Mega book

CHUYÊN GIA SÁCH LUYỆN THI

TRẦN CÔNG DIÊU - NGUYỄN VĂN QUANG

TIẾP CẬN PHƯƠNG PHÁP & VẬN DỤNG CAO TRONG

TRẮC NGHIỆM BÀI TOÁN THỰC TẾ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN CÔNG DIÊU - NGUYỄN VĂN QUANG

TIẾP CẬN PHƯƠNG PHÁP VÀ VẬN DỤNG CAO TRONG TRẮC NGHIỆM BÀI TOÁN THỰC TẾ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Qua hai đề minh họa 1 và minh họa 2 của Bộ Giáo dục và Đào tạo công bố trong năm 2017 chúng tôi thấy rằng bài thi môn toán có 50 bài toán, trắc nghiệm trong số đó có khoảng 20 bài toán ở mức độ vận dụng và vận dụng cao. Để đạt mức 8 điểm trở lên học sinh cần phải thật vững kiến thức cơ bản và thành thạo cách giải các bài toán ở mức vận dụng và vận dụng cao. Chính vì thế trong cuốn sách này, chúng tôi giới thiệu đến quý độc giả và các em học sinh rất nhiều dạng bài tập trắc nghiệm ở mức độ này nhằm giúp các em trang bị cho mình những kĩ năng và kinh nghiệm trước kì thi quan trọng sắp tới.

Lời khuyên của tác giả là trước khi sử dụng cuốn sách này các em học sinh cần phải có nền tảng cơ bản tốt từ sách giáo khoa và các dạng bài tập cơ bản ở sách bài tập, không nên vội vàng sử dụng ngay cuốn sách này. Có thể truy cập Facebook tác giả Trần Công Diêu để được hỏi đáp trực tiếp với thầy qua địa chỉ: https://www.facebook.com/THAYDIEU29 hoặc qua facebook tác giả Nguyễn Văn Quang. Các em học sinh có thể tìm đọc thêm hai cuốn sách sau đây một cuốn ở mức độ nền tảng và một cuốn để luyện tập giải đề là:

- TIẾP CẬN 11 CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM TOÁN.
- MEGA LUYỆN ĐỀ THPT QUỐC GIA 2017 MÔN TOÁN.

Một vấn đề nữa chúng tôi cũng muốn nhấn mạnh cho quý bạn đọc là cuốn sách có rất nhiều bài toán thực tế, đây là dạng bài tập xuất hiện mới trong năm nay. Với sự đa dạng bài tập trong cuốn sách này thì đây quả thật là một cuốn sách tốt để các em học sinh mong muốn đạt từ 8 điểm trở lên và giáo viên tham khảo.

Cuối cùng xin gửi lời cám ơn đến tác giả của các bài toán mà chúng tôi có sử dụng trong cuốn sách này. Dù đã rất cố gắng nhưng chắc chắn không thể tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được sự góp ý từ quý bạn đọc gần xa.

TPHCM, 13-2-2017

Các tác giả

CHƯƠNG I.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

Chủ đề 1. Các bài toán thực tế ứng dụng đạo hàm để giải

- Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.
- Các quy tắc tính đạo hàm.
- Định nghĩa GTNN, GTLN
- Phương pháp tìm GTNN, GTLN
- Bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 2. Tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu trên miền

- Sử dụng GTNN, GTLN của hàm số trên tập để giải quyết bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu
- Sử dụng phương pháp tam thức bậc hai để tìm điều kiện của tham số
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 3. Giải và biện luận phương trình, bất phương trình dựa vào hàm số

- Kiến thức cơ bản
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 4. Tìm giá trị của tham số để hàm số có cực trị thỏa mãn các yếu tố đặc biệt

- Khái niệm cực trị của hàm số
- Điều kiện cần để hàm số có cực trị
- Điều kiện đủ để hàm số có cực trị
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 5. Tìm giá trị của tham số để hai hàm số giao nhau thỏa mãn các yếu tố đặc biệt

- Các bước biện luận theo m về số giao điểm của hàm số và thỏa mãn các điều kiện về tính chất hình học phẳng Oxy
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 6. Tìm giá trị của tham số để tiếp tuyến của hàm số thỏa mãn các yếu tố đặc biệt

- Các dạng toán tìm giá trị của tham số để tiếp tuyến của hàm số thỏa mãn các yếu tố đặc biệt
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Đề ôn tập chương 1

- Lời giải chi tiết

CHƯƠNG 01

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI

Đầu tiên xin nhắc lại các kiến thức về đạo hàm, đây là phần kiến thức trong chương trình toán THPT lớp 11 học kì II.

1 Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và *điểm* $x_0 \in (a;b)$ nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f\left(x\right)$ tại x_0.

Ký hiệu: $y'\left(x_0\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hoặc $f'\left(x_0\right)$.

Lưu ý: Nếu hàm số có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$ thì liên tục trên khoảng đó nhưng ngược lại thì chưa chắc đúng.

2 Các quy tắc tính đạo hàm

Chú ý: $u = u\left(x\right)$, $v = v\left(x\right)$.

• $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$.

• $\left(u.v\right)' = u'v + uv'$ và $\left(ku\right)' = ku'$.

• $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.\,v - v'.\,u}{v^2}$ và $\left(\dfrac{k}{v}\right)' = -\dfrac{k.v'}{v^2}$ với: $v \neq 0$.

• Bảng công thức đạo hàm thường gặp

Hàm số cơ bản	Hàm số hợp
(C)'=0 (*C là hằng số*)	
$\left(x\right)' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha.\,x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha.\,u^{\alpha-1}.\,u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ với $x \neq 0$.	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ với $u \neq 0$.

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$.	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ với $u > 0$.
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = u'.\cos u$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -u'.\sin u$
$\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\left(\tan u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ với $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ với $x \neq k\pi$	$\left(\cot u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ với $u \neq k\pi$
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ với $x > 0$	$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$ với $u > 0$
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$ với $x > 0$	$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \ln a}$ với $u > 0$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.\ e^u$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = u'a^u \ln a$

Tiếp theo xin trình bày cách tìm GTNN, GTLN của hàm số một biến bằng đạo hàm, đây là phần kĩ năng cực kì quan trọng để ứng dụng giải các Bài toán thực tế.

3 Định nghĩa GTNN, GTLN

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trong K (đoạn, khoảng, nửa khoảng).

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f\left(x\right) \leq f\left(x_0\right), \forall x \in K$ thì $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_K y = f(x_0)$

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f\left(x\right) \geq f\left(x_0\right), \forall x \in K$ thì $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_K y = f(x_0)$

4 Phương pháp tìm GTNN, GTLN

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng *K:*

Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng *K* rồi nhìn trên đó để kết luận max, min

Bài toán 2: Tìm GTLN-GTNN của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên đoạn đó và kết luận

Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm như sau:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đã cho.
2. Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ trên đoạn $[a;b]$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Tính: $f(a); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.
4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở bước 3).

Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$; $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

Chú ý:

1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số $f(x)$ luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn đó.

2. Nếu để bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nào có nghĩa là ta đi tìm GTLN và GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.

3. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \geq 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(a) \\ \max f(x) = f(b) \end{cases}$

4. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \leq 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(b) \\ \max f(x) = f(a) \end{cases}$

Ngoài ra học sinh cần phải trang bị thêm một số kiến thức về các bất đẳng thức cơ bản để giải quyết các bài này nhanh hơn:

5 Bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số

Hai số: Với $A, B \geq 0$ ta luôn có $A + B \geq 2\sqrt{AB}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B$.

Ba số: Với $A, B, C \geq 0$ ta luôn có $A + B + C \geq 3\sqrt[3]{ABC}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B = C$.

Tiếp theo đây chúng ta sẽ cùng đi vào giải quyết các bài toán thực tế sử dụng các kiến thức vừa học ở trên.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1

Một số bài toán ứng dụng về kinh doanh, sản suất trong cuộc sống.

Ý tưởng giải là cố gắng thiết lập một hàm số một biến sau đó ứng dụng đạo hàm để tìm GTNN, GTLN.

Bài 1: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Bài 2: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Bài 3: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(300-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất?

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Bài 4: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phải chứa được $16\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản xuất tốn ít vật liệu nhất?

A. $R=2\left(m\right);h=4\left(m\right)$. **B.** $R=4\left(m\right);h=2\left(m\right)$.

C. $R=3\left(m\right);h=4\left(m\right)$. **D.** $R=4\left(m\right);h=4\left(m\right)$.

Bài 5: Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống và tổng sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi ($200\,g/m^2$) tôm giống thì tổng sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\frac{230}{3}kg$ **B.** $70kg$ **C.** $72kg$ **D.** $69kg$

Bài 6: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó $x(mg)$ và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15 mg. **B.** 30 mg. **C.** 40 mg. **D.** 20 mg.

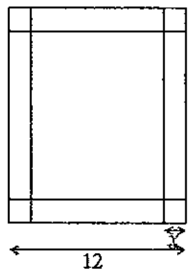
Bài 7: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 **B.** 30 **C.** 20 **D.** 15

Bài 8: Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t = 10(h)$. **B.** $t = 14(h)$. **C.** $t = 15(h)$. **D.** $t = 22(h)$.

Bài 9: **(Đề minh họa Quốc gia 2017):** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở 4 góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.



A. $x = 6(cm)$ **B.** $x = 3(cm)$

C. $x = 2(cm)$ **D.** $x = 4(cm)$

Bài 10: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là 3 cm, lề trái và lề phải là 2 cm. Kích thước tối ưu của trang giấy?

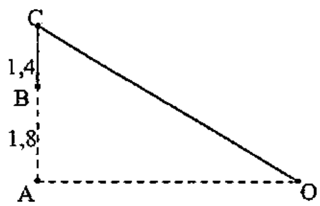
A. Dài 24 cm, rộng 17 cm. **B.** Dài 30 cm, rộng 20 cm.

C. Dài 24 cm, rộng 18 cm. **D.** Dài 24 cm, rộng 19 cm.

Bài 11: Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 16cm thì hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 36cm^2 **B.** 20cm^2 **C.** 16cm^2 **D.** 30cm^2

Bài 12: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ nhọn.



A. $AO = 2,4m$ **B.** $AO = 2m$

C. $AO = 2,6m$ **D.** $AO = 3m$

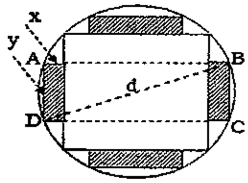
Bài 13: Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính $5(m)$. Toàn bộ tòa nhà đó được trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tòa nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho có thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

A. $h = \frac{20}{3}(m)$ **B.** $h = \frac{22}{3}(m)$ **C.** $h = \frac{23}{3}(m)$ **D.** $h = \frac{25}{3}(m)$

Bài 14: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học đã nhận thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 11

Bài 15: **(Trích từ luận văn thạc sĩ Nguyễn Văn Bảo):** Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.



A. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d.$

B. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d.$

C. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d.$

D. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d.$

Bài 16: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/m^2. Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu

Bài 17: Một công ty chuyên sản xuất container muốn thiết kế các thùng gỗ đựng hàng ở bên trong có dạng hình hộp chữ nhật và không có nắp, có đáy là hình vuông. Thùng gỗ có thể chứa được 62,5m^3. Hỏi các cạnh của hình hộp chữ nhật có độ dài là bao nhiêu để tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là nhỏ nhất?

A. Cạnh bên: 2,5m, cạnh đáy: 5m

B. Cạnh bên: 4m, cạnh đáy: $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$ m

C. Cạnh bên: 3m, cạnh đáy: $\dfrac{5\sqrt{10}}{6}$ m

D. Cạnh bên: 5m, cạnh đáy: $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ m

Bài 18: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ **B.** $5R^2$ **C.** R^2 **D.** $3R^2$

Bài 19: **(Đề thi thử THPT Việt Trì lần I):** Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 60cm, thể tích là 96.000cm^3, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng **B.** 382.000 đồng **C.** 83.200 đồng **D.** 8.320.000 đồng

Bài 20: Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy là hình vuông không có nắp có thể tích chứa được $4dm^3$. Tìm kích thước của thùng để lượng vàng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau:

A. cạnh đáy: $2dm$, cao: $1dm$ **B.** cạnh đáy: $2dm$, cao: $2dm$

C. cạnh đáy: $1dm$, cao: $2dm$ **D.** cạnh đáy: $2dm$, cao: $3dm$

Bài 21: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu hoạch được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5 kg. Vậy vụ tới ông phải bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

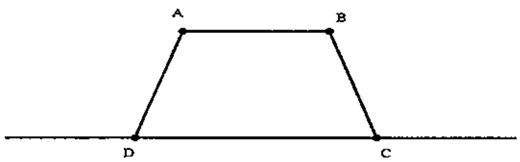
A. 512 con **B.** 511 con **C.** 510 con **D.** 509con

Bài 22: Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Tính thể tích của hộp cần làm.

A. $V = \dfrac{2}{27}\text{dm}^3$ **B.** $V = \dfrac{3}{27}\text{dm}^3$ **C.** $V = \dfrac{4}{27}\text{dm}^3$ **D.** $V = \dfrac{5}{27}\text{dm}^3$

Bài 23: **(Trích Đề thi minh họa HSG Phú Thọ 2016-2017)**

Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a\,(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thàng cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2?



A. $\sqrt{3}a^2$ **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}a^2}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Bài 24: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km **B.** 6,5km **C.** 5km **D.** 4km

Bài 25: Một gia đình cần xây một cái bể nước hình trụ có thể chứa được $150m^3$ có đáy được làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn, bể mặt làm bằng kính. Tính chi phí thấp nhất cần dùng để xây bể nước đó. Biết giá thành vật liệu làm bằng bê tông có giá thành là 100.000đồng/m^2, làm bằng tôn là 90.000 đồng/m^2, bề mặt làm bằng kính là 120.000 đồng/m^2. (Số tiền để xây được tính lấy giá trị lơn hơn gần nhất với số tiền tính toán trên lí thuyết).

A. 15.041.000đ **B.** 15.040.000đ **C.** 15.039.000đ **D.** 15.038.000đ

Bài 26: Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là $2m$. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng $1,2m$. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

A. $0,8m$ **B.** $0,9m$ **C.** $1m$ **D.** $1,1m$

Bài 27: Anh Tuân muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.

A. $170cm^2$ **B.** $160cm^2$ **C.** $150cm^2$ **D.** $140cm^2$

Bài 28: Một trung tâm thương mại bán 2500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100.000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200.000 đồng cộng thêm 90.000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng.

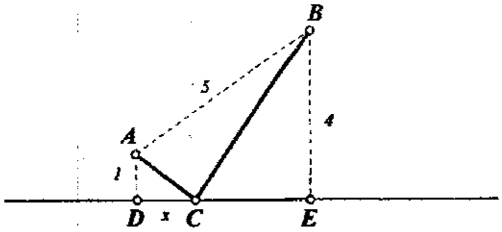
A. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 ti vi **B.** Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 125 ti vi
C. Đặt hàng 10 lần, mỗi lần 250 ti vi **D.** Đặt hàng 50 lần, mỗi lần 50 ti vi

Bài 29: Mùa này công ty sách định ra 2 cuốn trắc nghiệm Lý và Toán với giá sản xuất là 200.000 nghìn đồng và 300.000 nghìn đồng. Khi đó hàm lợi ích của chúng là $u(x;y)=x^{1/3}y^{1/2}$ với x,y là số lượng hai cuốn sách được in ra. Nhưng ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000 triệu đồng. Theo bạn phải sản xuất số lượng như thế nào để đạt doanh thu cho công ty sách cao nhất?

A. $\left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. **B.** $\left(\frac{2000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. **C.** $\left(\frac{3001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. **D.** $\left(\frac{2001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu.

Bài 30: Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao $1m$ và $4m$, đỉnh của hai cây cột cách nhau $5m$. Người ta cần chọn 1 vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{37}$.
C. $\sqrt{29}$. **D.** $3\sqrt{5}$.



Bài 31: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của hình hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8. **B.** 12. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $24\sqrt{3}$.

Bài 32: Một ca sĩ có buổi diễn âm nhạc có giá vé đã thông báo là 600 đô la thì sẽ có 1000 người đặt vé. Tuy nhiên sau khi đã có 1000 người đặt vé với giá 600 đô la thì nhà quản lí kinh doanh của ca sĩ này nhận thấy, cứ với mỗi 20 đô la giảm giá vé thì sẽ thu hút thêm 100 người mua vé nên ông quyết định mở ra một chương trình giảm giá vé. Tìm giá vé phù hợp để có được số tiền vé thu vào là cao nhất và số tiền đó là bao nhiêu?

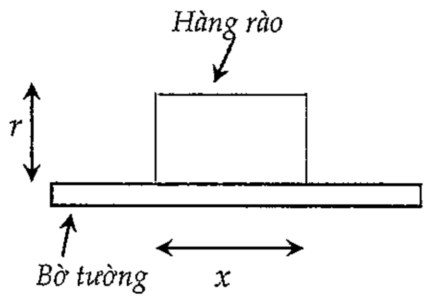
A. 400 đô la/ vé, số tiền thu vào là 800 000 đô la.

B. 400 đô la/ vé, số tiền thu vào là 6400 000 đô la.

C. 100 đô la/ vé, số tiền thu vào là 11 000 đô la.

D. 100 đô la/ vé, số tiền thu vào là 110 000 đô la.

Bài 33: Bác nông dân muốn làm một hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng $200m$ lưới sắt để làm nên toàn bộ hàng rào đó.



Diện tích đất trồng rau lớn nhất mà bác có thể rào nên là:

A. $1500m^2$. **B.** $10000m^2$.

C. $2500m^2$. **D.** $5000m^2$.

Bài 34: Một người có một dải ruy băng dài 130cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải dây ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là là nhiêu ?

A. $4000\pi\ cm^3$ **B.** $1000\pi\ cm^3$

C. $2000\pi\ cm^3$ **D.** $1600\pi\ cm^3$

Bài 35: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)\ (0\le t\le 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t)=V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả A, B, C đều sai.

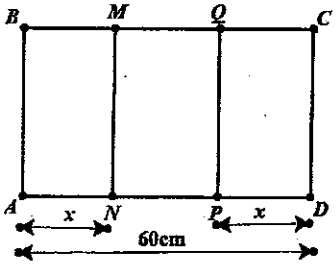
Bài 36: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

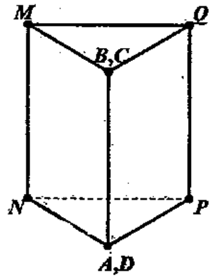
A. 0,7. **B.** 0,6. **C.** 0,8. **D.** 0,5.

Bài 37: Do nhu cầu sử dụng, người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h, có thể tích $1m^3$. Với a,h như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

A. $a=1;h=1$. **B.** $a=\frac{1}{3};h=\frac{1}{3}$. **C.** $a=\frac{1}{2};h=\frac{1}{2}$. **D.** $a=2;h=2$.

Bài 38: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60cm$. Ta gập tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?





A. $x = 20$. B. $x = 30$. C. $x = 45$. D. $x = 40$.

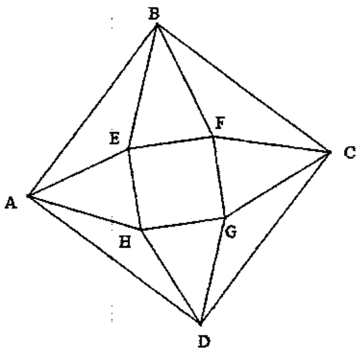
Bài 39: Một sợi dây kim loại dài $60cm$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Bài 40: Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An đã nhờ bố làm 1 hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy 1 mảnh tôn hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a, cắt mảnh tôn theo các tam giác cân $AEB; BFC; CGD; DHA$; sau đó gò các tam giác $AEH; BEF; CFG; DGH$ sao cho 4 đỉnh A, B, C, D trùng nhau như hình vẽ. Thể tích lớn nhất của khối tứ giác đều tạo được là:

A. $\frac{a^3}{36}$. B. $\frac{a^3}{24}$.

C. $\frac{a^3}{54}$. D. $\frac{4a^3}{81}$.



Bài 41: Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. B. $\frac{5\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. C. $\frac{7\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{8\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Bài 42: Cho số dương m. Hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

A. $\frac{m}{5}$. B. $\frac{m}{4}$. C. $\frac{m}{3}$. D. $\frac{m}{2}$.

Bài 43: Tìm hai số có hiệu là 13 sao cho tích của chúng là bé nhất.

A. $-\frac{13}{2}$ và $\frac{13}{2}$. B. $-\frac{13}{4}$ và $\frac{39}{4}$. C. $-\frac{13}{5}$ và $\frac{52}{5}$. D. $-\frac{13}{6}$ và $\frac{65}{6}$.

Bài 44. Hãy tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a $(a>0)$.

A. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi $AB=\dfrac{a}{3},\ BC=\dfrac{2a}{3}$.

B. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=\dfrac{a^2}{5\sqrt{3}}$ khi $AB=\dfrac{a}{3},\ BC=\dfrac{2a}{3}$.

C. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=\dfrac{a^2}{4\sqrt{3}}$ khi $AB=\dfrac{a}{3},\ BC=\dfrac{2a}{3}$.

D. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=\dfrac{a^2}{3\sqrt{3}}$ khi $AB=\dfrac{a}{3},\ BC=\dfrac{2a}{3}$.

Bài 45. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

A. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=S\left(\dfrac{a}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{8}$.

B. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=S\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{7}$.

C. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=S\left(\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{8}$.

D. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=S\left(\dfrac{a}{7}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{13}$.

Bài 46. Cho parabol $(P): y=x^2$ và điểm $A(-3;0)$. Xác định điểm M thuộc parabol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất và tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

A. $M_0(-1;3);\ AM_0=\sqrt{7}$.

B. $M_0(-1;1);\ AM_0=\sqrt{5}$.

C. $M_0(-2;1);\ AM_0=\sqrt{5}$.

D. $M_0(-2;3);\ AM_0=\sqrt{11}$.

Bài 47. Một tạp chí được bán với giá 20 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in, ...) được cho bởi công thức $C(x)=0{,}0001x^2-0{,}2x+10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

1) a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x)=\dfrac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất.

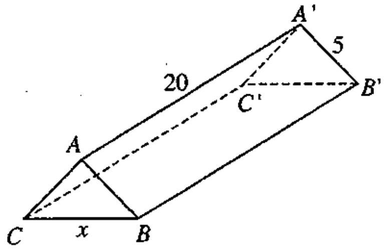
2) Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 90 triệu nhận được từ quảng cáo và sự trợ giúp cho báo chí. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết.

a) Chứng minh rằng số tiền lãi khi in x cuốn tạp chí là $L(x)=-0{,}0001x^2+1{,}8x-1000$.

b) Hỏi in bao nhiêu cuốn thì có lãi.

c) In bao nhiêu cuốn thì lãi nhiều nhất? Tính số tiền lãi.

Bài 48: Một hành lang giữa hai tòa nhà có hình dạng của một hình lăng trụ đứng. Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20 m, rộng 5 m. Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC.



a) Tính thể tích V của hình lăng trụ theo x.

b) Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Bài 49: Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1 và cung $\overset{\frown}{AB}$ là một phần tư đường tròn tâm A, bán kính AB chứa trong hình vuông. Tiếp tuyến tại điểm M của cung $\overset{\frown}{BD}$ cắt đoạn thẳng CD tại điểm P và cắt đoạn thẳng BC tại điểm Q. Đặt $x = DP$ và $y = BQ$.

a) Chứng minh rằng: $PQ^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ và $PQ = x + y$. Từ đó tính y theo x.

b) Tính PQ theo x và tìm x để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Bài 50: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\ (km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7\ (km)$. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $4\ (km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6\ (km/h)$. Xác định vị trí của điểm M để người đó đến kho nhanh nhất.

Bài 51: Một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp hình cầu bán kính a.

a) Chứng minh rằng thể tích của hình chóp là $V = \dfrac{4a^2x^2}{3(x-2a)}$; trong đó x là chiều cao của hình chóp.

b) Với giá trị nào của x, hình chóp có thể tích nhỏ nhất.

Bài 52: Một sợi dây kim loại dài $60\ (cm)$ được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành vòng tròn. Phải cắt sợi dây như thế nào để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất.

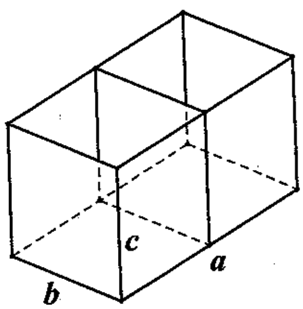
Bài 53: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn bằng nhau, không có nắp ở phía trên với thể tích $1{,}296\ m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước mỗi ngăn là a, b, c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a, b, c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể.

A. $a = 3{,}6\ m;\ b = 0{,}6\ m;\ c = 0{,}6\ m$

B. $a = 2{,}4\ m;\ b = 0{,}9\ m;\ c = 0{,}6\ m$

C. $a = 0{,}9\ m;\ b = 1{,}2\ m;\ c = 0{,}6\ m$

D. $a = 1{,}2\ m;\ b = 1{,}2\ m;\ c = 0{,}9\ m$



2 Một số bài toán ứng dụng về chuyển động

Bài 54: Một vật chuyển động có phương trình là $S(t) = 40\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right), (t(s))$, quãng đường tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật chuyển động tại thời điểm $t = 4(s)$.

b. Tính gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm $t = 6(s)$.

Bài 55: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S(t) = 5t^2, (t(s))$, độ cao tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm $t = 6(s)$.

b. Sau thời gian bao lâu thì vật rơi tự do đạt vận tốc 50(m/s).

Bài 56: Một vật chuyển động có vận tốc được biểu thị bởi công thức là $v(t) = 5t^2 + 7t, (t(s))$, trong đó $v(t)$ tính theo đơn vị (m/s).

a. Tính gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2(s)$.

b. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s.

Bài 57: **(Đề KSCL THPT Việt Trì)**

Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3, t(s)$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu.

A. $t = 4$. **B.** $t = 3$. **C.** $t = 2$. **D.** $t = 1$.

Bài 58: Hằng ngày, mực nước của một hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống tính theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức: $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$. Biết rằng thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước là lúc mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

A. 15h **B.** 16h **C.** 17h **D.** 18h

Bài 59: **(Đề minh họa Quốc gia 2017)**

Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10, (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0.2 m **B.** 2 m **C.** 10 m **D.** 20 m

Bài 60: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước là 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ cho bởi công thức $E\left(v\right)=cv^3t$, trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng bao nhiêu?

A. 9km/h **B.** 6km/h **C.** 10km/h **D.** 12km/h

Bài 61: (*Trích từ luận văn thạc sĩ Nguyễn Văn Bảo*):

Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10km / h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 10k/m **B.** 15km/h **C.** 20km/h **D.** 25km/h

Bài 62: Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g=9,8m/s^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm $t=5s$ bằng:

A. $49m/s.$ **B.** $25m/s.$ **C.** $10m/s.$ **D.** $18m/s.$

Bài 63: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S=t^3-3t^2+4t$, trong đó t tính bằng giây (s) và S được tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm lúc $t=2s$ bằng:

A. $4m/s^2.$ **B.** $6m/s^2.$ **C.** $8m/s^2.$ **D.** $12m/s^2.$

Bài 64: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S=t^3+3t^2-9t+27$, trong đó t tính bằng giây (s) và S được tính bằng mét (m). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. $0m/s^2.$ **B.** $6m/s^2.$ **C.** $24m/s^2.$ **D.** $12m/s^2.$

Bài 65: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+2t-100$, t tính theo giây; chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm:

A. $t=1.$ **B.** $t=16.$ **C.** $t=5.$ **D.** $t=3.$

Bài 66: Một vật đang chuyển động với vận tốc $10m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2(m/s^2)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

A. $11100m.$ **B.** $\frac{6800}{3}m.$ **C.** $\frac{4300}{3}m.$ **D.** $\frac{5800}{3}m.$

Bài 67: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $v'(t)=\frac{3}{t+1}(m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. $14m/s.$ **B.** $13m/s.$ **C.** $11m/s.$ **D.** $12m/s.$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1

Ghi chú của em

Gọi x là giá cho thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x: đồng; $x \geq 2000.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn bị bỏ trống?

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn bị bỏ trống là:

$$\frac{2(x-2.000.000)}{100.000} = \frac{x-2.000.000}{50.000}.$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x-2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có $F(x) = \left(-\frac{1}{50.000}x + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ với điều kiện $x \geq 2000.000$.

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Ta lập bảng biến thiên:

X	2000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	-	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

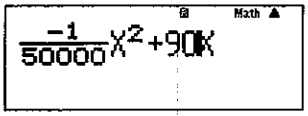
Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$.

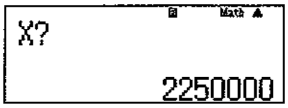
Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

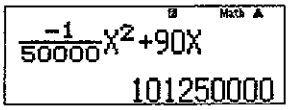
Chọn A.

Nhận xét: Sau khi tìm được $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng thiên như trên. Để đã cho bốn đáp án x ta dùng phím Calc của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho $F(x)$ lớn nhất chính là giá trị x cần tìm.

Đầu tiên dùng phím Alpha nhập vào sau đó bấm Calc từng đáp án







Bài 2:

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000 \le x \le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá $50000 - x$ thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bưởi bán thêm được là:

$$\left(50000 - x\right).\frac{50}{5000} = \frac{1}{100}\left(50000 - x\right).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40 + \frac{1}{100}\left(50.000 - x\right) = -\frac{1}{100}x + 540.$$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F\left(x\right)$: đồng).

Ta có: $F\left(x\right) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right)\left(x - 30.000\right) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của

$F\left(x\right) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$ với điều kiện $30.000 \le x \le 50.000$

$$F'\left(x\right) = -\frac{1}{50}x + 840.$$

$$F'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$$

Vì hàm $F\left(x\right)$ liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có: $F\left(30.000\right) = 0$

F(42.000) = 1.440.000

F(50.000) = 800.000

Vậy với $x = 42.000$ thì $F\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Chọn C.

Bài 3:

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $\left(0 < x \le 60\right)$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F\left(x\right)$: đồng).

Số tiền thu được:

$F(x) = \left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2 \cdot x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$F'(x) = 90.000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90.000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 120 & (loại) \\ x = 40 & (t/m) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

x	0		40		60
F'(x)		+	0	-	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất trên mỗi chuyến xe thì xe khách đó phải chở 40 người.

Chọn B.

Bài 4:

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{R^2}, (1)$

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R(h + R), (2)$

Thay (1) vào (2) ta được: $S_{Tp} = 2\pi R\left(\frac{16}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{16}{R} + R^2\right)$

$S'_{Tp} = 2\pi\left(-\frac{16}{R^2} + 2R\right) = \frac{4\pi}{R^2}(R^3 - 8).$

$S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{R^2}(R^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow R = 2.$

Bảng biến thiên.

R	0		2		+∞
S'(R)		-	0	+	
S(R)		↘	S_{min}	↗	

Vậy để sản xuất thùng phi sao cho tốn ít vật liệu nhất thì $R = 2(m)$ và chiều cao là $h = 4(m)$.

Chọn A.

Bài 5:

Ghi chú của em

Số kg tôm giống mà ông Thanh đã thả vụ vừa qua: $100.1 = 100(kg)$.

Gọi x $(0 < x < 100)$ là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.

Khối lượng trung bình 1 (kg/m^2) tôm giống thu hoạch được:

$2000 : 100 = 20(kg)$.

Khi giảm 0,2 (kg/m^2) tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là 2 (kg/m^2)

Gọi $F(x)$ là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới ($F(x) : kg$).

Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có phương trình tổng quát là:

$$F(x) = (100 - x)\left(20 + \frac{3}{8}x\right) = 2000 + \frac{35}{2}x - \frac{3}{8}x^2.$$

Bài trở thành tìm x để $F(x)$ lớn nhất.

Ta có: $F'(x) = \frac{35}{2} - \frac{3}{4}x$.

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{35}{2} - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{70}{3}.$$

Lập bảng biến thiên

x	0		$\frac{70}{3}$		$+\infty$
F'(x)		+	0	-	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy ông Thanh vụ tới phải thả số kg tôm giống là:

$$100 - \frac{70}{3} = \frac{230}{3} \approx 76.67 \text{ (kg)}.$$

Chọn A.

Nhận xét: Làm sao ta có thể tìm hàm $F(x)$ và tìm được hệ số $\frac{3}{8}$.

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là: $100.20 = 2000(kg)$ tôm.

Nếu ta giảm số $x(kg)$ tôm giống thì số tôm giống cần thả là $100 - x$ và số kg tôm thu hoạch được là: $(100 - x)(20 + mx)kg$. Theo giả thiết tôm giống giảm 0.2 (kg/m^2) thì $100m^2$ giảm $x = 20kg$ sản lượng thu được là $2200kg$. Ta có $(100 - 20)(20 + m20) = 2200 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$.

Bài 6:

Ta có: $G(x) = 0,025x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$.

$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2$.

$G'(x)=0\Leftrightarrow \frac{3}{2}x-\frac{3}{40}x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & (Loai) \\ x=20 & (t/m) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G'(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một liều thuốc 20 mg.

Chọn D.

[illegible]

Ta có:

$G'(t)=90t-3t^2.$

$G''(t)=90-6t.$

$G''(t)=0\Leftrightarrow 90-6t=0\Leftrightarrow t=15.$

Lập bảng biến thiên:

t	0		15		$+\infty$
$G''(t)$		$+$	0	$-$	
$G'(t)$		$\nearrow$	675	$\searrow$	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Chọn D.

[illegible]

Ta có

$h'=-3\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)'\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right).$

$h'=0\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow t=-2+6k,\left(k\in\mathbb{Z}_{(+)}\right).$

Ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Lập bảng biến thiên:

Ta suy ra được h đạt giá trị lớn nhất khi $t=10(h)$.

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

Vì $-1\le\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Rightarrow 9\le 3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12\le 15.$

Ghi chú của em

Vậy để h lớn nhất thì $\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow t=-2+12k, \left(k \in \mathbb{Z}_{(+)}\right)$

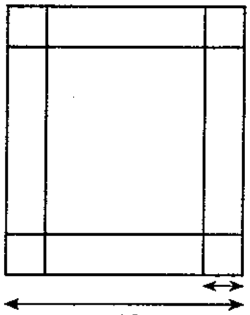
Ghi chú của em

Vậy để h lớn nhất với thời gian ngắn nhất thì $t=10(h)$.

Chọn A.

Bài 9:

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gập thành cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là: $12-2x$..



Ta có:

$V=Sh=(12-2x)^2 x=4x^3-48x^2+144x.$

với $0<x\le 6$.

Bài toán trở thành tìm x để V lớn nhất.

Ta có:

$V'=12x^2-96x+144.$

$V'=0 \Leftrightarrow 12x^2-96x+144=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=6\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

x	0		2		6
V'(x)		+	0	-	
V(x)		↗	128	↘	

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì $x=2(cm)$.

Chọn C.

Bài 10:

Gọi chiều dài của trang chữ là $x(cm), (x>0)$.

Chiều rộng của trang chữ là $\frac{384}{x}(cm)$

Chiều dài của trang giấy là $x+6\ (cm)$

Chiều rộng của trang giấy là $\frac{384}{x}+4\ (cm)$

Diện tích trang giấy: $S=(x+6)\left(\frac{384}{x}+4\right)=408+4x+\frac{2304}{x}.$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $S'(x)=4-\frac{2304}{x^2}.$

$S'(x)=0 \Leftrightarrow 4-\frac{2304}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=24 & (t/m)\\x=-24 & (loại)\end{array}\right.$

Ghi chú của em

Lập bảng biến thiên

x	0		24		$+\infty$
$S'(x)$		-	0	+	
$S(x)$		$\searrow$	S_{min}	$\nearrow$	

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là $30\,cm$ và chiều rộng là $20\,cm$.

Chọn B.

Bài 11:

Gọi độ dài hình chữ nhật đó là $x\,cm$. Chiều rộng hình chữ nhật đó là: $(8-x)cm$

Suy ra $4 \le x \le 8$.

Diện tích của hình chữ nhật đó là: $S = x(8-x) = 8x - x^2$.

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $S' = 8 - 2x$. $S' = 0 \Leftrightarrow 8 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Vì hàm $S(x)$, liên tục trên $4 \le x \le 8$, ta có $S(4) = 16$, $S(8) = 0$.

Ta kết luận: hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất bằng $16cm^2$.

Lưu ý: Bài này ta còn có thể sử dụng lí thuyết của lớp 10, giá trị nhỏ nhất của parabol với hệ số $a < 0$ thì $S_{\min} = -\dfrac{\Delta}{4a} = S\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 16$.

Chọn C.

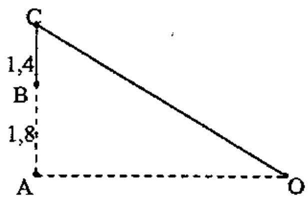
Bài 12:

Đặt độ dài cạnh $AO = x(m)$, $(x > 0)$.

Suy ra:

$BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$.

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:



$$\cos\widehat{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB.OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

$$= \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}.$$

Vìgóc$\widehat{BOC}$nênBàitoántrởthànhtìmxđể$F(x) = \dfrac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $(3,24 + x^2) = t, (t > 3,24)$.

Ghi chú của em

Suy ra $F\left(t\right)=\dfrac{t+\dfrac{63}{25}}{\sqrt{t\left(t+7\right)}}=\dfrac{25t+63}{25\sqrt{t\left(t+7\right)}}$.

Ta đi tìm *t* để *F*(*t*) đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'\left(t\right)=\frac{25t+63}{25\sqrt{t\left(t+7\right)}}=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t\left(t+7\right)}-\left(25t+63\right)\left(\dfrac{2t+7}{2\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)}{t\left(t+7\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50\left(t^2+7t\right)-\left(25t+63\right)\left(2t+7\right)}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right).$$

$F'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=9.$

Bảng biến thiên

t	3,24		9		$+\infty$
F'(*t*)		-	0	+	
F(*t*)		↘	$F_{\min}$	↗	

Thay vào đặt ta có: $\left(3{,}24+x^2\right)=9\Leftrightarrow x^2=\dfrac{144}{25}\Leftrightarrow x=2{,}4m.$

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO=2{,}4\,m$.

Chọn A.

Bài 43

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là x và $h,\left(x>0,h>0,\ m\right)$.

Dựng mặt phẳng trung trực của 1 cạnh bên cắt trục đáy ở *O*, vậy *O* là tâm mặt cầu. Ta có $OS=5m$, nên $OI=h-5$, với *I* là giao của 2 đường chéo đáy. Vì tam giác *OIC* vuông nên ta có:

$$IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{5^2-\left(h-5\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10h-h^2}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{20h-2h^2},\left(5<h<10\right).$$

Ta có thể tích của khối chóp tứ giác đều:

$$V\left(h\right)=Bh=\frac{1}{3}\left(\sqrt{20h-2h^2}\right)^2h=\frac{1}{3}\left(20h^2-2h^3\right).$$

Bài toán trở thành tìm *h* để *V*(*h*) đạt giá trị nhỏ nhất.

$V'(h) = \frac{1}{3}(40h - 6h^2)$.

$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(40h - 6h^2) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{20}{3}$.

Bảng biến thiên.

h	5		$\frac{20}{3}$		10
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$	↗		V_{max}		↘

Vậy chiều cao đó là $h = \frac{20}{3}(m)$

Chọn A.

Bài 14

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích.

Ta có $F(n) = (480 - 20n)n = 480n - 20n^2$.

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(n)$ đạt giá trị lớn nhất.

$F'(n) = 480 - 40n$.

$F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$.

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

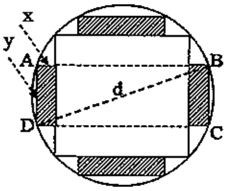
Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Chọn C.

Chú ý: Bài trên các em cũng có thể sử dụng giá trị nhỏ nhất của hàm số bậc 2 để tìm ra n.

Bài 15

Gọi chiều rộng và chiều dài của miếng phụ lần lượt là x, y. Đường kính của khúc gỗ là d, khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$ và $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}, 0 < y < \frac{d}{\sqrt{2}}$.



Theo đề bài ta được hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

Ghi chú của em

$$\left(2x+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=d^2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}x}.$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là:

$$S\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}x\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx} \text{ với } 0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}.$$

Bài trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$S'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}+\frac{x\left(-8x-2\sqrt{2}d\right)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$=\frac{-16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}.$$

$$S'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2=0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2-6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d.$$

Bảng biến thiên:

X	0		$\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$		$\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}d$
S'(x)		+	0	-	
S(x)		↗	S_{max}	↘	

Vậy miếng phụ có kích thước $x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d,\ y=\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d.$

Chọn A.

Bài 16:

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hồ chứa nước, $\left(x>0, y>0, h>0, m\right)$.

Ta có $\frac{y}{x}=2 \Leftrightarrow y=2x.$

Thể tích hồ chứa nước: $V=xyh \Leftrightarrow h=\frac{V}{xy}=\frac{576}{x\left(2x\right)}=\frac{288}{x^2}.$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S\left(x\right)=2xy+2xh+2yh=2x\left(2x\right)+2x\frac{288}{x^2}+2\left(2x\right)\frac{288}{x^2}=4x^2+\frac{1728}{x}.$$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất mà vẫn đạt được thể tích như mong muốn.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài toán trở thành tìm x để $S\left(x\right)$ nhỏ nhất.

$$S\left(x\right)=4x^2+\frac{1728}{x}.$$

$$S'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 8x-\frac{1728}{x^2}=0\Leftrightarrow x=6.$$

Bảng biến thiên

x	0		6		+∞
S'(x)		-	0	+	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy kích thước của hồ là: rộng: 6m, dài 12m, cao 8m, diện tích cần xây: 432m^2.

Chi phí ít nhất là: 432x500.000 = 216.000.000đ.

Chọn A.

Bài 17:

Gọi x,h lần lượt là độ dài cạnh đáy hình vuông, chiều cao của thùng gỗ, $\left(x>0,h>0,\left(m\right)\right)$.

Thể tích thùng gỗ: $V=x^2h\Leftrightarrow h=\frac{V}{x^2}=\frac{62,5}{x^2}$.

Diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là:

$$S\left(x\right)=x^2+4xh=x^2+4x\frac{62,5}{x^2}=x^2+\frac{250}{x}.$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$$S'\left(x\right)=2x-\frac{250}{x^2}.$$

$$S'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{250}{x^2}=0\Leftrightarrow x=5.$$

Bảng biến thiên:

x	0		5		0,6
S'(x)		-	0	+	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy để tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là nhỏ nhất thì cạnh đáy là 5m và chiều cao 2,5m.

Chọn A.

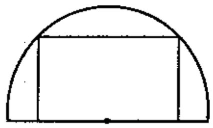
Bài 18

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn $\left(0 < x < R\right)$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là: $2\sqrt{R^2 - x^2}$.

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S\left(x\right) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$.

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị lớn nhất.



$$S'\left(x\right) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$$S'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{R\sqrt{2}}{2} & \left(t/m\right) \\ x = -\frac{R\sqrt{2}}{2} & \left(Loai\right) \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên:

X	0		$\frac{R\sqrt{2}}{2}$		R
S'(x)		+	0	-	
S(x)		↗	R^2	↘	

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2.

Chọn C.

Bài 19

Diện tích của đáy hộp là: $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600cm^2 = 0{,}16m^2$.

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x, \left(x > 0, m\right)$.

Chiều rộng của hộp là $\frac{0{,}16}{x}$.

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm chi phí để làm bể cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F\left(x\right) = 0{,}16.100.000 + 2.0{,}6x.70.000 + 2.0{,}6.\frac{0{,}16}{x}.70.000$$

$$= 16.000 + 84.000x + \frac{13440}{x}.$$

Bài toán trở thành tìm x để $F\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'\left(x\right) = 84.000 - \frac{13440}{x^2}.$$

$$F'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Ghi chú của em:

Ghi chú của em

Bảng biến thiên:

X	0		0,4		$+\infty$
$F'(x)$		-	0	+	
$F(x)$		↘	$F_{\min}$	↗	

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng.

Chọn C.

[illegible] 20

Gọi độ dài cạnh đáy của hộp là $x,\left(x>0,\mathrm{dm}\right)$.

Chiều cao của hộp là $h,\left(h>0,\mathrm{dm}\right)$. S(x) là diện tích của hộp cần mạ (dm²).

Ta có khối lượng cần mạ là: $m=\left(P_{vang}.d\right)S\left(x\right)=C.S\left(x\right)$.

Với C là hằng số, P_{vang} là khối lượng riêng của vàng.

Ta có, khối lượng vàng cần mạ tỉ lệ thuận với $S\left(x\right)$.

Thể tích hộp: $V=x^2h\Leftrightarrow h=\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{4}{x^2}$.

$S\left(x\right)=4xh+x^2=\dfrac{16}{x}+x^2$.

Bài toán trở thành tìm x để $S\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$S'\left(x\right)=-\dfrac{16}{x^2}+2x$.

$S'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -\dfrac{16}{x^2}+2x=0\Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
$S'(x)$		-	0	+	
$S(x)$		↘	S_{min}	↗	

Vậy để tiết kiệm nhất lượng vàng cần mạ thì chúng ta phải sản xuất hộp có kích thước cạnh đáy: $x=2dm,\ cao:\ h=1dm$.

Chọn A.

[illegible]

Số cá giống mà ông Thanh đã thả trong vụ vừa qua là:

$50.20=1000\ \left(con\right)$.

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm trong vụ vừa qua là:

$1500:1000=1,5\left(kg\right)$.

Ghi chú của em

Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x (con), $(x > 0)$.

Theo đề bài, giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm: $0,5\,kg$ / con.

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm: $0,0625x$ kg/con.

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này:

$$F\left(x\right)=\left(1000-x\right)\left(1,5+0,0625x\right)=-0,0625x^2+61x+1500.$$

Bài toán trở thành tìm x để $F\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:

$$F'\left(x\right)=-0,125x+61.$$

$$F'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -0,125x+61=0 \Leftrightarrow x=488.$$

Lập bảng biến thiên:

x	0		488		1000
F'(x)		+	0	-	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

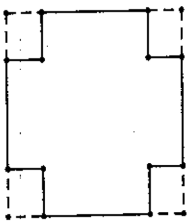
Vậy ông Thanh phải thả số cá giống trong vụ này là:

$1000-488=512$ con.

Chọn A.

Bài 22:

Giả sử mỗi góc ta cắt đi một hình vuông cạnh x dm.



Khi đó chiều cao của hộp là x dm $\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$ và cạnh đáy của hộp là $\left(1-2x\right)$ dm. Vậy thể tích của hộp là $V=x(1-2x)^2$ dm^3

Ta có : $V'=1-8x+12x^2$

Phương trình $V'=0$ có nghiệm $x=\frac{1}{6}\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Lập bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
V'		+	0	-	
V	0	↗	$\frac{2}{27}$	↘	0

Vậy thể tích cần tìm là: $V=\frac{2}{27}$ dm^3.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 23:

$AB = a, AA' = h, CD = x$. Ta có:

$$h^2 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow 3a^2 + 2ax - x^2 = 4h^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 + 2ax - x^2} = 2h$$

$$S = \frac{a+x}{2}.h = \frac{a+x}{4}.\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(3a-x)(x+a)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{27}}{4}\sqrt{(3a-x).\frac{x+a}{3}.\frac{x+a}{3}.\frac{x+a}{3}}$$

$$\le \frac{\sqrt{27}}{4}.\left(\frac{3a - x + \frac{x+a}{3} + \frac{x+a}{3} + \frac{x+a}{3}}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{27}a^2}{4}.$$

Chọn D.

Bài 24:

Ta đặt $B'C = x\left(km\right), \left(0 \le x \le 9\right)$.

Ta có $BC = \sqrt{B'B^2 + B'C^2} = \sqrt{36 + x^2}, AC = 9 - x$.

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm chi phí xây dựng đường ống nước từ ACB.

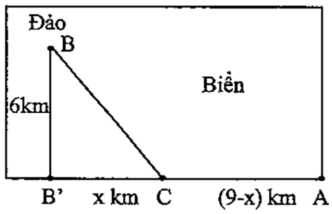
Ta có $F\left(x\right) = 130.000\sqrt{36 + x^2} + 50.000\left(9 - x\right)\left(USD\right)$.

Bài toán trở thành tìm x sao cho $F\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'\left(x\right) = \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}}x - 50.000.$$

$$F'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}}x - 50.000 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5.$$



Vì hàm $F(x)$ liên tục trên đoạn $[0;9]$ nên ta có:

$$F\left(0\right) = 1.230.000, F\left(9\right) \approx 1.406.165, F\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000.$$

Vậy chi phí nhỏ nhất khi C cách A bằng $9km - 2,5km = 6,5\ km$.

Chọn B.

Bài 25:

Gọi $r\left(m\right), h\left(m\right)$ lần lượt là bán kính đường tròn của đáy bể và chiều cao của bể.

Ta có $V = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{150}{\pi r^2}$.

Ghi chú của em

Gọi $F(r)$ là hàm chi phí xây dựng bể nước.

Ta có: $F(r) = 100.000\pi r^2 + 90.000.2\pi rh + 120.000\pi r^2$ 220.000 r

$= 220.000\pi r^2 + \dfrac{27.000.000}{r}$.

Bài toán trở thành tìm r để $F(r)$ nhỏ nhất.

$F'(r) = 440.000\pi r - \dfrac{27.000.000}{r^2}$.

$F'(r) = 0 \Leftrightarrow 440.000\pi r - \dfrac{27.000.000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0		$\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$		$+\infty$
F		-	0	+	
F		↘	F_{min}	↗	

Vậy chi phí thấp nhất là $F\left(\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}\right) \approx 15.038.287,97$ đồng.

Chọn C.

Bài 26:

Giả sử tấm gỗ cắt có hình dạng tam giác vuông là ABC, BC là cạnh huyền. Vì cạnh AB, AC là như nhau nên ta có thể đặt $AB = x, (0 < x < 0,6)$. Khi đó cạnh huyền $BC = 1,2 - x$ Cạnh góc vuông còn lại là:

$AC = \sqrt{(1,2-x)^2 - x^2} = \sqrt{1,44 - 2,4x}$.

Ta có diện tích tam giác *ABC*: $S(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{1,44 - 2,4x}$.

Bài toán trở thành tìm x để *S(x)* đạt giá trị lớn nhất:

$S'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1,44 - 2,4x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1,2x}{\sqrt{1,44 - 2,4x}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1,44 - 3,6x}{\sqrt{1,44 - 2,4x}}\right)$.

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,44 - 3,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$.

Bảng biến thiên:

X	0		0,4		0,6
S'(x)		+	0	-	
S(x)		↗	S_{max}	↘	

Vậy cạnh $BC = 0,8m$.

Chọn A.

Bài 27

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hố ga, $\left(x > 0, y > 0, h > 0, cm\right)$.

Ta có $\dfrac{h}{x} = 2 \Leftrightarrow h = 2x$.

Thể tích hố ga: $V = xyh \Leftrightarrow y = \dfrac{V}{xh} = \dfrac{1600}{x^2}$.

Diện tích cần xây dựng hố ga là:

$$S\left(x\right) = xy + 2xh + 2yh = x\frac{1600}{x^2} + 2x2x + 2\frac{1600}{x^2}2x$$

$$= \frac{1600}{x} + 4x^2 + \frac{6400}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x}.$$

Bài toán trở thành tìm x để $S\left(x\right)$ nhỏ nhất.

$$S'\left(x\right) = 8x - \frac{8000}{x^2}.$$

$$S'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{8000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên

x	0		10		$+\infty$
S'(x)		-	0	+	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy chiều rộng của hố ga là 10cm, chiều dài là 16cm.

Vậy diện tích đáy hố ga nhỏ nhất là: $S = 10.16 = 160cm^2$.

Chọn B.

Bài 28

Gọi x là số lượng ti vi mà trung tâm đặt mỗi lần ($x > 0$, cái).

Số lần đặt hàng mỗi năm của trung tâm: $\dfrac{2500}{x}$

Chi phí cho mỗi lần đặt hàng: $\dfrac{2500}{x}\left(200.000 + 90.000x\right)$

Số lượng ti vi trung bình gửi trong kho là $\dfrac{x}{2}$, chi phí lưu trong kho tương ứng: $50.000x$.

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí mà trung tâm đó phải trả.

Ta có:

$$F\left(x\right) = \frac{2500}{x}\left(200.000 + 90.000x\right) + 50.000x$$

$$= \frac{500.000.000}{x} + 225.000.000 + 50.000x.$$

Bài toán trở thành tìm x để $F\left(x\right)$ nhỏ nhất.

Ghi chú của em

$$F'(x) = -\frac{500.000.000}{x^2} + 50.000.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{500.000.000}{x^2} + 50.000 = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

Bảng biến thiên

x	0		100		2500
F'(x)		-	0	+	
F(x)		↘	F_{min}	↗	

Vậy trung tâm phải đặt hàng 25 lần, mỗi lần là 100 cái ti vi.

Chọn A.

Bài 29:

Ta có hàm lợi ích là $u(x;y) = x^{1/3}y^{1/2}$, để cho gọn ta đặt $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt{y}$.

Vì ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000 triệu đồng nên suy ra:

$200.000a^3 + 300.000b^2 = 300.000.000 \Leftrightarrow 2a^3 + 3b^2 = 3000 \ (*)$.

Lúc này ta có $u(x,y) = v(a,b) = ab$, ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức này.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow a^3 + a^3 + b^2 + b^2 + b^2 = 3000 \geq 5\sqrt[5]{a^6b^6}$

$$\Rightarrow ab \leq \left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$$

Do đó doanh thu cao nhất là $\left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$.

Chọn A.

Bài 30:

Đặt $CD = x,\ x > 0$. Ta tính được $DE = \sqrt{5^2 - (4-1)^2} = 4$.

Ta có $AC + BC = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(4-x)^2+16} = f(x)$

Khi đó $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$.

Giải phương trình $f'(x) = 0$, ta thu được $x = \frac{4}{5}$ và tìm được $\min f(x) = \sqrt{41}$.

Chọn A.

Bài 31:

Đặt a, b, c là kích thước hình hộp thì ta có hệ:

$$\begin{cases} 2(ab+bc+ca) = 36 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca = 18 \\ a^2+b^2+c^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca = 18 \\ a+b+c = 6\sqrt{2} \end{cases}$$

Cần tìm GTLN của $V = abc$

Ghi chú của em

Đặt $a=x\sqrt{2}, b=y\sqrt{2}, c=z\sqrt{2}$ thì có hệ mới $\begin{cases} xy+yz+zx=9 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

Đến đây chặn được miền của từng biến vì :

$\begin{cases} y+z=6-x \\ yz=9-x(y+z)=9-x(6-x) \end{cases}$ và $(y+z)^2 \geq 4yz$

nên $(6-x)^2 \geq 4\left[9-x(6-x)\right] \Leftrightarrow x(4-x) \geq 0 \Leftrightarrow 0<x\leq 4$

Tương tự $0<y,z\leq 4$

Ta có $V=2\sqrt{2}xyz=2\sqrt{2}x\left[9-x(6-x)\right]$, đến đây khảo sát hàm số này tìm max.

GTLN là $V=8\sqrt{2}$.

Chọn C.

Bài 32:

Gọi x là số lần giảm bớt đi 20 đô la trong giá vé. Khi đó giá vé sẽ là $600-20x$ một người.

Số người mua vé sẽ là: $1000+100x$

Khi đó số tiền thu được sẽ là:

$f(x)=(600-20x)(1000+100x)=-2000x^2+40\,000x+600\,000$

Hàm số bậc 2 có hệ số $a=-2000<0$ ta sẽ áp dụng kết quả đã được đưa ra đó là hàm số sẽ đạt giá trị lớn nhất tại $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-40\,000}{2.(-2000)}=10.$

Khi đó $f(10)=800\,000.$

Chọn A.

Bài 33:

Để bài cho ta dữ liệu về chu vi của hàng rào là $200m$. Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x và r, đến đây ta có thể đưa về hàm số một biến theo x hoặc theo r như sau:

Ta có $x+2r=200 \Leftrightarrow r=100-\dfrac{x}{2}$. Từ đây ta có $r>0 \Rightarrow x<200$

Diện tích đất rào được tính bởi: $f(x)=x.\left(100-\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{x^2}{2}+100x.$

Xét hàm số $f(x)=-\dfrac{x^2}{2}+100x$ trên khoảng $(0;200)$.

Đến đây áp dụng quy tắc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn như ở phần lý thuyết trên thì ta có phương trình:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x+100=0 \leftrightarrow x=100.$

Từ đó ta có $f(100)=5000$ là giá trị lớn nhất của diện tích đất rào được.

Chọn D.

Ghi chú của em

Bài 34

Gọi $x(cm);y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều của hình trụ $(x,y>0;x<30)$.

Dải dây duy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm

Ta có $(2x+y).4=120 \Leftrightarrow y=30-2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V=\pi x^2.y=\pi x^2(30-2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x)=x^2(30-2x)$ với $0<x<30$ đạt giá trị lớn nhất.

$f'(x)=-6x^2+60x$, cho $f'(x)=-6x^2+60x=0 \Rightarrow x=10$

Lập bảng biến thiên, ta thấy thể tích đạt giá trị lớn nhất là:

$V=1000\pi(\text{cm}^3)$.

Chọn B.

Bài 35

Xét hàm $V'=\dfrac{9}{10}t^2-\dfrac{1}{100}t^3\ \ (0\le t\le 90)$

$V''=\dfrac{9}{5}t-\dfrac{3}{100}t^2 \Rightarrow V''=0$ khi $t=0,\ t=60$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số V' đồng biến trên $(0;60)$ nghịch biến trên $(60;90)$.

Chọn A.

Bài 36

Ta có $S_{tp}=S_{xq}+2S_d=2\pi rl+2\pi r^2\ \ (1)$

$V=\pi r^2 l=2 \Rightarrow l=\dfrac{2}{\pi r^2}$

Thay vào (1) $S_{tp}=\dfrac{4}{r}+2\pi r^2=f(r)$

$f'(r)=-\dfrac{4}{r^2}+4\pi r$; $f'(r)=0$ khi r gần bằng $0,68$.

Chọn A.

Bài 37

$V=a^2h=1 \Rightarrow a=\sqrt{\dfrac{1}{h}}$

$S=4ah+2a^2=\dfrac{4}{a}+2a^2=f(a)$

$f'(a)=-\dfrac{4}{a^2}+4a$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1$.

Chọn A.

Ghi chú của em

[illegible]

Gọi m_A là độ dài đường trung tuyến đối với cạnh NP

Diện tích tam giác $\Delta NAP = S_{NAP}$

Ta có $m_A = \sqrt{\dfrac{4x^2-(60-2x)^2}{4}} = \sqrt{-900+60x}$

$V = h.m_A.NP$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{60x-900}(60-2x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{60(60-2x)}{2\sqrt{60x-900}} = 2\sqrt{60x-900}$

$f'(x) = 0,\ f(x) \to \max$ khi $x = 20$.

Chọn A.

[illegible]

$C = 2\pi r = 60 - a \Rightarrow r = \dfrac{60-a}{2\pi}$

$S_{hv} + S_{ht} = \dfrac{a^2}{16} + \dfrac{(60-a)^2}{4\pi} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{a}{8} - \dfrac{30}{\pi} + \dfrac{a}{2\pi} \Rightarrow f'(x) = 0\ khi\ a = \dfrac{30.8}{\pi+4}$

Suy ra $\dfrac{a}{r} = \dfrac{60r}{2\pi(\pi+4)} = 4$.

Chọn C.

[illegible]

Gọi h là chiều cao hình chóp, x là độ dài đáy, I là trung điểm EH

$SI = \sqrt{h^2 + 0,25x^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{x}{2}} \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x\right)}$

$V = \dfrac{1}{3}h.x^2$

Xét $f(x) = x^2.\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x\right)}$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-a}{\sqrt{2}}.x^2}{2\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{ax}{\sqrt{2}}}} + 2x\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{ax}{\sqrt{2}}} \Rightarrow f'(x) = 0\ khi\ a = \frac{3x}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.\sqrt{2}.x^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}.\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 a^3 = \frac{4a^3}{81}.$$

Chọn D.

[illegible]

Kí hiệu chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là $h,\ r$ và V. Khi đó: $V = h\pi r^2$.

Vì $r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow V = h\pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right) = \pi\left(hR^2 - \dfrac{h^3}{4}\right)$.

Ghi chú của em

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$V(h)=\pi\left(hR^2-\dfrac{h^3}{4}\right),\ h\in(0;2R).$

Ta có: $V'(h)=\pi\left(R^2-\dfrac{3h^2}{4}\right)=0\Leftrightarrow h=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}.$

Bảng biến thiên:

h	0		$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{(0;2R)} V=V\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Khi đó, thể tích khối trụ là $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Chọn A.

Bài 42

Cho $m>0$. Đặt x là số thứ nhất, $0<x<m$, số thứ hai là $m-x$.

Xét tích $P(x)=x(m-x),\ x\in(0;m)$. Ta có:

$P'(x)=-2x+m=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m}{2}.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{m}{2}$		m
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{m^2}{4}$	$\searrow$	

Từ BBT, ta có $\max\limits_{(0;m)} P(x)=P\left(\dfrac{m}{2}\right)=\dfrac{m^2}{4}$. Vậy phân tích m thành tổng hai số $\dfrac{m}{2}$.

Chọn D.

Bài 43

Gọi một trong hai số phải tìm là x, ta có số kia là $x+13$.

Xét tích $P(x)=x(13+x)$. Ta có: $P'(x)=2x+13=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{13}{2}.$

Ghi chú của em

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{13}{2}$		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{169}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT, ta có $\min P(x) = P\left(-\dfrac{13}{2}\right) = -\dfrac{169}{4}$. Vậy tích hai số là bé nhất khi một số là $-\dfrac{13}{2}$ và số kia là $\dfrac{13}{2}$.

Chọn A.

Bài 44:

Kí hiệu cạnh góc vuông AB là x, $x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$.

Khi đó, cạnh huyền $BC = a - x$, cạnh góc vuông kia là

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$.

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$, $x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$. Ta có:

$S'(x) = \dfrac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{a}{3}$		$\dfrac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi $AB = \dfrac{a}{3}$, $BC = \dfrac{2a}{3}$.

Chọn A.

Bài 45:

Đặt $BM = x$; $x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$ ta được $MN = a - 2x$; $QM = x\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$S(x) = MN.QM = (a-2x)x\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(ax - 2x^2\right)$.

Ta có: $S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{4}$.

Ghi chú của em

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=\frac{a}{4}$ và giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật là $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=S\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

Chọn C.

Bài 46.

Gọi $M(x;x^2)$ là một điểm bất kì của parabol (P).

Ta có: $AM^2=(x+3)^2+x^4=x^4+x^2+6x+9$. Khoảng cách AM đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(x)=AM^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét $f(x)=x^4+x^2+6x+9$

$\Rightarrow f'(x)=4x^3+2x+6=(x+1)(4x^2-4x+6)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, ta suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=-1$ và $f(-1)=5$. Do đó, khoảng cách AM đạt giá trị nhỏ nhất khi M nằm ở vị trí của điểm $M_0(-1;1)$; $AM_0=\sqrt{5}$.

Chọn B.

Bài 47.

1) a) Tổng chi phí cho x cuốn tạp chí là:

$T(x)=C(x)+0,4x=0,0001x^2+0,2x+10000.$

b) Ta có: $M(x)=0,0001x+\frac{10000}{x}+0,2$ với $x=1,2,...$ (6)

Ta xét hàm số $y=M(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ (trong đó $M(x)$ được xác định bởi công thức (6) với mọi $x>0$) và tìm $x>0$, trong đó hàm số M đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

Ghi chú của em

Ta có: $M'(x)=0,0001-\dfrac{10000}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=10000.$

Bảng biến thiên:

x	0		10000		$+\infty$
$M'(x)$		$-$	0	$+$	
$M(x)$		$\searrow$	$2,2$	$\nearrow$	

Từ BBT, suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} M(x)=M(10\,000)=2,2.$ Vậy chi phí trung bình cho x cuốn tạp chí thấp nhất khi $x=10000$ (cuốn). Chi phí cho mỗi cuốn khi đó là 2,2 vạn đồng $=22000$ (đồng).

2) a) Tổng số tiền thu được khi bán x cuốn tạp chí (x nguyên dương) là $2x+9000$ (vạn đồng).

Số tiền lãi khi bán x cuốn là:

$L(x)=2x+9000-T(x)=-0,0001x^2+1,8x-1000.$

b) Có lãi khi $L(x)>0$, tức là:

$$-0,0001x^2+1,8x-1000>0 \Leftrightarrow \frac{0,9-\sqrt{0,71}}{0,0001}<x<\frac{0,9+\sqrt{0,71}}{0,0001}$$

$$\Leftrightarrow 9000-\sqrt{71000000}<x<9000+\sqrt{71000000}.$$

Vì x lấy giá trị nguyên dương và $9000-\sqrt{71000000}\approx 573,85$ và $9000+\sqrt{71000000}\approx 17426,15$ nên $573<x<17427.$

c) Ta xét hàm số: $L(x)=-0,0001x^2+1,8x-1000;\ x\in(0;+\infty)$ và tìm $x>0$ để tại đó $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $L'(x)=-0,0002x+1,8=0 \Leftrightarrow x=9000.$

Bảng biến thiên:

x	0		9000		$+\infty$
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$		$\nearrow$	7100	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} L(x)=L(9000)=7100.$ Vậy muốn lãi nhiều nhất thì phải in 9000 cuốn.

Khi đó tiền lãi thu được là: 7100 vạn đồng $=71000000$ (đồng)

Ghi chú của em

Bài 48:

a) $V = 5x\sqrt{100-x^2}\ (m^3);\ 0 < x < 10.$

b) Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi $x = 5\sqrt{2}\ (m)$

và $\max\limits_{(0;10)} V = V\left(5\sqrt{2}\right) = 250\ \left(m^3\right).$

Bài 49:

a) $y = \dfrac{1-x}{1+x};\ 0 < x < 1.$

b) $PQ = \dfrac{x^2+1}{x+1};\ 0 < x < 1.$

Đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất khi $x = \sqrt{2} - 1.$

Bài 50:

Đặt $x = BM,\ 0 \le x \le 7.$ Khi đó, $AM = \sqrt{x^2+25},\ MC = 7 - x.$

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ (giờ), $0 \le x \le 7.$

Hàm số T đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 2\sqrt{5} \approx 4,472$ (km).

Bài 51:

a) Mặt phẳng đi qua đường cao SH của hình chóp và trung điểm M của một cạnh đáy cắt hình chóp theo tam giác cân SMN và cắt hình cầu theo hình tròn tâm O, bán kính a nội tiếp tam giác SMN.

Có thể tính thể tích hình chóp theo x và $\alpha = \widehat{SNH}.$ Sau đó sử dụng đẳng thức $x = a + SO$ để tìm hệ thức giữa $a,\ x$ và α.

Ta có $HN = x\cot\alpha;\ MN = 2x\cot\alpha.$ Thể tích hình chóp là :

$V = \dfrac{1}{3}MN^2.SH = \dfrac{4}{3}x^3\cot^2\alpha.$

Ta tính $cot^2\alpha$ theo a và x.

Từ đẳng thức:

$SH = OH + SO \Rightarrow x = a + \dfrac{a}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \dfrac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2};$

$\cot^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{a^2}{x(x-2a)}.$ Từ đó suy ra công thức cần chứng minh.

b) Cần chú ý V xác định khi $x > 2a$.

Bài 52:

Độ dài cạnh hình vuông là $x = \dfrac{60}{\pi+4}\ (cm).$ Đoạn dây được uốn thành hình vuông là $\dfrac{240}{\pi+4} \approx 33,6\ (cm).$ Bán kính đường tròn là $r = \dfrac{30}{\pi+4}\ (cm).$

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Đoạn dây được uốn thành vòng tròn có độ dài là $\frac{60}{\pi+4}\approx 26,4\ (cm)$.

Ta có: $4x+2\pi r=60\Rightarrow x=\frac{30-\pi r}{2};\ 0<r<\frac{30}{\pi}$.

Tổng diện tích hình vuông và hình tròn là $S=\pi r^2+x^2=\pi r^2+\frac{1}{4}(30-\pi r)^2$.

Dễ thấy S đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $r=\frac{30}{\pi+4}$.

Bài 53:

$V=2(abc)=1,296$

Ta có: $S=2(ac+bc)+ab+2ac+bc+ab=4ac+3bc+2ab$ (1)

Theo đề bài $V=2(abc)=1,296$

$$\Leftrightarrow abc=\frac{81}{125}. \qquad (2)$$

Bài toán trở thành tìm a,b,c để S_{min} với điều kiện (2)

Từ (1) ta có:

$$S=\frac{4abc}{b}+\frac{3abc}{a}+\frac{2abc}{c}$$

$$=4.\frac{81}{125}.\frac{1}{b}+3.\frac{81}{125}.\frac{1}{a}+2.\frac{81}{125}.\frac{1}{c}$$

$$=\frac{81}{125}.\left(\frac{4}{b}+\frac{3}{a}+\frac{2}{c}\right)\geq\frac{81}{125}3\sqrt[3]{\frac{4.3.2}{abc}}$$

$$\geq\frac{81}{125}\sqrt[3]{\frac{24}{\frac{81}{125}}}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{4}{b}=\frac{3}{a}=\frac{2}{c}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3b}{4}\\ c=\frac{b}{2}\end{cases}$$

Thay vào (2): $\frac{3b}{4}.b.\frac{b}{2}=\frac{81}{125}\Leftrightarrow\frac{3b^3}{8}=\frac{81}{125}\Leftrightarrow b=1,2$.

Vậy $a=0,9;c=0,6$.

Đáp án C.

Một số bài toán ứng dụng về chuyển động

Bài 54

a) Ta có $v(t) = S'(t) = 40\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 40\pi \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Vậy $v(4) = S'(4) = 40\pi \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 40\pi\frac{1}{2} = 20\pi\left(m / s\right)$.

b) Ta có

$$a(t) = v'(t) = -40\pi\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -40\pi^2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Vậy $a(6) = v'(6) = -40\pi^2 \sin\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -40\pi^2\frac{\sqrt{3}}{2} = -20\sqrt{3}\pi^2\left(m / s^2\right)$.

Bài 55

a. Ta có $v(t) = S'(t) = 10t$.

Vậy vận tốc tại thời điểm $t = 6(s)$ là: $v(6) = S'(6) = 10.6 = 60, \left(m / s\right)$

b. Vậy để vận tốc của vật rơi tự do đạt $50(m/s)$ thì: $50 = 10t \Leftrightarrow t = 5(s)$.

Bài 56

a) Ta có $a(t) = v'(t) = 10t + 7$. Vậy gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2(s)$:

$a(2) = v'(2) = 10.2 + 7 = 27\left(m / s^2\right)$.

b) Vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s:

$$v(t) = 12 \Leftrightarrow 5t^2 + 7t = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (t / m) \\ t = -2,4 & (Loai) \end{array}\right.$$

Với $t = 1(s) : a(1) = v'(1) = 10 + 7 = 17\left(m / s^2\right)$.

Bài 57

Ta có: $v(t) = S'(t) = 6t - 3t^2$.

$v'(t) = 6 - 6t$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 6 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Lập bảng biến thiên:

T	0		1		$+\infty$
$v'(x)$		+	0	-	
$v(t)$	↗		v_{max}		↘

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi $t = 1$.

Chọn D.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 58

Ta có:

$h'(t) = 24 + 10t - t^2.$

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 24 + 10t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -2 & (Loai) \\ t = 12 & (t/m) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

T	0		12		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$	h_{max}	$\searrow$	

Vậy để mục nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Chọn A.

Bài 59

Ta có $v_0 = 10(m/s)$.

Gia tốc của ô tô chuyển động chậm dần đều: $a = v'(t) = -5$.

Tại thời điểm ô tô dừng lại thì vận tốc bằng 0.

Ta có $v_{(t)}^2 - v_0^2 = 2aS \Leftrightarrow 0 - 10^2 = 2(-5)S \Leftrightarrow S = 10(m)$

Vậy ô tô còn có thể đi được quảng đường là 10 m.

Chọn C.

Lưu ý: Bài này còn có thể áp dụng tích phân để tìm quãng đường di chuyển của ô tô khi dừng lại.

Bài 60

Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng: $v - 6\ (km/h), (v \geq 6)$.

Thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản: $t = \dfrac{300}{v-6}(h)$.

Năng lượng tiêu thụ của con cá khi bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản:

$$E(v) = cv^3\frac{300}{v-6} = c\frac{300v^3}{v-6}(J).$$

Bài toán trở thành tìm v để $E(v)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có

$$E'(v) = cv^2\frac{900}{v-6} - cv^3\frac{300}{(v-6)^2} = \frac{300cv^2}{v-6}\left(3 - \frac{v}{v-6}\right).$$

$$E'(v) = 0 \Leftrightarrow \frac{300cv^2}{v-6}\left(3 - \frac{v}{v-6}\right) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{v}{v-6} = 0 \Leftrightarrow v = 9.$$

Bảng biến thiên

x	6		9		$+\infty$
$E'(x)$		+	0	-	
$E(x)$		↘	E_{min}	↗	

Vậy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng $v = 9\left(km / h\right)$.

Chọn A.

Nhận xét: Đối với bài này sẽ có rất nhiều em tìm nhầm hàm $E\left(v\right) = c\left(v-6\right)^3 \frac{300}{v-6}\left(J\right)$. Và sẽ tìm được chọn $v = 6km / h$ đó là Chọn sai hoàn toàn vì vận tốc v trong biểu thức $E\left(v\right) = cv^3t$ là vận tốc thực của con cá khi di chuyển, còn t là thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản ứng với vận tốc của con cá đã trừ đi vận tốc dòng nước.

Bài 61:

Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu. Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{x}.480$ (ngàn đồng).

Khi vận tốc $v = 10km / h$ thì chi phí cho quãng đường 1 km ở phần thứ hai là: $\frac{1}{10}.30 = 3$ (ngàn đồng). Xét tại vận tốc $x\left(km / h\right)$, gọi y (ngàn đồng) chi phí cho quãng đường 1km tại vận tốc x thì chi phí cho quãng đường 1km tại vận tốc x, ta có: $y = kx^3$.

Ta có $3 = k10^3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{10^3}$. Suy ra $y = \frac{3x^3}{1000}$.

Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1km đường là: $P\left(x\right) = \frac{480}{x} + \frac{3x^3}{1000}$. Bài toán trở thành tìm x để $P\left(x\right)$ nhỏ nhất.

$$P'\left(x\right) = -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000}.$$

$$P'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000} = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

$$P''\left(x\right) = \frac{960}{x^3} + \frac{18x}{1000}.$$

$$P''\left(20\right) = \frac{960}{20^3} + \frac{1820}{1000} > 0.$$

Suy ra $P\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = 20$.

Vậy vận tốc của tàu $x = 20\left(km / h\right)$.

Chọn C.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 62

$v = S' = gt$ nên tại thời điểm $t = 5s$. Vận tốc của vật là:

$v = 9,8.5 = 49\, m/s$.

Chọn A.

Bài 63

$a = S'' = 6t - 6$ nên tại thời điểm $t = 2s$ thì gia tốc của chất điểm là: $a = 6.2 - 6 = 6\, m/s^2$.

Chọn B.

Bài 64

$v = S' = 3t^2 + 6t - 9$; $a = S'' = 6t + 6$

Tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu: $3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3\ (l) \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì gia tốc của chuyển động là: $a = 6.1 + 6 = 12 m/s^2$.

Chọn D.

Bài 65

$S' = t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2\,(l) \\ t = 1 \end{array}\right.$

Vậy chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 1s$.

Chọn A.

Bài 66

$a(t) = 3t + t^2$

$v'(t) = a(t)$; $S'(t) = v(t)$

Theo đề bài ta có: vận tốc ban đầu là $10 m/s$

$\Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 10\ (m/s)$

$S(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + 10t\ (m)$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $S(10) = \frac{4300}{3} m$.

Chọn C.

Bài 67

Vận tốc của vật sau 10 giây là $v = 6 + 7 = 13 m/s$.

Chọn B.

CHỦ ĐỀ 2. TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN MIỀN D

Cho hàm số $y = f(x,m)$, m là tham số, có tập xác định D.

• Hàm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$.

• Hàm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$.

Từ đó suy ra điều kiện của m.

1 Sử dụng GTNN, GTLN của hàm số trên tập D để giải quyết bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu

• Lí thuyết nhắc lại:

Cho bất phương trình:

$f(x,m) \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \geq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{x \in D} f(x) \geq g(m)$.

Cho bất phương trình:

$f(x,m) \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \leq g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \max\limits_{x \in D} f(x) \leq g(m)$.

Phương pháp: Để điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc trên từng khoảng xác định) của hàm số $y = f(x,m)$, ta thực hiện các bước như sau:

– Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

– Bước 2: Tính y'. Để hàm số đồng biến $y' \geq 0, \forall x \in D, \left(y' \leq 0, \forall x \in D\right)$ thì ta sử dụng lí thuyết nhắc lại phần trên.

– Bước 3: Kết luận giá trị của tham số.

Chú ý:

+ Phương pháp trên chỉ sử dụng được khi ta có thể tách được thành $f(x)$ và $g(m)$ riêng biệt.

+ Nếu ta không thể tách được thì ta phải sử dụng dấu của tam thức tam thức bậc 2.

2 Sử dụng phương pháp tam thức bậc hai để tìm điều kiện của tham số:

• Lí thuyết nhắc lại:

1) $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

2) Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì:

• $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ • $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

3) Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$:

• Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a.

• Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a (trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$)

• Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với a, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với a.

4) So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0:

• $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ • $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ • $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

5) Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $(x_1; x_2)$ bằng d thì ta thực hiện các bước sau:

• Tính y'.

• Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)

• Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$ (2)

• Sử dụng định lí Viet đưa (2) thành phương trình theo m.

• Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+(2m+1)x-3m^2+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m\le 2$. **B.** $m\le -\frac{5}{2}$. **C.** $m\ge -\frac{5}{2}$. **D.** $m\le 3$.

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=mx^3-3x^2+(m-2)x-3m+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le 2$. **B.** $m\le 1$ **C.** $m\ge -1$ **D.** $m\le -1$.

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{mx+1}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m\le 1$ hoặc $m\ge -1$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>1$

C. $m\le 2$ hoặc $m\ge -1$ **D.** $m\le 2$ hoặc $m\ge 1$

Bài 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.

A. $m\ge \frac{2}{3}$. **B.** $m\le 1$ **C.** $m\ge -1$ **D.** $m\le -1$.

Bài 5: **(ĐHKA,A1 - 2013).**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx-1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m\le 1$. **B.** $m\le -1$ **C.** $m\ge -1$ **D.** $m\le 0$.

Bài 6: **(Đề minh họa 2017)**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$ **B.** $m\le 0$

C. $1\le m<2$ **D.** $m\ge 2$

Bài 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-mx^2-(2m^2-7m+7)x+2(m-1)(2m-3)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

A. $-1\le m\le \frac{5}{2}$ **B.** $-1<m\le \frac{5}{2}$ **C.** $-1<m<\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{-1}{2}<m\le \frac{5}{2}$

Ghi chú của em

Bài 1:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 + 4x + (2m+1)$.

$\Delta' = 2m + 5$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi :

$y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{5}{2}$.

Chọn B.

Bài 2:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3mx^2 - 6x + (m-2)$.

Hàm số nghịch biến trên R khi và chỉ khi:

$y' = 3mx^2 - 6x + (m-2) \le 0, x \in \mathbb{R}$.

TH1: $m = 0$, khi đó $y' = -6x - 2 \le 0, x \in \mathbb{R}$.

$y' = -6x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{3}$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

TH2: $m \ne 0$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$:

$$y'(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 9 - 3m(m-2) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 + 6m + 9 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1.$$

Chọn D.

Bài 3:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Đạo hàm: $y' = \dfrac{m^2 - 1}{(x+m)^2}$. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y' > 0, \forall x \ne -m \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Chọn B.

Bài 4

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

Hàm số đồng trên $[2;+\infty)$ thì:

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0, \forall x \in [2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2-2x+3}, \forall x \in [2;+\infty).$$

Đặt $f(x) = \frac{6-2x}{x^2-2x+3}, \forall x \in [2;+\infty)$, ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm: $f(x), \forall x \in [2;+\infty)$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{2x^2-12x+6}{(x^2-2x+3)^2}, \forall x \in [2;+\infty).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-12x+6}{(x^2-2x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3+\sqrt{6} \\ x = 3-\sqrt{6}\,(loại) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(2) = \frac{2}{3}, f(3+\sqrt{6}) = \frac{2-\sqrt{6}}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

Vậy để hàm số đồng biến $[2;+\infty)$ thì: $\max\limits_{[2;+\infty)} f(x) \leq m \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq m.$

Chọn A.

Bài 5

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3m.$

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty)$ thì:

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 3m \leq 0, \forall x \in (0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x \geq m, \forall x \in (0;+\infty).$$

Đặt $f(x) = x^2 - 2x, \forall x \in (0;+\infty)$, ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x), \forall x \in (0;+\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 2x - 2.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Ta có: $f(0) = 0, f(1) = -1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

Vậy để hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$ thì:

$\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq -1.$

Chọn B.

Bài 6

Đặt $t = \tan x$, với $x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0;1).$

Hàm số đã cho trở thành tìm tham số m để hàm số $y = \frac{t-2}{t-m}$ đồng biến trong khoảng $(0;1)$.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Ta có $y'(t) = \dfrac{-m+2}{(t-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trong khoảng $(0;1)$ thì:

$$\begin{cases} y'(t) > 0 \\ t \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq m < 2 \\ m \leq 0 \end{array}\right.$$

Chọn A.

Bài 7

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx - (2m^2 - 7m + 7)$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ thì ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$:

$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3(2m^2 - 7m + 7) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 3 \leq 0, (VL)$.

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH2: Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$.

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 3 > 0, (\forall m \in \mathbb{R})$.

Giả sử $x_1; x_2, (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$, để hàm số đồng biến $(2;+\infty)$ thì:

$$x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{S}{2} \leq 2 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0, (1) \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{3} \\ x_1x_2 = \dfrac{-2m^2 + 7m - 7}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\begin{cases} m \leq 6 \\ \dfrac{-2m^2 + 7m - 7}{3} - 2\left(\dfrac{2m}{3}\right) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 3m + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 6 \\ -1 \leq m \leq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \dfrac{5}{2}.$$

Vậy với $-1 \leq m \leq \dfrac{5}{2}$ thì hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$

Chọn A.

CHỦ ĐỀ 3. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH DỰA VÀO HÀM SỐ.

- **Kiến thức cơ bản**

Cho f(x) là hàm số xác định và liên tục trên D, thì:

$f\left(x\right) \le g\left(m\right)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g\left(m\right) \ge \max\limits_{x\in D} f(x)$.

$f\left(x\right) \le g\left(m\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g\left(m\right) \ge \min\limits_{x\in D} f(x)$.

$f\left(x\right) \ge g\left(m\right)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g\left(m\right) \le \min\limits_{x\in D} f(x)$.

$f\left(x\right) \ge g\left(m\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g\left(m\right) \le \max\limits_{x\in D} f(x)$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m\sqrt{x^2-2x+2}+m+2x-x^2 \le 0$ có nghiệm $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

A. $m \le \dfrac{2}{3}$ **B.** $m \le -1$ **C.** $m \ge \dfrac{2}{3}$ **D.** $m \le 0$.

Bài 2: **(Đề thi tuyển sinh ĐH, CĐ khối B – 2004):**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ có nghiệm.

A. $m \le \sqrt{2}-1$ **B.** $\sqrt{2}-1 \le m \le 1$ **C.** $m \ge 1$ **D.** $m \le 1$.

Bài 3: **(Đề thi tuyển sinh ĐH, CĐ khối A – 2007):**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ $\left(1\right)$ có nghiệm.

A. $m \le \sqrt{2}-1$ **B.** $\sqrt{2}-1 \le m \le 1$ **C.** $-1 < m \le \dfrac{1}{3}$ **D.** $m \le -1$.

Bài 4: **(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B – 2006)**

Tìm các giá trị thực của m để phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m \le 9$ **B.** $m \ge \dfrac{9}{2}$ **C.** $-1 < m$ **D.** $m \le 7$

Bài 5: **(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A – 2008)**

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m,\left(m \in \mathbb{R}\right)$.

A. $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$ **B.** $2\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+8$

C. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$ **D.** $\sqrt{6}+\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$

Ghi chú của em

Bài 1.

Bpt $\Leftrightarrow m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0 \Leftrightarrow m\le \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+2}+1}$, (1)

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}\Rightarrow x^2-2x=t^2-2$.

Ta xác định điều kiện của t:

Xét hàm số $t=\sqrt{x^2-2x+2}$ với $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$, ta đi tìm điều kiện ràng buộc của t.

Ta có: $t'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $t'=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy với $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$ thì $1\le t\le 2$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow m\le \dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t\in[1;2]$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t\in[1;2]$. Ta có:

$f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$. Vậy hàm số f tăng trên $[1;2]$.

Do đó, yêu cầu của bài toán trở thành tìm m để (1) có nghiệm $t\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\le \max\limits_{t\in[1;2]} f(t)=f(2)=\dfrac{2}{3}$.

Vậy $m\le\dfrac{2}{3}$ thì phương trình có nghiệm.

Chọn A.

Bài 2.

ĐK: $x\in[-1;1]$.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$. Với $x\in[-1;1]$, ta xác định điều kiện của t như sau :

Xét hàm số $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ với $x\in[-1;1]$.

Ta có:

$t'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}}$, cho $t'=0\Leftrightarrow x=0$.

Ta có $t(-1)=\sqrt{2}, t(0)=0, t(1)=\sqrt{2}$.

Ghi chú của em

Vậy với $x \in [-1;1]$ thì $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Từ $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$m\left(t+2\right) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \frac{-t^2+t+2}{t+2} = m.$$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $\frac{-t^2+t+2}{t+2} = m$ có nghiệm $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2+t+2}{t+2}$ với $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-t^2-4t}{\left(t+2\right)^2} < 0, \forall t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Suy ra: $\max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) = f(0) = 1,\ \min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1.$

Bây giờ, yêu cầu Bài xảy ra khi:

$$\min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) \le m \le \max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \le m \le 1.$$

Vậy với $\sqrt{2} - 1 \le m \le 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp số B.

Bài 3

Điều kiện xác định của phương trình : $x \ge 1$

Khi đó:

$$\left(1\right) \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{\left(x+1\right)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\ \left(2\right)$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}, \left(t \ge 0\right)$. Vì $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x+1}} < 1$ nên $t < 1$.

Vậy với $x \ge 1$ thì $0 \le t < 1$.

Khi đó, (2) $\Leftrightarrow 3t^2 + m = 2t \Leftrightarrow -3t^2 + 2t = m, \left(3\right)$

Bây giờ bài toán trở thành tìm m để (3) có nghiệm $t \in \left[0;1\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = -3t^2 + 2t$ trên khoảng $\left[0;1\right)$. Ta có :

$$f'\left(t\right) = -6t + 2, f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow -6t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1

Vậy với $-1 < m \le \dfrac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn C.

Ta có: $\sqrt{x^2+mx+2} = 2x+1\ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2+4x-1 = mx\ (2) \end{cases}$ (*)

Nhận xét:

$x = 0$ không phải là nghiệm của (2). Do vậy, ta tiếp tục biến đổi:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3x^2+4x-1}{x} = m\ (3) \end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm m để (3) có 2 nghiệm thực phân biệt:

$x \in \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-1}{x}$ với $x \in \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$. Ta có:

$f'(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2} > 0, \forall x \in \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}.$

BBT:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Vậy với $m \ge \dfrac{9}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn B.

Điều kiện: $0 \le x \le 6$.

Đặt vế trái của phương trình là $f(x), x \in [0;6]$.

Ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right), x\in(0;6).$$

Đặt :

$$u(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right),\ v(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right), x\in(0;6).$$

Ta thấy $u(2)=v(2)=0, x\in(0;6)\Rightarrow f'(2)=0$. Hơn nữa $u(x), v(x)$ cùng dương trên khoảng $(0;2)$ và cùng âm trên khoảng $(2;6)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		6
$f'(x)$	||	+	0	−	||
$f(x)$	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	↗	$3\sqrt{2}+6$	↘	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Vậy với $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A.

Ghi chú của em

CHỦ ĐỀ 4. TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT

1 Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên tập $D(D \subset \mathbb{R})$ và $x_0 \in D$

1) x_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $(a;b) \subset D$ và $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của f.

2) x_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $(a;b) \subset D$ và $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f.

3) Nếu x_0 là điểm cực trị của f thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f

2 Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý: Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3 Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Định lí 1: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a;b) \setminus \{x_o\}$

1) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **âm** sang **dương** khi x đi qua x_0 thì f đạt **cực tiểu** tại x_0.

2) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **dương** sang **âm** khi x đi qua x_0 thì f đạt **cực đại** tại x_0.

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

1) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

2) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

*** Kiến thức cần nhớ:**

1) Khoảng cách giữa hai điểm A, B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2) Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3) Diện tích tam giác ABC:

$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

4) Tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ với $\vec{a} = \left(a_1;a_2\right);\vec{b} = \left(b_1;b_2\right)$.

Chú ý: $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \left(m+2\right)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực đại, cực tiểu.

A. $\left(-3;-2\right) \cup \left(-2;1\right)$ **B.** $\left(-3;-2\right)$ **C.** $-1 < m$ **D.** $\left(-2;1\right)$

Bài 2: [ĐHD12]: Tìm m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$.

A. $m = \frac{2}{3}$ **B.** $m = 5$ **C.** $-1 < m$ **D.** $m = 7$

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 sao cho: $\left|x_1 - x_2\right| \geq 8$.

A. $\left[\begin{array}{l} m \geq \frac{1+\sqrt{64}}{2} \\ m \leq \frac{1-\sqrt{64}}{2} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m \geq \frac{1+\sqrt{63}}{2} \\ m \leq \frac{1-\sqrt{63}}{2} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m \geq \frac{1+\sqrt{61}}{2} \\ m \leq \frac{1-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m \geq \frac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \leq \frac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$

Bài 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 sao cho: $x_1 + 2x_2 = 1$.

A. $m = \frac{2}{3}$ hoặc $m = 2$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -5$ **D.** $m = 2$

Bài 5: [ĐHB12] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

A. $m = 2$ **B.** $m = \pm 2$ **C.** $m = -2$ **D.** $m = \pm 3$

Bài 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành 1 tam giác có diện tích bằng 4.

A. $m = \sqrt[5]{16}$ **B.** $m = \sqrt[5]{17}$ **C.** $m = \sqrt[5]{18}$ **D.** $m = \sqrt[5]{19}$

Bài 7: [ĐHB07] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - 3m^2 - 1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

A. $m = -\frac{1}{2}$ **B.** $m = \pm\frac{1}{3}$ **C.** $m = \pm\frac{1}{2}$ **D.** $m = \frac{1}{2}$

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có cực đại, cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m = 4$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m = 0$ **B.** $-1 \le m < 0$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = -1$

Bài 10. **[ĐHB11]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

A. $m = 0$ **B.** $m = 2 - \sqrt{8}$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 2 \pm \sqrt{8}$

Bài 11. **[ĐHA12]** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m = 0$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 1$

Bài 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O.

A. $m = \frac{1}{2}$ **B.** $m = \frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{4}$ **D.** $m = \frac{1}{5}$

Bài 13. **(Đề minh họa môn Toán 2017).** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **D.** $m = 1$

Bài 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

A. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **B.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ **C.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ **D.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

Bài 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m = \sqrt[3]{3}$ **B.** $m = \sqrt[3]{9}$ **C.** $m = \sqrt[3]{13}$ **D.** $m = \sqrt[3]{14}$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Ta có $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$.

Khi đó y' là tam thức bậc hai có $\Delta' = -3(m^2+2m-3)$. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m^2 + 2m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-3;-2) \cup (-2;1)$$

Vậy $m \in (-3;-2) \cup (-2;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Bài 2:

Ta có $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1)$,

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $\Delta = 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$. (1)

x_1, x_2 là các nghiệm của $y'(x) = 0$ nên theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}.$$

Do đó: $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Bài 3:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 2mx + m$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right., (2)$$

Ghi chú của em

Ta có $\left|x_1 - x_2\right| \geq 8 \Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 \geq 64 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 \geq 64, (1)$.

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$

Thay vào (1) ta được:

$$(2m)^2 - 4m \geq 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 64 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \leq \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right., (3)$$

Kết hợp (2) và (3) ta được $\left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \leq \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán.

Chọn D.

Bài 4:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \end{cases} (*)$$

Theo định lí Viet và theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} & (1) \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} & (2) \\ x_1 + 2x_2 = 1 & (3). \end{cases}$$

Từ (1) và (3), ta có: $x_1 = \dfrac{3m-4}{m}, x_2 = \dfrac{2-m}{m}$.

Thế vào (2), ta được: $\left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right) = \dfrac{3(m-2)}{m} \quad (m \neq 0)$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{3} \\ m = 2 \end{array}\right. \text{(thỏa(*))}.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m = \dfrac{2}{3}$ hoặc $m = 2$.

Chọn A.

Bài 5.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x-2m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. (1)

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;3m^3)$, $B(2m;-m^3)$.

Ta có:

- $\overrightarrow{OA}(0;3m^3) \Rightarrow OA = 3|m^3|$. (2)
- Ta thấy $A \in Oy \Rightarrow OA \equiv Oy \Rightarrow d(B,OA) = d(B,Oy) = 2|m|$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot d(B;OA) = 3m^4$.

Do đó: $S_{OAB} = 48 \Leftrightarrow 3m^4 = 48 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (thỏa mãn (1)).

Vậy $m = \pm 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Bài 6.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m\ (*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương $m > 0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số:

$A(0;m^4+2m)$; $B(\sqrt{m};m^4-m^2+2m)$; $C(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m)$.

Gọi $H(0;m^4-m^2+2m)$ là trung điểm BC.

$AH = \sqrt{(-m^2)^2} = m^2$, $BC = \sqrt{(2\sqrt{m})^2} = 2\sqrt{m}$

Vì 3 điểm cực trị luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh A, nên

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}m^2 2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}$.

Vậy với $m = \sqrt[5]{16}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Bài 7.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2-1) = -3(x^2 - 2x - m^2 + 1)$.

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có: $\Delta' = m^2$, $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. (1)

Khi đó $y' = 0$ có các nghiệm là: $x = 1 \pm m \Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1-m;-2-2m^3)$ và $B(1+m;-2+2m^3)$.

Ghi chú của em

Ta có:

$\overrightarrow{OA}\left(1-m;-2-2m^3\right)\Rightarrow OA^2=\left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2$;

$\overrightarrow{OB}\left(1+m;-2+2m^3\right)\Rightarrow OB^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi:

$OA=OB\Leftrightarrow OA^2=OB^2$

$\Leftrightarrow \left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$

$\Leftrightarrow -4m+16m^3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C.

Bài 8. $D=\mathbb{R}$

- $y'=-3x^2+6mx;\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2m\end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với $m\neq 0$.

Hai điểm cực trị là $A\left(0;-3m-1\right)$; $B\left(2m;\ 4m^3-3m-1\right)$.

Trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I\left(m;\ 2m^3-3m-1\right)$.

Vectơ $\overrightarrow{AB}=(2m;4m^3)$; một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(8;-1)$.

Hai điểm cực đại, cực tiểu A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}I\in d\\ AB\perp d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+8(2m^3-3m-1)-74=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2.\ (t/m)$$

Chọn C.

Bài 9.

Ta xét hai trường hợp sau đây:

- $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$. Khi đó $y=x^2+\dfrac{3}{2}\Rightarrow$ Hàm số chỉ có cực tiểu ($x=0$) mà không có cực đại $\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- $m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm bậc 4 có

$$y'=4\left(m+1\right)x^3-2mx=4\left(m+1\right)x\left[x^2-\frac{m}{2\left(m+1\right)}\right].$$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi y' có đúng một nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này.

Ghi chú của em

Nghĩa là: $\begin{cases} 4(m+1) > 0 \\ \dfrac{m}{2(m+1)} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0$.

Kết hợp những giá trị m tìm được, ta có $-1 \le m < 0$.

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 10:

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x\left[x^2 - (m+1)\right]$.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$h(x) = x^2 - (m+1) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$. (*)

Khi đó, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{m+1} \\ x = \sqrt{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0;m) \\ B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right) \\ C\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right) \end{cases}$.

(Vì vai trò của B, C trong bài là như nhau nên ta cũng có thể giả sử: $B\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$).

Ta có: $\overrightarrow{OA}(0;m) \Rightarrow OA = |m|$; $\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m+1};0\right) \Rightarrow BC = 2\sqrt{m+1}$.

Do đó:

$OA = BC \Leftrightarrow |m| = 2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0, (\Delta' = 8)$

$\Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{8}$ (thỏa mãn (*)).

Vậy $m = 2 \pm \sqrt{8}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn D.

Bài 11:

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x\underbrace{\left[x^2 - (m+1)\right]}_{t(x)}$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi y' có 3 nghiệm phân biệt khi đó phương trình $t(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 nên:

$m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$. (*)

Khi đó, ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{m+1} \\ x = \sqrt{m+1} \end{cases}$.

Suy ra các điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0;m^2), B\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right), C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$.

Ta thấy $A \in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A. Do đó tam giác chỉ có thể vuông tại A.

Ghi chú của em

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{m+1};-(m+1)^2\right),\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{m+1};-(m+1)^2\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(m+1)^4-(m+1)$.

Tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow (m+1)^4-(m+1)=0 \Leftrightarrow (m+1)\left[(m+1)^3-1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ m+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$, kết hợp với điều kiện (*) ta có $m=0$.

Chọn A.

Bài 12:

$y'=x^3-2(3m+1)x=x\left(x^2-(6m+2)\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-(6m+2)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=6m+2(*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương $6m+2>0 \Leftrightarrow m>-\frac{1}{3}$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A(0;2m+2)$;

$B\left(\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1\right)$; $C\left(-\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1\right)$.

Theo công thức trọng tâm ta có:

$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_O \\ y_A+y_B+y_C=3y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0(t/m) \\ -18m^2-6m+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{3} \\ m=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Vậy với $m=\frac{1}{3}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn B.

Bài 13: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m(*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương $m>0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số:

$A(0;1)$; $B\left(\sqrt{m};3m^2+1\right)$; $C\left(-\sqrt{m};3m^2+1\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m};3m^2\right),\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m};3m^2\right)$

Vì 3 điểm cực trị của hàm trùng phương trên luôn tạo 1 tam giác cân tại A, nên tam giác ABC vuông tại A.

Ghi chú của em

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -m + 9m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} \end{array}\right.$

Vậy với $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn C.

Bài 14.

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m\left(*\right) \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương $m > 0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A\left(0;m^2 - m\right)$; $B\left(\sqrt{m};-m\right)$;$C\left(-\sqrt{m};-m\right)$.

$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m};-m^2\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m};-m^2\right)$

Theo bài ra ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-m + m^4}{\sqrt{m^4 + m}.\sqrt{m^4 + m}} = \frac{m^3 - 1}{m^3 + 1} = \cos 120^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^3 - 1}{m^3 + 1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3m^3 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{\pm 1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Vậy với $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn A.

Bài 15. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m\ (*) \end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = m^4 + 2m \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - m^2 + 2m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có một điểm cực đại là $A(0, m^4 + 2m)$ và hai điểm cực tiểu là $B(-\sqrt{m}, m^4 - m^2 + 2m); C(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$.

Các điểm A, B, C lập thành một tam giác đều $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB = AC \\ AB = BC \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m(m^3 - 3) = 0$.

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ $\quad (m > 0)$

Chọn A.

CHỦ ĐỀ 5. TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HAI HÀM SỐ GIAO NHAU THỎA MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT.

Để biện luận theo m về số giao điểm của hai hàm số và thỏa mãn các điều kiện về tính chất hình học phẳng Oxy thì ta làm các bước sau:

- Bước 1: Tập xác định.

- Bước 2: Phương trình hoành độ giao điểm và đưa về dạng: $f\left(x,m\right)=g\left(x,m\right)\Leftrightarrow F\left(x,m\right)=0$.

Sử dụng biệt thức Δ, hoặc đưa về phương trình tích để biện luận số giao điểm của hai hàm số.

- Bước 3: Dựa theo yêu cầu của đề bài mà ta sử dụng các công thức biến đổi của hình học phẳng như: Véc tơ, tích vô hướng, khoảng cách, hình chiếu, điểm đối xứng,...

- Bước 4: Giải và kết luận giá trị của tham số m.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{m-x}{x+2}\ (H_m)$ và đường thẳng $d:2x+2y-1=0$ giao nhau tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S=\dfrac{3}{8}$.

A. $m=3$ **B.** $m=\dfrac{1}{2}$ **C.** $m=2$ **D.** $m=1$

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x}{x-2}$ (H) và đường thẳng (d): $y=x+m$ giao nhau tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị sao cho khoảng cách giữa 2 điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

A. $m=4$ và $\sqrt{30}$ **B.** $m=\dfrac{1}{2}$ và $\sqrt{31}$ **C.** $m=0$ và $\sqrt{32}$ **D.** $m=-1$ và $\sqrt{33}$

Nhận xét: Đối các bài khoảng cách như bài 1 và 2, thì có cách nào tính khoảng cách AB nhanh nhất không?

Chúng ta khẳng định là có.

Thật vậy, ta có bài tổng quát: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và đường thẳng $y=mx+n,\left(m\neq 0\right)$. Gọi A, B là hai điểm mà đường thẳng cắt hàm số. Giả sử $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là 2 giao điểm, khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình: $f\left(x\right)=mx+n,\ \left(1\right)$

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left(m\left(x_1-x_2\right)\right)^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)(x_1-x_2)^2}$$
$$=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left((x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right)}=\frac{1}{m}\sqrt{\left(1+m^2\right)\Delta}.$$

Với Δ được tính từ pt (1).

+ Nếu AB nhỏ nhất thì Δ nhỏ nhất.

Ta có thể xét bài tập sau đây:

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (H) và đường thẳng $(d): y=2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau. Xác định m để đoạn AB có độ dài ngắn nhất.

A. $m=5$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=0$ **D.** $m=-1$

Bài 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ (H) và đường thẳng d: $y=2x+m$ giao nhau tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}$.

A. $m=4$ **B.** $m=3$ **C.** $m=0$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=10\\m=-2\end{array}\right.$

Bài 5: Tìm tất cả các giá trị thực của a và b sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ (C) và đường thẳng (d): $y=ax+b$ giao nhau tại hai điểm phân biệt, đối xứng nhau qua đường thẳng (Δ): $x-2y+3=0$.

