



NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Tập san số 01

7 - 2021

Định hướng ôn thi tốt nghiệp THPT

Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các câu
VĐ – VĐE

ĐỀ THI THAM KHẢO TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021

Thử sức trước kỳ thi tốt nghiệp THPT

ĐỀ THI THỬ TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng
tiếp cận năng lực người học

➤ Áp dụng đẳng thức và bất đẳng thức modul

➤ Luyện tập các thao tác tư duy cho học sinh thông qua dạy học
tính chất trung điểm của đoạn thẳng bằng phương pháp vector

Lời nói đầu

Năm học 2020 – 2021 đã hoàn thành trong bối cảnh cả nước nói chung, ngành Giáo dục nói riêng đang phải tập trung chống đại dịch Covid 19; một năm học mà BQT cùng các thành viên hết sức nỗ lực cùng nhau chia sẻ, trao đổi, giải bài không ngoài mục đích cùng nhau học hỏi chuyên môn, trao đổi phương pháp dạy học nhằm nâng cao chất lượng dạy và học.

Năm học 2020 – 2021 Bộ Giáo Dục và Đào Tạo tiếp tục tổ chức kỳ thi tốt nghiệp trung học phổ thông (THPT) theo hướng giữ ổn định về phương thức tổ chức như năm học 2020 để không ảnh hưởng đến quá trình dạy và học của giáo viên và học sinh. Nội dung đề thi nằm trong chương trình cấp THPT, tập trung chủ yếu là chương trình lớp 12; đảm bảo ngưỡng cơ bản để xét tốt nghiệp THPT đồng thời có sự phân hóa phù hợp để các cơ sở giáo dục đại học, giáo dục nghề làm cơ sở tuyển sinh.

Kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2021 đã đến gần, để quý thầy cô cùng các em có thêm tài liệu ôn tập trong thời gian gấp rút này; đồng thời là dấu mốc khởi đầu cho một chặng đường mới, hướng đi mới đáp ứng với sự thay đổi tên gọi mới **Nhóm Giáo viên toán Việt Nam** xin trân trọng giới thiệu, ra mắt cùng quý thầy cô và các em ấn phẩm **Tập san số 01**.

Hy vọng Tập san sẽ ra đều hàng tháng, là sân chơi để quý thầy cô trao đổi kinh nghiệm dạy học cùng các đồng nghiệp thông qua các bài viết của mình; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng làm bài thi trắc nghiệm môn Toán.

Để hoàn thành Tập san, BQT chân thành cảm ơn tất cả các thành viên của nhóm, hai tổ phản biện đã rất tâm huyết tham gia, xây dựng Tập san.

Tài liệu tuy đã được nhóm tổ chức làm cẩn thận, phản biện nhiều lần, nhưng không thể tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp tích cực từ quý thầy cô cùng các em học sinh. Các ý kiến đóng góp chân thành của quý thầy cô là nguồn động lực để chúng tôi tiếp tục vững bước trên con đường mới và xây dựng tập san ngày càng chất lượng hơn. Mọi ý kiến đóng góp, bài viết gửi đăng xin gửi về theo địa chỉ:

mail: nhomGVTVN@gmail.com.

BQT Nhóm Giáo viên toán Việt Nam!



Các thành viên tham gia Tập san

Ban quản trị Nhóm Giáo viên toán Việt Nam

Cô giáo Ngô Tú Hoa , Lại Nhật Hoan

*Thầy giáo Trương Quốc Toàn; Nguyễn Khải; Tạ Minh Đức; Lê Thảo;
Nhân Lê, Lê Tài Thắng, Nguyễn Minh Ngọc, Ngô Nguyễn Quốc Mẫn;
Nguyễn Ngọc Chi*

Cùng các thầy, cô giáo: Nam Phương, Thuý Dao, Trần Chính, Phong Đo, Huong Duong, Bình Hoang, Nguyễn Trọng Chanh, Nguyễn Ngọc Họa, Huỳnh Văn Ánh, Nguyễn Khắc Thành, Nguyễn Văn Viễn, Uyên Hoang, Hoàng An Đình, Hà Hoàng, Nguyễn Tất Thành, Lê Thanh Bình, Chanh Muối, Nguyễn Bá Nam, Trương Đức Thịnh, Đức Thanh Phạm, Thuý Phạm, Nguyễn Phương, Lê Hồng Vân, Chánh Lê Văn, Trang Nguyễn, Đặng Khoa Lê, Nguyễn Thị Hồng Gấm, Song Tử Mặt Nâu, Thân Đức Minh, Dấu Vết Hát, Phạm Quý, Thầy Đức.

Trân trọng!

Định hướng ôn thi tốt nghiệp THPT

*Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các
câu VD – VDE*

ĐỀ THI THAM KHẢO TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021

Ngày 31/3/2021 Bộ GD&ĐT chính thức công bố đề thi tham khảo, tạo điều kiện thuận lợi cho giáo viên và các em học sinh ôn tập. Trên cơ sở đó, các trường THPT, các Sở GD &ĐT cũng tổ chức ra các đề thi thử tốt nghiệp THPT nhằm đánh giá năng lực của các em học sinh và cũng là dịp để các em được làm quen với các dạng toán trắc nghiệm.

Kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2021 đã đến gần, để tạo điều kiện cho quý thầy cô cùng các em có tài liệu ôn tập trong thời gian gấp rút này Nhóm Giáo viên Toán Việt Nam xin gửi tới quý thầy cô và các em bài viết “*Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các câu VD – VDE Đề thi tham khảo tốt nghiệp THPT Năm 2021*”

Hวัง vọng bài viết sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm môn Toán.

Câu 41

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khí } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khí } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x dx$ bằng:

A. $\frac{23}{3}$. B. $\frac{23}{6}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{17}{3}$.

Facebook: Nam Phương – Thủy Dao – Trần Chinh

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán tính tích phân của hàm hợp.
- Để tính được tích phân trên ta phải thực hiện phép đổi biến để đưa về hàm đã cho.
- Cụ thể các bước thực hiện như sau:
- + B1: Đặt $2 \sin x + 1 = t$.
- + B2: Biểu thị $\cos x dx$ theo tdt .
- + B3: Đổi cận, và tính tích phân $\int_a^b f(t) dt$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x dx$$

$$\text{Đặt } 2 \sin x + 1 = t \Rightarrow 2 \cos x dx = dt \Rightarrow \cos x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt + \frac{1}{2} \int_2^3 (t^2 - 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t \right) \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = \frac{23}{6}. \end{aligned}$$

Bình luận:

+ Đây là dạng toán thuộc mức độ vận dụng, việc nhận ra hướng giải đòi hỏi học sinh phải nắm chắc các khái niệm và tính chất của tích phân cũng như các phương pháp tính tích phân.

+ Học sinh thường lúng túng, và dễ mắc sai lầm khi tách cận hoặc quên nhân thêm phân số $\frac{1}{2}$ để tính $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt$ dẫn đến có thể chọn các đáp án nhiễu

$$I = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt + \int_2^3 (t^2 - 1) dt = \frac{20}{3}$$

$$\text{hoặc } I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt - \frac{1}{2} \int_2^3 (t^2 - 1) dt = \frac{17}{6}$$

$$\text{hoặc } I = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt - \int_2^3 (t^2 - 1) dt = \frac{17}{3}.$$

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Biểu thức có chứa tham số. Sử dụng tính liên tục để tìm tham số.
Hướng phát triển 2: Sử dụng diện tích hình phẳng để tính tích phân.
Hướng phát triển 3: Tích phân có chứa dấu giá trị tuyệt đối.
Hướng phát triển 4: Sử dụng quy tắc tính tích phân.

Bài tập tương tự

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + \sin x) f(-\cos x + 2 \sin x) dx = -2. \text{ Giá trị của biểu thức } P = 2a - b \text{ bằng}$$

A. -8.

B. 33.

C. 25.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi hàm số liên tục tại $x = 0$

hay $b = 1$.

$$\text{Xét: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + \sin x) f(-\cos x + 2 \sin x) dx = -2.$$

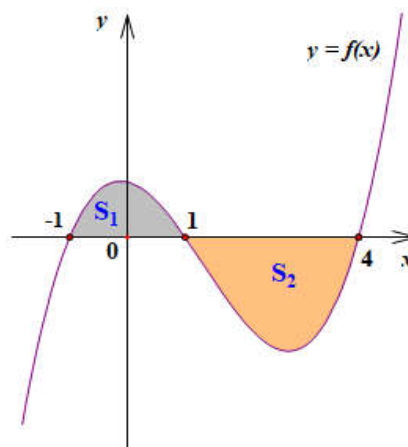
$$\text{Đặt } -\cos x + 2 \sin x = t \Rightarrow (\sin x + 2 \cos x) dx = dt.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + \sin x) f(-\cos x + 2 \sin x) dx &= \int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 (2ax + 1) dt + \int_0^2 (3x^2 + 2x + 1) dt = -2 \Rightarrow a = 17. \end{aligned}$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng trong hình, biết $S_1 = 3$ và $S_2 = 7$. Tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx \text{ bằng}$$



A. $-\frac{4}{5}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. -2.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(5 \sin x - 1) dx.$$

$$\text{Đặt } 5 \sin x - 1 = t \Rightarrow \cos x dx = \frac{1}{5} dt.$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^4 f(t) \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{5} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{5} S_1 + \frac{1}{5} (-S_2) = -\frac{4}{5}.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - m, & x \geq 0 \\ 2 \cos x - 3, & x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|2 \cos x - 1|) \sin x dx \text{ bằng}$$

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{-1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = -1 \Leftrightarrow m = 1$.

$$\text{Đặt } t = 2 \cos x - 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} dt = \sin x dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|2 \cos x - 1|) \sin x dx = \frac{-1}{2} \int_1^{-1} f(|t|) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(|x|) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 f(-x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right]$$

$$\text{Xét } \int_{-1}^0 f(-x) dx. \text{ Đặt } u = -x \Rightarrow -du = dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = -1 \rightarrow u = 1 \\ x = 0 \rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^0 f(-x) dx = - \int_1^0 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 f(-x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right] = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = -\frac{2}{3}.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } 0 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$. Khi đó $\int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2 + 1}) dx$ bằng

A. $\frac{19}{2}$.

B. $\frac{37}{2}$.

C. $\frac{27}{2}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } I_1 = \int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx. \text{ Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e^2 \Rightarrow t=2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I_1 = \int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 2x \right) \Big|_0^2 = 5.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \\ x=2\sqrt{6} \Rightarrow t=5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx = \int_2^5 f(t) t dt = \int_2^5 f(x) x dx = \int_2^5 (-x+5) x dx = \frac{27}{2}.$$

$$\text{Vậy } \int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx = 5 + \frac{27}{2} = \frac{37}{2}.$$

Câu 42

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và $(z+2i)(\bar{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Facebook: Phong Do – Hương Dương

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là dạng toán tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước, một bài toán ở mức độ vận dụng
- Từ điều kiện cho trước thiết lập hệ phương trình liên quan đến x, y của số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)
- Xác định (x, y) từ hệ đã cho hoặc chuyển về phương pháp hình học để giải quyết bài toán.

Lời giải

Cách 1: Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Ta có:

$$(z+2i)(\bar{z}-2) = [x+(y+2)i](x-2-yi) = x(x-2) + y(y+2) + [-xy + (x-2)(y+2)]i$$

$$\text{Do đó yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2} \\ x(y-2) + x(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x^2+y^2-2x+2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ 2-2x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+y^2 = 2 \\ x = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+2y-1 = 0 \\ x = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bình luận:

- Vì bài toán hỏi có bao nhiêu số phức thỏa mãn điều kiện nên có thể dùng phương pháp hình học dựa vào vị trí tương đối để tìm số giao điểm.
- HS phải nhận ra điểm mấu chốt của bài toán này là số điểm biểu diễn của số phức z chính là số điểm chung của đường tròn và đường thẳng (hoặc đường tròn); và được xác định dựa vào xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn hoặc vị trí tương đối của hai đường tròn. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ VD.
- Từ đó ta có cách giải khác như sau:

Cách 2: Đưa về tương giao của hai đường tròn

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Ta có:

$$(z + 2i)(\bar{z} - 2) = [x + (y + 2)i](x - 2 - yi) = x(x - 2) + y(y + 2) + [-xy + (x - 2)(y + 2)]i$$

$$\text{Do đó yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \\ x(y - 2) + x(y + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét: (1) là phương trình của đường tròn tâm O bán kính $R_1 = \sqrt{2}$

(2) là phương trình của đường tròn tâm $I(1; -1)$ bán kính $R_2 = \sqrt{2}$

Ta có: $0 = |R_1 - R_2| < OI = \sqrt{2} < R_1 + R_2 = 2\sqrt{2}$ nên hai đường tròn cắt nhau.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3: Đưa về tương giao giữa đường thẳng và đường tròn

$$\text{Biến đổi đưa về hệ} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (3) \\ x - y - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Nhận xét: (3) là phương trình của đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{2}$

(4) là phương trình của đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$.

Ta có: $d(O, d) = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < R = \sqrt{2}$, suy ra đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1:

Xét các số phức thỏa mãn điều kiện (cho một giả thiết về modun, một giả thiết về số thuần ảo/ số thực) đưa về phương trình hoặc hệ phương trình.

Nếu cho giả thiết số thuần ảo thì chỉ cần xác định phần thực và cho bằng 0.

Nếu cho giả thiết là số thực thì chỉ cần xác định phần ảo và cho bằng 0.

Hướng phát triển 2:

Tìm các số phức thỏa mãn điều kiện bằng phương pháp modun hai vế

Hướng phát triển 3:

Xét các số phức thỏa mãn điều kiện đưa về phương trình hoặc hệ phương trình chứa tham số

Hướng phát triển 4:

Tìm số các số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn điều kiện đưa về được hệ bất phương trình. Ta tìm quỹ tích các điểm biểu diễn số phức là miền hình phẳng giới hạn nào. Từ đó đếm số điểm có tọa độ nguyên thỏa mãn.

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3i|=|z-1|$ và $(z+1)(\overline{z-2i})$ là số thực. Tính $|z|$.

A. $|z|=\sqrt{10}$.

B. $|z|=2\sqrt{10}$.

C. $|z|=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

D. $|z|=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z-3i|=|z-1| \Leftrightarrow |x+(y-3)i|=|x-1+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x-3y+4=0 \quad (1)$$

$$(z+1)(\overline{z-2i})=(x^2+y^2+x-2y)+(2x-y+2)i \text{ là số thực } \Leftrightarrow 2x-y+2=0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1),(2) ta có } \begin{cases} x-3y+4=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow z=-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i \text{ có } |z|=\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 2. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|=2\sqrt{2}$ và $(z-i)^2$ là số thuần ảo?

A. 0.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z+3-2i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=8 \quad (1)$$

$$(z-i)^2=x^2-(y-1)^2+2x(y-1)i \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow x^2-(y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 & (2) \\ x=1-y & (3) \end{cases}$$

$$\text{TH1: Từ (1),(2) ta có: } \begin{cases} x=y-1 \\ (x+3)^2+(y-2)^2=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y+2)^2+(y-2)^2=8 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\text{TH2: Từ (1),(3) ta có: } \begin{cases} x=1-y \\ (x+3)^2+(y-2)^2=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y-4)^2+(y-2)^2=8 \Leftrightarrow y^2-6y+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=3+\sqrt{3} \\ y=3-\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 3. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=|1-i\bar{z}|$ và $z-i-\frac{5}{z-i}$ là số thuần ảo?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $z \neq i$

$$\text{Đặt } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow 1-i\bar{z}=1-i(x-yi)=1-y-xi$$

$$|z-3i|=|1-i\bar{z}| \Leftrightarrow |x+(y-3)i|=|(1-y)-xi| \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=(1-y)^2+x^2$$

$$\Leftrightarrow (y-3)^2=(1-y)^2 \Rightarrow y=2.$$

$$\text{Do đó } z = x + 2i \Rightarrow z-i = x+i.$$

Ta có

$$z - i - \frac{5}{z - i} = x + i - \frac{5}{x + i} = x + i - \frac{5(x - i)}{x^2 + 1} = \left(x - \frac{5x}{x^2 + 1}\right) + \left(1 + \frac{5}{x^2 + 1}\right)i$$

(Chú ý: Ta tìm phần thực, cho bằng 0 nên phần ảo không cần tính)

$$z - i - \frac{5}{z - i} \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow x - \frac{5x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy tìm được 3 số phức thỏa mãn.

Câu 4. Có bao nhiêu số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $1 - \frac{i}{z} + \frac{i}{z} = 0$ và $|z - \bar{z}| \cdot |z + \bar{z}| = 4$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $z \neq 0$

$$1 - \frac{i}{z} + \frac{i}{z} = 0 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - i(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0 \quad (1)$$

$$-|z - \bar{z}| \cdot |z + \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x \cdot y| = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có: } \begin{cases} x^2 \cdot y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{y^2} \\ y^4 + 2y^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Vì $y^4 + 2y^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^3 - y^2 - y - 1) = 0 \Rightarrow$ có 2 nghiệm y khác 0 nên có 4 giá trị của x . Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Có bao nhiêu số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + 1 + i| = \sqrt{10}$ và $\frac{z}{z - 2}$ là một số thuần ảo?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Điều kiện $z \neq 2$

$$|z + 1 + i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \quad (1)$$

$$\frac{z}{z - 2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2yi}{(x - 2)^2 + y^2} \text{ là số thuần ảo khi } x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ: } \begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 4 \\ 5x^2 - 18x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 0 \\ x = \frac{8}{5}; y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Vì $z \neq 2$ nên có 1 số phức thỏa mãn

Câu 6. Có bao nhiêu số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z^3 + 2i|z|^2 = 0$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Lấy modun hai vế

$$\text{Ta có: } z^3 + 2i|z|^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^3 = 2|z|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 2 \end{cases}$$

TH1: $|z| = 0 \Rightarrow z^3 = 0 \Leftrightarrow z = 0.$

TH2: $|z| = 2$

$$\Rightarrow z^3 + 2i|z|^2 = 0 \Leftrightarrow z^3 + 8i = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 + 2iz - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = \sqrt{3} - i \\ z = -\sqrt{3} - i \end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán

Cách 2: Sử dụng hai số phức bằng nhau

$$z^3 + 2i|z|^2 = 0 \Leftrightarrow z^3 + 2i.z.\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z^2 + 2i\bar{z} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét: } z^2 + 2i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ 2x(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 0; y = 2 \\ x = \sqrt{3}; y = -1 \\ x = -\sqrt{3}; y = -1 \end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Có bao nhiêu số phức $z = \frac{m}{2} + 1 + (3-m)i, (m \in \mathbb{R})$ có phần thực, phần ảo là những giá trị nguyên và $|z-i| \leq \sqrt{10}$?

A. 1.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Với } z = \frac{m}{2} + 1 + (3-m)i, (m \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z-i| \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow \left(\frac{m}{2} + 1\right)^2 + (2-m)^2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 12m - 20 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{34}}{5} \leq m \leq \frac{6+2\sqrt{34}}{5}$$

Vì số phức z có phần thực, phần ảo là những giá trị nguyên nên

$$\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m:2 \\ \frac{6-2\sqrt{34}}{5} \leq m \leq \frac{6+2\sqrt{34}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=9$ và $\frac{z}{z-6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S .

A. 6.

B. 12.

C. 0.

D. 24.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x+iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Điều kiện $z \neq 6$.

$$\text{Ta có } \frac{z}{z-6} = \frac{x+iy}{x-6+iy} = \frac{(x+iy)(x-6-iy)}{(x-6)^2 + y^2} = \frac{x(x-6) + y^2 - 6iy}{(x-6)^2 + y^2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{z}{z-6} \text{ là số thuần ảo khi } x(x-6) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9.$$

Mặt khác $|z-m|=9 \Leftrightarrow (x-m)^2 + y^2 = 81$

Để có đúng một số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 9 \\ (x-m)^2 + y^2 = 81 \end{cases} \text{ có đúng một nghiệm hoặc hai nghiệm trong đó có một nghiệm } (6;0)$$

Xét trường hợp hệ có nghiệm $(6;0)$

Ta có: $(6-m)^2 = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 15 \end{cases}$ không thỏa mãn vì hai đường tròn trên tiếp xúc nhau tại $(6;0)$

Xét TH $\begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 15 \end{cases}$

Nghĩa là hai đường tròn $(C_1): (x-3)^2 + y^2 = 9$ và $(C_2): (x-m)^2 + y^2 = 81$ tiếp xúc nhau.

Xét (C_1) có tâm $I_1(3;0)$ bán kính $R_1=3$ và (C_2) có tâm $I_2(m;0)$ bán kính $R_2=9$.

$$\text{Cần có } \begin{cases} I_1I_2 = |R_1 - R_2| \\ I_1I_2 = R_1 + R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-3| = 6 \\ |m-3| = 12 \end{cases} \Rightarrow m \in \{9; -9\}.$$

Vậy tổng là $9 + (-9) = 0$.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [10;100]$ để tồn tại số phức z đồng thời thỏa mãn $|z-2-4i| = |\bar{z}+2i|$ và $|z-2+i|^2 + |\bar{z}+3i|^2 = m$?

A. 68.

B. 78.

C. 86.

D. 87.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z-2-4i| = |\bar{z}+2i| \Leftrightarrow |x-2+(y-4)i| = |x+(2-y)i|$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (2-y)^2 \Leftrightarrow x+y=4.$$

Mặt khác $|z-2+i|^2 + |\bar{z}+3i|^2 = m \Leftrightarrow |x-2+(y+1)i|^2 + |x+(3-y)i|^2 = m$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + x^2 + (3-y)^2 = m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + x^2 + 9 - 6y + y^2 = m$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7) = m$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = m + 2 \quad (\text{do } x+y=4)$$

Để tồn tại số phức z thỏa mãn yêu cầu $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 2(x^2+y^2)=m+2 \end{cases}$ có nghiệm thực

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = m + 2 \geq (x+y)^2 = 16 \Leftrightarrow m \geq 14.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \& m \in [10;100] \Rightarrow m \in \{14;15;\dots;100\}$.

Vậy có 87 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 10. Có bao nhiêu số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn: $|\bar{z}-2-3i| \leq |z+i-2| \leq 3$

A. 11.

B. 5.

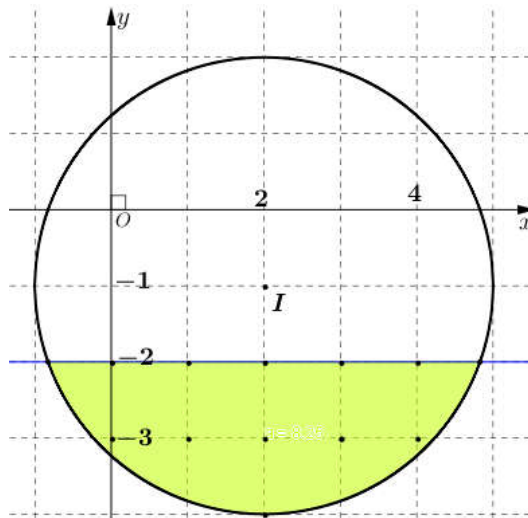
C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

$$|\bar{z} - 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z} - 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \\ |z + i - 2| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2 \leq 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 9 \end{cases}$$



Dựa vào miền phẳng giới hạn bởi hệ có 11 số phức thỏa mãn

Câu 11. Có bao nhiêu số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn $2|z - i| \leq |z - \bar{z} - 3i|$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2|z - i| \leq |z - \bar{z} - 3i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \leq \sqrt{(2y - 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4[x^2 + (y - 1)^2] \leq (2y - 3)^2$$

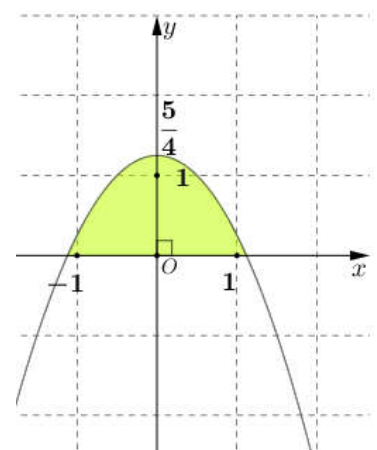
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \leq 4y^2 - 12y + 9.$$

$$\Leftrightarrow 4y \leq -4x^2 + 5 \Leftrightarrow y \leq -x^2 + \frac{5}{4} \quad (1)$$

$$\text{Số phức } z - \bar{z} = 2yi \text{ có phần ảo không âm} \Leftrightarrow y \geq 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có hệ } \begin{cases} y \leq -x^2 + \frac{5}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dựa vào miền phẳng giới hạn bởi hệ có 4 số phức thỏa mãn.



Câu 43

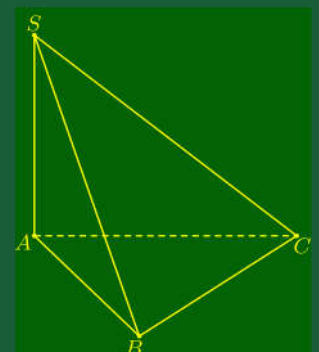
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{8}$.

B. $\frac{3a^3}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

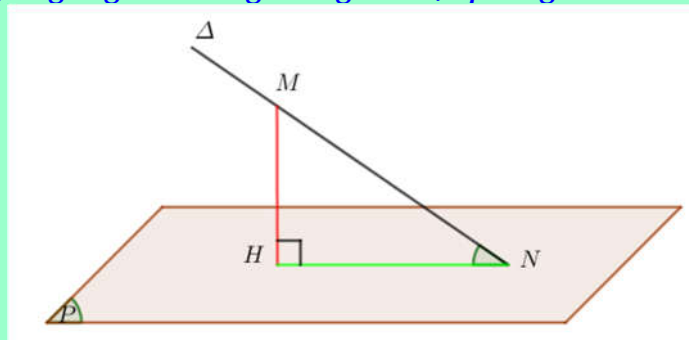
D. $\frac{a^3}{4}$.



Phân tích định hướng tìm lời giải:

Bài toán trên là bài toán về tính thể tích khối chóp liên quan góc giữa một đường thẳng và mặt phẳng. Thông thường đề bài hay cho góc giữa một cạnh bên và mặt đáy của hình chóp liên quan đến chân đường cao của hình chóp, tức hình chiếu của đường thẳng lên mặt phẳng tương đối dễ xác định, thì dạng bài này để lại cho góc giữa một đường thẳng và mặt phẳng mà tương đối khó xác định hình chiếu của đường lên mặt hơn. Khi xác định được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng suy ra độ dài đường cao, từ đó tính thể tích khối chóp. Để làm tốt được bài tập dạng này các em cần nắm chắc phương pháp xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau đây.

Phương pháp xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

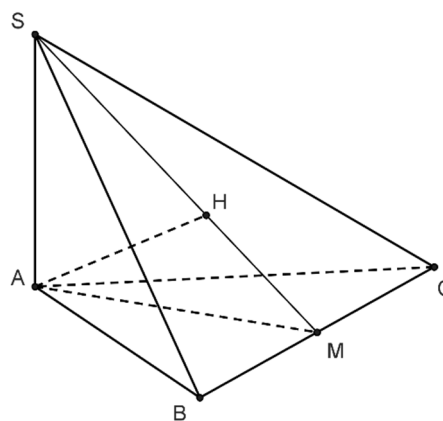


- **Bước 1:** Xác định giao điểm $N = \Delta \cap (P) \rightarrow$ Giao điểm tại đâu đỉnh của góc tại đó.
- **Bước 2:** Lấy điểm $M \in \Delta$ sao cho $M \neq N$, sau đó hạ MH vuông góc mặt phẳng (P) tại H . (Bước này là bước khó xác định nhất khi làm bài).

Bước 3: Nối H với N suy ra $(\Delta; (P)) = \widehat{MNH} = \alpha$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC . Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$

Dựng AH vuông góc với SM . Do $(SBC) \perp (SAM) \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay $\widehat{ASM}$

Theo giả thiết ta có $\widehat{ASM} = 45^\circ$ vì vậy tam giác SAM vuông cân tại A .

Ta có $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ bằng } V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}.$$

Bình luận:

- Bài toán trên ở mức vận dụng (mức 3), kết hợp hai đơn vị kiến thức là xác định góc giữa đường với mặt (yếu tố then chốt) và tính thể tích khối chóp. Học sinh cần nắm rõ và vận dụng được chương góc – khoảng cách trong chương trình lớp 11 để có thể giải quyết được dạng toán này.

Hướng phát triển:

Hướng 1: Xây dựng bài toán tính góc giữa một cạnh bên với một mặt bên chứa đường cao.

Hướng 2: Xây dựng các bài toán tính góc giữa một cạnh đáy và một mặt bên không chứa đường cao.

Bài tập tương tự

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

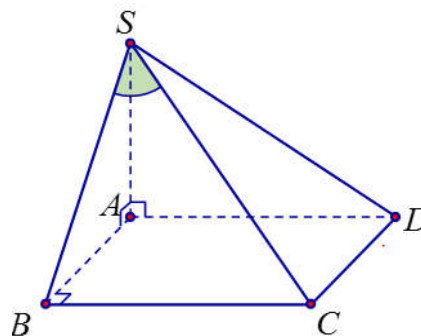
B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB) .

$$\Rightarrow \widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{(SC, SB)} = \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

Xét tam giác SBC vuông tại B có $SB = BC \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Mà } S_{ABCD} = AB \cdot BC = a^2. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

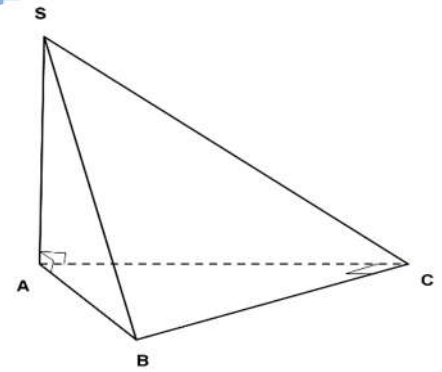
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh C , $AB = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}.a^3}{3}$.

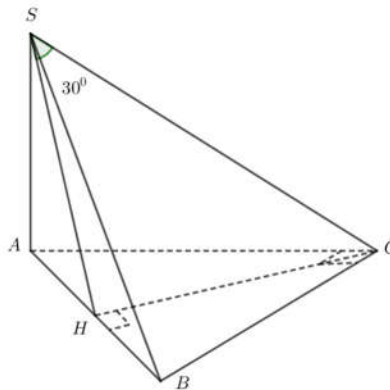
C. $\frac{\sqrt{6}.a^3}{3}$.

D. $\sqrt{6}.a^3$.



Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow AH = BH = a$. Khi đó $CH \perp AB$ (do $\triangle ABC$ cân tại C)

Ta có:

$$\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$$

hay SH là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB) .

Suy ra $(\widehat{SC, (SAB)}) = \widehat{CSH} = 30^\circ$.

Tam giác ABC vuông tại C nên ta có:

$$CH = \frac{AB}{2} = \frac{2a}{2} = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$$

Tam giác SHC vuông tại H nên ta có: $SH = CH \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAH vuông tại A nên ta có: $SA = \sqrt{SH^2 - AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AC = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 120^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) góc 30° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3\sqrt{105}}{7}$.

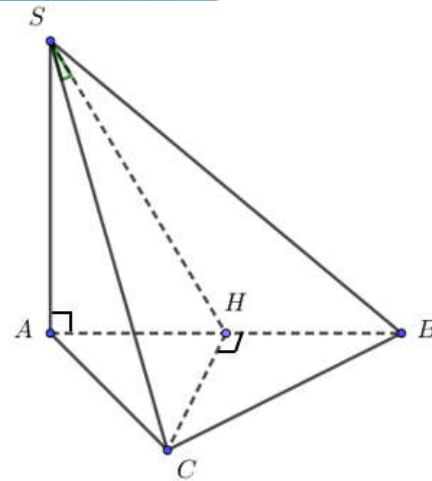
B. $\frac{a^3\sqrt{105}}{28}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{105}}{21}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{105}}{42}$.

Chọn D

Lời giải



$$\text{Ta } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

Xét tam giác $\triangle ABC$ ta có $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB} = 7a^2$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB khi đó do đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) góc 30° nên $\widehat{CSH} = 30^\circ$.

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ ta có } \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Xét } \triangle SCH \text{ vuông tại } H \text{ ta có } SC = \frac{CH}{\sin 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Xét } \triangle SAC \text{ vuông tại } A \text{ ta có } SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \frac{a\sqrt{35}}{7}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{105}}{42}.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $V = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

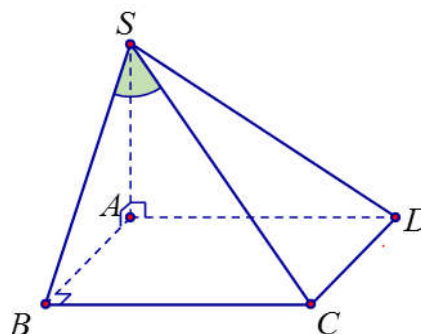
B. $V = \frac{2a^3}{3}$.

