

TỰ HỌC TOÁN 7

MỤC LỤC

PHẦN I Đại số

1

CHƯƠNG 1 Số hữu tỉ. Số thực

3

1	TẬP HỢP $\mathbb{R}$ CÁC SỐ HỮU TỈ	3
	A Tóm tắt lý thuyết	3
	B Các dạng toán	4
	Dạng 1. Biểu diễn số hữu tỉ	4
	Dạng 2. So sánh hai số hữu tỉ	5
2	CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ	11
	A Tóm tắt lý thuyết	11
	B Các dạng toán	11
	Dạng 1. Cộng, trừ số hữu tỉ	11
	Dạng 2. Mở đầu về phương trình	13
	Dạng 3. Biểu diễn một số hữu tỉ thành tổng hoặc hiệu của các số hữu tỉ khác ...	14
3	NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ	19
	A Tóm tắt lý thuyết	19
	B Phương pháp giải toán	19
4	GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN	28
	A Tóm tắt lý thuyết	28
	B Phương pháp giải toán	28
5	LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ	34
	A Tóm tắt lý thuyết	34
	B Phương pháp giải toán	35
	C Bài tập luyện tập	37
6	TỈ LỆ THỨC	40
	A Tóm tắt lý thuyết	40
	B Phương pháp giải toán	41
	C Bài tập luyện tập	45
7	SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN. LÀM TRÒN SỐ	49
	A Tóm tắt lý thuyết	49
	B Các dạng Toán	50
	C Bài tập tự luyện	51
8	SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI	54
	A Tóm tắt lý thuyết	54
	B Các dạng Toán	54

C	Bài tập tự luyện	56
---	------------------------	----

CHƯƠNG 2 Hàm số và đồ thị 59

1	ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN	59
A	Tóm tắt lí thuyết	59
B	Các dạng toán	59
	Dạng 1. Sử dụng định nghĩa và tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận để giải toán ..	59
	Dạng 2. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ thuận	62
C	Bài tập tự luyện	63
2	ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH	67
A	Tóm tắt lí thuyết	67
B	Các dạng toán	67
	Dạng 1. Sử dụng định nghĩa và tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch để giải toán ..	67
	Dạng 2. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ nghịch	70
C	Bài tập tự luyện	71
3	HÀM SỐ	76
A	Tóm tắt lí thuyết	76
B	Phương pháp giải toán	76
C	Bài tập luyện tập	78
4	MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ	82
A	Tóm tắt lí thuyết	82
B	Phương pháp giải toán	83
C	Bài tập luyện tập	84
5	ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax$, VỚI $a \neq 0$	89
A	Tóm tắt lý thuyết	89
B	Phương pháp giải toán	89
C	Bài tập luyện tập	91

CHƯƠNG 3 Thống kê 97

1	THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ	97
A	Tóm tắt lí thuyết	97
B	Phương Pháp Giải Toán	97
C	BÀI TẬP LUYỆN TẬP	100
2	BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA ĐẦU HIỆU	105
A	Tóm Tắt Lí Thuyết	105
B	Phương Pháp Giải Toán	105
C	Bài tập luyện tập	108
3	BIỂU ĐỒ	113
A	Tóm tắt lý thuyết	113
B	Phương pháp giải toán	114

4	SỐ TRUNG BÌNH CỘNG	119
A	Tóm tắt lý thuyết	119
B	Phương pháp giải toán	119

CHƯƠNG 4 Biểu thức đại số 127

1	KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ	127
A	Tóm tắt lý thuyết	127
B	Phương pháp giải toán	127
C	Bài tập luyện tập	129
2	GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ	132
A	Tóm tắt lý thuyết	132
B	Phương pháp giải toán	132
C	Bài tập luyện tập	135
3	ĐƠN THỨC	138
A	Tóm tắt lý thuyết	138
B	Phương pháp giải toán	139
C	Bài tập tự luyện	141
4	ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG	143
A	Tóm tắt lý thuyết	143
B	Phương pháp giải toán	143
C	Bài tập tự luyện	145
5	ĐA THỨC	147
A	Tóm tắt lý thuyết	147
B	Các dạng toán	147
	Dạng 1. Nhận biết đa thức	147
	Dạng 2. Thu gọn đa thức	148
	Dạng 3. Tìm bậc của đa thức	150
6	Cộng trừ đa thức	153
A	Trọng tâm kiến thức	153
B	Các dạng toán	153
	Dạng 1. Tính tổng, hiệu của hai đa thức	153
	Dạng 2. Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức	155
	Dạng 3. Bài toán liên quan đến chia hết	157
7	ĐA THỨC MỘT BIẾN	159
A	Tóm tắt lý thuyết	159
B	Các dạng toán	159
C	Bài tập tự luyện	162
8	CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN	165
A	Tóm tắt lý thuyết	165
B	PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	166

C	BÀI TẬP LUYỆN TẬP	168
9	Nghiệm của đa thức một biến	172
A	Tóm tắt lý thuyết	172
B	Phương pháp giải toán	172
C	BÀI TẬP LUYỆN TẬP	173

PHẦN II Hình học

177

CHƯƠNG 1 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG 179

1	HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH	179
A	Tóm tắt lý thuyết	179
B	Phương pháp giải toán	179
C	Bài tập tự luyện	181
2	HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	185
A	Tóm tắt lý thuyết	185
B	Phương pháp giải toán	186
C	Bài tập luyện tập	188
3	CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG	194
A	GÓC SO LE TRONG. GÓC ĐỒNG VỊ	194
B	Tính chất	194
4	HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	199
A	Tóm tắt lý thuyết	199
B	Phương pháp giải toán	201
5	TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG	207
A	Tóm tắt lý thuyết	207
B	Các dạng toán và phương pháp giải	207
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	211

CHƯƠNG 2 TAM GIÁC 217

1	TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC	217
A	Tóm tắt lý thuyết	217
B	Phương pháp giải toán	218
	Dạng 1. Giải bài toán định lượng	218
C	Bài tập luyện tập	226
2	HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU	234
A	Tóm tắt lý thuyết	234
B	Các dạng toán	234
C	Bài tập tự luyện	236

3	Hai tam giác bằng nhau cạnh - cạnh - cạnh	239
A	Tóm tắt lí thuyết	239
B	Các dạng toán	239
	Dạng 1. Chứng minh hai tam giác bằng nhau	239
	Dạng 2. Sử dụng hai tam giác bằng nhau để giải toán	240
	Dạng 3. Vẽ $\triangle ABC$, biết $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$	242
C	Bài tập tự luyện	243
4	HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU CẠNH-GÓC-CẠNH	247
A	TÓM TẮT LÍ THUYẾT	247
B	PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	247
C	Các dạng toán	247
	Dạng 1. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU	247
	Dạng 2. Vẽ $\triangle ABC$, BIẾT $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{BAC} = \alpha$	251
D	BÀI TẬP LUYỆN TẬP	252
5	HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU GÓC-CẠNH-GÓC	256
A	Tóm tắt lí thuyết	256
B	Các dạng toán	256
	Dạng 1. Chứng minh hai tam giác bằng nhau	256
	Dạng 2. Sử dụng hai tam giác bằng nhau để giải toán	257
	Dạng 3. Vẽ $\triangle ABC$, biết $AB = c$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$	261
C	Bài tập tự luyện	262
6	TAM GIÁC CÂN	266
A	Tóm tắt lí thuyết	266
B	Các dạng toán	266
	Dạng 1. Chứng minh tính chất của tam giác cân, tam giác đều	266
	Dạng 2. Chứng minh một tam giác là tam giác cân, tam giác đều	269
	Dạng 3. Sử dụng tam giác cân, tam giác đều để giải toán định lượng	271
	Dạng 4. Sử dụng tam giác cân giải bài toán định tính	274
C	Bài tập tự luyện	276
7	ĐỊNH LÍ PY - TA - GO	283
A	Tóm tắt lí thuyết	283
B	Phương pháp giải toán	283
C	Bài tập luyện tập	285
8	CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG	293
A	Tóm tắt lí thuyết	293
B	Phương pháp giải toán	293

CHƯƠNG 3 QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC.CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QU

1	QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC	297
	A Tóm tắt lí thuyết	297
	B Phương pháp giải toán	297
	Dạng 1. Chứng minh các tính chất về mối quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác	297
	Dạng 2. Sử dụng tính chất về mối quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác giải toán	298
2	QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU	307
	A Tóm tắt lí thuyết	307
	B Các dạng toán	307
	Dạng 1. Chứng minh các tính chất về mối quan hệ giữa các đường xiên và các hình chiếu của chúng	307
	Dạng 2. Sử dụng tính chất về mối quan hệ giữa các đường xiên và các hình chiếu của chúng giải toán	308
	C Bài tập tự luyện	313
3	QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC - BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC.....	316
	A Tóm tắt lí thuyết	316
	B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	316
	Dạng 1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC.....	316
	Dạng 2. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC ĐỂ GIẢI TOÁN	317
	C BÀI TẬP TỰ LUYỆN	321
4	TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC.....	325
	A Tóm tắt lí thuyết	325
	B Các dạng toán	326
	Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng	326
	Dạng 2. Chứng minh tính chất hình học.....	329
5	TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC	335
	A Tóm tắt lý thuyết	335
	B Các dạng toán	335
	Dạng 1. Chứng minh tính chất tia phân giác của một góc	335
	Dạng 2. Chứng minh một tia là tia phân giác của một góc	336
	Dạng 3. Dựng tia phân giác của một góc.....	336
	Dạng 4. Sử dụng tính chất tia phân giác của một góc để giải toán	337
6	TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC.....	342
7	TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG.....	349
	A Tóm tắt lí thuyết	349
	B Các dạng toán	350
	Dạng 1. Chứng minh tính chất đường trung trực.....	350
	Dạng 2. Sử dụng tính chất đường trung trực để giải toán	351

	C	Bài tập tự luyện	354
8		TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC	357
	A	Tóm tắt lí thuyết	357
	B	Các dạng toán	357
		Dạng 1. Chứng minh tính chất ba đường trung trực của tam giác	357
		Dạng 2. Sử dụng tính chất của ba đường trung trực của tam giác để giải toán ..	358
9		TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC	364
	A	Tóm tắt lí thuyết	364
	B	Các dạng toán	364
	C	Bài tập tự luyện	368

PHẦN
I

ĐẠI SỐ

CHƯƠNG

1

SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

BÀI 1 TẬP HỢP $\mathbb{R}$ CÁC SỐ HỮU TỈ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số hữu tỉ

Định nghĩa 1. Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.

Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

Nhận xét. — Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ trong đó phép chia cho một số khác 0 luôn được thực hiện.

- Các phân số bằng nhau xác định cùng một số hữu tỉ và một trong số đó là một đại diện của số hữu tỉ.
- Mỗi số hữu tỉ được xác định bởi phân số đại diện và các phép toán trên số hữu tỉ đều được xác định trên các phép toán của phân số đại diện.

2. Biểu diễn số hữu tỉ trên trục số

Giả sử cần biểu diễn số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b > 0$, ta thực hiện theo các bước

- **Bước 1:** Chia đoạn thẳng đơn vị thành b phần bằng nhau. Lấy một đoạn làm đơn vị mới thì đơn vị mới bằng $\frac{1}{b}$ đơn vị cũ.
- **Bước 2:** Biểu diễn a theo đơn vị mới.

Nhận xét. — Các điểm hữu tỉ dương nằm bên phải điểm O , các điểm hữu tỉ âm nằm bên trái điểm O .

- Giữa hai số hữu tỉ phân biệt bao giờ cũng có một số hữu tỉ khác chúng. Ta nói “**Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{R}$ có tính chất trù mật**”.
- Phần nguyên của số hữu tỉ x (Kí hiệu: $[x]$) là một số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Tức là $[x] \leq x < [x] + 1$.

3. So sánh hai số hữu tỉ

Với hai số bất kì $x, y \in \mathbb{Q}$, ta luôn viết được dưới dạng

$$x = \frac{a}{m} \text{ và } y = \frac{b}{m} \text{ với } m > 0.$$

Từ đó ta có

- Nếu $x = y$ thì $a = b$.
- Nếu $x < y$ thì $a < b$.
- Nếu $x > y$ thì $a > b$.

Nhận xét: Để so sánh hai số hữu tỉ x và y ta thực hiện các bước

- **Bước 1:** Biến đổi hai số x và y về dạng phân số có cùng mẫu số dương.
- **Bước 2:** Sử dụng nhận xét trên.
- **Bước 3:** Kết luận.

4. Số hữu tỉ dương, âm

Cho $x \in \mathbb{Q}$, ta có

- $x > 0 \Leftrightarrow x$ là số dương.
- $x < 0 \Leftrightarrow x$ là số âm.
- $x = 0$ thì x không là số âm cũng không là số dương.

Từ đó, ta rút ra một số tính chất sau: Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$. Ta có

Tính chất 1. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$ với $b > 0, d > 0$.

Tính chất 2. Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ với $b > 0, d > 0$.

Tính chất 3. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ với $b \neq 0$.

Tính chất 4. $-(-\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$ với $b \neq 0$.

Tính chất 5. $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ với $b \neq 0$.

B CÁC DẠNG TOÁN

□ DẠNG 1. Biểu diễn số hữu tỉ

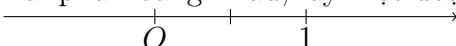
Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Nêu các bước để biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ trên trục số. Từ đó, biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{5}{2}$ trên trục số đó.

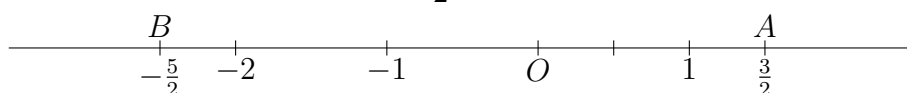
✎ LỜI GIẢI.

Ta thực hiện theo các bước

- Chia đoạn thẳng đơn vị thành hai phần bằng nhau, lấy một đoạn làm đơn vị mới. Ta được



- Biểu diễn 3 theo đơn vị mới. Do đó, số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ được biểu diễn bằng điểm A nằm ở trên điểm O và cách điểm O một đoạn bằng 3. Điểm $-\frac{5}{2}$ được biểu diễn hoàn toàn tương tự.





VÍ DỤ 2. Viết 3 đại diện của mỗi số hữu tỉ sau rồi nêu dạng tổng quát của nó.

$$x_1 = -6; x_2 = -\frac{7}{3}; x_3 = \frac{5}{12}; x_4 = -1,25; x_5 = \frac{6}{4}.$$

LỜI GIẢI.

Ta có:

$$— x_1 = -6 = \frac{-6}{1} = \frac{-12}{2} = \frac{-24}{4} = \dots = \frac{-6k}{4k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

$$— x_2 = -\frac{7}{3} = \frac{-14}{6} = \frac{-21}{9} = \frac{-28}{12} = \dots = \frac{-7k}{3k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

$$— x_3 = \frac{5}{12} = \frac{-5}{-12} = \frac{-10}{-24} = \frac{-15}{-36} = \dots = \frac{5k}{12k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

$$— x_4 = -1,25 = \frac{-5}{4} = \frac{-10}{8} = \frac{-15}{12} = \dots = \frac{-5k}{4k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

$$— x_5 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{-3}{-2} = \frac{12}{8} = \dots = \frac{3k}{2k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$



⚠ Chú ý: Để chỉ ra được dạng tổng quát của một số hữu tỉ x ta thực hiện theo các bước

— **Bước 1:** Biến đổi x về dạng phân số tối giản, giả sử $x = \frac{m}{n}$.

— **Bước 2:** Khi đó, dạng tổng quát của x là $x = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \neq 0$.

DẠNG 2. So sánh hai số hữu tỉ

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 3. Sử dụng tính chất hãy xem các phân số sau đây có bằng nhau không?

a) $\frac{-5}{6}$ và $\frac{15}{-18}$.

b) $\frac{12}{7}$ và $\frac{-47}{-28}$.

c) $-\frac{17}{5}$ và $\frac{-5}{3}$.

LỜI GIẢI.

Ta có

① $\frac{15}{-18} = \frac{-15}{18} \Rightarrow \frac{-5}{6} = \frac{-15}{18}$ vì $(-5) \cdot 18 = (-15) \cdot 6 = 90$.

② $\frac{-47}{-28} = \frac{47}{28} \Rightarrow \frac{12}{7} > \frac{47}{28}$ vì $12 \cdot 28 = 336 > 47 \cdot 7 = 329$.

③ $-\frac{17}{5} = \frac{-17}{5} \Rightarrow \frac{-5}{3} > \frac{-17}{5}$ vì $(-5) \cdot 5 = -25 > (-17) \cdot 3 = -51$.



⚠ Chú ý: Trong câu b) nếu ta nhận xét rằng $\frac{12}{7} > \frac{-47}{-28}$ vì $12 \cdot (-28) = -336 < (-47) \cdot 7 = -329$ là hoàn toàn sai vì mẫu số âm. Do vậy, khi so sánh hai phân số ta phải biến đổi phân số với mẫu dương thì mới áp dụng được **Tính chất 1** và **Tính chất 2**.

VÍ DỤ 4. Hãy so sánh hai số hữu tỉ

a) $-0,3$ và $\frac{-1}{5}$.

b) $-0,6$ và $\frac{1}{-2}$.

LỜI GIẢI.

- ① Trước tiên, ta biến đổi hai số $-0,3$ và $\frac{-1}{5}$ về dạng phân số có cùng mẫu số

$$-0,3 = \frac{-0,3 \cdot 10}{10} = \frac{-3}{10}, \quad \frac{-1}{5} = \frac{-1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{-2}{10}.$$

$$\text{Tới đây, ta có nhận xét } -3 < -2 \Leftrightarrow \frac{-3}{10} < \frac{-2}{10} \Leftrightarrow -0,3 < \frac{-1}{5}.$$

- ② Trước tiên, ta biến đổi hai số $-0,6$ và $\frac{1}{-2}$ về dạng phân số có cùng mẫu số

$$-0,6 = \frac{-0,6 \cdot 10}{10} = \frac{-6}{10}, \quad \frac{1}{-2} = \frac{1 \cdot (-5)}{(-2) \cdot (-5)} = \frac{-5}{10}.$$

$$\text{Tới đây, ta có nhận xét } -6 < -5 \Leftrightarrow \frac{-6}{10} < \frac{-5}{10} \Leftrightarrow -0,6 < \frac{1}{-2}.$$

□

VÍ DỤ 5 (Bài 5/tr 8 - sgk). Cho $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$. Biết $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ và $x < y$. Hãy chứng tỏ rằng $x < \frac{a+b}{2m} < y$.

LỜI GIẢI.

Ta viết lại x, y dưới dạng có cùng mẫu số bằng $2m$ là $x = \frac{2a}{2m}$, $y = \frac{2b}{2m}$.

Từ giả thiết $x < y$ ta được $\frac{a}{m} < \frac{b}{m} \Leftrightarrow a < b$. (1)

Khi đó

— Cộng hai vế của (1) với a , ta được

$$a + a < b + a \Leftrightarrow 2a < a + b \Rightarrow \frac{2a}{2m} < \frac{a+b}{2m} \Leftrightarrow x < \frac{a+b}{2m}. \quad (2)$$

— Cộng hai vế của (1) với b , ta được

$$a + b < b + b \Leftrightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2m} < \frac{2b}{2m} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2m} < y. \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta suy ra điều phải chứng minh. □

VÍ DỤ 6. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b > 0$. So sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$.

LỜI GIẢI.

Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$ ta đi so sánh hai số $a(b+1)$ và $b(a+1)$. Xét hiệu $a(b+1) - b(a+1) = ab + a - (ab + b) = a - b$.

Ta có ba trường hợp, với điều kiện $b > 0$

— **Trường hợp 1:** Nếu $a - b = 0 \Rightarrow a = b$ thì $a(b+1) - b(a+1) = 0 \Leftrightarrow a(b+1) = b(a+1)$

$$\frac{a(b+1)}{b(b+1)} = \frac{b(a+1)}{b(b+1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}.$$

— **Trường hợp 2:** Nếu $a - b < 0 \Rightarrow a < b$ thì $a(b + 1) - b(a + 1) < 0 \Leftrightarrow a(b + 1) < b(a + 1)$

$$\frac{a(b + 1)}{b(b + 1)} < \frac{b(a + 1)}{b(b + 1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a + 1}{b + 1}.$$

— **Trường hợp 3:** Nếu $a - b > 0 \Rightarrow a > b$ thì $a(b + 1) - b(a + 1) > 0 \Leftrightarrow a(b + 1) > b(a + 1)$

$$\frac{a(b + 1)}{b(b + 1)} > \frac{b(a + 1)}{b(b + 1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a + 1}{b + 1}.$$

Nhận xét. Với phương pháp được minh họa trong ví dụ trên chúng ta có thể đi thực hiện bài toán tổng quát hơn, cụ thể:

Cho $a, b, n \in \mathbb{Z}$ và $b, n > 0$. So sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a + n}{b + n}$.

Khi đó ta có lập luận tương tự như sau:

Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a + n}{b + n}$ ta đi so sánh hai số $a(b + n)$ và $b(a + n)$.

Xét hiệu $a(b + n) - b(a + n) = ab + an - (ab + bn) = n(a - b)$.

Ta có ba trường hợp, với điều kiện $b, n > 0$

— **Trường hợp 1:** Nếu $n(a - b) = 0 \Rightarrow a = b$ thì $a(b + n) - b(a + n) = 0 \Leftrightarrow a(b + n) = b(a + n)$

$$\frac{a(b + n)}{b(b + n)} = \frac{b(a + n)}{b(b + n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a + n}{b + n}.$$

— **Trường hợp 2:** Nếu $n(a - b) < 0 \Rightarrow a < b$ thì $a(b + n) - b(a + n) < 0 \Leftrightarrow a(b + n) < b(a + n)$

$$\frac{a(b + n)}{b(b + n)} < \frac{b(a + n)}{b(b + n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a + n}{b + n}.$$

— **Trường hợp 3:** Nếu $n(a - b) > 0 \Rightarrow a > b$ thì $a(b + n) - b(a + n) > 0 \Leftrightarrow a(b + n) > b(a + n)$

$$\frac{a(b + n)}{b(b + n)} > \frac{b(a + n)}{b(b + n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a + n}{b + n}.$$

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. So sánh các số hữu tỉ

a) $\frac{-15}{16}$ và $\frac{5}{-8}$.

b) $-\frac{7}{3}$ và $\frac{-6}{5}$.

c) $\frac{13}{9}$ và $\frac{-16}{-3}$.

d) $\frac{2}{3}$ và $\frac{6}{7}$.

LỜI GIẢI.

Ta sẽ đưa các phân số về dạng cùng mẫu số

❶ Ta có $\frac{5}{-8} = \frac{-5}{8} = \frac{(-5) \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{-10}{16}$. Vì $-15 < -10$ nên $\frac{-15}{16} < \frac{5}{-8}$.

❷ Ta có $-\frac{7}{3} = \frac{-7}{3} = \frac{(-7) \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{-35}{15}$; $\frac{-6}{5} = \frac{(-6) \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{-18}{15}$. Vì $-35 < -18$ nên $-\frac{7}{3} < \frac{-6}{5}$.

❸ Ta có $\frac{-16}{-3} = \frac{16}{3} = \frac{16 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{48}{9}$. Vì $13 < 48$ nên $\frac{13}{9} < \frac{-16}{-3}$.

❹ Ta có $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$; $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{18}{21}$. Vì $14 < 18$ nên $\frac{2}{3} < \frac{6}{7}$.

□

BÀI 2. Sắp xếp các số hữu tỉ sau đây theo thứ tự tăng dần

$$-0,25; \frac{1}{2}; -0,5; \frac{5}{6}; \frac{13}{12}; \frac{-5}{24}; 0; \frac{1}{48}; \frac{2}{3}; \frac{-9}{8}.$$

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta biến đổi về dạng phân số có cùng mẫu số

$$\begin{array}{ll} \text{—} -0,25 = \frac{-0,25 \cdot 48}{48} = \frac{-12}{48}. & \text{—} \frac{13}{12} = \frac{13 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{52}{48}. \\ \text{—} \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 24}{2 \cdot 24} = \frac{24}{48}. & \text{—} \frac{-5}{24} = \frac{(-5) \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{-10}{48}. \\ \text{—} -0,5 = \frac{-0,5 \cdot 48}{48} = \frac{-24}{48}. & \text{—} \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 16}{3 \cdot 16} = \frac{32}{48}. \\ \text{—} \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{40}{48}. & \text{—} \frac{-9}{8} = \frac{(-9) \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{-54}{48}. \end{array}$$

Do đó các số hữu tỉ sắp xếp theo thứ tự tăng dần

$$\frac{-9}{8}; -0,5; -0,25; \frac{-5}{24}; 0; \frac{1}{48}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{13}{12}.$$

□

BÀI 3. Chứng minh rằng với mọi $b > 0$, ta có

$$\text{a) } \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b.$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b.$$

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có $1 = \frac{1}{1}$. Với giả thiết $b > 0$

$$\text{① Theo giả thiết } \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{1}{1} \Leftrightarrow a \cdot 1 > b \cdot 1 \Leftrightarrow a > b.$$

$$\text{② Theo giả thiết } \frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{1}{1} \Leftrightarrow a \cdot 1 < b \cdot 1 \Leftrightarrow a < b.$$

□

BÀI 4. Viết 5 đại diện của mỗi số hữu tỉ sau rồi nêu dạng tổng quát của nó.

$$x_1 = -2,5; x_2 = \frac{5}{6}; x_3 = \frac{-7}{5}; x_4 = -0,36; x_5 = \frac{-9}{-25}; x_6 = \frac{27}{6}.$$

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có:

$$\begin{array}{ll} \text{—} x_1 = -2,5 = \frac{-25 \cdot 2}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{(-5) \cdot 2}{2 \cdot 2} = \dots = \frac{-5k}{2k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \\ \text{—} x_2 = \frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \dots = \frac{5k}{6k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \\ \text{—} x_3 = \frac{-7}{5} = \frac{(-7) \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{-14}{10} = \dots = \frac{-7k}{5k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \\ \text{—} x_4 = -0,36 = \frac{-0,36 \cdot 25}{25} = \frac{-9}{25} = \frac{(-9) \cdot 2}{25 \cdot 2} = \dots = \frac{-9k}{25k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \\ \text{—} x_5 = \frac{-9}{-25} = \frac{9}{25} = \frac{9 \cdot 2}{25 \cdot 2} = \frac{18}{50} = \dots = \frac{9k}{25k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \\ \text{—} x_6 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{18}{4} = \dots = \frac{9k}{2k}, (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \end{array}$$

□

BÀI 5. Cho hai số hữu tỉ $x = \frac{2a+7}{5}$ và $y = \frac{3b-8}{-5}$. Với giá trị nào của a, b thì

- ① x và y là số dương.
- ② x và y là số âm.
- ③ x và y không là số dương và cũng không là số âm.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① • $x > 0 \Leftrightarrow \frac{2a+7}{5} > 0 \Leftrightarrow 2a+7 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{7}{2}$.
 • $y = \frac{3b-8}{-5} = \frac{8-3b}{5} > 0 \Leftrightarrow 8-3b > 0 \Leftrightarrow b < \frac{8}{3}$.
- ② • $x < 0 \Leftrightarrow 2a+7 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{7}{2}$.
 • $y < 0 \Leftrightarrow 8-3b < 0 \Leftrightarrow b > \frac{8}{3}$.
- ③ x và y không là số dương và cũng không là số âm, tức là $x = 0$ và $y = 0$.
 Do đó $a = -\frac{7}{2}$ và $b = \frac{8}{3}$.

□

BÀI 6. So sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$, ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) với số 0, biết

a) Hai số a và b cùng dấu.

b) Hai số a và b trái dấu.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Hai số a và b cùng dấu. Xảy ra hai khả năng
 — $a > 0$ và $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0$.
 — $a < 0$ và $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0$.
 Vậy a và b cùng dấu thì $\frac{a}{b} > 0$.
- ② Hai số a và b trái dấu. Xảy ra hai khả năng
 — $a > 0$ và $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} < 0$.
 — $a < 0$ và $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$.
 Vậy a và b trái dấu thì $\frac{a}{b} < 0$.

□

BÀI 7. Cho $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$. So sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+2005}{b+2005}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+2005}{b+2005}$ ta đi so sánh hai số $a(b+2005)$ và $b(a+2005)$.

Xét hiệu $a(b+2005) - b(a+2005) = ab + 2005a - (ab + 2005b) = 2005(a-b)$.

Ta có ba trường hợp, với điều kiện $b > 0$

— **TH 1:** Nếu $a-b=0 \Rightarrow a=b$ thì $a(b+2005) - b(a+2005) = 0 \Leftrightarrow a(b+2005) = b(a+2005)$

$$\frac{a(b+2005)}{b(b+2005)} = \frac{b(a+2005)}{b(b+2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+2005}{b+2005}.$$

— **TH 2:** Nếu $a-b < 0 \Rightarrow a < b$ thì $a(b+2005) - b(a+2005) < 0 \Leftrightarrow a(b+2005) < b(a+2005)$

$$\frac{a(b+2005)}{b(b+2005)} < \frac{b(a+2005)}{b(b+2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+2005}{b+2005}.$$

— **TH 3:** Nếu $a - b > 0 \Rightarrow a > b$ thì $a(b + 2005) - b(a + 2005) > 0 \Leftrightarrow a(b + 2005) > b(a + 2005)$

$$\frac{a(b + 2005)}{b(b + 2005)} > \frac{b(a + 2005)}{b(b + 2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a + 2005}{b + 2005}.$$

□

BÀI 8. Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết rằng x là số âm lớn nhất được viết bởi ba số 1.

✎ **LỜI GIẢI.**

Vì $x \in \mathbb{Q}$ và là số âm lớn nhất được viết bằng ba số 1 là $-\frac{1}{11}$. Do đó $x = -\frac{1}{11}$.

□

BÀI 2 CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Cộng, trừ hai số hữu tỉ

Để cộng, trừ hai số hữu tỉ x, y ta làm như sau

- **Bước 1:** Viết x, y dưới dạng hai phân số có cùng mẫu số dương $x = \frac{a}{m}$ và $y = \frac{b}{m}$.
- Thực hiện phép toán cộng, trừ

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} \quad \text{và} \quad x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Nhận xét. Ta thấy

- Hiệu của hai số hữu tỉ x và y là tổng của x với số đối của y .
- Phép cộng, trừ các số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc chọn phân số đại diện cho chúng. Vì vậy, khi cộng, trừ các số hữu tỉ có mẫu khác nhau, ta quy đồng rồi thực hiện phép toán cộng, trừ các số có cùng mẫu số

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{và} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

- Số đối của số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là $-\frac{a}{b}$ hoặc $\frac{-a}{b}$.
- Phép cộng trong $\mathbb{Q}$ cũng có tính chất cơ bản như phép cộng trong $\mathbb{Z}$, bao gồm: giao hoán, kết hợp, cộng với phần tử trung lập, cộng với số đối.
- Vì tổng, hiệu của hai số hữu tỉ là một số hữu tỉ nên từ một số hữu tỉ chúng ta có thể tách nó thành tổng hoặc hiệu của hai số hữu tỉ nào đó (suy luận ngược), điều này đặc biệt quan trọng khi thực hiện các phép tính tổng - Trong phần phương pháp giải các dạng toán chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn tới ý tưởng này.

2. Quy tắc chuyển vế

Khi chuyển vế một số từ vế này sang vế kia của một đẳng thức ta phải đổi dấu số hạng đó.

Với mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$ ta có $x + y = z \Leftrightarrow x = z - y$.

⚠ Chú ý: Trong $\mathbb{Q}$ ta cũng có những tổng đại số, trong đó cũng có thể đổi chỗ các số hạng, nhóm một số hạng bằng dấu ngoặc kèm theo quy tắc đổi dấu.

B CÁC DẠNG TOÁN

☐ DẠNG 1. Cộng, trừ số hữu tỉ

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Hãy thực hiện các phép tính:

a) $\frac{3}{2} + \frac{2}{-3}$.

b) $-2 - \left(-\frac{3}{7}\right)$.

LỜI GIẢI.

Ta có

① Cách 1: $\frac{3}{2} + \frac{2}{-3} = \frac{3}{2} + \frac{-2}{3} = \frac{9}{6} + \frac{-4}{6} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$.

Cách 2: $\frac{3}{2} + \frac{2}{-3} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$.

② Cách 1: $-2 - \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{-14}{7} - \frac{-3}{7} = \frac{-14 - (-3)}{7} = \frac{-11}{7}$.

Cách 2: $-2 - \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{-14}{7} + \frac{3}{7} = \frac{-14+3}{7} = \frac{-11}{7}$.

□

Nhận xét. Khi đã thành thạo đôi chút, các em học sinh hãy thực hiện các phép toán theo cách 2, đó là “Bỏ dấu ngoặc rồi thực hiện các phép toán cộng, trừ cho những phân số dương.”

VÍ DỤ 2. Thực hiện các phép tính:

a) $0,6 + \frac{4}{-3}$.

b) $\frac{3}{7} - (-0,2)$.

LỜI GIẢI.

① Ta có $0,6 + \frac{4}{-3} = \frac{3}{5} - \frac{4}{3} = \frac{9}{15} - \frac{20}{15} = -\frac{11}{15}$.

② Ta có $\frac{3}{7} - (-0,2) = \frac{3}{7} + 0,2 = \frac{3}{7} + \frac{1}{5} = \frac{15}{35} + \frac{7}{35} = \frac{22}{35}$.

□

VÍ DỤ 3. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = 2\frac{3}{2} - 3\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$.

b) $B = 5\frac{2}{7} - 8\frac{1}{3} + \frac{1}{21}$.

LỜI GIẢI.

① Ta có $A = 2\frac{3}{2} - 3\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} - \frac{18}{5} + \frac{1}{4} = \frac{70}{20} - \frac{72}{20} + \frac{5}{20} = \frac{70-72+5}{20} = \frac{3}{20}$.

② Ta có $B = 5\frac{2}{7} - 8\frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{37}{7} - \frac{25}{3} + \frac{1}{21} = \frac{111-175+1}{21} = -\frac{63}{21} = -3$.

□

Nhận xét. Trong ví dụ trên, các số hữu tỉ được cho dưới dạng **hỗn số**. Chính vì vậy trước tiên chúng ta cần chuyển nó về dạng phân số, các em học sinh cần nhớ công thức biến đổi.

VÍ DỤ 4 (Bài 10/tr 10-sgk). Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(6 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(5 + \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(3 - \frac{7}{3} + \frac{5}{2}\right).$$

LỜI GIẢI.

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

$$\begin{aligned}\text{Cách 1: } A &= \left(\frac{6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{6} \right) - \left(\frac{5 \cdot 6 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{6} \right) - \left(\frac{3 \cdot 6 - 7 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{6} \right) \\ &= \frac{35}{6} - \frac{31}{6} - \frac{19}{6} \\ &= -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cách 2: } A &= \left(6 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(5 + \frac{5}{3} - \frac{3}{2} \right) - \left(3 - \frac{7}{3} + \frac{5}{2} \right) \\ &= (6 - 5 - 3) + \left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right) \\ &= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

□

□ DẠNG 2. Mở đầu về phương trình

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 5 (Bài 9.a, 9.b/tr 10 -sgk). Tìm x biết

a) $x + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}.$

b) $x - \frac{2}{5} = \frac{5}{7}.$

LỜI GIẢI.

① Ta có $x + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{12} = \frac{5}{12}.$
 Vậy $x = \frac{5}{12}.$

② Ta có $x - \frac{2}{5} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow x = \frac{5}{7} + \frac{2}{5} = \frac{5 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{35} = \frac{39}{35}.$
 Vậy $x = \frac{39}{35}.$

□

VÍ DỤ 6 (Bài 9.c, 9.d/tr 10 -sgk). Tìm x biết

a) $-x - \frac{2}{3} = -\frac{6}{7}.$

b) $\frac{4}{7} - x = \frac{1}{3}.$

LỜI GIẢI.

① Ta có $-x - \frac{2}{3} = -\frac{6}{7} \Leftrightarrow x = \frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3 - 2 \cdot 7}{21} = \frac{4}{21}.$
 Vậy $x = \frac{4}{21}.$

② Ta có $\frac{4}{7} - x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 1 \cdot 7}{21} = \frac{5}{21}.$
 Vậy $x = \frac{5}{21}.$

□

VÍ DỤ 7. Tìm $[x]$ biết

a) $x - \frac{8}{5} < -6 < x.$

b) $-1\frac{1}{4} < x + \frac{2}{3}$ và $x < -\frac{1}{4}.$

LỜI GIẢI.

❶ Ta có $x - \frac{8}{5} < -6 \Leftrightarrow x < -6 + \frac{8}{5} \Rightarrow x < -\frac{22}{5} = -4\frac{2}{5}$.

Suy ra $-6 < x < -4\frac{2}{5} \Rightarrow [x] = -5$.

❷ $-1\frac{1}{4} < x + \frac{2}{3} \Rightarrow x + \frac{2}{3} > -1\frac{1}{4} \Rightarrow x > -1\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{23}{12} = -1\frac{11}{12}$
 $\Rightarrow x > -1\frac{11}{12}$. Suy ra $-1\frac{11}{12} < x < -\frac{1}{4} \Rightarrow [x] = -1$.

□

VÍ DỤ 8. Tìm giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của biểu thức

a) $A = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}$ với $x \in \mathbb{Q}$.

b) $B = \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2}$ với $x \in \mathbb{Q}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

❶ Vì $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.

Do đó $A_{\min} = \frac{1}{2}$, đạt được khi $x + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

❷ Vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2} \leq 1$.

Do đó $A_{\max} = 1$, đạt được khi $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

□

▢ DẠNG 3. Biểu diễn một số hữu tỉ thành tổng hoặc hiệu của các số hữu tỉ khác

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 9. Viết số hữu tỉ $\frac{5}{12}$ dưới các dạng sau đây

- ❶ Tổng của hai số hữu tỉ dương.
- ❷ Tổng của một số hữu tỉ dương và một số hữu tỉ âm.
- ❸ Tổng của hai số hữu tỉ dương trong đó một số là $\frac{1}{4}$

✎ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $\frac{5}{12} = \frac{2+3}{12} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.

❷ Ta có $\frac{5}{12} = \frac{7+(-2)}{12} = \frac{7}{12} + \frac{-2}{12} = \frac{7}{12} - \frac{1}{6}$.

❸ Giả sử số hữu tỉ còn lại cần tìm là x , ta được $\frac{5}{12} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Vậy ta có biểu diễn $\frac{5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.

