

2) Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{m}$, $\overrightarrow{A'D'} = \vec{n}$, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{p} \Rightarrow |\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{p}| = b$; $\vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{m} = 0$.

Mặt khác $\overrightarrow{A'R} = x \cdot \overrightarrow{A'D}$; $\overrightarrow{D'S} = y \cdot \overrightarrow{D'C}$.

Ta có $\overrightarrow{A'R} = x \cdot \vec{m} + x \cdot \vec{n}$; $\overrightarrow{D'S} = y \cdot \vec{m} + y \cdot \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'S} = (y-x)\vec{m} + (1-x)\vec{n} + y\vec{p}$.

Do đường thẳng RS vuông góc với mặt phẳng $(CB'D')$ nên ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{B'C} = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{D'C} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(y-x)\vec{m} + (1-x)\vec{n} + y\vec{p}] \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = 0 \\ [(y-x)\vec{m} + (1-x)\vec{n} + y\vec{p}] \cdot (\vec{m} + \vec{p}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+y-2x=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy R, S là các điểm sao cho $\overrightarrow{A'R} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A'D}$; $\overrightarrow{D'S} = \frac{1}{3} \overrightarrow{D'C}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{RS} = -\frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} + \frac{1}{3}\vec{p} \Rightarrow RS^2 = \frac{b^2}{3} \Rightarrow RS = \frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b = a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3.$$

3) Vì $AA' = AB = a$ nên $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có G là trung điểm BD' nên G là tâm của $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F lần lượt là tâm $ADD'A'$ và $BB'C'C \Rightarrow E, F$ lần lượt là trung điểm $A'D$ và $B'C$; G là trung điểm EF .

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{D'B'})$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{D'G} = \frac{D'A}{D'H} \cdot \overrightarrow{D'H} + \frac{D'C}{D'K} \cdot \overrightarrow{D'K} + \frac{D'B'}{D'I} \cdot \overrightarrow{D'I} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{a\sqrt{2}}{4D'I} \cdot \overrightarrow{D'I} + \frac{a\sqrt{2}}{4D'K} \cdot \overrightarrow{D'K} + \frac{a\sqrt{2}}{4D'H} \cdot \overrightarrow{D'H} \quad (1)$$

Vì bốn điểm H, I, K, G đồng phẳng nên:

$$\overrightarrow{GH} = k\overrightarrow{GI} + l\overrightarrow{GK} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'H} - \overrightarrow{D'G} = k(\overrightarrow{D'I} - \overrightarrow{D'G}) + l(\overrightarrow{D'K} - \overrightarrow{D'G})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{k}{k+l-1} \cdot \overrightarrow{D'I} + \frac{l}{k+l-1} \cdot \overrightarrow{D'K} - \frac{1}{k+l-1} \cdot \overrightarrow{D'H} \quad (2)$$

do $\overrightarrow{D'I}$, $\overrightarrow{D'K}$, $\overrightarrow{D'H}$ không đồng phẳng nên từ (1) và (2) ta được: $\frac{a\sqrt{2}}{4D'I} + \frac{a\sqrt{2}}{4D'K} + \frac{a\sqrt{2}}{4D'H} = 1$.

$$\text{Mặt khác } T = \frac{1}{D'H \cdot D'I} + \frac{1}{D'I \cdot D'K} + \frac{1}{D'K \cdot D'H} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D'I} + \frac{1}{D'H} + \frac{1}{D'K} \right)^2 = \frac{8}{3a^2}$$

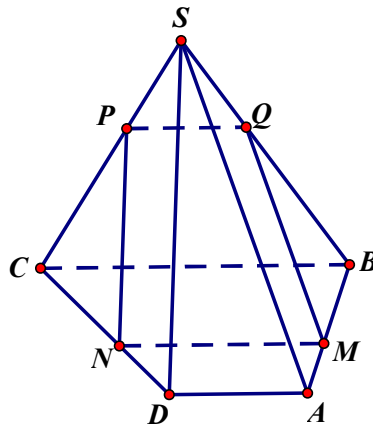
$$\Rightarrow T = \frac{8}{3a^2} \Leftrightarrow D'H = D'I = D'K = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của T là $\frac{8}{3a^2}$.

Câu 70. (HSG12 THPT Thuận Thành năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $BC = 2a$ đáy bé $AD = a$, $AB = b$. Mặt bên SAD là tam giác đều, M là một điểm di động trên AB . Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với SA, BC .

1. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?
2. Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AM$, ($0 < x < b$). Tìm x theo b để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải



1. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

Do $SA \parallel (P)$ nên (P) cắt (SAB) theo giao tuyến là đường thẳng đi qua M , song song với SA cắt SB tại Q .

Do $BC \parallel (P)$ nên (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng đi qua M , song song với BC cắt CD tại N .

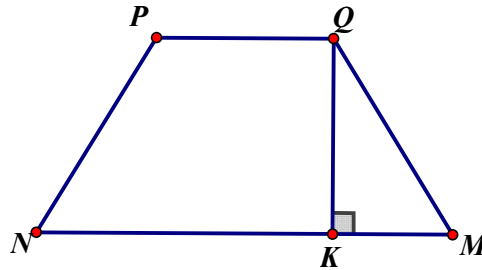
(P) cắt (SBC) theo giao tuyến là đường thẳng đi qua Q , song song với BC cắt SC tại P .

Khi đó thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P) là hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel PQ$).

Do $MN \parallel BC, MQ \parallel SA$ nên $(MNPQ) \parallel (SAD)$ suy ra $PN \parallel SD$.

Khi đó $\widehat{PNM} = \widehat{SDA} = 60^\circ$, $\widehat{QMN} = \widehat{SAD} = 60^\circ$ (hai góc có các cặp cạnh tương ứng song song) nên $MNPQ$ là hình thang cân.

2. Tính diện tích hình thang $MNPQ$



Ta tính được $MQ = NP = \frac{b-x}{b}a$, $PQ = \frac{2ax}{b}$; $MN = \frac{ab+ax}{b}$.

Từ đó tính được $QK = \frac{ab-ax}{b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra diện tích của $MNPQ$ là:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ) \cdot QK = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4b^2} (b-x)(b+3x)$$

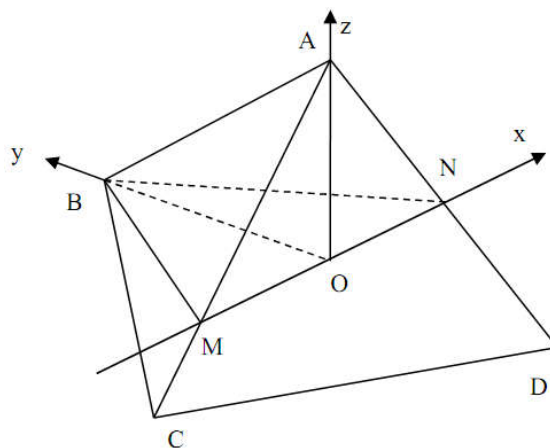
$$\text{Ta có } S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4b^2} (b-x)(b+3x) \leq \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{12b^2} \left(\frac{3b-3x+b+3x}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{b}{3}$.

Vậy S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x = \frac{b}{3}$.

Câu 71. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = 3$, $AC = 4$, $AD = 6$ và các góc $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AD , M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = \frac{3}{4}AC$.

Vì $AB = 3$, $AC = 4$, $AD = 6 \Rightarrow AB = AM = AN = 3$.

Lại có $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$ nên $BM = CN = 3$; $MN = 3\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \triangle BMN$ vuông tại B .

Gọi O là trung điểm của MN thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMN$.

Lại có $AB = AM = AN (= 3)$

$$\Rightarrow AO \perp (BMN) \text{ và } AO = \sqrt{AN^2 - ON^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Vì $\triangle BMN$ vuông tại B nên $BO \perp MN$; $BO = \frac{1}{2}MN = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với:

$$O(0;0;0), A\left(0;0;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), N\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};0;0\right), M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{3\sqrt{2}}{2};0\right).$$

$$+) \text{ Vì } N \text{ là trung điểm của } AD \text{ nên } D\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};0;-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$+) \text{ Có } AC = \frac{4}{3}AM \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow C\left(-2\sqrt{2};0;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = (5\sqrt{2};0;-\sqrt{2})$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AB} = \left(0;\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-3;-15;-15).$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AC} = (-2\sqrt{2};0;-2\sqrt{2})$$

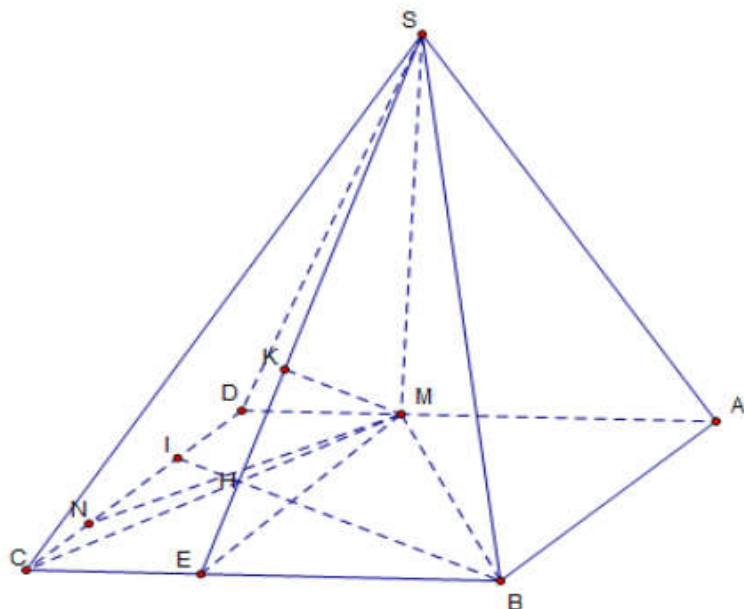
$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] \cdot \overrightarrow{AC} = 6\sqrt{2} + 30\sqrt{2} = 36\sqrt{2}.$$

$$\text{Áp dụng công thức } d(AB, CD) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] \cdot \overrightarrow{AC}|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]|}$$

$$\Rightarrow d(AB, CD) = \frac{36\sqrt{2}}{\sqrt{9+225+225}} = \frac{4\sqrt{102}}{17}.$$

Câu 72. (HSG12 tỉnh Lào Cai năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a . Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{MBI}$ và MN vuông góc với BI . Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



*) Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$:

Ta có:

$$DM = \frac{AD}{3}, AM = \frac{2a}{3} \Rightarrow CM = \sqrt{DM^2 + CD^2}$$

$$SM \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SCM} = 60^\circ \Rightarrow SM = CM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Khi đó: } S_{AMCB} = \frac{(AM + CB) \cdot AB}{2} = \frac{5a^2}{6} \Rightarrow V_{S.AMCB} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{AMCB} = \frac{5a^3\sqrt{30}}{54}$$

*) Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC)

$$\text{Ta có: } BM = \frac{a\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \cos \widehat{ABM} = \frac{AB}{BM} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \cos \widehat{IBM}$$

$$\text{Đặt } DI = x \Rightarrow IM^2 = x^2 + \frac{a^2}{9}, IB = (a-x)^2 + a^2.$$

Áp dụng định lý cosin ta có

$$IM^2 = MB^2 + IB^2 - 2MB \cdot IB \cdot \cos \widehat{IBM} \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{9} = (a-x)^2 + a^2 + \frac{13a^2}{9} - 2a\sqrt{(a-x)^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7a}{12} \Rightarrow IB = \frac{13a}{12}$$

$$\text{Gọi } H = MN \cap BI. \text{ Ta có } \triangle ABM = \triangle MBH \Rightarrow BH = AB = a, IH = IB - BH = \frac{a}{12}$$

$$\triangle CBI \sim \triangle HNI \Rightarrow \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{HI} \Rightarrow NI = \frac{HI \cdot BI}{CI} = \frac{13a}{60}, CN = CD - DI - IN = \frac{a}{5} \Rightarrow \frac{CN}{CD} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Suy ra: } d(N, (SBC)) = \frac{1}{5} \cdot d(D, (SBC)) = \frac{1}{5} d(M, (SBC))$$

Kẻ ME vuông góc với BC , MK vuông góc với SE . Suy ra: $MK = d(M, (SBC))$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MS^2} + \frac{1}{ME^2} = \frac{13}{10a^2} \Rightarrow MK = \frac{a\sqrt{130}}{13} \Rightarrow d(N, (SBC)) = \frac{1}{5} \cdot d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{130}}{65}$$

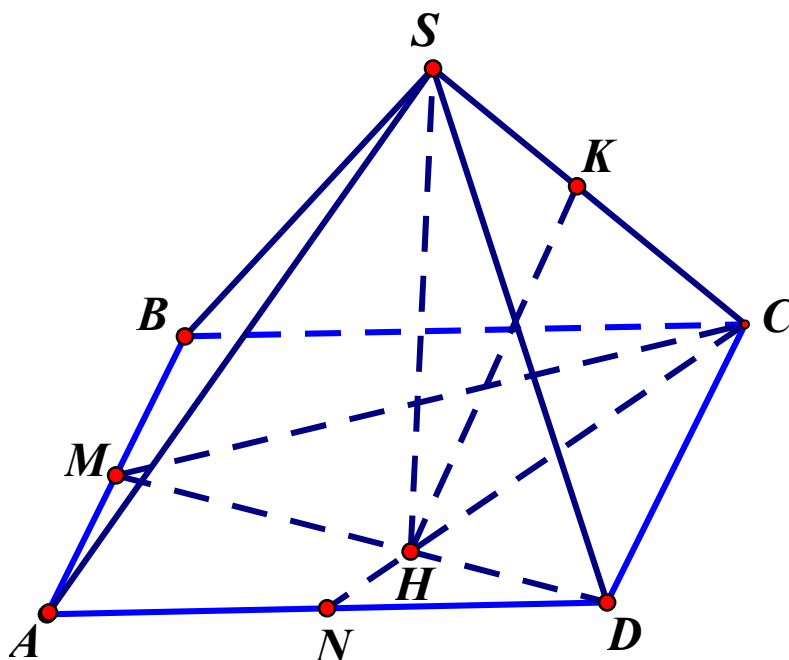
Câu 73. (HSG12 tỉnh Lâm Đồng năm 2018-2019)

a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD và H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC bằng $\frac{2a}{3}$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $SHMC$.

b) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}, AA' = 3$, Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$, và BC . Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) .

Lời giải

a)

Tác giả: Nhóm 2 - Tổ 8 nhóm toán team toán vd - vdc

Theo giả thiết $ABCD$ là hình vuông, suy ra $\triangle ADM = \triangle DNC$ (c.g.c)

Từ đó suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{DCN} \Rightarrow DM \perp CN$

$$\text{Vậy có: } NC = \sqrt{DC^2 + DN^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; HC = \frac{CD^2}{CN} = \frac{2a}{\sqrt{5}}; HD = \frac{DC \cdot DN}{NC} = \frac{a}{\sqrt{5}};$$

$$HM = MD - HD = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{10} \text{ và } S_{\triangle HMC} = \frac{1}{2} HC \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{10} = \frac{3a^2}{10}$$

Mặt khác, ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp DM$

Theo chứng minh trên $DM \perp CN \Rightarrow DM \perp (SCN)$.

Kẻ $HK \perp SC$ thì HK là khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC . Suy ra $HK = \frac{2a}{3}$.

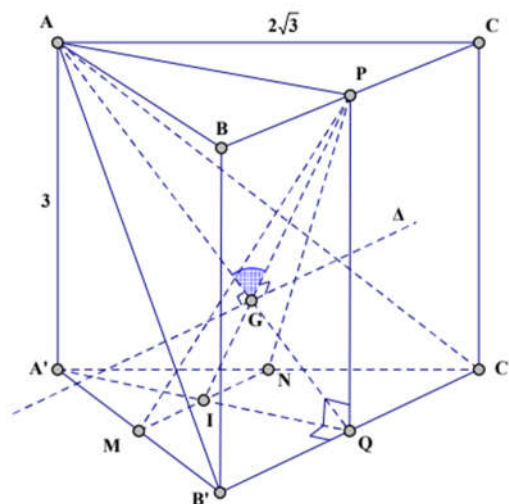
Tam giác SHC vuông tại H , đường cao HK suy ra

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SH = a$$

$$\text{Vậy } V_{SHMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta HMC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{10} \cdot a = \frac{a^3}{10}$$

b)

Cách 1:



Gọi I, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh MN và $B'C'$, khi đó $AQ = 3\sqrt{2}, PI = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. Giả sử $PI \cap AQ = \{G\} \Rightarrow G \in (AB'C') \cap (MNP)$.

Hơn nữa $\begin{cases} MN \subset (MNP), B'C' \subset (AB'C') \\ MN \parallel B'C' \end{cases}$ nên giao tuyến của hai mặt $(AB'C')$ và (MNP) là đường thẳng Δ đi qua G và song song với MN và $B'C'$.

Ta có $B'C' \perp (AA'QP) \Rightarrow AG \perp \Delta$, chứng minh tương tự $PG \perp \Delta$, do đó

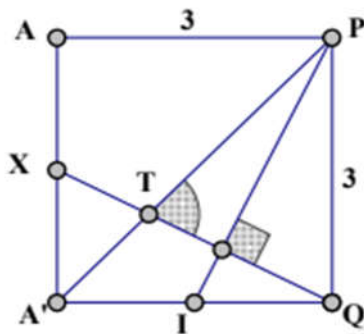
$\widehat{((AB'C'), (MNP))} = \widehat{(AG, PG)}$. Mặt khác $IQ \parallel AP$, theo định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{GQ}{GA} = \frac{GI}{GP} = \frac{IQ}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow GA = 2GQ = \frac{2}{3}AQ = 2\sqrt{2}; GP = 2GI = \frac{2}{3}PI = \sqrt{5}.$$

$$\text{Xét tam giác } AGP \text{ có } \cos \widehat{AGP} = \frac{GA^2 + GP^2 - AP^2}{2GA \cdot GP} = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 - 3^2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{(AB'C'), (MNP)}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Cách 2.



Gọi I, Q, X lần lượt là trung điểm của $MN, B'C'$ và AA' . Ta có $AP = PQ = QA' = A'A = 3$ và $\widehat{A'AP} = 90^\circ$ nên tứ giác $APQA'$ là hình vuông.

$\Delta IPQ = \Delta XQA' (c - g - c) \Rightarrow \widehat{IPQ} = \widehat{XQA'} \Rightarrow PI \perp QX (1)$. Ta có $B'C' \perp (APQA') \Rightarrow B'C' \perp QX$ mà $MN \parallel B'C' \Rightarrow MN \perp QX (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $QX \perp (MNP)$, chứng minh tương tự ta có $A'P \perp (AB'C')$

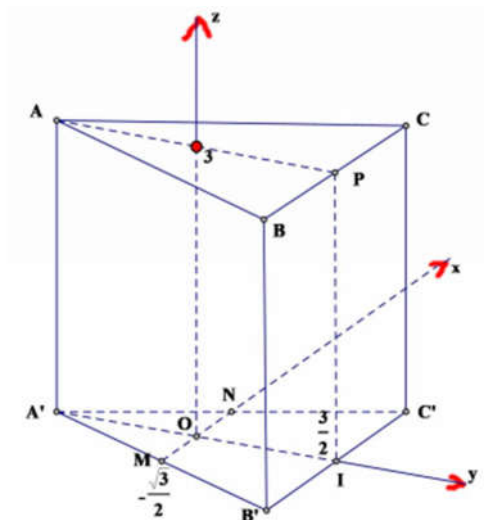
Do đó $\left((AB'C'), (MNP) \right) = (\widehat{A'P, QX})$.

Ta có $XA \parallel PQ$, theo định lý Ta-lét có $\frac{TP}{TA} = \frac{TQ}{TX} = \frac{PQ}{XA} = 2$, từ đó ta được $TP = 2\sqrt{2}, QX = \sqrt{5}$. Áp

dụng định lý cosin cho tam giác PTQ ta có $\cos \widehat{PTQ} = \frac{TP^2 + TQ^2 - PQ^2}{2TP \cdot TQ} = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 - 3^2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Vậy $\cos \left((AB'C'), (MNP) \right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Cách 3.



Gọi I, O, J lần lượt là trung điểm các cạnh $B'C', MN, AP$. Ta có $MN \parallel B'C'$ và $A'I \perp B'C' \Rightarrow MN \perp A'I$. Đặt hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc $O(0;0;0)$, chiều dương Ox trùng với tia ON , chiều dương Oy trùng với tia OI , chiều dương Oz

trùng với tia OJ . Khi đó ta có:

$$A\left(0; -\frac{3}{2}; 3\right), B'\left(-\sqrt{3}; \frac{3}{2}; 0\right), C'\left(\sqrt{3}; \frac{3}{2}; 0\right), M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), P\left(0; \frac{3}{2}; 3\right)$$

Gọi $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ lần lượt là các véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) . Ta có

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}] = (0; 1; 1), \vec{n}_2 = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = (0; -2; 1)$$

$$\cos(\widehat{(AB'C'), (MNP)}) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|0 - 2 + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

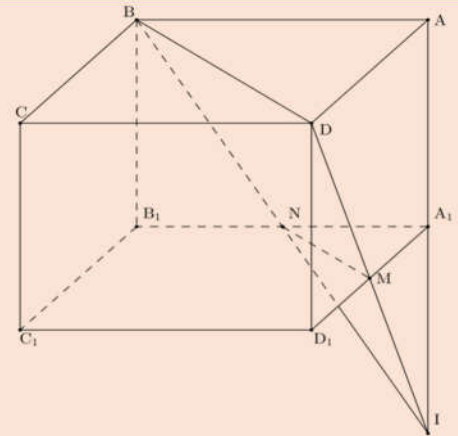
$$\text{Vậy } \cos(\widehat{(AB'C'), (MNP)}) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 74. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019)

Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh $AB = AD = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm A_1D_1, A_1B_1 .

a. Chứng minh rằng AC_1 vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$.

b. Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.



Lời giải

a. Chứng minh rằng AC_1 vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$.

Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC_1A) \Rightarrow BD \perp AC_1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BN} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}) \left(\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB_1}^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + (\sqrt{3})^2 = 0 \\ &\Rightarrow AC_1 \perp BN. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AC_1 \perp (BDMN)$.

b. Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.

Gọi $AA_1 \cap DM \cap BN = \{I\} \Rightarrow A_1, M, N$ lần lượt là trung điểm của AI, DI, BI .

$$\frac{V_{I.AMN}}{V_{I.ABD}} = \frac{IM.IN}{IB.ID} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{A.BDMN} = \frac{3}{4} V_{I.ABD}$$

$$\Rightarrow V_{A.BDMN} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot IA \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \text{ (dvt)}$$

$$\text{Vậy } V_{A.BDMN} = \frac{3}{2}.$$

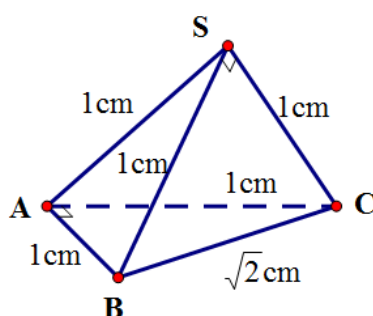
Câu 75. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 1 \text{ cm}$ và $BC = \sqrt{2} \text{ cm}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC

A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trần Vũ; Fb: Nguyễn Trần Vũ

Chọn C



Theo giả thiết đề bài ta thấy $BC^2 = SB^2 + SC^2 \Rightarrow SB \perp SC \Rightarrow \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.

$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}}{AB \cdot SC} = (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 - SA \cdot SC \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Do đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) = 120^\circ$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Câu 76. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Mặt phẳng (P) qua trung điểm SO và song song với BD cắt SA, SC lần lượt tại M, N . Biết $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Tính $\frac{SN}{SC}$.

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

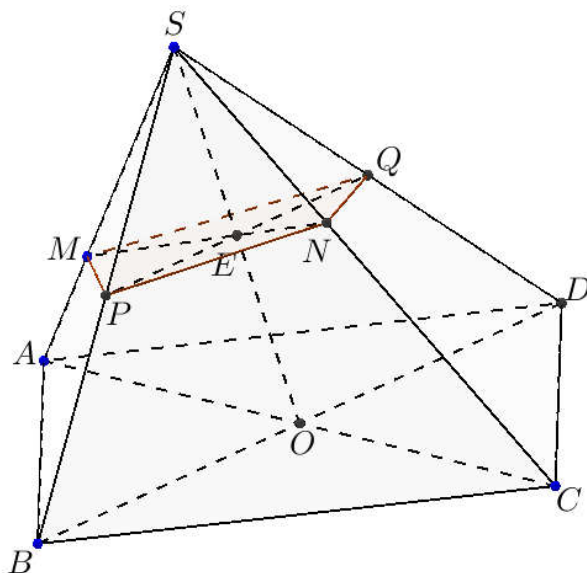
Tác giả: Nguyễn Văn Thanh; Fb: Thanh Văn Nguyễn

Chọn A

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SB và SD . Mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (MPQ) .

(P) đi qua trung điểm E của SO .

ME cắt SC tại N .



Ta có: $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SN} = \frac{SB}{SP} + \frac{SD}{SQ}$.

Suy ra: $\frac{3}{2} + \frac{SC}{SN} = \frac{2}{1} + \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{SC}{SN} = \frac{5}{2}$.

Do đó: $\frac{SN}{SC} = \frac{2}{5}$.

Câu 77. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{6}$. Biết rằng các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $2\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{2}$.

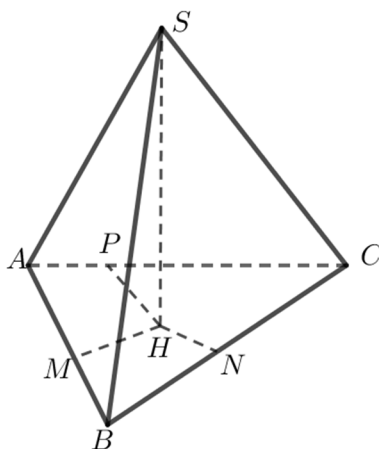
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) , M, N, P lần lượt là hình chiếu của H trên AB, BC, CA . Khi đó SM, SN, SP lần lượt là các đường cao của các mặt bên.



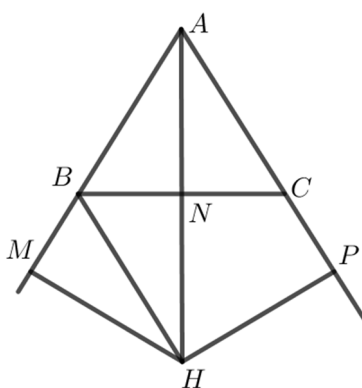
Vì các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau nên $SM = SN = SP$. Do đó $HM = HN = HP$. Như vậy H là tâm đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp tam giác ABC .

+ TH1: H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$, cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có: } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2} = 4.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}.$$

+ TH2: H là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC . Do tam giác ABC đều nên không mất tính tổng quát giả sử H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC . Ta có $AH = 2 \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}$, $BH = CH = \sqrt{6}$.



Nếu $SA = 3\sqrt{2}$ thì $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 0$ (vô lý).

Nếu $SA \neq 3\sqrt{2}$ thì $SB = SC = 3\sqrt{2}$. Ta có: $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = 2\sqrt{3}$.

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3.$$

+ Vậy thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ABC$ là $V = 3$.

Câu 78. (HSG 12 Yên Lạc 2 Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm tam giác BCD , G' là trung điểm của AG . Một mặt phẳng (α) đi qua G' cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D' . Tính $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'}$.

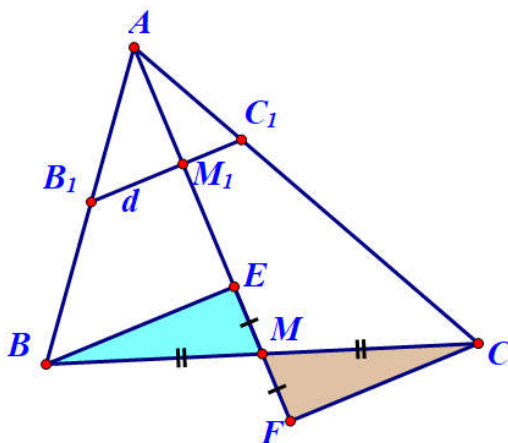
Lời giải

Tác giả: Vũ Huỳnh Đức; Fb: Vũ Huỳnh Đức.

Phản biện: Trần Đức Phương; Fb: Phương Tran Duc.

1) Trước hết ta xét bài toán: "Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM . Một đường thẳng d bất kì cắt các cạnh AB, AC và đoạn thẳng AM lần lượt tại các điểm B_1, C_1, M_1 khác

$$A. \text{ Chứng minh rằng } \frac{AB}{AB_1} + \frac{AC}{AC_1} = 2 \frac{AM}{AM_1}."$$



Chứng minh:

Qua B và C lần lượt dựng các đường thẳng nhận $\overline{B_1C_1}$ làm vector chỉ phương. Mỗi đường thẳng này theo thứ tự cắt đường thẳng AM tại E và F (hình vẽ). Không mất tính tổng quát, ta giả sử E thuộc đoạn AM thì khi đó F đối xứng với E qua M .

Áp dụng định lí Thales, ta có

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AE}{AM_1} = \frac{AM - ME}{AM_1}, \frac{AC}{AC_1} = \frac{AF}{AM_1} = \frac{AM + MF}{AM_1} = \frac{AM + ME}{AM_1}.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AB_1} + \frac{AC}{AC_1} = \frac{AM - ME}{AM_1} + \frac{AM + ME}{AM_1} = 2 \frac{AM}{AM_1}. (\text{dpcm})$$

2) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CD và BG còn M', N' theo thứ tự là giao điểm của mặt phẳng (α) với AM, AN .