C. $V = \sqrt{3}a^3$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB) .

$$\Rightarrow \widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{(SC, SB)} = \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

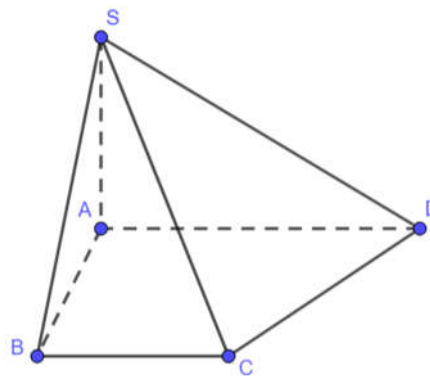
Xét tam giác SBC vuông tại B có $\tan 30^\circ = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = 3a$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Mà $S_{ABCD} = AB \cdot BC = a^2\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . $AB = BC = a$, $AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.



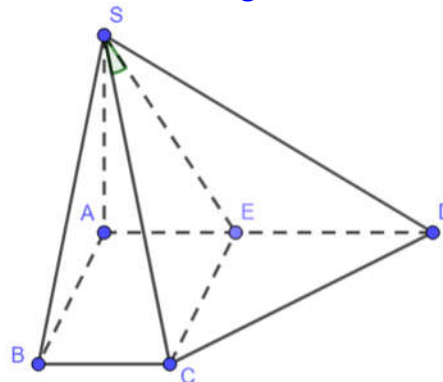
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

. **Lời giải**



Chọn D

Gọi E là trung điểm của AD thì ta dễ dàng chứng minh $ABCE$ là hình vuông

$$\Rightarrow CE = AB = a$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CE \perp AD \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{(SC, (SAD))} = \widehat{CSE} = 30^\circ.$$

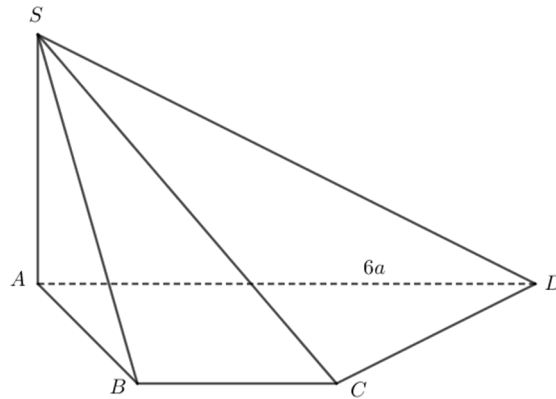
$$\text{Diện tích mặt đáy là: } S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) AB}{2} = \frac{(2a + a)a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SCE \text{ vuông tại } E \text{ nên ta có: } SE = CE \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tam giác } SAE \text{ vuông tại } A \text{ nên ta có: } SA = \sqrt{SE^2 - AE^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với đáy lớn $AD = 6a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng



A. $\frac{27a^3\sqrt{6}}{4}$.

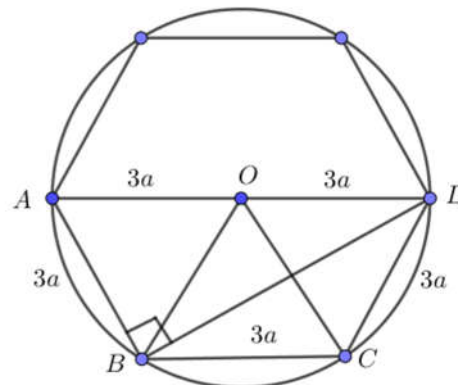
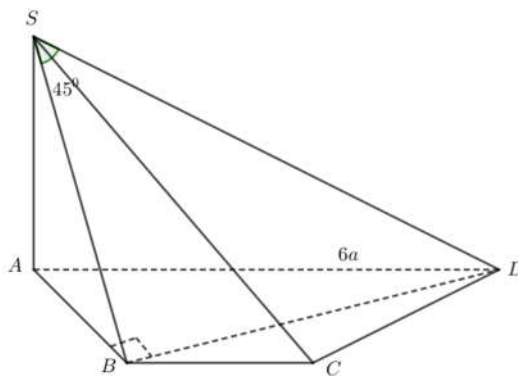
B. $\frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{27a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{9a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Do đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (góc chắn nửa đường tròn).

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AB \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB)$. Suy ra SB là hình chiếu vuông góc của SD lên mặt phẳng (SAB) nên $(SD, (SAB)) = \widehat{DSB} = 45^\circ$.

Diện tích mặt đáy là: $S_{ABCD} = 3 \cdot S_{\triangle OAB} = 3 \cdot (3a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{27a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ABD vuông tại B nên ta có: $BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{(6a)^2 - (3a)^2} = 3a\sqrt{3}$.

Tam giác SBD vuông cân tại B nên ta có: $SB = BD = 3a\sqrt{3}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(3a\sqrt{3})^2 - (3a)^2} = 3a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a\sqrt{2} \cdot \frac{27a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27a^3\sqrt{6}}{4}$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa AC và mặt phẳng (SCD) bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$.

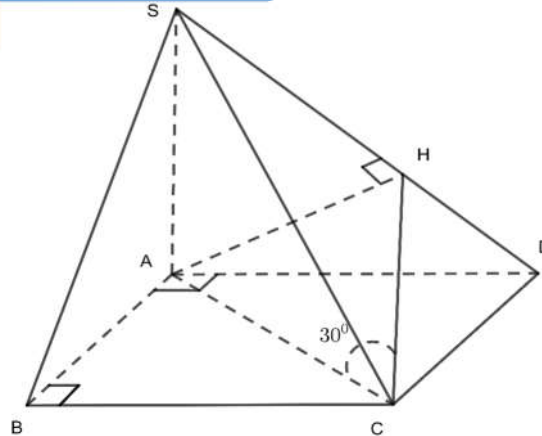
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $a^3\sqrt{3}$.

D. a^3 .

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh SD .

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \text{ (} ABCD \text{ là h.vuông)} \\ CD \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.

Do đó $\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Vậy hình chiếu vuông góc của AC trên mặt phẳng

(SCD) là HC . Suy ra góc giữa AC và (SCD) là $\widehat{ACH}$. Theo giả thiết ta có $\widehat{ACH} = 30^\circ$.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác AHC vuông tại H (vì $AH \perp (SCD)$) có:

$$\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = a\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác SAD vuông tại A có chiều cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AD^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SA = a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$$

Câu 8: [THI-THU-SỞ HÒA BÌNH-2020-2021] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB . Góc giữa SC và (SAB) bằng 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{11}}{2}$.

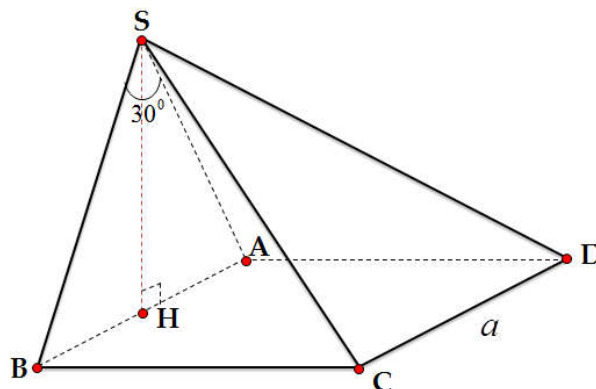
B. $\frac{a^3\sqrt{11}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{11}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB . Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} CB \perp BA \\ CB \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{array} \right\} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên

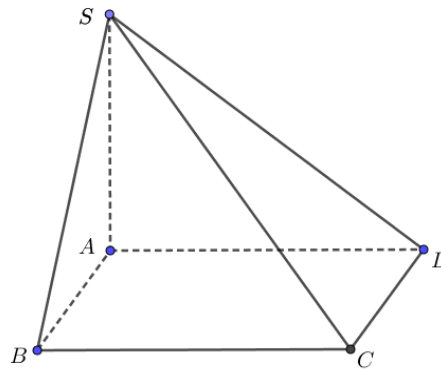
(SAB) . Suy ra $\widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{(SC, SB)} = \widehat{BSC} = 30^\circ$.

Trong tam giác vuông SBC có: $\tan 30^\circ = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SBH có: $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{11}}{2} = \frac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

Câu 9: [Sở-GDĐT-Thái-Nguyên-L2-NH-2020-2021] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SCD) bằng 45° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng



A. $\frac{a^3}{8}$.

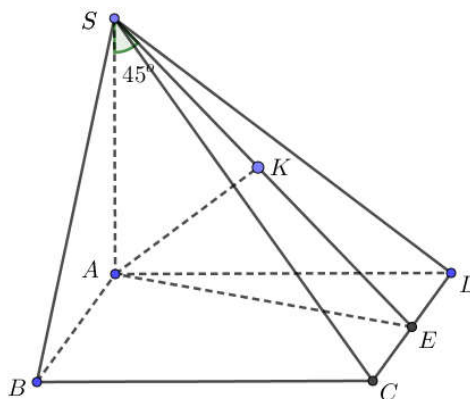
B. $\frac{3a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



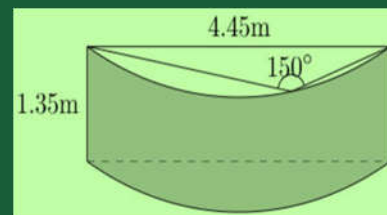
Ta có tam giác ACD đều cạnh a . Gọi E là trung điểm CD .

Kẻ $AK \perp SE$. Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAE) \Rightarrow \begin{cases} AK \perp CD \\ AK \perp SE \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow 45^\circ = \widehat{ASK}$.

$\Rightarrow SA = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 44

Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng một tấm kính cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình bên. Biết giá tiền của 1m^2 kính như trên là 1.500.000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu?



- A. 23.591.000 đồng. B. 36.173.000 đồng.
C. 9.437.000 đồng. D. 4.718.000 đồng.

Facebook: Huỳnh Văn Ánh – Phong Do

Phân tích và định hướng tìm lời giải:

- Đây là tình huống liên quan đến kiến thức mà các em đã được học về vấn đề diện tích của mặt tròn xoay;

- Để giải quyết được tình huống trên các em phải thực hiện thông qua các bước sau:

Bước 1. Xác định yêu cầu của bài toán thực tiễn;

Bước 2. Tổ chức cho học sinh phân tích và làm rõ các “cụm từ” có nghĩa trong bài toán thực tiễn trong mô hình Toán học;

Bước 3. Đề xuất giải pháp giải quyết bài toán thực tiễn (trong mô hình Toán học);

Bước 4. Thực hiện giải pháp (trong mô hình Toán học);

Bước 5. Chuyển kết quả trong mô hình toán học sang lời giải của bài toán thực tiễn.

Lời giải

Chọn C

Bán kính của đường tròn đáy là $R = \frac{4,45}{2 \sin 150^\circ} = 4,45\text{m}$.

Vì đây cung bằng bán kính nên mép trên của tấm kính là cung tròn có số đo 60° của đường tròn đáy.

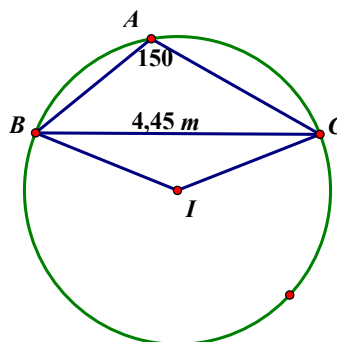
Do đó diện tích tấm kính bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao 1,35m

và bán kính đáy $R = 4,45\text{m}$.

Số tiền mà ông Bình mua tấm kính trên là

$$T = \frac{1}{6} \cdot 2\pi R h \cdot 1500000 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 4,45 \cdot 1,35 \cdot 1500000 \approx 9437000 \text{ đồng.}$$

Cách 2:



Gọi đường tròn tâm I bán kính R (như hình vẽ). Ta sẽ tính độ dài cung nhỏ BC .

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có $R = \frac{BC}{2 \sin 150^\circ} = \frac{89}{20}$.

$$\text{Trong tam giác } IBC \text{ có } \cos \hat{I} = \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2IB \cdot IC} = \frac{R^2 + R^2 - BC^2}{2R^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{I} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Độ dài cung nhỏ } BC \text{ là } l = \frac{\pi}{3} \cdot R = \frac{89}{60} \pi (m).$$

$$\text{Diện tích phần kính là } 1,1,35 = \frac{801}{400} \pi.$$

$$\text{Số tiền mua tấm kính là } \frac{801}{400} \pi \cdot 1.500.000 = 9436558,933.$$

Bình luận:

- Đây là một tình huống xảy ra trong thực tiễn, để giải quyết tình huống này đòi hỏi các em phải có năng lực mô hình hóa toán học. Nghĩa là, các em phải lựa chọn mô hình toán đã học phù hợp với tình huống thực tiễn để phát biểu tình huống xảy ra thành bài toán trong mô hình toán học; giải quyết bài toán toán học. Từ đó, chuyển kết quả trong mô hình toán học sang lời giải bài toán thực tiễn. Đây là bài toán kiểm tra mức độ VDC

Hướng phát triển bài toán

Hướng 1. Sử dụng mô hình toán học các kiến thức liên quan đến mặt trụ, mặt cầu;

Hướng 2. Sử dụng mô hình toán học các kiến thức liên quan đến khối trụ, khối chóp;

Bài tập tương tự

Câu 1: Ông A được nhà nước cho thuê 100 ha đất trồng rừng Thông với thời gian 10 năm thu hoạch. Biết sau 10 năm cây trưởng thành với chiều cao khoảng 15 m và khi thu hoạch thì với mỗi cây Thông đạt chuẩn thu hoạch được 1 khối gỗ loại I hình trụ có chiều cao 5 m chu vi vòng tròn thân 2 m và được 1 khối gỗ loại II hình trụ có chiều cao 4 m chu vi vòng tròn thân 1,4 m. Với mỗi 1 m³ gỗ thu hoạch loại I, loại II lần lượt tương ứng được 150 và 100 ngàn đồng. Biết 1 ha trung bình có 100 cây thu hoạch. Hỏi sau khi thu hoạch ông A lãi với số tiền gần bằng:

- A. 2.500.000.000. B. 3.000.000.000. C. 3.500.000.000. D. 4.000.000.000

Lời giải

Chọn B

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính khối gỗ loại I và loại II

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2\pi R_1 = 2 \\ 2\pi R_2 = 1,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{1}{\pi} \\ R_2 = \frac{0,7}{\pi} \end{cases}$$

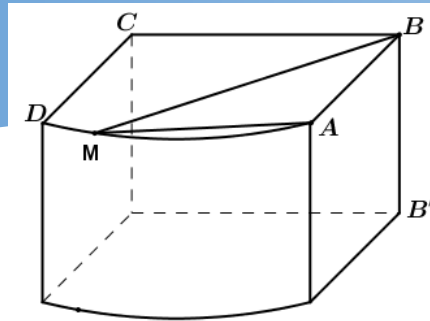
Vậy mỗi cây thu hoạch được $V_1 = \pi R_1^2 \cdot 5 = \frac{5}{\pi} (m^3)$ gỗ loại I và

$$V_2 = \pi R_2^2 \cdot 4 = \frac{(0,7)^2 \cdot 4}{\pi} (m^3) \text{ gỗ loại II}$$

Vậy: tổng số tiền thu sau thu hoạch là:

$$T = V_1 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 150000 + V_2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100000 \approx 3011211600.$$

Câu 2: Một cơ sở sản xuất bể cá không nắp với chiều cao BB' bằng cạnh bên BA bằng 0,7 m như hình vẽ. Biết 3 mặt xung quanh và mặt đáy được được đúc bằng nhựa cao cấp với chi phí 100000 / m², mặt cong phía trước dùng chất liệu kính dẻo cao cấp với giá 200000 / m². Với thiết kế sao cho cung DM là một phần của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và M thuộc cung AD , $\widehat{AMB} = 30^\circ$. Hỏi cơ sở sản xuất được tối đa bao nhiêu bể cá với số tiền 200000000 đồng



A. 620.

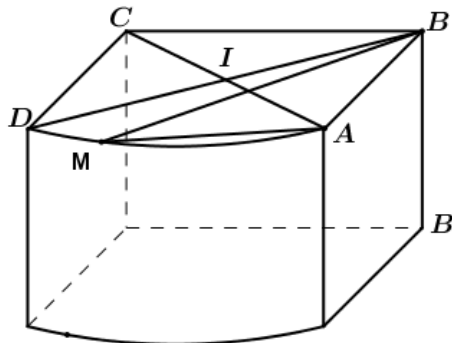
B. 624.

C. 628.

D. 608

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\widehat{AMB} = 30^\circ = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{DCA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DIA} = 120^\circ$

Xét $\triangle BAM$ ta có: $\frac{AB}{\sin M} = 2R \Rightarrow R = AB = 0,7 \Rightarrow BC = AB\sqrt{3} = (0,7) \cdot \sqrt{3}$

Diện tích mặt đáy: $S_d = \frac{\pi}{3} R^2 + \frac{3}{4} S_{ABCD} = \frac{\pi}{3} (0,7)^2 + \frac{3}{4} (0,7)^2 \sqrt{3}$

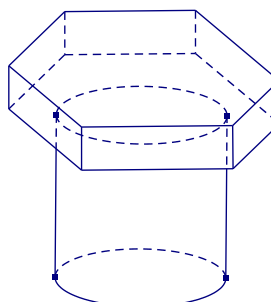
Diện tích phần nhưa là $S_1 = 2 \cdot (0,7)^2 + (0,7)^2 \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} (0,7)^2 + \frac{3}{4} (0,7)^2 \sqrt{3}$

Diện tích phần kính $S_2 = \frac{2\pi}{3} R \cdot h = \frac{2\pi}{3} \cdot (0,7)^2$

Vậy tổng số tiền cho một sản phẩm là $T = S_1 \cdot 100000 + S_2 \cdot 200000 \approx 320216$

Vậy với số tiền 200000000 thì cơ sở sản xuất tối đa được $\frac{200000000}{320216} \approx 624$ cái.

Câu 3: [THPT-THỊ-XÃ-QUẢNG-TRỊ-2021] Để chế tạo ra một cái đỉnh ốc, người ta đúc một vật bằng thép có dạng như hình vẽ bên. Trong đó, phần phía trên có dạng là một hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao bằng $3cm$ và độ dài cạnh đáy bằng $4cm$; phần phía dưới có dạng một hình trụ có trục trùng với trục của lăng trụ đều phía trên, chiều cao bằng $12cm$ và chu vi đường tròn đáy bằng một nửa chu vi đáy của lăng trụ. Biết mỗi m^3 thép có giá là m triệu đồng. Khi đó, giá nguyên liệu để làm một vật như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 262,2m đồng.

B. 537,2m đồng.

C. 26,22m đồng.

D. 53,72m đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của vật thể, thể tích của hình lăng trụ phía trên và thể tích hình trụ phía dưới. Ta có: $V_1 = h_{LT} \cdot S = 3.6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3} (cm^3)$.

Chu vi lục giác đều là: $6.4 = 24cm$.

Suy ra chu vi của đường tròn đáy là $C = 12cm = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{6}{\pi}$ (R bán kính đường tròn đáy).

Do đó: $V_2 = \pi R^2 \cdot h_T = \pi \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 \cdot 12 = \frac{432}{\pi} (cm^3)$.

Khi đó: $V = V_1 + V_2 = 72\sqrt{3} + \frac{432}{\pi} (cm^3)$.

Giá nguyên liệu để làm vật thể là: $T = V \cdot m = \left(72\sqrt{3} + \frac{432}{\pi}\right)m \approx 262,2m$ đồng.

Câu 4: **[ĐỀ-THI-CHINH-PHỤC-MÔN-TOÁN-VTV7-LẦN-1-2021]** Để chuẩn bị cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam tham dự vòng loại thứ ba World Cup 2022. Một hội cổ động viên dự định trang trí 1000 chiếc nón là với cách sơn như sau: Tính theo độ dài đường sinh của chiếc nón lá là 40cm, kể từ đỉnh nón cứ 8cm thì sơn màu đỏ, màu vàng xen kẽ nhau như hình minh họa, sau đó dán 20 ngôi sao vàng vào mỗi chiếc nón.



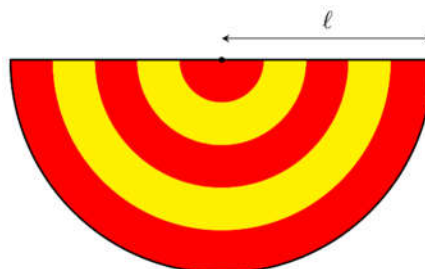
Biết rằng đường kính của đường tròn đáy nón 40 cm, mỗi ngôi sao vàng giá 200 đồng, sơn màu vàng giá 5000 đồng/ m^2 , sơn màu đỏ giá 4000 đồng/ m^2 . Hỏi giá thành để trang trí 1000 chiếc nón lá đó gần với số tiền nào sau đây?

A. 5105840 đồng. B. 5105841 đồng. C. 5156106 đồng. D. 5156107 đồng.

Lời giải

Chọn B

Hình nón đã cho có độ dài đường sinh là $\ell = 0,4$ m và bán kính đường tròn đáy là $r = 0,2$ m. Khi đó cắt hình nón theo một đường sinh rồi trải phẳng, ta được một hình quạt có bán kính ℓ và độ dài cung tròn tương ứng là $2\pi r = \pi \ell$, hay ta được một nửa hình tròn bán kính ℓ .



Khi đó, trên bán kính của nửa hình tròn, mỗi dải màu có độ dài $\frac{\ell}{5}$. Suy ra tổng diện tích

$$\text{phần màu vàng là: } \frac{1}{2} \pi \ell^2 \left[\left(\frac{4}{5} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{2}{5} \right)^2 - \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right] = \frac{\pi \ell^2}{5}.$$

$$\text{Tổng diện tích phần màu đỏ là: } \frac{1}{2} \pi \ell^2 \left[1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{5} \right)^2 - \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right] = \frac{3\pi \ell^2}{10}.$$

Vậy tổng số tiền trang trí 1000 chiếc nón là

$$1000 \left(5000 \cdot \frac{\pi \ell^2}{5} + 4000 \cdot \frac{3\pi \ell^2}{10} + 20 \cdot 200 \right) \approx 5105841 \text{ đồng.}$$

Câu 45

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Facebook: Nguyễn Khắc Thành – Nguyễn Văn Viễn – Uyên Hoang

Phân tích và định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán lập phương trình đường thẳng thỏa mãn điều kiện cho trước.
- Để lập phương trình đường thẳng chúng ta cần xác định một điểm nó đi qua và một vectơ chỉ phương. Để xác định hai yếu tố trên chúng ta thực hiện thông qua các bước sau:

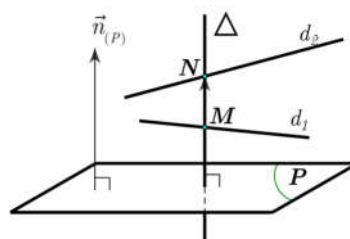
Bước 1: Giả sử Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N . Khi đó tọa độ của các điểm M và N theo thứ tự thỏa mãn phương trình tham số của d_1 và d_2 .

Bước 2: Đường thẳng $\Delta \perp (P)$ dẫn đến VTCP của Δ và VTPT của (P) cùng phương. Dựa vào điều kiện cùng phương của hai vectơ ta tìm được tọa độ các điểm M, N .

Bước 3: Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M và N .

Lời giải

Chọn A



Gọi M và N lần lượt là giao điểm của Δ với d_1 và d_2 .

Vì $M \in d_1 \Rightarrow M(2m+1; m; -2m-1)$ và $N \in d_2 \Rightarrow N(n+2; 2n; -n-1)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (n-2m+1; 2n-m; -n+2m)$.

Vì $\Delta \perp (P)$ nên $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$.

$$\text{Do đó } \frac{n-2m+1}{2} = \frac{2n-m}{2} = \frac{-n+2m}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ 2m-n=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}.$$

Đường thẳng Δ đi qua $M(1;0;-1)$, $N(3;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (2;2;-1)$ nên

$$\text{có phương trình là } \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

Bình luận:

- Đây là câu hỏi ở mức độ **vận dụng** nội dung xoay quanh các kiến thức về điểm, đường thẳng, mặt phẳng.

- Để giải tốt được các câu hỏi về dạng này người học cần nắm vững được các kiến thức liên quan đến hệ tọa độ trong không gian như : Tọa độ của điểm, tọa độ của véc tơ, các véc tơ cùng phương, vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng, vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Ngoài ra người học cần có được các kỹ năng như : Kỹ năng tham số hóa tọa độ của một điểm khi biết điểm đó thuộc đường thẳng có phương trình tham số (hoặc chính tắc) cho trước ; kỹ năng sử dụng các phép toán cơ bản của véc tơ ; kỹ năng sử dụng các công thức liên quan đến khoảng cách ; ...

- Người học cần nắm vững được cách giải các dạng toán cơ bản như : Viết phương trình đường thẳng **đi qua một điểm** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước ; viết phương trình đường thẳng **song song với một đường thẳng cho trước** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước ; viết phương trình đường thẳng **đi qua một điểm** đồng thời vuông góc với hai đường thẳng phân biệt cho trước ; ...

Hướng phát triển:

Hướng 1: Viết phương trình đường thẳng **song song với một đường thẳng cho trước** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước.

Hướng 2: Viết phương trình đường thẳng **vuông góc với một đường thẳng cho trước** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước

Hướng 3: Viết phương trình đường thẳng **đi qua 1 điểm** đồng thời cắt hai đường thẳng phân biệt cho trước

Hướng 4: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A đồng thời cắt d_1 và vuông góc với đường thẳng d_2 .

Bài tập tương tự

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2: \begin{cases} x = -1+3t \\ y = -2t \\ z = -4-t \end{cases}$,

$d_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3 và cắt đồng thời d_1, d_2 có phương trình là

A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{6}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$.

C. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}$.

D. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Δ cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A, B

$$A(3+2a; -1+a; 2-2a), B(-1+3b; -2b; -4-b), \overrightarrow{AB} = (-4-2a+3b; 1-a-2b; -6+2a-b)$$

$$d_3 \text{ có VTCP là } \vec{u} = (4; -1; 6)$$

$$\Delta // d_3 \Rightarrow \frac{-4-2a+3b}{4} = \frac{1-a-2b}{-1} = \frac{-6+2a-b}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Vậy Δ đi qua $A(3; -1; 2)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (-4; 1; -6)$

$$\text{Phương trình } \Delta : \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}.$$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$,

$\Delta_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(a; b; 3)$. Giá trị $2a+3b$ bằng

A. 15.

B. -15

C. 0.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

$$A(3+2a; a; 1+a), B(1+b; 2+2b; b), \overrightarrow{AB} = (-2-2a+b; 2-a+2b; -1-a+b)$$

$$d \text{ có VTCP là } \vec{u}_d = (1; 1; -2)$$

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow \vec{u}_d \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow a = b + 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6-b; b; -3) \Rightarrow AB^2 = 2b^2 + 12b + 45 = 2(b+3)^2 + 27 \geq 27$$

$$\text{Vậy } AB_{\min} = 3\sqrt{3} \text{ xảy ra khi } \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3; -3; -3)$$

Δ có một VTCP là $\vec{u}(3; 3; 3)$. Vậy $a = b = 3 \Rightarrow 2a + 3b = 15$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$,

$\Delta_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(-4; -5; 3)$ và đồng thời cắt

Δ_1, Δ_2 . Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (3; 2; -1)$.

B. $\vec{u} = (3; -2; -1)$

C. $\vec{u} = (-3; 2; 1)$.

D. $\vec{u} = (3; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử Δ cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt tại M, N .

$$M(-1+3a; -3-2a; 2-a), N(2+2b; -1+3b; 1-5b)$$

$$\overrightarrow{MN} = (3-3a+2b; 2+2a+3b; -1+a-5b)$$

$$\overrightarrow{AM} = (3+3a; 2-2a; -1-a)$$

$$A, M, N \text{ thẳng hàng } \overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3a+2b = k(3+3a) \\ 2+2a+3b = k(2-2a) \\ -1+a-5b = k(-1-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Vậy ta được: $M(-1; -3; 2), N(2; -1; 1), \overrightarrow{MN} = (3; 2; -1)$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$, $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{5}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{-5}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+5}{3}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là giao điểm của Δ với d_2 . Vì $M \in d_2$ nên $M(1-t; 1+2t; -1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-t; -1+2t; -4+t)$ là véc tơ chỉ phương của Δ và $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$ là véc tơ chỉ phương của d_1 .

Vì $\Delta \perp d_1$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-t) - 1 \cdot (-1+2t) + 1 \cdot (-4+t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Khi đó, Δ đi qua $A(1; 2; 3)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = (1; -3; -5)$ nên có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

Để ý rằng, điểm $B(2; -1; -2) \in \Delta$ và $-\vec{u} = (-1; 3; 5)$ cũng là một véc tơ chỉ phương của Δ nên phương trình Δ là $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{5}$.

Một số hướng phát triển khác:

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 2 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất.

A. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

B. $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$.

D. $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 0)$

(P) có một VTPT là $\vec{n}(1; 1; 2)$

Gọi VTCP của d là $\vec{u}$

Kẻ $BH \perp d \Rightarrow \Delta ABH$ vuông tại $H \Rightarrow BH \leq AB \Leftrightarrow d(B, d) \leq AB \Leftrightarrow d(B, d)_{\max} = AB$

Xảy ra khi $H \equiv A \Rightarrow d \perp AB \Rightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$

Lại có $d // (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$. Suy ra $\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot [\vec{n}; \overrightarrow{AB}] = (1; 1; -1)$

Phương trình $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Suy ra, chọn C.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3), B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y-z+9=0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy $B \in (\alpha)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -4; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{41}$

Gọi d là đường thẳng qua A và $d \perp (\alpha)$

Phương trình $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}$

Gọi $K = d \cap (\alpha) \Rightarrow K(-3; -2; -1)$

M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông $\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) đường kính AB

Lại có $M \in (\alpha) \Rightarrow M$ chạy trên đường tròn $(C) = (S) \cap (\alpha)$

Lại có $B \in (\alpha) \Rightarrow (C)$ có đường kính là $BK \Rightarrow BM \leq BK$

MB đạt giá trị lớn nhất khi $M \equiv K$

$\overrightarrow{BK} = (-1; 0; -2)$

Vậy phương trình BM là: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Câu 46

Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	$-\frac{61}{3}$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Facebook: An Dinh – Hà Hoàng – Nguyễn Tất Thành

Phân tích và định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán tìm cực trị của hàm số có dạng $g(x) = |f(u(x)) - v(x)|$ khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm $y = f'(x)$.

- Để xác định số cực trị của hàm $g(x) = |h(x)|$ với $h(x) = f(u(x)) - v(x)$ ta cần lập bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(u(x)) - v(x)$ nhờ giả thiết bài toán.

- Từ bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(u(x)) - v(x)$ suy ra bảng biến thiên hàm số $g(x) = |h(x)|$. Từ đó, suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |h(x)|$.

- Để lập bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(u(x)) - v(x)$ ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính đạo hàm $h'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

Bước 4. Từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$. Từ đó, kết luận bài toán

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f''(x) = a(x+1)(x+3) \Rightarrow f'(x) = \int f''(x)dx = a\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) + b$.

$$\text{Do } \begin{cases} f'(-3) = -1 \\ f'(-1) = -\frac{61}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{29}{2} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{29}{2}\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) - 1.$$

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) - 3x$ có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 f'(x^3) - 3 = 0$.

Nhận xét rằng, $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $3x^2 f'(x^3) - 3 = 0$ nên

$$3x^2 f'(x^3) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2} \quad (*)$$

Nếu $x \in (-\infty; 0)$ thì $f'(x) < 0 \Rightarrow f'(x^3) < 0$ mà $\frac{1}{x^2} > 0$ nên $(*)$ vô nghiệm trên $(-\infty; 0)$.

Nếu $x \in (0; +\infty)$ thì $f'(x)$ đồng biến nên $f'(x^3)$ đồng biến, mà hàm số $\frac{1}{x^2}$ nghịch biến nên phương trình $(*)$ không có quá 1 nghiệm. (1)

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f'(x^3) - \frac{1}{x^2} \right] = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f'(x^3) - \frac{1}{x^2} \right] = +\infty$ nên phương trình $(*)$ có ít nhất một nghiệm dương. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f'(x^3) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = x_0 (x_0 > 0)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
$h'(x)$		-	- 0 +	
$h(x)$	$+\infty$		$h(x_0)$	$+\infty$

Biểu đồ minh họa: Một trục hoành với các điểm $-\infty, 0, x_0, +\infty$. Tại $x=0$, hàm $h(x)$ có giá trị 0 . Tại $x=x_0$, hàm $h(x)$ có giá trị $h(x_0)$. Hàm $h(x)$ giảm từ $+\infty$ tại $-\infty$ xuống 0 tại $x=0$, rồi tiếp tục giảm đến $h(x_0)$ tại $x=x_0$, và cuối cùng tăng trở lại $+\infty$ tại $+\infty$. Các đoạn giảm và tăng được đánh dấu bằng mũi tên.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có ba điểm cực trị.