□

⚠ Chú ý: Việc tách một số hữu tỉ thành hiệu của hai số (hoặc gọi là tổng của hai số hữu tỉ trái dấu) mang một ý nghĩa quan trọng, nó được sử dụng rất nhiều trong những toán tính tổng. Ví dụ sau

sẽ minh họa cho việc sử dụng phép tách cho số

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ với } k \in \mathbb{N}^*$$

VÍ DỤ 10. Tính tổng $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$.

🔗 LỜI GIẢI.

Nhận thấy rằng với $k \in \mathbb{N}^*$, ta luôn có

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

...

$$\frac{1}{999 \cdot 1000} = \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}.$$

$$\text{Vậy } S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}. \quad \square$$

Nhận xét. — Khi gặp bài toán này, rất nhiều em học sinh tỏ ra lúng túng, bởi nghĩ rằng $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}$, tức là cần có kiến thức về phép nhân hai số hữu tỉ (kiến thức này chưa học), tuy nhiên ở đây chúng ta đã sử dụng phép tách một số hữu tỉ thành hiệu của hai số hữu tỉ.

— Với phương pháp thực hiện tương tự trên, chúng ta sẽ có được kết quả tổng quát:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tính giá trị của các biểu thức

① $A = \frac{-5}{7} + \frac{7}{-5} + \frac{4}{7} + \frac{7}{4}.$

② $B = \frac{2}{-5} + \frac{-3}{7} + \frac{-7}{10} + \frac{3}{-8}.$

③ $C = \frac{-5}{7} + \frac{2}{-7} + \frac{4}{-9} + \frac{4}{9}.$

④ $D = \left(3 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(2 + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(1 - \frac{7}{3} - \frac{9}{2}\right).$

🔗 LỜI GIẢI.

① $A = \frac{-5}{7} + \frac{7}{-5} + \frac{4}{7} + \frac{7}{4} = \frac{-5}{7} + \frac{-7}{5} + \frac{4}{7} + \frac{7}{4} = \frac{-74}{35} + \frac{65}{28} = -\frac{296}{140} + \frac{325}{140} = \frac{29}{140}.$

② $B = \frac{-2}{5} + \frac{-3}{7} + \frac{-7}{10} + \frac{3}{-8} = \frac{-112}{280} + \frac{-120}{280} + \frac{-196}{280} + \frac{-105}{280} = -\frac{533}{280} = -1\frac{253}{280}.$

③ $C = \frac{-5}{7} + \frac{2}{-7} + \frac{4}{-9} + \frac{4}{9} = \frac{-5}{7} + \frac{-2}{7} + \frac{-4}{9} + \frac{4}{9} = -1.$

④ $D = (3 - 2 - 1) + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right) = \frac{5}{3} + \frac{21}{4} = \frac{83}{12}.$

□

BÀI 2. Tính giá trị của các biểu thức

$$\textcircled{1} A = 1\frac{1}{8} - \frac{8}{9} + \frac{3}{25} + \frac{1}{4} - \frac{5}{16} + \frac{19}{25} - \frac{1}{9} + \frac{2}{25} - \frac{1}{81}.$$

$$\textcircled{2} B = \frac{-1}{3} - \frac{8}{35} + \frac{-2}{9} - \frac{1}{35} + \frac{4}{5} + \frac{-4}{9} + \frac{3}{7}.$$

✎ **LỜI GIẢI.**

$$\textcircled{1} A = \left(1\frac{1}{8} - \frac{5}{16} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{8}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81}\right) + \left(\frac{3}{25} + \frac{19}{25} + \frac{2}{25}\right) = \frac{17}{16} - \frac{82}{81} + \frac{24}{25} = \frac{32729}{32400}.$$

$$\textcircled{2} B = \left(\frac{-1}{3} + \frac{-2}{9} + \frac{-4}{9}\right) + \left(-\frac{8}{35} + \frac{4}{5} + \frac{3}{7}\right) - \frac{1}{135} = -1 + 1 - \frac{1}{135} = -\frac{1}{135}.$$

□

BÀI 3. Tìm x biết

$$\text{a) } x - \frac{2}{35} = \frac{-3}{35}.$$

$$\text{b) } \frac{-2}{9} - x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{c) } \frac{11}{12} - \left(x + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{d) } \frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

✎ **LỜI GIẢI.**

$$\textcircled{1} x - \frac{2}{35} = \frac{-3}{35} \Leftrightarrow x = \frac{-3}{35} + \frac{2}{35} = \frac{-21}{175} + \frac{10}{175} = \frac{-11}{175}.$$

$$\textcircled{2} \frac{-2}{9} - x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9} - \frac{3}{9} = -\frac{5}{9}.$$

$$\textcircled{3} \frac{11}{12} - \left(x + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{5}\right) = \frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}.$$

$$\textcircled{4} \frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

□

BÀI 4. Tìm $[x]$ biết

$$\text{a) } x - \frac{2}{35} = 1.$$

$$\text{b) } 2 + x < \frac{5}{6} < x + 3.$$

$$\text{c) } \frac{9}{2} - x > \frac{1}{3}.$$

$$\text{d) } x < -\frac{7}{4} < x + \frac{2}{7}.$$

✎ **LỜI GIẢI.**

$$\textcircled{1} x - \frac{2}{35} = 1 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{35} = \frac{37}{35}. \text{ Do đó } [x] = 1.$$

$$\textcircled{2} \begin{aligned} & \text{— } 2 + x < \frac{5}{6} \Leftrightarrow x < \frac{5}{6} - 2 = -\frac{7}{6}. \\ & \text{— } x + 3 > \frac{5}{6} \Leftrightarrow x > \frac{5}{6} - 3 = \frac{-13}{6} = -1\frac{7}{6}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -1\frac{7}{6} < x < -\frac{7}{6} \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ [x] = -2. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \frac{9}{2} - x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x < \frac{9}{2} - \frac{1}{3} = \frac{25}{6}. \text{ Do đó } [x] = 4.$$

$$\textcircled{4} \begin{aligned} & \text{— } x < -\frac{7}{4}. \\ & \text{— } x + \frac{2}{7} > -\frac{7}{4} \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4} - \frac{2}{7} = -\frac{57}{28} = -2\frac{1}{28}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2\frac{1}{28} < x < -\frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ [x] = -2. \end{cases}$$

□

BÀI 5. Điền số nguyên thích hợp vào ô trống

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < \square < \frac{1}{48} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\right).$$

LỜI GIẢI.

Ta có

$$- \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{12} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{12} = \frac{6}{12} - \frac{7}{12} = -\frac{1}{12}.$$

$$- \frac{1}{16} - \frac{1}{6} = \frac{3}{48} - \frac{8}{48} = \frac{-5}{48} \Rightarrow \frac{1}{48} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{48} - \left(\frac{-5}{48}\right) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}.$$

Gọi x là số nguyên cần tìm. Khi đó x phải thỏa mãn $-\frac{1}{12} < x < \frac{1}{8} \Rightarrow x = 0$.

Vậy số nguyên cần tìm là 0.

□

BÀI 6. Viết số hữu tỉ $\frac{7}{20}$ dưới các dạng sau đây

① Tổng của một số hữu tỉ dương và một số hữu tỉ âm.

② Tổng của hai số hữu tỉ dương trong đó một số là $\frac{1}{4}$.**LỜI GIẢI.**① Ta có $\frac{7}{20} = \frac{10 + (-3)}{20} = \frac{10}{20} - \frac{3}{20} = \frac{1}{2} - \frac{3}{20}$.② Giả sử số hữu tỉ còn lại cần tìm là x .

$$\text{Ta có } \frac{7}{20} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{20} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20} - \frac{5}{20} = \frac{1}{10}.$$

$$\text{Vậy } \frac{7}{20} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4}.$$

□

BÀI 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{11}{12}$.**LỜI GIẢI.**

$$\text{Ta có } \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{11}{12} \geq \frac{11}{12}.$$

$$\text{Do đó } A_{\min} = \frac{11}{12}, \text{ đạt được khi } x = \frac{1}{5}.$$

□

BÀI 8. Tính giá trị lớn nhất của các biểu thức

$$\text{a) } B = -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 - \frac{183}{121} \quad \text{b) } C = \frac{4}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 5} \quad \text{c) } D = \frac{15}{(x-8)^2 - 4}.$$

LỜI GIẢI.

$$\text{① Vì } \left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 - \frac{183}{121} \leq -\frac{183}{121}.$$

$$\text{Do đó } B_{\max} = -\frac{183}{121}, \text{ đạt được khi } x = -\frac{18}{1273}.$$

$$\text{② Vì } \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 5 \geq 5.$$

$$\text{Suy ra } \frac{4}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 5} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 5} \leq \frac{4}{5}.$$

$$\text{Do đó } C_{\max} = \frac{4}{5}, \text{ đạt được khi } x = -\frac{1}{3}.$$

③ Vì $(x - 8)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 8)^2 - 4 \geq -4$.

Suy ra $\frac{1}{(x - 8)^2 - 4} \leq \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{15}{(x - 8)^2 - 4} \leq -\frac{15}{4}$.

Do đó $D_{\max} = -\frac{15}{4}$, đạt được khi $x = 8$

□

BÀI 3 NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nhắc lại phân số nghịch đảo

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, nghịch đảo của x (kí hiệu x^{-1}) là một số hữu tỉ sao cho $x \cdot x^{-1} = 1$.
 Nghịch đảo của số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là $\frac{b}{a}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$; $a, b \neq 0$.

2. Nhân hai số hữu tỉ

Tích của hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, kí hiệu là $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, được xác định như sau

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

 Như vậy:

- Phép nhân hai số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc chọn phân số đại diện của chúng.
- Phép nhân trong $\mathbb{Q}$ có những tính chất cơ bản giống phép nhân trong $\mathbb{Z}$, bao gồm: giao hoán, kết hợp, nhân với phần tử trung hòa, phân phối của phép nhân với phép cộng.

3. Chia hai số hữu tỉ

Thương của hai số hữu tỉ $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{d}$ (với $y \neq 0$) gọi là tỉ số của x và y , kí hiệu

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

là phép nhân giữa số bị chia và phân số nghịch đảo của số chia.

$$x : y = x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Tính nhanh giá trị của các biểu thức $A = \frac{0,75 + 0,6 + \frac{3}{7} + \frac{9}{24}}{2,75 + 2,2 + \frac{11}{7} + \frac{33}{24}}.$

 **LỜI GIẢI.**

Viết lại biểu thức A dưới dạng:

$$A = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{8}}{\frac{11}{4} + \frac{11}{5} + \frac{11}{7} + \frac{11}{8}} = \frac{3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right)}{11 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right)} = \frac{3}{11}.$$

□

 Như vậy, bằng việc chuyển các số thập phân về dạng hữu tỉ, rồi thiết lập nhân tử chung, chúng ta đã có được kết quả nhanh chóng.

VÍ DỤ 2. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}};$$

$$\text{b) } B = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}.$$

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có $A = 2 + \frac{1}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$

② Từ kết quả câu a), ta có

$$B = 2 + \frac{1}{1 + \frac{8}{3}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{8}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{11}{3}} = 2 + \frac{3}{11} = \frac{25}{11}.$$

□

VÍ DỤ 3 (Bài 13a, 13b Trang 12 - SGK). Tính giá trị của biểu thức

$$\text{a) } A = \frac{-3}{4} \cdot \frac{12}{-5} \cdot \left(-\frac{25}{6}\right);$$

$$\text{b) } B = (-2) \cdot \frac{-38}{21} \cdot \frac{-7}{4} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right).$$

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có thể giải theo các cách sau

Cách 1. Ta có biến đổi: $A = \frac{-3}{4} \cdot \frac{12}{-5} \cdot \frac{-25}{6} = \frac{-3 \cdot 12 \cdot (-25)}{4 \cdot (-5) \cdot 6} = \frac{900}{-120} = -\frac{15}{2}.$

Cách 2. Ta có biến đổi: $A = 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{-25}{6} = 3 \cdot \frac{-5}{2} = -\frac{15}{2}.$

② Ta có thể giải theo các cách sau

Cách 1. Ta có biến đổi: $B = \frac{(-2) \cdot (-38) \cdot (-7) \cdot (-3)}{21 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{1596}{672} = \frac{19}{8}.$

Cách 2. Ta có biến đổi: $B = \frac{38}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = 19 \cdot \frac{1}{8} = \frac{19}{8}.$

□

 Như vậy, với các yêu cầu dạng trên các em học sinh hãy sử dụng cách 2 để tránh được việc phải giản ước phân số về dạng tối giản.

VÍ DỤ 4 (Bài 13c, 13d Trang 12 - SGK). Tính giá trị của biểu thức

$$\text{a) } A = \left(\frac{11}{12} : \frac{33}{16}\right) \cdot \frac{3}{5};$$

$$\text{b) } B = \frac{7}{23} \cdot \left(-\frac{8}{6} - \frac{45}{18}\right).$$

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có biến đổi: $A = \left(\frac{11}{12} \cdot \frac{16}{33}\right) \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{15}.$

② Ta có biến đổi: $B = \frac{7}{23} \cdot \left(-\frac{8}{6} - \frac{45}{18}\right) = \frac{7}{23} \cdot \frac{-24 - 45}{18} = \frac{7}{23} \cdot \frac{-69}{18} = -\frac{7}{6}$.

Hoặc thực hiện theo cách:

$$B = \frac{7}{23} \cdot \left(-\frac{4}{3} - \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{23} \cdot \frac{-8 - 15}{6} = \frac{7}{23} \cdot \frac{-23}{6} = -\frac{7}{6}.$$

□

⚠ Như vậy, để tính giá trị của biểu thức trên ta sử dụng quy tắc tính “**trong ngoặc trước, ngoài ngoặc sau**”.

VÍ DỤ 5 (Bài 16 Trang 13 - Sgk). Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7}\right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{4}{7}\right) : \frac{4}{5};$ b) $B = \frac{5}{9} : \left(\frac{1}{11} - \frac{5}{22}\right) + \frac{5}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{3}\right).$

✎ **LỜI GIẢI.**

① Ta có biến đổi:

$$A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} + \frac{-1}{3} + \frac{4}{7}\right) : \frac{4}{5} = \left[\left(\frac{-2}{3} + \frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right)\right] \cdot \frac{5}{4} = (-1 + 1) \cdot \frac{5}{4} = 0.$$

② Ta có biến đổi:

$$\begin{aligned} B &= \frac{5}{9} : \left(\frac{2-5}{22}\right) + \frac{5}{9} : \left(\frac{1-10}{15}\right) = \frac{5}{9} : \left(-\frac{3}{22}\right) + \frac{5}{9} : \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= -\frac{5}{9} \cdot \frac{22}{3} - \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{3} = \frac{-110 - 25}{27} = -\frac{135}{27} = -5. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 6. Cho biểu thức $A = \frac{2x-3}{5x+1}$. Tìm các giá trị của x để

a) $A = 0;$ b) $A > 0;$ c) $A < 0.$

✎ **LỜI GIẢI.**

① Ta có $A = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

Vậy với $x = \frac{3}{2}$ thì $A = 0.$

② Ta có $A > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} > 0 \Leftrightarrow$ tử số và mẫu số phải cùng dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$\begin{aligned} 1) \quad \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 5x+1 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}. \\ 2) \quad \begin{cases} 2x-3 < 0 \\ 5x+1 < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Vậy với $x > \frac{3}{2}$ hoặc $x < -\frac{1}{5}$ thì $A > 0.$

③ Ta có $A < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} < 0 \Leftrightarrow$ tử số và mẫu số phải trái dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$1) \begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{cases}.$$

Vô lí vì không tồn tại giá trị nào của x thỏa mãn $x > \frac{3}{2}$ và $x < -\frac{1}{5}$.

$$2) \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 5x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < \frac{3}{2}.$$

Vậy với $-\frac{1}{5} < x < \frac{3}{2}$ thì $A < 0$.

□

VÍ DỤ 7. Tìm hai số x, y sao cho $x + y = xy = \frac{x}{y}$, với $y \neq 0$.

✎ LỜI GIẢI.

Từ giả thiết ta có $x + y = xy \Leftrightarrow x = xy - y = y(x - 1) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = x - 1$. (1)

Mà theo giả thiết ta cũng có $\frac{x}{y} = x + y$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $x - 1 = x + y \Leftrightarrow y = -1$. Khi đó $x - 1 = x \cdot (-1) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 8. Cho $x, y \in \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.

✎ LỜI GIẢI.

Ta biểu diễn x, y dưới dạng $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $b, d > 0$.

Khi đó $-x = \frac{-a}{b}$ và $-y = \frac{-c}{d}$. Ta có thể sử dụng một trong hai cách sau:

1) **Cách 1.** Ta có

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \Rightarrow -(x \cdot y) = \frac{-(ac)}{bd} = \frac{(-a) \cdot c}{bd} = \frac{-a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (-x) \cdot y. \quad (1)$$

Lại có

$$-(x \cdot y) = \frac{-(ac)}{bd} = \frac{a \cdot (-c)}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{-c}{d} = x \cdot (-y). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.

2) **Cách 2.** Ta có

$$(x \cdot y) + (-x) \cdot y = \frac{ac}{bd} + \frac{(-a) \cdot c}{bd} = \frac{ac + (-ac)}{bd} \Rightarrow (-x) \cdot y = -(xy). \quad (3)$$

Lại có

$$(x \cdot y) + x \cdot (-y) = \frac{ac}{bd} + \frac{a \cdot (-c)}{bd} = \frac{ac + (-ac)}{bd} \Rightarrow (-x) \cdot y = -(xy). \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tính nhanh giá trị của biểu thức $A = \frac{0,75 + 0,6 - \frac{3}{7} - \frac{3}{13}}{2,75 + 2,2 - \frac{11}{7} - \frac{11}{13}}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$A = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{3}{7} - \frac{3}{13}}{\frac{11}{4} + \frac{11}{5} - \frac{11}{7} - \frac{11}{13}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}\right)}{11 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}\right)} = \frac{3}{11}.$$

□

BÀI 2. Cho $x, y \in \mathbb{Q}$ với $x \neq 0, y \neq 0$. Chứng minh rằng

a) $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1};$

b) $(x \cdot y^{-1})^{-1} = x^{-1} \cdot y.$

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta biểu diễn x, y dưới dạng $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $a \neq 0, c \neq 0, b, d > 0$.

Khi đó $x^{-1} = \frac{b}{a}$ và $y^{-1} = \frac{d}{c}$.

❶ Ta có $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \Rightarrow (x \cdot y)^{-1} = \frac{bd}{ac}.$ (1)

Mà $x^{-1} \cdot y^{-1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}.$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}.$

❷ Ta có $x \cdot y^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \Rightarrow (x \cdot y^{-1})^{-1} = \frac{bc}{ad}.$ (1)

Mà $x^{-1} \cdot y = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}.$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $(x \cdot y^{-1})^{-1} = x^{-1} \cdot y.$

□

BÀI 3. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = \left(\frac{-8}{19}\right) \cdot \left(\frac{25}{34}\right) \cdot \left(\frac{-17}{5}\right) \cdot \left(\frac{19}{-27}\right);$

b) $B = \left(\frac{-12}{35}\right) \cdot \left(\frac{-21}{15}\right) \cdot \left(\frac{25}{9}\right).$

✎ **LỜI GIẢI.**

❶ $A = \left[\left(\frac{-8}{19}\right) \cdot \left(\frac{19}{-27}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{25}{34}\right) \cdot \left(\frac{-17}{5}\right)\right] = \frac{8}{27} \cdot \frac{-5}{2} = -\frac{20}{27}.$

❷ $B = \frac{-4}{1} \cdot \frac{-1}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$

□

BÀI 4. Tìm x biết

a) $x \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = 0;$

b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} : x = \frac{4}{5}.$

✎ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $x \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{3}{2}.$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = \frac{3}{2}.$

② Ta có

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} + \frac{3}{2} : x = \frac{4}{5} &\Leftrightarrow \frac{3}{2} : x = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} : x = \frac{12-10}{15} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} : x = \frac{2}{15} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} : \frac{2}{15} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{2} = \frac{45}{4}.\end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{45}{4}$.