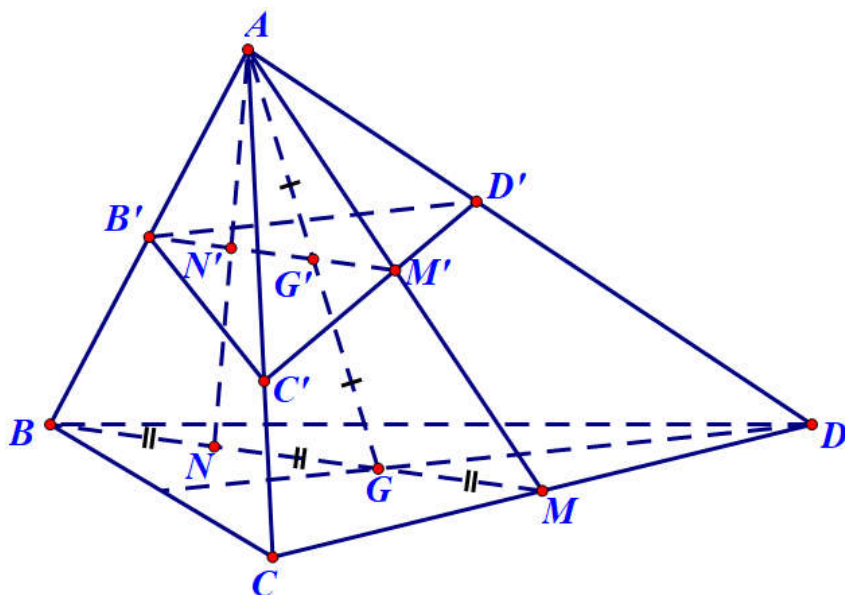
Áp dụng kết quả của bài toán trên vào các tam giác $\triangle ACD$, $\triangle ABG$, $\triangle AMN$ ta được:

$$\bullet \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 2 \frac{AM}{AM'} \quad (1),$$

$$\bullet \frac{AB}{AB'} + \frac{AG}{AG'} = 2 \frac{AN}{AN'} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB'} + 2 = 2 \frac{AN}{AN'} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB'} = 2 \frac{AN}{AN'} - 2 \quad (2)$$

$$\bullet \frac{AM}{AM'} + \frac{AN}{AN'} = 2 \frac{AG}{AG'} = 2.2 = 4 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} + \frac{AB}{AB'} = 2 \left(\frac{AM}{AM'} + \frac{AN}{AN'} \right) - 2 = 2.4 - 2 = 6$.

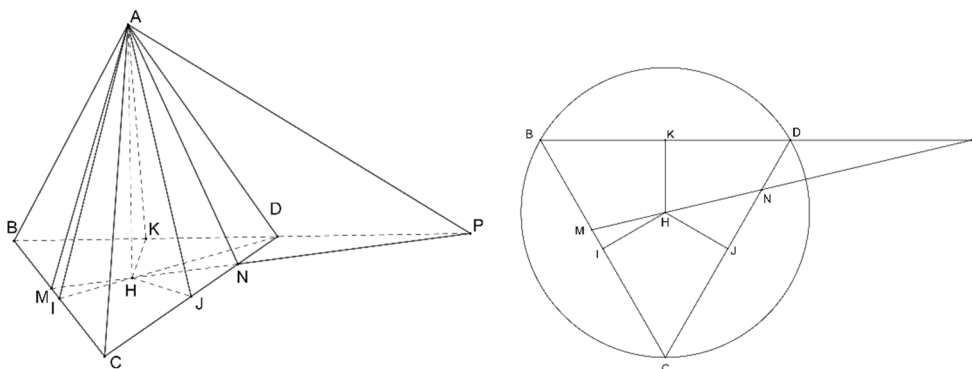


Vậy $\frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} + \frac{AB}{AB'} = 6.$

Câu 79. (HSG11 Bắc Ninh 2018-2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ có đường cao AH . Mặt phẳng (P) chứa AH cắt ba cạnh BC, CD, BD lần lượt tại M, N, P ; gọi α, β, γ là góc hợp bởi AM, AN, AP với mặt phẳng (BCD) . Chứng minh rằng $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Ngọc Phát; Fb: Vũ Ngọc Phát



Không mất tính tổng quát, giả sử tứ diện có cạnh bằng a . Suy ra $AH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Khi đó $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{PH^2} = \frac{18}{a^2}.$

Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên BC, CD, BD . Vì tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên tam giác BCD là tam giác đều. Do đó $IH = JH = KH = a\frac{\sqrt{3}}{6}.$

Không mất tính tổng quát giả sử M nằm giữa B và I , gọi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ lần lượt là ba góc hợp bởi MH, NH, PH với BC, CD, BD .

Vì $\widehat{HIC} + \widehat{HJC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $HICJ$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{IHJ} = 120^\circ.$

Vì $\widehat{IMH} + \widehat{IHM} + \widehat{JNH} + \widehat{JHN} = 180^\circ$ và $\widehat{IHM} + \widehat{JHI} + \widehat{JHN} = 180^\circ$ nên $\widehat{IMH} + \widehat{JNH} = 120^\circ$ hay $\varphi_1 + \varphi_2 = 120^\circ$. Suy ra $\varphi_2 = 120^\circ - \varphi_1$.

Tam giác BMP có $\widehat{IMH}$ là góc ngoài tam giác nên $\widehat{IMH} = \widehat{MBP} + \widehat{MPB} \Leftrightarrow \varphi_3 = \varphi_1 - 60^\circ$.

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{PH^2} &= \frac{\sin^2 \varphi_1}{HI^2} + \frac{\sin^2 \varphi_2}{HJ^2} + \frac{\sin^2 \varphi_3}{HK^2} = \frac{12}{a^2} (\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3) \\ &= \frac{12}{a^2} [\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 (120^\circ - \varphi_1) + \sin^2 (\varphi_1 - 60^\circ)] \\ &= \frac{6}{a^2} [1 - \cos 2\varphi_1 + 1 - \cos 2(120^\circ - \varphi_1) + 1 - \cos 2(\varphi_1 - 60^\circ)] \\ &= \frac{6}{a^2} \left(3 - \cos 2\varphi_1 + \frac{1}{2} \cos 2\varphi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi_1 + \frac{1}{2} \cos 2\varphi_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi_1 \right) = \frac{18}{a^2}. \end{aligned}$$

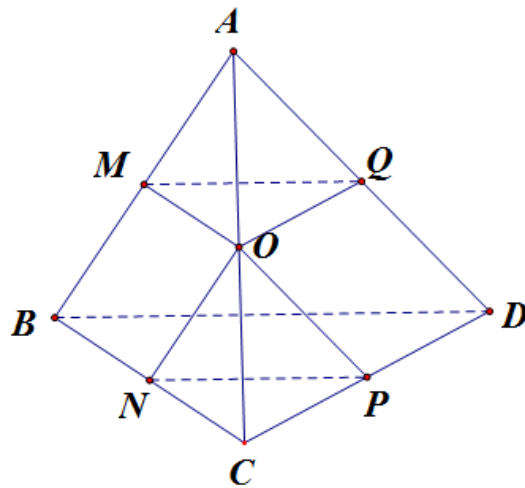
Vậy $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = 12$.

Câu 80. (HSG11 Cụm Hà Đông Hoài Đức Hà Nội năm 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 > (AC + BD)^2.$$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Quyền; Fb: Nguyễn Mạnh Quyền



Gọi M, N, P, Q, O lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, AD, AC . Ta có tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành và điểm O không nằm trên $(MNPQ)$

Từ đó, ta có:

$$(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 = (2ON + 2OQ)^2 + (2OP + 2OM)^2 > 4NQ^2 + 4MP^2 \quad (1)$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
4NQ^2 + 4MP^2 &= 4\left(\left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}\right)^2\right) \\
&= 4\left(NM^2 + 2\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{MQ} + MQ^2 + MN^2 + 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + NP^2\right) \\
&= 4\left(2NM^2 + MQ^2 + NP^2 + 2\overrightarrow{NM}(\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{NP})\right) \\
&= 4(2MN^2 + 2MQ^2) = 2(AC^2 + BD^2) \geq (AC + BD)^2(2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

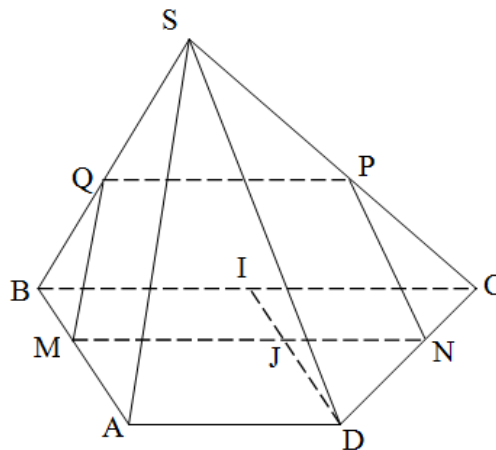
Câu 81. (HSG11 Thuận Thành 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $BC = 2a$, đáy bé $AD = a$, $AB = b$. Mặt bên SAD là tam giác đều. M là một điểm di động trên AB , mặt phẳng (P) đi qua M và song song với SA, BC .

1. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P) . Thiết diện là hình gì?
2. Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AM$ ($0 < x < b$). Tìm x theo b để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải

Tác giả: Võ Quỳnh Trang ; Fb: Võ Quỳnh Trang

1.



Do (P) qua M và song song với SA, BC nên:

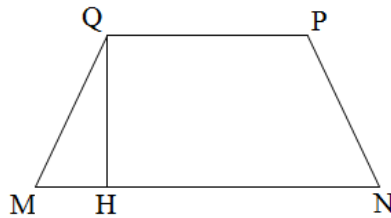
- +) Trong (SAB) kẻ $MQ \parallel SA$, cắt SB tại Q .
- +) Trong $(ABCD)$ kẻ $MN \parallel BC$, cắt CD tại N .
- +) Trong (SBC) kẻ $QP \parallel BC$, cắt SC tại P .

Nối P, N . Ta có thiết diện là hình thang $MNPQ$.

$$\text{Mặt khác: } \frac{CN}{CD} = \frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{PC}{CS} \Rightarrow PN \parallel SD \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{PC}{CS} = \frac{PN}{SD}$$

Mà $SA = SD$ nên $MQ = PN$. Vậy thiết diện là hình thang cân $MNPQ$.

2.



Ta có: $\frac{MA}{AB} = \frac{QS}{BS} = \frac{QP}{BC} \Rightarrow QP = \frac{MA \cdot BC}{AB} = \frac{2ax}{b}$

Gọi I là trung điểm của BC , J là giao điểm của MN và DI .

Khi đó: $\frac{JN}{IC} = \frac{DJ}{DI} \Rightarrow JN = \frac{DJ \cdot IC}{DI} = \frac{ax}{b} \Rightarrow MN = a + \frac{ax}{b} = \frac{a(b+x)}{b} > \frac{a(x+x)}{b} = \frac{2ax}{b} = QP$

Suy ra thiết diện là hình thang có đáy lớn là MN .

Kẻ đường cao QH (như hình vẽ) của thiết diện.

Ta có: $\frac{QM}{SA} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow QM = \frac{BM \cdot SA}{AB} = \frac{a(b-x)}{b}$; $MH = \frac{1}{2}(MN - PQ) = \frac{a(b-x)}{2b}$.

$\Rightarrow QH = \sqrt{QM^2 - MH^2} = \frac{a(b-x) \cdot \sqrt{3}}{2b}$

Khi đó diện tích thiết diện là $S_{MNPQ} = \frac{(PQ + MN) \cdot QH}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4b^2} (-3x^2 + 2bx + b^2)$

Xét $f(x) = -3x^2 + 2bx + b^2 = -3\left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + \frac{4b^2}{3} \leq \frac{4b^2}{3}$

Nên diện tích thiết diện lớn nhất khi $x = \frac{b}{3}$. Và khi đó $S_{MNPQ} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{3}$.

Câu 82. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SC = b$ và $SD = 2b$. Gọi M là trung điểm của BC , điểm P trên cạnh SD sao cho $SD = 4SP$. Mặt phẳng (α) qua M, P và song song với AC . Tính theo a, b diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Fb: Nguyenduytinh

Xét hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow BD = a, AC = a\sqrt{3}$.

Gọi giao điểm của (α) với SC, AB, SA lần lượt là N, R, Q .

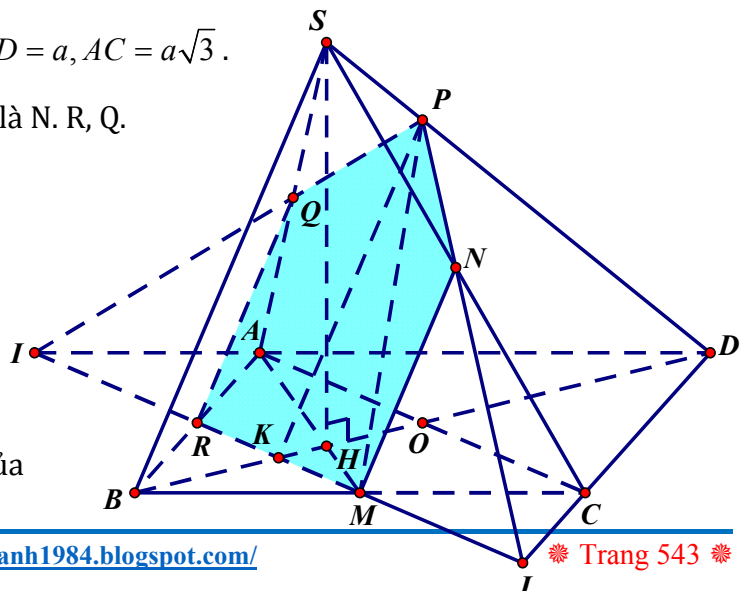
Gọi I, J là giao điểm của MR với AD và CD .

Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$

Ta có $S_{MNPQR} = S_{PIJ} - S_{IQR} - S_{JNM}$

Mặt khác, $\triangle IQR = \triangle JNM \Rightarrow S_{IQR} = S_{JNM}$

Ta có, tam giác PIJ cân, gọi K là trung điểm của



IJ ta có $PK \perp IJ$

Xét tam giác ABC có M là trung điểm của BC,

$MR \parallel AC \Rightarrow MR$ là đường trung bình của tam giác ABC và K là trung điểm của OB.

$$\Rightarrow OD = 2OK \Rightarrow \frac{OD}{DK} = \frac{2}{3}; MR = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét tam giác DIJ ta có

$$AC \parallel IJ \Rightarrow \frac{DA}{DI} = \frac{DO}{DK} = \frac{AC}{IJ} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ = \frac{3}{2}AC = \frac{3}{2}a\sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow MJ = \left(\frac{2a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) : 2 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Mặt khác, $\frac{OD}{DK} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BK}{BD} = \frac{1}{4}, \frac{SP}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BK}{BD} = \frac{SP}{SD} \Rightarrow \frac{DP}{DS} = \frac{DH}{DB}$

Xét tam giác SBD có $\frac{DP}{DS} = \frac{DK}{DB} = \frac{3}{4} = \frac{PK}{SB} \Rightarrow PK = \frac{3}{4}b$

$$\Rightarrow S_{PIJ} = \frac{1}{2}PK \cdot IJ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4}b = \frac{9ab\sqrt{3}}{16}$$

Xét tam giác DPJ

Gọi E là trung điểm của SD

Khi đó ta có $EC \parallel PJ$

Xét tam giác SCE có $NP \parallel EC$, P là trung điểm của SE

$\Rightarrow NP$ là đường trung bình của tam giác SEC

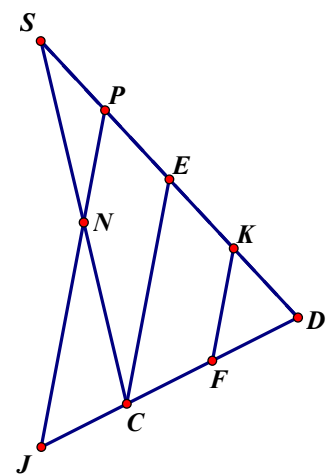
$\Rightarrow N$ là trung điểm của SC

$$\Rightarrow MN \text{ là đường trung bình của tam giác SBC} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}SB = \frac{b}{2}$$

Ta có: $MN \parallel SB \parallel PK$ nên $MN \perp IJ$

$$\Rightarrow S_{MNJ} = \frac{1}{2}MN \cdot MJ = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{ab\sqrt{3}}{16}$$

$$S_{MNPQR} = \frac{9ab\sqrt{3}}{16} - \frac{2ab\sqrt{3}}{16} = \frac{7ab\sqrt{3}}{16}.$$



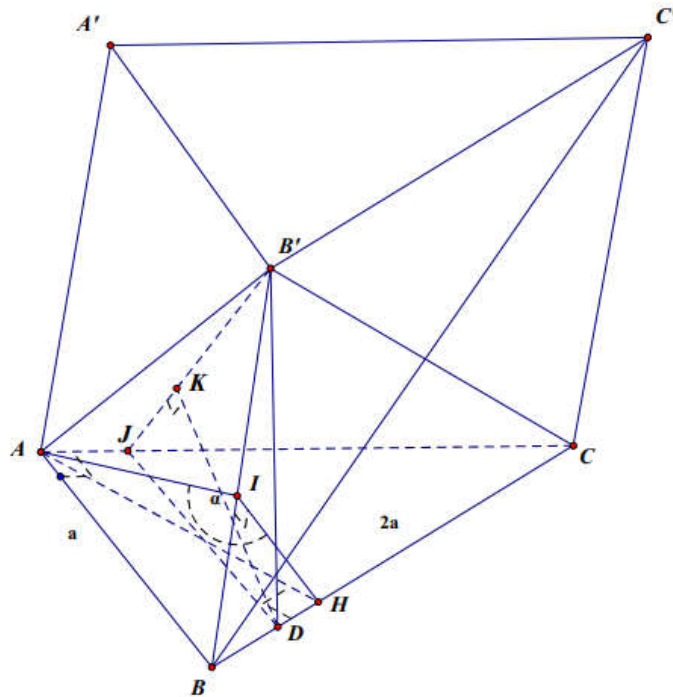
Câu 83. (HSG12 Quảng Ninh 2018-2019) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a, BC = 2a$. Mặt bên $BCC'B'$ là hình thoi và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABB'A')$ bằng α , với $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, hãy tính theo a :

a) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $B'C$.

Lời giải

* Nhận xét: Đề nên cho $\widehat{B'BC}$ là góc nhọn, nếu không phải xét thêm trường hợp $\widehat{B'BC} = 90^\circ$ và $\widehat{B'BC} > 90^\circ$



a) Dựng $AH \perp BC (H \in BC)$, suy ra $AH \perp (BCC'B')$.

Trong tam giác vuông ABC : $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dựng $HI \perp BB' (I \in BB')$ thì $\begin{cases} BB' \perp HI \\ BB' \perp AH \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AHI)$ hay $\widehat{AIH} = \alpha$.

Ta có: $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{a}{2}$, $IH = \frac{AH}{\tan \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \sin \widehat{IBH} = \frac{IH}{BH} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.BB'C} = 3 \cdot \frac{1}{3} AH \cdot \frac{1}{2} BB' \cdot BC \cdot \sin \widehat{IBH} = \frac{6\sqrt{2}}{5} a^3$.

b) Dựng $B'D \perp BC (D \in BC)$, ta có $B'D \perp (ABC)$. Ta có

Câu 1. $d(A'C', B'C) = d(A'C', (B'AC)) = d(C', (B'AC)) = d(B, (B'AC)) = \frac{BC}{DC} \cdot d(D, (B'AC))$.

Dựng $DJ \perp AC (J \in AC)$, $DK \perp B'J (K \in B'J)$, khi đó $d(D, (B'AC)) = DK$.

Trong tam giác vuông IBH : $\sin \widehat{IBH} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \cos \widehat{IBH} = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} BD = BB' \cdot \cos \widehat{IBH} = \frac{2a}{5} \\ B'D = BB' \cdot \sin \widehat{IBH} = \frac{4\sqrt{6}a}{5} \end{cases}$

Trong tam giác ABC : $\frac{DJ}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{2a - \frac{2a}{5}}{2a} = \frac{4}{5} \Rightarrow DJ = \frac{4}{5}a$.

$$\text{Suy ra } DK = \frac{DB' \cdot DJ}{\sqrt{DB'^2 + DJ^2}} = \frac{\frac{4\sqrt{6}a}{5} \cdot \frac{4}{5}a}{\sqrt{\frac{96}{25}a^2 + \frac{16}{25}a^2}} = \frac{4\sqrt{42}a}{35}.$$

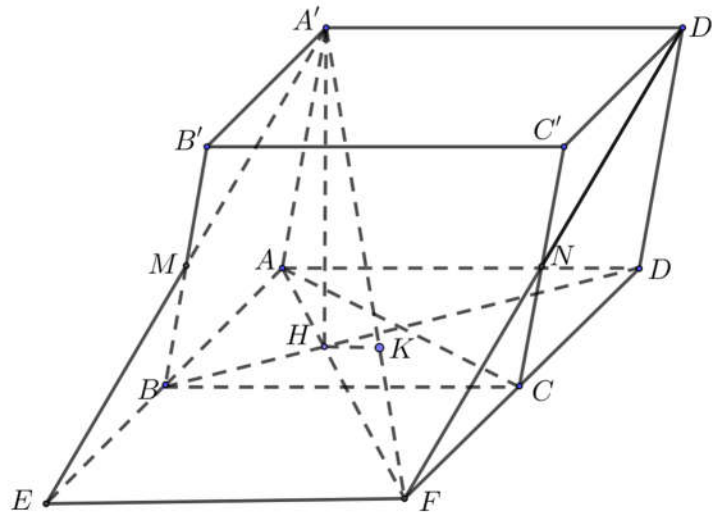
$$\text{Vậy } d(A'C'; B'C) = \frac{BC}{DC} \cdot DK = \frac{\sqrt{42}}{7}a.$$

Câu 84. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết các đường thẳng $A'A$, $A'B$, $A'C$ cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BB' , CC' .

- a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.
b) Tính khoảng cách giữa AD và mặt phẳng $(D'MN)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Dung; Fb: Dung Nguyen



- a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (ABC) , do các đường thẳng $A'A$, $A'B$, $A'C$ cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Mặt khác, $ABCD$ là hình thoi với góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên tam giác ABC đều. Do đó H đồng

$$\text{thời là trực tâm, trọng tâm của tam giác } ABC \Rightarrow AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vì $A'H \perp (ABCD)$ nên $A'A$ có hình chiếu trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AH .

$\Rightarrow$ Góc giữa $A'A$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{AA'H}$. Theo bài ra ta có $\widehat{AA'H} = 60^\circ$

$$\text{Trong tam giác } A'AH \text{ có } A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$V = S_{ABCD} \cdot A'H = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}.$$

Tác giả: Hồ Ngọc Hưng ; Fb: Ho Ngoc Hung

b) Tính khoảng cách giữa AD và mặt phẳng $(D'MN)$.

Cách 1:

Gọi $E = A'M \cap AB$, $F = D'N \cap DC \Rightarrow EF \parallel BC \parallel AD$ và B, C lần lượt là trung điểm của đoạn AE, DF .

$$\text{Ta có } d(AD, (D'MN)) = d(A, (A'EF)) = \frac{3}{2} d(H, (A'EF)).$$

Vì $AH \perp BC$ nên $AH \perp EF$ hay $HF \perp EF \Rightarrow d(H, (A'EF))$ bằng chiều cao h của tam giác $A'HF$.

$$\text{Trong đó } A'H = a, HF = 2HA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, A'F = \sqrt{A'H^2 + HF^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } A'HF \text{ vuông tại } H \Rightarrow h = \frac{HA' \cdot HF}{A'F} = \frac{2a}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy } d(AD, (D'MN)) = d(A, (A'EF)) = \frac{3}{2} d(H, (A'EF)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{7}} = \frac{3a}{\sqrt{7}}.$$

Cách 2:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $I \equiv O(0;0;0)$, $B\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $H\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$,

$$A\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), A'\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\right).$$

$$\text{Do } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow B'\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{3}; a\right), C'\left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{3}; a\right).$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow D'\left(a; \frac{a\sqrt{3}}{6}; a\right).$$

$$\overrightarrow{MN} = (a; 0; 0) = a(1; 0; 0) = a\vec{i}, \overrightarrow{MD'} = \left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{6}(9; 2\sqrt{3}; 3) = \frac{a}{6}\vec{m}.$$

$$\text{Vecto pháp tuyến của } (D'MN) \text{ là } \vec{n} = [\vec{i}; \vec{m}] = (0; -3; 2\sqrt{3}).$$

$$\text{Mặt phẳng } (D'MN) \text{ có phương trình } 3y - 2\sqrt{3}z + \frac{3a\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Vì AD song song với MN nên AD song song với $(D'MN)$.

Câu 85. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là

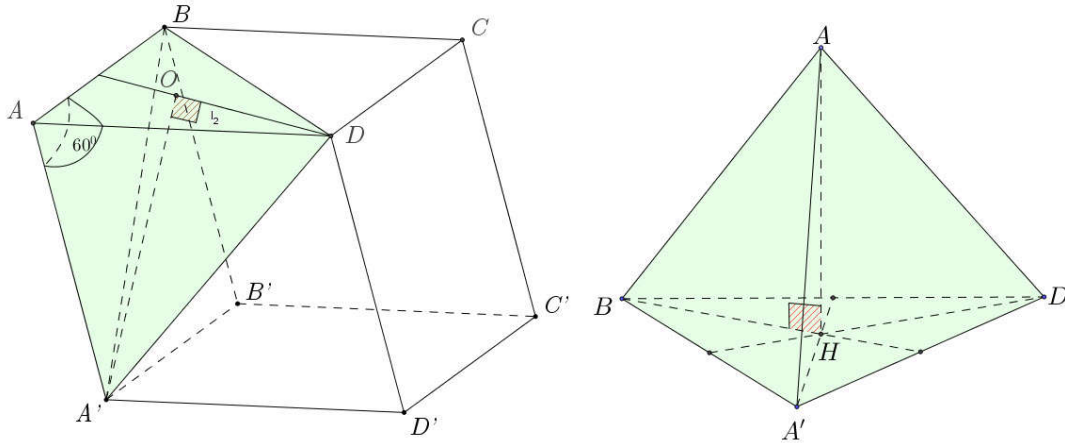
hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$.

a) Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

b) Gọi I, J, G lần lượt là trung điểm $A'D, AB, IJ$. Mặt phẳng (P) đi qua G cắt các cạnh $A'A, A'B, A'D$ lần lượt tại A_1, B_1, D_1 ($A \notin (P), B \notin (P), D \notin (P)$). Gọi $V_{A.A_1B_1D_1}, V_{B.A_1B_1D_1}, V_{D.A_1B_1D_1}$ lần lượt là thể tích các khối chóp $A.A_1B_1D_1, B.A_1B_1D_1, D.A_1B_1D_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = V_{A.A_1B_1D_1} + V_{B.A_1B_1D_1} + V_{D.A_1B_1D_1}$ theo a

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tuấn Phương; Fb: phuongnguyentuan86



1. Các tam giác $ABD, AA'D, AA'B$ là các tam giác đều suy ra $A'B = BD = A'D = a$. Do đó tứ diện $AA'BD$ là tứ diện đều có cạnh bằng a .

Gọi H là trọng tâm tam giác $A'BD$. Ta có $BH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tam giác ABH vuông tại H nên

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; S_{A'BD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{A.A'BD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6 \cdot V_{A.A'BD} = 6 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Cách khác:

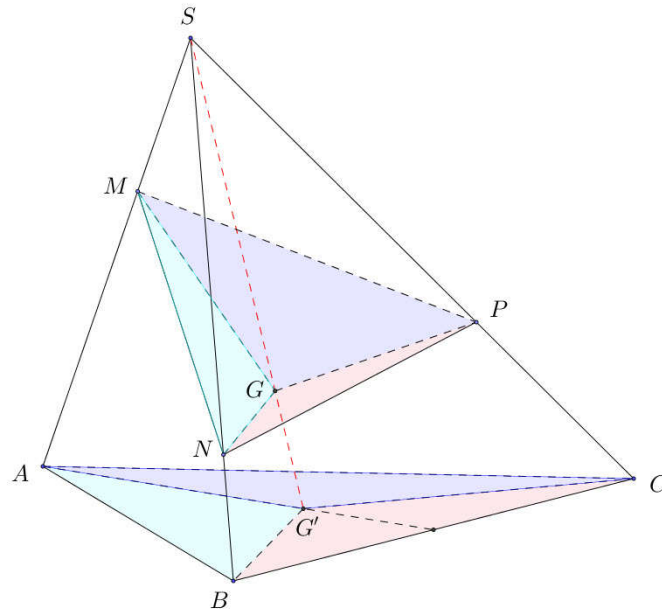
Gọi O là trọng tâm $\triangle ABD$, tứ diện $A'ABD$ là tứ diện đều nên $A'O$ vuông góc với mặt phẳng (ABD) . Do đó $A'O$ là chiều cao của hình hộp.

$$\text{Ta có } A'O = \sqrt{A'D^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'O \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

2. **Bổ đề:** Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua trọng tâm G của tứ diện lần lượt cắt SA, SB, SC tại M, N, P . CMR: $\frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = 4$.

Chứng minh:



Gọi G' là trọng tâm $\triangle ABC$. Theo tính chất trọng tâm của tứ diện ta có S, G, G' thẳng hàng và $\frac{SG}{SG'} = \frac{3}{4}$. Thêm nữa $V_{SABGG'} = V_{SBCG'} = V_{SG'CA} = \frac{1}{3}V_{SABC}$.

Ta có:

$$\frac{V_{SMNG}}{V_{SABG'}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SG}{SG'} \Leftrightarrow \frac{3V_{SMNG}}{V_{SABC}} = \frac{3SM \cdot SN}{4} \Leftrightarrow \frac{V_{SMNG}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SN}{4} \quad (1) \quad (\text{Lưu ý } SA = SB = 1).$$

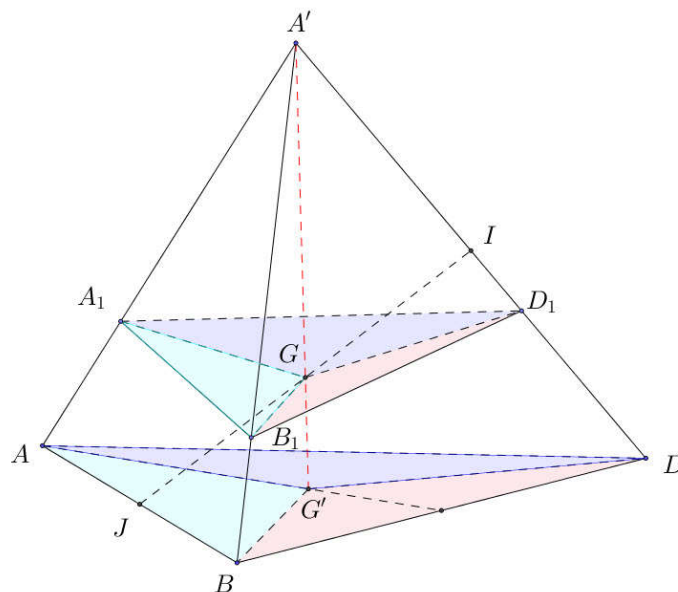
Lập luận tương tự thu được $\frac{V_{SNPG}}{V_{SABC}} = \frac{SN \cdot SP}{4} \quad (2)$ và $\frac{V_{SGPM}}{V_{SG'CA}} = \frac{SP \cdot SM}{4} \quad (3).$

Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM}{4} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot SM \cdot SN \cdot SP = SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM \Leftrightarrow \frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = 4.$$

Quay lại bài toán đã cho:



G là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của tứ diện $A'ABD$ nên G là trọng tâm tứ diện. Coi a là một đơn vị dài. Áp dụng bổ đề trên cho tứ diện $A'ABD$ với G là trọng tâm tứ diện và

A_1, B_1, D_1 lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) qua G với các cạnh $A'A, A'B, A'D$. Ta có:

$$\frac{1}{A'A_1} + \frac{1}{A'B_1} + \frac{1}{A'D_1} = 4.$$

Đặt $A'A_1 = x; A'B_1 = y; A'D_1 = z$ ($0 < x, y, z < 1$) ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $4 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Leftrightarrow \frac{27}{xyz} \leq 64 \Leftrightarrow xyz \geq \frac{27}{64}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{4}$ (mặt phẳng (P) song song với (ABD)).