Bình luận:

- Đây là bài toán lập tìm cực trị của hàm trị tuyệt đối của hàm hợp. Để làm được bài toán này đòi hỏi các em phải nắm vững và sử dụng thành thạo bài toán tìm điểm cực trị của hàm số, hàm hợp; áp dụng vào hàm trị tuyệt đối của hàm hợp. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức tổng hợp ở mức độ VDC.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên hàm số $f'(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(u(x)) + h(x)$

Hướng phát triển 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(u(x)) + h(x)$.

Hướng phát triển 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(u(x)) + h(x)|$.

Bài tập tương tự

Câu 1: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	1	3	$-\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^5) + 5x + 2021|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x) = f(x^5) + 5x + 2021$, ta có $h'(x) = 5x^4 f'(x^5) + 5$.

Xét $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 f'(x^5) + 5 = 0$ (*).

Nhận xét rằng, $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (*).

Với $x < 0$, từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x) > 0$ nên $f'(x^5) > 0$ nên (*) vô nghiệm.

Với $x > 0$, ta có (*) $\Leftrightarrow f'(x^5) = -\frac{1}{x^4}$.

Khi đó, vì $f'(x)$ nghịch biến nên $f'(x^5)$ cũng nghịch biến, mà $-\frac{1}{x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên phương trình (*) có tối đa 1 nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f'(x^5) + \frac{1}{x^4} \right] = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f'(x^5) + \frac{1}{x^4} \right] = -\infty$ nên (*) có đúng 1 nghiệm $x = x_0 \in (0; +\infty)$.

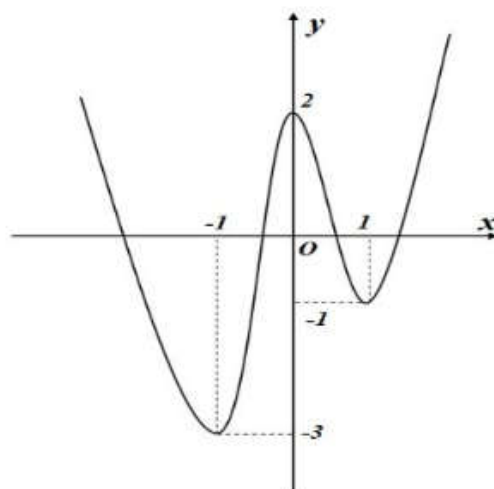
Xét bảng biến thiên của $h(x)$:

x	0	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$\frac{4043}{2}$	$h(x_0)$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_1 > x_0$.

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 2 điểm cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - \frac{x^4}{2} + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ là

A. 6.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

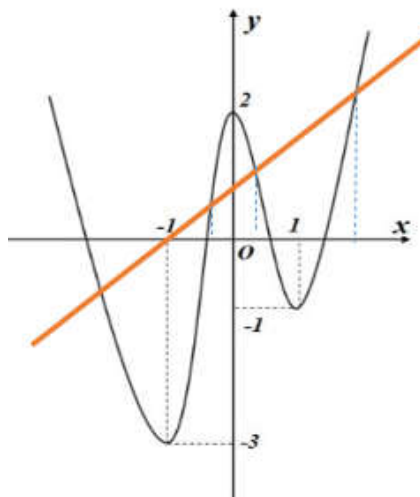
Chọn D

Ta có:

$$g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x) - (2x^3 - 6x^2 + 6x - 2) = 2(x-1)[f'(x^2-2x) - (x^2-2x+1)]$$

$$\text{Với } u = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1, \forall x$$

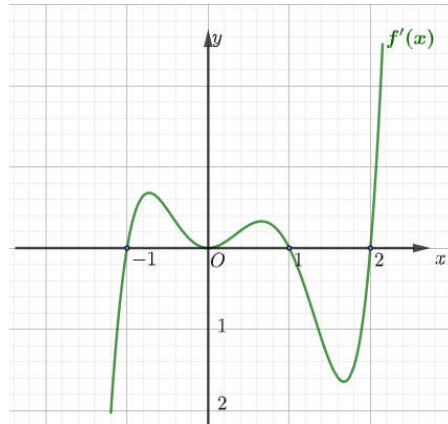
Dựa vào đồ thị của $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x + 1$ ta có



$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(u)=u+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ u=a \in (-1;0) \\ u=b \in (0;1) \\ u=c \in (1;2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2=a+1 \in (0;1) \\ (x-1)^2=b+1 \in (1;2) \\ (x-1)^2=c+1 \in (2;3) \end{cases}$$

Như vậy $g'(x)=0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt, nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 3. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

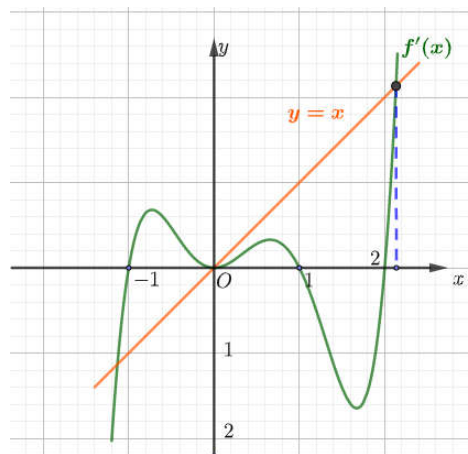
Chọn C

Xét $h(x)=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}x^2$.

Ta có $h'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)-x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left[f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}\right]$

Suy ra $h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1} \quad (*) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$:



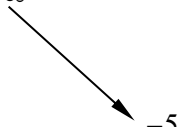
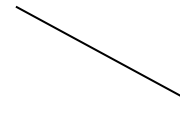
Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x^2+1}=a \quad (a>2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{a-1} \end{cases}$

Và $h(0) = f(1) = 0$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{a-1}$	0	$\sqrt{a-1}$	$+\infty$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$			0		$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	a			b			$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$				6			
			-5					$-\infty$

Đặt $h(x) = |m - f(x-2)|$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = h(x)$ có đúng 5 cực trị?

A. Vô số!

B. 12.

C. 0.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = m - f(x-2) \Rightarrow g'(x) = -f'(x-2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = a \\ x-2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+a \\ x = 2+b \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$a+2$		$b+2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$			$m+5$			$+\infty$
	$-\infty$			$m-6$		

Để hàm số $h(x) = |m - f(x-2)| = |g(x)|$ có đúng 5 cực trị điều kiện là

$$\begin{cases} m+5 > 0 \\ m-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < 6 \Rightarrow m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Vậy có 10 giá trị của m .

Câu 47

Có bao nhiêu số nguyên $a(a \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn: $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$?

A. 8.

B. 9.

C. 1.

D. Vô số.

Facebook: Lê Thanh Bình – Chanh Muối – Nguyễn Tất Thành

Phân tích định hướng tìm lời giải:

+ Đây là bài toán tìm tham số a để phương trình mũ có nghiệm;

+ Để giải bài toán này thông thường chúng ta sử dụng một trong các phương pháp sau đây:

Cách 1: Đặt ẩn phụ đưa về giải hệ phương trình đối xứng loại 2.

$$\begin{cases} f(x, y) = a \\ f(y, x) = a \end{cases}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp hàm số

+ Cho phương trình $f(x) = c$ (với c là hằng số). Nếu hàm số $f(x)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên khoảng K và tồn tại $x_0 \in K$, sao cho $f(x_0) = c$ thì phương trình $f(x) = c$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$ trên khoảng K .

+ Cho phương trình $f(x) = g(x)$. Nếu hàm số $f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên khoảng K còn $g(x)$ luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên khoảng K và tồn tại $x_0 \in K$, sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$ trên khoảng K .

+ Cho phương trình $f(u) = f(v)$. Nếu hàm số $f(t)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên khoảng K thì từ phương trình $f(u) = f(v)$ ta có $u = v$ trên khoảng K . Ở đây ta nói $f(t)$ là hàm số đặc trưng của PT.

+ $f(u) > f(v)$ mà $f(t)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên khoảng K thì bất phương trình tương đương với $u > v$ (hoặc $u < v$) trên khoảng K . Ở đây ta nói $f(t)$ là hàm số đặc trưng của bpt.

Chú ý:

+ Nhận dạng $f(u) = f(v)$ hay $f(u) > f(v)$ thường sử dụng cách này khi phương trình, bất phương trình chứa các ẩn vừa nằm trong dấu loga (trên mũ) và ẩn nằm ngoài dấu loga (không trên mũ), hoặc PT, BPT vừa chứa loga vừa chứa mũ.

+ Để đưa về dạng $f(u) = f(v)$ hay $f(u) > f(v)$ ta thường biến đổi bằng cách thêm bớt dựa vào những biểu thức trong loga, biểu thức trên số mũ sao cho biểu thức trong loga, biểu thức trên mũ cùng xuất hiện ở một vế của phương trình hay bất phương trình.

Ví dụ: Phương trình cho ở dạng $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$

Vì $4x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên điều kiện là $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$ (*)

Với điều kiện (*) phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = x^2 - 5x + 1 - m$$

Để đưa về dạng $f(u) = f(v)$, thì ta phải biến đổi $x^2 - 5x + 1 - m$ sao cho xuất hiện $(4x^2 - 2x + 2), (3x^2 + 3x + m + 1)$ vì hai biểu thức này nằm trong dấu loga. Nên ta được:

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2(4x^2 - 2x + 2) = (4x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2(4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2)$$

+ Việc chứng minh hàm số $f(t)$ luôn đồng biến, nghịch biến trên K khi làm bài trắc nghiệm có thể sử dụng máy tính cầm tay: MODE 7- với 570, MODE 8- với 580.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 2$. Đặt $m = \log a > 0$

Khi đó phương trình trở thành: $(x^m + 2)^m = x - 2$.

Đặt $y = x^m + 2$, $y > 2$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y^m = x - 2 & (1) \\ x^m = y - 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) vế theo vế ta được

$$y^m + y = x^m + x \quad (3)$$

Xét hàm $f(t) = t^m + t$ với $m > 0; t > 0$ có $f'(t) = m.t^{m-1} + 1 > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t) = t^m + t$ đồng biến $(0; +\infty)$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow x^m = x - 2 \Leftrightarrow m \cdot \log x = \log(x - 2) \Leftrightarrow m = \frac{\log(x - 2)}{\log x} < 1$

$\Rightarrow \log a < 1 \Rightarrow a < 10$. Do đó, mọi số $a \in \{2; 3; 4; \dots; 9\}$ đều thỏa mãn.

Bình luận:

- Việc cho hàm số $f(u); f(v)$ như nào rất quan trọng. Vì khi thi trắc nghiệm với công cụ hỗ trợ của máy tính cầm tay học sinh có thể dễ dàng bấm máy để tìm ra mối liên hệ giữa u và v . Tất nhiên việc bấm máy tính dựa trên nền tảng kiến thức tốt của học sinh. Khi hướng đi làm tự luận gây khó khăn cho học sinh thì hướng giải bằng công cụ hỗ trợ máy tính cầm tay cũng là 1 phương án tốt.

- Ví dụ giải câu 47 dựa trên hướng tự luận và sự hỗ trợ của máy tính cầm tay

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên $a (a \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

$$(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2?$$

Lời giải

Để tìm mối liên hệ giữa a và x ở bài này chưa có thể tìm ra ngay bằng máy tính.

Dựa vào nhận xét $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ ta có $a^{\log x} = x^{\log a}$. Công việc này nhằm mục đích để đưa về cùng $\log a$. Khi đó đặt $\log a = t$ phương trình trở thành $(x^t + 2)^t = x - 2$ (điều kiện $x > 2$)

Cho $t = 100$ bấm máy tính ta có $x \approx 0,9956130378$. Tuy nhiên chưa thấy được mối liên hệ giữa x và t . Vì đề bài có x^t nên bấm máy

$$x^t = 98 \Rightarrow x^t = x - 2 \Rightarrow t = \log_x(x - 2) \Rightarrow \log a = \frac{\log(x - 2)}{\log x}.$$

Đến đây có thể khảo sát hàm số $y = \frac{\log(x-2)}{\log x}$ bằng phương pháp đạo hàm hay dùng máy tính CASIO MODE 7- với 570, MODE 8- với 580.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay đổi yêu cầu như tìm điều kiện liên quan đến tương giao đồ thị...

Hướng phát triển 2: Thay đổi phương trình thành bất phương trình.

Hướng phát triển 3: Thay đổi hàm số $f(u); f(v)$ kết hợp với hàm số chẵn, hàm số lẻ.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m với $m > 1$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

$$(m^{\log_5 x} + 3)^{\log_5 m} = x - 3 \quad (1).$$

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $m^{\log_5 x} + 3 = u$ thay vào phương trình (1) ta được: $u^{\log_5 m} = x - 3 \Leftrightarrow x = u^{\log_5 m} + 3$.

$$\text{Vì } u^{\log_5 m} = m^{\log_5 u}. \text{ Từ đó ta có hệ Phương trình } \begin{cases} u = m^{\log_5 x} + 3 \\ x = u^{\log_5 m} + 3 \end{cases}.$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = m^t + 3$ trên $\mathbb{R}$.

Do $m > 1$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, $f(\log_5 x) = f(\log_5 u) \Leftrightarrow x = u$.

Vì thế, ta đưa về xét phương trình: $x = m^{\log_5 x} + 3 \Leftrightarrow x = x^{\log_5 m} + 3 \Leftrightarrow x - 3 = x^{\log_5 m}$

$$\Leftrightarrow \log_5(x-3) = \log_5(x^{\log_5 m}) \Leftrightarrow \log_5(x-3) = \log_5 x \cdot \log_5 m \Leftrightarrow \log_5 m = \frac{\log_5(x-3)}{\log_5 x}$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên } x - 3 < x \text{ nên } \log_5 m = \frac{\log_5(x-3)}{\log_5 x} < 1 \Leftrightarrow m < 5.$$

Suy ra $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Rightarrow m \in \{2, 3, 4\}$. Vậy có 3 giá trị tham số m thỏa mãn.

Câu 2. Có bao nhiêu m nguyên $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình

$$6^x - 2m = \log_{\sqrt[3]{6}}(18(x+1) + 12m) \text{ có nghiệm?}$$

A. 211.

B. 2020.

C. 2023.

D. 212.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } 6^x - 2m = \log_{\sqrt[3]{6}}(18(x+1) + 12m) \Leftrightarrow 6^x = 2m + 3 \log_6[6(3x + 2m + 3)]$$

$$\Leftrightarrow 6^x = 2m + 3[1 + \log_6(3x + 2m + 3)] \Leftrightarrow 6^x = 3 \log_6(3x + 2m + 3) + 2m + 3, (*)$$

$$\text{Đặt } y = \log_6(3x + 2m + 3) \Leftrightarrow 6^y = 3x + 2m + 3$$

Mặt khác, PT(*) trở thành: $6^x = 3y + 2m + 3$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 6^y = 3x + 2m + 3, (1) \\ 6^x = 3y + 2m + 3, (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ vế với vế cho (2), ta được

$$6^y - 6^x = 3x - 3y \Leftrightarrow 6^x + 3x = 6^y + 3y \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 6^t + 3t, t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 6^t \ln 6 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mà PT (3) $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay $y = x$ vào PT (1), ta được $6^x = 3x + 2m + 3 \Leftrightarrow 6^x - 3x = 2m + 3$.

Xét hàm số $g(x) = 6^x - 3x$, với $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$g'(x) = 6^x \ln 6 - 3 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_6 \left(\frac{3}{\ln 6} \right)$$

BBT:

x	$-\infty$	$\log_6 \left(\frac{3}{\ln 6} \right)$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0,81	$+\infty$

Từ đó suy ra PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 2m + 3 \geq g \left(\log_6 \frac{3}{\ln 6} \right) \approx 0,81 \Rightarrow m \geq -1,095$

Vậy có 2023 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1}$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 2 - m$ tại hai điểm có hoành độ lớn hơn 1?

A. 3.

B. Vô số.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

- Ta có phương trình hoành độ giao điểm :

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m (*)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ trên $D = (0; +\infty)$, có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in D$,

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên D

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1. \text{ Vì } 4x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } 3x^2 + 3x + m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2).$$

- Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, có $g'(x) = 2x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	-	0	+	
$g(x)$				-4		$-\frac{25}{4}$	

Để hai đồ thị hàm số cắt nhau tại 2 điểm có hoành độ lớn hơn 1 thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3$, do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$, hay có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ chỉ có 2 nghiệm là:

A. $T = 32$.

B. $T = 12$.

C. $T = -4$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-2)^3 + 8 + m - 3x = 2^3 + 2^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3.$$

Xét hàm $h(t) = 2^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$.

có $h'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) suy ra $m - 3x = (2-x)^3 \Leftrightarrow m = 8 - 9x + 6x^2 - x^3$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ trên $\mathbb{R}$.

có $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$			4	8		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có, phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $m = 4; m = 8 \Rightarrow T = 12$

Câu 5. Tổng tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ (1)

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ (2)

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t+2), t \geq 0$.

Vì $f'(t) > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 & (3) \\ x^2 = 2m - 1 & (4) \end{cases}$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(4) $\Rightarrow m = \frac{3}{2}$, thay vào PT (4) thỏa mãn

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(3) $\Rightarrow m = \frac{1}{2}$, thay vào PT (3) thỏa mãn

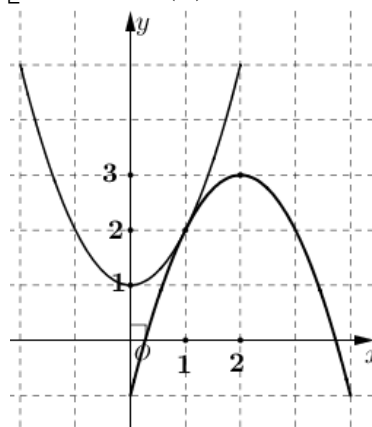
+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

(4) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2m-1}$, với $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$. Thay vào PT (3) tìm được $m = 1$.

$\Rightarrow m \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\} \Rightarrow T = 3$.

Chú ý: Cách tìm điều kiện để có đúng ba nghiệm có thể sử dụng đồ thị như sau:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 \\ x^2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 & (3) \\ 2m = x^2 + 1 & (4) \end{cases}$



Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình:

$\ln \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + m} + x^3 - 3x^2 + 2 - m \geq 0$ nghiệm đúng với $\forall x \in [0; 3]$?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + m} > 0$.

Do $x^3 - 2x^2 + 2 > 0$ với $\forall x \in [0; 3]$ nên bài toán này ta chỉ xét với điều kiện $x^2 + m > 0$ (*)

Với điều kiện (*) ta có bất phương trình

$$\Leftrightarrow \ln(x^3 - 2x^2 + 2) - \ln(x^2 + m) + x^3 - 3x^2 + 2 - m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^3 - 2x^2 + 2) + x^3 - 2x^2 + 2 \geq \ln(x^2 + m) + x^2 + m \quad (1)$$

Xét hàm: $f(t) = \ln t + t$ trên $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0 \text{ với } \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2 \geq x^2 + m \Leftrightarrow m \leq x^3 - 3x^2 + 2.$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với $\forall x \in [0; 3]$ khi:

$$\begin{cases} x^2 + m > 0 \quad \forall x \in [0; 3] \\ m \leq \min_{x \in [0; 3]} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq -2 \end{cases}. \text{ Vậy không tồn tại giá trị của } m \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(3^x) + f(2x - 1) \geq 0$ là?

A. $S = (-\infty; 0]$ B. $S = [-2021; 2021]$. C. $S = [-2021; +\infty)$. **D. $S = [0; +\infty)$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra TXĐ: $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + e^{-x} - e^x = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + e^{-x} - e^x$$

$$= -\left(\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}\right) = -f(x).$$

$$(1) \Leftrightarrow f(3^x) \geq -f(2x - 1) \Leftrightarrow f(3^x) \geq f(1 - 2x) \quad (2)$$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy } (2) \Leftrightarrow 3^x \geq 1 - 2x$$

Khi $x \geq 0$ ta có $3^x \geq 1; 1 - 2x \leq 1 \Rightarrow 3^x \geq 1 - 2x, \forall x \geq 0$

Khi $x < 0$ ta có $3^x < 1; 1 - 2x > 1 \Rightarrow 3^x < 1 - 2x$

Vậy tập nghiệm: $S = [0; +\infty)$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2 + 1} - x} - e^{\sqrt{x^2 + 1} + x}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2021; 2021]$ thỏa mãn

$$f(m - 7) + f\left(\frac{12}{m + 1}\right) \leq 0?$$

A. 4038

B. 2025

C. 5

D. 4036

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(-x) = e^{\sqrt{x^2 + 1} - x} - e^{\sqrt{x^2 + 1} + x} = -f(x)$$

$$f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq -f(m-7) = f(7-m)$$

Mặt khác ta có $f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right) \cdot e^{\sqrt{x^2+1}+x} - \left(\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot e^{\sqrt{x^2+1}-x} > 0$ suy ra hàm số đồng

biến. Do đó ta có $f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq f(7-m) \Leftrightarrow \frac{12}{m+1} \leq 7-m \Leftrightarrow \frac{m^2-6m+5}{m+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 5 \\ m < -1 \end{cases}$

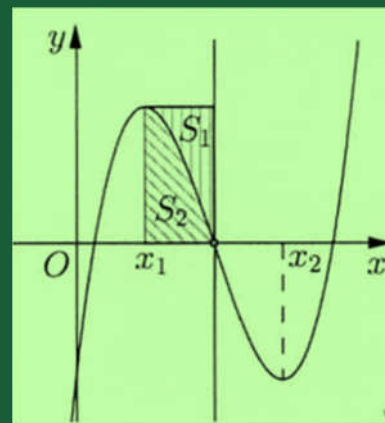
Mà $m \in [-2021; 2021] \Rightarrow m \in [-2021; -2] \cup [1; 5]$

Suy ra có 2025 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 48

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{5}$.



Facebook: Lại Nhật Hoan – Nguyễn Bá Nam

Phân tích định hướng tìm lời giải:

Bài toán ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng rất phong phú và đa dạng. Trong phần này xin đề cập đến một số VD và bài tập sử dụng các đồ thị đã được khảo sát trong chương trình THPT để tính diện tích hình phẳng, tính tỷ số diện tích các hình phẳng, tập trung và việc quy các đồ thị hàm tổng quát về các đồ thị dạng “chuẩn tắc”. Những bài toán này yêu cầu học sinh biết thiết lập, đặt vị trí đồ thị dạng tổng quát về dạng dễ tính toán cũng có thể đặc biệt hóa nếu làm bài trắc nghiệm. Thầy cô khi dạy cần nhắc lại một số tính chất của các đồ thị và các phép biến đổi đưa dạng tổng quát của hàm về **dạng chuẩn tắc**

1) Hàm số bậc 2: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, đồ thị (P)

Dùng phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{IO}$ biến đồ thị (P) thành đồ thị (P_1): $y = ax^2$ (**đưa về dạng chuẩn tắc**)

2) Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), có tâm đối xứng là điểm uốn. Ta có thể viết $ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + mx + n$ với $y = mx + n$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn. Như vậy phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{IO}$ (với I là điểm uốn) sẽ biến đồ thị (C) thành đồ thị (C_1) có phương trình $y = a(x^3 + px)$ (**đưa về dạng chuẩn tắc**)

3) Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có thể có 3 cực trị hoặc 1 cực trị. Sử dụng phép biến đổi $ax^4 + bx^2 + c = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, phép tịnh tiến theo $\vec{u}\left(0; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ biến đồ thị (C)

thành đồ thị $y = a(x^2 + m^2)^2$ nếu (C) có 1 cực trị, hoặc thành $y = a(x^2 - m^2)^2$ nếu (C) có 3 cực trị (**đưa về dạng chuẩn tắc**)

4) Hàm số b1/b1: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) có thể biến đổi $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \frac{d}{c}}$, đồ thị hàm

số nhận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ làm giao điểm hai tiệm cận và là tâm đối xứng.

Dùng phép tịnh tiến theo $\overline{IO}$ biến đồ thị (C) thành đồ thị (C_1) có phương trình $y = \frac{k}{x}$ (**đưa về dạng chuẩn tắc**)

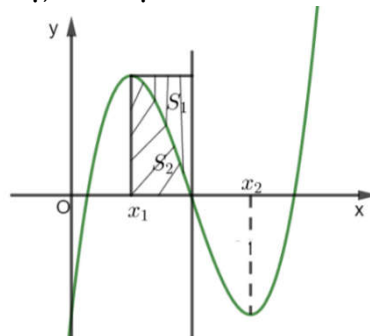
5) Các hàm số lượng giác cơ bản $y = a \sin(mx + n) + b$, $y = a \cos(mx + n) + b$ có chu kỳ tuần hoàn là $T = \frac{2\pi}{m}$, $Maxy = |a| + b$, $Miny = -|a| + b$.

Ta sẽ dùng dạng chuẩn tắc để chuẩn hóa các hàm cho các bài toán tính toán định lượng và không phụ thuộc vào vị trí đồ thị đặt ở đâu trong hệ trục.

Lời giải

Chọn D

Tịnh tiến điểm uốn về gốc tọa độ, ta được hình vẽ bên dưới.



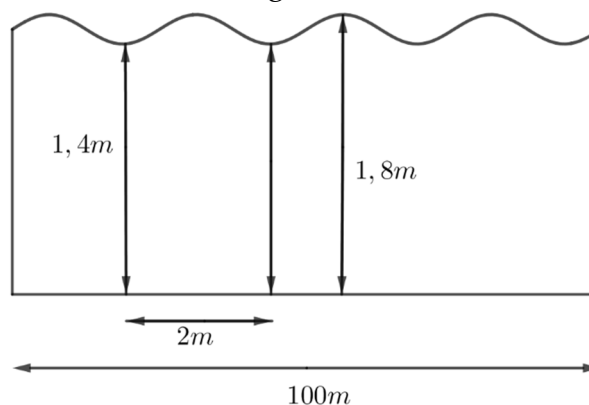
Khi đó, do $f(x)$ là hàm bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng nên $x_1 = -1; x_2 = 1$.

Chọn $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x$.

Nên $S_2 = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx = \frac{5}{4}$; $S_1 + S_2 = 2 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$.

Các câu phát triển

Câu 1. Người ta xây một tường rào dài $100m$, tập hợp các điểm phía trên của hàng rào tạo thành một đường hình sin (như hình vẽ). Điểm cao nhất trên tường rào cách móng $1,8m$, điểm thấp nhất nằm phía trên tường rào cách móng $1,4m$, hai điểm thấp nhất liên tiếp nhau cách nhau $2m$. Tính diện tích tường rào ?



A. $54,5\pi (m^2)$

B. $55\pi (m^2)$

C. $160(m^2)$

D. $165(m^2)$

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Đặt hệ trục tọa độ Oxy sao cho Ox là móng của tường, với đơn vị trên trục là (mét), như vậy phần tường xây là phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = a \cdot \sin(mx) + b$,

Do chu kì tuần hoàn bằng 2 nên $m = \pi$, và số chu kì bằng 50.

$$\begin{cases} \max y = 1,8 \Rightarrow a + b = 1,8 \\ \min y = 1,4 \Rightarrow -a + b = 1,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,2 \\ b = 1,6 \end{cases} \text{ vậy } y = 0,2 \sin(\pi x) + 1,6$$

$$S = \int_0^{100} (0,2 \sin(\pi x) + 1,6) dx = 160(m^2).$$

Cách 2: Kẻ đường thẳng $y = 1,6$ ($\parallel Ox$) ta thấy phần diện tích bị "hút" bằng phần diện tích "đưa ra", nên diện tích tường cần tính bằng diện tích hình chữ nhật có chiều dài bằng $100m$ và chiều rộng bằng $1,6m$. Vậy diện tích tường rào bằng $160(m^2)$.

Câu 2. Cho Parabol (P) , $y = mx^2$ và hình vuông $OACB$ có $A \in Ox$, $B \in Oy$, trọng tâm G của tam giác OAC thuộc Parabol (P) . Gọi S_1, S_2 là diện tích hai phần của hình vuông bị chia bởi parabol (P) . Biết $S_1 < S_2$, tính $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(3a, 0)$, $B(0; 3a)$ suy ra $C(3a; 3a) \Rightarrow G(2a; a)$

$G \in (P) \Rightarrow 4am = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4a}$, $AC \cap (P) = K\left(3a; \frac{9a}{4}\right)$ nên K thuộc đoạn AC .

$$\text{Vậy } S_1 = \int_0^{3a} mx^2 dx = 9ma^3 = \frac{9a^2}{4}, S_{ABCD} = 9a^2 \Rightarrow S_2 = \frac{27a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$$

Câu 3. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gọi A là giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) . Một hình vuông $ABCD$ có các đỉnh B, D lần lượt thuộc hai tiệm cận, và tâm I của hình vuông thuộc (C) . Biết diện tích hình vuông bằng 4, đồ thị (C) chia hình vuông thành 2 phần có diện tích S_1, S_2 ($S_1 < S_2$). Tính S_1 .

A. $3 - 2 \ln 2$

B. $2 - \ln 2$

C. $4 - 2 \ln 3$

D. $2 - \ln 3$

Lời giải

Chọn A

Không làm mất tính tổng quát, xét phương trình đường cong (C) ở dạng chuẩn tắc

$$y = \frac{k}{x} (k > 0)$$

Như vậy (C) nhận 2 trục Ox, Oy làm hai tiệm cận khi đó $A \equiv O$. hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 4 nên $B(2; 0), D(0; 2), C(2; 2)$ đường thẳng BC có phương trình $y = 2$, Tâm của hình vuông là $I(1; 1)$, $I \in (C)$ suy ra $k = 1$. Phương trình (C): $y = \frac{1}{x}$,

$$(C) \cap BC = M\left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

$$\text{Ta được } S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx = 3 - 2 \ln 2.$$

Câu 4. Cho đồ thị (C) của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, có ba điểm cực trị A, B, C biết tam giác ABC cân tại A và diện tích miền phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng BC bằng 16. Tính độ dài đoạn BC .

- A. 12. B. 13. C. $\frac{64}{5}$. **D. 15.**

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)$ có 3 điểm cực trị nên có thể chuẩn hóa $f(x) = a(x^2 - m^2)^2$ khi đó $A(0; am^4), B(-m; 0), C(m; 0)$ ($m > 0$) khi đó $B, C \in Ox$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng BC là

$$S = \left| \int_{-m}^m a(x^2 - m^2)^2 dx \right| = \frac{16|a|m^5}{15}$$

Cũng có diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = |am^5|$ Vậy ta luôn có $S = \frac{16}{15} S_{ABC}$

Theo bài ra $S = 16$ suy ra $S_{ABC} = 15$.

Câu 5. Cho đồ thị (C) của hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là M, P và hình chữ nhật $MNPQ$ có $MN \parallel Ox$. Biết diện tích của phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và đường thẳng MN bằng 10. Tính diện tích hình chữ nhật $MNPQ$.

- A. $\frac{80}{9}$. **B. $\frac{320}{27}$.** C. $\frac{125}{12}$. D. 12.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số có hai cực trị, nên ta có thể chuẩn hóa $y = a(x^3 - 3m^2x)$ ($m > 0$)

suy ra $y' = 3a(x^2 - m^2)$ khi đó $M(-m; 2am^3), P(m; -2am^3)$ suy ra $N(m; 2am^3)$

Đường thẳng MN có phương trình $y = 2am^3$, MN cắt (C) tại M và K với $x_k = 2m$ (MN chính là tiếp tuyến của (C) tại điểm cực trị M)

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và đường thẳng MN là

$$S = \left| \int_{-m}^{2m} (2am^3 - a(x^3 - 3m^2x)) dx \right| = \frac{27|a|m^4}{4}$$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = 8|a|m^4$ suy ra $\frac{S}{S_{MNPQ}} = \frac{27}{32}$

Theo bài ra $S = 10$ suy ra $S_{MNPQ} = \frac{320}{27}$.

Câu 49

Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất $|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng

A. $5 - \sqrt{19}$.

B. $5 + \sqrt{19}$.

C. $-5 + 2\sqrt{19}$.

D. $5 + 2\sqrt{19}$.

Facebook: Nguyễn Khải

Định hướng:

+ Đây là bài toán tìm $\max |z - z_0|$, $\min |z - z_0|$ với z là số phức thay đổi thỏa mãn $|z - z_1| = r > 0$. Để giải bài toán này chúng ta có hai cách cơ bản:

-Cách 1: Áp dụng BĐT mô đun:

$$\left| |z - z_1| - |z_1 - z_0| \right| \leq |(z - z_1) + (z_1 - z_0)| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| \text{ hay } |r - |z_1 - z_0|| \leq |z - z_0| \leq r + |z_1 - z_0|.$$

-Cách 2: Biểu diễn hình học số phức:

Trong mặt phẳng phức, gọi $M(z)$, $A(z_0)$, khi đó: M thuộc đường tròn tâm $I(z_1)$, bán kính r và $|z - z_0| = MA$. Ta có $|MI - IA| \leq MA \leq MI + IA \Rightarrow |r - |z_1 - z_0|| \leq |z - z_0| \leq r + |z_1 - z_0|$.