□

BÀI 5. Tìm các số nguyên x thỏa mãn $2\frac{3}{11} \cdot 1\frac{1}{12} \cdot (-2,2) < x < \left(0,4 - \frac{4}{5}\right) \left(\frac{3}{4} - 0,2\right)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}2\frac{3}{11} \cdot 1\frac{1}{12} \cdot (-2,2) &= \frac{25}{11} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{-12}{5} = \frac{5}{11} \cdot \frac{13}{1} \cdot (-1) = -\frac{65}{11}; \\ \text{và } \left(0,4 - \frac{4}{5}\right) \left(\frac{3}{4} - 0,2\right) &= (0,4 - 0,8)(0,75 - 0,2) = (-0,4) \cdot 0,55 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{20} = -\frac{11}{50}.\end{aligned}$$

Do x nguyên nên $x = -5, -4, -3, -2, -1$.

□

BÀI 6. Tìm x biết

a) $(x+1) \left(x - \frac{3}{2}\right) < 0;$

b) $(x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0.$

✎ **LỜI GIẢI.**

① Ta có $(x+1) \left(x - \frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$ hai biểu thức phải trái dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$\begin{aligned}1) \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ x - \frac{3}{2} < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{3}{2}. \\ 2) \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ x - \frac{3}{2} > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}.\end{aligned}$$

Vô lí vì không tồn tại giá trị x thỏa mãn $x < -1$ và $x > \frac{3}{2}$.

Vậy $-1 < x < \frac{3}{2}$.

② Ta có $(x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$ hai biểu thức phải cùng dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$\begin{aligned}1) \quad \begin{cases} x-2 > 0 \\ x - \frac{1}{2} > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2. \\ 2) \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $x > 2$ hoặc $x < \frac{1}{2}$.

□

BÀI 7. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau nhận giá trị dương.

a) $A = x^2 + 6$;

b) $B = (5 - x)(x + 8)$;

c) $C = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}$.

LỜI GIẢI.

① Ta có $x^2 \geq 0$ với mọi x nên $x^2 + 6 \geq 0 + 6 = 6 > 0$ với mọi x .

Vậy $A > 0$ với mọi x .

② Ta có $B > 0 \Leftrightarrow (5 - x)(x + 8) > 0 \Leftrightarrow$ hai biểu thức phải cùng dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$1) \begin{cases} 5 - x > 0 \\ x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < x < 5.$$

$$2) \begin{cases} 5 - x < 0 \\ x + 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < -8 \end{cases}.$$

Vô lí vì không tồn tại giá trị x thỏa mãn $x < -8$ và $x > 5$.

Vậy $-8 < x < 5$.

③ Ta có $C > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0 \Leftrightarrow$ tử thức và mẫu thức phải cùng dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$1) \begin{cases} (x-1)(x-2) > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x-3 > 0 \text{ nên } x-1 > 0 \text{ và } x-2 > 0. \text{ Do đó } \begin{cases} (x-1)(x-2) > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

$$2) \begin{cases} (x-1)(x-2) < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét } x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3. \quad (1)$$

Xét $(x-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow$ hai biểu thức phải trái dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$1) \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2. \quad (2)$$

$$2) \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}. \quad (3)$$

$$\text{Vô lí vì không tồn tại giá trị } x \text{ thỏa mãn } x < 1 \text{ và } x > 2. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $1 < x < 2$.

Vậy $1 < x < 2$ hoặc $x > 3$.

□

BÀI 8. Cho biểu thức $A = \frac{5x+4}{3x-1}$. Tìm các giá trị của x để

a) $A = 0$;

b) $A > 0$;

c) $A < 0$.

LỜI GIẢI.

① Ta có $A = 0 \Leftrightarrow \frac{5x+4}{3x-1} = 0 \Leftrightarrow 5x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$.

Vậy với $x = -\frac{4}{5}$ thì $A = 0$.

② Ta có $A > 0 \Leftrightarrow \frac{5x+4}{3x-1} > 0 \Leftrightarrow$ tử số và mẫu số phải cùng dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$1) \begin{cases} 5x + 4 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{5} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

$$2) \begin{cases} 5x + 4 < 0 \\ 3x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{4}{5} \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}.$$

Vậy với $x > \frac{1}{3}$ hoặc $x < -\frac{4}{5}$ thì $A > 0$.

❸ Ta có $A < 0 \Leftrightarrow \frac{5x+4}{3x-1} < 0 \Leftrightarrow$ tử số và mẫu số phải trái dấu. Ta xét hai trường hợp:

$$1) \begin{cases} 5x + 4 > 0 \\ 3x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{5} \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{5} < x < \frac{1}{3}.$$

$$2) \begin{cases} 5x + 4 < 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{4}{5} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vô lí vì không tồn tại x thỏa mãn $x < -\frac{4}{5}$ và $x > \frac{1}{3}$.

Vậy với $-\frac{4}{5} < x < \frac{1}{3}$ thì $A < 0$.

□

BÀI 9. Tìm x biết

a) $\frac{6}{7}x = \frac{-5}{28};$

b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}x = \frac{-3}{10};$

c) $\left(x + \frac{4}{7}\right)\left(x - \frac{8}{9}\right) = 0;$

d) $(3x - 2)\left(2x - \frac{2}{3}\right) = 0.$

🔗 LỜI GIẢI.

❶ Ta có $\frac{6}{7}x = \frac{-5}{28} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{28} : \frac{6}{7} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{28} \cdot \frac{7}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{24}.$

Vậy $x = -\frac{5}{24}.$

❷ Ta có

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} + \frac{1}{4}x &= \frac{-3}{10} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{-3}{10} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{-3-4}{10} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{4} = -\frac{7}{10} \Leftrightarrow x = 4 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{14}{5}. \end{aligned}$$

Vậy $x = -\frac{14}{5}.$

❸ $\left(x + \frac{4}{7}\right)\left(x - \frac{8}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{4}{7} = 0$ hoặc $x - \frac{8}{9} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{7}$ hoặc $x = \frac{8}{9}.$

Vậy $x = \frac{4}{7}$ hoặc $x = \frac{8}{9}.$

❹ $(3x - 2)\left(2x - \frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow$ ta xét hai trường hợp:

1) $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$

2) $2x - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} : 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$

$$\text{Vậy } x = \frac{2}{3} \text{ hoặc } x = \frac{1}{3}.$$

□

BÀI 10. Cho hai biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{19}\right) \left(1 - \frac{1}{20}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{81}\right) \left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

a) So sánh A với $\frac{1}{21}$;b) So sánh B với $\frac{11}{21}$.**LỜI GIẢI.**

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{18}{19} \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{20} > \frac{1}{21}.$$

 $\textcircled{2}$ Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdots \frac{80}{81} \cdot \frac{99}{100} = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdots \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2} \\ &= \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdots 9^2 \cdot 10 \cdot 11}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdots 9^2 \cdot 10^2} = \frac{11}{20} > \frac{11}{21}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B > \frac{11}{21}.$$

□

BÀI 4

GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giá trị tuyệt đối

Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ x (kí hiệu $|x|$) là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0 trên trục số, được xác định như sau: $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

 Như vậy:

- Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ ta luôn có $|x| \geq 0$ và $|x| \geq x$.
- Trong hai số hữu tỉ âm, số hữu tỉ nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì nhỏ hơn.
- Ta có $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.
- Việc sử dụng tính chất dấu giá trị tuyệt đối cho phép chúng ta bước đầu làm quen với việc giải phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. Cộng, trừ, nhân, chia số thập phân

Khi cộng, trừ, nhân, chia số thập phân ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

Trong khi thực hiện các phép cộng, trừ, nhân, chia số thập phân ta thường áp dụng các quy tắc về giá trị tuyệt đối và về dấu tương tự như số nguyên.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Cộng, trừ, nhân, chia số thập phân

VÍ DỤ 1 (Bài 20a-20b/trang 15-Sgk). Tính nhanh

$$\text{a) } A = 6,3 + (-3,7) + 2,4 + (-0,3); \quad \text{b) } B = (-4,9) + 5,5 + 4,9 + (-5,5).$$

 **LỜI GIẢI.**

- Ta có $A = [6,3 + 2,4] + [(-3,7) + (-0,3)] = 8,7 - 4 = 4,7$,
hoặc biến đổi $A = [6,3 + (-0,3)] + [(-3,7) + 2,4] = 6 - 1,3 = 4,7$.
- $B = [(-4,9) + 4,9] + [5,5 + (-5,5)] = 0$.

□

VÍ DỤ 2 (Bài 20c-20d/trang 15-Sgk). Tính nhanh

$$\text{a) } A = 2,9 + 3,7 + (-4,2) + (-2,9) + 4,2; \quad \text{b) } B = (-6,5) \cdot 2,8 + 2,8 \cdot (-3,5).$$

🔗 LỜI GIẢI.

① Ta có $A = [2,9 + (-2,9)] + 3,7 +](-4,2) + 4,2] = 3,7$.

② $B = [(-6,5) + (-3,5)] \cdot 2,8 = -10 \cdot 2,8 = -28$.

□

2. Mở đầu về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

VÍ DỤ 1 (Bài 17/trang 15-Sgk). Tìm x biết

a) $|x| = \frac{1}{5}$;

b) $|x| = 0,37$;

c) $|x| = 0$;

d) $|x| = 1\frac{2}{3}$.

🔗 LỜI GIẢI.

a) Ta có $|x| = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{5}$.

b) Ta có $|x| = 0,37 \Leftrightarrow x = \pm 0,37$.

c) Ta có $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

d) Ta có $|x| = 1\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm 1\frac{2}{3}$.

□

VÍ DỤ 2 (Bài 25/trang 16-Sgk). Tìm x biết

a) $|x - 1,7| = 2,3$;

b) $\left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{3} = 0$.

🔗 LỜI GIẢI.

① Ta có $|x - 1,7| = 2,3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1,7 = 2,3 \\ x - 1,7 = -2,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,7 + 2,3 \\ x = 1,7 - 2,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -0,6 \end{cases}$.

Vậy tồn tại hai giá trị $x = 4$ hoặc $x = -0,6$.

② Ta có $\left|x + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \\ x = -\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{12} \\ x = -\frac{13}{12} \end{cases}$.

Vậy tồn tại hai giá trị $x = -\frac{5}{12}$ hoặc $x = -\frac{13}{12}$.

□

VÍ DỤ 3. Tìm x biết

a) $|x - 1| + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$;

b) $|x - 1| + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

🔗 LỜI GIẢI.

① Ta có $|x - 1| = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x - 1| = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{6} \\ x - 1 = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{6} \\ x = 1 - \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{6} \\ x = \frac{5}{6} \end{cases}$.

Vậy tồn tại hai giá trị $x = \frac{7}{6}$ hoặc $x = \frac{5}{6}$.

② Ta có $|x - 1| = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow |x - 1| = -\frac{1}{6}$.

Vì $|x - 1| \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ nên không tồn tại số hữu tỉ nào thỏa mãn đẳng thức trên.

□

VÍ DỤ 4. Tìm x, y, z biết

$$\text{a) } \left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{3}{2}\right| + \left|x + y - z - \frac{1}{2}\right| = 0; \quad \text{b) } |1 - x| + \left|y - \frac{2}{3}\right| + |x + z| \leq 0.$$

LỜI GIẢI.

- ① Ta có $\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 0, \left|y + \frac{3}{2}\right| \geq 0, \left|x + y - z - \frac{1}{2}\right| \geq 0$. Do đó, để có đẳng thức trên thì điều kiện là

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{3}{2} = 0 \\ x + y - z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy ta được $x = \frac{1}{2}, y = z = -\frac{3}{2}$.

- ② Ta có $|1 - x| \geq 0, \left|y - \frac{2}{3}\right| \geq 0, |x + z| \geq 0$. Do đó, để có đẳng thức trên thì điều kiện là

$$\begin{cases} 1 - x = 0 \\ y - \frac{2}{3} = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{3} \\ 1 + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -1. \end{cases}$$

Vậy ta được $x = 1, y = \frac{2}{3}, z = -1$.

□

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$, ta có

$$\text{a) } |x + y| \leq |x| + |y|; \quad \text{b) } |x - y| \geq |x| - |y|.$$

LỜI GIẢI.

Ta biểu diễn x, y dưới dạng $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $b, d \neq 0$.

- ① Ta có $\left|\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right| = \left|\frac{ad + cb}{bd}\right| = \frac{|ad + cb|}{|bd|}$.

Với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $b, d \neq 0$ ta có $|ad + cb| \leq |ad| + |cb|$. Suy ra

$$\frac{|ad + cb|}{|bd|} \leq \frac{|ad| + |cb|}{|bd|} = \frac{|ad|}{|bd|} + \frac{|cb|}{|bd|} = \frac{|a|}{|b|} + \frac{|c|}{|d|} = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{c}{d}\right| = |x| + |y|.$$

Vậy ta được $|x + y| \leq |x| + |y|$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $xy \geq 0$.

- ② Ta có $x = (x - y) + y$, suy ra

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \Leftrightarrow |x - y| \geq |x| - |y|.$$

Vậy ta được $|x - y| \geq |x| - |y|$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $xy \geq 0$.

□

3. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tính nhanh

❶ $A = 5,6 + (-7,3) - 15,6 + (-65,7);$

❷ $B = 3,5 \cdot (-31,7) + 45,9 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 21,7 - 0,6 \cdot (-54,1).$

✎ LỜI GIẢI.

❶ Ta có $A = (5,6 - 15,6) + [(-7,3) + (-65,7)] = (-10) + (-73) = -83.$

❷ Ta có

$$\begin{aligned} B &= 3,5 \cdot [(-31,7) + 21,7] + [45,9 - (-54,1)] \cdot 0,6 \\ &= 3,5 \cdot (-10) + 100 \cdot 0,6 = -35 + 60 = 25. \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tính nhanh

❶ $A = 3,7 + (-11,8) - 15,7 + (-35,2);$

❷ $B = 13,9 \cdot (-24,5) + 17,2 \cdot 0,3 + 13,9 \cdot 14,5 - 0,3 \cdot (-82,8).$

✎ LỜI GIẢI.

❶ Ta có $A = (3,7 - 15,7) + [(-11,8) + (-35,2)] = (-12) + (-47) = -59.$

❷ $B = 13,9 \cdot [(-24,5) + 14,5] + [17,2 - (-82,8)] \cdot 0,3 = 13,9 \cdot (-10) + 100 \cdot 0,3 = -139 + 30 = -109.$

□

BÀI 3. Tìm $|x|$ biết

a) $x = \frac{5}{12};$

b) $x = \frac{-3}{2};$

c) $x = \frac{-15}{-18};$

d) $x = 0.$

✎ LỜI GIẢI.

a) Ta có $x = \frac{5}{12} \Rightarrow |x| = \frac{5}{12}.$

b) Ta có $x = \frac{-3}{2} \Rightarrow |x| = \frac{3}{2}.$

c) Ta có $x = \frac{-15}{-18} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \Rightarrow |x| = \frac{5}{6}.$

d) Ta có $x = 0 \Rightarrow |x| = 0.$

□

BÀI 4. Tìm x biết

a) $|x - 1| - \frac{1}{8} = \frac{3}{4};$

b) $|x| + \frac{5}{2} = \frac{5}{6}.$

✎ LỜI GIẢI.

❶ Ta có $|x - 1| = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow |x - 1| = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{7}{8} \\ x - 1 = -\frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{7}{8} \\ x = 1 - \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}.$

Vậy có hai giá trị của x là $x = \frac{15}{8}$ hoặc $x = \frac{1}{8}.$

❷ Ta có $|x| = -\frac{5}{2} + \frac{5}{6} \Leftrightarrow |x| = -\frac{5}{3}.$

Vì $|x| \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ nên không tồn tại x thỏa mãn đề bài.

□

BÀI 5. Tìm x biết

a) $|x| = \frac{5}{7};$

b) $|x| = \frac{-13}{-17};$

c) $|x| = \frac{-3}{4};$

d) $|0,9 - x| = 1,7;$

e) $\left|x - \frac{1}{5}\right| = \frac{2}{15};$

f) $\left|x + \frac{9}{8}\right| = 1;$

g) $2 \cdot \left|\frac{2}{3} - x\right| + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

LỜI GIẢI.

a) Ta có $|x| = \frac{5}{7} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{7}.$

b) $|x| = \frac{-13}{-17} \Leftrightarrow |x| = \frac{13}{17} \Rightarrow x = \pm \frac{13}{17}.$

c) Vì $|x| \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ nên không tồn tại x thỏa mãn đề bài.

d) Ta có $|0,9 - x| = 1,7 \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9 - x = 1,7 \\ 0,9 - x = -1,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,8 \\ x = 2,6. \end{cases}$

e) Ta có $\left|x - \frac{1}{5}\right| = \frac{2}{15} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \\ x - \frac{1}{5} = -\frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{15}. \end{cases}$

f) Ta có $\left|x + \frac{9}{8}\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{9}{8} = 1 \\ x + \frac{9}{8} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{8} + 1 \\ x = -\frac{9}{8} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{8} \\ x = -\frac{17}{8}. \end{cases}$

g) Ta có $2 \cdot \left|\frac{2}{3} - x\right| = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{2}{3} - x\right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - x = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} - x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ x = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{12} \\ x = \frac{11}{12}. \end{cases}$

□

BÀI 6. Tìm x, y, z biết

a) $\left|\frac{1}{4} - x\right| + |x - y + z| + \left|\frac{2}{3} + y\right| = 0;$

b) $\left|\frac{15}{32} - x\right| + \left|\frac{4}{25} - y\right| + \left|z - \frac{14}{31}\right| < 0.$

LỜI GIẢI.**❶** Ta có $\left|\frac{1}{4} - x\right| \geq 0, |x - y + z| \geq 0, \left|\frac{2}{3} + y\right| \geq 0.$ Do đó, để có đẳng thức trên thì điều kiện là

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - x = 0 \\ x - y + z = 0 \\ \frac{2}{3} + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x - y + z = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{11}{12}. \end{cases}$$

Vậy ta được $x = \frac{1}{4}, y = -\frac{2}{3}, z = -\frac{11}{12}.$

② Ta có $\left|\frac{15}{32} - x\right| \geq 0$, $\left|\frac{4}{25} - y\right| \geq 0$, $\left|z - \frac{14}{31}\right| \geq 0$ nên $\left|\frac{15}{32} - x\right| + \left|\frac{4}{25} - y\right| + \left|z - \frac{14}{31}\right| \geq 0$.

Do đó không tồn tại x, y, z thỏa mãn đề bài.

□

BÀI 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x - 5| - |x - 7|$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Áp dụng $|x - y| \geq |x| - |y|$, ta có

$$|x - 5| - |x - 7| \leq |(x - 5) - (x - 7)| = |x - 5 - x + 7| = 2.$$

Vậy ta có giá trị lớn nhất của A bằng 2 khi $(x - 5)(x - 7) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ hoặc $x \geq 7$.