Mặt khác

$$\frac{V_{AA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}} = \frac{AA_1}{A'A_1} = \frac{1-x}{x}; \frac{V_{BA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}} = \frac{BB_1}{A'B_1} = \frac{1-y}{y}; \frac{V_{DA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}} = \frac{DD_1}{A'D_1} = \frac{1-z}{z} \text{ và}$$

$$\frac{V_{A'A_1B_1D_1}}{V_{A'ABD}} = \frac{A'A_1}{A'A} \cdot \frac{A'B_1}{A'B} \cdot \frac{A'D_1}{A'D} = xyz \Leftrightarrow V_{A'A_1B_1D_1} = xyz \cdot V_{A'ABD}$$

Suy ra

$$T = \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{y} - 1 + \frac{1}{z} - 1 \right) \cdot V_{A'A_1B_1D_1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3 \right) \cdot xyz \cdot V_{A'ABD} = xyz \cdot V_{A'ABD} \geq \frac{27}{64} V_{A'ABD}$$

Mà $V_{A'ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow T \geq \frac{27}{64} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow T_{\min} \geq \frac{9a^3\sqrt{2}}{256}$ đạt được khi mp (P) song song với mp (ABD) .

Cách trình bày khác: (Theo thầy Kiên Nguyễn)

Chứng minh được $\frac{A'A}{A'A_1} + \frac{A'B}{A'B_1} + \frac{A'D}{A'D_1} = 4 \Rightarrow \frac{AA_1}{A'A_1} + \frac{BB_1}{A'B_1} + \frac{DD_1}{A'D_1} = 1$ (cách chứng minh tương tự như

bổ đề trên)

Đặt $h_1 = d(A; (A_1B_1D_1)); h_2 = d(B; (A_1B_1D_1)); h_3 = d(C; (A_1B_1D_1)); h = d(A'; (A_1B_1D_1))$

Ta có $\frac{h_1}{h} = \frac{AA_1}{A'D_1}; \frac{h_2}{h} = \frac{BB_1}{A'B_1}; \frac{h_3}{h} = \frac{DD_1}{A'D_1} \Rightarrow \frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h} + \frac{h_3}{h} = 1 \Leftrightarrow h_1 + h_2 + h_3 = h$.

$$V_{A.A_1B_1D_1} + V_{B.A_1B_1D_1} + V_{D.A_1B_1D_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1B_1D_1} \cdot (h_1 + h_2 + h_3) = \frac{1}{3} h \cdot S_{\Delta A_1B_1D_1} = V_{A'A_1B_1D_1}$$

$$\text{Lại có } \frac{V_{A'A_1B_1D_1}}{V_{A'ABD}} = \frac{AA'}{A'A_1} \cdot \frac{A'B}{A'B_1} \cdot \frac{A'D}{A'D_1} \leq \left(\frac{\frac{AA'}{A'A_1} + \frac{A'B}{A'B_1} + \frac{A'D}{A'D_1}}{3} \right)^3 = \frac{64}{27}$$

$$\Rightarrow V_{A'A_1B_1D_1} \geq \frac{27}{64} V_{A'ABD} = \frac{27}{64} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{9a^3\sqrt{2}}{256}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{AA'}{A'A_1} = \frac{A'B}{A'B_1} = \frac{A'D}{A'D_1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A_1B_1D_1) // (ABD)$.

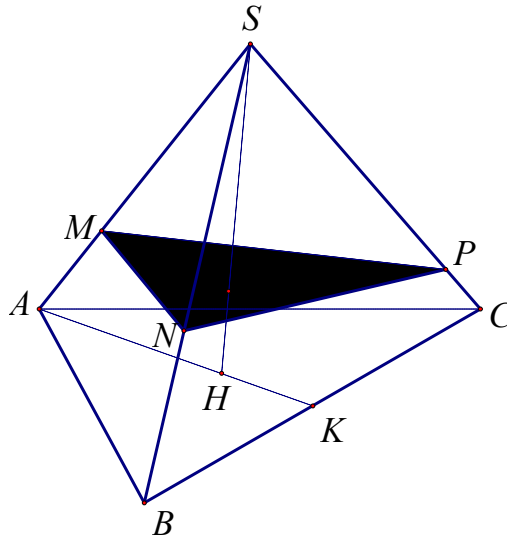
Vậy $\min T = \frac{9a^3\sqrt{2}}{256}$ đạt được khi $(P) // (ABD)$.

Nhận xét: (Lê Thanh Bình) Cách chứng minh bằng vector cho bổ đề:

Bổ đề: Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = a$. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua trọng tâm G của tứ

diện lần lượt cắt SA, SB, SC tại M, N, P . CMR: $\frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = \frac{4}{a}$.

Chứng minh:



Ta có $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SP} = z\overrightarrow{SC}$ với $x = \frac{SM}{SA} = \frac{SM}{a}$; $y = \frac{SN}{SB} = \frac{SN}{a}$; $z = \frac{SP}{SC} = \frac{SP}{a}$

Vì G là trọng tâm tứ diện $S.ABC$ nên ta có $SG \cap (ABC) = H$ với H là trọng tâm tam giác ABC .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SH} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x}\overrightarrow{SM} + \frac{1}{y}\overrightarrow{SN} + \frac{1}{z}\overrightarrow{SP} \right)$$

$$\text{Vì } M, N, P, G \text{ đồng phẳng nên } \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \Leftrightarrow \frac{a}{SM} + \frac{a}{SN} + \frac{a}{SP} = 4$$

$$\text{Hay } \frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = \frac{4}{a}$$

Câu 86. (HSG12 tỉnh Điện Biên năm 2018-2019)

1. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác với S . Chứng

$$\text{minh rằng: } \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$$

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , gọi G là trọng tâm tam giác SCD .

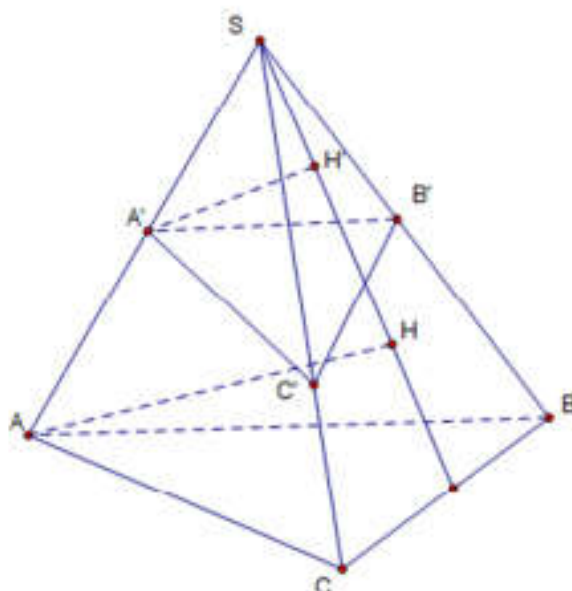
a) Tính thể tích khối chóp $S.OGC$.

b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) .

c) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BG .

Lời giải

1.



Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, A' trên (SBC) .

$$\text{Ta có } \frac{AH}{AH'} = \frac{SA}{SA'}$$

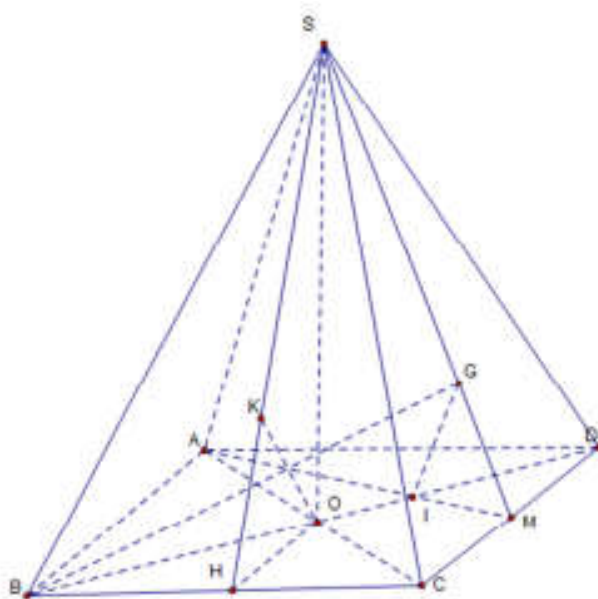
$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin \widehat{BSC}; S_{SB'C'} = \frac{1}{2} SB' \cdot SC' \cdot \sin \widehat{BSC}$$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{SBC} = \frac{1}{6} AH \cdot SB \cdot SC \cdot \sin \widehat{BSC}$$

$$V_{S.A'B'C'} = V_{A'.SB'C'} = \frac{1}{3} A'H' \cdot S_{SB'C'} = \frac{1}{6} A'H' \cdot SB' \cdot SC' \cdot \sin \widehat{BSC}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{AH}{A'H'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$$

2.



$$a) \text{ Ta có } AC = a\sqrt{2}; SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Gọi M là trung điểm của CD

$$\text{Khi đó } V_{S.OCM} = \frac{1}{6} SO \cdot OM \cdot MC = \frac{a^3 \sqrt{10}}{48}$$

$$\frac{V_{S.OCG}}{V_{S.OCM}} = \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra } V_{S.OCG} = \frac{2}{3} V_{S.OCM} = \frac{a^3 \sqrt{10}}{72}.$$

$$b) \text{ Ta có } d(G, (SBC)) = \frac{2}{3} d(M, (SBC)) = \frac{2}{3} d(O, (SBC))$$

Gọi H là trung điểm BC , K là hình chiếu vuông góc của O trên SH .

$$\text{Ta có } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{10a^2} = \frac{22}{5a^2}$$

$$d(O, (SBC)) = OK = \frac{a\sqrt{10}}{22}$$

$$d(G, (SBC)) = \frac{2}{3} d(O, (SBC)) = \frac{a\sqrt{110}}{33}$$

c) Gọi I là giao của BD và AM , I là trọng tâm tam giác ADC .

Suy ra $IG \parallel SA$ nên góc giữa hai đường thẳng SA, BG bằng góc giữa hai đường thẳng IG, BG

$$\text{Ta có } IG = \frac{1}{3} SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}; BI = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; BG = \frac{a\sqrt{11}}{3}$$

$$\cos \widehat{IGB} = \frac{BG^2 + IG^2 - BI^2}{2 \cdot BG \cdot IG} = \frac{\sqrt{33}}{11}.$$

Câu 87. (HSG12 tỉnh QUẢNG NINH 2018-2019) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a, BC = 2a$. Mặt bên $BCC'B'$ là hình thoi và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABB'A')$ bằng α .

1. Trong trường hợp $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, hãy tính theo a :

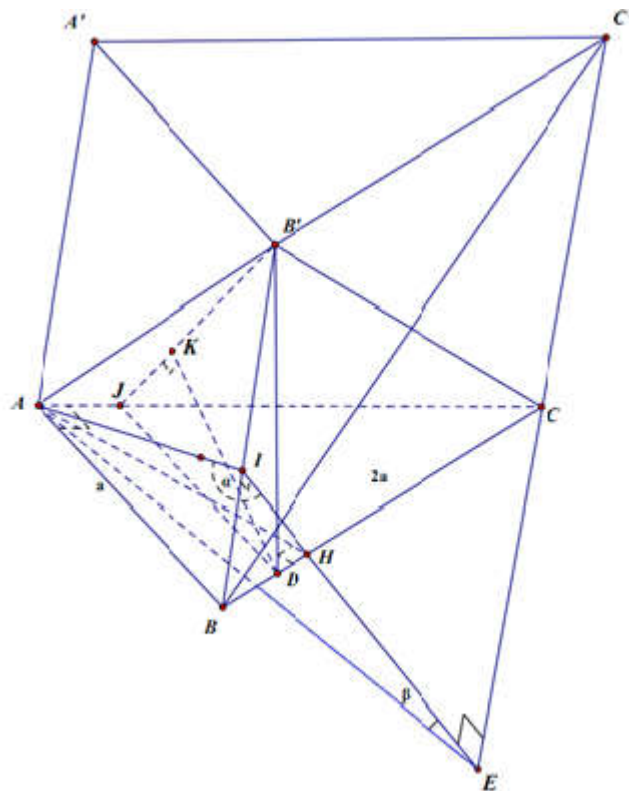
a. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $B'C$.

2. Gọi β là góc giữa hai mặt bên qua CC' của lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tìm hệ thức liên hệ giữa $\cot \alpha$ và $\cot \beta$.

Lời giải

Tác giả: Trần Văn Tiền ; Fb: Tien Tran



1a. Đặt $AH \perp BC$ ($H \in BC$), suy ra $AH \perp (BCC'B')$. Trong tam giác vuông ABC có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$; $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đặt $HI \perp BB'$ ($I \in BB'$), Ta có $\begin{cases} BB' \perp HI \\ BB' \perp AH \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AHI)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABB'A')$ bằng góc giữa hai đường thẳng AI và HI bằng $\widehat{AIH} = \alpha$ (Do tam giác AHI vuông tại H nên $\widehat{AIH}$ là góc nhọn).

Trong tam giác vuông ABH ta có: $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{a}{2}$, ta lại có:
 $\tan \alpha = \tan \widehat{AIH} = \frac{AH}{IH} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IH = \frac{AH}{\tan \alpha} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \sin \widehat{IBH} = \frac{IH}{BH} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{A.BCB'C'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot BC \cdot BB' \cdot \sin \widehat{B'BC} \cdot AH = \frac{6a^3\sqrt{2}}{5}$.

1b.

Đặt $B'D \perp BC$ ($D \in BC$) $\Rightarrow B'D \perp (ABC)$.

Ta có $A'C' \parallel AC \Rightarrow A'C' \parallel (B'AC)$ nên:

$$d(A'C', B'C) = d(A'C', (B'AC)) = d(C', (B'AC)) = d(B, (B'AC)) = \frac{BC}{DC} \cdot d(D, (B'AC)).$$

Đặt $DJ \perp AC$ ($J \in AC$) Ta có $DJ \parallel AB$.

Đặt $DK \perp JB'$ ($K \in JB'$).

Ta dễ dàng chứng minh được $DK \perp (B'AC) \Rightarrow d(D, (B'AC)) = DK$.

Ta có: $\cos \widehat{B'BD} = \cos \widehat{IBH} = \frac{BI}{BH} = \frac{1}{5}$.

Mà $\cos \widehat{B'BD} = \frac{BD}{BB'} \Rightarrow BD = BB' \cdot \cos \widehat{B'BD} = \frac{2a}{5} \Rightarrow \frac{DJ}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{4}{5} \Rightarrow DJ = \frac{4a}{5}$.

Ta có: $\sin \widehat{B'BD} = \sin \widehat{IBH} = \frac{IH}{BH} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{B'D}{BB'} \Rightarrow B'D = \frac{4a\sqrt{6}}{5}$.

Xét tam giác $B'DJ$ vuông tại D có: $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{B'D^2} + \frac{1}{DJ^2} = \frac{25}{96a^2} + \frac{25}{16a^2} = \frac{175}{96a^2}$.

Vậy: $d(A'C', B'C) = \frac{BC}{DC} \cdot DK = \frac{5}{4} \cdot \frac{4a\sqrt{42}}{35} = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.

2.

Dựng $HE \perp CC'$ ($E \in CC'$). Ta có $\begin{cases} CC' \perp AH \\ CC' \perp HE \end{cases} \Rightarrow CC' \perp (AHE)$.

Ta có góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ACC'A')$ bằng góc giữa hai đường thẳng AE và HE (do tam giác AHE vuông tại H nên $\widehat{HEA}$ là góc nhọn).

Xét tam giác vuông AHE , ta có $\cot \beta = \frac{HE}{AH}$.

Ta có $BH = \frac{a}{2}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $IH = AH \cdot \cot \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cot \alpha$.

Do tam giác BHI vuông tại I nên $HI < BH \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} \cot \alpha < \frac{a}{2} \Rightarrow \cot \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 60^\circ < \alpha < 90^\circ$.

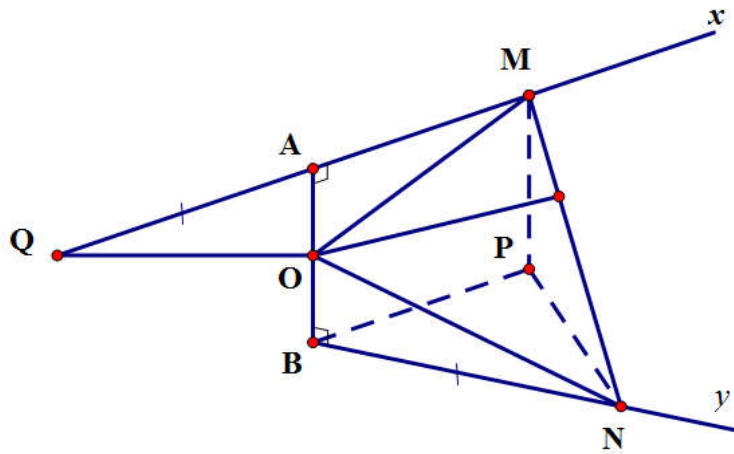
Vì $BH = \frac{a}{2} = \frac{BC}{4} \Rightarrow \frac{HE}{HI} = \frac{HC}{HB} = 3 \Rightarrow HE = 3HI \Rightarrow \cot \beta = \frac{HE}{AH} = \frac{3HI}{AH} = 3 \cot \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 90^\circ$).

Vậy $\cot \beta = 3 \cot \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 90^\circ$).

Câu 88. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau, vuông góc và nhận đoạn AB làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM + BN = MN$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh tam giác OMN là tam giác tù và khoảng cách từ O đến đường thẳng MN không đổi khi M, N di động trên Ax, By .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trần Vũ; Fb: Nguyễn Trần Vũ



Dựng hình chữ nhật $ABPM$.

Ta có:

$$MP \parallel AB \text{ mà } \begin{cases} AB \perp BN \\ AB \perp BP \end{cases} \Rightarrow MP \perp NP$$

$$\begin{cases} BN \perp AB \\ BN \perp AM \end{cases} \Rightarrow BN \perp (ABPM) \Rightarrow BN \perp BP$$

$$\text{Do đó: } MN^2 = MP^2 + NP^2 = MP^2 + BP^2 + BN^2 = AB^2 + AM^2 + BN^2$$

$$\text{Theo đề bài ta có } MN = AM + BN \Rightarrow MN^2 = AM^2 + BN^2 + 2AM \cdot BN$$

$$\text{Suy ra: } AM \cdot BN = \frac{AB^2}{2}$$

Áp dụng hệ quả định lý côsin cho tam giác OMN , ta có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{MON} &= \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM})^2 + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN})^2 - (AM + BN)^2}{2OM \cdot ON} \\ &= \frac{OA^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} + AM^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BN} + BN^2 - AM^2 - 2AM \cdot BN - BN^2}{2OM \cdot ON} \\ &= \frac{OA^2 + OB^2 - 2AM \cdot BN}{2OM \cdot ON} = \frac{\frac{AB^2}{2} - 2 \cdot \frac{AB^2}{2}}{2OM \cdot ON} = -\frac{AB^2}{4OM \cdot ON} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widehat{MON}$ là góc tù $\Rightarrow$ (đpcm).

Kẻ $OH \perp MN, (H \in MN)$

Trên tia đối của tia Ax lấy điểm Q sao cho $AQ = BN$

$$\text{Do } \triangle OAQ = \triangle OBN \text{ (c - g - c)} \Rightarrow OQ = ON$$

$$\text{Vì } MN = AM + BN = AM + AQ = MQ \Rightarrow \triangle OMQ = \triangle OMN \text{ (c - c - c)} \Rightarrow OA = OH$$

$$\text{Vậy } d(O, MN) = OH = \frac{AB}{2} \text{ không đổi.}$$

Câu 89. (HSG12 YÊN LẠC 2 năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 3$, $BC = 6$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, các mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ các góc bằng nhau. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{6}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BD .

Lời giải

Hạ $SH \perp AB$ ($H \in AB$) $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Kẻ $HK \perp CD$ ($K \in CD$) $\Rightarrow$ tứ giác $HBCK$ là hình chữ nhật.

Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là: $\widehat{SBH}$

Theo giả thiết: $\widehat{SBH} = \widehat{SKH} \Rightarrow \triangle SHB = \triangle SHK$ ($g - c - g$) $\Rightarrow HK = HB = BC = 6$.

Do đó A là trung điểm của HB .

Ta thấy $\square ABCK$ là hình bình hành $\Rightarrow BD \parallel AK \Rightarrow BD \parallel (SAK)$ mà $SA \in (SAK)$

Suy ra $d(BD, SA) = d(BD, (SAK)) = d(D, (SAK)) = d(H, (SAK)) = h = \sqrt{6}$.

Do tam diện $H.SAK$ vuông tại H nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}$

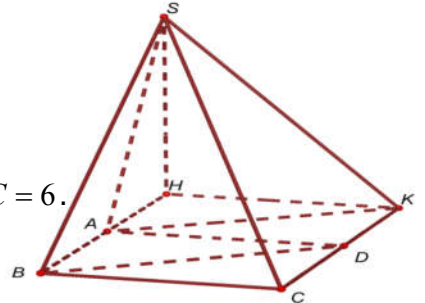
$\Rightarrow SH = 6$ Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = 36$ (dvtt).

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và $BD \Rightarrow \alpha = (BD, SA) = (AK, SA)$

Ta có: $SK = 6\sqrt{2}$, $SA = AK = 3\sqrt{5}$. Trong tam giác SAK có:

$$\cos \widehat{SAK} = \frac{AS^2 + AK^2 - SK^2}{2 \cdot AS \cdot AK} = \frac{45 + 45 - 72}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{1}{5}.$$

Vậy $\alpha = \widehat{SAK} = \arccos \frac{1}{5}$.



Câu 90. (HSG11 Nguyễn Đức Cảnh Thái Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi tâm O , biết SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ Cho $AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng

A. 90° .

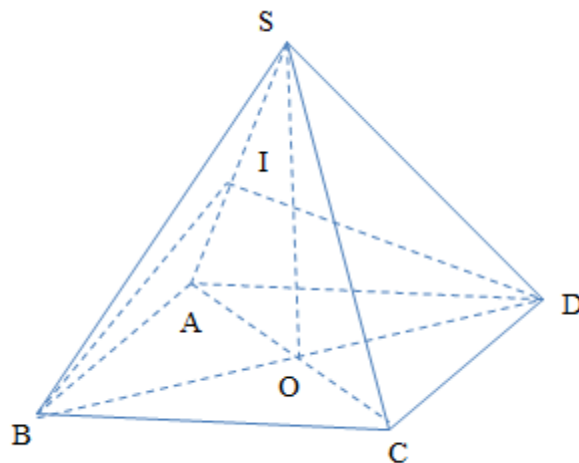
B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

Tác giả: Tuyetnguyen; Fb: Tuyetnguyen

**Chọn A**

Ta có $\begin{cases} SO \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA.$

Gọi I là trung điểm của SA .

Do tam giác SAB cân tại B nên $BI \perp SA$, mà $BD \perp SA \Rightarrow (BID) \perp SA$

Suy ra góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng góc giữa hai đường thẳng BI và DI .

Xét tam giác SBO vuông tại O có $OB^2 = SB^2 - SO^2 = a^2 - \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow OB = \frac{a}{\sqrt{3}}.$

Ta có $SA \perp (BID) \Rightarrow SA \perp OI$, nên tam giác SOI vuông cân tại $O \Rightarrow OI = \frac{SA}{2} = \frac{SO\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$

$$\Rightarrow OI = \frac{BD}{2}$$

Tam giác IBD có OI là trung tuyến, với $OI = \frac{BD}{2}$ nên tam giác IBD vuông tại I .

Câu 91. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$

B. $OA \perp BC.$

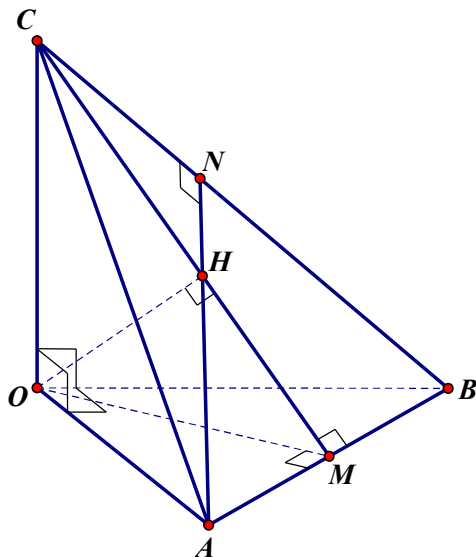
C. H là trực tâm tam giác ABC .

D. $AH \perp (OBC).$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Hùng; Fb: Nguyễn Mạnh Hùng

Chọn D



Gọi M là giao của CH và AB . Gọi N là giao điểm của AH và CB . Ta có tam giác COM vuông tại O .

$$\begin{cases} AB \perp OH \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (COM). \text{ Suy ra } OM \text{ là đường cao tam giác } OBA.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2}. \text{ Mà } \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \text{ nên } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Do đó mệnh đề ở **A** là đúng.

$$\text{Ta có } \begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp BC. \text{ Do đó mệnh đề ở } \mathbf{B} \text{ là đúng.}$$

Theo chứng minh trên ta có $CH \perp AB$. Tương tự, ta có $AH \perp BC$. Suy ra H là trực tâm tam giác ABC . Do đó mệnh đề ở **C** đúng.

Vậy chọn đáp án **D**.

Câu 92. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

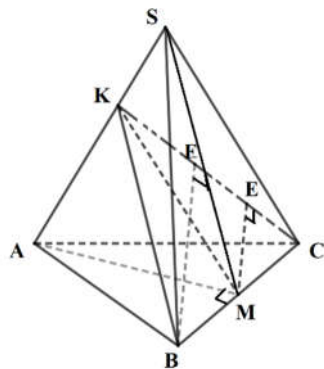
C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Diệu Linh ; Fb: Dieulinh Nguyen

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC . Trong tam giác SAB kẻ $BK \perp SA$, $K \in SA$.

Ta có tam giác ABC vuông cân tại A nên $AM \perp BC$.

Mặt khác $\Delta SAB = \Delta SAC$ (c.c.c) $\Rightarrow BK = KC$.

Trong tam giác BKC , kẻ $BF \perp KC$, $F \in KC$; $ME \parallel BF$, $E \in KC$.

Từ đó dẫn đến ME là đường trung bình của tam giác BKC .

Ta cũng có tam giác SBC cân tại S nên $SM \perp BC$.

Như vậy $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SA$.

Có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BK \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BKC) \Rightarrow (SAC) \perp (BKC)$.

Vì $\begin{cases} (SAC) \perp (BKC) \\ (SAC) \cap (BKC) = KC \Rightarrow BF \perp (SAC) \text{ nên } d_{(B; (SAC))} = BF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ME = \frac{a\sqrt{3}}{4} \\ BF \perp KC \end{cases}$

Tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh bằng a nên $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow MC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác KMC vuông tại M , áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:

$$\frac{1}{ME^2} = \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{MC^2} \Rightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{16}{3a^2} - \frac{2}{a^2} = \frac{10}{3a^2} \Rightarrow MK = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}}.$$

Tam giác KMC vuông tại M có $KM^2 + MC^2 = KC^2 \Rightarrow KC = \frac{2a}{\sqrt{5}} = KB$.

Tam giác SAB vuông tại B , áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{SB^2} = \frac{5}{4a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow SB = 2a = SC.$$

Tam giác SAC vuông tại C có diện tích $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot SC = a^2$.

$$\text{Thể tích của khối } S.ABC = \frac{1}{3} \cdot S_{SAC} \cdot BF = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 93. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Tính theo a thể tích của khối đa diện có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chóp đã cho.

A. $\frac{5a^3}{24}$.

B. $\frac{5a^3}{12}$.

C. $\frac{a^3}{12}$.

D. $\frac{3a^3}{8}$.

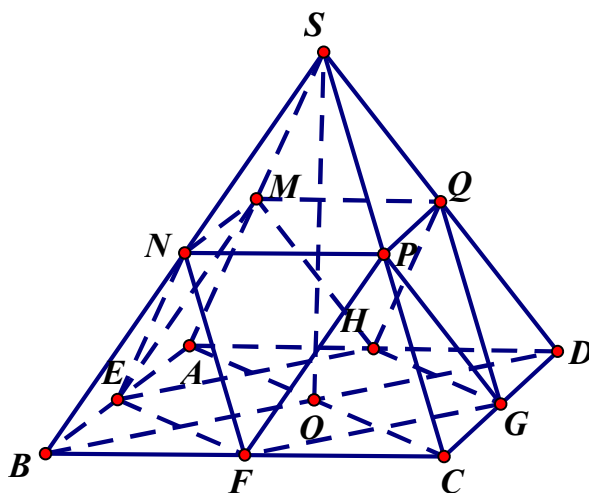
Lời giải

Tác giả: Dương Chiến; Fb: DuongChien

Phản biện: Nguyễn Văn Mộng; Fb: Nguyễn Văn Mộng

Chọn B

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SO = 2a$ như hình vẽ



Gọi E, F, G, H, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm cạnh $AB, BC, CD, DA, SA, SB, SC, SD$.