+ Tất cả giả thiết của đề bài đều cho ở dạng $|mz_1 + nz_2| = r$, chính vì thế ta xét: $|mz_1 + nz_2|^2$ bởi vì $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

+ Bằng tính toán ta có kết quả: $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2)$. Trong đó m, n là các số thực và z_1, z_2 là các số phức. Như vậy từ giả thiết ta sẽ tính được $|3z_1 + z_2|$ và đưa bài toán đã cho về bài toán quen thuộc.

Lời giải 1

$$+3 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2) = 5 - (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2) \Rightarrow (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2) = 2;$$

$$|3z_1 + z_2| = \sqrt{9|z_1|^2 + |z_2|^2 + 3(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2)} = \sqrt{19}.$$

$$+ \text{Có: } |(3z_1 + z_2) + (-5i)| \leq |3z_1 + z_2| + |-5i| \Leftrightarrow |3z_1 + z_2 - 5i| \leq 5 + \sqrt{19}.$$

$$+ \text{Khi } \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{57}}{19} - \frac{4\sqrt{19}}{19}i \\ z_2 = -\frac{3\sqrt{57}}{19} - \frac{7\sqrt{19}}{19}i \end{cases} \text{ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì } |3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19}. \text{ Vậy}$$

$$\max |3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19} \Rightarrow \text{Chọn B.}$$

Lời giải 2

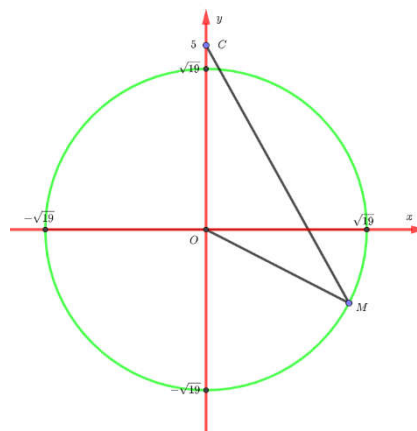
+Trong mặt phẳng phức, gọi $A(z_1), B(z_2), C(5i), M(3z_1 + z_2)$; Vì $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 2 \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{3} \end{cases}$ nên A thuộc

đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R_1 = 1$, B thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R_2 = 2$, và $AB = \sqrt{3}$.

$$+Ta\ có \begin{cases} \overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM}^2 = 9\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 6\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow OM^2 = 9OA^2 + OB^2 + 6 \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} = 19 \Rightarrow OM = \sqrt{19} \Rightarrow M \text{ thuộc đường tròn tâm}$$

$O(0;0)$ bán kính $R_3 = \sqrt{19}$.



$+|3z_1 + z_2 - 5i| = MC \leq MO + OC = 5 + \sqrt{19}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O thuộc đoạn thẳng MC . Như vậy, rõ ràng tồn tại các số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện bài toán và $|3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19}$. Vậy $\max |3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19} \Rightarrow$ **Chọn B.**

Bình luận:

1. Đây là câu hỏi VDC, câu hỏi này đã xuất hiện trong đề thi thử của trường chuyên Đại học Vinh năm 2018. Điểm then chốt của câu hỏi này là phải tính được $|3z_1 + z_2|$.

2. Những BĐT mô đun hay dùng:

$|z + z_1| + |-z - z_2| \geq |z_1 - z_2|$ (1). Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z + z_2 = 0 \\ \begin{cases} z + z_2 \neq 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : z + z_1 = k(-z - z_2) \end{cases} \\ \exists k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1 : z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}$$

$\|z + z_1\| - \|-z - z_2\| \leq \|z_1 - z_2\| \Leftrightarrow \|z + z_1\| + \|z + z_2\| \geq 2\left\|z + \frac{z_1 + z_2}{2}\right\|$ (2). Vậy đẳng thức ở (2) xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} z + z_2 = 0 \\ z + z_2 \neq 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0: z + z_1 = k[-z - z_2] \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty): z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}.$$

3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức

+ Trong mặt phẳng phức, số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bằng

- Điểm $M(x; y)$, kí hiệu $M(z)$.

- Véc tơ $\overrightarrow{OM} = (x; y)$.

- Véc tơ $\vec{u} = (x; y)$.

+ Biểu diễn hình học của $z_1 + z_2, z_1 - z_2, kz_1$ ($k \in \mathbb{R}$).

Gọi $M, \vec{u}$ lần lượt biểu diễn số phức z_1 ; Gọi $N, \vec{v}$ lần lượt biểu diễn số phức z_2 . Ta có $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ và $\vec{u} + \vec{v}$ biểu diễn số phức $z_1 + z_2$; $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$ và $\vec{u} - \vec{v}$ biểu diễn số phức $z_1 - z_2$; $k\overrightarrow{OM}$ và $k\vec{u}$ biểu diễn số phức kz_1 .

+ Với M, A, B lần lượt biểu diễn số phức z, z_1, z_2 thì $OM = |z|$; $AB = |z_2 - z_1|$.

4. Tìm được $\min|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng BĐT $|(3z_1 + z_2) + (-5i)| \geq \|3z_1 + z_2\| - \|-5i\| = 5 - \sqrt{19}$.

Hướng Phát Triển:

Hướng 1: Khai thác BĐT $|z + z_1| + |z + z_2| \geq 2\left|z + \frac{z_1 + z_2}{2}\right|$.

Câu 1: [Sở GD & ĐT Phú Thọ-2021] Có bao nhiêu số phức z có phần thực, phần ảo là các số nguyên đồng thời thỏa mãn $|z| < 7$ và $|z| + |z - 1 - i| = |z + 1 + i| + |z - 2 - 2i|$?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Định hướng:

+ Khai thác giả thiết $|z| + |z - 1 - i| = |z + 1 + i| + |z - 2 - 2i|$. Nghĩ đến BĐT

$$|z + z_1| + |z + z_2| \geq 2\left|z + \frac{z_1 + z_2}{2}\right|.$$

+ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z + z_1 = k(z_1 - z_2)$; $k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải

+ Áp dụng BĐT $|z + z_1| + |z + z_2| \geq 2\left|z + \frac{z_1 + z_2}{2}\right|$ ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |z+1+i|+|z-1-i| \geq 2|z| \\ |z-2-2i|+|z| \geq 2|z-1-i| \end{cases} \Rightarrow |z+1+i|+|z-2-2i| \geq |z|+|z-1-i| \\ & \Rightarrow \begin{cases} z+1+i = k[z+1+i-(z-1-i)]; k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ z = m[z-(z-2-2i)]; m \in \mathbb{R}, m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} z = (2k-1)(1+i); k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ z = 2m(1+i); m \in \mathbb{R}, m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow z = x(1+i); x \in \mathbb{Z}, x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty). \\ & + \forall i |z| < 7 \Rightarrow |x|\sqrt{2} < 7 \Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1; 2; 3; 4\} \Rightarrow \text{Chọn B.} \end{aligned}$$

Hướng 2: Khai thác BĐT $\|z+z_1|-|-z-z_2\| \leq |(z+z_1)+(-z-z_2)| \leq |z+z_1|+|-z-z_2|$.

Câu 2: [Sở GD & ĐT Hòa Bình-2021] Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2, |w-3+2i| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $H = |z^2 - 2zw - 4|$ bằng

- A. $16\sqrt{2}$. B. $18\sqrt{2}$. C. 8. D. 24.

Định hướng:

+ Biến đổi kết luận: $H = |z^2 - 2zw - z\bar{z}| = |2z| \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right|$.

+ Để tìm $\max H$, biến đổi $H = 4 \left| \left(\frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right) - (w-3+2i) \right|$.

Lời giải

+ $\forall i \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} \right)^2 = |z|^2 - \left(\frac{z+\bar{z}}{2} \right)^2 \leq |z|^2 = 4$ nên $0 \leq \frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \leq 4 \Rightarrow \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} \right)^2 \leq 16$.

+ Ta có $H = |z^2 - 2zw - z\bar{z}| = |2z| \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4 \left| \left(\frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right) - (w-3+2i) \right|$
 $\leq 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right| + 4|w-3+2i| = 4 + 4 \left| -3 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \right) i \right| = 4 + 4 \sqrt{9 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \right)^2} \leq 24$.

+ Khi $\begin{cases} z = 2i \\ w = \frac{18}{5} - \frac{14}{5}i \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì $H = 24$. Vậy $\max H = 24 \Rightarrow \text{Chọn D.}$

Nhận xét:

1. Tìm min H :

+ $H = 4 \left| \left(\frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right) - (w-3+2i) \right| \geq 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right| - 4|w-3+2i| = 4 \left| -3 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \right) i \right| - 4$
 $= 4 \sqrt{9 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} + 2 \right)^2} - 4 \geq 8$.

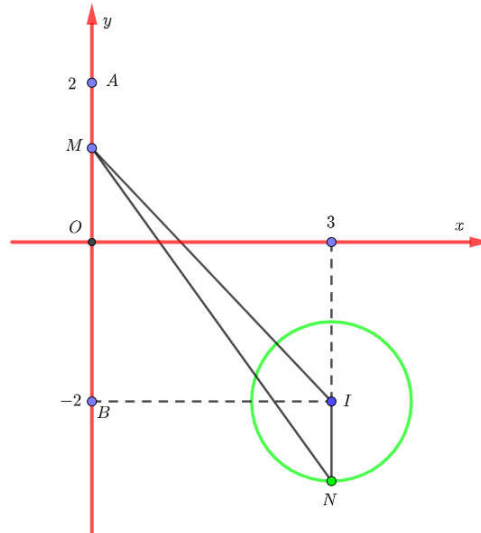
+ Khi $\begin{cases} z = -2i \\ w = 2 - 2i \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì $H = 8$. Vậy min $H = 8$.

2. Biểu diễn hình học số phức

Trong mặt phẳng phức, gọi $M\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)$, $N(w)$ thì $NM = \left|\frac{z-\bar{z}}{2} - w\right|$; Vì

$$\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = |z|^2 - \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 \leq |z|^2 = 4 \Rightarrow -2 \leq \frac{z-\bar{z}}{2i} \leq 2 \text{ nên điểm } M \text{ thuộc đoạn thẳng } AB \text{ với}$$

$A(0;2)$, $B(0;-2)$; Vì $|w-(3-2i)|=1$ N là điểm thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;-2)$, bán kính $r=1$.



+ Ta có $NM + IN \geq MI \Rightarrow NM \geq MI - 1 \geq IB - 1 = 2 \Rightarrow H \geq 8$ (Chú ý $IB \perp AB$).

+ $NM \leq NI + IM = 1 + MI \leq 1 + \max\{IA; IB\} = 6 \Rightarrow H \leq 24$.

Câu 3: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét hai số phức z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn $|z_1 + 1 + i| = 2$, $|z_2 + 1 + i| = 2$ và $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - 2z_2|$ bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Định hướng:

Thấy ngay từ $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2| \Rightarrow z_1 = k(-z_2)$ với $k \in \mathbb{R}, k > 0$. Từ đây sẽ có $|z_1 - 2z_2| = (k+2)|z_2|$. Sẽ đi tính $|z_2|$ theo k .

Lời giải

+Ta có $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1| + |-z_2| = |z_1 - z_2| \Rightarrow z_1 = k(-z_2)$ với $k \in \mathbb{R}, k > 0$. Chú ý rằng z_1, z_2 đều khác 0.

$$\begin{aligned} + \begin{cases} |z_2 + 1 + i| = 2 \\ |-kz_2 + 1 + i| = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z_2|^2 + |1+i|^2 + z_2(\overline{1+i}) + \overline{z_2}(1+i) = 4 \\ k^2|z_2|^2 + |1+i|^2 - k[z_2(\overline{1+i}) + \overline{z_2}(1+i)] = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_2(\overline{1+i}) + \overline{z_2}(1+i) = 2 - |z_2|^2 \\ z_2(\overline{1+i}) + \overline{z_2}(1+i) = \frac{k^2|z_2|^2 - 2}{k} \end{cases} \Rightarrow \frac{k^2|z_2|^2 - 2}{k} = 2 - |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_2| = \sqrt{\frac{2}{k}}. \end{aligned}$$

$$+ |z_1 - 2z_2| = (k+2)|z_2| = \sqrt{2k} + 2\sqrt{\frac{2}{k}} \geq 2\sqrt{\sqrt{2k} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{k}}} = 4.$$

+Khi $z_1 = -\frac{1+\sqrt{7}}{2} - \frac{1-\sqrt{7}}{2}i, z_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{4} + \frac{1-\sqrt{7}}{4}i$ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì $|z_1 - 2z_2| = 4$. Vậy $\min|z_1 - 2z_2| = 4 \Rightarrow$ **Chọn D.**

- Câu 4:** [Sở GD & ĐT Hải Phòng-2021] Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 3$ và $|z_1 + 6 - 8i| = 7 - |z_2|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 2z_2 + 21 - 3i|$. Khi đó giá trị của $M^2 - m^2$ bằng
- A. 220. B. 223. C. 224. D. 225.

Định hướng:

+Khai thác giả thiết. Từ giả thiết, không thể tính được $|z_1 + 2z_2|$. Nhận thấy xuất hiện số $3; 7; 10 = |6 - 8i|$.

$$+7 = |z_1 + 6 - 8i| + |-z_2| \geq |(z_1 - z_2) + (6 - 8i)| \geq |z_1 - z_2| - |6 - 8i| = 7.$$

Lời giải

+Ta có $7 = |z_1 + 6 - 8i| + |-z_2| \geq |(z_1 - z_2) + (6 - 8i)| \geq |z_1 - z_2| - |6 - 8i| = 7$. Suy ra

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = k(6 - 8i); k \in \mathbb{R}, k < 0 \\ -z_2 = m(z_1 - z_2 + 6 - 8i); m \in \mathbb{R}, 0 \leq m \leq 1 \end{cases}. \text{ Vì } |z_1 - z_2| = 3 \Rightarrow z_1 - z_2 = -\frac{3}{5}(3 - 4i).$$

$$+ \begin{cases} z_1 = -\frac{7m}{5}(3 - 4i) - \frac{3}{5}(3 - 4i) \\ z_2 = -\frac{7m}{5}(3 - 4i) \end{cases} \Rightarrow z_1 + 2z_2 + 21 - 3i = \frac{3}{5}[(-21m + 32) + (28m - 1)i]$$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{5}\sqrt{(-21m + 32)^2 + (28m - 1)^2} = 3\sqrt{49m^2 - 56m + 41}.$$

+Vì $0 \leq m \leq 1$ nên $P = 3\sqrt{7m(7m - 8) + 41} \leq 3\sqrt{41}$; $P = 3\sqrt{(7m - 4)^2 + 25} \geq 15$. Khi

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{3}{5}(3 - 4i) \\ z_2 = 0 \end{cases} \text{ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì } P = 3\sqrt{41}; \text{ Khi } \begin{cases} z_1 = -\frac{7}{5}(3 - 4i) \\ z_2 = -\frac{4}{5}(3 - 4i) \end{cases} \text{ và thỏa}$$

mãn điều kiện đề bài thì $P = 15$.

+Kết luận: $M = 3\sqrt{41}$; $m = 15 \Rightarrow M^2 - m^2 = 144 \Rightarrow$ **Chọn E.**

Hướng 3: Biểu diễn hình học các số phức

- Câu 5:** [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét hai số phức z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn $|z_1 + 1 + i| = 2$, $|z_2 + 1 + i| = 2$ và $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - 2z_2|$ bằng
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Định hướng:

+ $A(z_1), B(z_2)$ thuộc đường tròn (T) có tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = 2$; Vì $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$
 $\Rightarrow AB = OA + OB$ nên O thuộc đoạn thẳng AB . Vì $O \notin (T)$ nên $OA.OB = OC.OD$ với C, D là
giao điểm của (T) và đường thẳng (d) qua O .

+ Bằng tính toán thấy $|z_1 - 2z_2| = OA + 2OB$.

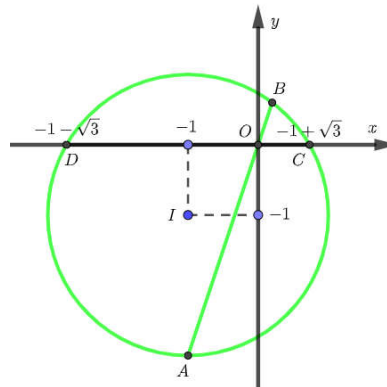
Lời giải

+ Trong mặt phẳng phức, gọi $A(z_1), B(z_2), C(-1 + \sqrt{3} + 0i)$ và $D(-1 - \sqrt{3} + 0i)$; Vì

$$\begin{cases} |z_1 + 2 - 2i| = 2 \\ |z_2 + 2 - 2i| = 2 \end{cases} \text{ nên } A, B \text{ thuộc đường tròn } (T) \text{ có tâm } I(-1;-1) \text{ bán kính } R = 2;$$

$|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow AB = OA + OB$ nên O thuộc đoạn thẳng AB . Rõ ràng $C, D \in (T)$.

$$\begin{aligned} + \text{Ta có } OA.OB &= OC.OD = |-1 + \sqrt{3}| \cdot |-1 - \sqrt{3}| = 2; |z_1 - 2z_2| = \sqrt{|\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}|^2} \\ &= \sqrt{\overrightarrow{OA}^2 + 4\overrightarrow{OB}^2 - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} = \sqrt{OA^2 + 4OB^2 + 4OA.OB} = OA + 2OB \geq 2\sqrt{OA.2OB} = 4. \end{aligned}$$



+ Khi $z_1 = -\frac{1+\sqrt{7}}{2} - \frac{1-\sqrt{7}}{2}i, z_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{4} + \frac{1-\sqrt{7}}{4}i$ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì
 $|z_1 - 2z_2| = 4$. Vậy $\min |z_1 - 2z_2| = 4 \Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 6: [Đông Hà Quảng Trị -2021] Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - 2i| = 4, |z_2 + 2 - 2i| = 4$ và
 $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$. Giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2 + 5|$ bằng

A. $2\sqrt{2} + 5\sqrt{13}$. B. $\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{2} + \sqrt{13}$. D. $\sqrt{2} + 3\sqrt{13}$.

Định hướng:

+ Từ giả thiết thấy ngay $A(z_1), B(z_2)$ thuộc đường tròn tâm $I(-2;2)$ bán kính $R_1 = 4$; Vì
 $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow AB = OA + OB$ nên O thuộc đoạn thẳng AB .

+ Từ kết luận, ta phải tìm tập hợp điểm $C(z_1 + z_2)$.

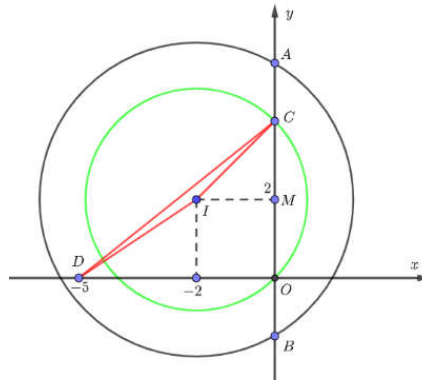
Lời giải

+ Trong mặt phẳng phức, gọi $A(z_1), B(z_2), C(z_1 + z_2)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng

$$AB \text{ và } D(-5;0); \text{ Vì } \begin{cases} |z_1 + 2 - 2i| = 4 \\ |z_2 + 2 - 2i| = 4 \end{cases} \text{ nên } A, B \text{ thuộc đường tròn tâm } I(-2;2) \text{ bán kính } R_1 = 4$$

; Vì $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow AB = OA + OB$ nên O thuộc đoạn thẳng AB .

+ Vì $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng OC nên O, C đối xứng với nhau qua đường thẳng IM . Do vậy $IC = IO = 2\sqrt{2} \Rightarrow C$ thuộc đường tròn tâm I bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$.



+Ta có $|z_1 + z_2 + 5| = CD \leq CI + ID = 2\sqrt{2} + \sqrt{13}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I thuộc đoạn thẳng CD . Như vậy, rõ ràng tồn tại các số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện bài toán và $|z_1 + z_2 + 5| = 2\sqrt{2} + \sqrt{13}$. Vậy $\max |z_1 + z_2 + 5| = 2\sqrt{2} + \sqrt{13} \Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 7: [Chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi-L1/N2021] Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $|z_1 - (1+i)| = 1, |z_2 - (2-i)| = 2$. Số phức z thay đổi sao cho $\overline{(z - z_1)} \cdot (1+i - z_1)$ và $(z - z_2) \cdot \overline{(z_2 - 2 + i)}$ là số thuần ảo. Giá trị nhỏ nhất của $|z - (3 - 2i)|$ bằng

- A. $\frac{11}{5}$. B. 3. C. $2 - \sqrt{2}$. D. $\sqrt{13} - 1$.

Định hướng:

+Khai thác được giả thiết: $\overline{(z - z_1)} \cdot (1+i - z_1)$ và $(z - z_2) \cdot \overline{(z_2 - 2 + i)}$ là số thuần ảo. Trong mặt phẳng phức, gọi $A(z_1), B(z_2), M(z), I(1+i), K(2-i)$ thì $\overline{MA} \perp \overline{IA}, \overline{MB} \perp \overline{KB}$.

Lời giải

+Bài toán phụ: Trong mặt phẳng phức, gọi véc tơ $\vec{u}, \vec{v}$ theo thứ tự biểu diễn số phức z, w . Khi đó, $\vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow z\bar{w}$ là số thuần ảo.

Chứng minh

$$z = a + bi, w = c + di \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \text{ thì } z\bar{w} + w\bar{z} = (a + bi)(c - di) + (a - bi)(c + di) \\ = 2(ac + bd) = 2\vec{u}\vec{v}.$$

$$z\bar{w} \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 0 \Leftrightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 0 \Leftrightarrow z\bar{w} + w\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\vec{v} = 0.$$

+Trong mặt phẳng phức, gọi $A(z_1), B(z_2), I(1+i), K(2-i), M(z)$ thì từ giả thiết suy ra:

$\overline{MA} \cdot \overline{IA} = 0, \overline{MB} \cdot \overline{KB} = 0$; Điểm A thuộc đường tròn (C_1) tâm I bán kính $r_1 = 1$ và điểm B thuộc đường tròn (C_2) tâm K bán kính $r_2 = 2$.

$$+ \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ thì } M \equiv A \Rightarrow |z - (1+i)| = 1 \Rightarrow |z - (3-2i)| = |(z-1-i) + (-2+3i)| \\ \geq ||z-1-i| - |-2+3i|| = \sqrt{13} - 1.$$

$$+ \overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ thì } M \equiv B \Rightarrow |z - (2-i)| = 2. \text{ Từ đây có } |z - (3-2i)| = |(z-2+i) + (-1+i)| \\ \geq ||z-2+i| - |-1+i|| = 2 - \sqrt{2}. \text{ Khi } z = (2 + \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2})i \text{ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì} \\ |z - (3-2i)| = 2 - \sqrt{2}.$$

$+\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ đều khác $\vec{0}$ thì M nằm ngoài (C_1) đồng thời nằm ngoài (C_2) . Trong trường hợp này, luôn có $|z - (3-2i)| > \min\{2 - \sqrt{2}; \sqrt{13} - 1\}$. So sánh ba trường hợp ta có $\min|z - (3-2i)| = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 50

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $b + c + d$ bằng

A. -21.

B. -12.

C. -18.

D. -15.

Facebook: Trương Quốc Toàn – Tạ Minh Đức – Trương Đức Thịnh – DucThanh Phạm

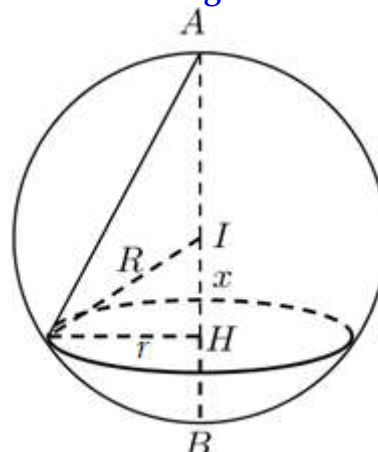
Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán lập phương trình mặt phẳng chứa đường tròn đáy của một hình nón, ứng với trường hợp thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất;
- Để lập phương trình mặt phẳng chúng ta cần xác định hai yếu tố: một điểm thuộc mặt phẳng và một vectơ pháp tuyến;
- Trong bài toán này, hai yếu tố trên chỉ xác định được khi thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất. Từ đó, chúng ta quy về bài toán tìm giá trị lớn nhất của khối nón (N) ;

+ Xác định chiều cao h và bán kính đáy r của khối nón (N) .

+ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Lời giải



Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(4;3;4)$ là trung điểm của AB và có bán kính $R = \frac{AB}{2} = 3$. Gọi h, r là chiều cao và bán kính đáy khối nón (N) ; H là tâm đường tròn đáy của (N) .

Đặt $IH = x (0 \leq x < R)$. Ta có: $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - x^2$; $h = x + R$

Thể tích khối nón (N) : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2)(R + x)$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 - Rx^2 + R^2x + R^3$ với $0 \leq x < R$

Ta có: $f'(x) = -3x^2 - 2Rx + R^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$

Từ đó, ta tìm được $V_{\max}$ khi $h = \frac{4R}{3} \Rightarrow AH = 4, BH = 2$.

Gọi $H(x; y; z)$, khi đó: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow H = \left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

Do đó, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) đi qua H và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp

tuyến có phương trình là: $2\left(x - \frac{14}{3}\right) + 2\left(y - \frac{11}{3}\right) + 1\left(z - \frac{13}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 21 = 0$.

Vậy $b + c + d = -18$. Suy ra **Chọn C**.

Bình luận:

- Đây là bài toán lập phương trình mặt phẳng, để xác định các yếu tố lập được phương trình của mặt phẳng nói trên học sinh phải có kiến thức tổng hợp liên quan đến thể tích khối nón, giá trị lớn nhất của hàm số trên một khoảng. Đặc biệt, học sinh phải nhận ra mẫu chốt của bài toán là các yếu tố chỉ được xác định khi khối nón đạt thể tích lớn nhất. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ VDC.

- Có thể tìm giá trị lớn nhất của $V = \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2)(R + x)$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức

Côsi cho ba số dương như sau:

$$V = \frac{1}{6} \pi (2R - 2x)(R + x)(R + x) \leq \frac{\pi}{6} \left(\frac{(2R - 2x) + (R + x) + (R + x)}{3} \right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{R}{3}$.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Dữ nguyên giả thiết bài toán, thay đổi kết luận. Tính giá trị biểu thức liên quan đến các hệ số phương trình mặt phẳng chứa đáy của khối nón khi khối nón có diện tích xung quanh lớn nhất

Hướng phát triển 2: Thay đổi giả thiết khối nón bằng khối trụ có trục nằm trên đường thẳng AB , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Tính giá trị biểu thức liên quan đến các hệ số của phương trình hai mặt phẳng song song đồng thời chứa hai đáy của khối trụ khi khối trụ có thể tích lớn nhất.

Hướng phát triển 3: Thay đổi giả thiết bài toán cho điểm A , mặt cầu (S) và một mặt phẳng (P) cố định. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt (P) tại B sao cho AB nhỏ nhất.

Hướng phát triển 4: Thay đổi giả thiết khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy là giao của mặt phẳng (α) qua B với mặt cầu $S(O; OA)$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B . Thay đổi kết luận khi diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (P) có giá trị lớn nhất thì mặt phẳng (P) có phương trình là?

Bài tập tương tự

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có diện tích xung quanh lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình là

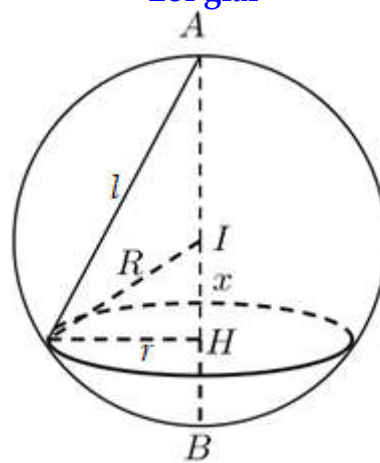
A. $8x + 8y + 2z - 21 = 0$.

B. $2x + 2y + z - 21 = 0$.

C. $8x + 8y - 4z - 21 = 0$.

D. $2x + 2y - z - 21 = 0$.

Lời giải



Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(4;3;4)$ là trung điểm của AB và có bán kính $R = \frac{AB}{2} = 3$. Gọi h, r là chiều cao và bán kính đáy khối nón (N); H là tâm đường tròn đáy của (N).

Đặt $IH = x (0 \leq x < R)$. Ta có: $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - x^2$; $l = \sqrt{(R+x)^2 + R^2 - x^2} = \sqrt{2xR + 2R^2}$

Diện tích xung quanh của khối nón (N):

$$S_{xq} = \pi r l = \frac{1}{3} \pi \sqrt{(R^2 - x^2)(2xR + 2R^2)} = \frac{\pi}{3} \sqrt{2R(R^2 - x^2)(x + R)}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 - Rx^2 + R^2x + R^3$ với $0 \leq x < R$

Ta có: $f'(x) = -3x^2 - 2Rx + R^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$

Từ đó, ta suy ra S_{xq} đạt giá trị lớn nhất khi $h = \frac{4R}{3} \Rightarrow AH = 4, BH = 2$.

Gọi $H(x; y; z)$, khi đó: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow H = \left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

Do đó, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) đi qua H và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $2\left(x - \frac{14}{3}\right) + 2\left(y - \frac{11}{3}\right) + 1\left(z - \frac{13}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 21 = 0$.

Suy ra **Chọn B**.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0), B(3;4;-4)$. Xét khối trụ (T) có trục là đường thẳng AB và có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (T) có thể tích lớn nhất, hai đáy của (T) nằm trên hai mặt phẳng song song lần lượt có phương trình là $x + by + cz + d_1 = 0$ và $x + by + cz + d_2 = 0$. Khi đó giá trị của biểu thức $b + c + d_1 + d_2$ thuộc khoảng nào sau đây?

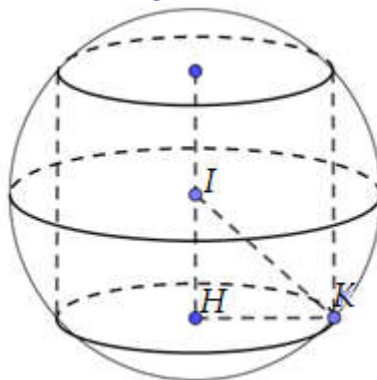
A. $(0;21)$.

B. $(-11;0)$.

C. $(-29;-18)$.

D. $(-20;-11)$.

Lời giải



Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(2;2;-2)$ và bán kính bằng 3.

Gọi x ($0 < x < 3$) là bán kính đáy của (T) , khi đó (T) có chiều cao bằng $h = 2\sqrt{9-x^2}$, do đó thể tích của (T) bằng

$$V = 2\pi x^2 \sqrt{9-x^2} = 4\pi \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (9-x^2)} \leq 4\pi \sqrt{\left(\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + (9-x^2)}{3}\right)^3} = 12\pi\sqrt{3}.$$

(T) có thể tích lớn nhất bằng $V_{\max} = 12\pi\sqrt{3}$ khi $x = \sqrt{6}$.

Khi đó gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (T) , (P) có phương trình tổng quát dạng $x + 2y - 2z + d = 0$. Khoảng cách từ tâm $I(2;2;-2)$ đến (P) bằng $\sqrt{3}$ nên

$$\frac{|2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) + d|}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3\sqrt{3} - 10 \\ d = -3\sqrt{3} - 10 \end{cases}.$$

Vậy $b + c + d_1 + d_2 = 2 - 2 + 3\sqrt{3} - 10 - 3\sqrt{3} - 10 = -20$. Suy ra **Chọn C**.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua O tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt (P) tại A sao cho OA nhỏ nhất có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x}{10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$.

B. $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$.

C. $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{-7} = \frac{z}{2}$.

D. $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-2}$.

Lời giải

Ta thấy $O(0;0;0)$ thuộc mặt cầu (S) .

Mặt phẳng (Q) đi qua O và tiếp xúc mặt cầu (S) có phương trình $(Q): x + 2y - 2z = 0$.

Khi đó $\Delta \subset (Q)$.

Gọi $d = (P) \cap (Q)$ và H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d .

Vì A là giao điểm của Δ và (P) , $\Delta \subset (Q)$, $d = (P) \cap (Q)$

$\Rightarrow A \in d$. Do đó $OA \geq OH$.

$\Rightarrow OA_{\min} = OH$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv A$

Khi đó đường thẳng Δ đi qua O và H , tức là Δ đi qua điểm O , cắt và vuông góc với d . Mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$ và $\vec{u}_2 = (1; 2; -2)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 2; 3)$

Mặt khác $\Delta \subset (Q)$, đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(Q)}] = (-10; 7; 2)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$. Suy ra **Chọn B**.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(0; 2; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(0; 0; \frac{5}{2}\right)$. Xét khối nón (N) có đỉnh B , đường tròn đáy là giao của mặt phẳng (α) qua A với mặt cầu $S\left(O; \frac{5}{2}\right)$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B . Khi diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (P) có giá trị lớn nhất thì mặt phẳng (P) đi qua điểm nào sau đây?