□

BÀI 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = |125 - x| + |x - 65|$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Áp dụng $|x + y| \leq |x| + |y|$, ta có

$$|125 - x| + |x - 65| \geq |125 - x + x - 65| = 60.$$

Vậy ta có giá trị nhỏ nhất của B bằng 60 khi $(125 - x)(x - 65) \geq 0 \Leftrightarrow 65 \leq x \leq 125$.

□

BÀI 5 LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

Lũy thừa bậc n của một số hữu tỉ x , kí hiệu là x^n , là tích của n thừa số x (n là một số tự nhiên lớn hơn 1).

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

đọc là x mũ n hoặc n lũy thừa n hoặc lũy thừa bậc n của x ; x gọi là cơ số, n gọi là số mũ.

Quy ước: Ta quy ước: $x^1 = x$, $x^0 = 1$ (với $x \neq 0$).

Khi viết số hữu tỉ x dưới dạng $x = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$), ta có:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ thừa số}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ thừa số}}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ thừa số}}}$$

Vậy, ta luôn có $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

2. Tích và thương của hai lũy thừa cùng cơ số

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$; $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$.

- Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng hai số mũ. Tức là: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
- Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và lấy số mũ của số bị chia trừ đi số mũ của số chia. Tức là: $x^m : x^n = x^{m-n}$ (với $x \neq 0$)

3. Lũy thừa của lũy thừa

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$; $m, n \in \mathbb{N}$. Khi tính lũy thừa của một lũy thừa, ta giữ nguyên cơ số và nhân hai số mũ. Tức là: $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.

4. Lũy thừa của một tích

Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$; $n \in \mathbb{N}$. Lũy thừa của một tích thì bằng tích các lũy thừa. Tức là: $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

5. Lũy thừa của một thương

Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$. Lũy thừa của một thương thì bằng thương các lũy thừa.

Tức là: $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.

6. Lũy thừa với số mũ nguyên âm

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$; $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

 **Nhận xét:** Như vậy:

— Cho $m > n > 0$. Có thể xảy ra 3 trường hợp sau:

① Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$.

② Nếu $a = 1$ thì $a^m = a^n$.

③ Nếu $a < 1$ thì $a^m < a^n$.

— Lũy thừa bậc chẵn của hai số đối nhau thì bằng nhau

$$(-x)^{2n} = x^{2n}$$

— Lũy thừa bậc lẻ của hai số đối nhau thì đối nhau

$$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Tính giá trị của các biểu thức:

① $A = 2^2 - (-3^2)^3 + 4^{-2} \cdot 16 - 2.5^2$.

② $B = \left(2^3 : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{8} + 3^{-2} \cdot 9 - 7 \cdot \left(\frac{14}{25}\right)^0 + 5$.

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 2^2 - (-3^2)^3 + 4^{-2} \cdot 16 - 2.5^2 = 4 - (-9)^3 + \frac{1}{4^2} \cdot 16 - 2.25 \\ &= 4 + 729 + 1 - 50 = 684 \end{aligned}$$

② Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(2^3 : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{8} + 3^{-2} \cdot 9 - 7 \cdot \left(\frac{14}{25}\right)^0 + 5 \\ &= 2^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \cdot 9 - 7 \cdot 1 + 5 = 2 + 1 - 7 + 5 = 1 \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn các đẳng thức sau:

① $3^{-2} \cdot 9^n = 3^n$.

② $\left(\frac{9}{25}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}$.

③ $a^{(n+5)(n-8)} = 1$.

④ $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 2^n$.

 **LỜI GIẢI.**

- ① Ta có: $3^{-2} \cdot 9^n = 3^n \Leftrightarrow 3^{-2} \cdot 3^{2n} = 3^n \Leftrightarrow 3^{-2+2n} = 3^n \Leftrightarrow 2n - 2 = n \Leftrightarrow n = 2$.

Vậy, đẳng thức đúng khi $n = 2$.

- ② Ta có:

$$\left(\frac{9}{25}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow 2n = -4 \Leftrightarrow n = -2$$

Vậy, đẳng thức đúng khi $n = -2$.

- ③ Ta có: $a^{(n+5)(n-8)} = 1 \Leftrightarrow (n+5)(n-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n+5=0 \\ n-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-5 \\ n=3 \end{cases}$

Vậy, đẳng thức đúng khi $n = -5$ hoặc $n = 3$.

- ④ Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 2^n &= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 2^n \Leftrightarrow 2^{-1} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 3^2 \cdot 2 \cdot (2^2)^2 \Leftrightarrow 2^{n-1} + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5 \\ &\Leftrightarrow 2^{n-1}(1 + 4 \cdot 2) = 9 \cdot 2^5 \Leftrightarrow 2^{n-1} \cdot 9 = 9 \cdot 2^5 \\ &\Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^5 \Leftrightarrow n - 1 = 5 \Leftrightarrow n = 6 \end{aligned}$$

Vậy, đẳng thức đúng khi $n = 6$.

□

VÍ DỤ 3. Tìm x biết:

a) $(2x - 2)^2 = 16$.

b) $3^{x+1} - 3^x = 162$.

c) $(1 - x)^3 = 216$.

d) $5^{x+1} - 2 \cdot 5^x = 375$.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta có: $(2x - 2)^2 = 16 \Leftrightarrow (2x - 2)^2 = (\pm 4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 4 \\ 2x - 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$.

Vậy, có hai số cần tìm là $x = 3$ và $x = -1$.

- ② Ta có: $3^{x+1} - 3^x = 162 \Leftrightarrow 3^x(3 - 1) = 162 \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy, số cần tìm là $x = 4$.

- ③ Ta có: $(1 - x)^3 = 216 \Leftrightarrow (1 - x)^3 = 6^3 \Leftrightarrow 1 - x = 6 \Leftrightarrow x = -5$.

Vậy, số cần tìm là $x = -5$.

- ④ Ta có: $5^{x+1} - 2 \cdot 5^x = 375 \Leftrightarrow 5^x(5 - 2) = 375 \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy, số cần tìm là $x = 3$.

□

VÍ DỤ 4. Tìm các số tự nhiên n , biết:

a) $4 < 2^n \leq 2 \cdot 16$.

b) $9 \cdot 27 \leq 3^n \leq 243$.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta có: $4 = 2^2, 2 \cdot 16 = 2 \cdot 2^4 = 2^{1+4} = 2^5$, do đó

$$4 < 2^n \leq 2 \cdot 16 \Leftrightarrow 2^2 < 2^n \leq 2^5 \Leftrightarrow 2 < n \leq 5$$

Từ đó, ta có các số tự nhiên n là $n = 3, n = 4, n = 5$.

❷ Ta có: $9 \cdot 27 = 3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$, $243 = 3^5$, do đó

$$9 \cdot 27 \leq 3^n \leq 243 \Leftrightarrow 3^5 \leq 3^n \leq 3^5 \Leftrightarrow 5 \leq n \leq 5$$

Từ đó, ta có các số tự nhiên n là $n = 5$.

□

🕒 BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Tính giá trị của biểu thức:

❶ $A = 2^{-3} + (5^2)^3 \cdot 5^{-3} + 4^{-3} \cdot 16 - 2 \cdot 3^2 - 105 \cdot \left(\frac{24}{51}\right)^0$.

❷ $B = \left(2^3 : \frac{1}{2^{-2}}\right) \cdot \frac{2}{3} + 4^{-2} \cdot 8 - 7 \cdot \left(\frac{17}{23}\right)^0 + 19$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $A = 2\frac{3}{8}$.

❷ $B = \frac{601}{48}$.

□

BÀI 2. Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn các đẳng thức sau:

a) $5^{-3} \cdot 25^n = 5^{4n}$.

b) $\left(\frac{8}{27}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-12}$.

c) $a^{(2n+6)(3n-9)} = 1$.

d) $\frac{1}{3} \cdot 3^n = 7 \cdot 3^2 \cdot 9^2 - 2 \cdot 3^n$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $n = -3$.

❷ $n = -4$.

❸ $n = -3$ hoặc $n = 3$.

❹ Ta có: $\frac{1}{3} \cdot 3^n = 7 \cdot 3^2 \cdot 9^2 - 2 \cdot 3^n \Leftrightarrow 3^{-1} \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n = 7 \cdot 3^2 \cdot (3^2)^2$.

□

BÀI 3. Tìm x biết:

a) $(x - 5)^2 = 25$.

b) $9^{x+1} - 5 \cdot 3^{2x} = 324$.

c) $(1 - x)^5 = 32$.

d) $3 \cdot 5^{2x+1} - 3 \cdot 25^x = 300$.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $x = 0$ hoặc $x = 10$.

b) $x = 2$.

c) $x = -1$.

d) $x = 1$.

□

BÀI 4. Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $A = \frac{25^3 \cdot 5^5}{6 \cdot 5^{10}}.$

b) $B = \frac{2^5 \cdot 6^3}{8^2 \cdot 9^2}.$

c) $C = \frac{15^3 + 5 \cdot 15^2 - 5^3}{18^3 + 6 \cdot 18^2 - 6^3}.$

d) $D = \frac{(7^4 - 7^3)^3}{49^3}.$

LỜI GIẢI.

① Ta có: $A = \frac{25^3 \cdot 5^5}{6 \cdot 5^{10}} = \frac{5^{11}}{6 \cdot 5^{10}} = \frac{5}{6}.$

② Ta có: $B = \frac{2^5 \cdot 6^3}{8^2 \cdot 9^2} = \frac{2^5 (2 \cdot 3)^3}{(2^3)^2 \cdot (3^2)^2} = \frac{2^8 \cdot 3^3}{2^6 \cdot 3^4} = \frac{3}{4}.$

③ Ta có: $C = \frac{15^3 + 5 \cdot 15^2 - 5^3}{18^3 + 6 \cdot 18^2 - 6^3} = \frac{(3 \cdot 5)^3 + 5 \cdot (3 \cdot 5)^2 - 5^3}{(6 \cdot 3)^3 + 6 \cdot (3 \cdot 6)^2 - 6^3} = \frac{5^3 (3^3 - 3^2 - 1)}{6^3 (3^3 - 3^2 - 1)} = \frac{5^3}{6^3}.$

④ Ta có:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{(7^4 - 7^3)^2}{49^3} = \frac{(7^4 - 7^3)}{49^3} \cdot (7^4 - 7^3) = \left(\frac{7^4}{49^3} - \frac{7^3}{49^3} \right) \cdot (7^4 - 7^3) \\
 &= \left(\frac{7^4}{7^6} - \frac{7^3}{7^6} \right) \cdot (7^4 - 7^3) = \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} \right) \cdot (7^4 - 7^3) \\
 &= \frac{6}{7^3} (7^4 - 7^3) = \frac{6}{7^3} \cdot 7^3 (7 - 1) = 36.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 5. Tìm x biết:

a) $16^x : 4^x = 16.$

b) $2^{-1} \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 72.$

c) $(2x + 1)^3 = -64.$

d) $(3x - 2)^2 = 81.$

LỜI GIẢI.

① $x = 2.$

② $x = 4.$

③ Ta có: $(2x + 1)^3 = (-4)^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$

④ Ta có: $(3x - 2)^2 = 9^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 9 \\ 3x - 2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ x = \frac{-7}{3} \end{cases}.$

□

BÀI 6. Tìm các số tự nhiên n , biết:

a) $8 < 2^n \leq 2 \cdot 32.$

b) $3 \cdot 27 \leq 3^n \leq 243.$

c) $8 \cdot 27 \leq 6^n \leq 36 \cdot 4 \cdot 9.$

d) $\frac{1}{4} \leq 2^n \leq 4.$

e) $9 \cdot 27 \leq \frac{1}{3^n} \leq 27 \cdot 243.$

LỜI GIẢI.

① Ta có: $8 < 2^n \leq 2 \cdot 32 \Leftrightarrow 2^3 < 2^n \leq 2 \cdot 2^5 \Leftrightarrow 2^3 < 2^n \leq 2^6 \Leftrightarrow 3 < n \leq 6.$

Vậy, ta nhận được các số 4, 5, 6.

- ② Ta có: $3 \cdot 27 \leq 3^n \leq 243 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^3 \leq 3^n \leq 3^5 \Leftrightarrow 3^4 \leq 3^n \leq 3^5 \Leftrightarrow 4 \leq n \leq 5$.

Vậy, ta nhận được các số 4, 5.

- ③ Ta có:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 27 \leq 6^n \leq 36 \cdot 4 \cdot 9 &\Leftrightarrow 2^3 \cdot 3^3 \leq 6^n \leq 6^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \Leftrightarrow 2^3 \cdot 3^3 \leq 6^n \leq 6^2 \cdot 6^2 \\ &\Leftrightarrow 6^3 \leq 6^n \leq 6^4 \Leftrightarrow 3 \leq n \leq 4 \end{aligned}$$

Vậy, ta nhận được các số 3, 4.

- ④ Ta có: $\frac{1}{4} \leq 2^n \leq 4 \Leftrightarrow 2^{-2} \leq 2^n \leq 2^2 \Leftrightarrow -2 \leq n \leq 2$.

Vậy, ta nhận được các số -2, -1, 0, 1, 2.

- ⑤ Ta có:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 27 \leq \frac{1}{3^n} \leq 27 \cdot 243 &\Leftrightarrow 3^2 \cdot 3^3 \leq 3^{-n} \leq 3^3 \cdot 3^5 \Leftrightarrow 3^5 \leq 3^{-n} \leq 3^8 \\ &\Leftrightarrow 5 \leq -n \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq n \leq -5 \end{aligned}$$

Vậy, ta nhận được các số -8, -7, -6, -5.

□

BÀI 6 TỈ LỆ THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $a : b = c : d$.

 Trong:

— Tỉ lệ thức $a : b = c : d$ thì:

- ① Các số a, b, c, d là các số hạng của tỉ lệ thức.
- ② Các số a và d là các ngoại tỉ.
- ③ Các số b và c là các trung tỉ.

— Trường hợp $b = 100$, ta có tỉ lệ phần trăm $\frac{a}{100} = a\%$.

2. Tính chất

Với $a, b, c, d \neq 0$, ta có:

Tính chất 1. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$.

Tính chất 2. Nếu có $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

3. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

Ta luôn có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \text{ với } b \neq \pm d$$

 Chú ý:

- ① Tính chất trên còn được mở rộng cho dãy nhiều tỉ số bằng nhau, cụ thể:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = \frac{ma \pm nc \pm pe}{mb \pm nd \pm pf}$$

Kết quả này thực sự có hiệu quả khi biến đổi phân thức cũng như chứng minh các hệ thức chứa dãy tỉ số bằng nhau.

- ② Nếu có dãy $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, ta nói:

- Các số a, b, c tỉ lệ với các số x, y, z .
- Hoặc $a : b : c = x : y : z$.

- ③ Và cũng từ đây, nảy sinh ra dạng toán "Tìm các số $x, y, \dots$ biết tỉ số giữa chúng cùng một biểu thức tổng S ".

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. (Bài 44/tr 26 - Sgk) Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ bằng tỉ số giữa các số nguyên:

① $1,2 : 3,24$.

② $2\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$.

③ $\frac{2}{7} : 0,42$.

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có biến đổi: $1,2 : 3,24 = \frac{1,2}{3,24} = \frac{120}{324} = \frac{30}{81} = \frac{10}{27}$.

② Ta có biến đổi: $\frac{11}{5} : \frac{3}{4} = \frac{11}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{44}{15}$.

③ Ta có biến đổi: $\frac{2}{7} : \frac{42}{100} = \frac{2}{7} : \frac{21}{50} = \frac{2}{7} \cdot \frac{50}{21} = \frac{100}{147}$.

□

VÍ DỤ 2. (Bài 45/tr 26 - Sgk) Tìm các tỉ số bằng nhau trong các tỉ số sau đây rồi lập các tỉ lệ thức:

$$28 : 14; \quad 2\frac{1}{2} : 2; \quad 8 : 4; \quad \frac{1}{2} : \frac{2}{3}; \quad 3 : 10; \quad 2,1 : 7; \quad 3 : 0,3$$

 **LỜI GIẢI.**

Ta lần lượt có:

$$28 : 14 = 2 : 1 = 2;$$

$$2\frac{1}{2} : 2 = \frac{5}{2} : 2 = \frac{5}{4};$$

$$8 : 4 = 2 : 1 = 2;$$

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4};$$

$$3 : 10 = \frac{3}{10};$$

$$2,1 : 7 = 0,3 : 1 = \frac{3}{10}$$

$$3 : 0,3 = 10 : 1 = 10$$

Từ đó, ta được:

$$28 : 14 = 8 : 4; \quad 3 : 10 = 2,1 : 7$$

□

VÍ DỤ 3. (Bài 46/tr 26 - Sgk) Tìm x trong các tỉ lệ thức sau:

a) $\frac{x}{27} = \frac{-2}{3,6}$.

b) $-0,52 : x = -9,36 : 16,38$.

c) $\frac{4\frac{1}{4}}{2\frac{7}{8}} = \frac{x}{1,61}$.

LỜI GIẢI.**①** Ta có biến đổi:

$$\frac{x}{27} = -\frac{20}{36} \Leftrightarrow \frac{x}{27} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{5 \cdot 27}{9} = -15$$

Vậy ta được $x = -15$.**②** Ta có biến đổi:

$$0,52 : x = 468 : 819 = 52 : 91 \Leftrightarrow \frac{0,52}{x} = \frac{52}{91} \Leftrightarrow x = \frac{91 \cdot 0,52}{52} \Leftrightarrow x = \frac{91}{100}$$

Vậy ta được $x = \frac{91}{100}$.**③** Ta có biến đổi:

$$\frac{\frac{17}{4}}{\frac{23}{8}} = \frac{x}{1,61} \Leftrightarrow \frac{34}{23} = \frac{x}{1,61} \Leftrightarrow x = \frac{34 \cdot 1,61}{23} = \frac{34 \cdot 161}{23 \cdot 100} = \frac{119}{50}$$

Vậy ta được $x = \frac{119}{50}$.

□

VÍ DỤ 4. Tìm hai số x, y biết rằng:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $2x - y = 3$.

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 10$.

LỜI GIẢI.**①** Từ dãy tỉ số: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{2x}{4} = \frac{-y}{-5} = \frac{2x-y}{4-5} = \frac{3}{-1} = -3$.Từ đó, suy ra $x = 2 \cdot (-3) = -6$, $y = 5(-3) = -15$.Vậy, ta được nghiệm $x = -6$, $y = -15$.**②** Đặt dãy tỉ số: $k = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = 2k$ và $y = 5k$.Khi đó, với giả thiết: $xy = 10 \Leftrightarrow 2k \cdot 5k = 10 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Ta lần lượt:

- Với $k = 1$, ta nhận được các nghiệm $x = 2$, $y = 5$.
- Với $k = -1$, ta nhận được các nghiệm $x = -2$, $y = -5$.

Vậy, bài toán có hai bộ nghiệm là $x = 2$, $y = 5$ hoặc $x = -2$, $y = -5$.

□

⚠ Nhận xét: Như vậy, với dạng toán "Tìm các số $x, y, z, \dots$ thỏa mãn"

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} = \dots \text{ và } k_1x + k_2y + k_3z + \dots = S$$

chúng ta thực hiện như sau:

Từ dãy tỉ số:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} = \dots \Rightarrow \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_3z}{k_3a_3} = \dots = \frac{k_1x + k_2y + k_3z + \dots}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \dots} = \frac{S}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \dots}$$

Từ đó, ta nhận được các giá trị của $x, y, z, \dots$

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ có chu vi bằng $22cm$ và các cạnh a, b, c của tam giác tỉ lệ với các số 2, 4, 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

LỜI GIẢI.