Gọi V là thể tích khối đa diện cần tính, ta có:

$$V = V_{S.ABCD} - V_{S.MNPQ} - V_{BEFN} - V_{CFGP} - V_{DGHQ} - V_{AHM} = V_{S.ABCD} - V_{S.MNPQ} - 4V_{B.EFN}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} a^2 \cdot 2a = \frac{2a^3}{3}; \quad \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.MNPQ} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{12}.$$

$$\frac{V_{B.EFN}}{V_{B.ACS}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{B.EFN} = \frac{1}{8} V_{S.ABC} = \frac{1}{16} V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{24}.$$

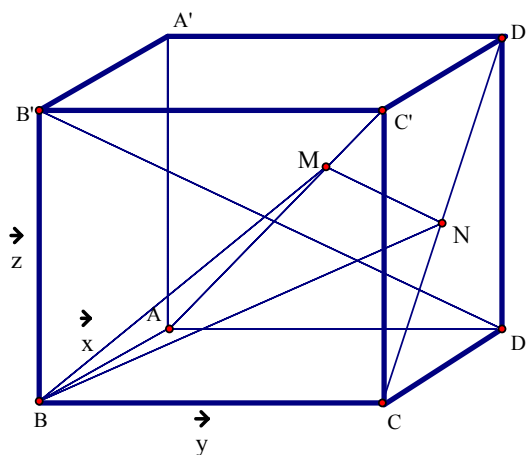
$$\text{Vậy } V = \frac{2a^3}{3} - \frac{a^3}{12} - 4 \cdot \frac{a^3}{24} = \frac{5a^3}{12}.$$

Câu 94. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{CN} = t\overrightarrow{CD'}$ với $t, k \neq 0$. Tính độ dài MN theo a khi MN song song với $B'D$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Hải Thu; Fb: Đỗ Hải Thu

Phản biện: Tran Quoc An



Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{z}$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a nên $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, $\vec{y} \cdot \vec{z} = 0$, $\vec{z} \cdot \vec{x} = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BA} + k(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BA} + k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}) \\ &= (1-k)\vec{x} + k\vec{y} + k\vec{z}.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{BC} + t(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CC'}) = t\vec{x} + \vec{y} + t\vec{z}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = t\vec{x} + \vec{y} + t\vec{z} - [(1-k)\vec{x} + k\vec{y} + k\vec{z}] = (t+k-1)\vec{x} + (1-k)\vec{y} + (t-k)\vec{z}.$$

$$\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB'} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}.$$

$$\text{Vì } MN \parallel B'D \text{ nên } \overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{B'D} \Leftrightarrow \begin{cases} t+k-1=m \\ 1-k=m \\ t-k=-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ k=\frac{3}{4} \\ m=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} - \frac{1}{4}\vec{z} = \frac{1}{4}(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}).$$

$$\Rightarrow MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z})^2$$

$$= \frac{1}{16}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} - 2\vec{y} \cdot \vec{z} - 2\vec{z} \cdot \vec{x}) = \frac{1}{16}(a^2 + a^2 + a^2) = \frac{3a^2}{16}.$$

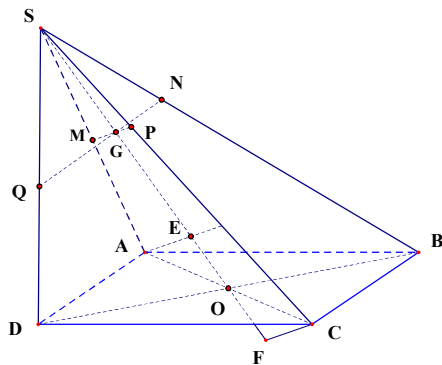
$$\text{Vậy } MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 95. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Một mặt phẳng không qua S cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn :

$\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SP}$. Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu thức $T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Huệ ; Fb: Tran Hue



- Dựng mặt phẳng (P) không qua S thỏa mãn yêu cầu bài toán :

Trên đoạn SA lấy M sao cho $SA = 2 SM$

Trên đoạn SC lấy P sao cho $SC = 3 SP$

Trong mp (SAC) : gọi $G = SO \cap MP$

$$MP \subset (SAC)$$

Do $NQ \subset (SBD)$

$$(SAC) \cap (SBD) = SO$$

MP, NQ phân biệt, không song song

$\Rightarrow SO, MP, NQ$ đồng quy tại G.

Trong (SBD) : Qua G kẻ đường thẳng d cắt SB tại N, SD tại Q.

- Trong mặt phẳng (SAC) vẽ AE, CF song song với MP cắt SO lần lượt tại E, F.

$$\text{Vì } AE \parallel MP \text{ nên ta có : } \frac{SA}{SM} = \frac{SE}{SG}.$$

$$CF \parallel MP \text{ nên ta có : } \frac{SC}{SP} = \frac{SF}{SG}.$$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được:

$$\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SE + SF}{SG} = \frac{SO - OE + SO + OF}{SG} \quad (1)$$

Xét $\triangle AOE$ và $\triangle COF$ có :

$OA = OC$ (vì ABCD là hình bình hành)

$$\widehat{AOE} = \widehat{COF} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{EAO} = \widehat{FCO} \text{ (2 góc ở vị trí SLT, } AE \parallel CF)$$

$$\Rightarrow \triangle AOE = \triangle COF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AE = CF \text{ (2 cạnh t/ư)}$$

Mà $AE \parallel CF$ (theo cách dựng)

$$\Rightarrow \text{Tứ giác AECF là hình bình hành (dnhb)} \Rightarrow OE = OF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = 2 \frac{SO}{SG}$

Tương tự trong (SBD) ta cũng kẻ các đường thẳng song song với NQ và cũng chứng minh được

$$\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} = 2 \frac{SO}{SG}$$

Suy ra $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}$

Đặt $\frac{SB}{SN} = x, \frac{SD}{SQ} = y$ ta có: $x + y = 2 + 3$

Khi đó $T = x^2 + 4(5-x)^2 = 5x^2 - 40x + 100 = 5(x-4)^2 + 20 \geq 20$

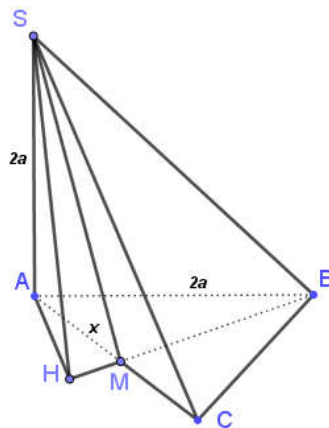
$T_{\min} = 20$ khi $x = 4$

$\Rightarrow \frac{SB}{SN} = 4$

Câu 96. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$ và tam giác ABC vuông tại C với $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Gọi M là điểm di động trên AC , đặt $AM = x$, $(0 \leq x \leq a\sqrt{3})$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x . Tìm các giá trị của x để khoảng cách này lớn nhất.

Lời giải

Cách 1



*) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BM . Khi đó độ dài SH chính là khoảng cách từ S đến BM .

Ta có: $\left. \begin{array}{l} SH \perp BM \\ SA \perp BM \end{array} \right\} \Rightarrow BM \perp (SAH) \Rightarrow BM \perp AH$.

Do đó hai tam giác AHM và BCM đồng dạng nên $\frac{AH}{BC} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow AH = \frac{AM \cdot BC}{BM}$.

Mà $AM = x$, $BC = AB \cdot \sin 30^\circ = a$, $BM = \sqrt{(2a)^2 + x^2 - 2 \cdot 2a \cdot x \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{4a^2 + x^2 - 2\sqrt{3}ax}$

$\Rightarrow AH = \frac{ax}{\sqrt{4a^2 + x^2 - 2\sqrt{3}ax}}$; $SH^2 = SA^2 + AH^2 = a^2 \frac{5x^2 - 8\sqrt{3}ax + 16a^2}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}$

$$\Rightarrow SH = a \sqrt{\frac{5x^2 - 8\sqrt{3}ax + 16a^2}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}}.$$

*) Do SA cố định nên SH lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất.

$$\text{Ta có } AH^2 = \frac{a^2 x^2}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}.$$

TH1: $x = 0 \Rightarrow AH = 0$.

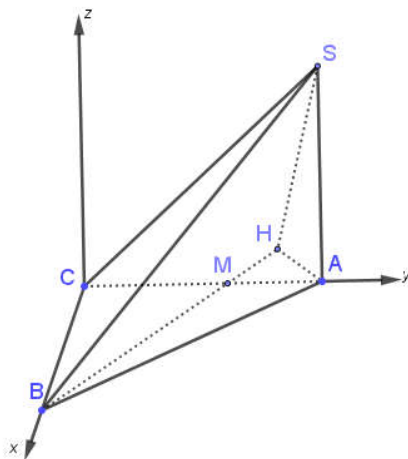
$$\text{TH2: } x \neq 0 \Rightarrow AH^2 = \frac{a^2}{1 - 2\sqrt{3}\frac{a}{x} + 4\frac{a^2}{x^2}}.$$

Do đó AH lớn nhất khi và chỉ khi hàm số $f(t) = 4t^2 - 2\sqrt{3}t + 1$ nhỏ nhất, với $t = \frac{a}{x}$ ($t \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$).

Mà $f'(t) = 8t - 2\sqrt{3} > 0, \forall t \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, nên $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tức là $x = a\sqrt{3}$, khi đó $AH = a\sqrt{3}$.

Từ hai trường hợp trên ta kết luận được SH lớn nhất khi và chỉ khi $x = a\sqrt{3}$.

Cách 2



Ta có $AC = AB \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Trong không gian, chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $C(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $A(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;a\sqrt{3};2a)$. Khi đó $M(0;a\sqrt{3}-x;0)$. Ta có:

$$\overrightarrow{BS} = (-a; a\sqrt{3}; 2a), \overrightarrow{BM} = (-a; a\sqrt{3} - x; 0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BM}] = (-2\sqrt{3}a^2 + 2ax; -2a^2; -ax)$$

$$\Rightarrow d(S; BM) = \frac{|\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BM}|} = a \sqrt{\frac{5x^2 - 8\sqrt{3}ax + 16a^2}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}}.$$

Từ đây, xét hàm số $f(x) = \frac{5x^2 - 8\sqrt{3}ax + 16a^2}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}$ với $0 \leq x \leq a\sqrt{3}$, ta suy ra được $d(S; BM)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = a\sqrt{3}$.

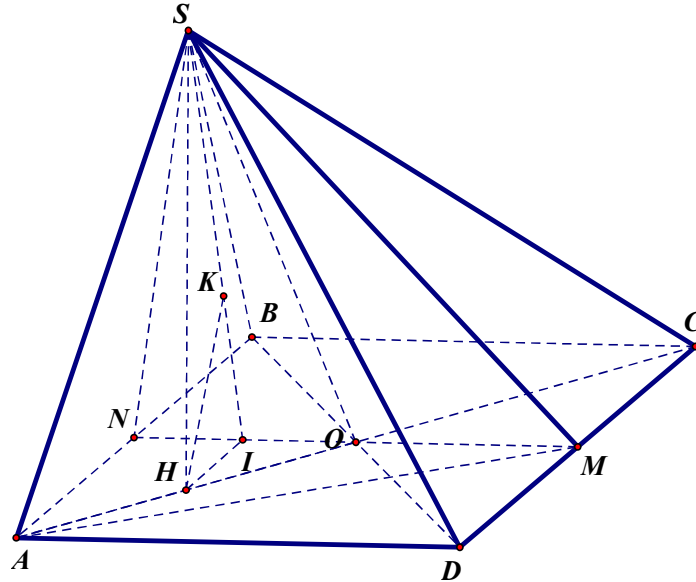
Cách 3: Dễ thấy $SH \leq SM \leq SC \Rightarrow SH$ lớn nhất là SC , khi đó vị trí M trùng với C , tức là $x = a\sqrt{3}$.

Đây là bài toán cực trị dừng lại ở mức trung bình và thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh. Mời bạn đọc tham khảo các bài toán dưới đây.

Câu 97. (HSG12 tỉnh Thái Bình năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $SA = a$, $SB = SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD .

1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCM$.
2. Tính khoảng cách giữa SM và BC .

Lời giải



1. Gọi O là tâm của hình bình thoi $ABCD$.

Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle SBD$ ta có: $AB = SB$, $AD = SD$, BD chung.

Suy ra $\triangle ABD = \triangle SBD \Rightarrow AO = SO$ (hai đường trung tuyến tương ứng). Tương tự $CO = SO$.

Tam giác SAC có đường trung tuyến SO và $AO = CO = SO$. Do đó $\triangle SAC$ vuông tại S .

Từ đó ta tính được $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2a$, $OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = a\sqrt{2}$, $BD = 2a\sqrt{2}$.

Diện tích của tam giác BCD : $S_{\triangle BCD} = a^2\sqrt{2}$ (công thức Hê-rông).

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ là $r = \frac{BC \cdot CD \cdot BD}{4S_{\triangle BCD}} = \frac{3a}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Vì $SB = SC = SD$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp

$\triangle BCD$ và $HB = r = \frac{3a}{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tứ giác $ABCM$: $S = S_{ABCD} - S_{AMD} = \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCM$ là $V = \frac{1}{3}S \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

2. Tính khoảng cách giữa SM và BC .

Gọi N là trung điểm của AB .

Dễ thấy $MN \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (SMN)$ nên $d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(C, (SMN))$

Mà $CO = 2HO \Rightarrow d(C, (SMN)) = 2d(H, (SMN))$.

Kẻ $HI \perp MN (I \in MN)$, kẻ $HK \perp SI (K \in SI)$ ta có $HK = d(H, (SMN))$.

Ta có: $d(D, BC) = d(A, BC) = \frac{2S_{BCD}}{BC} = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow HI = d(H, MN) = \frac{1}{4}d(A, BC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

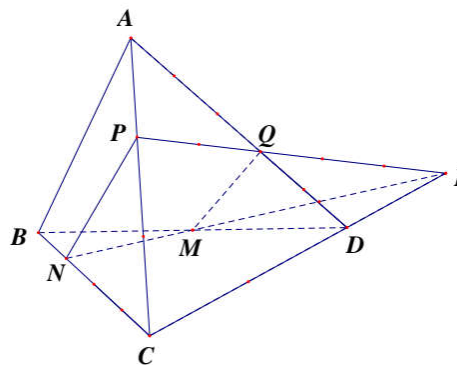
$$HK = \frac{HI \cdot HS}{\sqrt{HI^2 + HS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{22} \Rightarrow d(C, (SMN)) = 2HK = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Vậy $d(BC, SM) = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Câu 98. (HSG12 tỉnh TỈNH VĨNH PHÚC 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BD, BC, AC sao cho $BD = 2BM, BC = 4BN, AC = 3AP$. mặt phẳng (MNP) cắt AD tại điểm Q . Tính tỉ số thể tích của hai phần của khối tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP) .

Lời giải

Tác giả: Hồ Thanh Nhân; Fb:NhanHoThanh



Trong mặt phẳng (BCD) gọi I là giao điểm của MN và CD , Q là giao điểm của IP và AD .

$\Rightarrow AD$ cắt mặt phẳng (MNP) tại Q .

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD có ba điểm N, M, I thẳng hàng.

$$\frac{NB}{NC} \cdot \frac{IC}{ID} \cdot \frac{MD}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{IC}{ID} = 3.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACD có ba điểm P, I, Q thẳng hàng.

$$\frac{PA}{PC} \cdot \frac{IC}{ID} \cdot \frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{2}{3}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ICN có ba điểm D, M, P thẳng hàng.

$$\frac{DC}{DI} \cdot \frac{MI}{MN} \cdot \frac{BN}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{MI}{MN} = 2$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác IPC có ba điểm D, Q, A thẳng hàng.

$$\frac{DC}{DI} \cdot \frac{QI}{QP} \cdot \frac{AP}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{IQ}{QP} = \frac{3}{2}.$$

Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{IMQD}}{V_{INPC}} = \frac{IQ}{IP} \cdot \frac{IM}{IN} \cdot \frac{ID}{IC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \quad (1)$$

$$\frac{V_{INPC}}{V_{ABCI}} = \frac{CN}{CP} \cdot \frac{CP}{CA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \quad (2); \quad \frac{V_{ABCI}}{V_{ABCD}} = \frac{CI}{CD} = \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow \frac{V_{INPC}}{V_{ABCD}} = \frac{3}{4}, \quad \frac{V_{IMQD}}{V_{ABCD}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{CDMNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{10} = \frac{13}{20} \Rightarrow \frac{V_{ABMN PQ}}{V_{ABCD}} = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{V_{ABMN PQ}}{V_{CDMNPQ}} = \frac{7}{13}.$$

Câu 99. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 6$, $SB = 2$, $SC = 4$, $AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{SBC} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của SC và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt cạnh SA tại M . Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{4}$.

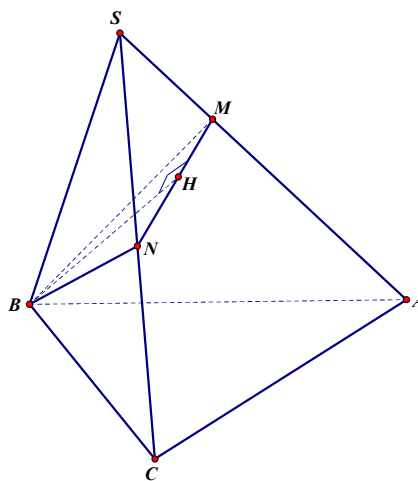
C. $\frac{2}{9}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Trương Thanh Tùng; Fb: Trương Thanh Tùng

Chọn D



Ta có: $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}k$, $k = \frac{SM}{SA}$. Áp dụng định lý cosin ta có:

$$\widehat{BSC} = 60^\circ, \widehat{ASC} = 120^\circ, \widehat{ASB} = 90^\circ.$$

$$\text{Ké } BH \perp MN \Rightarrow BH \perp (ASC).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi} \quad \vec{BH} &= x\vec{BM} + (1-x)\vec{BN} = x(\vec{SM} - \vec{SB}) + (1-x)(\vec{SN} - \vec{SB}) = x(k\vec{a} - \vec{b}) + (1-x)\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= kx.\vec{a} - \vec{b} + \frac{1-x}{2}.\vec{c} \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác, } BH \perp (ASC) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36kx - 6(1-x) = 0 \\ -12kx - 4 + 8(1-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

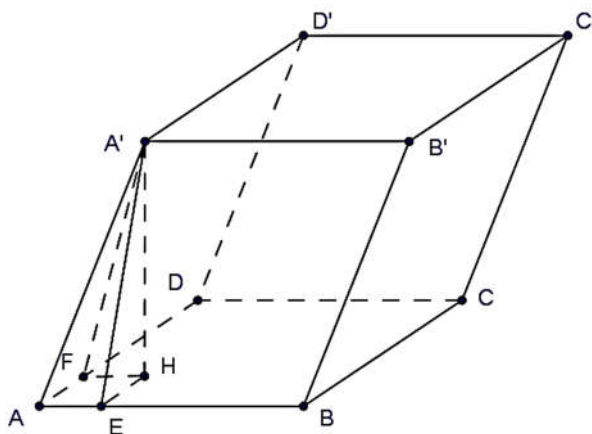
Vậy $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

A. $3\sqrt{3}$. B. 7. C. 3. D. $3\sqrt{7}$.

Lời giải

Tác giả: Bích Thuận; Fb: Bích Thuan

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên $(ABCD)$

Ке $EH \perp AB, FH \perp AD$

$$((ABB' A'), (ABCD)) = (A'E, EH) = \widehat{A'E H} = 45^0$$

$$((ADD' A'), (ABCD)) = (A'F, FH) = \widehat{A'FH} = 60^0$$

Ta có: $A'H = HE \tan 45^\circ = HE$

$$A'H = HF \cdot \tan 60^\circ = HF\sqrt{3}$$

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông AFA' ta có:

$$AA'^2 = AF^2 + A'F^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = A'H^2 + A'H^2 + FH^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2A'H^2 + \left(\frac{A'H}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow A'H^2 = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow A'H = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = 3$$

Câu 101. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, B'C'$ và DD' . Thể tích khối tứ diện $C'.MNP$ bằng

A. $\frac{V}{32}$.

B. $\frac{V}{8}$.

C. $\frac{V}{16}$.

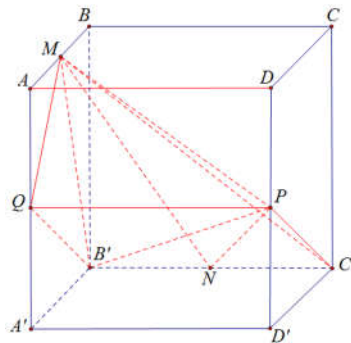
D. $\frac{V}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Mộng ; Fb: Nguyễn Văn Mộng

Phản biện: Trần Đức Phương; Fb: Phương Tran Duc

Chọn C

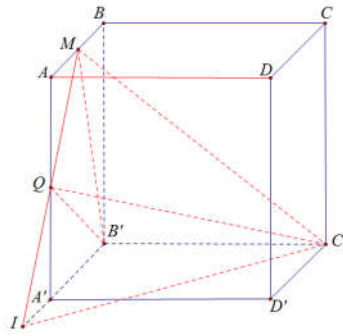


Ta có: $\frac{V_{C'.MNP}}{V_{C'.MB'P}} = \frac{C'M}{C'B'} = \frac{1}{2}$ (do N là trung điểm của $B'C'$) $\Rightarrow V_{C'.MNP} = \frac{1}{2} V_{C'.MB'P}$ (1)

Gọi Q là trung điểm của AA' . Khi đó, tứ giác $C'B'QP$ là hình bình hành.

Do đó, $V_{C'.MB'P} = \frac{1}{2} V_{M.C'B'QP} = V_{M.C'B'Q}$ (2)

Trong $(ABB'A')$, gọi $I = MQ \cap A'B' \Rightarrow Q$ là trung điểm của MI .



$$\frac{V_{M.C'B'Q}}{V_{M.C'B'I}} = \frac{MQ}{MI} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{M.C'B'Q} = \frac{1}{2} V_{M.C'B'I} \quad (3)$$

Ta lại có, $S_{\Delta C'B'I} = \frac{1}{2} \cdot B'I \cdot d(C', A'B')$ và $S_{A'B'C'D'} = B'A' \cdot d(C', A'B')$

$$\text{Suy ra, } \frac{S_{\Delta C'B'I}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot B'I \cdot d(C', A'B')}{B'A' \cdot d(C', A'B')} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\Delta C'B'I} = \frac{3}{4} \cdot S_{A'B'C'D'}$$

Gọi $h = d(M, (A'B'C'D'))$

$$V_{M.C'B'I} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta C'B'I} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{A'B'C'D'} \cdot h = \frac{1}{4} \cdot S_{A'B'C'D'} \cdot h = \frac{1}{4} \cdot V \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta suy ra $V_{C'.MNP} = \frac{1}{16} V$

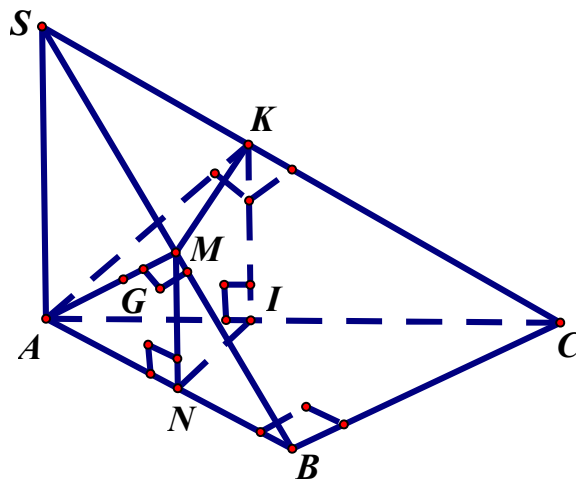
Câu 102. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và K là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên cạnh SC . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) . Tính $\cos \alpha$, biết rằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (KBC) bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Theo công thức hình chiếu



Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên SB , ta dễ chứng minh được $AM \perp (SBC)$ hay $AM \perp (KBC)$, kết hợp giả thiết suy ra $d(A, (KBC)) = AM = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Do tam giác SAB vuông tại A có AM là đường cao nên $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

Do đó tam giác SAB vuông cân tại A nên M là trung điểm của SB suy ra $G \in AM$.

Gọi N, I lần lượt là hình chiếu của M, K trên mặt phẳng (ABC) , khi đó góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) cũng chính là góc giữa hai mặt phẳng (ANI) và (AMK) .

Ta có $\cos \alpha = \frac{S_{ANI}}{S_{AMK}}$. Tam giác SAC có AK là đường cao nên tính được $AK = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$.

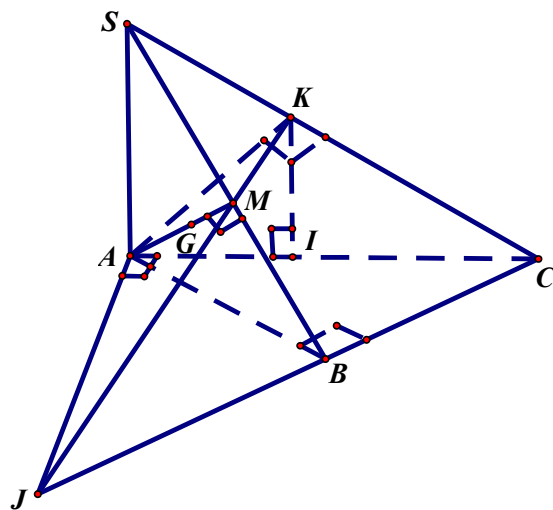
Tam giác AKC vuông tại $K \Rightarrow AK^2 = AI \cdot AC \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{2}}{3}a$, $AN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$,

$$S_{AIN} = \frac{1}{2}AI \cdot AN \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{12}a^2.$$

Tam giác AMK vuông tại M có $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $MK = \sqrt{AK^2 - AM^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}a$

$$\Rightarrow S_{AMK} = \frac{1}{2}AM \cdot MK = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2, \cos \alpha = \frac{S_{ANI}}{S_{AMK}} = \frac{\frac{1}{12}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{12}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 2: Tính theo định lý cách xác định góc giữa hai mặt phẳng



Các điểm M, K xác định như cách 1, kéo dài MK cắt BC tại J .

Ta dễ chứng minh được

$$\begin{cases} (AGK) \cap (ABC) = JA \\ JA \perp (SAC) \\ (SAC) \cap (AGK) = AK \\ (SAC) \cap (ABC) = AI \end{cases} \Rightarrow ((AGK), (ABC)) = (AK, AI) = \widehat{KAI} = \alpha, \cos \alpha = \frac{AI}{AK} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 3 : Theo định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng

Ta dễ chứng minh được $SA \perp (ABC)$, $SC \perp (AGK)$ suy ra góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) cũng chính là góc giữa hai đường thẳng SA và SC .

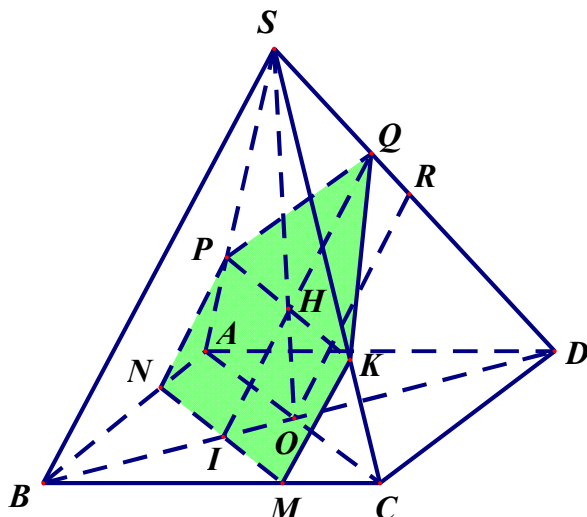
$$\text{Suy ra } \cos \alpha = \cos \widehat{ASC} = \frac{SA}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 103. (HSG11 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm di động trên cạnh BC (M khác B và C). Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với hai đường thẳng SB, AC .

Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) . Xác định vị trí của M để thiết diện có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Tác giả: Trần Quốc An; Fb: Tran Quoc An



Kẻ $MN \parallel AC$, $N \in AB$, $NP \parallel SB$, $P \in SA$, $PK \parallel MN \parallel AC$, $K \in SC$.

Gọi $I = MN \cap BD$. Kẻ $IQ \parallel SB$, $Q \in SD$

Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi $\text{mp}(\alpha)$ là ngũ giác $MNPQK$.

Ta có: $\begin{cases} NP \parallel SB \\ (SBC) \cap (\alpha) = MK \end{cases} \Rightarrow MK \parallel NP$.

Ta có tứ giác $MNPK$ là hình bình hành.

Gọi α là góc giữa SB và AC . Đặt $x = \frac{BM}{BC}$ ($0 < x < 1$) $\Rightarrow BM = xBC \Rightarrow \begin{cases} MK = (1-x)SB \\ MN = x.AC \end{cases}$.

Suy ra: $S_{MNP} = \frac{1}{2} BM \cdot MK \cdot \sin \alpha = x \cdot (1-x) \cdot SB \cdot AC \cdot \sin \alpha$. Gọi $H = IQ \cap PK$.

Gọi R là trung điểm của SD , ta có: $\frac{QH}{OR} = \frac{SH}{SO} = \frac{BI}{BO} = \frac{BM}{BC} = x \Rightarrow QH = xOR = \frac{1}{2}x \cdot SB$ và $PK = MN$.