A. $(0; 1; 3)$

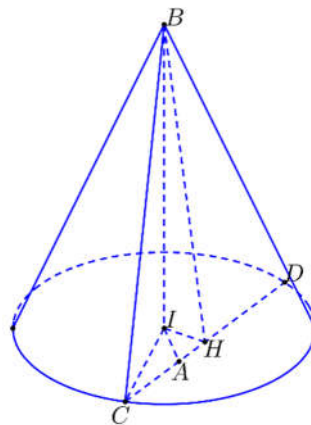
B. $(0; 1; 3)$.

C. $\left(0; \frac{-1}{2}; 3\right)$.

D. $\left(0; 3; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C



Dễ thấy mp (α) nhận $\vec{OB}$ làm véc tơ pháp tuyến nên phương trình (α) là $z - \frac{1}{2} = 0$.

Khi đó chiều cao của khối nón $h = d\left(B; (\alpha)\right) = 2$, tâm đáy là $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ bán kính đường

tròn đáy $r = \sqrt{R^2 - d^2\left(O; (\alpha)\right)} = \sqrt{6}$.

Gọi thiết diện là tam giác BCD , H là trung điểm CD . Đặt $IH = x, 0 \leq x \leq IA = 2$

Khi đó $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 4} \cdot 2\sqrt{6 - x^2} = \sqrt{-x^4 + 2x^2 + 24}$

Ta có $S_{\triangle SAB}^2 = -x^4 + 2x^2 + 24 = f(x)$ dễ thấy $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 25$ do đó $\text{Max}_{\triangle BCD} S = 5$ đạt được

khi $IH = 1$.

Khi đó $d\left(I; (P)\right) = \frac{BI \cdot IH}{\sqrt{BI^2 + IH^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Gọi phương trình của (P) là $ax+by+cz+d=0$ do (P) qua $A\left(0;2;\frac{1}{2}\right), B\left(0;0;\frac{5}{2}\right)$ nên

$$\begin{cases} 2b+\frac{c}{2}+d=0 \\ \frac{5c}{2}+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ d=-\frac{5c}{2} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } d(I;(P)) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}c+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|-2c|}{\sqrt{a^2+2c^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}c.$$

Từ đó ta tìm được 2 phương trình mặt phẳng là $\pm\sqrt{3}x+y+z-\frac{5}{2}=0$. Do đó $\left(0;-\frac{1}{2};3\right)$ thuộc (P) .

Câu 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$, $(S_2):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) . Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) . Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T=a+b+c$.

A. $T=1$.

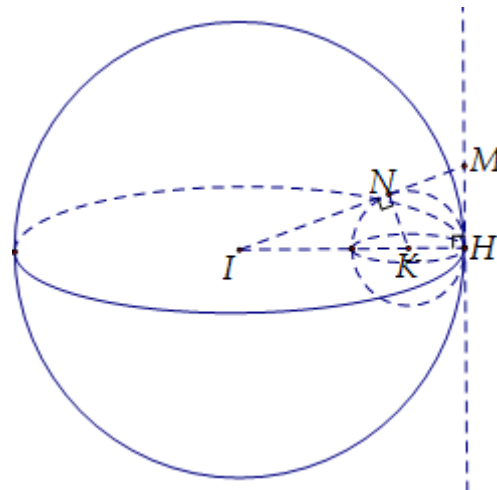
B. $T=-1$.

C. $T=\frac{7}{3}$.

D. $T=-\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2)$ bán kính $R_1=4$ và mặt cầu (S_2) có tâm $K(1;-1;0)$ bán kính $R_2=1$.

Có $IK=3$, suy ra $IK=R_1-R_2$ nên hai mặt cầu (S_1) và (S_2) tiếp xúc trong tại H .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IK} = (1;-2;-2) \Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right).$$

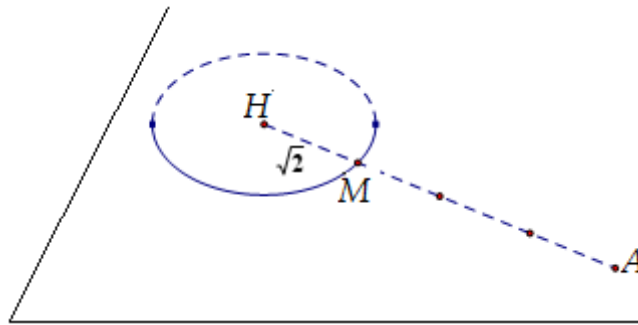
Vì (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên (P) qua H và nhận vectơ $\overrightarrow{IK}=(1;-2;-2)$ là một vectơ pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $x-2y-2z-6=0$.

Giả sử điểm M thay đổi trên (P) thỏa mãn đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) , tiếp điểm tương ứng là N .

Ta có $\triangle IKN$ và $\triangle IMH$ đồng dạng (vì $\widehat{IHM} = \widehat{INK} = 90^\circ$, $\widehat{MIH}$ chung) suy ra $\frac{IN}{IH} = \frac{NK}{HM}$ (*).

Với $NK = R_2 = 1; IH = 4; IK = 3; IN = \sqrt{IK^2 - NK^2} = 2\sqrt{2}$ nên (*) $\Leftrightarrow$

$$\frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{HM} \Leftrightarrow HM = \sqrt{2}.$$



Mặt khác ta lại có $A \in (P)$ và M thay đổi thuộc đường tròn (C) tâm H bán kính $R = \sqrt{2}$ nên AM ngắn nhất bằng $HA - R = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ khi điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AH} \Rightarrow M \left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right)$$

Suy ra $a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = -\frac{5}{3} \Rightarrow T = a + b + c = -1$. **Chọn B.**

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu: $(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$ và $(S_2): (x-6)^2 + (y+7)^2 + (z-8)^2 = 27$. Hai điểm E, F lần lượt thuộc (S_1) và (S_2) , M là trung điểm của EF . Khi OM đạt giá trị nhỏ nhất thì M thuộc mặt phẳng nào sau đây?

A. $(P): x + y + z - 2 = 0$.

B. $(Q): x + y + z - 1 = 0$.

C. $(R): x + y + z - 4 = 0$.

D. $(T): x + y + z - 5 = 0$.

Lời giải

Chọn B

(S_1) có tâm $I_1(0;1;-2)$, bán kính $R_1 = \sqrt{3}$.

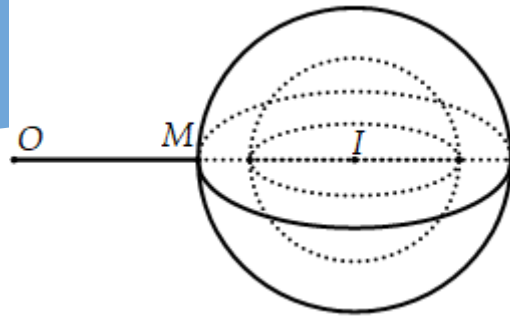
(S_2) có tâm $I_2(6;-7;8)$, bán kính $R_2 = 3\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm của $I_1I_2 \Rightarrow I(3;-3;3)$.

Ta có: $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{IF}|}{2} \leq IM \leq \frac{|\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}|}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \leq IM \leq 2\sqrt{3}$.

Gọi (S_3) là mặt cầu tâm I , bán kính $R_3 = \sqrt{3}$.

(S_4) là mặt cầu tâm I , bán kính $R_4 = 2\sqrt{3}$.



Ta có: $OI = 3\sqrt{3}$.

$OM_{\min} = OI - R_4 = \sqrt{3}$ khi và chỉ khi M là giao của đoạn thẳng OI và (S_4) .

Suy ra $M(1; -1; 1)$. Do đó M thuộc mặt phẳng (Q) .

Thử sức trước kỳ thi tốt nghiệp THPT

ĐỀ THI THAM KHẢO TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021

*Kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2021 đã đến gần, để tạo điều kiện cho quý thầy cô cùng các em có tài liệu ôn tập trong thời gian gấp rút này Nhóm Giáo viên Toán Việt Nam xin gửi tới quý thầy cô và các em **Đề thi thử tốt nghiệp THPT Năm 2021***

Hวัง Đề thi sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm môn Toán.



ĐỀ THI THỬ TN THPT NĂM 2021

Bài thi môn: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 06 trang

Câu 1: Có bao nhiêu cách chọn một tổ trưởng và một tổ phó từ nhóm học tập gồm 5 học sinh?
A. 20. **B.** 10. **C.** 25. **D.** 7.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$. Giá trị của u_{15} bằng
A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

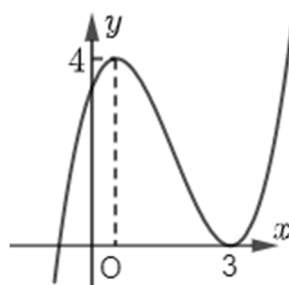
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-1		$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.



- A.** $0 < m < 5$. **B.** $1 < m < 5$. **C.** $-1 < m < 4$. **D.** $0 < m < 4$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3		0		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-

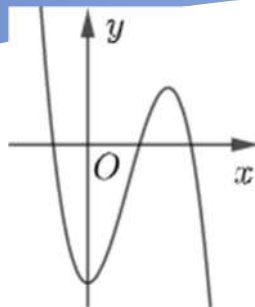
Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6: Tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

- A.** $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$. **B.** $x = 1$, $y = -2$. **C.** $x = -1$, $y = 2$. **D.** $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$.

Câu 7: Đồ thị của hàm số nào có dạng như đường cong trong hình dưới đây?



A. $y = -x^4 + 4x^2$. B. $y = x^4 - 4x^2 - 3$. C. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 3$.

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị của hàm số $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 9: Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 \left(\frac{25}{a} \right)$ bằng

A. $2 - \log_5 a$. B. $2 \log_5 a$. C. $\frac{2}{\log_5 a}$. D. $2 + \log_5 a$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = 2021^x$ là

A. $y' = 2021^x \ln 2021$. B. $y' = 2021^x$. C. $y' = \frac{2021^x}{\ln 2021}$. D. $y' = x \cdot 2021^{x-1}$.

Câu 11: Với a là số thực dương tùy ý, $a \cdot \sqrt[3]{a^2}$ bằng

A. a^7 . B. $a^{\frac{5}{3}}$. C. $a^{\frac{3}{5}}$. D. $a^{\frac{1}{7}}$.

Câu 12: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{4} \right)^{3x-4} = \frac{1}{16}$ là

A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

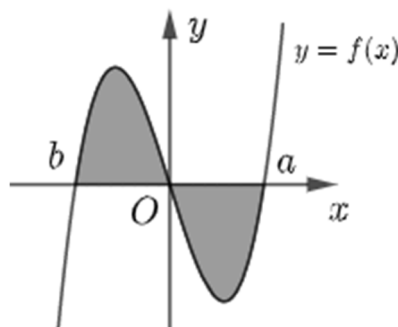
Câu 13: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x} = 8$ bằng

A. 2. B. 0. C. -3. D. 3.

Câu 14: Hàm số $F(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 3x + 1$. B. $f(x) = 3x^2 - 4x$.
C. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 3x$. D. $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Diện tích S của hình phẳng (tô đậm) trong hình là



A. $S = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$. B. $S = \int_a^0 f(x)dx - \int_b^0 f(x)dx$.

C. $S = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx.$

D. $S = \int_a^0 f(x)dx + \int_b^0 f(x)dx.$

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$ là

A. $S = [7; +\infty).$

B. $S = (3; 7].$

C. $S = (-\infty; 7].$

D. $S = [3; 7].$

Câu 17: Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = z + i\bar{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $N(2; 3).$

B. $M(3; 3).$

C. $Q(3; 2).$

D. $P(-3; 3).$

Câu 18: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm đối xứng với điểm biểu diễn số phức $z = -2i + 4$ qua trục Oy có tọa độ là

A. $(4; 2).$

B. $(-4; 2).$

C. $(4; -2).$

D. $(-4; -2).$

Câu 19: Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, biết diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng 8 và chiều cao của khối chóp bằng 3. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. 8.

B. 4.

C. 24.

D. 6.

Câu 20: Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước 3, 4, 12 có độ dài là

A. 13.

B. 30.

C. 15.

D. 6.

Câu 21: Cho khối nón có chiều cao $h = 2\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh $l = 4a$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{3}.$

B. $V = \frac{28\sqrt{3}\pi a^3}{3}.$

C. $V = 8\sqrt{3}\pi a^3.$

D. $V = \frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}.$

Câu 22: Hình trụ có đường cao $h = 2cm$ và đường kính đáy là $10cm$. Diện tích toàn phần của hình trụ đó bằng

A. $240\pi cm^2.$

B. $120\pi cm^2.$

C. $70\pi cm^2.$

D. $140\pi cm^2.$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(4; -1; 2)$ đến mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$ bằng

A. $\frac{7}{3}.$

B. 11.

C. 7.

D. $\frac{11}{3}.$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 8z + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(0; 1; -4), R = 2.$

B. $I(0; 1; -4), R = 4.$

C. $I(0; -1; 4), R = 2.$

D. $I(0; -1; 4), R = 4.$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -1; 3)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2; 0; 0).$

B. $(2; -1; 0).$

C. $(0; 0; 3).$

D. $(0; -1; 0).$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $M(2; 0; -3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - 3t \end{cases}.$

B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}.$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}.$

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 2 - 3t \end{cases}.$

Câu 27: Hàm số $y = (x-1)^{-\frac{3}{2}}$ có tập xác định là

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = (1; +\infty).$

C. $D = [1; +\infty).$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

Câu 28: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{x+1}{x+3}.$

B. $y = x^4 + 3.$

C. $y = x^3 + x.$

D. $y = \frac{1}{x^2 + 1}.$

Câu 29: Nếu $\int_1^4 (2x - 3f(x))dx = 9$ thì $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(2x)dx$ bằng

- A. 1. B. 4. C. -1. D. -4.

Câu 30: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$. Khi đó $2M - m$ có giá trị bằng

- A. 0. B. 18. C. 10. D. 11.

Câu 31: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(25 - x^2) \leq 2$ là

- A. $(-5; -4] \cup [4; 5)$. B. $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. C. $(4; 5)$. D. $[4; +\infty)$.

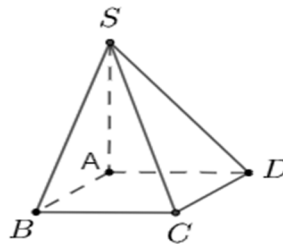
Câu 32: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x + \sin x$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

- A. $F(x) = x^2 - \cos x + 20$. B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x$.
C. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + 2$. D. $F(x) = x^2 + \cos x + 20$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 2)$ và $B(6; 5; -4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $2x + 2y - 3z - 17 = 0$. B. $4x + 3y - z - 26 = 0$.
C. $2x + 2y - 3z + 17 = 0$. D. $2x + 2y + 3z - 11 = 0$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SB = a\sqrt{7}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; 0; 2)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 4)$ có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \sqrt{6}$. B. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \sqrt{6}$.
C. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 6$. D. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Cạnh bên SC tạo với đáy góc 60° . Trên cạnh SB lấy điểm K sao cho $KS = 2KB$. Khoảng cách từ K đến (SCD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$. B. $\frac{2a\sqrt{42}}{21}$. C. $\frac{a\sqrt{42}}{21}$. D. $\frac{2a\sqrt{15}}{15}$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 2 = 0$ và hai điểm $A(2, -4, 0), B(4, 2, -2)$. Tập hợp các điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho góc giữa MA và MB bằng 90° là một đường tròn có diện tích bằng

- A. 5π . B. 17π . C. 38π . D. 11π .

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; -1)$ và đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua A , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

A. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

Câu 39: Một hộp đựng 12 viên bi được đánh số từ 1 đến 12. Lấy ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp, xác suất để tổng 6 số ghi trên 6 viên bi là một số lẻ bằng

A. $\frac{118}{231}$.

B. $\frac{109}{231}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{8}{231}$.

Câu 40: Hàm số $f(x) = \sqrt{2 - \log_m(nx) - \log_m^2(nx)}$ có tập xác định là một đoạn có độ dài bằng 2 (với $m > 1, n > 0$). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2n + \frac{9}{m^2} + m$ bằng

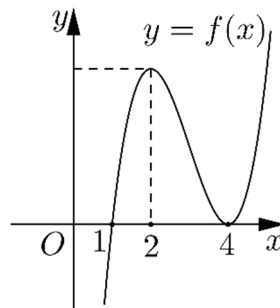
A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Biết $\int_1^2 |f'(x^2)| x dx = 12$. Giá trị của $f(2)$ bằng

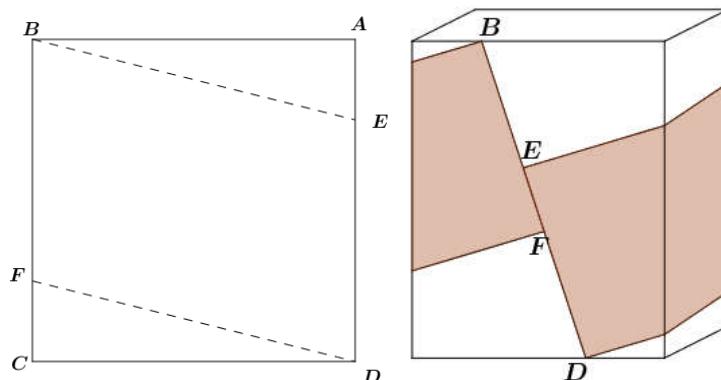
A. 24.

B. 4.

C. 6.

D. 12.

Câu 42: Để trang trí mặt xung quanh một hình hộp chữ nhật cho Lễ hội mùa hè. Người ta cắt một tấm lưới sắt có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4 m bởi hai đường BE, DF song song nhau sao cho $AE = 1$ m. Biết khi gắn tấm lưới $BFDE$ lên mặt xung quanh hình lăng trụ thì tấm lưới tiếp xúc với mặt của hình lăng trụ và hai mép lưới BF, DE khép kín như hình, với B, D nằm trên hai cạnh đáy và đo được $EF = 1$ m. Dự kiến chi phí trang trí mặt xung quanh là $200000/m^2$ cho phần lưới và $100000/m^2$ cho phần còn lại. Tổng chi phí trang trí bằng



A. 2200000.

B. 2900000.

C. 3200000.

D. 3600000.

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1-i}{z}$ là số thuần ảo và $|z - 2 - i| = m$, với $m \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để có đúng một số phức z thỏa mãn bài toán?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm H , $SH \perp (ABCD)$. Hai đường chéo $AC = 2a, BD = a\sqrt{2}$; M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB ; $P \in CD$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MNP) bằng a , thể tích khối đa diện $AMNP$ bằng

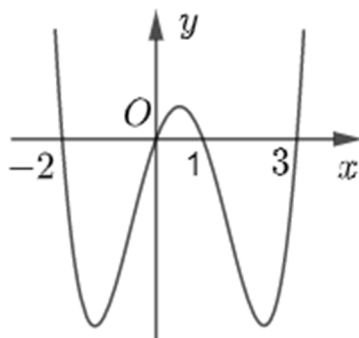
A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + mx + n$ ($a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(x) - (1024a + 256b + 64c + 16d + 4m + n)|$ là

A. 4.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Câu 46: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $4a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 45° . Gọi M là trung điểm AD , H, K lần lượt là hai điểm thay đổi thuộc miền trong các tam giác SAB và SCD sao cho HK song song với $(ABCD)$, $SHOK$ là tứ giác nội tiếp. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $M.SHOK$.

A. $4a^3$.

B. $\frac{4}{3}a^3$.

C. $\frac{16\sqrt{6}}{9}a^3$.

D. $\frac{2}{3}a^3$.

Câu 47: Cho hàm f nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3[f(x)]^2 = 2 \int_0^x [(f(t))^3 + (f'(t))^3] dt + 2x$ với mọi số thực x . Tích phân $\int_0^1 2021(f(x))^2 x dx$ nhận giá trị trong khoảng nào sau đây?

A. (205; 206).

B. (199; 200).

C. (242; 243).

D. (201; 202).

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(a; b; 1)$, $B(b; 1; a)$, $C(1; a; b)$ (với $a, b \geq 0$), biết mặt phẳng (ABC) cùng với các mặt phẳng tọa độ tạo thành tứ diện có thể tích bằng 36. Tìm bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $A, B, C, D(1; 2; 3)$.

A. $\sqrt{6}$.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 49: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $(z_1 + 2 - i)(\overline{z_1} + 1 + 2i)$ là một số thực và $|z_2 - 1 - 3i| = |z_2 - 1 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 5 - 2i| + |z_2 - 5 - 2i|$ bằng

A. 9.

B. $6 + 3\sqrt{2}$.

C. 10.

D. $1 + \sqrt{85}$.

Câu 50: Cho hàm số $y = \log_2 x$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = 2^x$ có đồ thị là (C_2) . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thay đổi trên (C_1) và (C_2) . Giá trị nhỏ nhất của MN thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

-----Hết-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	B	B	C	C	D	C	A	A	B	B	C	B	D	B	B	D	B	A	D	C	D	D	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	B	C	A	D	A	C	A	C	C	B	A	C	A	C	D	C	B	A	B	B	C	C	C	C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1:** Có bao nhiêu cách chọn một tổ trưởng và một tổ phó từ nhóm học tập gồm 5 học sinh?
A. 20. **B. 10.** **C. 25.** **D. 7.**

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn một tổ trưởng và một tổ phó từ nhóm học tập gồm 5 học sinh là $A_5^2 = 20$.

- Câu 2:** Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$. Giá trị của u_{15} bằng
A. 27. **B. 31.** **C. 35.** **D. 29.**

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$ suy ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1 + d = 3 \\ u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$.

Vậy $u_{15} = u_1 + 14d = 29$.

- Câu 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$			

Mệnh đề nào sau đây đúng?

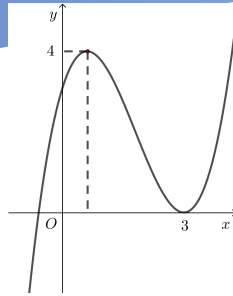
- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$, suy ra hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

- Câu 4:** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.



A. $0 < m < 5$.

B. $1 < m < 5$.

C. $-1 < m < 4$.

D. $0 < m < 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) + 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m - 1$.

Để phương trình $f(x) = m - 1$ có 3 nghiệm phân biệt thì $0 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 6: Tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

A. $x = \frac{1}{2}, y = -1$.

B. $x = 1, y = -2$.

C. $x = -1, y = 2$.

D. $x = -1, y = \frac{1}{2}$.

Lời giải

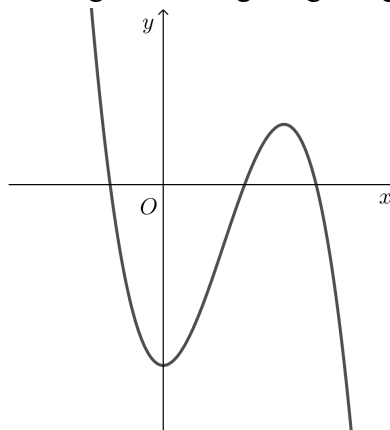
Chọn C

Ta có :

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Vì $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 7: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = -x^4 + 4x^2$. B. $y = x^4 - 4x^2 - 3$. C. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 3$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình dạng đồ thị, ta thấy đây là dạng đồ thị của hàm số bậc 3, hệ số $a < 0$.

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị của hàm số $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 1$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ Ta được đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt.}$$

Câu 9: Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 \left(\frac{25}{a} \right)$ bằng

A. $2 - \log_5 a$. B. $2 \log_5 a$. C. $\frac{2}{\log_5 a}$. D. $2 + \log_5 a$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_5 \left(\frac{25}{a} \right) = \log_5 25 - \log_5 a = 2 - \log_5 a.$$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = 2021^x$ là

A. $y' = 2021^x \ln 2021$. B. $y' = 2021^x$. C. $y' = \frac{2021^x}{\ln 2021}$. D. $y' = x \cdot 2021^{x-1}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y = 2021^x \Rightarrow y' = 2021^x \cdot \ln 2021.$$

Câu 11: Với a là số thực dương tùy ý, $a \cdot \sqrt[3]{a^2}$ bằng

A. a^7 . B. $a^{\frac{5}{3}}$. C. $a^{\frac{3}{5}}$. D. $a^{\frac{1}{7}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } a \cdot \sqrt[3]{a^2} = a \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{1+\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}}.$$

Câu 12: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{4} \right)^{3x-4} = \frac{1}{16}$ là

A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\left(\frac{1}{4} \right)^{3x-4} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} \right)^{3x-4} = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \Leftrightarrow 3x-4 = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 13: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x} = 8$ là

A. 2.

B. 0.

C. -3.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2^{x^2-2x} = 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} = 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Nên tích các nghiệm của phương trình là -3.

Câu 14: Hàm số $F(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 3x + 1.$

B. $f(x) = 3x^2 - 4x.$

C. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 3x.$

D. $f(x) = 3x^2 - 4x + 3.$

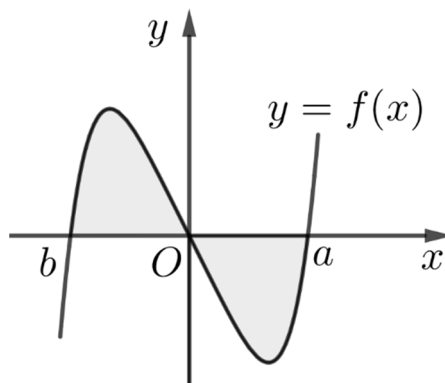
Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x).$

$$\text{Mà } [F(x)]' = (x^3 - 2x^2 + 3)' = 3x^2 - 4x \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 4x.$$

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Diện tích S của hình phẳng (tô đậm) trong hình là



A. $S = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx.$

B. $S = \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx.$

C. $S = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx.$

D. $S = \int_a^0 f(x)dx + \int_b^0 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn D

Diện tích S của hình phẳng (tô đậm) trong hình là

$$S = \int_b^0 f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_b^0 f(x)dx.$$

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$ là

A. $S = [7; +\infty).$

B. $S = (3; 7].$

C. $S = (-\infty; 7].$

D. $S = [3; 7].$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 7.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = (3; 7]$.

Câu 17: Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = z + \bar{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $N(2; 3)$.

B. $M(3; 3)$.

C. $Q(3; 2)$.

D. $P(-3; 3)$.

Lời giải

Chọn B

$w = z + \bar{z} = 3 + 3i \Rightarrow$ điểm biểu diễn là $M(3; 3)$.

Câu 18: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm đối xứng với điểm biểu diễn số phức $z = -2i + 4$ qua trục Oy có tọa độ là

A. $(4; 2)$.

B. $(-4; 2)$.

C. $(4; -2)$.

D. $(-4; -2)$.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z = -2i + 4$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là $M(4; -2)$.

Điểm đối xứng với M qua Oy là $M'(-4; -2)$.

Câu 19: Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, biết diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng 8 và chiều cao khối chóp bằng 3. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. 8.

B. 4.

C. 24.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4.$$

Câu 20: Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước 3, 4, 12 có độ dài là

A. 13.

B. 30.

C. 15.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c thì có độ dài đường chéo là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Do đó độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật đã cho là $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$.

Câu 21: Cho khối nón có chiều cao $h = 2\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh $l = 4a$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

B. $V = \frac{28\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

C. $V = 8\sqrt{3}\pi a^3$.

D. $V = \frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính đáy của khối nón $r = \sqrt{(4a)^2 - (2\sqrt{3}a)^2} = 2a$.

Thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (2a)^2 2a\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 22: Hình trụ có đường cao $h = 2\text{cm}$ và đường kính đáy là 10cm . Diện tích toàn phần của hình trụ đó bằng

A. $240\pi\text{cm}^2$.

B. $120\pi\text{cm}^2$.

C. $70\pi\text{cm}^2$.

D. $140\pi\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn C

Đường kính đáy hình trụ là $10\text{cm} \Rightarrow$ bán kính đáy là $r = 5\text{cm}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r(r + h) = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 2) = 70\pi (\text{cm}^2)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(4; -1; 2)$ đến mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$ bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. 11.

C. 7.

D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } d(M, (P)) = \frac{|4 - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{11}{3}.$$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 8z + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(0; 1; -4), R = 2$.

B. $I(0; 1; -4), R = 4$.

C. $I(0; -1; 4), R = 2$.

D. $I(0; -1; 4), R = 4$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} -2a = 0 \\ -2b = 2 \\ -2c = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow I(0; -1; 4), R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 4.$$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -1; 3)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2; 0; 0)$.

B. $(2; -1; 0)$.

C. $(0; 0; 3)$.

D. $(0; -1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(2; 0; -3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đường thẳng cần tìm có } \begin{cases} M(2; 0; -3) \in (d) \\ \forall \vec{u}(1; -3; 2) \end{cases} \Rightarrow P_{tts}(d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}.$$

Câu 27: Hàm số $y = (x - 1)^{-\frac{3}{2}}$ có tập xác định là

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = (1; +\infty)$.

C. $D = [1; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = (1; +\infty)$.

Câu 28: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{x+1}{x+3}$.

B. $y = x^4 + 3$.

C. $y = x^3 + x$.

D. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Lời giải

Chọn C

Xét đáp án C.

Hàm số đã cho có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y = x^3 + x \Rightarrow y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 29: Nếu $\int_1^4 (2x - 3f(x)) dx = 9$ thì $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(2x) dx$ bằng

A. 1.

B. 4.

C. -1.

D. -4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_1^4 (2x - 3f(x)) dx = 9 \Leftrightarrow x^2 \Big|_1^4 - 3 \int_1^4 f(x) dx = 9 \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = 2$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

Đổi cận:

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1$

$x = 2 \Rightarrow t = 4$

Suy ra: $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 f(t) dt = 1$.

Câu 30: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$. Khi đó $2M - m$ có giá trị bằng

A. 0.

B. 18.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Do $x \in [0; 3]$ nên $x = 2$.

Ta có: $f(0)=1, f(2)=-9, f(3)=-\frac{7}{2}$.

Do đó $M=f(0)=1, m=f(2)=-9$.

Vậy $2M-m=2+9=11$.

Câu 31: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(25-x^2) \leq 2$ là

- A.** $(-5; -4] \cup [4; 5)$. **B.** $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. **C.** $(4; 5)$. **D.** $[4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_3(25-x^2) \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 25-x^2 > 0 \\ 25-x^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 25 \\ x^2 \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x \leq -4 \\ 4 \leq x < 5 \end{cases}.$$

Do đó tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-5; -4] \cup [4; 5)$.

Câu 32: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x+\sin x$ thỏa mãn $F(0)=1$.

- A.** $F(x)=x^2-\cos x+20$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\cos x$.
C. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\cos x+2$. **D.** $F(x)=x^2+\cos x+20$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } F(x)=\int (x+\sin x)dx=\int xdx+\int \sin xdx=\frac{x^2}{2}-\cos x+C.$$

$$\text{Mặt khác ta có } F(0)=1 \Leftrightarrow \frac{0^2}{2}-\cos 0+C=1 \Leftrightarrow C=2.$$

$$\text{Vậy } F(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x+2.$$

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;2)$ và $B(6;5;-4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A.** $2x+2y-3z-17=0$. **B.** $4x+3y-z-26=0$.
C. $2x+2y-3z+17=0$. **D.** $2x+2y+3z-11=0$.

Lời giải

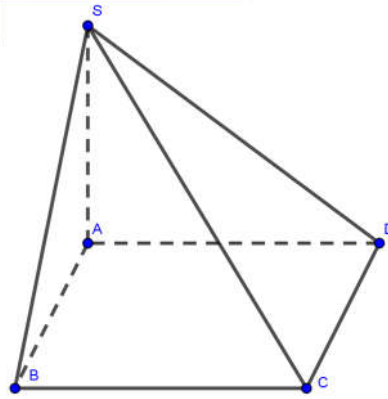
Chọn A

Ta có mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua điểm $I(4;3;-1)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB và nhận $\overrightarrow{AB}=(4;4;-6)=2(2;2;-3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $2x+2y-3z=17$

$$\Leftrightarrow 2x+2y-3z-17=0.$$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SB=a\sqrt{7}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\widehat{(SC; (ABCD))} = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{6}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A ta có: $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;0;2)$ và đi qua điểm $A(2;1;4)$ có phương trình là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \sqrt{6}$.

B. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \sqrt{6}$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 6$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu tâm $I(1;0;2)$ và đi qua điểm $A(2;1;4)$ nên bán kính mặt cầu $R = IA$.

$\overrightarrow{IA} = (1;1;2) \Rightarrow IA = \sqrt{6}$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;2)$ và đi qua A là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 6$.