A. $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=-2\\b=-3\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=-2\\b=-4\end{cases}$

Bài 6: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng (d): $y=mx+3$ giao nhau tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O. (O là gốc tọa độ)

A. $m=3\pm\sqrt{5}$ **B.** $m=3-\sqrt{5}$ **C.** $m=3+\sqrt{5}$ **D.** $m=2\pm\sqrt{5}$

Bài 7:

Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ (C) và đường thẳng $\Delta: y=-x+2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;2)$; B; C sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=3\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=3\end{array}\right.$

Bài 8: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\dfrac{2}{3}$ (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$.

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>4\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>1\end{array}\right.$

Bài 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m=11$ **B.** $m=10$ **C.** $m=9$ **D.** $m=8$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Hoành độ giao điểm A, B của d và (H_m) là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{-x+m}{x+2} = -x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2(m-1) = 0,\ x \neq -2 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác -2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 17 - 16m > 0 \\ 2.(-2)^2 - 2 + 2(m-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{17}{16} \\ m \neq -2 \end{cases}.$$

Ta có:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{2}.\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17 - 16m}.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d là $h = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}.h.AB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m} = \dfrac{3}{8} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$, (thỏa mãn).

Chọn A.

Bài 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x}{x-2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-4)x - 2m = 0, (1).$$

Để (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình hay (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 16 \\ -4 \neq 0 \end{cases} \forall m$ (2).

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là 2 giao điểm khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình (1).

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - m \\ x_1x_2 = -2m \end{cases}$ (3),

$y_1 = x_1 + m, y_2 = x_2 + m.$

Để A, B thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị thì A, B nằm khác phía đối với đt $x - 2 = 0$. A, B nằm khác phía đối với đt $x - 2 = 0$ khi và chỉ khi $(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0$ hay $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0$ (4) thay (3) vào (4) ta được $-4 < 0$ luôn đúng (5). Mặt khác ta lại có

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2}$ (6).

Thay (3) vào (6) ta được $AB = \sqrt{2m^2 + 32} \geq \sqrt{32}$ vậy $AB = \sqrt{32}$ nhỏ nhất khi $m = 0$ (7). Từ (1), (5), (7) ta có $m = 0$ và $AB = \sqrt{32}$ thoả mãn.

Chọn C.

Bài 3:

Để đường thẳng (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+1}{x-1} = 2x + m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m và $x_1 < 1 < x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = (x-1)(2x+m) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1 < 1 < x_2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0 \ (*) \\ x \neq 1 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < 1 < x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 + 16 > 0 \quad \forall m \\ f(1) = 2 + (m-3) - m - 1 = -2 < 0 \end{cases}$

Vậy với mọi giá trị của m thì đường thẳng $(d): y = 2x + m$ luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau.

Gọi $A(x_1; 2x_1 + m), B(x_2; 2x_2 + m)$ là hai giao điểm giữa (d) và (H). ($x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (*))

Ta có: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (2(x_2 - x_1))^2}$

$\sqrt{5(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{5\left((x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right)}$

Theo Vi-ét ta có $AB = \frac{1}{2}\sqrt{5\left[(m+1)^2 + 16\right]} \geq 2\sqrt{5}.$

$AB_{\min} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m = -1$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Vậy ta có thể tính theo công thức tính nhanh ở trên:

$AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1+2^2)\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{5\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{5\left((m+1)^2 + 16\right)} \to \min$

khi $\Delta \to \min$. Vậy $m = -1$.

Chọn D

Bài 4:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^2 + mx + m + 2 = 0, (x \neq -1)$ (1)

(d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m - 16 > 0(2) \\ x \neq -1 \end{cases}$

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là giao điểm giữa (d) và (H). Ta có x_1, x_2 là 2 nghiệm của PT(1).

Ghi chú của em

$$AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1+2^2)\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{5\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{5\left(m^2 - 8m - 16\right)} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Thỏa mãn (2).

Chọn D.

Bài 5.

Phương trình của (Δ) được viết lại: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Để giao điểm đối xứng qua (Δ), thì $(\Delta) \perp (d) \Leftrightarrow a.\frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$.

Suy ra đường thẳng *(d)*: $y = -2x + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa *(d)* và *(C)*:

$$\frac{x-1}{x+1} = -2x + b \Leftrightarrow 2x^2 - (b-3)x - (b+1) = 0. \qquad (1)$$

Để *(d)* cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt *A*, *B* khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 + 2b + 17 > 0 \Rightarrow \forall b \in \mathbb{R}.$$

Gọi *I* là trung điểm của *AB*, ta có

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{b-3}{4} \\ y_I = -2x_I + b = \dfrac{b+3}{2}. \end{cases}$$

Vì A, B đối xứng qua (Δ) nên trung điểm I thuộc vào đường thẳng (Δ), ta có:

$$x_1 - 2y_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{b-3}{4} - (b+3) + 3 = 0 \Leftrightarrow b = -1.$$

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A.

Bài 6.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x-1} = mx + 3, (x \neq 1) \Leftrightarrow mx^2 - (m-1)x - 4 = 0, (1).$$

(d) cắt đồ thị hàm số *(C)* tại *A*, *B* khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, nên:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} = mx + 3, (x \neq 1) \Leftrightarrow mx^2 - (m-1)x - 4 = 0, (1). \\ m.1^2 - (m-1).1 - 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -7 - 4\sqrt{3} \\ m > -7 + 4\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A.x_B + (mx_A + 3)(mx_B + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (m^2 + 1)(x_A.x_B) + 3m(x_A + x_B) + 9 = 0, (2).$

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{m-1}{m} \\ x_A.x_B = -\dfrac{4}{m} \end{cases}, (3)$

Thay (3) vào (2) ta được: $m^2 - 6m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \pm \sqrt{5}.$

Vậy với $m = 3 \pm \sqrt{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Bài 7:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với (Δ) là:

$x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2 = -x + 2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0.(1) \end{array}\right.$

Đường thẳng (Δ) cắt đồ thị hàm số (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2)$, B, C thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0, khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Gọi $B(x_1; y_1)$ và $C(x_2; y_2)$, trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (1);

$y_1 = -x_1 + 2$ và $y_1 = -x_2 + 2$

Ta có $h = d(M;(\Delta)) = \dfrac{|3 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = \dfrac{2S_{MBC}}{h} = \dfrac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$

Mà $BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 2\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right]$

$= 8(m^2 - 3m + 2)$

Suy ra $8(m^2 - 3m + 2) = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Bài 8:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2 = 0$$

Ghi chú của em

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2 + (1-3m)x - 3m - 2\right] = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + (1-3m)x - 3m - 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai ngiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} \Delta = (1-3m)^2 + 4(3m+2) > 0 \\ g(1) = -6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 + 2m + 3 > 0, \forall m \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0 \ (3).$$

Giả sử $x_3 = 1$; x_1, x_2 là nghiệm của (2).

Ta có: $x_1 + x_2 = 3m - 1$; $x_1x_2 = -3m - 2$. Khi đó:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 > 15$

$\Leftrightarrow (3m-1)^2 + 2(3m+2) - 14 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. \ (4)$

Từ (3) và (4) ta có giá trị cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Chọn B.

Bài 9:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ (*).

Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ thì x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình (*). Khi đó: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3$ (1)

Ta có:

x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = 2x_2$ (2)

Thế (2) vào (1) ta được: $x_2 = 1$, thay vào phương trình (*) ta được: $m = 11$.

Với $m = 11$: (*) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 11) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - 2\sqrt{3} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2.$$

Vậy $m = 11$ thỏa yêu cầu.

Chọn A.

CHỦ ĐỀ 6. TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ THỎA MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT.

Bài toán 1: *Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$:*

Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$

Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$.

Tính $y' = f'(x)$. *Suy ra* $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Bài toán 2: *Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ biết Δ* có hệ số góc k cho trước.

• ***Cách 1:*** *Tìm toạ độ tiếp điểm.*

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.

Δ có hệ số góc k $\Rightarrow f'(x_0) = k$ *(1)*

Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. *Từ đó viết phương trình của Δ.*

• ***Cách 2:*** Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $y = kx + m$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases}$ (*)

Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: *Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ* có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ *tạo với chiều dương trục hoành góc* α *thì* $k = \tan\alpha$

+ Δ *song song với đường thẳng d:* $y = ax + b$ *thì* $k = a$

+ Δ *vuông góc với đường thẳng d:* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *thì* $k = -\dfrac{1}{a}$

+ Δ *tạo với đường thẳng d:* $y = ax + b$ *một góc* α *thì* $\left|\dfrac{k - a}{1 + ka}\right| = \tan\alpha$

Bài toán 3: *Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ* đi qua *điểm* $A(x_A; y_A)$.

• ***Cách 1:*** *Tìm toạ độ tiếp điểm.*

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0)$ *(2)*

Giải phương trình (2), tìm được x_0. *Từ đó viết phương trình của Δ.*

• ***Cách 2:*** Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ *và có hệ số góc k:* $y - y_A = k.(x - x_A)$

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

Bài toán 4 Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1, 2, 3, … tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$

Giả sử d: ax + by +c = 0. $M(x_M; y_M) \in d$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k: $y = k(x - x_M) + y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$

– *Thế k từ (2) vào (1) ta được:* $f(x) = (x - x_M).f'(x) + y_M \quad (C)$

– *Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = Số nghiệm x của (C)*

Bài toán 5 Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị (C): y = f(x) và 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau

Gọi $M(x_M; y_M)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k: $y = k(x - x_M) + y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$

Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M).f'(x) + y_M \quad (C)$

Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) ⇔ (C) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau ⇔ $f'(x_1).f'(x_2) = -1$

Từ đó tìm được M.

Chú ý: *Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì* $\begin{cases} (C) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$

Bài toán 6 Tìm giá trị tham số mà tiếp tuyến của hàm số thỏa mãn các tính chất hình học Oxy

Ta sử dụng cách viết phương trình tiếp tuyến của các dạng trên

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$

Sử dụng các công thức cơ bản của hình học Oxy về công thức khoảng cách, độ dài, véc tơ…

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m^2 + 2m - 5$ (C) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $x + y + 7 = 0$ góc α, biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

A. $m \le -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{2}$.
B. $m \le -1$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{3}$.
C. $m \le -\dfrac{1}{3}$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{4}$.
D. $m \le -\dfrac{1}{5}$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{3}$.

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x + m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

A. $m = -1$
B. $m = -2$
C. $m = -3$
D. $m = -4$

Bài 3: Cho điểm $A(0; m)$, tìm tất cả các giá trị thực của m để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến tới hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục Ox.

A. $\begin{cases} -2 < m \\ m \ne 1 \end{cases}$
B. $\begin{cases} -\dfrac{2}{3} < m \\ m \ne 1 \end{cases}$
C. $\begin{cases} -\dfrac{2}{5} < m \\ m \ne 1 \end{cases}$
D. $\begin{cases} -\dfrac{2}{7} < m \\ m \ne 1 \end{cases}$

Bài 4: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x+2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = -4x$.

A. $M(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}), M(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2})$
B. $M(2; \dfrac{1}{5}), M(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2})$
C. $M(3; \dfrac{1}{4}), M(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2})$
D. $M(5; \dfrac{1}{3}), M(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2})$

Bài 5: (KSCL CHV) Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B để đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm của 2 tiệm cận.

A. $M\left(4; \dfrac{5}{2}\right)$ và $M(3;3)$.
B. $M\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ và $M(3;3)$.
C. $M(1; 1)$ và $M(3;3)$.
D. $M\left(5; \dfrac{7}{3}\right)$ và $M(3;3)$.

Bài 6: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}\left(C\right)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

A. $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

B. $M\left(0;-1\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

C. $M\left(2;\ 1\right), M\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

D. $M\left(0;-1\right), M\left(2;\ 1\right)$

Bài 7: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}\left(C\right)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B và có độ dài AB ngắn nhất.

A. $M\left(3;\ 3\right),\ M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

B. $M\left(3;\ 3\right),\ M\left(4;\dfrac{5}{2}\right)$.

C. $M\left(6;\ \dfrac{9}{4}\right),\ M\left(1;1\right)$.

D. $M\left(3;\ 3\right),\ M\left(1;1\right)$.

Bài 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x+1\left(C\right)$, đường thẳng $\left(d\right): y=mx+m+3$ giao nhau tại $A\left(-1;\ 3\right)$, B, C và tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

$y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến, phương trình tiếp tuyến $y = kx + b$. Suy ra tiếp tuyến có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (k;-1)$, đường thẳng d có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (1;1)$

Ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \frac{3}{2} \\ k_2 = \frac{2}{3} \end{array}\right..$$

Để hàm số (C) có tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu để bài thì ít nhất một trong hai phương trình: $y' = k_1$ (1) hoặc $y' = k_2$ (2) có nghiệm thực x.

Nghĩa là: $\left[\begin{array}{l} 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \frac{3}{2} \\ 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \frac{2}{3} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_1 \geq 0 \\ \Delta'_2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2 - 2m - 1 \geq 0 \\ 4m^2 - m - 3 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -\frac{1}{4}; m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq -\frac{3}{4}; m \geq 1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{4}$ hoặc $m \geq \frac{1}{2}$.

Vậy với $m \leq -\frac{1}{4}$ hoặc $m \geq \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A.

Bài 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{x-1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0 \quad (1) \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Để hàm số (C) và đường thẳng d giao nhau tại 2 điểm phân biệt A, B thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta = (m-3)^2 + 8(m+1) = (m+1)^2 + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ g(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số (C) và đường thẳng d luôn luôn giao nhau tại 2 điểm phân biệt A, B.

Gọi $x_1, x_2\left(x_1 \neq x_2\right)$ lần lượt là hoành độ của A và B thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Theo Vi-et: $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(3-m)(*)$, tiếp tuyến Δ_1, Δ_2 tại A, B của hàm số (C) có hệ số góc lần lượt là:

$k_1 = y'(x_1) = -\frac{2}{(x_1-1)^2}$ và $k_2 = y'(x_2) = -\frac{2}{(x_2-1)^2}$.

Theo đề bài: $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \Leftrightarrow -\frac{2}{(x_1-1)^2} = -\frac{2}{(x_2-1)^2}$

$\Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - 1 = x_2 - 1 \\ x_1 - 1 = -x_2 + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2, (L) \\ x_1 + x_2 = 2, (2) \end{array}\right.$

Thay $(*)$ vào (2): $\frac{1}{2}(3-m) = 2 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Bài 3:

Phương trình tiếp tuyến qua $A(0;m)$, có dạng $y = kx + m, (1)$.

Điều kiện có hai tiếp tuyến đi qua A:

$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} = kx + m & (2) \\ \dfrac{-3}{(x-1)^2} = k & (3) \end{cases}$ có hai nghiệm $x \neq 1$

Thay (3) vào (2) và rút gọn ta được:

$(m-1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2 = 0 \quad (4)$

Để (4) có 2 nghiệm $x \neq 1$ là: $\begin{cases} m \neq 1 \\ f(1) = -3 \neq 0 \\ \Delta' = 3m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -2 \end{cases}, (*)$

Gọi hoành độ tiếp điểm $x_1; x_2$ là nghiệm của (4), tung độ tiếp điểm là $y_1 = \frac{x_1+2}{x_1-1}, y_2 = \frac{x_2+2}{x_2-1}$.

Để hai tiếp điểm nằm khác phía của trục Ox là:

$y_1 . y_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-2)} < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{9m+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$.

So với điều kiện $(*)$, vậy $\begin{cases} -\frac{2}{3} < m \\ m \neq 1 \end{cases}$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 4:

Ta có: $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a-1}{2a+2}\right)\in(C),(a\neq -1)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M, ta có phương trình Δ:

$\Delta: y=f'(a)(x-a)+\dfrac{a-1}{2a+2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{(a+1)^2}(x-a)+\dfrac{a-1}{2(a+1)}$

Gọi $A=Ox\cap\Delta\Rightarrow A\left(-\dfrac{a^2-2a-1}{2};0\right)$

$B=Oy\cap\Delta\Rightarrow B\left(0;\dfrac{a^2-2a-1}{2(a+1)^2}\right)$. Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ $\Delta\, OAB$ có trọng tâm là: $G\left(-\dfrac{a^2-2a-1}{6};\dfrac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2}\right)$.

Do $G\in d$ nên: $-4.\dfrac{a^2-2a-1}{6}+\dfrac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2}=0\Leftrightarrow 4=\dfrac{1}{(a+1)^2}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+1=\dfrac{1}{2}\\ a+1=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{1}{2}\\ a=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

(vì $A, B\neq 0$ nên $a^2-2a-1\neq 0$).

Với $a=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2})$; với $a=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow M(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2})$.

Chọn A.

Bài 5:

Ta có: $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-2}\right)\in(C), a\neq 2$, $y'(a)=\dfrac{-1}{(a-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng :

$\Delta: y=\dfrac{-1}{(a-2)^2}(x-a)+\dfrac{2a-3}{a-2}$.

Toạ độ giao điểm A, B của (Δ) và hai tiệm cận là:

$A\left(2;\dfrac{2a-2}{a-2}\right);\quad B(2a-2;2)$

Ta thấy $\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2+2a-2}{2}=a=x_M\\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{2a-3}{a-2}=y_M\end{cases}$, suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác $I(2;\ 2)$ và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

Ghi chú của em

$S=\pi IM^2=\pi\left[(a-2)^2+\left(\frac{2a-3}{a-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}\right]\geq 2\pi$

(Theo Bđt Cô si)

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^2=\frac{1}{(a-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=3\end{array}\right.$

Do đó có hai điểm M cần tìm là $M(1;\ 1)$ và $M(3;3)$.

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 6:

Ta có $y'=\frac{3}{(x+1)^2}$.

Giả sử $M\left(a;\frac{2a-1}{a+1}\right)\in(C), a\neq -1$, thì tiếp tuyến tại M với (C) có phương trình: $y=\frac{3}{(a+1)^2}(x-a)+\frac{2a-1}{a+1}\Leftrightarrow$

$3(x-a)-(a+1)^2(y-2)-3(a+1)=0.$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là:

$$d=\frac{|3(-1-a)-3(a+1)|}{\sqrt{9+(a+1)^4}}=\frac{6|a+1|}{\sqrt{9+(a+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(a+1)^2}+(a+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy $\frac{9}{(a+1)^2}+(a+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\leq\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi:

$\frac{9}{(a+1)^2}=(a+1)^2\Leftrightarrow(a+1)^2=3\Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm M: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Chọn A.

Bài 7:

Ta có $y'=-\frac{1}{(x-2)^2}$.

Giả sử $M\left(a;\frac{2a-3}{a-2}\right)\in(C), a\neq 2$. Ta có: $y'(a)=-\frac{1}{(a-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình: $\Delta: y=-\frac{1}{(a-2)^2}(x-a)+\frac{2a-3}{a-2}$

Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\frac{2}{a-2}\right)$

Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2a-2\ ;2)$

Ta có: $AB^2=4\left[(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}\right]\geq 8$.

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=1 \\ a-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=1 \end{array}\right.$

Ghi chú của em

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;\ 3)$, $M(1;1)$.

Chọn D.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$x^3 - (m+3)x - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - m - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\ y=3 \\ x^2 - x - m - 2 = 0\ (*) \end{array}\right.$

Để hàm số (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1, nên:

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Giả sử $x_B; x_C$ là nghiệm của (*), hệ số góc của tiếp tuyến:

$k_B = 3x_B^2 - 3; k_C = 3x_C^2 - 3$.

Theo giả thiết:

$k_B.k_C = -1 \Leftrightarrow (3x_B^2 - 3)(3x_C^2 - 3) = -1 \Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

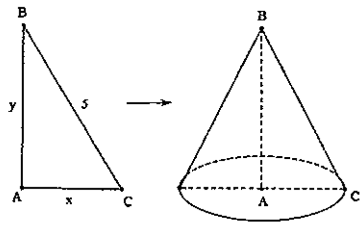
Vậy với $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG I

ĐỀ SỐ 1

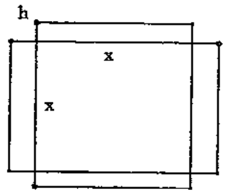
Bài 1. Cho tam giác vuông ABC có độ dài cạnh huyền bằng 5 (đơn vị độ dài). Người ta quay tam giác ABC quanh trục một cạnh góc vuông để sinh ra hình nón, với kích thước nào của tam giác ABC thì hình nón sinh ra có thể tích lớn nhất?



A. $x=5\sqrt{\frac{2}{3}}, y=\frac{5}{\sqrt{3}}$. **B.** $x=3, y=4$.

C. $x=\sqrt{10}, y=\sqrt{15}$. **D.** Kết quả khác.

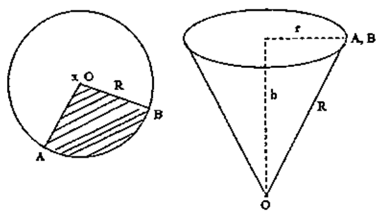
Bài 2. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình mẫu. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(cm)$, chiều cao là $h(cm)$ và có thể tích là $500(cm^3)$. Hãy tìm độ dài cạnh của hình vuông sao cho chiếc hộp được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất:



A. $5cm$. **B.** $10cm$.

C. $2cm$. **D.** $3cm$.

Bài 3. Huyền có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Huyền muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?



A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

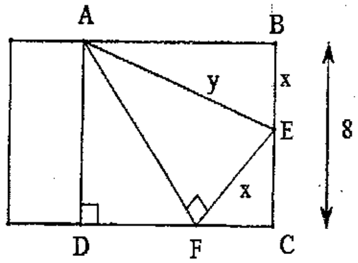
Bài 4. Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Zika, các chuyên gia sở y tế TP. HCM ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=15t^2-t^3$. Ta xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày bao nhiêu?

A. Ngày thứ 10. **B.** Ngày thứ 15. **C.** Ngày thứ 20. **D.** Ngày thứ 25.

Bài 5. Có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh a. Người ta cần làm một cái trại có đáy là hình thang $ABCM$ với điểm M thuộc cạnh AD và $AM=x\ (0\le x\le a)$. Dựng cái cột vuông góc với $mp(ABCD)$ tại A, giả sử đỉnh cột là S, chiều cao cột là $y,(y>0)$. Nếu $x^2+y^2=a^2$, giá trị lớn nhất của thể tích trại dạng chóp $S.ABCM$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$.

Bài 6: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài $12cm$ và chiều rộng $8cm$. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

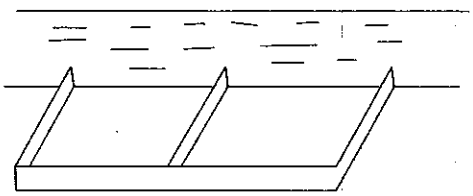


A. $6\sqrt{5}$.   B. $6\sqrt{2}$.   C. 6.   D. $6\sqrt{3}$.

Bài 7: Cần phải đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a. Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k\dfrac{\sin\alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).

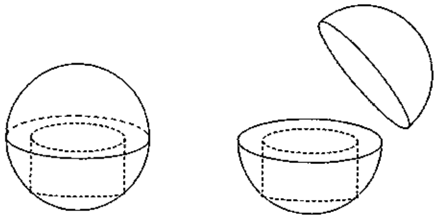
A. $h = \dfrac{3a}{2}$.   B. $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.   C. $h = \dfrac{a}{2}$.   D. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8: Một người nông dân có 15000000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được.



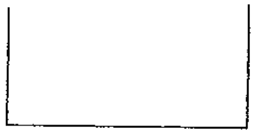
A. $6250\,m^2$.   B. $1250\,m^2$.   C. $3125\,m^2$.   D. $50\,m^2$.

Bài 9: Công ty mĩ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng, như hình vẽ (hình ảnh chỉ mang tính chất minh họa). Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3}\,cm$. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



A. $54\pi\, cm^3$ **B.** $18\pi\, cm^3$. **C.** $108\pi\, cm^3$ **D.** $45\pi\, cm^3$.

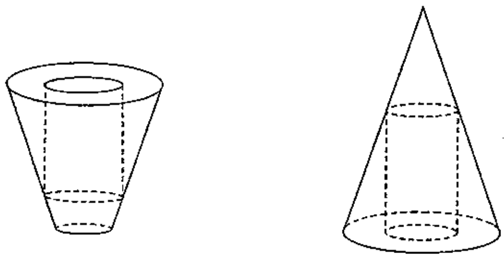
Bài 10: Một cái mương được gọi là có dạng "Thủy động học" nếu với diện tích thiết diện ngang xác định thì chiều dài đường biên giới hạn là nhỏ nhất. Người ta cần xây một cái mương dẫn nước với thiết diện ngang là hình chữ nhật có $2m^2$. Hãy xác định kích thước của mương dẫn nước trên để mương có dạng "Thủy động học"?



A. $1m$ và $2m$. **B.** $\frac{1}{2}m$ và $4m$.

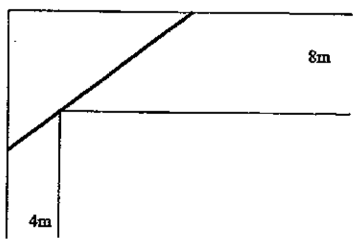
C. $\frac{3}{2}m$ và $\frac{4}{3}m$. **D.** $\frac{2}{3}m$ và $3m$.

Bài 11: Khi sản xuất hộp mì tôm, các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống nho nhỏ ở dưới đáy hộp để nước chảy xuống dưới và ngấm vào thớ mì, giúp mì chín. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của một hộp mì tôm (hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa). Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì tôm có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao $9cm$ và bán kính đáy $6cm$. Nhà sản xuất đang tìm cách để sao cho thớ mì tôm có thể tích lớn nhất trong hộp với mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó?



A. $V = 36\pi$ **B.** $V = 54\pi$ **C.** $V = 48\pi$ **D.** $V = \frac{81}{2}\pi$

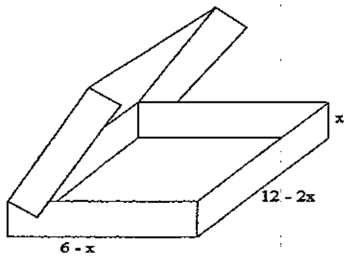
Bài 12: Một cái ống có đường kính không đáng kể được mang từ một hẻm $8m$ sang một cái hẻm $4m$ (hình vẽ). Hỏi chiều dài dài nhất của cái ống là bao nhiêu?



A. $12\sqrt{2}$. **B.** $4\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$.

C. $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{3}{2}}$. **D.** $4\left(1+\sqrt[3]{2^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Bài 13: Một hộp đựng chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hộp được rải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới là chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị là V_0. Tìm V_0.



A. 48 đvtt. **B.** 16 đvtt. **C.** 64 vtt. **D.** $\frac{64}{3}$ đvtt.

Bài 14: Một nhà địa chất đang ở vị trí A trong sa mạc, cách con đường thẳng $10km(AN = 10km)$. Trên con đường thì xe của nhà địa chất có thể chạy với vận tốc $50km/h$ nhưng trên sa mạc thì nó chỉ chạy được với vận tốc $30km/h$. Nhà địa chất muốn đến một trạm xăng ở vị trí P để tiếp thêm nhiên liệu ở vị trí xuôi theo đường $25km(NP = 25km)$. Tìm thời gian ngắn nhất để nhà địa chất đến được vị trí trạm xăng P.

A. 44 phút. **B.** 45 phút. **C.** 46 phút. **D.** 47 phút.

Bài 15: Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800m$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

A. $200m \times 200m$. **B.** $300m \times 100m$. **C.** $250m \times 150m$. **D.** Chọn khác.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

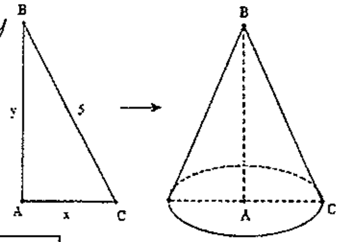
▶ *Ghi chú của em*

Bài 1:

$V_n = \frac{1}{3}.S_d.h = \frac{1}{3}.\pi x^2.y = \frac{1}{3}.\pi(25-y^2).y$

$f(y) = (25-y^2)y = -y^3 + 25y$

$f'(y) = -3y^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{\sqrt{3}}$



Bảng biến thiên

y	0	$\frac{5}{\sqrt{3}}$	5
$f'(y)$	$+$		$-$
$f(y)$	↗	*max*	↘

Vậy $x = 5\sqrt{\frac{2}{3}}, y = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Chọn A.

Bài 2:

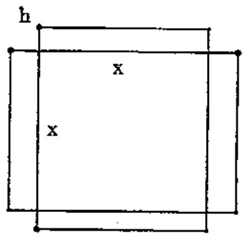
$V = x^2.h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}$

$S = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2000}{x}$

$f(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} \quad \left(x \in (0;10\sqrt{5})\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

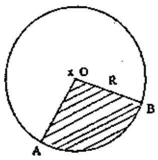


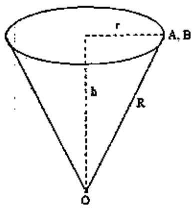
x	0	10	$10\sqrt{5}$
$f(x)$	‖ ↘	300	↗ 589

$\Rightarrow x = 10$ (thỏa mãn).

Chọn B.

Bài 3:





$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$$

$$R^2 = h^2 + r^2 = const \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.h(R^2 - h^2) = f(h)$$

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3; \quad f'(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 - \pi h^2$$

$$\Rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}.R}{\sqrt{3}}$$

Chu vi đường tròn đáy hình nón là $2\pi r = \dfrac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$

Ta có:

$$2\pi \longrightarrow 2\pi R$$

$$x \longleftarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi R \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

Chọn A.

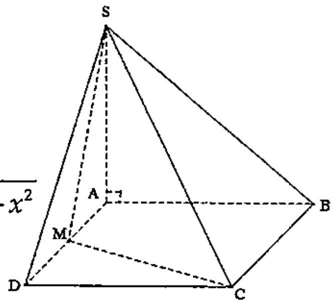
Bài 4:

$$f(t) = 15t^2 - t^3$$

$$f'(t) = 30t - 3t^2 = -3(t-5)^2 + 75 \le 75$$

$$f'(t)_{max} = 75 \Leftrightarrow t = 5$$

Bài 5:



$$AM = x \Rightarrow DM = a - x$$

$$S_{ABCM} = a^2 - \frac{1}{2}(a-x)a = \frac{1}{2}a(a+x)$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCM} = \frac{1}{6}a(a+x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

Xét hàm số:

$$f(x) = a(a+x)\sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0;a]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a \\ x = \dfrac{a}{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x		0		$\frac{a}{2}$		a	
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$			$\nearrow$	max	$\searrow$		

$$\Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ABCM} = \frac{a\sqrt[3]{3}}{8}$$

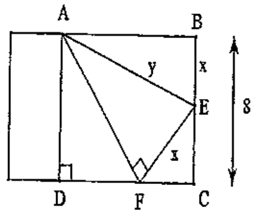
Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 6:

$EF = x, EC = 8 - x$

$$\Rightarrow FC = \sqrt{x^2 - (8-x)^2}$$
$$= \sqrt{16x - 64}$$



$$\Delta ADF \sim \Delta FCE(g.g) \Rightarrow \frac{EF}{AF} = \frac{CF}{AD}$$

$$AF = \frac{EF.AD}{FC} = \frac{8x}{\sqrt{16x-64}}$$

$$y = AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\frac{64x^2}{16x-64} + x^2} = \sqrt{\frac{16x^3}{16x-64}}$$

$$f(x) = \frac{16x^3}{16x-64}, \quad x \in (0;8)$$

$$f'(x) = \frac{48x^2(16x-64) - 16.16x^3}{(16x-64)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 768x^3 - 3072x^2 - 256x^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 512x^3 - 3072x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

BBT:

x	0		6		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	108	$\nearrow$	

$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y_{\min} = \sqrt{f_{\min}} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

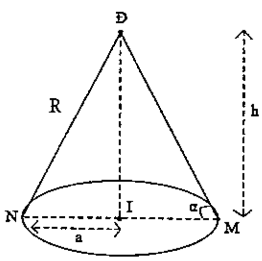
Chọn D.

Bài 7:

$R^2 - a^2 + h^2$ (Định lý Py-ta-go)

$$\sin\alpha = \frac{h}{R} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\Rightarrow C = k\frac{\sin\alpha}{R^2} = k\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}\left(a^2+h^2\right)}$$



Xét hàm $f(h) = \dfrac{h}{\left(\sqrt{a^2+h^2}\right)^3} \quad (h > 0)$

Ghi chú của em

$$f'(h)=\frac{\sqrt{\left(h^2+a^2\right)^3}-2h^2.\frac{3}{2}.\sqrt{a^2+h^2}}{\left(a^2+h^2\right)^3}.$$

$$f'(h)=0\Leftrightarrow\sqrt{\left(h^2+a^2\right)^3}=3.h^2.\sqrt{a^2+h^2}\Leftrightarrow h^2+a^2=3h^2\Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

BBT:

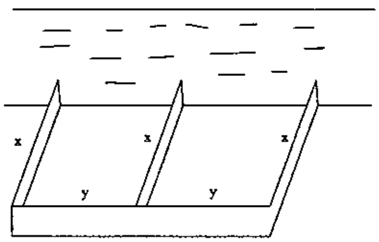
h	0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(h)$		$+$		$-$	
$f(h)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

$$f(h)_{\max}\Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow C=k.f(h)_{\max}\Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Chọn B.

Bài 8:

Phân tích ta đặt các kích thước của hàng rào như hình vẽ:



Từ đề bài ban đầu ta có được mối quan hệ sau:

Do bác nông dân trả $15\,000\,000$ đồng để chi trả cho nguyên vật liệu và đã biết giá thành từng mặt nên ta có mối quan hệ:

$3x.50\,000+2y.60\,000=15\,000\,000$

$\Leftrightarrow 15x+12y=1500$

$\Leftrightarrow y=\frac{1500-15x}{12}=\frac{500-5x}{4}$

Diện tích của khu vườn sau khi đã rào được tính bằng công thức:

$$f(x)=2xy=2x.\frac{500-5x}{4}=\frac{1}{2}\left(-5x^2+500x\right)$$

Cách 1: Xét hàm số trên một khoảng, vẽ bảng biến thiên và kết luận GTLN:

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\left(-5x^2+500x\right)$ trên $(0;100)$

$f'(x)=\frac{1}{2}(-10x+500)$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=50$

Ta có bảng biến thiên:

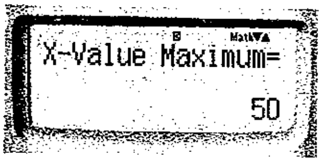
x	0		50		100
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	6250	↘	

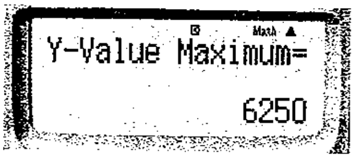
Cách 2: Nhẩm nhanh như sau: Ta biết rằng $A-g^2(x)\le A$ với mọi x, nên ta có thể nhẩm nhanh được:

$$f(x)=\frac{5}{2}\left(-x^2+100x\right)=\frac{5}{2}\left(-x^2+2.50x-2500+2500\right)$$

$$=\frac{5}{2}.\left[2500-(x-50)^2\right]\le 6250$$

Hoặc bấm máy tính phần giải phương trình bậc hai và ấn bằng nhiều lần máy sẽ hiện như sau:



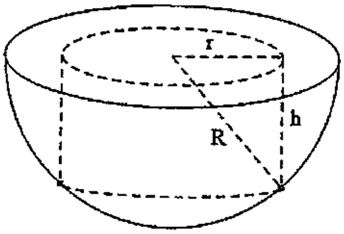


Vậy ta có kết quả của bài toán.

Chọn A.

Bài 9

Phân tích: Đây là một Bài thực tế dựa trên ứng dụng: khối trụ nội tiếp nửa khối cầu. Ta có mặt cắt của nửa khối cầu đựng mĩ phẩm với các kích thước được thể hiện trong hình vẽ sau:



Ý tưởng của bài này dựa trên kiến thức chúng ta đã học là tìm GTLN – GTNN của hàm số một biến trên 1 khoảng (đoạn). Ở đây có hai biến đó là r và h. Do đó ta sẽ tìm cách để đưa về một biến, đưa biến này theo biến kia. Ở đây tôi sẽ đưa r theo h.

Ta nhận thấy theo định lý Pytago thì $r^2=R^2-h^2$

Khi đó $V_{\text{trụ}}=B.h=\pi r^2.h=\pi\left(R^2-h^2\right).h=\pi\left(-h^3+R^2.h\right)$

Để thể tích khối trụ lớn nhất thì $f(h)=-h^3+R^2.h$ có GTLN trên $(0;R)$.

$$f'(h)=-3h^2+R^2=0\Leftrightarrow h=\frac{R}{\sqrt{3}}=3$$

Ta có bảng biến thiên (dĩ nhiên trong khi làm bài thi trắc nghiệm, bạn đọc không nhất thiết phải vẽ bảng biến thiên làm gì. Tuy nhiên tôi vẽ ở đây để giải thích rõ cho bạn đọc hiểu.)

Ghi chú của em

h	0		$\frac{R}{\sqrt{3}}$		R
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		↗	$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$	↘	

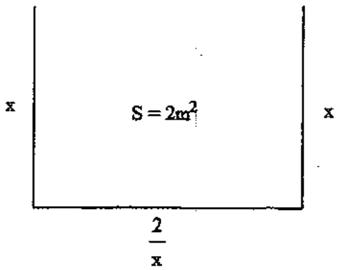
Mà $f\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)=f(3)=-3^3+\left(3\sqrt{3}\right)^2.3=54$. Vậy $V_{\max}=54\pi$.

Chọn A.

Bài 10:

Cách 1:

Chiều dài đường biên là:



$2x+\dfrac{2}{x}=f(x)\qquad \left(x\in(0;2)\right)$

$f'(x)=2-\dfrac{2}{x^2}$

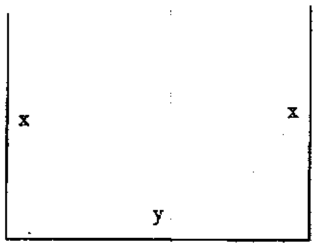
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	4	↗	

Vậy kích thước mương là $1m$ và $2m$.

Cách 2:

Diện tích thiết diện ngang: $x.y=2$



Chiều dài đường biên:

$x+x+y=2x+y\geq 2\sqrt{2xy}=4$

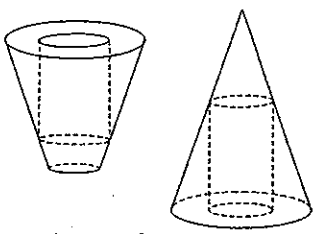
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases}xy=2\\2x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.

Chọn A.

Bài 11:

Cách 1:



Gọi độ dài $IA=x\ \ (0<x<6)$. Khi đó: $r=6-x$;

Gọi $KI=R$

$\Delta ABO\sim\Delta AKI\Rightarrow\dfrac{KI}{BO}=\dfrac{AI}{AO}\Leftrightarrow\dfrac{R}{BO}=\dfrac{x}{AO}\Rightarrow R=\dfrac{9x}{6}$

Ghi chú của em

Suy ra $V_{trụ} = \pi r^2 R = \pi.(6-x)^2.\dfrac{9x}{6}$

Hình trụ có thể tích lớn nhất khi hàm số:

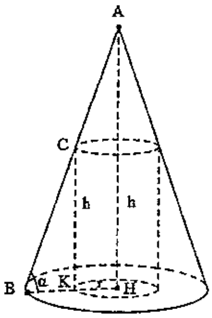
$y = (6-x)^2.\dfrac{9x}{6} = \dfrac{3}{2}x^3 - 18x^2 + 54x$ đạt GTLN

$y' = \dfrac{9}{2}x^2 - 36x + 54$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{2}x^2 - 36x + 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		2		6	
y'		+	0	−	0	
y		↗	48	↘		



Vậy $x = 2$ suy ra $V = 48\pi$.

Cách 2:

Đặt $\begin{cases} BK = x & (0 < x < 6) \\ \widehat{ABH} = \alpha & (0 < \alpha < 90^0) \end{cases}$

$h = BK.\tan\alpha = \dfrac{9x}{6}$

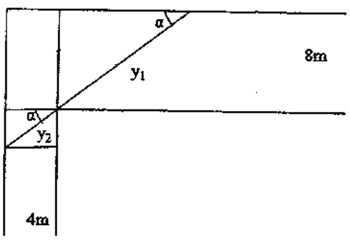
$r = 6 - x$

$\Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi.(6-x)^2.\dfrac{9x}{6} = \pi.\dfrac{3}{4}.(6-x)(6-x).2x \le \dfrac{3\pi}{4}.\left(\dfrac{12}{3}\right)^3 = 48\pi$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$

Chọn C.

Bài 12:



$8 = y_1.\sin\alpha$

$4 = y_2.\cos\alpha$

$y_1 + y_2 = y = \dfrac{8}{\sin\alpha} + \dfrac{4}{\cos\alpha}$

$y' = \dfrac{-8\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{-8\cos^3\alpha + 4\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$

$y' = 0 \Leftrightarrow -8\cos^3\alpha + 4\sin^3\alpha = 0 \Leftrightarrow \left(\tan\alpha\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 0,899$

$y_{\max} = \dfrac{8}{\sin\alpha} + \dfrac{4}{\cos\alpha} = 16,64.$

Chọn D.

Bài 13:

Thể tích của hộp: $V_h = (6-x).(12-2x)x$

$\Rightarrow V_0 = \frac{3}{4}.(6-x).(12-2x).x = \frac{3}{4}.(6-x).(6-x).2x$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\frac{3}{4}.(6-x).(6-x).2x \le \frac{3}{4}.\left(\frac{12}{3}\right)^3 = 48$.

Cách 2:

Thể tích của hộp: $V_h = (6-x).(12-2x)x = 2x(6-x)^2$

Thể tích phần chocolate nguyên chất:

$f(x) = V_0 = \frac{3}{4}V = \frac{3}{2}x(6-x)^2$

$f'(x) = \frac{3}{2}\left[(6-x)^2 - 2x(6-x)\right] = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \end{array}\right.$

$V_0(6) = 0$; $V_0(2) = 48$ $\left(V_0(2) > V_0(6)\right)$

Vậy thể tích phần chocolate lớn nhất: $V_0 = 48$ khi $x = x_0 = 2$

Chọn A.

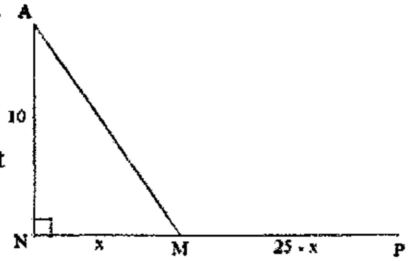
Bài 14:

Gọi đoạn NM là $x \Rightarrow MP = 25x$

ΔANM vuông tại:

$N \Rightarrow AM = \sqrt{10^2 + x^2}$

Khi đó thời gian để nhà địa chất đến trạm xăng là:



$T = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{25-x}{50}$

Thời gian T ngắn nhất khi hàm số $y = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{25-x}{50}$ đạt GTNN

$y' = \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 10^2}}{150.\sqrt{x^2 + 10^2}}$

$y' = 0 \Rightarrow 5x - 3\sqrt{x^2 + 10^2} = 0 \Leftrightarrow x = 7,5$

Bảng biến thiên

x		0		7,5		25	
y'			$-$	0	$+$		
y			$\searrow$	$\frac{23}{30}$	$\nearrow$		

Vậy $T_{\min} = \frac{23}{30}(h) = 46$ phút.

Chọn C.

Ghi chú của em

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là: $x(m),\ y(m)\ \ (x,y>0)$

Diện tích miếng đất: $S=xy$

Theo đề bài thì $2(x+y)=800$ hay $y=400-x$.

Do đó $S=x(400-x)=-x^2+400x$ với $x>0$

Đạo hàm: $S'(x)=-2x+400$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow x=200$

Lập bảng biến thiên ta được: $S_{max}=40000$ khi $x=200 \Rightarrow y=200$

Kết luận: kích thước của miếng đất hình chữ nhật là $200m\times 200m$ (là hình vuông)

Lưu ý: có thể đánh giá bằng BĐT Cauchy.

Chọn A.

Ghi chú của em

ĐỀ SỐ 2

Bài 1: Một kiến trúc sư muốn thiết kế một kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng $6m$. Để tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. Hãy tính chiều cao của kim tự tháp đó?

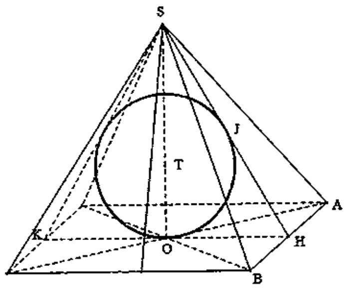
A. $12m$. **B.** $18m$. **C.** $36m$. **D.** $24m$.

Bài 2: Cho hình trụ (T) có bán kính và chiều cao thay đổi; (T) có hai đường tròn đáy (O) và (O') sao cho có một hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong hình trụ (T) (trong đó A,B thuộc đường tròn (O) và C,D thuộc đường tròn (O')). Biết hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng $400\,cm^2$. Thể tích lớn nhất V_{max} của hình trụ (T) là?

A. $V_{max} = \dfrac{8000\pi\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V_{max} = \dfrac{8000\pi\sqrt{3}}{9}$.

C. $V_{max} = \dfrac{8000\pi\sqrt{6}}{9}$. **D.** $V_{max} = \dfrac{8000\pi\sqrt{3}}{3}$.

Bài 3: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\,km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7\,km$. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $4\,km/h$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6\,km/h$ (xem hình vẽ ở dưới đây). Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.



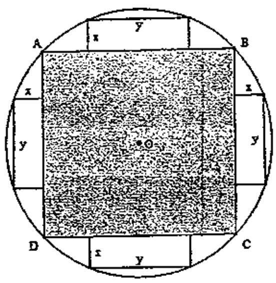
A. $\dfrac{\sqrt{74}}{4}$. **B.** $\dfrac{29}{12}$.

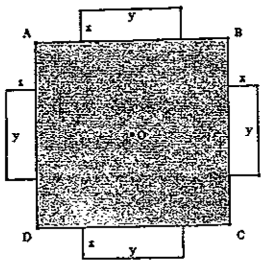
C. $\sqrt{29}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Bài 4: Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính là $5m$. Toàn bộ tòa nhà đó được trang bị hệ thống điều hòa làm mát do vậy để tiết kiệm điện người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho có thể tích nhỏ nhất. Tìm chiều cao tòa nhà này.

A. $SO = 20m$. **B.** $SO = 19m$. **C.** $SO = 18m$. **D.** $SO = 17m$.

Bài 5: Từ một mảnh bìa hình tròn bán tâm O, kính $R = 4cm$, người ta cắt ra một hình gồm 1 hình vuông và 4 hình chữ nhật bằng nhau. Các hình chữ nhật có kích thước là $x(cm)$ và $y(cm)$. Tìm x,y để diện tích hình được cắt ra là lớn nhất.





Bài 6: Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$ mỗi chiếc. Hỏi thùng phải có kích thước thế nào để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $R = 1m, h = 2m$ **B.** $R = 1m, h = 3m$ **C.** $R = 3m, h = 2m$ **D.** $R = 1m, h = 4m$

Bài 7: Một nhà máy dự định sản xuất một loại thùng hình trụ có chiều cao là h, bán kính đáy là r. Biết rằng chi phí sản xuất cho mỗi thùng như vậy được xác định theo công thức: $C = 5\pi r^2 + 60\pi rh$. Hãy xác định r, h sao cho thùng có thể tích mong muốn là $1125\,cm^3$ với chi phí sản xuất là thấp nhất?

A. $r = \dfrac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h = \dfrac{5}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$ **B.** $r = \dfrac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h = \dfrac{6}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$

C. $r = \dfrac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h = \dfrac{7}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$ **D.** $r = \dfrac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h = \dfrac{8}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$

Bài 8: Một sợi dây cứng dài $1m$ được cắt thành 2 đoạn, 1 đoạn được cuộn thành hình tròn, đoạn kia thành hình vuông. Tìm độ dài mỗi đoạn nếu tổng diện tích hình tròn và hình vuông là nhỏ nhất?

A. Cuộn thành hình tròn: $x = \dfrac{\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông: $\dfrac{4}{4+\pi}m$

B. Cuộn thành hình tròn: $x = \dfrac{\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông: $\dfrac{5}{4+\pi}m$

C. Cuộn thành hình tròn: $x = \dfrac{\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông: $\dfrac{6}{4+\pi}m$

D. Cuộn thành hình tròn: $x = \dfrac{2\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông: $\dfrac{4}{4+\pi}m$

Bài 9: Một chuyến xe bus có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu 1 chuyến xe chở được x hành khách thì giá cho mỗi hành khách $\left(3 - \dfrac{x}{40}\right)^2 \$$. Tính số hành khách trên mỗi chuyến để thu được trên mỗi chuyến lợi nhuận lớn nhất?

A. 40 hành khách **B.** 45 hành khách **C.** 50 hành khách **D.** 55 hành khách

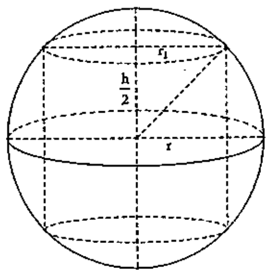
Bài 10: Người ta muốn làm một cái hình hộp chữ nhật không có nắp có chiều dài đáy gấp đôi chiều rộng và có thể tích $10cm^3$. Giả sử giá tiền vật liệu làm đáy thùng là 10.000 đồng/m^2 và vật liệu làm mặt bên là 5.000 đồng/m^2. Hãy xác định kích thước của thùng để chi phí của thùng nhỏ nhất.

A. Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$ rộng là: $\sqrt[3]{(15/4)}$ cao là: $y = 5/\sqrt[3]{(15/4)}$.

B. Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$ rộng là: $3\sqrt[3]{(15/4)}$ cao là: $y = 6/\sqrt[3]{(15/4)}$.

C. Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$ rộng là: $\sqrt[3]{(15/4)}$ cao là: $y = 7/\sqrt[3]{(15/4)}$.

D. Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$ rộng là: $4\sqrt[3]{(15/4)}$ cao là: $y = 8/\sqrt[3]{(15/4)}$.

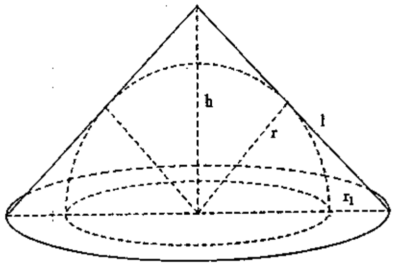


Bài 11: Cho hình trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính r. Xác định chiều cao và bán kính để hình trụ có thể tích lớn nhất.

A. $h = \dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$; $r_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}r$ **B.** $h = \dfrac{3\sqrt{3}r}{3}$; $r_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}r$

C. $h = \dfrac{2\sqrt{3}r}{5}$; $r_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{5}r$ **D.** $h = \dfrac{3\sqrt{3}r}{3}$; $r_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}r$

Bài 12: Cho nửa hình cầu bán kính r không đổi. Một hình nón có chiều cao h, bán kính đáy là r_1. Hãy xác định h và r_1 để diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất biết rằng: mặt ngoài của hình nón tiếp xúc của mặt cầu và 2 đường tròn đáy là đồng tâm và cùng thuộc 1 mặt phẳng.



A. $r_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}r \Rightarrow h = \sqrt{3}r$

B. $r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r \Rightarrow h = \sqrt{5}r$

C. $r_1 = \dfrac{\sqrt{7}}{2}r \Rightarrow h = \sqrt{5}r$

D. $r_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r \Rightarrow h = \sqrt{5}r$

Bài 13: Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy hình vuông không nắp có thể tích là $4l$. Tìm kích thước của thùng để lượng vàng dùng mạ là ít nhất? Giả sử độ dày $d\,mm$ của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau.

A. Cạnh đáy hộp $x = 2$, chiều cao hộp $h = 1$. **B.** Cạnh đáy hộp $x = 3$, chiều cao hộp $h = 2$.

C. Cạnh đáy hộp $x = 1$, chiều cao hộp $h = 1$. **D.** Cạnh đáy hộp $x = 3$, chiều cao hộp $h = 3$.

Bài 14: Giả sử một hãng hàng không vận chuyển 8.000 lượt hành khách mỗi tháng với giá vé 1 triệu đồng một lượt. Hãng hàng không muốn tăng giá vé, tuy nhiên bộ phận nghiên cứu thị trường cho biết cứ tăng giá vé thêm 20 nghìn đồng thì lượng khách hàng giảm đi 100 người. Xác định giá vé thích hợp để doanh thu của hãng đạt lợi nhuận cao nhất.

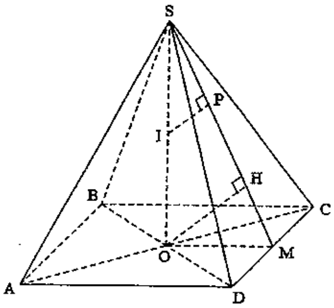
Bài 15: Khi xây nhà mới chủ nhà muốn xây một bể nước sạch bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài d gấp hai lần chiều rộng r và không có nắp, chiều cao h và có thể tích $\dfrac{4m^3}{3}$. Khi đó kích thước của hồ nước sao cho chi phí thấp nhất là:

A. $r = 1, d = 2, h = \dfrac{2}{3}$. **B.** $r = \dfrac{1}{3}, d = \dfrac{2}{3}, h = 6$.

C. $r = \dfrac{1}{2}, d = 1, h = \dfrac{8}{3}$. **D.** Một kết quả khác.

Ghi chú của em

Bài 1



Theo định lý Ta-lét:

$$\frac{SI}{SO}=\frac{IP}{OH}\Leftrightarrow\frac{h-6}{h}=\frac{6}{OH}$$

$$\Leftrightarrow OH=\frac{6h}{h-6},\quad SO=h,\quad OM=\frac{a}{2}$$

Mặt khác:

$$OH=\frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}\Leftrightarrow\frac{6h}{h-6}=\frac{ah}{2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow a(h-6)=12\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\Leftrightarrow a^2(h^2-12h+36)=144\left(h^2+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{144h^2}{h^2-12h}=\frac{144h}{h-12}$$

$$V=\frac{1}{3}.\frac{144h}{h-12}.h$$

Xét $f(h)=\dfrac{h^2}{h-12}$;

$$f'(h)=\frac{h(h-24)}{(h-12)^2}\Rightarrow f'(h)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h=0\\h=24\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

h	0		24		$+\infty$
$f'(h)$		$-$	0	$+$	
$f(h)$	$\searrow$		min		$\nearrow$

Vậy $h=24$ để $V_{\min}$.

Chọn D.

Ghi chú của em

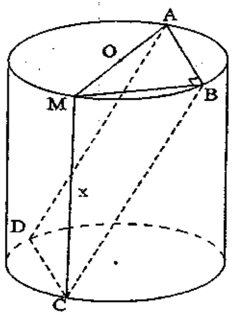
Bài 2:

Kẻ $BM \perp AB$ và cắt (O) tại M, nối MC.

Khi đó: $OA = OM = r,\ MC = h$

Hình vuông $ABCD$ có:

$S = 400\,cm^2 \Rightarrow AB = BC = 20\,cm$



Gọi chiều cao hình trụ:

$(T): MC = h = x \qquad (0 < x < 20)$

$\Rightarrow MB^2 = 20^2 - x^2$

$\Rightarrow AM^2 = 20^2 + 20^2 - x^2 = 800 - x^2$

Suy ra $MO^2 = r^2 = \dfrac{800 - x^2}{4}$

Ta có: $V_{(T)} = \pi.r^2.h = \pi.\dfrac{1}{4}\left(800 - x^2\right).x$

$V_{(T)}$ lớn nhất khi hàm số $y = \left(800 - x^2\right).x$ đạt GTLN

$y' = -3x^2 + 800\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 800 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{20\sqrt{6}}{3}$		20
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\frac{8000\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	

Vậy $V_{(T)\max} = \dfrac{8000\sqrt{6}}{9}$.

Chọn C.

Bài 3:

Gọi độ dài đoạn BM là $x\ \ (0 < x < 7)$

Khi đó ta có: $MC = 7 - x\ ;\ AM = \sqrt{x^2 + 5^2}$

Suy ra thời gian để người canh hải đăng đến kho là: $T = \dfrac{\sqrt{x^2 + 5^2}}{4} + \dfrac{7 - x}{6}$

Người canh hải đăng đến kho nhanh nhất khi T nhỏ nhất, suy ra hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 5^2}}{4} + \dfrac{7 - x}{6}$ đạt GTNN

$y' = \dfrac{6x - 4\sqrt{x^2 + 5^2}}{24\sqrt{x^2 + 5^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x - 4\sqrt{x^2 + 5^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$

Ghi chú của em

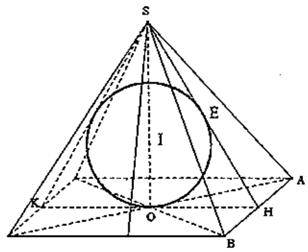
Bảng biến thiên:

x	0	$2\sqrt{5}$	7
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	$y_{\min}$	$\nearrow$

Vậy độ dài $BM = 2\sqrt{5}.$

Chọn D.

Bài 4:

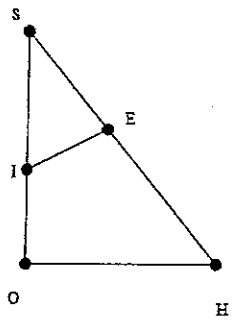


Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp, mặt cầu tiếp xúc với mặt (SAB) tại E, suy ra E thuộc SH.

Đặt $SO = x$, xét hai tam giác vuông đồng dạng SEI và SOH ta có:

$$\frac{IE}{HO} = \frac{SE}{SO} \Leftrightarrow SO.IE = SE.OH \Leftrightarrow 5x = (SH - EH)\frac{AB}{2}$$

$$= (SH - OH)\frac{AB}{2} = \left(\sqrt{SO^2 + \frac{AB^2}{4}} - \frac{AB}{2}\right)\frac{AB}{2}$$



Suy ra $x.\text{AB} = 5\left(2\sqrt{x^2 + \frac{AB^2}{4}} + AB\right)$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{x^2 + \frac{AB^2}{4}} = (x - 10)AB$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{100x}{x - 10}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.AB^2 = \frac{1}{3}.\frac{100SO^2}{(SO - 10)}$$

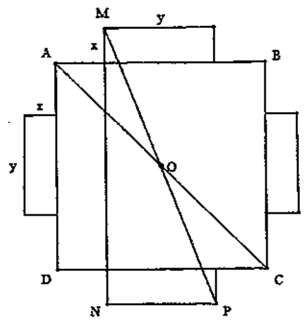
Xét $f(x) = \dfrac{100x^2}{3(x\text{-}10)} \Rightarrow f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 20x}{(x - 10)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Vậy chiều cao của tòa nhà là: $SO = 20m$.

Chọn A.

Bài 5:



Đường tròn đường kính $2R = 8cm$

$$\Rightarrow AC = 8cm \Rightarrow AB = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Diện tích hình được cắt ra là:

$$\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 4xy = 4xy + 32$$

Ghi chú của em

Xét tam giác $MNP:\ NP^2 = MP^2 - MN^2$

$\Rightarrow y^2 = 8^2 - (4\sqrt{2} + 2x)^2 = -4x^2 - 16\sqrt{2}x + 32$

$\Rightarrow y = 2\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8}$

$f(x) = 4x.2.\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8} + 32 = 8x\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8} + 32\ (0 < x < 2)$

$$f'(x) = 8\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8} - \frac{4x(2x + 4\sqrt{2})}{\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{max} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y$$

Bài 6.

Do thùng phi có dạng hình trụ kín hai đầu nên:

Gọi $R:$ là bán kính đáy thùng (m)

$h:$ là chiều cao của thùng (m)

$ĐKXĐ:\ R, h > 0$

Ta có: $V_{th} = \pi R^2 h = 2\pi \Leftrightarrow h = \dfrac{2}{R^2}(*)$

Diện tích toàn phần của thùng là:

$S_{tp} = 2\pi R(h + R)(**)$

Thay $(*)$ vào $(**)$, ta có:

$$S_{tp} = 2\pi R\left(\frac{2}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{2}{R} + R^2\right)$$

$$S'_{tp} = 2\pi\left(\frac{-2}{R^2} + R\right) = \frac{4\pi}{R^2}(R^3 - 1) = \frac{4\pi}{R^2}(R - 1)(R^2 + R + 1)$$

Cho $S'_{tp} = 0$, ta có: $R = 1$

R	0		1		$+\infty$
S'_{tp}	||	$-$	0	$+$	
	||	↘	min	↗	

Vậy ta cần chế tạo thùng với kích thước: $R = 1m, h = 2m.$

Chọn A.

Bài 7.

Thể tích mỗi thùng: $V = \pi r^2 h = 1125 \Rightarrow h = \dfrac{1125}{\pi r^2}$

Chi phí: $C = 5\pi r^2 + 60\pi rh = 5\pi r^2 + 60\pi r\dfrac{1125}{\pi r^2} = 5\pi r^2 + \dfrac{67500}{r}$

Tính đạo hàm: $C'(r) = 10\pi r - \dfrac{67500}{r^2}$

Ghi chú của em

$$C'(r)=0 \Leftrightarrow 10\pi r^3=67500 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{6750}{\pi}}=\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Với: $r=\dfrac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}} \Rightarrow \quad C(r)=3375.\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{\pi}$ và $h=\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$

r	0		$\dfrac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$		$+\infty$
$C'(r)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$C(r)$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$	‖

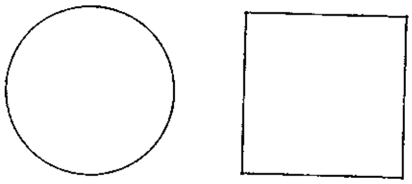
Từ bảng biến thiên, suy ra:

Với : $r=\dfrac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h=\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$ thì chi phí sản xuất là thấp nhất và bằng

$$C(r)_{\min}=3375.\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{\pi}$$

Chọn A.

Bài 8:



Gọi x là chiều dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn $(0<x<1) \to$ chiều dài đoạn dây cuộn thành hình vuông là: $1-x$

Chu vi hình tròn với R là bán kính: $2\pi R=x \Rightarrow R=\dfrac{x}{2\pi}$

Diện tích hình tròn: $S_{tr}=\pi R^2=\dfrac{x^2}{4\pi}$

Diện tích hình vuông: $S_{hv}=\left(\dfrac{1-x}{4}\right)^2$

Tổng diện tích 2 hình: $S=S_{tr}+S_{hv}=\dfrac{x^2}{4\pi}+\left(\dfrac{1-x}{4}\right)^2=\dfrac{(4+\pi)x^2-2\pi x+\pi}{16\pi}$

$$S'=\frac{(4+\pi)x-\pi}{8\pi}$$

$$\left.\begin{array}{l} S'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4+\pi} \quad (T/m) \\ S''=\dfrac{4+\pi}{8}>0\ \forall x \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4+\pi}$ là điểm cực tiểu của hàm số $S(x)$

Vậy tổng diện tích hình tròn và hình vuông là nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây cuộn thành hình tròn là: $x=\dfrac{\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông là: $\dfrac{4}{4+\pi}m$

Bài 9:

Gọi t là số hành khác trên mỗi chuyến xe để tiền thu được là lớn nhất $(0 < t \le 60)$

Số tiền thu được là :

$$F(t)=\left(3-\frac{t}{40}\right)^2 t = 9t-\frac{3}{20}t^2+\frac{t^3}{1600} \Rightarrow F'(t)=9-\frac{3}{10}t+\frac{3t^2}{1600}$$

Cho: $F'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=40\ (N) \\ t=120\ (L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		40		60
$F'(t)$		+	0	−	
$F(t)$		↗	160	↘	

Kết luận: Vậy để thu được tiền lớn nhất thì số khách trên mỗi chuyến xe là 40 hành khách.

Chọn A.

Bài 10:

Gọi S: chi phí, x: chiều rộng, $2x$: chiều dài, y: chiều cao.

Từ giả thuyết đề bài ta có:

$S = 2xx.10000 + 2(xy+2xy).5000 = 20000x^2 + 30000xy.$

Mà $V = 2x^2y = 10 \Rightarrow y = \dfrac{5}{x^2}$

Suy ra $S = 20000x^2 + 30000.\dfrac{5}{x} = 20000x^2 + \dfrac{150000}{x}$

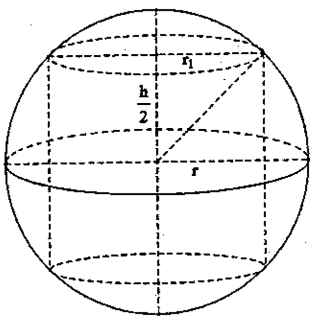
$S' = 40000x - \dfrac{150000}{x^2}$

$S' = 0 \Leftrightarrow 40000x - \dfrac{150000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\left(\dfrac{15}{4}\right)} \Rightarrow y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{15}{4}\right)}}$

Vậy dài là $2.\sqrt[3]{\left(\dfrac{15}{4}\right)}$ rộng là: $\sqrt[3]{\left(\dfrac{15}{4}\right)}$ cao là: $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{15}{4}\right)}}$.

Chọn A.

Bài 11:



Gọi h là chiều cao của hình trụ.

r_1 là bán kính đáy của hình trụ.

Ta có: $\left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + r_1^2 = r^2$

Thể tích hình trụ là:

$V = \pi r_1^2 h = \pi\left(r^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)h = \pi r^2 h - \pi\dfrac{h^3}{4}$

Xét hàm $V(h) = \pi r^2 h - \pi\dfrac{h^3}{4}$

Ghi chú của em

Ghi chú của em

$$\Rightarrow V'(h)=\pi r^2-\frac{3\pi}{4}h^2$$

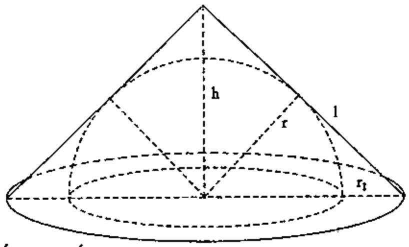
$$V'(h)=0\Leftrightarrow \pi r^2-\frac{3\pi}{4}h^2=0\Leftrightarrow h^2=\frac{4r^2}{3}\Rightarrow h=\frac{2\sqrt{3}r}{3}$$

Dễ thấy điểm $h=\frac{2\sqrt{3}r}{3}$ là điểm cực đại của hàm số $V(h)$ và tại $h=\frac{2\sqrt{3}r}{3}$ thì $V(h)$ đạt giá trị lớn nhất. Vậy, thể tích hình trụ lớn nhất khi và chỉ khi $h=\frac{2\sqrt{3}r}{3}\rightarrow r_1=\frac{\sqrt{6}}{3}r$.

Chọn A.

Bài 12:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:



$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{h^2}=\frac{1}{r^2}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{r_1^2-r^2}{(r.r_1)^2}\Rightarrow h^2=\frac{(r.r_1)^2}{r_1^2-r^2}$$

Gọi 1 là đường sinh của hình nón ta có:

$$l^2=h^2+r_1^2=\frac{(r.r_1)^2}{r_1^2-r^2}+r_1^2=\frac{r_1^4}{r_1^2-r^2}$$

$$\Rightarrow l=\frac{r_1^2}{\sqrt{r_1^2-r^2}}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: $S=2\pi.l.r_1=\frac{2\pi r_1^3}{\sqrt{r_1^2-r^2}}$

Ta xét hàm:

$$S(r_1)=\frac{2\pi r_1^3}{\sqrt{r_1^2-r^2}}$$

$$\Rightarrow S'=2\pi\left(\frac{3r_1^2\sqrt{r_1^2-r^2}-\frac{r_1^4}{\sqrt{r_1^2-r^2}}}{r_1^2-r^2}\right)=2\pi\left(\frac{3r_1^2(r_1^2-r^2)-r_1^4}{(r_1^2-r^2)\sqrt{r_1^2-r^2}}\right)$$

$$\Rightarrow S'=0\Leftrightarrow 3r_1^2(r_1^2-r^2)-r_1^4=0$$

$$\Leftrightarrow 2r_1^4-3r_1^2r^2=0\Rightarrow r_1^2=\frac{3}{2}r^2\Rightarrow r_1=\frac{\sqrt{6}}{2}r\Rightarrow h=\sqrt{3}r$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón đạt giá trị nhỏ nhất khi $r_1=\frac{\sqrt{6}}{2}r\Rightarrow h=\sqrt{3}r$.

Chọn A.

Bài 13:

Gọi: x là cạnh của đáy hộp (dm); h là chiều cao của hộp (dm); $S(x)$ là diện tích của phần hộp cần mạ (dm^2)

Ghi chú của em

Ta có: $m=\left(P_{vàng}.d\right).S\left(x\right)=k.S\left(x\right)$ $k=$ Hằng số (với $P_{vàng}$: khối lượng riêng của vàng)

Suy ra: khối lượng m tỉ lệ thuận với $S\left(x\right)$.

Ta có: $S\left(x\right)=4xh+x^2$ (1)

Và $V=x^2h=4\Leftrightarrow h=\dfrac{4}{x^2}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $S\left(x\right)=x^2+\dfrac{16}{x}$

Lấy đạo hàm 2 vế: $S'\left(x\right)=2x-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{2x^3-16}{x^2}$; $S''\left(x\right)=2+\dfrac{32}{x^3}$

Cho $S'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x^3-16=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\h=1\end{cases}$

Với $x=2$, ta có: $\begin{cases}S'\left(2\right)=0\\S''\left(2\right)=6\end{cases}\Rightarrow S\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=2\Rightarrow$ Khối lượng m cũng là nhỏ nhất.

Vậy để tiết kiệm nhất lượng vàng cần mạ thì chúng ta cần sản xuất hộp với kích thước: $\begin{cases}x=2\\h=1\end{cases}$

Chọn A.

Bài 14:

x: giá tiền tăng thêm (nghìn đồng) $\Rightarrow$ Số khách giảm đi $\dfrac{x}{20}.100=5x$

Lợi nhuận: $(1000+x)(8000-5x)=f(x)$

$f'(x)=3000-10x$

$\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=300$

x	0		300		1600
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$		↗	max	↘	

Vậy giá vé thích hợp là 1300 (nghìn đồng).

Bài 15:

$h=\dfrac{2}{3r^2}$

$S=S_đ+S_{xq}=2r^2+2hd+2hr=2r^2+6hr=2r^2+6r.\dfrac{2}{3r^2}=2r^2+\dfrac{4}{r}$

$=2r^2+\dfrac{2}{r}+\dfrac{2}{r}\geq 3\sqrt[3]{2r^2.\dfrac{2}{r}.\dfrac{2}{r}}=6$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

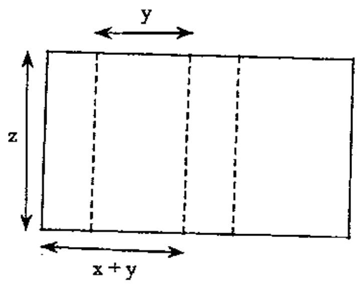
$2r^2=\dfrac{2}{r}\Rightarrow 2r^3=2\Leftrightarrow r=1$

$\Rightarrow d=2\Rightarrow h=\dfrac{2}{3}$

Chọn A.

ĐỀ SỐ 3

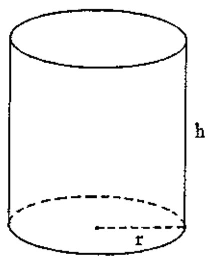
Bài 1. Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi bằng 8, người ta gập tấm tôn theo các đường như hình vẽ để tạo ra hình hộp chữ nhật. Với kích thước nào của x, y, z thì thể tích hình hộp chữ nhật là lớn nhất.



A. $2x = 2y = z = \frac{4}{3}$. **B.** $x = y = \frac{1}{2}$ và $z = 2$.

C. $x = y = \frac{3}{4}$ và $z = \frac{5}{2}$. **D.** Kết quả khác.

Bài 2. Một chiếc lon hình trụ làm từ các miếng kim loại chứa được 1 lít chất lỏng ở trong, nhưng nhà sản xuất muốn tổng diện tích các miếng kim loại cần dùng là nhỏ nhất. Khi đó kích thước của chiếc lon sẽ như thế nào?



A. Diện tích đáy lon bằng $\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} dm^2$.

B. Tổng diện tích các miếng kim loại là $\sqrt[3]{2\pi} m^2$.

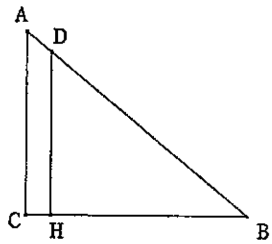
C. Đường kính đáy lon là $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} dm$.

D. Thể tích của lon bằng $1m^3$.

Bài 3. Để đo chiều cao h (khoảng cách cao nhất từ đỉnh đến mặt đất) của cổng Parabol của trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, người ta tiến hành đo khoảng cách L giữa hai chân cổng được $L = 9m$. Người này thấy rằng nếu đứng cách chân cổng (gần nhất) $0,5m$ thì đầu chạm cổng, biết người này cao $1,6m$. Tính chiều cao h của cổng Parabol.

A. $h = \frac{625}{78} m$. **B.** $h = \frac{648}{85} m$. **C.** $h = \frac{639}{91} m$. **D.** $h = \frac{652}{93} m$.

Bài 4. Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC, ngang qua cột đỡ DH cao $4m$, song song và cách tường $CH = 0,5m$ là:



A. Xấp xỉ $5,4902$. **B.** Xấp xỉ $5,602$.

C. Xấp xỉ $5,5902$. **D.** Xấp xỉ $6,5902$.

Bài 5. Một cửa hàng bánh nhỏ vào dịp lễ khai trương đặt ra giá như sau: Nếu 1 lượt khách trong quán có a khách hàng thì giá cho mỗi người sẽ là: $\left(3 - \frac{a}{30}\right)^3$ (Đô la). Hỏi với lượng khách bao nhiêu thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất?

A. 10. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 23.

Bài 6. Một người thợ xây, muốn xây dựng một bồn chứa nước hình trụ tròn với thể tích là $150 m^3$ (như hình vẽ bên). Đáy làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn và nắp làm bằng nhôm. Tính chi phí thấp nhất để bồn chứa nước (làm tròn đến hàng nghìn). Biết giá thành các vật liệu như sau: bê tông 100 nghìn đồng một m^2, tôn 90 nghìn đồng một m^2 và nhôm 120 nghìn đồng một m^2.

A. 15037000 đồng. **B.** 15038000 đồng. **C.** 15039000 đồng. **D.** 15040000 đồng.

Bài 7: Một công ty kinh doanh thực phẩm ước tính rằng số tiền thu vào ở việc kinh doanh rau được tính xấp xỉ bằng công thức $h(x)=x^2-29000x+1000100000$ và tiền lãi được tính bằng công thức $g(x)=1000x+100000$ với x là số tiền cho mỗi kg rau. Tìm x để số tiền vốn bỏ ra là ít nhất.

A. 15000 đồng. **B.** 30000 đồng. **C.** 10000 đồng. **D.** 20000 đồng.

Bài 8: Trong giai đoạn từ năm 1980 đến năm 1994, tỉ lệ phần trăm những hộ gia đình ở Mỹ có ít nhất một đầu máy video (VCR) đã được mô hình hóa bởi hàm số sau: $V(t)=\dfrac{75}{1+74.e^{-0,6t}}$ trong đó t là thời gian được tính bằng năm $0\le t\le 14$. Thời điểm mà con số VCR tăng nhanh nhất gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. $t=14$. **B.** $t=10$. **C.** $t=9$. **D.** $t=7$.

Bài 9: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ hợp với 2 trục tọa độ 1 tam giác có diện tích S bằng :

A. $S=1,5$ **B.** $S=2$ **C.** $S=3$ **D.** $S=1$

Bài 10: Tìm m để phương trình $e^{2x}-me^x+3-m=0$ có nghiệm.

A. $m\ge 2$ **B.** $m>2$ **C.** $m<3$ **D.** $m>0$

Bài 11: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Giá trị của m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$ là:

A. $m<1$ **B.** $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\ m\ne 0\end{cases}$ **C.** $-\dfrac{1}{4}<m<1$ **D.** $\dfrac{1}{4}<m<1$

Bài 12: Cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2$ (1). Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Bài 13: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

A. $m=\pm 1$ **B.** $m=3$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Bài 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là $(-\infty;0]$: $m2^{x+1}+(2m+1)\left(3-\sqrt{5}\right)^x+\left(3+\sqrt{5}\right)^x<0$.

A. $m\le -\dfrac{1}{2}$. **B.** $m\le \dfrac{1}{2}$. **C.** $m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{2}$.

Bài 15: Cho hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y=mx-m-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1;1)$.

A. $m=-1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Chu vi hcn $=2(2x+2y+z)=8$

$\Leftrightarrow 2x+2y+z=4$

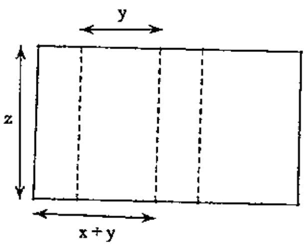
$V_{khcn}=S_{đáy}$. chiều cao

$=y.z.x=\frac{1}{4}.2x.2y.z\le\frac{1}{4}\left(\frac{2x+2y+z}{3}\right)^3$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{16}{27}$

Dấu $''=''$ xảy ra $\Leftrightarrow 2x=2y=z=\frac{4}{3}$

Chọn A.



Bài 2:

$+\ V=1\Leftrightarrow \pi.r^2.h=1\Rightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}$

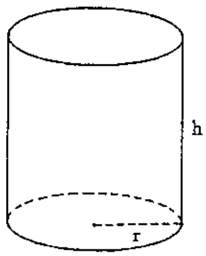
$+\ S_{tp}=2\pi rh+2\pi r^2$

$=\frac{2}{r}+2\pi r^2=\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+2\pi r^2\ge 3\sqrt[3]{2\pi}$

Dấu $''=''$ xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{r}=2\pi r^2\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$\Rightarrow 2r=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$.

Chọn C.



Bài 3:

Giả sử phương trình: $y=ax^2+bx+c$

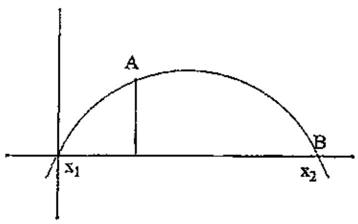
Theo Vi-et: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1.x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x_2=-\frac{b}{a}\ \ (x_2=9)\\ c=0\ \ (Do\ x_1=0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9a+b=0\\ y=ax^2+bx\end{cases}$

Mà $A\left(\frac{1}{2};\frac{8}{5}\right)$ thuộc đồ thị (đề bài)

$\Rightarrow\begin{cases}9a+b=0\\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b=\frac{8}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{32}{85}\\ b=\frac{288}{85}\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{32}{85}x^2+\frac{288}{85}x=-\frac{32}{85}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{648}{85}$

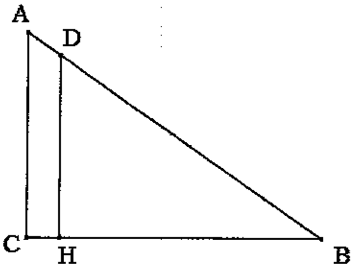
Chọn B



Bài 4:

Ghi chú của em

Đặt $CB = x, CA = y$ khi đó bằng cách xét các tam giác đồng dạng ta có hệ thức:



$\frac{1}{2x} + \frac{4}{y} = 1$.

Bài toán quy về tìm min của $x^2 + y^2$.

Giải hệ $\begin{cases} 2x - \frac{a}{2x^2} = 0 \\ 2y - \frac{4a}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$

Do đó hàm số đạt min tại $x = \frac{5}{2}; y = 5$ hay $AB \min = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Chọn C.

Bài 5:

Số tiền cửa hàng thu được là $a.\left(3 - \frac{a}{30}\right)^3$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$a.\left(3 - \frac{a}{30}\right)^3 = 10.\frac{a}{10}.\left(3 - \frac{a}{30}\right)^3 \le 10.\left(\frac{9}{4}\right)^4 = \frac{9^4.5}{128}$

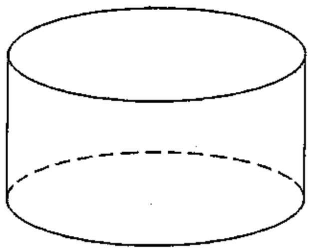
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{10} = 3 - \frac{a}{30} \Leftrightarrow a = 22,5$.

Vậy cửa hàng có 23 khách thì sẽ thu lợi nhuận cao nhất.

Chọn D.

Bài 6:

Ta có: $V = 150m^3 = \pi r^2 l \Rightarrow \frac{150}{r} = \pi r l$



Giá tiền để xây bồn nước là:

$90.10^3.2\pi r l + 100.10^3.\pi r^2 + 120.10^3.\pi r^2$

$= 10^3.90.2\pi r l + 220.10^3.\pi r^2$

$= 10^3.\frac{90.2.150}{r} + 10^3.220.\pi r^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy 3 số:

$220\pi r^2 + \frac{90.150}{r} + \frac{90.150}{r} \ge 3\sqrt[3]{220\pi.(90.150)^2} \approx 15038,3$

Vậy giá tiền khoảng bằng $15\,038\,000$ đồng.

Chọn B.

Bài 7:

Khi đó số tiền vốn bỏ ra sẽ được tính bằng công thức:

$f(x) = h(x) - g(x) = x^2 - 30000x + 1\,000\,000\,000$

$= (x - 15000)^2 + 775\,000\,000 \ge 775\,000\,000$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 15000$.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 8:

Để $V(t)=\dfrac{75}{1+74.e^{-0,6t}} \longrightarrow \max$ thì $f(t)=1+74.e^{-0,6t} \longrightarrow \min$

Để $f(t) \longrightarrow \min : 1+74.\left(\dfrac{1}{e^{0,6}}\right)^{t} \geq 1+74.\left(\dfrac{1}{e^{0,6}}\right)^{14}$

Vì $\left(\dfrac{1}{e^{0,6}}\right)^{t}$ là hàm nghịch biến.

Vậy $t=14$ thì $V(t) \longrightarrow \max$.

Chọn A.

Bài 9:

Ta có kết quả : Nếu đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ có điểm cực trị $(x_o;y_o)$ thì $y_o=\dfrac{u'(x_o)}{v'(x_o)}$

- Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là y=2x-2 (d)
- (d) cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm A(0;-2), B(1;0) nên diện tích tam giác OAB bằng 1.

Chọn D.

Bài 10:

Đặt $t=e^x$, t >0. Biến đổi phương trình về dạng: $\dfrac{t^2+3}{t+1}=m$

Khảo sát hàm f(t) $=\dfrac{t^2+3}{t+1}$, t >0 ta có $f(t)\geq 2$. Suy ra $m\geq 2$

Chọn A. (dùng casio để tìm nhanh hơn)

Bài 11:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:

$$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-x-m=0 \end{array}\right.$$

(C) và trục hoành cắt nhau tại 3 điểm pb $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m>-\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Ta có:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2<4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+1<4 \Leftrightarrow 1+2m+1<4 \Leftrightarrow m<1$$

Chọn B.

Bài 12: **(KSHS).**

Ta có $y'=3(x-m)^2-3, y''=6(x-m)$

Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$.

Vì $x=x_1=m-1, y''(m-1)<0$ nên hàm số đạt cực đại tại: $x=x_1=m-1$ và giá trị cực đại là $y_1=m^2-3m+2$.

Tương tự, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_2=m+1$ và giá trị cực tiểu là $y_2=m^2-3m-2$.

Ta giả sử điểm M là điểm cực đại của đồ thị hàm số ứng với giá trị m_1 và là điểm cực tiểu ứng của đồ thị hàm số ứng với với giá trị m_2.

Từ YCBT suy ra hệ phương trình $\begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ m_1^2 - 3m_1 + 2 = m_2^2 - 3m_2 - 2 \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được nghiệm $m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$ và suy ra tồn tại duy nhất một điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ thỏa bài toán.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 13:

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$ và $B(2m;-4m^3+1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B lên trục tung, ta có $BH = |2m|$. Diện tích của tam giác OAB là $S = \frac{1}{2}BH.OA = \frac{1}{2}.|2m|$

Theo đề bài $S = 1$ nên ta có $\frac{1}{2}.|2m| = 1$ suy ra $m = \pm 1$. Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Chọn A.

Bài 14:

Phương trình đã cho tương đương:

$2m + (2m+1)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x < 0(1)$. Đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0$ ta được:

$2m + (2m+1)\frac{1}{t} + t < 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2mt + 2m + 1 < 0(2)$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \leq 0$ nên bất phương trình (2) có nghiệm $0 < t \leq 1$, suy ra phương trình $f(t) = 0$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa

$t_1 \leq 0 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \leq 0 \\ 4m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -0,5 \\ m < -0,5 \end{cases}$. Vậy $m < -\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Chọn D.

Bài 15:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\frac{x}{1-x} = mx - m = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 \ (1) \end{cases}$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow m < 0$

Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow I(1;-1)$ cố định.

Ta có: $AM^2 + AN^2 = 2AI^2 + \frac{MN^2}{2}$

Do $AM^2 + AN^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

$MN^2 = (x_2 - x_1)^2(1+m)^2 = -4m - \frac{4}{m} \geq 8$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = -1$

Vậy $\min(AM^2 + AN^2) = 20$ khi $m = -1$

Chọn A.

ĐỀ SỐ 4

Bài 1: Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

A. 8 **B.** 4 **C.** $x_M<3$ **D.** $8\sqrt{2}$.

Bài 2: Để hàm số $y=x^2(m-x)-m$ đồng biến trên khoảng (1;2) thì giá trị của m phải là:

A. $m\geq 2$. **B.** $m\geq 3$. **C.** $2\leq m\leq 3$. **D.** Với mọi m.

Bài 3: Hàm số $y=\left(x^2-2x+m+1\right)^{\pi}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi:

A. $m<-1$ hoặc $m>0$ **B.** $m=0$ **C.** $m>0$ **D.** $0<m<3$

Bài 4: Trên sân bay có một máy bay cất cánh trên đường băng d (từ trái sang phải) và bắt đầu rời mặt đất tại điểm O. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt đất và cắt mặt đất theo giao tuyến là đường băng d của máy bay. Dọc theo đường băng d cách vị trí máy bay cất cánh O một khoảng 300(m) về phía bên phải có 1 người quan sát A. Biết máy bay chuyển động trong mặt phẳng (P) và độ cao y của máy bay xác định bởi phương trình $y=x^2$(với x là độ dời của máy bay dọc theo đường thẳng d và tính từ O). Khoảng cách ngắn nhất từ người A (đứng cố định) đến máy bay là:

A. $300(m)$ **B.** $100\sqrt{5}(m)$ **C.** $200(m)$ **D.** $100\sqrt{3}(m)$

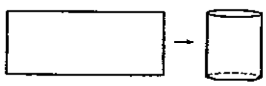
Bài 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị (C) điểm $A(-5;5)$. Tìm m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc toạ độ).

A. $m=0$ **B.** $m=0; m=2$ **C.** $m=2$ **D.** $m=-2$

Bài 6: Một máy tính được lập trình để vẽ một chuỗi các hình chữ nhật ở góc phần tư thứ nhất của trục tọa độ Oxy, nội tiếp dưới đường cong $y=e^{-x}$. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể được vẽ bằng cách lập trình trên.

A. 0,3679 (đvdt) **B.** 0,3976 (đvdt) **C.** 0,1353(đvdt) **D.** 0,5313(đvdt)

Bài 7: Bạn An là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là:

A. $35cm; 25cm$ **B.** $40cm; 20cm$ **C.** $50cm; 10cm$ **D.** $30cm; 30cm$

Bài 8: Cho hàm số $y=x^3-\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (C).Tìm tất cả những điểm trên đồ thị (C) sao cho hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại những điểm đó là giá trị lớn nhất của hàm số: $g(x)=\dfrac{4x^2+3}{x^4+1}$.

A. $\left(\frac{1}{2};0\right)$ **B.** $\left(-1;-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{4}{3};\frac{40}{27}\right)$

C. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right);\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{-1+\sqrt{2}}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};0\right);(-2;-10)$

Bài 9: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1-m$. Định m để đồ thị hàm số trên có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ làm trực tâm.

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Bài 10: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C=c\frac{\sin\alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l là khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách Nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là:

A. 1m **B.** 1,2m **C.** 1.5 m **D.** 2m

Bài 11: Cho x và y là hai số thực dương thay đổi sao cho: $x^2-2x+4y^2=0$. Giá trị lớn nhất của tích xy gần nhất với số nào?

A. 0,5 **B.** 0,6 **C.** 0,7 **D.** 0,8

Bài 12: Cho hàm số: $y=x^4-2(m-2)x^2+m^2-5m+5$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này tạo thành một tam giác đều:

A. $m=2-\sqrt[3]{3}$ **B.** $2-\sqrt{3}$ **C.** $3-\sqrt{2}$ **D.** $3-\sqrt[3]{2}$

Bài 13: Cho hàm số $y=x^3+mx+2$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

A. $m>-3$ **B.** $m<-3$ **C.** $m>3$ **D.** $m<3$

Bài 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}}$ là:

A. 0 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2

Bài 15: Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 60km, khoảng cách từ A đến B là 100km, mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000 USD. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.

A. 40km **A.** 45km **A.** 55km **A.** 60km

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Giả sử $x_M < 3, x_N > 3$, khi đó $M\left(3-m;3-\frac{8}{m}\right)$, $N\left(3+n;3+\frac{8}{n}\right)$ với $m,n>0$

$$MN^2=(m+n)^2+\left(\frac{8}{m}+\frac{8}{n}\right)^2 \ge (2\sqrt{mn})^2+64\left(2\sqrt{\frac{1}{m}.\frac{1}{n}}\right)^2=4\left(mn+\frac{64}{mn}\right)\ge 64$$

$\Rightarrow MN \ge 8$. Kết luận MN ngắn nhất bằng 8.

Chọn A.

Bài 2:

Vì $y'=-3x^2+2mx=-x(3x-m); y'=0 \Leftrightarrow x_1=0 \vee x_2=\frac{m}{3}$

Vì hệ số a < 0 nên $x_1=0<1<2\le\frac{2m}{3}=x_2 \Leftrightarrow m\ge 3$

Chọn B.

Bài 3:

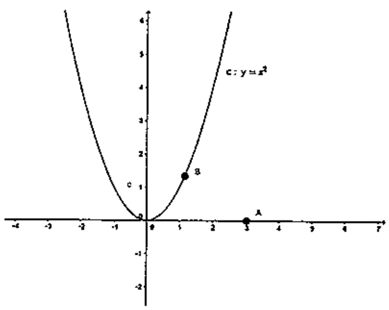
Điều kiện:

$x^2-2x+m+1>0\ \forall x\in R \Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 1-(m+1)<0 \Leftrightarrow m>0$

Chọn C.

Bài 4:

Xét hệ trục Oxy với gốc tọa độ O là vị trí máy bay rời mặt đất, trục Ox trùng với đường thẳng d và chiều dương hướng sang phải, trục Oy vuông góc với mặt đất.



Gọi $B(t;t^2)$ $(t\ge 0)$ là tọa độ của máy bay trong hệ Oxy. Tọa độ của người A là $A(3;0)$.

Khoảng cách từ người A đến máy bay B bằng $d=\sqrt{(3-t)^2+t^4}$. Suy ra $d^2=t^4+t^2-6t+9=f(t)$.

$f'(t)=4t^3+2t-6.$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1.$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $d^2=f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 khi $t=1$. Vậy khoảng cách nhỏ nhất là $100\sqrt{5}(m)$

Chọn B.

Bài 5:

Do các điểm O và A thuộc đường thẳng $\Delta: y=-x$ nên để $OAMN$ là hình bình hành thì $MN=OA=5\sqrt{2}$

Hoành độ của M và N là nghiệm của pt:

$$\frac{2x-4}{x+1}=-x+m \Leftrightarrow x^2+(3-m)x-(m+4)=0\ (x\neq -1)\ (1)$$

Vì $\Delta=m^2-2m+25>0, \forall m$, nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1) ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m-3 \\ x_1x_2=-(m+4)\end{cases}$

Gọi $M(x_1;-x_1+m), N(x_2;-x_2+m)$

$$\Rightarrow MN^2=2(x_1-x_2)^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=2m^2-4m+50$$

$$MN=5\sqrt{2}\Rightarrow 2m^2-4m+50=50\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=0\end{array}\right.$$

+ $m=0$ thì O, A, M, N thẳng hàng nên không thoả mãn.

+ $m=2$ thoả mãn.

Chọn C.

Bài 6:

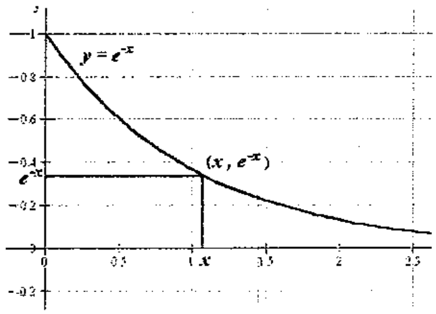
Diện tích hình chữ nhật tại điểm x là $S=xe^{-x}$

$S'(x)=e^{-x}(1-x)$

$S'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

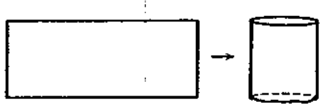
Dựa vào bảng biến thiên ta có Smax $=e^{-1}\approx 0,3679$ khi x=1

Chọn A.



Bài 7:

Gọi một chiều dài là $x(cm)(0<x<60)$, khi đó chiều còn lại là $60-x(cm)$, giả sử quấn cạnh có chiều dài là x lại thì bán kính đáy là $r=\frac{x}{2\pi}; h=60-x$. Ta có:



$$V=\pi r^2.h=\frac{-x^3+60x^2}{4\pi}.$$

Xét hàm số: $f(x)=-x^3+60x^2, x\in(0;60)$

$$f'(x)=-3x^2+120x; f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=40\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(x)=-x^3+60x^2, x\in(0;60)$ lớn nhất khi $x=40$. Khi đó chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm.

Chọn B.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 8:

* Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $g(x)=\dfrac{4x^2+3}{x^4+1}$

- Đặt $t=x^2$, với $t\geq 0$ ta có hàm số $g(t)=\dfrac{4t+3}{t^2+1}$;

- $g'(t)=\dfrac{-4t^2-6t+4}{(t^2+1)^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=-2; t=\dfrac{1}{2}$;

- Ta lại có: $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t)=0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$, bảng biến thiên của hàm số:

t	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'(t)		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
g(t)	0	↘	-1	↗	3	↗	4	↘	0

- Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $g(x)=4$, đạt được khi $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

* Tìm các điểm thuộc đồ thị (C)

- Ta có: $y'=3x^2-x$, giả sử điểm $M_0(x_0, f(x_0))\in(C)$, thì hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $f'(x_0)=3x_0^2-x_0$

- Vậy: $3x_0^2-x_0=4$ suy ra $x_0=-1$; $x_0=\dfrac{4}{3}$, tung độ tương ứng $f(-1)=-\dfrac{3}{2}$; $f(\dfrac{4}{3})=\dfrac{40}{27}$

+ Có hai điểm thỏa mãn giả thiết $\left(-1;-\dfrac{3}{2}\right)$; $\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{40}{27}\right)$.

Chọn B.

Bài 9: $y'=4x^3-4mx$, với $m>0$ thì đồ thị hàm số có ba cực trị là: $A(0,1-m)$, $B(\sqrt{m},1-m-m^2)$, $C(-\sqrt{m},1-m-m^2)$.

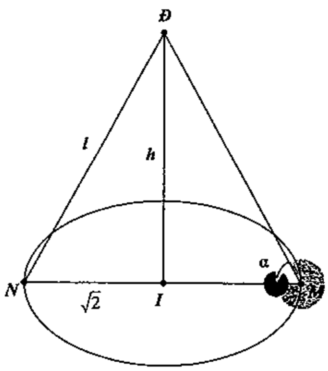
Theo đề bài : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\\m=1\end{array}\right.$

Chọn C.

Bài 10:

Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn (h > 0); Đ là bóng điện;

I là hình chiếu của Đ lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn. (như hình vẽ). Ta có $\sin\alpha=\dfrac{h}{l}$ và $h^2=l^2-2$, suy ra cường độ sáng: $C(l)=c\dfrac{\sqrt{l^2-2}}{l^3}$ $(l>\sqrt{2})$.



Ghi chú của em

$C'(l) = c.\dfrac{6-l^2}{l^4.\sqrt{l^2-2}} > 0\left(\forall l > \sqrt{2}\right)$

$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6}\left(l > \sqrt{2}\right)$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó $h = 2$

Chọn D.

Bài 11:

Ta có $x^2 - 2x + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}\sqrt{2x - x^2}$ (do $y > 0$), suy ra:

$xy = \dfrac{1}{2}x\sqrt{2x - x^2}$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{2x - x^2}$ xác định trên $(0;2)$;

$g'(x) = \dfrac{\sqrt{6x^2 - 4x^3}}{4\sqrt{2x^3 - x^4}}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Vậy $g(x)$ cũng là xy đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{3}{2}$ và GTLN của xy là:

$\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2}\sqrt{2.\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.64$

Chọn B.

Bài 12:

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m-2)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ PT $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 2$ (*)

Khi đó toạ độ các điểm cực trị là:

$A\left(0, m^2 - 5m + 5\right), B\left(\sqrt{2-m}; 1-m\right), C\left(-\sqrt{2-m}; 1-m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; = -m^2 + 4m - 4\right); \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; = -m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài thoả mãn khi $\widehat{A} = 60^0 \Leftrightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} - \sqrt[3]{3}$

Chọn A.

Bài 13:

Số giao điểm của đồ thị (Cm) với Ox là số nghiệm của phương trình:

$x^3 + mx + 2 = 0$

TH1: $m = 0$ luôn có 1 nghiệm.

Ghi chú của em

TH2: $m \neq 0$

$m = -x^2 - \frac{2}{x} = f(x);(*)$

$f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2(x^3-1)}{x^2}0 \Rightarrow x = 1$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	0	-	
$f(x)$			$+\infty$ ||		-3		
	$-\infty$	↗	|| $-\infty$	↗		↘	$-\infty$

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm $f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m > -3$ thì phương trình (*) có 1 nghiệm duy nhất.

Chọn A.

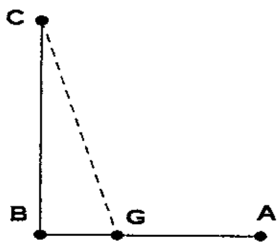
Bài 14:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, ta có $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2 x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x} = \frac{4\sin^2 x}{2 - \sin^2 x}$.

Đặt $\sin^2 x = t\ (t \in [0;1])$, hàm số trở thành $g(t) = \frac{4t}{-t+2}$ với $t \in [0;1]$, ta có $g'(t) = \frac{8}{(-t+2)^2} > 0 \forall t \in [0;1]$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$, vậy $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max\limits_{t \in [0;1]} g(t) = g(1) = 4$, xảy ra khi $t = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Chọn B.

Bài 15:



Gọi BG = x (0<x<100)

$\Rightarrow AG = 100 - x$

Ta có:

$GC = \sqrt{BC^2 + GC^2} = \sqrt{x^2 + 3600}$

Chi phí mắc dây điện theo giải thiết là:

$f(x) = 3000.(100 - x) + 5000.\sqrt{x^2 + 3600}$

Khảo sát hàm ta được $x = 45$

Chọn B.

CHƯƠNG 2.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ MŨ, LÔGARIT

Chủ đề 1. Tính số chữ số của một số tự nhiên

- Phần nguyên của một số
- Công thức tính số các chữ số của một số tự nhiên
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 2. Các dạng bài toán lãi suất

- Lãi đơn
- Lãi kép
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 3. Các dạng bài toán khác

- Bài tập áp dụng
- Hướng dẫn giải
- Đề ôn tập chương 2
- Lời giải chi tiết

CHƯƠNG 02

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ MŨ, LÔGARIT

Ở chương này những bài toán vận dụng cao sẽ rơi vào các dạng bài Lãi Suất, dạng bài tính số chữ số của một số …

CHỦ ĐỀ 1

TÍNH SỐ CHỮ SỐ CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

Sau đây chúng ta cùng nghiên cứu một ứng dụng của Logarit trong việc tính số các chữ số của một số tự nhiên.

Đầu tiên xin nhắc lại khái niệm thế nào là phần nguyên của một số.

1 Phần nguyên của một số:

Xét số thực A, số nguyên lớn nhất mà không vượt quá A người ta gọi là phần nguyên của A và kí hiệu là $[A]$.

Như vậy dễ thấy: $[A] \le A \le [A]+1$.

2 Công thức tính số các chữ số của một số tự nhiên:

Xét số tự nhiên A hiện thời đang biểu diễn dưới dạng mũ, hay một dạng nào đó mà ta không đếm được các chữ số của nó. Giả sử A có n chữ số thì ta có công thức sau đây: $n = [\lg A] + 1$.

Trước khi đi vào chứng minh, tôi muốn nhắc lại cho quý bạn đọc cách phân tích một số tự nhiên ra dạng tổng lũy thừa của cơ số 10, ví dụ $423 = 4.10^2 + 2.10 + 3$, $5678 = 5.10^3 + 6.10^2 + 7.10^1 + 8$.

Chứng minh:

Giả sử số tự nhiên A có n chữ số:

$A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1} = a_n.10^{n-1} + a_{n-1}.10^{n-2} + a_{n-2}.10^{n-3} + \dots + a_1$.

Suy ra $\log(A) = \log\left(a_n.10^{n-1} + a_{n-1}.10^{n-2} + a_{n-2}.10^{n-3} + \dots + a_1\right) < \log\left(10^n\right) = n$, và $\log(A) = \log\left(a_n.10^{n-1} + a_{n-1}.10^{n-2} + a_{n-2}.10^{n-3} + \dots + a_1\right) \ge \log\left(a_n.10^{n-1}\right) \ge n-1$.

Từ hai điều này ta có $n - 1 \le \log(A) < n \Leftrightarrow \log(A) < n \le \log(A) + 1$.

Giữa $\log(A), \log(A)+1$ chỉ có duy nhất một số tự nhiên lớn hơn $\log(A)$ đó là $[\log(A)]+1$. Vậy $n = [\log(A)] + 1$.

Sau đây ta cùng sử dụng công thức trên để giải một số bài toán sau:

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Số nguyên tố dạng $M_p = 2^p - 1$, trong đó p là một số nguyên tố, được gọi là số nguyên tố Mec-xen. Số $M_{6972593}$ được phát hiện năm 1999. Hỏi rằng nếu viết số đó trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

Trích Để thi thử Chuyên Hưng Yên lần 2 - 2017

A. 2098960 chữ số. **B.** 2098961 chữ số.
C. 6972593 chữ số. **D.** 6972592 chữ số.

Bài 2: Người ta quy ước $\lg x$ và $\log x$ là giá trị của $\log_{10} x$. Trong các lĩnh vực kỹ thuật, $\lg x$ được sử dụng khá nhiều, kể cả máy tính cầm tay hay quang phổ. Hơn nữa, trong toán học, người ta sử dụng $\lg x$ để tìm số chữ số của một số nguyên dương nào đó. Ví dụ số A có n chữ số thì khi đó $n = [\lg A] + 1$ với $[\lg A]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng A. Hỏi số $B = 2017^{2017}$ có bao nhiêu chữ số?