Từ giả thiết ta có:

$$a + b + c = 22cm$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+4+5} = \frac{22}{11} = 2$$

Từ đó, suy ra: $a = 2 \cdot 2 = 4$, $b = 4 \cdot 2 = 8$, $c = 5 \cdot 2 = 10$.

Vậy, ta được số đo các cạnh của tam giác là $a = 4cm$, $b = 8cm$, $c = 10cm$. □

VÍ DỤ 6. Tìm ba số x, y, z , biết rằng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x + 2y - 3z = -20$.

LỜI GIẢI.

Từ dãy tỉ số: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{2y}{2 \cdot 3} = \frac{-3z}{-3 \cdot 4} = \frac{x + 2y - 3z}{2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4} = \frac{-20}{-4} = 5$.

Từ đó suy ra:

$$x = 2 \cdot 5 = 10, y = 3 \cdot 5 = 15, z = 4 \cdot 5 = 20$$

Vậy, ta được nghiệm $x = 10$, $y = 15$, $z = 20$. □

⚠ CHÚ Ý: Để tăng độ khó cho bài toán, người ta có thể bắt đầu với một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Chuyển đổi biểu thức tổng về dạng bậc cao.

Cụ thể, ta thay $x + 2y - 3z = -20$ bằng:

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -650$$

Khi đó, ta cần thực hiện phép chuyển đổi:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16}$$

Lưu ý: Trong trường hợp này bài toán sẽ có hai bộ nghiệm.

Hướng 2: Chuyển đổi dãy tỉ số thành dãy tỉ số nhỏ.

Cụ thể: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}$, $\frac{x}{2} = \frac{z}{4} \Rightarrow x = \frac{z}{2}$.

Khi đó, bài toán sẽ được phát biểu lại dưới dạng:

$$\text{"Tìm ba số } x, y, z \text{ biết rằng } \frac{x}{10} = \frac{y}{15}, x = \frac{z}{2} \text{ và } x + 2y - 3z = -20 \text{"}$$

Và, để giải bài toán này chúng ta cần sử dụng hai tỉ lệ thức đầu tiên để suy ra được dãy tỉ số $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ rồi tiếp tục thực hiện như trong ví dụ trên.

VÍ DỤ 7. Tìm ba số x, y, z biết rằng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, $\frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ và $x - y + z = -49$.

LỜI GIẢI.

Từ các dãy tỉ số $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$.

Từ đó, ta nhận được dãy tỉ số:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{-y}{-15} = \frac{z}{12} = \frac{x - y + z}{10 - 15 + 12} = \frac{-49}{7} = -7$$

Vậy, ta được nghiệm $x = -70$, $y = -105$, $z = -84$. □

VÍ DỤ 8. Bốn lớp 7A, 7B, 7C, 7D nhận chăm sóc một mảnh vườn có diện tích $450m^2$. Trong đó, lớp 7A nhận chăm sóc 20% diện tích, lớp 7B nhận chăm sóc $\frac{1}{3}$ diện tích còn lại. Sau khi hai lớp trên nhận phần vườn còn lại được chia cho hai lớp 7C và 7D với tỉ lệ $\frac{2}{3}$. Tính diện tích vườn giao cho mỗi lớp

LỜI GIẢI.

Diện tích vườn lớp 7A nhận là: $450 \cdot \frac{20}{100} = 90 (m^2)$.

Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A nhận là: $450 - 90 = 360(m^2)$.

Diện tích vườn lớp 7B nhận là: $360 \cdot \frac{1}{3} = 120 (m^2)$.

Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A và 7B nhận là:

$$450 - (90 + 120) = 240 (m^2)$$

Diện tích còn lại chia cho hai lớp 7C và 7D theo tỉ lệ $\frac{2}{3}$.

Gọi diện tích vườn chia cho lớp 7C là a , khi đó:

— Diện tích vườn chia cho lớp 7D là $240 - a$, ta có:

$$\frac{a}{240 - a} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3a = 2(240 - a) \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 240}{5} \Leftrightarrow a = 96 (m^2)$$

— Diện tích vườn chia cho lớp 7D là: $240 - a = 240 - 96 = 144 (m^2)$.

Vậy, diện tích vườn chia cho lớp 7A là $90m^2$, cho lớp 7B là $120m^2$, cho lớp 7C là $96m^2$, cho lớp 7D là $144m^2$. □

VÍ DỤ 9. Chứng minh rằng tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a - b \neq 0$ và $c - d \neq 0$) ta có thể suy ra tỉ lệ thức $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

LỜI GIẢI.

Theo tính chất 1, ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Theo tính chất 2, ta có: $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Theo tính chất 3, ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow (a+b)(c-d) = (c+d)(a-b)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \text{ đpcm.}$$

□

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Tìm x trong các tỉ lệ thức sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{x}{52} = \frac{-14}{72}. & \text{b)} \frac{-x}{120} = \frac{7,2}{70}. & \text{c)} \frac{2\frac{2}{3}}{5} = \frac{x}{8,5}. & \text{d)} \frac{1\frac{2}{5}}{8} = \frac{x}{-9,5}. \end{array}$$

 **LỜI GIẢI.**

$$\begin{array}{llll} \text{a)} x = \frac{-91}{9}. & \text{b)} x = \frac{-432}{35}. & \text{c)} x = \frac{68}{15}. & \text{d)} x = \frac{-133}{80}. \end{array}$$

□

BÀI 2. Tìm hai số x, y biết rằng:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \text{ và } 4x - 3y = -2. & \text{b)} \frac{x}{4} = \frac{y}{5} \text{ và } xy = 20. \end{array}$$

 **LỜI GIẢI.**

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x = 4, y = 6. & \text{b)} x = 4, y = 5 \text{ hoặc } x = -4, y = -5. \end{array}$$

□

BÀI 3. Tìm ba số x, y, z biết rằng:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ và } x + y + z = 9. & \text{b)} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \text{ và } x + 2y - 3z = -14. \end{array}$$

 **LỜI GIẢI.**

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x = 2, y = 3, z = 4. & \text{b)} x = 6, y = 8, z = 12. \end{array}$$

□

BÀI 4. Tìm các số a, b, c biết:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \text{ và } 15a - 5b + 3c = 45. & \text{b)} \frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3} = \frac{c+2}{4} \text{ và } 3a - 2b + c = 105. \end{array}$$

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có: $a = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \Leftrightarrow b = 3a \text{ và } c = 5a.$

Thay b và c vào $15a - 5b + 3c = 45$, ta được:

$$15a - 5 \cdot 3a + 3 \cdot 5a = 45 \Leftrightarrow 15a = 45 \Leftrightarrow a = 3$$

Với $a = 3 \Rightarrow b = 9$ và $c = 15.$

Vậy $a = 3, b = 9, c = 15.$

② Ta có: $\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3} = \frac{c+2}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3(a+1)}{2} - 2 = \frac{3a-1}{2}$ và $c = 2(a+1) - 2 = 2a.$

Thay b và c vào $3a - 2b + c = 105$, ta được:

$$3a - 2 \cdot \frac{3a-1}{2} + 2a = 105 \Leftrightarrow 3a - (3a-1) + 2a = 105 \Leftrightarrow a = 52$$

Với $a = 52 \Rightarrow b = \frac{155}{2}$ và $c = 104.$

Vậy, $a = 52, b = \frac{155}{2}, c = 104.$



BÀI 5. Tìm ba số x, y, z biết rằng:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ và $x - 2y + 3z = 19$.

b) $\frac{x}{1} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $4x + y - z = 16$.

LỜI GIẢI.

① $x = 4, y = 6, z = 9$.

② $x = 6, y = 24, z = 32$.



BÀI 6. Tìm ba số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 - y^2 + 2z^2 = 108$.

LỜI GIẢI.

① $x = 4, y = 6, z = 8$ hoặc $x = -4, y = -6, z = -8$.



BÀI 7. Tính số học sinh lớp 8A và lớp 9A, biết rằng lớp 9A nhiều hơn lớp 8A là 5 học sinh và tỉ số học sinh của hai lớp là 9 : 8.

LỜI GIẢI.

Lớp 8A có 40 học sinh và lớp 9A có 45 học sinh.



BÀI 8. Năm lớp 7A, 7B, 7C, 7D, 7E nhận chăm sóc một mảnh vườn có diện tích $500m^2$. Trong đó, lớp 7A nhận chăm sóc 25% diện tích, lớp 7B nhận chăm sóc $\frac{1}{3}$ diện tích còn lại. Sau khi hai lớp trên nhận, phần vườn còn lại được chia cho ba lớp 7C, 7D và 7E với tỉ lệ $\frac{3}{2} : \frac{9}{5} : \frac{17}{10}$. Tính diện tích vườn giao cho mỗi lớp.

LỜI GIẢI.

Ta lần lượt:

— Diện tích vườn lớp 7A nhận là $500 \cdot \frac{25}{100} = 125(m^2)$.

— Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A nhận là $500 - 125 = 375(m^2)$.

— Diện tích vườn lớp 7B nhận là $375 \cdot \frac{1}{3} = 125(m^2)$.

— Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A và 7B nhận là

$$500 - (125 + 125) = 250(m^2)$$

— Diện tích còn lại chia cho 3 lớp 7C, 7D và 7E theo tỉ lệ $\frac{3}{2} : \frac{9}{5} : \frac{17}{10}$.

Gọi diện tích vườn chia cho 3 lớp 7C, 7D, 7E là a , b , c . Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{b}{9} = \frac{c}{17} \\ \frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{10} \\ a + b + c = 250 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{b}{9} = \frac{c}{17} = \frac{a+b+c}{3 \cdot 9 + 17} = 50 \\ a + b + c = 250 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{b}{9} = \frac{c}{17} = \frac{25}{3 \cdot 5 + 9 \cdot 2 + 17} = 50 \\ a + b + c = 250 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 50 \cdot \frac{3}{2} = 75(m^2) \\ b = 50 \cdot \frac{9}{5} = 90(m^2) \\ c = 50 \cdot \frac{17}{10} = 85(m^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, diện tích vườn chia cho lớp 7A là $125m^2$, cho lớp 7B là $125m^2$, cho lớp 7C là $75m^2$, cho lớp 7D là $90m^2$, cho lớp 7E là $85m^2$. □

BÀI 9. Chứng minh rằng tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($c + d \neq 0$ và $c - d \neq 0$) ta có thể suy ra tỉ lệ thức

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}.$$

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}.$

Vậy, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ ($c + d \neq 0$, $c - d \neq 0$). □

BÀI 10. Chứng minh rằng nếu:

$$(a + b + c - d)(a - b - c - d) = (a + b - c + d)(a - b + c + d)$$

thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}.$

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $(a + b + c - d)(a - b - c - d) = (a + b - c + d)(a - b + c + d)$
 $\Rightarrow \frac{a+b+c-d}{a+b-c+d} = \frac{a-b+c+d}{a+b-c+d} \Leftrightarrow \frac{(a+b)+(c-d)}{(a+b)-(c-d)} = \frac{(a-b)+(c+d)}{(a+b)-(c-d)}$

Đặt $A = a + b$; $B = c - d$; $C = a - b$; $D = c + d$. Ta được:

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D} \Rightarrow \frac{A}{A-B} = \frac{C}{C-D} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c-d} = \frac{a-b}{c+d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}$$

Vậy, ta được:

$$(a + b + c - d)(a - b - c - d) = (a + b - c + d)(a - b + c + d) \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}$$

□

BÀI 11. Tìm một số có 3 chữ số. Biết số đó chia hết cho 6 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1, 2, 5.

✎ **LỜI GIẢI.**

Giả sử số cần tìm là $\overline{abc}$ với $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c \leq 9$.

Do đó:

$$1 \leq (a + b + c) \leq 27$$

Vì số cần tìm chia hết cho $6 = 3 \times 2$ nên $(a + b + c):3$ và c là số chẵn.

Suy ra, $a + b + c$ có thể nhận các giá trị: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Lại có:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{8} \Rightarrow a = \frac{a+b+c}{8}$$

Vì a là một số nguyên nên $(a + b + c):8$.

Vậy, $a + b + c$ chỉ có thể nhận giá trị: 24. Do đó

c	0	2	4	6	8
$a + b$	24	22	20	18	16
a	\	\	\	9	7; 8; 9
b	\	\	\	9	9; 8; 7
$\overline{abc}$				996	798; 888; 978

Vậy, có 4 số cần tìm 996, 798, 888, 978. □

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$ có số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 2, 3. Tính số đo các góc của $\triangle ABC$.

LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABC$, ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1 + 2 + 3} = \frac{180}{6} = 30^\circ$$

Từ đó suy ra: $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 90^\circ$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 90^\circ$. □

BÀI 7

SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN
TUẦN HOÀN. LÀM TRÒN SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số thập phân hữu hạn - số thập phân vô hạn tuần hoàn

Ta có thể viết

$$\text{— } \frac{5}{20} = 0,4 \quad \frac{12}{5} = 2,4. \quad (1)$$

$$\text{— } \frac{20}{3} = 6,6666\dots = 6,(6) \quad \frac{11}{45} = 0,24444\dots = 0,2(4). \quad (2)$$

Nhận xét. Ta thấy

- Các số thập phân như ở (1) được gọi là số thập phân hữu hạn.
- Các số thập phân như ở (2) được gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
- Ta nói
 $6,(6)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kỳ 6.
 $0,2(4)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kỳ 4.
- Mỗi số hữu tỉ để biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn đều biểu diễn được dưới dạng một số hữu tỉ.
- Người ta chứng minh được
 - ❶ Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.
 - ❷ Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

2. Làm tròn số

Ta có quy tắc làm tròn số như sau

- Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng chữ các số 0.
- Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng chữ các số 0.

 Để làm tròn giá trị của một biểu thức đến hàng cho trước ta thường làm tròn các số và các kết quả trung gian đến hàng kế tiếp sau hàng đó, đến kết quả cuối cùng ta mới làm tròn đến hàng đó.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân

$$\frac{1}{9}; \frac{12}{99}; \frac{123}{999}; \frac{1234}{9999}.$$

LỜI GIẢI.

Ta có

- $\frac{1}{9} = 0,9999 \dots = 0,(9).$
- $\frac{12}{99} = 0,121212 \dots = 0,(12).$
- $\frac{123}{999} = 0,123123 \dots = 0,(123).$
- $\frac{1234}{9999} = 0,12341234 \dots = 0,(1234).$

□

Nhận xét. Ta có

- $0,(a) = \frac{a}{9}.$
- $0,(ab) = \frac{\overline{ab}}{99}.$
- $0,(abc) = \frac{\overline{abc}}{999}.$
- $0,(abcd) = \frac{\overline{abcd}}{9999}.$
- $0,ab(cde) = \frac{\overline{ab}}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{\overline{cde}}{999} = \frac{\overline{abcd} - \overline{ab}}{99900}.$

VÍ DỤ 2. Tính giá trị của phép tính $8,673 : 5,829$.

LỜI GIẢI.

— Làm tròn đến hàng đơn vị ta có

$$8,673 : 5,829 \approx 8,7 : 5,8 = 1,5 \approx 2.$$

— Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai ta có

$$8,673 : 5,829 \approx 8,67 : 5,83 \approx 1,49.$$

□

VÍ DỤ 3. Tính giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) của các phép tính sau

a) $A = 124,74 + 345,95 - 264,034.$

b) $B = (35,043 - 4,724) \cdot 12,395.$

c) $C = (324,038 - 142,724) : 23,82.$

d) $D = 43,203 + 31,024 - 52,341.$

LỜI GIẢI.

a) $A \approx 206,66.$

b) $B = 30,319 \cdot 12,395 = 365,8.$

c) $C = 181,314 : 23,82 \approx 7,61.$

d) $D \approx 21,71.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân

$$\frac{1}{99}; \frac{1}{999}; \frac{1}{9999}.$$

 **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\bullet \frac{1}{99} = 0,(01). \quad \bullet \frac{1}{999} = 0,(001). \quad \bullet \frac{1}{9999} = 0,(0001).$$

□

BÀI 2. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân

$$\frac{4}{9}; \frac{13}{99}; \frac{41}{999}; \frac{97}{9999}.$$

 **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\bullet \frac{4}{9} = 0,(4). \quad \bullet \frac{13}{99} = 0,(13). \quad \bullet \frac{41}{999} = 0,(041). \quad \bullet \frac{97}{9999} = 0,(0097).$$

□

BÀI 3. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân

$$\frac{-8}{9}; \frac{1}{125}; \frac{3}{80}; \frac{-4}{15}; \frac{5}{27}; \frac{13}{14}.$$

 **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned} \bullet \frac{-8}{9} &= -\frac{8}{9} = -0,(8). & \bullet \frac{1}{125} &= 0,008. & \bullet \frac{3}{80} &= 0,0375. \\ \bullet \frac{-4}{15} &= -0,2(6). & \bullet \frac{5}{27} &= 0,(185). & \bullet \frac{13}{14} &= 0,9(285714). \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản

$$0,(8); 1,(25); -2,(38); 7,21(321); 5,(8218).$$

 **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned} \bullet 0,(8) &= \frac{8}{9}. & \bullet 1,(25) &= 1 + \frac{25}{99} = \frac{124}{99}. \\ \bullet -2,(38) &= -2 - \frac{38}{99} = \frac{-236}{99}. & \bullet 7,21(321) &= \frac{721}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{321}{999} = \frac{2402}{333}. \\ \bullet 5,(8218) &= 5 + \frac{8218}{9999} = \frac{58213}{9999}. \end{aligned}$$

□

BÀI 5. Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản

$$0,(6); 4,(75); -6,(81); 8,24(25); 7,(8182).$$

LỜI GIẢI.

Ta có

$$\bullet \quad 0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$\bullet \quad 4,(75) = 4 + \frac{75}{99} = \frac{157}{33}.$$

$$\bullet \quad -6,(81) = -6 - \frac{81}{99} = \frac{-75}{11}.$$

$$\bullet \quad 8,24(25) = 8 + \frac{24}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{25}{99} = \frac{81601}{9900}.$$

$$\bullet \quad 7,(8182) = 7 + \frac{8182}{9999} = \frac{78175}{9999}.$$

□

BÀI 6. Tính giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) của các phép tính sau

a) $A = 4,2374 + 5,1295 - 6,1048.$

b) $B = (51,0431 - 14,825) \cdot 2,635.$

c) $C = (34,1086 - 42,2749) : 3,821.$

d) $D = 73,2038 + 51,527 - 42,1341.$

LỜI GIẢI.

Ta có

a) $A \approx 3,26.$

b) $B \approx 95,43.$

c) $C \approx -2,14.$

d) $D \approx 82,6.$

□

BÀI 7. Tính giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) của các phép tính sau

a) $A = 3,334 + 4,258 - 8,818.$

b) $B = (23,033 - 4,255) \cdot 4,65.$

c) $C = (43,846 - 2,744) : 3,21.$

LỜI GIẢI.

Ta có

a) $A \approx -1,23.$

b) $B \approx 87,32.$

c) $C \approx 12,8.$

□

BÀI 8. Tính đến hết học kỳ I, điểm toán của bạn Hoa như sau

— Điểm hệ số 1 (kiểm tra miệng và 15 phút): 9; 6; 10.

— Điểm hệ số 2 (kiểm tra 45 phút): 6; 7; 9.

— Điểm hệ số 3 (kiểm tra học kỳ): 8.

Em hãy tính điểm trung bình môn toán học kỳ I của bạn Hoa (chính xác đến chữ số thập phân thứ hai).