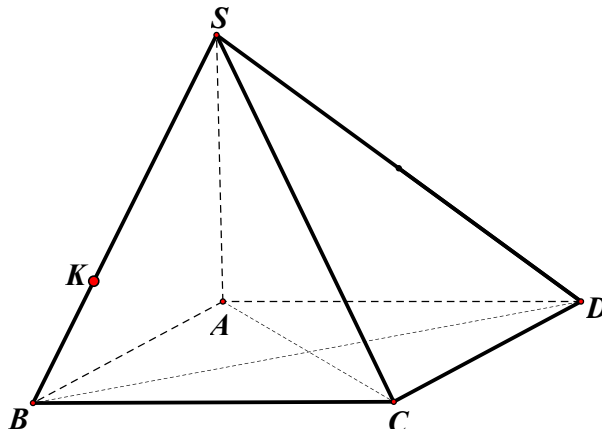
Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Cạnh bên SC tạo với đáy góc 60° . Trên cạnh SB lấy điểm K sao cho $KS = 2KB$. Khoảng cách từ K đến (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

B. $\frac{2a\sqrt{42}}{21}$.

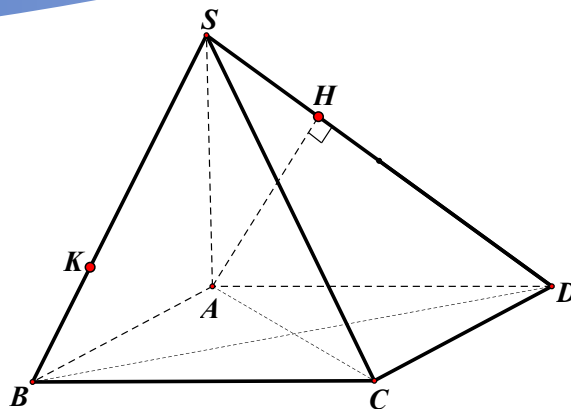
C. $\frac{a\sqrt{42}}{21}$.

D. $\frac{2a\sqrt{15}}{15}$.



Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH \perp SD$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Góc giữa SC và mặt phẳng đáy là $\widehat{SCA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$.

$$\frac{d(K, (SCD))}{d(B, (SCD))} = \frac{SK}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(K, (SCD)) = \frac{2}{3} d(B, (SCD)) = \frac{2}{3} d(A, (SCD)) = \frac{2}{3} AH.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{42}}{7} \Rightarrow d(K, (SCD)) = \frac{2a\sqrt{42}}{7}.$$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 2 = 0$ và hai điểm $A(2, -4, 0), B(4, 2, -2)$. Tập hợp các điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho góc giữa MA và MB bằng 90° là một đường tròn có diện tích bằng

A. 5π .

B. 17π .

C. 38π .

D. 11π .

Lời giải

Chọn A

Góc giữa MA và MB bằng 90° khi và chỉ khi $\widehat{AMB} = 90^\circ$, do đó tập hợp điểm M là mặt cầu tâm $I(3, -1, -1)$ là trung điểm của AB và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \sqrt{11}$.

Vì $M \in (P)$ và $M \in (S)$ nên M nằm trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S) .

$$\text{Ta có: } d = d(I, (P)) = \frac{|3 - 1 + 2 + 2|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Bán kính đường tròn giao tuyến là } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{11 - 6} = \sqrt{5}$$

$$\text{Diện tích đường tròn cần tìm là: } S = \pi r^2 = 5\pi.$$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; -1)$ và đường thẳng Δ có phương trình:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}. \text{ Viết phương trình tham số của đường thẳng } d \text{ đi qua } A, \text{ cắt và vuông góc}$$

với đường thẳng Δ .

A. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Gọi $B = d \cap \Delta \Rightarrow B(1 + 2t; -2 - t; 3 + t)$. Ta có:

+ Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

+ $\vec{AB} = (2t-1; -4-t; 4+t)$.

Do đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ nên:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2t-1) + (-1) \cdot (-4-t) + 1 \cdot (4+t) = 0 \Leftrightarrow 6t+6=0 \Leftrightarrow t=-1.$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (-3; -3; 3).$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \\ z = -1-t \end{cases}$$

Câu 39: Một hộp đựng 12 viên bi được đánh số từ 1 đến 12. Lấy ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp, xác suất để tổng 6 số ghi trên 6 viên bi là một số lẻ bằng

A. $\frac{118}{231}$.

B. $\frac{109}{231}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{8}{231}$.

Lời giải

Chọn A

Trong hộp có 6 bi ghi số chẵn và 6 bi ghi số lẻ.

Ta có $n_{(\Omega)} = C_{12}^6 = 924$.

Gọi A là biến cố “Tổng 6 ghi trên 6 viên bi được chọn là một số lẻ”.

Để chọn được 6 viên bi mà tổng 6 số ghi trên 6 viên bi là một số lẻ thì phải có lẻ số lượng viên bi ghi số lẻ.

TH1: 1 viên bi ghi số lẻ, 5 viên bi ghi số chẵn có $C_6^1 \cdot C_6^5 = 36$ (cách chọn).

TH2: 3 viên bi ghi số lẻ, 3 viên bi ghi số chẵn có $C_6^3 \cdot C_6^3 = 400$ (cách chọn).

TH3: 5 viên bi ghi số lẻ, 1 viên bi ghi số chẵn có $C_6^5 \cdot C_6^1 = 36$ (cách chọn).

$$\Rightarrow n_{(A)} = 36 + 400 + 36 = 472.$$

$$\text{Vậy xác suất cần tính là } P_{(A)} = \frac{n_{(A)}}{n_{(\Omega)}} = \frac{472}{924} = \frac{118}{231}.$$

Câu 40: Hàm số $f(x) = \sqrt{2 - \log_m(nx) - \log_m^2(nx)}$ có tập xác định là một đoạn có độ dài bằng 2 (với

$m > 1, n > 0$). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2n + \frac{9}{m^2} + m$ bằng

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi
$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 - \log_m(nx) - \log_m^2(nx) \geq 0 \end{cases}$$

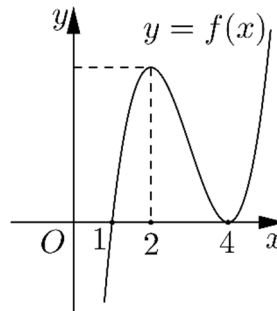
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq \log_m(nx) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{m^2 \cdot n} \leq x \leq \frac{m}{n}$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \frac{m}{n} - \frac{1}{m^2 \cdot n} = 2 \Leftrightarrow m - \frac{1}{m^2} = 2n$$

$$\text{Ta có: } P = 2n + \frac{9}{m^2} + m = m + m + \frac{8}{m^2} \geq 3\sqrt{m \cdot m \cdot \frac{8}{m^2}} = 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 2$ và $n = \frac{7}{8}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Biết $\int_1^2 |f'(x^2)| x dx = 12$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 24.

B. 4.

C. 6.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

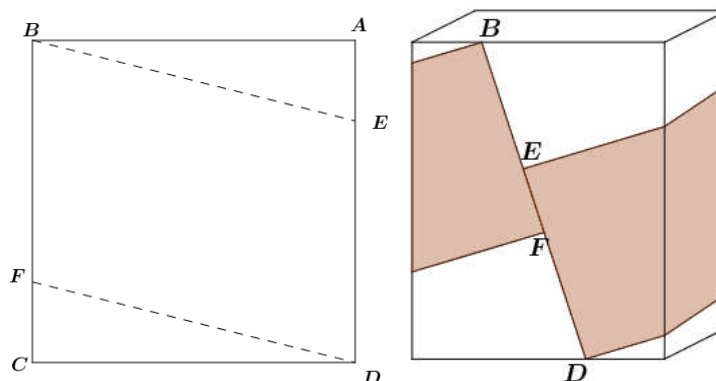
Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$, đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó: $\int_1^4 |f'(t)| \frac{dt}{2} = 12 \Rightarrow \int_1^4 |f'(x)| dx = 24$.

Do hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.

Suy ra: $24 = \int_1^2 f'(x) dx - \int_2^4 f'(x) dx \Leftrightarrow 24 = 2f(2) \Leftrightarrow f(2) = 12$.

Câu 42: Để trang trí mặt xung quanh một hình hộp chữ nhật cho Lễ hội mùa hè. Người ta cắt một tấm lưới sắt có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $4 m$ bởi hai đường BE, DF song song nhau sao cho $AE = 1 m$. Biết khi gắn tấm lưới $BFDE$ lên mặt xung quanh hình lăng trụ thì tấm lưới tiếp xúc với mặt của hình lăng trụ và hai mép lưới BF, DE khép kín như hình, với B, D nằm trên hai cạnh đáy và đo được $EF = 1 m$. Dự kiến chi phí trang trí mặt xung quanh là $200000 / m^2$ cho phần lưới và $100000 / m^2$ cho phần còn lại. Tổng chi phí trang trí bằng:



A. 2200000.

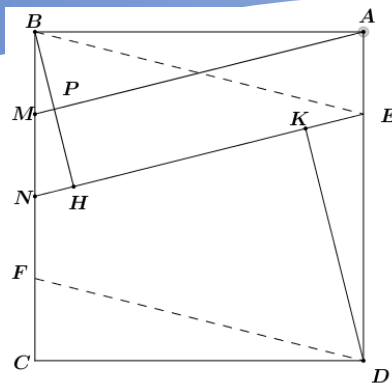
B. 2900000.

C. 3200000.

D. 3600000

Lời giải

Chọn C



Vì $EF = 1$ nên $E \equiv N$ với N trung điểm BC

Vậy chu vi hình chữ nhật đáy là: $EN = EB = \sqrt{AB^2 + EA^2} = \sqrt{17}$

Dựng $BH \perp NE; DK \perp NE$

Chiều cao hình lăng trụ $h = BH + DK = 5BP = \frac{20}{\sqrt{17}}$

Tổng chi phí trang trí:

$$T = (S_{xq} - S_{BEDF}) \cdot 100000 + S_{BEDF} \cdot 200000 = (S_{xq} + S_{BEDF}) \cdot 100000 \\ = (20 + 12) \cdot 100000 = 3200000$$

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1-i}{z}$ là số thuần ảo và $|z - 2 - i| = m$, với $m \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để có đúng một số phức z thỏa mãn bài toán?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Phương pháp hình học

• Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; z \neq 0$) $\Rightarrow$

$$\frac{1-i}{z} = \frac{1-i}{a+bi} = \frac{(1-i)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(a-b) - (a+b)i}{a^2+b^2} = \frac{a-b}{a^2+b^2} - \frac{(a+b)}{a^2+b^2}i$$

• $\frac{1-i}{z}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \frac{a-b}{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b$. Khi đó $M(z)$ thuộc đường thẳng $d: y = x$

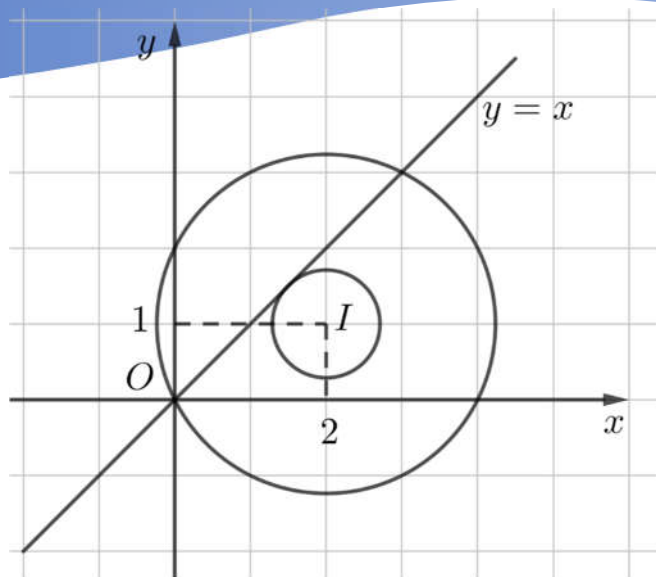
• Ta có $|z - 2 - i| = m$ với $m > 0$ là đường tròn (C) tâm $I(2;1), R = m$ (với $m = 0$ thì không thỏa đề)

Khi đó, yêu cầu bài toán có 2 trường hợp: (xem hình vẽ)

$$\text{TH1: } d \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ tại 1 điểm khác gốc tọa độ} \Leftrightarrow \begin{cases} d(I; d) = m \\ IO \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{5} \neq m \end{cases}$$

TH2: d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt, trong đó có 1 điểm là gốc tọa độ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} d(I; d) < m \\ IO = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{5} = m \end{cases}$$



Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $m = \sqrt{5}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

- Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 > 0$) $\Rightarrow$

$$\frac{1-i}{z} = \frac{1-i}{a+bi} = \frac{(1-i)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(a-b) - (a+b)i}{a^2+b^2} = \frac{a-b}{a^2+b^2} - \frac{(a+b)}{a^2+b^2}i$$

- $\frac{1-i}{z}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \frac{a-b}{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b$. Khi đó $z = a + ai$, với $a \neq 0$.

- Ta có

$$|z - 2 - i| = m \Leftrightarrow |a + ai - 2 - i| = m \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (a-1)^2} = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2a^2 - 6a + 5 - m^2 = 0, (*) \end{cases}$$

- Có đúng một số phức z thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $a \neq 0$.

Trường hợp 1: (*) có nghiệm kép khác 0 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = 9 - 2(5 - m^2) = 0 \\ -\frac{6}{2.2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (n) \\ m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (l) \end{cases}$$

Trường hợp 2: (*) có một nghiệm $a_1 = 0$ và một nghiệm $a_2 \neq 0$. Thay $a_1 = 0$ vào phương trình ta có:

$$5 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{5} \\ m = -\sqrt{5} \quad (l) \end{cases}. \text{ Ta thấy } m = \sqrt{5} \text{ thỏa mãn vì khi đó ta có } a_1 = 0; a_2 = 3 \neq 0.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $m = \sqrt{5}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm H , $SH \perp (ABCD)$. Hai đường chéo $AC = 2a$, $BD = a\sqrt{2}$; M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB ; $P \in CD$. Biết khoảng cách từ A đến mp(MNP) bằng a , thể tích khối đa diện $AMNP$ bằng?

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

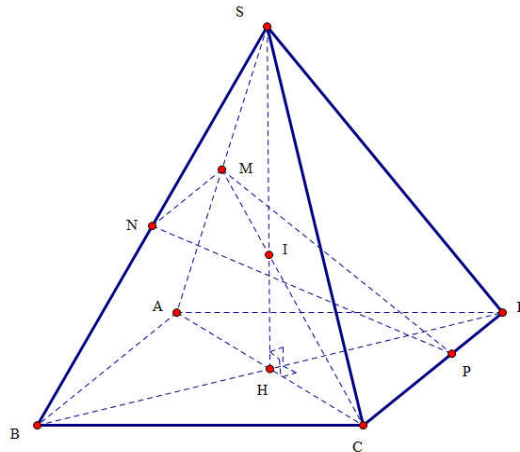
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $CM \cap SH = I \Rightarrow (MNP) \cap SH = I$. I là trọng tâm tam giác SAC .

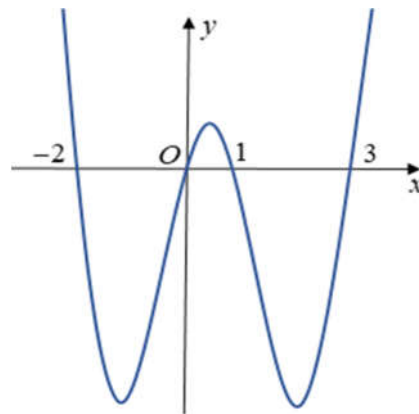
Lại có $d_{(H,(MNP))} = \frac{1}{2} d_{(A,(MNP))} = \frac{a}{2}$.

Suy ra $\frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow HI = a \Rightarrow SH = 3a$.

Vậy $V_{S.ADB} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} BD \cdot AH = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác $V_{PAMN} = V_{DAMN} = \frac{1}{4} V_{S.ABD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{8}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + mx + n$ ($a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(x) - (1024a + 256b + 64c + 16d + 4m + n)|$ là

A. 4.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x) = f(x) - (1024a + 256b + 64c + 16d + 4m + n) = f(x) - f(4) \Rightarrow h'(x) = f'(x)$

Có: $f'(x) = 5a(x+2)x(x-1)(x-3)$, $a > 0$.

Xét: $f(1) - f(-2) = \int_{-2}^1 f'(x) dx = \int_{-2}^1 5a(x+2)x(x-1)(x-3) dx = -\frac{99a}{10} < 0 \Rightarrow f(-2) > f(1)$.

Do đó $h(-2) > h(1)$.

$$f(4) - f(-2) = \int_{-2}^4 f'(x) dx = \int_{-2}^4 5a(x+2)x(x-1)(x-3) dx > 0 \Rightarrow f(4) > f(-2) \Rightarrow h(4) > h(-2)$$

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	$h(-2)$	$h(0)$	$h(1)$	$h(3)$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 46: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $4a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 45° . Gọi M là trung điểm AD , H, K lần lượt là hai điểm thay đổi thuộc miền trong tam giác SAB và SCD sao cho $HK \parallel (ABCD)$, $SHOK$ là tứ giác nội tiếp. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $M.SHOK$.

A. $4a^3$.

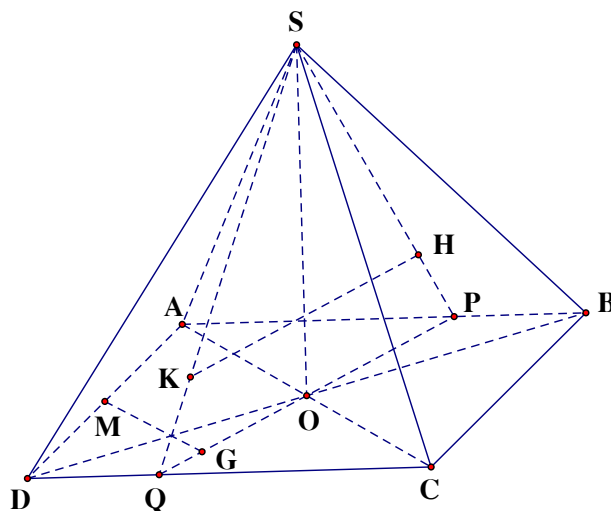
B. $\frac{4}{3}a^3$.

C. $\frac{16\sqrt{6}}{9}a^3$.

D. $\frac{2}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của SH với AB , SK với CD , kẻ $MG \perp PQ$.

Vì $HK \parallel (ABCD)$, $SO \perp (ABCD)$ nên $HK \perp SO$.

Do tính đối xứng nên SO đi qua trung điểm của HK .

Mà $SHOK$ là tứ giác nội tiếp nên SO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $SHOK$.

Ta có: $((SAD), (ABCD)) = \widehat{SMO} = 45^\circ$, $SO = 2a$.

$$V_{M.SHOK} = \frac{1}{3} \cdot MG \cdot \frac{1}{2} \cdot SO \cdot HK = \frac{1}{6} \cdot SO \cdot MG \cdot HK = \frac{a}{3} \cdot MG \cdot HK.$$

Để $V_{M.SHOK}$ lớn nhất thì $MG \cdot HK$ lớn nhất, khi và chỉ khi HK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $SHOK$ và $MG = MO$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp $M.SHOK$ là: $\frac{1}{6} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a = \frac{4}{3} a^3$.

- Câu 47:** Cho hàm f nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3[f(x)]^2 = 2 \int_0^x [(f(t))^3 + (f'(t))^3] dt + 2x$ với mọi số thực x . Tích phân $\int_0^1 2021(f(x))^2 x dx$ nhận giá trị trong khoảng nào trong các khoảng sau?
- A. (205; 206).. B. (199; 200).. C. (242; 243).. D. (201; 202).

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } 3[f(x)]^2 = 2 \int_0^x [(f(t))^3 + (f'(t))^3] dt + 2x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Từ (*), thay $x = 0$, ta nhận được $f(0) = 0$. Hơn nữa, đạo hàm hai vế (*), ta có

$$6f(x)f'(x) = 2(f(x))^3 + 2(f'(x))^3 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow [f'(x) + f(x) + 1] \left[(f'(x) - f(x))^2 + (f(x) - 1)^2 + (f'(x) - 1)^2 \right] = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$(f'(x) - f(x))^2 + (f(x) - 1)^2 + (f'(x) - 1)^2 \geq (f'(x) - 1)^2 > 0.$$

Từ đó, ta nhận được

$$f'(x) + f(x) + 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [e^x f(x)]' = -e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : f(x) = -1 + Ce^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì $f(0) = 0$ nên $C = 1$. Do đó $f(x) = -1 + e^{-x}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, là hàm duy nhất thỏa đề

$$\text{Do đó } \int_0^1 2021(f(x))^2 x dx = 2021 \int_0^1 (-1 + e^{-x})^2 x dx = 2021 \cdot \left(\frac{4}{e} - \frac{3}{4e^2} - \frac{5}{4} \right) \in (242; 243)..$$

- Câu 48:** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(a; b; 1)$, $B(b; 1; a)$, $C(1; a; b)$ (với $a, b \geq 0$), biết mặt phẳng (ABC) cùng với các mặt phẳng tọa độ tạo thành tứ diện có thể tích bằng 36. Tìm bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $A, B, C, D(1; 2; 3)$.

- A. $\sqrt{6}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + y + z = a + b + 1$

(ABC) cắt các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm

$$M(a+b+1; 0; 0), N(0; a+b+1; 0), P(0; 0; a+b+1)$$

Ta có thể tích khối tứ diện $OMNP$ là $V = \frac{(a+b+1)^3}{6} = 36$ (do $a+b \geq 0$),

suy ra $a+b+1 = 6$ suy ra $a+b = 5$ (do $a+b \geq 0$) suy ra phương trình (ABC) là

$$x + y + z - 6 = 0$$

Nhận xét: $D \in (ABC)$, mà theo giả thiết 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc mặt cầu (S) vì vậy

A, B, C, D cùng thuộc đường tròn.

Mà tam giác ABC đều suy ra tâm của đường tròn là $I(2;2;2)$, bk $R = ID = \sqrt{2}$.

Mặt cầu (S) luôn chứa đường tròn qua 4 điểm A, B, C, D nên bán kính của mặt cầu (S) nhỏ nhất bằng bán kính của đường tròn bằng $\sqrt{2}$.

- Câu 49:** Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện: $(z_1 + 2 - i)(\overline{z_1} + 1 + 2i)$ là một số thực và $|z_2 - 1 - 3i| = |z_2 - 1 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 5 - 2i| + |z_2 - 5 - 2i|$ bằng:
- A. 9. B. $6 + 3\sqrt{2}$. C. 10. D. $1 + \sqrt{85}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M, N, A lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức

$$z_1 = x + yi, z_2 = c + di, z_3 = 5 + 2i \quad (x, y, c, d \in \mathbb{R})$$

$$(z_1 + 2 - i)(\overline{z_1} + 1 + 2i) = (x + 2)(x + 1) - (y - 1)(-y + 2) + [(x + 2)(-y + 2) + (y - 1)(x + 1)]i$$

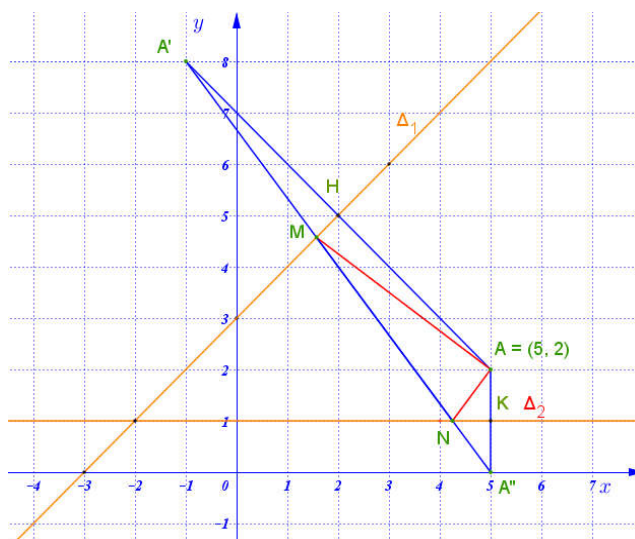
$$(z_1 + 2 - i)(\overline{z_1} + 1 + 2i) \text{ là một số thực nên } (x + 2)(-y + 2) + (y - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -xy + 2x - 2y + 4 + xy + y - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0.$$

Suy ra tập các điểm biểu diễn của z_1 là đường thẳng Δ_1 có phương trình $x - y + 3 = 0$.

$$|z_2 - 1 - 3i| = |z_2 - 1 + i| \Leftrightarrow (c - 1)^2 + (d - 3)^2 = (c - 1)^2 + (d + 1)^2 \Leftrightarrow d = 1.$$

Suy ra tập các điểm biểu diễn của z_2 là đường thẳng Δ_2 có phương trình $y - 1 = 0$.



$$\text{Ta có } P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 5 - 2i| + |z_2 - 5 - 2i| = MN + MA + NA.$$

Gọi A', A'' lần lượt là các điểm đối xứng với A qua các đường thẳng Δ_1, Δ_2 .

$$\text{Khi đó ta có } P = MN + MA + NA = MN + MA' + NA'' \geq A'A''.$$

Dấu bằng xảy ra khi các điểm A', M, N, A'' thẳng hàng hay M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng $A'A''$ với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 .

$$\text{Tính được } A'(-1; 8); A''(5; 0); A'A'' = 10.$$

Vậy GTNN của $P = 10$.

- Câu 50:** Cho hai đồ thị $(C_1): y = \log_2 x$ và $(C_2): y = 2^x$. M, N lần lượt là hai điểm thay đổi trên (C_1) và (C_2) . Giá trị nhỏ nhất của MN thuộc

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

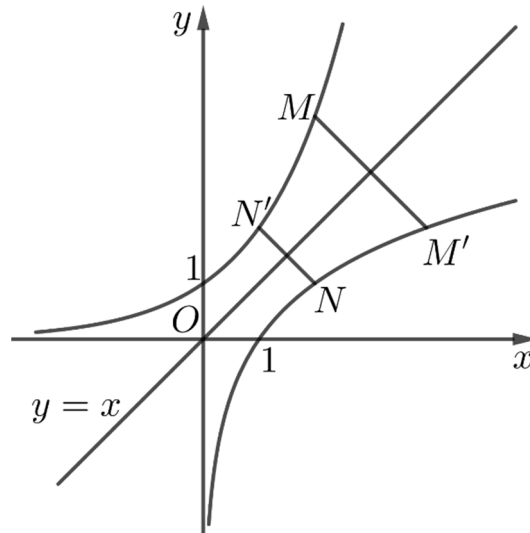
D. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(C_1), (C_2)$ đối xứng qua đường thẳng $(d): y = x$.

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua d , N' là điểm đối xứng của N qua d .



Nếu $M \neq N'$ thì $MM'NN'$ là hình thang cân suy ra $MN \geq \min\{MM', NN'\}$, do đó MN nhỏ nhất khi M, N đối xứng qua d .

Gọi Δ là tiếp tuyến của (C_2) song song với d tại điểm $I(x_0; y_0)$.

Khi M, N đối xứng nhau qua d thì $MN = 2d[N, d] \geq 2d[\Delta, d]$.

Hệ số góc đường thẳng Δ là $k_{\Delta} = 1$.

Ta có: $y = 2^x \Rightarrow y' = 2^x \ln 2$.

$$k_{\Delta} = 1 \Leftrightarrow 2^{x_0} \ln 2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -\log_2(\ln 2) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\Rightarrow (\Delta): y = x + \log_2(\ln 2) + \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\Rightarrow d[d, \Delta] = \frac{\left| \log_2(\ln 2) + \frac{1}{\ln 2} \right|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có: } MN_{\min} = \sqrt{2} \left| \log_2(\ln 2) + \frac{1}{\ln 2} \right| \approx 1.29.$$

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Áp dụng đẳng thức và bất đẳng thức modul

Face Book-Khải Nguyễn

Bài viết nói đến bản chất đại số và hình học của số phức; Mô đun của số phức, số phức liên hợp. Từ đó nhấn mạnh đến các đẳng thức, bất đẳng thức mô đun và các kỹ năng đánh giá cực trị của biểu thức chứa mô đun số phức.

Mở Đầu

Mỗi số phức, ở khía cạnh đại số, là nghiệm tương ứng duy nhất một tam thức bậc hai monic hệ số thực có biệt thức không dương. Nếu z là nghiệm của

$f(x) = x^2 + ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $\Delta = a^2 - 4b \leq 0$ thì nghiệm còn lại sẽ gọi là liên hợp của nó, kí hiệu là $\bar{z}$. Tích hai nghiệm sẽ là b và là một số không âm. Căn bậc hai số học của b gọi là mô đun của z , kí hiệu $|z|$.

Ở khía cạnh hình học, mỗi số phức sẽ là cặp tọa độ của một véc tơ, và độ lớn của véc tơ đó chính là mô đun.

Mô Đun Của Số Phức-Số Phức Liên Hợp

$z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì module của z là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; Số phức liên hợp của z là

$\bar{z} = a - bi$ Ta có: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z| = |\bar{z}|$, $|z|^2 = z \bar{z}$; $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\bar{\bar{z}} = z$;

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Một Số Kết Quả

I- Đẳng Thức Mô Đun

1. Với $m, n \in \mathbb{R}$ và $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có: $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 + mn(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$.

Chứng minh:

$$\begin{aligned} |mz_1 + nz_2|^2 &= (mz_1 + nz_2)(\overline{mz_1 + nz_2}) = (mz_1 + nz_2)(m\bar{z}_1 + n\bar{z}_2) \\ &= m^2z_1\bar{z}_1 + mnz_1\bar{z}_2 + mn\bar{z}_1z_2 + n^2z_2\bar{z}_2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 + mn(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2). \end{aligned}$$

2. Với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ và $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ ta có: $|z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2 \right|$.

Chứng minh

$$\begin{aligned} \left| \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2 \right|^2 &= \left(\frac{|z_2|}{|z_1|} \right)^2 |z_1|^2 + \left(\frac{|z_1|}{|z_2|} \right)^2 |z_2|^2 + \frac{|z_2|}{|z_1|} \frac{|z_1|}{|z_2|} (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 \\ &= |z_1 + z_2|^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2 \right|. \end{aligned}$$

3. Với $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có: $|z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right]$.

Chứng minh:

$$+ \text{Có: } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

+Áp dụng đẳng thức trên, có:

$$\begin{aligned} |z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 &= \left| \left(z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right) + \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 + \left| \left(z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right) - \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \\ &= 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

4. Với $z \in \mathbb{C}$, có: $z + \bar{z}, \frac{z - \bar{z}}{i}, z^2 + (\bar{z})^2 \in \mathbb{R}$ và $\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 = |z|^2$.

Chứng minh

+Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $\bar{z} = a - bi$, $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$ và $b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Vì $a, b \in \mathbb{R}$ nên

$$z + \bar{z}, \frac{z - \bar{z}}{i} \in \mathbb{R}. \text{ Vì } |z|^2 = a^2 + b^2 \text{ nên } |z|^2 = \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2.$$

$$+z^2 + (\bar{z})^2 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét:

$$+(z + \bar{z})^2 \leq 4|z|^2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } z \text{ là số thực.}$$

$$+\left(\frac{z - \bar{z}}{i}\right)^2 \leq 4|z|^2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } z \text{ là số thuần ảo.}$$

$$+z^2 + (\bar{z})^2 \geq -2|z|^2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } z \text{ là số thuần ảo.}$$

II-Bất Đẳng Thức Mô Đun

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 - z_2 \neq 0$. Xét số phức z thay đổi. Ta có:

$$+|z + z_1| + |-z - z_2| \geq |z_1 - z_2| \quad (1).$$

$$+||z + z_1| - |-z - z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad (2).$$

Chứng minh

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi A, B, M theo thứ tự là các điểm biểu diễn các số phức $-z_1, -z_2, z$. Khi đó, $AM = |z - (-z_1)| = |z + z_1|$, $BM = |z - (-z_2)| = |z + z_2|$ và $AB = |(-z_2) - (-z_1)| = |z_1 - z_2|$.

+Ta có $AM + BM \geq AB \Leftrightarrow |z + z_1| + |z + z_2| \geq |z_1 - z_2|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi điểm

M thuộc đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$ cùng hướng. Khi $\overrightarrow{MB} \neq \vec{0}$, điều đó có nghĩa là

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB} \\ \exists k \in \mathbb{R}, 0 \leq k < 1 : \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : z - (-z_1) = k[(-z_2) - z] \\ \exists k \in \mathbb{R}, 0 \leq k < 1 : z - (-z_1) = k[(-z_2) - (-z_1)] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : z + z_1 = k(-z - z_2) \\ \exists k \in \mathbb{R}, 0 \leq k < 1 : z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}. \text{ Khi } \overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ thì hiển nhiên } |z + z_1| + |z + z_2| = |z_1 - z_2|.$$

$$\text{Như vậy, đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z + z_2 = 0 \\ \begin{cases} z + z_2 \neq 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : z + z_1 = k(-z - z_2) \end{cases} \\ \exists k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1 : z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}.$$

$$+Ta có $|AM - BM| \leq AB \Leftrightarrow ||z - (-z_1)| - |z - (-z_2)|| \leq |(-z_2) - (-z_1)|$$$

$$\Leftrightarrow ||z + z_1| - |z + z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi điểm } M \text{ thuộc tia đối của}$$

tia AB hoặc tia đối của tia $BA \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng. Khi $\overrightarrow{MB} \neq \vec{0}$, tức là

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0: \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB} \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty): \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0: z - (-z_1) = k[(-z_2) - z] \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty): z - (-z_1) = k[(-z_2) - (-z_1)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0: z + z_1 = k[-z - z_2] \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty): z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}. \text{ Khi } \overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ thì hiển nhiên}$$

$\|z + z_1\| - \|z + z_2\| = \|z_1 - z_2\|$. Vậy đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z + z_2 = 0 \\ \begin{cases} z + z_2 \neq 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0: z + z_1 = k[-z - z_2] \end{cases} \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty): z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}.$$

Chú ý

+Với C là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $|AM - BM| \leq AB \Leftrightarrow (MA - MB)^2 \leq AB^2$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 2MA \cdot MB + MB^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) - 4MC^2 \Leftrightarrow 4MC^2 \leq (MA + MB)^2$$

$$\Leftrightarrow MA + MB \geq 2MC \Rightarrow |z + z_1| + |z + z_2| \geq 2 \left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$\begin{cases} z + z_2 = 0 \\ \begin{cases} z + z_2 \neq 0 \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0: z + z_1 = k[-z - z_2] \end{cases} \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty): z + z_1 = k(z_1 - z_2) \end{cases}.$$

Một Số Ví Dụ

Câu 1: [Minh Hoạ-T4/N2021] Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$.