A. 9999 chữ số. **B.** 6666 chữ số. **C.** 9966 chữ số. **D.** 6699 chữ số.

Bài 3: Số nguyên tố dạng $M_p = 2^p - 1$, trong đó p là một số nguyên tố được gọi là số nguyên tố Mec-sen (Mersenne Marin, 1588-1648, người Pháp).

- Ơ-le phát hiện M_{31} năm 1750
- Luy-ca (Lucas Edouard ,1842-1891, người Pháp) phát hiện M_{127} năm 1876.
- $M_{1398268}$ được phát hiện năm 1996.

Hỏi rằng nếu viết ba số đó trong hệ thập phân thì mỗi số có bao nhiêu chữ số ?

A. $10;39;420921$. **B.** $10;49;42092$. **C.** $10;69;420923$. **D.** $10;59;4209$.

Bài 4: Số $p = 2^{756839} - 1$ là một số nguyên tố. Hỏi nếu viết trong hệ thập phân, số đó có bao nhiêu chữ số?

A. 227831 chữ số. **B.** 227832 chữ số. **C.** 227834 chữ số. **D.** 227835 chữ số.

Bài 5: Đầu năm 2016, Curtis Cooper và các cộng sự tại nhóm nghiên cứu Đại học Central Mis-souri, Mỹ vừa công bố số nguyên tố lớn nhất tại thời điểm đó. Số nguyên tố này là một dạng số nguyên tố Mersenne, có giá trị bằng $M = 2^{74207281} - 1$. Hỏi M có bao nhiêu chữ số?

A. 2233862 chữ số. **B.** 22338618 chữ số.
C. 22338617 chữ số. **D.** 2233863 chữ số.

Bài 6: Nhà toán học người Pháp Pierre de Fermat là người đầu tiên đưa ra khái niệm số Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ với n là số nguyên dương không âm. Fermat dự đoán F_n là số nguyên tố, nhưng Euler đã chứng minh được F_5 là hợp số. Hãy tìm số chữ số của F_{13}.

A. 1243 chữ số. **B.** 1234 chữ số. **C.** 2452 chữ số. **D.** 2467 chữ số.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Đầu tiên ta cần biết: Số tự nhiên A có n chữ số thì $n=[\log A]+1$.

Ta cần tính $2^{6972593}-1$ có bao nhiêu chữ số, ta thấy rằng $2^{6972593}-1$ và $2^{6972593}$ chắc chắn sẽ có cùng số chữ số, nó giống như là 213 và $213-1$ có cùng 3 chữ số vậy.

Từ lập luận trên ta đi tính số chữ số của $2^{6972593}$ bằng công thức $n=[\log A]+1$. Áp dụng ta được:

$n=\left[\log 2^{6972593}\right]+1=[6972593.\log 2]+1=2098960.$

Chọn B.

Bài 2:

Áp dụng công thức $n=[\lg A]+1$ để tìm các chữ số của số A.

Ta có: $\log B=\log 2017^{2017}=2017\log 2017\approx 6665$

Vậy B có 6666 chữ số.

Chọn B.

Bài 3:

Giả sử số nguyên tố $M_p=2^p-1$ viết trong hệ thập phân có n chữ số thì $10^{n-1}\le M_p\le 10^n$ hay $10^{n-1}<2^p\le 10^n$ (vì 2^p không chứa thừa số nguyên tố 5 nên $2^p<10^n$)

Suy ra : $\lg 10^{n-1}<\lg 2^p<\lg 10^n$ hay $n-1<p.\lg 2<n$

Thay $p=31$, ta được $31.\lg 2=9,33.....$

Suy ra $n=10$

Vậy số nguyên tố M_{31} viết trong hệ thập phân có 10 chữ số.

Làm tương tự ta thấy số M_{127} có 39 chữ số , số $M_{1398269}$ có 420921 chữ số.

Chọn A.

Bài 4:

Áp dụng công thức $n=[\lg A]+1$ để tìm các chữ số của số A.

$p=2^{756839}-1\Leftrightarrow \log(p+1)=\log 2^{756839}$

$\Leftrightarrow \log(p+1)=756839.\log 2\approx 227831,24$.

Vậy số P này có 227832 chữ số.

Chọn B.

Bài 5:

Áp dụng công thức $n = [\lg A] + 1$ để tìm các chữ số của số A.

Ta có: $\log M \approx \log 2^{74207281} = 74207281.\log 2 \approx 22338617$

Do đó M có 22338618 chữ số.

Chọn B.

Bài 6:

Ta có $F_{13} = 2^{2^{13}} + 1$.

Suy ra $\log F_{13} \approx \log 2^{2^{13}} = 2^{13}.\log 2 \approx 2466$. Suy ra F_{13} có 2467 chữ số.

Chọn D.

CHỦ ĐỀ 2.

CÁC DẠNG BÀI TOÁN LÃI SUẤT

1 Lãi đơn

Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.

Công thức tính lãi đơn: $V_n = V_0\left(1+r.n\right)$

Trong đó:

V_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

V_0: Tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %

2 Lãi kép

Là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

a. Lãi kép, gửi một lần: $T_n = T_0\left(1+r\right)^n$

Trong đó:

T_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0: Tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %

b. Lãi kép liên tục: $T_n = T_0.e^{nr}$

Trong đó:

T_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0: Tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %

c. Lãi kép, gửi định kỳ.

- ***Trường hợp gửi tiền định kì cuối tháng.***

Bài toán 1 Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là:

$$T_n = \frac{m}{r}\left[\left(1+r\right)^n - 1\right]$$

Chứng minh.

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	Chưa gửi	m
2	m	$m(1+r)+m$
3	$m(1+r)+m$	$m(1+r)^2+m(1+r)+m$
...	...	...
n		$m(1+r)^{n-1}+...+m(1+r)+m$

Vậy sau tháng n ta được số tiền $T_n=m(1+r)^{n-1}+...+m(1+r)+m=m\left[(1+r)^{n-1}+...+(1+r)+1\right]$, ta thấy trong ngoặc là tổng n số hạng của cấp số nhân có $u_1=1$, $u_n=(1+r)^{n-1}$, $q=1+r$. Ta biết rằng $S_n=u_1+...+u_n=u_1.\dfrac{q^n-1}{q-1}$ nên $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$.

Bài toán 2: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m=\dfrac{Ar}{(1+r)^n-1}$

Chứng minh.

Áp dụng **Bài toán 1** ta có số tiền thu được là $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$, mà để cho số tiền đó chính là A nên $A=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]\Leftrightarrow m=\dfrac{Ar}{(1+r)^n-1}$.

Bài toán 3: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được để bài cho là: $n=log_{1+r}\left(\dfrac{Ar}{m}+1\right)$

Chứng minh.

Áp dụng bài toán 4 ta có số tiền thu được là $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$, mà để cho số tiền đó chính là A nên $A=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]\Leftrightarrow m=\dfrac{Ar}{(1+r)^n-1}\Leftrightarrow(1+r)^n=\dfrac{Ar}{m}+1\Leftrightarrow n=log_{1+r}\left(\dfrac{Ar}{m}+1\right)$.

Như vậy trong trường hợp một này ta cần nắm vững công thức Bài toán 1 từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở Bài toán 2, Bài toán 3.

• ***Trường hợp gửi tiền định kì đầu tháng.***

Bài toán 4: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$

Chứng minh.

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	m	$m(1+r)$
2	$m(1+r)+m$	$m(1+r)^2+m(1+r)$
3	$m(1+r)^2+m(1+r)+m$	$m(1+r)^3+m(1+r)^2+m(1+r)$
...	...	...
n	...	$m(1+r)^n+...+m(1+r)$

Vậy sau tháng n ta được số tiền:

$$T_n=m(1+r)^n+...+m(1+r)=m\left[(1+r)^n+...+(1+r)\right]=m(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Bài toán 5: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m=\dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}$

Chứng minh.

Áp dụng Bài toán 1 ta có số tiền thu được là $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$, mà để cho số tiền đó chính là A nên $A=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)\Leftrightarrow m=\dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}$.

Bài toán 6: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được để bài cho là: $n=log_{1+r}\left[\dfrac{Ar}{m(1+r)}+1\right]$

Chứng minh.

Áp dụng Bài toán 1 ta có số tiền thu được là $T_n=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$, mà để cho số tiền đó chính là A nên $A=\dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]\Leftrightarrow m=\dfrac{Ar}{(1+r)^n-1}\Leftrightarrow (1+r)^n=\dfrac{Ar}{m}+1\Leftrightarrow n=log_{1+r}\left(\dfrac{Ar}{m}+1\right)$.

Như vậy trong trường hợp một này ta cần nắm vững công thức Bài toán 4 từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở Bài toán 5, Bài toán 6.

- ***Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì đầu tháng.***

Bài toán 7: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n=A(1+r)^n-m(1+r)\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$

Chứng minh.

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	$A-m$	$(A-m)(1+r)=A(1+r)-m(1+r)$
2	$A(1+r)-m(1+r)-m$	$A(1+r)^2-m(1+r)^2-m(1+r)$
3	$A(1+r)^2-m(1+r)^2-m(1+r)-m$	$A(1+r)^3-m(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)$
...	...	...
n	...	$A(1+r)^n-m(1+r)^n-...-m(1+r)^2-m(1+r)$

Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$T_n=A(1+r)^n-m(1+r)^n-...-m(1+r)^2-m(1+r)=A(1+r)^n-m\left[(1+r)^n+...+(1+r)\right].$$

$$=A(1+r)^n-m(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

• ***Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì cuối tháng.***

Bài toán 8: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n=A(1+r)^n-m(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$

Chứng minh.

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	A	$A(1+r)-m$
2	$A(1+r)-m$	$A(1+r)^2-m(1+r)-m$
3	$A(1+r)^2-m(1+r)-m$	$A(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)-m$
...	...	...
n	...	$A(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-...-m(1+r)-m$

Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$T_n=A(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-...-m(1+r)-m=A(1+r)^n-m\left[(1+r)^{n-1}+...+(1+r)+1\right]$$

$$=A(1+r)^n-m\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

Sau đây chúng ta cùng tìm hiểu việc áp dụng các lý thuyết trên vào các bài toán tính toán tiền lãi, tiền nợ phải trả như thế nào?

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một người muốn gửi tiết kiệm ở ngân hàng và hi vọng sau 4 năm có được 850 triệu đồng để mua nhà. Biết rằng lãi suất ngân hàng mỗi tháng trong thời điểm hiện tại là 0,45%. Hỏi người đó mỗi tháng phải gửi vào ngân hàng tối thiểu bao nhiêu tiền để đủ số tiền mua nhà? (Giả sử số tiền mỗi tháng là như nhau và lãi suất trong 4 năm là không thay đổi)

A. 15,833 triệu đồng. **B.** 16,833 triệu đồng.

C. 17,833 triệu đồng. **D.** 18,833 triệu đồng.

Bài 2: Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền đã gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền?(kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

A. 50 triệu 730 nghìn đồng **B.** 50 triệu 640 nghìn đồng

C. 53 triệu 760 nghìn đồng **D.** 48 triệu 480 nghìn đồng

Trích Đề thi Học kì I Chuyên Lương Văn Tụy Ninh Bình

Bài 3: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12% trên năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách sau: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng ba tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A phải trả cho ngân hàng theo cách đó là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m=\dfrac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng) **B.** $m=\dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng)

C. $m=\dfrac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng) **D.** $m=\dfrac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng)

Trích Đề Minh họa 1 Năm 2017

Bài 4: Ông A mong muốn sở hữu khoản tiền 20.000.000đ vào ngày 2/3/2012 ở một tài khoản lãi suất năm là 6,05%. Hỏi ông A cần đầu tư bao nhiêu tiền trên tài khoản này vào ngày 2/3/2007 để đạt được mục tiêu đề ra?

A. 14.909.965,25 (đồng) **B.** 14.909.965,26 (đồng)

C. 14.909.955,25 (đồng) **D.** 14.909.865,25 (đồng)

Bài 5: Ông Tuấn gửi 9,8 triệu đồng tiết kiệm với lãi suất 8,4% /năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách đó thì sau bao nhiêu năm ông Tuấn thu được tổng số tiền 20 triệu đồng (biết rằng lãi suất không thay đổi).

A. 9 năm **B.** 8 năm. **C.** 7 năm. **D.** 10 năm.

Bài 6: Ông Tuấn gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm ông Tuấn thu được gấp đôi số tiền ban đầu:

A. 8 **B.** 9 **C.** 6 **D.** 10

Bài 7: Anh A mua nhà trị giá ba trăm triệu đồng theo phương thức trả góp. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất anh A trả 5500000đ và chịu lãi suất số tiền chưa trả là 0,5%/tháng thì sau bao nhiêu tháng anh A trả hết số tiền trên.

A. $n = 64$ **B.** $n = 60$ **C.** $n = 65$ **D.** $n = 64,1$

Bài 8: Một người được lĩnh lương khởi điểm là 700.000 đ/ tháng. Cứ ba năm anh ta lại được tăng lương thêm 7%. Hỏi sau 36 năm làm việc anh ta được lĩnh tất cả bao nhiêu tiền.

A. 450788972 **B.** 450788900 **C.** 450799972 **D.** 450678972

Bài 9: Bà Hoa gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8%/năm. Sau 5 năm bà rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại bà tiếp tục đem gửi ngân hàng trong 5 năm với cùng lãi suất. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

A. $81,412tr$ **B.** $115,892tr$ **C.** $119tr$ **D.** $78tr$

Bài 10: Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi thêm tiền gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 210 triệu. **B.** 220 triệu. **C.** 212 triệu. **D.** 216 triệu.

Bài 11: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp ba số tiền ban đầu?

A. 9. **B.** 14. **C.** 8. **D.** 7.

Bài 12: Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất ban đầu 4% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Cứ sau một năm lãi suất tăng 0,3%. Hỏi sau 4 năm tổng số tiền người đó nhận được gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 119 triệu. **B.** 119,5 triệu. **C.** 120 triệu. **D.** 120,5 triệu

Bài 13: Anh Nam mong muốn rằng sau 6 năm sẽ có 2 tỷ để mua nhà. Hỏi anh Nam phải gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiền tiết kiệm như nhau hàng năm gần nhất với giá trị nào sau đây, biết rằng lãi suất của ngân hàng là 8% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn.

A. 253,5 triệu. **B.** 251 triệu. **C.** 253 triệu. **D.** 252,5 triệu.

Bài 14: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 quý, với lãi suất $1,65\%$ một quý. Hỏi sao bao lâu người gửi có ít nhất 20 triệu đồng (bao gồm cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu ? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A. 16 quý **B.** 18 quý **C.** 17 quý **D.** 19 quý

Bài 15: Số tiền 58 000 000đ gửi tiết kiệm trong 8 tháng thì lấy về được 61 329 000đ. Lãi suất hàng tháng là?

A. 0,8% **B.** 0,6% **C.** 0,5% **D.** 0,7%

Bài 16: Cô giáo dạy văn gửi 200 triệu đồng loại kì hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 6,9% một năm thì sau 6 năm 9 tháng hỏi cô giáo dạy văn nhận được bao nhiêu tiền cả vốn và lãi biết rằng cô giáo không rút lãi ở tất cả các kì hạn trước và nếu rút trước ngân hàng sẽ trả lãi suất theo loại lãi suất không kì hạn là 0,002% một ngày (1 tháng tính 30 ngày).

A. 471688328,8 **B.** 302088933,9 **C.** 311392005,1 **D.** 321556228,1

Bài 17: Một người muốn sau 4 tháng có 1 tỷ đồng để xây nhà. Hỏi người đó phải gửi mỗi tháng là bao nhiêu tiền (như nhau). Biết lãi suất 1 tháng là 1%.

A. $M=\dfrac{1,3}{3}$ (tỷ đồng) **B.** $M=\dfrac{1}{1,01+(1,01)^2+(1,01)^3+(1,01)^4}$ (tỷ đồng)

C. $M=\dfrac{1.1,03}{3}$ (tỷ đồng) **D.** $M=\dfrac{1.(1,01)^3}{3}$ (tỷ đồng)

Bài 18: Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 5% một quý theo hình thức lãi kép (sau 3 tháng sẽ tính lãi và cộng vào gốc). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 50 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Cho biết số tiền cả gốc và lãi được tính theo công thức $T=A(1+r)^n$, trong đó A là số tiền gửi, r là lãi suất và n là số kì hạn gửi. Tính tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền.

A. 176,676 ≈ triệu đồng **B.** 178,676 ≈ triệu đồng

C. 177,676 ≈ triệu đồng **D.** 179,676 ≈ triệu đồng

Bài 19: Một người gửi tiền vào ngân hàng một số tiền là 100.000.000 đồng, họ định gửi theo kì hạn n năm với lãi suất là 12% một năm; sau mỗi năm không nhận lãi mà để lãi nhập vốn cho năm kế tiếp. Tìm n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40.000.000 đồng.

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Bài 20: Ông Tuấn vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất $0,85\%$ / tháng. Hợp đồng với ngân hàng ông A sẽ hoàn nợ trong n tháng: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng $11,589$ triệu đồng. Tìm n.

A. $n=8$ tháng **B.** $n=9$ tháng **C.** $n=10$ tháng **D.** $n=11$ tháng

Bài 21: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức $1,05\%$. Theo số liệu của Tổng cục Thống kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

A. 107232573 người. **B.** 107232574 người. **C.** 105971355 người. **D.** 106118331 người.

Bài 22: Một người gửi ngân hàng 80 triệu đồng theo hình thức lãi đơn với lãi suất 3% /quý. Hỏi sau ít nhất bao lâu, số tiền thu về hơn gấp rưỡi số tiền vốn.

A. 52 tháng. **B.** 51 tháng. **C.** 49 tháng. **D.** 50 tháng.

Bài 23: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 quý với lãi suất $1,65\%$ một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu?

A. 4 năm 9 tháng. **B.** 4 năm 3 tháng. **C.** 4 năm 8 tháng. **D.** 4 năm 6 tháng.

Bài 24. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi đơn với lãi suất 8% /năm. Hỏi sau 3 năm, tổng số tiền thu về là bao nhiêu?

A. 16 triệu đồng. **B.** 24 triệu đồng. **C.** 116 triệu đồng. **D.** 124 triệu đồng.

Bài 25. Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất hàng năm là 12% năm. Sau tháng đầu tiên, mỗi tháng người đó đều trả 10 triệu đồng. Hỏi sau 6 tháng người đó còn nợ ngân hàng bao nhiêu?

A. $41,219$ triệu đồng. **B.** $43,432$ triệu đồng. **C.** $40,600$ triệu đồng. **D.** $44,632$ triệu đồng.

Bài 26. Một người muốn mua chiếc Samsung Galaxy S7 Edge giá 18.500.000 đồng của cửa hàng Thế giới di động để tặng bạn gái ngày 20/10 nhưng vì chưa đủ tiền nên người đó đã quyết định chọn mua hình thức trả góp và trả trước 5 triệu đồng trong 12 tháng, với lãi suất là $3,4\%$/ tháng. Hỏi mỗi tháng, người đó sẽ phải trả cho công ty Thế giới Di động số tiền là bao nhiêu?

A. 1554000 triệu đồng. **B.** 1564000 triệu đồng.

C. 1584000 triệu đồng. **D.** 1388824 triệu đồng.

Bài 27. Anh A muốn xây một căn nhà. Chi phí xây nhà hết 1 tỉ đồng, hiện nay anh A có 700 triệu đồng. Vì không muốn vay tiền nên anh A quyết định gửi số tiền 700 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 12%/1 năm, tiền lãi của năm trước được cộng vào tiền gốc của năm sau. Tuy nhiên giá xây dựng cũng tăng mỗi năm 1% so với năm trước. Hỏi sau bao lâu anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền xây nhà? (kết quả lấy gần đúng đến 1 chữ số thập phân)

A. 3 năm 6 tháng. **B.** 3 năm 7 tháng. **C.** 12 năm 6 tháng. **D.** 3 năm 9 tháng.

Bài 28. Ông A gửi 150 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất $x\in[5\%;7\%]$ năm. Sau 4 năm ông ta rút tất cả tiền ra và vay thêm ngân hàng 40 triệu đồng cũng với lãi suất $x\%$. Ngân hàng cần lấy lãi suất x bao nhiêu để 3 năm nữa sau khi trả ngân hàng, số tiền của ông A còn lại nhỏ nhất (giả sử lãi suất không thay đổi).

A. $x=6\%$. **B.** $x=7\%$. **C.** $x=5\%$. **D.** $x=6.5\%$.

Bài 29. Để mua bộ sa lon, ông Bách phải lựa chọn: hoặc phải trả ngay 3.900.000 đồng hoặc trả 4.400.000 đồng sau 2 năm.

Với lãi suất hiện giá là 6%, ông Bách nên chon giải pháp nào ?

A. 3.900.000 đồng. **B.** 3.600.000 đồng. **C.** 4.000.000 đồng **D.** 3.700.000 đồng.

Bài 30. Ông Bách cần thanh toán các khoản nợ sau:

10.000.000 đồng thanh toán sau 2 năm

20.000.000 đồng thanh toán sau 5 năm

50.000.000 đồng thanh toán sau 7 năm

Tính thời gian thanh toán cho khoản nợ duy nhất thay thế 99.518.740 đồng (khoản nợ này có tiền vay ban đầu bằng tổng tiền vay ban đầu của ba khoản nợ trên), với mức lãi kép 4,5%.

A. 10.77 năm. **B.** 11.77 năm **C.** 12.77 năm **D.** 13.77 năm

Bài 31: Ông Bách thanh toán tiền mua xe bằng các kỳ khoản năm: 5.000.000 đồng, 6.000.000 đồng, 10.000.000 đồng và 20.000.000 đồng. Kỳ khoản đầu thanh toán 1 năm sau ngày mua. Với lãi suất áp dụng là 8%. Hỏi giá trị chiếc xe ông Bách mua là bao nhiêu?

A. 32.412.582 đồng. **B.** 35.412.582 đồng. **C.** 33.412.582 đồng. **D.** 34.412.582 đồng.

Bài 32: Trong vòng 4 năm, ông Bách gửi vào một tài khoản lãi suất 8% với các khoản tiền lần lượt là: 5.000.000 đồng, 6.000.000 đồng, 10.000.000 đồng, 20.000.000 đồng. Ngay sau khi gửi khoản tiền cuối cùng, tổng số tiền trong tài khoản của ông Bách là bao nhiêu?

A. 44.096.960 đồng. **B.** 46.096.960 đồng. **C.** 45.096.960 đồng. **D.** 43.096.960 đồng.

Bài 33: Ông Bách quyết định đầu tư mỗi năm 3.000.000 đồng vào một tài khoản tiết kiệm trong vòng 4 năm. Khoản đầu tiên được đầu tư vào tháng 7/2006

Lãi suất năm trên tài khoản này là 3,75%. Vào tháng 7/2010, ông Bách sở hữu bao nhiêu tiền?

A. 13.136.254 đồng. **B.** 13.692.033 đồng. **C.** 12.892.033 đồng. **D.** 13.892.033 đồng.

Bài 34: Ông Bách quyết định đầu tư mỗi năm 3.000.000 đồng vào một tài khoản tiết kiện trong vòng 4 năm. Khoản đầu tiên được đầu tư vào tháng 7/2006. Lãi suất năm trên tài khoản này là 3,75%. Thực ra, ông ta có thể đầu tư 750.000 đồng mỗi quý và ngân hàng đồng ý tính lãi suất tích lũy theo quý. Hỏi khoản tiền ông ta sở hữu vào tháng 7/2010 là bao nhiêu?

A. 12.998.136 đồng. **B.** 13. 869.146 đồng. **C.** 12.892.033 đồng. **D.** 13.892.033 đồng.

Bài 35: Biết rằng tỉ lệ lạm phát hằng năm của một quốc gia trong 10 năm qua là 5%. Năm 1994, nếu nạp xăng cho một ôtô là 24,95$. Hỏi năm 2000, tiền nạp xăng cho ôtô đó là bao nhiêu?

A. 33,44 $ **B.**44,44 $ **C.**44,33 $. **D.**35,44 $.

Bài 36: Một sinh viên được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng là 90 triệu đồng với lãi suất 0,9%/tháng. Nếu mỗi tháng sinh viên đó đều rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng trả lãi thì hàng tháng anh ta rút ra bao nhiêu tiền (làm tròn đến 1000 đồng) để đúng sau 4 năm đại học sẽ vừa hết số tiền cả vốn lẫn lãi

A. 2317000. **B.** 2417000. **C.** 2340000. **D.** 2298000.

Bài 37: Ông Bách dự tính mua trả chậm một chiếc xe gắn máy bằng cách trả ngay 2.200.000 đồng tiền mặt, 3.800.000 đồng cuối năm sau và 5.300.000 đồng cuối năm kế tiếp. Biết lãi suất áp dụng là 6,24%, hỏi rằng giá chiếc xe bao nhiêu?

A. 10 472 500 đồng **B.** 12 472 500 đồng **C.** 9 472 500 đồng **D.** 11 472 500 đồng

Bài 38: Ông Bách mua chiếc xe giá 10,5 triệu. Một công ty tài chính đề nghị ông Bách trả ngay 1.800.000 đồng tiền mặt, 2.900.000 đồng cuối 2 năm tiếp theo và 2.000.000 đồng cuối các năm thứ ba và thứ tư. Biết lãi suất áp dụng là 5,85%, hỏi ông Bách sau bốn năm còn nợ bao nhiêu tiền?

A. 3,55 triệu đồng **B.** 2,50 triệu đồng **C.** 4 triệu đồng **D.** 2 triệu đồng

Bài 39: Một người gửi 9,8 triệu đồng tiết kiệm với lãi suất $8,4\%$ /năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách đó thì sau bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền 20 triệu đồng (biết rằng lãi suất không thay đổi).

A. 9 năm **B.** 8 năm. **C.** 7 năm. **D.** 10 năm.

Bài 40: Ông Bách dự định đầu tư khoản tiền 20.000.000 đồng vào một dự án với lãi suất tăng dần: 3,35% trong 3 năm đầu; 3,75% trong 2 năm kế tiếp và 4,8% ở 5 năm cuối. Tính giá trị khoản tiền ông Bách nhận được cuối năm thứ 10.

A.30 triệu **B.**40 triệu **C.**25 triệu **D.**35 triệu

Bài 41: Ông Bách gửi vào tài khoản 7.000.000 đồng. Một năm sau ông rút ra 7.000.000. Một năm sau ngày rút ông nhận được khoản tiền 272.340 đồng. Tính lãi suất áp dụng trên tài khoản ông Bách.

A.3,75%. **B.**2,75% **C.**1,75% **D.**4,75%

Bài 42: Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,03\%$ / ngày. Hỏi sau ít nhất bao lâu, người đó lãi được hơn 2 triệu đồng?

A.611 ngày. **B.** 608 ngày. **C.** 610 ngày. **D.** 609 ngày.

Bài 43: Bạn Bình gửi tiết kiệm số tiền 58000000 đồng trong 8 tháng tại một ngân hàng thì nhận được được 61329000 đồng. Khi đó, lãi suất hàng tháng là:

A. $0,6\%$. **B.** 6%. **C.** $0,7\%$. **D.** 7%.

Bài 44: Ông Việt mua nhà trị giá ba trăm triệu đồng và vay ngân hàng theo phương thức trả góp. Nếu ông Việt muốn trả hết nợ trong vòng 5 năm và trả lãi với mức 6%/ năm thì mỗi tháng ông phải trả bao nhiêu tiền? (làm tròn đến nghìn đồng).

A. 5935 (nghìn đồng). **B.** 1500 (nghìn đồng).

C. 4935 (nghìn đồng). **D.** 6935 (nghìn đồng).

Bài 45: Anh Quang vay ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất $1,1\%$ /tháng. Anh Quang muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, anh bắt đầu hoàn nợ, và những lần tiếp theo cách nhau đúng một tháng. Số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 18 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, tổng số tiền lãi mà anh Quang phải trả là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian anh Quang vay.

A. 10773700 (đồng). **C.**10774000 (đồng). **B.** 10773000 (đồng). **D.**10773800 (đồng).

Bài 46: Anh A mua nhà trị giá ba trăm triệu đồng theo phương thức trả góp. Nếu anh A muốn trả hết nợ trong vòng 5 năm và phải trả lãi với mức 6% / năm thì mỗi tháng anh A phải trả bao nhiêu tiền? (làm tròn đến nghìn đồng). Biết rằng anh A hoàn nợ cuối mỗi tháng.

A.5935000 (đồng) **B.**5900000 (đồng) **C.**5940000 (đồng) **D.**5930000 (đồng)

Bài 47: Một sinh viên A mua máy tính xách tay theo hình thức trả góp với giá tiền 20 triệu đồng, mức lãi suất $1,2\%$ /tháng trong năm đầu tiên, mỗi tháng anh A phải trả 800 ngàn đồng, cả gốc và lãi. Sau một năm lãi suất lại tăng lên là $1,5\%$ /tháng và anh A phải trả 1 triệu đồng cả gốc và lãi mỗi tháng (trừ tháng cuối). Hỏi sau tối đa bao nhiêu tháng anh A trả hết nợ (tháng cuối trả không quá 500 ngàn đồng).

A. 25 tháng. **B.** 26 tháng. **C.** 27 tháng. **D.** 28 tháng.

Bài 48: Bạn Phương gửi vào ngân hàng 2 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng (tức là sau 3 tháng số tiền lãi sẽ được cộng vào tiền gốc và tính lại kỳ hạn mới). Gọi m là số tiền bạn Phương sẽ nhận được sau 3 năm. Tính m biết rằng lãi suất mỗi tháng là 0,48%?

A. $m = 2.10^6.(1+36.0,0048)$.

B. $m = 2.10^6.(1+36.0,0048)^3$.

C. $m = 2.10^6.(1+36.0,0048)^{36}$.

D. $m = 2.10^6.(1+36.0,0048)^{12}$.

Bài 49: Anh Quốc có 400 triệu đồng vì không đủ tiền để mua nhà, nên anh ta quyết định gửi tiền vào ngân hàng vào ngày 1/1/2017 để sau đó mua nhà với giá 700 triệu đồng. Hỏi nhanh nhất đến năm nào anh Quốc đủ tiền mua nhà. Biết rằng anh Quốc chọn hình thức gửi theo năm với lãi suất 7,5% một năm (lãi suất này không đổi trong các năm gửi), tiền lãi sau một năm được nhập vào vốn tính thành vốn gửi mới nếu anh Quốc không đến rút và ngân hàng chỉ trả tiền cho anh Quốc vào ngày 1/1 hàng năm nếu anh Quốc muốn rút tiền.

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** 2026.

Bài 50: Một bác nông dân vừa bán một con trâu được số tiền là 20.000.000 (đồng). Do chưa cần dùng đến số tiền nên bác nông dân mang toàn bộ số tiền đó đi gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 8.5% một năm thì sau 5 năm 8 tháng Bác nông dân nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi. Biết rằng Bác nông dân đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kì trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kì hạn 0.01% một ngày (1 tháng tính 30 ngày)

A. $31802750,09\,(vnd)$

B. $30802750,09\,(vnd)$

C. $32802750,09\,(vnd)$

D. $33802750,09\,(vnd)$

Bài 51: Biết rằng khi đỗ vào trường đại học X, mỗi sinh viên cần nộp một khoản tiền lúc nhập học là 5 triệu đồng. Bố mẹ Minh tiết kiệm để đầu mỗi tháng đều gửi một số tiền như nhau vào ngân hàng theo hình thức lãi kép. Hỏi mỗi tháng, họ phải gửi số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn) để sau 9 tháng, rút cả gốc lẫn lãi thì được 5 triệu đồng, biết lãi suất hiện tại là 0,5% / tháng.

A. 542.000 đồng. **B.** 555.000 đồng. **C.** 556.000 đồng. **D.** 541.000 đồng.

Trích đề thi học kì 1 THPT Phan Đình Phùng HN

Bài 52: Ông B gửi vào ngân hàng số tiền là 120 triệu đồng với lãi suất định kỳ hàng năm là 12% trên năm. Nếu sau mỗi năm, ông không đến ngân hàng lấy lãi thì tiền lãi sẽ cộng dồn vào vốn ban đầu. Hỏi sau đúng 12 năm kể từ ngày gửi, số tiền lãi L (không kể vốn) ông sẽ nhận được là bao nhiêu? (Giả sử trong thời gian đó, lãi suất ngân hàng không thay đổi).

A. $L = 12.10^7\left[(1,12)^{12} - 1\right]$ (VNĐ).

B. $L = 12.10^7\left[(1,12)^{12} + 1\right]$ (VNĐ).

C. $L = 12.10^{12}(1,12)^{12}$ (VNĐ)

D. $L = 12.10^7.0,12$ (VNĐ)

Trích đề thi học kì I Sở Lâm Đồng

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1

Giả sử người này gửi tiền ở thời điểm t nào đó, kể từ thời điểm này sau 4 năm (48 tháng) ông muốn có số tiền 850 triệu. Như vậy rõ ràng ta có thể coi đây là bài toán gửi tiền định kì đầu tháng.

Áp dụng Bài toán 5 ta có số tiền phải gửi mỗi tháng là:

$$m=\frac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}$$

Theo đề bài: $n=48$ tháng, $r=0,45\%=\frac{9}{2000}$, tiền thu được: 850 triệu đồng.

Thay vào: $m=\dfrac{850\,000\,000}{\dfrac{\left(1+\dfrac{9}{2000}\right)\left[\left(1+\dfrac{9}{2000}\right)^{48}-1\right]}{9:2000}}=15,833$ triệu đồng.

Chọn A.

Bài 2

Ta có công thức tính: tổng số tiền A thu được, nếu ban đầu gửi vào a đồng, từ đầu tháng sau gửi thêm a đồng (không đổi) vào đầu mỗi tháng với lãi suất r% trong n tháng: $A=a+\frac{a}{r}(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]$

Áp dụng : với a = 4 triệu đồng, r = 1%, $n=11$ (từ đầu tháng 2 đến cuối tháng 12)

$$A=\frac{4000000}{1\%}(1+1\%)\left[(1+1\%)^n-1\right]+4000000=50730012,05$$

Chọn A

Bài 3

Lãi suất 12%/ 1 năm tương ứng 1%/tháng nên $r=0,01$ (do vay ngắn hạn).

Số tiền gốc sau 1 tháng là: $T+T.r-m=T(1+r)-m$

Số tiền gốc sau 2 tháng là:

$$\left[T(1+r)-m\right]+\left[T(1+r)-m\right]x-m=T(1+r)^2-m\left[(1+r)+1\right]$$

Số tiền gốc sau 3 tháng là: $T(1+r)^3-m\left[(1+r)^2+1+r+1\right]=0$

Do đó $m=\dfrac{T(1+r)^3}{(1+r)^2+1+r+1}=\dfrac{T(1+r)^3.r}{(1+r)^3-1}=\dfrac{1,01^3}{1,01^3-1}$ (triệu đồng).

Chọn B.

Bài 4:

Gọi V_0 là lượng vốn cần đầu tư ban đầu, lượng vốn sẽ được đầu tư trong 5 năm nên ta có: $20.000.000 = V_0 * (1+0,0605)^5$

$\Rightarrow V_0 = 20.000.000 * (1+0,0605)^{-5} = 14.909.965,25$ đ.

Chọn A

Bài 5:

Gọi P là số tiền gửi ban đầu. Sau n năm $(n \in \mathbb{N})$, số tiền thu được là:

$P_n = P(1+0,084)^n = P(1,084)^n$.

Áp dụng với số tiền bài toán cho ta được:

$$20 = 9,8.(1,084)^n \Leftrightarrow (1,084)^n = \frac{20}{9,8} \Leftrightarrow n = \log_{1,084}\left(\frac{20}{9,8}\right) \approx 8,844.$$

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 9$.

Chọn A.

Bài 6:

Gọi a là số tiền ban đầu mà người đó gửi vào ngân hàng và n $(n \in \mathbb{N})$ là số năm mà số tiền nhận được tăng gấp đôi.

Theo công thức lãi kép, ta có phương trình:

$$a\left(1+\frac{8,4}{100}\right)^n = 2a \Leftrightarrow \left(\frac{271}{250}\right)^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{271/250} 2$$

Vì lãi suất được tính theo năm nên phải đến cuối năm người đó mới nhận được tiền. Do đó, $n = 9$.

Chọn B.

Bài 7:

Gọi số tiền anh A nợ ban đầu là M, lãi suất hàng tháng là $r\%$, số tiền hằng tháng anh ta phải trả là a.

Với đề bài này có thể coi là "người nợ tiền nợ vào đầu tháng".

Người này trả hết nợ, nghĩa là: $M(1+r)^n - \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$

Thay số rồi bấm Shift Solve sẽ tính được $n = 64$ với:

$M = 300000000,\ r = 0,5\%,\ a = 5500000$

Chọn A.

Bài 8:

Từ đầu năm thứ 1 đến hết năm thứ 3, anh ta nhận được:

$u_1 = 700.000 \times 36$

Từ đầu năm thứ 4 đến hết năm thứ 6, anh ta nhận được:

$u_2 = 700.000(1+7\%) \times 36$

Ghi chú của em

Từ đầu năm thứ 7 đến hết năm thứ 9, anh ta nhận được:

$u_3 = 700.000(1+7\%)^2 \times 36$

...

Từ đầu năm thứ 34 đến hết năm thứ 36, anh ta nhận được:

$u_{12} = 700.000(1+7\%)^{11} \times 36$

Vậy sau 36 năm anh ta nhận được tổng số tiền là:

$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{12}$

$$= 700000 \times 36 \times \frac{1-(1+7\%)^{12}}{1-(1+7\%)} = 450788972.$$

Chọn A.

Bài 9:

Sau 5 năm bà Hoa rút được tổng số tiền là: $100(1+8\%)^5 = 146.932$ triệu

Suy ra số tiền lãi là: $100(1+8\%)^5 - 100 = L_1$

Bà dùng một nửa để sửa nhà, nửa còn lại gửi vào ngân hàng.

Suy ra số tiền bà gửi tiếp vào ngân hàng là: $73.466(1+8\%)^5 = 107.946$ triệu. Suy ra số tiền lãi là $107.946 - 73.466 = L_2$.

Vậy số tiền lãi bà Hoa thu được sau 10 năm là: $\sum L = L_1 + L_2 \approx 81,412tr$

Chọn A.

Bài 10:

3 tháng là 1 quý nên 6 tháng là 2 quý và 1 năm ứng với 4 quý.

Sau 6 tháng người đó có tổng số tiền là: $100.(1+2\%)^2 = 104,04tr$

Người đó gửi thêm 100 tr nên sau tổng số tiền khi đó là:

$104,04 + 100 = 204,04tr$

Suy ra số tiền sau 1 năm nữa là: $204,04(1+2\%)^4 \approx 220tr$

Chọn B.

Bài 11:

$P_n = P(1+0,084)^n$

Số tiền sau n năm gấp đôi số tiền ban đầu là:

$3P = P(1+0,084)^n \Leftrightarrow P = \log_{1,084} 3 \approx 13,6 = 14$ năm

Chọn B.

Bài 12:

Năm thứ I: $T_1 = 100\left(1+\frac{4}{100}\right)$

Năm thứ II: $T_2 = T_1\left(1+\frac{4,3}{100}\right)$

Ghi chú của em

Năm thứ III: $T_3 = T_2\left(1+\frac{4,6}{100}\right)$

Năm thứ IV: $T_4 = T_3\left(1+\frac{4,9}{100}\right)$

Tổng số tiền nhận được sau 4 năm là: $T = T_4 = 119tr$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 13:

Cuối năm thứ I: $T_1 = a + a.m = a(1+m)$

Đầu năm thứ II:

$T_2 = a(1+m)+a = a\left[(1+m)+1\right]$

$= \frac{a}{\left[(1+m)-1\right]}\left[(1+m)^2-1\right] = \frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right]$

Cuối năm thứ II:

$T_3 = \frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right]+\frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right].m = \frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right].(1+m)$

Suy ra cuối năm thứ n: $T_n = \frac{a}{m}\left[(1+m)^n-1\right].(1+m)$

(Trong đó a là số tiền ban đầu, m là lãi suất, n là số tháng)

Áp dụng: $T = 2.1000tr, n = 6, m = 0,08 \Rightarrow a \approx 252,5tr$

Chọn D.

Bài 14:

Cách 1:

Tổng số tiền vốn lẫn lãi sau k (quý là):

$\sum S = 15\left(1+1,65\%\right)^k = 15.1,065^k tr$

$\Rightarrow \lg S = \lg\left(15.1,065^k\right) \Rightarrow k = \frac{\lg S - \lg 15}{\lg 1,065}$

Thời gian có 20 triệu $\Leftrightarrow k = \frac{\lg 20 - \lg 15}{\lg 1,065} \approx 17,6 = 18$ (quý)

Vậy sau 18 quý người đó có ít nhất 20 triệu đồng

Cách 2:

$P_n = P(1+r)^n, P_n = 20tr, P = 15tr$

$\Rightarrow 20 = 15\left(1+0,0165\right)^n \Rightarrow 1,0165^n = \frac{4}{3} \Rightarrow n = \log_{1,0165}\frac{4}{3} = 18$

Chọn B.

Bài 15:

$61,329 = 58(1+q)^8$ (q là lãi suất)

$\Leftrightarrow (1+q)^8 = \frac{61,329}{58} \Leftrightarrow (1+q) = \sqrt[8]{\frac{61,329}{58}} \Leftrightarrow q = \sqrt[8]{\frac{61,329}{58}} - 1 \approx 0,7\%$

Chọn D.

Bài 16:

Kì hạn 6 tháng nên mỗi năm có 2 kì hạn

$\Rightarrow$ Lãi suất mỗi kì hạn là: $r = \dfrac{6,9\%}{2} = 3,45\%$

6 năm 9 tháng = 81 tháng = 13.6 + 3 tháng = 13 kì hạn + 3 tháng

Số tiền cô giáo thu được sau 13 kì là: $T_1 = 200(1+3,45\%)^{13}$

Số tiền cô giáo thu được trong 3 tháng tiếp theo là:

$T_2 = 200(1+3,45\%)^{13}.0,002\%.3.30$

Vậy số tiền cô giáo nhận được sau 6 năm 9 tháng là:

$T = T_1 + T_2 \approx 311,3920051$

Chọn C.

Bài 17:

Gọi T_n là số tiền thu được ở cuối tháng n, x là số tiền thêm vào mỗi tháng.

Ta có:

$$\begin{cases} T_1 = x(1+1\%) = 1,01x \\ T_2 = T_1 + x + (T_1 + x).1\% = (T_1 + x).1,01 \end{cases}$$

$\Rightarrow T_2 = (1,01x + x).1,01 = 1,01^2 x + 1,01x$

Suy ra $T_n = 1,01x + 1,01^2 x + \ldots + 1,01^n x$

Sau 4 tháng bằng đầu tháng thứ nhất đến cuối tháng

$\Rightarrow T_4 = 1,01x + 1,01^2 x + 1,01^3 x + 1,01^4 x = 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{1,01 + 1,01^2 + 1,01^3 + 1,01^4}$

Chọn B.

Bài 18:

Sau 6 tháng (2 quý = 2 kì hạn) người đó có số tiền:

$T_1 = 100(1+5\%)^2 = 110,25$ triệu

Sau khi gửi thêm 50 triệu thì số tiền trong ngân hàng là: $T_2 = T_1 + 50$

Suy ra số tiền thu được sau 6 tháng nữa để tròn 1 năm là:

$T_3 = T_2(1+5\%)^2 = (T_1 + 50)(1+5\%)^2$

Vậy tổng số tiền thu được sau 1 năm là:

$T = T_3 = (T_1 + 50)(1+5\%)^2 \approx 176,68$

Chọn A.

Bài 19:

Ta có: số tiền lãi $> 40.000.000$

$\Rightarrow$ Số tiền lãi và vốn $> 140.000.000$

Ghi chú của em

Số tiền nhận được sau n năm: $100.000.000\times(1,12)^n$

Theo đề bài ta có:

$100.000.000\times(1,12)^n > 140.000.000$

$\Leftrightarrow 1,12^n > 1,4$

$\Leftrightarrow n > 2,97 \Rightarrow n = 3$

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 20:

$$T_n = a(1+r)^n - m\left[\frac{(1-r)^n-1}{r}\right] = 100(1+0,85\%)^n - 11,589\left[\frac{(1+0,85)^n-1}{0,85\%}\right] = 0$$

$\Rightarrow n \approx 8,9 \Rightarrow n = 9$

Chọn B.

Bài 21:

$$x = 90728900.\left(1+\frac{1,05}{100}\right)^{16} \Rightarrow x \approx 107232574.$$

Chọn B.

Bài 22:

Gọi x là số quý để thu về số tiền hơn gấp rưỡi vốn $\left(\frac{1}{2}.80 = 40\right)$

Vì hình thức lãi đơn nên ta có: $80.3\%.x > 40 \Leftrightarrow x > \frac{50}{3} = 16,(6)$

Suy ra x phải bằng 17 quý

Vậy số tháng cần là: $17.3 = 51$ tháng

Chọn B.

Bài 23:

Ta có số tiền thu được sau t quý là $T = 15(1+1,65\%)^t$

Theo đề bài ta có:

$T \ge 20 \Leftrightarrow 15(1+1,65\%)^t \ge 20 \Leftrightarrow (1+1,65\%)^t \ge \frac{4}{3}$

Log cơ số $\frac{4}{3}$ hai vế ta được:

$log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%)^t \ge log_{\frac{4}{3}}\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow t.log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%) \ge 1$

$$\Leftrightarrow t \ge \frac{1}{log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%)} = 17,6$$

Suy ra số quý tối thiểu: $t = 18$ quý = 4 năm 6 tháng

Chọn D.

Bài 24:

Lãi đơn nên ta có:

Tổng số tiền sau 1 năm $=100+100.0,08=108$ (triệu)

2 năm $=108+100.0,08=116$ (triệu)

3 năm $=116+100.0,08=124$ (triệu)

Chọn D.

Ghi chú của em

Bài 25:

Số tiền còn nợ sau n tháng: $A(1+r)^n-a.\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$

Trong đó:

A: số tiền nợ bằng 100 triệu

r: lãi suất 1 tháng bằng $\dfrac{12}{12}=1\%$

a: số tiền trả mỗi tháng bằng 10

$n=6$

Số tiền còn nợ: $100\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^6-10.\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^6-1}{\dfrac{1}{100}}\approx 44,632$ triệu.

Chọn D.

Bài 26:

Gọi A là số tiền còn lại cần phải trả ban đầu, x là số tiền cần trả mỗi tháng, r là lãi suất mỗi tháng.

Gọi T_n là số tiền còn lại cần phải trả ở cuối tháng n

Ta có:

$T_1=A(1+r)-x$

$T_2=\left[A(1+x)-x\right](1+r)-x=A(1+r)^2-x\left[(1+r)+1\right]$

$=A(1+r)^2-\dfrac{x\left[(1+r)^2-1\right]}{r}$

$T_3=A(1+r)^3-\dfrac{x\left[(1+r)^2-1\right]}{r}(1+r)-x=A(1+r)^3-\dfrac{x\left[(1+r)^3-1\right]}{r}$

$T_n=A(1+r)^n-\dfrac{x\left[(1+r)^n-1\right]}{r}$

Số tiền người đó cần trả trong 12 tháng là:

$A=18\,500\,000-5\,000\,000=13\,500\,000$

Suy ra $T_{12}=13\,500\,000(1+3,4\%)^{12}-\dfrac{x\left[(1+3,4\%)^{12}-1\right]}{3,4\%}$

$\Rightarrow x=1388823,974$

Chọn D.

Bài 27.

Gọi V_n là tổng số tiền vật liệu sau n năm, T_n là tổng số tiền thu được sau n năm.

Ta có: $V_0 = 1$ tỉ

$V_1 = 1(1+1\%)$ tỉ

$V_2 = 1(1+1\%).1\% + 1(1+1\%) = 1(1+1\%)^2$ tỉ

$\Rightarrow V_n = 1.(1+1\%)^n$ tỉ

Số tiền thu được sau n năm: $T_n = 0,7.(1+12\%)^n$ tỉ

Để xây được nhà thì ở năm thứ n thì số tiền anh thu được phải bằng số tiền vật liệu

$\Rightarrow T_n = V_n$

$\Leftrightarrow 0,7.(1+12\%)^n = 1.(1+1\%)^n$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1-12\%}{1+1\%}\right)^n = \dfrac{1}{0,7}$

$\Leftrightarrow n = log_{\frac{1+12\%}{1+1\%}} \dfrac{1}{0,7} \approx 3,5 = 3$ năm 6 tháng.

Chọn A.

Bài 28.

Số tiền của ông sau 4 năm là $150(1+x)^4$.

Số tiền của ông nợ ngân hàng sau 3 năm từ khi rút tiền là: $40(1+x)^3$.

Sau khi trả ngân hàng số tiền ông còn lại $f(x) = 150(1+x)^4 - 40(1+x)^3$

.

Ta có $f'(x) = 600(1+x)^3 - 120(1+x)^2 \geq 0$. Vẽ bảng biến thiên thấy $f(x)$ nhỏ nhất tại $x = 5\%$.

Chọn C.

Bài 29.

Hiện giá của 4.400.000 đồng trả sau 2 năm là:

$V_0 = 4.400.000.(1,06)^{-2} = 3.915.984,34$ đồng $> 3.900.000$ đồng. Do đó ông Bách nên chọn giải pháp trả ngay 3.900.000 đồng.

Chọn A

Bài 30.

Gọi n là số năm xác định thời gian thanh toán của khoản nợ duy nhất. Sự tương đương giữa nhóm 3 khoản nợ và khoản nợ duy nhất:

$9,951874.1,045^{-n} = 1.1,045^{-2} + 2.1,045^{-5} + 5.1,045^{-7} = 6,194774$

Ta được: $9,951874 = 6,194774.1,045^n$

Ghi chú của em:

Lấy logarit 2 vế ta được:

$\ln 9,951874 = \ln 6,194774 + n.\ln 1,045$

$\Rightarrow n = \dfrac{\ln 9,951874 - \ln 6,194774}{\ln 1,045} \approx 10,77$ năm.

Chọn A

Ghi chú của em

Bài 31:

Giá trị chiếc xe là:

$V_0 = 5.1,08^{-1} + 6.1,08^{-2} + 10.1,08^{-3} + 20.1,08^{-4} = 32.412.582$ đồng

Chọn A

Bài 32:

Số tiền trong tài khoản cần tìm là:

$V_n = 5.1,08^3 + 6.1,08^2 + 10.1,08 + 20 = 44.096.960$ (đồng).

Chọn A

Bài 33:

Ta có sơ đồ trong phần lí thuyết về lãi suất tiền gửi theo thể thức lãi kép, trong đó giá trị cần tìm là giá trị nhận được ở V_4.

Áp dụng hệ thức đã được chứng minh ban đầu ta có:

$V_4 = 3.000.000(1+0.0375)\dfrac{1,0375^4 - 1}{0,0375} \approx 13.136.254$ đồng

Chọn A.

Bài 34:

Trước hết, ta cần tìm lãi suất quý t_q tương đương với lãi suất năm 3.75%. Dùng hệ thức ta được $\left(1+t_q\right)^4 = 1,0375 \Leftrightarrow t_q = 0,9246\%$

$V_{16} = 750.000.(1+0,009246)\dfrac{1,009246^{16} - 1}{0,009246} \approx 12.988.136$

Chọn A.

Bài 35:

Ta có: $A\left(1+r\right)^n = 24.95\left(1+0,05\right)^6 = 33,44\$$.

Chọn A

Bài 36:

Sau tháng thứ I: $A(1+r)-a$

Sau tháng thứ II: $\left[A(1+r)-a\right](1+r)-a = A(1+r)^2 - a\left[(1+r)+1\right]$

Sau tháng thứ III:

$\left[A(1+r)^2 - a\left[(1+r)+1\right]\right](1+r) - a = A(1+r)^3 - a\left[(1+r)^2 + (1+r) + 1\right]$

$A(1+r)^n - a\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + 1\right] = A(1+r)^n - a\left[1.\dfrac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}\right]$

Ghi chú của em

Sau tháng thứ n: $= A(1+r)^n - a\left[\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$

Rút hết: $\Leftrightarrow 0 = A(1+r)^n - a\left[\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right] \Leftrightarrow a = \dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

Với A: số tiền gửi, r: lãi tháng, a: số tiền rút ra, n: số tháng

Áp dụng: $A = 90.000.000,\ r = 0.9\%, n = 48$.

Chọn A.

Bài 37:

Gọi x là giá của chiếc xe:

m_1, m_2 lần lượt là số tiền cần trả còn lại cuối năm thứ nhất và năm thứ 2

Ta có $\begin{cases} x - 2200000 = m_1 \\ m_1(1+6,24\%) - 3800000 = m_2 \\ m_2(1+6,24\%) - 5300000 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10472500,77 \\ m_1 = 8272500,77 \\ m_2 = 4988704,819 \end{cases}$

Chọn A.

Bài 38:

Sau khi trả ngay ông Bách còn nợ lại: 8 700 000 đồng

Sau 2 năm ông Bách nợ lại: $8,7(1+5,85\%) - 2,9 = 6,85$ triệu đồng

Sau năm thứ 3 ông Bách nợ lại: $6,85(1+5,85\%) - 2 = 5,25$ triệu

Sau năm thứ 4 ông Bách còn nợ lại: $5,25(1+5,85\%) - 2 \approx 3,55$ triệu đồng.

Sau 4 năm ông Bách vẫn chưa trả hết nợ.

Chọn A.

Bài 39:

Gọi P là số tiền gửi ban đầu. Sau n năm $(n \in \mathbb{N})$, số tiền thu được là:

$P_n = P(1+0,084)^n = P(1,084)^n$.

Áp dụng với số tiền bài toán cho ta được:

$20 = 9,8.(1,084)^n \Leftrightarrow (1,084)^n = \dfrac{20}{9,8} \Leftrightarrow n = \log_{1,084}\left(\dfrac{20}{9,8}\right) \approx 8,844$.

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 9$.

Chọn A.

Bài 40:

Số tiền ông Bách thu được trong 3 năm đầu:

$T_1 = 20000000(1+3,35\%)^3$

Số tiền ông Bách nhận được trong 2 năm tiếp theo:

$T_2 = T_1(1+3,75\%)^2$

Số tiền ông Bách thu được sau 5 năm: $T_3 = T_2\left(1+4,8\%\right)^5$

Vậy số tiền ông Bách thu được sau 10 năm là:

$$T = T_3 = 20000000\left(1+3,35\%\right)^3.\left(1+3,75\%\right)^2.\left(1+4,8\%\right)^3 = 30043052,9$$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 41:

Số tiền ông Bách nhận được sau 1 năm: $A\left(1+r\right)$, trong đó A là số tiền ban đầu, r là lãi suất

Sau đó ông rút số tiền bằng số tiền ban đầu nên số tiền còn lại trong ngân hàng: $A\left(1+r\right)-A=Ar$

Sau 1 năm ông nhận được số tiền 272.340 đồng

Suy ra $Ar\left(1+r\right)=272.340 \Leftrightarrow r(1+r)=\dfrac{272340}{700000}=\left[\begin{array}{l} r\approx 0,0375=3,75\% \\ r\approx -1,037<0(L) \end{array}\right.$

Chọn A

Bài 42:

Sau n ngày người này được số tiền $10\left(1+0.0003\right)^n$.

Do đó $10\left(1+0.0003\right)^n-10=2 \Leftrightarrow n\approx 608$.

Chọn B.

Bài 43:

Lãi được tính theo công thức lãi kép, vì 8 tháng sau bạn An mới rút tiền.

Ta có công thức tính lãi:

$$58000000(1+x)^8=61329000 \Leftrightarrow (1+x)^8=\frac{61329}{58000} \Leftrightarrow 1+x=\sqrt[8]{\frac{61329}{58000}}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt[8]{\frac{61329}{58000}}-1\approx 0,007=0,7\%$$

Chọn C.

Bài 44:

Gọi x là số tiền mà ông Việt phải trả mỗi năm.

Áp dụng công thức:

$$x=\frac{A.r.\left(1+r\right)^n}{\left(1+r\right)^n-1}=\frac{300.10^6.0,06.\left(1+0,06\right)^5}{\left(1+0,06\right)^5-1}=71218920,13 \text{ (đồng)}.$$

Suy ra số tiền ông Việt phải trả mỗi tháng là:

$$a=\frac{71218920,13}{12}=5934910,011 \text{ (đồng)}$$

≈ 5935 (nghìn đồng).

Chọn A.

Bài 45:

Số tiền m anh Quang phải trả hàng tháng là:

$$m = \frac{100.0,011.(1,011)^{18}}{(1,011)^{18}-1}.10^6.$$

Tổng số tiền lãi anh Quang phải trả là:

$(m.18-100)10^6 \approx 10774000$ (đồng).

Chọn C

Bài 46:

Thay vào công thức: $M(1+r)^n - \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$

Với $M = 300000000$, $r = 6$ (%/năm), $n = 5$. Tìm a (tiền trả hàng năm):

Vậy tiền trả hàng tháng sẽ áp dụng công thức:

$$M(1+r)^n - \frac{12b}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$$

Với b là tiền trả hàng tháng.

Kết luận: Số tiền phải trả hàng tháng là 5935000 (đồng).

Chọn A

Bài 47:

$$T_1 = 20000.(1+1,2\%)^{12} - 800.\left[\frac{(1+1,2\%)^{12}-1}{1,2\%}\right]$$

$$= 12818,25087.$$

T_1: Số tiền còn nợ sau 1 năm.

Số tiền phải trả tiếp theo trừ tháng cuối cùng (n: tháng):

$$T_2 = T_1(1+1,5\%)^n - 1000.\left[\frac{(1+1,5\%)^n-1}{1,5\%}\right] < 500$$

Dùng Table $\Rightarrow n = 15$

Vậy số tháng phải trả: $12 + 15 = 27$.

Đáp án C.

Bài 48:

Kỳ hạn 3 tháng nên sau 3 năm ta có 12 kỳ hạn suy ra số tiền có được sau 12 kỳ hạn là $m = 2.10^6.(1+36.0,0048)^{12}$.

Đáp án D.

Bài 49:

Số tiền có được vào ngày 1/1/2018 là $400(1+7,5\%)$ triệu đồng.

Số tiền có được vào ngày 1/1/2019 là:

$\left[400(1+7,5\%)\right].(1+7,5\%) = 400(1+7,5\%)^2$ triệu đồng.

Ghi chú của em

Suy ra số tiền sau n năm gửi là $400(1+7,5\%)^n$ triệu đồng. Vì cần 700 triệu mua nhà nên ta có phương trình $400(1+7,5\%)^n = 700 \Leftrightarrow n = \log_{1,075}\left(\dfrac{7}{4}\right)$ $\approx 7,74$. Vậy sau tám năm anh Quốc có thể mua được nhà tức là nhanh nhất đến năm 2025 anh Quốc có thể mua được nhà.

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 50:

Một kì hạn 6 tháng có lãi suất là $\dfrac{8.5\%}{12}.6 = \dfrac{4.25}{100}$. Sau 5 năm 6 tháng (có nghĩa là 66 tháng tức là 11 kỳ hạn), số tiền cả vốn lẫn lãi bác nông dân nhận được là: $A = 20000000.\left(1+\dfrac{4.25}{100}\right)^{11}$ (vnd). Vì 5 năm 8 tháng thì có 11 kỳ hạn và dư 2 tháng hay dư 60 ngày nên số tiền A được tính lãi suất không kỳ hạn trong 60 ngày là:

$B = A.\dfrac{0.01}{100}.60 = 120000.\left(1+\dfrac{4.25}{100}\right)^{11}$ (vnd). Suy ra sau 5 năm 8 tháng số tiền bác nông dân nhận được là:

$$C = A + B = 20000000.\left(1+\dfrac{4.25}{100}\right)^{11} + 120000.\left(1+\dfrac{4.25}{100}\right)^{11}$$

$$= 31802750,09\,(vnd).$$

Chọn A.

Bài 51:

Đặt $r = 0.5$, $A = 5.10^6$ đồng. Cứ đầu tháng gửi tiết kiệm m triệu:

Vậy sau tháng n ta được số tiền:

$$m(1+r)^n + ... + m(1+r) = m\left[(1+r)^n + ... + (1+r)\right] = m(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Theo đề $A = m(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow m = \dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$, thay số ta được đáp án A.

Chọn A.

Bài 52:

$L_1 = 12.10^7.0,12$

$L_2 = \left(12.10^7.0,12 + 12.10^7\right).0,12 = 12.10^7.1,12.0,12$

Vậy sau hai năm thì tổng số tiền lãi là:

$L_1 + L_2 = 12.10^7.0,12 + 12.10^7.1,12.0,12 = 12.10^7.0,12.2,12$

$= 12.10^7.(1,12-1)(1,12+1) = 12.10^7.(1,12^2 - 1)$

Tương tự như vậy ta sẽ có được số tiền lãi nhận được sau 12 năm là:

$L = 12.10^7\left[(1,12)^{12} - 1\right]$

Chọn A.

CHỦ ĐỀ 2.

CÁC DẠNG BÀI TOÁN KHÁC

Ngoài những ứng dụng trên ta còn có thể sử dụng Hàm số Mũ, Hàm số Logarit trong việc tính dân số, tính lượng khí, tính độ PH …

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Theo dự báo, với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết.

A. $n=41$ **B.** $n=42$ **C.** $n=43$ **D.** $n=41,1$

Bài 2: Biết thể tích khí CO_2 năm 1998 là $V\left(m^3\right)$. 10 năm tiếp theo, mỗi năm thể tích CO_2 tăng $m\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 mỗi năm tăng $n\%$. Tính thể tích CO_2 năm 2016?

A. $V\dfrac{(100+m)^{10}(100+n)^{10}}{10^{40}}$. **B.** $V\dfrac{(100+m)^{10}(100+n)^{8}}{10^{36}}$.

C. $V\dfrac{(100+m)^{10}(100+n)^{10}}{10^{36}}$. **D.** $V\dfrac{(100+m)^{10}(100+n)^{8}}{10^{20}}$.

Bài 3: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức. $S=A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

A. 2026 **B.** 2022 **C.** 2020 **D.** 2025

Bài 4: Một lon nước soda $80°F$ được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại $32°F$. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t)=32+48.(0,9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là $50°F$?

A. 1,56 **B.** 9,3 **C.** 2 **D.** 4

Bài 5: Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

A. 8.9 **B.** 33.2 **C.** 2.075 **D.** 11

Bài 6: Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t so với thời điểm $t=0$ là $N(t)=N_0e^{kt}$, N_0 là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t=0$, k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con, biết rằng $N_0=100$?

A. 27 **B.** 27,1 **C.** 26 **D.** 28

Bài 7: Giả sử $n = f(t) = n_0.2^t$ là số lượng cá thể trong một đám vi khuẩn tại thời điểm t (giờ), n_0 là số lượng cá thể lúc ban đầu. Tốc độ phát triển về số lượng của vi khuẩn tại thời điểm t chính là $f'(t)$. Giả sử mẫu thử ban đầu của ta có $n_0 = 100$ vi khuẩn. Vậy tốc độ phát triển sau 4 giờ là bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 1600 **B.** 1109 **C.** 500 **D.** 3200

Bài 8: Cho phương trình phản ứng tạo thành Nitơ (IV) Oxit từ Nitơ (II) Oxit và Oxy là $2NO + O_2 \xrightleftharpoons{dk,t^0,xt} 2NO_2$. Biết rằng đây là một phản ứng thuận nghịch. Giả sử x, y lần lượt là nồng độ phần trăm của khí NO và O_2 tham gia phản ứng. Biết tốc độ phản ứng hóa học của phản ứng trên được xác định $v = kx^2y$, với k là hằng số của tốc độ phản ứng. Để tốc độ phản ứng xảy ra nhanh nhất thì tỉ số giữa $\frac{x}{y}$ là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 3

Bài 9: Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây bị chết thì hiện tượng quang hợp của nó cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cậy sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức: $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{}{5750}}$ $(\%)$

Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Niên đại của công trình kiến trúc đó gần với số nào sau đây nhất:

A. 41776 năm **B.** 6136 năm **C.** 3574 năm **D.** 4000 năm

Bài 10: Cho phản ứng hóa học $N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$ ở nơi có nhiệt độ 45^0C, các nhà hóa học nhận thấy sự biến thiên nồng độ mol/l của N_2O_5 theo thời gian luôn tỷ lệ thuận với nồng độ mol/l của N_2O_5 với hệ số tỷ lệ $k = -0,0005$. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì nồng độ mol/l của N_2O_5 bằng 90% giá trị ban đầu.

A. Khoảng 211 giây. **B.** Khoảng 301 giây. **C.** Khoảng 102 giây. **D.** Khoảng 527 giây.

Bài 11: Trong toán rời rạc, khi tìm kiếm một phần tử trong một tập hợp có n phần tử đã sắp xếp tăng dần bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân thì trong trường hợp xấu nhất, độ phức tạp của thuật toán được tính bằng $\theta(\log n)$ với $\log n = \log_2 n$. Vậy độ phức tạp của thuật toán tìm kiếm nhị phân trong trường hợp xấu nhất khi tìm kiếm phần tử trong tập hợp $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,19,20,21\}$

A. $\theta(\log_2 20)$. **B.** $\theta(\log_2 19)$. **C.** $\theta(\log_2 18)$. **D.** $\theta(\log_2 21)$.

Bài 12: Năng lượng của một trận động đất được tính bằng $E = 1,74.10^{19}.10^{1,44M}$ với M là độ lớn theo thang độ Richter. Thành phố A xảy ra một trận động đất 8 độ Richter và năng lượng của nó gấp 14 lần trận động đất đang xảy ra tại thành phố B. Hỏi khi đó độ lớn của trận động đất tại thành phố B là bao nhiêu?

A. $7,2$ độ Richter. **B.** $7,8$ độ Richter. **C.** $9,6$ độ Richter. **D.** $6,9$ độ Richter.

Bài 13: Chu kỳ bán rã của chất phóng xạ Plutonium Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r < 0)$, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao lâu còn lại 2 gam?

A. 46120 năm. **B.** 82235 năm. **C.** 57480 năm. **D.** 92042 năm.

Bài 14: Trên mỗi chiếc Radio FM đều có vạch chia để người dùng dễ dàng Chọn sóng Radio cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và bên phải tương ứng với $88\,MHz$ và $108\,MHz$. Hai vạch cách nhau $12\,cm$. Biết vị trí của vạch cách vạch ngoài cùng bên trái $d\,cm$ thì có tần số $F = ka^d\,MHz$ với k và a là hằng số. Tìm vị trí của vạch ứng với tần số $91\,MHz$ để bắt sóng VOV Giao Thông Quốc Gia.

A. Cách vạch ngoài cùng bên phải $8,4723\,cm$.

B. Cách vạch ngoài cùng bên trái $1,9243\,cm$.

C. Cách vạch ngoài cùng bên phải $10,0358\,cm$.

D. Cách vạch ngoài cùng bên trái $2,0567\,cm$.

Bài 15: Số lượng động vật nguyên sinh tăng trưởng với tốc độ $0,7944$ con/ngày. Giả sử trong ngày đầu tiên, số lượng động vật nguyên sinh là 2. Hỏi sau 6 ngày, số lượng động vật nguyên sinh là bao nhiêu?

A. 37 con. **B.** 21 con. **C.** 48 con. **D.** 106 con.

Bài 16: E. Coli (Escherichia coli) là vi khuẩn đường ruột gây tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E. Coli lại tăng gấp đôi. Ban đầu, chỉ có 60 vi khuẩn E. Coli trong đường ruột. Hỏi sau 8 giờ, số lượng vi khuẩn E. Coli là bao nhiêu?

A. 1006632960 vi khuẩn. **B.** 2108252760 vi khuẩn.

C. 158159469 vi khuẩn. **D.** 3251603769 vi khuẩn.

Bài 17: Một nguồn âm đặt ở O đẳng hướng trong không gian có công suất truyền âm P không đổi. Biết rằng cường độ âm tại một điểm cách nguồn một đoạn R là $I = \frac{P}{4\pi R^2}$ và mức cường độ âm tại điểm đó là $L = log\frac{I}{I_0}$ Ben với I_0 là hằng số. Như vậy có thể thấy rằng R luôn tỷ lệ với $10^{-L/2}$. Áp dụng tính chất này để tính mức cường độ âm tại trung điểm M của đoạn thẳng AB biết mức cường độ âm tại A, B lần lượt là $L_A = 20dB, L_B = 60dB$ và O nằm trên đoạn thẳng AB.

A. $L_M = 25,9dB$. **B.** $L_M = 25,6dB$. **C.** $L_M = 26,1dB$. **D.** $L_M = 20,6dB$.

Bài 18: Chu kỳ bán rã của chất hóa học $^{226}_{88}Ra$ là 1590 năm, tức là cứ sau 1590 năm thì khối lượng của $^{226}_{88}Ra$ giảm đi một nửa. Ban đầu khối lượng của $^{226}_{88}Ra$ là $100\,mg$. Hỏi sau 1000 năm thì khối lượng $^{226}_{88}Ra$ còn lại là bao nhiêu?

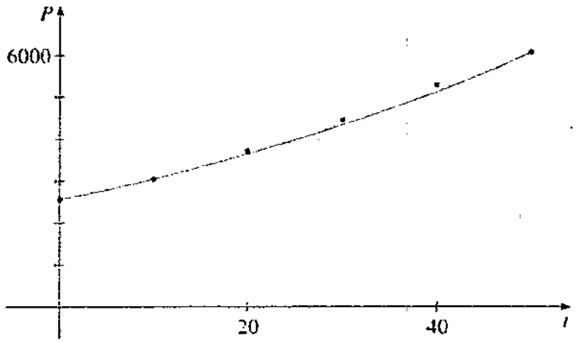
A. $65\,mg$. **B.** $78\,mg$. **C.** $43\,mg$. **D.** $68\,mg$.

Bài 19: Cho một lượng vi khuẩn bắt đầu với 500 con và phát triển với vận tốc tỷ lệ thuận với số lượng. Biết sau 3 giờ, có 8000 con vi khuẩn. Hỏi sau 4 giờ, số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

A. Khoảng 463521 con. **B.** Khoảng 40235 con.

C. Khoảng 20159 con. **D.** Khoảng 322539 con.

Bài 20: Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2560 triệu người, còn năm 1950 là 3040 triệu người. Người ta dự đoán dân số thế giới phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số mũ $P(t) = ae^{bt}$ với a, b là hằng số và độ biến thiên của $P(t)$ theo thời gian tỷ lệ thuận với $P(t)$. Hãy dự đoán dân số thế giới vào năm 2020.



A. 8524 triệu dân. **B.** 5360 triệu dân. **C.** 7428 triệu dân. **D.** 3823 triệu dân.

Bài 21: Khoảng 200 năm trước, hai nhà khoa học Pháp là Clô-xi-ut và Cla-pay-rông đã thấy rằng áp lực P của hơi nước (tính bằng milimet thủy ngân, viết tắt là mmHg) gây ra khi nó chiếm khoảng trống phía trên của mặt nước chứa trong bình kín tính theo công thức:

$P = a.10^{\frac{k}{t+273}}$

Trong đó t là nhiệt độ C của nước, a và k là các hằng số.Cho biết $k = 2258,624$

a) Tính a biết rằng khi nhiệt độ của nước là 100^0C thì áp lực của hơi nước là 760 mmHg (tính chính xác đến hàng phần chục)

A. $86318841,3; 52,5$. **B.** $86318841,3; 50,5$.

C. $86318841,3; 152,5$. **D.** $86318831,3; 51,5$.

b) Tính áp lực của hơi nước khi nhiệt độ của nước là 40^0C (tính chính xác đến hàng phần chục).

A. $\approx 52,5$ mmHg. **B.** $\approx 52,3$mmHg. **C.** $\approx 53,5$mmHg **D.** $\approx 55,5$mmHg.

Bài 22: Một loại cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14. Khi một bộ phận của một cây nào đó chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ bị phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành Nitơ 14. Biết rằng gọi P(t) là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì P(t) được tính theo công thức $P(t) = 100.(0.5)^{\frac{t}{5750}} (\%)$. Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Hãy xác định niên đại của công trình kiến trúc đó.

A. 3574 năm. **B.** 3754 năm. **C.** 4573 năm. **D.** 5437 năm.

Bài 23: Áp suất không khí P (đo bằng mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (m), tức P giảm theo công thức: $P = P_0.e^{xi}$, trong đó $P_0 = 760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $(x = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000m thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3000m là bao nhiêu?

A. 530 mmHg **B.** 350mmHg **C.** 430mmHg **D.** 340mmHg

Bài 24: Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam duy trì ở mức 1,06%. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2014 là 90.728.600 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2050 dân số Việt Nam là:

A. 160.663.675 người **B.** 132.161.875 người

C. 153.712.400 người **D.** 134.022.614 người

Trích Đề thi Học kì I THPT Lương Thế Vinh Hà Nội

Bài 25: Sử dụng công thức $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$, hãy tính gần đúng, chính xác đến hàng đơn vị, độ lớn dB của âm thanh có tỉ số $\frac{I}{I_0}$ và điền vào bảng:

STT	Loại âm thanh	$\frac{I}{I_0}$	Độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	
2	Nhạc êm dịu	4000	
3	Nhạc mạnh phác ra từ loa	$6,8x\ 10^8$	
4	Tiếng máy bay phản lực	$2,3x\ 10^{12}$	
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	

Bài 26: Trên mặt của mỗi chiếc radio đều có các vạch chia để người sử dụng dễ dàng chọn đúng sóng radio cần tìm. Biết rằng vạch chia ở vị trí cách tận cùng bên trái một khoảng d (cm) thì ứng với tần số $F = ka^d\ kHz$, trong đó k và a là hai hằng số được chọn sao cho vạch tận cùng bên trái ứng với tần số 53 kHz, vạch tận cùng bên phải ứng với tần số 160 kHz và hai vạch này cách nhau 12 cm.

a) Hãy tính k và a (làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $k = 53, a \approx 1,096$ **B.** $k = 52, a \approx 1,096$ **C.** $k = 53, a \approx 1,069$ **D.** $k = 53, a \approx 1,196$

b) Giả sử đã cho F, giải phương trình $ka^d = F$ với ẩn d.

A. $\simeq 25,119\lg F - 43,312$ **B.** $\simeq 25,119\lg F - 43,412$

C. $\simeq 25,190\lg F - 43,312$ **D.** $\simeq 25,119\lg F - 43,321$

c) Áp dụng kết quả câu b, hãy điền vào ô trống trong bảng sau (kết quả chính xác đến hàng phần trăm)

F (kHz)	53	60	80	100	120	140	160

Bài 27: Năm 1994, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là $\frac{358}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng 0,4% hằng năm. Hỏi năm 2004, tỉ lệ thể tích khi CO_2 trong không khí là bao nhiêu?

A. 373.10^{-6}. **B.** 363.10^{-6}. **C.** 383.10^{-6}. **D.** 353.10^{-6}.

Bài 28: Biết rằng tỉ lệ giảm dân số hằng năm của Nga là 0,5%. Năm 1998, dân số của Nga là 146 861 000 người. Hỏi năm 2008, dân số của nước Nga là bao nhiêu?

A. 139 699 000 người. **B.** 140 699 000 người.

C. 149 699 000 người. **D.** 145 699 000 người.

Bài 29: Tỉ lệ giảm dân số hằng năm dân của I-ta-li-a là 0,1%. Năm 1998, dân số của I-ta-li-a là 56 783 000 người. Hỏi dân số nước này vào năm 2020 (22 năm sau đó)?

A. 55 547 000 người. **B.** 54 547 000 người.

C. 52 547 000 người. **D.** 53 547 000 người.

Bài 30: Cho biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ Plutoni là 24360 năm (tức là một lượng Plutoni sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nữa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm (r<0), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10g Plutoni sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1g?

A. 80922 năm. **B.** 100922 năm. **C.** 99922 năm. **D.** 88922 năm.

Bài 31: Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết.

A. 39 năm. **B.** 40 năm. **C.** 38 năm. **D.** 41 năm.

Bài 32: Các nhà khoa học thực hiện nghiên cứu trên một nhóm học sinh bằng cách cho họ xem một danh sách các loài động vật và sau đó kiểm tra xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi khoảng thời gian ngắn nhất bao lâu thì số học sinh trên nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. Khoảng 24 tháng **B.** Khoảng 22 tháng

C. Khoảng 25 tháng **D.** Khoảng 32 tháng

Bài 33: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là 1%. Năm 2010, dân số nước ta là 88360000 người. Sau khoảng bao nhiêu năm thì dân số nước ta sẽ là 128965000 người? Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm là không thay đổi.

A. 36. **B.** 37. **C.** 38. **D.** 39.

Bài 34: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là $mmHg$) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức là P giảm theo công thức $P = P_0.e^{xi}$. Trong đó $P_0 = 760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $(x=0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3000m$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị)?

A. $P=531mmHg$. **B.** $P=530mmHg$. **C.** $P=528mmHg$. **D.** $P=527mmHg$.

Bài 35: Năm 1994, tỉ lệ khí CO_2 trong không khí là $\frac{358}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng $0,4\%$ hàng năm. Hỏi năm 2016, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là bao nhiêu? Giả sử tỉ lệ tăng hàng năm không đổi. Kết quả thu được gần với số nào sau đây nhất?

A. $\frac{391}{10^6}$. **B.** $\frac{390}{10^6}$. **C.** $\frac{7907}{10^6}$. **D.** $\frac{7908}{10^6}$.

Bài 36: Để xác định một chất có nồng độ pH, người ta tính theo công thức $pH=\log\frac{1}{[H^+]}$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ ion H^+. Tính nồng độ pH của $Ba(OH)_2$ (Bari hidroxit) biết nồng độ ion H^+ là $10^{-11}M$.

A. $pH=11$. **B.** $pH=-11$. **C.** $pH=3$. **D.** $pH=-3$.

Bài 37: Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Kinh nghiệm cho thấy sau 9 giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ?

A. 3. **B.** $\frac{10^9}{3}$. **C.** $9-lg3$. **D.** $\frac{9}{lg3}$.

Bài 38: Để đảm bảo điều kiện sinh sống của người dân tại thành phố X, một nhóm các nhà khoa học cho biết với các điều kiện y tế, giáo dục, cơ sở hạ tầng, ... của thành phố thì chỉ nên có tối đa 60.000 người dân sinh sống. Các nhà khoa học cũng chỉ ra rằng dân số được ước tính theo công thức $S=Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm được lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm và i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào đầu năm 2015, thành phố X có 50000 người dân và tỉ lệ dân số là $1,3\%$. Hỏi trong năm nào thì dân số thành phố bắt đầu vượt ngưỡng cho phép, biết rằng số liệu chỉ được lấy vào đầu mỗi năm và giả thiết tỉ lệ tăng dân số không thay đổi?

A. 2029 **B.** 2033 **C.** 2034 **D.** 2035

Bài 39: Theo tổng cục thống kê, năm 2003 Việt Nam có 80 902 400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi thì năm 2016 Việt Nam sẽ có số người khoảng bao nhiêu:

A. 97802732. **B.** 96247183. **C.** 95992878. **D.** 94432113.

Bài 40: Khi một kim loại được làm nóng đến 600^0C, độ bền kéo của nó giảm đi 50%. Sau khi kim loại vượt qua ngưỡng 600^0C, nếu nhiệt độ kim loại tăng thêm 5^0C thì độ bền kéo của nó giảm đi 35% hiện có. Biết kim loại này có độ bền kéo là $280MPa$ dưới 600^0C và được sử dụng trong việc xây dựng các lò công nghiệp. Nếu mức an toàn tối thiểu độ bền kéo của vật liệu này là $38MPa$, thì nhiệt độ an toàn tối đa của lò công nghiệp bằng bao nhiêu, tính theo độ Celsius?

A. 620. **B.** 615. **C.** 605. **D.** 610.

Trích Đề thi Thử lần 1 THPT Kim Liên Hà Nội

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Mức tiêu thụ dầu hàng năm của nước A theo dự báo là M thì lượng dầu của nước A là $100M$.

Mức tiêu thụ dầu theo thực tế là:

Gọi x_0 là lượng dầu tiêu thụ năm thứ n:

Năm thứ 2 là $x_2 = M + 4\%M = M(1+4\%) = 1,04M$

Năm thứ n là $x_n = 1,04^{n-1}M$

Tổng tiêu thụ trong n năm là:

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = M + 1,04M + 1,04^2M + ... + 1,04^{n-1}M$

$\Rightarrow (1 + 1,04 + 1,04^2 + ... + 1,04^{n-1})M = 100M$

$\Leftrightarrow 1 + 1,04 + 1,04^2 + ... + 1,04^{n-1} = 100$

$\Leftrightarrow \dfrac{1,04^n - 1}{0,04} = 100$. Giải phương trình bằng lệnh SOLVE được $n = 41$.

Chọn A.

Bài 2:

Thể tích khí CO_2 năm 2008 là: $V_{2008} = V\left(1+\dfrac{m}{100}\right)^{10}$.

Thể tích khí CO_2 năm 2016 là:

$$V_{2008} = V\left(1+\frac{m}{100}\right)^{10}\left(1+\frac{n}{100}\right)^{8} = V\frac{(100+m)^{10}(100+n)^{8}}{10^{36}}.$$

Chọn B.

Bài 3:

$S = A.e^{N.r}$

$120000000 = 78685800.e^{N.0,017} \Rightarrow N = \ln\left(\dfrac{120000000}{78685800}\right).\dfrac{1}{0,017} \approx 25$

Chọn A

Bài 4:

Nhiệt độ soda còn lại là 50^oF nên ta có:

$T(t) = 50 \Leftrightarrow 32 + 48.(0,9)^t = 50 \Leftrightarrow (0,9)^t = \dfrac{3}{8}$

log cơ số 0,9 hai vế ta được:

Ghi chú của em

$$\log_{0,9}(0,9)^t = \log_{0,9}\frac{3}{8} \Leftrightarrow t = \log_{0,9}\frac{3}{8} \approx 9,3$$

Chọn B.

Bài 5:

Ta có: $M = \log A - \log A_0 = \log\frac{A}{A_0}$

Trận động đất ở:

- San Francisco: $M_1 = 8,3 = \log\frac{A_1}{A_0}$ (1)

- Nam Mỹ: $M_2 = \log\frac{A_2}{A_0}$ (2)

Biên độ ở Nam Mỹ gấp 4 lần San Francisco nên: $A_2 = 4A_1 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 4$

Lấy (2) – (1) ta được:

$$M_2 - 8,3 = \log\frac{A_2}{A_0} - \log\frac{A_1}{A_0} = \log\frac{A_2}{A_1} = \log 4$$

$$\Rightarrow M_2 = \log 4 + 8,3 \approx 8,9$$

Chọn A.

Bài 6:

$$2N_c = N_0.e^{9k} \Leftrightarrow e^{9k} = 2 \Leftrightarrow 9k = \ln 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{9}$$

$$800 = 100.e^{kt} \Leftrightarrow 8 = e^{kt} \Leftrightarrow kt = ln8 \Leftrightarrow t = \frac{ln8}{k} = \frac{ln8}{ln2}.9 = 27 \text{ ngày.}$$

Chọn A.

Bài 7:

Ta có: $f'(t) = (n_0.2^t)' = n_0.2^t.\ln 2$

Vậy tốc độ phát triển của vi khuẩn sau 4 giờ là:

$f'(4) = 100.2^4.\ln 2 \approx 1109$

Chọn B.

Bài 8:

Gọi t là thời gian phản ứng khi đó:

Tốc độ phản ứng xảy ra nhanh nhất (v_{max}) khi $t = 0$ vì khi $t = 0$ nồng độ các chất NO và O_2 lớn nhất.

Mà $v = k.x^2.y$ (với x, y là nồng độ NO và O_2 theo đề)

Vậy để v_{max} thì nồng độ NO và O_2 phải bằng nồng độ ban đầu:

Dựa vào phương trình, ta có: $y = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 2$

Chọn B.

Bài 9:

Lượng cacbon 14 còn lại trọng mẫu gỗ là 65% nên ta có:

$P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}=65$

$\Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}}=0,65$

Log cơ số $\frac{1}{2}$ hai vế ta được:

$\log_{\frac{1}{2}}(0,5)^{\frac{t}{5750}}=\log_{\frac{1}{2}}0,65$

$\Leftrightarrow \frac{t}{5750}=\log_{\frac{1}{2}}0,65$

$\Leftrightarrow t=5750\log_{\frac{1}{2}}0,65\approx 3574$ năm.

Chọn C.

Bài 10:

Gọi y_t là nồng độ N_2O_5 ở thời điểm t, x là nồng độ N_2O_5 ban đầu:

Ta có: $\begin{cases} y_t-x=kx \\ y_t=0,9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_t=(k+1)x \\ y_t=0,9x \quad (1) \end{cases}$

Vì sự biến thiên nồng độ mol/l của N_2O_5 theo thời gian luôn tỉ lệ thuận với nồng độ mol/l của N_2O_5 nên: $y_t=(k+1)^t x$ (*)

Thay (1) vào (*) ta được: $0,9x=(k+1)^t x$

$\Leftrightarrow 0,9=(k+1)^t$

Log cơ số 0,9 hai vế ta được:

$\log_{0,9}0,9=\log_{0,9}(k+1)^t$

$\Leftrightarrow 1=t\log_{0,9}(k+1)$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{\log_{0,9}(k+1)}\approx 211$

Chọn A.

Bài 11:

Tập hợp A có tất cả 21 phần tử $\Rightarrow n=21$

Vậy độ phức tạp của thuật toán tìm kiếm nhị phân trong trường hợp xấu nhất trong tập hợp A là: $\theta(\log_2 21)$

Chọn D.

Bài 12:

Thành phố A có $M=8$ nên $E_A=1,74.10^{19}.10^{1,44.8}$

Thành phố B có trận động đất với độ lớn $M=M_B$ và năng lượng $E_B=14E_A$ nên:

Ghi chú của em

$1,74.10^{19}.10^{1,44.M_B} = 14.1,74.10^{19}.10^{1,44.8}$

$\Leftrightarrow 14.10^{1,44.M_B} = 10^{1,44.8}$

Log cơ số $10^{1,44.8}$ hai vế ta được:

$\log_{10^{1,44.8}}\left(14.10^{1,44.M_B}\right) = \log_{10^{1,44.8}} 10^{1,44.8}$

$\Leftrightarrow M_B \approx 7,2$

Chọn A.

Bài 13:

$m = m_0.2^{-t/T}$

$\Leftrightarrow 2 = 10.2^{-t/T}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5} = 2^{-t/T}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-t}{T} = \log_2 0,2$

$\Leftrightarrow t = -\log_2 0,2.T \approx 57480$

Chọn C.

Bài 14:

$F = k.a^d$

Ta có: lúc ở $88MHz$ thì $88 = k.a^0 \Rightarrow k = 88$

Lúc ở $108MHz$ thì $108 = 88.a^{12} \Rightarrow a = \sqrt[12]{\dfrac{27}{22}}$

$\Rightarrow 91 = 88.\sqrt[12]{\dfrac{27}{22}}^{d} \Rightarrow d = 1,9642$ (cách vạch bên trái) (cm)

$\Rightarrow 12 - d = 10,0358$ (cách bên phải) (cm)

Chọn C.

Bài 15:

Ngày thứ nhất: 2 con

Ngày thứ 2: 2+2.0,7944 = 2(1+0,7944) con

Ngày thứ 3: $2(1+0,7944)^2$ con

Suy ra ngày thứ n: $2(1+0,7944)^{n-1}$ con

Vậy ngày thứ 6: $2(1+0,7944)^{6-1} \approx 37$ con

Chọn A

Bài 16:

1 chu kì nhân đôi: $r = 100\%$

8 giờ = 480 phút = 24 chu kì

Số lượng vi khuẩn: $60.(1+1)^{24} = 1006632960$

Chọn A.

Bài 17:

Ghi chú của em

M là trung điểm $AB \Rightarrow 2R_M = R_A + R_B$

Do R tỉ lệ với $10^{-L/2} \Rightarrow 2.10^{-L_M/2} = 10^{-1} + 10^{-3}$

$\Rightarrow L_M = -2.\log\left(\frac{10^{-1}+10^{-3}}{2}\right) = 2,59B = 25,9dB$

Chọn A.

Bài 18:

Sau 1590 năm khối lượng ${}^{226}_{88}Ra$ còn lại: $\frac{1}{2}.100 = 50$

Sau thời gian t năm khối lượng ${}^{226}_{88}Ra$ còn lại là: $m_t = 100.2^{\frac{-t}{1590}}$

Sau $t = 1000$ năm khối lượng ${}^{226}_{88}Ra$ còn lại là: $m = 100.2^{\frac{-1000}{1590}} \approx 65mg$

Chọn A.

Bài 19:

Ta có: $N_t = N_0.e^{r.t}$

Tại thời điểm $t = 3$ ta có: $8000 = 500.e^{r.3} \Leftrightarrow 16 = e^{r.3}$

$\ln$ hai vế ta được: $\ln 16 = \ln e^{r.3} \Leftrightarrow \ln 16 = r.3 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 16}{3}$

Tại thời điểm $t = 4$ ta có: $N = 500.e^{r.4} \approx 20159$

Chọn C.

Bài 20:

Số dân tại thời điểm $t = 1950$ là: $P_{(1950)} = a.e^{b.1950} = 2560$ (1)

Số dân tại thời điểm $t = 1980$ là: $P_{(1980)} = a.e^{b.1980} = 3040$ (2)

Lấy (2)/(1) ta được: $\frac{a.e^{b.1980}}{a.e^{b.1950}} = \frac{3040}{2560} \Leftrightarrow e^{30b} = \frac{19}{16}$

ln hai vế ta được: $\ln e^{30b} = \ln\frac{19}{16} \Leftrightarrow 30b = \ln\frac{19}{16} \Rightarrow b = \frac{1}{30}.\ln\frac{19}{16}$ (*)

Thay (*) vào (1) ta được: $a.e^{65.\ln\frac{19}{16}} = 2560 \Rightarrow a = \frac{2560}{e^{65\ln\frac{19}{16}}}$

Vậy số dân tại thời điểm $t = 2020$ là:

$P_{(2020)} = a.e^{b.2020} \approx 3823$ triệu người

Chọn D

Bài 21:

a) Ta có $760 = a.10^{\frac{2258,624}{t+273}}$

$\Rightarrow a = 760.10^{\frac{2258,624}{373}}$

$\Rightarrow a = 86318841,3$

Chọn A.

b) $P = 863188841,3:10^{\frac{2258,624}{40+273}} \approx 52,5$ mmHg.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 22:

Thay giá trị của $P(t) = 65$ ta được:

$$100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5750}} = 65 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{5750}} = \frac{100}{65}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{5750} = \log_2\left(\frac{100}{65}\right) = \frac{\ln 100 - \log 65}{\log 2} = \frac{2 - \log 65}{\log 2}$$

$$\Leftrightarrow t = 5700\left[\frac{2 - \log 65}{\log 2}\right] \approx 3574$$

Chọn A

Bài 23:

Trước tiên tìm i từ đẳng thức: $672,71 = 760.e^{1000.i}\left(i \approx -0,00012\right)$

Từ đó $p \approx 760.e^{3000(-0,00012)} \approx 530,23mmHg$.

Chọn A

Bài 24:

Bài toán tương tự dạng toán lãi kép nên có thể sử dụng công thức $A_n = a(1+m)^n$ với A_n là số dân tại thời điểm n, a là số dân tại thời điểm đầu, m là tỉ lệ tăng dân số tự nhiên (không đổi) và n là thời gian từ lúc đầu đến lúc cần xét. Áp dụng cụ thể vào bài toán trên:

$$A_n = a(1+m)^n = 90278600(1+1,06\%)^{2050-2014} = 132616875$$

Chọn B

Bài 25:

Với $\frac{I}{I_0} = 4000$ làm tròn kết quả tới hàng đơn vị ta được 36 dB

Với $\frac{I}{I_0} = 6,8.10^8$ ta được $L=88\ dB$

Với $\frac{I}{I_0} = 2,3.10^{12}$ ta được $L=124\ dB$

Với $\frac{I}{I_0} = 10^{13}$ ta được 130 dB

STT	Loại âm thanh	$\frac{I}{I_0}$	Độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	0
2	Nhạc êm dịu	4000	36

3	Nhạc mạnh phác ra từ loa	$6,8x\ 10^{8}$	88
4	Tiếng máy bay phản lực	$2,3x\ 10^{12}$	124
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	130

Ghi chú của em

Bài 26:

a) Thay vào công thức $F = ka^d$

Với $d = 0 \Rightarrow 53 = ka^0 = k$

Với $d = 12 \Rightarrow 160 = ka^{12} = 53a^{12} \Rightarrow a^{12} = \dfrac{160}{53} \Rightarrow a = \left(\dfrac{160}{53}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 1,096$

b) Ta có

$ka^d = F \Rightarrow a^d = \dfrac{F}{k} \Rightarrow d\lg a = \lg\dfrac{F}{k}$

$d = \dfrac{1}{\lg a}\left(\lg F - \lg k\right) = 25,119\left(\lg F - \lg k\right) \simeq 25,119\lg F - 43,312$

c) Khoảng cách từ vạch tận cùng bên trái đến vạch tương ứng:

$+60kHz : d \approx 25,119\lg 60 - 43,312 \approx 1,35cm$

$+80kHz : d \approx 25,119\lg 80 - 43,312 \approx 4,49cm$

$+100kHz : d \approx 25,119\lg 100 - 43,3126,93cm$

$+120kHz : d \approx 25,119\lg 120 - 43,312 \approx 8,91cm$

$+140kHz : d \approx 25,119\lg 140 - 43,312 \approx 10,60cm$

$+160kHz : d \approx 25,119\lg 160 - 43,312 \approx 12cm$

Kết quả ta có bảng sau:

F	53	60	80	100	120	140	160
d	0	1,35	4,49	6,93	8,91	10,6	12

Bài 27:

Năm 2004 tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là:

$\dfrac{358.1,004^{10}}{10^6} \approx 373.10^{-6}$.

Chọn A

Bài 28:

Năm 2008, dân số của nước Nga là $139\ 699\ 000$ người.

Chọn A

Bài 29:

Dân số của I-ta-li-a vào năm 2020 là: $55\ 547\ 000$ người.

Chọn A

Bài 30:

Ta có $Ae^{24360r} = \dfrac{A}{2} \Rightarrow r = -\ln 2 : 24360$

– Giả sử sau t năm 10 g Plutoni phân hủy còn 1g thì:

$$10e^{rt}=1\Leftrightarrow t=\frac{\ln\frac{1}{10}}{r}=80922$$

Chọn A.

Bài 31

Gọi A là trữ lượng dầu, x là lượng dầu sử dụng năm đầu tiên.

Ta có $A=100x$.

Qua năm thứ 2 trữ lượng dầu tiêu thụ là $x(1+r)$

Qua năm thứ $n+1$ trữ lượng dầu tiêu thụ là $x(1+r)^n$

Vậy tổng lượng dầu tiêu thụ trong $n+1$ năm là:

$$x\left[1+(1+r)+(1+r)^2+...(1+r)^{n-1}+(1+r)^n\right].$$

Do đó ta có phương trình:

$$x\left[1+(1+r)+(1+r)^2+...(1+r)^{n-1}+(1+r)^n\right]-100x=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-(1+r)^{n+1}}{1-(1+r)}=100\Leftrightarrow\frac{1-(1+r)^{n+1}}{-r}=100\Leftrightarrow n=40.$$

Chọn B.

Bài 32

Theo bài ra ta có:

$$75-20\ln(t+1)\le 10\%\Leftrightarrow\ln(t+1)\ge 3,25\Leftrightarrow t\ge 24,79.$$

Khoảng 25 tháng.

Chọn C.

Bài 33

Gọi n là số năm dân số nước ta tăng từ $88360000\to 128965000$

Sau n năm dân số nước Việt Nam là: $88360000(1,01)^n$. Theo đề:

$$88360000(1,01)^n=128965000\Leftrightarrow n=\log_{1,01}\left(\frac{128965000}{88360000}\right)\simeq 38\text{ (năm)}.$$

Chọn C.

Bài 34

Theo đề ta có $672,71=760.e^{1000i}\Leftrightarrow i=\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$.

Vậy $P=760.e^{3000.i}\approx 527mmHg$

* **Lưu ý:** Nếu các em làm tròn kết quả ngay từ lúc tính i thì sẽ cho kết quả cuối cùng là $530mmHg$ như vậy sẽ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn D.

Bài 35

Từ 1994 đến 2016 là 22 năm. Vậy tỉ lệ thể tích khí CO_2 năm 2016 trong không khí là $\frac{358.1,004^{22}}{10^6}\approx\frac{391}{10^6}$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 36

Ta có $pH = \log\frac{1}{[H^+]} = -\log 10^{-11} = 11$.

Chọn A.

Bài 37

Gọi t là số giờ lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ.

Lượng lá bèo đầy mặt hồ là: 10^9.

$\Rightarrow$ Lượng lá bèo $\frac{1}{3}$ mặt hồ là: $\frac{10^9}{3}$

$10^t = \frac{10^9}{3} \Rightarrow t = \log_{10}\frac{10^9}{3} = 9 - \lg 3$.

Chọn C.

Bài 38

Ta có: $S = Ae^{ni}$

$\Rightarrow 50000.e^{0,013.n} \le 60000$

$\Rightarrow n \le 14,025 \Rightarrow n = 14$

Vậy trong năm 2029 dân số thành phố sẽ vượt ngưỡng cho phép.

Chọn A.

Bài 39

Việc tính số dân sau 13 năm với tỉ lệ tăng dân số là 1,47% tương đương với các bài toán lãi suất ngân hàng

$\Rightarrow$ số dân $= 80902400.(1+1,47\%)^{13} \approx 978027732$.

Chọn A.

Bài 40

Ở 600^0C độ bền kéo của kim loại là $140MPa = DB$ (đặt ẩn phụ này để gọn tính toán phía sau). Cứ tăng 5^0C thì độ bền kéo giảm $35\%\ DB$ còn $65\%\ DB$.

Sau n lần tăng 5^0C thì độ bền kéo còn $(65\%)^n\ DB$

Theo đề: $(65\%)^n DB \ge 38 \Rightarrow n \le log_{(65\%)}\frac{38}{DB} \approx 3,02$

Do đó nhiệt độ tối đa là: $600^0C + 3.5^0C = 615^0C$.

Chọn B

Ghi chú của em

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG 2

ĐỀ SỐ 1

Bài 1: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = e^t - 4t$ (trong đó s tính bằng m và t tính bằng giây). Thời điểm vận tốc chất điểm bị triệt tiêu là:

A. $t = \ln 2$ **B.** $t = 2\ln 2$ **C.** $t = \ln 3$ **D.** $t = 2\ln 3$

Bài 2: Trong một bản hợp ca, coi mọi ca sĩ đều hát với cùng cường độ âm và coi cùng tần số. Khi một ca sĩ hát thì mức cường độ âm là $68dB$. Khi cả ban hợp ca cùng hát thì đo được mức cường độ âm là $80dB$. Tính số ca sĩ có trong ban hợp ca đó biết mức cường độ âm L được tính theo công thức $L = 10\log\frac{I}{I_0}$ trong đó I là cường độ âm và I_0 là cường độ âm chuẩn.

A. 16 người. **B.** 12 người. **C.** 10 người. **D.** 18 người.

Bài 3: Một nguồn âm đặt ở O đẳng hướng trong không gian có công suất truyền âm P không đổi. Biết rằng cường độ âm tại một điểm cách nguồn một đoạn R là $I = \frac{P}{4\pi R^2}$ và mức cường độ âm tại điểm đó là $L = \log\frac{I}{I_0}$ Ben với I_0 là hằng số. Như vậy có thể thấy rằng R luôn tỷ lệ với $10^{-L/2}$. Áp dụng tính chất này để tính mức cường độ âm tại trung điểm M của đoạn thẳng AB biết mức cường độ âm tại A, B lần lượt là $L_A = 20dB, L_B = 60dB$ và O nằm trên đoạn thẳng AB.

A. $L_M = 25,9dB.$ **B.** $L_M = 25,6dB.$ **C.** $L_M = 26,1dB.$ **D.** $L_M = 20,6dB.$

Bài 4: Bạn Dũng xin bố mua cho bạn 1 cái máy tính. Nhưng mỗi tháng bố bạn Dũng chỉ cho bạn $3.000.000$ đồng để tích tiền mua máy tính. Nhưng bạn Dũng không muốn chờ đợi để tích để đủ tiền để mua. Bạn quyết định mượn ngân hàng $20.000.000$ đồng để mua máy với lãi suất $1,2\%$. Hỏi vậy bao nhiêu tháng bạn Dũng dùng số tiền của bố cho sẽ trả hết nợ ngân hàng?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Bài 5: Hai năm sau bạn Lan sẽ vào đại học, dự kiến chi phí cho mỗi năm học đại học của bạn Lan là 10 triệu đồng, ngay từ lúc này ba mẹ Lan cần phải có kế hoạch gửi tiền vào ngân hàng để có đủ số tiền cho năm học đầu tiên của Lan, nếu biết rằng lãi suất ngân hàng là $7,6\%$ /năm (theo thể thức lãi kép), thì số tiền tối thiểu mà ba mẹ bạn Lan phải gửi có thể là giá trị nào trong các giá trị sau đây?

A. $8,637.$ **B.** $8,737.$ **C.** $7,637.$ **D.** $7,937.$

Bài 6: Một sinh viên A mua máy tính xách tay theo hình thức trả góp với giá tiền 20 triệu đồng, mức lãi suất $1,2\%$ /tháng trong năm đầu tiên, mỗi tháng anh A phải trả 800 ngàn đồng, cả gốc và lãi. Sau một năm lãi suất lại tăng lên là $1,5\%$ /tháng và anh A phải trả 1 triệu đồng cả gốc và lãi mỗi tháng (trừ tháng cuối). Hỏi sau tối đa bao nhiêu tháng anh A trả hết nợ (tháng cuối trả không quá 500 ngàn đồng).