 LỜI GIẢI.

Ta có

— Điểm trung bình hệ số 1 của bạn Hoa là

$$\frac{9 + 6 + 10}{3} \approx 8,333.$$

— Điểm trung bình hệ số 2 của bạn Hoa là

$$\frac{6 + 7 + 9}{3} \approx 7,333.$$

— Điểm trung bình học kỳ I của bạn Hoa là

$$\frac{8,333 + 7,333 \times 2 + 8 \times 3}{6} \approx 7,83.$$

□

BÀI 8

SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số vô tỉ

Định nghĩa 1. Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
Ký hiệu tập hợp số hữu tỉ là $\mathbb{I}$

2. Khái niệm về căn bậc hai

Định nghĩa 2. Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

Nhận xét. Ta thấy

- Số dương a có đúng 2 căn bậc hai, một số ký hiệu là $\sqrt{a}$ và một số ký hiệu là $-\sqrt{a}$.
- Số 0 chỉ có duy nhất một căn bậc hai là 0 vì $0 = -0$.
- Số âm không có căn bậc hai.
- Không viết được dưới dạng $\sqrt{a^2} = \pm a$.
- Ta có $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a. \end{cases}$

Với hai số dương a, b bất kỳ ta có

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}; a > b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

3. Số thực

Định nghĩa 3. Số vô tỉ và số hữu tỉ được gọi chung là số thực.
Ký hiệu tập hợp số thực là $\mathbb{R}$.

Nhận xét. Ta thấy

- Với hai số thực x, y bất kỳ, ta luôn có: $x = y$ hoặc $x > y$ hoặc $x < y$.
- Việc so sánh, tính toán trên hai số thực được thực hiện tương tự như các số hữu tỉ viết dưới dạng thập phân.
- Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm duy nhất trên trục số. Ngược lại, mỗi điểm trên trục số biểu diễn một số thực duy nhất. Vì thế, trục số còn được gọi là trục số thực.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Tìm căn bậc hai của các số sau

a) $81; (-9)^2; 9^2; 0, 81.$

b) $5; 0, 2; n^2 (n \in \mathbb{Q}).$

c) $-101; 95; 1.$

d) $n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

LỜI GIẢI.

Ta có

① Ta có

- $81 = (-9)^2 = 9^2$. Vậy các số $81; (-9)^2; 9^2$ có hai căn bậc hai là 9 và -9 .
- $(0,81) = (0,9)^2 = (-0,9)^2$. Vậy $0,81$ có hai căn bậc hai là $0,9$ và $-0,9$.

② Ta có

- $-101 < 0$ nên -101 không có căn bậc hai.
- 95 có hai căn bậc hai là $\sqrt{95}$ và $-\sqrt{95}$.
- 1 có hai căn bậc hai là 1 và -1 .

③ Ta có

- 5 có hai căn bậc hai là $\sqrt{5}$ và $-\sqrt{5}$.
- $0,2$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{0,2}$ và $-\sqrt{0,2}$.
- n^2 có hai căn bậc hai là n và $-n$.

④ Ta có

- $n + 1 \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ nên $n + 1$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{n+1}$ và $-\sqrt{n+1}$.

□

VÍ DỤ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau

①
$$A = \sqrt{\frac{11}{25}} + 1 - \sqrt{20} \left(\sqrt{\frac{1}{80}} - \frac{1}{3\sqrt{10}} \right) + \frac{1}{6}.$$

②
$$B = 2\sqrt{\frac{0,01}{1,21}} + 3\frac{2}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 40}} - \frac{3}{4}.$$

LỜI GIẢI.

① Ta có

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{\frac{36}{25}} - 2\sqrt{5} \left(\frac{1}{4\sqrt{5}} - \frac{1}{3\sqrt{10}} \right) + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{6}{5} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{13}{15} + \frac{\sqrt{2}}{3} \\
 &= \frac{13 + 5\sqrt{2}}{15}.
 \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2}{11} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4} \\
 &= -\frac{3}{44}.
 \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. So sánh hai số

a) $m = \sqrt{9+25}$ và $n = \sqrt{9} + \sqrt{25}$.

b) $p = \sqrt{49-16}$ và $q = \sqrt{49} - \sqrt{16}$.

c) $\sqrt{0,04}$ và $0,04$.

d) 8 và $\sqrt{8}$.

LỜI GIẢI.

- ① $m = \sqrt{34}$ và $n = 3 + 5 = 8 = \sqrt{64}$. Mà $34 < 64$ nên $m < n$.
 ② $p = \sqrt{33}$ và $q = 7 - 4 = 3 = \sqrt{9}$. Mà $33 > 9$ nên $p > q$.
 ③ $\sqrt{0,04} = 0,2 > 0,04$.
 ④ $8 = \sqrt{64} > \sqrt{8}$.

□

VÍ DỤ 4. Tìm x , biết

a) $x^2 + 5x + 6 = 3x + 34 + 2x - 9$.

b) $2\sqrt{x} + 8x + 5 = 5x - 4 + 3x + 19$.

c) $5\sqrt{x} + 2x - 8 = 5x + 4 - 3x - 19$.

LỜI GIẢI.

a) Bài toán trở thành

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 3x - 2x &= 34 - 9 - 6 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 19 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{19} \text{ hoặc } x = -\sqrt{19}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = \sqrt{19} \text{ hoặc } x = -\sqrt{19}.$$

b) Bài toán trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} + 8x - 5x - 3x &= -4 + 19 - 5 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x} &= 10 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= 25. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = 25.$$

c) Bài toán trở thành

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x} + 2x - 5x + 3x &= 4 - 19 + 8 \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{x} &= -7 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \frac{-7}{5} < 0. \end{aligned}$$

Vậy không có giá trị nào của x .

□

© BÀI TẬP TỰ LUYỆN**BÀI 1.** Tìm căn bậc hai của các số sau

a) $25; (-7)^2; 193^2; 0,16$.

b) $65; 0,21$.

c) $-100; 175; 125$.

d) $(n-2)^2 \quad (n \in \mathbb{Q}); n-1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

LỜI GIẢI.

- ① Ta có
 — 25 có hai căn bậc hai là 5 và -5.
 — 193^2 có hai căn bậc hai là 193 và -193.
 — 0,16 có hai căn bậc hai là 0,4 và -0,4.

② Ta có

- 65 có hai căn bậc hai là $\sqrt{65}$ và $-\sqrt{65}$.
- 0,21 có hai căn bậc hai là $\sqrt{0,21}$ và $-\sqrt{0,21}$.

③ Ta có

- $-100 < 0$ nên không có căn bậc hai.
- 175 có hai căn bậc hai là $\sqrt{175}$ và $-\sqrt{175}$.
- 125 có hai căn bậc hai là $\sqrt{125}$ và $-\sqrt{125}$.

④ Ta có

- $(n-2)^2$ có hai căn bậc hai là $n-2$ và $-n+2$.
- $n-1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{n-1}$ và $-\sqrt{n-1}$.

□

BÀI 2. Hãy tính

a) $\sqrt{64}$.

b) $\sqrt{\frac{25}{64}}$.

c) $-\sqrt{(-7)^2}$.

d) $-\sqrt{\frac{49}{16}} + 2$.

✎ LỜI GIẢI.

Ta có

a) $\sqrt{64} = 8$.

b) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$.

c) $-\sqrt{(-7)^2} = -7$.

d) $-\sqrt{\frac{49}{16}} + 2 = -\sqrt{\frac{81}{16}} = -\frac{9}{4}$.

□

BÀI 3. So sánh hai số sau

a) $-\sqrt{64}$ và $-\sqrt{65}$.

b) 8 và $\sqrt{(-8)^2}$.

c) $\sqrt{(-7)^2}$ và 6.

d) $\sqrt{\frac{74}{25} - 1}$ và $\frac{6}{5}$.

✎ LỜI GIẢI.

Ta có

a) $64 < 65 \Rightarrow \sqrt{64} < \sqrt{65} \Rightarrow -\sqrt{64} > -\sqrt{65}$.

b) $\sqrt{(-8)^2} = 8$.

c) $\sqrt{(-7)^2} = 7 > 6$.

d) $\sqrt{\frac{74}{25} - 1} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5} > \frac{6}{5}$.

□

BÀI 4. So sánh hai số sau

a) $-\sqrt{64+15}$ và $-\sqrt{15}-8$.

b) $7 + \sqrt{(-9)^2}$ và $\sqrt{103}$.

c) $\sqrt{54}$ và $9 - \sqrt{27}$.

d) $\sqrt{\frac{81}{25} - \frac{8}{7}}$ và $\frac{9}{5} - \frac{8}{7}$.

LỜI GIẢI.

Ta có

a) $\sqrt{64+15} < \sqrt{64} + \sqrt{15} = 8 + \sqrt{15}$

Vậy $-\sqrt{64+15} > -\sqrt{15} - 8$.

c) $9 - \sqrt{27} = \sqrt{81} - \sqrt{27} > \sqrt{81-27} = \sqrt{54}$.

Vậy $9 - \sqrt{27} > \sqrt{54}$.

b) $7 + \sqrt{(-9)^2} = 7 + 9 = 16 = \sqrt{256} > \sqrt{103}$.

Vậy $7 + \sqrt{(-9)^2} > \sqrt{103}$.

d) $\sqrt{\frac{81}{25} - \frac{8}{7}} > \sqrt{\frac{81}{25}} - \sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{9}{5} - \sqrt{\frac{8}{7}}$.

Mà $\frac{8}{7} > 1$ nên $\frac{8}{7} > \sqrt{\frac{8}{7}}$.

Do đó $\frac{9}{5} - \frac{8}{7} < \frac{9}{5} - \sqrt{\frac{8}{7}} < \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{8}{7}}$.

□

BÀI 5. Tìm x biết

a) $2x^2 + 5x + 8 + \sqrt{x} = x^2 + 3x + 35 + x^2 + 2x - 7$.

b) $3\sqrt{x} + 7x + 5 = \sqrt{x} + 4x - 6 + 3x + 18$.

c) $8\sqrt{x} + 2x - 9 = 5x + 7 + 6\sqrt{x} - 3x - 2$.

d) $2\sqrt{3x} + 11x - 18 = 5x + 2 + 6\sqrt{3x} + 6x - 21$.

LỜI GIẢI.

a) Bài toán trở thành

$$2x^2 + 5x + 8 + \sqrt{x} = 2x^2 + 5x + 28$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 20$$

$$\Leftrightarrow x = 20^2 = 400.$$

b) Bài toán trở thành

$$2\sqrt{x} = 7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}.$$

c) Bài toán trở thành

$$2\sqrt{x} = 14$$

$$\Leftrightarrow x = 7^2 = 49.$$

d) Bài toán trở thành

$$-4\sqrt{3x} = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x = \left(\frac{-1}{-4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{48}.$$

□

CHƯƠNG

2

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

BÀI 1 ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$, với k là hằng số khác 0, thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k .

- ⚠ Cho y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k , tức là $y = kx$ hay $x = \frac{1}{k}y$. Khi đó
- x cũng tỉ lệ thuận với y , do vậy ta thường nói hai đại lượng này tỉ lệ thuận với nhau.
 - x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$.

Tính chất 1. Nếu hai đại lượng x, y tỉ lệ thuận với nhau (tức là $y = kx$) thì

- ① Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi, tức là

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = k;$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{k}.$$

- ② Tỉ số hai giá trị bất kỳ của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia, tức là $\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_m}{y_n}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Sử dụng định nghĩa và tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận để giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Cho y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = 2$.

- Hãy biểu diễn y theo x .
- Hỏi x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào?

✎ LỜI GIẢI.

- Vì y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = 2$ nên $y = 2x$.
- Từ $y = 2x$ suy ra $x = \frac{1}{2}y$.

Vậy x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ bằng $\frac{1}{2}$.



VÍ DỤ 2. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi $x = 6$ thì $y = 4$.

- a) Tìm hệ số tỉ lệ k của y đối với x . b) Hãy biểu diễn y theo x .
- c) Tính giá trị của y khi $x = 9, x = 15$.

LỜI GIẢI.

- ① Ta có $y = kx$ suy ra $k = \frac{y}{x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- ② Theo câu trên, ta có y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = \frac{2}{3}$ nên $y = \frac{2}{3}x$.
- ③ Ta sử dụng bảng sau để tính giá trị của y theo x

x	9	15
$y = \frac{2}{3}x$	6	10

⚠ Với bảng biểu diễn trong câu này, ta thấy đã có đầy đủ thông tin theo yêu cầu của bài ra. Do đó, trong hầu hết các trường hợp ta thường cho bài toán dưới dạng “Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng kèm theo”. Ví dụ sau sẽ minh họa cụ thể nhận xét này.



VÍ DỤ 3. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau

x	-2	-1	3	
y		3		-27

LỜI GIẢI.

Vì x và y tỉ lệ thuận với nhau nên ta giả sử $y = kx$ suy ra $k = \frac{y}{x}$.

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3 ta có $k = \frac{3}{-1} = -3$. Vậy $y = -3x$.

Khi đó ta viết $y = -3x$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây ta sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể ta có bảng sau

x	-2	-1	3	9
$y = -3x$	6	3	-9	-27

 Như vậy, hai ví dụ đã qua chỉ đi sâu khai thác tính chất đầu tiên của hai đại lượng tỉ lệ thuận. Một câu hỏi đặt ra khá tự nhiên là “Tính chất thứ hai được sử dụng để làm gì?”. Câu trả lời sẽ là “Nó được sử dụng trong dạng toán thực nghiệm”, tức là “Cho một bảng với các giá trị x và y tương ứng. Hỏi hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau không?”.

Để trả lời được câu hỏi này, chúng ta chỉ cần thêm dòng $\frac{y}{x}$ vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, khi đó

- Nếu các giá trị $\frac{y}{x}$ không đổi thì ta kết luận x và y tỉ lệ thuận với nhau.
- Ngược lại, kết luận x và y không tỉ lệ thuận với nhau.

□

VÍ DỤ 4. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng sau

x	-2	-1	3	5
y	4	2	-6	-10

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau hay không? Vì sao?

LỜI GIẢI.

Thêm dòng $\frac{y}{x}$ vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó ta được

x	-2	-1	3	5
y	4	2	-6	-10
$\frac{y}{x}$	-2	-2	-2	-2

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ thuận với nhau.

□

▢ DẠNG 2. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ thuận*Phương pháp giải:*

VÍ DỤ 5. Chu vi của hình chữ nhật bằng 28 cm. Tính độ dài mỗi cạnh, biết rằng chúng tỉ lệ với 3; 4.

✎ LỜI GIẢI.

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a và b ($a < b$).

Từ giả thiết ta có $2(a + b) = 28$ cm hay $a + b = 14$ cm.

Lại có

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a+b}{3+4} = \frac{14}{7} = 2.$$

Từ đó suy ra $a = 6$ cm và $b = 8$ cm.

 *Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh họa cho dạng toán tổng quát: “Tìm hai đại lượng tỉ lệ thuận x, y thỏa mãn điều kiện K cho trước”.*

Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Dựa vào điều kiện K thiết lập biểu thức $S = k_1x + k_2y$.

Bước 2: Từ giả thiết về sự tỉ lệ thuận của x và y , ta có

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} \Rightarrow \frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_1x + k_2y}{k_1a_1 + k_2a_2}.$$

Từ đây, chúng ta nhận được x và y .

□

VÍ DỤ 6. Cho tam giác ABC có số đo các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 3. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

✎ LỜI GIẢI.

Trong tam giác ABC , ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ giả thiết ta có

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1+2+3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ.$$

Từ đó suy ra $\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 90^\circ$.

Vậy ta được số đo các góc của tam giác ABC là $\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 90^\circ$.



1 *Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh họa cho dạng toán tổng quát: “Tìm ba đại lượng tỉ lệ thuận x, y, z thỏa mãn điều kiện K cho trước”.*

Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Dựa vào điều kiện K , thiết lập biểu thức $S = k_1x + k_2y + k_3z$.

Bước 2: Từ giả thiết về sự tỉ lệ thuận của x, y và z ta có

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} \Rightarrow \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_3z}{k_3a_3} = \frac{k_1x + k_2y + k_3z}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3}.$$

Từ đây chúng ta nhận được x, y và z .

- ② Và thông qua hai bài toán này chúng ta có được phương pháp giải trong trường hợp cần tìm n đại lượng tỉ lệ thuận $x, y, z, t, \dots$

□

🕒 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = -\frac{3}{4}$.

a) Hãy biểu diễn y theo x .

b) Hỏi x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào?

✎ **LỜI GIẢI.**

① Vì y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = -\frac{3}{4}$ nên $y = -\frac{3}{4}x$.

② Từ $y = -\frac{3}{4}x$ suy ra $x = -\frac{4}{3}y$.

Vậy x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ bằng $-\frac{4}{3}$.

□

BÀI 2. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi $x = -2$ thì $y = 8$.

① Tìm hệ số tỉ lệ của y đối với x .

② Hãy biểu diễn y theo x .

③ Tính giá trị của y khi $x = -2, x = -1, x = 2, x = 6$.

✎ **LỜI GIẢI.**

① Ta có $y = kx$ suy ra $k = \frac{y}{x} = \frac{8}{-2} = -4$.

② Theo câu trên, ta có y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = -4$ nên $y = -4x$.

③ Ta sử dụng bảng sau để tính giá trị của y theo x

x	-2	-1	2	6
$y = -4x$	8	4	-8	-24

□

BÀI 3. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau

x	-12	-6	-3	3	9		
y				1		5	9

LỜI GIẢI.

Vì x và y tỉ lệ thuận với nhau nên ta giả sử $y = kx$ suy ra $k = \frac{y}{x}$.

Dựa vào thông tin cột thứ 5 ta có $k = \frac{1}{3}$. Vậy $y = \frac{1}{3}x$.

Khi đó ta viết $y = \frac{1}{3}x$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây ta sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể ta có bảng sau

x	-12	-6	-3	3	9	15	27
$y = \frac{1}{3}x$	-4	-2	-1	1	3	5	9

□

BÀI 4. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng sau

x	-8	-6	2	4
y	16	12	-4	-8

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau hay không? Vì sao?

LỜI GIẢI.

Thêm dòng $\frac{y}{x}$ vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó ta được

x	-8	-6	2	4
y	16	12	-4	-8
$\frac{y}{x}$	-2	-2	-2	-2

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ thuận với nhau.

□

BÀI 5. Chu vi của hình chữ nhật bằng 28 cm. Tính độ dài mỗi cạnh, biết rằng chúng tỉ lệ với 2; 5.

LỜI GIẢI.

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a và b ($a < b$).

Từ giả thiết ta có $2(a + b) = 28$ cm hay $a + b = 14$ cm.

Lại có

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{a+b}{2+5} = \frac{14}{7} = 2.$$

Từ đó suy ra $a = 4$ cm và $b = 10$ cm. □

BÀI 6. Tính độ dài mỗi cạnh của hình chữ nhật, biết hai cạnh tỉ lệ với 1; 3 và cạnh lớn dài hơn cạnh nhỏ là 8 cm.

LỜI GIẢI.

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a và b ($a > b$).

Từ giả thiết ta có $a - b = 8$ cm.

Lại có

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{1} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{1} = \frac{a-b}{3-1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Từ đó suy ra $a = 12$ cm và $b = 4$ cm. □

BÀI 7. Cho tam giác ABC có số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1; 4; 7. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

LỜI GIẢI.