Giá trị lớn nhất của $|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng

A. $5 - \sqrt{19}$. **B.** $5 + \sqrt{19}$. **C.** $-5 + 2\sqrt{19}$. **D.** $5 + 2\sqrt{19}$.

Định hướng

Tất cả giả thiết của đề bài có dạng $|mz_1 + nz_2| = r$, chính vì thế ta xét: $|mz_1 + nz_2|^2$ bởi vì

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}. \text{ Bằng tính toán ta có kết quả: } |mz_1 + nz_2|^2 = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2).$$

Trong đó m, n là các số thực và z_1, z_2 là các số phức. Như vậy từ giả thiết ta sẽ tính được $|3z_1 + z_2|$ và đưa bài toán đã cho về bài toán quen thuộc.

Lời giải

$$+3=|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)=5-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)\Rightarrow(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)=2;$$

$$|3z_1+z_2|=\sqrt{9|z_1|^2+|z_2|^2+3(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)}=\sqrt{19}.$$

$$+C\acute{o}: |(3z_1+z_2)+(-5i)|\leq|3z_1+z_2|+|-5i|\Leftrightarrow|3z_1+z_2-5i|\leq5+\sqrt{19}.$$

$$+K\acute{h}i \begin{cases} z_1=\frac{\sqrt{57}}{19}-\frac{4\sqrt{19}}{19}i \\ z_2=-\frac{3\sqrt{57}}{19}-\frac{7\sqrt{19}}{19}i \end{cases} \text{ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì } |3z_1+z_2-5i|=5+\sqrt{19}. \text{ Vậy}$$

$$\max|3z_1+z_2-5i|=5+\sqrt{19}\Rightarrow \text{Chọn B}$$

Nhận xét

$$\text{Tìm được } \min|3z_1+z_2-5i| \text{ bằng BDT } |(3z_1+z_2)+(-5i)|\geq||3z_1+z_2|-|-5i||=5-\sqrt{19}.$$

Câu 2: [Minh Hoạ-L2/N2017] Xét các số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Giá trị của biểu thức $P=m+M$ bằng

A. $\sqrt{13}+\sqrt{73}$. B. $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$. C. $5\sqrt{2}+\sqrt{73}$. D. $\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Định hướng

Nhận thấy $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\Rightarrow|z+2-i|+|-z+4+7i|=|(z+2-i)+(-z+4+7i)|$ sẽ suy ra $z=a(x)+b(x).i$ với $x\in[0;1]$. Đến đây ta có bài toán quen thuộc.

Lời giải

$$+|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\Rightarrow|z+2-i|+|-z+4+7i|=|(z+2-i)+(-z+4+7i)|$$

$$\Rightarrow z+2-i=x(6+6i); (x\in\mathbb{R}, 0\leq x\leq 1)\Rightarrow z=(-2+6x)+(1+6x)i$$

$$\Rightarrow|z-1+i|=|(-3+6x)+(2+6x)i|=\sqrt{72x^2-12x+13}.$$

$$+Xét \text{ hàm số } f(x)=\sqrt{72x^2-12x+13}, x\in[0;1], \text{ dễ thấy } \min_{[0;1]} f(x)=f\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2};$$

$$\max_{[0;1]} f(x)=f(1)=\sqrt{73}. \text{ Vậy } m=\frac{5\sqrt{2}}{2}; M=\sqrt{73}\Rightarrow \text{Chọn B}$$

Câu 3: [Chuyên Sư Phạm Hà Nội-L2/N2021] Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $P=|z+2|+2|z-3|$. Tổng $M+m$ bằng

A. 14. B. 7. C. $\frac{45+3\sqrt{35}}{5}$. D. $\frac{15+5\sqrt{33}}{3}$.

Định hướng

+ $|z + z_k|^2 = |(z + w) + (z_k - w)|^2 = |z + w|^2 + |z_k - w|^2 + \overline{(z + w)}(z_k - w) + (z + w)\overline{(z_k - w)}$ với $k = \overline{1; 2}$. Do đó nếu $z_1 - w = p(z_2 - w)$ với $p \in \mathbb{R}$ thì sẽ tính được $a|z + z_1|^2 + b|z + z_2|^2$ theo $|z + w|$ và $|z_k - w|$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó dễ dàng tính được M .

+ Nhìn vào kết luận, ta tìm cách làm xuất hiện hệ số 2 trước biểu thức $|z + 2|$ (Cân bằng hệ số) bằng công thức $|z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right|$ với z_1, z_2 là các số phức khác 0 nhưng không được. Viết $P = (|-z - 2| + |z - 3|) + |z - 3|$ ta dễ dàng tìm được m .

Lời giải

+ Ta có $\begin{cases} |z + 2|^2 = |(z - 1) + 3|^2 = |z - 1|^2 + 9 + 3(z - 1 + \overline{z - 1}) = 13 + 3(z - 1 + \overline{z - 1}) \\ |z - 3|^2 = |(z - 1) - 2|^2 = |z - 1|^2 + 4 - 2(z - 1 + \overline{z - 1}) = 8 - 2(z - 1 + \overline{z - 1}) \end{cases}$ suy ra

$$2|z + 2|^2 + 3|z - 3|^2 = 50; P = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}|z + 2| + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}|z - 3| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)(2|z + 2|^2 + 3|z - 3|^2)}$$

$$= \frac{5\sqrt{33}}{3}. \text{ Khi } z = -\frac{1}{33} + \frac{40\sqrt{2}}{33}i \text{ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì } P = \frac{5\sqrt{33}}{3}. \text{ Vậy}$$

$$M = \frac{5\sqrt{33}}{3}.$$

+ $P = (|-z - 2| + |z - 3|) + |z - 3| \geq |-z - 2 + z - 3| + 0 = 5$. Khi $z = 3$ thỏa mãn điều kiện đề bài thì $P = 5$. Vậy $m = 5$.

$$+ M + m = \frac{15 + 5\sqrt{33}}{3} \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 4: [Đề tham khảo-2018] Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$.

Khi biểu thức $P = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $x + y$ bằng

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Định hướng

+ Nhận thấy $|z + 1 - 3i| = |(z - 4 - 3i) + 5|$, $|z - 1 + i| = |(z - 4 - 3i) + (3 + 2i)|$ do đó không tính được $\alpha|z + 1 - 3i|^2 + \beta|z - 1 + i|^2$ theo $|z - 4 - 3i|$ (α, β là các số thực).

+ Tuy nhiên ta lại có $|z + 1 - 3i|^2 + |z - 1 + i|^2 = 2[|z - i|^2 + |1 - 2i|^2]$. Từ đây ta có **Lời giải** sau:

Lời giải

$$+ P \leq \sqrt{2[|z + 1 - 3i|^2 + |z - 1 + i|^2]} = \sqrt{4[|z - i|^2 + |1 - 2i|^2]} = 2\sqrt{5 + |z - i|^2} \quad (1).$$

+ $|z-i| = |(z-4-3i)+(4+2i)| \leq |z-4-3i| + |4+2i| = 3\sqrt{5}$ (2). Đẳng thức ở (2) xảy ra khi

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 \\ z-4-3i = k(4+2i) \Rightarrow z = 6+4i. \\ |z-4-3i| = \sqrt{5} \end{cases}$$

+Từ (1) và (2) suy ra $P \leq 10\sqrt{2}$ (3). Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi đẳng thức ở

$$(1) \text{ và } (2) \text{ đồng thời xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6+4i \\ |z+1-3i| = |z-1+i| \end{cases} \Leftrightarrow z = 6+4i \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 5: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-i|=2$. Biết biểu thức $T = |z+3i| + 2|z-4-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Hiệu $x - y$ bằng

A. $\frac{3-6\sqrt{13}}{17}$. B. $\frac{6\sqrt{13}-3}{17}$. C. $\frac{3+6\sqrt{13}}{17}$. D. $-\frac{3+6\sqrt{13}}{17}$.

Định hướng

Khai thác kết luận: Biểu thức $T = |z+3i| + 2|z-4-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta phải “cân bằng hệ số” (làm xuất hiện thừa số 2 ở biểu thức $|z+3i|$) trước khi áp dụng bất đẳng

thức mô đun bằng đẳng thức sau: $|z_1+z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right|$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}; z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$).

Lời giải

$$+ \text{Ta có } |z+3i| = |(z-i)+4i| = \left| \frac{|4i|}{|z-i|} (z-i) + \frac{|z-i|}{|4i|} (4i) \right| = 2|z|; T = 2(|z| + |4+i-z|)$$

$$\geq 2|z+4+i-z| = 2\sqrt{17} \quad (1).$$

$$+ \text{Đẳng thức ở (1) xảy ra khi } \begin{cases} z = k(4+i), (k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1) \\ |z-i| = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{4+8\sqrt{13}}{17} + \frac{1+2\sqrt{13}}{17}i.$$

$$+ \text{Vậy } x-y = \frac{3+6\sqrt{13}}{17} \Rightarrow \text{Chọn C}$$

Câu 6: [Sở GD&ĐT Quảng Nam-N2018] Xét số phức z thay đổi thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2|z+1| + 2|z-1| + |z-\bar{z}-4i|$ bằng

A. $4+2\sqrt{3}$. B. $2+\sqrt{3}$. C. $4+\frac{14}{\sqrt{15}}$. D. $2+\frac{7}{\sqrt{15}}$.

Định hướng

+Nhận thấy $z - \bar{z}$ là số thuần ảo. Coi $z - \bar{z}$ là một biến số và tìm cách giảm biến số trong biểu thức P bằng BĐT $|z+1|+|z-1|=|z+1|+|-z+1|=|z+1|+|-\bar{z}+1|\geq|z-\bar{z}+2|$. Suy ra $P\geq 2|z-\bar{z}+2|+|z-\bar{z}-4i|=Q$.

+Nếu đặt $z=x+yi, (x, y\in\mathbb{R})$ thì Q là biểu thức chứa một biến y và ta có bài toán quen thuộc.

Lời giải

+Đặt $z=x+yi, (x, y\in\mathbb{R})$, ta có : $P=2(|z+1|+|-\bar{z}+1|)+|z-\bar{z}-4i|\geq 2|z-\bar{z}+2|+|z-\bar{z}-4i|$
 $=2(2\sqrt{y^2+1}+|y-2|)$.

$+2\sqrt{y^2+1}+|y-2|=\sqrt{[1^2+(\sqrt{3})^2][y^2+1]}+|y-2|\geq|y+\sqrt{3}|+|y-2|\geq y+\sqrt{3}+2-y=2+\sqrt{3}$.

+Từ đó suy ra $P\geq 2(2+\sqrt{3})(1)$. Khi $z=\frac{\sqrt{3}}{3}i$ thỏa mãn $|z|\leq 2$ thì $P=2(2+\sqrt{3})$. Vậy

$\min P=2(2+\sqrt{3})\Rightarrow$ **Chọn A**

Câu 7: [Chuyên Vinh -L2/N2018] Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó mô đun của số phức $w=z_1+z_2$ bằng

A. $2\sqrt{2}$.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$.

D. $1+\sqrt{2}$.

Định hướng

+ Khai thác giả thiết : $|z^2+1|=2|z|\Leftrightarrow|z^2|^2+1+z^2+\bar{z}^2=4|z|^2\Leftrightarrow z^2+(\bar{z})^2=4|z|^2-|z|^4-1$.

$+z^2+(\bar{z})^2=(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}=(z+\bar{z})^2-2|z|^2\geq-2|z|^2$; $z^2+(\bar{z})^2=2|z|^2-\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)^2\leq 2|z|^2$.

Lời giải

+Ta có : $|z^2+1|=2|z|\Leftrightarrow|z^2|^2+1+z^2+\bar{z}^2=4|z|^2\Leftrightarrow z^2+(\bar{z})^2=4|z|^2-|z|^4-1$.

+Mặt khác: $z^2+(\bar{z})^2=(z+\bar{z})^2-2|z|^2\geq-2|z|^2$ (1). Suy ra $4|z|^2-|z|^4-1\geq-2|z|^2$

$\Leftrightarrow|z|^4-6|z|^2+1\leq 0\Leftrightarrow -1+\sqrt{2}\leq|z|\leq 1+\sqrt{2}$. Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $z+\bar{z}=0\Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.

+Dễ dàng có $z_1=(1+\sqrt{2})i$ và $z_2=(-1+\sqrt{2})i$. Từ đó $w=z_1+z_2=2\sqrt{2}i$ và $|w|=2\sqrt{2}\Rightarrow$

Chọn A

Câu 8: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét số phức z thay đổi thỏa mãn $|z+1+2i|=1$. Gọi M, m theo thứ tự là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z^2+2z+6|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

- A. 36. B. 37. C. 38. D. 39.

Định hướng

Đổi biến $w = z+1+2i$, khi đó: $|w|=1$; $z+1 = w-2i$ và $|z^2+2z+6| = |(z+1)^2+5|$
 $= |(w-2i)^2+5| = |w^2-4iw+1| = |w||w+\bar{w}-4i| = |w+\bar{w}-4i|$. Chú ý rằng $1=|w|^2=w\bar{w}$.

Lời giải

+Đặt $w = z+1+2i$, khi đó: $|w|=1$; $|z^2+2z+6| = |w^2-4iw+1| = |w||w+\bar{w}-4i| = |w+\bar{w}-4i|$
 $= \sqrt{(w+\bar{w})^2+16} \leq \sqrt{4|w|^2+16} = 2\sqrt{5}$. Mặt khác $|z^2+2z+6| = \sqrt{(w+\bar{w})^2+16} \geq 4$. Chú ý rằng $w+\bar{w} \in \mathbb{R}$.

+ Khi $z = 2i$ và thỏa mãn điều kiện đề bài thì $|z^2+2z+6| = 2\sqrt{5}$; Khi $z = -1-i$ thì $|z^2+2z+6| = 4$. Vậy $M = 2\sqrt{5}$, $m = 4 \Rightarrow$ **Chọn A**

Bài Tập Vận Dụng

Câu 1: [Chuyên Đại Học Vinh-Lần 1-Năm 2019] Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

- A. $5-\sqrt{21}$. B. $20-4\sqrt{21}$. C. $20-4\sqrt{22}$. D. $5-\sqrt{22}$.

Câu 2: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-1+2i|=5$ và $|z_1-z_2|=\frac{5\sqrt{10}}{2}$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = 2z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình là

- A. $(x-3)^2+(y+6)^2=100$. B. $(x+3)^2+(y-6)^2=100$.
 C. $(x-3)^2+(y-6)^2=100$. D. $(x+3)^2+(y+6)^2=100$.

Câu 3: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét các số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|-|z-2+2i|=\sqrt{34}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|(1+i)z+2i|$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $5\sqrt{2}$.

Câu 4: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét các số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1-2i|=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+1-i|+|z-5-4i|$ bằng

- A. $3\sqrt{7}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{6}$. D. $4\sqrt{2}$.

- Câu 5:** [Sở Vĩnh Phúc-L2/N2018] Xét số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-i|=2\sqrt{2}$.
Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
 $H = |z+3-2i| + |z-3+4i|$. Giá trị $M+m$ bằng
A. $16\sqrt{2}$. B. $11\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{26}+8\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{26}+6\sqrt{2}$.
- Câu 6:** [THPT Đặng Thúc Hứa Nghệ An-Lần1 Năm 2018] Xét số phức z thỏa mãn điều kiện
 $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z-2+3i|$ bằng
A. $\frac{13}{3}$. B. $1+\sqrt{13}$. C. 9. D. $4\sqrt{5}$.
- Câu 7:** [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét số phức z thỏa mãn $|z|=1$ và
 $P = |z^{2021} + (\bar{z})^{2019} + 6z| - 2|z^{2020} + 1|$. Gọi $M; m$ lần lượt là giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất
của biểu thức P . Giá trị của biểu thức $T = M - m$ bằng
A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. 4.
- Câu 8:** [Chuyên Đại Học Vinh-L2/N2021] Cho các số thực b, c sao cho phương trình
 $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh
đề nào sau đây đúng?
A. $5b + c = 4$. B. $5b + c = -12$. C. $5b + c = 12$. D. $5b + c = -4$.
- Câu 9:** [Lê Quý Đôn Lai Châu-L1/N2018] Xét hai số phức z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn điều kiện
 $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng
A. $\sqrt{10} + 1$. B. $3\sqrt{5} - 1$.
C. $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$. D. $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$.
- Câu 10:** [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét các số phức z_1 thỏa mãn
 $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$ và các số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 + 4 + i| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của
 $|z_1 + z_2|$ bằng
A. $2\sqrt{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.
- Câu 11:** [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét số phức z thỏa mãn
 $|z - 2 - 2i| = 2\sqrt{13}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{2}|z - 2 + 2i| + 4|z - 3 - 3i|$ bằng
A. $26\sqrt{2}$. B. $\frac{147}{2}$. C. $9\sqrt{6}$. D. $\frac{92}{3}$.
- Câu 12:** [Sở GD & ĐT Phú Thọ-2021] Có bao nhiêu số phức z có phần thực, phần ảo là các số
nguyên đồng thời thỏa mãn $|z| < 7$ và $|z| + |z - 1 - i| = |z + 1 + i| + |z - 2 - 2i|$?
A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 13: [Sở GD & ĐT Hải Phòng-2021] Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 3$ và $|z_1 + 6 - 8i| = 7 - |z_2|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 2z_2 + 21 - 3i|$. Khi đó giá trị của $M^2 - m^2$ bằng

- A. 142. B. 143. C. 144. D. 145.

Câu 14: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét hai số phức z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn $|z_1 + 1 + i| = 2, |z_2 + 1 + i| = 2$ và $|z_1| + |z_2| = |z_1 - z_2|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - 2z_2|$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 15: [Sở GD Hòa Bình-N2021] Xét các số phức z, w thay đổi thỏa mãn $|z| = 2, |w - 3 + 2i| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $H = |z^2 - 2zw - 4|$ bằng

- A. $16\sqrt{2}$. B. $18\sqrt{2}$. C. 8. D. 24.

Nguồn Tham Khảo

- 1-Sách giáo khoa Giải Tích 12.
- 2-Đề thi minh họa, tham khảo của Bộ giáo dục các năm 2018-2019-2020-2021.
- 3-Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam.

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Luyện tập các thao tác tư duy cho học sinh thông qua dạy học
tính chất trung điểm của đoạn thẳng bằng phương pháp vector

Ths. TRƯƠNG QUỐC TOẢN

GV Trường THPT Anh Sơn 3, Anh Sơn, Nghệ An

Trong luyện tập, nếu chúng ta chỉ chú trọng tổ chức các hoạt động cho học sinh giải quyết bài toán theo một hướng nhất định; không chú trọng việc tổ chức cho học sinh nghiên cứu sâu lời giải bằng các hoạt động như: phân tích, tổng hợp, so sánh lời giải để giữ lại các đặc tính bản chất, loại bỏ các yếu tố không bản chất, để từ đó, có thể khái quát bài toán, đặc biệt hóa bài toán hoặc xây dựng bài toán tương tự thì dẫn đến học sinh sẽ nhìn nhận bài toán không toàn diện, thiếu khoa học và hạn chế việc phát triển về tư duy trong giải toán.

Trong dạy học bộ môn toán, luyện tập cho học sinh các thao tác tư duy sẽ góp phần hình thành cho các em cách đánh giá, nhìn nhận các bài toán một cách khoa học, chính xác, toàn diện, sâu sắc để từ đó có thể tìm hướng giải quyết vấn đề một cách phù hợp nhất.

1. Cơ sở lí luận của báo cáo

1.1 Thao tác tư duy

1.1.1 Khái niệm về thao tác tư duy

Nhiều nhà tâm lý học (trong đó có J. Piaget) cho rằng:

- Thao tác là các hành động đã được chuyển vào bên trong và đã được rút gọn.

Đối tượng của thao tác tư duy không phải là sự vật có thực như của hành động, mà là những hình ảnh, biểu tượng, ký hiệu. Như vậy, thao tác tư duy là hành động tinh thần, chứ không phải là hành động thực, vật chất ở bên ngoài.

Theo G. Polya [6], thao tác tư duy bao gồm: phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự hóa, khái quát hóa, đặc biệt hóa.

Trong [3] các tác giả cho rằng thao tác tư duy bao gồm: phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa và khái quát hóa.

Nguyễn Bá Kim [4] không gọi là thao tác tư duy mà gọi là các hoạt động trí tuệ cơ bản, bao gồm: phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự hóa, trừu tượng hóa, khái quát hóa, đặc biệt hóa.

Dẫn theo [3], thao tác tư duy bao gồm: phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, trừu tượng hóa và cụ thể hóa.

Từ phân tích và tổng hợp các ý kiến nêu trên, có thể hiểu rằng *thao tác tư duy* là một hành động tư duy được kỹ thuật hóa và đã rút gọn, có thể rèn luyện để đạt được các mức độ nhất định. Việc rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh chính là việc tập luyện các hành động tư duy. Trong khuôn khổ bài viết này, chúng tôi tập chỉ tập trung luyện tập cho học sinh các thao tác tư duy như: phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự hóa, khái quát hóa, đặc biệt hóa xét từ bình diện hoạt động trí tuệ thông qua hoạt động giải một số bài tập toán.

1.1.2. Phân tích - Tổng hợp

1.1.2.1. Phân tích

Theo [3], [4], [6] “Phân tích là dùng trí óc chia cái toàn thể ra thành từng phần hoặc tách ra từng thuộc tính hay khía cạnh riêng biệt nằm trong cái tổng thể đó”. Thế giới vật chất khách quan là một tổng thể các sự vật, hiện tượng, biến cố và các quá trình nguyên vẹn mà mỗi sự vật, biến cố và quá trình đó bao gồm nhiều bộ phận riêng biệt với các dấu hiệu và thuộc tính riêng. Việc nhận thức các sự vật và hiện tượng của thế giới đòi hỏi phải nghiên cứu, phân tích các bộ phận theo các dấu hiệu và thuộc tính của chúng. Các bộ phận của bất kỳ một sự vật nguyên vẹn nào cũng có những mối quan hệ và liên hệ nhất định với nhau. Cho nên để nhận thức một sự vật nguyên vẹn cần phải phân tích, nghiên cứu các mối quan hệ và liên hệ giữa các bộ phận đó. Nghiên cứu một sự vật nguyên vẹn với các bộ phận của nó, cũng như các mối liên hệ, quan hệ giữa các bộ phận càng chi tiết bao nhiêu thì càng nhận thức nó một cách sâu sắc bấy nhiêu.

Chẳng hạn như phân tích véc tơ $\overrightarrow{AB}$ thành tổng của hai véc tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$ hoặc phân tích véc tơ $\overrightarrow{AB}$ thành tổng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Việc tách như thế nào còn tùy vào đặc điểm, yêu cầu, mục đích của bài toán.

1.1.2.2. Tổng hợp

Theo [3], [4], [6] “Tổng hợp là dùng trí óc hợp lại các phần của cái toàn thể hoặc kết hợp lại những thuộc tính hay khía cạnh khác nhau nằm trong cái toàn thể đó”.

Trong cuộc sống chúng ta có thể thống nhất rằng:

- Bất kỳ hoạt động nhận thức nào và từ đó là bất kỳ hoạt động học tập nào, cũng được thực hiện thông qua phân tích và tổng hợp;

- Sự phân tích được tiến hành theo hướng tổng hợp, còn sự tổng hợp được thực hiện theo kết quả của phân tích;

- Trong phân tích đã có tổng hợp, phân tích một cái toàn thể đồng thời là tổng hợp các phần của nó vì phân tích một cái toàn thể ra từng phần cũng chỉ nhằm mục đích làm bộc lộ ra mối liên hệ giữa các phần của cái toàn thể ấy. Phân tích cái toàn thể là con đường để nhận thức cái toàn thể sâu sắc hơn.

- Phân tích và tổng hợp là hai thao tác trái ngược nhau, không tách rời nhau của một quá trình thống nhất vì chúng cùng một mục đích là phục vụ quá trình tư duy. Sự thống nhất này còn thể hiện ở chỗ: cái toàn thể ban đầu (tổng hợp I) định hướng cho phân tích, chỉ ra cần phân tích mặt nào, khía cạnh nào. Kết quả của phân tích là cái toàn thể ban đầu được nhận thức sâu sắc hơn (tổng hợp II).

1.1.3. So sánh

Có nhiều định nghĩa về so sánh của các nhà tâm lý học, lý luận dạy học, chẳng hạn như: "So sánh là quá trình dùng trí óc để xác định sự giống nhau hay khác nhau, sự đồng nhất hay không đồng nhất, sự bằng nhau hay không bằng nhau giữa các đối tượng nhận thức" [3]. "So sánh là xác định sự giống nhau và khác nhau của các sự vật và hiện tượng của hiện thực" [7]. "So sánh là xác định sự giống nhau và khác nhau giữa các sự vật và hiện tượng. Muốn so sánh hai sự vật (hiện tượng), ta phải phân tích các dấu hiệu, các thuộc tính giữa chúng, đối chiếu các dấu hiệu, các thuộc tính đó với nhau, rồi tổng hợp lại xem hai sự vật đó có gì giống nhau và khác nhau" [6].

Trong Toán học, ta thường so sánh khái niệm tam giác với tứ diện, đường tròn với mặt cầu, đạo hàm và tích phân, giữa hàm số mũ và hàm số lôgarit, giữa các cách giải khác nhau của cùng một bài tập, ... Việc so sánh giúp cho học sinh lĩnh hội các khái niệm, các định lý, các quy tắc, phương pháp với tất cả tính đa dạng và độc đáo của các dấu hiệu và thuộc tính của nó.

Nhờ có sự so sánh mà học sinh đã nghiên cứu được các sự vật và hiện tượng với các dấu hiệu giống nhau và khác nhau, chung và riêng của chúng. Bằng cách so sánh, HS đã hình thành được những hình tượng phong phú, trong sáng, trực quan về những điều đã học, từ đó tăng thêm tính tích cực, tự giác và làm cho việc ghi nhớ lại các tài liệu đã học cũng như củng cố trí nhớ cho học sinh tốt hơn.

1.1.4. Tương tự hóa

Theo G. Polya [6], *tương tự* là một kiểu giống nhau nào đó. Có thể nói tương tự là giống nhau nhưng ở mức độ xác định hơn và mức độ đó được phản ánh bằng khái niệm. Ông giải thích điều trên như sau: "Sự khác nhau căn bản giữa tương tự và những loại giống

nhau khác là ở ý định của người đang suy nghĩ. Những đối tượng giống nhau phù hợp với nhau trong một quan hệ nào đó. Nếu bạn có ý định quy mỗi quan hệ trong đó các đối tượng phù hợp với nhau về những khái niệm đã định thì bạn sẽ xem những đối tượng giống nhau ấy như là những đối tượng tương tự. Và nếu bạn đạt tới những khái niệm rõ ràng, thì tức là bạn làm sáng tỏ sự tương tự."

Trên cơ sở các định nghĩa và các luận điểm vừa nêu, có thể thống nhất rằng *Tương tự hóa* là quá trình dùng trí óc để kết luận về sự giống nhau của các đối tượng ở một số dấu hiệu, thuộc tính khác từ sự giống nhau của các đối tượng ở một số dấu hiệu, thuộc tính nào đó nhằm mục đích tạo ra một kết quả mới, vượt qua một trở ngại.

1.1.5. Khái quát hóa

G. Polya [6] cho rằng: "*Khái quát hóa* là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho đến việc nghiên cứu một tập hợp lớn hơn, bao gồm cả tập hợp ban đầu". "Sự phát triển của việc trừu tượng hóa của HS được biểu hiện trong việc hình thành khả năng tách ra và trừu xuất các dấu hiệu, các mối liên hệ và các mối quan hệ chung và bản chất khỏi các sự vật và hiện tượng riêng lẻ, cũng như biết phân biệt các dấu hiệu và các mối liên hệ không bản chất của các sự vật hoặc hiện tượng này và biết trừu xuất khỏi chúng" [8].

1.1.6. Đặc biệt hóa

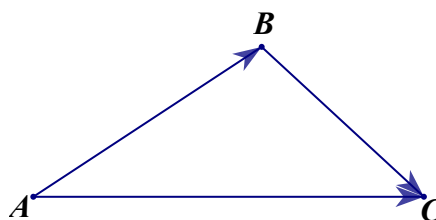
Đặc biệt hóa là quá trình dùng trí óc chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho sang việc nghiên cứu một tập nhỏ hơn chứa trong tập hợp đã cho nhằm mục đích kiểm nghiệm lại tính đúng đắn của khái quát hóa, giải quyết một vấn đề [3].

2. Kiến thức cơ bản:

2.1. Quy tắc ba điểm:

Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có

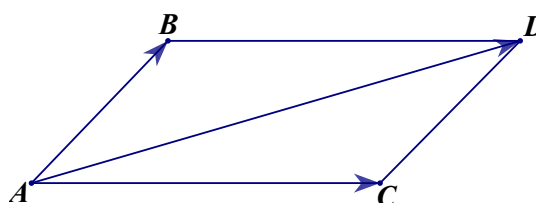
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ hoặc } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$



2.2. Quy tắc hình bình hành:

Trong hình bình hành $ABCD$ ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \quad (2)$$



2.3. Biểu thị một véc tơ theo hai véc tơ không cùng phương

Cho $\vec{a}, \vec{b}$ là hai véc tơ không cùng phương, $\vec{x}$ là véc tơ bất kì. Khi đó tồn tại duy nhất cặp $(m; n)$ sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

3. Cách thức thực hiện

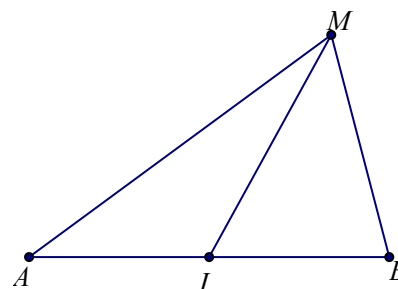
Bài toán:

Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I , M là điểm tùy ý không nằm trên đường thẳng AB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (1)

Cách 1: Biến đổi vế này bằng vế kia

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$
 $= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}$ (Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB)
 $= 2\overrightarrow{MI}$ (đpcm)



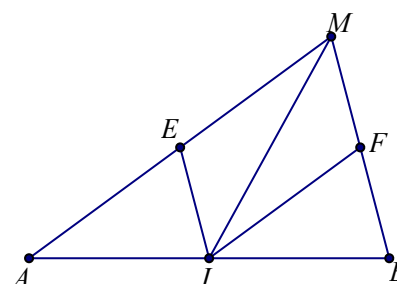
Cách 2: Biểu thị một véc tơ theo hai véc tơ không cùng phương

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ (1.2)

Dựng hình bình hành $MEIF$, khi đó E, F lần lượt là trung điểm của MA và MB . Ta có:

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ (đpcm)



Hoạt động khái quát hóa bài toán

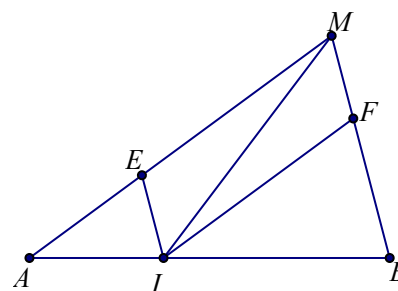
Bây giờ chúng ta thử tìm cách mở rộng cho **bài toán**, nghĩa là: Nếu I là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AB thì đẳng thức mở rộng của (1) được xác định như thế nào?

GV: Trong chứng minh ở cách 2 số $\frac{1}{2}$ được tính như thế nào?

HS: Câu trả lời mong đợi: $\frac{1}{2} = \frac{ME}{MA} = \frac{BI}{AB}$ hoặc

$$\frac{1}{2} = \frac{MF}{MB} = \frac{AI}{AB}.$$

GV: Các hệ thức trên có thể viết dưới dạng vectơ như thế nào?



$$\text{HS: } \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MA}; \overrightarrow{ME} = \frac{BI}{AB} \overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MF} = \frac{AI}{AB} \overrightarrow{MB}.$$

Như vậy, nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MI} = \frac{BI}{AB} \overrightarrow{MA} + \frac{AI}{AB} \overrightarrow{MB}$. Từ đó, ta dự

đoán trong trường hợp I là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng AB ta có: $\overrightarrow{MI} = \frac{BI}{AB} \overrightarrow{MA} + \frac{AI}{AB} \overrightarrow{MB}$.