A. 25 tháng. **B.** 26 tháng. **C.** 27 tháng. **D.** 28 tháng.

Bài 7: Để đảm bảo điều kiện sinh sống của người dân tại thành phố X, một nhóm các nhà khoa học cho biết với các điều kiện y tế, giáo dục, cơ sở hạ tầng, ... của thành phố thì chỉ nên có tối đa 60.000 người dân sinh sống. Các nhà khoa học cũng chỉ ra rằng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm được lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm và i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào đầu năm 2015, thành phố X có 50000 người dân và tỉ lệ tăng dân số là $1,3\%$. Hỏi trong năm nào thì dân số thành phố bắt đầu vượt ngưỡng cho phép, biết rằng số liệu chỉ được lấy vào đầu mỗi năm và giả thiết tỉ lệ tăng dân số không thay đổi?

A. 2029 **B.** 2031 **C.** 2035 **D.** 2046

Bài 8: Tìm m để phương trình $e^{2x} - me^x + 3 - m = 0$ có nghiệm:

A. $m \ge 2$ **B.** $m > 2$ **C.** $m < 3$ **D.** $m > 0$

Bài 9: Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = m$ (1) có nghiệm khi:

A. $m \in (-\infty;5)$ **B.** $m \in (-\infty;5]$ **C.** $m \in (2;+\infty)$ **D.** $m \in [2;+\infty)$

Bài 10: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Giá trị biểu thức $M = xy + yz + xz$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 6 **D.** 3

Bài 11: Cho $a\log_6 3 + b\log_6 2 + c\log_6 5 = 5$, với a, b và c là các số hữu tỷ. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. $a = b$ **B.** $a > b$ **C.** $b > a$ **D.** $c > a > b$

Bài 12: Cho phương trình $5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+2} - x^2 - 2mx = 0$. Tìm m để phương trình vô nghiệm?

A. $m > 0$ **B.** $m < 1$ **C.** Không có m. **D.** $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$

Bài 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là $(-\infty;0]$: $m2^{x+1} + (2m+1)\left(3-\sqrt{5}\right)^x + \left(3+\sqrt{5}\right)^x < 0$.

A. $m \le -\frac{1}{2}$. **B.** $m \le \frac{1}{2}$. **C.** $m < \frac{1}{2}$. **D.** $m < -\frac{1}{2}$.

Bài 14: Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutôni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm (r<0), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi sau bao nhiêu năm thì 10 gam Pu^{239} sẽ phân hủy còn 1 gam có giá trị gần nhất với giá trị nào sau?

A. 82135 **B.** 82335 **C.** 82235 **D.** 82435

Bài 15: Cho phương trình: $m2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + m$ (1). Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (0;2) \setminus \left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$ **B.** $m \in (0;2) \setminus \left\{\frac{1}{7};\frac{1}{256}\right\}$

C. $m \in (0;2) \setminus \left\{\frac{1}{6};\frac{1}{256}\right\}$ **D.** $m \in (0;2) \setminus \left\{\frac{1}{5};\frac{1}{256}\right\}$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Ta có $S = e^t - 4t$ suy ra $v = S' = e^t - 4$.

Vận tốc triệt tiêu nghĩa là $v = 0 \Leftrightarrow e^t = 4 \Leftrightarrow t = \ln 4 = 2\ln 2$.

Chọn B.

Bài 2:

Ta có: $L_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0} = 68$ và $L_n = 10\log\frac{I_n}{I_0} = 80$. $I_n = nI_1 \Rightarrow n = \frac{I_n}{I_1}$

(Với n là số ca sĩ)

$$L_n - L_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0} - 10\log\frac{I_n}{I_0} = 10\log\frac{I_n}{I_1}$$

$$\Rightarrow n = \frac{I_n}{I_1} = 10^{\frac{L_n - L_1}{10}} = 10^{\frac{80-68}{10}} = \sqrt[5]{10^6} \approx 16.$$

Chọn A.

Bài 3:

$$2.10^{-0,5L_M} = 10^{-0,5L_B} + 10^{-0,5L_A}$$

$$L_M = 20,6dB.$$

Chọn D.

Bài 4:

Thiết lập công thức:

Ta đưa về dạng: $\begin{cases} U_1 = A \\ U_n = BU_{n-1} + C \end{cases}$

Ta đặt $U_n = kV_n + l$ khi đó ta có:

$$kV_n + l = BkV_{n-1} + Bl + C \Leftrightarrow V_n = BV_{n-1} + \frac{(B-1)l + C}{k}$$

Đặt $\begin{cases} l = \frac{-C}{B+1} \\ k = 1 \end{cases}$ vậy dãy số chuyển thành:

$$\begin{cases} V_1 = A + \frac{C}{B-1} \\ V_n = BV_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow V_n = \left(A + \frac{C}{B-1}\right)B^{n-1}$$

$$\Rightarrow U_n = \left(A + \frac{C}{B-1}\right).B^{n-1} - \frac{C}{B-1}$$

Ghi chú của em

Vậy ta thay số vào:

$$\Rightarrow U_n = \left(20000000 - \frac{3000000}{0,012}\right).(1,012)^{n-1} + \frac{3000000}{0,012}$$

$U_n = 0 \Rightarrow n = 7,990075331.$

Vì bao nhiêu tháng tương ứng với bấy nhiêu số lần tính lãi.

Vậy ta có $n-1=7$ lần tính lãi.

Chọn B.

Bài 5:

Gọi số tiền mẹ Lan cần gửi là m, tiền lãi theo năm là r.

Sau năm thứ nhất thì số tiền gốc và lãi: $m(1+r)$

Sau năm thứ hai thì số tiền gốc và lãi: $A = m(1+r).(1+r) = m(1+r)^2$

Với $r = \frac{76}{1000} = \frac{19}{250}$

$A = 10000000$ đồng

$$\Rightarrow m = \frac{10000000}{\left(1+\frac{19}{250}\right)^2} = 8637249 \text{ đồng.}$$

Chọn A.

Bài 6:

$$T_1 = 20000.(1+1,2\%)^{12} - 800.\left[\frac{(1+1,2\%)^{12}-1}{1,2\%}\right]$$

$= 12818,25087.$

T_1: Số tiền còn nợ sau 1 năm.

Số tiền phải trả tiếp theo trừ tháng cuối cùng (n: tháng):

$$T_2 = T_1(1+1,5\%)^n - 1000.\left[\frac{(1+1,5\%)^n-1}{1,5\%}\right] < 500$$

Dùng Table $\Rightarrow n = 15$

Vậy số tháng phải trả: $12+15=27$.

Chọn C.

Bài 7:

Ta có: $S = Ae^{ni}$

$\Rightarrow 50000.e^{0,013.n} \le 60000$

$\Rightarrow n \le 14,025 \Rightarrow n = 14$

Vậy trong năm 2029 dân số thành phố sẽ vượt ngưỡng cho phép.

Chọn A.

Bài 8:

Đặt $t = e^x$, $t > 0$. Biến đổi phương trình về dạng: $\frac{t^2+3}{t+1} = m$

Khảo sát hàm $f(t)=\dfrac{t^2+3}{t+1}$, $t>0$ ta có $f(t)\ge 2$. Suy ra $m\ge 2$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 9:

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x, t>0$, phương trình đã cho thành: $t^2-mt+1=0$ (2)

(1) có nghiệm khi (2) có nghiệm dương.

Do tích 2 nghiệm =1 nên suy ra (2) có 2 nghiệm dương.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4\ge 0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 2$

Chọn D.

Bài 10:

Khi một trong ba số x,y,z bằng 0 thì các số còn lại bằng 0. Khi đó M=0

Khi $x,y,z\ne 0$ ta đặt $2^x=3^y=6^{-z}=k$ suy ra $2=k^{\frac{1}{x}}, 3=k^{\frac{1}{y}}, 6=k^{-\frac{1}{z}}$.

Do 2.3=6 nên $k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}}=k^{-\frac{1}{z}}$ hay $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{z}$

Từ đó suy ra $M=0$.

Vậy cần chọn đáp án A.

Bài 11:

Ta có $a\log_6 3+b\log_6 2+c\log_6 5=5$

$\Leftrightarrow \log_6 3^a2^b5^c=5 \Leftrightarrow 3^a.2^b.5^c=6^5=3^5.2^5.5^0$

Do a, b, c là các số hữu tỷ nên $\begin{cases} a=b=5 \\ c=0 \end{cases}$

Chọn A.

Bài 12:

Phương trình tương đương:

$5^{x^2+2mx+2}+(x^2+2mx+2)=5^{2x^2+4mx+2}+(2x^2+4mx+2)$

Do hàm $f(t)=5^t+t$ đồng biến trên R nên ta có:

$\left(x^2+2mx+2\right)=\left(2x^2+4mx+2\right)$

Từ đó điều kiện để pt vô nghiệm là C.

Chọn C.

Bài 13:

Phương trình đã cho tương đương

$2m+(2m+1)\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x<0$ (1). Đặt $t=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x>0$ ta được:

$2m+(2m+1)\dfrac{1}{t}+t<0 \Leftrightarrow f(t)=t^2+2mt+2m+1<0 (2)$. Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x\le 0$ nên bất phương trình (2) có nghiệm $0<t\le 1$, suy ra phương trình $f(t)=0$ có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa $t_1\le 0<1<t_2$:

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \le 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \le 0 \\ 4m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -0,5 \\ m < -0,5 \end{cases}$. Vậy $m < -\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Ghi chú của em

Chọn D.

Bài 14:

Vì Pu^{239} có chu kì bán rã là 24360 năm nên $e^{r24360} = \frac{S}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow r \approx -0,000028$

$\Rightarrow$ Công thức phân rã của Pu^{239} là $S = A.e^{-0,000028t}$

Theo giả thiết: $1 = 10.\ e^{-0,000028t} \Rightarrow t \approx 82235,18$ năm.

Chọn C.

Bài 15:

Viết lại PT (1) dưới dạng :

$m2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + m$

$\Leftrightarrow m2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6+1-x^2} + m$

$\Leftrightarrow m.2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6}.2^{1-x^2} + m$

Đặt: $\begin{cases} u = 2^{x^2-5x+6} \\ v = 2^{1-x^2} \end{cases}, u, v > 0$. Khi đó PT tương đương với :

$mu + v = uv + m \Leftrightarrow (u-1)(v-m) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ 2^{1-x^2} = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \\ 2^{1-x^2} = m(*) \end{array}\right.$$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và 3.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - x^2 = \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x^2 = 1 - \log_2 m \end{cases}.$$

Khi đó điều kiện là:

$$\begin{cases} m > 0 \\ 1 - \log_2 m > 0 \\ 1 - \log_2 m \ne 4 \\ 1 - \log_2 m \ne 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \\ m \ne \frac{1}{8} \\ m \ne \frac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0;2) \setminus \left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{256}\right\}$$

Vậy với $m \in (0;2) \setminus \left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{256}\right\}$ thỏa điều kiện đề bài.

Chọn A.

ĐỀ SỐ 2

Bài 1: Số giá trị nguyên của tham số m sao cho bất phương trình:

$\log 5+\log(x^2+1)\ge \log(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$?

A. 0 **B.** $\forall m\in Z$ và $m\le 3$ **C.** 1 **D.** 2.

Bài 2: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức: $m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm t = 0); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cacbon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu?

A. $m(t)=100.e^{-\frac{t\ln 2}{5730}}$ **B.** $m(t)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{5730}$

C. $m(t)=100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100t}{5730}}$ **D.** $m(t)=100.e^{-\frac{100t}{5730}}$

Bài 3: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức: $m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm t = 0); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2378 năm **B.** 2300 năm **C.** 2387 năm **D.** 2400 năm

Bài 4: Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t)=75-20\ln(t+1), t\ge 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. 24.79 tháng **B.** 23 tháng **C.** 24 tháng **D.** 22 tháng

Bài 5: Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x)=\frac{100}{1+49e^{-0.015x}}, x\ge 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

A. 333 **B.** 343 **C.** 330 **D.** 323

Bài 6: Ông Năm gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là $27\,507\,768,13$ (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu và 180 triệu. **B.** 180 triệu và 140 triệu.

C. 200 triệu và 120 triệu. **D.** 120 triệu và 200 triệu.

Bài 7: Tìm số nghiệm của phương trình: $\log_{2x-1}\left(2x^2+x-1\right)+\log_{x+1}\left(2x-1\right)^2=4$ (1).

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3.

Bài 8: Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Kinh nghiệm cho thấy sau 9 giờ bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ cái hồ ?

A. 3 **B.** $\frac{10^9}{3}$ **C.** $9-\log 3$ **D.** $\frac{9}{\log 3}$.

Bài 9: Một người vay ngân hàng 40 triệu đồng để mua một chiếc xe với lãi suất là 0,85%/tháng và hợp đồng thoả thuận là trả 500 ngàn đồng mỗi tháng. Sau một năm mức lãi suất của ngân hàng được điều chỉnh lên là 1,15%/tháng và người vay muốn nhanh chóng hết nợ nên đã thoả thuận trả 1 triệu 500 ngàn đồng trên một tháng (trừ tháng cuối). Hỏi phải mất bao nhiêu lâu người đó mới trả dứt nợ .

A. 31 tháng **B.** 43 tháng **C.** 30 tháng **D.** 42 tháng

Bài 10: Huyện A có 100 000 người. Với mức tăng dân số bình quân 1,5% năm thì sau n năm dân số sẽ vượt lên 130 000 người. Hỏi n nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. 18 năm **B.** 17 năm **C.** 19 năm **D.** 16 năm

Bài 11: Cho biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ Plutoni Pu^{239} là 24360 năm . Sự phân hủy được tính theo công thức $S=A.e^{rt}$. Trong đó A là số lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỷ lệ phân hủy hằng năm (r<0), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam

A. 80922 năm **B.** 24360 năm **C.** 35144 năm **D.** 48720 năm

Bài 12: Gọi S_1 là tập nghiệm của bất phương trình $2.2^x+3.3^x-6^x+1<0$.

Gọi S_2 là tập nghiệm của bất phương trình $2^{-x}<4$.

Gọi S_3 là tập nghiệm của bất phương trình $log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)\le 0$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khi nói về mối quan hệ giữa các tập nghiệm S_1,S_2,S_3 ?

A. $S_1\subset S_3\subset S_2$. **B.** $S_3\subset S_2\subset S_1$. **C.** $S_3\subset S_1\subset S_2$. **D.** $S_1\subset S_2\subset S_3$.

Bài 13: Bác B gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 20 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72%/tháng. Sau một năm, bác B rút cả vốn lẫn lãi và gửi lại theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78%/tháng. Sau khi gửi được đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc nên bác gửi thêm một số tháng nữa thì phải rút tiền trước kỳ hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là 23263844,9 đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước thời hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong một số tháng bác gửi thêm lãi suất là:

A. 0,4% **B.** 0,3% **C.** 0,5% **D.** 0,6%

Bài 14: Cho ba số dương a, b, c đôi một khác nhau và khác 1. Xét các khẳng định sau:

(I) $\log_a^2 \frac{b}{c} = \log_a^2 \frac{c}{b}$;

(II) $\log_a^2 b \log_b^2 c = \frac{1}{\log_c^2 a}$;

(III) Trong ba số $\log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{c}{b}$; $\log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{a}{c}$; $\log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{b}{a}$ luôn có ít nhất một số lớn hơn 1.

Khẳng định nào đúng?

A. Chỉ (I) và (II) **B.** Chỉ (I) và (III)

C. Chỉ (I) **D.** Cả (I), (II) và (III)

Bài 15: Cô giáo Liên ra trường xa quê lập nghiệp, đến năm 2014 sau gần 5 năm làm việc tiết kiệm được x (triệu đồng) và định dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế cô giáo phải cần 1,55x (triệu đồng). Cô quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất là 6,9% /năm với lãi hàng tháng nhập gốc và cô không rút trước kì hạn. Hỏi năm bao nhiêu cô mua được căn nhà đó, biết rằng chủ nhà đó vẫn bán giá như cũ.

A. Năm 2019 **B.** Năm 2020 **C.** Năm 2021 **D.** Năm 2022

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Bất phương trình xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi:

$mx^2 + 4x + m > 0 \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \quad (1)$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi :

$5x^2 + 5 \geq mx^2 + 4x + m, \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow (5-m)x^2 - 4x + 5 - m \geq 0 \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - m > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -m^2 + 10m - 21 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được $2 < m \leq 3$, $m \in Z \Rightarrow m = 3$. Vậy có 1 giá trị m.

Chọn C.

Bài 2:

Theo công thức $m(t) = m_0 e^{-kt}$ ta có:

$m(5730) = \frac{100}{2} = 50 = 100.e^{-k.5730} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{5730}$ suy ra:

$m(t) = 100e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$

Chọn A.

Bài 3:

Giả sử khối lượng ban đầu của mẫu đồ cổ chứa Cacbon là m_0, tại thời điểm t tính từ thời điểm ban đầu ta có:

$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow \frac{3m_0}{4} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow t = \frac{5730 \ln\left(\frac{3}{4}\right)}{-\ln 2} \approx 2378$ (năm)

Chọn A.

Bài 4:

Theo công thức tính tỉ lệ % thì cần tìm t thỏa mãn:

$75 - 20\ln(1+t) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3.25 \Leftrightarrow t \geq 24.79$

Chọn A.

Bài 5:

Ta có $P(x) = \frac{100}{1 + 49.e^{-0.015x}} \geq 75 \Leftrightarrow x \geq 333$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 6:

Tổng số tiền cả vốn và lãi (lãi chính là lợi tức) ông Năm nhận được từ cả hai ngân hàng là $347,50776813$ triệu đồng.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng X, khi đó $320-x$ (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng Y. Theo giả thiết ta có:

$$x(1+0,021)^5+(320-x)(1+0,0073)^9=347,50776813$$

Ta được $x=140$. Vậy ông Năm gửi 140 triệu ở ngân hàng X và 180 triệu ở ngân hàng Y.

Đáp án A.

Bài 7:

Điều kiện: $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ x\neq 1\end{cases}$. Phương trình:

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+1}\left(2x^2+x-1\right)}{\log_{x+1}\left(2x-1\right)}+2\log_{x+1}\left(2x-1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+1}\left(2x-1\right)+\log_{x+1}\left(x+1\right)}{\log_{x+1}\left(2x-1\right)}+2\log_{x+1}\left(2x-1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\log_{x+1}\left(2x-1\right)}+2\log_{x+1}\left(2x-1\right)=4\left(3\right)$$

Đặt $t=\log_{x+1}(2x-1)$, khi đó (3) viết thành:

$$2t+\frac{1}{t}-3=0\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_{x+1}(2x-1)=1 \\ \log_{x+1}(2x-1)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} x+1=2x-1 \\ \sqrt{x+1}=2x-1\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$$

Chọn C.

Bài 8:

Gọi t là thời gian các lá bèo phủ kín $\dfrac{1}{3}$ cái hồ. Vì tốc độ tăng không đổi nên, 1 giờ tăng gấp 10 lần nên ta có $10^t=\dfrac{1}{3}10^9\Leftrightarrow t=9-\log 3$. Đáp án cần chọn là C.

Chọn C.

Bài 9:

Ta có công thức tính lượng tiền còn nợ khi trả góp được n tháng với mỗi tháng trả khoản tiền là a, lãi suất $r\%$ và số tiền nợ ban đầu là A đó là: $A\left(1+r\right)^n-\dfrac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^n-1\right]$

Sau 1 năm (12 tháng) còn nợ là:

$$40000000.(1+0,85\%)^{12}-\frac{500000}{0,85\%}\left[(1+0,85\%)^{12}-1\right]=37987647=A_1.$$

Lúc này người vay ngân hàng trả mỗi tháng $m_1 = 1.500.000$ đồng, lãi suất $r_1 = 1.15\%$, số tiền nợ là A_1. Sau tháng n hết nợ nên:

$$A_1(1+r_1)^n - m_1\frac{(1+r_1)^n - 1}{r_1} = 0 \Leftrightarrow n = log_{1+r_1}\left(\frac{m_1}{m_1 - A_1r_1}\right) = 30.105$$

Vậy phải qua tháng 43 mới hết nợ.

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 10:

Áp dụng công thức $S_n = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \Rightarrow n = \log_{\left(1+\frac{r}{100}\right)}\left(\frac{S_n}{A}\right)$ trong đó A = 100 000; r = 1,5; $S_n = 130000$.

Suy ra $n \approx 17,6218$.

Chọn A.

Bài 11:

Theo giả thiết ta có

$$\frac{A}{2} = Ae^{24360.r} \Leftrightarrow e^{24360.r} = \frac{1}{2}$$

Với A=10 gam, gọi t là thời gian phân hủy để còn lại S=1gam ta có phương trình:

$$1 = 10e^{rt} \Leftrightarrow 0,1 = e^{24360.r.\frac{t}{24360}}$$

$$\Leftrightarrow t \simeq 80922 \text{ (năm)}.$$

Chọn A.

Bài 12:

$$2.2^x + 3.3^x - 6^x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2.2^x + 3.3^x + 1 < 6^x \Leftrightarrow 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x < 1$$

Dùng tính đơn điệu của hàm số, suy ra $S_1 = (2;+\infty)$

$2^{-x} < 4 \Leftrightarrow -x < 2 \Leftrightarrow -2 < x \Rightarrow S_2 = (-2;+\infty)$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 0 \Leftrightarrow (x-1) \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2 \Rightarrow S_3 = [2;+\infty)$

$\Rightarrow S_1 \subset S_3 \subset S_2$

Chọn A.

Bài 13:

Gửi được 1 năm coi như gửi được 4 kỳ hạn 3 tháng; thêm một kỳ hạn 6 tháng số tiền khi đó là: $20000000.(1+0,72.3:100)^4(1+0,78.6:100)$

Giả sử lãi suất không kỳ hạn là A%; gửi thêm B tháng khi đó số tiền là: $20000000.(1+0,72.3:100)^4(1+0,78.6:100)(1+A:100)^B = 23263844,9$

Lưu ý: $1 \le B \le 5$ và B nguyên dương, nhập máy tính:

$$20000000.(1+0,72.3:100)^4(1+0,78.6:100)(1+A:100)^B - 23263844,9$$

Ghi chú của em

Thử với $A=0,3$ rồi thử B từ 1 đến 5, sau đó lại thử $A=0,5$ rồi thử B từ 1 đến 5, ... cứ như vậy đến bao giờ kết quả đúng bằng 0 hoặc xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Kết quả: $A=0,5; B=4$

Chọn C

Bài 14:

+ $\log_a^2 \frac{b}{c} = \left(\log_a b - \log_a c\right)^2 = \left(\log_a c - \log_a b\right)^2 = \log_a^2 \frac{c}{b}$.

Khẳng định (I) đúng.

+ $\log_a^2 b \log_b^2 c = \frac{1}{\log_c^2 a}$

$\Leftrightarrow \log_a^2 b \log_b^2 c \log_c^2 a = 1$

$\Leftrightarrow \left(\log_a b \log_b c \log_c a\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left(\log_a a\right)^2 = 1$. Khẳng định (II) đúng.

+ Theo khẳng định (I) ta có:

$\log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{c}{b} = \log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{b}{c}; \log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{a}{c} = \log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{c}{a}; \log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{b}{a} = \log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{a}{b}$.

Suy ra $\log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{c}{b}.\log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{a}{c}.\log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{b}{a} = \log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{b}{c}.\log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{c}{a}.\log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{a}{b} = 1$ (theo câu b).

Do a, b, c đôi một khác nhau nên các số $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{b}; \frac{b}{c} \neq \frac{a}{c}; \frac{b}{a} \neq \frac{c}{a}$. Suy ra các số $\log_{\frac{a}{b}} \frac{c}{b}; \log_{\frac{b}{c}} \frac{a}{c}; \log_{\frac{c}{a}} \frac{b}{a}$ đều khác 1.

Ta cũng có:

$\left(a-b\right)^2 + \left(a-c\right)^2 + \left(b-c\right)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab \neq 0$.

Suy ra ít nhất một trong ba số $a^2 - bc; b^2 - ac; c^2 - ab$ khác 0. Do đó ít nhất một trong ba số $\log_{\frac{a}{b}} \frac{c}{b}; \log_{\frac{b}{c}} \frac{a}{c}; \log_{\frac{c}{a}} \frac{b}{a}$ khác -1.

Khi đó, trong ba số $\log_{\frac{a}{b}} \frac{c}{b}; \log_{\frac{b}{c}} \frac{a}{c}; \log_{\frac{c}{a}} \frac{b}{a}$ luôn có ít nhất một số khác 1.

Mà $\log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{c}{b}.\log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{a}{c}.\log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{b}{a} = 1$. Do đó khẳng định (III) đúng.

Chọn D.

Bài 10:

Tiền lãi sau n (năm) tiết kiệm là: $x_n = x.(1+0,069)^n = (1,069)^n.x$

Theo giả thiết ta có

$x_n = 1,55x \Rightarrow (1,069)^n = 1,55 \Rightarrow n = \log_{1,069} 1,55 \approx 6,56$

Vì $n \in \mathbb{N}$ do đó sau 7 năm cô giáo Liên mua được nhà, năm đó là 2021, đáp án C.

Chọn C.

ĐỀ SỐ 3

Bài 1: Với $a>0, a\neq 1$, cho biết: $t=a^{\frac{1}{1-\log_a u}}; v=a^{\frac{1}{1-\log_a t}}$. Chọn khẳng định đúng :

A. $u=a^{\frac{-1}{1-\log_a v}}$ **B.** $u=a^{\frac{1}{1+\log_a t}}$ **C.** $u=a^{\frac{1}{1+\log_a v}}$ **D.** $u=a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình
$\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}=m\left(\log_2 x^2-3\right)$ có nghiệm thuộc $[32;+\infty)$?

A. $m\in\left(1;\sqrt{3}\right]$. **B.** $m\in\left[1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\in\left[-1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $m\in\left(-\sqrt{3};1\right]$.

Bài 3: Một người nọ đem gửi tiết kiệm ở một ngân hàng với lãi suất là 12% năm. Biết rằng cứ sau mỗi một quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền (bao gồm cả vốn lẫn lãi) gấp ba lần số tiền ban đầu.

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Bài 4: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $m.2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Bài 5: Một bác nông dân vừa bán một con trâu được số tiền là 20.000.000 (đồng). Do chưa cần dùng đến số tiền nên bác nông dân mang toàn bộ số tiền đó đi gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 8.5% một năm thì sau 5 năm 8 tháng bác nông dân nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi. Biết rằng bác nông dân đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kì trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kì hạn 0.01% một ngày (1 tháng tính 30 ngày).

A. 31802750,09 đồng. **B.** 30802750,09 đồng.

C. 32802750,09 đồng. **D.** 33802750,09 đồng.

Bài 6: Tập các giá trị của m để bất phương trình $\frac{\log_2^2 x}{\sqrt{\log_2^2 x-1}}\geq m$ nghiệm đúng với mọi x > 0 là:

A. $(-\infty;1]$ **B.** $[1;+\infty)$ **C.** $(-5;2)$ **D.** $[0;3)$

Bài 7: Giả sử p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$?

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{8}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ **D.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

Bài 8: Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+3\leq 3^{x^2}+3^{\sqrt{x-1}}$.

A. $2\leq x$. **B.** $1\leq x\leq 2$. **C.** $2\leq x\leq 7$. **D.** $2\leq x<4$.

Bài 9: Tìm các giá trị của m để phương trình: $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}=m$ có 2 nghiệm phân biệt:

A. $\sqrt{3}+\sqrt{5}<m<4$ **B.** $2\sqrt{2}<m<4$ **C.** $2\sqrt{2}<m<\sqrt{3}+\sqrt{5}$ **D.** $m>2\sqrt{2}$

Bài 10: Cho $A=\frac{1}{\log_{a^1} b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}+...+\frac{1}{\log_{a^2} b}$. Biểu thức rút gọn của A là:

A. $\frac{2n(n+1)}{3.\log_a^b}$ **B.** $\frac{2n(2n+1)}{\log_a^b}$ **C.** $\frac{n(n+1)}{2.\log_a^b}$ **D.** $\frac{n(n+2)}{3\log_a^b}$

Bài 11: Ông A gửi tiết kiệm 100 triệu đồng gửi vào ngân hàng với lãi suất 5% một năm. Ông B cũng đem 100 triệu đồng gửi vào ngân hàng với lãi suất $\frac{5}{12}$ % một tháng. Sau 10 năm, hai ông A và B cùng đến ngân hàng rút tiền ra. Khẳng định nào sau đây là đúng ? (Lưu ý: tiền lãi được tính theo công thức lãi kép và được làm tròn đến hàng hàng triệu)

A. Số tiền của hai ông A, B khi rút ra là như nhau.

B. Ông B có số tiền nhiều hơn ông A là 1 triệu.

C. Ông B có số tiền nhiều hơn ông A là 2 triệu.

D. Ông B có số tiền nhiều hơn ông A là 3 triệu.

Bài 12: Giải phương trình: $5^{x+1}-5^{2-x}=124$.

A. $x=4$ **B.** $x=2$ **C.** $x=5$ **D.** $x=8$

Bài 13: Tập nghiệm của bất phương trình: $81.9^{x-2}+3^{x+\sqrt{x}}-\frac{2}{3}.3^{2\sqrt{x}+1}\geq 0$ là

A. $S=[1;+\infty)\cup\{0\}$. **B.** $S=[1;+\infty)$.

C. $S=[0;+\infty)$. **D.** $S=[2;+\infty)\cup\{0\}$.

Bài 14: Cho (u_n) là cấp số nhân với số hạng tổng quát $u_n>0; u_n\neq 1$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\log_{u_{k-1}}2007}{\log_{u_{k+1}}2007}=\frac{\log_{u_{k-1}}2007-\log_{u_k}2007}{\log_{u_k}2007-\log_{u_{k+1}}2007}$ **B.** $\frac{\log_{u_{k+1}}2007}{\log_{u_{k-1}}2007}=\frac{\log_{u_{k-1}}2007-\log_{u_k}2007}{\log_{u_k}2007-\log_{u_{k+1}}2007}$

C. $\frac{\log_{u_{k-1}}2007}{\log_{u_{k+1}}2007}=\frac{\log_{u_{k+1}}2007-\log_{u_k}2007}{\log_{u_k}2007-\log_{u_{k-1}}2007}$ **D.** $\frac{\log_{u_{k-1}}2007}{\log_{u_{k+1}}2007}=\frac{\log_{u_k}2007-\log_{u_{k-1}}2007}{\log_{u_k}2007-\log_{u_{k+1}}2007}$

Bài 15: Trong một bản hợp ca, coi mọi ca sĩ đều hát với cường độ âm và coi cùng tần số. Khi một ca sĩ hát thì cường độ âm là 68dB. Khi cả ban hợp ca cùng hát thì đo được mức cường độ âm là 80dB. Tính số ca sĩ có trong ban hợp ca đó, biết mức cường độ âm L được tính theo công thức $L=10\log\frac{I}{I_0}$ (trong đó I là cường độ âm và I_0 là cường độ âm chuẩn)

A. 16 người **B.** 12 người **C.** 10 người **D.** 18 người

Bài 16: Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $f(x)=Ae^{rx}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỷ lệ tăng trưởng $(r>0)$, x (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sao bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

A. $5\ln 20$ (giờ) **B.** $5\ln 10$ (giờ) **C.** $10\log_5 10$ (giờ) **D.** $10\log_5 20$ (giờ)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1:

Ghi chú của em

Từ giả thiết suy ra: $\log_a t = \dfrac{1}{1-\log_a u}.\log_a a = \dfrac{1}{1-\log_a u}$

$$\log_a v = \frac{1}{1-\log_a t}.\log_a a = \frac{1}{1-\log_a t} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\log_a u}} = \frac{1-\log_a u}{-\log_a u}$$

$$\Leftrightarrow -\log_a v \log_a u = 1-\log_a u \Leftrightarrow \log_a u(1-\log_a v) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_a u = \frac{1}{1-\log_a v} \Leftrightarrow u = a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$$

Chọn D.

Bài 2:

Điều kiện: $x > 0$. Khi đó phương trình tương đương:

$\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$.

Đặt $t = \log_2 x$ với $x \geq 32 \Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 32 = 5$ hay $t \geq 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t-3)$ (*).

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \geq 5$"

Với $t \geq 5$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3).(t+1)} = m(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{t-3}.\left(\sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3} = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}$$

Ta có $\dfrac{t+1}{t-3} = 1 + \dfrac{4}{t-3}$. Với $t \geq 5 \Rightarrow 1 < 1 + \dfrac{4}{t-3} \leq 1 + \dfrac{4}{5-3} = 3$ hay:

$$1 < \frac{t+1}{t-3} \leq 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{t+1}{t-3}} \leq \sqrt{3}$$

Suy ra $1 < m \leq \sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1 < m \leq \sqrt{3}$.

Chọn A.

Bài 3:

Gọi số tiền người đó gửi là A, lãi suất mỗi quý là 0,03. Sau n quý, tiền mà người đó nhận được là: $A(1+0,03)^n$.

ycbt $\Leftrightarrow A(1+0,03)^n = 3A \Leftrightarrow n = \log_{1,03} 3 \approx 37,16$

Vậy số năm tối thiểu là xấp xỉ 9,29 năm. Vậy đáp án là C.

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 4:

$$Pt \Leftrightarrow m\left(2^{x^2-5x-6}-1\right)+2^{1-x^2}\left(1-2^{x^2-5x-6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{x^2-5x-6}-1\right)\left(m-2^{1-x^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-5x+6}-2=0 \\ 2^{1-x^2}=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \\ 2^{1-x^2}=m \ (*) \end{array}\right.$$

TH1: (*) Có nghiệm duy nhất (nghiệm x =0) $\Rightarrow m=2$.

TH2: (*) Có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là 2 và nghiệm còn lại khác 3 $\Rightarrow m=2^{-3}$.

TH3: (*) Có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là 3 và nghiệm còn lại khác 2 $\Rightarrow m=2^{-8}$.

Vậy, có 3 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn C.

Bài 5:

Một kì hạn 6 tháng có lãi suất là $\frac{8.5\%}{12}.6=\frac{4.25}{100}$. Sau 5 năm 6 tháng (có nghĩa là 66 tháng tức là 11 kỳ hạn), số tiền cả vốn lẫn lãi bác nông dân nhận được là: $A=20000000.\left(1+\frac{4.25}{100}\right)^{11}$.

Vì 5 năm 8 tháng thì có 11 kỳ hạn và dư 2 tháng hay dư 60 ngày nên số tiền A được tính lãi suất không kỳ hạn trong 60 ngày là:

$B=A.\frac{0.01}{100}.60=120000.\left(1+\frac{4.25}{100}\right)^{11}$. Suy ra sau 5 năm 8 tháng số tiền bác nông dân nhận được là

$$C=A+B=120000.\left(1+\frac{4.25}{100}\right)^{11}+20000000.\left(1+\frac{4.25}{100}\right)^{11}=31802750,09 \text{ (đồng)}$$

Chọn A.

Bài 6:

Đặt $t=\log_2^2 x\,(t>1)$

Khi đó ta có $\frac{t}{\sqrt{t-1}}\geq m$ (*)

Bất phương trình ban đầu có nghiệm với mọi x > 0 $\Leftrightarrow$ (*) nghiệm đúng với mọi t > 1

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{\sqrt{t-1}}$ trên $(1;+\infty)$

$$f'(t)=\frac{t-2}{\left(\sqrt{t-1}\right)^3}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty \quad \lim\limits_{t\to1} f(t) = +\infty$

BBT

t	1		2		$+\infty$
f'(t)	‖		0		
f(t)	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

Từ BBT ta có kết luận bất phương trình có nghiệm với mọi $t > 1 \Leftrightarrow m \le 1$

Chọn A.

Bài 7:

Đặt: $t = \log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q)$ thì:

$p = 9^t,\ q = 12^t,\ 16^t = p + q = 9^t + 12^t$ (1)

Chia hai vế của (1) cho 9^t ta được: $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2t} = 1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^t$, đặt $x = \left(\dfrac{4}{3}\right)^t = \dfrac{q}{p} > 0$ đưa về phương trình:

$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ do $x > 0$, suy ra $\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Chọn D.

Bài 8:

Điều kiện: $x \ge 1$.

Ta có: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 3 \le 3^{x^2} + 3^{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 3^{x^2+\sqrt{x-1}} + 9 - 3.3^{x^2} - 3.3^{\sqrt{x-1}} \le 0$

$\Leftrightarrow \left(3^{x^2} - 3\right)\left(3^{\sqrt{x-1}} - 3\right) \le 0$

+ Với $x = 1$: thoả mãn;

+ Với $x > 1$: $\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x-1}} \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $1 \le x \le 2$

Chọn B.

Bài 9:

ĐK: $x \le \log_3 5$

Đặt $f(x) = \sqrt{3^x+3} + \sqrt{5-3^x}$ với $x \le \log_3 5$

$$f'(x) = \frac{3^x \ln 3}{2\sqrt{3^x+3}} - \frac{3^x \ln 3}{2\sqrt{5-3^x}} = \frac{3^x \ln 3\left(\sqrt{5-3^x} - \sqrt{3^x+3}\right)}{2\left(\sqrt{3^x+3}\right)\left(\sqrt{5-3^x}\right)}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-3^x} = \sqrt{3^x+3} \Leftrightarrow x = 0.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{3} + \sqrt{5}$

Bảng biến thiên:

Ghi chú của em

x	$-\infty$		0		$\log_3 5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}+\sqrt{5}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Ghi chú của em

Chọn A.

Bài 10:

Ta có

$$A=\frac{1}{\log_{a^1}^{b}}+\frac{1}{\log_{a^2}^{b}}+...+\frac{1}{\log_{a^n}^{b}}=(1+2+...+n)\frac{1}{\log_a^b}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2.\log_a^b}$$

Chọn C.

Bài 11:

Sau 10 năm:

- Số tiền của ông A có được: $100.000.000(1+5\%)^{10}\approx 163.000.000$. (làm tròn đến hàng triệu)

- Số tiền của ông B có được: $100.000.000(1+5/12\%)^{120}\approx 165.000.000$. (làm tròn đến hàng triệu)

Chọn C.

Bài 11:

Đặt $t=5^x;t>0\xrightarrow{pt}5t-\frac{25}{t}-124=0\Leftrightarrow 5t^2-124t-25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=25(tm)\\t=-\frac{1}{5}(l)\end{array}\right.$

Khi đó $5^x=25\Leftrightarrow x=2$

Chọn B.

Bài 12:

ĐKXĐ: $x\geq 0$.

BPT đã cho $\Leftrightarrow 81.\frac{9^x}{81}+3^x.3^{\sqrt{x}}-\frac{2}{3}.3.3^{2\sqrt{x}}\geq 0$

$\Leftrightarrow 3^{2x}+3^x.3^{\sqrt{x}}-2.3^{2\sqrt{x}}\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(3^x-3^{\sqrt{x}}\right)\left(3^x+2.3^{\sqrt{x}}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow 3^x-3^{\sqrt{x}}\geq 0$ (vì $3^x+2.3^{\sqrt{x}}>0,\ \forall x\geq 0$.)

$\Leftrightarrow 3^x\geq 3^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x\geq\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}\geq 1\\\sqrt{x}\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\x=0\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $S=[1;+\infty)\cup\{0\}$.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 13:

Vì (u_n) là cấp số nhân nên $u_k^2=u_{k-1}.u_{k+1}$

$\Rightarrow 2\log_{2017}u_k=\log_{2017}u_{k-1}+\log_{2017}u_{k+1}$

Suy ra $\dfrac{1}{\log_{u_k}2007}-\dfrac{1}{\log_{u_{k-1}}2007}=\dfrac{1}{\log_{u_{k+1}}2007}-\dfrac{1}{\log_{u_k}2007}$

Hay $\dfrac{\log_{u_{k-1}}2007}{\log_{u_{k+1}}2007}=\dfrac{\log_{u_{k-1}}2007-\log_{u_k}2007}{\log_{u_k}2007-\log_{u_{k+1}}2007}$

Chọn A.

Bài 14:

Gọi $I_1;I_n$ lần lượt là cường độ âm của một người và của n người.

Ta có $I_n=nI_1\Rightarrow n=\dfrac{I_n}{I_1}$

Ta có $L_1=10\log\dfrac{I_1}{I_0}=68, L_n=10\log\dfrac{I_n}{I_0}=80;$

Khi đó $L_n-L_1=10\log\dfrac{I_n}{I_1}=80$

$n=\dfrac{I_n}{I_1}=10^{\frac{L_n-L_1}{10}}=10^{\frac{6}{5}}\approx 15,89$

Vậy có 16 ca sĩ.

Chọn A.

Bài 15:

Gọi thời gian cần tìm là *t*.

Ta có: 5000 = 1000. e^{10r} nên r = $\dfrac{ln5}{10}$.

Do đó, 10000 = 1000. e^{rt} suy ra t = $\dfrac{\ln 10}{r}=\dfrac{10\ln 10}{\ln 5}=10\log_5 10$ giờ.

Chọn C.

CHƯƠNG 3.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

Chủ đề 1. Các bài toán nguyên hàm

- Định nghĩa
- Tính chất của nguyên hàm
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 2. Các bài toán tích phân

- Định nghĩa
- Tính chất của tích phân
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 3. Ứng dụng tích phân tính diện tích, thể tích

- Diện tích hình phẳng
- Thể tích khối tròn xoay
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 4. Ứng dụng tích phân giải bài toán vật lý và bài toán thực tế

- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

CHƯƠNG 03

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

CHỦ ĐỀ 1

CÁC BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM

Đầu tiên xin nhắc lại các khái niệm và định lí căn bản để quý bạn đọc có kiến thức nền tảng trước khi đi vào các bài toán cụ thể.

1 Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nửa khoảng, đoạn của R). Nếu ta có hàm số $F(x)$ xác định trên K sao cho $F'(x)=f(x)$ thì $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

Định lí 1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Định lí 2. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $G(x)=F(x)+C$ với C là hằng số.

Định lí 3. Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

2 Tính chất của nguyên hàm:

- $\int f'(x)dx = f(x)+C$ với C là hằng số.
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.
- $\int [f(x)\pm g(x)]f(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Bảng nguyên hàm

Chú ý: công thức tính vi phân của $f(x)$ là $d[f(x)]=f'(x)dx$

	Với u là một hàm số
$\int 0dx = C$	$\int 0du = C$
$\int dx = x+C$	$\int du = u+C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq -1)$	$\int u^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C(\alpha\neq -1)$
$\int \frac{1}{x}dx = ln\|x\|+C$	$\int \frac{1}{u}du = ln\|u\|+C$

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một số bài toán Nguyên Hàm ở mức độ vận dụng sau đây:

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Biết $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)^5 . \sin 4x dx = -\frac{\cos^7 2x}{a} + C$ với a là số nguyên. Tìm a?

A. $a = 6$ **B.** $a = 12$ **C.** $a = 7$ **D.** $a = 14$

Bài 2: Biết $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = a \ln|\sin x - \cos x| + C$ với a là số nguyên. Tìm a?

A. $a = 1$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = 3$ **D.** $a = 4$

Bài 3: Tìm một nguyên hàm của $1 + 4.\frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{\left(\tan^2 \frac{x}{2} - 1\right)^2}$ biết nguyên hàm này bằng 3 khi $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $\frac{1}{\cos^2 x} + 3$ **B.** $\frac{1}{\sin^2 x} + 3$ **C.** $\tan x + 2$ **D.** $\cot x + 2$

Bài 4: $F(x) = x + \ln|2\sin x - \cos x|$ là nguyên hàm của:

A. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 3\cos x}$ **B.** $\frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x - \cos x}$ **C.** $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 3\cos x}$ **D.** $\frac{3\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x}$

Bài 5: Biết $\int \frac{1}{(25x^2 - 20x + 4)^3} dx = -\frac{1}{a(5x-2)^5} + C$ với a là số nguyên. Tìm a?

A. $a = 4$ **B.** $a = 100$ **C.** $a = 5$ **D.** $a = 25$

Bài 6: Biết $\int \frac{1+x}{2x^2 - 5x - 7} dx = \frac{a}{b} \ln|2x - 7| + C$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$?

A. $S = 4$ **B.** $S = 2$ **C.** $S = 3$ **D.** $S = 5$

Bài 7: Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$?

A. $S = 4$ **B.** $S = 2$ **C.** $S = 3$ **D.** $S = 5$

Bài 8: Biết $\int \frac{1}{1+cosx}dx = a\tan\frac{x}{b}+C$ với $a,\ b$ là các số nguyên. Tính $S=a+b$?

A. $S=4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=3$ **D.** $S=5$

Bài 9: Biết $\int \frac{1}{1+sin2x}dx = \frac{a}{b}tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$ với $a,\ b$ là các số nguyên. Tính $S=a+b$?

A. $S=4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=3$ **D.** $S=5$

Bài 10: Cho $f(x)=8sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(0)=8$ là:

A. $4x+2sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+9.$ **B.** $4x-2sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+9.$

C. $4x+2sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+7.$ **D.** $4x-2sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+7.$

Bài 11: Cho $f(x)=1+|x|$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1)=1$ là:

A. $x^2+x+1.$

B. $\begin{cases} x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2} & khi\ x\ge 0 \\ x-\frac{x^2}{2}+C_2 & khi\ x<0 \end{cases}.$

C. $\begin{cases} \frac{x^2}{2}-x+C_1 & khi\ x\ge 0 \\ x-\frac{x^2}{2}+C_2 & khi\ x<0 \end{cases}.$

D. $\begin{cases} -x^2+x+C_1 & khi\ x\ge 0 \\ x-\frac{x^2}{2}+C_2 & khi\ x<0 \end{cases}.$

Bài 12: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $\int \frac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx$ với $0<x<1$ và $F\left(\frac{1}{2}\right)=26$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là:

A. 24. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 26.

Bài 13: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$ người ta đặt $t=g(x)$ (một hàm biểu diễn theo biến x) thì nguyên hàm trở thành $\int 2dt$. Biết $g(4)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, giá trị của $g(0)+g(1)$ là:

A. $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2+3\sqrt{6}}{2}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

▶ *Ghi chú của em*

Bài 1:

Đặt $F(x)=\int (cos^2x-sin^2x)^5.sin4xdx$, ta có:

$$F(x)=\int (cos^2x-sin^2x)^5.sin4xdx=\int (cos2x)^5.2sin2x.cos2xdx$$
$$=2\int cos^6 2x.sin2xdx$$

Đặt $t=cos2x \Rightarrow dt=-2sin2xdx$

Vậy $F(x)=-\int t^6dt=-\frac{t^7}{7}+C=-\frac{cos^7 2x}{7}+C.$

Chọn C.

Bài 2:

Vì $\left[ln\left|sinx-cosx\right|+C\right]'=\frac{(sinx-cosx)'}{sinx-cosx}=\frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}$ nên

Nguyên hàm của $\frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}$ là $ln\left|sinx-cosx\right|+C$.

Chọn A.

Bài 3:

$$f(x)=1+4.\frac{tan^2\frac{x}{2}}{\left(tan^2\frac{x}{2}-1\right)^2}=1+\left(\frac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}\right)^2=1+tan^2x=\frac{1}{cos^2x}$$

Nguyên hàm của $F(x)=tanx+C$

Ta có $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=3 \Leftrightarrow tan\frac{\pi}{4}+C=3 \Leftrightarrow C=2 \Rightarrow F(x)=tanx+2$

Chọn C.

Bài 4:

Ta chỉ cần đạo hàm của *F(x)*, rồi sau đó quan sát kết quả đúng.

Ta có $F'(x)=1+\frac{(2sinx-cosx)'}{2sin-cosx}=1+\frac{2cosx+sinx}{2sinx-cosx}=\frac{3sinx+cosx}{2sinx-cosx}$

$\Rightarrow F(x)$ là một nguyên hàm của $\frac{3sinx+cosx}{2sinx-cosx}$

Chọn D.

Bài 5.

Chú ý nếu chúng ta biến đổi:

$$\int \frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)^3}dx = \int \left(25x^2-20x+4\right)^{-3}dx = \frac{\left(25x^2-20x+4\right)^{-4}}{-4}+C$$

là sai lầm, điều sau đây mới đúng:

$$\int \left(25x^2-20x+4\right)^{-3}d\left(25x^2-20x+4\right) = \frac{\left(25x^2-20x+4\right)^{-4}}{-4}+C.$$

Trở lại bài, ta sẽ biến đổi biểu thức $\left(25x^2-20x+4\right)^3$ về dạng $\left(ax+b\right)^n$ như sau:

$$\int \frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)^3}dx = \int \frac{1}{\left(5x-2\right)^6}dx = \int \left(5x-2\right)^{-6}dx$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\left(5x-2\right)^{-5}}{-5}+C = -\frac{1}{25\left(5x-2\right)^5}+C$$

Chọn D.

Bài 6.

Ta quan sát mẫu có thể phân tích được thành nhân tử, sử dụng MTCT bấm giải phương trình bậc 2: $2x^2-5x-7=0$ thấy có hai nghiệm là $x=-1,\ x=\frac{7}{2}$. Áp dụng công thức $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm ta có $2x^2-5x-7=\left(x+1\right)\left(2x-7\right)$.

Do đó:

$$\int \frac{1+x}{2x^2-5x-7}dx = \int \frac{x+1}{\left(x+1\right)\left(2x-7\right)}dx = \int \frac{1}{2x-7}dx = \frac{1}{2}ln\left|2x-7\right|+C$$

Chọn C.

Bài 7.

Nếu áp dụng ngay $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}+C$ thì ta có:

$\int \left(sin2x-cos2x\right)^2 dx = \frac{\left(sin2x-cos2x\right)^3}{3}+C$. Đây là một biến đổi sai lầm như đã từng phân tích ở Bài 5. Ta phải khai triển $\left(sin2x-cos2x\right)^2$ để xem thử:

$$\int \left(sin2x-cos2x\right)^2 dx = \int \left(1-sin4x\right)dx = x+\frac{1}{4}cos4x+C$$

Chọn D.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 8:

Chưa thể áp dụng các công thức nguyên hàm cơ bản được, ta quan sát mẫu và thấy rằng có thể biến đổi $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ dựa trên công thức hạ bậc $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$. Do đó:

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\tan\frac{x}{2}+C$$

Ta thấy rằng $a=1,\ b=2$ do đó $S=3$.

Chọn C.

Bài 9:

$$\int\frac{1}{1+\sin 2x}dx=\int\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}dx=\int\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Ta thấy rằng $a=1,\ b=2$ do đó $S=3$.

Chọn C.

Bài 10:

Ta cần phải tính $\int f(x)dx=\int 8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)dx$, đầu tiên phải sử dụng công thức hạ bậc để biến đổi $f(x)$ như sau:

$$f(x)=8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=8\left(\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)$$

$$f(x)=4-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F(x)=4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+C$$

$$f(0)=8\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+C=8\Leftrightarrow C=9$$

Chọn B

Bài 11:

Ta có $f(x)=\begin{cases}1+x\ khi\ x\ge 0\\ 1-x\ khi\ x<0\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x+\frac{x^2}{2}+C_1\ khi\ x\ge 0\\ x-\frac{x^2}{2}+C_2\ khi\ x<0\end{cases}$

Theo đề $F(1)=1\Rightarrow C_1=-\frac{1}{2}$ do đó $F(x)=\begin{cases}x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ khi\ x\ge 0\\ x-\frac{x^2}{2}+C_2\ khi\ x<0\end{cases}$.

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 12:

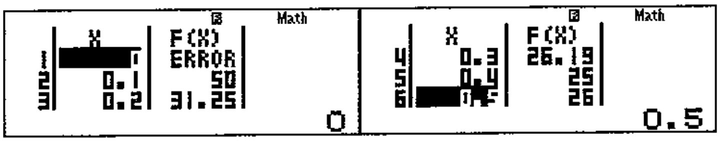
Ta có:

$$F(x)=\int\frac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx=\int\frac{9x^2-4\left(x^2-2x+1\right)}{x^2(1-x)^2}dx$$

$$=\int\left[\frac{9}{(1-x)^2}-\frac{4}{x^2}\right]dx=\frac{4}{x}+\frac{9}{(1-x)}+C$$

Vì $F\left(\frac{1}{2}\right)=26$ nên $\frac{4}{\frac{1}{2}}+\frac{9}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}+C=26\Leftrightarrow C=0$.

Lúc này $F(x)=\frac{4}{x}+\frac{9}{(1-x)}$ với $0<x<1$. Sử dụng MTCT bấm **Mode 7** chọn **Start 0 End 1 Step 0.1:**



Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là 25 xảy ra khi $x=0.4$.

Chọn C

Bài 13:

Đối với bài này học sinh cần phải nắm được kĩ thuật đổi biến khi tính nguyên hàm. Học sinh cần phải dự đoán phép đặt ẩn phụ, đầu tiên ta thấy nguyên hàm có thể biến đổi thành:

$$\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}dx$$

Do đó ta đặt:

$$t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\Rightarrow dt=\frac{dx}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}\Leftrightarrow 2dt=\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

Vì vậy suy ra $\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx=\int 2dt$.

Tuy nhiên đây là một lời giải sai, chúng ta có thể thấy khi đặt

$$t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}+C\Rightarrow dt=\frac{dx}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}\Leftrightarrow 2dt=\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

với C là hằng số, kết quả vẫn không thay đổi. Vì vậy chính xác ở đây là

Ghi chú của em

$t=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}+C=g(x)$. Theo đề $g(4)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ nên suy ra $C=0$.

Cuối cùng ta được $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}$ vì vậy $g(0)+g(1)=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

Chọn C

Chú ý: Bài toán này hoàn toàn có thể dùng MTCT để chọn kết quả, ta có:

$$\int 2dt=\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx \Rightarrow t=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$$

Do đó $g(x)$ là nguyên hàm của $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}$, suy ra

$$g(0)-g(4)=\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$$

$$\Rightarrow g(0)=\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx+g(4)$$

Và:

$$g(1)-g(4)=\int_4^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$$

$$\Rightarrow g(1)=\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx+g(4)$$

Sử dụng MTCT ta bấm:

$$\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx+g(4)+\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx+g(4)$$

là kết quả C.

CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN

MTCT phát triển đã giúp cho việc tìm kết quả tích phân thật dễ dàng, tuy nhiên vẫn có những bài hỏi mang tính vận dụng khiến học sinh khó hoặc không thể dùng MTCT để giải quyết. Trước khi đến với những bài toán này, tác giả xin nhắc lại các định nghĩa, và định lý căn bản của tích phân.

1 Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa:

- Liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Lúc đó hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Chú ý:

- $a,\ b$ được gọi là 2 cận của tích phân.
- $a=b$ thì $\int_a^a f(x)dx=0$.
- $a>b$ thì $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.
- Tích phân không phụ thuộc vào biến số, tức là $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.

2 Tính chất của tích phân:

- $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ với $a<c<b$.
- $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.
- $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

Chú ý: Để tính tích phân từ a đến b, ta tiến hành tìm nguyên hàm rồi sau đó thay cận vào theo công thức $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Một lần nữa xin nhắc lại rằng đây là cuốn sách đề cập đến các bài toán vận dụng và vận dụng cao nên trước khi sử dụng sách này quý bạn đọc cần có kiến thức cơ bản tốt. Bây giờ chúng ta cùng nghiên cứu các bài toán tích phân khá khó:

Bài 1. Nếu a là một số thỏa mãn các điều kiện sau: $a \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ và $\int_0^a cos\left(x+a^2\right)dx = sin\,a$ thì:

A. $a=\pi$ B. $a=\sqrt{\pi}$ C. $a=2\sqrt{\pi}$ D. $a=\sqrt{2\pi}$

Bài 2. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện $\int_1^e ln\frac{k}{x}dx < e-2$. Khi đó:

A. $S=\{1\}$ B. $S=\{2\}$ C. $S=\{1,2\}$ D. $S=\varnothing$

Bài 3. Xét tích phân $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3sin^2x-2cos^2x-2}dx$. Bằng cách đặt $t=tanx$, tích phân A được biến đổi thành tích phân nào sau đây.

A. $\int_0^1\frac{1}{t^2-4}dt$ B. $\int_0^1\frac{1}{t^2+4}dt$ C. $\int_0^1\frac{1}{t^2-2}dt$ D. $\int_0^1\frac{1}{t^2+2}dt$

Bài 4. Đặt $t=tan\frac{x}{2}$ thì $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{cos^6\frac{x}{2}}dx$ được biến đổi thành $2\int_0^1 f(t)dt$. Hãy xác đinh $f(t)$:

A. $f(t)=1-2t^2+t^4$ B. $f(t)=1+2t^2+t^4$ C. $f(t)=1+t^2$ D. $f(t)=1-t^2$

Bài 5. Biết $\int_0^3 f(x)dx=\frac{5}{3}$ và $\int_0^4 f(t)dt=\frac{3}{5}$. Tính $\int_3^4 f(u)du$

A. $\frac{8}{15}$ B. $\frac{14}{15}$ C. $-\frac{17}{15}$ D. $-\frac{16}{15}$

Bài 6. Biết $\int_0^1\frac{x^2}{1+e^{-x}}dx=a$. Tính giá trị của $I=\int_0^1\frac{x^2}{1+e^x}dx$.

A. $I=\frac{1}{2}-a.$ B. $I=1-a.$ C. $I=\frac{1}{3}-a.$ D. $I=1+a.$

Bài 7. Đặt $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n.dx$. Khi đó:

A. $I_{n+1}<I_n$. B. $I_{n+1}>I_n$. C. $I_{n+1}\geq I_n$. D. $I_{n+1}=I_n$.

Bài 8. Cho $I_n=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$ và $J_n=\int_0^1 x(1-x^2)^n dx$. Xét các câu:

(1) $I_n\leq\frac{1}{2(n+1)}$ với mọi n.

(2) $J_n>\frac{1}{2(n+1)}$ với mọi n.

(3) $I_n\leq J_n=\frac{1}{2(n+1)}$ với mọi n.

A. (1) đúng. B. (1) và (2) đúng.

C. Tất cả đều sai. D. Cả (1) và (3) đúng.

Bài 9: Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất, thỏa mãn $\int_0^1 \frac{dx}{2x+k} \geq 0.$

A. $k=3.$ B. $k=4.$

C. $k=1.$ D. $k=2.$

Bài 10: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a;b]$.

(1) Với mọi số thực y, ta có: $y^2\int_a^b f^2(x)dx + 2y\int_a^b f(x).g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0$.

(2) $\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$.

Trong hai khẳng định trên:

A. Chỉ có (1) đúng. B. Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai khẳng định đều đúng. D. Cả hai khẳng định đều sai.

Bài 11: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a;b]$,

$f(x) \neq 0, \forall x \in [a;b]$ và $m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M, \forall x \in [a;b]$.

Căn cứ vào giả thiết đó, một học sinh lập luận:

(1) Ta có bất đẳng thức

$0 \leq \left(\frac{g(x)}{f(x)} - m\right)\left(M - \frac{g(x)}{f(x)}\right).f^2(x), \forall x \in [a;b]$. (*)

(2) Biến đổi, (*) trở thành

$0 \leq -g^2(x) + (M+m).f(x).g(x) - M.m.f^2(x), \forall x \in [a;b]$.

(3) Suy ra $\int_a^b g^2(x)dx + M.m\int_a^b f^2(x) \leq (M+m)\int_a^b f(x).g(x)dx$

Lập luận trên:

A. Đúng hoàn toàn. B. Sai từ (1).

C. Sai từ (2). D. Sai từ (3).

Bài 12: Cho hai hàm $f(x), g(x)$ cùng đồng biến và liên tục trên $[a;b]$, với $a<b$. Khi đó, xét ba khẳng định sau đây:

(1) $\forall x \in [a;b]$ ta có $\int_a^b f(a)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(b)dx$

(2) $\int_a^b f(x)dx \leq f(b)$.

(3) Tồn tại $x_0 \in [a;b]$ sao cho $f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Các khẳng định đúng trong 3 khẳng định trên là:

A. Chỉ (1) và (2). B. Chỉ (2) và (3).

C. Chỉ (1) và (3). D. Cả (1), (2) và (3).

Bài 13: Ta định nghĩa $max\left[f(x),g(x)\right]=\begin{cases} f(x)\,khi\,f(x)\ge g(x) \\ g(x)\,khi\,g(x)>f(x)\end{cases}$

Cho $f(x)=x^2$ và $g(x)=3x-2$.

Như thế $\int\limits_0^2 max\left[f(x),g(x)\right]dx$ bằng:

A. $\int\limits_0^2 x^2dx$.

B. $\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^2(3x-2)dx$.

C. $\int\limits_0^2(3x-2)dx$.

D. 15.

Bài 14: Biết $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{cox^2x}{1+3^{-x}}dx=m$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{cox^2x}{1+3^{x}}dx$.

A. $\pi-m$.

B. $\frac{\pi}{4}+m$.

C. $\pi+m$.

D. $\frac{\pi}{4}-m$.

Bài 15: Cho $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{2x+m}}$, với $m>0$. Tìm các giá trị của tham số m để $I\ge 1$.

A. $0<m\le\frac{1}{4}$.

B. $m>\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{8}\le m\le\frac{1}{4}$.

D. $m>0$.

Bài 16: Cho m là một số dương và $I=\int\limits_0^m\left(4^x\ln 4-2^x\ln 2\right)dx$. Tìm m khi $I=12$.

A. $m=4$.

B. $m=3$.

C. $m=1$.

D. $m=2$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1:

$$\int_0^a cos\left(x+a^2\right)dx \Leftrightarrow sin\left(x+a^2\right)\Big|_0^a = sin\,a \Leftrightarrow sin\left(a+a^2\right)-sin\,a^2 = sin\,a$$

$$\Leftrightarrow 2\,cos\frac{a+2a^2}{2}.sin\frac{a}{2} = 2\,sin\frac{a}{2}.cos\frac{a}{2}(1)$$

Vì $a\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ nên $\frac{a}{2}\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow sin\frac{a}{2}>0$, vậy:

$$(1)\Leftrightarrow cos\frac{a+2a^2}{2} = cos\frac{a}{2} \Leftrightarrow cos\frac{a+2a^2}{2}-cos\frac{a}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow -2\,sin\frac{a^2+a}{2}.sin\frac{a^2}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sin\frac{a^2+a}{2}=0 \\ sin\frac{a^2}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a^2+a}{2}=k\pi(1) \\ \frac{a^2}{2}=l\pi(2) \end{array}\right. (k,l\in Z)$$

Vì $k\in Z$ nên (1) không thỏa mãn với mọi $a\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, hoặc thay 4 đáp án vào (1) thấy đều không thỏa.

Đối với (2): vì $a\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ nên chọn $l=1$ lúc đó $a=\sqrt{2\pi}$.

Chọn D

Bài 2:

$$I=\int_1^e ln\frac{k}{x}dx$$

Ta dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = ln\frac{k}{x} = ln\,k - ln\,x \Rightarrow du = -\frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x\,ln\frac{k}{x}\Big|_1^e + \int_1^e dx = e\,ln\frac{k}{e} - ln\,k + (e-1)$$

Vậy $\int_1^e ln\frac{k}{x}dx < e-2 \Leftrightarrow e\,ln\frac{k}{e} - ln\,k + (e-1) < e-2$

$\Leftrightarrow e(ln\,k-1)-ln\,k < -1 \Leftrightarrow (e-1)ln\,k < e-1 \Leftrightarrow ln\,k<1$

$\Leftrightarrow k<e$ mà k là số nguyên dương nên chọn $k\in\{1;2\}$

Chọn C.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 3:

Ta có: $3sin^2x-2cos^2x-2=cos^2x\left(3tan^2x-2-\dfrac{2}{cos^2x}\right)$

$=cos^2x\left[3tan^2x-2-2\left(1+tan^2x\right)\right]=cos^2x\left(tan^2x-4\right)$

Vậy $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{cos^2x\left(tan^2x-4\right)}dx$, lúc này đặt $t=tanx$ và đổi cận ta được $A=\int\limits_0^1\dfrac{dt}{t^2-4}$.

Chọn A.

Bài 4:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{cos^2\frac{x}{2}}\right)^2.\dfrac{1}{cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+tan^2\dfrac{x}{2}\right)^2.\dfrac{1}{cos^2\frac{x}{2}}dx$$

Đặt $t=tan\dfrac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{cos^2\frac{x}{2}}dx\\x=0\Rightarrow t=0;\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Vậy $I=\int\limits_0^1\left(1+t^2\right)^2.2dt=2\int\limits_0^1\left(1+2t^2+t^4\right)dt\Rightarrow f\left(t\right)=1+2t^2+t^4$

Chọn B.

Bài 5:

$\int\limits_0^4 f\left(u\right)du=\int\limits_0^3 f\left(u\right)du+\int\limits_3^4 f\left(u\right)du$

Mà $\int\limits_0^3 f\left(u\right)du=\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx=\dfrac{5}{3}$ và $\int\limits_0^4 f\left(u\right)du=\int\limits_0^4 f\left(t\right)dt=\dfrac{3}{5}$

Nên $\dfrac{3}{5}=\dfrac{5}{3}+\int\limits_3^4 f\left(u\right)du\Rightarrow\int\limits_3^4 f\left(u\right)du=\dfrac{3}{5}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{16}{15}$.

Chọn D.

Chú ý: tích phân không phụ thuộc vào biến số.

Bài 6:

Sử dụng phân tích $\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{1+e^{-x}}dx+\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{1+e^x}dx=\int\limits_0^1 x^2dx$ hoặc máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 7:

Khi $0<x<\frac{\pi}{2}$ thì $0<\sin x<1$. Do đó với $0<x<\frac{\pi}{2}$ ta có:

$\sin^{n+1}x<\sin^{n}x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}x\,dx$, tức là: $I_{n+1}<I_n$

Chọn A.

Bài 8:

Chỉ (1) và (3) đúng. Khẳng định (2) sai.

Ta đặt $x=\cos t$ để tính $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\left(1-\cos^2 t\right)^n\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\cos t\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,d\left(\sin t\right)=\left.\frac{\sin^{2n+2}t}{2n+2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\left(n+1\right)}.$$

Như vậy khẳng định (2) sai. Ngoài ra, để thấy rằng với mọi $x\in\left[0,1\right]$, $x\le x^2$ nên suy ra với mọi n ta có $I_n\le J_n=\frac{1}{2\left(n+1\right)}$

Vậy (1) và (3) cùng đúng.

Chọn D.

Bài 9:

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0;1],\ 2x+k>0$, do đó $\int_0^1\frac{dx}{2x+k}>0,\ \forall k\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn bài ra là $k=1$.

Chọn C.

Bài 10:

Với một số thực y ta có: $0\le\left[y.f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]^2$

$=y^2.f^2(x)+2y.f(x).g(x)+g^2(x)$ từ đó suy ra (1) đúng:

$$y^2\int_a^b f^2(x)dx+2y\int_a^b f(x).g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0$$

Vì vế trái của bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai đối với y, nên theo định thức về dấu của tam thức bậc hai, ta có:

$$\Delta'=(\int_a^b f\left(x\right).g\left(x\right).dx)^2-\int_a^b f^2\left(x\right).dx.\int_a^b g^2\left(x\right).dx\le 0$$

$\left(\int_a^b f\left(x\right).g\left(x\right).dx\right)^2\le\int_a^b f^2\left(x\right).dx.\int_a^b g^2\left(x\right).dx$ ((2) đúng).

Chọn C.

Bài 11:

Lập luận đúng hoàn toàn. Bất đẳng thức sau cùng được gọi là bất đẳng thức Diaz.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 12:

Chỉ (1) và (3) đúng. Khẳng định (2) sai.

Do tính đồng biến nên $\forall a \le x \le b$ ta có $f(a) \le f(x) \le f(b)$, tức là:

$\int_a^b f(a).dx \le \int_a^b f(x).dx \le \int_a^b f(b).dx$.

Vậy (1) đúng. Suy ra: $(b-a).f(a) \le \int_a^b f(x).dx \le (b-a).f(b)$

Do f(x) liên tục trên $[a;b]$ nên tồn tại $x_0 \in [a;b]$ sao cho:

$f(x_0) = \dfrac{1}{a-b}\int_a^b f(x).dx$. Vậy (3) cũng đúng.

Chọn C.

Bài 13:

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là $x=1$ và $x=2$. Xét $x^2-(3x-2)$ và vẽ bảng xét dấu để xem trên đoạn nào thì $f(x)=x^2$ và $g(x)=3x-2$ hàm nào có giá trị lớn hơn:

x	0		1		2
x^2-3x+2		+	0	−	0

Do đó $\int_0^2 max[f(x),g(x)]dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (3x-2)dx$

Chọn B.

Bài 14:

Sử dụng phân tích: $\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{cos^2x}{1+3^{-x}}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{cos^2x}{1+3^x} = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2xdx = \pi$

(sử dụng MTCT để tính $\int_{-\pi}^{\pi} cos^2xdx = \pi$).

Do đó $I = \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{cox^2x}{1+3^x}dx = \pi - m.$

Chọn A.

Bài 15:

Tính tích phân theo tham số m bằng cách đặt $t=\sqrt{2x+m}$, sau đó tìm m từ bất phương trình $I \ge 1$.

Chọn A.

Bài 16:

Tính tích phân theo tham số m ta được $I = \int_0^m (4^x \ln 4 - 2^x \ln 2)dx$ $=(4^x-2^x)\Big|_0^m = 4^m - 2^m$, sau đó tìm m từ phương trình $I=12$.

Chọn D.

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍCH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

1 Diện tích hình phẳng

Nếu ta có hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ (trong đó $f_1(x), f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$), thì diện tích S được tính theo công thức $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$.

2 Thể tích khối tròn xoay

Quay quanh trục Ox: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ (trong đó $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$) quay quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay. Thể tích V_x của khối tròn xoay được tính theo công thức $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Quay quanh trục Oy: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} x = f(y) \\ Oy \\ y = a \\ y = b \end{cases}$ (trong đó $f(y)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$) quay quanh trục Oy, ta được khối tròn xoay. Thể tích V_y của khối tròn xoay được tính theo công thức $V_y = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1:

(1) Cho $y = f(x)$ là một hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích $S(H)$ của hình thang cong H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $y = b$ được cho bởi công thức $S(H) = \int_a^b f(x)dx$.

(2) Nếu $f(x) < 0$ trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì có diện tích hình K

giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a;\ y=b$ được tính theo công thức $S(K)=\int_a^b -f(x)dx.$

Trong hai khẳng định trên:

A. Chỉ có (1) đúng. **B.** Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai khẳng định đều đúng. **D.** Cả hai khẳng định đều sai.

Bài 2: Diện tích hình L tạo bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-1$, đường thẳng $x=2$, trục tung và trục hoành là:

A. 3,5 (đvdt). **B.** 2,5 (đvdt).

C. 1,5 (đvdt). **D.** 6 (đvdt).

Bài 3: Diện tích miền giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=3$ là

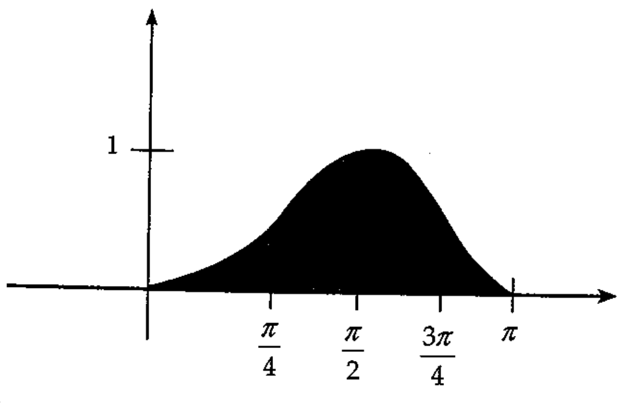
A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** 11. **D.** 10.

Bài 4: Gọi H là hình tạo bởi đồ thị hàm số $y=4-x^2$, đường thẳng $x=3$, trục tung và trục hoành. Khi đó, diện tích của H là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{19}{3}$. **C.** $\frac{23}{3}$. **D.** 4.

Bài 5: Gọi N là hình phẳng xác định bởi đồ thị hàm số $y=sin^2x$ (với $0\le x\le\pi$) và trục Ox. Diện tích hình N là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** π. **D.** 2π.



Bài 6:

(1) Cho $y_1=f_1\left(x\right)$ và $y_2=f_2\left(x\right)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Giả sử: α và β, với $a\le\alpha<\beta\le b$, là các nghiệm của phương trình $f_1\left(x\right)-f_2\left(x\right)=0$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 2 đường thẳng và đồ thị của hàm số được cho bởi công thức

$$S=\int_a^{\alpha}\left|f_1\left(x\right)-f_2\left(x\right)\right|dx+\int_{\alpha}^{\beta}\left|f_1\left(x\right)-f_2\left(x\right)\right|dx+\int_{\beta}^{b}\left|f_1\left(x\right)-f_2\left(x\right)\right|dx.$$

(2) Cũng với giả thiết như (1), nhưng:

$$S=\left|\int_a^{\alpha}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx\right|+\left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx\right|+\left|\int_{\beta}^{b}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx\right|.$$

A. (1) đúng nhưng (2) sai. **B.** (2) đúng nhưng (1) sai.

C. Cả (1) và (2) đều đúng. **D.** Cả (1) và (2) và đều sai.

Bài 7. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường $y=x$, trục hoành và đường thẳng $y=4-x$ là:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Bài 8. Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=5x^4+3x^2+3$. Diện tích hình M là:

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 12.

Bài 9. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và các đường $y=\dfrac{x}{4},\ x=a,\ x=3a\ (a>0)$. Diện tích hình H là:

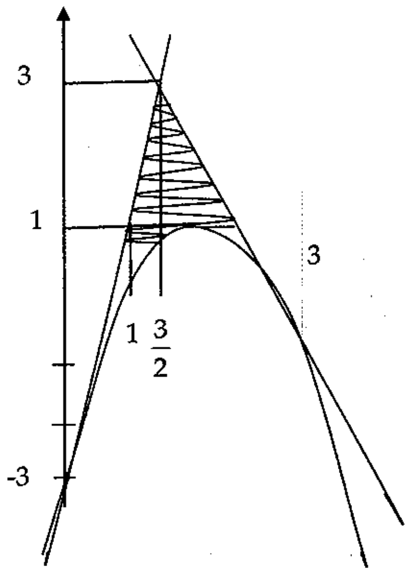
A. a^2. **B.** $2a^2$. **C.** $\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Bài 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1$ là:

A. $2e$. **B.** $3e$. **C.** $e+\dfrac{1}{e}-2$. **D.** $e+\dfrac{1}{e}-1$.

Bài 11. Ở hình bên dưới, ta có parabol $y=-x^2+4x-3$ và các tiếp tuyến của nó tại các điểm $M_1(0;-3)$ và $M_2(3;0)$. Khi đó, diện tích phần gạch chéo là:

A. 1,6. **B.** 1,35. **C.** 2,25. **D.** 2,5.



Bài 12. Gọi K là hình tạo bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x^2-2x$ trên đoạn $[-1;2]$ và trục hoành. Khi đó diện tích của K bằng:

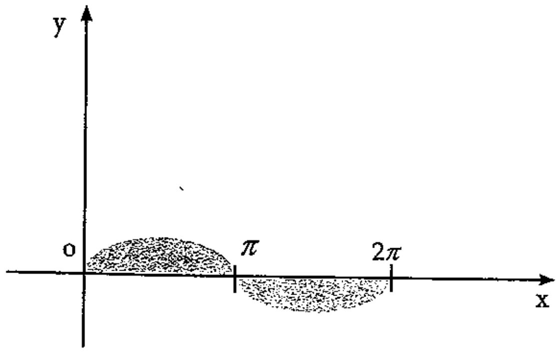
A. $\dfrac{4}{7}$ (đvdt). **B.** $\dfrac{1}{2}$ (đvdt). **C.** $\dfrac{25}{37}$ (đvdt). **D.** $\dfrac{37}{12}$ (đvdt).

Gọi N là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1, x + y = 3$. Diện tích hình N là

A. 5,1. **B.** 4,5. **C.** 6,25. **D.** 4,75.

Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[0; 2\pi\right]$ và trục hoành. Diện tích hình M là:

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 10.



Xét hai phát biểu:

(1) Cho hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị cắt nhau tại hai điểm A, B. Giả sử a, b tương ứng là hoành độ các giao điểm A, B (với $a < b$). Khi đó diện tích hình phẳng nằm giữa hai đồ thị ấy bằng $S(M) = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$.

(2) Giả sử $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x. Khi đó, thể tích $V(B)$ của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại các điểm a và b là $V(B) = \int_a^b S(x)dx$.

Trong hai phát biểu trên

A. Chỉ có (1) đúng. **B.** Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai phát biểu đều đúng. **D.** Cả hai phát biểu đều sai.

Gọi K là hình giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$. Khi đó, K có diện tích bằng:

A. 4,5 (đvdt). **B.** 4,11 (đvdt).

C. 3,5 (đvdt). **D.** 4,55 (đvdt).

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2x + 3$ và $y = 5 - x$ là:

A. 6,5. **B.** 3,5.

C. 4,5. **D.** 5,5.

Gọi P là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2, y = 3x$. Diện tích hình P là:

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Bài 19: Gọi P là hình phẳng nằm giữa các đường $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2$. Khi đó, diện tích hình P là:

A. 3,45. **B.** 2,5. **C.** 4. **D.** 4,25.

Bài 20: Gọi Q là hình phẳng giới hạn bởi đường $y = 4x - x^2$ và trục hoành. Diện tích hình Q là:

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{12}{27}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Bài 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là:

A. $\frac{3}{2}$.. **B.** $\frac{23}{15}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Bài 22: Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị đó với trục Ox. Diện tích của hình tam giác tạo bởi hai trục tọa độ và đường thẳng d được xác định bởi tích phân:

A. $\int_0^1 \ln x dx$. **B.** $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$. **C.** $\int_0^1 (x-1)dx$. **D.** $\int_0^1 (x-1)dx$.

Bài 23: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = -\frac{\pi}{2},\ x = \pi,\ y = 0,\ y = \cos x$. Ta được kết quả:

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 12.

Bài 24: Gọi H là hình phẳng nằm giữa hai đồ thị các hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = x$. Khi đó H có diện tích bằng:

A. 8. **B.**12. **C.** 32. **D.** 40.

Bài 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol $y = x^2 - 2x + 2$ và $y = -x^2 - x + 3$ là:

A. $\frac{9}{8}$ **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** 1,5. **D.** 1,25.

Bài 26: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đường cong $y = x(x-1)(x-2)$. Ta được kết quả:

A. 9. **B.** 10,2. **C.** 31. **D.** 1,5.

Bài 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = 6$ và đường cong $y = 2x^3 - x^2 - 8x + 1$ là:

A. $\frac{2305}{12}$. **B.** $\frac{2401}{96}$. **C.** 144,5. **D.** 25,5.

Bài 28: Trong mặt phẳng Oxy, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2, x = y^2$ được tính bằng tích phân:

A. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} (2x^2 - x)dx$. **B.** $\int_0^1 (\sqrt{x} - 2x^2)dx$.

C. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} (\sqrt{x} - 2x^2)dx$. **D.** $\int_0^1 (2x^2 - x)dx$.

Bài 29: Một miền được giới hạn bởi parabol $y=3+x-x^2$ và đường thẳng $y=2x+1$. Diện tích của miền đó là:

A. 3. **B.** 4,5. **C.** 3,5. **D.** 4.

Bài 30: Gọi Q là hình phẳng nằm giữa hai đường $f_1x=x^3-3x-8$ và $f_2(x)=x-8$. Diện tích hình Q là:

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 20.

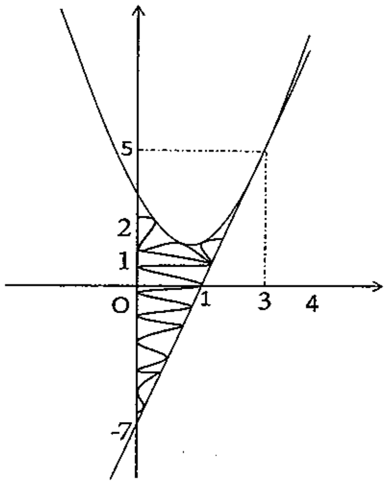
Bài 31: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=-x^2+6x-8$, tiếp tuyến tại đỉnh của parabol này và trục tung. Diện tích hình H là:

A. 8. **B.** 8,5. **C.** 9. **D.** 9,5.

Bài 32: Ở hình bên, ta có parabol $y=x^2-2x+2$, tiếp tuyến với nó tại điểm điểm $M(3;5)$. Diện tích phần gạch chéo là:

A. 9. **B.** 10.

C. 12. **D.** 15.



Bài 33: Gọi K là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3-3x$ và tiếp tuyến với đường cong này tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{2}$. Diện tích hình K là:

A. $\frac{8}{15}$. **B.** $\frac{31}{7}$. **C.** $\frac{9}{16}$. **D.** $\frac{27}{64}$.

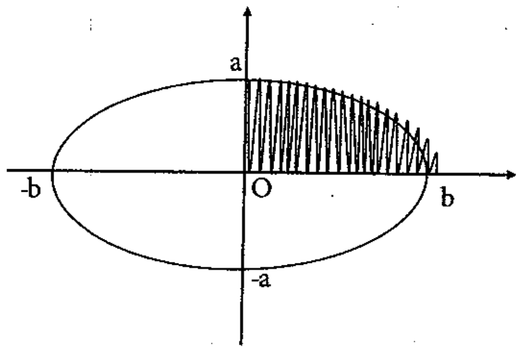
Bài 34: Tính diện tích của hình giới hạn bởi đường cong có phương trình $x=y^2$ và đường thẳng $y=x-2$. Kết quả là:

A. 1,5. **B.** 2,5. **C.** 3. **D.** 4.

Bài 35: Diện tích của miền được giới hạn bởi hai đường cong $y=\cos x$ và $y=\sin 2x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. 0,3. **B.** 0,4. **C.** 0,5. **D.** 0,6.

Bài 36. Diện tích của hình elip như hình vẽ là



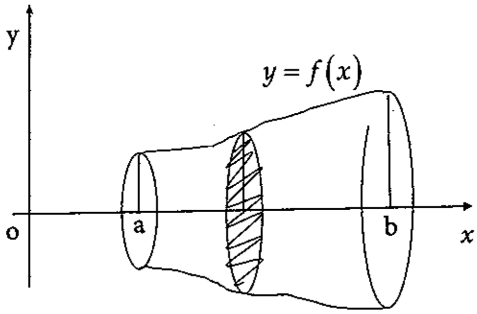
A. ab.

B. πab.

C. πa^2b^2.

D. $\dfrac{\pi a^2b^2}{2}$.

Bài 37. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),\ x=a,\ x=b,\ y=0$, quay xung quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay T. Thể tích của T là:



A. $V=\int_a^b y^2dx$.

B. $V=\pi\int_a^b ydx$.

C. $V=\pi\int_a^b y^2dx$.

D. $V=2\pi\int_a^b ydx$.

Bài 38. Gọi G là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$ và các tiếp tuyến với đường cong xuất phát từ điểm $M\left(\frac{5}{3};-1\right)$. Diện tích hình G là:

A. $\frac{9}{8}$. B. $\frac{31}{47}$. C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{27}{64}$.

Bài 39. Gọi Q là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đường parabol $y=5x-x^2$. Cho Q quay quanh trục Ox, ta nhận được hình tròn xoay có thể tích bằng :

A. $\frac{625}{6}\pi$. B. 166π. C. 126π. D. 122.9π.

Bài 40. Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đường $y=2x-x^2$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình hình này quay xung quanh trục Ox là:

A. $\frac{2}{3}\pi$. B. $\frac{16}{15}\pi$. C. $\frac{10}{21}\pi$. D. $\frac{3}{4}\pi$.

Bài 41. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình $y=-\sqrt{4-x^2}$ và $x^2+3y=0$. Ta được kết quả:

A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{4\pi}{5}$. C. $\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}$.

Bài 42: Gọi H là phần mặt phẳng hữu hạn được giới hạn bởi hai trục tọa độ, đường thẳng $x=1$ và đường cong có phương trình $y=1+x^3$. Thể tích khối tròn xoay do H sinh ra khi quay quanh trục Ox là:

A. $\frac{5}{3}\pi$ B. $\frac{23}{14}\pi$. C. $\frac{9}{14}\pi$. D. 2π.

Bài 43: Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{4}{x}, y=0, x=1, x=4$. Thể tích hình tròn xoay khi M quay quanh trục Ox là:

A. 6π. B. 12π. C. 15π. D. 4π.

Bài 44: Khi quay hình phẳng tạo bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}(x>0)$ và các đường thẳng $x=0, x=4$ xung quanh trục hoành, ta được khối tròn xoay có thể tích là:

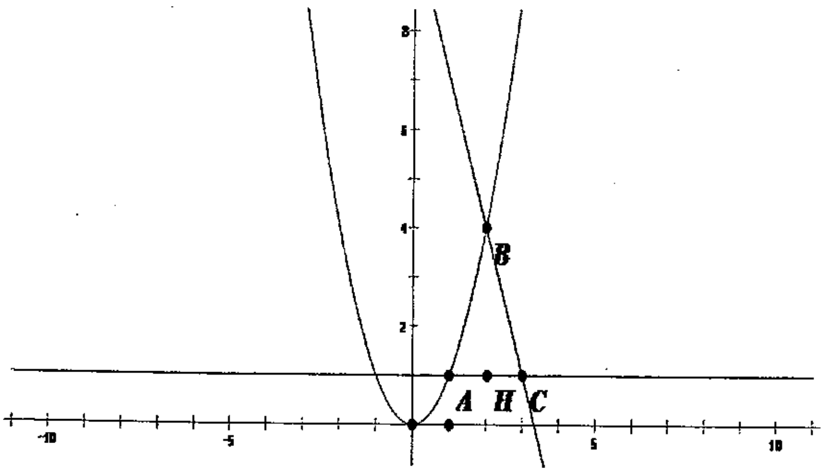
A. π. B. 2π. C. 8π. D. 14π.

Bài 45: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=x+4$ và parabol $y=x^2-2x+4$ là:

A. 4,5. B. 5,6. C. 5,4. D. 5,2.

Bài 46: Gọi D là miền được giới hạn bởi các đường $y=-3x+10, y=1, y=x^2$ và D nằm ngoài parabol $y=x^2$. Khi cho D quay xung quanh trục Ox, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích là:

A. 11π. B. $\frac{56}{5}\pi$. C. 12π. D. $\frac{25}{3}\pi$.



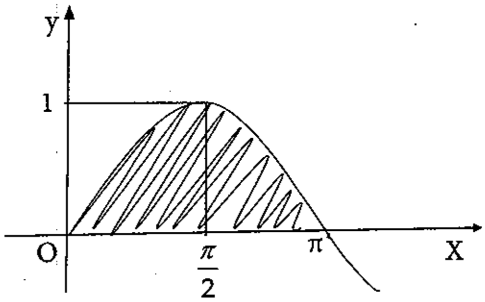
Bài 47: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung, đường thẳng $x=1$ và đường cong $y=x^3+1$. Cho H quay quanh trục Ox ta nhận được hình tròn xoay có thể tích bằng:

A. 5π. B. 6π. C. $\frac{23}{14}\pi$. D. $\frac{1}{2}\pi$.

Bài 48: Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và các đường $x=\pi, y=sin^2 x$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình này quay xung quanh trục Ox là:

A. $\frac{\pi^2}{8}$. B. $\frac{2\pi^2}{15}$. C. $\frac{2\pi^2}{8}$. D. $\frac{3\pi^2}{8}$.

Bài 49: Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox của hình giới hạn bởi trục Ox và đường $y = \sin x (0 \le x \le \pi)$. Ta được kết quả:



A. $\frac{\pi^2}{2}$. B. $\frac{\pi^2}{4}$.

C. $\frac{\pi^2}{6}$. D. $\frac{\pi^2}{2}$.

Bài 50: Cho đường cong có phương trình, trong đó $g(y)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[e;d]$. Xét hình giới hạn bởi đường cong $x = g(y)$, đường thẳng $y = e,\ y = d$ và $x = 0$. Quay hình đó xung quanh trục tung $x = 0$ ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng:

A. $\pi^3 \int_e^d g(x)dx$. B. $\pi \int_e^d g(y)dy$. C. $\pi^2 \int_e^d g(x)dx$. D. $\pi \int_e^d g^2(y)dy$.

Bài 51: Gọi K là phần mặt phẳng được giới hạn bởi hai trục tọa độ, đường thẳng $x = 1$ và đường cong có phương trình $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x^6}}$. Khi đó, diện tích hình K là:

A. π. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Bài 52: Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và các đường $x = 1, y = xe^2$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình này quay xung quanh trục Ox là:

A. $\frac{1}{3}\pi e^4$. B. $2\pi(e+1)$. C. $\pi(e-3)$. D. $2\pi(e+3)$.

Bài 53: Gọi Q là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đường parabol $y = -3x^2 + 3x + 6$. Cho Q quay xung quanh trục Oy, ta nhận được hình tròn xoay có thể tích bằng:

A. $10{,}5\pi$. B. 66π. C. $68{,}9\pi$. D. $72{,}9\pi$.

Bài 54: Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Oy của hình giới hạn bởi đường hypebol $x = \frac{2}{y}$, đường thẳng $y = 1, y = 4$ và $x = 0$. Kết quả tính được là:

A. 3π. B. 5π. C. 8π. D. 10π.

Bài 55: Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và các đường $y = \frac{\pi}{4}, y = \sin x$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình này quay xung quanh trục Ox là:

A. $\pi(\pi - 2)$. B. $\frac{\pi}{8}(\pi - 2)$. C. $\frac{\pi}{2}(\pi - 1)$. D. $\frac{\pi}{3}(\pi - \frac{1}{2})$.

Bài 56: Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và các đường $y = \cos x, x = \frac{\pi}{4}$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình này quay xung quanh trục Ox là:

A. $\frac{3\pi^2}{7}$. B. $\frac{16\pi^2}{15}$. C. $(\pi + 2)\frac{\pi}{8}$. D. $\frac{3(\pi+1)^2}{4}$.

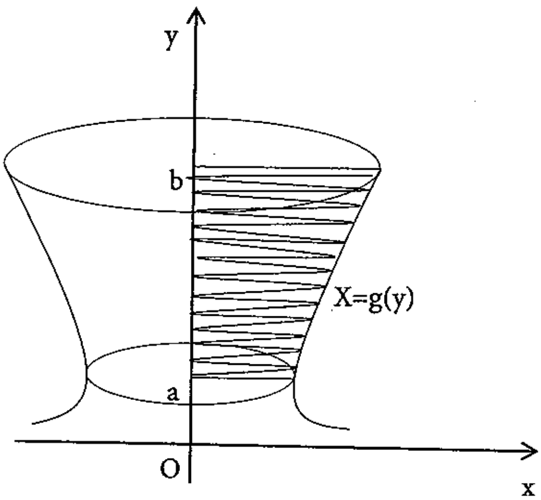
Bài 57 Cho đường cong có phương trình $x=g(y)$ trong đó $x=g(y)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu hình giới hạn bởi các đường $x=g(y), y=a, y=b$ và $x=0$ quay xung quanh trục Oy thì thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra được tính theo công thức:

A. $V=\int_a^b y^2dy$.

B. $V=\pi\int_a^b y^2dy$.

C. $V=2\pi\int_a^b ydy$.

D. $V=\pi\int_a^b x^2dy$.



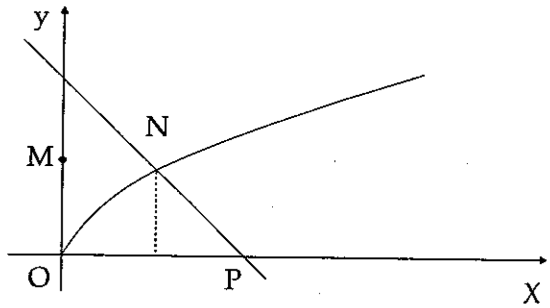
Bài 58 Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ khi elip này quay xung quanh trục Ox là:

A. 6. **B.** 13. **C.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **D.** 22.

Bài 59 A. Cho D là miền kín giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=2-x$ và $y=0$. Diện tích của miền D là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{7}{6}$. **D.** $\frac{8}{7}$.



Bài 59 B. Cho D là miền kín giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=2-x$ và $y=0$. Thể tích vật thể tạo thành khi ta quay D quanh trục Oy là:

A. $\frac{32\pi}{15}$. **B.** $\frac{7\pi}{4}$. **C.** $\frac{5\pi}{3}$. **D.** $\frac{9\pi}{4}$.

Bài 60 Tính diện tích S của miền phẳng giới hạn bởi các đường $y=sin^2+sin\,x+1; y=0; x=0; x=\frac{\pi}{2}$.

A. $S=\frac{3}{4}$. **B.** $S=\frac{3\pi}{4}$. **C.** $S=\frac{(4\pi+3)}{3}$. **D.** Một đáp số khác.

Bài 61 Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{1+\cos x}$; $y=0$; $x=0$; $x=\frac{\pi}{2}$.

A. $S=\frac{\pi}{2}$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\frac{\pi}{4}$. **D.** $S=\frac{1}{3}$.

Bài 62: Thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi các hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}},\ x=1,\ x=2,\ y=0$ khi nó quay xung quanh trục Ox là:

A. $2\pi e^2$.   B. $3\pi e^2$.   C. $4\pi e^2$.   D. πe^2.

Bài 63: Gọi M là hình phẳng tạo bởi trục hoành và các đường $y = \ln x, x=1, x=2, y=0$. Khi cho hình M quay xung quanh trục Ox. Ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $2\pi(\ln^2 x - 2\ln 2 + 1)$.   B. $\pi(\ln 2 - \ln 4 + 1)$.

C. $\pi(\ln 2 + 1)$.   D. $\pi^2(\ln 2 - 3)$.

Bài 64: Gọi M là hình được sinh ra bởi phép quay xung quanh Oy của hình giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{2},\ y=2,\ y=4$ và $x=0$.

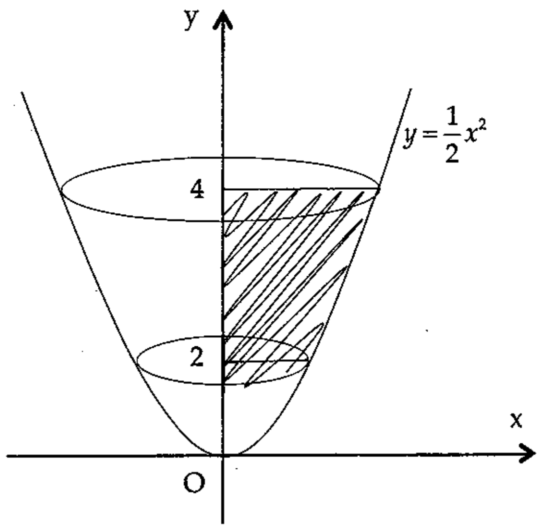
Thể tích của hình M là:

A. 6π.

B. 12π.

C. $2\pi^3$.

D. $4\pi^3$.



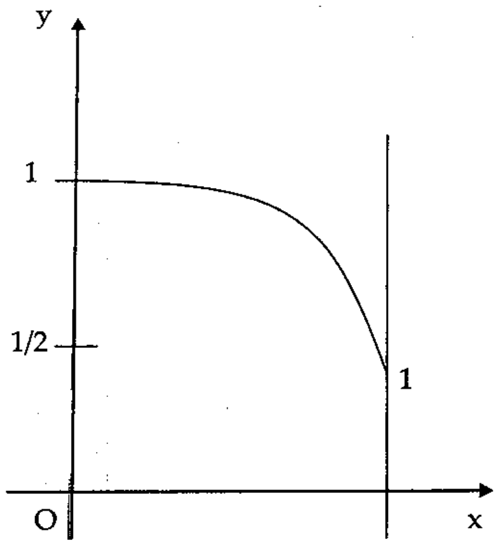
Bài 65: Gọi M là phần mặt phẳng hữu hạn được giới hạn bởi hai trục tọa độ, đường thẳng $x=1$ và đường cong có phương trình $y = \frac{1}{1+x^2}$. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay M quanh trục Oy là:

A. $\pi \ln 3$.

B. $\pi \ln 4$.

C. $0,2\pi$.

D. $\pi \ln 2$.



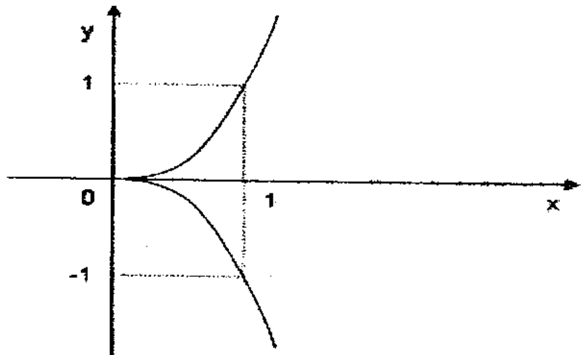
Bài 66: Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = x^3$ xung quanh trục Ox là:

A. $\frac{\pi}{12}$.   B. $\frac{123\pi}{17}$.   C. $\frac{\pi}{4}$.   D. $\frac{256\pi}{35}$.

Một dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$ chạy qua một đoạn mạch có điện trở thuần R. Nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì T là:

A. $3\frac{I_0^2}{2}$. **B.** $\frac{RI_0^2}{2}$. **C.** $\frac{R^2I_0^2}{4}T$. **D.** $\frac{RI_0^2}{2}T$.

Đường cong trong hình vẽ bên có phương trình $y^2 = x^3$. Cho $A(1;1)$ và $B(0;1)$. Gọi H là phần gạch chéo.



Khi cho hình H quay xung quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{5}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, x = y^2$ quay quanh trục Ox là:

A. $\frac{3\pi}{19}$. **B.** $\frac{3\pi}{16}$. **C.** $\frac{3\pi}{13}$. **D.** $\frac{3\pi}{10}$.

Tính (bằng cm^2) diện tích phần giới hạn bởi parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng $y = 1$.

A. $\frac{8}{3}cm^2$. **B.** $\frac{16}{3}cm^2$. **C.** $\frac{4}{3}cm^2$. **D.** $\frac{1}{3}cm^2$.

Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường biểu diễn của các hàm số $y_1 = x^2 - 4$ và $y_2 = 2x - x^2$.

A. 9 đvdt. **B.** 36 đvdt. **C.** 18 đvdt. **D.** 9 đvdt.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{e^{-2x}}, y = e^{-x}$ và $x = 1$ là:

A. $\frac{1}{e^2} - 5$. **B.** $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}$. **C.** $5e$. **D.** $8e$.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1$ và $x = a$ $(a > 1)$ quay quanh trục Ox là:

A. $\left(\frac{1}{a} - 1\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\pi$. **C.** $\left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi$. **D.** $\left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

Bài 74: Diện tích phần mặt phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $x=1, x=2$, trục Ox và đường cong $y=\dfrac{1}{x(1+x^3)}$ là:

A. $\frac{1}{4}ln\frac{7}{3}$. B. $\frac{1}{3}ln\frac{16}{9}$. C. $\frac{1}{3}ln\frac{7}{3}$. D. $\frac{1}{4}ln\frac{16}{9}$.

Bài 75: Gọi H là phần mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=mx$ với $m<2$ và parabol (P) có phương trình $y=x(2-x)$. H có diện tích:

A. $\dfrac{(2-m)^2(2-5m)}{6}$. B. $\dfrac{(2-m)^2(5m-2)}{6}$.

C. $\dfrac{(2-m)^2}{6}$. D. $\dfrac{(m-2)^2}{6}$.

Bài 76: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{1+x^2}, y=\dfrac{1}{2}$ là:

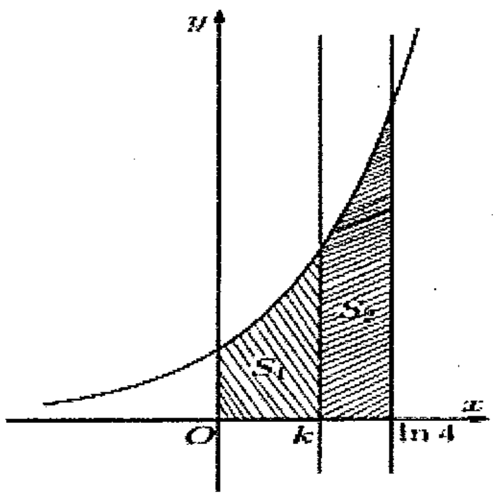
A. $\frac{\pi}{2}-1$. B. $\frac{\pi}{2}+1$. C. $\frac{5\pi}{6}+1$. D. $\frac{5\pi}{6}-1$.

Bài 77: Gọi S_1 là diện tích của mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=mx$ với $m<2$ và parabol (P) có phương trình $y=x(2-x)$. Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (P) và Ox. Với trị số nào của m thì $S_1=\frac{1}{2}S_2$?

A. $2-\sqrt[3]{4}$. B. $2+\sqrt[3]{2}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{4}$.

Bài 78: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$?

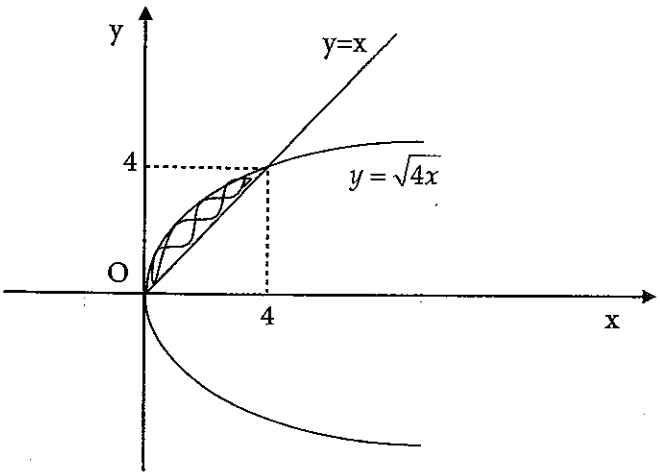
A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$. B. $k=\ln 2$. C. $k=\ln\frac{8}{3}$. D. $k=\ln 3$.



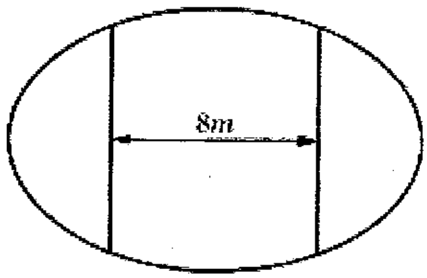
Trích Đề Minh Họa 2 Năm 2017

Bài 79: Ở hình bên, ta có đường parabol $y^2 = 4x$ và đường thẳng $y = x$. Cho phần gạch chéo quay quanh trục Ox, ta nhận được hình tròn xoay có thể tích bằng:

A. $\frac{15}{7}\pi$. **B.** $\frac{32}{3}\pi$. **C.** 10π. **D.** 11π.



Bài 80: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10 *m*. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8mvà nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó ? (Số tiền được làm tròn đến hàngnghìn.)