Vì $(\widehat{SB, AC}) = (\widehat{QH, PK})$, ta có:

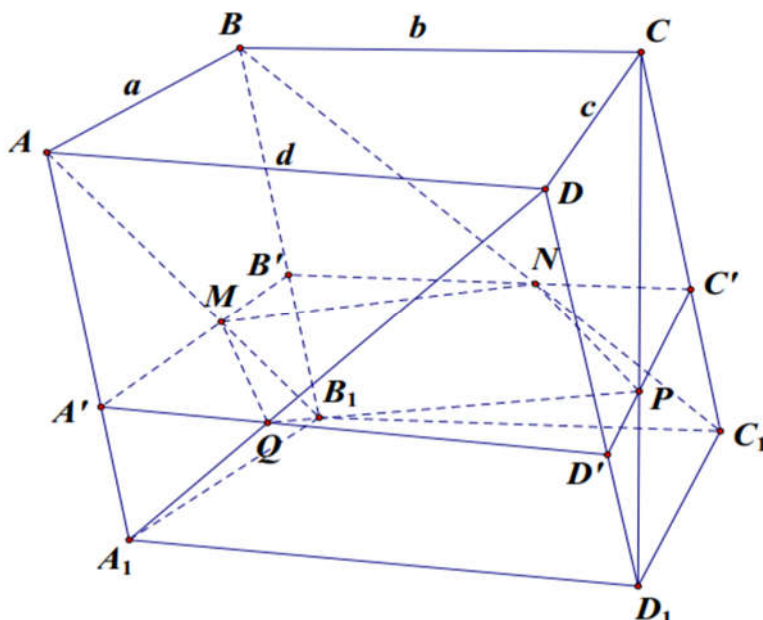
$$\begin{aligned} S_{\Delta PQK} &= S_{\Delta PQH} + S_{\Delta QHK} = \frac{1}{2} PH \cdot QH \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} QH \cdot HK \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} QH \cdot PK \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x \cdot SB \cdot x \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} x^2 \cdot SB \cdot AC \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } S_{MNPQK} = S_{MNP} + S_{\Delta PQK} = \left[x(1-x) + \frac{1}{4}x^2 \right] \cdot SB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \left(x - \frac{3x^2}{4} \right) \cdot SB \cdot AC \cdot \sin \alpha.$$

Câu 104. (HSG11 tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019) Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng (α) thay đổi và luôn song song với mặt đáy cắt các đoạn AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 lần lượt tại M, N, P, Q . Hãy xác định vị trí (α) sao cho $MNPQ$ nhỏ nhất

Lời giải

Tác giả Nguyễn Quang Huy; Fb: Nguyễn Quang Huy



Gọi $A'B'C'D'$ là thiết diện của (α) với lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Do (α) thay đổi và luôn song song với mặt đáy nên $S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1} = S$

Đặt $AB = a; BC = b; CD = c; DA = d$ và các cạnh bên bằng nhau và bằng 1, $\frac{AA'}{AA_1} = AA' = x, 0 < x < 1$

Xét $\triangle AA_1B_1$ có $A'M \parallel A_1B_1$. Theo định lý talet: $\frac{A'M}{A_1B_1} = \frac{AA'}{AA_1} \Rightarrow A'M = ax$

Xét $\triangle AA_1D$ có $A'Q \parallel AD$. Theo định lý talet: $\frac{A_1A'}{A_1A} = \frac{A'Q}{AD} \Rightarrow A'Q = (1-x)d$ ta cũng có

Nên tỉ số diện tích: $\frac{S_{\triangle A'MQ}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{A'M \cdot A'Q \cdot \sin \angle A'MQ}{AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD} = x(1-x)$

Tương tự ta cũng có các kết quả sau: $\frac{S_{\triangle B'MN}}{S_{\triangle ABC}} = x(1-x), \frac{S_{\triangle C'NP}}{S_{\triangle BCD}} = x(1-x), \frac{S_{\triangle D'PQ}}{S_{\triangle ACD}} = x(1-x)$

$$\text{Xét } \frac{S_{\triangle B'MN}}{S_{\triangle ABC}} = x(1-x), \frac{S_{\triangle C'NP}}{S_{\triangle BCD}} = x(1-x), \frac{S_{\triangle D'PQ}}{S_{\triangle ACD}} = x(1-x), \frac{S_{\triangle A'MQ}}{S_{\triangle ABD}} = x(1-x) \Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle B'MN}}{x(1-x)} \\ S_{\triangle BCD} = \frac{S_{\triangle C'NP}}{x(1-x)} \\ S_{\triangle ACD} = \frac{S_{\triangle D'PQ}}{x(1-x)} \\ S_{\triangle ABD} = \frac{S_{\triangle A'MQ}}{x(1-x)} \end{cases}$$

.Cộng các đẳng thức lại với nhau ta có :

$$2S = \frac{1}{x(1-x)} (S_{\triangle A'MQ} + S_{\triangle B'MN} + S_{\triangle C'NP} + S_{\triangle D'PQ}) = \frac{1}{x(1-x)} (S - S_{MNPQ})$$

Đặt $S_{MNPQ} = S' \Rightarrow S' = S - 2x(1-x)S$. Vậy để S' nhỏ nhất $2x(1-x)$ thì lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $2x(1-x) \leq 2 \cdot \frac{(x+1-x)^2}{4} = \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = 1-x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy (α) đi qua trung điểm cạnh bên và luôn song song với mặt đáy thì $S_{MNPQ} = S'$ nhỏ nhất và bằng nửa diện tích đáy.

Câu 105. (HSG12 tỉnh Bến Tre năm 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAC} = 60^\circ$ cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB và $AM = x$, $0 \leq x \leq a$, K là hình chiếu của S trên DM . Tính độ dài đường SK theo a và x . Tìm giá trị lớn nhất của đoạn SK .

Chuyên đề

21

Nón, trụ, cầu

Câu 1. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Một cơ sở sản xuất đồ gia dụng được đặt hàng làm các chiếc hộp kín hình trụ bằng nhôm để đựng rượu có thể tích là $V = 28\pi a^3$ ($a > 0$). Để tiết kiệm sản xuất và mang lại lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sẽ sản xuất những chiếc hộp hình trụ có bán kính là R sao cho diện tích nhôm cần dùng là ít nhất. Tìm R .

A. $R = a\sqrt[3]{7}$.

B. $R = 2a\sqrt[3]{7}$.

C. $R = 2a\sqrt[3]{14}$.

D. $R = a\sqrt[3]{14}$.

Lời giải

Tác giả: Hương Giang ; Fb: Hương Giang

Chọn D

Gọi h là chiều cao hình trụ.

$$\text{Ta có thể tích khối trụ là: } V = S.h \Leftrightarrow 28\pi a^3 = \pi R^2.h \Leftrightarrow h = \frac{28a^3}{R^2}$$

$$\text{Diện tích toàn phần khối trụ là: } S_p = 2\pi R.h + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot \frac{28a^3}{R^2} + 2\pi R^2 = \frac{56\pi a^3}{R} + 2\pi R^2$$

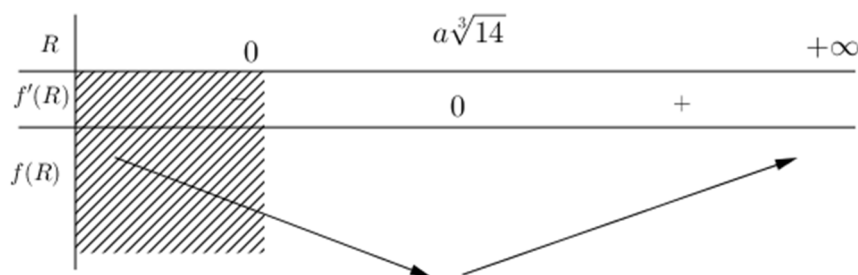
Ta cần tìm R sao cho S_p min

Xét hàm:

$$f(R) = \frac{56\pi a^3}{R} + 2\pi R^2 \Rightarrow f'(R) = 4\pi R - \frac{56\pi a^3}{R^2}$$

$$f'(R) = 0 \Leftrightarrow 4\pi R^3 - 56\pi a^3 = 0 \Leftrightarrow 4\pi(R^3 - 14a^3) = 0 \Leftrightarrow R = a\sqrt[3]{14}.$$

Lập bảng biến thiên ta có:

Vậy S_p min khi và chỉ khi $R = a\sqrt[3]{14}$

Câu 2. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 5. Tính thể tích V của khối nón nội tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{25\pi\sqrt{6}}{108}$.

B. $V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{108}$.

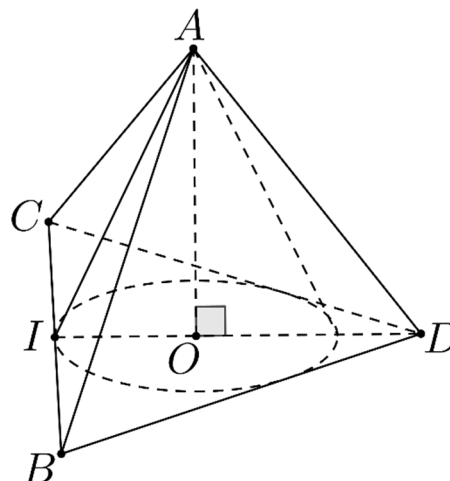
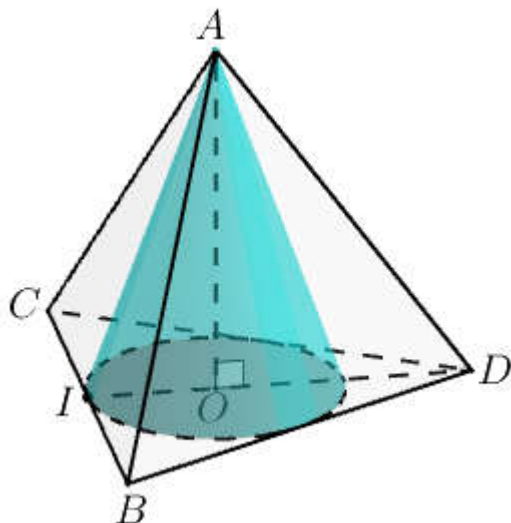
C. $V = \frac{125\pi\sqrt{6}}{108}$.

D. $V = \frac{25\pi\sqrt{6}}{36}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Kim Thu ; Fb: Thu Tran

Chọn C



Gọi O là tâm giác đều BCD và I là trung điểm của cạnh BC . Khối nón nội tiếp tứ diện đều $ABCD$ có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều BCD và đỉnh là điểm A , khi đó khối nón này có bán kính đáy là $r = OI = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ và chiều cao là $h = OA = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$. Vậy thể tích của khối nón cần tìm

$$\text{là } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} \right)^2 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{125\pi\sqrt{6}}{108}.$$

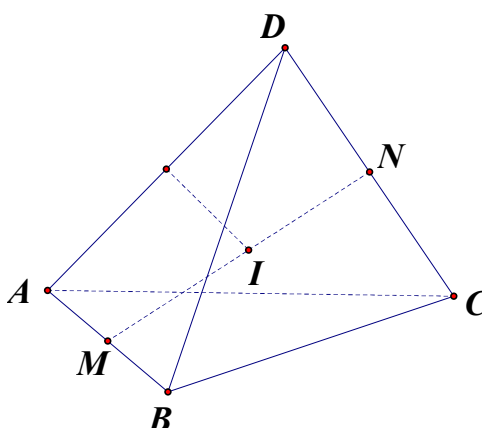
Câu 3. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6a$; $CD = 8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $S = 96\pi a^2$. B. $S = 100\pi a^2$. C. $S = 25\pi a^2$. D. $S = \frac{100}{3}\pi a^2$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Tấn Lộc; Fb: Do Tan Loc

Chọn B



Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD ta có: $\triangle DCA = \triangle DBC \Rightarrow AN = BN$

Suy ra MN là trung trực của AB , tương tự MN là trung trực của DC

Khi đó $I \in MN$ sao cho $ID = IA$

$$\text{Lại có } AN = \sqrt{AD^2 - DN^2} = a\sqrt{58} \Rightarrow MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 7a$$

$$\text{Mặt khác } IM + IN = \sqrt{R^2 - AM^2} + \sqrt{R^2 - DN^2} = \sqrt{R^2 - 9a^2} + \sqrt{R^2 - 16a^2} = 7a$$

$$\Rightarrow R = 5$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $S = 100\pi a^2$.

Câu 4. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Một người thợ muốn tạo một đồ vật hình trụ từ một khối gỗ hình hộp chữ nhật, có đáy là hình vuông và chiều cao bằng $1,25\text{ m}$. Để tạo ra đồ vật đó người thợ vẽ hai đường tròn (C) và (C') nội tiếp hai hình vuông của hai mặt đáy của khối gỗ hình hộp chữ nhật rồi dọc đi phần gỗ thừa theo các đường sinh của đồ vật hình trụ. Biết rằng, trong tam giác cong tạo bởi đường tròn (C) và hình vuông ngoại tiếp của (C) có một hình chữ nhật kích thước $0,3\text{ cm} \times 0,6\text{ cm}$ (như hình vẽ) và mỗi mét khối gỗ thành phẩm có giá 20 triệu đồng. Hỏi người thợ cần số tiền gần nhất với số tiền của phương án nào dưới đây để tạo được 10 đồ vật như vậy.

A. 196000 đồng.

B. 65000 đồng.

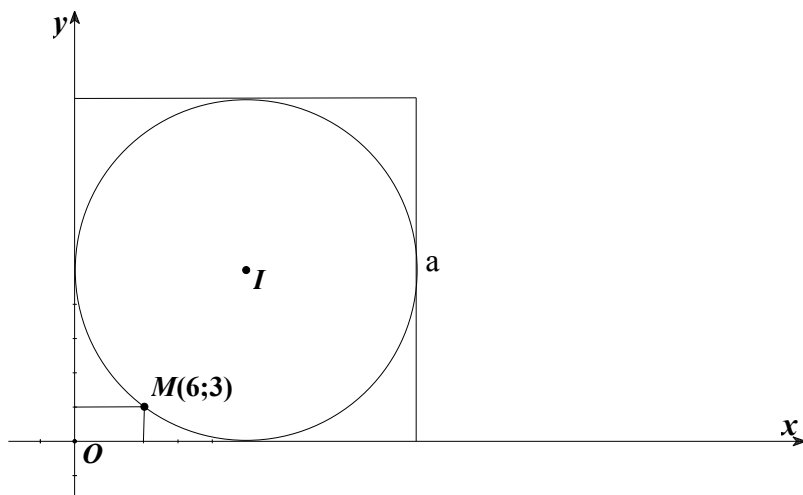
C. 176000 đồng.

D. 58000 đồng

Tác giả: Nguyễn Đăng Trúc; Fb: Trúc Xinh

Lời giải

Chọn C



Xét hệ trục Oxy như hình vẽ, 1 đơn vị trên trục là 1 milimet.

Vì hình chữ nhật có kích thước $0,3\text{ cm} \times 0,6\text{ cm}$ nên nếu ta gọi M là giao điểm của hình chữ nhật và đường tròn (C) thì ta có tọa độ $M(6; 3)$.

Vì đường tròn (C) nội tiếp hình vuông nên nếu ta cạnh hình vuông có độ dài là a ($a > 3$) thì ta có được tâm của đường tròn (C) là $I(a; a)$.

Theo đề bài ta có: $(C): (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$.

Vì M thuộc (C) nên ta có $(6-a)^2 + (3-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 18a + 45 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ (loại) hoặc $a = 15$ (nhận).

Vậy (C) có bán kính $R = 15\text{ cm} = 0,015\text{ m}$.

Ta có thể tích V của khối gỗ thành phẩm là khối trụ có $R = 0,015\text{ m}$ và $h = 1,25\text{ m}$.

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 0,015^2 \cdot 1,25 = \frac{9\pi}{32000}$$

Vậy số tiền cần dùng để tạo 10 đồ vật như vậy: $10.20.10^6 \cdot \frac{9\pi}{32000} \approx 176714$ (đồng).

Câu 5. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Một hình cầu (S) tiếp xúc với ba đường thẳng lần lượt tại B , C và D . Tính thể tích V của hình cầu (S) .

A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$.

B. $V = \frac{4\pi a^3}{81}$.

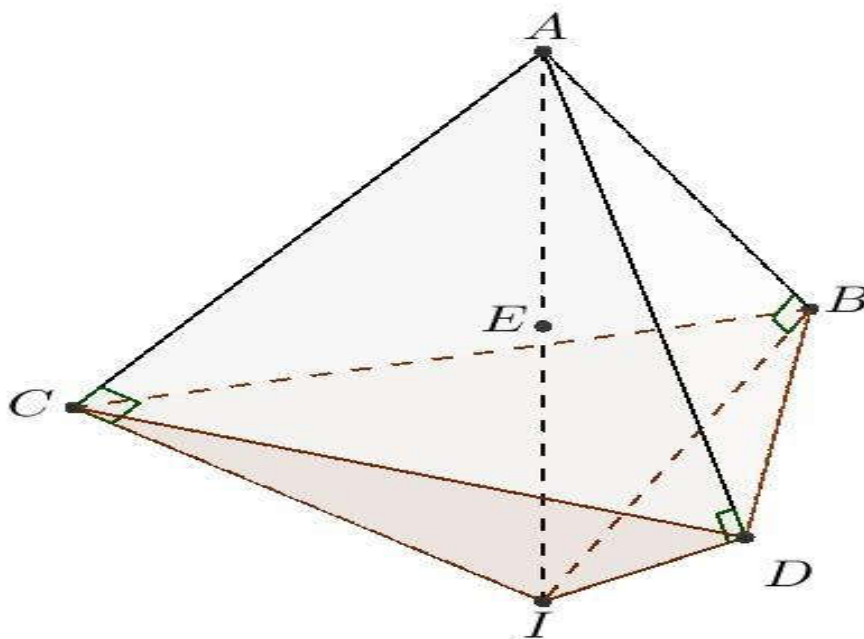
C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

D. $V = \frac{8\pi a^3}{27}$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Thảo; Fb: Hoàng Thảo

Chọn C



Gọi I là tâm của mặt cầu (S) .

Hình cầu (S) tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AC, AD lần lượt tại B, C và D nên $\widehat{ABI} = \widehat{ACI} = \widehat{ADI} = 90^\circ \Rightarrow A, B, C, D, I \in S(E; R)$ với E là trung điểm AI và bán kính bằng bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Ta có $AI = 2R = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow IB = \sqrt{AI^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Thể tích của hình cầu (S) là $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 6. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân với đáy nhỏ $AB = 15$, đáy lớn $CD = 28$ và chiều cao lăng trụ là $h = 12$. Biết rằng có một hình cầu (S) tiếp xúc với tất cả các cạnh đáy của hình lăng trụ đã cho. Hãy tính diện tích của hình cầu (S) .

A. 608π .

B. 560π .

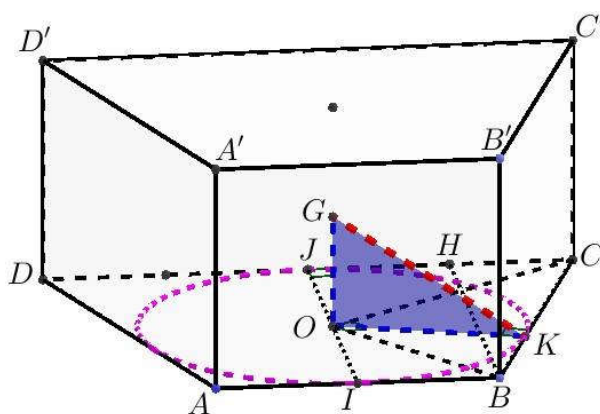
C. 1824π .

D. 564π .

Lời giải

Tác giả: Hồng Hạnh; Fb: Cactuss Lee

Chọn D



$$\text{Ta có: } AD = BC = \frac{AB + CD}{2} = \frac{43}{2}, \quad HC = \frac{CD - AB}{2} = \frac{13}{2}$$

$$IO = JO = \frac{BH}{2} = \sqrt{105}, \quad OB = \sqrt{IO^2 + IB^2} = \frac{\sqrt{645}}{2}, \quad OC = \sqrt{JC^2 + OJ^2} = \sqrt{301}$$

$$OK = OI = JO = \sqrt{105} \text{ (bán kính đường tròn nội tiếp hình thang cân } ABCD \text{)}$$

$$R_{(S)} = GK = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + OK^2} = \sqrt{141}$$

$$\text{Vậy diện tích hình cầu (S) cần tìm: } S = 4\pi R_{(S)}^2 = 564\pi.$$

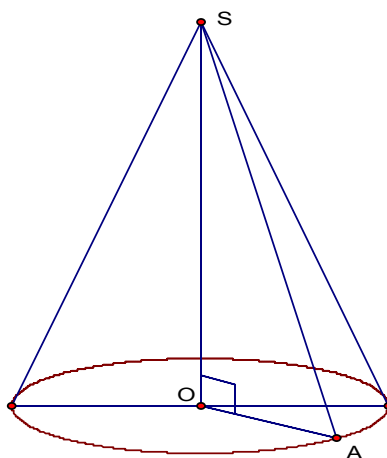
Câu 7. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho khối nón có chiều cao bằng 8 và độ dài đường sinh bằng 10. Thể tích của khối nón đã cho là:

A. 96π .B. 140π .C. 128π .D. 124π .

Lời giải

Tác giả: Cao Xuân Hùng; FB: Cao Hùng

Chọn A



Theo giả thiết, ta có $h = SO = 8$, $l = SA = 10$. $\triangle SOA$ vuông tại O nên suy ra $R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 8 = 96\pi$.

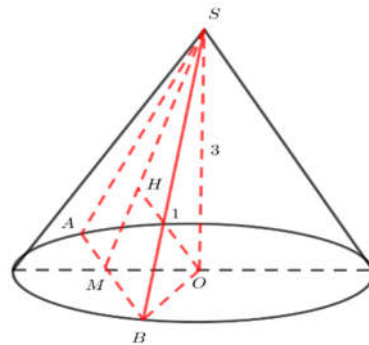
Câu 8. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O , SA , SB là hai đường sinh biết $SO = 3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích tam giác SAB là 27. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

- A. $\frac{15\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{3\sqrt{130}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{530}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{674}}{4}$.

Lời giải.

Tác giả: Phạm Quân. Facebook: Phạm Khánh Huyền

Chọn B



$$d(O; (SAB)) = OH = 1.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow OM = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Gọi } AM = MB = x \Rightarrow AB = 2x.$$

$$\text{Vì } S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SM \cdot AB = 27 \text{ suy ra } \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot 2x = 27 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2} = MB$$

$$r = OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = \frac{3\sqrt{130}}{4}$$

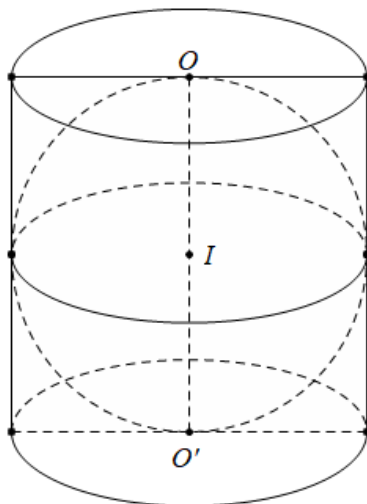
Câu 9. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Cho hình trụ có bán kính đáy r . Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy với $OO' = 2r$. Một mặt cầu tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O' . Gọi V_c và V_r lần lượt là thể tích của khối cầu và khối trụ. Khi đó $\frac{V_c}{V_r}$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Vinh; Fb: Vinh Trần.

Chọn A



Ta có thể tích khối trụ là $V_t = \pi r^2 \cdot OO' = 2\pi r^3$ (1)

Mặt cầu tiếp xúc với hai đáy của hình trụ nên mặt cầu có bán kính $R = \frac{1}{2}OO' = r$, suy ra thể tích

khối cầu là $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{V_c}{V_t} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$.

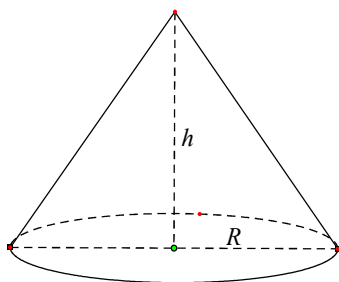
Câu 10. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh có độ dài $2a$. Thể tích của khối nón là

- A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Nhung; Fb: Nguyễn Thị Hồng Nhung

Chọn A



Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình nón lần lượt là h và R .

Ta có $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = a\sqrt{3}$ và $R = \sqrt{(2a)^2 - h^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

Vậy thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Câu 11. (HSG11 tỉnh Vĩnh Phúc năm 2018-2019) Một tấm vải hình chữ nhật được cuốn 100 vòng

(theo chiều dài tấm vải) quanh một lõi hình trụ có bán kính đáy bằng 5cm sao cho mép vải luôn song song với trục của hình trụ. Biết rằng bề dày tấm vải là 0,3 cm. Tính chiều dài tấm vải đó.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Như Hưng; Fb: Nguyen Hung

Chiều dài của vòng thứ 1 là $2\pi \cdot 5 (cm)$.

Chiều dài của vòng thứ 2 là $2\pi (5 + 0,3) (cm)$.

Chiều dài của vòng thứ 3 là $2\pi (5 + 2 \cdot 0,3) (cm)$.

....

Chiều dài của vòng thứ 100 là $2\pi (5 + 99 \cdot 0,3) (cm)$.

Suy ra chiều dài tấm vải là

$$2\pi (5 \cdot 100 + 0,3(1 + 2 + 3 + \dots + 99)) = 2\pi \left(500 + 0,3 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \right) = 3970\pi (cm).$$

vantrung38@gmail.com

chucnguyen29796@gmail.com

Câu 12. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Trong không gian cho tam giác ABC có $AB = 2R$, $AC = R$, $\widehat{CAB} = 120^\circ$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B , bán kính R . Giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MC$ là

A. $4R$.

B. $6R$.

C. $R\sqrt{19}$.

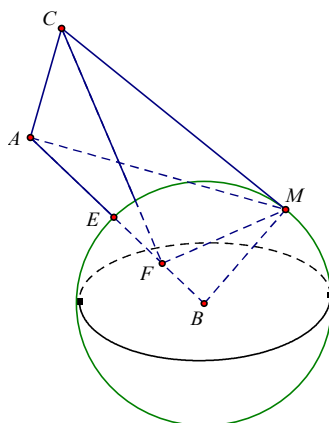
D. $2R\sqrt{7}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Mạnh ; Fb: Nguyễn Văn Mạnh

Phản biện: Trần Thanh Sơn; Fb: Trần Thanh Sơn

Chọn C



Gọi E là giao điểm của AB với mặt cầu $S(B; R)$ và F là trung điểm của EB

ta có E là trung điểm của AB , $BE = BM = R$.

$$\Delta AFC \text{ có } FC^2 = AC^2 + AF^2 - 2AC \cdot AF \cdot \cos \widehat{CAB} = R^2 + \left(\frac{3R}{2} \right)^2 - 2R \cdot \frac{3R}{2} \cdot \cos 120^\circ = \frac{19R^2}{4}$$

$$\Rightarrow FC = \frac{R\sqrt{19}}{2}$$

Xét hai tam giác BFM và BMA có:

$$\begin{cases} \widehat{ABM} \text{ chung} \\ \frac{BF}{BM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle BFM \sim \triangle BMA \Rightarrow \frac{MA}{FM} = \frac{AB}{MB} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$$

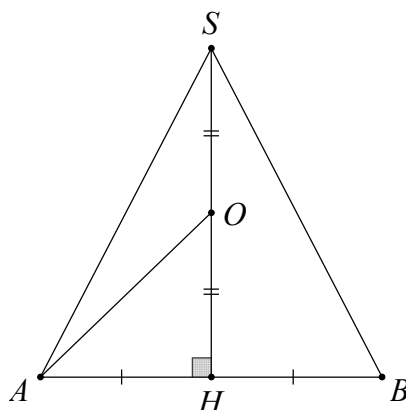
$$\text{Khi đó } MA + 2MC = 2(MF + MC) \geq 2FC = 2 \cdot \frac{R\sqrt{19}}{2} \Rightarrow MA + 2MC \geq R\sqrt{19}$$

Vì F nằm trong mặt cầu (S) và C nằm ngoài mặt cầu (S) nên dấu “=” xảy ra khi M là giao điểm của FC và (S) , do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MC$ là $R\sqrt{19}$.

Câu 13. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) song song với nhau cắt khối cầu tâm O , bán kính R tạo thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn, đáy trùng với hình tròn còn lại. Tính khoảng cách giữa (P) , (Q) để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

- A. R . B. $R\sqrt{2}$. C. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. D. $2R\sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn C

Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua trục, ta được thiết diện như hình trên. Khi đó, ta có $OA = R$.

$$\text{Đặt } OH = x, \text{ ta có } SH = 2x, AH = \sqrt{R^2 - x^2}, SA = \sqrt{R^2 + 3x^2}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón là } S_{xq} = \pi AH \cdot SA = \pi \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 + 3x^2}.$$

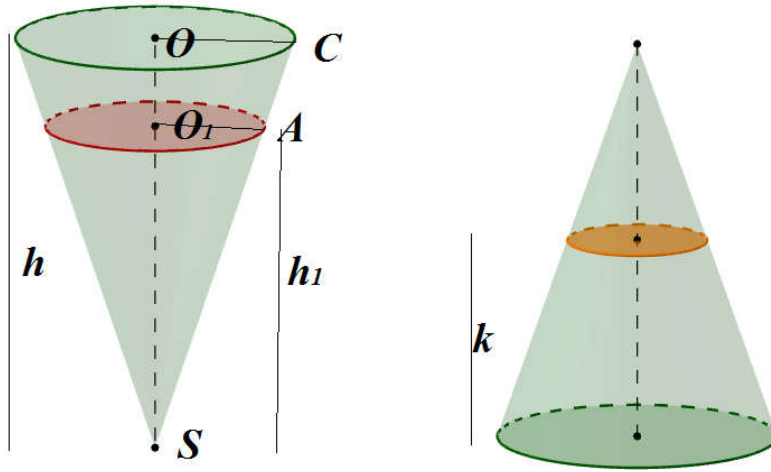
$$\text{Ta có } \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 + 3x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3R^2 - 3x^2} \cdot \sqrt{R^2 + 3x^2} \leq \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 3R^2 - 3x^2 = R^2 + 3x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 14. (HSG12 tỉnh Hà Tĩnh năm 2018-2019) Một cái phễu có dạng hình nón chiều cao của phễu là

h. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu là $h_1 = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$ (hình H_1). Ta bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (hình H_2), gọi chiều cao của cột nước trong phễu ở hình H_2 là k . Tính $\frac{k}{h}$.

Lời giải



Cho hình chóp như hình vẽ bên.

Đặt $SO_1 = h_1$; $SO = h$; $AO_1 = r_1$; $CO = r$.

Ta có $\frac{SO_1}{SO} = \frac{AO_1}{CO} = t \Leftrightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r} = t$

Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích của khối nón tròn xoay khi quay $SA; SC$ quanh trục SO_1

Ta có

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 \\ V_2 &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{h_1}{h} = t^3$$

Áp dụng kết quả trên ta có :

$$\text{Thể tích phần chứa nước là } \frac{V_1}{V} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)^3 = \frac{7}{8} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{8}V$$

Suy ra thể tích phần không chứa nước là $V_2 = \frac{1}{8}V$. Chiều cao của phần phễu không chứa nước trong

hình H_2 là $h - k$. Ta có $\frac{V_2}{V} = \left(\frac{h-k}{h}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow 2(h-k) = h \Rightarrow k = \frac{h}{2}$. Vậy $\frac{k}{h} = \frac{1}{2}$.

Câu 15. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $BC = a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB , SC . Bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

C. a .

D. $2a$.

Tác giả: Lê Thị Hồng Ngọc ; Fb: Lê Thị Hồng Ngọc

$$(1), (2), (3) \Rightarrow O \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp } ABCMN \Rightarrow \text{bán kính } R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

A 3D diagram of a rectangular prism. The vertical edge on the left is labeled h . The horizontal edge at the bottom front is labeled x . Hidden edges are shown as dashed lines.

Khi đó thể tích khối hộp: $V = x^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$.