Hãy thử chứng minh hoặc bác bỏ dự đoán trên?

Thật vậy, dựng hình bình hành $MEIF$, trong đó E, F lần lượt là các điểm thuộc MA, MB ;

Khi đó: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

Mặt khác, theo định lí Talet ta có: $\frac{ME}{BI} = \frac{MA}{BA} \Rightarrow \overrightarrow{ME} = \frac{BI}{BA} \overrightarrow{MA}$, tương tự: $\overrightarrow{MF} = \frac{AI}{BA} \overrightarrow{MB}$. Từ

đó ta được: $\overrightarrow{MI} = \frac{BI}{BA} \overrightarrow{MA} + \frac{AI}{BA} \overrightarrow{MB}$. Như vậy, kết quả vẫn không thay đổi, tức là chúng ta đã

giải quyết được vấn đề đặt ra là tìm được công thức mở rộng của (1). Hãy phát biểu vấn đề trên thành nội dung bài toán và chứng minh bài toán đó.

Bài toán 1.1.

Cho tam giác ABC , M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AC}.$$

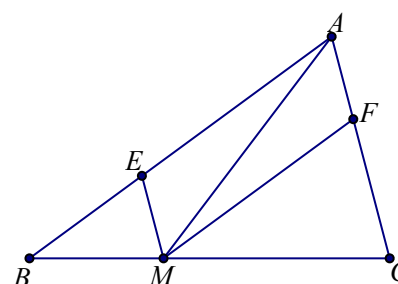
Chứng minh:

Dựng hình bình hành $AEMF$, trong đó E, F lần lượt là các

điểm thuộc AB, AC ; Khi đó: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$. Mặt khác,

theo định lí Talet đảo ta có: $\frac{AE}{AB} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AB}$,

tương tự: $\overrightarrow{AF} = \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AC}$. Từ đó ta được:



$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AC}.$$

Hoạt động giải bài toán tương tự bài toán 1.1

Bài toán 1.2.

Cho tam giác ABC với các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (1.2).

Định hướng:

GV: Đẳng thức (1.2) có thể viết lại dưới một dạng khác như thế nào?

$$HS: \overrightarrow{AI} = \frac{b}{a} \overrightarrow{IB} + \frac{c}{a} \overrightarrow{IC}$$

GV: Em đã gặp bài toán này lần nào chưa? Hay đã gặp bài toán này ở dạng hơi khác?

HS: Suy nghĩ.

GV: Đây là một bài toán có liên quan mà bạn có lần đã giải rồi có thể sử dụng nó không? Có thể sử dụng kết quả của nó không?

HS: Bài toán 1.1.

Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của : AI, BI, CI với BC, AC, AB .

Áp dụng bài toán 1.1 cho $\triangle IBC$ ta có : $\overrightarrow{IA_1} = \frac{A_1C}{BC} \overrightarrow{IB} + \frac{A_1B}{BC} \overrightarrow{IC}$ (*).

Do đó, chỉ cần biểu diễn : $\overrightarrow{IA_1}$ theo $\overrightarrow{IA}$.

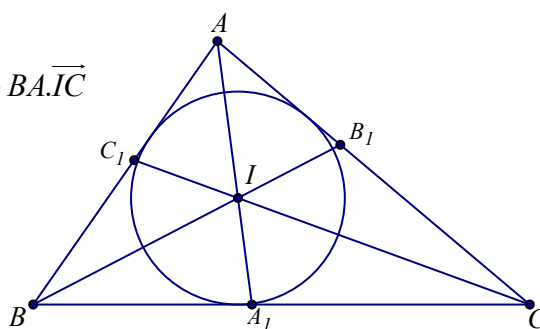
Do I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ nên $\frac{IA_1}{IA} = \frac{BA_1}{BA} \Rightarrow IA_1 = \frac{BA_1}{BA} \cdot IA$.

$\Rightarrow \overrightarrow{IA_1} = -\frac{BA_1}{BA} \cdot \overrightarrow{IA}$. Thay vào (*) ta được :

$$-\frac{BA_1}{BA} \cdot \overrightarrow{IA} = \frac{A_1C}{BC} \overrightarrow{IB} + \frac{A_1B}{BC} \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow -BC \cdot \overrightarrow{IA} = BA \cdot \frac{A_1C}{BA_1} \overrightarrow{IB} + BA \cdot \overrightarrow{IC}$$

Mặt khác : $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$. Khi đó :

$$-BC \cdot \overrightarrow{IA} = BA \cdot \frac{A_1C}{BA_1} \overrightarrow{IB} + BA \cdot \overrightarrow{IC}$$



$$\Leftrightarrow -a\overrightarrow{IA} = c \cdot \frac{b}{c} \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}. \text{ (đpcm)}$$

Cách 2: (Trích lời giải [7])

Định hướng:

GV: Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{CM}$ theo hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$?

GV: Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$?

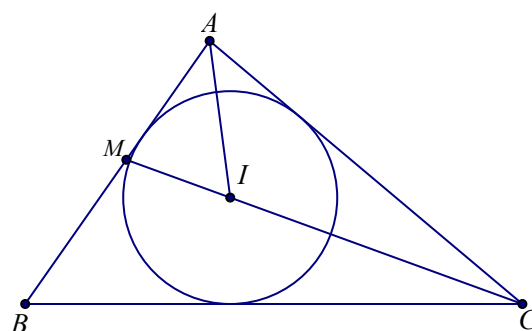
Lời giải

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{CA}{CB}, \text{ suy ra: } \overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a} \overrightarrow{MB}.$$

Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a} \overrightarrow{CB}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{CB}.$$



Vì I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ nên AI là

phân giác của $\triangle ACM$. Do đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \frac{AC}{AC+AM} \overrightarrow{AM} + \frac{AM}{AC+AM} \overrightarrow{AC} = \frac{b}{b+\frac{bc}{a+b}} \overrightarrow{AB} + \frac{\frac{bc}{a+b}}{b+\frac{bc}{a+b}} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC} = \frac{b}{a+b+c} (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) + \frac{c}{a+b+c} (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \left(1 - \frac{b+c}{a+b+c}\right) \overrightarrow{IA} + \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{IB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Cách 3: (Trích lời giải [8])

Định hướng:

GV: Sử dụng các mối liên hệ, tạm thời em hãy chứng minh rằng (1.2) tương đương

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{p} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{p} \overrightarrow{AC} \quad (1.2.1) \text{ (với } p = a + b + c \text{)}$$

GV: Để phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ta thực hiện như thế nào?

Lời giải.

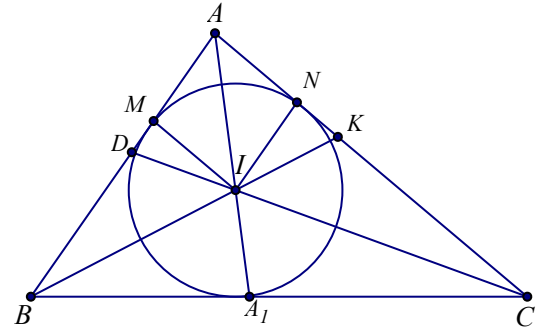
Đặt $p = a + b + c$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{p} \overrightarrow{IA} + \frac{b}{p} \overrightarrow{IB} + \frac{c}{p} \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{p} \overrightarrow{IA} + \frac{b}{p} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{c}{p} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \frac{b}{p} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{p} \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{b}{p} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{p} \overrightarrow{AC} \quad (1.2.1).$$



Để chứng minh (1.2) ta cần chứng minh (1.2.1). Thật vậy:

Ta dựng hình bình hành $AMIN$ ($M \in AB$, $N \in AC$). Khi đó, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

Ta cần chứng minh: $x = \frac{b}{p}$, $y = \frac{c}{p}$. Thật vậy, kéo dài BI cắt AC tại K .

$$\text{Ta có: } x = \frac{AM}{AB} = \frac{IN}{AB} = \frac{KI}{KB} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{KI}{KB} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{KI}{IB} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{AK}{c} \quad (*)$$

Mặt khác, ta có: $\frac{KA}{KC} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{KA}{b} = \frac{c}{a+c} \Leftrightarrow KA = \frac{bc}{a+c}$. Thay vào (*) ta được:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{b}{a+c} \Leftrightarrow x = \frac{b}{a+b+c} = \frac{b}{p}, \text{ tương tự: } y = \frac{c}{p}.$$

Do đó, $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{p} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{p} \overrightarrow{AC}$ hay $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Hoạt động giải bài toán đặc biệt hóa bài toán 1.2.

Trường hợp $\triangle ABC$ vuông tại A , I là trung điểm của đường cao AH .

Bài toán 1.3.

Cho tam giác ABC vuông tại A , với các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; vẽ đường cao AH . Gọi I là trung điểm của đoạn AH . Chứng minh rằng: $a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 \overrightarrow{IB} + c^2 \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (1.3).

GV: Đẳng thức (1) có thể viết lại dưới một dạng khác như thế nào?

$$\text{HS: } \overrightarrow{AI} = \frac{b^2}{a^2} \overrightarrow{IB} + \frac{c^2}{a^2} \overrightarrow{IC}$$

GV: Em đã gặp bài toán này lần nào chưa? Hay đã gặp bài toán này ở dạng hơi khác?

HS: Suy nghĩ.

GV: Đây là một bài toán có liên quan mà bạn có lần đã giải rồi có thể sử dụng nó không? Có thể sử dụng kết quả của nó không?

HS: Bài toán 1.1.

Lời giải

Ta có: $(1.3) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{b^2}{a^2} \overrightarrow{IB} + \frac{c^2}{a^2} \overrightarrow{IC}$ (*). Áp dụng kết quả bài toán 1.1 ta có:

$$\overrightarrow{IH} = \frac{CH}{CB} \overrightarrow{IB} + \frac{BH}{CB} \overrightarrow{IC}. \text{ Mặt khác, } I \text{ là trung điểm}$$

của AH nên ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IH} = \frac{CH}{CB} \overrightarrow{IB} + \frac{BH}{CB} \overrightarrow{IC}$ (**).

Từ (*) và (**) để chứng minh (1.3) ta cần chứng

$$\text{minh: } \frac{CH}{CB} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{BH}{CB} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Thật vậy, do $\triangle AHC \sim \triangle BAC$, nên ta

$$\text{có: } \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC}.$$

$$\text{Từ đó: } \frac{HC}{BC} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

$$\text{Lập luận tương tự ta có: } \frac{BH}{CB} = \frac{c^2}{a^2}.$$

$$\text{Vậy, } \overrightarrow{IA} = \frac{b^2}{a^2} \overrightarrow{IB} + \frac{c^2}{a^2} \overrightarrow{IC}$$

$$\text{hay } a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 \overrightarrow{IB} + c^2 \overrightarrow{IC} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$

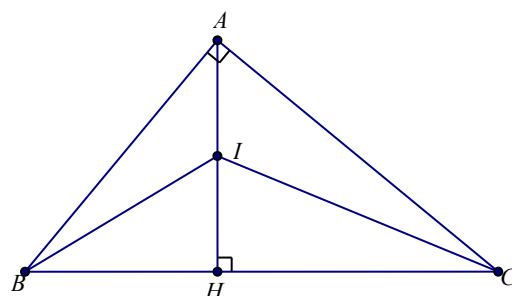
Cách 2:

Định hướng:

GV: Sử dụng các mối liên hệ em hãy biến đổi (1.3) tương đương $\overrightarrow{AI} = \frac{b^2}{2a^2} \overrightarrow{AB} + \frac{c^2}{2a^2} \overrightarrow{AC}$?

GV: Để phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ta thực hiện như thế nào?

Lời giải



Ta có: $a^2 \cdot \overrightarrow{IA} + b^2 \cdot \overrightarrow{IB} + c^2 \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + c^2 (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \overrightarrow{IA} + b^2 \overrightarrow{AB} + c^2 \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{b^2}{2a^2} \overrightarrow{AB} + \frac{c^2}{2a^2} \overrightarrow{AC} \quad (2)$$

Để chứng minh (1.3) ta cần chứng minh (*). Thật vậy:

Ta dựng hình bình hành $AB'IC'$ ($B' \in AB$, $C' \in AC$). Khi đó

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$$

Ta cần chứng minh: $x = \frac{b^2}{2a^2}$, $y = \frac{c^2}{2a^2}$.

Thật vậy, $\triangle AB'I \sim \triangle AHB$ nên ta có:

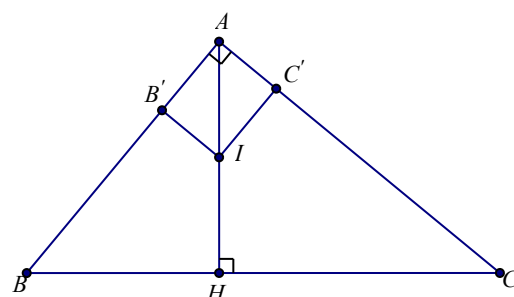
$$\frac{AB'}{AH} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow AB' = \frac{AI \cdot AH}{AB} = \frac{AH^2}{2AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{AH^2}{2AB^2} \overrightarrow{AB}.$$

Mặt khác, ta có: $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}$,

từ đó ta có: $\overrightarrow{AB'} = \frac{AC^2}{2BC^2} \overrightarrow{AB} = \frac{b^2}{2a^2} \overrightarrow{AB}$. Lập luận tương tự:

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{c^2}{2a^2} \overrightarrow{AC}.$$

Do đó, $\overrightarrow{AI} = \frac{b^2}{2a^2} \overrightarrow{AB} + \frac{c^2}{2a^2} \overrightarrow{AC}$ hay $a^2 \cdot \overrightarrow{IA} + b^2 \cdot \overrightarrow{IB} + c^2 \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.



Phân tích, tổng hợp các mối liên hệ nội bộ toán học đề xuất bài toán mới; giải các bài toán tương tự.

Gọi r , S_a , S_b , S_c lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tâm I của $\triangle ABC$, diện tích $\triangle IBC$, diện tích $\triangle IAC$, diện tích $\triangle IAB$. Khi đó, từ hệ thức

$$a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2} r a \cdot \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2} r b \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{1}{2} r c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow S_a \cdot \overrightarrow{IA} + S_b \cdot \overrightarrow{IB} + S_c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Từ đó ta có bài toán mới.

Bài toán 1.4.

Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi S_a , S_b , S_c lần lượt là diện tích các tam giác $\triangle IBC$, $\triangle IAC$, $\triangle IAB$. Chứng minh rằng:

$$S_a \cdot \overrightarrow{IA} + S_b \cdot \overrightarrow{IB} + S_c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}. \quad (1.4)$$

Định hướng 1.

Biến đổi (1.4) tương đương $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Chứng minh: $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (bài toán 1.2)

Định hướng 2.

Khai thác các mối liên hệ khác trong nội bộ toán học.

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của : AI, BI, CI với BC, AC, AB .

Áp dụng bài toán 1.1 ta có : $\overrightarrow{IA_1} = \frac{A_1C}{BC}.\overrightarrow{IB} + \frac{A_1B}{BC}.\overrightarrow{IC}$ (*)

Do đó chỉ cần biểu diễn : $\overrightarrow{IA_1}$ theo $\overrightarrow{IA}$.

Tỷ số $\frac{IA_1}{IA}$ có thể tính thông qua tỷ số các tam giác nào?

Hãy biểu diễn tỷ số $\frac{IA_1}{IA}$ theo S_a, S_b, S_c ?

Hãy biểu diễn $\frac{A_1C}{BC}; \frac{A_1B}{BC}$ theo S_a, S_b, S_c ?

Hãy lập luận để chứng minh các yêu cầu đó?

Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của : AI, BI, CI với BC, AC, AB .

Áp dụng bài toán 1.1 ta có :

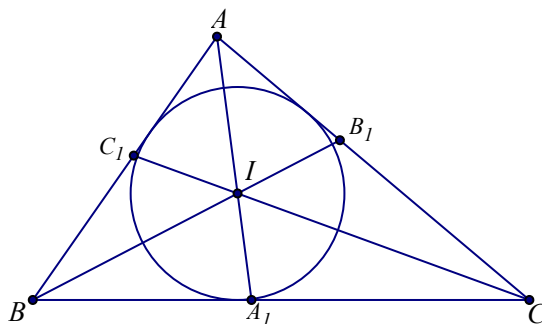
$$\overrightarrow{IA_1} = \frac{A_1C}{BC}.\overrightarrow{IB} + \frac{A_1B}{BC}.\overrightarrow{IC} \quad (*)$$

Ta có: $\frac{IA_1}{IA} = \frac{S_{BIA_1}}{S_{BIA}} = \frac{S_{CIA_1}}{S_{CIA}} \Rightarrow \frac{IA_1}{IA} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$. Do đó

$$\overrightarrow{IA_1} = -\frac{S_a}{S_b + S_c} \overrightarrow{IA}$$

Ta lại có: $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_{IA_1C}}{S_{IA_1B}}$. Mặt khác: $\frac{S_{IA_1C}}{S_{IAC}} = \frac{IA_1}{IA} = \frac{S_{IA_1B}}{S_{IAB}} \Rightarrow \frac{S_{IA_1C}}{S_{IA_1B}} = \frac{S_{IAC}}{S_{IAB}} = \frac{S_b}{S_c}$.

Do đó, $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_b}{S_c} \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1B + A_1C} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \Rightarrow \frac{A_1C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c}$ (**).



Tương tự: $\frac{A_1B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c}$ (***)

Thay (**) và (***) vào (*) ta được :

$$-\frac{S_a}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{IA} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{S_c}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow -S_a \cdot \overrightarrow{IA} = S_b \cdot \overrightarrow{IB} + S_c \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$\Leftrightarrow S_a \cdot \overrightarrow{IA} + S_b \cdot \overrightarrow{IB} + S_c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}. \text{ (đpcm)}$$

Hoạt động khái quát hóa bài toán 1.4

Bây giờ chúng ta thử tìm cách mở rộng cho **bài toán 1.4**, nghĩa là: Nếu M là điểm bất kỳ trong $\triangle ABC$ với: $S_a = S_{\triangle MBC}$; $S_b = S_{\triangle MAC}$; $S_c = S_{\triangle MAB}$ thì đẳng thức:

$$S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ còn đúng nữa hay không?}$$

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của : AM, BM, CM với BC, AC, AB . Áp dụng bài toán 1.1 ta có : $\overrightarrow{MA_1} = \frac{A_1C}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{A_1B}{BC} \cdot \overrightarrow{MC}$ (*)

Trong chứng minh trên với I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta có: $\frac{IA_1}{IA} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$.

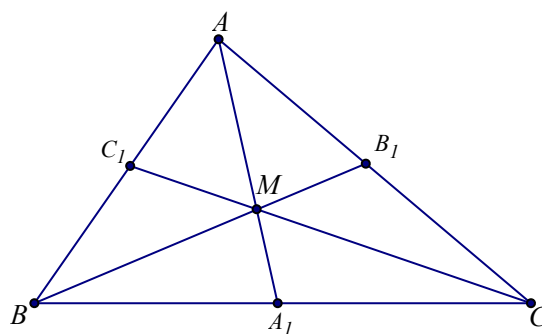
Nếu M là điểm bất kỳ trong tam giác $\triangle ABC$ thì

$$\frac{MA_1}{MA} = \frac{S_a}{S_b + S_c} ? \quad \frac{A_1C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c} ?$$

$$\frac{A_1B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c} ? \quad \text{Từ đó chúng ta dự đoán:}$$

$$S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Hãy chứng minh hoặc bác bỏ các dự đoán trên?



Thật vậy.

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của : AI, BI, CI với BC, AC, AB . Áp dụng bài toán 1.1 ta có : $\overrightarrow{MA_1} = \frac{A_1C}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{A_1B}{BC} \cdot \overrightarrow{MC}$ (*)

$$\text{Ta có: } \frac{MA_1}{MA} = \frac{S_{BMA_1}}{S_{BMA}} = \frac{S_{CMA_1}}{S_{CMA}} \Rightarrow \frac{MA_1}{MA} = \frac{S_a}{S_b + S_c}.$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{MA_1} = -\frac{S_a}{S_b + S_c} \overrightarrow{MA}.$$

Ta lại có: $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_{MA_1C}}{S_{MA_1B}}$.

Mặt khác:

$$\frac{S_{MA_1C}}{S_{MAC}} = \frac{MA_1}{MA} = \frac{S_{MA_1B}}{S_{MAB}} \Rightarrow \frac{S_{MA_1C}}{S_{MA_1B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c}.$$

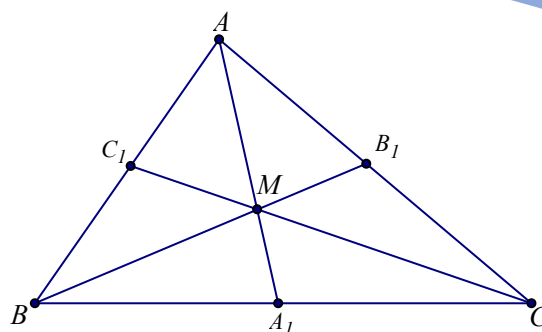
Do đó:

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_b}{S_c} \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1B + A_1C} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \Rightarrow \frac{A_1C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c} (**).$$

Tương tự: $\frac{A_1B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c} (***)$. Thay (**) và (***) vào (*) ta được :

$$-\frac{S_a}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow -S_a \cdot \overrightarrow{MA} = S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$



Như vậy, nếu ta thay I bởi điểm M bất kỳ trong tam giác $\triangle ABC$ thì kết quả vẫn không thay đổi tức là chúng ta đã giải quyết được vấn đề đặt ra là tìm cách mở rộng cho bài toán 1.4. Hãy phát biểu vấn đề trên thành nội dung bài toán và chứng minh bài toán đó.

Bài toán 1.5.

Cho $\triangle ABC$ có ba cạnh $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Gọi M là điểm bất kỳ trong $\triangle ABC$ với: $S_a = S_{\triangle MBC}$; $S_b = S_{\triangle MAC}$; $S_c = S_{\triangle MAB}$. Chứng minh: $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của : AM, BM, CM với BC, AC, AB .

$$\text{Áp dụng bài toán 1.1 ta có : } \overrightarrow{MA_1} = \frac{A_1C}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{A_1B}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} (*)$$

$$\text{Ta có: } \frac{MA_1}{MA} = \frac{S_{BMA_1}}{S_{BMA}} = \frac{S_{CMA_1}}{S_{CMA}} \Rightarrow \frac{MA_1}{MA} = \frac{S_a}{S_b + S_c}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MA_1} = -\frac{S_a}{S_b + S_c} \overrightarrow{MA}. \text{ Ta lại có: } \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_{MA_1C}}{S_{MA_1B}}.$$

Mặt khác: $\frac{S_{MA_1C}}{S_{MAC}} = \frac{MA_1}{MA} = \frac{S_{MA_1B}}{S_{MAB}} \Rightarrow \frac{S_{MA_1C}}{S_{MA_1B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c}.$

Do đó, $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_b}{S_c} \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1B + A_1C} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \Rightarrow \frac{A_1C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c} (**).$

Tương tự: $\frac{A_1B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c} (***)$. Thay (**) và (***) vào (*) ta được :

$$-\frac{S_a}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Hoạt động khai thác kết quả bài toán 1.5.

Bây giờ, nếu cho $\triangle ABC$. Gọi M là điểm trong $\triangle ABC$ và H, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên BC, CA, AB sao cho $MH = MK + ML$; BE, CF lần lượt là các đường phân giác kẻ từ B, C . Hãy dự đoán về 3 điểm M, E, F .

Định hướng lời giải.

Nếu M là điểm trong $\triangle ABC$ và H, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên BC, CA, AB sao cho $MH = MK + ML$ thì kết quả $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (1.5) có còn đúng nữa hay không?

Hãy biểu thị MH theo a, S_a ? MK theo b, S_b ? ML theo c, S_c ?

Hãy biểu thị đẳng thức $MH = MK + ML$ theo a, b, c, S_a, S_b, S_c ?

Từ đó, chứng minh

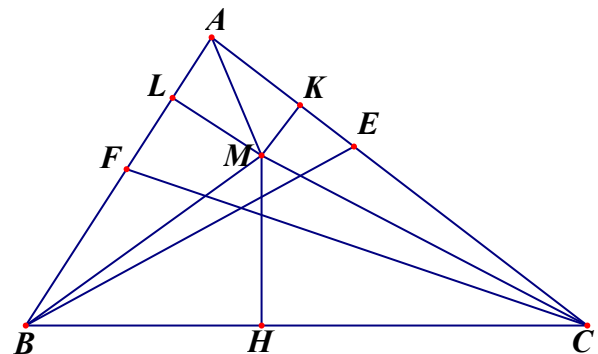
$$(1.5) \Leftrightarrow \frac{S_b}{b} (a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB}) + \frac{S_c}{c} (a \cdot \overrightarrow{MA} + c \cdot \overrightarrow{MC}) = \vec{0} ?$$

Từ đó, hãy chứng minh đẳng thức ?

Nếu có đẳng thức $\frac{S_b}{b} (a + b) \overrightarrow{MF} + \frac{S_c}{c} (a + c) \overrightarrow{ME} = \vec{0}$ thì các em có kết luận gì về 3 điểm M, E, F ?

Hãy chứng minh hoặc bác bỏ nhận định trên?

Thật vậy:



Theo kết quả bài toán 1.5 ta có: $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (1.5). Mặt khác, theo giả thiết

$MH = MK + ML$ nên $\frac{S_a}{a} = \frac{S_b}{b} + \frac{S_c}{c}$ (1.5.1). Từ (1.5) và (1.5.1) ta có:

$$\left(\frac{a \cdot S_b}{b} + \frac{a \cdot S_c}{c} \right) \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_b}{b} (a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB}) + \frac{S_c}{c} (a \cdot \overrightarrow{MA} + c \cdot \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_b}{b} (a+b) \overrightarrow{MF} + \frac{S_b}{b} (a \cdot \overrightarrow{FA} + b \cdot \overrightarrow{FB}) + \frac{S_c}{c} (a+c) \overrightarrow{ME} + \frac{S_c}{c} (a \cdot \overrightarrow{EA} + c \cdot \overrightarrow{EC}) = \vec{0}.$$

Do BE, CF lần lượt là các đường phân giác kẻ từ B, C nên ta có: $\frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}; \frac{EA}{EC} = \frac{c}{a}$. Suy ra:

$$a \cdot \overrightarrow{FA} + b \cdot \overrightarrow{FB} = \vec{0}; a \cdot \overrightarrow{EA} + c \cdot \overrightarrow{EC} = \vec{0}. \text{ Từ đó, ta có: } \frac{S_b}{b} (a+b) \overrightarrow{MF} + \frac{S_c}{c} (a+c) \overrightarrow{ME} = \vec{0}.$$

Như vậy, chúng ta có thể kết luận ba điểm M, E, F thẳng hàng. Từ đó chúng ta có bài toán sau.

Bài toán 1.6.

Cho $\triangle ABC$ có ba cạnh $AB = c, BC = a, AC = b$. Gọi M là điểm trong $\triangle ABC$ và H, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên BC, CA, AB sao cho $MH = MK + ML$; BE, CF lần lượt là các đường phân giác kẻ từ B, C . Chứng minh ba điểm M, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi $S_a = S_{\triangle MBC}; S_b = S_{\triangle MAC}; S_c = S_{\triangle MAB}$

Theo kết quả bài toán 1.5 ta có:

$$S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ (1.6).}$$

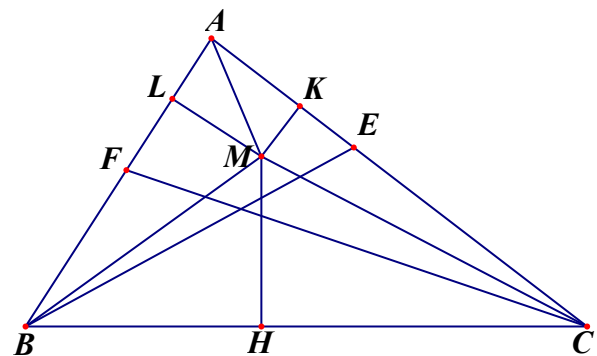
Mặt khác, theo giả thiết

$$MH = MK + ML \text{ nên } \frac{S_a}{a} = \frac{S_b}{b} + \frac{S_c}{c} \text{ (1.6.1).}$$

Từ (1.6) và (1.6.1) ta có:

$$\left(\frac{a \cdot S_b}{b} + \frac{a \cdot S_c}{c} \right) \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_b}{b} (a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB}) + \frac{S_c}{c} (a \cdot \overrightarrow{MA} + c \cdot \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$$



$$\Leftrightarrow \frac{S_b}{b}(a+b)\overrightarrow{MF} + \frac{S_b}{b}(a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB}) + \frac{S_c}{c}(a+c)\overrightarrow{ME} + \frac{S_c}{c}(a\overrightarrow{EA} + c\overrightarrow{EC}) = \vec{0}.$$

Do BE, CF lần lượt là các đường phân giác kẻ từ B, C nên ta có: $\frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}; \frac{EA}{EC} = \frac{c}{a}.$

Suy ra: $a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB} = \vec{0}; a\overrightarrow{EA} + b\overrightarrow{EB} = \vec{0}.$

Từ đó, ta có: $\frac{S_b}{b}(a+b)\overrightarrow{MF} + \frac{S_c}{c}(a+c)\overrightarrow{ME} = \vec{0}.$ Chứng tỏ ba điểm M, E, F thẳng hàng.

4. Kết luận.

+ Từ những bài toán cơ bản, nếu có cơ hội giáo viên nên tổ chức cho học sinh giải bài toán bằng nhiều cách khác nhau; tổ chức cho học sinh nghiên cứu sâu lời giải như: xét bài toán tương tự, khái quát hoá bài toán; đặc biệt hoá bài toán; phân tích, so sánh kết quả bài toán; xét mối liên hệ nội bộ toán học của bài toán; xét các yếu tố bản chất của bài toán, loại bỏ các yếu tố không bản chất tổng hợp các kiến thức đã học giải các bài toán tương tự; để từ đó đề xuất các bài toán mới. Từ đó, hình thành cho các em học sinh thói quen khi giải toán luôn luôn có ham muốn nghiên cứu, giải quyết bài toán dưới nhiều cách khác nhau.

+ Nếu có cơ hội GV tổ chức cho học sinh luyện tập các thao tác trên một cách có hệ thống, thường xuyên sẽ hình thành và phát triển cho học sinh năng lực tư duy, lập luận toán học; năng lực GQVĐ; năng lực sử dụng các công cụ toán học; năng lực giao tiếp toán học,...ngoài ra, còn giáo dục sâu sắc cho các em quan điểm toàn diện trong cuộc sống, gây hứng thú trong học tập cho học sinh.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tam giác đều $\triangle ABC$ tâm O . M là điểm bất kỳ trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Bài 2. Đường tròn tâm I nội tiếp của $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P . Chứng minh: $a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} = \vec{0}.$

Bài 3. Cho tam giác ABC với các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh: $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ac} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, trực tâm H . Chứng minh: $\tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$

Bài 5. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a , M là điểm bất kỳ trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB . Chứng minh rằng: $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Tài liệu tham khảo

[1]. Bộ GD&ĐT, (2006), *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên thực hiện chương trình, sách giáo khoa lớp 10 THPT môn Toán*, NXB Giáo dục.

[2]. Văn Như Cương (chủ biên), Phạm Vũ Khuê, Trần Hữu Nam, (2006), *Bài tập Hình học 10 (Nâng cao)*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

[3]. Nguyễn Thị Mỹ Hằng (chủ biên), Phạm Xuân Chung, Trương Thị Dung, (2016), *Rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh trong dạy học môn Toán ở trường THPT*, Nxb Đại học sư phạm.

[4]. Nguyễn Bá Kim, (2011), *Phương pháp dạy học môn Toán*, Nxb Đại học Sư phạm, Hà Nội.

[5]. Phan Trọng Ngo, (2005), *Dạy học và phương pháp dạy học trong nhà trường*. Nxb Đại học sư phạm.

[6]. G.Polya, (2009), *Giải một bài toán như thế nào*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

[7]. Đào Tam, (2008), *Phương pháp dạy học hình học ở trường THPT*, Nxb Đại học sư phạm, Hà Nội.

[8]. Đào Tam (Chủ biên), Trần Trung (2010), *Tổ chức hoạt động nhận thức trong dạy học môn Toán ở trường THPT*, Nxb Đại học sư phạm, Hà Nội.

[9]. Vụ giáo dục trung học, Chương trình phát triển GDTH, (2014), *Tài liệu tập huấn dạy học và kiểm tra, đánh giá kết quả học tập theo định hướng phát triển năng lực của học sinh môn Toán*, (Lưu hành nội bộ).