Trích Đề Minh Họa 2 Năm 2017

A.7.862.000 đồng. **B.**7.653.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Bài 81: Đường cong được cho bởi phương trình $x = g(y)$, với đạo hàm $g'(y)$ là hàm liên tục, gọi $m,\ n\ (m < n)$ tương ứng là tung độ các điểm M và N thuộc đồ thị $x = g(y)$. Độ dài đường cong $x = g(y)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int_m^n \sqrt{1+(g(y))^2}\,dx$. Áp dụng tính độ dài đường cong $y = x^2$ từ $(1;1)$ đến $(\sqrt{2};2)$

A. 1.07. **B.** 1.06. **C.** 1. **D.** 2.

Bài 82: Đường cong được cho bởi phương trình $x = g(y)$, với đạo hàm $g'(y)$ là hàm liên tục, gọi $m,\ n\ (m < n)$ tương ứng là tung độ các điểm M và N thuộc đồ thị $x = g(y)$. Độ dài đường cong $x = g(y)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int_m^n \sqrt{1+(g(y))^2}\,dx$. Áp dụng tính độ dài đường cong $x = y^2$ từ $(1;1)$ đến $(4;2)$

A. 1.07. **B.** 7.27. **C.** 7.2. **D.** 2.

Bài 83. Đường cong được cho bởi phương trình $y = g(x)$, với đạo hàm $g'(x)$ là hàm liên tục, gọi $m,\ n\ (m < n)$ tương ứng là hoành độ các điểm M và N thuộc đồ thị $y = g(x)$. Độ dài đường cong $y = g(x)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int_m^n \sqrt{1+(g(y))^2}\,dx$. Tìm độ dài của đường cong $y = 4x^3$ từ điểm $(0;0)$ đến điểm $(2;4\sqrt{2})$. Tích phân cần tính để giải Bài này là:

A. $\int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{1+9x}\,dx$.

B. $\int_0^{2} \sqrt{1+9x}\,dx$.

C. $\int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^3}\,dx$.

D. $\int_0^{2} \sqrt{1+4x^3}\,dx$.

Bài 84. Tính độ dài đường cong $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1$ từ điểm A có hoành độ $a = 0$ đến điểm B có hoành độ $b = 1$. Kết quả là:

A. $\frac{13}{6}$.

B. $\frac{21}{4}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Bài 85. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{\sin^2 x}$, $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$. Ta được kết quả:

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$.

B. $\frac{7\sqrt{2}}{4} - 1$.

C. $\frac{2\sqrt{2}+5}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

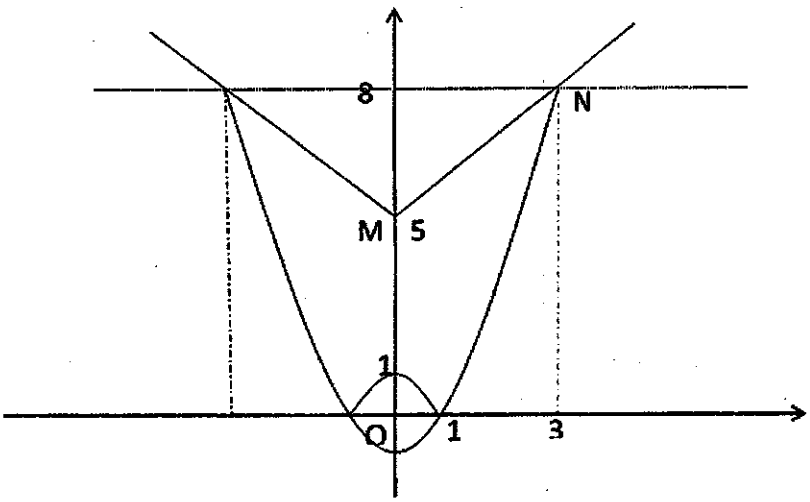
Bài 86. Cho đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 1|$, $y = |x| + 5$ như hình vẽ, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = |x| + 5$ là:

A. $\frac{73}{6}$.

B. $\frac{73}{3}$.

C. 12.

D. 14.

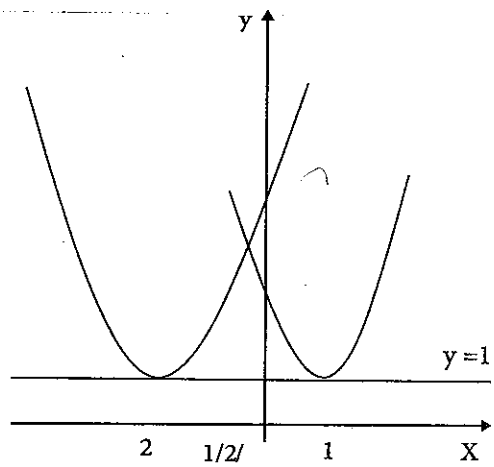


Bài 87: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$y = x^2 - 2x + 2, y = x^2 + 4x + 5, y = 1$

A. $\frac{3}{4}$.   B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{2}{3}$.   D. $\frac{9}{4}$.



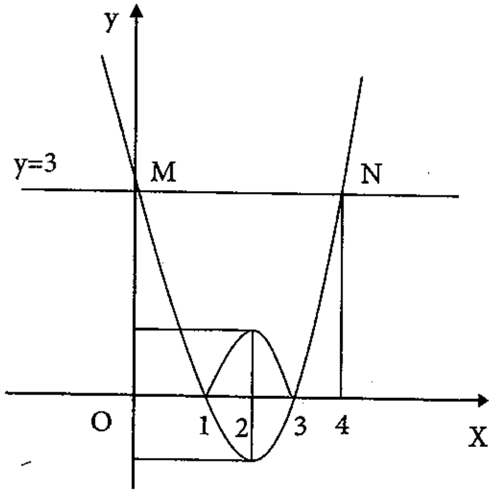
Bài 88: Tính diện tích giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|, y = 3$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ta có kết quả:

A. 6.

B. 10.

C. 8.

D. 12.



Bài 89: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{4x}{x^4 + 1}$, trục hoành Ox và các đường thẳng $x = -1, x = 1$ là:

A. 6π.   B. 3π.   C. 2π.   D. π.

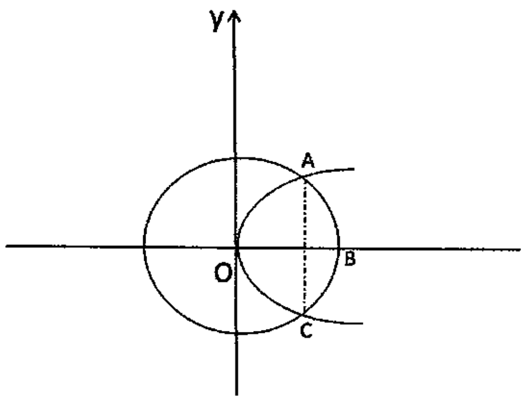
Bài 90: Parabol $y^2 = 2x$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần. Diện tích hai phần đó là:

A. $2\pi + \frac{4}{3}$ và $6\pi - \frac{4}{3}$.

B. $\frac{\pi}{2}$ và $\frac{15\pi}{2}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$.

D. $2\pi + \frac{2}{3}$ và $6\pi - \frac{2}{3}$.



Bài 91: Cho parabol (P) có tiêu điểm $F\left(2;-\frac{3}{4}\right)$ và đường chuẩn D có phương trình $y=-\frac{5}{4}$. Diện tích hình giới hạn bởi (P) và trục Ox là:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** 2.

Bài 92: Giả sử hàm số $y=x^2-2x+2$ có đồ thị là đường cong (P). Gọi (d) là tiếp tuyến với (P) tại điểm $M(3;5)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P), (d) và trục Ox là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Bài 93: Thể tích vật thể tròn xoay do đường tròn $x^2+(y-2)^2=1$ quay quanh Ox có giá trị:

A. $11\pi^2$. **B.** $9\pi^2$. **C.** $4\pi^2$. **D.** π^2.

Bài 94: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường tròn $x^2+y^2=9$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$. **B.** $\frac{4}{3}\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$. **C.** $\frac{2}{3}\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$. **D.** $4\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$..

Bài 95: Gọi V_x và V_y lần lượt là thể tích khối tròn xoay tạo nên bởi phép quay hình elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ $(a<b)$ xung quanh trục Ox, Oy. Hỏi khẳng định nào dưới đây đúng.?

A. $V_x>V_y$ **B.** $V_x<V_y$ **C.** $V_x=V_y$ **D.** $V_x\ge V_y$

Bài 96: Trong hai khẳng định sau, khẳng định nào đúng:

(1) Nếu $f(x)<g(x), \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$.

(2) Nếu $f(x)\ge g(x), \forall x\in[a;b]$

và nếu $\forall x_0\in[a;b]: f(x_0)\ne g(x_0)$ thì $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$.

A. Chỉ có (1) đúng. **B.** Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai khẳng định đều đúng. **D.** Cả hai khẳng định đều sai.

Ghi chú của em

Bài 1:

Chỉ có (2) đúng. (1) đúng nếu thêm giả thuyết $f(x) > 0$ trên đoạn $[a;b]$

Chọn B

Bài 2:

Ta thấy $f(x) < 0$ trên $[0 ; 1]$ và $f(x) > 0$ trên $[1 ;2]$. Đồ thị $f(x)$ gồm hai phần: phần nằm dưới trục hoành (L_1) và phần nằm trên trục hoành (L_2), do đó $S(L) = S(L_1) + S(L_2)$. Ta có

$$S(L_1) = \int_0^1 (1-x^3)\,dx = \frac{3}{4}$$

$$S(L_2) = \int_1^2 (x^3-1)dx = \frac{11}{4}$$

Vậy $S(L) = \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$ (đvdt)

Chọn A

Bài 3:

Diện tích miền cần tính là:

$$S = \int_{-2}^{2} (4-x^2)dx = \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

Chọn A

Bài 4:

Ta xác định được hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$ với trục hoành trên đoạn $[0;3]$ là $x = 2$. Diện tích cần tính là $\int_0^3 \left|4 - x^2\right| dx$, chúng ta có thể tiếp tục vẽ bảng xét dấu của $4 - x^2$ trên $[0;3]$ để tính, ta có

$$S(H) = \int_0^2 (4-x^2)dx + \int_2^3 (x^2-4)dx = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}.$$

Chú ý: để tính $\int_0^3 \left|4-x^2\right| dx$ ta biết rằng $x = 2$ là nghiệm của $y = 4 - x^2$ với trục hoành trên đoạn $[0;3]$ nên có thể làm như sau

$$\int_0^3 \left|4-x^2\right| dx = \int_0^2 \left|4-x^2\right| dx + \int_2^3 \left|4-x^2\right| dx = \left|\int_0^2 (4-x^2)dx\right| + \left|\int_2^3 (4-x^2)dx\right| = \frac{23}{3}$$

Chọn C

Ghi chú của em

Bài 5:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

Chọn A

Bài 6:

Chú ý rằng với mọi $x\in(\alpha;\beta)$, $f_1(x)-f_2(x)\neq 0$ và vì $f_1(x)$ và $f_2(x)$ đều liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$, nên $f_1(x)-f_2(x)$ giữ nguyên dấu.

Nếu $f_1(x)-f_2(x)>0$ thì ta có:

$$\int_\alpha^\beta|f_1(x)-f_2(x)|dx=\int_\alpha^\beta(f_1(x)-f_2(x))dx=\left|\int_\alpha^\beta(f_1(x)-f_2(x))dx\right|$$

Nếu $f_1(x)-f_2(x)<0$ thì ta có:

$$\int_\alpha^\beta|f_1(x)-f_2(x)|dx=\int_\alpha^\beta(f_2(x)-f_1(x))dx=\left|\int_\alpha^\beta(f_1(x)-f_2(x))dx\right|$$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có:

$$\int_\alpha^\beta|f_1(x)-f_2(x)|dx=\left|\int_\alpha^\beta(f_1(x)-f_2(x))dx\right|$$

Tương tự như thế đối với 2 tích phân còn lại. Vì vậy, hai công thức (1) và (2) là như nhau.

Chọn C

Bài 7:

Vẽ đồ thị ba đường thẳng $y=x$, $y=0$, $y=4-x$ và tìm các giao điểm:

$$\begin{cases}y=4-x\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(4;0)$$

$$\begin{cases}y=4-x\\y=x\end{cases}\Rightarrow B(2;2)$$

Từ đó $S=\int_0^2 xdx+\int_2^4(4-x)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4=4.$

Chọn C

Bài 8:

Ta có $5x^4+3x^2+3>0$ trên đoạn $[0;1]$.

Vậy: $S=\int_2^1(5x^4+3x^2+3)dx=(x^5+x^3+3x)\Big|_0^1=5$

Chọn A

Ghi chú của em

Bài 9

Ta có $S=\int\limits_a^{3a}\left|\dfrac{x}{4}\right|dx=\int\limits_a^{3a}\dfrac{x}{4}dx=\dfrac{x^2}{8}\Bigg|_a^{3a}=a^2$.

Chọn A

Bài 10

Ta có $x=0$ là hoành độ giao điểm của hai đường cong. Diện tích cần tìm là: $\int\limits_0^1\left(e^x+e^{-x}\right)=\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_0^1=e+\dfrac{1}{e}-2$.

Chọn C

Bài 11

Ta có $f'(x)=-2x+4\Rightarrow f'(0)=4,\ f'(3)=-2$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_1(0;3)$ là:

$y+3=4(x-0)\Leftrightarrow y=4x-3$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_2(3;0)$ là:

$y=-2(x-3)=-2x+6$

Giao điểm của hai tiếp tuyến trên có hoành độ thoả mãn phương trình:

$4x-3=-2x+6\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Diện tích phải tìm là:

$$S=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\left|(4x-3)-\left(-x^2+4x-3\right)\right|dx+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left|(-2x+6)-\left(-x^2+4x-3\right)\right|dx$$

$$\int\limits_0^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx=\frac{9}{4}=2,25$$

Chọn C

Bài 12

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Đồ thị gồm hai phần, phần nằm trên trục hoành ứng với x thuộc đoạn $[-1;0]$ và phần nằm dưới trục hoành ứng với x thuộc đoạn $[0;2]$.

Do đó:

$$S=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx+\int\limits_0^2\left(x^2+2x-x^3\right)dx=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}\text{ (đvdt)}$$

Chọn D

Bài 13

$f_1(x)=x^2+1,\ f_2(x)=3-x$

$f_1(x)-f_2(x)=(x^2+1)-(3-x)=x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

$S=\int\limits_{-2}^{1}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|dx=\left|\int\limits_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx\right|$

$\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$.

Chọn B

Bài 14:

$S=\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\sin x\right|dx=\int\limits_{0}^{\pi}\sin x dx+\int\limits_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$

Chọn B

Bài 15:

Cả hai đều sai, vì giả thuyết.

Bài (1), phải giả thuyết thêm: $f(x)>g(x)$ với mọi $x\in[a;b]$

Bài (2), phải giả thuyết thêm: $S(x)$ là một hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$

Chọn D

Bài 16:

Trước hết ta tìm hoành độ các giao điểm bằng cách giải phương trình $2-x^2=-x$. Suy ra $x=-1$ và $x=2$, trên đoạn $[-1;2]$ đồ thị hàm số $f(x)=2-x^2$ nằm trên đồ thị hàm số $g(x)=-x$. Từ đó diện tích cần tìm là:

$\int\limits_{-1}^{2}(f(x)-g(x))dx=\int\limits_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx$

$=\left|\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{2}=4,5$ (đvdt)

Chọn A

Bài 17:

Hoàn toàn tương tự Bài 16, xin dành cho bạn đọc.

Chọn C

Bài 18:

Hoàn toàn tương tự Bài 16, xin dành cho bạn đọc.

Chọn C

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 19:

Đặt $f_1(x)=x^3, f_2(x)=0$, ta có:

$f_1(x)-f_2(x)=x^3=0 \Leftrightarrow x=0\in[-1;2]$

Diện tích phải tìm là:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|f_1(x).f_2(x)\right|dx=\int_{1}^{2}\left|x^3\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|x^3\right|dx+\int_{0}^{2}\left|x^3\right|dx.$$

$$=\left|\int_{-1}^{0}x^3dx\right|+\left|\int_{0}^{2}x^3dx\right|=4,25$$

Chọn D

Bài 20:

Hoàn toàn tương tự Bài 16, xin dành cho bạn đọc

Chọn D

Bài 21:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$, diện tích cần tính là:

$$S=\int_0^2\left|2x-x^2\right|dx=\frac{4}{3}.$$

Chọn C.

Bài 22:

Toạ độ giao điểm của đồ thị $y=\ln x$ với trục Ox là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}y=\ln x\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$$

Ta có $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x},\ y'(1)=1.$

Vậy phương trình của tiếp tuyến là: $y-0=1(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$

Diện tích phải tìm là: $S=\int_0^1\left|x-1\right|dx=\int_0^1(1-x)dx=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$

Chọn D

Bài 23:

Trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$, phương trình $\cos x=0$ có các nghiệm; $x_1=\frac{-\pi}{2}, x_2=\frac{\pi}{2}$.

Vậy: $S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x\right|dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right|+\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx\right|=3$

Chọn C

Bài 24:

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x=0,\ x=2$ và $x=-2.$

Ta có $S(H)=\int\limits_{-2}^{0}(x^3-3x-x)dx+\int\limits_{0}^{2}(x-x^3+3x)dx=8$

Chọn A

Bài 25:

Tương tự bài 24, xin dành cho bạn đọc.

Chọn A

Bài 26:

Ta có $x(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x\in\{0,1,2\}$

$$S=\int\limits_0^2\left|x(x-1)(x-2)\right|dx=\int\limits_0^1\left|x(x-1)(x-2)\right|dx+\int\limits_1^2\left|x(x-1)(x-2)\right|dx$$

$$=\left|\int\limits_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)dx\right|+\left|\int\limits_1^2\left(x^3-3x^2+2x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right)\Bigg|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right)\Bigg|_1^2\right|=\frac{1}{2}$$

Chọn D

Bài 27:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$6-\left(2x^3-x^2-8x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right..$$

$$S=\int\limits_{-1}^{\frac{5}{2}}\left|6-\left(2x^3-x^2-8x+1\right)\right|dx=\frac{2401}{96}$$

Chọn B

Bài 28:

Phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm là $x=0,\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}.$

Diện tích cần tìm là : $S=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\left(\sqrt{x}-2x^2\right)dx$

Chọn C

Bài 29:

Ta tìm giao điểm của hai đường đã cho bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm:

$$3+x-x^2=2x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right..$$

Trên đoạn $[-2;1]$ ta có $3+x-x^2\geq 2x+1$, do đó:

Ghi chú của em

$$S=\int_{-2}^{1}\left|3+x-x^2-(2x+1)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$=\left[\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)\right]=\frac{9}{2}=4{,}5$$

Chọn B

Bài 30:

Ta có $f_1(x)-f_2(x)=x^3-4x=x\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow x=-2,\ x=0,\ x=2$

Diện tích phải tìm là:

$$S=\int_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|dx=\int_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|dx=\left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx\right|+\left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}\right|=8$$

Chọn A

Bài 31:

Hàm số $y=-x^2+6x-8$ có hệ số $a<0$ nên parabol úp xuống. Hoành độ đỉnh của parabol là $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{-2}=3$, phương trình tiếp tuyến của parabol tại đỉnh là $y=y'(3)(x-3)+y(3)=0(x-3)+1=1$.

Do đó diện tích cần tìm là $\int_{0}^{3}\left|1-\left(-x^2+6x-8\right)\right|dx=9$ (sử dụng MTCT để ra kết quả).

Chọn C

Bài 32:

Đặt $f_1(x)=x^2-2x+2$. Ta có $f'_1(x)=2x-2,\ f'_1(3)=4$.

Tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm M(3;5) có phương trình

$y-5=4(x-3)\Leftrightarrow y=4x-7$

Đặt $f_2(x)=4x-7$. Diện tích phải tìm là:

$$\int_{0}^{3}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx=\int_{0}^{3}\left|\left(x^2-2x+2\right)-\left(4x-7\right)\right|dx$$

$$=\int_{0}^{3}\left|\left(x^2-6x+9\right)\right|dx=\int_{0}^{3}\left(x-3\right)^2dx=\left(\frac{\left(x-3\right)^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3}=9$$

Chọn A

Bài 33:

Tiếp tuyến của đường cong tại điểm $x=\frac{-1}{2}$ có phương trình

$$y=-\frac{9}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{11}{8}\Leftrightarrow y=-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}$$

Ghi chú của em

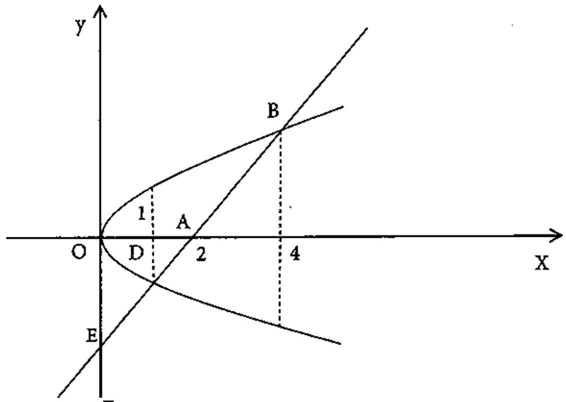
Ghi chú của em

Tiếp tuyến này cắt đường cong tại điểm có hoành độ x=1 vậy diện tích hình phẳng K là:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left[-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}-x^3+3x\right]dx=\frac{27}{64}$$

Chọn D

Bài 34:



Ta có $x=y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{x} \\ y=-\sqrt{x}\end{array}\right.$. Ta tìm giao điểm của $y=\sqrt{x}$ và $y=x-2$ bằng cách giải hai phương trình $\sqrt{x}=x-2$ và $-\sqrt{x}=x-2$. Suy ra x = x^2-4x+4 hay $x=1$ và $x=4$.

Từ đó, ta có: $S=\left[\int_0^4\sqrt{x}dx-S(\triangle ABC)\right]+\left[\int_0^1\left|-\sqrt{x}\right|dx+S(\triangle ABC)\right]$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4-2+\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}=\frac{10}{3}-2+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2,5$

Chọn B

Bài 35:

Đầu tiên giải phương trình $cosx = sin2x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $cosx=2sinx\,cosx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cosx=0 \\ sinx=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$

Suy ra diện tích cần tìm bằng: $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sin 2x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos 2x)\,dx$

$$=\left(\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\left(-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=0,5.$

Chọn C

Bài 36:

Phương trình elip là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Diện tích cần tìm là: $S=4S_1$ (S_1 là diện tích của một phần tư elip) ứng với $y\ge 0$ nên S_1 được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(0\le x\le a)$, đường thẳng $x=0$ và trục Ox. Do đó:

$$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Ta có $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}$ suy ra $S=\pi ab$.

Chọn B

Bài 37:

Theo công thức sách giáo khoa thì chọn C đúng.

Chọn C

Bài 38:

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(\dfrac{5}{2};-1\right)$ là $y=kx-\dfrac{5}{2}k-1$ đường thẳng này tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi $k=-1$ hoặc $k=2$.

Với $k=-1$, tiếp điểm có hoành độ $x_0=1$; với $k=2$, tiếp điểm có hoành độ $x_1=4$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ là $y=-x+\dfrac{3}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_1(4;2)$ là $y=2x-6$.

Vậy diện tích hình phẳng là:

$$\int_1^{\frac{5}{2}}\left|\left(\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)-\left(-x+\frac{3}{2}\right)\right|dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left|\left(\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)-(2x-6)\right|dx=\frac{9}{8}$$

Chọn A

Bài 39:

Ta có $5x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right.$. Vậy thể tích phải tìm là

$$V=\int_0^5\pi y^2dx=\pi\int_0^5\left(5x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^5\left(25x^2-10x^3+x^4\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{25}{3}x^3-\frac{5}{2}x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^5=\frac{625}{6}\pi$$

Chọn A.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 40

$2x-x^2=x(2-x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=2$

$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3-x^4\right)dx$

$=\pi\left|\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^2=\frac{16\pi}{15}$

Chọn B

Bài 41

Ta có:

$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\frac{-x^2}{3}+\sqrt{4-x^2}\right|dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\left[\frac{-x^2}{3}+\sqrt{4-x^2}\right]dx$

$=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx-\frac{2}{9}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}}=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Đặt $x=2sint$ suy ra $S=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}cos^2tdt-\frac{2\sqrt{3}}{3}=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+cos2t\right)dt-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$=\left[4t+2sin2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$ (đvdt)

Chọn A

Bài 42

$S=\pi\int_0^1\left(1+x^3\right)^2dx=\frac{23}{14}\pi$ (sử dụng MTCT).

Chọn B

Bài 43

Tương tự bài 42.

Chọn B

Bài 44

Ta có $V=\pi\int_0^4 xdx=8\pi$.

Chọn C

Bài 45

Hoành độ các giao điểm của parabol $y=x^2-2x+4$ và đường thẳng $y=x+4$ là:

$x^2-2x+4=x+4 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

$S=\int_0^3\left|x^2-3x\right|dx=\frac{9}{2}$.

Chọn A

Ghi chú của em

Bài 46

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích do tam giác cong ABH và tam giác giác HBC tạo nên khi xoay quanh Ox, phần diện tích được biểu diễn qua đồ thị sau:

Vậy: $V = V_1 + V_2 = \pi\int_1^2\left[\left(x^2\right)^2 - 1^2\right]dx + \pi\int_2^3\left[\left(-3x+10\right)^2 - \left(1\right)^2\right]dx = \frac{56\pi}{5}$ (đvtt)

Chọn B

Bài 47

$$V = \pi\int_0^1\left(x^3+1\right)^2 dx = \frac{23}{14}\pi.$$

Chọn C

Bài 48

$$V = \pi\int_0^\pi\left(sin^2 x\right)^2 dx = \frac{3}{8}\pi^2.$$

Chọn D

Bài 49

Ta có $V = \pi\int_0^\pi sin^2 x dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-cos2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{sin2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$

Chọn A

Bài 50

Theo công thức sách giáo khoa chọn D đúng.

Chọn D

Bài 51

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S = \int_0^1\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x^6}}\right|dx = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn D

Bài 52

Thể tích cần tính: $V = \pi\int_0^1\left(xe^2\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi e^4.$

Chọn A

Bài 53

Phương trình hoành độ giao điểm $-3x^2 + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Thể tích cần tính $V = \pi\int_{-1}^2\left(-3x^2+3x+6\right)^2 dx = 72{,}9\pi$

Chọn D

Ghi chú của em

Bài 54

$$V=\int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy=3\pi.$$

Chọn A.

Bài 55

Ta có: $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-cos2x)dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{sin2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$

Chọn B

Bài 56

Ta có $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 xdx=(\pi+2)\frac{\pi}{8}.$

Chọn C

Bài 57

$$V=\pi\int_a^b x^2dy.$$

Chọn D

Bài 58

Ta có : $V=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=2\pi\int_b^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3$

$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2$

Chọn C

Bài 59 **A**

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ là $x_0 = 1$,

Ta có $D=B+C$, trong đó B là miền kín giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $x = 1$, $y= 0$ và C là miền kín giới hạn bởi các đường $y = 2 - x$, $x = 1$, $y = 0$

Diện tích miền B = $\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$ (đvdt).

Diện tích miền C = $\frac{1}{2}$ (đvdt)

Vậy diện tích miền D là $\frac{7}{6}$ (đvdt).

Chọn C

Bài 59a: B

Đặt $M(0;1)$, $N(1;1)$, $P(2;0)$. Gọi V_1 là thể tích của vật sinh ra khi quay hình thang $OMNP$ quanh trục Oy (xem hình ở Bài trên - 59), V_2 là thể tích của vật thể sinh ra khi quay phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $y=0$, $y=1$, và V là thể tích cần tìm, ta có:

$V = V_1 - V_2$

$V_1 = \dfrac{7\pi}{3}$ (đvtt), $V_2 = \pi\int_0^1 y^2dy = \dfrac{\pi}{5}$ (đvtt). Do đó $V = \dfrac{32\pi}{15}$ (đvtt)

Chọn A

Bài 60:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\sin x+1\right)dx.$$

Chọn B

Bài 61:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\cos x}dx$.

Chọn D

Bài 62:

Áp dụng công thức tính thể tích khi quay hình phẳng xung quanh trục Ox ta có $V=\pi\int_1^2\left(x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}\right)^2dx=\pi e^2$.

Chọn D

Bài 63:

Áp dụng công thức tính thể tích khi quay hình phẳng xung quanh trục Ox ta có $V=\pi\int_1^2(\ln x)^2dx=\pi e^2$.

Chọn A

Bài 64:

Ta có: $V=\pi\int_2^4 2ydy=(\pi y^2)\Big|_2^4=12\pi$.

Chọn B

Bài 65:

Phương trình $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ tương đương với $x^2=\dfrac{1}{y}-1$

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có $V = X + Y$, với X là thể tích hình trụ tròn xoay bán kính đáy bằng 1 và chiều cao bằng $\dfrac{1}{2}$, ta có $X=\dfrac{\pi}{2}$ và

Ghi chú của em

$$Y=\int_{0.5}^{1}\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=\pi\left(ln2-\frac{1}{2}\right).$$

Vậy $V=\pi\left(ln2-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi ln2$ (đvtt)

Chọn D

Ghi chú của em

Bài 66

Ta có $2x^2 = x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

$$V=\pi\int_0^2\left(2x^2\right)^2dx-\pi\int_0^2\left(x^3\right)^2dx=\pi\left(\int_0^2 4x^4dx-\int_0^2 x^6dx\right)$$

$$=\pi\left|\left(\frac{4x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)\right|_0^2=\frac{256\pi}{35}$$

Chọn D

Bài 67

Ta có: $Q=\int_0^T Ri^2dt=\int_0^T RI_0{}^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T}.t+\pi\right)dt$

$$=RI_0{}^2\int_0^T\frac{1-cos2\left(\frac{2\pi}{T}.t+\pi\right)}{2}dt=\frac{RI_0^2}{2}\left(t-\frac{T}{4\pi}sin2\left(\frac{2\pi}{T}.t+\pi\right)\right)\Bigg|_0^1=\frac{RI_0^2}{2}T$$

Chọn D

Bài 68

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 x^3dx=\pi\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

Chọn B

Bài 69

Ta có $x=y^2\Leftrightarrow\sqrt{x}=y$. Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x}=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$. Trên $[0;1]$ ta luôn có $\left(\sqrt{x}\right)^2\ge\left(x^2\right)^2$ do đó thể tích cần tính là:

$$V=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx-\pi\int_0^1(x^2)^2dx.$$

Chọn D

Bài 70

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$, do đó diện tích cần tính là:

$$S=\int_{-1}^1\left|x^2-1\right|dx=\frac{4}{3}$$

Chọn C

Bài 71:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2-4=2x-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$, do đó diện tích cần tính là:

$$S=\int_{-1}^{1}\left|x^2-4-\left(2x-x^2\right)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|2x^2-2x-4\right|dx=9$$

Chọn D

Bài 72:

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{1}{e^{-2x}}=e^{-x} \Leftrightarrow e^{-3x}=1 \Leftrightarrow x=0$ vậy:

$$S=\int_0^1\left|\frac{1}{e^{-2x}}-e^{-x}\right|dx=\left|\int_0^1\left(e^{2x}-e^{-x}\right)dx\right|=\left|\left(\frac{e^{2x}}{2}+e^{-x}\right)\right|_0^1=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{e}-\frac{3}{2}$$

Chọn B

Bài 73:

Áp dụng công thức tính thể tích khi quay hình phẳng quanh trục Ox ta có:

$$V=\pi\int_1^a\frac{dx}{x^2}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\pi.$$

Chọn C

Bài 74:

Gọi S là diện tích cần tìm, ta có: $S=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x(1+x^3)}dx=\int_1^2\frac{x^2dx}{x^3\left(1+x^3\right)}$

$$=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{d\left(x^3\right)}{x^3(1+x^3)}=\frac{1}{3}\left[\int_1^2\frac{d(x^3)}{x^3}-\int_1^2\frac{d(x^3)}{1+x^3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}ln\frac{x^3}{1+x^3}\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}ln\frac{16}{9}\text{ (đvdt)}$$

Chọn B

Bài 75:

Gọi diện tích cần tính là S, ta có $S=\displaystyle\int_1^e\frac{\sqrt{1+ln\,x}}{x}dx$

Đặt $u=1+ln\,x$, khi $x=1$ thì $u=1$, $x=e$ thì $u=2$, $du=\dfrac{1}{x}dx$

$$S=\int_1^2\sqrt{u}dx=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Chọn C

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 76:

Tính tích phân $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ bằng cách đặt $x=\tan t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ hoặc có thể sử dụng máy tính cầm tay để tìm kết quả.

Chọn A

Bài 77:

Ta tính S_2 trước, phương trình hoành độ giao điểm:

$x(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$, do đó $S_2=\int_0^2\left|2x-x^2\right|=\frac{4}{3}$.

Ta tính S_1, phương trình hoành độ giao điểm:

$mx=2x-x^2\Leftrightarrow x^2+(m-2)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2-m\end{array}\right.$, do đó:

$$S_1=\int_0^{2-m}\left|2x-x^2-mx\right|dx=\int_0^{2-m}\left(-x^2+(2-m)x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{(2-m)x^2}{2}\right)\Big|_0^{2-m}$$

$$=\frac{(2-m)^3}{6}=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\Leftrightarrow m=2-\sqrt[3]{4}$$

(Chú ý: muốn đường thẳng cắt parabol tại 2 điểm phân biệt thì trong tình huống này parabol phải có phần chứa đỉnh nằm trên đường thẳng).

Chọn A

Bài 78:

Ta có $S_1=\int_0^k e^x dx=e^x\Big|_0^k=e^k-1$, $S_2=\int_k^{ln4}e^x dx=e^x\Big|_k^{ln4}=4-e^k$.

Do đó $S_1=2S_2\Leftrightarrow e^k-1=2\left(4-e^k\right)\Leftrightarrow e^k=\frac{9}{3}=3\Leftrightarrow k=ln3$.

Chọn D

Bài 79:

Gọi V_1 là thể tích vật thể sinh ra bởi "hình thang cong" (giới hạn bởi các đường: $x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=x$) quay xung quanh trục Ox và V_2 là thể tích vật thể sinh ra bởi "hình thang cong" (giới hạn bởi các đường: $x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=2\sqrt{x}$) quay xung quanh trục Ox. Ta có $V\ =\ V_2 - V_1$, do đó:

$$V=\pi\int_0^4 4xdx-\pi\int_0^4 x^2dx=\pi\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^4=\frac{32}{3}\pi$$

Chọn B

Ghi chú của em

Bài 80:

Chọn hệ trục Oxy có gốc tọa độ tại tâm của Elip.

Khi đó Elip này có phương trình:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5\sqrt{1-\dfrac{x^2}{64}} \\ y=-5\sqrt{1-\dfrac{x^2}{64}} \end{array}\right..$$

Diện tích cần tính $S=2\int\limits_{-4}^{4}5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}dx \approx 76.529$.

Do đó số tiền cần là $76.529\times 0.1 \approx 7.653$ triệu đồng.

Chọn B

Bài 81:

Ta có $y=x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{y} \Rightarrow x'=\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Do đó độ dài cần tính là $\int\limits_{1}^{2}\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}dy \approx 1.06$.

Chọn B

Bài 82:

Ta có $x'=2y$

Độ dài cần tính là $\int\limits_{1}^{4}\sqrt{1+2y}dy \approx 7.27$.

Chọn B

Bài 83:

Cung cần tìm là phần của đường cong nằm trong góc vuông thứ nhất.

Ta có $y=2x^{\frac{3}{2}}$ nên $y'=3x^{\frac{1}{2}}$. Độ dài cung cần tìm bằng:

$$\int\limits_{0}^{2}\sqrt{1+y'^2}dx=\int\limits_{0}^{2}\sqrt{1+9x}dx.$$

Chọn D

Bài 84:

Ta có $f'(x)=2\sqrt{2x}$, suy ra $\left(f'(x)\right)^2=8x$. Từ đó thay vào công thức ta được $T=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+8x}dx$. Đổi biến $u=1+8x$ ta có: Khi $x=0 \Rightarrow u=1$, khi $x=1 \Rightarrow u=9$.

Vậy: $T=\frac{1}{8}\int\limits_{1}^{9}\sqrt{u}du=\frac{1}{8}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{9}=\frac{13}{6}$

Chọn A

Bài 85:

Dễ thấy $sin^2x \le cos^2 x\ \ \forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ và $sin^2x \ge cos^2 x, \forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$

Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{sin^2 x}-\frac{1}{cos^2 x}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{cos^2 x}-\frac{1}{sin^2 x}\right)dx$$

$$=\left(-cot\,x-tanx\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\left(tanx+cotx\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=-2+\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}-2=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Chọn A

Bài 86:

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2-1\right|=\left|x\right|+5 \Leftrightarrow x=\pm 3$ (thật ra nhìn hình ta thấy có hai giao điểm).

Do đó diện tích cần tính là:

$$\int_{-3}^{3}\left|\left|x\right|+5-\left|x^2-1\right|\right|dx=\int_{-3}^{3}\left(\left|x\right|+5-\left|x^2-1\right|\right)dx$$

(Ta bỏ được trị tuyện đối ngoài cùng vì đồ thị $y=\left|x\right|+5$ ở trên $y=\left|x^2-1\right|$). Lúc này chỉ cần bấm máy tính ta ra kết quả B.

Chọn B

Bài 87:

Hoành độ giao điểm của hai parabol đã cho là nghiệm của phương trình:

$x^2-2x+2=x^2+4x+5$, cho ta $x=\frac{-1}{2}$.

Parabol: (P): $y = x^2-2x+2$ có tọa độ điểm cực tiểu là (1;1) và

Parabol : (P): $y = x^2+4x+5$ c ó tọa độ điểm cực tiểu là (-2;1)
Diện tích cần tính là:

$$S=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+4x+5\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x^2-2x+2\right)dx=\frac{9}{4}$$

Chọn D

Bài 88:

Ta có: $y=\left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases}-(x^2-4x+3), 1<x<3\\ x^2-4x+3, x\le 1 \vee x\ge 3\end{cases}$

Dễ thấy hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là $x=0,\ x=4$ các tung độ tương ứng là $y = 3, y = 3$.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Diện tích cần tìm là: $S =$ diện tích hình chữ nhật $OMNP$ - S_1, trong đó:

$$S_1 = \int_0^1 (x^2-4x+3)dx + \int_1^3 -(x^2-4x+3)dx + \int_3^4 (x^2-4x+3)dx$$

$$= 2.\left(\frac{1}{3}-2+3\right)+\left(-3+6-3+\frac{1}{3}-2+3\right)=3.\frac{4}{3}=4 \text{ (đvdt)}$$

Và diện tích hình chữ nhật $OMNP = 3.4 = 12$ (đvdt). Vậy $S = 8$ (đvdt).

Chọn C.

Chú ý: sau khi tìm được hoành độ giao điểm $x=0,\ x=4$ ta có diện tích $S=\int_0^4 \left|3-\left|x^2-4x+3\right|\right|dx=\int_0^4 \left(3-\left|x^2-4x+3\right|\right)dx$, bấm máy tính được kết quả là 8.

Bài 89:

Gọi S là diện tích cần tính ta có: $S=\int_{-1}^{1}\frac{4x}{x^4+1}dx$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{-4x}{x^4+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{4x}{x^4+1}dx=2\int_{0}^{1}\frac{4x}{x^4+1}dx=4\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^4+1}dx.$$

Đặt $u=x^2$, suy ra du = 2xdx, và S = $4\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du=4I.$

Để tính $I=\int_0^1\frac{1}{u^2+1}du$, ta lại đặt $u=\tan t$, ta có $du=\frac{dt}{(\cos t)^2}$; khi u = 0 thì t = 0, khi u = 1 thì t = $\frac{\pi}{4}$ và:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 t+1}.\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4} \text{ vậy } S=\pi \text{ (đvdt).}$$

Chọn D

Chú ý: có thể dùng MTCT để tính nhanh kết quả.

Bài 90:

Đường tròn $x^2+y^2=8$ có tâm O bán kính $2\sqrt{2}$

Để thấy đường tròn này cắt trục hoành tại điểm $A(2\sqrt{2};0)$ và cắt parabol $y^2 = 2x$ ở 2 điểm $C,\ B$ đối xứng nhau qua Ox, với $B(2;2)$.

Gọi S là diện tích tam giác cong OAB ta có: $S=\int_0^2\sqrt{2x}dx+\int_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}dx$

Ta có: $\int_0^2\sqrt{2x}dx=\frac{8}{3}$.

Để tính $\int_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}dx$, ta đặt $x=2\sqrt{2}\sin t, \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Ghi chú của em

Lúc đó, $dx = 2\sqrt{2}costdt$ $\sqrt{8-x^2} = \sqrt{8-8sin^2t} = \sqrt{8cos^2t} = 2\sqrt{2}cost$

Từ đó:

$$\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}cost.2\sqrt{2}costdt = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2t}{2}dt = \pi - 2$$

Vậy $S = \pi + \frac{2}{3}$.

Diện tích phần còn $(OABC)$ là $2S = 2\pi + \frac{4}{3}$

Diện tích phần còn lại cần tính bằng diện tích hình tròn trừ đi 2S, tức là bằng: $8\pi - 2\pi - \frac{4}{3} = 6\pi - \frac{4}{3}$ (đvdt).

Chọn A.

Bài 91:

Parabol là tập hợp những điểm cách đều tiêu điểm và đường chuẩn. Do đó điểm M (x,y) $\in (P)$ khi và chỉ khi:

$(x-2)^2 + \left(y+\frac{3}{4}\right)^2 = \left(y+\frac{5}{4}\right)^2 \leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3$. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) v ới trục hoành là $x^2 - 4x + 3 = 0$, cho ta hai nghiệm x = 1, x = 3.

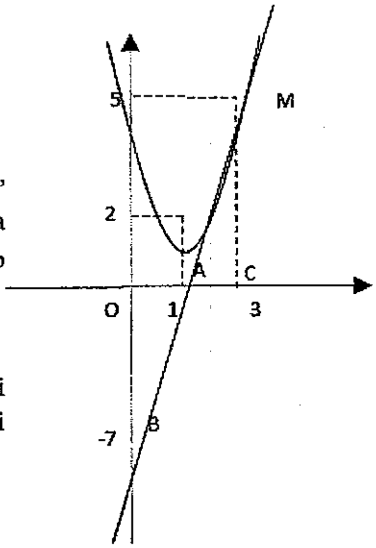
Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục Ox thì:

$$S = \int_1^3 \left(0 - \left(x^2 - 4x + 3\right)\right)dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right)dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

Chọn C

Bài 92:



Với $y = x^2 - 2x + 2$, ta có y'= 2x -2, y'(3) = 4, đỉnh (điểm cực tiểu) của parabol là (1; 2). Phương trình tiếp tuyến tại điểm M(3;5) là:

y = 4(x – 3) + 5 = 4x- 7.

Tiếp tuyến này cắt trục tung tại điểm (0; -7) và cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{7}{4};0\right)$.

Gọi S là diện tích cần tính ta có:

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - 2x + 2\right)dx - dt\left(\Delta AMC\right) + dt\left(\Delta 0AB\right)$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)\Bigg|_0^3-\frac{1}{2}.\left(3-\frac{7}{4}\right).5+\frac{1}{2}.\frac{7}{4}.7$$

$$=9-9+6-\frac{25}{8}+\frac{49}{8}=6-\frac{24}{8}=3\text{ (đvdt)}$$

Chọn D

Bài 93:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2xdx=4\pi^2$$

Chọn C

Bài 94:

Dựa vào tính chất đối xứng của elip và đường tròn thì phải có:

$$S=4\int_0^3\left(\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)dx=\frac{4}{3}\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$$

Chọn B

Bài 95:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\\x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\end{cases}$$

$$\bullet V_x=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{4\pi ab^2}{3}=\frac{4\pi ab}{3}.b$$

$$\bullet V_y=V_x=2\pi\int_0^b x^2dx=2\pi a^2\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dx=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{4\pi ba^2}{3}=\frac{4\pi ab}{3}.a$$

Vì $b>a$ nên $V_x>V_y$

Chọn A

Bài 96:

Khẳng định (1) ta có $f(x)<g(x),\forall x\in[a;b]$ nên đồ thị $g(x)$ cao hơn đồ thị $f(x)$ trên $[a;\ b]$. Do đó diện tích tạo bởi đồ thị $g(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ lớn hơn diện tích tạo bởi đồ thị $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ nghĩa là $\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$. Khẳng định (2) cũng đúng.

Chọn C

Ghi chú của em

CHỦ ĐỀ 3

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN GIẢI BÀI TOÁN VẬT LÝ VÀ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Lưu ý 1. Một chất điểm chuyển động trên trục Ox với vận tốc thay đổi theo thời gian $v = f(t)$ (m/s). Quãng đường chất điểm chuyển động trên trục Ox từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 là $s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Lưu ý 2. Điện tích $q(t)$ là nguyên hàm của cường độ dòng điện $i(t)$ tại thời điểm t (s) nghĩa là $q = \int idt$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

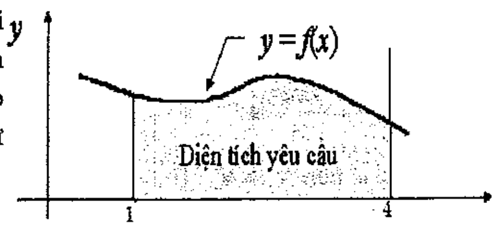
Bài 1: Một đám vi khuẩn tại ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \dfrac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn là?

A. 10130. **B.** 5130. **C.** 5154. **D.** 10129.

Bài 2: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc $a(m/s)$ thì người lái đạp nhanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + a(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp nhanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô di chuyển được 40 mét thì vận tốc ban đầu a là bao nhiêu?

A. $a = 40$. **B.** $a = 80$. **C.** $a = 20$. **D.** $a = 25$.

Bài 3: Trong quá trình lắp ráp tôn cho một mái nhà, người công nhân đã vô tình cắt tấm tôn đi theo như hình vẽ dưới đây. Hỏi diện tích phần tôn mà người công nhân đó cắt hỏng là bao nhiêu, biết rằng họ đã khảo sát đường cắt hư có dạng hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x + 1$.



A. $S = 81.75$ (đvdt)

B. $S = 74.25$ (đvdt)

C. $S = 79.35$ (đvdt)

D. $S = 78.69$ (đvdt)

Bài 4: Người ta sản xuất một chiếc cốc bằng cách xoay miền phẳng giữa $y = 2x^2$ và $y = x + 1$ $(x \geq 0)$ quanh trục Ox. Hãy tìm thể tích vật liệu cần đủ để làm nên chiếc cốc này. Biết đơn vị đo là cm.

A. $V = 4.7(cm^3)$ **B.** $V = 4.817(cm^3)$ **C.** $V = 4.527(cm^3)$ **D.** $V = 4.327(cm^3)$

Bài 5: Người ta chứng minh được nếu lực là một giá trị biến thiên (như nén lò xo) và được xác định bởi hàm $F(x)$ thì công sinh ra theo trục Ox từ a tới b là $A=\int_a^b F(x)dx$. Người ta tiến hành thí nghiệm nén lò xo đang ở trạng thái tự nhiên dài $1(m)$ xuống còn $0.75(m)$. Hãy tìm công của lò xo khi biết hằng số lò xo là $k=16N/m$.

A. $0.5(N/m)$ **B.** $0.6(N/m)$ **C.** $0.7(N/m)$ **D.** $0.8(N/m)$

Bài 6: Người ta tiến hành thí nghiệm kéo căng một chiếc lò xo bằng một lực $40N$ để kéo căng một chiết lò xo có độ dài tự nhiên từ $10(cm)$ đến $15\ (cm)$. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài $15\ (cm)$ đến $18\ (cm)$.

A. 1.35 J **B.** 1.45 J **C.** 1.56 J **D.** 1.65 J

Bài 7: Số lượng đám vi trùng ở ngày thứ t xác định bởi $N(t)$ với $N'(t)=\dfrac{1000}{2t+8}$. Biết rằng ngày đầu tiên đám vi trùng có 2500 con. Tính số lượng đám vi trùng ở ngày thứ 20 (làm tròn kết quả đến hàng trăm).

A. 11459 con. **B.** 8959 con. **C.** 10000 con. **D.** 3284 con.

Bài 8: Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t=0(s)$ chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)=t(5-t)\ (m/s)$. Tìm quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại.

A. $\dfrac{125}{8}m.$ **B.** $\dfrac{125}{7}m.$ **C.** $\dfrac{125}{9}m.$ **D.** $\dfrac{125}{6}m.$

Bài 9: Một chất điểm A xuất phát từ vị trí O, chuyển động thẳng nhanh dần đều; 8 giây sau nó đạt đến vận tốc $6m/s$. Từ thời điểm đó nó chuyển động thẳng đều. Một chất điểm B xuất phát từ cùng vị trí O nhưng chậm hơn 12 giây so với A và chuyển động thẳng nhanh dần đều. Biết rằng B đuổi kịp A sau 8 giây (kể từ lúc B xuất phát). Tìm vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A.

A. $25m/s.$ **B.** $46m/s.$ **C.** $24m/s.$ **D.** $47m/s.$

Bài 10: Một ô tô xuất phát với vận tốc $v_1(t)=2t+10(m/s)$ sau khi đi được một khoảng thời gian t_1 thì bất ngờ gặp chướng ngại vật nên tài xế phanh gấp với vận tốc $v_2(t)=20-4t(m/s)$ và đi thêm một khoảng thời gian t_2 nữa thì dừng lại. Hỏi xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét.

A. $57m.$ **B.** $104m.$ **C.** $50m.$ **D.** $125m.$

Bài 11: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t(m/s)$. Hỏi rằng trong $3s$ trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $16m.$ **B.** $130m.$ **C.** $170m.$ **D.** $45m.$

Bài 12: Học sinh lần đầu thử nghiệm "tên lửa tự chế" phóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc $15m/s$. Hỏi sau $2,5s$ tên lửa lên đến độ cao bao nhiêu? (giả sử bỏ qua sức cản gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực và gia tốc trọng trường là $g=9,8m/s^2$)

A. $61,25m.$ **B.** $6,875m.$ **C.** $68,125m.$ **D.** $30,625m.$

Bài 13: Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ m với số lượng là $F(m)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(m)=\dfrac{1000}{2m+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?

A. $5433,99$ và không cứu được. **B.** $1499,45$ và cứu được.

C. $283,01$ và cứu được. **D.** $3716,99$ và cứu được.

Bài 14: Giả sử sau t năm, dự án đầu tư thứ nhất sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_1(t)=t^2+50$ trăm đô la/năm, trong khi đó dự án đầu tư thứ hai phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_2(t)=200+5t$ trăm đô la/năm. Từ lúc bắt đầu đến lúc tốc độ phát sinh lợi nhuận của dự án hai bằng tốc độ phát sinh lợi nhuận của dự án một thì lợi nhuận của dự án hai hơn dự án một bao nhiêu?

A. 1690 trăm đô. **B.** 1695 trăm đô.

C. $1687,5$ trăm đô. **D.** 1685 trăm đô.

Bài 15: Một vật chuyển động với vận tốc $10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$ (m/s^2). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $3600m$. **B.** $\dfrac{4300}{3}m$. **C.** $\dfrac{1750}{3}m$. **D.** $\dfrac{1450}{3}m$.

Chọn B.

Bài 16: Người ta tác dụng một lực có độ lớn $F(x)=\sqrt{2x-1}$ vào một cục đá tảng. Tính công sinh ra từ lực này, biết vật này di chuyển một đoạn từ $x=1$ đến $x=5$.

A. $8,67$ đơn vị **B.** $7,68$ đơn vị **C.** $8,96$ đơn vị **D.** $9,68$ đơn vị

Bài 17: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc $10(m/s)$ thì người lái đạp nhanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $0,2m$. **B.** $2m$. **C.** $10m$. **D.** $20m$.

Bài 18: Một đám vi trùng ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\dfrac{4000}{1+0,5t}$, một căn phòng lúc đầu đám vi trùng có 250.000 con. Sau 10 ngày số lượng vi trùng trong căn phòng là (lấy xấp xỉ hàng đơn vị):

A. 264334 con **B.** 257167 con **C.** 258959 con **D.** 253584 con

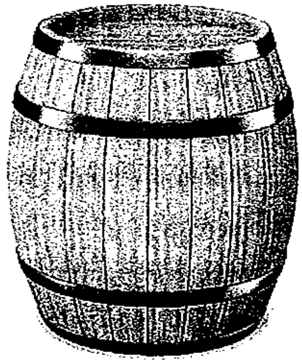
Bài 19: Gọi $h(t)$ cm là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t)=\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

A. $2,33cm$. **B.** $5,06cm$. **C.** $2,66cm$. **D.** $3,33cm$.

Bài 20: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (cm^2/s) là $a(t)=\dfrac{-20}{(1+2t)^2}$ với t tính bằng giây. Tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng khi $t=0$ thì $v=30cm/s$.

A. $\dfrac{10}{1+2t}$. **B.** $\dfrac{10}{1+2t}+20$. **C.** $(1+2t)^{-3}+30$. **D.** $\dfrac{20}{1+2t}+10$.

Bài 21: Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30cm$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là đường tròn có bán kính là $40cm$, chiều cao thùng rượu là $1m$. Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu?



A. $425,2l$.

B. $425162l$.

C. $212581l$.

D. $212,6l$.

Bài 22: Một ô tô đang chạy với vận tốc 18m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-36t+18(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 3,5m. **B.** 5,5m. **C.** 4,5m. **D.** 6,5m.

Bài 23: Một chất điểm chuyển động trên trục Ox với vận tốc thay đổi theo thời gian $v=f(t)$ (m/s). Quãng đường chất điểm chuyển động trên trục Ox từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 là $s=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được từ thời điểm $t_1=1s$ đến thời điểm $t_2=2s$, biết rằng $v(t)=30-5t(m/s)$.

A. 32,5m. **B.** 22,5m. **C.** 42,5m. **D.** 52,5m.

Bài 24: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15m/s$ thì tăng vận tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\ (m/s^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3s kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc:

A. 67,25m. **B.** 68,25m. **C.** 69,75m. **D.** 70,25m.

Bài 25: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 29,4m/s. Tính quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho tới khi chạm đất, biết gia tốc trọng trường là 9,8m/s^2:

A. 88,2m. **B.** 44,1m. **C.** 22,05m. **D.** 176,4m.

Bài 26: Một chiếc xe hơi đang di chuyển với vận tốc 54 km/h thì phát hiện phía trước có 1 chướng ngại vật trên đường cách khoảng 20m, người lái xe quyết định hãm phanh, giả sử sau đó xe chuyển động chậm dần đều với phương trình vận tốc $v = -6t + 15$ (m/s). Khi xe dừng hẳn thì khoảng cách giữa xe và chướng ngại là bao nhiêu?

A. 1,35m. **B.** 1,25m. **C.** 1,45m. **D.** 1,15m.

Bài 27: Một công ty có 2 dự án đầu tư là Q_1 và Q_2. Giả sử sau một thời gian t năm thì dự án thứ nhất phát sinh lợi nhuận với tốc độ là $Q_1(t) = 100 + t^2$ (trăm đô la/năm) và dự án thứ 2 phát sinh lợi nhuận với tốc độ là $Q_2(t) = 15t + 284$ (trăm đô la/năm). Tính lợi nhuận vượt thực tế từ lúc ban đầu tới khi tốc độ sinh lợi nhuận dự án thứ 2 vượt bằng dự án đầu tư thứ nhất.

A. Xấp xỉ 5243,83 (trăm đô la). **B.** Xấp xỉ 4243,83 (trăm đô la).

C. Xấp xỉ 4143,83 (trăm đô la). **D.** Xấp xỉ 4144,83 (trăm đô la).

Bài 28: Thời gian và vận tốc của 1 vật khi nó đang trượt xuống trên mặt phẳng nghiêng có mối liên hệ theo công thức: $t = \int \frac{2}{20-3v}dv$ (giây). Chọn gốc thời gian là lúc vật bắt đầu chuyển động. Hãy tìm phương trình vận tốc của vật:

A. $v = \frac{20}{3} - \frac{20}{3\sqrt{e^{3t}}}$ **B.** $v = \frac{20}{3} + \frac{20}{3\sqrt{e^{3t}}}$

C. $v = \frac{20}{3} - \frac{20}{3\sqrt{e^{3t}}}$ hoặc $v = \frac{20}{3} + \frac{20}{3\sqrt{e^{3t}}}$ **D.** $v = \frac{20}{5} + \frac{20}{3\sqrt{e^{3t}}}$

Bài 29: Tập đoàn dầu khí Việt Nam PVC dự định đầu tư một khu sản xuất, chế biến dầu thô tại Quảng Ngãi. Giả sử sau t năm đầu tư, dự án đầu tư lần một sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_1(t) = 50 + t^2$ trăm đôla/năm, tiếp sau đó dự án lần hai sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_2(t) = 200 + 5t$ trăm đôla/năm. Biết sau thời gian t năm thì tốc độ lợi nhuận của dự án hai bằng một nửa với tốc độ lợi nhuận với dự án một. Tính lợi nhuận vượt thực tế cho khoảng thời gian trên.

A. 6674,6 đô **B.** 6576,4 đô **C.** 5676,4 đô **D.** 6679,4 đô

Bài 30: Trong giờ thực hành môn Vật Lí. Một nhóm sinh viên đã nghiên cứu về sự chuyển động của các hạt. Trong quá trình thực hành thì nhóm sinh viên này đã phát hiện một hạt prôton di chuyển trong điện trường với biểu thức gia tốc (theo cm/s^2) là: $a = -20(1+2t)^{-2}$. Với t được tính bằng giây. Nhóm sinh viên đã tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng khi $t = 0$ thì $v = 30m/s^2$. Hỏi biểu thức đúng là?

A. $v = \left(\frac{10}{1+2t} + 25\right) cm/s^2$ **B.** $v = \left(\frac{10}{1+t} + 20\right) cm/s^2$

C. $v = \left(\frac{10}{1+2t} + 10\right) cm/s^2$ **D.** $v = \left(\frac{10}{1+2t} + 20\right) cm/s^2$

Bài 31: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất lên với vận tốc $15m/s$. Hỏi biểu thức vận tốc của tia lửa điện là?

A. $v = -9.8t + 15$ **B.** $v = -9.8t + 13$

C. $v = 9.8t + 15$ **D.** $v = -9.8t - 13$

Bài 32: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15m/s$. Hỏi sau $2,5$ giây thì tia lửa điện đấy có chiều cao là bao nhiêu?

A. $6.235(m)$ **B.** $5.635(m)$ **C.** $4.235(m)$ **D.** $6.875(m)$

Bài 33: Một vật chuyển động có phương trình $v=5+at(m/s)$. Hỏi sau thời gian 5 giây thì vật chuyển động quãng đường là?

A. $147,5(m)$ **B.** $157,5(m)$ **C.** $137,5(m)$ **D.** $127,5(m)$

Bài 34: Trong mạch máy vi tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t như sau: $i=0.3-0.2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong $0.05(s)$ là bao nhiêu?

A. $0.013(mC)$ **B.** $0.014(mC)$ **C.** $0.01475\ (mC)$ **D.** $0.016(mC)$

Bài 35: Hiệu điện thế đi qua tụ điện có điện dung $8.5(nF)$ đặt trong mạch thu sóng FM gần bằng 0. Nếu cường độ dòng điện $i=0.042t(mA)$ nạp vào tụ. Tìm hiệu điện thế sau $2\mu s$.

A. $9.22(nV)$ **B.** $9.88(nV)$ **C.** $9.55(nV)$ **D.** $9.44(nV)$

Bài 36: Trong mạch các máy tivi, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một biểu thức hàm số theo thời gian t cho như sau: $i=0.5-0.1t$. Hỏi điện tích đi qua một điểm trong mạch trong thời gian $0.03(s)$ là bao nhiêu?

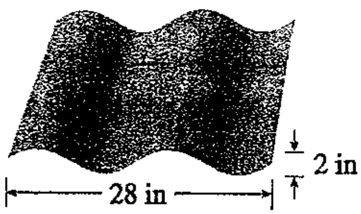
A. $0.024(mC)$ **B.** $0.015(mC)$ **C.** $0.017(mC)$ **D.** $0.016(mC)$

Bài 37: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1-2\sin 2t\,(m/s)$. Tính quãng đường $S(m)$ mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0\ (s)$ đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}(s)$.

A. $S=\frac{3\pi}{4}-1.$ **B.** $S=\frac{3\pi}{4}.$ **C.** $S=\frac{3\pi}{4}+1.$ **D.** $S=\frac{\pi}{3}.$

Bài 38: Một nhà sản suất tấm lợp kim loại bằng tôn có chiều rộng $28inch$ và cao $2inch$, bề mặt tấm lợp được dàn bằng máy theo chương trình máy tính lập trình trước mà tập hợp các điểm trên bề mặt tấm lợp đều thuộc đồ thị của hàm số $y=\sin\frac{\pi x}{7}$. Từ một tấm phôi kim loại phẳng có chiều dài w. Tính chiều dài cần thiết của tấm phôi kim loại để chế tạo được tấm lợp theo yêu cầu trên, biết rằng độ dài của đường cong $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được xác định bởi công thức $L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

w



A. $w=\int_0^{28}\sqrt{1+\sin^2\frac{\pi x}{7}}dx.$ **B.** $w=\int_0^{28}\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi x}{7}}dx.$

C. $w=\int_0^{28}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi x}{7}\right)^2}dx.$ **D.** $w=\int_0^{28}\sqrt{1+\left(\frac{7}{\pi}\cos\frac{\pi x}{7}\right)^2}dx.$

Bài 39: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $25m/s$. Gia tốc trọng trường là $9,8m/s^2$. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất là:

A. $s=\frac{3125}{98}m.$ **B.** $s=\frac{3125}{49}m.$ **C.** $s=\frac{125}{49}m.$ **D.** $s=\frac{6250}{49}m.$

Bài 40: Một xô nước bị rỉ có trọng lượng $5N$ được nâng lên không trung $20(m)$ với tốc độ cố định. Biết lực nâng xô nước là x với x là khoảng từ xô nước tới mặt đất. Hỏi công sinh ra khi ta bỏ qua trọng lượng xô nước bằng?

A. 20 J **B.** 25 J **C.** 30 J **D.** 35 J

Bài 41: Một nhà nghiên cứu ước tính rằng sau t giờ kể từ 0h đêm, nhiệt độ của thành phố Hồ Chí Minh được cho bởi hàm $C(t)=40-\frac{2}{3}(t-10)^2$ (độ C) với $0\le t\le 24$. Nhiệt độ trung bình của thành phố từ 8h sáng đến 5h chiều là

A. $31°$ **B.** $31,33°$ **C.** $33,47°$ **D.** $33,33°$

Bài 42: Bến xe Quyết Thắng quyết định sẽ đầu tư một khu Trung tâm thương mại Quyết Thắng Mart tại trung tâm Thị trấn Vạn Giã, huyện Vạn Ninh, tỉnh Khánh Hòa. Giả sử như sau n năm đầu tư, lợi nhuận phát sinh trong lần đầu tư đầu tiên với tốc độ là $P_1(n)=2n^2+5$ trăm đôla/năm, tiếp sau đó là dự án đầu tư lần thứ hai thì phát sinh lợi nhuận có tốc độ $P_2(n)=20n+170$ trăm đôla/năm. Tính lợi nhuận vượt thực tế cho khoảng thời gian trên, biết sau thời gian n năm thì tốc độ lợi nhuận của lần đầu tư hai gấp 10 lần tốc độ lợi nhuận lần đầu tiên.

A. 345 trăm đô **B.** 456 trăm đô **C.** 567 trăm đô **D.** 678 trăm đô

Bài 43: Một hạt electron có điện tích âm là $1,6.10^{-19}C$. Người ta tiến hành tách hai hạt electron từ $1pm$ đến $4pm$. Hỏi công sinh ra là bao nhiêu?

A. $1,2.10^{-16}J$ **B.** $1,728.10^{-16}J$ **C.** $1,928.10^{-16}J$ **D.** $1,38.10^{-16}J$

Bài 44: Nhiệt độ T (tính theo ^0C) ghi nhận trong một ngày thỏa mãn đường cong sau đây:

$T=0.001t^4-0.28t^2+25$. Với t là giờ và được tính từ lúc giữa trưa $(-12\le t\le 12)$. Hỏi nhiệt độ trung bình của ngày hôm đó là bao nhiêu?

A. 14.7^0C **B.** 13.7^0C **C.** 15.7^0C **D.** 16.7^0C

Bài 45: Qua theo dõi diễn biến sản xuất lúa gạo ở huyện V từ đầu năm đến nay, tổng sản lượng lúa của huyện V đang ở vụ Hè-Thu được mô tả bởi $T_H(x)=175x^2+275$ (tấn) và chỉ bằng 75% so với chỉ tiêu của vụ Đông-Xuân $T_D(x)=100x^2+400x+900$ (tấn). Tính sản lượng thực tế trong thời gian sản xuất, biết x là số tháng sản xuất $(1\le x\le 12)$.

A. 6780 tấn **B.** 5670 tấn **C.** 4560 tấn **D.** 3300 tấn

Bài 46: Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ m với số lượng là $F(m)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 5000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(m)=\frac{4000}{2t+3}$ và lần đầu đi khám bệnh nhân có 2550 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân đi khám lại. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày và bệnh nhân có cứu chữa được không?

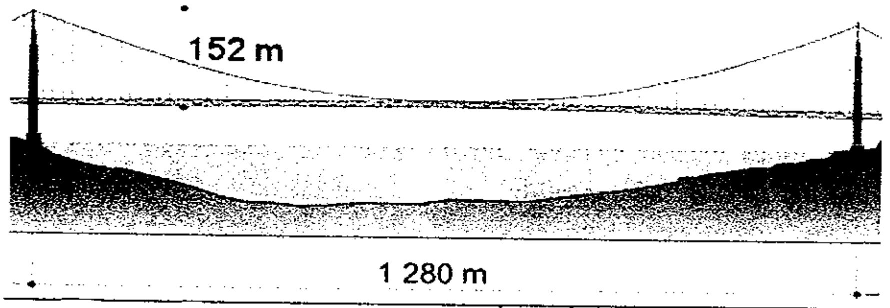
A. 50508 và không cứu được. **B.** 14499 và cứu được.

C. 62283 và không cứu được. **D.** 7346 và không cứu được.

Bài 47: Công ty A có một dự án đầu tư, sau thời gian t (năm) kể từ khi bắt đầu dự án này cho lợi nhuận $K(t)$ và tốc độ sinh lợi nhuận là $K'(t)=100(t^3+t^2)$ (triệu đồng/ năm). Tính lợi nhuận công ty A thu về từ dự án này ở năm thứ 10.

A. 2833 triệu. **B.** 28333 triệu. **C.** 283333 triệu. **D.** 283 triệu.

Bài 48: Nhịp trung tâm của cầu Cổng Vàng tại San Francisco của Mỹ dài $1280(m)$. Chiều cao của tòa tháp là $152(m)$ tính từ mặt đường. Hỏi cáp treo chính giữa hai tòa tháp có chiều dài là bao nhiêu? Biết rằng một cáp treo tự do có hình dạng dây chuyền. Dạng tổng quá của dây chuyền này là tổng của hai hàm số mũ $y=\dfrac{a\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)}{2}$.



Nhịp trung tâm của cầu Cổng Vàng

A. $1320(m)$ **B.** $1323(m)$ **C.** $1325(m)$ **D.** $1327(m)$

Bài 49: Nếu lực là một giá trị biến thiên (như nén lò xo) và được xác định bởi hàm $F(x)$ thì công sinh ra theo trục Ox từ a tới b là $A=\int_a^b F(x)dx$ (đơn vị là Jun (J)). Một con lắc lò xo đang ở trạng thái tự nhiên thì dài 1m và khi bị nén bởi một lực thì nó chỉ còn 0,65cm, biết độ cứng của lò xo là $k=16N/m$. Hãy tìm công sinh ra lúc này. Cho biết nếu lực F dùng để kéo căng lò xo đi một khoảng x đơn vị so với trạng thái ban đầu của lò xo thì F có dạng $F=kx$, với k là độ cứng lò xo.

A. 1 J. **B.** 0,5 J. **C.** 0,98 J. **D.** 0,6 J.

Bài 50: Người ta đặt vào đoạn mạch một hiệu điện thế xoay chiều $u=U_0 \sin\dfrac{2\pi}{T}t$. Khi đó trong mạch có dòng điện xoay chiều $i=I_0 \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ với φ là độ lệch giữa dòng điện và hiệu điện thế. Hãy tính công của dòng điện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì.

A. $\dfrac{U_0I_0}{2}T\cos\varphi$ **B.** $\dfrac{U_0I_0}{3}T\cos\varphi$ **C.** $\dfrac{U_0I_0}{4}T\cos\varphi$ **D.** $\dfrac{U_0I_0}{5}T\cos\varphi$

Bài 51: Người ta tiến hành một thí nghiệm. Cho một dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ chạy qua một mạch có điện trở thuần R. Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên mạch đó trong thời gian chu kỳ T.

A. $\frac{RI_0}{2}t$ B. $\frac{RI_0}{3}t$ C. $\frac{RI_0^{\ 2}}{2}t$ D. $\frac{RI_0^{\ 2}}{3}t$

Bài 52: Một nhà nghiên cứu khoa học đã tiến hành thực nghiệm như sau. Ông ước tính rằng sau thời gian t giờ kể từ lúc 0h đêm, nhiệt độ của một thành phố nào đó cho bởi hàm

$C(t) = 3 - \frac{2}{3}(t-13)^2, 0 \le t \le 24.$ Hãy tính nhiệt độ trung bình của thành phố giữa 6h sáng và 4h chiều.

A. -5.22^0C B. -4.22^0C C. -3.22^0C D. -2.22^0C

Bài 53: Một công ty sở hữu một loại máy, biết rằng sau thời gian t năm thì nó sinh ra doanh thu $R(t)$ có tốc độ doanh thu là $R'(t) = 5000 - 20t^2$ đô la/ năm. Biết chi phí hoạt động và chi phí bảo dưỡng của máy sau t năm là $C(t)$ có tốc độ là $C'(t) = 2000 + 10t^2$ đô la/ năm. Hỏi sau bao nhiêu năm thì máy không còn sinh lãi nữa. Tính tiền lãi thực sinh ra của máy trong khoảng thời gian từ lúc bắt đầu đến khi máy không còn sinh lãi.

A. 10000 đô B. 15000 đô C. 20000 đô D. 25000 đô

Bài 54: Một người bán tạp hóa nhận một kiện hàng gồm 10.000 kg gạo và số gạo sẽ bán hết trong vòng 5 tháng, với tốc độ $2000kg / tháng$. Nếu chi phí lưu trữ là 1 $cent / kg / tháng$, thì người đó phải trả bao nhiêu chi phí lưu trữ trong vòng 5 tháng.

A. 5 đô la B. 10 đô la C. 15 đô la D. 20 đô la

Bài 55: Tại một nhà máy nào đó, người ta ước tính rằng khi sản xuất và bán q sản phẩm thì doanh thu cận biên là $-4q + 4000(USD/\ đvsp$ và chi phí cận biên là $2q - 1200(USD/\ đvsp.$ Biết rằng khi sản xuất và bán ra 5 đơn vị sản phẩm thì lợi nhuận thu được là 50000 (USD). Hãy biểu diễn hàm lợi nhuận và nhà sản xuất nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất và tìm lợi nhuận lớn nhất đó.

A. $P(866,7)$ B. $P(886,7)$ C. $P(868,7)$ D. $P(888,7)$

Bài 56: Một vật có khối lượng m, vận tốc ban đầu v_0, di chuyển chịu lực cản có độ lớn $F_c = kv$, v là vận tốc của vật, hằng số $k = 1kg / s$. Viết biểu thức vận tốc của vật tại thời điểm t.

A. $v = \frac{1}{2}v_0e^{\frac{-k}{m}t}$ B. $v = v_0e^{\frac{-k}{m}t}$ C. $v = \frac{1}{3}v_0e^{\frac{-k}{m}t}$ D. $v = \frac{1}{4}v_0e^{\frac{-k}{m}t}$

Bài 57: Một lực 1200N nén lò xo từ chiều dài tự nhiên từ $18(cm)$ xuống còn $16(cm)$. Hỏi công sinh ra là bao nhiêu nếu ta tiếp tục nén lò xo từ $16(cm)$ xuống $14(cm)$.

A. $3600(N/m)$ B. $3700(N/m)$ C. $3800(N/m)$ D. $3900(N/m)$

Bài 58: Số lượng vi khuẩn HP (Helicobacter Pylori) có trong dạ dày của một người bệnh sau thời gian t (ngày) là $f(t)$, trong đó $f'' = \frac{1000}{2t+3}$. Một người bị đau dạ dày do vi khuẩn HP gây ra. Khi đi khám lần thứ nhất, bằng cách xét nghiệm biết được người này có 2550 con vi khuẩn HP trong dạ dày nhưng lúc này cơ thể chưa phát bệnh. Biết rằng nếu trong dạ dày người bệnh có trên 50000 con vi khuẩn thì người bệnh sẽ ở tình trạng nguy hiểm. Hỏi nếu sau 15 ngày người đó mới đi khám lại thì trong dạ dày của bênh nhân này có bao nhiêu con vi khuẩn và bệnh nhân có đang trong tình trạng nguy hiểm không? Nếu có thì số lượng vi khuẩn HP đã vượt quá ngưỡng an toàn là khoảng bao nhiêu con?

A. Không. **B.** Có; 433con. **C.** Có; 733con. **D.** Có; 533con.

Bài 59: Một vật thể đang di chuyển xuống trên một mặt phẳng nghiêng có phương trình biểu diễn một lực tỉ lệ là $t = \int \frac{1}{20-v} dv$. Tìm vận tốc v là hàm số theo t nếu như vật bắt đầu di chuyển từ trạng thái nghỉ.

A. $v = 20\left(1-e^{-t}\right)$ **B.** $v = 15\left(1-e^{-t}\right)$ **C.** $v = 10\left(1-e^{-t}\right)$ **D.** $v = 5\left(1-e^{-t}\right)$

Bài 60: Công suất điện p tạo ra từ một điện trở nào đó xác định bởi: $p = 3\int \frac{sin(\pi t)}{2+cos(\pi t)} dt.$ Với t là thời gian. Hãy biểu diễn p là một hàm số theo t.

A. $p = \frac{3}{\pi}\left(ln\left(2+cos\,\pi t\right)\right)+K$ **B.** $p = -\frac{3}{\pi}\left(ln\left(3+cos\,\pi t\right)\right)+K$

C. $p = -\frac{3}{\pi}\left(ln\left(2+cos\,\pi t\right)\right)+K$ **D.** $p = \frac{3}{\pi}\left(ln\left(3+cos\,\pi t\right)\right)+K$

Bài 61: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1,2 + \frac{t^2+4}{t+3}(m/s)$. Quãng đường vật đó đi được trong 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $18,82m$. **B.** $11,81m$. **C.** $4,06m$. **D.** $7,28m$.

Bài 62: Bạn Nam ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2+5(m/s)$. Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

A. $36m$. **B.** $252m$. **C.** $1134m$. **D.** $966m$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Theo bài ra ta có:

$$\int N'(x)dx = \int \frac{2000}{x+1}dx = 2000.ln|x+1| + C$$

Ta có:

$$N(x) = 2000.ln1 + C = 5000$$

$$\Rightarrow C = 5000$$

$$\Rightarrow N(x) = 2000.ln|x+1| + 5000$$

Ngày thứ 12: $N(12) = 2000.ln13 + 5000 = 10129,9$.

Chọn D.

Bài 2:

Khi xe dừng thì vận tốc bằng 0 $\Rightarrow -5t + a = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a}{5}$

Ứng dụng tích phân ta có:

$$S = \int_0^{\frac{a}{5}} |v| dt = \int_0^{\frac{a}{5}} |-5t + a| dt = \int_0^{\frac{a}{5}} (-5t + a) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + at\right)\Big|_0^{\frac{a}{5}} = \frac{1}{10}a^2$$

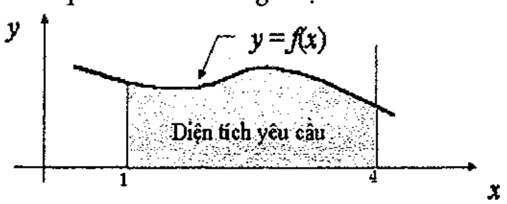
$$S = 40m \Leftrightarrow \frac{1}{10}a^2 = 40 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -20 \ (loại) \\ a = 20 \end{array}\right.$$

Vậy $a = 20m/s$.

Chọn C.

Bài 3:

Ta có phần tôn cắt hỏng được biểu diễn sau đây:



Theo kiến thức tích phân đã học, ta có: Diện tích $\int_a^b f(x)dx$

Áp dụng, ta có:

$$S_{ton} = \int_1^4 (x^3 + 2x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + x\right)\Big|_1^4 = 81,75 \text{ (đvdt)}.$$

Chọn A.

Ghi chú của em

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^2 = x+1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -0.5 \end{array}\right.$$

Vì giả thuyết $x \geq 0$ nên ta chọn $x = 1$.

Như vậy thể tích vật liệu được tính bởi:

$$V = \pi\int_0^1 \left(\left(x+1\right)^2 - \left(2x^2\right)^2\right)dx = \pi\int_0^1 \left(x^2 + 2x + 1 - 4x^4\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{4}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{23\pi}{15} = 4.817\left(cm^3\right).$$

Chọn B.

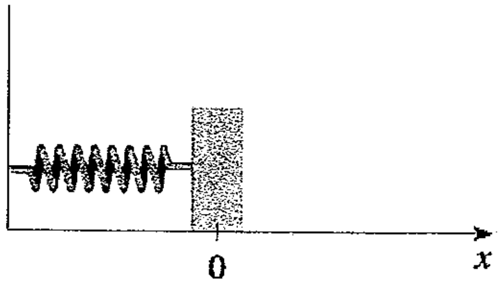
Chú ý: trên $[0;1]$ ta có $x + 1 \geq 2x^2$ nên ta có thể phá trị tuyệt đối $\left|(x+1)^2 - \left(2x^2\right)^2\right|$.

Ta có: $F = 16x$.

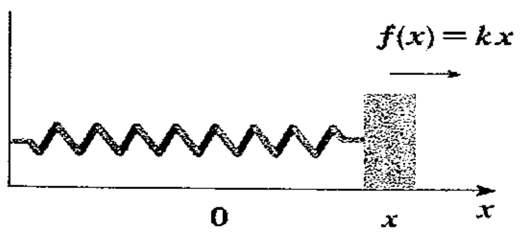
Vậy nên công $A = \int_0^{0.25} 16x dx = 8x^2\Big|_0^{0.25} = 0.5(N/m)$.

Chọn A.

Ta quan sát hình sau:



Và sau khi nó bị kéo dãn một đoạn:



Khi chiếc lò xo bị kéo thêm một đoạn $x(m)$ so với độ dài tự nhiên thì chiếc lò xo tác dụng lại với một lực $f(x) = kx$.

Ghi chú của em

Khi kéo căng lò xo từ $10(cm)$ đến $15\ (cm)$ thì nó dãn ra một đoạn $5(cm)=0.05(m)$. Lúc này, ta có:

$$f(x)=kx=f(0.05)=40\Rightarrow 0.05k=40\Rightarrow k=\frac{40}{0.05}=800$$

Do đó $f(x)=800x$ và công sinh ra khi kéo lò xo từ $15\ (cm)$ đến $18\ (cm)$ là:

$$A=\int_{0.05}^{0.08}800x\,dx=800\frac{x^2}{2}\Big|_{0.05}^{0.08}=1.56\text{ J}.$$

Chọn C.

Bài 7:

Ta có $N(t)=\int\frac{1000}{2t+8}dt=500\ln|2t+8|+C$. Ở ngày thứ nhất có 2500 con vi trùng nên $N(1)=500\ln|2.1+8|+C\Rightarrow C=1348$, do đó $N(20)=500\ln|2.20+8|+1348=3284$ con.

Chọn D.

Bài 8:

Vật dừng lại khi $v=0\Rightarrow t(5-t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (loại)\\t=5\end{array}\right.$

Suy ra thời gian vật đi là $5s$.

Ứng dụng tích phân ta có: $S=\int_0^5|v|dt=\int_0^5|t(5-t)|dt=\frac{125}{6}m.$

Chọn D.

Bài 9:

A xuất phát tại $t=0$

B xuất phát tại $t=12$

A gặp B tại $t=20$

Từ 0s đến 8s A chuyển động nhanh dần đều nên:

$$v_A=at+b\Rightarrow\begin{cases}0=b\\6=a.8+b\end{cases}\Rightarrow v_A=\frac{3}{4}t.$$

Quãng đường mà A đi được là: $s_A=\int_0^8\frac{3}{4}t\,dt+6.12=96$.

Vì B chuyển động nhanh dần đều nên $v_B=mt+n$ tại $t=0,\ v_o=0$ suy ra $n=0$ do đó $v_B=mt$

$$\Rightarrow s_B=\int_0^8 mt\,dt=\frac{mt^2}{2}\Big|_0^8=32m=96$$

$\Rightarrow m=3$

$\Rightarrow v_B=3t$

Do đó $v_B(8)=3.8=24$.

Chọn C.

Bài 10.

Ban đầu chạy với vận tốc v_1 trong khoảng thời gian t_1 và khi phanh ô tô chuyển động sau khoảng thời gian t_2 thì xe dừng lại, tại thời điểm phanh xe thì $v_{2\,(t=0)} = 20$ cũng chính là vận tốc cuối của v_1, do đó $v_1(t_1) = 2t_1 + 10 = 20 \Leftrightarrow t_1 = 5$.

Khi xe dừng hẳn thì $v_2(t_2) = 20 - 4t_2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 5$.

Ta có: $v(t) = s'(t) \Rightarrow s = \int v(t)dt$

Quãng đường mà xe đi được là:

$$s = \int_0^{t_1=5}(2t+10)dt + \int_0^{t_2=5}(20-4t)dt = 125(m).$$

Chọn D.

Bài 11.

Khi vật dừng hẳn: $160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16$.

Quãng đường vật di chuyển được trong $16s$ là:

$S = \int_0^{16}(160-10t)dt\ (m)$

Quãng đường vật di chuyển được trong $13s$ đầu là:

$S_1 = \int_0^{13}(160-10t)dt\ (m)$

Quãng đường vật di chuyển được trong $3s$ trước khi dừng hẳn là:

$S - S_1 = 45(m)$.

Chọn D.

Bài 12.

$v = v_0 + gt = 15 + 9,8t$

Sau $2,5s$ tên lửa ở độ cao là: $S = \int_0^{2,5}(15+9,8t)dt = 68,125m$.

Chọn C.

Bài 13.

Số con vi khuẩn sau 15 ngày bị nhiễm bệnh là:

$$2000 + \int_0^{15}\frac{1000}{2m+1}dm = 3716,99\ (con) \Rightarrow \text{cứu được.}$$

Chọn D.

Bài 14.

Đầu tiên ta phải hiểu rằng lợi nhuận là nguyên hàm của tốc độ phát sinh lợi nhuận.

Khi dự án đầu tư thứ hai có tốc độ sinh lợi nhuận bằng dự án đầu tư thứ nhất thì: $t^2 - 5t - 150 = 0\ (t > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 15(tm) \\ t = -10(l) \end{array}\right.$

Ghi chú của em

Lợi nhuận dự án hai hơn dự án một là:

$$\int_0^{15}(200+5t)dt-\int_0^{15}(t^2+50)dt=1687,5.$$

Chọn C.

Bài 15:

Quãng đường một vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=t_0(s)$ đến thời điểm $t=t_1(s)$ với vận tốc $v(t)\ m/s$ được tính theo công thức $s=\int_{t_0}^{t_1}v(t)dx$. Ở đây vận tốc $v(t)$ là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$.

Chọn B.

Bài 16:

Trước khi giải bài toán này, chúng ta cần lưu ý điều sau. *Trong Vật Lí, công được hình thành khi một lực tác động vào một vật và gây ra sự di chuyển, ví dụ như đẩy bàn, lái xe đạp,... Nếu có một lực biến thiên, thay đổi ta dùng tích phân để tính công sinh ra lực này. Ta sẽ dùng công thức sau:*

$$W=\int_a^b F(x)dx$$

Ở đây, $F(x)$ là lực.

Áp dụng vào bài. Để giải quyết Bài này, ta cần tính: $I=\int_1^5\sqrt{2x-1}dx$.

Đặt $u=2x-1\Rightarrow du=2dx$.

Vậy ta được: $\frac{du}{2}=dx\Rightarrow I=\int_1^5\sqrt{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int_1^5 u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5=\frac{26}{3}$.

Như vậy, công sinh ra là 8,67 đơn vị.

Chọn A.

Bài 17:

Khi vật dừng hẳn: $v=10-5t=0\Rightarrow t=2$.

Từ lúc đạp phanh tới lúc dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là: $S=\int_0^2(-5t+10)dt=10m$.

Chọn C.

Bài 18:

Số lượng vi trùng sau 10 ngày sinh ra là:

$$P=\int_0^{10}\left|\frac{4000}{1+0,5t}\right|dt=14334,1.$$

Vậy số lượng vi trùng sau 10 ngày trong căn phòng là:

$P+250.000=264334,1$.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 19

Ta có $h(6)$ là mực nước ở bồn chứa sau 6 giây. Vì ban đầu bồn không có nước nên $h(0)=0$, do đó mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây là: $h(6)=h(6)-h(0)=\int_0^6\left|\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}\right|dt=2,66\,cm.$

Chọn C.

Bài 20

Ta có: $v'(t)=a(t)$ suy ra $v(t)=\int\frac{-20}{(1+2t)^2}dt=\frac{10}{1+2t}+C.$

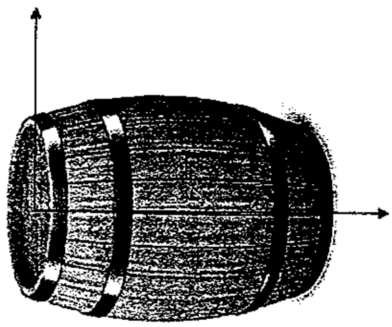
Theo bài ra ta có: $30=\frac{10}{1+2.0}+C\Rightarrow C=20.$

Suy ra hàm vận tốc theo t là: $\frac{10}{1+2t}+20.$

Chọn B.

Bài 21

Các đường xung quanh thùng rượu là các đường parabol. Đặt thùng rượu nằm ngang và chọn hệ trục có gốc tọa độ là tâm của đáy, trục hoành là trục đối xứng của thùng rượu.



Gọi đường parabol đó có dạng: $y=ax^2+bx+c$

Theo bài ra ta có đường parabol này sẽ đi qua các điểm $(0;0,3),(0,5;0,4),(1;0,3)$.

Suy ra: $y=\frac{-2}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}$

Thể tích thùng rượu chính là thể tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=\frac{-2}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}$; $y=0$; $x=1$:

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{-2}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}\right)^2dx=\frac{203\pi}{1500}(m^3)\approx 425,2l.$$

Chọn A.

Bài 22

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T)=0$ suy ra $-36T+18=0\Rightarrow T=0.5(s)$.

Khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn của ô tô là 0,5s. Trong khoảng thời gian đó, ô tô di chuyển được quãng đường là

Ghi chú của em

$$S=\int_0^{0,5}(-36t+18)\,dt=\left(-18t^2+18t\right)\Big|_0^{0,5}=4,5(m).$$

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 23:

$$s=\int_1^2(30-5t)\,dt=\left(30-\frac{5t^2}{2}\right)\Big|_1^2=22,5(m)$$

Chọn B.

Bài 24:

Ta có $v(t)=\int a(t)dt=\frac{t^3}{3}+2t^2+C$ tại $t=0$ thì $v_0=15m/s$ nên $v(t)=15+\frac{t^3}{3}+2t^2$.

$$s=\int_0^3\left(15+\frac{t^3}{3}+2t^2\right)dt=\left(15t+\frac{t^4}{12}+\frac{2t^3}{3}\right)\Big|_0^3=69,75(m).$$

Chọn C.

Bài 25:

Ta có $v=29,4-9,8t$ với t là thời gian (s).

Tại thời điểm viên đạn có độ cao lớn nhất thì:

$v=0\Leftrightarrow 29,4-9,8t=0\Leftrightarrow t=3$

$$s=2\int_0^3(29,4-9,8t)\,dt=2\left(29,4-4,9t^2\right)\Big|_0^3=88,2(m)$$

Chọn A.

Bài 26:

Ta có 54km/h=15m/s. Xe dừng hẳn lúc $v=0$ nên suy ra $t=\frac{5}{2}\ (s)$.
Quãng đường mà xe còn di chuyển từ khi hãm phanh là:

$$S=\int_0^{\frac{5}{2}}(-6t+15)\,dt=\frac{75}{4}m<20m.$$

Khoảng cách của xe và chướng ngại vật là:

$$20-\frac{75}{4}=\frac{5}{4}=1,25.$$

Chọn B.

Bài 27:

Thời điểm mà tốc độ sinh lợi nhuận dự án thứ 2 vượt bằng dự án đầu tư thứ nhất thỏa mãn:

$$100+t^2=15t+284\Leftrightarrow t^2-15t-184=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=23\ \text{(nhận)}\\ t=-8\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Lợi nhuận vượt thực tế từ lúc ban đầu ($t = 0$) cho tới ($t = 23$) là:

$$\int_0^{23}\left|Q_2(t)\text{-}Q_1(t)\right|dt=\int_0^{23}\left|t^2\text{-}15t\text{-}184\right|dt=\frac{24863}{6}\approx 4143{,}83 \text{ (trăm đô la)}$$

Chọn C.

Bài 28:

Ta có: $t=\int\frac{2}{20-3v}dv=-\frac{2}{3}ln\left|20-3v\right|+C,\ C\in R$.

Lúc $t=0$ thì vật có vận tốc là 0 suy ra: $0=-\frac{2}{3}ln20+C\Leftrightarrow C=\frac{2}{3}ln20$

Hay: $t=-\frac{2}{3}ln\left|20-3v\right|+\frac{2}{3}ln20\Leftrightarrow ln\left|20-3v\right|=ln20-\frac{3}{2}t$

$\Leftrightarrow\left|20-3v\right|=\frac{20}{\sqrt{e^{3t}}}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}20-3v=\frac{20}{\sqrt{e^{3t}}}\\20-3v=-\frac{20}{\sqrt{e^{3t}}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}v=\frac{20}{3}-\frac{20}{3\sqrt{e^{3t}}} & (nhận)\\v=\frac{20}{3}+\frac{20}{3\sqrt{e^{3t}}} & (loại)\end{array}\right.$$

Loại vì phương trình thứ 2 không thể cho được giá trị $v=0$ tại $t=0$.

Chọn A.

Bài 29:

Khoảng thời gian để tốc độ sinh lợi nhuận để dự án hai bằng một nửa dự án lần một khi:

$P_1(t)=2P_2(t)$

$\Leftrightarrow 50+t^2=400+10t$

$\Leftrightarrow t^2-10t-350=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5+5\sqrt{15}\\t=5-5\sqrt{15}\end{array}\right.$

$\Rightarrow t=5+5\sqrt{15}$ năm.

Lợi nhuận vượt trong khoảng thời gian $0\le t\le 5+5\sqrt{15}$ sẽ xác định bằng tích phân sau:

$$L=\int_0^{5+5\sqrt{15}}\left[P_2(t)-P_1(t)\right]dt=\int_0^{5+5\sqrt{15}}\left[\left(400+10t\right)-\left(50+t^2\right)\right]dt$$

$$=\int_0^{5+5\sqrt{15}}\left(350+10t-t^2\right)dt$$

$$=\left(350t+5t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{5+5\sqrt{15}}=6674.6$$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 30:

Trước hết để giải bài này ta chú ý biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là:

$v = \int a.dt$

Áp dụng công thức trên, ta có: $v = \int adt = \int \frac{-20}{(1+2t)^2}dt$

Đến đây ta đặt:

$u = 1 + 2t \Rightarrow du = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}.$

$v = \int \frac{-10}{u^2}du = \int -10u^{-2}du = \frac{10}{u} + K = \frac{10}{1+2t} + K.$

Với $t = 0,\ v = 30 \Rightarrow K = 20.$

Vậy biểu thức vận tốc theo thời gian là:

$v = \left(\frac{10}{1+2t} + 20\right) cm/s^2.$

Chọn D.

Bài 31:

Tia lửa điện chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a = -9,8\left(m/s^2\right)$.

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là:

$v = \int adt = \int -9,8dt = -9,8t + C.$

Ở đây, với: $t = 0, v = 15m/s \Rightarrow C = 15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng: $v = -9,8t + 15.$

Chọn A.

Bài 32:

Tia lửa điện chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a = -9,8\left(m/s^2\right)$.

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là:

$v = \int adt = \int -9,8dt = -9,8t + C.$

Ở đây, với: $t = 0, v = 15m/s \Rightarrow C = 15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng:

$v = -9,8t + 15.$

Lấy tích phân biểu thức vận tốc, ta sẽ có được biểu thức quãng đường:

$s = \int vdt$

$= \int (-9,8t + 15)dt$

$= -4,9t^2 + 15t + K$

Ghi chú của em

Theo đề bài, ta được khi $t=0 \Rightarrow s=0 \Rightarrow K=0$.

Vậy biểu thức tọa độ của quãng đường là:

$s=-4,9t^2+15t$.

Khi $t=2,5(s)$, ta sẽ được $s=6,875(m)$.

Chọn D.

[illegible]

Muốn tìm quãng đường, ta lấy nguyên hàm vận tốc, ta được:

$s=\int v dt=\int (v_0+at)dt=\int (5+at)dt$.

Do đó, quãng đường có biểu thức là: $s=v_0 t+\frac{1}{2}at^2+C.(1)$.

Khi $t=0 \Rightarrow s=0 \Rightarrow C=0$.

Theo đề bài: $t=5(s),\ a=9,8(m/s^2)$. Thay vào phương trình của (1) ta được:

$$s=5.5+\frac{1}{2}9,8.5^2=147.5(m)$$

Chọn A.

[illegible]

Ta có biểu thức tọa độ q như sau:

$q=\int i dt=\int (0.3-0.2t)dt=0.3t-0.1t^2+K$.

Khi $t=0, q=0 \Rightarrow K=0$.

Vậy ta có:

$q=0.3t-0.1t^2$

$q_{t=0.05}=0.3\times 0.05-0.1\times(0.05)^2=0.01475$ (mC)

(Đơn vị đo là mili-coulomb vì cường độ dòng điện i là mA).

Chọn C.

[illegible]

Ta có hiệu điện thế V_C có biểu thức như sau:

$$V_C=\frac{1}{C}\int i dt.$$

Ta lưu ý các đại lượng Vật Lí sau: $\begin{cases} 1nF=10^{-9}F. \\ 1\mu s=10^{-6}s. \\ 0.042t(mA)=0.042\times 10^{-3}t(A). \end{cases}$

Ta có:

$$V_C=\frac{0.042\times 10^{-3}}{8.5\times 10^{-9}}\int t dt=4.94\times 10^3\frac{t^2}{2}+K=2.47\times 10^3 t^2+K.$$

Theo giả thuyết: $t=0 \Rightarrow V_C=0 \Rightarrow K=0$.

Ghi chú của em

Do đó:

$V_C = 2.47\times10^3 t^2$

Vậy khi $t = 2\mu s$, ta sẽ được:

$V_C = 2.47\times10^3\left(2\times10^{-6}\right)^2 = 9.882\times10^{-9} = 9.88\left(nV\right).$

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 36:

Ta có biểu thức điện tích q là:

$q = \int idt = \int\left(0.5-0.1t\right)dt = 0.5t - 0.05t^2 + K.$

Khi $t = 0,\ q = 0 \Rightarrow K = 0.$

Vậy ta được:

$q = 0.5t - 0.05t^2$

$q_{t=0.03} = 0.5\times0.03 + 0.05\times0.03^2 = 0.015\left(mC\right)$

Chọn B.

Bài 37:

Quãng đường một vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = t_0(s)$ đến thời điểm $t = t_1(s)$ với vận tốc $v(t)\ m/s$ được tính theo công thức $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt.$

Chọn A.

Bài 38:

Tấm lợp có độ dài $28\,inch$, và các điểm trên mặt tấm lợp thuộc đồ thị $y = \sin\frac{\pi x}{7}$ nên ta có thể chọn trục Ox sao cho O nằm ở mép đầu của tấm lợp, điểm còn lại ở mép bên kia sẽ có hoành độ là 28.

Ta có $y' = \frac{\pi}{7}cos\frac{\pi x}{7}$, do đó $w = \int_0^{28}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{7}cos\frac{\pi x}{7}\right)^2}dx.$

Chọn C.

Bài 39:

Quãng đường một vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = t_0(s)$ đến thời điểm $t = t_1(s)$ với vận tốc $v(t)\ (m/s)$ được tính theo công thức $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$.

Ở đây vận tốc $v(t) = 25 - 9,8t.$ Tại thời điểm vật có độ cao lớn nhất thì $v\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{125}{49}$, do đó quãng đường $S = 2\int_0^{\frac{125}{49}}\left(25-9,8t\right)dt = \frac{6250}{49}$.

Chọn D.

Ghi chú của em

Bài 40:

Vì $F(x)=-\frac{x}{10}+2$. Nên khi đó ta có:

Công $A=\int_a^b F(x)dx=\int_0^{20}\left(-\frac{x}{10}+2\right)dx=\left(-\frac{x^2}{20}+2x\right)\Big|_0^{20}=20$ J

Chọn A.

Bài 41:

Nhiệt độ trung bình từ a giờ đến b giờ tính theo công thức:

$\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[C(t)\right]dt$.

Áp dụng vào bài ta có nhiệt độ trung bình cần tính là:

$$\frac{1}{8-5}\int_5^8\left[C(t)\right]dt=\frac{1}{8-5}\int_5^8\left[40-\frac{2}{3}(t-10)^2\right]dt=31,33$$

Chọn B.

Bài 42:

Khoảng thời gian để tốc độ lợi nhuận của dự án hai gấp 10 lần tốc độ lợi nhuận dự án đầu tiên:

$$P_2(n)=10P_1(n)\Leftrightarrow 20n+170=10\left(2n^2+5\right)$$

$$\Leftrightarrow 20n^2-20n-120=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=3\\n=-2\end{array}\right.\Rightarrow n=3$$

Lợi nhuận vượt trong khoảng thời gian trên $0\le n\le 3$ sẽ được xác định bằng tích phân sau:

$$I=\int_0^3\left[P_2(n)-P_1(n)\right]dn=\int_0^3\left[(170+20n)-\left(2n^2+5\right)\right]dn$$

$$=\int_0^3\left(165+20n-2n^2\right)dn=\left(165n+10n^2-\frac{2}{3}n^3\right)\Big|_0^3=567.$$

Chọn C.

Bài 43:

Ta nhắc lại đơn vị "pm" là đơn vị đo pico-metre, hay $10^{-12}\,(metre)$.

Ta nêu ra các đại lượng:

$$\begin{cases}a=1\times10^{-12}m\\b=4\times10^{-12}m\\k=9\times10^{9}\\q_1=q_2=1.6\times10^{-19}C\end{cases}$$

Ghi chú của em

Lực tương tác giữa hai điện tích là $F(x)=k\frac{q_1q_2}{x^2}$ với x là khoảng cách giữa hai điện tích.

Vậy ta được công $A=\int_a^b \frac{k.q_1q_2}{x^2}dx.$

Thay vào ta có:

$$A=\int_{1\times10^{-12}}^{4\times10^{-12}} \frac{(9.10^9)(-1.6\times10^{-19})^2}{x^2}dx=(2{,}304\times10^{-28})\left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_{1.10^{-12}}^{4.10^{-12}}$$

$=1{,}728.10^{-16}\,(J).$

Chọn B.

Bài 44:

Ta có công thức:

Nhiệt độ trung bình là:

$\frac{1}{b-a}.\int_a^b T(t)dt$ với a = -12; b = 12.

Chọn C.

Bài 45:

Thời gian sản xuất để tổng sản lượng lúa của huyện V đang ở vụ Hè-Thu chỉ bằng 75% so với chỉ tiêu của vụ Đông-Xuân:

$$T_H(x)=75\%T_D(x)\Leftrightarrow 175x^2+275=0{,}75(100x^2+400x+900)$$

$$\Leftrightarrow 100x^2-300x-400=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=-1\end{array}\right.\Rightarrow x=4\ \textit{tháng}$$

Sản lượng thực tế trong thời gian sản xuất $1\le x\le 4$ của 2 vụ mùa sẽ được xác định bằng tích phân sau:

$$J=\int_1^4\left[T_D(x)-T_H(x)\right]dx=\int_1^4\left[(100x^2+400x+900)-(175x^2+275)\right]dx$$

$$=\int_1^4(625+400x-75x^2)dx=(625x+200x^2-25x^3)\Big|_1^4=3300 \text{ tấn.}$$

Chọn D.

Bài 46:

Số con vi khuẩn sau 15 ngày bị nhiễm bệnh là:

$2550+\int_0^{15}\frac{4000}{2m+3}dm=$ 7345,8 (con) $\Rightarrow$ không cứu được.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 47.

Ta có $K(t)=\int 100(t^3+t^2)dt=25t^4+\frac{100}{3}t^3+C$, lúc bắt đầu dĩ nhiên lợi nhuận bằng 0 nên $K(0)=0\Rightarrow C=0$ do đó:

$$K(t)=\int 100(t^3+t^2)dt=25t^4+\frac{100}{3}t^3.$$

Lợi nhuận mà công ty A thu về kể từ khi bắt đầu đến năm thứ 10 là $K(10)=283333$ triệu.

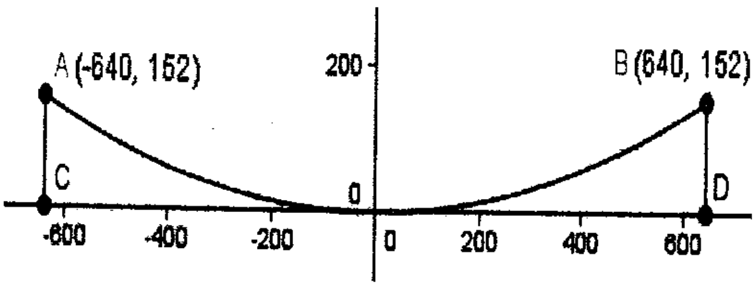
Chọn C.

Bài 48.

Đầu tiên ta cần mô hình đường cong này. Nghĩa là ta tìm phương trình đường cong giống với hình cáp treo. Ta đặt gốc tọa độ ngay điểm thấp nhất của đường cong dây cáp.