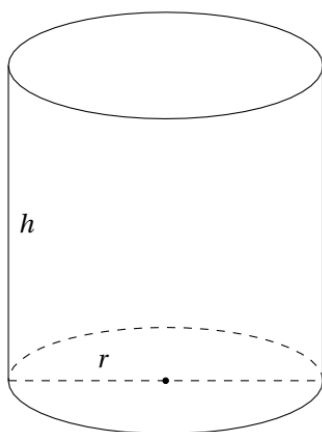
Diện tích toàn phần của hộp là: $S_{tp} = 2xh + 2x^2 = \frac{4}{x} + 2x^2$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương: $\frac{4}{x} + 2x^2 = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + 2x^2 \geq 3.2 = 6$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (dm)}$.

Vậy trong trường hợp này S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 dm^2 , đạt được khi khối hộp là hình lập phương cạnh bằng 1 dm .

Nếu hộp sữa có dạng hình trụ với đáy là đường tròn bán kính $r \text{ (dm)}$, chiều cao $h \text{ (dm)}$ với $h > 0$, $r > 0$.



Khi đó thể tích của khối trụ là: $V = \pi r^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$.

Suy ra diện tích toàn phần của hộp bằng:

$$S_{tp} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + 2\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi}.$$

Vậy trong trường hợp này S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3\sqrt[3]{2\pi} \text{ dm}^2$ khi đáy là hình tròn có bán kính r thỏa mãn: $\frac{1}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ (dm)}$.

Vì $3\sqrt[3]{2\pi} < 6$ nên lãnh đạo nhà máy nên thiết kế hộp sữa có dạng hình trụ với bán kính đáy là:

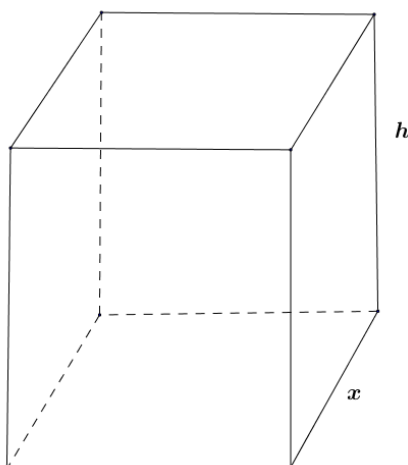
$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ dm và chiều cao } h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ dm}.$$

Câu 17. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Một nhà sản xuất sữa bột dành cho trẻ em cần thiết kế bao bì cho loại sản phẩm mới. Theo yêu cầu của lãnh đạo nhà máy, hộp sữa mới có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông hoặc có dạng một hình trụ. Biết rằng hộp sữa mới có thể tích bằng 1 dm^3 . Hãy giúp lãnh đạo nhà máy thiết kế hộp sữa này sao cho vật liệu sử dụng làm bao bì là ít nhất.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Ngọc Tâm ; Fb: Nguyễn Ngọc Tâm

Nếu hộp sữa có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông, có độ dài cạnh đáy là $x(dm)$, chiều cao là $h(dm)$ ($x, h > 0$).

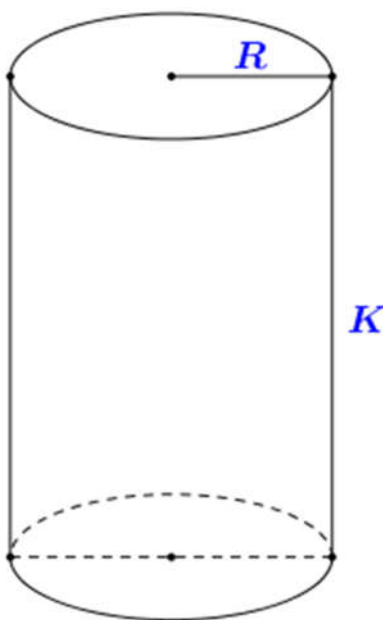


Khi đó thể tích hộp sữa là $V_1 = x^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$.

Suy ra diện tích toàn phần của hộp sữa là $S_{tp1} = 4xh + 2x^2 = \frac{4}{x} + 2x^2$.

$S_{tp} = \frac{4}{x} + 2x^2 = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + 2x^2 \geq 3.2 = 6$, dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow x = 1$.

Nếu hộp sữa có dạng một hình trụ có đáy là đường tròn có bán kính $R(dm)$, chiều cao $k(dm)$, ($R, k > 0$).



Khi đó thể tích hộp là $V_2 = \pi R^2 k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\pi R^2}$.

Suy ra diện tích toàn phần của hộp sữa là:

$S_{tp2} = 2\pi Rk + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi}$, dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{R} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} (dm).$$

Vật liệu sử dụng làm bao bì ít nhất khi và chỉ khi diện tích toàn phần của hộp sữa đạt giá trị nhỏ nhất, do đó nên thiết kế hộp sữa có dạng hình trụ có đáy là đường tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} (dm)$ và chiều cao $\frac{1}{\pi} \left(\sqrt[3]{2\pi} \right)^2 (dm)$.

Câu 18. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Trong tất cả các hình trụ nội tiếp một hình nón có bán kính đáy là r và chiều cao bằng $3r$. Tìm chiều cao h của hình trụ có thể tích lớn nhất.

A. $h = \frac{4r}{3}$.

B. $h = r$.

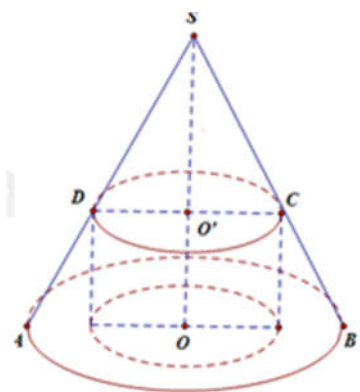
C. $h = 3r$.

D. $h = \frac{3r}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Bích Thuận; Fb: Bích Thuận

Chọn B



Gọi R là bán kính của hình trụ

Ta có: $\frac{SO'}{SO} = \frac{R}{OB} \Rightarrow \frac{3r-h}{3r} = \frac{R}{r} \Rightarrow R = \frac{3r-h}{3}$

$$V_{tru} = \pi R^2 \cdot h = \pi \left(\frac{3r-h}{3} \right)^2 \cdot h = \frac{\pi(3r-h)^2 h}{9}$$

$$V_{tru} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow (3r-h)^2 \cdot h \text{ lớn nhất}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta có:

$$3r-h + 3r-h + 2h \geq 3\sqrt[3]{(3r-h)^2 \cdot 2h}$$

$$\Leftrightarrow 2r \geq \sqrt[3]{(3r-h)^2 \cdot 2h}$$

$$\Leftrightarrow 8r^3 \geq (3r-h)^2 \cdot 2h$$

$$\Leftrightarrow 4r^3 \geq (3r-h)^2 h$$

$$(3r-h)^2 \cdot h \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } 3r-h = 2h \Leftrightarrow r = h$$

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao $h = r$

Chuyên đề

22

Tọa độ trong không gian

Câu 1. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = -1+t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases} \text{ và mặt } (P): x+y+z-1=0. \text{ Đường thẳng vuông góc với mặt}$$

phẳng (P) cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x+\frac{13}{5}}{1} = \frac{y-\frac{9}{5}}{1} = \frac{z-\frac{4}{5}}{1}.$

B. $\frac{x-\frac{1}{5}}{1} = \frac{y+\frac{3}{5}}{1} = \frac{z+\frac{2}{5}}{1}.$

C. $\frac{x-\frac{7}{5}}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-\frac{2}{5}}{1}.$

D. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$

Lời giải

Tác giả: Phùng Hằng; Fb: Phùng Hằng

Chọn B

$$d_1: \begin{cases} x = 2a+1 \\ y = -1-a \\ z = a \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = -1+t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}.$$

Gọi d là đường thẳng cần tìm, d cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B . Khi đó:

$$A(2a+1; -1-a; a), B(-1+t; -1; -t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2+t-2a; a; -t-a).$$

$$\text{Do } d \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k \vec{n}_P \Leftrightarrow \begin{cases} -2+t-2a = k \\ a = k \\ -t-a = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{5} \\ a = -\frac{2}{5} \\ k = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}(1; 1; 1).$$

$$\text{Đường thẳng } d \text{ qua } A\left(\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right) \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u} = (1; 1; 1) \text{ là: } \frac{x-\frac{1}{5}}{1} = \frac{y+\frac{3}{5}}{1} = \frac{z+\frac{2}{5}}{1}.$$

Câu 2. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ

$\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

A. $m = 7; n = -\frac{4}{3}.$

B. $m = 1; n = 0.$

C. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$.

D. $m = 4; n = -3$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Văn Mạnh; Fb: Phạm Văn Mạnh

Chọn C

$$\text{Hai vector } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng khi: } \frac{2}{1} = \frac{m-1}{3} = \frac{3}{-2n} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Câu 3. (Tổ-25-Lan-2-HSG-Yên-Dũng) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;5), B(1;4;3), C(5;2;1)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của T là:

A. $\frac{145}{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $\frac{154}{3}$.

D. 2.

Lời giải

Tác giả: Ngô Gia Khánh; Fb: Khánh Ngô Gia

Chọn A

Ta có: $\vec{AB} = (0;2;-2)$, $\vec{AC} = (4;0;-4)$ suy ra: $\vec{AB}, \vec{AC}$ không cùng phương hay A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Suy ra: $G\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 \\ &= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Do tổng $GA^2 + GB^2 + GC^2$ không đổi nên $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà M nằm trên mặt phẳng (Oxy) nên M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) .

$$\text{Suy ra: } M\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; 0\right) \Rightarrow T = MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{145}{3}.$$

Câu 4. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;0;1)$, bán kính $R_1=2$ và mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1;3;5)$, bán kính $R_2=1$. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với $(S_1), (S_2)$ lần lượt tại A và B . Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn AB . Tính $P = M.m$.

A. $P = 2\sqrt{6}$.

B. $P = 8\sqrt{5}$.

C. $P = 4\sqrt{5}$.

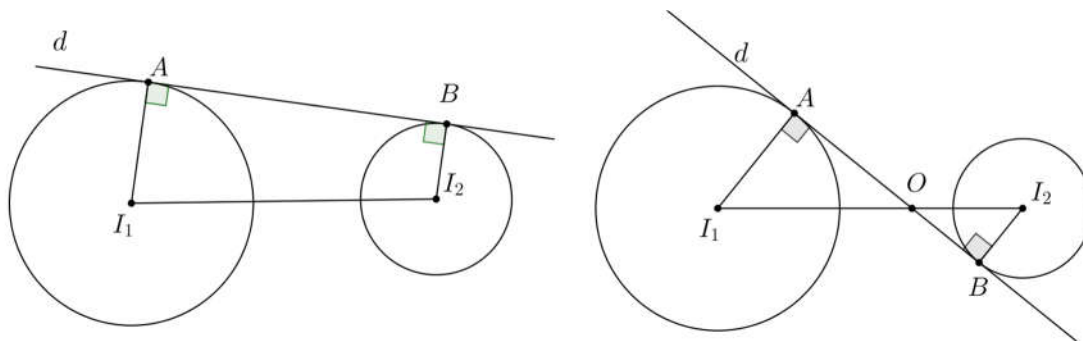
D. $P = 8\sqrt{6}$.

Lời giải (theo thầy Phu Dang)

Tác giả: Lê Tuấn Anh ; Fb: Anh Tuan Anh Le

GV phản biện: Vũ Huỳnh Đức; Fb: Vũ Huỳnh Đức

Chọn D

Ta có $I_1I_2 = 5 > R_1 + R_2 = 3, I_1A \parallel I_2B$.Ta có: $I_1I_2^2 = (\overrightarrow{I_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI_2})^2 = R_1^2 + AB^2 + R_2^2 + 2\overrightarrow{I_1A} \cdot \overrightarrow{BI_2}$

$$\Rightarrow AB^2 = 20 + 2\overrightarrow{I_1A} \cdot \overrightarrow{BI_2} = 20 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos(\overrightarrow{I_1A}, \overrightarrow{I_2B})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Max } AB = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \overrightarrow{I_1A} \nearrow \nearrow \overrightarrow{I_2B} \\ \text{Min } AB = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{I_1A} \nearrow \swarrow \overrightarrow{I_2B} \end{cases}$$

Vậy $M.m = 8\sqrt{6}$

Câu 5. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0$ cắt nhau theo đường tròn (C) . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN , NP , PM ?

A. 4.

B. 3.

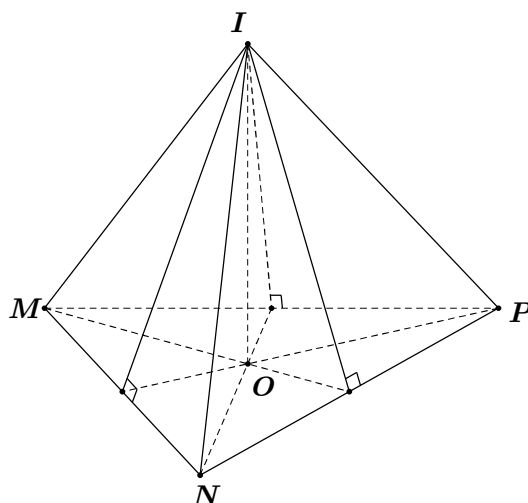
C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Nguyên Chương; Fb: Nguyễn Chương

Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (C) và I là tâm mặt cầu cần tìm.Trừ theo về hai phương trình mặt cầu ta được $(\alpha): 6x - 4y - 2z = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z = 0$.

Mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của tam giác MNP suy ra tâm mặt cầu thuộc đường thẳng vuông góc với (MNP) và đi qua tâm đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp tam giác MNP .

Dễ thấy $(\alpha) \perp (MNP)$ và (α) qua $J(2;2;2)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều MNP nên I thuộc đường thẳng qua J và vuông góc (MNP) .

Vậy có vô số mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P): x+2y-3z+2=0$. Tọa độ của điểm M là

- A. $(5;-1;-3)$. B. $(-1;1;1)$. C. $(2;0;-1)$. D. $(1;0;1)$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Hoàng Anh; Fb: Vũ Hoàng Anh

Chọn B

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Vì M thuộc Δ nên $M(2-3t; t; -1+2t)$

Mặt khác M thuộc mặt phẳng (P) nên: $2-3t+2t-3(-1+2t)+2=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy điểm $M(-1;1;1)$.

Câu 7. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C mà $OA=OB=OC \neq 0$ là:

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

Lời giải

Tác giả: Vũ Xuân Định; Fb: Vu Xuan Dinh

Chọn D

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$. Khi đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Điểm M thuộc mặt phẳng (α) ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1$ (1).

Để $OA=OB=OC$ thì $|a|=|b|=|c|$.

+ Trường hợp 1: $a=b=c$ thay vào (1) ta được $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{5}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{a} = 1 \Leftrightarrow a=8$.

$\Rightarrow a = b = c = 8$. Phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{z}{8} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 8 = 0$.

+ Trường hợp 2: $a = b = -c$ thay vào (1) ta được $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} - \frac{5}{a} = 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -2$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$.

+ Trường hợp 3: $a = -b = c$ thay vào (1) ta được $\frac{1}{a} - \frac{2}{a} + \frac{5}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 4$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = c = 4 \\ b = -4 \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{4} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow x - y + z - 4 = 0$.

+ Trường hợp 4: $a = -b = -c$ thay vào (1) ta được $\frac{1}{a} - \frac{2}{a} - \frac{5}{a} = 1 \Leftrightarrow -\frac{6}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -6$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = c = 6 \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{-6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x - y - z + 6 = 0$.

Vậy có 4 phương trình mặt phẳng (α) .

Câu 8. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -1; -2), B(1; -5; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$. Biết rằng điểm $M(a; b; c)$ là điểm trên d sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $9\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ là.
A. $T = 0$. **B.** $T = 3$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = 2$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đăng Điệp; Fb: Nguyễn Đăng Điệp

Chọn C

Gọi $M \in d \Rightarrow M(1+2t; 1+t; 3+t)$.

Theo bài ra ta có $S_{MAB} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] \right| = 9\sqrt{2}$ (1)

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2t-2; t+2; t+5)$; $\overrightarrow{AB} = (-2; -4; 2)$

$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] = (6t+24; -6t-6; -6t+12)$

(1) $\Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{(6t+24)^2 + (-6t-6)^2 + (-6t+12)^2} = 9\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 108t^2 + 216t + 108 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1$

$\Rightarrow M(-1; 0; 2)$. Vậy giá trị của biểu thức $T = a + b + c = 1$.

Câu 9. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , song song với mặt phẳng (Oxy) và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

A. $\begin{cases} x = \frac{13}{98} - t \\ y = \frac{40}{49} + 2t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = \frac{6}{49} - t \\ y = \frac{41}{49} + 2t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \frac{6}{49} + 2t \\ y = \frac{41}{49} + t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = \frac{13}{98} + 2t \\ y = \frac{40}{49} + t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases}$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Yến ; Fb: Nguyễn Yến.

Chọn D

Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ I \in mp(ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + (2-y_0)^2 + z_0^2 \\ (1-x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + (3-z_0)^2 \\ \frac{x_0}{1} + \frac{y_0}{2} + \frac{z_0}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4y_0 = -3 \\ 2x_0 - 6z_0 = -8 \\ 6x_0 + 3y_0 + 2z_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{13}{98} \\ y_0 = \frac{40}{49} \\ z_0 = \frac{135}{98} \end{cases}$$

Gọi $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ , do đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (Oxy) và vuông góc với đường thẳng AB nên chọn $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}(-1;2;0); \vec{k}(0;0;1)] = (2;1;0)$.

Vậy đường thẳng Δ qua $I\left(\frac{13}{98}; \frac{40}{49}; \frac{135}{98}\right)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(2;1;0)$ có phương trình là

$$\begin{cases} x = \frac{13}{98} + 2t \\ y = \frac{40}{49} + t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

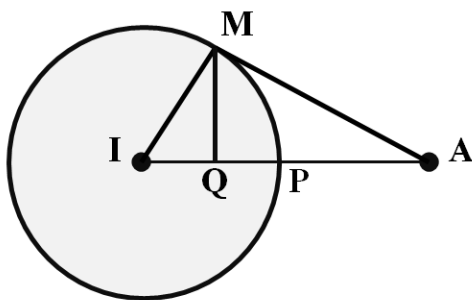
Câu 10. (HSG12 huyện Lương Tài Bắc Ninh năm 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1;2;-4), B(1;2;14)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên mặt cầu (S) sao cho $P = MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

A. $T = \frac{7}{41}$. B. $T = \frac{23}{41}$. C. $T = 4$. D. $T = 7$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Duy Hải; Fb: Toán ôn

Chọn A



Ta có (S) có tâm $I(1;0;2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$

Ta thấy $IA = 2\sqrt{10} = 2R$.

Gọi P là giao điểm của IA và $(S) \Rightarrow P(1;1;-1)$ là trung điểm của IA. Gọi $Q(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ là trung điểm của IP.

Xét 2 tam giác $\triangle IQM$ và $\triangle IMA$ có: $\frac{IQ}{IM} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{2}$ và góc $\widehat{AIM}$ chung

$$\Rightarrow \triangle IQM \sim \triangle IMA (c.g.c) \Rightarrow \frac{MA}{QM} = \frac{AI}{MI} = 2 \Rightarrow MA = 2MQ$$

$$\text{Vậy } P = MA + 2MB = 2(MQ + MB) \geq 2BQ = 3\sqrt{82}$$

Vì Q nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu = xảy ra khi M là giao điểm của QB và (S) và M thuộc đoạn QB

$$\text{Phương trình QB là: } \begin{cases} x=1 \\ y=2+\frac{3}{2}t \\ y=14+\frac{27}{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và } (S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$$

$$\text{Vậy ta có: } (1-1)^2 + \left(2+\frac{3}{2}t\right)^2 + \left(14+\frac{27}{2}t-2\right)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ t = -\frac{46}{41} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } t = -\frac{2}{3} \Rightarrow M(1;1;5) \Rightarrow T = a+b+c = 7 \text{ (thỏa mãn) vì } MB < BQ$$

$$\text{TH2: } t = -\frac{46}{41} \Rightarrow M(1;\frac{13}{41};-\frac{47}{41}) \Rightarrow T = a+b+c = \frac{7}{41} \text{ (loại) vì } MB > BQ$$

Câu 11. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$ và $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) ?

A. 2.

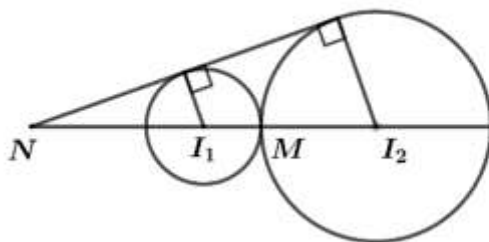
B. 4.

C. 6.

D. 8

Lời giải

Chọn A



(S_1) có tâm $I_1(-3, 2, 4)$, bán kính $R_1 = 1$.

(S_2) có tâm $I_2(0, 2, 4)$, bán kính $R_2 = 2$.

(S_3) có tâm $I_3(-2, 2, 0)$, bán kính $R_3 = 3$.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với ba mặt cầu có VTPT $\vec{n} = (a, b, c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Nhận xét: $I_1I_2 = R_1 + R_2$ nên (S_1) tiếp xúc ngoài (S_2) . Do đó ta có hai trường hợp sau:

TH 1: (P) qua M nhận $\overline{I_1I_2}$ làm VTPT, trong đó M là điểm thoả mãn $\overline{I_1M} = \frac{1}{3}\overline{I_1I_2}$.

Ta có $M(-2, 2, 4)$, $\overline{I_1I_2} = (3, 0, 0) \Rightarrow$ phương trình $(P): x + 2 = 0$.

Nhận thấy $I_3 \notin (P)$ nên mặt phẳng này không thoả mãn ycbt.

TH 2: (P) qua N , trong đó N là điểm thoả mãn $\overline{NI_1} = \overline{I_1I_2}$. Suy ra $N(-6, 2, 4)$.

Phương trình $(P): a(x + 6) + b(y - 2) + c(z - 4) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + 6a - 2b - 4c = 0$.

* (P) tiếp xúc với $(S_1) \Leftrightarrow d(I_1; (P)) = R_1 \Leftrightarrow |-3a + 2b + 4c + 6a - 2b - 4c| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\Leftrightarrow |3a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1)$$

* (P) tiếp xúc với $(S_3) \Leftrightarrow d(I_3; (P)) = R_3 \Leftrightarrow |-2a + 2b + 6a - 2b - 4c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\Leftrightarrow |4a - 4c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} |3a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |4a - 4c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |9a| = |4a - 4c| \\ |3a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 4a - 4c \\ 9a = -4a + 4c \\ 3a = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ 3a = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5a = -4c \\ 3a = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} 5a = -4c \\ 3a = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} & \text{(II)} \\ \begin{cases} 13a = 4c \\ 3a = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} & \text{(III)} \\ \begin{cases} 13a = 4c \\ 3a = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} & \text{(IV)} \end{cases}.$$

$$\text{Xét hệ (I): } \begin{cases} 5a = -4c \\ 3a = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ c = -\frac{5}{4}a \\ b^2 = \frac{103}{16}a^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ chọn được 2 bộ vector $(4; \sqrt{103}; -5), (4; -\sqrt{103}; -5)$.

$$\text{Xét hệ (II): } \begin{cases} 5a = -4c \\ 3a = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ c = -\frac{5}{4}a \\ b^2 = \frac{103}{16}a^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ chọn được 2 bộ vector $(-4; \sqrt{103}; 5), (-4; -\sqrt{103}; 5)$.

$$\text{Xét hệ (III): } \begin{cases} 13a = 4c \\ 3a = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ c = \frac{13}{4}a \\ b^2 = -\frac{41}{16}a^2 \end{cases} \Rightarrow \text{không có bộ } (a, b, c) \text{ nào thỏa mãn.}$$

$$\text{Xét hệ (IV): } \begin{cases} 13a = 4c \\ 3a = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ c = \frac{13}{4}a \\ b^2 = -\frac{41}{16}a^2 \end{cases} \Rightarrow \text{không có bộ } (a, b, c) \text{ nào thỏa mãn.}$$

Từ kết quả trên ta có 2 mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$.

Câu 12. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (1; 1; -2), \vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° .

A. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. B. $m = 2 + \sqrt{6}$. C. $m = 2$. D. $m = 2 - \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \Leftrightarrow \cos(45^\circ) = \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ -m^2 + 4m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

Câu 13. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz , cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{14}{3}$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{1}$. Gọi $A(x_0; y_0; z_0) (x_0 > 0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) và các tiếp điểm B, C, D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều .

Tính giá trị của $P = x_0 + y_0 + z_0$.

- A. $P=8$. B. $P=6$. C. $P=16$. D. $P=12$.

Lời giải

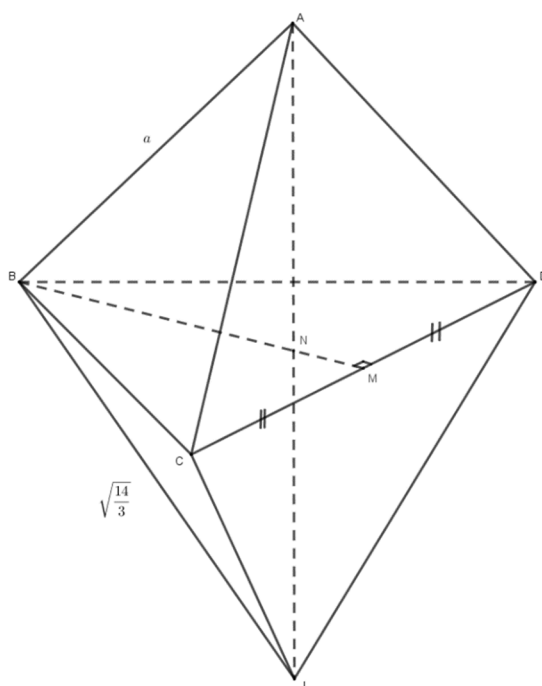
Tác giả: Đào Hải Nam – Bùi Quý Minh

Chọn D

Câu 1. (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R = \sqrt{\frac{14}{3}}$.

Câu 2. Đặt $AB = a$; $BN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \widehat{A_1} = \frac{BN}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác $\sin \widehat{A_1} = \frac{BI}{AI} \Rightarrow AI = \frac{BI}{\sin \widehat{A_1}} = \sqrt{14}$.



Giả sử điểm A có tọa độ $(4+3t; 4+2t; 4+t)$ và do $AI = \sqrt{14}$ nên ta có :

Câu 3. $(4+3t-1)^2 + (4+2t-2)^2 + (4+t-3)^2 = 14.$

Câu 4. $\Rightarrow (t+1)^2 = 1.$

Câu 5. $\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}.$

Kết hợp với điều kiện điểm A có hoành độ dương nên ta nhận $t = 0 \Rightarrow A(4; 4; 4).$

Chọn D

Câu 14. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 0)$, $B(2; 0; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $AM = \sqrt{61}$ và MB vuông góc với AB .

Lời giải

Ta có $\vec{n}_p = (1; -2; -2)$ và $\vec{AB} = (1; 1; 3)$ nên $[\vec{n}_p; \vec{AB}] = (-4; -5; 3).$

Dễ thấy $B \in (P)$ và $M \in (P)$ nên $MB \subset (P).$

Lại có $MB \perp AB$ (giả thiết) nên đường thẳng MB có véc tơ chỉ phương là: $\vec{u} = [\vec{n}_p; \vec{AB}].$

Phương trình tham số của đường thẳng MB là:
$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -5t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \Rightarrow M \in (2 - 4t; -5t; 3 + 3t).$$

Mà $AM^2 = 61 \Leftrightarrow (4t - 1)^2 + (5t - 1)^2 + 9(t + 1)^2 = 61.$

$\Leftrightarrow t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$

Vậy có hai điểm $M(-2; -5; 6)$ và $M(6; 5; 0).$

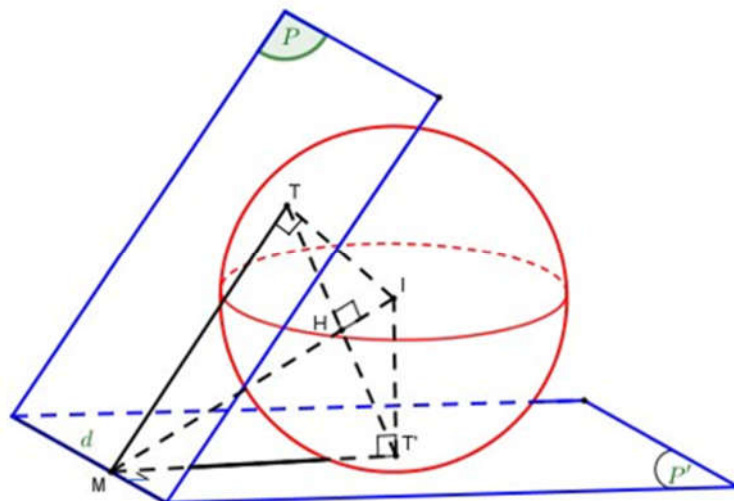
Câu 15. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right).$ B. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right).$ C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right).$ D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right).$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Tuấn; Fb: Nguyễn Tuấn

Chọn C



+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và có bán kính $R=1$.

+ Gọi M là hình chiếu của I trên d . Suy ra: $M(t;2+t;-t) \in d$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}(t-1;2+t;-t+1)$ và $\overrightarrow{u_d}(1;1;-1)$ là vectơ chỉ phương của d .

Suy ra: $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t-1+t+2+t-1=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow M(0;2;0)$.

+ Ta có: $IM = \sqrt{6}$, $IH \cdot IM = IT^2 = 1 \Rightarrow IH = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - 1 = -\frac{1}{6} \\ y_H - 0 = \frac{1}{6} \cdot 2 \\ z_H + 1 = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{5}{6} \\ y_H = \frac{1}{3} \\ z_H = -\frac{5}{6} \end{cases} \text{ . Vậy } H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right).$$

Câu 16. (HSG12 tỉnh Bắc Ninh 2018 – 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;1;1)$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) , mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $-x+y=0$.

B. $3x-2y-z-3=0$.

C. $3x-2y-z-3=0$.

D. $x+y+z-2=0$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Hiếu; Fb: Hieu nguyen

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;1)$ mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(Q)}}=[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}]=(3;-2;-1)$.