Đường cong yêu cầu (tương đối) đi qua các điểm $(-640;152),(0;0),(640;152)$ nên có phương trình là:

$y=1280\left(\frac{e^{\frac{x}{1326}}+e^{\frac{-x}{1326}}}{2}-1\right)$. Ta xem đồ thị minh họa sau:



Đạo hàm hàm số trên ta được:

$$y'=\frac{640}{663}\left(\frac{e^{\frac{x}{1326}}+e^{\frac{-x}{1326}}}{2}\right)$$

Sử dụng công thức tính đường cong, bắt đầu từ điểm $x=-640$ đến điểm $x=640$ ta có:

$$\int_{-640}^{640}\sqrt{1+\left(\frac{640\left(e^{\frac{x}{1326}}+e^{\frac{-x}{1326}}\right)^2}{2\times 663}\right)}dx\approx 1327.$$

Vậy độ dài sợi dây cáp chính ở nhịp trung tâm dài: $1327(m)$.

Chọn D.

Bài 49:

Lực F lúc này được xác định bởi: $F(x)=kx \Leftrightarrow F(x)=16.$

Độ dài lò xo bị nén là: $1m-0,65m=0,35m.$

Vậy công sinh ra là: $A=\int_0^{0,35} 16xdx=0,98$ J.

Chọn C.

Bài 50:

Ta có:

$$A=\int_0^T u.idt=\int_0^T U_0I_0\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)sin\frac{2\pi}{T}tdt$$

$$=U_0I_0\int_0^T\frac{1}{2}\left(cos\,\varphi-cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)dt$$

$$=\frac{U_0I_0}{2}\int_0^T\left(cos\,\varphi-cos\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)dt$$

$$=\frac{U_0I_0}{2}\left(t.cos\,\varphi-\frac{T}{4\pi}sin\left(\frac{4\pi}{T}t+\varphi\right)\right)\Bigg|_0^T$$

$$=\frac{U_0I_0}{2}T.cos\,\varphi.$$

Chọn A.

Bài 51:

Như vậy để tính nhiệt lượng Q tỏa ra thì ta phải tính tích phân cận từ $t=0$ đến $t=T.$

Ta có:

$$Q=\int_0^T R.i^2dt=\int_0^T RI_0^2\,sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)dt=RI_0^2\int_0^T\frac{1-cos\,2\left(\frac{2\pi}{T}+\varphi\right)}{2}dt$$

$$=\frac{RI_0^2}{2}\left(t-\frac{T}{4\pi}sin\,2\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)\right)\Bigg|_0^T=\frac{RI_0^2}{2}T.$$

Chọn C.

Bài 52:

Vì 6 giờ sáng và 4 giờ chiều lần lượt tương ứng với $t=6$ và $t=4.$ Như vậy, nhiệt độ trung bình của thành phố giữa 6 giờ sáng và 4 giờ chiều chính là giá trị trung bình của hàm nhiệt độ $C(t)$ với $6\le t\le 16,$ theo công thức tính giá trị trung bình ta có:

$$t_{tb}=\frac{1}{16-6}\int_6^{16}\left[3-\frac{2}{3}(t-13)^2\right]dt=\frac{1}{10}\left[3t-\frac{2}{9}(t-13)^3\right]\Bigg|_6^{16}$$

$$=\frac{1}{10}\left[3\times16-\frac{2}{9}(16-13)^3\right]-\frac{1}{10}\left[3\times6-\frac{2}{9}(6-13)^3\right]=-5.22.$$

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Vậy nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian đã cho là:

$-5.22^{o}C, \left(22.6^{0}F\right).$

Chọn A.

Bài 53:

Lợi nhuận mà máy sinh ra sau t năm hoạt động là:

$P(t) = R(t) - C(t)$

Tốc độ lợi nhuận sau t năm là:

$P'(t) = R'(t) - C'(t) = \left(5000 - 20t^2\right) - \left(2000 + 10t^2\right) = 3000 - 30t^2.$

Việc máy không còn sinh lãi nữa khi:

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow 3000 - 30t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -10 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy sau 10 năm thì việc sinh lợi của máy không còn nữa.

Như vậy, tiền lãi thực trên khoảng thời gian $0 \le t \le 10$ là $P(10) - P(0)$ được tính bằng tích phân:

$$P(10) - P(0) = \int_0^{10} P'(t)dt = \int_0^{10} \left(3000 - 30t^2\right)dt = \left(3000t - 10t^3\right)\Big|_0^{10} = 20000 \text{ đô.}$$

Chọn C.

Bài 54:

Gọi $S(t)$ là tổng chi phí lưu trữ (đô la) sau t tháng. Vì gạo được bán với tốc độ không đổi 2000kg/tháng, số kg gạo được lưu trữ sau t tháng là $10000 - 2000t.$ Vì chi phí lưu trữ là là 1 cent/kg/tháng, nên tốc độ thay đổi chi phí theo thời gian:

$S'(t) = $ (chi phí hằng tháng/kg).(số kg) $= 0.01(10000 - 2000t)..$

Do đó, $S(t)$ là một nguyên hàm của:

$0.01(10000 - 2000t) = 100 - 20t,$ tức là:

$S(t) = \int S'(t)dt = \int (100 - 20t)dt = 100t - 10t^2 + C.$

Ta lại có, thời điểm hàng gửi tới (khi $t = 0$) thì không có chi phí lưu trữ, vì vậy: $0 = 100 \times 0 - 10 \times 0^2 \Rightarrow C = 0.$

Vậy: $S(t) = 100t - 10t^2.$

Do đó tổng chi phí trong vòng 5 tháng tới là:

$S(5) = 100 \times 5 - 10 \times 5^2 = 25$ đô la.

Chọn D.

Ghi chú của em

Bài 55:

Gọi $P(q)$ là tổng lợi nhuận của sản phẩm khi sản xuất q sản phẩm.

Ta có: Tốc độ thay đổi doanh thu là:

$P'(q) = -4q + 4000 - (2q - 1200) = -6q + 5200.$

$P(q) = \int P'(q)dq = \int(-6q + 5200)dq = -3q^2 + 5200q + C.$

Ta lại có, lợi nhuận khi sản xuất ra 5 đơn vị sản phẩm là $50000USD$, nên:

$P(5) = 50000 \Rightarrow C = 24075$

Vậy ta có hàm tổng lợi nhuận của công ty là:

$P(q) = -3q^2 + 5200q + 24075 \Rightarrow P'(x) = -6q + 5200 = 0 \Rightarrow q = 886{,}7$

$P''(x) = -6 < 0.$

Vậy để lợi nhuận công ty lớn nhất thì công ty phải sản xuất 866,7 (đvsp) và khi đó lợi nhuận lớn nhất là $P(866{,}7)$.

Chọn A.

Bài 56:

Bài toán đang xét vật chuyển động dưới tác dụng của một lực, đó là F_c.

+) Chọn chiều dương là chiều chuyển đông.

+) Theo định luật II Niu-Tơn:

$-F_c = ma$

$-kv = m\dfrac{dv}{dt}$

Bây giờ ta đưa vi phân dt và dv về hai vế, đồng thời biến v về cùng với vi phân dv.

$dt = -\dfrac{m}{k}\dfrac{dv}{v}$

Do ta xét chuyển động của vật từ thời điểm ban đầu $t = 0$ đến thời điểm t nào đo thì vận tốc v_0 cũng đến giá trị v nào đó, tích phân hai vế theo các cận này:

$\int_0^1 dt = -\int_{v_0}^{v}\dfrac{mdv}{k.v}$

$t = -\dfrac{m}{k}(ln v - ln v_0) = \dfrac{m}{k}ln\left(\dfrac{v_0}{v}\right)$

$\Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$

Chọn B.

Bài 57:

Ta có hằng số lò xo (theo đơn vị cm): $F = kx$

Vậy $1200 = k(2) \Rightarrow k = 600(N/cm).$

Vậy trong trường hợp này, ta có: $F = 600x.$

Vậy công sinh ra xác định bởi:

$$\text{Công} = \int_2^4 600x\,dx = 300x^2\Big|_2^4 = 3600 \text{ N.cm}.$$

Chọn A.

Ta có: $\int \frac{1000}{2t+3}dt = 500\ln(2t+3) + C, C \in \mathbb{R}$.

Vì lúc đầu người này có 2550 con vi khuẩn HP trong dạ dày nên:

$500\ln(2.0+3) + C = 2550 \Leftrightarrow C \approx 2000,7.$

Số lượng vi khuẩn HP sau 15 ngày:

$$\int_0^{15} \left(500\ln(2t+3) + 200,7\right)dt \approx 50532,72 > 50000.$$

Số lượng vi khuẩn HP vượt:

$50532,72 - 50000 = 532,72 \approx 533$ (con).

Kết luận: Người này đang ở tình trạng nguy hiểm cần nhập viện gấp để điều trị.

Chọn D.

Ta có: $t = \int \frac{1}{20-v}dv$

Đặt $u = 20 - v \Rightarrow du = -dv$.

Vậy:

$$t = \int \frac{1}{20-v}dv = -\int \frac{1}{u}du = -ln(|u|) + K = -ln(|20-v|) + K.$$

Với $t = 0 \Rightarrow v = 0$.

Vậy $0 = -ln(20) + K \Rightarrow K = ln20.$

Từ đó ta được:

$$t = ln20 - ln(20-v) \Rightarrow t = ln\left(\frac{20}{20-v}\right) \Rightarrow e^t = \frac{20}{20-v} \Rightarrow e^{-t} = \frac{20-v}{20}$$

$$\Leftrightarrow 20e^{-t} = 20 - v \Leftrightarrow v = 20 - 20e^{-t} \Leftrightarrow v = 20\left(1 - e^{-t}\right).$$

Chọn A.

Ta có: $p = 3\int \frac{sin(\pi t)}{2 + cos(\pi t)}dt$.

Đặt $u = 2 + cos\,\pi t \Rightarrow du = -\pi\, sin\,\pi t$.

Ghi chú của em

Vậy ta có:

$$p=3\int\frac{sin(\pi t)}{2+cos(\pi t)}dt=-\frac{3}{\pi}\int\frac{-\pi sin\pi t}{2+cos(\pi t)}dt=-\frac{3}{\pi(ln(2+cos\pi t))}+K.$$

Vậy $p=-\frac{3}{\pi}(ln(2+cos\pi t))+K$.

Chọn C.

Bài 61:

Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên là:

$$S=\int_0^4\left|1,2+\frac{t^2+4}{t+3}\right|dt=11,81m.$$

Chọn B.

Bài 62:

Quãng đường vật đi được trong giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

$$S=\int_4^{10}(3t^2+5)dt=966m.$$

Chọn D.

Ghi chú của em

CHƯƠNG 4.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO SỐ PHỨC

- Các khái niệm cơ bản nhất

Chủ đề 1. Các bài toán tính toán số phức.

- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 2. Phương trình số phức

- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 3. Các bài toán liên quan đến biểu diễn điểm, tập hợp điểm

- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

CHƯƠNG 04 BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO SỐ PHỨC

Trong chương trình phổ thông, các bài toán số phức thường khá đơn giản, không quá khó. Tuy nhiên cũng có những bài toán vận dụng và vận dụng cao mà chúng ta nếu không nghiên cứu kĩ lưỡng, lần đầu tiên gặp sẽ rất khó giải quyết. Trước khi đến với lớp bài toán này chúng ta cùng nhắc lại các khái niệm căn bản nhất.

Các khái niệm cơ bản nhất

Định nghĩa.

- Một biểu thức dạng $a+bi$ với $a,b\in R$, $i^2=-1$ được gọi là một số phức.
- Đối với số phức $z=a+bi$, ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z.
- Tập hợp số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

• **Hai số phức bằng nhau.**

- Hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.
- Công thức: $a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

Biểu diễn hình học của số phức.

- Điểm $M(a;b)$ trong hệ tọa độ vuông góc Oxy được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi$.

Môđun của số phức.

- Cho số phức $z=a+bi$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô đun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.
- Công thức $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

• **Số phức liên hợp.**

- Cho số phức $z=a+bi$, số phức dạng $\overline{z}=a-bi$ được gọi là số phức liên hợp của z.

Phép cộng, phép trừ, phép nhân phép chia.

- Cho số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di$, ta có $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
- Cho số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di$, ta có $z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
- Cho số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di$, ta có $z_1.z_2=(a+bi).(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.
- Cho số phức $z_1=a+bi, z_2=c+di$, (với $z_2\neq 0$) ta có:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i.$$

Phương trình bậc hai với hệ số thực.

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với $a,b,c\in R$ và $a\neq 0$. Phương trình này có biệt thức $\Delta=b^2-4ac$, nếu:

- $\Delta = 0$ phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta < 0$ phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

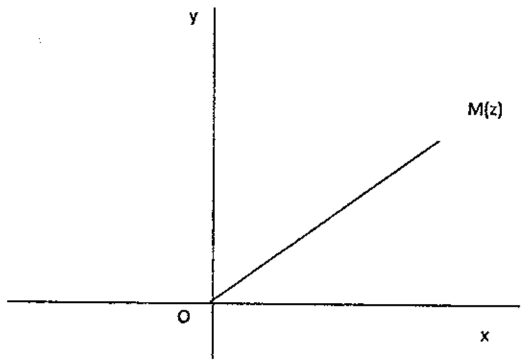
- **Acgumen của số phức** $z \neq 0$

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là acgumen của z.

CHÚ Ý

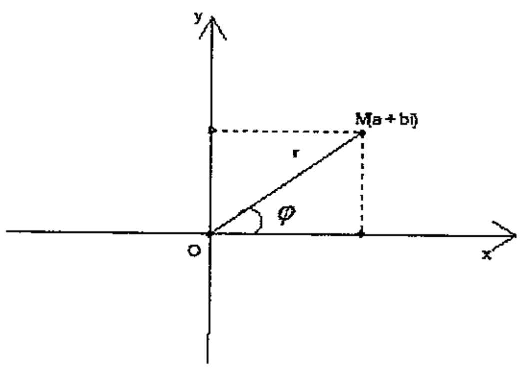
Nếu φ là một acgumen của z (hình dưới) thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi, k \in Z$. (người ta thường nói: Acgumen của $z \neq 0$ xác định sai khác $k2\pi, k \in Z$).



- **Dạng lượng giác của số phức**

Xét số phức $z = a + bi \neq 0 \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$. Kí hiệu r là mô đun của z và φ của một acgumen của z (hình dưới) thì dễ thấy rằng: $a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi$.

Vậy $z = a + bi \neq 0$ có thể viết dưới dạng $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.



ĐỊNH NGHĨA

Dạng $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, trong đó $r > 0$, được gọi là **dạng lượng giác của số phức** $z \neq 0$.

Dạng $z = a + bi \neq 0 \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$, được gọi là **dạng đại số của số phức** z.

Nhận xét. Để tìm dạng lượng giác $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ của số phức $z = a + bi \neq 0\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ khác 0 cho trước ta cần:

1. Tìm r: đó là mô đun của z, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

2. Tìm φ: đó là một acgumen của z; φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

CHÚ Ý

1. $|Z| = 1$ khi và chỉ khi $Z = \cos\varphi + i\sin\varphi; \left(\varphi \in \mathbb{R}\right)$.

2. Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tùy ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

3. Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

- **Nhân và chia số phức lượng giác**

Ta đã biết công thức nhân và chia số phức dưới dạng đại số. Sau đây là định lí nêu lên công thức nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác; chúng giúp cho các quy tắc tính toán đơn giản về nhân và chia số phức.

ĐỊNH LÍ

Nếu $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$

$z' = r'\left(\cos\varphi' + i\sin\varphi'\right)\left(r \geq 0, r' \geq 0\right)$.

Thì $zz' = rr'\left[\cos\left(\varphi + \varphi'\right) + i\sin\left(\varphi + \varphi'\right)\right]$.

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\left[\cos\left(\varphi' - \varphi\right) + i\sin\left(\varphi' - \varphi\right)\right]; \left(khi\ r > 0\right).$$

Nói một cách khác, để nhân các số phức dưới dạng lượng giác, ta lấy tích các mô đun và tổng acgumen; để chia các số phức dưới dạng lượng giác ta lấy thương các mô đun và hiệu các acgumen.

Chứng minh

$$\begin{aligned} zz' &= \left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]\left[r'\left(\cos\varphi' + i\sin\varphi'\right)\right] \\ &= rr'\left[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i\left(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi'\right)\right] \\ &= rr'\left[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\right]. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right]$. Theo công thức nhân số phức,
Ta có

$$\frac{z'}{z} = z'\frac{1}{z} = \frac{r'}{r}\left[\cos\left(\varphi' - \varphi\right) + i\sin\left(\varphi' - \varphi\right)\right].$$

- **Công thức Moa-vrơ (Moivre)**

Từ công thức nhân số phức dưới dạng lượng giác, bằng quy nạp toán học dễ dàng suy ra rằng với mọi số nguyên dương n.

$$\boxed{\left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)}$$

Và khi $r=1,$ ta có

$$\boxed{\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.}$$

Cả hai công thức đó đều được gọi là công thức Moa-vrơ.

- **Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác**

Từ công thức Moa-vrơ, dễ thấy số phức $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), r > 0$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ và $-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi)\right)$.

Để nắm được các kiến thức trên học sinh cần phải luyện tập khá nhiều bài tập, xin chú ý để làm các bài tập ngay sau đây quý bạn đọc cần phải khá vững phần căn bản của số phức.

CÁC BÀI TÍNH TOÁN SỐ PHỨC.

Bài 1: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1;\ |z_1+z_2|=\sqrt{3}$. Tính $|z_1-z_2|$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Nhận xét: Bài này nhìn vào có vẻ khá khó, nhưng các em cần phải bình tĩnh, chỉ cần gọi $z_1=a_1+b_1i;\ z_2=a_2+b_2i\ (a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R})$ sau đó viết hết các giả thiết để bài cho:

$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|=1\\|z_1+z_2|=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1\\(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=3\end{cases}$$

Và viết cái cần tính ra $|z_1-z_2|^2=(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2$. Hãy quan sát cái cần tính và thấy rằng chỉ cần bình phương lên là có thể dùng được giả thiết.

Bài 2: Tính $z=i+i^2+i^3+...+i^{2008}$ có kết quả:

A. 0 **B.** 1 **C.** $-i$ **D.** i

Bài 3: Tìm số phức z có $|z|=1$ và $|z+i|_{max}$:

A. 1 **B.** -1 **C.** i **D.** $-i$

Bài 4: Trong các số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm số phức z để $|1+z|+3|1-z|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i, z=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$ **B.** $z=-\frac{3}{5}i, z=\frac{3}{5}i.$

C. $z=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i, z=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$ **D.** $z=-\frac{3}{5}i, z=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$

Bài 5: Cho z là số phức có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w}$. Mô đun của số phức w là:

A. 2015 **B.** 1 **C.** 2017 **D.** 0

Bài 6: Số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{Z}(1+i)-3+2i\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}$ là:

A. $z=1+3i$ **B.** $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i$ **C.** $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ **D.** $z=\frac{3}{4}+\frac{15}{4}i$

Bài 7: Số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Bài 8: Tìm phần thực của số phức $z=(1+i)^n$, $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình:

$\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3$

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

[redacted] Cho số phức z thỏa mãn: $|z-3+4i|=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. 1 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 8

[redacted] Trong các số phức thỏa mãn điền kiện $|z-4i-2|=|2i-z|$, mô đun nhỏ nhất của số phức z bằng?

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 1 **D.** $3\sqrt{2}$.

[redacted] Tìm số phức Z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{Z}(1+i)-3+2i\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

A. $z=\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4}i$ **B.** $z=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$ **C.** $z=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{15}{4}i$ **D.** $z=\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}i$

[redacted] **(A+A1 2012)** Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{5(\overline{z}+i)}{z+1}=2-i$ (1)

Tính mô đun của số phức $\omega=1+z+z^2$.

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{15}$ **C.** $\sqrt{17}$ **D.** $\sqrt{19}$

[redacted] Cho hai số phức phân biệt z_1; z_2 thỏa mãn điều kiện $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số ảo. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $|z_1|=1;\ |z_2|=1$ **B.** $z_1=\overline{z_2}$ **C.** $|z_1|=|z_2|$ **D.** $z_1=-z_2$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Ta có: $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) = 1 \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1.$$

Vậy: $|z_1 - z_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1$.

Chọn A.

Bài 2:

Ta có $iz = i^2 + i^3 + ... + i^{2008} + i^{2009}$ và $z = i + i^2 + i^3 + ... + i^{2008}$.

Suy ra $z(i-1) = i^{2009} - i = i\left(i^{2008} - 1\right) = 0 \Rightarrow z = 0$

Chọn A.

Bài 3:

Đặt $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|z + i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$

Khi đó ta có:

$|z| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |b| \le 1$; $|z + i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2b + 1} = \sqrt{2b + 2} \le 2$

Do đó, giá trị lớn nhất đạt được bằng 2 khi $a = 0$; $b = 1$; $z = i$.

Chọn C.

Bài 4:

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Vì $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Khi đó:

$$|1+z| + 3|1-z| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(x+1)^2 + 1 - x^2} + 3\sqrt{(x-1)^2 + 1 - x^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x}\right)$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x}\right)$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có:

$$f'(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{3}{2\sqrt{1-x}}\right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

Ghi chú của em

Ta có $f(-1)=6; f\left(-\frac{4}{5}\right)=2\sqrt{10}$

Vậy $f_{\max}=f\left(-\frac{4}{5}\right)=2\sqrt{10}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{4}{5}\\ y^2=1-x^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{4}{5}, y=-\frac{3}{5}\\ x=\frac{-4}{5}, y=\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Vậy $z=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i,\ z=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$

Chọn A.

Bài 5:

Từ $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w}$ ta suy ra $z^2+w^2+zw=0$

$\Rightarrow\left(z+\frac{w}{2}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2\Rightarrow z=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$

Lấy mô đun hai vế ta có $|z|=|w|=2017$.

Chọn C.

Bài 6:

+ Gọi $z=x+yi.$

Từ giả thiết ta có: $(x+y-3)^2+(x-y+2)^2=\frac{13}{4}.$

+ Đồng thời $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ lớn nhất. Kiểm tra các đáp án và so sánh.

Chọn D.

Bài 7:

Ta có $1-\left|\frac{i}{z}\right|\le\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\left|\frac{i}{z}\right|\Leftrightarrow 1-\frac{1}{|z|}\le\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{|z|}.$

Mặt khác $|z|\ge 2\Leftrightarrow\frac{1}{|z|}\le\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{2}\le P\le\frac{3}{2}.$

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2},\frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Chọn B.

Bài 8:

Điều kiện $n>3,\ n\in\mathbb{N}$

Phương trình:

$\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3\Leftrightarrow\log_4(n-3)(n+9)=3\Leftrightarrow n=7$ (so đk)

$z=(1+i)^7=(1+i).\left[(1+i)^2\right]^3=(1+i)(2i)^3=8-8i$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Chọn D.

Ghi chú của em

Giả sử $z = a + bi$, ta có:

$|a + bi - 3 + 4i| = 4 \Rightarrow (a-3)^2 + (b+4)^2 = 16$

Đặt $\begin{cases} a - 3 = 4\sin\varphi \\ b + 4 = 4\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + 4\sin\varphi \\ b = 4\cos\varphi - 4 \end{cases}$

$\Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16\sin^2\varphi + 24\sin\varphi + 16\cos^2\varphi + 16 - 32\cos\varphi$

$= 41 + 24\sin\varphi - 32\cos\varphi$

$= 41 + 40(\frac{3}{5}\sin\varphi - \frac{4}{5}\cos\varphi)$

Đặt $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 = 41 + 40\sin(\varphi - \alpha) \ge 1.$

Dấu "=" xảy ra khi $\varphi - \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi$.

Vậy $\min|z| = 1$.

Chọn A.

Giả sử số phức $z = x + yi$

Theo đề $|z - 4i - 2| = |2i - z|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$

$\Leftrightarrow x + y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow y = 4 - x \quad (1)$

Mà $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4-x)^2}$ (thay (1) vào)

$= \sqrt{2(x-2)^2 + 8} \ge 2\sqrt{2}$.

Chọn A.

Gọi $z = x + yi \ (x, y \in R) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$

$|\overline{z}(1+i) - 3 + 2i| = \frac{\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 5y + \frac{39}{8} = 0$.

(Thay các số phức z vào và mô đun lớn nhất thì ta sẽ chọn).

So với các đáp án trên ta chọn đáp án A.

Chọn A.

Ghi chú của em

[illegible]

Giả sử z=a+bi

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5(a-bi+i)}{a+bi+1}=2-i$$

$$\Leftrightarrow 5a-5i(b-1)=2a+2bi+2-ai-bi^2-i$$

$$\Leftrightarrow 3a-2-b-i(5b-5-2b+a+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2-b=0 \\ 3b+a-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow z=1+i$$

$$\omega=1+1+i+1+2i-1=2+3i \Rightarrow |\omega|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

Chọn A.

[illegible]

$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow z_1-z_2 \neq 0$.

Thì $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số ảo $\Leftrightarrow \dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}+\overline{\left(\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)}=0$.

$$\Leftrightarrow \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}+\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{z_1-z_2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z_1+z_2\right)\overline{\left(z_1-z_2\right)}+\left(z_1-z_2\right)\overline{\left(z_1+z_2\right)}=0.$$

$$\Leftrightarrow 2\left(z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_2}\right)=0 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_2}=0 \Leftrightarrow |z_1|-|z_2|=0.$$

Chọn C.

PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC.

Bài 1: Tìm các số thực a,b,c sao cho 2 phương trình $az^2+bz+c=0$, $cz^2+bz+a+16-16i=0$ có nghiệm chung là $z=1+2i$

A. $(a,b,c)=(1;-2;5)$. **B.** $(a;b;c)=(1,2,5)$.

C. $(a,b,c)=(-1;-2;5)$. **D.** $(a;b;c)=(1,-2,-5)$.

Bài 2: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+2=0$ trên tập số phức. Tìm mođun của số phức: $w=(z_1-1)^{2015}+(z_2-1)^{2016}$.

A. $|w|=\sqrt{5}$ **B.** $|w|=\sqrt{2}$ **C.** $|w|=1$ **D.** $|w|=\sqrt{3}$

Bài 3: Tìm các số thực b,c để phương trình (với ẩn z) $z^2+bz+c=0$ nhận $z=1+i$ là một nghiệm.

A. $b=-2;c=2$ **B.** $b=2;c=2$ **C.** $b=-2;c=-2$ **D.** $b=-1;c=1$

Bài 4: Tìm các số thực a,b,c để phương trình (với ẩn z) $z^3+az^2+bz+c=0$ nhận $z=1+i$ làm nghiệm và cũng nhận $z=2$ làm nghiệm.

A. $a=-4;\ b=6;\ c=-4$ **B.** $a=-4;\ b=5;\ c=-4$

C. $a=-3;\ b=4;\ c=-2$ **D.** $a=-1;\ b=0;\ c=2$

Bài 5: Phương trình $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4=1$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Bài 6: Số nghiệm phức của phương trình $\bar{z}+\dfrac{25}{z}=8-6i$ là?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Bài 7: Gọi $z_1;z_2;z_3;z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+(4+m)z^2+4m=0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$.

A. $m=-1$ **B.** $m=\pm 2$ **C.** $m=\pm 3$ **D.** $m=\pm 1$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Theo giả thiết phương trình $az^2+bz+c=0$ có nghiệm $z=1+2i$ khi

$$a(1+2i)^2+b(1+2i)+c=0 \Leftrightarrow -3a+b+c+(4a+2b)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b+c=0 \\ 4a+2b=0 \end{cases} (1)$$

Tương tự phương trình $cz^2+bz+a+16-16i=0$ có nghiệm $z=1+2i$ khi

$$c(1+2i)^2+b(1+2i)+a+16-16i=0 \Leftrightarrow c(-3+4i)+b+2bi+a+16-16i=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-3c+16)+2(b+2c-8)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-3c+16=0 \\ b+2c-8=0 \end{cases} (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(a, b, c) = (1; -2; 5)$.

Chọn A.

Bài 2:

Phương trình $z^2-2z+2=0$ có $\Delta'=1-2=-1=i^2$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1=1-i \\ z_2=1+i \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{array}\right.$

Thay $\left[\begin{array}{l} z_1=1-i \\ z_2=1+i \end{array}\right.$ vào ω ta được:

$$w=(-i)^{2015}+i^{2016}=-\left(i^2\right)^{1007}.i+\left(i^2\right)^{1013}=-1+i.$$

Thay $\left[\begin{array}{l} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{array}\right.$ vào $w=i^{2015}+(-i)^{2016}=(i^2)^{1002}.i+(i^2)^{1003}=-1+i$.

Vậy $|w|=\sqrt{2}$

Chọn B.

Bài 3:

Nếu $z=1+i$ là nghiệm thì:

$$(1+i)^2+b(1+i)+c=0 \Leftrightarrow b+c+(b+2)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

Một phương trình bậc hai với hệ số thực, nếu có một nghiệm phức z thì cũng nhận $\bar{z}$ làm nghiệm. Vậy nếu $z=1+i$ là một nghiệm thì $\bar{z}=1-i$ cũng là nghiệm. Theo định lý viet:

Ghi chú của em

$$\begin{cases}(1+i)+(1-i)=-b \Rightarrow b=-2\\(1+i)(1-i)=2=c\end{cases}$$

Chọn A.

$z=1+i$ là nghiệm thì $(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c=0$

$z=2$ là nghiệm thì $8+4a+2b+c=0$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}b+c-2=0 & (1)\\2a+b+2=0 & (2)\\4a+2b+c+8=0 & (3)\end{cases}$

Từ (1) suy ra $c=2-b$

Từ (2) suy ra $b=-2-2a \Rightarrow c=2-(-2-2a)=4+2a$

Thay vào (3) ta có: $4a+2(-2-2a)+4+2a+8=0 \Rightarrow a=-4$

Với $a=-4 \Rightarrow b=6;\ c=-4$.

Chọn A.

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2=1,(1)\\\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2=-1,(2)\end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{z+i}{z-i}=1\\\frac{z+i}{z-i}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z+i=z-i\\z+i=-z+i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}i=-i\\z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow z=0$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{z+i}{z-i}=i\\\frac{z+i}{z-i}=-i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z+i=iz+1\\z+i=-iz-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1\\z=-1\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm phương trình là: $z=0,\ z=1,\ z=-1.$

Chọn C.

Giả sử $z=a+bi$ với ; a,b $\in$ R và a,b không đồng thời bằng 0.

Khi đó $\bar{z}=a-bi$; $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Khi đó phương trình $\bar{z}+\frac{25}{z}=8-6i \Leftrightarrow a-bi+\frac{25(a-bi)}{a^2+b^2}=8-6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2+b^2+25)=8(a^2+b^2) & (1) \\ b(a^2+b^2+25)=6(a^2+b^2) & (2) \end{cases}.$$

Lấy (1) chia (2) theo vế ta có $b=\frac{3}{4}a$, thế vào (1).

Ta có $a=0$ hoặc $a=4$.

Với $a=0 \Rightarrow b=0$ (Loại)

Với $a=4 \Rightarrow b=3$. Ta có số phức $z=4+3i$.

Chọn B.

Bài 7.

$$z^4+(4+m)z^2+4m=0 \Leftrightarrow (z^2+4)(z^2+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_{1,2}=\pm 2i \\ z_{3,4}=\pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$$

Nếu $m\le 0$ hoặc $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_{1;2}=\pm 2i \\ z_{3;4}=\pm i\sqrt{m} \end{array}\right.$ nếu $m>0$

Khi đó $\begin{cases} 6=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{-m} \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$

hoặc $\begin{cases} 6=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{m} \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

Kết hợp lại thì $m=\pm 1$ thoả mãn bài toán.

Chọn D.

Ghi chú của em

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU DIỄN ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM.

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức *z* thỏa mãn điều kiện $\log_2\left|z-(3-4i)\right|=1$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.
B. Đường tròn bán kính 1.
C. Đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính 2.
D. Đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính 3.

Bài 2: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức *z* trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện: $|z|^2-5z-5\overline{z}=0$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.
B. Đường tròn bán kính 1
C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5
D. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 3.

Bài 3: Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức *z* thỏa mãn điều kiện $\left|zi-(2+i)\right|=2$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.
B. Đường tròn bán kính 1
C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5
D. Đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính 2.

Bài 4: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1|=|z-i|$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.
B. Đường tròn bán kính 1
C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5
D. Đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính 2.

Bài 5: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2+z|<|2-z|$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.

B. Đường tròn bán kính 1

C. Nửa trái của mặt phẳng tọa độ không kể trục Oy.

D. Đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính 2.

Bài 6: Trong mặt phẳng *Oxy*, tìm tọa độ điểm *M* biểu diễn số phức *z* thỏa mãn $z(2i-1)-i+2=0$.

A. $M\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$
B. $M\left(\frac{4}{5};\frac{3}{7}\right)$
C. $M\left(\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right)$
D. $M\left(\frac{4}{9};\frac{3}{5}\right)$

Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, tìm tập hợp điểm *M* biểu diễn số phức *z* thỏa mãn điều kiện $|z+1-i|=2$.

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=4$
C. $(x+1)^2+(y-1)^2=8$
B. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$
D. $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

Bài 8: Cho số phức z thoả mãn điều kiện $|z-2+3i|=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

A. $\sqrt{13}-3$ B. 2 C. $\sqrt{13}-2$ D. 2

Bài 9: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u=\dfrac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm (0;1) và (-2;-3).

B. Đường tròn tâm $I(-1;-3)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm (0;1) và (-2;-3).

C. Đường tròn tâm $I(-1;-4)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm (0;1) và (-2;-3).

D. Đường tròn tâm $I(-2;-1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm (0;1) và (-2;-3).

Bài 10: Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của 3 số phức $1+2i$, $(1+i)(1+2i)$, $\dfrac{2+6i}{3-i}$. Diện tích của tam giác ABC bằng :

A. $\dfrac{1}{4}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 11: Trong mặt phẳng Oxy có $A(1;7)$ và $B(-5;5)$ lần lượt biểu diễn hai số phức z_1 và z_2. C biểu diễn số phức z_1+z_2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. C có tọa độ $(-4;12)$

B. $OACB$ là hình thoi

C. $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức z_1-z_2

D. $\overrightarrow{CB}$ biểu diễn số phức $-z_1$

Bài 12: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=1$. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là:

A. Đường tròn $x^2+(y+2)^2=5$

B. Đường tròn $x^2+y^2-2x-4y=0$

C. Đường tròn $x^2+y^2-2y=0$

D. Đường tròn $x^2+y^2+4x=0$

Bài 13: Cho A là điểm biểu diễn của các số phức: $z=1-2i$; M_1, M_2 lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1 và z_2. Điều kiện để ΔAM_1M_2 cân tại A là:

A. $|z_1|=|z_2|$ B. $|z_1-1+2i|=|z_2-1+zi|$

C. $|z_1-z_2|=|1-2i|$ D. $|z_1-1+2i|=|z_1-z_2|$

Bài 14: Biết điểm $M(1;-2)$ biểu diễn số phức z trong mặt phẳng toạ độ phức. Tính mô đun của số phức $w=iz-z^2$.

A. $\sqrt{26}$. B. $\sqrt{25}$. C. $\sqrt{24}$. D. $\sqrt{23}$.

Bài 15: Trong mặt phẳng phức $A(-4;1), B(1;3), C(-6;0)$ lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $3+\dfrac{4}{3}i$ B. $-3+\dfrac{4}{3}i$ C. $3-\dfrac{4}{3}i$ D. $-3-\dfrac{4}{3}i$

Bài 16: Trong mặt phẳng phức, gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $i, 1+3i, a+5i\,(a\in R)$. Biết tam giác ABC vuông tại B. Tìm tọa độ của C?

A. $C(-3;5)$ **B.** $C(3;5)$ **C.** $C(2;5)$ **D.** $C(-2;5)$

Bài 17: Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $(iz-1)(z+3i)\left(\bar{z}-2+3i\right)=0$ là các điểm nào sau đây?

A. $A(0;-1), B(0;-3), C(2;3)$

B. $A(1;0), B(3;0), C(2;-3)$

C. $A(0;-2), B(0;1), C(-2;3)$

D. $A(2;-2), B(-1;1), C(-1;0)$

Bài 18: Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z biết $|z|=\left|\bar{z}-3+4i\right|$ là:

A. Elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

B. Parabol $y^2=4x$

C. Đường tròn $x^2+y^2-4=0$

D. Đường thẳng $6x+8y-25=0$

Bài 19: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và z':

$z=x+yi$

$z'=\frac{z-1+i}{z-1}$

Tìm tập hợp (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục tung và $M'\neq 0$.

A. Đường tròn tâm $I\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$ ngoọi trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

C. Đường thẳng $y=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

D. Đường thẳng $x=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Bài 20: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và z':

$z=x+yi$

$z'=\frac{z-1+i}{z-1}$

Tìm tập hợp (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục hoành và $M'\neq 0$.

A. Đường tròn tâm $I\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

C. Đường thẳng $y=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

D. Đường thẳng $x=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Bài 21: Tìm quĩ tích các điểm M biểu diễn số phức $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ biết số phức z thỏa mãn: $|z-1|\leq 2$ (1).

A. Hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 16$

B. Hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 9$.

C. Hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 25$.

D. Hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 36$

Bài 22: Trong mặt phẳng phức, gọi N,M,A,B theo thứ tự là điểm biểu diễn các số: $z=x+yi;Z=X+Yi=\frac{z+1}{z-1};1;-1$. Tìm tập hợp điểm M khi N chạy trên đường tròn: $x^2+y^2=1$.

A. Đường tròn tâm $I\left(2+\sqrt{2};0\right)$, bán kính $R=\sqrt{5+4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Trục tung

D. Trục hoành

Bài 23: Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z=x+yi;\ a=10+6i$. Tìm tập hợp E_1 các điểm M sao cho tích $z(z-a)$ là một số thực.

A. Đường tròn tâm $I\left(2+\sqrt{2};0\right)$, bán kính $R=\sqrt{5+4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Là một hyperbol vuông góc $y=\frac{3x}{x-5}, x\neq 5$

D. Là một hyperbol $y=\frac{3x}{x-5}, x\neq 5$

Bài 24: Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z=x+yi;\ a=10+6i$. Tìm tập hợp E_2 các điểm M sao cho tích $z(z-a)$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(2+\sqrt{2};0\right)$, bán kính $R=\sqrt{5+4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Là một hyperbol vuông góc có tâm đối xứng $I(-5;-3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.

D. Là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5;3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.

Bài 25: Tìm tập hợp (T) các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thoả mãn hệ thức: $z+\bar{z}=|z|$

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $x=y\sqrt{3}, x=-y\sqrt{3}$

D. Đường thẳng $y=x\sqrt{3}, y=-x\sqrt{3}$

Bài 26: Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z-2i|=3$ là đường tròn tâm I. Tất cả giá trị m thỏa mãn khoảng cách từ I đến $\Delta: 3x+4y-m=0$ bằng $\frac{1}{5}$ là:

A. $m=-7;m=9$ **B.** $m=8;m=-8$ **C.** $m=7;m=9$ **D.** $m=8;m=9$

Bài 27. Trong mặt phẳng phức , cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $M \neq 0$. Xem số phức $Z = \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung (hay trục hoành), không kể điểm O.

B. Trục tung hay trục hoành

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Bài 28. Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $M \neq 0$. Xem số phức $Z = \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$.

C. Đường thẳng $y = 1$.

D. Đường thẳng $x = 1$.

Bài 29. Cho $Z = \frac{1 - iz}{1 + iz}, z \in \mathbb{C}, z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung ngoại trừ điểm $A(0;1)$.

B. Trục hoành ngoại trừ điểm $A(0;1)$.

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Bài 30. Cho $Z = \frac{1 - iz}{1 + iz}, z \in \mathbb{C}, z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ ngoại trừ điểm $A(0;1)$

B. Đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Bài 31. Tìm trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có môđun bằng 1.

A. Đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$

B. Đường tròn tâm $O(2;2)$, bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Bài 32. Tìm trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có phần thực bằng 1.

A. Đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$

B. Đường tròn tâm $O(2;2)$, bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Bài 33: Tìm trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có phần ảo bằng -1.

A. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $O(2;2)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=-1$

D. Đường thẳng $x=1$

Bài 34: Tìm trong mặt phẳng tập hợp (λ) các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $Z=z+\frac{4}{z}$ là một số thực.

A. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O, bán kính $R=2$

B. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O, bán kính $R=1$

C. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$

D. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc

Bài 35: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z|=2|z-i|$.

A. $x^2+y^2-\frac{8}{3}y+\frac{4}{3}=0$

B. $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

D. $3x^2+4y^2-36=0$

Bài 36: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|1-z|=|z-i|$.

A. Đường thẳng $y=x$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$.

C. Đường thẳng $y=1$.

D. Đường thẳng $x=1$.

Bài 37: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z-a|.|\overline{z}-\overline{a}|=a\overline{a}$.

A. Đường tròn tâm A bán kính $R=AO$.

B. Đường tròn tâm A bán kính $R=2$.

C. Đường thẳng $y=1$.

D. Đường thẳng $x=1$.

Bài 38: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z^2-a^2=\overline{z}^2-\overline{a}^2$.

A. Đường tròn tâm A bán kính $R=AO$.

B. Đường tròn tâm A bán kính $R=2$.

C. Một hyperbol vuông góc.

D. Đường thẳng $x=1$

Bài 39: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho : Ảnh của các số i, z, iz thẳng hàng.

A. Đường tròn $x^2+y^2-x-y=0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$

B. Đường tròn $x^2+y^2-x-y=0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc.

D. Đường thẳng $x=1$

Bài 40: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho : Ảnh của các số z, z^2, z^4 thẳng hàng.

A. Đường tròn $x^2+y^2-x-y=0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $(0;1)$

B. Đường tròn $x^2+y^2-x-y=0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc và trục hoành Ox

D. Đường thẳng $x=-\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Bài 41: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, $M\neq 0$. $Z=X+Yi=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$ và trục hoành Ox, không kể điểm gốc O.

B. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

C. Đường thẳng $y=1$.

D. Đường thẳng $x=-\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox.

Bài 42: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ và $Z=\frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=2x-2$

D. Đường thẳng $x=1$

Bài 43: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ và $Z=\frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};-1\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. Đường thẳng $y=2x-2$

D. Đường thẳng $x=1$

Bài 44: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z+\bar{z}=k|z|$. Với k là một số thực cho trước.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Nửa trục Ox, nửa trục Ox'

D. Nửa trục Ox'

Bài 45: Cho hai số phức: $p=a+bi;\ q=c+di$

Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho số $(z-p)(z-q)$ là số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$.

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x=\frac{a+c}{2};\ y=\frac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Bài 46: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có môđun $|z|\le 1$.

A. Hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$.

C. Một hyperbol vuông gốc có tiệm cận là $x=\frac{a+c}{2};\ y=\frac{b+d}{2}$.

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ góc tọa độ $O(0;0)$.

Bài 47: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có môđun $|z|\in[1;2]$.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$.

C. Hình vành khăn gồm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$.

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$.

Bài 48: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thoả điều kiện: $|z|=4$.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=4$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=4$.

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x=\frac{a+c}{2};\ y=\frac{b+d}{2}$.

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$.

Bài 49: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thoả điều kiện: $|z| \le 2$.

A. Hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$.

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x=\frac{a+c}{2};\ y=\frac{b+d}{2}$.

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$.

Bài 50: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện: $1<|z|\le 2$.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

B. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$, không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$.

C. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2),(O;1)$.

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$.

Bài 51: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thoả điều kiện: $|z|=2$ và phần thực của z bằng 1.

A. Có 2 điểm $M: M_1(1;\sqrt{3}), M_2(1;-\sqrt{3})$.

B. Chỉ có 1 điểm $M_1(1;\sqrt{3})$.

C. Chỉ có 1 điểm $M_2(1;-\sqrt{3})$.

D. Đường tròn (α) tâm O bán kính $R=2$.

Bài 52: Tìm tập hợp (T) các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z|$

A. Miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Hình vành khăn gồm giữa các điểm hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$, không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$.

D. Đường thẳng $x=1$.

Bài 53: Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $\frac{\overline{z}+2}{z}=-2-i$?

A. $(3;-1)$ **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(-3;-1)$ **D.** $(-3;-3)$

Bài 54: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+i|=|z-i|$ là:

A. $y=0$ **B.** $y=2$ **C.** $y=x$ **D.** $x=-1$

Bài 55: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2|=2$ là:

A. $x^2+y^2=2$ **B.** $(x-2)^2+y^2=4$ **C.** $x=0$ **D.** $x+y=0$

Bài 56: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+1|+|z-1|=4$ là:

A. $x^2+y^2=4$ **B.** $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ **D.** $3x^2+4y^2-36=0$

Bài 57: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2|-|z+2|=3$ là:

A. $x^2-y^2=1$ **B.** $(x-2)^2+(y+2)^2=9$

C. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ **D.** $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=1$

Bài 58: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $z\bar{z}+2z$ là số ảo là:

A. $2x+y+1=0,(y\neq 0)$. **B.** $2x-y+1=0,(x\neq 0)$.

C. $x^2+y^2+2x=0,(y\neq 0)$. **D.** $x^2+y^2+2y=0,(x\neq 0)$.

Bài 59: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|2i-2\bar{z}|=|2z-1|$ là:

A. $4x-8y-3=0$ **B.** $4x+8y+3=0$

C. $8x-4y-1=0$ **D.** $8x+4y+1=0$

Bài 60: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-\bar{z}+1-i|=2$ là:

A. $y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ **B.** $y=\pm\frac{1}{2}$ **C.** $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** Trục Ox

Bài 61: Trong mặt phẳng cho 3 điểm A,B,C lần lượt biểu diễn các số phức $i;2-3i;-3+4i$. Trọng tâm G của ΔABC biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ **B.** $-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ **C.** $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$ **D.** $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$

Bài 62: Cho 3 số phức $1;3i;-3-5i$ biểu diễn bởi các điểm A,B,C. Điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $4+19i$ **B.** $4-19i$ **C.** $-4-19i$ **D.** $4-6i$

Bài 63: Trong mặt phẳng phức, gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $1+i;4+(\sqrt{3}+1)i;1+(2\sqrt{3}+1)i$. Tam giác ABC là:

A. Tam giác vuông tại A **B.** Tam giác vuông tại B

C. Tam giác cân tại A **D.** Tam giác đều

Bài 64: Trong mặt phẳng phức, gọi A,B,C theo thứ tự là điểm biểu diễn các số phức $\frac{4i}{i-1};(1-i)(i+2);\frac{2+6i}{3-i}$. Tam giác ABC là:

A. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông tại A.

C. Tam giác cân tại A. **D.** Tam giác vuông tại B.

Bài 65: A,B,C,D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i;1+\sqrt{3}+i;1+\sqrt{3}-i;1-\sqrt{2}$. Khi đó, tứ giác $ABCD$ là:

A. Hình vuông **B.** Hình thoi

C. Hình thang cân **D.** Hình bình hành

Bài 66: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $|z-i|=1$

A. Đường tròn tâm $A(0;1)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=2$

C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $x=1$

Bài 67: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1.$

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1.$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1.$

C. Trục hoành.

D. Đường thẳng $x=0.$

Bài 68: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $|z|=|\bar{z}-3+4i|.$

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1.$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1.$

C. Đường thẳng $y=1.$

D. Đường thẳng $6x+8y-25=0$.

Bài 69: Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A,B,C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1,z_2,z_3. Hỏi trọng tâm của tam giác ABC biểu diễn số phức nào?

A. $z=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)+\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)i$ **B.** $z=\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3)+\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3)i$

C. $z=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)+\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3)i$ **D.** $z=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)+\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)i$

Bài 70: Xét ba điểm A,B,C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Nhận định nào sau đây là đúng.

A. Tam giác ABC đều.

B. O là tâm của tam giác ABC.

C. O là trọng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. Trọng tâm của ΔABC là điểm biểu diễn của số phức $z_1+z_2+z_3$.

Bài 71: Trong mặt phẳng phức cho các điểm O (gốc tọa độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z'\neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz'. Nhận định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác OAB đều

B. Hai tam giác $OAB, OA'B'$ là hai tam giác đồng dạng

C. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AA'B'$

D. Trọng tâm của ΔOAB là điểm biểu diễn của số phức $z_1+z_2+z_3$

Bài 72: Một hình vuông tâm là gốc tọa độ O, các cạnh song song với các trục tọa độ và có độ dài bằng 4. Hãy xác định điều kiện của a và b để điểm biểu diễn số phức z=a+bi nằm trên đường chéo của hình vuông.

A. $|a|>|b|>2$ **B.** $|a|=|b|\geq 2$ **C.** $|a|=|b|\leq 2$ **D.** $|a|=|b|<2$

Bài 73: Cho $z_1=1+i;\ z_2=-1-i$. Tìm $z_3\in\mathbb{C}$ sao cho các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 tạo thành tam giác đều.

A. $z_3=-\sqrt{2}(1+i)$ và $z_3=\sqrt{2}(1-i)$ **B.** $z_3=-\sqrt{3}(1+i)$ và $z_3=\sqrt{3}(1-i)$

C. $z_3=\sqrt{2}(1+i)$ và $z_3=-\sqrt{2}(1-i)$ **D.** $z_3=\sqrt{3}(1+i)$ và $z_3=-\sqrt{3}(1-i)$

Bài 74: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm H và A, B, C, D, H lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $a,\ b,\ c,\ d,\ h$. Biết $a=-2+i;\ h=1+3i$ và số phức b có phần ảo âm.

Khi đó môđun của số phức b là:

A. $\sqrt{26}$ **B.** $\sqrt{13}$ **C.** $\sqrt{\frac{145}{13}}$. **D.** $\sqrt{10}$

Bài 75: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Ký hiệu $(a;b)$ là kết quả xảy ra sau khi gieo, trong đó a, b lần lượt là số chấm xuất hiện lần thứ nhất, thứ hai. Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trên hai lần gieo như nhau. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $|z+2+3i|\leq 12$ **B.** $|z+2+3i|=10$

C. $|z+2+3i|\leq 13$ **D.** $|z+2+3i|\leq 11$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Điều kiện: $z \neq 3 - 4i$

Gọi $M(x;y)$ với $(x;y) \neq (3;-4)$ là điểm biểu diễn số phức:

$z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$

Khi đó $\log_2 |z - (3 - 4i)| = 1 \Leftrightarrow |z - (3 - 4i)| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$

Vậy tập hợp các điểm số phức z trong mặt phẳng tọa độ là đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính $R=2$.

Chọn C.

Bài 2:

Đặt $z = x + yi$, ta có $\overline{z} = x - yi$.

Do đó:

$|z|^2 - 5z - 5\overline{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 5yi - 5x + 5yi = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25$

Trên mặt phẳng tọa độ, đó là tập hợp các điểm thuộc đường tròn bán kính bằng 5 và tâm là $I(5;0)$.

Chọn C.

Bài 3:

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có :

$|zi - (2+i)| = 2 \Leftrightarrow |-y - 2 + (x-1)i| = 2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm I(1; −2) và bán kính R = 2.

Chọn D.

Bài 4:

Gọi $z = x + yi,\ x, y \in R$, ta có :

$|z+1| = |z-i| \Leftrightarrow |(x+1) + yi|^2 = |x + (y-1)i|^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 2x + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow y = -x$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng $y=-x$ đi qua gốc tọa độ.

Chọn A.

Bài 5:

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có : $|2+z|<|2-z|\Leftrightarrow|2+z|^2<|2-z|^2$

$\Leftrightarrow|(2+x)+iy|^2<|(2-x)-iy|^2$

$\Leftrightarrow(2+x)^2+y^2<(2-x)^2+(-y)^2$

$\Leftrightarrow x<0$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là nửa trái của mặt phẳng tọa độ không kể trục Oy.

Chọn C.

Bài 6:

$$z(2i-1)-i+2=0\Leftrightarrow z=\frac{i-2}{2i-1}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là $M\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Chọn A.

Bài 7:

$$M(x;y),x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow z=x+yi\Rightarrow z+1-i=2\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=2$$

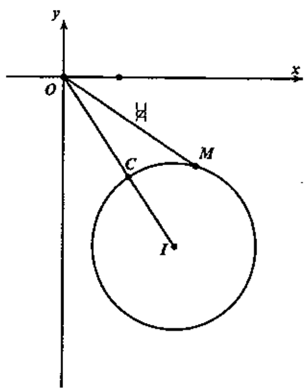
Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

Chọn A.

Bài 8:

Các điểm M biểu diễn số phức z thoả mãn $|z-2+3i|=3$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=3$.

(Ý nghĩa hình học của $|z|$: độ dài OM)



Ta có $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ điểm $M\in(C)$ và OM nhỏ nhất.

(*Bài hình học giải tích quen thuộc*)

Ta có :

$OM\geq OI-IM=OI-R=\sqrt{13}-3$.

Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng OI.

Vậy GTNN của $|z|$ là : $\sqrt{13}-3$.

Chọn A.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 9:

Giả sử $z = a + ib\ (a, b \in \mathbb{R}), (z \neq i)$, khi đó:

$$u = \frac{a+2+bi+3i}{a+(b-1)i} = \frac{(a+2+(b+3)i)(a-(b-1)i)}{a^2+(b-1)^2}$$

Tử số bằng $a^2 + b^2 + 2a + 2b - 3 + 2(2a - b + 1)i$

u là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a^2+b^2+2a+2b-3=0 \\ 2a-b+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2+(b+1)^2=5 \\ (a;b) \neq (0;1), (-2;-3) \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm (0;1) và (-2;-3).

Chọn A.

Bài 10:

Dùng máy tính casio ta có A(1;2) , B(3;1) ,C(0;2)

Dùng công thức $S = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\|$ với $\overrightarrow{AB} = (2;-1;0), \overrightarrow{AC} = (-1;0;0)$

Dùng máy tính ta có kết quả B : $S = \frac{1}{2}$.

(Có thể dùng công thức tính diện tích phần Oxy tính nhanh hơn)

Chọn B.

Bài 11:

Ta có $\overrightarrow{OA}$ biểu diễn cho z_1, $\overrightarrow{OB}$ biểu diễn cho z_2 nên $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ biểu diễn cho $z_1 - z_2$.

Các câu còn lại dễ dàng kiểm tra là đúng.

Chọn C.

Bài 12:

Đặt:

$$z = x + iy \Rightarrow |x + iy - i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

Chọn C.

Bài 13:

ΔAM_1M_2 cân tại A nên $M_1A = M_1M_2$ hay: $z_1 - 1 + 2i = z_2 - 1 + 2i$

Chọn B.

Bài 14:

Vì điểm $M(1;-2)$ biểu diễn z nên $z = 1 - 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 + 2i$

Do đó:

$$w = i(1+2i) - (1-2i)^2 = -2 + i - (-3-4i) = 1 + 5i \Rightarrow |w| = \sqrt{26}.$$

Chọn A

Ghi chú của em

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-3;\frac{4}{3}\right)$

Vậy G biểu diễn số phức $z=-3+\frac{4}{3}i.$

Chọn B.

Ta có : $A(0;1), B(1;3), C(a;5)$

Tam giác ABC vuông tại B nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$ với $\begin{cases}\overrightarrow{BA}=(-1;-2)\\ \overrightarrow{BC}=(a-1;2)\end{cases}$

$\Rightarrow -1(a-1)+(-2)2=0 \Leftrightarrow a=-3.$ Vậy $C(-3;5)$.

Chọn A.

$$(iz-1)(z+3i)\left(\bar{z}-2+3i\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} iz-1=0\\ z+3i=0\\ \bar{z}-2+3i=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{i}=-i\\ z=-3i\\ \bar{z}=2-3i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-i\\ z=-3i\\ z=2+3i\end{array}\right.$$

Vậy các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình đã cho là $A(0;-1), B(0;-3), C(2;3)$

Chọn A.

Đặt $z=x+iy\,(x,y\in\mathbb{R})$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z.

Ta có $\begin{cases}|z|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \bar{z}-3+4i=x-iy-3+4i=(x-3)+(-y+4)i\end{cases}$

$\Rightarrow \left|\bar{z}-3+4i\right|=\sqrt{(x-3)^2+(-y+4)^2}$

Vậy:

$$|z|=\left|\bar{z}-3+4i\right| \Leftrightarrow x^2+y^2=(x-3)^2+(-y+4)^2 \Leftrightarrow 6x+8y-25=0$$

Chọn D.

Ta có: $z'=\dfrac{z-1+i}{z-1}=\dfrac{(x-1)+(y+1)i}{(x-1)+yi}=\dfrac{(x-1)^2+y(y+1)+(x-1)i}{(x-1)^2+y^2}$

Trường hợp M' nằm trên trục tung và $M'\neq 0$.

$\Rightarrow z'$ là một số thuần ảo khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y(y+1)=0\\ x-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x+y+1=0\\ x\neq 1\end{cases}$$

Ghi chú của em

$\Rightarrow (E)$ là đường tròn tâm $I\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$ ngoài trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Chọn A.

Bài 20:

Ta có: $z'=\dfrac{z-1+i}{z-1}=\dfrac{(x-1)+(y+1)i}{(x-1)+yi}=\dfrac{(x-1)^2+y(y+1)+(x-1)i}{(x-1)^2+y^2}$

Trường hợp M' nằm trên trục hoành và $M'\neq 0$.

$\Rightarrow z'$ là một số thực.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\ (x-1)^2+y(y+1)\neq 0\end{cases}$$

$\Rightarrow (E)$ là đường thẳng $x=1$ ngoại trừ điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Chọn D.

Bài 21:

Giả sử $w=a+bi$

Ta có:

$$a+bi=(1+i\sqrt{3})z+2 \Leftrightarrow z=\frac{a-2+bi}{1+i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z-1=\frac{a-3+(b-\sqrt{3}i)}{1+i\sqrt{3}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left|\frac{a-3+(b-\sqrt{3})i}{1+i\sqrt{3}}\right|\leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a-3+(b-\sqrt{3})i|}{|1+i\sqrt{3}|}\leq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(a-3)^2+(b-\sqrt{3})^2}}{2}\leq 2$$

$$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-\sqrt{3})^2\leq 16$$

Vậy quĩ tích các điểm M biểu diễn số phức là hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 16$ (kể cả những điểm nằm trên biên).

Chọn A.

Bài 22:

Ta có: $Z=X+Yi=\dfrac{z+1}{z-1}\Leftrightarrow X=\dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2};Y=\dfrac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$

Vì N chạy trên đường tròn: $x^2+y^2=1$ nên ta có $x^2+y^2=1\Rightarrow X=0$

Tập hợp điểm M là trục tung.

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 23:

Ta có:

$$\begin{aligned} z(z-a) &= (x+yi)(x+yi-10-6i) \\ &= (x+yi)[(x-10)+(y-6)i] \\ &= x(x-10)-y(y-6)+(2xy-10y-6x)i \end{aligned}$$

Tích $z(z-a)$ là một số thực.

$\Leftrightarrow 2xy-10y-6x=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{3x}{x-5}, x\neq 5$

Trong mặt phẳng phức, tập hợp E_1 là một hyperbol vuông góc có phương trình:

$y=\dfrac{3x}{x-5}, x\neq 5$

Chọn C.

Bài 24:

Tích $z(z-a)$ là một số thuần ảo $\Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0.

$\Leftrightarrow x(x-10)-y(y-6)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-10x)-(y^2-6y)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2-(y-3)^2=16$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

Trong mặt phẳng phức, tập hợp E_2 là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5;3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.

Chọn C.

Bài 25:

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $z+\overline{z}=|z|$

$\Leftrightarrow (x+yi)+(x-yi)=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow 2x=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 4x^2=x^2+y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y=\pm x\sqrt{3} \end{cases}$

Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng biểu diễn số phức $z=x+yi$ gồm 2 đường thẳng:

$D_1: y=x\sqrt{3}$

$D_2: y=-x\sqrt{3}$

Chọn D.

Ghi chú của em

Bài 26:

$$\left|z-2i\right|=3\Leftrightarrow\left|x+\left(y-2\right)i\right|=3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}$$

$$=3\Leftrightarrow x^2+\left(y-2\right)^2=9\Rightarrow I\left(0;2\right)$$

$$d\left(I,\Delta\right)=\frac{\left|3.0+4.2-m\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}\left|8-m\right|$$

$$d\left(I,\Delta\right)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{5}\left|8-m\right|=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8-m=1\\8-m=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7\\m=9\end{array}\right.$$

Chọn C.

Bài 27:

Trường hợp Z là một số thực.

$\Leftrightarrow$ Phần ảo bằng 0.

$$\Leftrightarrow\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[(x^2+y^2)^2+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow xy=0,x^2+y^2\neq0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y\neq0\\y=0,x\neq0\end{array}\right.$$

Tập hợp điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z là

- Trục tung, không kể điểm O.

Hay

- Trục hoành, không kể điểm O.

Chọn A.

Bài 28:

Trường hợp Z là một số thuần ảo $\Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0.

$$\Leftrightarrow(x^2+y^2)^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R=1$.

Chọn A.

Bài 29:

Ta có:

$z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow Z=\dfrac{1-iz}{1+iz}=\dfrac{1-i(x+yi)}{1+i(x+yi)}$

$$\Rightarrow Z=\frac{1-yi^2-xi}{1+yi^2+xi}=\frac{1+y-xi}{1-y+xi}=\frac{(1+y-xi)(1-y-xi)}{(1-y+xi)(1-y-xi)}$$

$$=\frac{(1-xi)^2-y^2}{(1-y)^2-x^2i^2}=\frac{1+x^2i^2-2xi-y^2}{(1-y)^2+x^2}=\frac{1-x^2-y^2-2xi}{(1-y)^2+x^2}$$

Ghi chú của em

Z là một số thực $\Leftrightarrow x=0, y\neq 1$.

Ta có: $z=yi, y\neq 1$.

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là trục tung ngoại trừ điểm $A(0;1)$.

Chọn A.

Bài 10

Số phức Z là một số thuần ảo khi và chỉ khi

$$\begin{cases}1-x^2-y^2=0\\(1-y)^2+x^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\x\neq 0, y\neq 1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm O, bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $A(0;1)$.

Chọn A.

Bài 11

Gọi M là điểm nằm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức $z=a+bi$

Với $a,b\in\mathbb{R}$

Ta có: $|z|=1\Leftrightarrow OM=1$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

Chọn A.

Bài 12

Ta có: $a=1$

Tập hợp điểm M là đường thẳng $D: x=1$.

Chọn D.

Bài 13

Ta có: $b=-1$

Tập hợp điểm M là đường thẳng $\Delta: y=-1$.

Chọn C.

Bài 14

Đặt $z=x+yi, (z\neq 0)$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có:

$$Z=z+\frac{4}{z}=x+yi+\frac{4}{x+yi}=x+yi+\frac{4(x-yi)}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow Z=\frac{x(x^2+y^2+4)+y(x^2+y^2-4)i}{x^2+y^2}$$

Z là một số thực

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y(x^2+y^2-4)=0\\x^2+y^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\vee x^2+y^2=4\\x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

Ghi chú của em

Do đó (λ) gồm:

+ Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc.

+ Đường tròn tâm O, bán kính $R=2$.

Chọn A.

Bài 35:

Cách 1: Đặt $z=x+yi,(z\neq 0)$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có:

$$|z|=2|z-i|\Leftrightarrow x^2+y^2=4\left(x^2+(y-1)^2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{8}{3}y+\frac{4}{3}=0.$$

Cách 2: Ta có:

$|z|=2|z-i|\Leftrightarrow|\overrightarrow{OM}|=2|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{OM}|=2|\overrightarrow{BM}|$

Với $B(1;0)$ là điểm biểu diễn số i.

Do đó ta có: $OM=2BM\Leftrightarrow\dfrac{MO}{MB}=2$

Ta suy ra tập hợp các điểm M là đường tròn Apollonius đường kính IJ, với I,J thuộc trục tung và

$$\begin{matrix}\overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{IB}\\ \overrightarrow{OJ}=-2\overrightarrow{JB}\end{matrix}\Rightarrow I\left(0;\frac{2}{3}\right)\text{ và } J(0;2)$$

Phương trình đường tròn: $x^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)(y-2)=0\Leftrightarrow x^2+y^2-\dfrac{8}{3}y+\dfrac{4}{3}=0.$

Chọn A.

Bài 36:

Cách 1: Đặt $z=x+yi,(z\neq 0)$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|1-z|=|z-i|\Leftrightarrow(1-x)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\Leftrightarrow y=x.$

Cách 2: Gọi A là ảnh của 1 và B là ảnh của i: $A(1;0),B(0;1)$

Ta có: $|1-z|=|i-z|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow MA=MB$

Do đó tập hợp hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn $AB\Rightarrow y=x.$

Chọn A.

Bài 37:

Ta có:

$$|z-a|.|\bar{z}-\bar{a}|=a\bar{a}\Leftrightarrow|z-a|^2=|a|^2\qquad(1)$$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức a trong mặt phẳng phức.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\Leftrightarrow AM^2=OA^2\Rightarrow AM=AO$

Do đó, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A bán kính $R=AO$.

Chọn A.

Bài 38:

Ta có: $z^2 - a^2 = \overline{z^2} - \overline{a^2} \Leftrightarrow z^2 - \overline{z^2} = a^2 - \overline{a^2}$

$\Leftrightarrow (z+\bar{z})(z-\bar{z}) = (a+\bar{a})(a-\bar{a}) \qquad (2)$

Đặt: $\begin{cases} z = x + yi \\ a = \alpha + \beta i \end{cases}$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 2x(2yi) = 2\alpha(2\beta i) \Leftrightarrow xy = \alpha\beta$

Do đó, tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc.

Chọn C.

Bài 39:

Cách 1: Gọi điểm biểu diễn số phức z là $M(x;y)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức i là $N(0;1)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức iz là $P(-y;x)$.

$\overrightarrow{NM} = (x;y-1);\ \overrightarrow{NP} = (-y;x-1)$

Vì ba điểm M, N, P thẳng hàng nên ta có:

$x(x-1) = -y(y-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0.$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$.

Cách 2: Kí hiệu $M(z)$ dùng để chỉ M là điểm biểu diễn số phức z hay ảnh của số phức z.

Giả sử các điểm $A(i), M(z), M'(iz)$ thẳng hàng:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow iz - z = k(i - z) \Leftrightarrow k = \frac{iz - z}{i - z}$$

Đặt $z = x + yi \Rightarrow k = \dfrac{i(x+yi) - (x+yi)}{i - (x+yi)}$

$$\Rightarrow k = \frac{[(-y-x) + (x-y)i][-x + (y-1)i]}{[-x - (y-1)i][-x + (y-1)i]}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x^2 + (y-1)^2} - \frac{x^2 + y^2 - x - y}{x^2 + (y-1)^2} i$$

k là một số thực. Do đó, ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 40

Các điểm $M(z), M'(z^2), M''(z^4)$ thẳng hàng.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM''} = k\overrightarrow{MM'}, k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z^4 - z = k(z^2 - z) \Leftrightarrow z(z^3 - 1) - kz(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow z(z-1)(z^2 + z + 1 - k) = 0, z \neq 0,1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 - k = 0$

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có: $k = z^2 + z + 1 = (x+yi)^2 + (x+yi) + 1$

$\Leftrightarrow k = x^2 - y^2 + x - 1 + (2xy + y)i$

$k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -\dfrac{1}{2}$

Vậy tập hợp điểm M gồm:

+ Trục hoành Ox.

+ Đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn D.

Bài 41

Ta có:

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(x + yi + \frac{1}{x+yi}\right) = \frac{(x^2+y^2+1)x}{2(x^2+y^2)} + \frac{(x^2+y^2-1)yi}{2(x^2+y^2)}$$

Z là số thực khi và chỉ khi

$$Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2-1)y = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right.$

Tập hợp các điểm M phải tìm gồm:

+ Trục hoành Ox, không kể điểm gốc O.

+ Đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$.

Chọn A.

Bài 41

Ta có:

$$Z = \frac{z-1}{z+2i} = \frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i} = \frac{x-1+yi}{x+(y+2)i} = \frac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x(x-1) + y(y+2) + (y-2x+2)i}{x^2 + (y+2)^2}$$

Z là một số thực khi và chỉ khi $y - 2x + 2 = 0$

Tập hợp các điểm m biểu diễn số phức $z = x + yi$ là đường thẳng $y - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 2$

Chọn C.

Ghi chú của em

Ta có:

$$Z=\frac{z-1}{z+2i}=\frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i}=\frac{x-1+yi}{x+(y+2)i}=\frac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$$

$$\Rightarrow Z=\frac{x(x-1)+y(y+2)+(y-2x+2)i}{x^2+(y+2)^2}$$

Z là một số thuần ảo khi và chỉ khi

$x(x-1)+y(y+2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x+2y=0$

Tập hợp các điểm m là đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};-1\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Chọn A.

Đặt $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$

Ta có: $z+\overline{z}=k|z|$ (1)

$\Leftrightarrow 2x=k\sqrt{x^2+y^2}$ (2)

Nếu $k=0$, ta có: $x=0$

Tập hợp các điểm M là trục tung.

Xét $k\neq 0$:

Ta có: $(2)\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2=k^2(x^2+y^2)\\ kx\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4-k^2)x^2=k^2y^2\\ kx\geq 0\end{cases}$

Với $-2\leq k\leq 2$ và $k\neq 0$, ta có:

$$y^2=\frac{4-k^2}{k^2}x^2 \Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}x \qquad (kx\geq 0)$$

Do đó, tập hợp M phải tìm là

- Các đường thẳng $y=\pm\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}x$

+ Giới hạn bởi $0<k<2, x\geq 0$.

+ Hoặc giới hạn bởi $-2<k<0, x\leq 0$.

- nửa trục Ox nếu $k=2$.

- nửa trục Ox' nếu $k=-2$.

Chọn C.

Đặt $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có:

$z-p=x-a+(y-b)i$

$z-q=x-c+(y-d)i$

Ghi chú của em

$\Rightarrow (z-p)(z-q)=[x-a+(y-b)i][x-c+(y-d)i]$

$=(x-a)(x-c)-(y-b)(y-d)+[(x-a)(y-d)+(x-c)(y-b)]i$

$(z-p)(z-q)$ là một số thực.

$\Leftrightarrow (x-a)(y-d)+(x-c)(y-b)=0$

$\Leftrightarrow [(x-a)+(x-c)]y=(x-a)d+(x-c)b$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{(b+d)x-(ad+bc)}{2x-(a+c)}$ với $x\neq\dfrac{a+c}{2}$

Do đó, ta có tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc có tiệm cận là

$x=\dfrac{a+c}{2};\ y=\dfrac{b+d}{2}$

Chọn C.

Bài 46:

Xem số phức z có $|z|\leq 1$.

Tập hợp các điểm M là hình tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R=1$.

Chọn A.

Bài 47:

Xem số phức z có $|z|\in[1;2]$.

Tập hợp các điểm M là hình vành khăn gồm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$.

Chọn C.

Bài 48:

Ta có: $OM=|z|\Rightarrow OM=4$

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R=4$.

Chọn A.

Bài 49:

Ta có: $|z|\leq 2\Leftrightarrow OM\leq 2$

Tập hợp các điểm M là hình tròn tâm O bán kính $R=2$.

Chọn A.

Bài 50:

$1<|z|\leq 2\Leftrightarrow 1<OM\leq 2.$

Tập hợp các điểm M là hình vành khăn gồm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$, không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$.

Chọn B.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 51:

Ta có: $|z|=2 \Leftrightarrow OM=2 \Rightarrow M$ nằm trên đường tròn (α) tâm O bán kính $R=2$.

Phần thực của $z=1 \Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng $x=1$.

Có 2 điểm $M: M_1(1;\sqrt{3}), M_2(1;-\sqrt{3})$

Chọn A.

Bài 52:

Điều kiện: $z \neq 0, z \neq 2$.

Cách 1: Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

$\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z| \Leftrightarrow |z-2|<|z| \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2<x^2+y^2 \Leftrightarrow x>1.$

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Cách 2: Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z| \Leftrightarrow |z-2|<|z|$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $z_1=2 \Rightarrow A(2;0)$

Xét trường hợp $|z-2|=|z| \Leftrightarrow MA=MO$

Khi đó, M chạy trên đường trung trực Δ của đoạn OA, có phương trình $x=1$.

Với trường hợp $|z-2|<|z| \Leftrightarrow MA<MB$

$\Rightarrow M$ nằm bên phải đường thẳng Δ.

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng Δ, trung trực của đoạn thẳng OA là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Chọn A.

Bài 53:

Đặt $z=x+yi,(z\neq 0, x,y\in\mathbb{R})$.

$$\frac{x-yi+2}{x+yi}=-2-i \Leftrightarrow x+2-yi=-2x+y+(-2y-x)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-2x+y \\ -y=-2y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn B.

Bài 54:

Cách 1: Đặt $z=x+yi,(z\neq 0, x,y\in\mathbb{R})$.

$|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow y=0.$

Do đó, tập hợp điểm cần tìm là trục Ox.

Cách 2: Nhận xét: Nếu M_1, M_2 là điểm biểu diễn các số phức:

$z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2$ thì $M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)}$

Xét 2 điểm $M_1(-i), M_2(i)$. Theo giả thiết ta có:

$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow MM_1 = MM_2, \forall M(z)$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn M_1M_2 với $M_1(0;-1), M_2(0;1)$. Do đó, tập hợp điểm cần tìm là trục Ox.

Chọn A.

Bài 55

Xét điểm I(2; 0), theo giả thiết ta có: $|z-2| = 2 \Leftrightarrow MI = 2, \forall M(z)$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là đường tròn tâm $I(2;0)$, bán kính $R = 2$. Phương trình đường tròn $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Chọn B.

Bài 56

Xét hai điểm F_1 (-1; 0); (F_2(1; 0), theo giả thiết ta có:

$|z+1| + |z-1| = 4 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4, \forall M(z)$.

Vậy tập hợp điểm cần tìm là elip có các tiêu điểm $F_1(-1;0), F_2(1;0)$, nửa trục lớn $a = 2$, nửa trục nhỏ $b = \sqrt{3}$

Phương trình elip $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Chọn C.

Bài 57

Xét hai điểm F_1 (-2; 0); (F_2(2; 0), theo giả thiết ta có:

$|z-2| - |z+2| = 3 \Leftrightarrow MF_2 - MF_1 = 3, \forall M(z)$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hypebol có các tiêu điểm

F_1 (-2; 0); (F_2(2; 0) nửa trục lớn $a = \dfrac{3}{2}$, nửa trục nhỏ $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình của hypebol $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1$

Chọn D.

Bài 58

Đặt $z = x + yi$ thì $\bar{z} = x - yi$. Ta có $z\bar{z} + 2z = x^2 + y^2 + 2x + 2yi$

Vì $z\bar{z} + 2z$ là số ảo nên $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập hợp cần tìm là $x^2 + y^2 + 2x = 0 (y \neq 0)$.

Chọn C.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 59:

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi.$

$$\left|2i - 2\bar{z}\right| = \left|2z - 1\right| \Leftrightarrow \left|i - \bar{z}\right| = \left|z - \frac{1}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4x + 8y + 3 = 0. (*)$$

Chọn B.

Bài 60:

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}).$

$$\left|z - \bar{z} + 1 - i\right| = 2 \Leftrightarrow \left|1 + (2y-1)i\right| = 2 \Leftrightarrow 1 + (2y-1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (2y-1)^2 = 3 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Chọn A.

Bài 61:

Ta có $A(0;1), B(2;-3), C(-3;4)$. Trọng tâm ΔABC là $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Vậy trọng tâm G biểu diễn số phức $z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i.$

Chọn B.

Bài 62:

Ta có $A(1;0), B(0;3), C(-3;-5)$

$$2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}\right) - 3\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}\right) + 2\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} \Rightarrow I(-4;-19)$$

Vậy điểm I biểu diễn số phức $z = -4 - 19i.$

Chọn C.

Bài 63:

Ta có: $A(1;1), B\left(4; \sqrt{3}+1\right), C\left(1; 2\sqrt{3}+1\right)$

$\Rightarrow AB = BC = CA = 2\sqrt{3}$. Vậy tam giác ABC đều.

Chọn D.

Bài 64:

Ta có $\frac{4i}{-1+i} = 2 - 2i; (1-i)(1+2i) = 3 + i; \frac{2+6i}{3-i} = 2i$

Suy ra $A(2;-2), B(3;1), C(0;2)$. $AB = BC = \sqrt{10}; AC = \sqrt{20}$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại B.

Chọn D.

Ghi chú của em

Bài 65

Vì $1+2i;1-2i$ và $1+\sqrt{3}+i;1+\sqrt{3}-i$ là các cặp số phức liên hợp nên hai điểm A, D và hai điểm B, C đối xứng nhau qua trục Ox. Hơn nữa $1\neq 1+\sqrt{3}$ nên $ABCD$ là hình thang cân.

Chọn C.

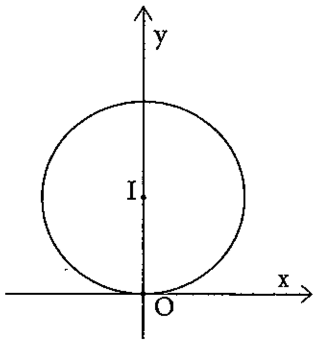
Bài 66

Giả sử $z=x+yi,\ z-i=x+(y-1)i$

$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1\ (1)$

Như vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|z-i|=1$ nằm trên đường tròn tâm $A(0;1)$ bán kính $R=1$.



Chọn A.

Bài 67

Đặt $z=x+yi,\ (z\neq -i, x,y\in\mathbb{R})$.

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1\Leftrightarrow |z-i|=|z+i|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}\Leftrightarrow y=0.$$

Như vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện đã cho là trục hoành.

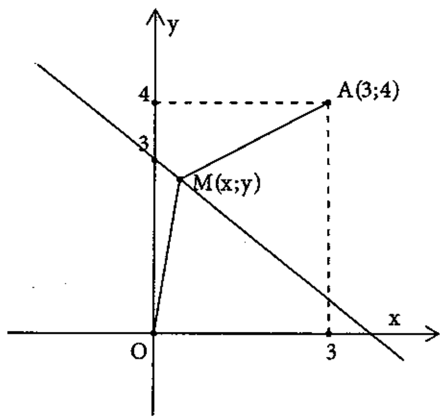
Chọn A.

Bài 68

Cách 1: Đặt $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z|=|\bar{z}-3+4i|\Leftrightarrow |x+yi|=|(x-3)+(4-y)i|$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=(x-3)^2+(4-y)^2\Leftrightarrow 6x+8y-25=0.$$



Cách 2:

$|z|=|\bar{z}-3+4i| \Leftrightarrow |x+yi|=|(x-3)+(4-y)i|$

Theo tính chất hai số phức liên hợp có mô đun bằng nhau, ta có:

$|z|=|(x-3)+(4-y)i|=|(x-3)-(4-y)i|$

$=|(x-yi)-(3+4i)|=|z-(3+4i)|$

$|z-0|=|z-(3+4i)| \quad (2)$

Ta có, vế trái (2) là độ dài của vecto $\overrightarrow{OM}$, vế phải (2) là độ dài vecto $\overrightarrow{AM}$ trong đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z, $A(3;4)$ là điểm biểu diễn số phức $3+4i$. Hệ số (2) chứng tỏ tập hợp các số phức $z=x+yi$ có các điểm biểu diễn nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA là $6x+8y-25=0$.

Chọn D.

Bài 69:

Giả sử: $z_1=x_1+y_1i, z_2=x_2+y_2i, z_3=x_3+y_3i$ biểu diễn bởi A,B,C thì tọa độ của các điểm đó là $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$.

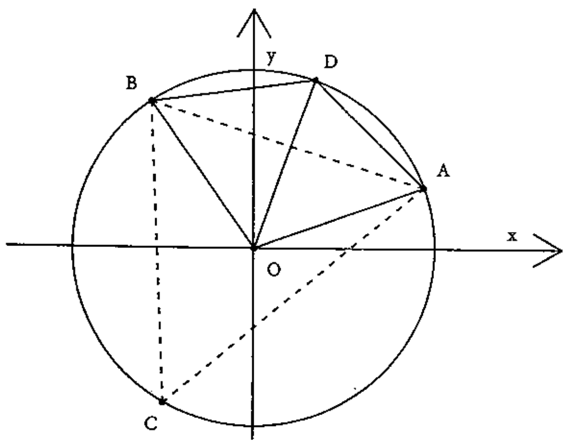
Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ biểu diễn số phức $z=\dfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)+\dfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)i$.

Chọn A.

Bài 70:

Từ điều kiện $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ chứng tỏ A,B,C nằm trên một đường tròn tâm O bán kính $R=|z_1|$.

Nếu ABC là tam giác đều thì tâm O là trọng tâm của tam giác ABC. Theo tính chất trọng tâm ta có:



Ghi chú của em

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ hay $z_1+z_2+z_3=0$

Đảo lại, nếu $z_1+z_2+z_3=0$, ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=-\overrightarrow{OD}$

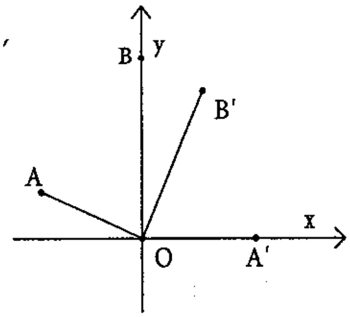
Điểm D cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC (vì $\left|\overrightarrow{OC}\right|=-\left|\overrightarrow{OD}\right|$, $OADB$ là hình bình hành có $OA=OB=BD=DA$). Các tam giác OAD và OBD là các tam giác đều. Suy ra $sđ\,\overset{\frown}{AB}=120^\circ$

Làm tương tự ta chứng minh được $sđ\,\overset{\frown}{AC}=120^\circ$

Suy ra ΔABC đều.

Chọn A.

Bài 71



Ta có $|z|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$, $1=\left|\overrightarrow{OA}\right|$, $|z|'=\left|\overrightarrow{OA'}\right|$,

$|zz|'=|z|.|z'|=\left|\overrightarrow{OB'}\right|$

Ta có:

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|=|z-1|$

$\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=\left|\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}\right|=|zz'-z'|$

$=|z'|.|z-1|$

Từ trên, ta suy ra

$\dfrac{|z'|}{1}=\dfrac{|z|.|z'|}{|z|}=\dfrac{|z'|.|z-1|}{|z-1|}\Rightarrow\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{A'B'}{AB}$

$\Rightarrow\Delta OA'B'\backsim\Delta OAB.$

Chọn B.

Bài 72

Vì điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường chéo của hình vuông nên

$-2\le a\le 2;\ -2\le b\le 2$ và $\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b\end{array}\right.$

Vậy điều kiện là $|a|=|b|\le 2$

Chọn C.

[illegible]

Để giải bài này ta cần chú ý đến kiến thức sau:

Giả sử $M_1(x_1;y_1)$ biểu diễn số phức $z_1=x_1+y_1i$

Giả sử $M_2(x_2;y_2)$ biểu diễn số phức $z_2=x_2+y_2i$

Khi đó khoảng cách giữa hai điểm M_1M_2 bằng mô đun của số phức z_1-z_2.

Vậy $M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Áp dụng vào bài toán: Giả sử $z_3 = x + yi$

Để các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành một tam giác đều thì

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \\ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4+4} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{4+4} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$$

Vậy có hai số phức thoả mãn là: $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$.

Chọn D.

[illegible]

Ta có: $A(-2;1); H(1;3) \Rightarrow C(4;5)$

Tam giác ABC vuông cân tại B nên : $\begin{cases} AB = BC \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$

Giải hệ tìm được $B\left(\dfrac{43}{13}; -\dfrac{6}{13}\right)$.

Suy ra mô đun của số phức b là: $\sqrt{\dfrac{145}{13}}$.

Chọn C.

[illegible]

Ta có $A = \{(1;1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

Gọi $z = x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}$ khi đó $|z + 2 + 3i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}$

Giả sử $|z + 2 + 3i| \le R \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \le R$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 \le R^2$. Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là những điểm thuộc miền trong và trên đường tròn tâm $I(-2;-3)$ và bán kính R.

Để tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thì $IM \le R,\ \forall M \in \mathbb{R}$

Khi đó ta được $R = 13$.

Chọn C.

Ghi chú của em

CHƯƠNG 5.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Chủ đề 1. Thể tích khối đa diện

- Thể tích khối chóp
- Thể tích khối lăng trụ
- Thể tích khối hộp chữ nhật
- Thể tích khối lập phương
- Định lí tỉ số thể tích khối tự diện hoặc khối chóp tam giác
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 2. Mặt cầu - Khối cầu

- Định nghĩa mặt cầu
- Công thức tính diện tích mặt cầu, thể tích khối cầu
- Phương pháp tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 3. Mặt nón - Khối nón

- Định nghĩa mặt nón
- Hình nón và khối nón
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 4. Mặt trụ - Khối trụ

- Định nghĩa mặt trụ
- Hình trụ và khối trụ
- Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ
- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Chủ đề 5. Ứng dụng hình học không gian giải các bài toán thực tế

- Bài tập áp dụng
- Lời giải chi tiết

Đề ôn tập chương 5

Lời giải chi tiết

CHƯƠNG 05

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

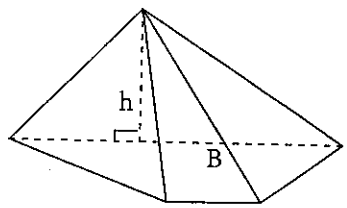
CHỦ ĐỀ 1

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Trước khi vào phần bài tập bạn đọc cần trang bị cho mình các kiến thức căn bản tối thiểu sau:

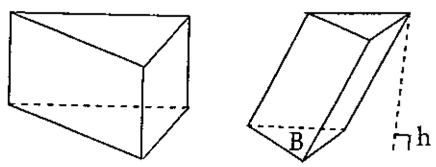
1 Thể tích khối chóp

Công thức tính: $V = \frac{1}{3}B.h$ với B diện tích đáy, h là chiều chiều cao khối chóp.



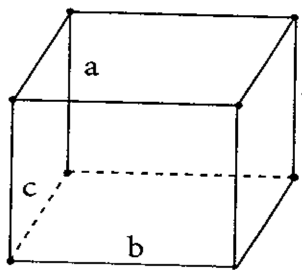
2 Thể tích khối lăng trụ

$V = B.h$ với B diện tích đáy, h là chiều cao lăng trụ.



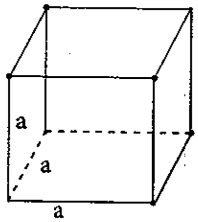
3 Thể tích khối hộp chữ nhật

$V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước.

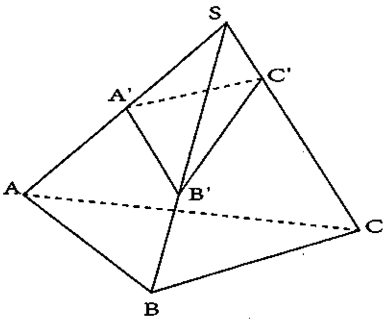


4 Thể tích khối lập phương

$V = a^3$ với a là độ dài cạnh.



5 Định lí tỉ số thể tích khối tứ diện hoặc khối chóp tam giác



Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$$

Chúng ta sẽ cùng đi ngay vào các ví dụ minh họa để thấy rằng có những bài liên quan đến thể tích khối đa diện rất khó, đòi hỏi khả năng vận dụng cao.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A, (H') là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

A. $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{37}{48}$ **B.** $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{55}{89}$ **C.** $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{2}{3}$ **D.** $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{1}{2}$

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC. Thể tích khối chóp S.ABPN là x, thể tích khối tứ diện CMNP là y. Giá trị x, y thoả mãn bất đẳng thức nào dưới đây:

A. $x^2 + 2xy - y^2 > 160$ **B.** $x^2 - 2xy + 2y^2 < 109$

C. $x^2 + xy - y^4 < 145$ **D.** $x^2 - xy + y^4 > 125$

Bài 3: Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SC = a, $\widehat{SCA} = \varphi$. Xác định góc φ để thể tích khối chóp SABC lớn nhất.

A. $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

B. $\varphi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$

C. $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$

D. $\varphi = 3.\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $V = \frac{a^3}{6}$

Bài 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{a^3}{8}$ D. $\frac{3a^3}{8}$

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A,D; $AB = AD = 2a, CD = a$. Góc giữa hai mp(SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của AD, Biết hai mp (SBI), (SCI) cùng vuông góc với mp$(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$ B. $\frac{3\sqrt{17}}{5}a^3$ C. $\frac{3\sqrt{19}}{5}a^3$ D. $\frac{3\sqrt{23}}{5}a^3$

Bài 7: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng 1; đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có các cạnh $BA = \sqrt{3}, AD = \sqrt{7}$; các mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ hợp với mặt đáy các góc theo thứ tự $45°$ và $60°$. Thể tích của khối hộp là:

A. 4 (đvtt)

B. 3 (đvtt)

C. 2 (đvtt)

D. 6 (đvtt)

Bài 8: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bên bằng a và các góc $A'AB, BAD, A'AD$ đều bằng $\alpha(0° < \alpha < 90°)$. Tính thể tích V của khối hộp.

A. $V = a^3 \sin 2\alpha\sqrt{\cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\alpha}$

B. $V = 2a^3 \sin\alpha\sqrt{\cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\alpha}$

C. $V = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\alpha}$

D. Đáp số khác

Bài 9: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bên bằng a; đáy là hình thoi, diện tích của hai mặt chéo là S_1 và S_2; góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt chéo là α. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V=\dfrac{S_1S_2\cos\alpha}{a}$

B. $V=\dfrac{S_1S_2\cos\alpha}{3a}$

C. $V=\dfrac{S_1S_2\sin\alpha}{4a}$

D. $V=\dfrac{S_1S_2\sin\alpha}{2a}$

Bài 10: Cho khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=b, \widehat{BAD}=\alpha$; đường chéo AC' hợp với đáy góc β. Tính thể tích của khối hộp đứng đã cho là:

A. $V=4ab\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}.\cos\alpha\cos\beta$

B. $V=2ab\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}.\cos\alpha\cos\beta$

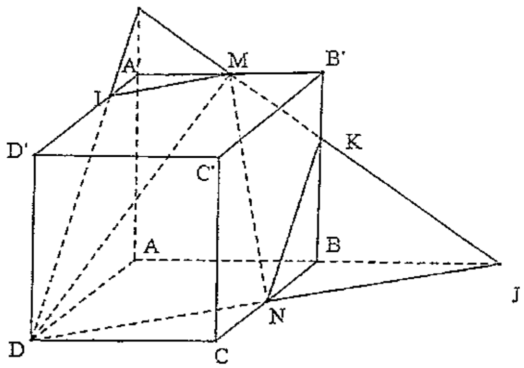
C. $V=3ab\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}.\sin\alpha\tan\beta$

D. $V=ab\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}.\sin\alpha\tan\beta$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:



$AB \cap ND = J, JM \cap BB' = K$

Ta có: $BK = 2B'K$

$I \in A'D'$. Ta có $A'I = \frac{1}{4}A'D'$.

Suy ra thiết diện là: $KMIDN$

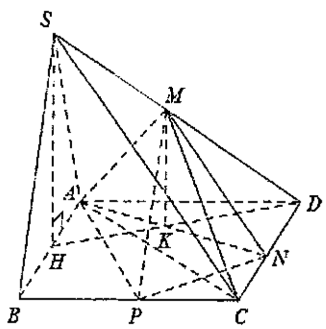
$$V_{(H)} = V_{ABA'KMIDN} = V_{D.ABKMA'} + V_{D.BKN} + V_{D.MA'I}$$
$$= \frac{1}{3}a.\left(a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3} + \frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{4} = \frac{55a^3}{144}$$

$$\Rightarrow V_{(H')} = a^3 - \frac{55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144}$$

$$\Rightarrow \frac{V_H}{V_{H'}} = \frac{55}{89}.$$

Chọn B.

Bài 2:



+ Gọi H là trung điểm AB.

Do ΔABC đều và

$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Xét ΔABC đều:

$$SH = \frac{\sqrt{3}AB}{2} = 2\sqrt{3}$$

Ghi chú của em

+ Ta có:

$$S_{ABPN} = S_{ABCD} - S_{ADN} - S_{CNP}$$

$$= AB^2 - \frac{AD.DN}{2} - \frac{CN.CP}{2} = 4^2 - \frac{4.2}{2} - \frac{2.2}{2} = 10$$

$$\Rightarrow V_{S.ABPN} = \frac{1}{3}.S_{ABPN}.SH = \frac{1}{3}.10.2\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

+ Gọi $AN \cap HD = \{K\}$ ta có MK là đường trung bình của ΔDHS

$$\Rightarrow HK = \frac{1}{2}SH$$

$$\Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{3}.S_{CNP}.MK = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.CN.CP.\frac{1}{2}.SH = \frac{1}{3}\frac{2.2}{2}.\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Thay vào các đáp án.

Chọn C.

Bài 3

$BC = AC = a.\cos\varphi$; $SA = a.\sin\varphi$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \frac{1}{6}.AC.BC.SA = \frac{1}{6}a^3\sin\varphi.\cos^2\varphi$$

$$= \frac{1}{6}a^3\sin\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)$$

Xét hàm số : $f(x) = x - x^3$ trên khoảng $(0;1)$.

Ta có :

$$f'(x) = 1-3x^2,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó ta thấy trên khoảng (0;1) hàm số $f(x)$ liên tục và có một điểm cực trị là điểm cực đại, nên tại đó hàm số đạt GTLN hay:

$$\max_{x\in(0;1)} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Vậy $\max V_{SABC} = \frac{a^3}{9\sqrt{3}}$, đạt được khi $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

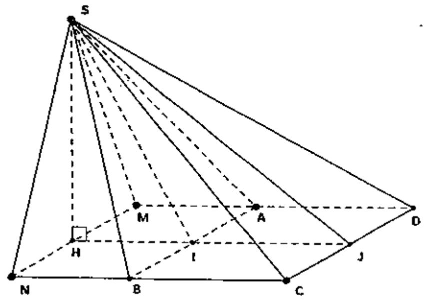
hay $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ (với $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

Chọn A.

Ghi chú của em

Gọi I là trung điểm của AB; J là trung điểm của CD từ giả thiết ta có:

$IJ = a$; $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SJ = \sqrt{SC^2 - JC^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$



Áp dụng định lý cosin cho tam giác SIJ ta có

$$\cos\left(\widehat{SIJ}\right) = \frac{IJ^2 + IS^2 - SJ^2}{2.IJ.IS} = \frac{a^2 + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{11a^2}{4}}{2.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{a^2}{a^2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$$

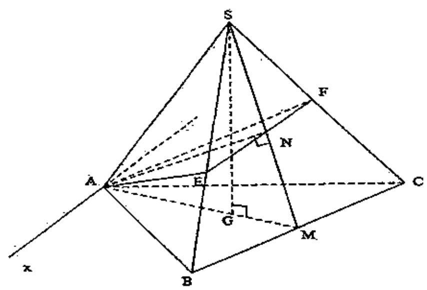
Suy ra, tam giác SIJ là tam giác có $\widehat{SIJ}$ tù. Từ giả thiết tam giác SAB đều và tam giác SCD là cân đỉnh S. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABCD), ta có H thuộc IJ và I nằm giữa HJ tức là tam giác vuông SHI có $\widehat{H} = 90^0$; góc I nhọn và $\cos\widehat{I} = \cos\widehat{SIH} = -\cos\widehat{SIJ} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\widehat{SIJ}$ và $\widehat{SIH}$ kề bù) $\Rightarrow \sin\widehat{SIH} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác SHI ta có $SH = SI\sin\widehat{SIH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn C.

Tổng quát: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\cot\alpha}{24}$.



Ghi chú của em

Áp dụng bài này: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\cot 30^0}{24}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

+ ΔABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

+ Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG\perp(ABC)$

+ Gọi $(P)\cap(SBC)=EF\Rightarrow EF//BC$

$\Rightarrow(P)\cap(SBC)=Ax$ với $Ax//EF//BC$

+ Gọi M là trung điểm của BC, $SM\cap EF=N$

Ta có: $AM\perp BC$, $SG\perp BC$

$\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow AN\perp BC\Rightarrow AN\perp Ax$

Mà $AM\perp BC$, $BC//Ax\Rightarrow AM\perp Ax$

$\Rightarrow\widehat{((P),(ABC))}=\widehat{NAM}=30^0$

Ta có: $\widehat{GSM}=\widehat{NAM}=\alpha$ (cùng phụ với $\widehat{SMA}$)

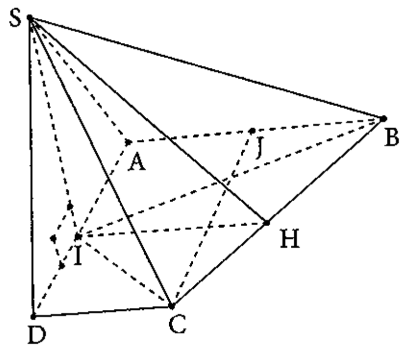
Xét ΔSGM vuông tại G có:

$$SG=GM.\cot\widehat{GSM}=\frac{1}{3}.AM\cot 30^0=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{2}$$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SG=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Chọn A.

Bài 6:



Gọi H trung điểm là của I lên BC, J là trung điểm AB.

Ta có $SI\perp$ mp$(ABCD)$, $IC=\sqrt{ID^2+DC^2}=a\sqrt{2}$

$IB=\sqrt{IA^2+AB^2}=a\sqrt{5}$ và $BC=BC=\sqrt{CJ^2+JB^2}=a\sqrt{5}$

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AD\left(AB+CD\right)=3a^2$

$S_{IBA}=\dfrac{1}{2}.IA.AB=a^2$ và $S_{CDI}=\dfrac{1}{2}.DC.DI=\dfrac{1}{2}a^2$

$\Rightarrow S_{IBC}=S_{ABCD}-S_{IAB}-S_{DIC}=\dfrac{3a^2}{2}$.

Ghi chú của em

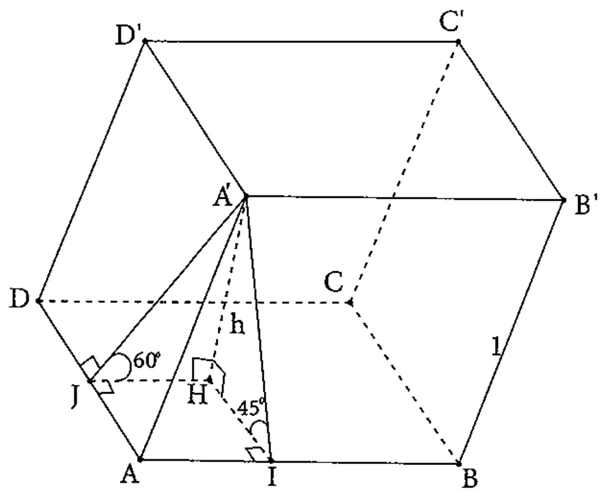
Mặt khác $S_{IBC} = \frac{1}{2} IH.BC$, nên $IH = \frac{2S_{IBC}}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a$.

$SI = IH.\tan 60^0 \frac{9.\sqrt{3}}{5}a$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI.S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$.

Chọn A.

Bài 7:



Dựng $A'H \perp (ABCD)$ và $A'I \perp AB, A'J \perp AD$

$\Rightarrow HI \perp AB, HJ \perp AD$.

Ta có $\widehat{A'IH} = 45°$

$\widehat{A'JH} = 60°$

Đặt $A'H = h$

Tam giác HA'J vuông có $\widehat{A'JH} = 60°$ nên là nửa tam giác đều có cạnh A'J, đường cao A'H, HJ là nửa cạnh.

$\Rightarrow A'J = \frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2h\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow A'J^2 = AA'^2 - A'J^2 = 1 - \frac{12h^2}{9} = \frac{9-12h^2}{9}$

$\Rightarrow AJ = \frac{\sqrt{9-12h^2}}{3}$ với $0 < h < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tam giác HA'I vuông cân tại H

$\Rightarrow IH = A'H = h$

AIHJ là hình chữ nhật.

$$AJ = IH \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9-12h^2}}{3} = h \Leftrightarrow 9-12h^2 = 9h^2 \Leftrightarrow h = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

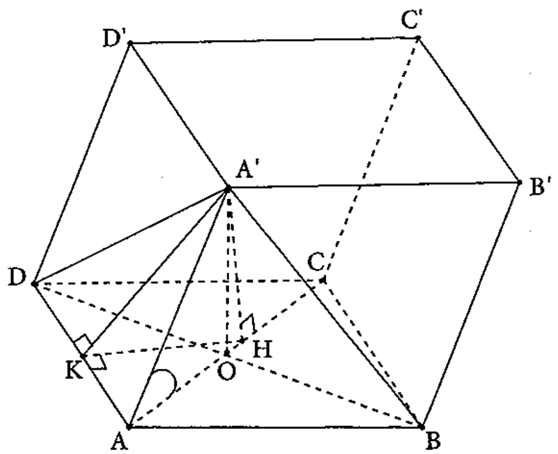
Thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D':

$$V = S_{ABCD}.A'H = \sqrt{3}.\sqrt{7}.\frac{3}{\sqrt{21}} = 3 \text{ (đvtt)}.$$

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 8:



Dựng $A'H \perp AC$ và $A'K \perp AD \Rightarrow \Delta A'BD$ cân tại A' $\Rightarrow A'O \perp BD$

Ta có $\begin{cases} A'O \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (A'AC)$

$\Rightarrow BD \perp AH$

$\Rightarrow AH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow HK \perp AD$

Đặt $\widehat{A'AO} = \beta$. $\Delta HAA'$ vuông tại H$\Rightarrow \cos\beta = \frac{AH}{AA'}$

ABCD là hình thoi $\Rightarrow AC$ là phân giác góc $\widehat{BAD} = \alpha$

ΔKAH vuông tại K

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{AH}$

$\Rightarrow \cos\beta.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA'}.\frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA'} = \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow A'H = AA'.\sin\beta = a\sin\beta$

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$

Ghi chú của em

Do đó ta có : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H$

$= a^2.\sin\alpha.\dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$

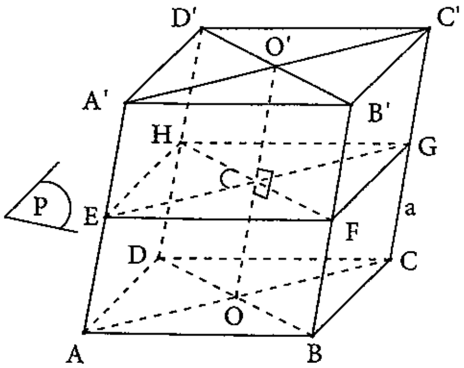
$= 2a^3.\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$

Chọn C.

Bài 9:

Gọi O và O' theo thứ tự là tâm của hai mặt đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Hai mặt chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có giao tuyến là OO', có diện tích theo thứ tự là S_1, S_2.



Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với OO' tại I, cắt các cạnh bên AA', BB', CC' và DD' theo thứ tự tại E, F, G và H ($(P)\perp$ các cạnh bên).

Ta có: $EG, HF \perp OO'$ tại $I \Rightarrow \widehat{EIH} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$.

- $EFGH$ là một thiết diện thẳng của hình hộp và là một hình bình hành.

Do đó, ta có thể tích V của hình hộp là:

$V = S_{EFGH}.AA' = \dfrac{1}{2}.EG.HF.AA'\sin\alpha$

Ta lại có : $S_1 = S_{ACC'A'} = EG.AA' \Leftrightarrow EG = \dfrac{S_1}{a}$

$S_2 = S_{BDD'B'} = HF.BB' \Leftrightarrow HF = \dfrac{S_2}{a}$

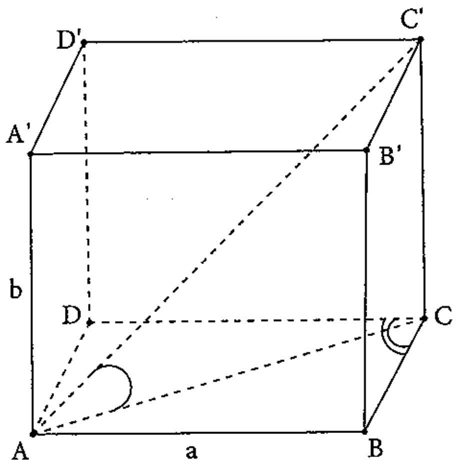
$\Rightarrow V = \dfrac{1}{2}\dfrac{S_1}{a}\dfrac{S_2}{a}a\sin\alpha = \dfrac{S_1S_2\sin\alpha}{2a}$

Chọn D.

Bài 10:

$V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}.\sin\alpha\tan\beta$

Ta có: $CC' \perp (ABCD)$



$\Rightarrow \widehat{CAC'} = \beta$ là góc của AC' và mặt đáy (ABCD)

Xét ΔABC

Ta có :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{ABC}$

$= a^2 + b^2 - 2ab.\cos(180°\text{-}\alpha)$

$= a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha$

$\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}$

Do đó ta có: $CC' = AC.\tan\beta = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.\tan\beta$

Thể tích của hình hộp đứng:

$V = S_{ABCD}.CC' = ab\sin\alpha.\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.\tan\beta$

$\Rightarrow V = ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.\sin\alpha\tan\beta$

Chọn D.

Ghi chú của em

CHỦ ĐỀ 2

MẶT CẦU - KHỐI CẦU

1 Định nghĩa mặt cầu

1. Định nghĩa: Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S(O;R)$

Như vậy, khối cầu $S(O;R)$ là tập hợp các điểm M sao cho $OM \le R$.

2. Công thức tính diện tích mặt cầu, thể tích khối cầu

Gọi R là bán kính của mặt cầu, ta có:

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

3. Phương pháp tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Để tìm mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp bất kì ta cần phải tìm được điểm I cách đều tất cả các đỉnh.

Bước 1: Dựng trục của đáy: là đường thẳng đi qua tâm của đáy và vuông góc với đáy.

Bước 2: Ta thường dựng trung trực của một cạnh bên nào đó cắt trục của đáy tại I, hoặc dựng trục của một mặt bên nào đó cắt trục của đáy tại I. Tâm mặt cầu chính là điểm I, ở bước 2 này phải tùy vào để bài mà ta có cách xử lí cụ thể.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $S = 2\pi a^2$.　　B. $S = 8\pi a^2$.　　C. $S = 16\pi a^2$.　　D. $S = 12\pi a^2$.

Bài 2: Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính R và mặt phẳng (P) có khoảng cách đến O bằng R. Một điểm M tùy ý thuộc (S). Đường thẳng OM cắt (P) tại N. Hình chiếu của O trên (P) là I. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. NI tiếp xúc với (S)　　B. $ON = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IN = R$.

C. Cả A và B đều sai.　　D. Cả A và B đều đúng.

Bài 3: Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu là p. Một mặt phẳng (α) cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là $\dfrac{p}{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) bằng:

A. $\sqrt{\dfrac{p}{\pi}}$.　　B. $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$.　　C. $\sqrt{\dfrac{2p}{\pi}}$.　　D. $\sqrt{\dfrac{p}{2\pi}}$.

Bài 4: Cho mặt cầu $S(O;R)$, A là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và (P) bằng $60°$. Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng:

A. πR^2. **B.** $\frac{\pi R^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi R^2}{8}$.

Bài 5: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a. Khi đó mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng:

A. $\frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$. **C.** $\frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$. **D.** $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $3a$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Bài 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ ta được:

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Bài 9: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Gọi h là chiều cao của khối chóp và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Tỉ số $\frac{R}{h}$ bằng:

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{7}{24}$. **C.** $\frac{7}{6}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Bài 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $60°$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Bài 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn $AD = 2a, AB = BC = CD = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{R}{a}$ nhận giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa SC với đáy bằng $45°$. Gọi N là trung điểm SA, h là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $N.ABC$. Biểu thức liên hệ giữa R và h là:

A. $4R = \sqrt{5}h.$ **B.** $\sqrt{5}R = 4h.$ **C.** $R = \frac{4}{5\sqrt{5}}h.$ **D.** $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}h.$

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}.$ **B.** $a.$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $\frac{a}{2}.$

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc đáy $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HBCD$ có giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}.$ **B.** $a.$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $\frac{a}{2}.$

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh bên SB và SC. Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$ **B.** $\sqrt{2}\pi a^3.$ **C.** $\frac{\pi a^3}{6}.$ **D.** $\frac{\pi a^3}{2}.$

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $BD = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là trung điểm OD. Đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc bằng $60°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{a}{4}.$ **B.** $\frac{a}{3}.$ **C.** $\frac{a}{2}.$ **D.** $a.$

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB). Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $R = d\left[G,(SAB)\right].$ **B.** $3\sqrt{13}R = 2SH.$ **C.** $\frac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}.$ **D.** $\frac{R}{a} = \sqrt{13}.$

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$ **B.** $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}.$ **C.** $\frac{\pi a^3}{6}.$ **D.** $\frac{\pi a^3}{3}.$

Bài 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh bằng a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy (ABC). Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{39}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Bài 20: Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh AS, AB, AC đôi một vuông góc và $AS = a, AB = 2a, AC = 3a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là:

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Bài 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = AC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC, SI tạo với đáy (ABC) một góc $60°$. Gọi S, V lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V}{S}$ bằng ?

A. $a\sqrt{14}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{12}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{14}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Bài 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120°$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ACD$ nhận giá trị:

A. $\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$.

Bài 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $BC = a$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, $SA = SB = a, \widehat{ASB} = 120°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Bài 24: Cho hình cầu (S) tâm O, bán kính R. Hình cầu (S) ngoại tiếp một hình trụ tròn xoay (T) có đường cao bằng đường kính đáy và hình cầu (S) lại nội tiếp trong một nón tròn xoay (N) có góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính tỉ số thể tích của hình trụ (T) và hình nón (N).

A. $\frac{V_T}{V_N} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\frac{V_T}{V_N} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{V_T}{V_N} = \frac{6\sqrt{2}}{2}$ **D.** Chọn khác.

Bài 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AC = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{ACB}$ bằng $30°$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng:

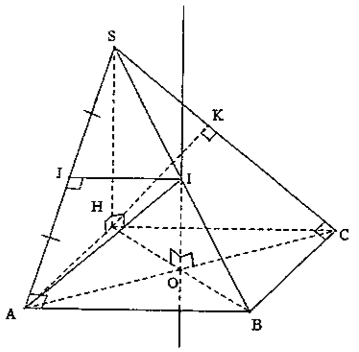
A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{8}$.

Bài 26: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc $60°$ và điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{85a}{108}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{31a}{36}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1:



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC)

Ta có $\begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$

Tương tự, $AH \perp AB$

Và ΔABC vuông cân tại B nên $ABCH$ là hình vuông.

Gọi $O = AC \cap BH$, O là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại I, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp. Ta hoàn toàn có $IJ \perp SA \Rightarrow IJ // AB \Rightarrow I$ là trung điểm SB, hay $I = d \cap SC$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S.ABC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}$

$$IJ = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do $AH // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC)) = HK$ (K là hình chiếu của H lên SC và $BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC)$)

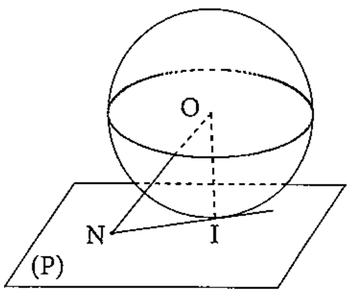
$\Rightarrow HK = a\sqrt{2}$ tam giác SHC vuông tại $H \Rightarrow SH = a\sqrt{6}$

Tam giác SHA vuông tại $H \Rightarrow SA = 3a$

$JA = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2.$

Chọn D.

Bài 2:



Vì I là hình chiếu của O trên (P) nên $d[O,(P)] = OI$ mà $d[O,(P)] = R$ nên I là tiếp điểm của (P) và (S).

Đường thẳng OM cắt (P) tại N nên IN vuông góc với OI tại I.

Suy ra IN tiếp xúc với (S).

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 3.

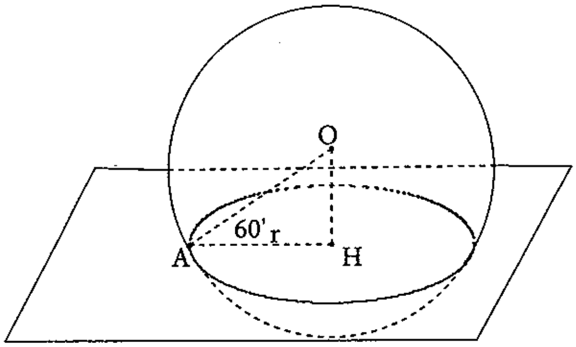
Hình tròn lớn của hình cầu S là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu. Gọi R là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính là R.

Theo giả thiết, ta có, $\pi R^2 = p \Leftrightarrow R = \sqrt{\dfrac{p}{\pi}}$ và $\pi r^2 = \dfrac{p}{2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{p}{2\pi}}$.

Suy ra $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\dfrac{p}{2\pi}}$.

Chọn D.

Bài 4.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) thì:

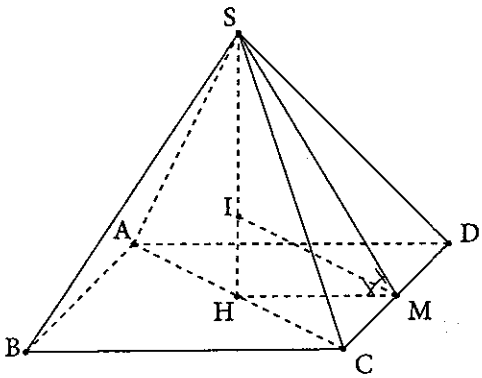
- H là tâm của đường tròn giao tuyến (P) và (S).
- $\widehat{(OA,(P))} = \widehat{(OA,AH)} = 60°$.

Bán kính của đường tròn giao tuyến: $r = HA = OA.\cos 60° = \dfrac{R}{2}$.

Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến: $\pi r^2 = \pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi R^2}{4}$.

Chọn C.

Bài 5.



Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Gọi M là trung điểm của CD và I là chân đường phân

Ghi chú của em

giác trong của góc $\widehat{SMH}\left(I\in SH\right)$. Suy ra I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính $IH=r$.

Ta có $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MH=\dfrac{a}{2}$.

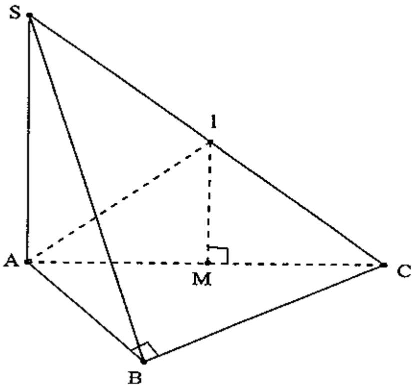
Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{IS}{IH}=\frac{MS}{MH}\Rightarrow\frac{SH}{IH}=\frac{MS+MH}{MH}$$

$$\Rightarrow IH=\frac{SH.MH}{MS+MH}=\frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Chọn B.

Bài 6.



Gọi M là trung điểm AC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi I là trung điểm $2SC$, suy ra $IM//SA$ nên $IM\perp\left(ABC\right)$.

Do đó IM là trục của ΔABC, suy ra $IA=IB=IC$ (1)

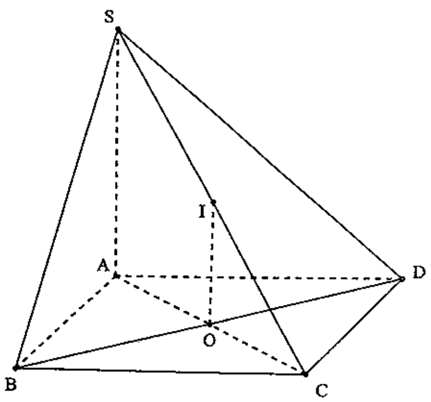
Hơn nữa, tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm SC nên $IS=IC=IA$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $IS=IA=IB=IC$ hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Vậy bán kính $R=IS=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chọn C.

Bài 7.



Gọi $O=AC\cap BD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra $IO//SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.

Do đó IO là trục của hình vuông $ABCD$, suy ra:

$IA = IB = IC = ID \quad (1)$

Tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm cạnh huyền SC nên $IS = IC = IA \quad (2)$

Từ $(1),(2)$, ta có: $R = IA = IB = IC = ID = IS = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}$

Vậy diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$ (đvdt).

Chọn B.

Bài 8:

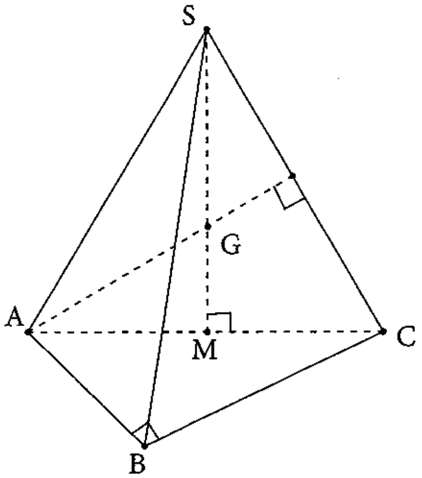
Gọi M là trung điểm AC, suy ra $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$

Tam giác SAC có SM là đường cao và cũng là trung tuyến nên tam giác SAC cân tại S

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$, suy ra tam giác SAC đều.

Gọi G là trọng tâm ΔSAC, suy ra $GS = GA = GC \quad (1)$

Tam giác ABC vuông tại B, có M là trung điểm cạnh huyền AC nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Lại có $SM \perp (ABC)$ nên SM là trục của tam giác ABC.

Mà G thuộc SM nên suy ra $GA = GB = GC \quad (2)$

Từ $(1),(2)$, suy ra $GS = GA = GB = GC$ hay G là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu $R = GS = \dfrac{2}{3}SM = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Chọn B.

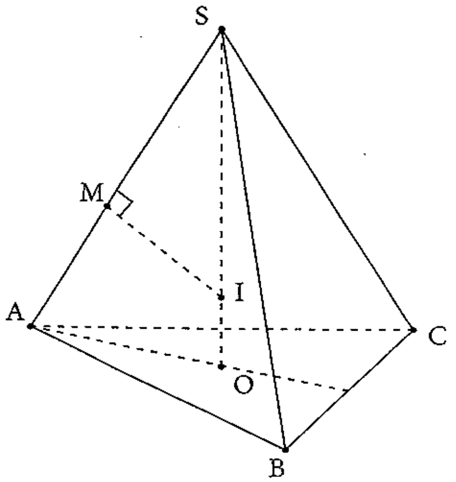
Bài 9:

Gọi O là tâm ΔABC, suy ra $SO \perp (ABC)$ và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ghi chú của em

Trong SOA, ta có $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a}{2}$.

Ghi chú của em



Trong mặt phẳng (SOA), kẻ trung trực d của đoạn SA cắt SO tại I, suy ra

- $I \in d$ nên $IS = IA$.
- $I \in SO$ nên $IA = IB = IC$.

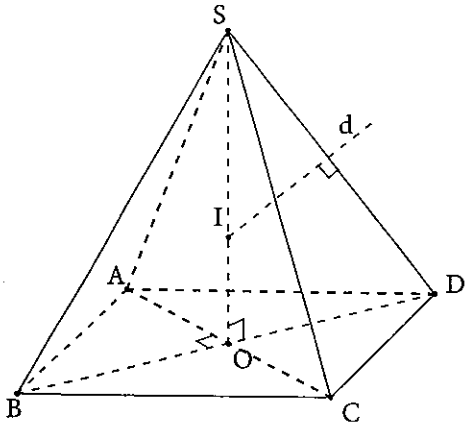
Do đó $IA = IB = IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Gọi M là tung điểm SA, ta có ΔSOA đồng dạng ΔSMI nên $R = SI = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{7a}{12}$

Vậy $\frac{R}{h} = \frac{7}{6}$.

Chọn C.

Bài 10:



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có $60° = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,OB} = \widehat{SBO}$

Trong ΔSOB, ta có $SO = OB.\tan\widehat{SBO} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có SO là trục của hình vuông $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SOB), kẻ đường trung trực d của đoạn SB.

Gọi $I = SO \cap d \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IS = IB \end{cases}$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS = R$

Xét ΔSBD có $\begin{cases} SB = SD \\ \widehat{SBD} = \widehat{SBO} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

Do đó, d cũng là đường trung tuyến của ΔSBD. Suy ra I là trọng tâm ΔSBD.

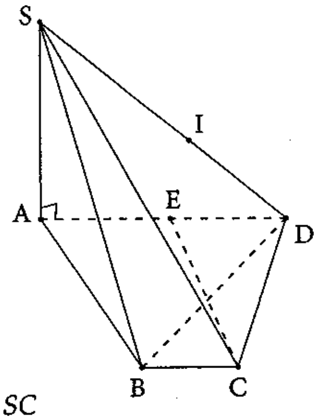
Bán kính mặt cầu $R = SI = \dfrac{2}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{8.\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Chọn D.

Ghi chú của em

Bài 11.



Ta có $SA \perp AD$ hay $\widehat{SAD} = 90^\circ$.

Gọi E là trung điểm AD.

Ta có $EA = AB = BC$.

Nên $ABCE$ là hình thoi.

Suy ra $CE = EA = \dfrac{1}{2}AD$.

Do đó, tam giác ACD vuông tại C.

Ta có:

$\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp SC$

hay $\widehat{SCD} = 90^\circ$

Tương tự, ta cũng có $SB \perp BD$ hay $\widehat{SAD} = 90^\circ$.

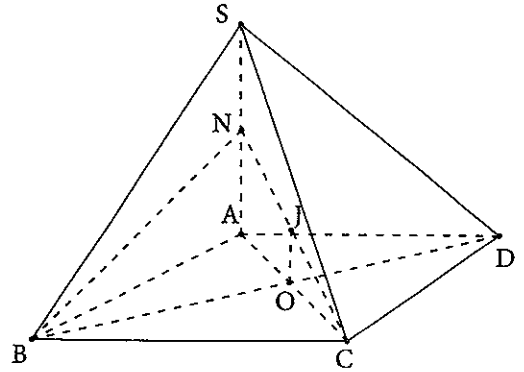
Ta có $\widehat{SAD} = \widehat{SCD} = \widehat{SBD} = 90^\circ$ nên khối chóp $S.ABCD$ nhận trung điểm I của SD làm tâm mặt cầu ngoại tiếp, bán kính

$R = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $\dfrac{R}{a} = \sqrt{2}$.

Chọn D.

[illegible]



Ta có $45° = \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA}$.

Trong ΔSAC, ta có $h = SA = a\sqrt{5}$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BN$.

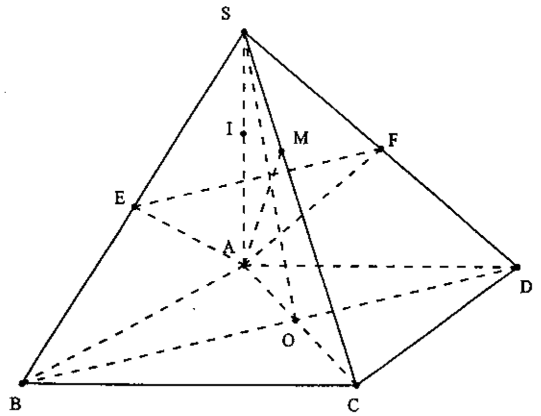
Lại có $NA \perp AC$. Do đó, hai điểm A, B cùng nhìn đoạn NC dưới một góc vuông nên hình chóp $N.ABC$ nội tiếp mặt cầu tâm J là trung điểm NC, bán kính

$$R = IN = \frac{NC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \frac{5a}{4}.$$

Chọn A.

[illegible]

Mặt phẳng (α) song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F nên $EF // BD$. ΔSAC cân tại A, trung tuyến AM nên $AM \perp SC$ (1)



Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Do đó $EF \perp SC$ (2).

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Từ $(1),(2)$, suy ra $SC\perp(\alpha)\Rightarrow SC\perp AE(*)$

Lại có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AE(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra $AE\perp(SBC)\Rightarrow AE\perp SB$.

Tương tự ta cũng có $AF\perp SD$

Do đó $\widehat{SEA}=\widehat{SMA}=\widehat{SFA}=90°$ nên năm điểm S,A,E,M,F cùng thuộc mặt cầu tâm I là trung điểm của SA, bán kính $R=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn C.

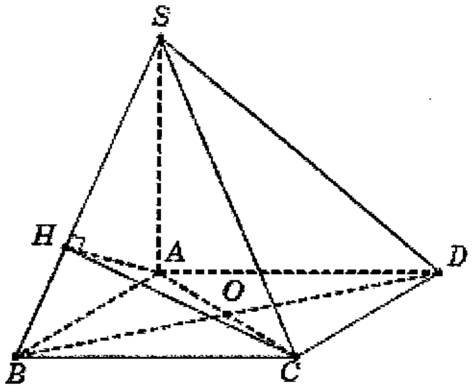
Bài 14:

Gọi $O=AC\cap BD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OB=OD=OC(1)$

Ta có $\begin{cases}CB\perp B\\CB\perp SA\end{cases}\Rightarrow CB\perp(SAB)\Rightarrow CB\perp AH.$

Lại có $AH\perp SB$. Suy ra $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp HC$ nên tam giác AHC vuông tại H và có O là trung điểm cạnh huyền AC nên suy ra $OH=OC(2)$



Từ $(1),(2)$, suy ra $R=OH=OB=OC=OD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

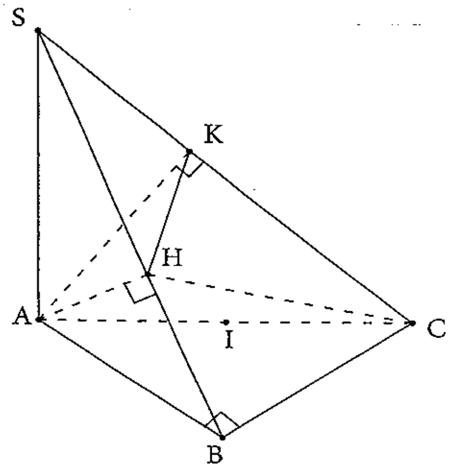
Chọn C.

Bài 15:

Theo giả thiết, ta có $\widehat{ABC}=90°,\widehat{AKC}=90°$ (1)

Do $\begin{cases}AH\perp SB\\BC\perp AH\ (BC\perp(SAB))\end{cases}\Rightarrow AH\perp HC$ (2)

Từ $(1),(2)$, suy ra ba điểm B,H,K cùng nhìn xuống AC dưới một góc $90°$ nên hình chóp $A.HKCB$ nội tiếp mặt cầu tâm I là trung điểm AC, bán kính $R=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ghi chú của em

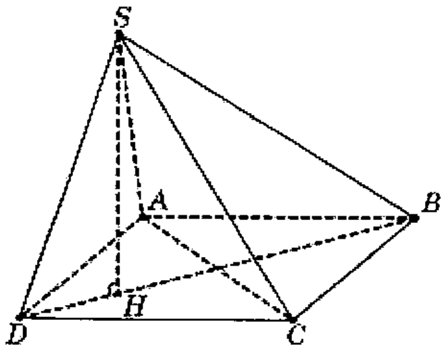
Vậy thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (đvtt).

Chọn A.

Bài 16:

Ta có $60° = \left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SD,HD}\right) = \widehat{SDH}$.

Trong tam giác vuông SDH, có $SH = \frac{BD}{4}\tan\widehat{SDH} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, và $SD = \frac{HD}{\cos\widehat{SDH}} = \frac{a}{2}$



Trong tam giác vuông SHB, có $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SBD, ta có $SB^2 + SD^2 = a^2 = BD^2$.

Suy ra tam giác SBD vuông tại S. Vậy các đỉnh S, A, C cùng nhìn xuống BD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là O bán kính $R = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$.

Chọn C.

Bài 17:

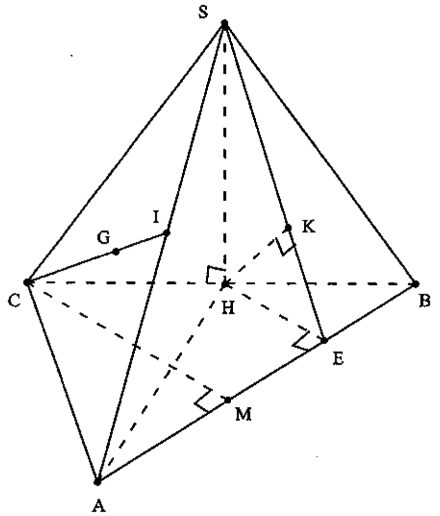
Ta có $60° = \left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA,HA}\right) = \widehat{SAH}$.

Ghi chú của em

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHA, ta có $SH = AH.\tan\widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$.

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d[G,(SAB)]$



Ta có $d[G,(SAB)] = \frac{1}{3}d[C,(SAB)] = \frac{2}{3}d[H,(SAB)]$

Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB, MB.

Suy ra $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SE, suy ra $HK \perp SE(1)$

Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK(2)$

Từ $(1),(2)$, suy ra $HK \perp (SAB), d[H,(SAB)] = HK$.

Trong tam giác vuông SHE, ta có $HK = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$

Vậy $R = \frac{2}{3}HK = \frac{a}{\sqrt{13}}$.

Chọn D.

Bài 19

Gọi $O = AC \cap BD$. Suy ra $OA = OB = OC = OD(1)$

Gọi M là trung điểm AB, do tam giác SAB vuông tại S nên $MS = MA = MB$.

Gọi H là hình chiếu của S trên AB.

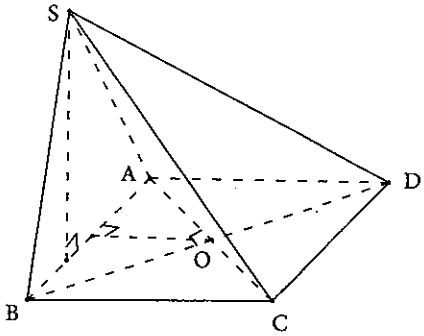
Từ giả thiết suy ra:

$SH \perp (ABCD)$

Ta có:

$\begin{cases} OM \perp AB \\ OM \perp SH \end{cases}$

$\Rightarrow OM \perp (SAB)$



Nên OM là trục của tam giác SAB, suy ra. OA = OB = OS (2). Từ $(1),(2)$, ta có $OS = OA = OC = OD$.

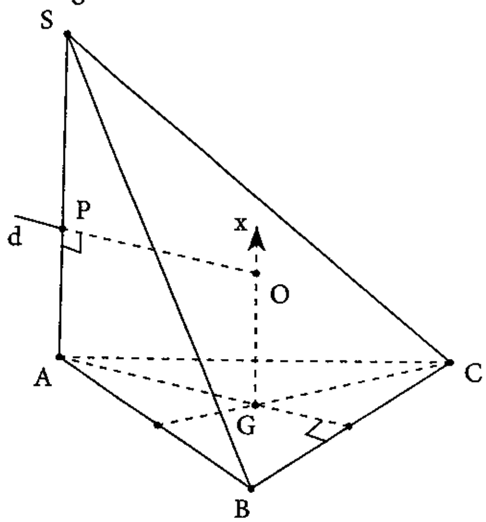
Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$, bán kính $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (đvtt).

Chọn A.

Bài 19:

Gọi G là trọng tâm ΔABC, suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Từ G dựng tia $Gx \perp (ABC)$ (như hình vẽ). Suy ra Gx là trục của tam giác ABC. Trong mặt phẳng (SA, Gx), kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA.



Gọi $O = Gx \cap d \Rightarrow \begin{cases} O \in Gx \\ O \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OA = OS \end{cases}$

$\Rightarrow OA = OB = OC = OS = R$

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $OG = PA = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$AG=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

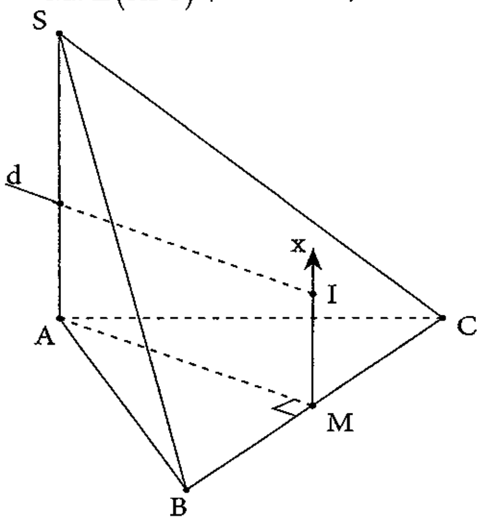
Trong tam giác vuông OGA, ta có $R=OA=\sqrt{OG^2+AG^2}=\frac{a\sqrt{39}}{6}$

Chọn C.

Bài 20:

Gọi M là trung điểm BC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Kẻ $Mx\perp(ABC)$ (như hình vẽ).



Suy ra Mx, là trục của ΔABC. Trong mặt phẳng (SA,Mx) kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA cắt Mx tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bán kính mặt cầu: $R=IA=\sqrt{IM^2+AM^2}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn D.

Bài 21:

Ta có:

$60°=\left(\widehat{SI,(ABC)}\right)=\left(\widehat{SI,AI}\right)=\widehat{SIA}$

Tam giác ABC vuông cân tại A,

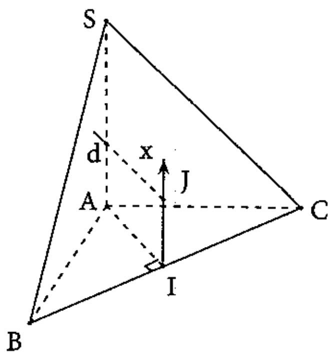
suy ra $AI=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong ΔSAI, ta có:

$SA=AI.\tan\widehat{SIA}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Kẻ $Ix\perp(ABC)$ (như hình vẽ).

Suy ra Ix là trục của ΔABC.



Ghi chú của em

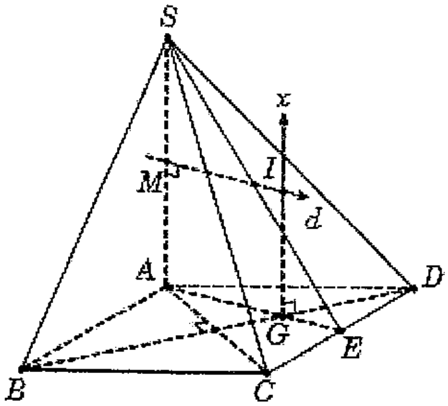
Trong mặt phẳng (SA, Ix), kẻ trung trực d của đoạn thẳng SA cắt Ix tại J. Khi đó, J chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bán kính: $R = JA = \sqrt{JI^2 + AI^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$ nên $\frac{V}{S} = \frac{R}{3} = \frac{a\sqrt{14}}{12}$.

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 22:



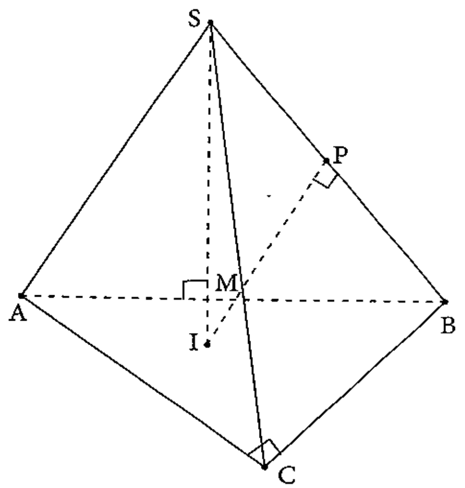
Gọi G là trọng tâm tam giác đều ACD. Kẻ $Gx \perp (ACD)$, suy ra Gx là trục của ΔACD. Trong mặt phẳng (SA, Gx), kẻ trung trực d của đoạn SA cắt Gx tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta có $IG = MA = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $GA = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra bán kính: $R = IA = \sqrt{IG^2 + GA^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$.

Chọn A.

Bài 23:



Gọi M là trung điểm AB, suy ra $SM \perp AB$ và $SM \perp (ABC)$.

Do đó, SM là trục của tam giác ABC.

Ghi chú của em

Trong mặt phẳng (SMB), kẻ đường trung trực d của đoạn SB cắt SM tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính R=SI.

Ta có: $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\widehat{ASB}} = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông SMB ta có

$SM = SB.\cos\widehat{MSB} = a.\cos 60° = \dfrac{a}{2}$

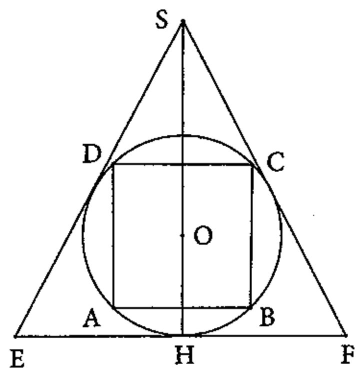
Ta có ΔSPI đồng dạng ΔSMB.

Suy ra $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SP}{SI} \Rightarrow R = SI = \dfrac{SB.SP}{SM} = a.$

Chọn C.

Bài 24:

Bài quy về hình nón tâm O ngoại tiếp hình vuông ABCD và nội tiếp tam giác đều SEF mà EF // AB.



Vì OAB là tam giác vuông cân nên. $AB = BC = R\sqrt{2}$

Suy ra:

$$V_T = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 BC = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$$

Ta thấy, tâm O của hình tròn cũng chính là tâm của hình vuông ABCD đồng thời cũng là trọng tâm của tam giác đều SEF.

Như vậy, đường cao của tam giác SEF là $SH = 3OH = 3R$

Trong tam giác EOH (vuông tại H, $\widehat{EOH} = 30°$).

Ta có: $EH = OH.\sqrt{3} = R\sqrt{3}$

Thể tích của hình nón :

$$V_N = \frac{1}{3}\pi EH^2.SH = \frac{1}{3}\pi 3R^2.3R = 3\pi R^3$$

Vậy $\dfrac{V_T}{V_N} = \dfrac{\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}}{3\pi R^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}.$

Chọn A.

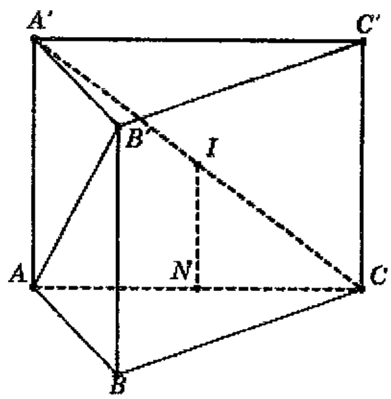
Bài 25:

Ta có $60° = \left(\widehat{AB',(ABC)}\right) = \left(\widehat{AB',AB}\right) = \widehat{B'AB}.$

Trong ΔABC, ta có $AB = AC.\sin\widehat{ACB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong $\Delta B'BA$, ta có $BB' = AB.\tan\widehat{B'AB} = \dfrac{3a}{2}$

Gọi N là trung điểm AC, suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Gọi I là trung điểm $A'C$, suy ra $IN//A'A \Rightarrow IN \perp (ABC)$.

Do đó IN là trục của ΔABC, suy ra $IA = IB = IC\,(1)$

Hơn nữa, tam giác $A'AC$ vuông tại A có I là trung điểm $A'C$ nên $IA' = IB' = IC'\,(2)$

Từ (1),(2), ta có $IA' = IA = IB = IC$ hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$ với bán kính $R = IA' = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{4}$

Chọn B.

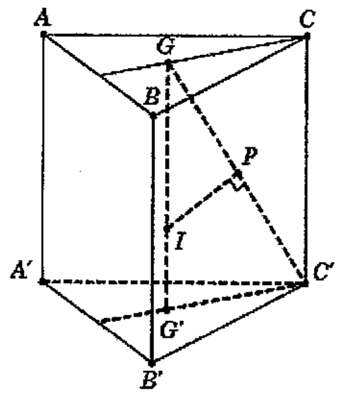
Bài 26

Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có:

$60° = \widehat{(AB'C')(A'B'C')} = \widehat{AM, A'M} = \widehat{AMA'}$.

Trong $\Delta AA'M$, có $A'M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AA' = A'M.\tan\widehat{AMA'} = \dfrac{3a}{2}$.

Gọi G' là trọng tâm tam giác đều $A'B'C'$, suy ra G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$ Vì lặng trụ đứng nên $GG' \perp (A'B'C')$.



Do đó GG' là trục của tam giác $A'B'C'$.

Trong mặt phẳng $(GC'G')$, kẻ trung trực d của đoạn thẳng GC' cắt GG' tại I.

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $GA'B'C'$, bán kính $R = GI$

Ta có $\Delta GPI \sim \Delta GG'C' \Rightarrow \dfrac{GP}{GI} = \dfrac{GG'}{GC'}$

$\Rightarrow R = GI = \dfrac{GP.GC'}{GG'} = \dfrac{GC'^2}{2GG'} = \dfrac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \dfrac{31a}{36}$

Chọn D.

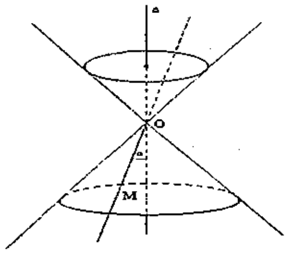
CHỦ ĐỀ 3

MẶT NÓN - KHỐI NÓN

1 Định nghĩa mặt nón

Cho đường thẳng Δ. Xét 1 đường thẳng l cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ gọi là mặt nón tròn xoay hay đơn giản là mặt nón

- Δ gọi là trục của mặt nón
- l gọi là đường sinh của mặt nón
- O gọi là đỉnh mặt nón
- Nếu gọi α là góc giữa l và Δ thì 2α gọi là góc ở đỉnh của mặt nón $\left(0^0 < 2\alpha < 180^0\right)$



2 Hình nón và khối nón

Cho mặt nón N với trục Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh 2α. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại I khác O.

Mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo đường tròn (C) có tâm I. Gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O. Khi đó

- Phần của mặt nón N giới hạn bởi 2 mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn xác định bởi (C) gọi là hình nón

- Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

3 Diện tích hình nón và thể tích khối nón

- Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$ với R là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.
- Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi R^2.h$ với R là bán kính đáy, h là chiều cao.

Lý thuyết ngắn gọn là thế, tuy nhiên sẽ có rất nhiều bài tập vận dụng cao đòi hỏi khả năng tư duy cao.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 1$, đáy lớn $CD = 3$, cạnh bên $\sqrt{2}, BC = DA = \sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng:

A. $V = \frac{7}{3}\pi$ **B.** $V = \frac{4}{3}\pi$ **C.** $V = \frac{5}{3}\pi$ **D.** $V = 3\pi$

Bài 2: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} = \alpha\,(0^0 < \alpha < 90^0), AD = a$ và $\widehat{ADB} = 90°$. Quay $ABCD$ quanh AB, ta được vật tròn xoay có thể tích là:

A. $V = \pi a^3 \sin^2\alpha$ **B.** $V = \pi a^3 \sin\alpha.\cos\alpha$

C. $V = \pi a^3 \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ **D.** $V = \pi a^3 \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

Bài 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O', O là tâm của 2 hình vuông $A'B'C'D'$ và $ABCD$ và $O'O = a$. Gọi V_1 là thể tích của hình trụ tròn xoay đáy là 2 đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$ và V_2 là thể tích hình nón tròn xoay đỉnh O' và đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

Bài 4: Cho ΔABC vuông cân tại C, nội tiếp trong đường tròn tâm O, đường kính AB. Xét điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho SA, SB, SC tạo với (ABC) góc 45^0. Hãy chọn phát biểu đúng:

A. Hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔABC là hình nón tròn xoay.

B. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân.

C. Khoảng cách từ O đến 2 thiết diện qua đỉnh (SAC) và (SBC) bằng nhau.

D. Cả 3 Bài trên đều đúng.

Bài 5: Cho tứ diện $OABC$ có OAB là tam giác vuông cân. $OA = OB = a$, $OC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ và $OC \perp (OAB)$. Xét hình nón tròn xoay đỉnh C, đáy là đường tròn tâm O, bán kính A. Hãy chọn phát biểu sai.

A. Đường sinh hình nón bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

B. Khoảng cách từ O đến thiết diện (ABC) bằng $\dfrac{a}{2}$

C. Thiết diện (ABC) là tam giác đều

D. Thiết diện (ABC) hợp với đáy góc 45^0

Bài 6: Hình nón tròn xoay nội tiếp trong tứ diện đều cạnh bằng a có diện tích xung quanh bằng

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi}{4}a^2$ **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi}{6}a^2\sqrt{2}$

C. $S_{xq} = \dfrac{\pi}{6}a^2\sqrt{3}$ **D.** $S_{xq} = \dfrac{2\pi}{3}a^2$

Bài 7: Hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a, có diện tích xung quanh là:

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{3}$ **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

C. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$

Bài 8: Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R = 5$. Một thiết diện qua đỉnh S tạo thành tam giác SAB sao cho tam giác SAB đều, cạnh bằng 8. Khoảng cách từ O đến thiết diện (SAB) là:

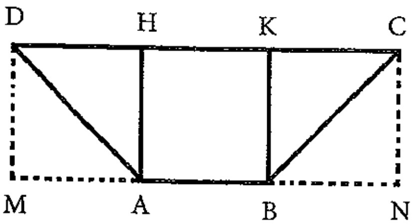
A. $d=\frac{4}{3}\sqrt{13}$ **B.** $d=\frac{3}{4}\sqrt{13}$ **C.** $d=3$ **D.** $d=\frac{\sqrt{13}}{3}$

Bài 9: Hình nón tròn xoay có trục $SO=R\sqrt{3}$ với R là bán kính đáy, thiết diện qua trục của hình nón tạo thành tam giác SAB là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của SO và $E, F\in SO$ sao cho $\frac{EI}{EO}=\frac{FI}{FO}=\frac{1}{2}$. Khi đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón là điểm:

A. I **B.** E **C.** F **D.** O

Ghi chú của em

Bài 1:



Kẻ AH, BK cùng vuông góc với CD.

Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của H qua AD và của K qua BC thì ΔMAD và ΔNBC là 2 tam giác vuông cân bằng nhau có $MA = AB = BN = AH = 1$.

$$V = \pi.AH^2.MN - \left(\frac{1}{3}\pi.AH^2.MA + \frac{1}{3}\pi.AH^2.NB\right)$$

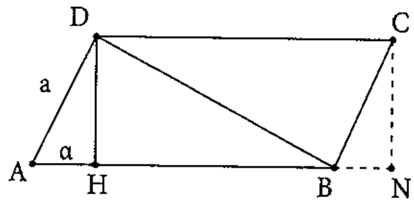
$$= \pi AH^2\left(MN - \frac{MA}{3} - \frac{NB}{3}\right) = \pi.AH^2.\frac{7}{3}.AB = \frac{7}{3}\pi.$$

Chọn A.

Bài 2:

Kẻ $DH \perp AB$, $CN \perp AB$.

Các tam giác vuông HAD và NBC bằng nhau.



$DH = CN = a.\sin\alpha$

$AH = BN = a.\cos\alpha$

$\Rightarrow HN = AB = \dfrac{a}{\cos\alpha}$

Khi quay quanh AB, các tam giác vuông AHD và NBC tạo thành hai hình nón tròn xoay bằng nhau nên

$$V = \frac{1}{3}\pi.DH^2.AH + \left(\pi.DH^2.HN - \frac{1}{3}\pi.CN^2.BN\right)$$

$$= \pi.DH^2.AB = \pi.a^2.\sin^2\alpha.\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{\pi a^3\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

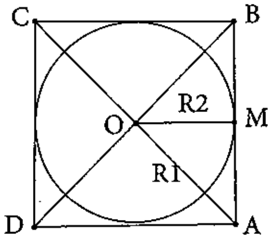
Chọn C.

Bài 3:

Gọi M là trung điểm của AB thì ΔOAM vuông cân tại M.

$R_1 = OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $R_2 = OM = \frac{1}{2}$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2.h}{\frac{1}{3}\pi R_2^2.h} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right) = 6$$



Chọn D.

Bài 4:

Kẻ $SO' \perp (ABC)$. Ta có: $\Delta SO'A = \Delta SO'B = \Delta SO'C$

$\Rightarrow SA = SB = SC, O'A = O'B = O'C$

Vậy, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên O' ≡ O: A đúng.

ΔSAB có $\widehat{SAB} = \widehat{SBA} = 45^0$ nên là tam giác vuông cân tại S: B đúng.

Vì ΔABC vuông cân tại C nên kẻ $OM \perp CA$ và $ON \perp CB$ thì:

$OM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}CA = ON.$

Chọn D.

Bài 5:

Tam giác OAB vuông cân tại O nên $AB = a\sqrt{2}$

$\Delta OAC:\ AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$

$AC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vì $AB \neq AC$: C sai

Chọn C.

Bài 6:

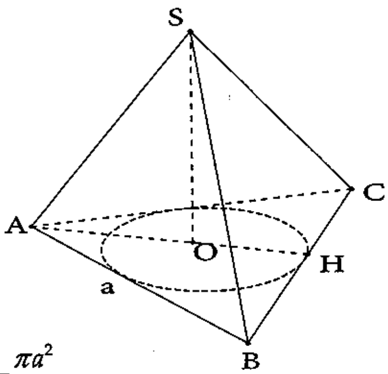
Gọi $S.ABC$ là tứ diện đều cạnh A.

Gọi H là trung điểm cạnh BC.

Kẻ $SO \perp (ABC)$ thì $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

là đường sinh của hình nón.

Ba điểm A, O, H thẳng hàng.



$HO = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$S_{xq} = \pi.OH.SH = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$

Chọn A.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 7:

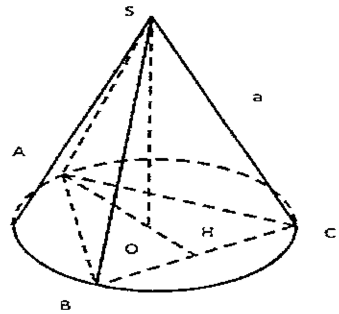
Kẻ $SO\perp(ABC)$, $SH\perp BC$ => $OH\perp BC$

Ta có:

$$OA=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{xq}=\pi.OA.SA=\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a$$

$$S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$$



Chọn C.

Bài 8:

$SO\perp(OAB)$, kẻ $SH\perp AB$ => $OH\perp AB$

$AB\perp(SOH)$ => $(SAB)\perp(SOH)$

Kẻ $OI\perp SH$ thì $OI\perp(SAB)$ nên $d = OI$

$\Delta SOA:\ OS^2=64-25=39$

$\Delta OHA:\ OH^2=25-16=9$

$$\Rightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{39}=\frac{16}{117}\Leftrightarrow OI=\frac{3}{4}\sqrt{13}.$$

Chọn B.

Bài 9:

Gọi O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì:

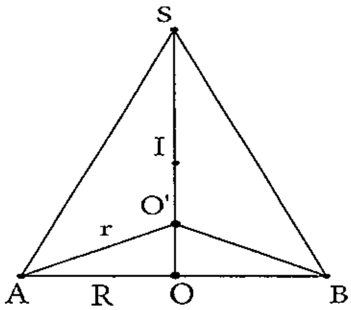
$r=O'S=O'A=O'B.$

Ta có:

$$OO'=OS-r=R\sqrt{3}-\frac{R}{\cos 30^\circ}$$

$$OO'=R\sqrt{3}-\frac{2R\sqrt{3}}{3}=\frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{OO'}{OI}=\frac{\frac{R\sqrt{3}}{3}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{OO'}{OI}=\frac{2}{3}$$



Vậy $O'\equiv E$.

Chọn B.

CHỦ ĐỀ 4

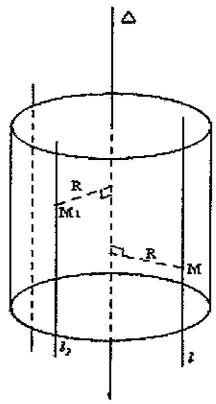
MẶT NÓN - KHỐI NÓN

1 Định nghĩa mặt trụ

- Cho đường thẳng Δ. Xét 1 đường thẳng l song song với Δ, cách Δ một khoảng R. Khi đó:

Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế được gọi là mặt trụ tròn xoay hoặc đơn giản là mặt trụ

- Δ gọi là trục của mặt trụ, l gọi là đường sinh và R gọi là bán kính mặt trụ.



2 Hình trụ và khối trụ

Cắt mặt trụ (T) trục Δ, bán kính R bởi 2 mặt phẳng phân biệt (P) và (P') cùng vuông góc với Δ ta được giao tuyến là 2 đường tròn (C) và (C').

a) Phần mặt trụ (T) nằm giữa 2 mặt phẳng (P) và (P') cùng với 2 hình tròn xác định bởi (C) và (C') được gọi là hình trụ

- Hai đường tròn (C) và (C') được gọi là 2 đường tròn đáy, 2 hình tròn xác định bởi chúng được gọi là 2 mặt đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính hình trụ. Khoảng cách giữa 2 mặt đáy gọi là chiều cao của hình trụ

- Nếu gọi O và O' là tâm 2 hình tròn đáy thì đoạn OO' gọi là trục của hình trụ

- Phần mặt trụ nằm giữa 2 đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ

b) Hình trụ cùng với phần bên trong của nó gọi là khối trụ

3 Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ

Với R là bán kính đáy, h là chiều cao.

- Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rh$

- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

- Thể tích khối trụ $V = \pi R^2.h$ (chiều cao nhân diện tích đáy).

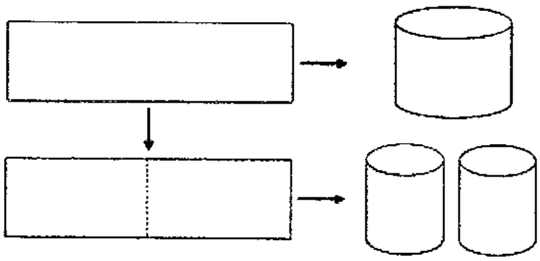
Trước hết tôi xin nhắc lại hai bài trong đề Minh họa tháng 10 vừa rồi của Bộ Giáo dục và Đào tạo, hai bài hỏi này chỉ ở mức vận dụng thấp.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm \times 240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$

Trích đề minh họa THPT Quốc gia 2017

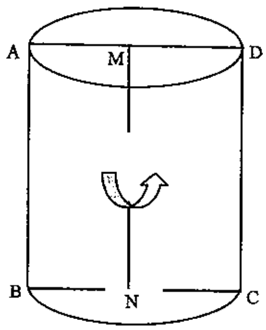
Bài 2. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$, $AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó.

A. $S_{tp}=4\pi$

B. $S_{tp}=2\pi$

C. $S_{tp}=6\pi$

D. $S_{tp}=10\pi$



Trích đề minh họa THPT Quốc gia 2017

Sau đây chúng ta cùng tìm hiểu các bài toán khó hơn và hoàn toàn có thể có trong đề thi THPT Quốc gia 2017.

Bài 3. Cho $AA'B'B$ là thiết diện song song với trục OO' của hình trụ (A, B thuộc đường tròn tâm O). Cho biết $AB=4$, $AA'=3$ và thể tích của hình trụ bằng $V=24\pi$. Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (AA'B'B) là:

A. $d=1$ **B.** $d=2$ **C.** $d=3$ **D.** $d=4$

Bài 4. Giả sử viên phấn viết bảng có dạng hình trụ tròn xoay đường kính đáy bằng 1cm, chiều dài 6cm. Người ta làm những hộp carton đựng phấn dạng hình hộp chữ nhật có kích thước $6 \ x \ 5 \ x \ 6$ cm. Muốn xếp 350 viên phấn vào 12 hộp, ta được kết quả nào trong 4 khả năng sau:

A. Vừa đủ **B.** Thiếu 10 viên **C.** Thừa 10 viên **D.** Không xếp được

Bài 5: Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng A. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2A$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Bài 6: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác có $AB = 5,\ AC = 8$ và góc $\widehat{(AB;AC)} = 60^0$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ ngoại tiếp và nội tiếp khối lăng trụ đã cho. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$?

A. $\frac{9}{49}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{19}{49}$ D. $\frac{29}{49}$

Bài 7: Một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h nội tiếp một khối trụ. Tính thể tích khối trụ đó.

A. $\frac{\pi a^2 h}{3}$ B. $\frac{\pi 2a^2 h}{3}$ C. $\frac{\pi 5a^2 h}{3}$ D. $\frac{\pi\sqrt{2}a^2 h}{3}$

Bài 8: Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

A. $4R^3$ B. $2R^3$ C. $3R^3$ D. R^3

Bài 9: Một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa đường chéo của mỗi mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đó.

A. $V = \frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ B. $V = \pi a^3\sqrt{3}$ C. $V = \frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$ D. $V = \frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$

Bài 10: Cho một hình trụ có bán kính đáy $R = 5$, chiều cao $h = 6$. Một đoạn thẳng AB có độ dài bằng 10 và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ?

A. 3 B. 4 C. 2 D. 1

Bài 11: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a và mặt chéo là hình vuông. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. $S_{xq} = 2\pi a^2$. B. $S_{xq} = \pi a^2$. C. $S_{xq} = 3\pi a^2$. D. $S_{xq} = 5\pi a^2$.

Bài 12: Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao R lấy hai điểm A, B nằm trên hai đường tròn đáy sao cho $AB = 2R$. Tính khoảng cách từ AB đến trục hình trụ theo R.

A. $\frac{R}{2}$ B. $\frac{R}{3}$ C. $\frac{R}{5}$ D. $\frac{R}{4}$

Bài 13: Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tính mối quan hệ giữa bán kính đáy và chiều cao hình trụ sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $R = \frac{h}{2}$ B. $R = \frac{h}{3}$ C. $R = \frac{h}{5}$ D. $R = \frac{h}{4}$

Bài 14: Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông. Bên trong hình trụ có một hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp. Nếu thể tích hình lăng trụ là V thì thể tích hình trụ bằng bao nhiêu?

A. $V_{Tru} = \frac{\pi V}{2}$ B. $V_{Tru} = \frac{\pi V}{3}$ C. $V_{Tru} = \frac{\pi V}{4}$ D. $V_{Tru} = \frac{\pi V}{5}$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Một đường tròn có bán kính r thì chu vi và diện tích lần lượt là $C = 2\pi r; S = \pi r^2$

Gọi chiều dài tấm tôn là a thì tong diện tích đáy của 2 thùng theo 2 cách lần lượt là:

$$S_1 = \frac{a^2}{4\pi}; S_2 = 2.\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4\pi} = \frac{a^2}{8\pi} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2.$$

Chọn C.

Bài 2:

Ta có $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$. Ta có bán kính đường tròn $r = MD = 1$, chiều cao $l = CD = 1$

Suy ra $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi$, $S_d = \pi r^2 = \pi$ suy ra $S_{tp} = 4\pi$.

Chọn A.

Bài 3:

Kẻ $OH \perp AB$ thì $OH \perp (AA'B'B)$

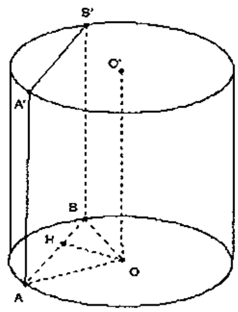
Và $AH = \frac{1}{2}AB = 2$

Ta có $V = \pi.OA^2.AA' = 3\pi OA^2$

Mà $V = 24\pi \Rightarrow OA^2 = 8$

ΔOAH : $d^2 = OH^2 = OA^2 - AH^2 = 8 - 4 = 4$

$\Rightarrow d(O,(AA'B'B)) = d = 2$



Chọn B.

Bài 4:

Vì chiều cao viên phấn là 6cm, nên chọn đáy của hộp carton có kích thước $5x6$. Mỗi viên phấn có đường kính 1 cm nên mỗi hộp ta có thể đựng được $5.6 = 30$ viên.

Số phấn đựng trong 12 hộp là : 30 x 12 = 360 viên

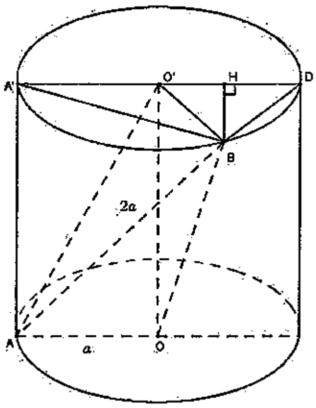
Do ta chỉ có 350 viên phấn nên thiếu 10 viên, nghĩa là đựng đầy 11 hộp, hộp 12 thiếu 10 viên.

Chọn B.

Bài 5:

Kẻ đường sinh AA'. Gọi D là điểm đối xứng của A' qua O' và H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng A'D.

Ta có:



$$\begin{cases} BH \perp A'D \\ BH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AOO'A')$$

Do đó, BH là chiều cao của tứ diện $OO'AB$

Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$: $V = \frac{1}{3} S_{\Delta AOO'}.BH$

Tam giác $AA'B$ vuông tại A' cho:

$A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$

Tam giác $A'BD$ vuông tại B cho:

$BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$

Suy ra $BO'D$ là tam giác đều cạnh A.

Từ đó $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Do $OA = OO' = a$ nên tam giác AOO' vuông cân tại O.

Diện tích tam giác AOO' là:

$S_{\Delta AOO'} = \frac{1}{2} OA.OO' = \frac{1}{2} a^2.$

Vậy $V = \frac{1}{3} . \frac{a\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$

Chọn A.

Bài 6:

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^0 = 25 + 64 - 2.5.8.\frac{1}{2} = 49.$

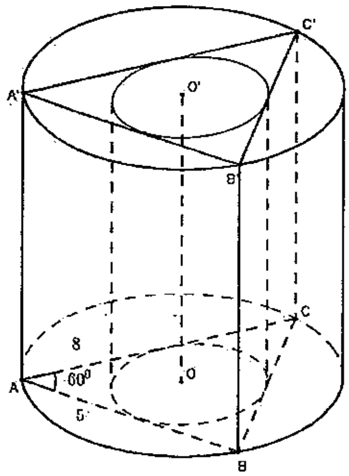
Diện tích tam giác ABC là:

Ghi chú của em

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC\sin 60^0=\frac{1}{2}.5.8.\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}.$

Ghi chú của em

Mặt khác:



$S_{ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4R}$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow R=\frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}}=\frac{5.8.7}{4.10\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}.$

Ngoài ra: $S_{ABC}=pr$, trong đó $p=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)=10$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}.$

Hình trụ ngoại tiếp và nội tiếp lăng trụ đã cho có bán kính đáy lần lượt là R, r và có chiều cao bằng chiều cao của hình lăng trụ.

Giả sử h là chiều cao hình lăng trụ, ta có:

$V=\pi R^2h$ và $V'=\pi r^2h$

Vậy $\frac{V'}{V}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{9}{49}$.

Chọn A.

Bài 7:

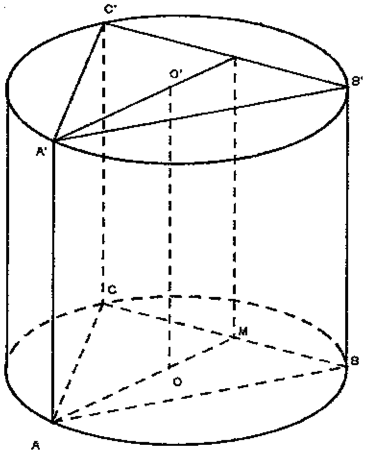
Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Do ABC là tam giác đều cạnh a nên hình trụ có bán kính là:

$R=OA=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ với $M=AO\cap BC$

Chiều cao của hình trụ bằng chiều cao của lăng trụ là h.

Ghi chú của em



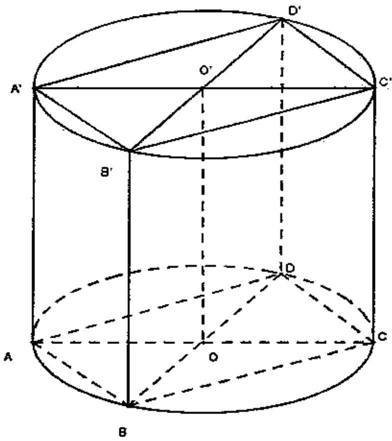
Vậy thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi R^2.h = \pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.h = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

Chọn A.

Bài 8:

Giả sử $ABCDA'B'C'D'$ là khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ đã cho.



Từ giả thiết, suy ra hình trụ có chiều cao $h = 2R$ và đáy $ABCD$ là hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R.

Do đó $AC = 2R$, suy ra $AB = \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD} = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$

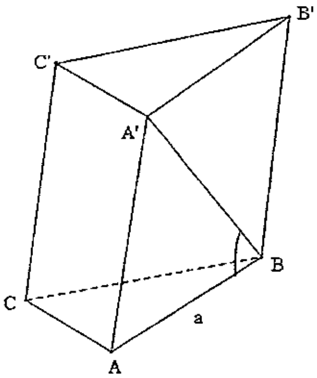
Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD}.h = 2R^2.2R = 4R^3$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 9:

Xét hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = a$, góc của đường chéo $A'B$ với mặt đáy (ABC) là $\widehat{A'BA} = 60^0$.



Suy ra: $h = AA' = a\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

Khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ có cùng đường cao là AA', đáy là đường tròn ngoại tiếp 2 mặt đáy $(ABC),(A'B'C')$, có bán kính R cho bởi $R\sqrt{3} = a \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

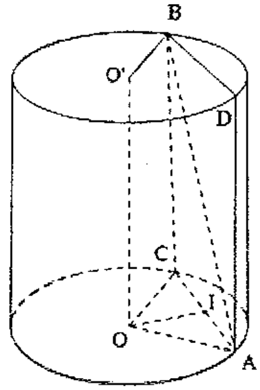
Thể tích khối trụ:

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 a\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{3}\text{(đvdt).}$$

Chọn A.

Bài 10:

Gọi hai đường tròn đáy là $(O),(O')$ và $A \in (O)$, $B \in (O')$. Kẻ hai đường sinh AD, BC ta được tứ giác $ACBD$ là một hình chữ nhật và $mp(ACBD)//OO'$. Do đó, khoảng cách giữa OO' và AB bằng khoảng cách từ O đến $mp(ACBD)$.



Tam giác ACB vuông tại C nên ta có:

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Gọi I là trung điểm của AC, ta có:

$$\begin{cases} OI \perp AC \\ OI \perp AD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ACBD)$$

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục OO' của hình trụ là:

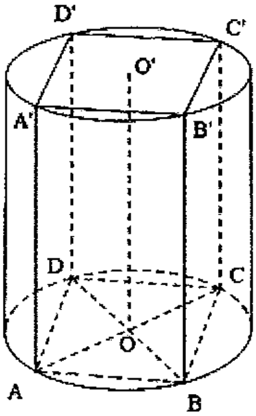
$$OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

Chọn B.

Bài 11:

Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có bán kính đáy là $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và chiều cao $h = a\sqrt{2}$. (Do mặt chéo $(ACC'A')$ là hình vuông nên $AA' = AC = a\sqrt{2}$)

Diện tích xung quanh của hình trụ này là:



$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = 2\pi a^2.$$

Chọn A.

Bài 12:

Giả sử $A \in$ đường tròn O, $B \in O'$

Từ A vẽ đường song song OO' cắt đường tròn (O') tại A'.

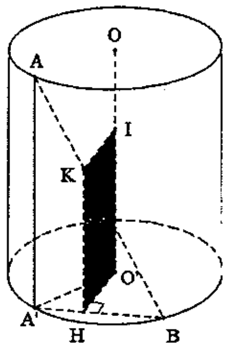
Vẽ $O'H$ vuông góc $A'B$

Từ H vẽ đường thẳng song song với OO', cắt AB tại K. Vẽ $KI // O'H$

Ta có: $O'H \perp A'B$ và AA'

Nên:

$O'H \perp mp(AA'B) \Rightarrow O'H \perp HK$ và AB



Vậy tứ giác $KIO'H$ là hình chữ nhật $\Rightarrow KI \perp OO'$.

Vậy KI là đoạn vuông góc chung của AB và OO'. $\Delta AA'B$ vuông $\Rightarrow A'B^2 = AB^2 - AA'^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$.

Do H trung điểm $A'B$ nên:

$$HA' = \frac{R\sqrt{3}}{2}.\ \Delta O'A'H \Rightarrow O'H^2 = O'A^2 - A'H^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4}$$

Do đó:

$$d(AB, OO') = KI = O'H = \frac{R}{2}.$$

Chọn A.

Bài 13:

Gọi R và h là bán kính đáy và chiều cao hình trụ

Ta có: $V = \pi R^2 h$ (không đổi)

Ghi chú của em

Ghi chú của em

$S_{tp} = S_{xq} = 2S_{đáy} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \left(Rh + R^2\right)2\pi$

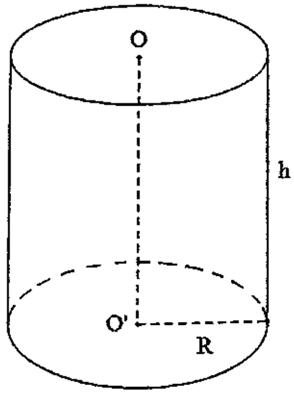
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương

Ta có:

$$\frac{Rh}{2} + \frac{Rh}{2} + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{Rh}{2}.\frac{Rh}{2}.R^2}$$

$$\Leftrightarrow Rh + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{R^4h^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2.4}}$$

$$\Leftrightarrow S_{tp} \geq 3(2\pi)\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2 4}} \text{ (hằng số)}$$



Do đó: S toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất

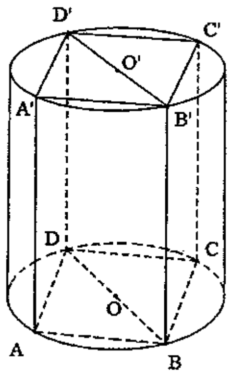
$$\Leftrightarrow \frac{Rh}{2} = R^2 \Leftrightarrow R = \frac{h}{2}.$$

Chọn A.

Gọi cạnh đáy lăng trụ là a. Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông:

$BDD'B': DB = 2R = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow BB' = a\sqrt{2}$



Thể tích lăng trụ bằng V

$$\Leftrightarrow a^2.a\sqrt{2} = V \Leftrightarrow a^3 = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

Thể tích hình trụ tính theo a:

$$V_{trụ} = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.a\sqrt{2} = \frac{\pi a^3.\sqrt{2}}{2}$$

Thay $a^3 = \frac{V}{\sqrt{2}}$: $V_{trụ} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.\frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{\pi V}{2}$.

Chọn A.

CHỦ ĐỀ 4:

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN GIẢI CÁC BÀI THỰC TẾ

Bài 1: Một chiếc hộp hình lập phương cạnh a bị khoét một khoảng trống có dạng là một khối lăng trụ với hai đáy là hai đường tròn nội tiếp của hai mặt đối diện của hình hộp. Sau đó, người ta dùng bìa cứng dán kín hai mặt vừa bị cắt của chiếc hộp lại như cũ, chỉ chừa lại khoảng trống bên trong. Tính thể tích của khoảng trống tạo bởi khối trụ này.

A. πa^3. **B.** $\frac{1}{2}\pi a^3$. **C.** $\frac{1}{4}\pi a^3$. **D.** $\frac{1}{8}\pi a^3$.

Bài 2: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14. Tính thể tích của (H).

A. $V_{(H)} = 192\pi$. **B.** $V_{(H)} = 275\pi$. **C.** $V_{(H)} = 704\pi$. **D.** $V_{(H)} = 176\pi$.

Đề Thi Thử Lần 4 Chuyên KHTN HN 2017

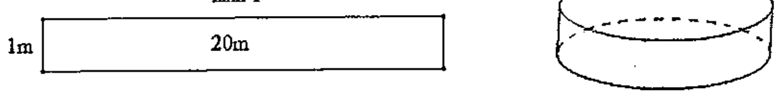
Bài 3: Một thầy giáo dự định xây dựng bể bơi di động cho học sinh nghèo miền núi từ 1 tấm tôn 5 có kích thước $1m\,x\,20m$ (biết giá $1m^2$ tôn là 90000đồng) bằng 2 cách:

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành 1 hình trụ như hình 1.

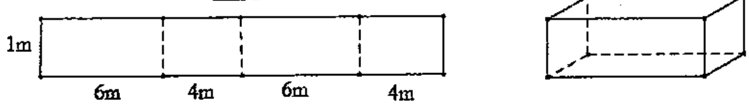
Cách 2: Chia chiều dài tấm tôn thành 4 phần rồi gò tấm tôn thành 1 hình hộp chữ nhật như hình 2.

Biết sau khi xây xong bể theo dự định, mức nước chỉ đổ đến $0,8m$ và giá nước cho đơn vị sự nghiệp là 9955đồng/m^3. Chi phí trong tay thầy là 2 triệu đồng. Hỏi thầy giáo sẽ chọn cách làm nào để không vượt quá kinh phí (giả sử chỉ tính đến các chi phí theo dữ kiện trong bài toán).

hình 1



hình 2



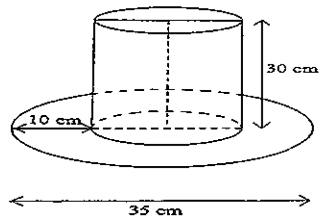
A. Cả 2 cách như nhau. **B.** Không chọn cách nào.

C. Cách 2. **D.** Cách 1.

Bài 4: Cho một khối cầu bán kính R. Đâm thủng khối cầu bởi một khối trụ có trục đi qua tâm mặt cầu và chiều dài hình trụ thu được là 6 (xem hình vẽ). Tính thể tích vật thể còn lại sau khi đục thủng.

A. 36π. **B.** 54π. **C.** 27π. **D.** 288π.

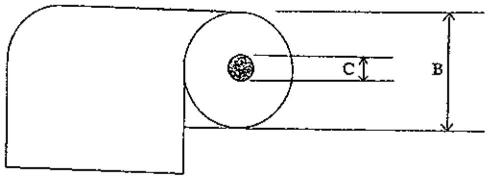
Bài 5: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



A. $700\pi\ (cm^2)$. **B.** $754,25\pi\ (cm^2)$.

C. $750,25\pi\ (cm^2)$. **D.** $756,25\pi\ (cm^2)$.

Bài 6: Một băng giấy dài được cuộn chặt lại thành nhiều vòng xung quanh một ống lõi hình trụ rỗng có đường kính $C = 12,5\,mm$. Biết độ dày của giấy cuộn là $0,06\,mm$ và đường kính cả cuộn giấy là $B = 44,9\,mm$, tính chiều dài L của cuộn giấy.



A. $L \approx 44\,m$. **B.** $L \approx 38\,m$. **C.** $L \approx 4\,m$. **D.** $L \approx 24\,m$.

Bài 7: Xét một hình trụ nội tiếp trong hình nón như hình bên dưới, trong đó S là đỉnh hình nón, O là tâm đường tròn mặt đáy. Các đoạn AB, CD lần lượt là đường kính của đường tròn đáy của hình nón và hình trụ; AC, BD cắt nhau tại điểm $M \in SO$. Biết rằng tỷ số thể tích của hình trụ và hình nón là $\frac{4}{9}$. Tính tỷ số $\frac{SM}{SO}$.

A. $\frac{7}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

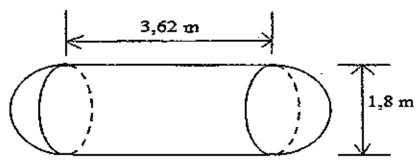
Bài 8: Một hình hộp chữ nhật kích thước $4 \times 4 \times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ có bán kính bằng 1 sao cho các khối lớn tiếp xúc với tám khối cầu nhỏ và các khối cầu đều tiếp xúc với các mặt hình hộp. Thể tích khối hộp là:

A. $32 + 32\sqrt{7}$. **B.** $48 + 32\sqrt{5}$. **C.** $64 + 32\sqrt{7}$. **D.** $64\sqrt{5}$.

Bài 9: Người ta dùng một loại vải vintage 33 để bọc quả khối khí của khinh khí cầu, biết rằng quả khối khí này có dạng hình cầu đường kính $2m$. Biết rằng $1m^2$ vải có giá là 200.000 đồng. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu tiền mua vải để làm khinh khí cầu này?

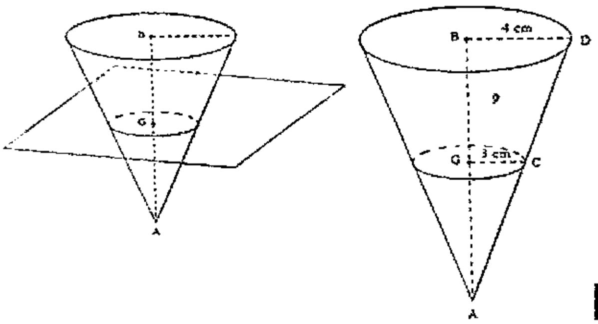
A. 2.500.470 đồng **B.** 3.150.432 đồng. **C.** 2.513.274 đồng. **D.** 2.718.920 đồng.

Bài 10: Một bồn chứa xăng có cấu tạo gồm 1 hình trụ ở giữa và 2 nửa hình cầu ở 2 đầu, biết rằng hình cầu có đường kính $1,8m$ và chiều dài của hình trụ là $3,62m$. Hỏi bồn đó có thể chứa tối đa bao nhiêu lít xăng trong các giá trị sau đây?



A. $10905l$. **B.** $23650l$. **C.** $12265l$. **D.** $20201l$.

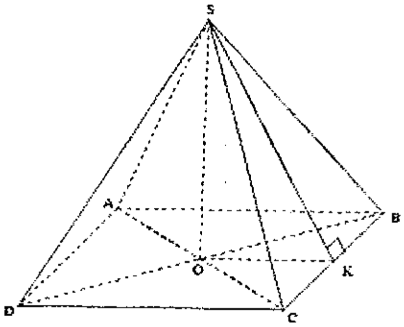
Bài 11: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao $9\,cm$, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là $3cm$ và $4\,cm$. Hỏi

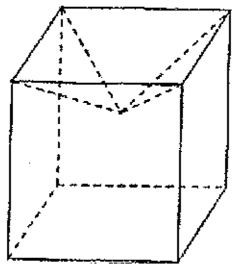


chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong số các lựa chọn sau:

A. $250ml$. **B.** $300ml$. **C.** $350ml$. **D.** $400ml$.

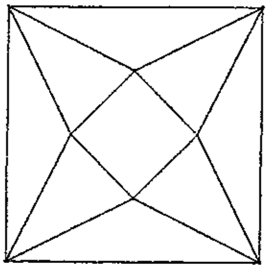
Bài 12: Cho sáu khối chóp tứ giác đều được lắp ghép lại tạo thành một khối lập phương như hình dưới. Biết sáu khối chóp tứ giác đã cho đều bằng nhau và thể tích khối lập phương tạo thành là $8000cm^3$. Tính diện tích xung quanh của mỗi khối chóp tứ giác đều đã cho?

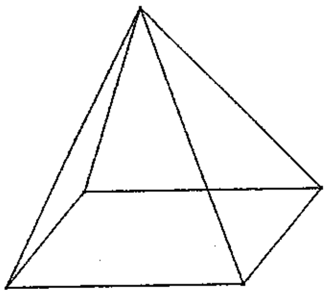




A. $100cm^2$. **B.** $100\sqrt{2}cm^2$. **C.** $400cm^2$. **D.** $400\sqrt{2}cm^2$.

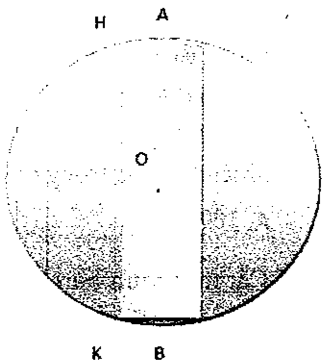
Bài 13: Cho một tấm nhốm hình vuông cạnh $1m$ như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt bỏ các tam giác cân bên ngoài của tấm nhôm, phần còn lại gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x(m)$, sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.





A. $x=\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Bài 14: Cho biết rằng hình chỏm cầu có công thức thể tích là $\frac{\pi h\left(3r^2+h^2\right)}{6}$, trong đó h là chiều cao chỏm cầu và r là bán kính đường tròn bề mặt chỏm cầu (bán kính này khác với bán kính hình cầu). Bài hỏi đặt ra là với một quả dưa hấu hình cầu, người ta dùng một cái ống khoét thủng một lỗ hình trụ chưa rõ bán kính xuyên qua trái dưa như hình vẽ (trong hình có AB là đường kính trái dưa). Biết rằng chiều cao của lỗ là $12cm$ (trong hình trên, chiều cao này chính là độ dài HK). Tính thể tích của phần dưa còn lại.



A. $200\pi cm^3$ **B.** $96\pi cm^3$ **C.** $288\pi cm^3$ **D.** $144\pi cm^3$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Ta có

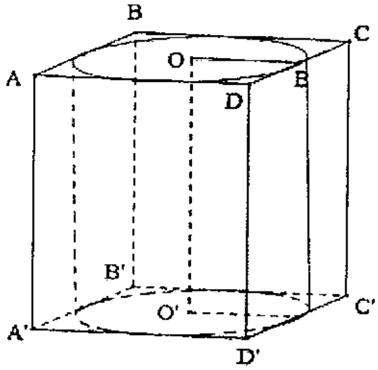
$OE = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

$OO' = a$

Thể tích là:

$V = \pi.OE^2.OO' = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi.a = \frac{\pi a^3}{4}$.

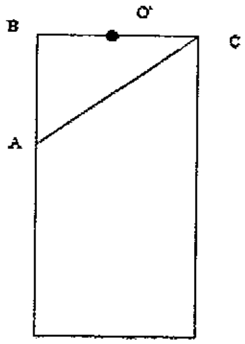
Chọn C.



Bài 2:

Thật ra phần phía trên tính từ A là một nữa của hình trụ có chiều cao AB và bán kính $O'B$.

Ta xét trên mặt thiết diện qua trục của khối trụ và trục dài của elip có:



$2R = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - (14-8)^2}$

$= 8 \Rightarrow R = 4$

$V = \pi R^2.14 - \frac{\pi R^2.(14-8)}{2} = 176\pi$

Chọn D.

Bài 3:

Ở cách 2:

$1m^2 \longrightarrow 90.000$

$20m^2 \longrightarrow 1.800.000$

Ta có $V_{nuoc} = 0,8.6.4 = 19,2m^3$

Do đó tổng tiền ở phương án 2 là $19,2.9955 + 20.90000 = 1.991.136$.

Ở cách 1:

$20m^2 \longrightarrow 1.800.000$

Ta có $20 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{10}{\pi}$ suy ra $V_{nuoc} = h\pi r^2 = 0,8.\pi.\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \approx 25,46m^3$

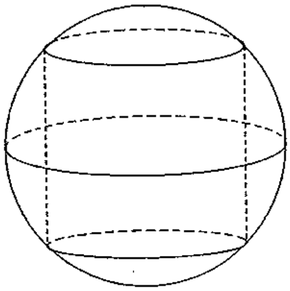
Do đó tiền nước: 253.454 đồng

Tổng tiền: 2.053.454 đồng

Vậy thầy nên chọn cách 2.

Chọn C.

Bài 4: Gọi bán kính khối trụ là r.



Khi đó $r=\sqrt{R^2-9}$ và hai chỏm cầu có chiều cao là $h=R-3$.

Thể tích vật thể còn lại là

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3-6\pi\left(R^2-9\right)-\frac{\pi\left(R-3\right)\left[3\left(R^2-9\right)+\left(R-3\right)^2\right]}{3}=36\pi$$

Nhận xét: Kết quả không phụ thuộc vào bán kính R mà chỉ phụ thuộc vào chiều dài của hình trụ.

Chọn A.

Bài 5:

$$S_{\text{hình tròn}}=\pi R^2=\pi.\left(\frac{35}{2}\right)^2$$

$$S_{\text{xq lăng trụ}}=2\pi r.l=2\pi.\left(\frac{35-20}{2}\right).30=450\pi$$

$$S=\pi\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2+450\right]=756,25\pi.$$

Chọn D.

Bài 6:

Gọi chiều rộng của băng giấy là r chiều dài là L độ dày của giấy là m khi đó ta có thể tích của băng giấy: $V=r.m.L$ (1)

Khi cuộn lại ta cũng có thể tích:

$$V=\pi\left(\frac{B}{2}\right)^2.m-\pi\left(\frac{C}{24}\right)^2.m=\frac{\pi}{4}.r\left(B^2-C^2\right)\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $m.r.L=\frac{\pi}{4}.r.\left(B^2-C^2\right)\Rightarrow L=\frac{\pi}{4m}\left(B^2-C^2\right)$

Bài 7:

Ta có: $\frac{4}{9}=\frac{V_{ht}}{V_{hn}}=3\left(\frac{SD}{SA}\right)^2.\frac{h_{ht}}{h_{hn}}=3\left(\frac{SD}{SA}\right)^2\left(1-\frac{SD}{SA}\right)$ suy ra $\frac{SD}{SA}=\frac{2}{3}$.

Theo định lý Menelauyt đối với tam giác SOB ta có:

$\frac{AO}{AB}.\frac{CB}{CS}.\frac{MS}{MO}=1$ do đó $\frac{MS}{MO}=4$ hay $\frac{SM}{SO}=\frac{4}{5}$.

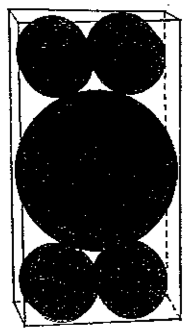
Chọn C.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 8:

Gọi tâm hình cầu lớn là I và tâm bốn hình cầu cầu nhỏ tiếp xúc với đáy là $ABCD$. Khi đó ta có $I.ABCD$ là hình chóp đều với cạnh bên $IA=3$ và cạnh đáy $AB=2$ do đó chiều cao hình chóp là $\sqrt{7}$. Suy ra khoảng cách từ tâm I đến mặt đáy là $1+\sqrt{7}$ hay chiều cao hình hộp chữ nhật là $2\left(1+\sqrt{7}\right)$ suy ra thể tích hình hộp là $32\left(1+\sqrt{7}\right)$.



Chọn A.

Bài 9:

$S_{\text{mặt cầu}}=4\pi R^2$

Với $R=\dfrac{d}{2}=1(m)$. Vậy $S_{\text{mặt cầu}}=4\pi.1^2=4\pi\left(m^2\right)$

Vậy cần tối thiểu số tiền: $4\pi.200\,000=2.513.274$ đồng.

Chọn C.

Bài 10:

Ta có: $V_{\text{trụ}}=\pi R^2 h$

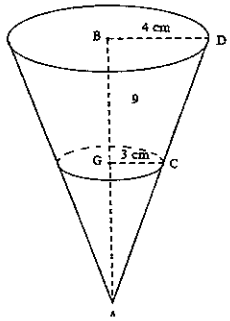
Vì thể tích của 2 nửa hình cầu bằng nhau nên tổng thể tích của 2 nửa hình cầu là 1 khối cầu có $V_c=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

Vậy $V_H=V_{tru}+V_C=\pi R^2 h+\dfrac{4}{3}\pi R^3=12,265\,m^3$

Vậy bồn xăng chứa: $12265l$.

Chọn C.

Bài 11:



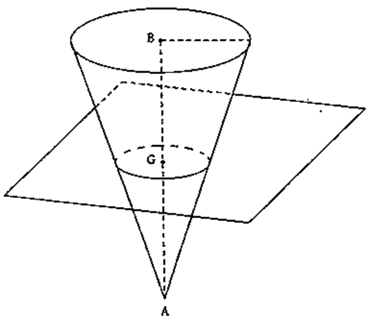
$\Delta AGC\sim\Delta ABC$

$\Rightarrow\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{GC}{BD}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow AG=\dfrac{3}{4}AB$

$\Leftrightarrow\dfrac{AG}{AG+9}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow AG=27$

Suy ra: $V_{\text{cốc}}=V_{\text{nón lớn}}-V_{\text{nón nhỏ}}=$

$\dfrac{1}{3}.\pi.4^2.(27+9)-\dfrac{1}{3}.\pi.3^2.27$
$=111\pi\approx 348,72\,ml$



Vậy lượng nước tối đa là $300\,ml$.

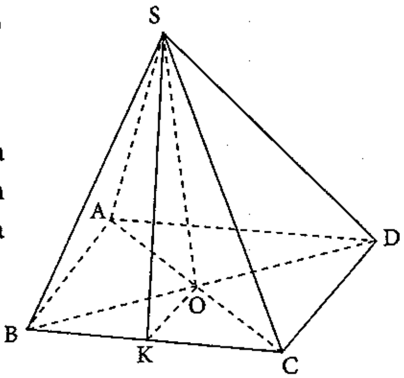
Chọn B.

Bài 12

Gọi a là độ dài cạnh của hình lập phương, khi đó ta có:

$a^3 = 8000 \Rightarrow a = 20cm$

Giả sử hình chóp $S.ABCD$ là 1 trong 6 hình chóp, khi đó hình chóp $S.ABCD$ đều có cạnh đáy là $a = 20cm$



$V_{S.ABCD} = \frac{8000}{6} = \frac{4000}{3} cm^3$

$\Rightarrow \frac{1}{3}.SO.20^2 = \frac{4000}{3} \Rightarrow SO = 10cm$

Kẻ $SK \perp CB\,(K \in CB)$

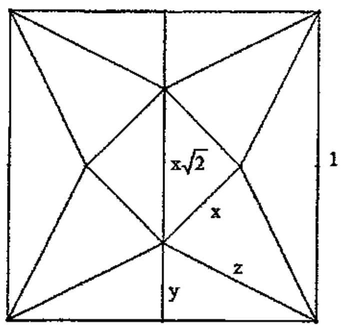
Xét ΔSOK tại O ta có: $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = 10\sqrt{2}\,cm$

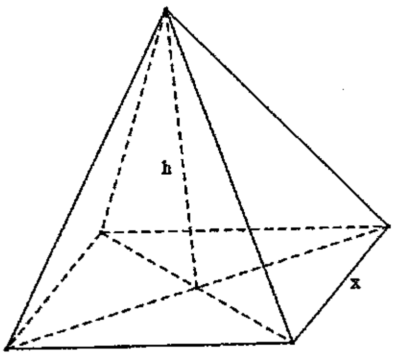
$\Rightarrow S_{\Delta SCB} = \frac{1}{2}.SK.CB = \frac{1}{2}.10\sqrt{2}.20 = 100\sqrt{2}\ cm^2$

Vậy $S_{xq} = 4S_{\Delta SCB} = 4.100\sqrt{2} = 400\sqrt{2}\,cm^2$.

Chọn D.

Bài 13





Ta có: $y = \frac{1 - \sqrt{2}x}{2}$

Suy ra: $z = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2}$

Chiều cao của hình chóp:

$$h = \sqrt{z^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x}$$

$$\Rightarrow V_{chop} = \frac{1}{3}.x^2.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x}$$

Ghi chú của em

V_{chop} lớn nhất khi hàm số $y = x^2.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x}$ đạt GTLN

$$y' = \frac{-5\sqrt{2}x^2 + 4x}{4.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -5\sqrt{2}x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{array}\right.$$

Chọn A.

[illegible]

Đặt r là bán kính của hình cầu.

Chiều cao của lỗ là 12 nên chiều cao của chỏm cầu là $r - 6$.

Bán kính của chỏm cầu, cũng là bán kính đáy của hình trụ và là: $\sqrt{r^2 - 36}$.

Thể tích hình trụ là $12\pi\left(r^2 - 36\right)$.

Thể tích 2 chỏm cầu:

$$\frac{2\pi(r-6)\left[\left(3\left(r^2-36\right)+\left(r-6\right)^2\right)\right]}{6} = \frac{\pi(r-6)\left(4r^2-12r-72\right)}{3}.$$

Thể tích cái lỗ là:

$$12\pi\left(r^2-36\right) + \frac{\pi(r-6)\left(4r^2-12r-72\right)}{3}$$

$$= \pi(r-6)\left[12(r+6) + \frac{4r^2-12r-72}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi(r-6)\left(4r^2+24r+144\right)}{3} = \frac{4\pi\left(r^3-6^3\right)}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} - 288\pi$$

Thể tích hình cầu là $\frac{4\pi r^3}{3}$ nên thể tích cần tìm là: $V = 288\pi$.

Chọn C.

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG 5

ĐỀ SỐ 1

Bài 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Bài 2: Cho tứ diện $ABCD$ với $BC = a$, các cạnh còn lại đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (BCD). Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Giả sử hình cầu đường IJ kính tiếp xúc với CD. Giá trị $\cos\alpha$ là:

A. $3-2\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}-3$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$

Bài 3: Cho hình chóp $SABC$ với SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $BC = a\sqrt{3}, \widehat{BAC} = 60^0$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC. Mặt cầu qua các điểm A, B, C, H, K có bán kính bằng:

A. a **B.** $2a$

C. $\sqrt{3}a$ **D.** Không đủ dữ kiện để tính

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa SC và mp(ABC) là 45^0. Hình chiếu của S lên mp(ABC) là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$. Biết $CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BC:

A. $\frac{a\sqrt{210}}{30}$ **B.** $\frac{a\sqrt{210}}{20}$ **C.** $\frac{a\sqrt{210}}{45}$ **D.** $\frac{a\sqrt{210}}{15}$

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng $a, SB = 2a$. Tính theo a khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{15}}{15}$ **B.** $\frac{a\sqrt{17}}{15}$ **C.** $\frac{a\sqrt{19}}{15}$ **D.** $\frac{a\sqrt{23}}{15}$

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = AC = 5a$, $AB = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{5\sqrt{381}}{127}a$ **B.** $\frac{5\sqrt{382}}{127}a$ **C.** $\frac{5\sqrt{385}}{127}a$ **D.** $\frac{5\sqrt{387}}{127}a$

Bài 7: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB = 2a, AC = 3a, BC = 4a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{45\sqrt{5}a^3}{32}$ **B.** $\frac{45\sqrt{3}a^3}{32}$ **C.** $\frac{45\sqrt{7}a^3}{32}$ **D.** $\frac{45\sqrt{11}a^3}{32}$

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên $(SAB),(SAC),(SBC)$ lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là $30^0,45^0,60^0$. Tính thể tích V của khối chóp $SABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{3})}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4(4+\sqrt{3})}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8(4+\sqrt{3})}$.

Bài 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α thoả mãn $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ lệ thể tích hai khối đa diện là gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

A. 0,11 **B.** 0,13 **C.** 0,7 **D.** 0,9

Bài 10: Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, có cạnh $AB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a.

A. $\dfrac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3$ **B.** $\dfrac{13\sqrt{13}}{216}\pi a^3$ **C.** $\dfrac{13\sqrt{13}}{648}\pi a^3$ **D.** $\dfrac{13}{162}\pi a^3$.

Bài 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM=2MC$. Tính thể tích hình chóp $M.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Bài 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC, SA = $AH=\dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{48}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{24}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{16}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{8}$

Bài 13: (Hình học không gian) Cho tứ diện $ABCD$ và M,N,P lần lượt thuộc BC,BD,AC sao cho $BC=4BM, BD=2BN, AC=3AP$. mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỷ số thể tích hai phần khối tứ diện $ABCD$ bị chia bởi mặt phẳng (MNP).

A. $\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{7}{13}$ **C.** $\dfrac{5}{13}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Bài 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{6}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD=a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $R=a\sqrt{6}$. **C.** $R\dfrac{\sqrt{114}}{6}a$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{26}}{2}$.

Bài 15: Cho bát diện đều, tính tỷ số giữa thể tích khối cầu nội tiếp và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình bát diện đều đó.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Bài 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh AB', $A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Bài 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC. Bán kính mặt cầu tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) là:

A. $\frac{\sqrt{13}a}{13}$ **B.** $\frac{\sqrt{13}a}{39}$ **C.** $\frac{3\sqrt{13}a}{26}$ **D.** $\frac{\sqrt{13}a}{26}$

Bài 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC; các mặt phẳng (SAB); (SAC); (SBC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng nhau. Biết $AB = 25, BC = 17, AC = 26$, đường thẳng SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45^0. Tính thể tích V của khối chóp $SABC$.

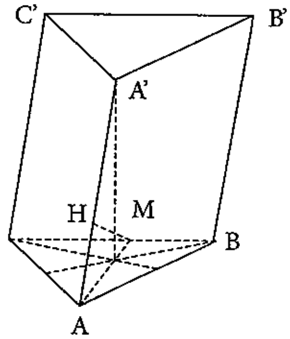
A. $V = 680$ **B.** $V = 408$ **C.** $V = 578$ **D.** $V = 600$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Gọi M là trung điểm BC, dựng MH vuông góc với $A'A$.



suy ra $MH = d\left(BC, A'A\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Đặt $AH = x$, ta có $A'A = \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}}$

Từ $A'A.MH = A'G.AM$, suy ra $x = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $V = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn A.

Bài 2:

Gọi O là trung điểm IJ và F là điểm tiếp xúc giữa hình cầu đường kính IJ và đường thẳng CD. Hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với CD khi và chỉ khi khoảng cách từ O đến CD bằng nữa độ dài IJ.

Ta có $AI = DI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì FC và CI là hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm nên $FC = CI = \dfrac{a}{2}$.

Tương tự, ta có $DJ = DF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a}{2}$

Tam giác ADI cân có IJ là đường trung tuyến nên tam giác IDJ vuông tại J.

Suy ra:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\widehat{JID} = \frac{JD}{DI} = \frac{\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

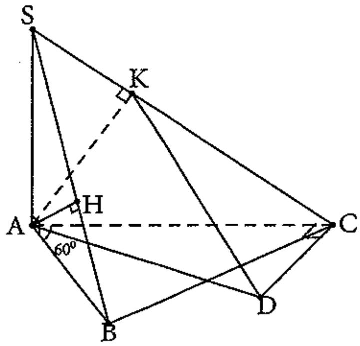
Do vậy, $\cos\alpha = 2\sqrt{3} - 3$.

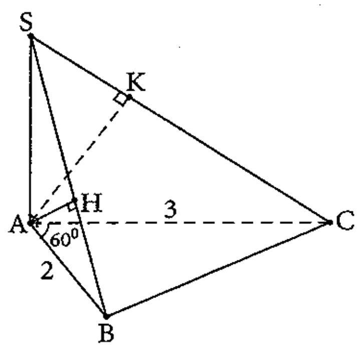
Chọn B.

Bài 3:

Gọi AD là đường kính của đường tròn (ABC)

Suy ra, $AC \perp DC$, suy ra $CD \perp \left(SAC\right)$ hay $AK \perp DK$.





Ghi chú của em

Tương tự, $AH \perp HD$. Suy ra mặt cầu qua các điểm A, B, C, H, K có đường kính $AD = \dfrac{BC}{\sin 60^0} = 2a$.

Chọn A.

Bài 4:

+ D là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ thì:

$d\left(SA;BC\right) = d\left(B;\left(SAD\right)\right) = 1,5d\left(H;\left(SAD\right)\right)$.

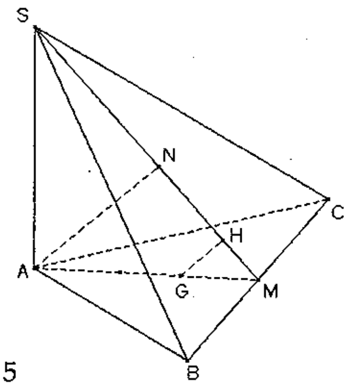
+ Kẻ HE vuông AD, E thuộc AD. Kẻ HI vuông SE, I thuộc AE thì $d\left(H;\left(SAD\right)\right) = HI$.

+ Tính $HI = \dfrac{a\sqrt{210}}{30}$

Chọn A.

Bài 5:

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $BC \perp AM; BC \perp SA$ $\Rightarrow BC \perp (SAM)$. Kẻ đường cao AN của tam giác SAM, vì $AN \perp BC; AN \perp SM$ nên $AN \perp (SBC)$.



Khoảng cách từ A đến (SBC) là $d(A;(SBC)) = AN$.

Ta có

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2}$$

$\Leftrightarrow AN = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Kẻ $GH // AN$; $H \in SM$; vì $AN \perp (SBC)$ nên $GH \perp (SBC)$.

Khoảng cách từ G đến (SBC) là $d(G;(SBC)) = GH$.

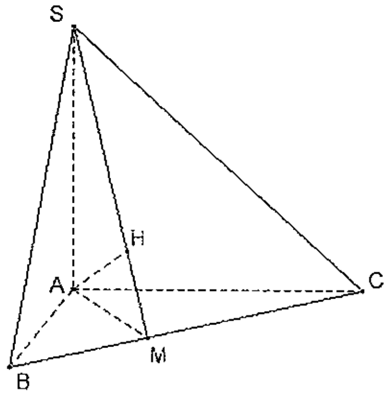
Ta có $\dfrac{GH}{AN} = \dfrac{MG}{AM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow GH = \dfrac{1}{3}AN = \dfrac{a\sqrt{15}}{15}$.

Vậy khoảng cách từ G đến (SBC) là $d(G;(SBC))=\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$.

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 6:



Kẻ $AM\perp BC, AH\perp SN, (M\in BC, H\in SM)$.

Ta có $AM\perp BC, BC\perp SA$ nên $BC\perp(SAM)$, suy ra AH ⊥ BC. Vậy ta có $AH\perp(SBC)$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d\left(A,(SBC)\right)=AH$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos120^0=31a^2\Rightarrow BC=a\sqrt{31}$.

Diện tích của tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin120^0=\dfrac{5\sqrt{3}a^2}{4}$.

Mặt khác

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AM.BC\Rightarrow AM=\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{5\sqrt{93}}{62}a.$$

Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AS^2}=\dfrac{127}{75a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{5\sqrt{381}}{127}a$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d\left(A,(SBC)\right)=\dfrac{5\sqrt{381}}{127}a$.

Chọn A.

Bài 7:

Xét tam giác ABC, áp dụng định lý côsin

$$\cos B=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC.AB}=\frac{16a^2+4a^2-9a^2}{2.4a.2a}=\frac{11}{16}.$$

với $0^0<\hat{B}<180^0$, suy ra

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{16}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

Ghi chú của em

Ta kẻ đường cao AH của tam giác ABC, ta có:

$$\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=AB.\sin B=2a.\frac{3\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}a}{8}.$$

Do đó diện tích tam giác ABC là:

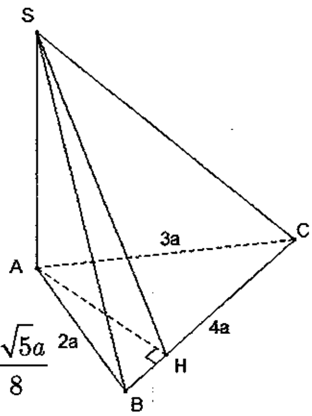
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{15}a}{8}.4a=\frac{3\sqrt{15}a^2}{4}.$$

Vì

$BC\perp AH, BC\perp SA$

$\Rightarrow BC\perp(SAH), BC\perp SH$

Nên góc SHA là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), bằng 60^0.



Xét tam giác SAH ta có:

$$\tan 60^0=\frac{SA}{AH}$$

$$\Rightarrow SA=AH\tan 60^0=\frac{3\sqrt{15}a}{8}.\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{5}a}{8}$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

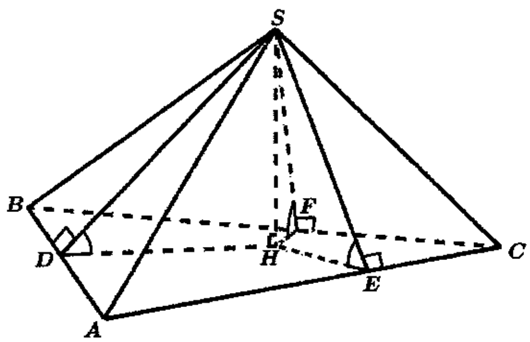
$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{15}a^2}{4}.\frac{9\sqrt{5}a}{8}=\frac{45\sqrt{3}a^3}{32}.$$

Chọn B.

Bài 8:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC). Kẻ $HD\perp AB,(D\in AB), HE\perp AC(E\in AC)$

$HF\perp BC(E\in BC)$.



Khi đó ta có:

$$HD=\frac{SH}{\tan 30^0}=SH\sqrt{3}$$

$$HE=\frac{SH}{\tan 45^0}=SH,\ HF=\frac{SH}{\tan 60^0}=\frac{SH}{\sqrt{3}}.$$

Ghi chú của em

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ suy ra:

$$\frac{1}{2}SH\left(1+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)a=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow SH=\frac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.$$

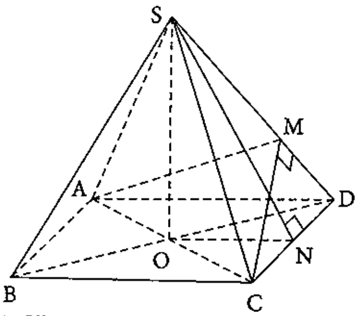
Vậy $V=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}.$

Chọn D.

Bài 98

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $SO\perp(ABCD)$.

Gọi N là trung điểm CD



$$\Rightarrow\begin{cases}CD\perp SN, CD\perp ON\\ (SCD)\cap(ABCD)=CD\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SNO}$$

Kẻ $CM\perp SD$.