Lại có (Q) đi qua $A(1;-1;2)$ nên (Q) có phương trình

$$(Q): 3(x-1)-2(y+1)-1(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0.$$

Câu 17. (HSG12 Thành Phố Đà Nẵng 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;3;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(-6;2;4)$ và $D(2;1;7)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là một mặt cầu (S) . Xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I\left(\frac{4}{3}; 1; \frac{2}{3}\right), R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{14}{3}; \frac{2}{3}\right), R = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $I\left(1; \frac{14}{3}; \frac{8}{3}\right), R = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

D. $I\left(\frac{8}{3}; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right), R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Hữu Nhân ; Fb: Do Huu Nhan

Phản biện: Nguyễn Xuân Giao ; Fb: Giao Nguyen

Chọn C

Gọi $M(x, y, z)$.

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (3 - 3x; 14 - 3y; 8 - 3z)$$

$$|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2 + (3y-14)^2 + (3z-8)^2 = 21$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{21}{9}$$

Vậy tập hợp các điểm M là một mặt cầu (S) có tâm $I\left(1; \frac{14}{3}; \frac{8}{3}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Câu 18. (HSG12 Tỉnh Nam Định 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

A. $P = 23$.

B. $P = 31$.

C. $P = 11$.

D. $P = 13$.

Lời giải

Tác giả: Trần Anh Tuấn; Fb: Trần Anh Tuấn

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (4-a; 1-b; 5-c)$, $\overrightarrow{MB} = (3-a; -b; 1-c)$, $\overrightarrow{MC} = (-1-a; 2-b; -c)$

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \\
&= (4-a)(3-a) + (1-b)(-b) + (5-c)(1-c) \\
&+ 2(3-a)(-1-a) + 2(-b)(2-b) + 2(1-c)(-c) \\
&- 5(4-a)(-1-a) - 5(1-b)(2-b) - 5(5-c)(-c) \\
&= -2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 4a + 10b + 17c + 21 \\
&= -2(a-1)^2 - 2\left(b - \frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(c - \frac{17}{4}\right)^2 + \frac{573}{8} \leq \frac{573}{8}
\end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{5}{2} \\ c=\frac{17}{4} \end{cases}. \text{ Khi đó } P = a - 2b + 4c = 13.$$

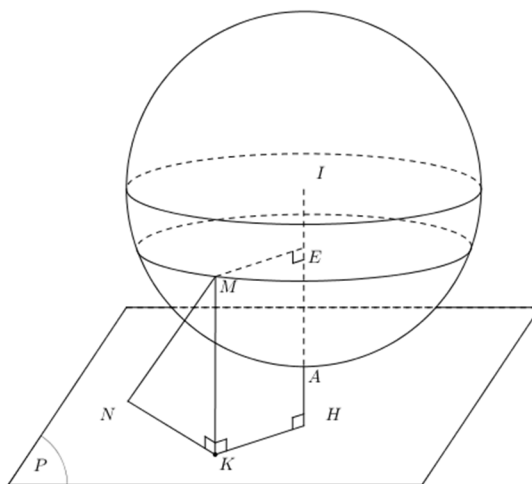
Câu 19. (HSG12 Ninh Bình 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S) , điểm N thay đổi trên (P) . Độ dài nhỏ nhất của MN bằng:

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền ; Fb: Huyền Nguyen

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 3$.

Khoảng cách từ I đến (P) bằng: $d(I, (P)) = 4 > R \Rightarrow (S)$ và (P) không có điểm chung.

Đường thẳng qua I và vuông góc với (P) cắt (S) tại A , cắt (P) tại H . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thay đổi trên (S) và (P) . Gọi K, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và IH .

Ta có: $MN \geq MK = EH$

Vì M nằm trên mặt cầu (S) (M nằm trên đường tròn tâm E là giao tuyến của mặt cầu với mặt phẳng qua M vuông góc với IH) nên $EH \geq AH \Rightarrow MN \geq AH$.

Vậy độ dài MN nhỏ nhất bằng $AH = d(I, (P)) - R = 1$, xảy ra khi $M \equiv A, N \equiv H$.

Câu 20. (HSG12 tỉnh Hà Nam năm 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; -1; 0), M(0; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$ biết rằng $AH = \sqrt{2}$ và mặt phẳng (AMH) vuông góc với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Ta có: $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$; $\vec{AM} = (1; 2; 0) = \vec{u}_{AM}$. Ta có: $[\vec{n}_P; \vec{AM}] = (2; -1; -1)$.

Mặt phẳng (AMH) chứa AM và vuông góc với mặt phẳng (P) nên phương trình mặt phẳng (AMH) là: $2x - y - z + 1 = 0$.

Gọi $H(x; y; z)$, ta có: $\vec{AH} = (x+1; y+1; z)$ và $AH^2 = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2$.

Vì H thuộc mặt phẳng (P) nên ta có hpt:
$$\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$
 giải hpt ta được $H_1 = (-1; 0; -1)$

và $H_2 = (-1; -2; 1)$

Câu 21. (HSG12 Tân Yên – Bắc Giang Năm 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 0)$ và

đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d .

A. $2x + y + z - 4 = 0$.

B. $x + 2y - z + 4 = 0$.

C. $2x - y - z + 4 = 0$.

D. $2x + y - z - 4 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Khoa ; Fb: Nguyễn Khoa

Chọn D

Do mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d nên (P) có VTPT là $\vec{n}_P = \vec{u}_d = (2; 1; -1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 2; 0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là:

$$2(x-1) + 1(y-2) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 4 = 0.$$

Câu 1. (HSG12 tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019 (2)) Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $P(a) = 1$, $P(b) = 2$ và $P(c) = 3$. Chứng minh rằng: $a + c = 2b$.

Lời giải

Tác giả: Trần Dung; Fb: Trần Dung

Cách 1:

Đa thức có nghiệm $x = b$ có thể viết dưới dạng $(x - b).q(x)$.

Vì $P(b) = 2$ nên ta có $P(x) = (x - b).q(x) + 2$ với $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Ta có: $\begin{cases} P(a) = 1 \\ P(c) = 3 \end{cases}$ thay vào $P(x)$ ta được $\begin{cases} 1 = P(a) = (a - b).q(a) + 2 \\ 3 = P(c) = (c - b).q(c) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b).q(a) = -1 \\ (c - b).q(c) = 1 \end{cases}$

Vì $a - b, c - b, q(a), q(c)$ là những số nguyên nên $a - b$ và $c - b$ là ước của 1.

Ta có $P(a) \neq P(c) \Rightarrow a \neq c$. Suy ra: $\begin{cases} a - b = 1 \\ c - b = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a - b = -1 \\ c - b = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow a + c = 2b$$

Cách 2:

Bổ đề: Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên; a, b là hai số nguyên khác nhau. Khi đó: $P(a) - P(b) : a - b$.

Trở lại bài toán.

Ta có: $\begin{cases} P(a) \neq P(b) \\ P(c) \neq P(b) \\ P(a) \neq P(c) \end{cases}$ nên $\begin{cases} a \neq b \\ c \neq b \\ a \neq c \end{cases}$.

Khi đó: $\begin{cases} P(a) - P(b) : a - b \\ P(c) - P(b) : c - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1 : a - b \\ 3 - 2 : c - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 : a - b \\ 1 : c - b \end{cases}$

Như vậy: $a - b$ và $c - b$ là ước của 1.

Suy ra: $\begin{cases} a - b = -1 \\ c - b = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a - b = 1 \\ c - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + c = 2b$

Câu 2. (HSG12 HCM ngày 2 năm 2018-2019) Cho đa thức bậc ba $P(x) = x^3 - 3x$.

- a) Chứng minh rằng tồn tại các số thực a, b, c đôi một phân biệt sao cho $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.
- b) Giả sử tồn tại 3 bộ số thực (a_i, b_i, c_i) với $i = \overline{1, 3}$ gồm 9 số đôi một phân biệt sao cho $P(a_i) = b_i, P(b_i) = c_i, P(c_i) = a_i$ với $i = \overline{1, 3}$. Đặt $S_i = a_i + b_i + c_i$ với $i = \overline{1, 3}$. Chứng minh rằng $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \neq S_1.S_2 + S_2.S_3 + S_3.S_1$.

Lời giải

a) Giả sử a, b, c là bộ 3 số thực đôi một phân biệt thỏa mãn $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.

Xét $a = 2 \cos \alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$ khi đó $b = P(a) = P(2 \cos \alpha) = 8 \cos^3 \alpha - 6 \cos \alpha = 2 \cos 3\alpha$.

Tương tự, $c = P(b) = P(2 \cos 3\alpha) = 2 \cos 9\alpha$, $a = P(c) = P(2 \cos 9\alpha) = 2 \cos 27\alpha$.

$$\text{Từ đó ta cần có } 2 \cos \alpha = 2 \cos 27\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pm 27\alpha + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{k\pi}{13} \\ \alpha = \frac{k\pi}{14} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy chọn $a = 2 \cos \frac{\pi}{13}$ thì $b = 2 \cos \frac{3\pi}{13}$, $c = 2 \cos \frac{9\pi}{13}$ ta được bộ 3 số thực a, b, c đôi một phân

biệt thỏa mãn bài toán.

b) Giả sử tồn tại 3 bộ số thực (a_i, b_i, c_i) với $i = \overline{1, 3}$ gồm 9 số đôi một phân biệt sao cho $P(a_i) = b_i, P(b_i) = c_i, P(c_i) = a_i$ với $i = \overline{1, 3}$. Đặt $S_i = a_i + b_i + c_i$ với $i = \overline{1, 3}$.

Chứng minh rằng $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \neq S_1.S_2 + S_2.S_3 + S_3.S_1$.

Giả sử $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_1.S_2 + S_2.S_3 + S_3.S_1 \Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = d$.

Xét đa thức $Q(x) = x + P(x) + P(P(x)) - d$ suy ra $Q(x)$ là đa thức bậc 9.

Ta có: $Q(a_1) = a_1 + P(a_1) + P(P(a_1)) - d = a_1 + b_1 + P(b_1) - d = a_1 + b_1 + c_1 - d = S_1 - d = 0$.

$Q(b_1) = b_1 + P(b_1) + P(P(b_1)) - d = b_1 + c_1 + a_1 - d = S_1 - d = 0$.

$Q(c_1) = c_1 + P(c_1) + P(P(c_1)) - d = c_1 + a_1 + b_1 - d = S_1 - d = 0$.

Suy ra a_1, b_1, c_1 là 3 nghiệm phân biệt của phương trình $Q(x) = 0$.

Tương tự, a_2, b_2, c_2 và a_3, b_3, c_3 cũng là các nghiệm phân biệt của phương trình $Q(x) = 0$ hay phương trình $Q(x) = 0$ có 9 nghiệm thực phân biệt có tổng bằng $3d$.

Mặt khác, $Q(x) = x + x^3 - 3x + (x^3 - 3x)^3 - 3(x^3 - 3x)$ hay $Q(x) = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 29x^3 + 7x$ suy ra $Q(x)$ không chứa x^8 nên theo định lí viết thì phương trình $Q(x) = 0$ có tổng các nghiệm bằng 0 hay $3d = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow Q(x) = 0$ có một nghiệm bằng 0, mà $P(0) = 0$ mâu thuẫn với giả thiết $P(a_i) = b_i, P(b_i) = c_i, P(c_i) = a_i$. Vậy $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \neq S_1.S_2 + S_2.S_3 + S_3.S_1$.

Câu 3. (HSG11 Chuyên Duyên Hải Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2018-2019) Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in$

$[x]$ sao cho với mọi số n nguyên dương, phương trình $P(x) = 2^n$ có nghiệm nguyên.

Lời giải

Rõ ràng $\deg(P) > 0$. Đặt $\deg(P) = m$ và a là hệ số bậc cao nhất của P , không mất tổng quát, coi $a > 0$.

Gọi x_n là nghiệm nguyên lớn nhất của phương trình $P(x) = 2^n$.

Dễ thấy $x_n \rightarrow +\infty$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax_n^m}{2^n} = 1$, do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt[m]{2}$

Hơn nữa, do $x_{n+1} - x_n$ là ước của $P(x_{n+1}) - P(x_n)$ nên $x_{n+1} - x_n = 2^{k_n}$, với k_n là số tự nhiên nào đó. Suy ra

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{2^{k_n}}{x_n}$$

$$\text{Và } (\sqrt[m]{2} - 1)^m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{k_n}}{x_n} \right)^m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 2^{m \cdot k_n}}{a \cdot x_n^m} = a \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{m \cdot k_n - n}.$$

Do đó, dãy $(m \cdot k_n - n)$ phải hội tụ đến l (nguyên) nào đó. Kéo theo

$$(\sqrt[m]{2} - 1)^m = a \cdot 2^l. \text{ Do đó } m \text{ phải bằng } 1$$

Đặt $P(x) = ax + b$. Từ $a(x_2 - x_1) = 2$ ta suy ra $a = \pm 1, \pm 2$. Từ đó, ta tìm được tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn là $P(x) = a(x + k)$ với $a = \pm 1, \pm 2$ và k là một số nguyên tùy ý

Câu 4. (HSG12 tỉnh Hưng Yên 2018-2019) Cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ với a, b, c là các số thực không âm. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực, chứng minh $f(2018) \geq 2019^4$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Rìn; Fb: Nguyễn Văn Rìn

Nhận xét: Nếu x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì $x_0 < 0$ (vì nếu $x_0 \geq 0$ thì $f(x_0) > 0$).

Gọi 4 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$ với $x_i > 0, \forall i = \overline{1, 4}$.

Khi đó $f(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4)$; $f(0) = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$.

$$\text{Ta có } f(2018) = \prod_{i=1}^4 (2018 + x_i) = \prod_{i=1}^4 \left(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{2018 \text{ lần}} + x_i \right) \geq \prod_{i=1}^4 (2019 \cdot \sqrt[2019]{x_i}) = 2019^4 \cdot \sqrt[2019]{x_1 x_2 x_3 x_4} = 2019^4.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Câu 5. (HSG12 tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2018-2019)

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 + y^3 + x^2 y + x y^2 = 4(x^2 + x y + y^2) + 1$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Ngọc Như Trang; Fb: nhutrangnguyenngoc

Nhận xét: $x \neq y$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) > |4xy + 1|$$

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 4(x^2 + xy + y^2) + 1 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y - 4) = 4xy + 1$$

$$\Rightarrow 2|4xy + 1| = |2(x^2 + y^2)(x + y - 4)| > |4xy + 1||x + y - 4|$$

$$\Rightarrow 2 > |x + y - 4| \Rightarrow x + y = 3 \vee x + y = 4 \vee x + y = 5$$

$x + y = 3$ không thỏa.

$x + y = 4$ không thỏa.

$x + y = 5$ tìm được $x = 1; y = 4$ hoặc $x = 4; y = 1$

Câu 6. (HSG chọn HSG quốc gia tỉnh ĐỒNG THÁP 2018-2019) Xét phương trình $x^{31} + y^5 = z^{2018}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ ba số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình trên.

b) Có tồn tại hay không bộ ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình trên?

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Nương; Fb: Cô giáo Nương

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ ba số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình trên.

Cho $x = 0$ phương trình trở thành $y^5 = z^{2018}$.

Cho $y = a^{2018}$ (a là số nguyên tùy ý). Suy ra $z = a^5$.

Khi đó $(x, y, z) = (0, a^{2018}, a^5)$ thỏa mãn phương trình.

Vì a là số nguyên tùy ý nên tồn tại vô số bộ ba (x, y, z) nguyên thỏa mãn phương trình.

b) Có tồn tại hay không bộ ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình trên?

Có tồn tại bộ ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình trên.

Vì: Xét $x = 2^{5m}, y = 2^{31m}, (m \in \mathbb{Z}^+)$. Khi đó: $x^{31} + y^5 = (2^{5m})^{31} + (2^{31m})^5 = 2.2^{155m} = 2^{155m+1}$.

Mà theo đề bài ta có: $x^{31} + y^5 = z^{2018}$ nên ta cần chọn m sao cho: $155m + 1 = 2018n, (n \in \mathbb{Z}^+)(1)$.

Khi đó: $z = 2^n$. Từ (1) suy ra: $2018n - 1$ chia hết cho 155

Hay: $3n - 1$ chia hết cho 155.

Đặt: $3n - 1 = 155k, (k \in \mathbb{Z}^+)$. Suy ra: $155k + 1$ chia hết cho 3. Hay $156k - (k - 1)$ chia hết cho 3.

Do đó: $k - 1$ chia hết cho 3.

Đặt: $k - 1 = 3q, (q \in \mathbb{Z}^+) \Leftrightarrow k = 3q + 1, (q \in \mathbb{Z}^+)$. Từ đó suy ra: $m = 2018q + 677$.

Như vậy $(x, y, z) = (2^{5(2018q+677)}, 2^{31(2018q+677)}, 2^{155q+52})$, $(q \in \mathbb{Z}^+)$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 7. (HSG12 Hồ Chí Minh Ngày 2 năm 2018-2019) Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\left(f(x^3+x)\right)^2 \leq f(2x)+2 \text{ và } \left(f(-2x)\right)^3 \geq 3f(-x^3-x)+2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ không phải là đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng $f(x) \geq -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng $f(x)$ không phải là đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

Xét phương trình $x^3+x=2x \Leftrightarrow x=0, x=\pm 1$.

Thay $x=0$ vào các điều kiện của đề bài, ta có

$$\left(f(0)\right)^2 \leq f(0)+2 \Leftrightarrow -1 \leq f(0) \leq 2 \text{ và } \left(f(0)\right)^3 \geq 3f(0)+2 \Leftrightarrow f(0)=-1 \vee f(0) \geq 2.$$

Suy ra $f(0)=-1$ hoặc $f(0)=2$; tức là $f(0) \in \{-1; 2\}$.

Một cách tương tự, thay $x=1, x=-1$ trong điều kiện thứ nhất và thay $x=-1, x=1$

trong điều kiện thứ hai, ta có $f(2) \in \{-1; 2\}$ và $f(-2) \in \{-1; 2\}$.

Do đó, trong ba số $f(0), f(2), f(-2)$ phải có hai số bằng nhau; điều này chứng tỏ $f(x)$ không phải là một đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng $f(x) \geq -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết suy ra $f(2x) \geq (f(x^3+x))^2 - 2 \geq -2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f(x) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ $f(-2x) \geq \sqrt[3]{3f(-x^3-x)+2} \geq \sqrt[3]{-4}, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \geq -\sqrt[3]{4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta xây dựng dãy số $u_1 = -2, u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n+2}, \forall n \geq 1$

Rõ ràng theo biến đổi trên thì với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $f(x) \geq u_n, \forall n \geq 1$.

Ta thấy $u_2 = -\sqrt[3]{4} \geq u_1$ nên $u_3 = \sqrt[3]{3u_2+2} \geq \sqrt[3]{3u_1+2} = u_2$ và cứ như thế, ta thấy dãy đã cho là dãy số tăng ngặt.

Ngoài ra, cũng bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thấy $u_n \leq -1$ với mọi $n \geq 1$.

Thật vậy: Với $n=1$ có $u_1 = -2 < -1$ (mệnh đề đúng với $n=1$).

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k (k \in \mathbb{N}^*)$ tức là $u_k \leq -1$

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$. Ta có:

$$u_k \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 3u_k \leq -3$$

$$\Leftrightarrow 3u_k + 2 \leq -3 + 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3u_k + 2} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} \leq -1$$

Từ đó dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn, đặt là $L, L \leq -1$.

Ta có $L = \sqrt[3]{3L+2}$, giải ra có $L = -1$.

Vì $\lim u_n = -1$ nên phải có $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$, đpcm.

Câu 8. (HSG11 tỉnh Phú Yên năm 2018-2019) Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

i) $f(2020) = 2019$;

ii) $f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó kí hiệu $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$. Hãy tính $f(2018)$.

Lời giải

Tác giả: Thành Đức Trung; Fb: Thành Đức Trung

Kí hiệu $f_2(x) = f(f(x)), f_3(x) = f(f(f(x)))$.

Gọi D_f là tập giá trị của hàm số $f(x)$.

Từ i) suy ra $2019 \in D_f$.

Từ ii) suy ra $f(2020) \cdot f_4(2020) = 1 \Rightarrow 2019 \cdot f_4(2020) = 1 \Rightarrow f_4(2020) = \frac{1}{2019} \in D_f$

và $xf_3(x) = 1, \forall x \in D_f$.

Do f liên tục trên $D = \left[\frac{1}{2019}; 2019 \right] \subset D_f$ nên $f_3(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$.

Suy ra f là đơn ánh trên D và do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên f nghịch biến trên D .

Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$ (1).

Do f là hàm nghịch biến nên $f_2(x_0) < f\left(\frac{1}{x_0}\right)$ (2).

Và $\frac{1}{x_0} = f_3(x_0) > f_2\left(\frac{1}{x_0}\right)$ suy ra $f\left(\frac{1}{x_0}\right) < f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $x_0 > f_2(x_0)$ hay $f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0}$, mâu thuẫn với (1).

Tương tự, ta cũng chứng minh được không tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$. Do $2018 \in D$ nên suy ra $f(2018) = \frac{1}{2018}$.

Câu 9. (HSG12 HCM ngày 2 năm 2018-2019) Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy , hai điểm nguyên (hoành độ và tung độ là các số nguyên) A, B được gọi là “thân thiết” với nhau nếu A, B khác O và $-1 \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 1$ với O là gốc tọa độ.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm nguyên $M(x, y)$ với $|x| \leq 19, |y| \leq 19$ thỏa mãn điểm M và điểm

$N(3; 7)$ “thân thiết” với nhau?

b) Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu điểm nguyên đôi một “thân thiết” với nhau?

Lời giải

a) Ta có điều kiện $-1 \leq 3x + 7y \leq 1$ nên có ba trường hợp:

(1) Nếu $3x + 7y = 0$ thì $(x, y) = (-7t, 3t)$ với $t \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn. Xét hệ ràng buộc sau

$$\begin{cases} -19 \leq -7t \leq 19 \\ -19 \leq 3t \leq 19 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2 \text{ và } t \neq 0 \text{ nên có tất cả 4 điểm.}$$

(2) Nếu $3x + 7y = 1$ thì $(x, y) = (-2 + 7t, 1 - 3t)$ với $t \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn. Xét hệ ràng buộc

$$\begin{cases} -19 \leq -2 + 7t \leq 19 \\ -19 \leq 1 - 3t \leq 19 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 3 \text{ nên có tất cả 6 điểm.}$$

(3) Nếu $3x + 7y = -1$ thì $(x, y) = (2 + 7t, -1 - 3t)$ với $t \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn. Xét hệ ràng buộc

$$\begin{cases} -19 \leq 2 + 7t \leq 19 \\ -19 \leq -1 - 3t \leq 19 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 2 \text{ nên cũng có tất cả 6 điểm.}$$

Vậy tổng số điểm nguyên thỏa mãn là $4 + 6 + 6 = 16$.

b) Gọi điểm đã cho là $A_i(a_i; b_i)$ với $a_i, b_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n}$ và $a_i^2 + b_i^2 > 0$.

Ta có $|a_i a_k + b_i b_k| \leq 1$ với mọi $i \neq k$. Ta thấy rằng:

- Có tối đa hai điểm thuộc trục Ox là $(1; 0)$ và $(-1; 0)$.

- Có tối đa hai điểm thuộc trục Oy là $(0; 1), (0; -1)$.

Ta sẽ chứng minh rằng có không quá 2 điểm không thuộc cả Ox, Oy . Giả sử ngược lại rằng có ba điểm như thế thỏa mãn đề bài là $A_1(a_1, b_1), A_2(a_2, b_2), A_3(a_3, b_3)$. Ta có hai trường hợp:

(1) Nếu có hai điểm thuộc cùng một góc phần tư, giả sử là A_1, A_2 thì các số a_1, a_2 cùng dấu, các số b_1, b_2 cũng cùng dấu nên $a_1 a_2 > 0, b_1 b_2 > 0 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 \geq 2$, loại.

(2) Nếu không có điểm nào thuộc cùng một góc phần tư thì phải có hai điểm thuộc hai góc phần tư đối nhau, giả sử là A_1, A_2 thì các số a_1, a_2 trái dấu, các số b_1, b_2 cũng trái dấu nên $a_1 a_2 < 0, b_1 b_2 < 0 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq -2$, không thỏa.

Do đó, điều giả sử là sai, tức là tổng cộng có không quá 6 điểm thỏa mãn đề bài.

Ta có $A_1(0; 1), A_2(0; -1), A_3(1; 0), A_4(-1; 0), A_5(1; 1), A_6(-1; 1)$ đôi một “thân thiết”.

Câu 10. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Năm bạn học sinh Tính, Nghĩa, Tuấn, Phú và Thuận ở chung một phòng trong ký túc xá của một trường trung học phổ thông. Một hôm người quản lý ký túc xá đến phòng của năm học sinh này để xác định lại hộ khẩu nhà của từng học sinh. Vì đều là học sinh giỏi toán nên các học sinh không trả lời trực tiếp mà nói với người quản lý ký túc xá như sau:

- Tính: “ Nhà bạn Phú ở Thới Lai còn nhà em ở Cờ Đỏ ”

- Nghĩa: “ Nhà em cũng ở Cờ Đỏ còn nhà bạn Tuấn ở Ô Môn ”

- Tuấn: “ Nhà em cũng ở Cờ Đỏ còn nhà bạn Phú ở Thốt Nốt ”

- Phú: “ Nhà em ở Thới Lai còn nhà bạn Thuận ở Ninh Kiều ”

- Thuận: “ Nhà em ở Ninh Kiều còn nhà bạn Tính ở Thốt Nốt”
Em hãy giúp người quản lý ký túc xá xác định đúng hộ khẩu nhà của các học sinh trên. Biết rằng trong câu trả lời của mỗi học sinh đều có một phần đúng và một phần sai đồng thời mỗi địa phương là địa chỉ hộ khẩu của đúng một học sinh.

Lời giải

- Tính: “ Nhà bạn Phú ở Thới Lai còn nhà em ở Cờ Đỏ ” (1)
- Nghĩa: “ Nhà em cũng ở Cờ Đỏ còn nhà bạn Tuấn ở Ô Môn ” (2)
- Tuấn: “ Nhà em cũng ở Cờ Đỏ còn nhà bạn Phú ở Thốt Nốt ” (3)
- Phú: “ Nhà em ở Thới Lai còn nhà bạn Thuận ở Ninh Kiều ” (4)
- Thuận: “ Nhà em ở Ninh Kiều còn nhà bạn Tính ở Thốt Nốt ” (5)

Xét phát biểu (3) xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu ý đầu của (3) đúng thì có nghĩa nhà Tuấn ở Cờ Đỏ là **đúng**. Khi đó từ ý (2) nhà Tuấn ở Ô Môn là sai và nhà Nghĩa ở Cờ Đỏ là **đúng**. Mâu thuẫn vì có hai bạn Tuấn và Nghĩa đều ở Cờ Đỏ nên trường hợp này loại.

Trường hợp 2: Nếu ý đầu của (3) sai thì nhà bạn Phú ở Thốt Nốt là **đúng** dẫn đến ý đầu của (5) là nhà Thuận ở Ninh Kiều **đúng**. Khi đó ý đầu của (4), nhà Phú ở Thới Lai là sai. Từ (1) có nhà Tính ở Cờ Đỏ là **đúng** và từ (2) nhà Tuấn ở Ô Môn là **đúng**. Vậy còn lại nhà bạn Nghĩa ở Thới Lai. Trường hợp này thỏa mãn giả thiết bài toán.

Kết luận: Nhà Phú ở Thốt Nốt, nhà Thuận ở Ninh Kiều, nhà Tính ở Cờ Đỏ, nhà Tuấn ở Ô Môn và nhà Nghĩa ở Thới Lai.

Câu 11. (HSG12 Hồ Chí Minh Ngày 2 năm 2018-2019) (HSG12 Hồ Chí Minh Ngày 2 năm 2018-2019)
Tại một hội nghị khoa học có 100 đại biểu tham dự. Người ta nhận thấy rằng không có 3 đại biểu nào đôi một quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho không có đại biểu nào quen quá n đại biểu khác và với mọi k , $1 \leq k \leq n$ có ít nhất một đại biểu quen đúng k đại biểu khác. Hãy tìm giá trị lớn nhất của n .

Lời giải

Ta chứng minh $n_{\max} = 66$. Giả sử $n_{\max} > 66$.

Cách 1:

Khi đó tồn tại đại biểu A_{100} quen 67 đại biểu $A_1, A_2, \dots, A_{67}$.

Gọi X là tập hợp các đại biểu $A_{68}, A_{69}, \dots, A_{99}$ thì $|X| = 32$.

Khi đó các đại biểu $A_1, A_2, \dots, A_{67}$ chỉ có thể quen A_{100} và các đại biểu thuộc X (vì các đại biểu A_i, A_j với $1 \leq i < j \leq 67$ không thể quen nhau).

Suy ra họ quen không quá 33 đại biểu.

Vì vậy những đại biểu quen 34, 35, ..., 65, 66 đại biểu khác phải thuộc X .

Điều này vô lý bởi $|X| = 32 < 66 - 34 + 1 = 33$.

Cách 2:

Xét người A có 67 người quen. Xét người B có lớn hơn hoặc bằng 34 người quen.

Nếu A quen B , khi đó trong 98 người còn lại có 66 người quen A và lớn hơn hoặc bằng 33 người quen B .

Do $66 + 33 = 99 > 98$ nên A, B phải có người quen chung (mâu thuẫn giả thiết).

Vậy A không quen B .

Vì có ít nhất 33 người có số người quen tương ứng là 34, 35, ..., 66 nên có ít nhất 33 người không quen A . Điều này mâu thuẫn vì A quen với 67 người.

Vậy $n_{\max} \leq 66$.

Ta xây dựng ví dụ thỏa mãn $n = 66$ như sau:

A_1 quen với $B_1, B_2, \dots, B_{66}$, A_2 quen với $B_2, B_3, \dots, B_{66}, \dots$, A_{34} quen với $B_{34}, \dots, B_{66}$.

Khi đó không có 3 người đôi một quen nhau và A_k quen với $67 - k$ người ($\forall k = 1, \dots, 34$) và B_k quen với k người ($\forall k = 1, \dots, 34$), B_k quen với 34 người ($\forall k = 35, \dots, 66$).

Rõ ràng trường hợp trên thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Câu 12. (HSG12 tỉnh Bình Thuận vòng 2 năm 2018-2019) Cho 2018 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phần tử. Biết rằng hai tập hợp tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2018 tập hợp đã cho.

Lời giải

Lấy tập A tùy ý, trong A sẽ có phần tử a thuộc ít nhất 45 tập hợp khác. Nếu không, số tập hợp không quá $45 \cdot 44 + 1 = 1981$. Suy ra a thuộc 46 tập $A, A_1, A_2, \dots, A_{45}$.

Với tập B bất kì, nếu a không thuộc tập B thì mỗi tập A_i ($1 \leq i \leq 45$) đều có phần tử a_i chung với B mà $a_i \neq a$.