Ta có

$$\begin{cases}AC\perp BD\\ AC\perp SO\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBD)\Rightarrow AC\perp SD$$

$\Rightarrow SD\perp(ACM)\Rightarrow(ACM)\perp(SAD)$ nên mặt phẳng (P) là (ACM)

+ Xét tam giác SON vuông tại N có :

$$SN=\frac{ON}{\cos\widehat{SNO}}=\frac{3a}{2}.$$

$$SO=\sqrt{SN^2-ON^2}=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}.$$

+ Xét tam giác SOD vuông tại O có :

$$SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Ta có: $S_{\Delta SCD}=\dfrac{1}{2}CM.SD=\dfrac{1}{2}SN.CD\Rightarrow CM=\dfrac{SN.CD}{SD}=\dfrac{3a\sqrt{10}}{10}.$

Xét tam giác MCD vuông tại M có:

$$DM=\sqrt{CD^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Ta có : $\dfrac{V_{M.ACD}}{V_{SABCD}}=\dfrac{V_{MACD}}{2V_{SACD}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{DM}{DS}.\dfrac{DA}{DA}.\dfrac{DC}{DC}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}}=\dfrac{1}{10}.$

$\Rightarrow V_{MACD}=\frac{1}{10}V_{SABCD}$.

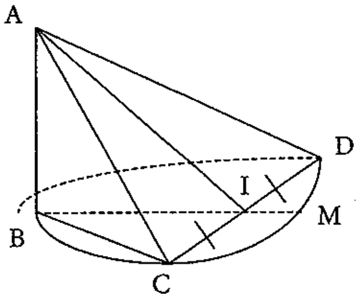
Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối $M.ACD$ và $S.ABCM \Rightarrow V_{SABCD}=V_{MACD}+V_{SABCM} \Rightarrow V_{SABCM}=\frac{9}{10}V_{SABCD}$.

Do đó: $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}}=\frac{1}{9}\approx 0,11$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 10:



Gọi I là trung đểm cạnh CD.

Theo đề ta có $\begin{cases} AI\perp CD \\ BI\perp CD \end{cases}$,

$AI=BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}=AB$ (1)

$\Rightarrow (ABI)$ là mp trung trực cạnh CD.

Gọi M là giao điểm của BI với mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Suy ra đường tròn lớn của (S) là đường tròn (ABM). Mặt phẳng (BCD) cắt (S) theo đường tròn (BCD) qua M, hơn nữa BM là đường kính.

$\Rightarrow BM=\frac{a}{sin 60^0}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

Từ (1) $\Rightarrow \Delta ABI$ đều. Suy ra $\widehat{ABM}=60^0$.

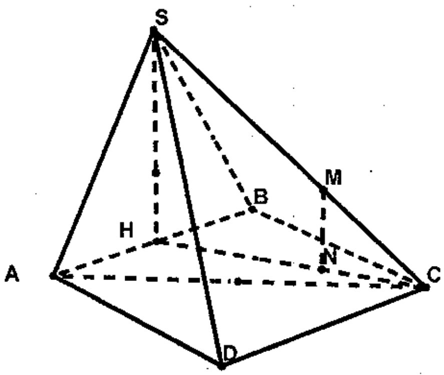
$AM=\sqrt{AB^2+BM^2-2AB.BM\cos 60^0}=a\sqrt{\frac{13}{12}}$

$\Rightarrow R=\frac{AM}{2\sin 60^0}=\frac{a\sqrt{13}}{6}$

$\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3$

Chọn A.

Bài 11:



Ta có: $(SAB)\perp(ABCD)$

$(SAB)\cap(ABCD)=AB$

$SH\subset(SAB)$

$SH\perp AB$ (là đường cao của ΔSAB đều)

Suy ra: $SH\perp(ABCD)$

Ghi chú của em

Tính: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔSAB đều cạnh a), suy ra $S_{ABCD} = a^2$.
Tính:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

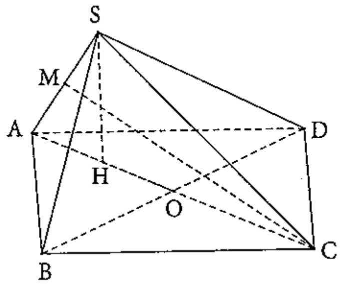
$$V_{MABC} = \frac{1}{3}V_{SABC} = \frac{1}{6}V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}.$$

Chọn B.

Bài 12:

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có:



$$\frac{AM}{AC} = \frac{AH}{SA}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{AH.AC}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}.a\sqrt{2}}{a} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow MC = \sqrt{AC^2 - AM^2}$$

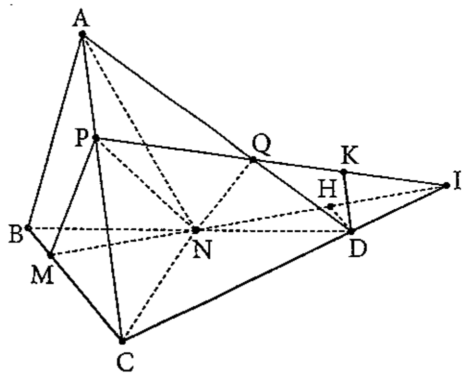
$$= \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{SMC} = \frac{1}{2}SM.MC = \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$$

$$V_{SMBC} = \frac{1}{3}BO.S_{\Delta SMC} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a^2\sqrt{7}}{8} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}.$$

Chọn A.

Bài 13:



Gọi $I = MN \cap CD, Q = PI \cap AD$, kẻ

$DH // BC\left(H \in IM\right), DK // AC\left(K \in IP\right)$.

$$\Delta NMB = \Delta NDH \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \frac{DH}{CM} = \frac{BM}{CM} = \frac{1}{3}.$$

$\frac{IK}{IP}=\frac{DK}{CP}=\frac{ID}{IC}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{DK}{2AP}=\frac{1}{3}\Rightarrow DK=\frac{2}{3}.$

ΔAPQ đồng dạng ΔDKQ. Suy ra

$\Rightarrow \frac{AQ}{DQ}=\frac{AP}{DK}=\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{AQ}{AD}=\frac{3}{5}.$

Đặt $V=V_{ABCD}$. Ta có:

$\frac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}}=\frac{AP}{AC}.\frac{AQ}{AD}=\frac{1}{5},\frac{V_{ANCD}}{V_{ABCD}}=\frac{V_{DACN}}{V_{DABC}}=\frac{DN}{DB}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{ANPQ}=\frac{1}{10}V$

$\frac{V_{CDMP}}{V_{CDBA}}=\frac{CM}{CB}.\frac{CP}{CA}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{CDMP}=\frac{1}{2}V$

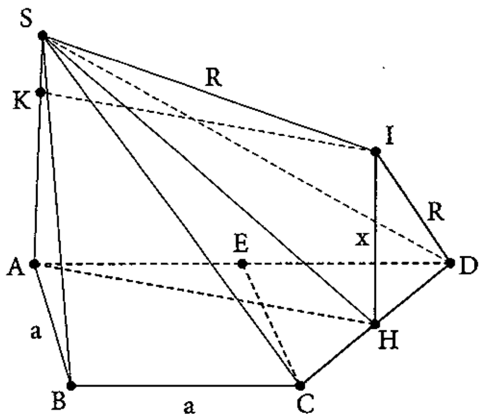
$\Rightarrow V_{N.ABMP}=\frac{1}{2}V_{DABMP}=\frac{1}{2}\;V-V_{CDMP}\;=\frac{1}{4}V$

$\Rightarrow V_{ABMNQP}=V_{ANPQ}+V_{N.ABMP}=\frac{7}{20}V\Rightarrow \frac{V_{ABMNQP}}{V_{CDMNQP}}=\frac{7}{13}$

Vậy mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần với tỉ lệ thể tích $\frac{7}{13}$.

Chọn B.

Bài 14:



Gọi H là trung điểm của CD và d là đường thẳng qua H và vuông góc với đáy. Gọi I và R là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.CDE$. Suy ra I thuộc D. Đặt $IH=x$. Trong mp($ASIH$) kẻ đường thẳng qua I và song song với AH cắt AS tại K.

Ta có: $ID^2=IH^2+HD^2=x^2+\frac{a^2}{2}.$

$IS^2=IK^2+KS^2=AH^2+KS^2=AC^2+CH^2+KS^2=2a^2+\frac{a^2}{2}+\left(a\sqrt{6}-x\right)^2.$

Suy ra: $x^2+\frac{a^2}{2}=2a^2+\frac{a^2}{2}+\left(a\sqrt{6}-x\right)^2 \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{6}a}{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu bằng $R\frac{\sqrt{114}}{6}a$.

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 15:

Gọi cạnh bát diện đều là a; bát diện đều có các mặt chéo là hình vuông; khi đó độ dài các đường chéo $AC=BD=SS'=a\sqrt{2}$.

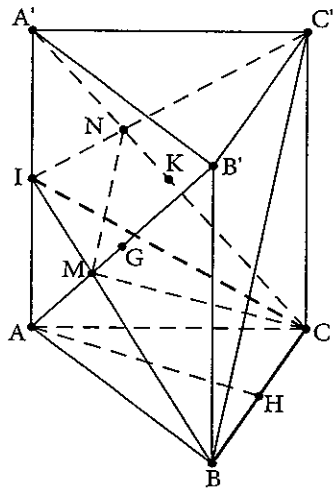
Mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp đều có tâm O, khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp là $R=OA=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp là khoảng cách từ O đến các mặt bên. Hình trên có $r=OH=\frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

+) Có $\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó tỷ số thể tích khối cầu nội tiếp cho khối cầu ngoại tiếp là: $\left(\frac{r}{R}\right)^3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Chọn D.

Bài 16:



Gọi G, K lần lượt là tâm các hình chữ nhật $ABB'A'$ và $AA'C'C$.

Ta có: $\frac{AM}{AB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AM}{AG}=\frac{2}{3}$

(Do G trung điểm AB').

Xét tam giác ABA' có AG là trung tuyến và $\frac{AM}{AG}=\frac{2}{3}$. Suy ra M là trọng tâm tam giác ABA'. Do đó BM đi qua trung điểm I của AA'.

Ta có:

$\frac{A'N}{A'C}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{A'N}{A'K}=\frac{2}{3}$

(Do K là trung điểm $A'C$).

Xét tam giác $AA'C'$ có $A'K$ là trung tuyến và $\frac{A'N}{A'K}=\frac{2}{3}$. Suy ra N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Do đó $C'N$ đi qua trung điểm I của AA'.

Từ M là trọng tâm tam giác ABA' và N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Suy ra:

$\frac{IM}{IB}=\frac{IN}{IC'}=\frac{1}{3}$.

Gọi V_1; V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $IMNC$; $IBCC'$. Ta có:

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{IM}{IB}.\frac{IN}{IC'}.\frac{IC}{IC}=\frac{1}{9}$

Mà $V_1+V=V_2$. Suy ra $V=\frac{8}{9}V_2$.

Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC. Ta được AH vuông góc với mặt phẳng $(BB'C'C)$. AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng khoảng cách từ A đến $(BB'C'C)$ và bằng AH.

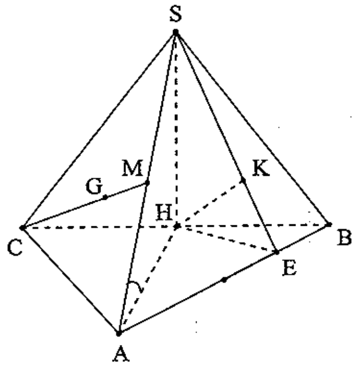
Ta có: $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_2=\frac{1}{3}.d\left[I;(BB'C'C)\right].S_{\Delta BCC'}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Suy ra $V=\frac{8}{9}V_2=\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$.

Chọn B.

Bài 17:



+ Gọi H là trung điểm BC

+ $\widehat{(SA,(ABC))}=\widehat{SAH}=60^0$.

$AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$SH=AH\tan 60^0=\frac{3a}{2}$.

+ Bán kính mặt cầu là:

$R=d(G;(SAB))=\frac{1}{3}d(C;(SAB))$

$=\frac{2}{3}d(H;(SAB))$.

+ Gọi E là hình chiếu của H trên AB và K là hình chiếu của H trên SE.

Chứng minh: $HK\perp(SAB)$

+ Tính được: $HE=\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $HK=\frac{3a}{2\sqrt{13}}$

$+R=\frac{2}{3}HK=\frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Chọn A.

Bài 18:

Gọi J là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$; H, K và L lần lượt là hình chiếu của J trên các cạnh AB, BC và CA.

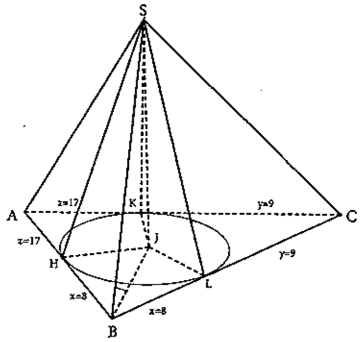
Ghi chú của em

Ghi chú của em

Suy ra, $\widehat{SHJ}, \widehat{SLJ}$ và $\widehat{SKJ}$ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng $(SAB);(SAC);(SBC)$.

Theo giả thiết, ta có:

$\widehat{SHJ} = \widehat{SLJ} = \widehat{SKJ}$, suy ra các tam giác vuông SJH, SJL, SJK bằng nhau.

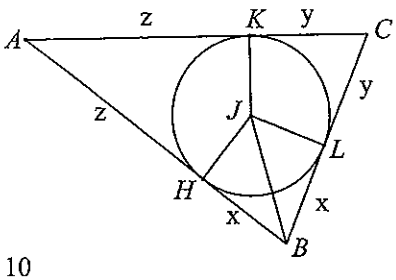


Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà J nằm trong tam giác ABC nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích của tam giác ABC là $S = 204$. Kí hiệu P là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của ABC. Ta có $r = \frac{S}{P} = \frac{204}{34} = 6$. Đặt $x = BH = BL, y = CL = CK, z = AH = AK$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}.$$



Giải ra được $(x;y;z) = (8;9;17)$

$JB = \sqrt{JH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Ta có $\widehat{SBJ} = \widehat{(SB,(ABC))} = 45^\circ$, suy ra SJB là tam giác vuông cân tại J. $SJ = JB = 10$.

Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} SJ.S_{\Delta ABC} = 680$.

Chọn A.

ĐỀ SỐ 2

Bài 1

Một hình hộp có 6 mặt đều là các hình thoi có góc bằng 60^0 và cạnh bằng a. Tính thể tích của hình hộp đó.

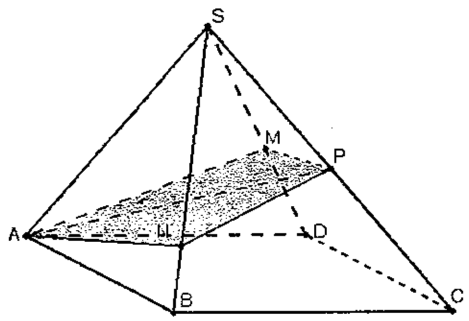
A. $\frac{a^3}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$

Bài 2

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V.

Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N.

Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $SABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?



A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Bài 3 Nếu một tứ diện chỉ có đúng một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích tứ diện đó lớn nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{5}{8}$

Bài 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên.

A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Bài 5

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Bài 6

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Khi đó diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) là:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{10}$ **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{5}$ **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{15}$ **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$

Bài 7

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = 2a$. Tam giác SAB có góc $\widehat{ASB} = 60^o, SB = a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

A. a **B.** $2a\sqrt{\dfrac{3}{19}}$ **C.** $a\sqrt{\dfrac{3}{19}}$ **D.** $2a\sqrt{\dfrac{3}{16}}$

Bài 8 Cho khối trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A_1A = 2a$ và A_1A tạo với mp(ABC) một góc 60^0. Tính thể tích khối tứ diện A_1B_1CA.

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{5}$. **D.** $\dfrac{a^3}{8}$.

Bài 9 Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp $SABH$ đạt giá trị lớn nhất bằng?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 10 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V = \dfrac{5\pi}{3}$.

Bài 11 Bài thể tích liên quan đến cực trị:

Cho hình chóp $S.ABCD$, SA là đường cao, đáy là hình chữ nhật với $SA = a, AB = b, AD = c$. Trong mp(SDB) lấy G là trọng tâm tam giác SDB qua G kẻ đường thẳng d cắt cạnh BS tại M, cắt cạnh SD tại N, mp(AMN) cắt SC tại K. Xác định M thuộc SB sao cho V_{SAMKN} đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

A. $V_{SAMKN \to \max} = \dfrac{abc}{8}, V_{SAMKN \to \min} = \dfrac{abc}{9}$ **B.** $V_{SAMKN \to \max} = \dfrac{abc}{8}, V_{SAMKN \to \min} = \dfrac{abc}{10}$

C. $V_{SAMKN \to \max} = \dfrac{abc}{9}, V_{SAMKN \to \min} = \dfrac{abc}{10}$ **D.** $V_{SAMKN \to \max} = \dfrac{abc}{10}, V_{SAMKN \to \min} = \dfrac{abc}{11}$

Bài 12: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC'.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **B.** $\frac{a\sqrt{22}}{7}$ **C.** $\frac{a\sqrt{23}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{24}}{7}$

Bài 13: Cho hình trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính R. Xác định chiều cao và bán kính đáy để hình trụ có thể tích lớn nhất.

A. $r=\frac{\sqrt{6}}{4}R.$ **B.** $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R.$ **C.** $r=\frac{\sqrt{6}}{7}R.$ **D.** $r=\frac{\sqrt{6}}{5}R.$

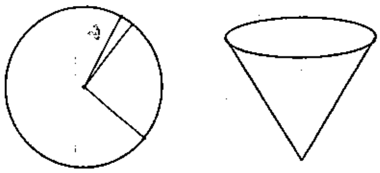
Bài 14: Một hình trụ có bán kính đáy là R và chiều cao $R\sqrt{3}$. Hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

A. $\frac{R\sqrt{3}}{3}.$ **B.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $\frac{3R\sqrt{3}}{4}.$ **D.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}.$

Bài 15: Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R=6cm$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ). Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng

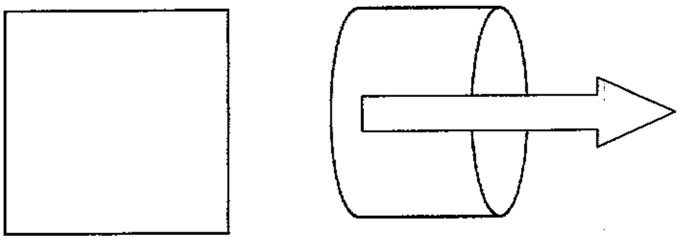
A. $4\pi\sqrt{6}cm$ **B.** $6\pi\sqrt{6}cm$

C. $2\pi\sqrt{6}cm$ **D.** $8\pi\sqrt{6}cm$

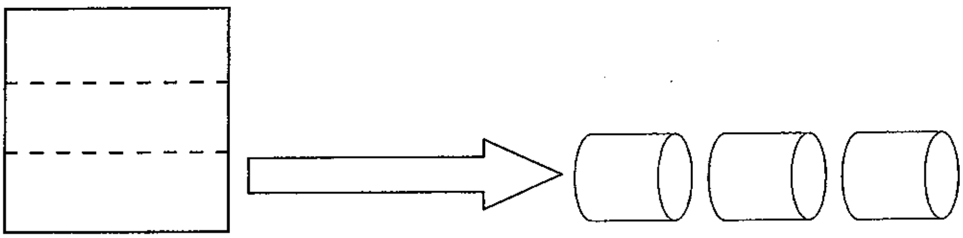


Bài 16: Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là $3dm$, một người dự tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: Gò hai mép hình vuông để thành mặt xung quanh của một hình trụ, gọi thể tích là của khối trụ đó là V_1.



Cách 2: Cắt hình vuông ra làm ba, và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2.

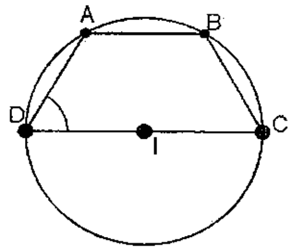


Khi đó, tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 3 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Bài 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang nội tiếp đường tròn (C) tâm I, cho biết $AB//CD, CD = 2AB, \widehat{CDA} = 60^0$.

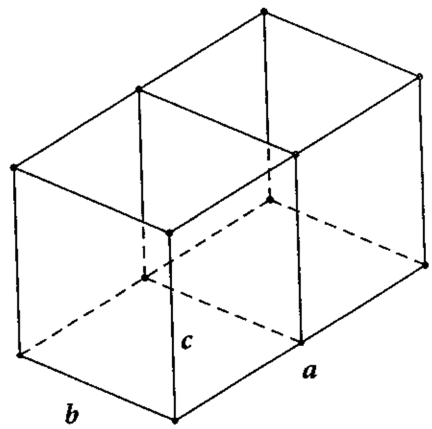
Giả sử thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng v, tính thể tích khối nón đỉnh S và đáy là hình tròn (C).



A. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}v$ B. $\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}v$

C. $\frac{7\pi}{3\sqrt{3}}v$ D. $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}v$

Bài 18: Cho một chiếc cốc có dạng nón cụt, biết miệng cốc và đáy cốc có bán kính lần lượt là $4cm$ và $3cm$, chiều cao cốc là $10cm$. Khi chiều cao nước trong cốc là $7cm$ thì thể tích nước trong cốc là bao nhiêu?



A. $\frac{8113}{300}\pi\ (ml)$ B. $\frac{39823}{300}\pi\ (ml)$

C. $\frac{25900}{300}\pi\ (ml)$ D. $\frac{23653}{300}\pi\ (ml)$

Bài 19: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích 1,296 m^3. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước a, b,c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a, b, c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể.

A. $a = 3,6\ m;\ b = 0,6\ m;\ c = 0,6\ m$

B. $a = 2,4\ m;\ b = 0,9\ m;\ c = 0,6\ m$

C. $a = 1,8\ m;\ b = 1,2\ m;\ c = 0,6\ m$

D. $a = 1,2\ m;\ b = 1,2\ m;\ c = 0,9\ m$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1

Ta có: $AB = AD = BD = a;\ AA' = A'B = A'D = a$

$\Rightarrow A'ABCD$ là tứ diện đều

$\Rightarrow$ Chân đường cao $A'H$ trùng với tâm của ΔABD.

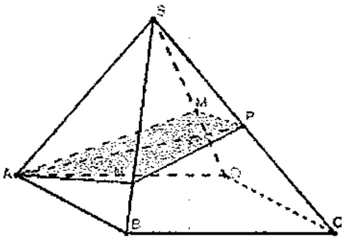
$$\Rightarrow HA = HB = HD = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{2a^2}{3}. \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Từ đó tìm được $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Chọn B.

Bài 2



Đặt $x = \dfrac{SM}{SD};\ y = \dfrac{SN}{SB}, (0 < x, y \le 1)$.

Khi đó ta có:

$$V_{SABC} = V_{SADC} = V_{SABD} = V_{SBCD} = \frac{V}{2}.$$

Ta có:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{V_{SAMPN}}{V} = \frac{V_{SAMP} + V_{SANP}}{V} = \frac{V_{SAMP}}{2V_{SADC}} + \frac{V_{SANP}}{2V_{SABC}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SD}.\frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SB}\frac{SP}{SC}\right) = \frac{1}{4}(x+y)\ (1)$$

Lại có: $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{SAMPN}}{V} = \dfrac{V_{SAMN}}{2V_{SABD}} + \dfrac{V_{SMNP}}{2V_{SBCD}} = \dfrac{1}{2}\left(xy + \dfrac{1}{2}xy\right) = \dfrac{3}{4}xy\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{4}(x+y) = \frac{3}{4}xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1},$$

vì $0 < y \le 1 => \dfrac{x}{3x-1} \le 1 \Rightarrow x \ge \dfrac{1}{2}$

Từ (2) suy ra:

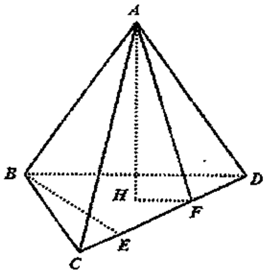
$$\frac{V_1}{V} = \frac{3}{4}.xy = \frac{3}{4}.x\frac{x}{3x-1} = \frac{3x^2}{4(3x-1)} = \frac{3}{4}f(x), \left(\frac{1}{2} \le x \le 1\right)$$

Khảo sát hàm số:

$$y = f(x),\ \left(\frac{1}{2} \le x \le 1\right) \Rightarrow \min_{\frac{1}{2} \le x \le 1} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}$$

Chọn B.

Bài 3.



Giả sử tứ diện $ABCD$ có cạnh lớn nhất là AB, suy ra các tam giác ACD và BCD có tất cả các cạnh đều không lớn hơn 1. Các chiều cao AF và BE của chúng không lớn hơn $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$, trong đó $CD = a \le 1$.

Chiều cao của hình tứ diện $AH \le AF \le \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$

(do tam giác AHF vuông tại H có AF là cạnh huyền)

Thể tích của khối tứ diện là:

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.BE.CD.AH \le \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.\left(1-\frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24}a\left(4-a^2\right)$$

Để tìm giá trị lớn nhất của V ta xét biểu thức $a\left(4-a^2\right)$.

Vì $0 \le a \le 1$ nên $a\left(4-a^2\right) \le 3$ và $V \le \frac{1}{24}a\left(4-a^2\right) \le \frac{1}{8}$.

Chọn C.

Bài 4.

$$R_{(S)} = \sqrt{\left(R_{ntSAB}\right)^2 + \left(R_{ntABCD}\right)^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

Trong đó:

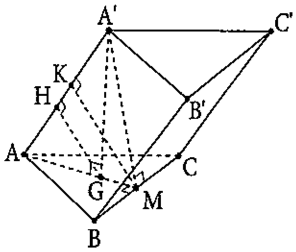
+) R_{ntSAB} là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB

+) R_{ntABCD} là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

+) $(SAB) \cap (ABCD) = AB$

Chọn D.

Bài 5.



Gọi M là trung điểm $B \Rightarrow BC \perp (A'AM)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của G, M trên AA'.

Vậy KM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC, do đó:

$$d(AA',BC) = KM = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\Delta AGH \sim \Delta AMK \Rightarrow \frac{KM}{GH} = \frac{3}{2} \Rightarrow GH = \frac{2}{3}KM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$\Delta AA'G$ vuông tại G, HG là đường cao, $A'G = \frac{a}{3}$

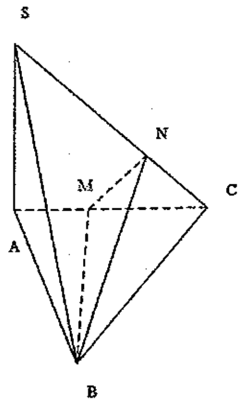
$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Chọn C.

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Bài 6:



Gọi M là trung điểm của AC;

Kẻ BN vuông góc SC tại N

Khi đó: thiết diện cần tìm là tam giác BMN vuông tại M.

Ta có:

$\Delta CMN \sim \Delta CSA$

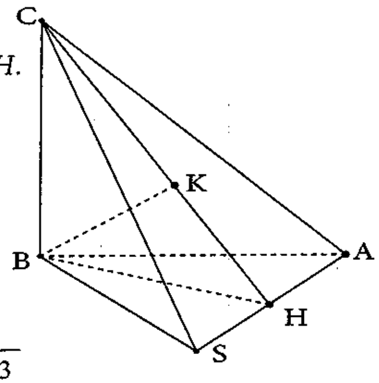
$$\Rightarrow \frac{MN}{SA} = \frac{CM}{CS} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy: Diện tích tam giác BMN bằng $\frac{a^2\sqrt{15}}{20}$

Chọn D.

Bài 7:

$(SAB) \perp (ABC), (SAB) \cap (ABC) = AB;\ BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$



Trong mp (SAB) kẻ $BH \perp SA$.

Trong tam giác BCH kẻ $BK \perp CH$.

Ta có $BK \perp (SAC)$.

Vậy khoảng cách từ B đến (SAC) là BK.

$BH = SB.\sin 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

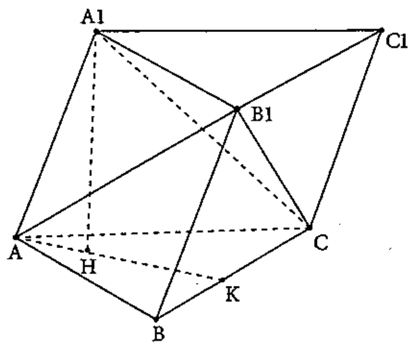
Xét tam giác vuông CBH, ta có:

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BK = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

Vậy $d(B,(SAC)) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

Chọn B.

Bài 8:



Gọi H là hình chiếu của A_1 trên mp(ABC).

Khi đó $A_1H = A_1A.\sin \widehat{A_1AH} = 2a.\sin 60^0 = a\sqrt{3}$.

Mà $V_{LT} = A_1H.S_{ABC} = a.\sqrt{3}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$ nhận thấy khối lăng trụ được chia làm ba khối chóp. Khối chóp $CA_1B_1C_1$ có $V_{B_1ABC} = \frac{1}{3}V_{LT}$, khối chóp B_1ABC có $V_{B_1ABC} = \frac{1}{3}V_{LT}$

Khối chóp A_1B_1CA do đó $V_{A_1B_1AC} = \frac{1}{3}V_{LT} = \frac{a^3}{4}$.

Chọn A.

Bài 9:

Ta có góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB} = 30^0$

Trong tam giác SBC có $SB = BC\cot 30^0 = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác SAB có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABH$ là:

$$V_{S.ABH} = \frac{1}{3}S_{ABH}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}HA.HB.a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}HA.HB$$

Ta có $HA^2 + HB^2 = AB^2 = a^2$ và theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^2 = HA^2 + HB^2 \geq 2.HA.HB \Rightarrow HA.HB \leq \frac{a^2}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $HA = HB \Leftrightarrow \widehat{ABM} = 45^0 \Leftrightarrow M \equiv D$

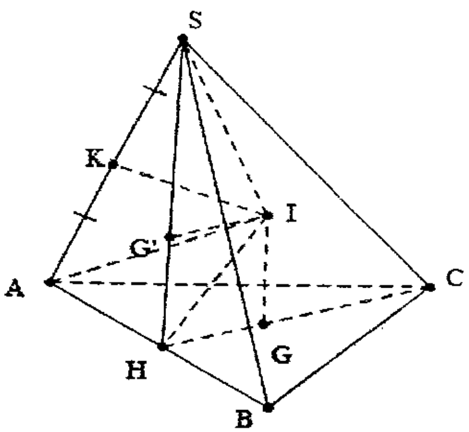
Khi đó $V_{S.ABH} = \frac{a\sqrt{2}}{6}HA.HB \leq \frac{a\sqrt{2}}{6}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Chọn D.

Bài 10:

Đặt R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

Dựng hình như hình bên với IG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và IG' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB

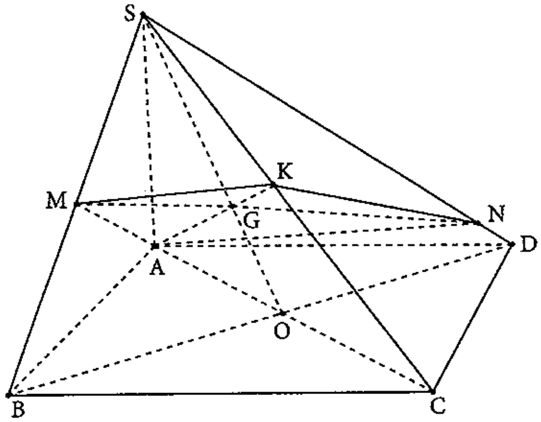


Ta có: $G'H = \frac{\sqrt{3}}{6}; GH = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Do vậy, $R=\sqrt{IH^2+HA^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}\Rightarrow V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$

Chọn B.

Bài 11.



Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$.

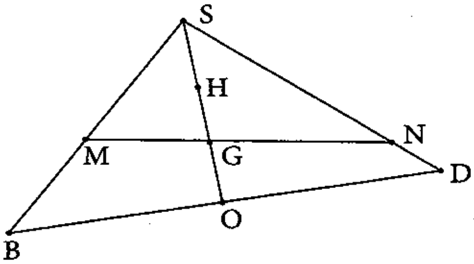
Ta có $SG=\dfrac{2}{3}SO$ và $K = AG \cap SC$ và K là trung điểm SC

$\dfrac{V_{SMAK}}{V_{SBAC}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SK}{SC}\Rightarrow V_{SMAK}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{SM}{SB}.V_{SBAC}$

$=\dfrac{1}{4}.\dfrac{SM}{SB}.V_{SABCD}=\dfrac{1}{12}\dfrac{SM}{SB}.a.b.c$

Tương tự: $V_{SNAK}=\dfrac{1}{12}.\dfrac{SN}{SC}.a.b.c$

Do đó: $V_{SAMKN}\dfrac{1}{12}.(\dfrac{SM}{SB}+\dfrac{SN}{SC}).a.b.c$



Trong mp(SBD)

$\dfrac{S_{SMN}}{S_{SBD}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{S_{SMG}+S_{SGN}}{2S_{SBO}}$

$=\dfrac{S_{SGM}}{2S_{SBO}}+\dfrac{S_{SGN}}{2S_{SOD}}=\dfrac{SG.SM}{2.SO.SB}+\dfrac{SG.SN}{2.SO.SC}$

$\Rightarrow\dfrac{SM.SN}{SB.SC}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{SM}{SB}+\dfrac{SN}{SC})$

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Do M,N lần lượt nằm trên cạnh SB,SD nên:

$\frac{SB}{2} \le SM \le SB \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{SM}{SB} \le 1$

Đặt $t = \frac{SM}{SN}, (\frac{1}{2} \le t \le 1)$ thì $t.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}(t + \frac{SN}{SC}) \Leftrightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{t}{3t-1}$.

Nhận thấy V_{SAMKN} đạt GTLN,GTNN nếu:

$$f\left(t\right) = \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC} = t + \frac{t}{3t-1} \text{ với } \frac{1}{2} \le t \le 1.$$

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{(3t-1)^2} = \frac{9t^2 - 6t}{(3t-1)^2}$

Nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}, t = 0$ (loại). $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$,$f\left(1\right) = \frac{3}{2}$ $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

Do vậy $V_{SAMKN} = \frac{abc}{8}$ là GTLN khi M là trung điểm SB hoặc M trùng với B.

$V_{SAMKN} = \frac{abc}{9}$ là GTNN khi MB chiếm 1 phần SB.

Chọn A.

Bài 12

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} \Rightarrow AA' = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{a^3\frac{\sqrt{3}}{4}}{a^2\frac{\sqrt{3}}{4}} = a$$

Do $AA' // BB'$ nên $AA' // (BB'C'C)$

Suy ra: $d\left(AA';BC'\right) = d\left(AA';\left(BBC'C\right)\right) = d\left(A;\left(BBC'C\right)\right)$.

Hạ $AH \perp A'M \Rightarrow AH \perp \left(BBC'C\right), AM \perp BC$ và $AA' \perp BC$.

Suy ra: $BC \perp \left(BCC'B'\right) \Rightarrow \left(A'AM\right) \perp \left(BCC'B'\right)$

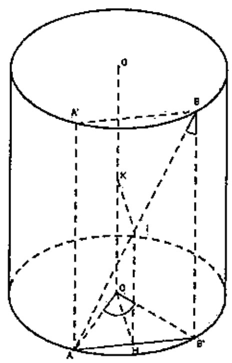
Hạ $AH \perp A'M \Rightarrow AH \perp \left(BCC'B'\right)$

Do đó, $d\left(A;\left(BBC'C\right)\right) = AH$.

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn A.

Bài 13



Gọi h là chiều cao của hình trụ, r là bán kính đáy của hình trụ.

Ta có: $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$

Thể tích của hình trụ là:

$V = \pi r^2 h = \pi R^2 h - \pi\frac{h^3}{4}$.

Xét hàm:

$$V(h) = \pi r^2 h = \pi R^2 h - \pi \frac{h^3}{4}.$$

$$V'(h) = \pi R^2 - \pi \frac{3h^2}{4}.$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \pi R^2 - \pi \frac{3h^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}.$$

Từ bảng biến thiên ta có, tại $h = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ thì $V(h)$ đạt giá trị lớn nhất.

Suy ra $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$.

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 14:

Kẻ $BB' // OO'$ cắt đường tròn (O) tại B'

Góc giữa AB và OO' là góc $ABB' = 30^0$.

Hạ OH vuông góc AB.

Khoảng cách giữa AB và OO' bằng khoảng cách giữa OO' và (ABB') vì $OO'//(ABB')$

Khi đó:

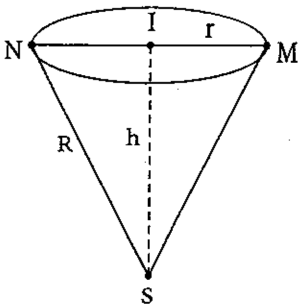
$$d(OO';AB) = d(OO';(ABB')) = OH$$

$$AB' = R \Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Chọn B.

Bài 15:

Gọi $x, (x > 0)$ là chiều dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón.



Như vậy, bán kính R của hình tròn sẽ là đường sinh của hình nón và đường tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x.

Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$.

Chiều cao của hình nón tính theo Định lý Pitago là:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Thể tích của khối nón:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Ghi chú của em

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$V^2=\frac{4\pi^2}{9}.\frac{x^2}{8\pi^2}.\frac{x^2}{8\pi^2}(R^2-\frac{x^2}{4\pi^2})$$

$$\le\frac{4\pi^2}{9}\left(\frac{\frac{x^2}{8\pi^2}+\frac{x^2}{8\pi^2}+R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}}{3}\right)^3=\frac{4\pi^2}{9}.\frac{R^6}{27}$$

Do đó V lớn nhất khi và chỉ khi:

$$\frac{x^2}{8\pi^2}=R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}=\frac{2\pi}{3}6\sqrt{6}=4\pi\sqrt{6}.$$

Chọn A.

(Lưu ý bài có thể sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, tuy nhiên lời giải bài sẽ dài hơn)

Bài 16: Gọi R_1 là bán kính đáy của khối trụ thứ nhất, có:

$$2\pi R_1=3\Leftrightarrow R_1=\frac{3}{2\pi}\Rightarrow V_1=\pi R_1^2h=\frac{27}{4\pi}.$$

Gọi R_2 là bán kính đáy của khối trụ thứ hai, có:

$$2\pi R_2=1\Leftrightarrow R_2=\frac{1}{2\pi}\Rightarrow V_2=3\pi R_2^2h=\frac{9}{4\pi}.$$

Chọn A.

Bài 17:

Do hình chóp và hình nón đã cho có cùng đường cao nên tỉ số thể tích của khối chóp và khối nón bằng tỉ số diện tích của hai đáy, tức là bằng

$$k=\frac{\frac{1}{2}.(AB+DC).AH}{\pi.r^2}.$$

Dễ thấy tâm I là trung điểm CD, để cho đơn giản cho $AB=1$ ta có

$$k=\frac{(1+2).\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\pi.1^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Chọn A.

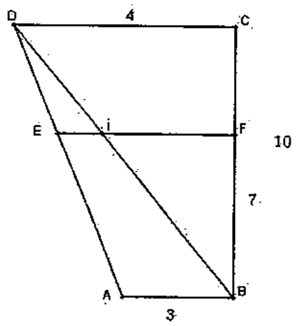
Bài 18:

$$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+rR)$$

ΔIDC có $IF//CD$

$$\Rightarrow\frac{IF}{DC}=\frac{FB}{BC}\Leftrightarrow IF=2,8cm$$

ΔDAB có $EI//AB$



$\Rightarrow \dfrac{EI}{AB} = \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{CF}{FB}$

$\Rightarrow EI = 0,9cm \Rightarrow EF = 3,7cm$

$V = \dfrac{\pi 7}{3}(3,7^2 + 3^2 + 3,7.3) = \dfrac{23653}{300}\pi.$

Đáp án D.

Bài 19.

Với a là chiều dài của cả 2 ngăn của bể cá

Ta có: $V = abc = 1,296 \quad (1)$

$S = 2\left(\dfrac{a}{2}c + bc\right) + \dfrac{a}{2}b + 2\dfrac{a}{2}.c + bc + \dfrac{a}{2}b$

$= 2ac + 3bc + ab = 2\dfrac{abc}{b} + 3\dfrac{abc}{a} + \dfrac{abc}{c} \geq abc.3\sqrt[3]{\dfrac{6}{abc}}$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{2}{a} = \dfrac{3}{a} = \dfrac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2}b \\ c = \dfrac{b}{2} \end{cases}$

Thay vào (1):

$\dfrac{3}{4}b^3 = 1,296 \Leftrightarrow b^3 = \dfrac{1,296.4}{3} \Rightarrow b = \dfrac{6}{5}; a = 1,8; c = 0,6.$

Đáp án C.

Ghi chú của em

CHƯƠNG 6.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO HÌNH HỌC OXYZ

CHƯƠNG 06

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO HÌNH HỌC OXYZ

Phương pháp tọa độ trong không gian hay còn gọi ngắn gọn là hình học Oxyz là chuyên đề cuối cùng trong chương trình toán THPT. Phần này là một phần được đánh giá là không khó, tuy nhiên việc tính toán lại rất dễ sai và ngoài ra số lượng câu hỏi vận dụng cao cũng không phải là ít. Cùng đi ngay vào Chủ đề 1 sau đây:

CHỦ ĐỀ 1

TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1 Véc-tơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, vecto là một đoạn thẳng có định hướng tức là đoạn thẳng có quy định thứ tự của hai đầu.

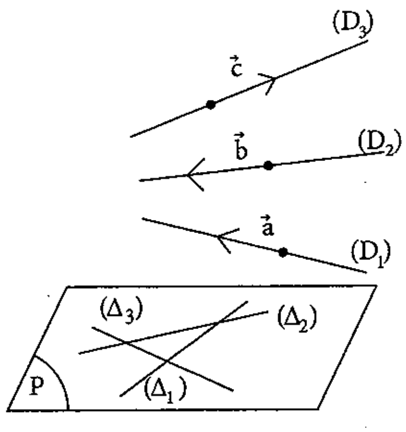
✓ *Chú ý:* Các định nghĩa về hai vecto bằng nhau, đối nhau và các phép toán trên các vecto trong không gian được xác định tương tự như trong mặt phẳng.

2 Vecto đồng phẳng

A. Định nghĩa: Ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

✓ ***Chú ý:***

- n vecto khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- Các giá của các vecto đồng phẳng có thể là các đường thẳng chéo nhau.



B. Điều kiện để ba vecto khác $\vec{0}$ đồng phẳng

Định lý 1:

$$\boxed{\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{R}: \vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}}$$

C. Phân tích một vecto theo ba vecto không đồng phẳng

✓ Định lý 2: Cho ba vecto $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ không đồng phẳng. Bất kỳ một vecto $\vec{a}$ nào trong không gian cũng có thể phân tích theo ba vecto đó, nghĩa là có một bộ ba số thực (x_1,x_2,x_3) duy nhất sao cho:

$\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$

✓ *Chú ý:* Cho ba vecto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$:

① $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có ba số thực m, n, p không đồng thời bằng 0 sao cho:

$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0$

② $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nếu từ

$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow m = n = p = 0$

3 Toạ độ của vecto:

Trong không gian xét hệ trục *Oxyz*, có trục *Ox* vuông góc với trục *Oy* tại *O*, và trục *Oz* vuông góc với mặt phẳng (*Oxy*) tại *O*. Các vectơ đơn vị trên từng trục *Ox*, *Oy*, *Oz* lần lượt là $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;0;1)$, $\vec{k} = (0;0;1)$.

1. $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

2. $M(x_M; y_M; z_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$

3. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ ta có:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

4. M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

5. Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có

➢ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

➢ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

➢ $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

➢ $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

➢ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

➢ $\cos\varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (với $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)

➢ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc:

$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

➢ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương:

$\Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$

4 Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng:

Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là :

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 a_3\\ b_2 b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 a_1\\ b_3 b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 a_2\\ b_1 b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$$

1. Tính chất :

➢ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$

➢ $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b})$

➢ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$

➢ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$

2. Các ứng dụng tích có hướng:

➢ Diện tích tam giác : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$

➢ Thểtích tứ diện$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

➢ Thể tích khối hộp:

$V_{ABCDA'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

5 Một số kiến thức khác:

1. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$) thì ta có :

$$x_M=\frac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\frac{y_A-ky_B}{1-k};z_M=\frac{z_A-kz_B}{1-k};\text{ Với } k\neq 1$$

2. G là trọng tâm của tam giác

$ABC\Leftrightarrow x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$

3. G là trọng tâm của tứ diện $ABCD\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho bốn điểm $S(1,2,3)$; $A(2,2,3)$; $B(1,3,3)$; $C(1,2,4)$. $SABC$ là:

A. Tứ diện **B.** Hình chóp đều

C.Tứ diện đều. **D.** Hình thang vuông

Bài 2. Cho bốn điểm $S(1,2,3)$; $A(2,2,3)$; $B(1,3,3)$; $C(1,2,4)$. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *BC, CA* và *AB*. *SMNP* là:

A. Hình chóp **B.** Hình chóp đều

C. Tứ diện đều **D.** Tam diện vuông

Bài 3. Cho bốn điểm $S(1,2,3)$; $A(2,2,3)$; $B(1,3,3)$; $C(1,2,4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

A. $(5,9,13)$ **B.** $\left(\frac{5}{3},3,\frac{13}{3}\right)$ **C.** $\left(1,\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4},\frac{13}{4}\right)$

Bài 4. Cho ba vectơ $\vec{a}=(1,1,-2)$; $\vec{b}=(2,-1,2)$; $\vec{c}=(-2,3,-2)$. Xác định vectơ $\vec{d}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{d}=4$; $\vec{b}.\vec{d}=5$; $\vec{c}.\vec{d}=7$.

A. $(3,6,5)$ **B.** $(-3,6,-5)$ **C.** $\left(\frac{3}{2},6,\frac{5}{2}\right)$ **D.** $\left(3,6,\frac{5}{2}\right)$

Bài 5. Cho khối tứ diện *ABCD*. Nếu $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi *M* là trung điểm của *BC* thì:

A. $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{2}$.

C. $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{2}$.

Bài 6. Cho khối tứ diện $ABCD$. Nếu $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác BCD thì

A. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$.

C. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi *O* là tâm của hình lập phương, khi đó:

A. $\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{3}$. **B.** $\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{4}$.

C. $\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\right)}{3}$.

Bài 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi *I* là tâm của mặt $(CDD'C')$, khi đó:

A. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{2}+\overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}+\overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}}{2}+\overrightarrow{AB}$. **D.** $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}}{2}$.

Bài 9. Cho khối tứ diện $ABCD$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AC,BD. Tìm hệ thức đúng:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{PQ}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{PQ}$.

Bài 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm hệ thức sai:

A. $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{C'C}=0$.

B. $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AA'}$.

D. $\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC'}$.

Bài 11: Cho tứ diện $ABCD$. M,N lần lượt là trung điểm AC,BD. Chọn hệ thức sai:

A. $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$.

C. $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{MN}$.

D. $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}$.

Bài 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $A'C\cap(A'BD)=E, AC'\cap(CB'D')=F$. Xác định hệ thức sai:

A. $\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD'}+\overrightarrow{FB'}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AC'}$.

D. $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$.

Bài 13: Cho khối tứ diên $ABCD$, G là trọng tâm của tứ diện, A' là trọng tâm tam giác BCD. M là 1 điểm tùy ý trong không gian. Chọn hệ thức đúng:

A. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GA'}$.

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{AG}$.

D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

Bài 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn hệ thức sai:

A. $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C}$.

C. $\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{C'A}$.

D. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{D'B}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;0);\overrightarrow{BC}=(0;-1;1);\overrightarrow{AC}=(-1;0;1)$

$\Rightarrow AB=BC=CA=\sqrt{2}\Rightarrow ABC$ là tam giác đều

$\overrightarrow{SA}=(1;0;0);\overrightarrow{SB}=(0;1;0);\overrightarrow{SC}=(0;0;1)\Rightarrow SA=SB=SC=1$

$$D(SA,SB,SC)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Hay ta có thể tính $\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right]\overrightarrow{SC}\neq\vec{0}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$ không đồng phẳng

$\Rightarrow SABC$ là hình chóp đều, đỉnh S.

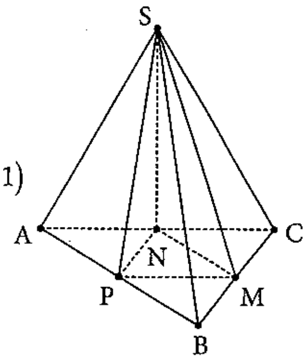
Chọn B.

Bài 2:

Tam giác:

ABC có $AB=BC=CA=\sqrt{2}$

$\Rightarrow MN=NP=PM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$\overrightarrow{SA}=(1;0;0);\overrightarrow{SB}=(0;1;0);\overrightarrow{SC}=(0;0;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=0\Rightarrow SA\perp SB$

Tương tự $SA\perp SC, SB\perp SC$

Các tam giác vuông SAB,SBC,SCA vuông tại S, có các trung tuyến:

$$SP=SM=SN=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=MN=NP=PM$$

Ta có:

$SP\subset(SAB);SM\subset(SBC);SN\subset(SCA)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SP}.\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{SN}$ không đồng phẳng

$\Rightarrow SMNP$ là tứ diện đều.

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 3:

Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OS}$

$$\Rightarrow G\begin{cases} x=\frac{1}{4}(2+1+1+1)=\frac{5}{4} \\ y=\frac{1}{4}(2+3+2+2)=\frac{9}{4} \\ z=\frac{1}{4}(3+3+4+3)=\frac{13}{4} \end{cases}$$

Chọn D.

Bài 4:

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{d}=4 \\ \vec{b}.\vec{d}=5 \\ \vec{c}.\vec{d}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=4 & (1) \\ 2x-y+2z=5 & (2) \\ -2x+3y-2z=7 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2): 3x=9 \Leftrightarrow x=3$ và $(2)+(3): 2y=12 \Leftrightarrow y=6$.

$(1): z=\frac{1}{2}(x+y-4)=\frac{1}{2}(3+6-4)=\frac{5}{2} \Rightarrow \vec{d}=\left(3;6;\frac{5}{2}\right)$

Chọn D.

Bài 5:

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=-\vec{c}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$.

Chọn C.

Bài 6:

Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD nên

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{b}+\overrightarrow{BG}$ (1)

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\vec{c}+\overrightarrow{CG}$ (2)

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\vec{d}+\overrightarrow{DG}$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra:

$3\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{0}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

Chọn B.

Bài 7:

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{2}$.

Chọn C.

Ghi chú của em

Bài 8:

O là tâm hình lập phương

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}}{2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{2}+\overrightarrow{AD}.$$

Chọn A.

Bài 9:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AQ}$$

$+$

$$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CQ}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=2\left(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CQ}\right)=2\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}\right)$$

$$=2\left(2\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP}\right)=4\overrightarrow{PQ}$$

Chọn A.

Bài 10:

O là tâm hình hộp.

$$\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{CA'}=2\overrightarrow{CO}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}=2\left(\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{CO}\right)=2\overrightarrow{CC'}$$

$$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}+2\overrightarrow{C'C}=2\overrightarrow{CC'}+2\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AO}\\ \overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{OC}\end{array}\right\}\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}=2\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{AC}$$

Vậy C sai.

Chọn C.

Bài 11:

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$ (hệ thức trung điểm). Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của $AD,BC \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành

$$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MN}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MN}\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$$

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NM}$ *(C sai)*

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$$

Chọn C.

Bài 12:

Gọi I,I' các giao điểm của các đường chéo ở 2 mặt đáy AC' cắt các trung tuyến $A'I$ của tam giác $A'BD$ và trung tuyến CI' (của tam giác $CB'D'$) tại E và F.

$\frac{EI}{A'I}=\frac{IF}{FC}=\frac{1}{2}\Rightarrow E,F$ là trọng tâm tâm của tam giác $A'BD;CB'D'$.

Chọn A,B đúng.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AC'}$. C sai

$AE=EF=FC'=\frac{1}{3}AC'\Rightarrow\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$. D đúng.

Chọn D.

Bài 13:

Gọi B' là trọng tâm tam giác ACD, hai trung tuyến AA'; BB' cắt nhau tại G $\Delta GA'B'$ đồng dạng Δ GAB.

$$\Rightarrow\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'M}{BM}=\frac{1}{3}\Rightarrow GA'=\frac{1}{3}GA\Rightarrow\overrightarrow{AA'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'D}$$

$$=3\overrightarrow{GA'}+\underbrace{\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}}=3\overrightarrow{GA'}+\vec{0}=3\overrightarrow{GA'}$$

$$3\overrightarrow{GA'}=-\overrightarrow{GA}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$$

$$=4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{MG}$$

Chọn C.

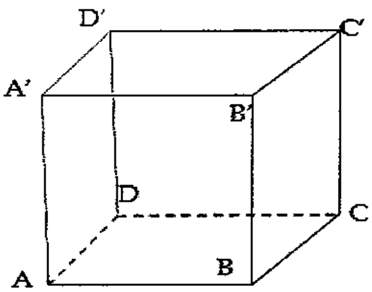
Bài 14:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$$

$$\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C}$$

$$\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{C'A}$$

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$$



Chỉ có hệ thức D sai.

Chọn D.

Ghi chú của em

CHỦ ĐỀ 2

MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1 Định nghĩa

Trong không gian Oxyz phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$
với $A^2+B^2+C^2>0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

➢ Phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$. Có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$

➢ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(A;B;C), \vec{n}\neq\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến có dạng $(P): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

➢ Nếu (P) có cặp vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương ,có giá song song hoặc nằm trên (P). Thì vectơ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

2 Các trường hợp riêng của mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2+B^2+C^2>0$. Khi đó:

➢ $D=0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.

➢ $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0$. Khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox

➢ $A=0, B=0,\ C\neq 0,\ D\neq 0$. Khi và chỉ khi (α) song song mp (Oxy)

➢ $A,\ B,\ C,\ D\ \neq 0$. Đặt $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$. Khi đó $(\alpha): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

3 Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho (α): $Ax+By+Cz+D=0$ và (α'): $A'x+B'y+C'z+D'=0$

➢ (α) cắt $(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'\neq A'B \\ BC'\neq B'C \\ CB'\neq C'B \end{cases}$

➢ $(\alpha) // (\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'=A'B \\ BC'=B'C \\ CB'=C'B \end{cases}$ và $AD'\neq A'D$

➢ $(\alpha)\equiv(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'=A'B \\ BC'=B'C \\ CB'=C'B \\ AD'=A'D \end{cases}$

Đặc biệt: $(\alpha)\perp(\alpha') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

4 Góc giữa hai mặt phẳng

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^0 \le \varphi \le 90^0$)

$(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{\left|A.A'+B.B'+C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho tứ giác *ABCD* có $A(0,1,-1)$; $B(1,1,2)$; $C(1,-1,0)$; $(0,0,1)$. Viết phương trình của mặt phẳng (*P*) qua *A*, *B* và chia tứ diện thành hai khối *ABCE* và *ABDE* có tỉ số thể tích bằng 3.

A. $15x-4y-5z-1=0$ **B.** $15x+4y-5z-1=0$

C. $15x+4y-5z+1=0$ **D.** $15x-4y+5z+1=0$

Bài 2: Cho tứ giác *ABCD* có $A(0,1,-1)$; $B(1,1,2)$; $C(1,-1,0)$; $(0,0,1)$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (*Q*) song song với mặt phẳng (*BCD*) và chia tứ diện thành hai khối *AMNF* và *MNFBCD* có tỉ số thể tích bằng $\frac{1}{27}$.

A. $3x-3z-4=0$ **B.** $y-z-1=0$

C. $y+z-4=0$ **D.** $4x+3z+4=0$

Bài 3: Từ gốc *O* vẽ *OH* vuông góc với mặt phẳng (*P*), ($OH=p$); gọi α, β, γ lần lượt là các góc tạo bởi vectơ pháp tuyến của (*P*) với ba trục *Ox*, *Oy*, *Oz*. Phương trình của (*P*) là:

A. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ **B.** $x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma-p=0$

C. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+p=0$ **D.** $x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+p=0$

Bài 4: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (*P*) cắt hai trục *y'Oy* và *z'Oz* tại $A(0,-1,0)$; $B(0,0,1)$ và tạo với mặt phẳng (*yOz*) một góc 45^o.

A. $\sqrt{2}x-y+z-1=0$ **B.** $\sqrt{2}x+y-z+1=0$

C. $\sqrt{2}x+y-z+1=0$; $\sqrt{2}x-y+z+1=0$ **D.** $\sqrt{2}x+y-z+1=0$; $\sqrt{2}x-y+z-1=0$

Bài 5: Cho mặt phẳng (*P*) qua hai điểm $A(3,0,4)$; $B(-3,0,4)$ và hợp với mặt phẳng (*xOy*) một góc 30^o và cắt *y'Oy* tại C. Tính khoảng cách từ *O* đến (*P*):

A. $4\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

Bài 6: Cho mặt phẳng (*P*) qua hai điểm $A(3,0,4)$; $B(-3,0,4)$ và hợp với mặt phẳng (*xOy*) một góc 30^o và cắt *y'Oy* tại C. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (*P*).

A. $y+\sqrt{3}z+4\sqrt{3}=0$ **B.** $y+\sqrt{3}z-4\sqrt{3}=0$

C. $y\pm 3z\pm 4\sqrt{3}=0$ **D.** $x-y-\sqrt{3}z-4\sqrt{3}=0$

Bài 7: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0, A(8;-7;4), B(-1;2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất

A. $M(0;0;-1)$. **B.** $M(0;0;1)$. **C.** $M(1;0;1)$. **D.** $M(0;1;0)$.

Bài 8: Cho hai điểm $A(0;0;-3), B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x-8y+7z-1=0$. Tìm $M \in (P)$ sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{283}{183};\frac{-104}{183};\frac{-214}{183}\right)$ **B.** $M\left(\frac{-283}{183};\frac{104}{183};\frac{-214}{183}\right)$

C. $M\left(\frac{283}{183};\frac{-14}{183};\frac{-14}{183}\right)$ **D.** $M\left(\frac{283}{183};\frac{14}{183};\frac{14}{183}\right)$

Bài 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+y+z=0$ và hai điểm $A(4;-3;1), B(2;1;1)$.

Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Q) sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

A. $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;1) \\ M\left(\frac{17}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right) \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} M(1;2;1) \\ M\left(\frac{17}{7};\frac{9}{7};\frac{8}{7}\right) \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} M(-1;2;1) \\ M\left(\frac{13}{7};-\frac{5}{7};-\frac{9}{7}\right) \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} M(1;1;1) \\ M\left(\frac{9}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right) \end{array}\right.$

Bài 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;2), B(3;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2x-11=0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MB=2\sqrt{2}, \widehat{MBA}=30^0$

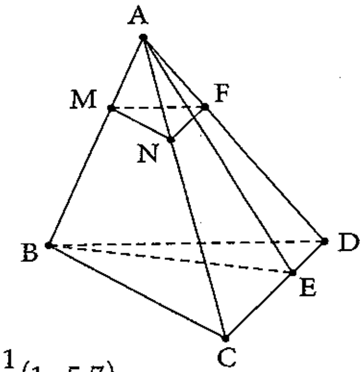
A. $\left[\begin{array}{l} M(1;2;3) \\ M(1;4;1) \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;3) \\ M(1;-4;1) \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} M(2;1;3) \\ M(4;1;1) \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} M(1-;2;3) \\ M(-1;4;1) \end{array}\right.$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1.

(*P*) cắt cạnh *CD* tại *E*, *E* chia đoạn *CD* theo tỷ số -3



$$\Rightarrow E\begin{cases} x=\dfrac{x_C+3x_D}{4}=\dfrac{1+3.0}{4}=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{y_C+3y_D}{4}=\dfrac{-1+3.0}{4}=\dfrac{-1}{4} \\ z=\dfrac{z_C+3z_D}{4}=\dfrac{0+3.1}{4}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}=(1,0,3);\ \overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{4};-\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)=\frac{1}{4}(1,-5,7)$$

Pháp vecto của:

$$(P):\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right]=(15,-4,-5)$$

$$\Rightarrow(P):(x-0)15+(y-1)(-4)+(z+1)(-5)=0\Leftrightarrow 15x-4y-5z-1=0$$

Chọn A.

Bài 2.

Tỷ số thể tích hai khối *AMNE* và *ABCD*: $\left(\dfrac{AM}{AB}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

$\Rightarrow\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ M chia cạnh BA theo tỷ số -2

$$\Rightarrow E\begin{cases} x=\dfrac{1+2.0}{3}=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1+2.1}{3}=1 \\ z=\dfrac{2+2(-1)}{3}=0 \end{cases};\ \overrightarrow{BC}=-2(0,1,1);\ \overrightarrow{BD}=-(1,1,1)$$

Pháp vecto của $(Q):\vec{n}=(0,1,-1)$

$$\Rightarrow M\in(Q)\Rightarrow(Q):\left(x-\frac{1}{3}\right)0+(y-1)1+(z-0)(-1)=0$$

$$\Rightarrow(P):y-z-1=0$$

Chọn B.

Ghi chú của em

Bài 3

$H\left(p\cos\alpha, p\cos\beta, c\cos\gamma\right) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \left(p\cos\alpha, p\cos\beta, c\cos\gamma\right)$

Gọi: $M\left(x,y,z\right) \in \left(P\right) \Rightarrow \overrightarrow{HM} = \left(x - p\cos\alpha, y - p\cos\beta, z - c\cos\gamma\right)$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{HM}$

$\Leftrightarrow \left(x - p\cos\alpha\right)p\cos\alpha + \left(y - p\cos\beta\right)p\cos\beta + \left(z - p\cos\gamma\right)p\cos\gamma$

$\Leftrightarrow \left(P\right): x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$

Chọn A.

Bài 4

Gọi $C\left(a,0,0\right)$ là giao điểm của (P) và trục $x'Ox$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} = \left(0,-1,-1\right); \overrightarrow{BC} = \left(a,0,-1\right)$

Pháp vecto của $\left(P\right)$ là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(1,-a,a\right)$

Pháp vecto của $\left(yOz\right)$ là: $\overrightarrow{e_1} = \left(1,0,0\right)$

Gọi α là góc tạo bởi $\left(P\right)$ và $\left(yOz\right) \Rightarrow \cos 45^o = \dfrac{1}{\sqrt{1+2a^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 4a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy có hai mặt phẳng $\left(P\right): \pm\sqrt{2}x - y + z = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - y + z - 1 = 0; \sqrt{2}x + y - z + 1 = 0$

Chọn D.

Bài 5

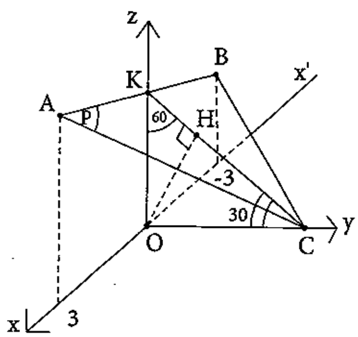
Vẽ $OH \perp KC$ với K là giao điểm của AB và trục $z'Oz$

Ta có:

$\widehat{C} = 30^o \Rightarrow \widehat{K} = 60^o; OK = 4$

$\Rightarrow d\left(O,P\right) = OH = OK.\sin 60^o$

$= 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$



Chọn D.

Bài 6

$C\left(0,c,0\right); \overrightarrow{AC} = \left(-3,c,-4\right); \overrightarrow{AB} = \left(-6,0,0\right)$

Pháp vecto của $\left(P\right): \vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right] = 6\left(0,4,c\right)$

Pháp vecto của $\left(xOz\right): \overrightarrow{e_3} = \left(0,0,1\right)$

$$\cos 30^o = \frac{|c|}{\sqrt{16+c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow c^2 = 48$$

$$\Leftrightarrow c = \pm 4\sqrt{3} \Rightarrow \vec{n} = 6\left(0,4,\pm 4\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow (P):(x-3).0+(y-0)4+(z-4)\left(\pm 4\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y \pm z\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3} = 0$$

Chọn C.

Bài 7

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=0 \Rightarrow I(2;-1;0)$

Có $MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=3MI^2+IA^2+2IB^2$

Vì IA,IB không đổi nên $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P)

Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P)

$$\Rightarrow d:\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases};d\cap(P)=M(0;0;-1)$$

Chọn A.

Bài 8

Gọi I sao cho

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{4}{3};0;-\frac{5}{3}\right)$$

$$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA};MB^2$$

$$=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2\right)=MI^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$$

$$MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}\right)$$

$$=3MI^2+IA^2+2IB^2$$

Suy ra $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}$ khi MI bé nhất hay M là hình chiếu của I trên (P)

Tìm được tọa độ $M\left(\frac{283}{183};\frac{-104}{183};\frac{-214}{183}\right)$

Chọn A.

Bài 9

Gọi $M(a;b;c).M\in(Q)\Rightarrow a+b+c=0\ \ (1)$.

Tam giác ABM cân tại M khi và chỉ khi:

$$AM^2=BM^2 \Leftrightarrow (a-4)^2+(b+3)^2+(c-1)^2$$

$$=(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \Leftrightarrow -a+2b+5=0 \ (2)$$

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+2b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b+5 \\ c=-5-3b \end{cases} (*)$

Trung điểm AB là $I(3;-1;1)$. Tam giác ABM cân tại M, suy ra:

$$MI=\frac{AB}{2} \Leftrightarrow (a-3)^2+(b+1)^2+(c-1)^2=5 \quad (3)$$

Thay (*) vào (3) ta được:

$$(2b+2)^2+(b+1)^2+(-6-3b)^2=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2 \\ b=-\frac{9}{7} \end{array}\right.$$

$b=-2 \Rightarrow a=1, c=1 \Rightarrow M(1;-2;1)$

$b=-\frac{9}{7} \Rightarrow a=\frac{17}{7}, c=-\frac{8}{7} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right)$.

Chọn A.

Bài 10:

Nhận thấy $A \in (P), B \notin (P), AB=\sqrt{6}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác MAB ta có :

$MA^2 = MB^2 + BA^2 - 2MB.BA\cos 30^0 = 2 \Rightarrow MB^2 = MA^2 + BA^2$

Do đó tam giác MAB vuông tại A.

Ta có:

$$\overrightarrow{u_{AM}}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_p}\right]=(0;-5;5) \Rightarrow AM: \begin{cases} x=1 \\ y=3-t \\ z=2+t \end{cases} \Rightarrow M(1;3-t;2+t)$$

Ta có $MA^2=2 \Leftrightarrow t^2+t^2=2 \Leftrightarrow t=\pm 1$

Với $t=1 \Rightarrow M(1;2;3)$

Với $t=-1 \Rightarrow M(1;4;1)$

Chọn A.

ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1 Định nghĩa

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$,$\vec{a}\neq\vec{0}$

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$$

Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

Ngoài ra đường thẳng còn có dạng tổng quát là: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

với $\forall A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2$ thỏa $A_1^2+B_1^2+C_1^2>0$, $A_2^2+B_2^2+C_2^2>0$.

2 Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

<table>
<tr><th>Chương trình cơ bản</th><th>Chương trình nâng cao</th></tr>
<tr>
<td>

1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$d:\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x=x_o'+a_1't' \\ y=y_o'+a_2't' \\ z=z_o'+a_3't' \end{cases}$ vtcp $\vec{u}$

đi qua M_o và d' có vtcp $\overrightarrow{u'}$ đi qua M_0'

➢ ***$\vec{u},\overrightarrow{u'}$ cùng phương***

d // d$\Leftrightarrow\begin{cases} \vec{u}=k\overrightarrow{u'} \\ M_0\notin d' \end{cases}$

d ≡ d'$\Leftrightarrow\begin{cases} \vec{u}=k\overrightarrow{u'} \\ M_0\in d' \end{cases}$

➢ ***$\vec{u},\overrightarrow{u'}$ không cùng phương***

$\begin{cases} x_o+a_1t=x_o'+a_1't' \\ y_o+a_2t=y_o'+a_2't' \\ z_0+a_3t=z_o'+a_3't' \end{cases}$ (I)

- d chéo d'$\Leftrightarrow$Hệ phương trình (I) vô nghiệm
- d cắt d'$\Leftrightarrow$ Hệ phươngtrình (I) có một nghiệm

</td>
<td>

1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$d:\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x=x_o'+a_1't' \\ y=y_o'+a_2't' \\ z=z_o'+a_3't' \end{cases}$

vtcp $\vec{u}$ đi qua M_o và d' có vtcp $\overrightarrow{u'}$ đi qua M_0'

➢(d) // (d') $\Leftrightarrow\begin{cases} [\vec{u},\overrightarrow{u'}]=\vec{0} \\ M_o\notin d' \end{cases}$

➢(d) ≡ (d') $\Leftrightarrow\begin{cases} [\vec{u},\overrightarrow{u'}]=\vec{0} \\ M_0\in d' \end{cases}$

➢(d) cắt (d') $\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\neq 0 \\ \left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_oM_0'}=0 \end{cases}$

➢(d) chéo (d') $\Leftrightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\neq 0$

</td>
</tr>
</table>

3 ... đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp 1	Phương pháp 2
Trong Không gian $Oxyz$ cho: $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $d: \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ **Phương trình:** $A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)$ **(1)** $+C(z_0+a_3t)+D=0$ ➤Phương trình (1) vô nghiệm thì $d // (\alpha)$ ➤Phương trình (1) có một nghiệm thì d cắt (α) ➤Phương trình (1) có vô số nghiệm thì d thuộc (α) Đặc biệt: $(d) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{n}$ cùng phương	Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vtcp: $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vtpt: $\vec{n}=(A;B;C)$ ➤ (d) cắt (α) $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} \neq 0$ ➤ $(d) // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n}=0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$ ➤(d) nằm trên mp(α) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n}=0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$

4

Khoảng cách từ $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ cho bởi công thức $d(M_0,\alpha)=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D \rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	
Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d) Phương pháp 1: • Lập ptmp(α) đi qua M và vuông góc với d. • Tìm tọa độ giao điểm H của mp(α) và d • $d(M, d) = MH$ ➤Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau <u>Phương pháp 1:</u> d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ d' qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$; vtcp $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa d và song song với d' d(d,d')= d(M',(α))	➤Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d) Phương pháp 2: (d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$) $d(M,\Delta)=\dfrac{\lvert [\overrightarrow{M_0M},\vec{u}] \rvert}{\lvert \vec{u} \rvert}$ ➤Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau *<u>Phương pháp 2:</u>* d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ d' qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$; vtcp $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ $d(\Delta,\Delta')=\dfrac{\lvert [\vec{a},\vec{a'}].\overrightarrow{MM'} \rvert}{\lvert [\vec{a},\vec{a'}] \rvert}=\dfrac{V_{hop}}{S_{day}}$

5 Góc giữa hai đường thẳng

➤ Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

(Δ') đi qua $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$ có VTCP $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{a'})\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|}=\frac{\left|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

3 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

➤ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mp(α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mp(α) : $\sin\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right|=\dfrac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và d bằng $\sqrt{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{-y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{-y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}\end{array}\right.$

Bài 2 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của $d,(P)$. Tìm $M\in(P)$ sao cho MI vuông góc với d và $MI=4\sqrt{14}$.

A. $\left[\begin{array}{l}M(5;9;-11)\\ M(-3;-7;13)\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}M(5;7;-11)\\ M(-3;-7;13)\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}M(-5;9;-11)\\ M(3;-7;13)\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}M(5;-7;11)\\ M(3;7;-13)\end{array}\right.$

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0$, $(Q): 2x+2y+z-1=0$. Viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua $A(0;0;1)$, nằm trong mặt phẳng (Q) và tạo với mặt phẳng (P) một góc bằng 45^o.

A. $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-4t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

B. $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=2t-1 \\ z=1-4t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$

C. $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=t-1 \\ z=1-4t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=3t \\ y=-t \\ z=1+4t \end{cases}$

D. $d_1: \begin{cases} x=1+4t \\ y=1-t \\ z=1-4t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD=2AB$ và diện tích bằng 27; đỉnh $A(-1;-1;0)$; phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ các điểm D biết hoành độ điểm B lớn hơn hoành độ của điểm A.

A. $D(-2;-5;1)$.

B. $D(-3;-5;1)$.

C. $D(2;-5;1)$.

D. $D(3;-5;1)$.

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 5x-z-4=0$ và hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}; \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) song song (P), theo thứ tự cắt $d_1; d_2$ tại A, B sao cho $AB=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

A. $(Q_1): 5x-z+\frac{-25+\sqrt{331}}{7}=0, (Q_2): 5x-z+\frac{-25-\sqrt{331}}{7}=0$

B. $(Q_1): 5x+z-2=0, (Q_2): 55x+11z+14=0$

C. $(Q_1): -5x-z-2=0, (Q_2): -55x-11z+14=0$

D. $(Q_1): 5x-z-4=0, (Q_2): 55x-11z+7=0$

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$d_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}, d_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$. Lập phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$.

B. $d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$

C. $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$

D. $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm giữa $d, (P)$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với d đồng thời khoảng cách từ M tới Δ bằng $\sqrt{42}$

A. $\left[\begin{array}{l}\Delta: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1} \\ \Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}\Delta: \dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1} \\ \Delta: \dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}\Delta: \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-5}{1} \\ \Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}\Delta: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+5}{1} \\ \Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$, đường thẳng $d: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+1=0$. Gọi d' là đường thẳng đối xứng với d qua (P). Tìm tọa độ điểm B trên d' sao cho $AB=9$.

A. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{62+16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+8\sqrt{151}}{27}\right) \\ B\left(\dfrac{62-16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-8\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{62+\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+\sqrt{151}}{27}\right) \\ B\left(\dfrac{62-\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{16\sqrt{151}}{27};\dfrac{2\sqrt{151}}{27};\dfrac{8\sqrt{151}}{27}\right) \\ B\left(\dfrac{-16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-2\sqrt{151}}{27};\dfrac{-8\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{62+4\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+8\sqrt{151}}{27}\right) \\ B\left(\dfrac{62-4\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-8\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ và tạo với mặt phẳng $(P): x+2y-z+5=0$ một góc nhỏ nhất.

A. $(Q): y-z+4=0$.

B. $(Q): y-z+6=0$.

C. $(Q): y+2z+4=0$.

C. $(Q): 2y-z+4=0$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1:

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(2;1;1)$. Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(1;2;-1)$, ta có $\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{u_d}\right]=(3;-3;-3)$

Vì $\Delta\subset(P),\Delta\perp d\Rightarrow VTCP\ \overrightarrow{u_\Delta}=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]=(0;-1;1)$

Khi đó, phương trình mặt phẳng $(Q):y-z+m=0$

Chọn $A(1;-2;0)\in d$, ta có:

$$d(A;(Q))=d(\Delta;d)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|-2+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=0\end{array}\right.$$

Với $m=4\Rightarrow(Q):y-x+4=0$

Vì $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua $B(7;0;4)\Rightarrow\Delta:\frac{x-7}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{-1}$

Với $m=0\Rightarrow(Q):y-z=0$

Vì $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua $C(3;0;0)\Rightarrow\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$

Chọn A.

Bài 2:

Vì $I\in d$ nên $I(2+t;-1-2t;-t)$.

Hơn nữa $I\in(P)\Rightarrow 2+t-1-2t-t-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow I(1;1;1)$

Gọi $M(a;b;c)$

Do:

$$\begin{cases}M\in(P)\Rightarrow a+b+c=3\\MI\perp d\Rightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow a-2b-c+2=0\end{cases}$$

$\left(\overrightarrow{IM}=(a-1;b-1;c-1),\overrightarrow{u_d}=(1;-2;-1)\right)$

Do $MI=4\sqrt{14}\Rightarrow(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224$.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a+b+c=3\\a-2b-c+2=0\\(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a-1\\c=4-3a\\(a-1)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=9\\c=-11\end{cases}\cup\begin{cases}a=-3\\b=-7\\c=13\end{cases}$$

Với $(a;b;c)=(5;9;-11)\Rightarrow M(5;9;-11)$

Với $(a;b;c)=(-3;-7;13)\Rightarrow M(-3;-7;13)$

Chọn A.

Ghi chú của em

Bài 3

Ghi chú của em

Ta có $\vec{n}=(2;2;1)$ là vectơ pháp tuyến của (Q)

$\vec{b}=(1;-2;2)$ là vecto pháp tuyến của (P)

Gọi $\vec{a}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một vecto chỉ phương của d.

Vì đường thẳng d đi qua $A(0;0;1)$ mà $A(0;0;1), A\in(Q)$

Do đó $d\subset(Q)\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{n}\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 2a+2b+c=0\Leftrightarrow c=-2a-2b$

Góc hợp bởi d và (P) bằng 45°:

$$\Leftrightarrow \sin 45^\circ=\left|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Leftrightarrow 18\left(a^2+b^2+c^2\right)=4(a-2b+2c)^2\Leftrightarrow a=\pm b$$

$a=b\ \left(b=1\Rightarrow a=1;c=-4\right)$

$a=-b\ \left(b=-1\Rightarrow a=1;c=0\right)$

Vậy $d_1:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-4t\end{cases}, d_2:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=1\end{cases}$ là các đường thẳng cần tìm.

Chọn A.

Bài 4:

Đường thẳng CD qua $M(2;-1;3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;2;1)$

Gọi $H(2+2t;-1+2t;3+t)$ là hình chiếu của A lên CD, ta có:

$\overrightarrow{AH}.\vec{u}=2(3+2t;2.2t+(3+t)\Rightarrow t=-1$

$\Rightarrow H(0;-3;2), d(A,CD)=AH=3$

Từ giả thiết có:

$$AB+CD=3AB=\frac{2S_{ABCD}}{AH}=18\Rightarrow AB=6; DH=3; HC=9$$

Đặt

$\overrightarrow{AB}=t\vec{u}=(2t;2t;t)\Rightarrow t>0\left(x_B>x_A\right)$

$$\Rightarrow t=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\vec{u}\right|}=2\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(4;4;2)\Rightarrow B(3;3;2)$$

$$\overrightarrow{HC}=\frac{9}{6}\overrightarrow{AB}=(6;6;3)\Rightarrow C(6;3;5)$$

$$\overrightarrow{HD}=-\frac{3}{6}\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-1)\Rightarrow D(-2;-5;1)$$

Chọn A.

Bài 5

$$d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-1+2t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=1+2t'\\y=2+t'\\z=-1+t'\end{cases};(Q):5x-z+d=0,d\neq-4$$

$$(Q)\cap d_1=A\left(\frac{-3-d}{3};\frac{6+d}{3};\frac{-15-2d}{3}\right),(Q)\cap d_2$$

$$=B\left(\frac{-3-2d}{9};\frac{12-d}{9};\frac{-15-d}{9}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{6+d}{9};\frac{-6-4d}{9};\frac{30+5d}{9}\right)=\frac{1}{9}(6+d;-6-4d;30+5d)$
Do

$$AB=\frac{4\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\frac{1}{81}\left((6+d)^2+(-6-4d)^2+(30+5d)^2\right)=\frac{80}{9}$$

$$\Leftrightarrow 42d^2+300d+252=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=\frac{-25+\sqrt{331}}{7}\\d=\frac{-25-\sqrt{331}}{7}\end{array}\right.$$

Vậy, tìm được hai mặt phẳng thỏa mãn:

$$(Q_1):5x-z+\frac{-25+\sqrt{331}}{7}=0,(Q_2):5x-z+\frac{-25-\sqrt{331}}{7}=0$$

Chọn A.

Bài 6

Vì $A\in d_1;B\in d_2\Rightarrow A(-1+a;-2+2a;a),B(2+2b;1+b;1+b)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-a+2b+3;-2a+b+3;-a+b+1)$

(P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-2), AB//(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\\A\notin(P)\end{cases}$

$\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\Leftrightarrow -a+2b+3-2a+b+3+2a-2b-2=0$

$\Leftrightarrow b=a-4\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(a-5;-a-1;-3)$
Do đó:

$$AB=\sqrt{(a-5)^2+(-a-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{2(a-2)^2+27}\geq 3\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \min AB=3\sqrt{3}$ khi a=2 $\Rightarrow$ A(1;2;2)

$\overrightarrow{AB}=(-3;-3;-3), A(1;2;2)\notin(P)$
Vậy phương trình đường thẳng

$$\Rightarrow d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$$

Chọn A.

Bài 7:

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Mặt phẳng (*P*) có VTPT $\overrightarrow{n_p} = (1;;1;1)$, d có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (2;1;-1)$

Vì $M = d \cap (P) \Rightarrow M(1;-3;0)$

Vì Δ nằm trong (*P*) và vuông góc với d nên:

$VTCP\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right] = (2;-3;1)$

Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của *M* trên Δ, khi đó:

$\overrightarrow{MN} = (x-1;y+3;z)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \\ N \in (P) \\ MN = \sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-3y+z-11=0 \\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} N(5;-2;-5) \\ N(-3;-4;5) \end{array}\right.$

Với $N(5;-2;-5) \Rightarrow \Delta : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z+5}{1}$

Với $N(-3;-4;5) \Rightarrow \Delta : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-5}{1}$

Chọn A.

Bài 8:

Có d cắt (P) tại $I(2;-1;1)$. Chọn $M(0;0;-1) \in d$ và M' là điểm đối xứng của *M* qua (*P*). Khi đó $M' \in (d')$. Ta tìm M'

Gọi Δ là đường thẳng đi qua *M* và vuông góc với mp(*P*)

$\Rightarrow VTCP\ \overrightarrow{u_\Delta} = VTPT\ \overrightarrow{n_p} = (1;2;-1) \Rightarrow \Delta : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$

Gọi *H* là trung điểm *MM'* thì tọa độ *H* định :

$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1} \\ x+2y-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}; y = -\dfrac{2}{3}; z = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right).$

Từ đó: $M'\left(2x_H - x_M; 2y_H - y_M; 2z_H - z_M\right) = \left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Suy ra d' là đường thẳng đi qua $I(2;-1;1)$ nhận VTCP:

$\overrightarrow{M'I} = \left(\dfrac{8}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right) \Rightarrow d' : \dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{4}$

$B \in d' \Rightarrow B(2+8t;-1+t;1+4t)$

Theo đề bài ta phải có :

$AB = 9 \Leftrightarrow (1+8t)^2 + (t-3)^2 + (4t-2)^2 = 81$

Ghi chú của em

$\Leftrightarrow 81t^2-6t-67=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1\pm 2\sqrt{151}}{27}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B\left(\dfrac{62+16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+8\sqrt{151}}{27}\right) \\ B\left(\dfrac{62-16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-8\sqrt{151}}{27}\right) \end{array}\right.$$

Chọn A.

Bài 9:

+ d có vtcp $\vec{u}=(2,1,1),(P)$ có vtpt $\vec{m}=(1,2,-1)$

(Q) có vtpt $\vec{n}=(a,b,c),(a^2+b^2+c^2>0)$

+ do (Q) chứa d nên ta có

$\vec{n}\perp\vec{u} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 2a+b+c=0 \Leftrightarrow c=-2a-b \Leftrightarrow \vec{n}=(a,b,-2a-b)$

+ Gọi góc hợp bởi (P) và (Q) là

$$\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{m};\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{m}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|a+2b+2z+b\right|}{\sqrt{6}.\sqrt{a^2+b^2+\left(2a+b\right)^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{3\left|a+b\right|}{\sqrt{6}.\sqrt{3a^2+2\left(a+b\right)^2}}\le\frac{3\left|a+b\right|}{\sqrt{6}.\sqrt{2\left(a+b\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\alpha\ge 30^0$$

Vậy $\alpha_{\min}=30^0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ $a=0$ lúc đó ta chọn $b=1;c=-1\Rightarrow\vec{n}=(0,1,-1)$

Mặt phẳng $(Q):\begin{cases} qua: A(-1,-1,3) \\ vtpt: \vec{n}=(0,1,-1) \end{cases}$ từ đó $:(Q): y-z+4=0$

Chọn A.

Ghi chú của em

CHỦ ĐỀ 3

MẶT CẦU

1 Định nghĩa mặt cầu

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S(O;R)$

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$:

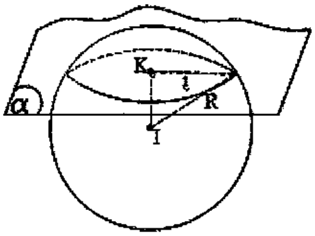
- Mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là:

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

- Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

2 Vị trí tương đối của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S)



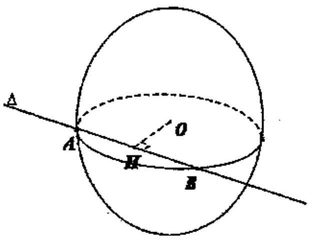
➢ $d(I,(\alpha))>R$ khi và chỉ khi (α) không cắt mặt cầu (S).

➢ $d(I,(\alpha))=R$ khi và chỉ khi (α) tiếp xúc mặt cầu (S).

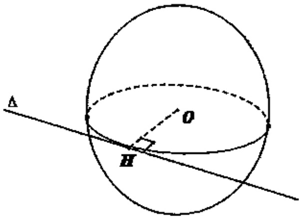
➢ $d(I,(\alpha))<R$ khi và chỉ khi (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm K và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

3 Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

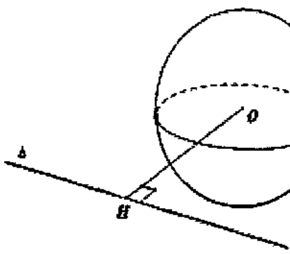
a) Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ



(H.3.1)



(H.3.2)



(H.3.3)

➢ Nếu $d<R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt (H.3.1)

➢ Nếu $d=R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất (H.3.2)

➢ Nếu $d>R$ thì Δ không cắt mặt cầu (H.3.3)

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(2;-1;2)$, $C(-1;1;-3)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Oy, đi qua A và cắt mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

A. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$.

B. $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$.

C. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{4}$.

D. $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$.

Bài 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng: $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{233}{9}$.

B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{243}{9}$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{2223}{9}$.

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{333}{9}$

Bài 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-12=0$ và đường thẳng (d): $x=5+2t; y=4; z=7+t$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm $M(5;0;1)$ biết đường thẳng Δ tạo với đường thẳng d một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

A. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases} \vee \Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$.

B. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases} \vee \Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1+11t\end{cases}$.

C. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=5t\\z=1-t\end{cases} \vee \Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$..

D. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases} \vee \Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-21t\end{cases}$.

Bài 4: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tâm M tiếp xúc với trục Oz có bán kính bằng 2.

A. $M(2;0;-2)\vee M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$.

B. $M(2;0;2)\vee M\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$.

C. $M(2;0;-2)\vee M\left(\frac{7}{5};-\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$.

D. $M(4;0;-2)\vee M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Bài 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2, có phương trình:

$\Delta_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2}, \Delta_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$.

Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2?

A. $x^2+(y-2)^2+z^2=6.$ B. $x^2+(y-2)^2-z^2=6.$

C. $x^2-(y-2)^2+z^2=6.$ D. $x^2+(y+2)^2+z^2=6.$

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+x^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt (S) cầu theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

A. $(P): y-2z=0.$ B. $(P): x-2z=0.$ C. $(P): y+2z=0.$ D. $(P): x+2z=0.$

Bài 7. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ và cắt mặt phẳng $(P): x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A, biết diện tích tam giác IMA bằng $3\sqrt{3}$ và tâm I có hoành độ âm.

A. $(S): (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$ B. $(S): (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=36$

C. $(S): (x+1)^2-y^2-(z-1)^2=6$ D. $(S): (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$

Bài 8. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(1;-1;2), B(2;1;-1), C(-1;2;-3)$ biết tâm của mặt cầu nằm trên mặt phẳng Oxz.

A. $(S): \left(x+\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z+\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1326}{121}$ B. $(S): \left(x+\frac{12}{11}\right)^2-y^2-\left(z+\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1327}{121}$

C. $(S): \left(x-\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1328}{121}$ D. $(S): \left(x-\frac{12}{11}\right)^2-y^2-\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1329}{121}$

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-13;-1;0), B(2;1;-2), C(1;2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với BC và tiếp xúc với mặt cầu (S).(S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $R=9$.

A. $(P): -2x+2y-z+28=0$ hoặc $(P): 8x+4y+z-100=0$

B. $(P): -2x+2y+z+28=0$ hoặc $(P): 8x+4y+z+100=0$

C. $(P): -2x+2y-z-28=0$ hoặc $(P): 8x+4y+z+100=0$

D. $(P): -2x+2y-2z+28=0$ hoặc $(P): 8x+4y+z-1000=0$

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$ và hai điểm $A(-1;1;0), B(2;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, vuông góc với $mp(P)$ và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{3}$.

A. $(\alpha): x-y-2z+1=0$ và $mp(\alpha): x-y-2z-11=0$

B. $(\alpha): x-5y-2z+1=0$ và $mp(\alpha): x-y-2z-11=0$

C. $(\alpha): x-y-2z+1=0$ và $mp(\alpha): x-5y-2z-11=0$

D. $(\alpha): x-5y-2z+1=0$ và $mp(\alpha): x-5y-2z-11=0$

Bài 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$. Điểm C thuộc trục Oz sao cho tam giác ABC là tam giác đều, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm O tiếpxúc với ba cạnh của tam giác ABC.

A. $(S): x^2+y^2+z^2=2$

B. $(S): x^2+y^2+z^2=-2$

C. $(S): x^2+y^2+z^2=\sqrt{2}$

D. $(S): x^2+y^2+z^2=-\sqrt{2}$

Bài 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-1;-2)$, cắt đường thẳng d và mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$.

A. $\Delta: \begin{cases} x=-1+6t \\ y=-1+2t \\ z=-2+9t \end{cases}$

B. $\Delta: \begin{cases} x=-1-6t \\ y=-1-2t \\ z=-2+9t \end{cases}$

C. $\Delta: \begin{cases} x=-1+6t \\ y=1+2t \\ z=2-9t \end{cases}$

D. $\Delta: \begin{cases} x=-2+6t \\ y=-3+2t \\ z=-2+9t \end{cases}$

Bài 13: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Q): 2x+y+2z+1=0$ tại $M(1;-1;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+2y-2z+8=0$

A. $\left[\begin{array}{l} (c): (x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9 \\ (c): (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9 \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} (c): (x+3)^2+y^2+(z+1)^2=9 \\ (c): (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9 \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} (c): (x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9 \\ (c): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9 \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} (c): (x-3)^2+y^2+(z-1)^2=81 \\ (c): (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=81 \end{array}\right.$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ghi chú của em

Bài 1:

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $x-y-z-1=0$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I\in Oy$ và cắt (ABC) theo một đường tròn có bán kính r nhỏ nhất.

Vì $I\in Oy$ nên $I(0;t;0)$, gọi H là hình chiếu của I trên (ABC) khi đó là có bán kính

đường tròn giao của (ABC) và (S) là $r=AH=\sqrt{IA^2-IH^2}$.

Ta có $IA^2=t^2+1, IH=d\left(I,(ABC)\right)=\dfrac{|t+1|}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow r=\sqrt{t^2+1-\frac{t^2+2t+1}{3}}=\sqrt{\frac{2t^2-2t+2}{3}}$$

Do đó, r nhỏ nhất khi và chỉ khi $t=\dfrac{1}{2}$. Khi đó $I\left(0,\dfrac{1}{2},0\right), IA^2=\dfrac{5}{4}$

vậy phương trình mặt cầu cần tìm là : $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{5}{4}$.

Chọn A.

Bài 2:

+ Đường thẳng d đi qua $M(0;-2;0)$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$.

Tính được $\overrightarrow{MI}=(1;4;3)$

+ Khẳng định và tính được $d(I;d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{233}}{3}$

+ Khẳng định mặt cầu cần tìm có bán kính bằng $d(I;d)$ và viết phương trình:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{233}{9}.$$

Chọn A.

Bài 3:

$(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=26\Rightarrow$ (S) có tâm $I(2;-1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{26}$.

$\overrightarrow{IM}=(3;1;4)$, $\overrightarrow{u_1}=(2;0;1)$ là 1 VTCP của (d)

Giả sử $\overrightarrow{u_2}=(a;b;c)$ 1 VTCP của đường thẳng Δ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$

Do tiếp xúc mặt cầu (S) tại M:

$\Rightarrow \overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{u_2}\Leftrightarrow 3a+b+4c=0\Leftrightarrow b=-3a-4c\,(1)$

Mà góc giữa đường thẳngΔ và đường thẳng (d) bằng φ.

$$\Rightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\cos\varphi\Leftrightarrow\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\Leftrightarrow\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{7}}(2)$$

Thay (1) vào (2) ta được : $\sqrt{7}\,|2a+c|=\sqrt{5}.\sqrt{a^2+(3a+4c)^2+c^2}$

$\Leftrightarrow 7\left(4a^2+4ac+c^2\right)=5\left(a^2+9a^2+24ac+16c^2+c^2\right)$

$$\Leftrightarrow 22a^2+92ac+78c^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-3c\\ a=-\dfrac{13}{11}c\end{array}\right.$$

Với $a=-3c$ do $a^2+b^2+c^2\neq 0$ nên chọn $c=-1\Rightarrow a=3;b=-5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là: $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\ y=-5t\\ z=1-t\end{cases}$.

Với $a=-\dfrac{13}{11}c$ Do $a^2+b^2+c^2\neq 0$ nên chọn $c=-11\Rightarrow a=13;b=5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là: $\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\ y=5t\\ z=1-11t\end{cases}$.

Chọn A.

Bài 4:

Vì $M\in d\Rightarrow M(1+t;-2+2t;-2t)$.Trục Oz đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vtcp $\vec{k}=(0;0;1)$;

$\overrightarrow{OM}=(1+t;-2+2t;-2t)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]=(-2+2t;-1-t;0)$

$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]\right|=\sqrt{5t^2-6t+5}$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S) ,ta có: $R=d(M;Oz)=\sqrt{5t^2-6t+5}$

$$R=2\Rightarrow\sqrt{5t^2-6t+5}=2\Leftrightarrow 5t^2-6t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(2;0;-2)\\ M\left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5};\dfrac{2}{5}\right)\end{array}\right.$$

Chọn A.

Bài 5:

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 là mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của Δ_1,Δ_2 làm đường kính. Giả sử mặt cầu cần lập là (S) và A,B lần lượt là tiếp điểm của (S) với Δ_1,Δ_2. Viết phương trình Δ_1,Δ_2 dưới dạng tham số thì ta có:

Ghi chú của em

$A(2+m;1+4m;1+2m), B(-2+n;3+n;-1-n)$

Do AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2 nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U}_{\Delta_1}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U}_{\Delta_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n-21m=0 \\ 3n-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=n=0 \Rightarrow A(2;1;1), B(-2;3;-1)$$

Trung điểm I của AB có tọa độ là $I(0;2;0)$ nên phương trình mặt cầu cần lập là: $x^2+(y-2)^2+z^2=6$.

Chọn A.

Bài 6.

(S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$.

(P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3 nên:

(P) chứa Ox và đi qua tâm I của mặt cầu.

Ta có: $\overrightarrow{OI}(1;-2;-1)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{i},\overrightarrow{OI}\right]=(0;-1;-2)$ và (P) qua O

Vậy $(P): y-2z=0$.

Chọn A.

Bài 7.

Một vecto chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}(2;1;-1)$. Một vecto pháp tuyến của đường thẳng mặt phẳng (P) là $\vec{n}(1;2;1)$. Gọi δ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $\sin\delta=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{|2+2-1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \delta=\widehat{IMA}=30^0$

Gọi R là bán kính mặt cầu $(S)\Rightarrow IA=R$. tam giác IAM vuông tại A có $\widehat{IMA}=30^0\Rightarrow AM=R\sqrt{3}.S_{IMA}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}IA.AM=3\sqrt{3}\Rightarrow R=\sqrt{6}$

Giả sử: $I(1+2t;1+t;-t), t<\dfrac{1}{2}$

Từ giả thuyết ta có khoảng cách:

$d(I,(P))=R\Leftrightarrow \dfrac{|3t-3|}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow t=-1\cup t=3$ (loại) $\Rightarrow I(-1;0;1)$

Phương trình mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.

Chọn A.

Bài 8.

$I\in(oxz)$ nên $I(x;0;z)$, $IA=IB=IC$ nên

$$\begin{cases} (x-1)^2+1+(z-2)^2=(x-2)^2+1+(z+1)^2 \\ (x-1)^2+1+(z-2)^2=(x+1)^2+4+(z+3)^2 \end{cases}$$

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Giải hệ ta được $x=\frac{-12}{11};z=\frac{-4}{11}$ suy ra $I\left(\frac{-12}{11};0;\frac{-4}{11}\right)$.

Bán kính $R=\sqrt{\frac{1326}{121}}$

Phương trình mặt cầu: $(S):\left(x+\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z+\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1326}{121}$

Chọn A.

Bài 9:

Giả sử (P) có vtpt $\vec{n}=(A;B;C),(A^2+B^2+C^2\neq 0),(P)//BC$ nên:

$\vec{n}\perp\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}=(-1;1;4)\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow A=B+4C\Rightarrow\vec{n}=(B+4C;B;C)$

(P) đi qua $A(13;-1;0)\Rightarrow$ phương trình:

$(P):(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$

(P) tiếp xúc với (S)

$\Leftrightarrow d[I,(P)]=R\Leftrightarrow\frac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}}=9$

$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C^2=0\Leftrightarrow(B+2C)(B-4C)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B+2C=0\\B-4C=0\end{array}\right.$

Với $B+2C=0$ chọn $\begin{cases}B=2\\C=-1\end{cases}$, ta được phương trình:

$(P):-2x+2y-z+28=0$

Với $B-4C=0$ chọn $\begin{cases}B=4\\C=1\end{cases}$, ta được phương trình:

$(P):8x+4y+z-100=0.$

Chọn A.

Bài 10:

Pt (S) viết dưới dạng $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$

suy ra (S) có tâm $I(2;-1;-1)$, bán kính $R=3$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;1;1)$ một VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-1;1)$

Do đó $[\overrightarrow{AB}.\vec{n}]=(2;-2;-4)\neq\vec{0}$

Gọi vecto là một VTPT của $mp(\alpha)$. Ta có

$\begin{cases}(\alpha)//AB\\(\alpha)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}$ cùng phương với $[\overrightarrow{AB};\vec{n}]$.

Chọn $\vec{u}=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AB};\vec{n}]\Rightarrow\vec{u}=(1;-1;-2)$

Mp (α) có một VTPT $\vec{u}$ nên phương trình có dạng $x-y-2z+D=0$

Gọi d là khoảng cách từ I đến Mp (α) cắt (S) theo một đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{3}$. Nên $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$

Ta có

$$d=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|2-(-1)-2(-1)+D|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|5+D|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=1\\D=-11\end{array}\right.$$

Với $D=1$ thì $(\alpha): x-y-2z+1=0$ không qua $A(-1;1;0)$ (vì $-1-1-2.0+1\neq 0$)

Nên $(\alpha)//AB$. Tương tự, $mp(\alpha): x-y-2z-11=0$ cũng song song với AB.

Vậy có hai mặt phẳng (α) thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình:

$(\alpha): x-y-2z+1=0$ và $mp(\alpha): x-y-2z-11=0$.

Chọn A.

Bài 11:

Vì $C\in Oz\Rightarrow C(0;0;c)$ và tam giác ABC đều khi và chỉ khi :

$AB=AC=BC\Rightarrow AB^2=AC^2=BC^2\Leftrightarrow 2^2+2^2=2^2+c\Rightarrow c=\pm 2$

Vậy $C(0;0;2)$ hoặc $C(0;0;-2)$

Lập luận được tứ diện $OABC$ đều vì $OA=OB=OC=2$ và tam giác ABC đều.

Gọi I là trung điểm của AB thì $OI\perp AB$ tại I

$\Rightarrow OI=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$ (tam giác OAB vuông tại O)

Lập luận được mặt cầu (S) có tâm O tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC có bán kính $R=d(O,AB)=OI=\sqrt{2}$.

Do đó phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=2$.

Chọn A.

Bài 12:

Gọi:

$M_1=d\cap\Delta\Rightarrow M_1(2-t;1-2t;1+t)\Rightarrow\overline{MM_1}=(3-t;2-2t;3+t)$

Mặt cầu có tâm $I(-1;2;1)$

Mặt phẳng:;

$$(P):\begin{cases}qua\ I(-1;2;1)\\(P)\perp\Delta\end{cases}\Rightarrow(P):\begin{cases}qua\ I(-1;2;1)\\VTPT\ \overrightarrow{n_P}=\overline{MM_1}\end{cases}$$

$\Rightarrow(P):(3-t)(x+1)+(2-2t)(y-2)+(3+t)(z-1)=0$

Gọi H là trung điểm AB thì $IH\perp AB, IH=3$

Ghi chú của em

Ghi chú của em

Do $IM=3\sqrt{2}\Rightarrow MH=3=d(M,(P))=\dfrac{|3t-15|}{\sqrt{6t^2-8t+22}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-1+2t\\ z=-2+t\end{cases}$. Với $t=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\ y=-1+2t\\ z=-2+9t\end{cases}$

Chọn A.

Bài 13:

Mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;2)$. Đường thẳng d qua M và vuông góc với (Q) có phương trình là $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-1+2t\end{cases}$.

Lấy $I(1+2t;-1+t;-1+2t)\in d$

$MI=d(I,(P))\Leftrightarrow\sqrt{4t^2+t^2+4t^2}=\left|\dfrac{1+2t-2+2t+2-4t+8}{\sqrt{1+4+4}}\right|\Leftrightarrow t=\pm1$

$t=1\Rightarrow I(3;0;1),R=3\Rightarrow(S):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9$

$t=-1\Rightarrow I(-1;-2;-3),R=3\Rightarrow(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$

Chọn A.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Sách giáo khoa môn toán lớp 12* – NXB Giáo dục.

[2] *Sách bài tập giáo khoa môn toán lớp 12* – NXB Giáo dục.

[3] *Mega Luyện Đề THPT Quốc Gia Môn Toán 2017* – NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] *Tiếp cận 11 chuyên đề trọng tâm giải nhanh trắc nghiệm toán* – NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5] Tài liệu Internet.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối, Hai Bà Trưng, Hà Nội.
Điện thoại: Biên tập (04) 39714896
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc - Tổng biên tập:
TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: **Trịnh Thị Thu Hà, Doãn Phương Thảo**
Sửa bản in: **Tác giả**
Chế bản: **Lam Hạnh**
Vẽ bìa: **Hải Nam**

LIÊN KẾT XUẤT BẢN
CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN MEGABOOK
Địa chỉ: Số 14, ngõ 93, phố Vũ Hữu, Thanh Xuân, Hà Nội

TIẾP CẬN PHƯƠNG PHÁP
VÀ VẬN DỤNG CAO TRONG TRẮC NGHIỆM
BÀI TOÁN THỰC TẾ

Mã số: 1L-231PT2016
In 5000 cuốn, khổ 20.5x29.5cm, tại Công ty In và Thương mại Hải Nam
Địa chỉ: Số 18, ngách 68/53/9, Phường Quan Hoa, Quận Cầu Giấy, Hà Nội
Số xác định đăng ký xuất bản: 718-2017/CXBIPH/01-128/ĐHQGHN ngày 15/03/2017
Quyết định xuất bản số: 195 LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN, ngày 03/04/2017
In xong và nộp lưu chiểu năm 2017
Mã ISBN: 978-604-62-7959-4