Thành ra B không có phần tử chung với A , nếu có thì phần tử chung đó phải thuộc tập A_i ($1 \leq i \leq 45$) nào đó nên A và A_i ($1 \leq i \leq 45$) có hai phần tử chung. (Vô lí)

Nên a thuộc B , do đó a thuộc 2018 tập đã cho.

Câu 13. (HSG12 tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019) Bạn Thanh viết lên bảng các số $1, 2, 3, \dots, 2019$. Mỗi một bước Thanh xóa hai số a và b bất kì. Trên bảng và viết thêm số $\frac{ab}{a+b+1}$. Chứng minh rằng dù xóa như thế nào thì sau khi thực hiện 2018 bước trên bảng luôn còn lại số $\frac{1}{2019}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Dung ; Fb: Ngọc Dung.

Cách 1.

Với mỗi tập $T = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ các số viết trên bảng thì đặt

$$A(T) = \left(\frac{1}{a_1} + 1 \right) \left(\frac{1}{a_2} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{a_n} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow A(\{1; 2; \dots; 2019\}) = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2019} + 1\right) = 2020$$

Ta thấy: $\left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{b} + 1\right) = \frac{(a+1)(b+1)}{ab} = \frac{1}{\frac{ab}{a+b+1}} + 1$

Suy ra nếu xóa hai số a và b và thay bởi $\frac{ab}{a+b+1}$ tập T biến thành tập T' thì:

$$A(T) = A(T').$$

Giả sử sau khi thực hiện 2018 bước ta được số thực x ta có:

$$A(\{x\}) = \frac{1}{x} + 1 = 2020 \Rightarrow x = \frac{1}{2019}.$$

Vậy trên bảng luôn còn lại số $\frac{1}{2019}$.

Cách 2.

Ta có $\frac{ab}{a+b+1} = \frac{ab}{a+b+1+ab-ab} = \frac{ab}{(a+1)(b+1)-ab}$

Thực hiện xóa $\frac{ab}{a+b+1}$; c thì sẽ thêm $\frac{\frac{ab}{(a+1)(b+1)-ab} \cdot c}{\frac{ab}{(a+1)(b+1)-ab} + c + 1} = \frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)-abc}$

Sau 2018 lần thực hiện, trên bảng còn lại là 1 số là: $\frac{1.2.3.....2019}{2.3.4.....2020 - 1.2.3.....2019} = \frac{1}{2019}.$

Câu 14. (HSG chọn HSG quốc gia tỉnh ĐỒNG THÁP 2018-2019) Cho bảng ô vuông gồm m hàng và n cột. Tại ô góc trên bên trái của bảng người ta đặt một quân cờ. Hai người chơi luân phiên di chuyển quân cờ, mỗi lượt di chuyển chỉ di chuyển quân cờ sang phải một ô hoặc xuống dưới một ô. Người chơi nào đến lượt mình không di chuyển được quân cờ thì thua. Xác định điều kiện của m, n để người thực hiện lượt chơi đầu tiên luôn là người thắng.

Lời giải

Trước hết, ta gọi người thứ nhất là người chơi đầu tiên, người còn lại là người thứ hai.

Ta dùng hai màu trắng, đen tô lần lượt các ô vuông trong bảng (tô đan xen như bàn cờ), với ô trên cùng bên trái tô màu trắng.

Quy ước: ô thuộc hàng p , cột q gọi là ô $(p; q)$.

Khi đó:

+ Nếu m, n cùng tính chẵn, lẻ thì ô $(1; 1)$ cùng màu với ô $(m; n)$.

+ Nếu m, n khác tính chẵn, lẻ thì ô $(1; 1)$ khác màu với ô $(m; n)$.

Từ giả thiết bài toán, người chơi chỉ có thể di chuyển quân cờ sang phải hoặc xuống dưới một ô, ta nhận thấy cả hai người chơi đều phải di chuyển quân cờ sang ô khác màu với ô đang đứng.

Ở lượt di chuyển đầu tiên, người thứ nhất sẽ di chuyển quân cờ sang ô màu đen, và người thứ hai sẽ di chuyển quân cờ sang ô màu trắng. Cờ luôn được đưa về ô $(m; n)$.

Để người thứ nhất thắng thì quân cờ phải được di chuyển vào ô $(m; n)$ và ô $(m; n)$ phải được tô màu đen (trùng với màu mà người thứ nhất di chuyển lượt đầu tiên). Điều này xảy ra khi m, n khác tính chẵn, lẻ.

Ngược lại, nếu m, n cùng tính chẵn, lẻ thì lập luận tương tự như trên, người thứ hai luôn thắng.

Vậy m, n khác tính chẵn, lẻ thì người thứ nhất luôn thắng.

Câu 15. (HSG11 Chuyên Duyên Hải Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2018-2019) Cho đa giác lồi n đỉnh. Mỗi cạnh và đường chéo của đa giác được tô bởi một trong k màu sao cho không có hai đoạn thẳng nào cùng xuất phát từ một đỉnh cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của k .

Lời giải

Để thấy $k_{\min} \geq n-1$, bởi vì $k < n-1$ thì hiển nhiên có hai đoạn thẳng xuất phát từ một đỉnh được tô cùng một màu.

TH1. Nếu n là số chẵn thì gọi các màu cần tô là $0, 1, \dots, n-2$. Ta tô màu như sau:

$A_i A_j$ tô màu $i+j \pmod{(n-1)}$ ($0 \leq i, j \leq n-2$) và $A_i A_{n-1}$ tô màu $2i \pmod{(n-1)}$ ($0 \leq i \leq n-2$).

Cách tô màu này thỏa mãn đề bài. Thật vậy

+ Nếu $A_i A_j, A_i A_k$ ($0 \leq i, j, k \leq n-2$) tô cùng màu thì $j \equiv k \pmod{(n-1)}$. Vô lí!

+ Nếu $A_i A_{n-1}, A_j A_{n-1}$ ($0 \leq i, j \leq n-2$) tô cùng màu thì $i \equiv j \pmod{(n-1)}$. Vô lí!

+ Nếu $A_i A_{n-1}, A_j A_{n-1}$ ($0 \leq i, j \leq n-2$) cùng màu thì $2i \equiv 2j \pmod{(n-1)} \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{(n-1)}$. Vô lí!

Vậy cách như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Như vậy $k_{\min} = n-1$. (1)

TH2: Nếu n là số lẻ thì giả sử tô với $n-1$ màu là $0, 1, \dots, n-2$. Khi đó, tất cả các đoạn thẳng có màu $1, \dots, n-2$ xóa hết chỉ còn lại các đoạn thẳng đều có màu 0. Suy ra $\deg A_i = 1$ do đó $\sum_{i=0}^{n-1} \deg A_i = n:2$ (Vì tổng số bậc bằng 2 lần số cạnh). Điều này vô lí. Do đó $k \geq n$.

Với $k = n$ ta chỉ tô màu như sau: Gọi n màu cần tô là $0, 1, \dots, n-1$ thì $A_i A_j$ tô màu $i+j \pmod{n}$. Cách tô này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy $A_i A_j, A_i A_k$ tô cùng màu thì $i \equiv j \pmod{n}$ vô lí.

Như vậy $k_{\min} = n$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $k_{\min} = 2 \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$.

Câu 16. (HSG11 tChuyênDHĐB Bắc Bộ năm 2018-2019) Cho bảng ô vuông kích thước 100×100 mà mỗi ô được điền một trong các ký tự A, B, C, D sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột của bảng thì số lượng ký tự từng loại đúng bằng 25. Ta gọi hai ô thuộc cùng hàng (không nhất thiết kề nhau) nhưng được điền khác ký tự là “cặp tốt”, còn hình chữ nhật có các cạnh song song với cạnh hoặc nằm trên cạnh của bảng và bốn ô vuông đơn vị ở bốn góc của nó được điền đủ bốn ký tự A, B, C, D là “bảng tốt”.

- a) Hỏi trong các cách điền ở trên, có bao nhiêu cách điền mà mỗi bảng ô vuông 1×4 , 4×1 và 2×2 đều có chứa đủ các ký tự A, B, C, D ?
- b) Chứng minh rằng với mọi cách điền thỏa mãn đề bài thì trên bảng ô vuông đã cho:
- i) Luôn có 2 cột của bảng mà từ đó có thể chọn ra được 76 cặp tốt.
- ii) Luôn có một bảng tốt.

Lời giải

Tác giả: Vũ Hoàng Anh; FB: Vũ Hoàng Anh.

a) Không mất tính tổng quát, giả sử rằng 4 ô đầu tiên của cột 1 được điền A, B, C, D . Khi đó, ô thứ hai của cột 2 phải điền D vì nó thuộc hai hình vuông 2×2 đã chứa sẵn A, B, C . Do đó, ta điền tiếp được cột 2 theo thứ tự C, D, A, B . Cứ như thế ta điền tiếp cho cột 3, 4.

A	C	A	C
B	D	B	D
C	A	C	A
D	B	D	B

Tuy nhiên, ta thấy các hàng khi đó không thỏa mãn vì chứa hai loại ký tự. Vậy nên không có cách điền nào thỏa mãn điều kiện đã nêu.

b)

i. Tồn tại hai cột.

Giả sử phản chứng rằng mỗi cặp cột tùy ý đều có ít nhất 25 cặp ô cùng ký tự. Cố định cột 1, xét 99 cột còn lại. Gọi T là số bộ $(a; b)$ trong đó cột $a \geq 2$ có ô thứ b từ trên xuống là cùng ký tự. Theo giả sử trên thì $T \geq 99.25$.

Mặt khác theo giả thiết thì $T = 100.24$ (tính theo hàng).

Suy ra $100.24 \geq 99.25$, điều vô lý này chứng tỏ giả thiết phản chứng là sai, tức là luôn chọn được hai cột thỏa mãn đề bài.

ii. Tồn tại bảng tốt.

Giả sử phản chứng rằng không có 2 hàng, 2 cột nào cắt nhau tạo thành hình chữ nhật thỏa mãn. Xét 2 cột đã chọn được ở trên, giả sử đã có cặp $(A; B), (A; C)$ thì sẽ không có $(C; D), (B; D)$. Ta có hai khả năng:

- Nếu có $(A; D)$ thì không có $(B; C)$, khi đó mỗi cặp trong 76 cặp đều có ký tự A ; trong khi số lần ký tự A xuất hiện trên đó tối đa là 50, vô lý.

- Nếu có $(B; C)$ thì không có $(A; D)$, khi đó trên 76 cặp sẽ có $76.2 = 152$ số lần xuất hiện của ký tự A, B, C , trong đó số lần xuất hiện ký tự A, B, C tối đa trong 76 cặp trên là 150, cũng vô lý.

Từ đây ta có đpcm.

Câu 17. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Một lớp học trong một trường đại học có 60 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên 2 sinh viên của lớp học này. Tính xác suất để 2 sinh viên được chọn không học ngoại ngữ. Biết rằng trường này chỉ dạy hai ngoại ngữ là tiếng Anh và tiếng Pháp.

Lời giải

Gọi A, P, K lần lượt là tập hợp sinh viên học tiếng Anh, học tiếng Pháp và không học ngoại ngữ. Khi đó $n(A \cup P \cup K) = 60, n(A) = 40, n(P) = 30, n(A \cap P) = 20$.

Ta có

$$n(A \cup P \cup K) = n(A) + n(P) + n(K) - n(A \cap P) - n(A \cap K) - n(P \cap K) + n(A \cap P \cap K)$$

$$\text{Nên } 60 = 40 + 30 + n(K) - 20 - 0 - 0 + 0 \Leftrightarrow n(K) = 10.$$

Gọi X là biến cố “2 sinh viên được chọn không học ngoại ngữ”.

$$\text{Ta có } n(\Omega) = C_{60}^2, n(X) = C_{10}^2.$$

$$\text{Do đó } P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10}^2}{C_{60}^2} = \frac{3}{118}.$$

Câu 18. (HSG12 tỉnh Cần Thơ năm 2018-2019) Năm bạn học sinh Tính, Nghĩa, Tuấn, Phú và Thuận ở chung một phòng trong ký túc xá của một trường trung học phổ thông. Một hôm, người quản lý ký túc xá đến phòng của năm học sinh này để xác định lại hộ khẩu nhà của từng học sinh. Vì đều là học sinh giỏi toán nên các học sinh không trả lời trực tiếp mà nói với người quản lý ký túc xá như sau:

- Tính: “Nhà bạn Phú ở Thới Lai còn nhà em ở Cờ Đỏ”.
- Nghĩa: “Nhà em cũng ở Cờ Đỏ còn nhà bạn Tuấn ở Ô Môn”.
- Tuấn: “Nhà em cũng ở Cờ Đỏ còn nhà bạn Phú ở Thốt Nốt”.
- Phú: “Nhà em ở Thới Lai còn nhà bạn Thuận ở Ninh Kiều”.
- Thuận: “Nhà em ở Ninh Kiều còn nhà bạn Tính ở Thốt Nốt”.

Em hãy giúp người quản lý ký túc xá xác định đúng hộ khẩu nhà của các học sinh trên.

Biết rằng trong câu trả lời của mỗi học sinh đều có một phần đúng và một phần sai đồng thời mỗi địa phương là địa chỉ hộ khẩu của đúng một học sinh.

Lời giải.

Tác giả: Nhóm 5 tổ 8 nhóm strong team toán vd – vdc.

- Tính: “Nhà bạn Phú ở Thới Lai còn nhà em ở Cờ Đỏ”. **(1)**
- Nghĩa: “Nhà em cũng ở Cờ Đỏ còn nhà bạn Tuấn ở Ô Môn”. **(2)**
- Tuấn: “Nhà em cũng ở Cờ Đỏ còn nhà bạn Phú ở Thốt Nốt”. **(3)**
- Phú: “Nhà em cũng ở Thới Lai còn nhà bạn Thuận ở Ninh Kiều”. **(4)**
- Thuận: “Nhà em ở Ninh Kiều còn nhà bạn Tính ở Thốt Nốt”. **(5)**

Nếu ý đầu của (3) là đúng thì nhà Tuấn ở Cờ Đỏ. Do đó, cả hai ý của (2) là sai.

Vậy ý đầu của (3) là **sai**. Do đó ý sau của (3) là **đúng** hay nhà bạn Phú ở Thốt Nốt.

Do đó ý đầu của (1) là **sai** và ý sau của (5) là **sai** hay ý sau của (1) là **đúng** và ý đầu của (5) là **đúng**.

Suy ra nhà bạn Tính ở Cờ Đỏ và nhà bạn Thuận ở Ninh Kiều.

Vì nhà bạn Tính ở Cờ Đỏ nên ý đầu của (2) là **sai** hay ý sau của (2) là **đúng**. Suy ra nhà bạn Tuấn ở Ô Môn. Còn lại nhà bạn Nghĩa ở Thới Lai.

Kết luận: Nhà bạn Phú ở Thốt Nốt, nhà bạn Tính ở Cờ Đỏ, nhà bạn Thuận ở Ninh Kiều, nhà bạn Tuấn ở Ô Môn, nhà bạn Nghĩa ở Thới Lai.

Câu 19. (HSG11 tChuyênDHĐB Bắc Bộ năm 2018-2019) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n và số

nguyên tố p thỏa mãn $4m^3 + m^2 + 40m = 2(11p^n - 5)$.

Lời giải

Tác giả: Trịnh Quang Hoàng; Fb: Hoàng DeMon

Phương trình đã cho tương đương với $(4m+1)(m^2+10) = 22p^n$.

TH1: $n=1$, thử trực tiếp với $m=1,2,3,4,5$ đều không thỏa mãn.

Với $m > 5 \Rightarrow 4m+1 > 22, m^2+10 > 22$. Do đó $(4m+1):p, (m^2+10):p$ vô lí do $n=1$.

TH2: $n > 1$, thử trực tiếp với $m=1,2,3,4,5$ đều không thỏa mãn.

Với $m > 5 \Rightarrow 4m+1 > 22, m^2+10 > 22$. Do đó $(4m+1):p, (m^2+10):p$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 4m+1 = 11^x \cdot p^a \\ m^2+10 = 2 \cdot 11^y \cdot p^b \end{cases} \quad (x, y \in \{0,1\}; x+y=1; a, b \in \mathbb{N}^*).$$

Dễ thấy $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ta có $m^2+10 > 4m+1$.

+) Nếu $b \geq a$ thì

$$11(m^2+10) \equiv 0 \pmod{4m+1} \Rightarrow 11m^2 \equiv -110 \pmod{4m+1}$$

$$11 \cdot 16m^2 \equiv -1760 \pmod{4m+1} \Rightarrow 11 \equiv -1760 \pmod{4m+1}$$

$$(\text{do } 16m^2 \equiv 1 \pmod{4m+1}) \Rightarrow 1771 \equiv 0 \pmod{4m+1}$$

$$\text{Mà } 4m+1 \equiv 1 \pmod{4}, 1771 = 7 \cdot 11 \cdot 23 \Rightarrow \begin{cases} 4m+1 = 77 \\ 4m+1 = 161 \\ 4m+1 = 253 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 19 \\ m = 40 \\ m = 63 \end{cases}$$

Thử lại đều không thỏa mãn.

$$\text{+) Nếu } b < a \text{ thì } y=1, x=0 \Rightarrow \begin{cases} 4m+1 = p^a \\ m^2+10 = 2 \cdot 11 \cdot p^b \end{cases}$$

$$\text{Do } \begin{cases} p \mid 4m+1 \\ p \mid m^2+10 \end{cases} \Rightarrow p \mid 4(m^2+10) - m(4m+1) = 40 - m \Rightarrow p \mid (4m-160) \Rightarrow p \mid 161 \Rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ p = 23 \end{cases}$$

+ Nếu $p = 23$ thì do $22 \cdot 23^b > 23^a \Rightarrow 22 > 23^{a-b}$ vô lí do $a-b \in \mathbb{N}^*$.

+ Nếu $p = 7$ thì do $22 \cdot 7^b > 7^a \Rightarrow 22 > 7^{a-b} \Rightarrow a-b=1$.

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} 4m+1 = 7^{b+1} \\ m^2+10 = 22 \cdot 7^b \end{cases} \Rightarrow m = 12.$$

Thay vào phương trình ban đầu tìm được $n=3$.

Vậy $(m; n; p) = (12; 3; 7)$.

Câu 20. (HSG12 Hồ Chí Minh Ngày 2 năm 2018-2019) (HSG12 Hồ Chí Minh Ngày 2 năm 2018-

2019) Cho S là tập hợp các bộ $(a_1, a_2, \dots, a_{164})$ là hoán vị của 164 số nguyên dương đầu tiên.

- a) Có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{164})$ thuộc S sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, 164\}$ ta luôn có $a_i \neq i$ và $a_i \equiv i \pmod{41}$?
- b) Tồn tại hay không hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{164})$ thuộc S sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, 164\}$ đều tồn tại các số nguyên $b_i \in \{0, 1, \dots, 40\}$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_i \equiv b_i^2 \pmod{41}$?

Lời giải

+) Chia các số từ $1, 2, \dots, 164$ thành 41 nhóm theo số dư, khi chia cho 41 thì rõ ràng mỗi nhóm có 4 số (4 số này ở các vị trí $a_i, a_{i+41}, a_{i+82}, a_{i+123}$ với $i = \overline{1, 41}$ của hoán vị). Các số trong mỗi bộ trên sẽ được hoán vị đổi vị trí cho nhau.

+) Ta thấy với một bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) , ta có 9 cách hoán vị là:

$$\begin{aligned} &(x_2, x_1, x_4, x_3), (x_2, x_3, x_4, x_1), (x_2, x_4, x_1, x_3), \\ &(x_3, x_1, x_4, x_2), (x_3, x_4, x_1, x_2), (x_3, x_4, x_2, x_1), \\ &(x_4, x_1, x_2, x_3), (x_4, x_3, x_2, x_1), (x_4, x_3, x_1, x_2). \end{aligned}$$

để cho không có phần tử nào nằm đúng vị trí ban đầu

+) Vì thế có tất cả 9^{41} hoán vị thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Nếu thí sinh dùng công thức $D_4 = 4! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 9$ cũng cho điểm tối đa.

b) Tồn tại hay không hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{164})$ thuộc S sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, 164\}$ đều tồn tại các số nguyên $b_i \in \{0, 1, \dots, 40\}$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_i \equiv b_i^2 \pmod{41}$?

***Bổ đề:** Với p là số nguyên tố có dạng $3k+2$ thì $\{1^3, 2^3, \dots, p^3\}$ sẽ lập thành hệ thặng dư đầy đủ theo mod p .

Chứng minh bổ đề: Giả sử trong bộ trên có hai số $i \neq j$ sao cho $i^3 \equiv j^3 \pmod{p}$ thì $i^{3k} \equiv j^{3k} \pmod{p}$. Theo định lý Fermat nhỏ thì $i^{3k+1} \equiv j^{3k+1} \pmod{p}$ nên

$$i^{3k+1} \equiv j^{3k+1} = j \cdot j^{3k} \equiv j \cdot i^{3k} \pmod{p}$$

kéo theo $i^{3k}(i-j) \equiv 0 \pmod{p}$ hay $i \equiv j \pmod{p}$, vô lý vì $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ và $i \neq j$. (Bổ đề được chứng minh)

* Ta sẽ xây dựng hoán vị thỏa mãn đề bài sao cho $a_i \equiv i^3 \pmod{41}$ với mọi $1 \leq i \leq 164$.

Với 41 số đầu tiên, theo nhận xét thì các số $\{1^3, 2^3, \dots, 41^3\}$ có số dư đôi một khác nhau khi chia cho 41 nên ta sắp xếp chúng để số dư thay đổi từ $1 \rightarrow 41$.

Các số $42 \rightarrow 82; 83 \rightarrow 123; 124 \rightarrow 164$ cũng được thực hiện hoán vị tương tự.

Hoán vị này thỏa mãn vì

$$a_1 + a_2 + \dots + a_i \equiv 1^3 + 2^3 + \dots + i^3 = \left[\frac{i(i+1)}{2} \right]^2 \pmod{41}.$$

Lưu ý: Ta dễ dàng chứng minh bằng phương pháp qui nạp kết quả sau: Với mọi số tự nhiên n thì

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Câu 21. (HSG11 Chuyên Duyên Hải Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2018-2019) Cho p là số nguyên tố có dạng $12k+11$. Một tập con S của tập $M = \{1; 2; 3; \dots; p-2; p-1\}$ được gọi là “tốt” nếu như tích của tất cả các phần tử của S không nhỏ hơn tích của tất cả các phần tử của $M \setminus S$. Ký hiệu Δ_S hiệu của hai tích trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của số dư khi chia Δ_S cho p xét trên mọi tập con tốt của M có chứa đúng $\frac{p-1}{2}$ phần tử.

Lời giải

Trước hết, xét tập con $S = \left\{ \frac{p+1}{2}; \frac{p+3}{2}; \dots; p-2; p-1 \right\}$ thì rõ ràng S là tập con tốt và

$$\Delta_S = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2} \right)! - \left(\frac{p-1}{2} \right)! \equiv -2 \left(\frac{p-1}{2} \right)! = 2a \pmod{p},$$

trong đó $a = -\left(\frac{p-1}{2} \right)!$ và thỏa mãn $p \mid a^2 - 1$ theo định lý Wilson.

Ta xét các trường hợp:

- Nếu $a \equiv 1 \pmod{p}$ thì $\Delta_S = 2 \pmod{p}$.

- Nếu $a \equiv -1 \pmod{p}$ thì trong tập con S , thay $\frac{p+1}{2}$ bởi $\frac{p-1}{2} \equiv -\frac{p+1}{2} \pmod{p}$ thì dễ thấy dấu của Δ_S sẽ được thay đổi thành 2. Khi đó, trong cả hai trường hợp, ta đều chỉ ra được tập con tốt có $\Delta_S = 2 \pmod{p}$.

Ta sẽ chứng minh rằng không tồn tại S tốt sao cho $\Delta_S = 1 \pmod{p}$ hoặc $\Delta_S = 0 \pmod{p}$. Xét một tập con tốt S bất kỳ và gọi a, a' lần lượt là tích các phần tử của S và $M \setminus S$. Theo định lý Wilson thì $aa' = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Khi đó, nếu $a \equiv a' \pmod{p}$ thì $p \mid a^2 + 1$, vô lý vì ta đã biết $a^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng $4k+3$. Còn nếu $a - a' \equiv 1 \pmod{p}$ thì $(2a-1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$, cũng vô lý vì $\left(\frac{-3}{p} \right) = -1$ do theo giả thiết thì $p \equiv 11 \pmod{12}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là 2.

Câu 22. (HSG12 tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019 (2)) Với số n nguyên dương, đặt $f(n)$ là các ước nguyên dương của n . Xét tập hợp $G = \{n \in \mathbb{N}^* : f(m) < f(n), \forall m \in \mathbb{N}, 0 < m < n\}$ và gọi p_i là số nguyên tố thứ i ($i \in \mathbb{N}^*$).

1) Chứng minh rằng: Nếu n thuộc G và p_m là ước nguyên tố của n thì $(p_1 p_2 \dots p_m)$ là ước của n .

2) Với số nguyên tố p_m , gọi k, M là các số nguyên dương thỏa mãn $2^k > p_m$ và $M = (p_1 p_2 \dots p_{m-1})^{2k}$. Chứng minh rằng: Nếu $n > M$ và n thuộc G thì n chia hết cho p_m .

Lời giải

1) Giả sử $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_a^{k_a}$ ($k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, a}$) $\Rightarrow f(n) = (k_1+1)(k_2+1)\dots(k_a+1)$

Giả sử n chia hết cho p_m , tồn tại i thỏa mãn $1 \leq i < m \leq a$ mà n không chia hết cho p_i .

Suy ra $k_m \geq 1, k_i = 0$.

Xét $n_0 = \frac{n}{p_m} \cdot p_i$ ta có:

$$n_0 < n \text{ và } f(n_0) = f(n) \frac{(k_i+2)k_m}{(k_i+1)(k_m+1)} = f(n) \frac{2k_m}{k_m+1}$$

Do $k_m \geq 1 \Rightarrow 2k_m \geq k_m+1$ nên $f(n_0) \geq f(n)$ mâu thuẫn.

Vậy n chia hết cho p_i với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.

2) Xét $n \in G$ và $n > M$.

Giả sử không chia hết cho p_m thì mọi ước của n đều thuộc tập $\{p_1, p_2, \dots, p_{m-1}\}$

(Thật vậy, giả sử n có ước $p_j > p_m$ thì theo ý (a) n chia hết cho $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots, p_j$. Mâu thuẫn.)

Suy ra: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}}$ ($k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, m-1}$)

Vì $n > M$ nên tồn tại: $1 \leq i \leq m-1$ sao cho $k_i > 2k$

Đặt $n_1 = \frac{n}{p_i^k}$ và $n_0 = n_1 \cdot p_m$. Do $p_i^k \geq 2^k > p_m$ suy ra $n_0 < n$.

$$f(n) = (k_1+1)(k_2+1)\dots(k_t+1)$$

$$f(n_0) = (k_1+1)(k_2+1)\dots(k_{i-1}+1)(k_i-k+1)(k_{i+1}+1)\dots(k_t+1) \cdot 2$$

Vì $k_i+1 > 2k \Rightarrow 2(k_i-k+1) > k_i+1 \Rightarrow f(n_0) > f(n)$. Mâu thuẫn.

Vậy có điều cần chứng minh.

Câu 23. (HSG12 tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019) Cho m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $4m^3 + m = 12n^3 + n$, chứng minh $m-n$ là lập phương của một số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có } 4m^3 + m = 12n^3 + n \Leftrightarrow (m-n)(4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1) = 8n^3$$

Giả sử p là một ước nguyên tố chung của $m-n, 4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1$ thì p là số lẻ do

$$4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1 \text{ lẻ.}$$

Mà $8n^3 : p$ nên suy ra $n : p$ hay từ đó ta có $m : p$ do $m-n : p$. Mà $4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1$ cũng chia hết cho p nên $1 : p$, điều này vô lý.

Vậy $(m-n, 4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1) = 1$ hay suy ra $m-n$ là lập phương của một số nguyên.

Câu 24. (HSG12 tỉnh KonTum năm 2018-2019)

Tìm tất cả các số nguyên tố a thỏa mãn $8a^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Tác giả : Ngô Quốc Tuấn, FB: Quốc Tuấn

Vì a là số nguyên tố nên $a \geq 2$. Ta xét các trường hợp

+ Trường hợp 1: với $a = 2$ khi đó $8a^2 + 1 = 33$ chia hết cho 11, loại trường hợp $a = 2$.

+ Trường hợp 2: với $a = 3$ khi đó $8a^2 + 1 = 73$ là số nguyên tố.

+ Trường hợp 3: với $a > 3 \Rightarrow a = 3k \pm 1$ khi đó $8a^2 + 1 = 8(9k^2 \pm 6k + 1) + 1 = 3(24k^2 \pm 16k + 3)$ chia hết cho 3, loại trường hợp $a = 3$.

Vậy $a = 3$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Câu 25. (HSG11 tỉnh Quảng Ngãi năm 2018-2019) Tìm tất cả các bộ (n, k, p) với n, k là các số nguyên lớn hơn 1 và p là một số nguyên tố thỏa mãn $n^5 + n^4 - 2n^3 - 2n^2 + 1 = p^k$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đình Thịnh

$$n^5 + n^4 - 2n^3 - 2n^2 + 1 = p^k \Leftrightarrow (n^2 + n - 1)(n^3 - n - 1) = p^k.$$

Từ giả thiết $\Rightarrow n, k \geq 2$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} n^3 - n - 1 > 1, n^2 + n - 1 > 1, \forall n \geq 2 \\ (n^3 - n - 1) - (n^2 + n - 1) = (n + 1)n(n - 2) \geq 0, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^3 - n - 1 = p^r \\ n^2 + n - 1 = p^s \end{cases} \text{ trong đó } \begin{cases} r \geq s > 0 \\ r + s = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^3 - n - 1 : n^2 + n - 1$$

$$\Rightarrow n^3 - n - 1 - (n - 1)(n^2 + n - 1) : n^2 + n - 1$$

$$\Rightarrow n - 2 : n^2 + n - 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } (n^2 + n - 1) - (n - 2) = n^2 + 1 > 0, \forall n \Rightarrow n^2 + n - 1 > n - 2 \geq 0, \forall n \geq 2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } n = 2, \text{ do đó } p^k = 25 \Rightarrow \begin{cases} p = 5 \\ k = 2 \end{cases}.$$

Vậy bộ số cần tìm là: $(n, k, p) = (2, 2, 5)$.