Trong tam giác ABC , ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ giả thiết ta có

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{7} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{7} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1+4+7} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ.$$

Từ đó suy ra $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 105^\circ$.

Vậy ta được số đo các góc của tam giác ABC là $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 105^\circ$. □

BÀI 8. Cho tam giác ABC có số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 3; 5; 7. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

LỜI GIẢI.

Trong tam giác ABC , ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ giả thiết ta có

$$\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{7} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{7} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{3+5+7} = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ.$$

Từ đó suy ra $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 84^\circ$.

Vậy ta được số đo các góc của tam giác ABC là $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 84^\circ$. □

BÀI 9. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 22 cm và các cạnh a , b , c của tam giác tỉ lệ với các số 2; 4; 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

LỜI GIẢI.

Từ giả thiết ta có $a + b + c = 22$ cm.

Lại có

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+4+5} = \frac{22}{11} = 2.$$

Từ đó suy ra $a = 4$ cm, $b = 8$ cm và $c = 10$ cm. □

BÀI 10. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c của tam giác tỉ lệ với các số 3; 4; 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác, biết rằng cạnh lớn nhất dài hơn cạnh nhỏ nhất 6 cm.

LỜI GIẢI.

Từ giả thiết ta có $c - a = 6$ cm.

Lại có

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{c-a}{5-3} = \frac{6}{2} = 3.$$

Từ đó suy ra $a = 9$ cm, $b = 12$ cm và $c = 15$ cm. □

BÀI 2 ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{k}{x}$ (hoặc $xy = k$), với k là hằng số khác 0, thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ k .

! Cho y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ k , tức là $xy = k$ hay $x = \frac{k}{y}$. Khi đó

- x cũng tỉ lệ nghịch với y , do vậy ta thường nói hai đại lượng này tỉ lệ nghịch với nhau.
- x tỉ lệ nghịch với y theo hệ số tỉ lệ k . Do đó, trong tỉ lệ nghịch ta không phân biệt cách phát biểu “hệ số tỉ lệ của y đối với x ” với “hệ số tỉ lệ của x đối với y ” mà thường gọi chung là hệ số tỉ lệ.

Tính chất 1. Nếu hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau (tức là $y = \frac{k}{x}$) thì

① Tích hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi, tức là

$$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \dots = x_ny_n = k.$$

② Tỉ số hai giá trị bất kỳ của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng kia, tức là $\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_n}{y_m}$.

③ Nếu ta viết $y = k \cdot \frac{1}{x}$ thì ta có tương ứng mới “ y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$ theo hệ số tỉ lệ bằng k ”.

! Với “dạng toán thực nghiệm”, tức là “Cho một bảng với các giá trị x và y tương ứng. Hỏi hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau không?”.

Để trả lời câu hỏi này, chúng ta chỉ cần thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, khi đó

- Nếu các giá trị xy không đổi thì ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.
- Ngược lại, kết luận x và y không tỉ lệ nghịch với nhau.

B CÁC DẠNG TOÁN

□ DẠNG 1. Sử dụng định nghĩa và tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch để giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Cho x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = \frac{1}{2}$.

a) Hãy biểu diễn y theo x .

b) Tính giá trị của y khi $x = -\frac{1}{16}$.

🔑 LỜI GIẢI.

- ① Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = \frac{1}{2}$ nên $xy = \frac{1}{2}$ hay $y = \frac{1}{2x}$.
- ② Với $x = -\frac{1}{16}$ thì $y = \frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)} = -8$.

□

VÍ DỤ 2. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 8$ thì $y = 15$.

- a) Tìm hệ số tỉ lệ k .
b) Hãy biểu diễn y theo x .
c) Tính giá trị của y khi $x = 6, x = 10$.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta có $xy = k$ nên $k = 8 \cdot 15 = 120$.
- ② Theo câu trên, ta có x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = 120$ nên $xy = 120$ hay $y = \frac{120}{x}$.
- ③ Ta sử dụng bảng sau để tính giá trị của y theo x

x	6	10
$y = \frac{120}{x}$	20	12

⚠ Với bảng biểu diễn trong câu này, ta thấy đã có đầy đủ thông tin theo yêu cầu của bài ra. Do đó, trong hầu hết các trường hợp người ta thường cho bài toán dưới dạng “Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng kèm theo”. Ví dụ sau sẽ minh họa cụ thể nhận xét này.

□

VÍ DỤ 3. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau

x	0,5	-1,2			4	6
y			3	-2	1,5	

✎ LỜI GIẢI.

Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau nên ta giả sử $xy = k$.

Dựa vào thông tin trong cột thứ 6 ta có $k = 4 \cdot 1,5 = 6$. Vậy $xy = 6$ hay $y = \frac{6}{x}$.

Khi đó ta viết $y = \frac{6}{x}$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây ta sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể ta có bảng sau

x	0,5	-1,2	2	-3	4	6
$y = \frac{6}{x}$	12	-5	3	-2	1,5	1

 Với “dạng toán thực nghiệm”, tức là “Cho một bảng với các giá trị x và y tương ứng. Hỏi hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau không?”.

Để trả lời câu hỏi này, chúng ta chỉ cần thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, khi đó

- Nếu các giá trị xy không đổi thì ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.
- Ngược lại, kết luận x và y không tỉ lệ nghịch với nhau.

□

VÍ DỤ 4. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng sau

x	-2	-1	4	8
y	-8	-16	4	2

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau hay không? Vì sao?

LỜI GIẢI.

Thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó ta được

x	-2	-1	4	8
y	-8	-16	4	2
xy	16	16	16	16

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.

□

▢ DẠNG 2. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ nghịch*Phương pháp giải:*

VÍ DỤ 5. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h và trở về A với vận tốc 48 km/h. Cả đi lẫn về (không tính thời gian nghỉ) mất 13 giờ 30 phút. Tính độ dài quãng đường AB .

✎ LỜI GIẢI.

Giả sử ô tô đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h với thời gian là t_1 giờ và ô tô đi từ B về A với vận tốc 48 km/h với thời gian là t_2 giờ.

Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cùng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$\frac{60}{48} = \frac{t_2}{t_1} \Leftrightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5}. \quad (2.1)$$

Theo giả thiết ta có $t_1 + t_2 = 13$ giờ 30 phút $= 13\frac{1}{2}$ giờ.

Khi đó, từ dãy tỉ số (2.1) ta được

$$\frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 + t_2}{4 + 5} = \frac{13\frac{1}{2}}{9} = \frac{3}{2}.$$

Suy ra $t_1 = 6$ giờ.

Vậy độ dài quãng đường AB là $60 \cdot 6 = 360$ km.



① Rất nhiều em học sinh sẽ mắc phải lỗi không đáng có khi thực hiện phép đổi đơn vị 13h30' thành số thập phân.

② Nếu sử dụng tính chất thứ ba thì ta có thể lập luận như sau:

Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cùng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên t_1, t_2 tỉ lệ với $\frac{1}{60}, \frac{1}{48}$, suy ra

$$\frac{t_1}{\frac{1}{60}} = \frac{t_2}{\frac{1}{48}} \Leftrightarrow \frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5}.$$

Bước biến đổi này sẽ thực sự có ích khi cần tìm nhiều đại lượng.

③ Nếu không muốn sử dụng dãy tỉ số bằng nhau thì chúng ta có thể trình bày lời giải trên theo cách sau:

Lập luận tương tự như trong bài toán để có $\frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{4}$ hay $4t_2 = 5t_1$.

Theo giả thiết ta có

$$t_1 + t_2 = 13,5 \Leftrightarrow 4(t_1 + t_2) = 4 \cdot 13,5 \Leftrightarrow 4t_1 + 4t_2 = 54 \Leftrightarrow 4t_1 + 5t_1 = 54 \Leftrightarrow t_1 = 6.$$

Vậy độ dài quãng đường AB là $60 \cdot 6 = 360$ km.

④ Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh họa cho dạng toán tổng quát: “Tìm đại lượng x , biết x tỉ lệ nghịch với y và thỏa mãn điều kiện K cho trước”. Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định mối quan hệ giữa các đại lượng tỉ lệ nghịch, dựa trên công thức $\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_n}{y_m}$.

Hoặc dựa trên tính chất thứ ba.

Bước 2: Khai thác điều kiện K và vận dụng linh hoạt kiến thức về dãy tỉ số bằng nhau (nếu cần). Từ đây chúng ta nhận được x .

□

VÍ DỤ 6. Ba nhóm học sinh cùng tham gia trồng cây (mỗi nhóm đều phải trồng n cây). Nhóm I trồng xong trong 3 ngày, nhóm II trồng xong trong 5 ngày, nhóm III trồng xong trong 6 ngày. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu học sinh? Biết rằng nhóm II có nhiều hơn nhóm III 1 học sinh (năng suất trồng cây của mỗi học sinh bằng nhau).

✎ LỜI GIẢI.

Giả sử số học sinh của nhóm I, nhóm II, nhóm III theo thứ tự là x, y, z .

- Nhóm I với x học sinh hoàn thành công việc trong 3 ngày.
- Nhóm II với y học sinh hoàn thành công việc trong 5 ngày.
- Nhóm III với z học sinh hoàn thành công việc trong 6 ngày.

Theo giả thiết ta có $y - z = 1$.

Vì số học sinh và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên x, y, z tỉ lệ với $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, suy ra

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} = \frac{y - z}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30.$$

Từ đó suy ra $x = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10, y = \frac{1}{5} \cdot 30 = 6, z = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$.

Vậy nhóm I có 10 học sinh, nhóm II có 6 học sinh và nhóm III có 5 học sinh.

□

© BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = 16$.

- a) Hãy biểu diễn y theo x . b) Tính giá trị của y khi $x = -\frac{1}{4}$.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = 16$ nên $xy = 16$ hay $y = \frac{16}{x}$.
- ② Với $x = -\frac{1}{4}$ thì $y = \frac{16}{-\frac{1}{4}} = -64$.

□

BÀI 2. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 2$ thì $y = 9$.

- ① Tìm hệ số tỉ lệ k .
- ② Hãy biểu diễn y theo x .
- ③ Tính giá trị của y khi $x = -2, x = 1, x = 3, x = 8$.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta có $xy = k$ nên $k = 2 \cdot 9 = 18$.
- ② Theo câu trên, ta có x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = 18$ nên $xy = 18$ hay $y = \frac{18}{x}$.
- ③ Ta sử dụng bảng sau để tính giá trị của y theo x

x	-2	1	3	8
$y = \frac{18}{x}$	-9	18	6	$\frac{9}{4}$

□

BÀI 3. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 4$ thì $y = 9$.

- ① Tìm hệ số tỉ lệ k .
- ② Hãy biểu diễn y theo x .
- ③ Tính giá trị của y khi $x = -9$, $x = -6$, $x = 3$, $x = 12$, $x = 36$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Ta có $xy = k$ nên $k = 4 \cdot 9 = 36$.
- ② Theo câu trên, ta có x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = 36$ nên $xy = 36$ hay $y = \frac{36}{x}$.
- ③ Ta sử dụng bảng sau để tính giá trị của y theo x

x	-9	-6	3	12	36
$y = \frac{36}{x}$	-4	-6	12	3	1

□

BÀI 4. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau

x	-20	-12	2	3	4	5	
y		-5					10

✎ **LỜI GIẢI.**

Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau nên ta giả sử $xy = k$.

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3 ta có $k = (-12) \cdot (-5) = 60$. Vậy $xy = 60$ hay $y = \frac{60}{x}$.

Khi đó ta viết $y = \frac{60}{x}$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây ta sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể ta có bảng sau

x	-20	-12	2	3	4	5	6
$y = \frac{60}{x}$	-3	-5	30	20	15	12	10

□

BÀI 5. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau

x	-9	-1		3
y		-27	27	

✎ LỜI GIẢI.

Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau nên ta giả sử $xy = k$.

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3 ta có $k = (-1) \cdot (-27) = 27$. Vậy $xy = 27$ hay $y = \frac{27}{x}$.

Khi đó ta viết $y = \frac{27}{x}$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây ta sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể ta có bảng sau

x	-9	-1	1	3
$y = \frac{27}{x}$	-3	-27	27	9

□

BÀI 6. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng sau

x	2	3	5	6
y	15	10	6	5

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau hay không? Vì sao?

🔗 LỜI GIẢI.

Thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó ta được

x	2	3	5	6
y	15	10	6	5
xy	30	30	30	30

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau. □

BÀI 7. Một ô tô đi từ A đến B hết 6 giờ. Hỏi khi từ B quay về A nó đi hết mấy giờ? Biết rằng vận tốc lúc về bằng 1,5 lần vận tốc lúc đi.

🔗 LỜI GIẢI.

Giả sử ô tô đi từ A đến B với vận tốc v_1 km/h với thời gian là $t_1 = 6$ giờ và ô tô đi từ B về A với vận tốc v_2 km/h với thời gian là t_2 giờ.

Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cùng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{6} \Leftrightarrow t_2 = \frac{6v_1}{v_2}. \quad (2.2)$$

Theo giả thiết ta có

$$v_2 = 1,5v_1 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{1,5}. \quad (2.3)$$

Thay (2.3) vào (2.2) ta được $t_2 = 6 \cdot \frac{1}{1,5} = 4$ giờ.

Vậy với vận tốc khi quay về ô tô đi hết 4 giờ. □

BÀI 8. Biết 3 học sinh khi làm vệ sinh lớp học hết 3 phút. Hỏi 5 học sinh (cùng năng suất) sẽ làm vệ sinh lớp học hết bao nhiêu phút?

🔗 LỜI GIẢI.

Vì năng suất làm việc của mỗi học sinh là như nhau nên số học sinh và số phút làm vệ sinh xong lớp học là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Gọi x ($x > 0$) là số phút để 5 học sinh vệ sinh xong lớp học.

Khi đó ta có

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 3}{5} = 1,8 \text{ phút} = 1 \text{ phút } 48 \text{ giây}.$$

Vậy 5 học sinh sẽ làm vệ sinh lớp học hết 1 phút 48 giây. □

BÀI 9. 36 em học sinh chia làm bốn nhóm cùng tham gia trồng cây (mỗi nhóm đều phải trồng n cây). Nhóm I trồng xong trong 4 ngày, nhóm II trồng xong trong 6 ngày, nhóm III trồng xong trong 10 ngày, nhóm IV trồng xong trong 12 ngày. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu học sinh? Biết rằng năng suất trồng cây của mỗi học sinh bằng nhau.

LỜI GIẢI.

Giả sử số học sinh của nhóm I, nhóm II, nhóm III, nhóm IV theo thứ tự là x, y, z, t .

- Nhóm I với x học sinh hoàn thành công việc trong 4 ngày.
- Nhóm II với y học sinh hoàn thành công việc trong 6 ngày.
- Nhóm III với z học sinh hoàn thành công việc trong 10 ngày.
- Nhóm IV với t học sinh hoàn thành công việc trong 12 ngày.

Theo giả thiết ta có $x + y + z + t = 36$.

Vì số học sinh và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên x, y, z, t tỉ lệ với $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$, suy ra

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{t}{\frac{1}{12}} = \frac{x+y+z+t}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = \frac{36}{\frac{36}{60}} = 60.$$

Từ đó suy ra $x = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15, y = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10, z = \frac{1}{10} \cdot 60 = 6, t = \frac{1}{12} \cdot 60 = 5$.

Vậy nhóm I có 15 học sinh, nhóm II có 10 học sinh, nhóm III có 6 học sinh và nhóm IV có 5 học sinh.

□

BÀI 10. Hai ô tô cùng đi từ A đến B . Xe thứ nhất đi hết 1 giờ 20 phút, xe thứ hai đi hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc trung bình của mỗi xe, biết rằng trung bình 1 phút xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ hai 100 m.

LỜI GIẢI.

Ta có 1 giờ 20 phút $= \frac{4}{3}$ giờ; 1 giờ 30 phút $= \frac{3}{2}$ giờ; 1 phút $= \frac{1}{60}$ giờ và 1 m $= \frac{1}{10}$ km.

Gọi v_1 km/h là vận tốc trung bình của xe thứ nhất và v_2 km/h là vận tốc trung bình của xe thứ hai.

Trong 1 phút xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ hai 100 m nên

$$v_1 \cdot \frac{1}{60} - v_2 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{v_1}{60} - \frac{v_2}{60} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{v_1 - v_2}{60} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow v_1 - v_2 = 6.$$

Vì vận tốc trung bình và thời gian của một chuyển động thẳng trên cùng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \frac{v_1}{3} = \frac{v_2}{4} = \frac{v_1 - v_2}{\frac{3}{2} - \frac{4}{3}} = \frac{6}{1} = 36.$$

Từ đó suy ra $v_1 = \frac{3}{2} \cdot 36 = 54$ km/h, $v_2 = \frac{4}{3} \cdot 36 = 48$ km/h.

Vậy vận tốc trung bình của xe thứ nhất bằng 54 km/h và vận tốc trung bình của xe thứ hai bằng 48 km/h. □

BÀI 3 HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x và với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x và x gọi là *biến số*.

 **Chú ý:** Ta thấy:

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.
- Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức.
- Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$, ...

Chẳng hạn với hàm số được cho bởi công thức $y = 3x - 6$, ta còn có thể viết $y = f(x) = 3x - 6$ và khi đó thay cho câu “khi $x = 2$ thì giá trị tương ứng của y là 0” ta viết $f(2) = 0$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu

① Bảng các giá trị tương ứng của chúng là

x	-4	-2	0	1	3	5	7
y	-9	-5	-1	1	5	9	13

② Bảng các giá trị tương ứng của chúng là

x	0	2	4	6	8	10	12
y	6	6	6	6	6	6	6

 **LỜI GIẢI.**

- ① Có là hàm số vì với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y .
- ② Có là hàm số vì với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y , và đây là hàm hằng $y = 6$.

□

VÍ DỤ 2. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu:

① Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	-6	-2	-1	0	1	1	3
y	8	4	2	-1	1	6	8

❷ Có công thức $y^2 = 4x$.

🔗 LỜI GIẢI.

- ❶ Không là hàm số, vì với $x = 1$ ta xác định được 2 giá trị khác nhau của y là 1 và 6.
 ❷ Không là hàm số, vì với $x = 4$ ta được $y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$.

□

VÍ DỤ 3. Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = \frac{12}{x}$.

❶ Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số $y = f(x)$ vào bảng sau:

x	-6	-4	2	3	
$y = f(x)$					1

❷ Xác định $f(-12)$, $f(24)$.

🔗 LỜI GIẢI.

❶ Ta có được kết quả

x	-6	-4	2	3	12
$y = \frac{12}{x}$	-2	-3	6	4	1

❷ Ta có

$$f(-12) = \frac{12}{-12} = -1; f(24) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

□

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = |2x - 3|$.

- ❶ Tính $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(8)$.
 ❷ Tính các giá trị của x ứng với $y = -1$, $y = 0$, $y = 3$.

🔗 LỜI GIẢI.

❶ Ta lần lượt có

$$f(-2) = |2 \cdot (-2) - 3| = |-7| = 7;$$

$$f(0) = |2 \cdot 0 - 3| = |-3| = 3;$$

$$f(2) = |2 \cdot 2 - 3| = |1| = 1;$$

$$f(8) = |2 \cdot 8 - 3| = |13| = 13.$$

❷ Ta lần lượt có

- Với $y = -1$ thì $|2x - 3| = -1$, vô nghiệm vì $|2x - 3| \geq 0$.
- Với $y = 0$ thì $|2x - 3| = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
- Với $y = 3$ thì $|2x - 3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0. \end{cases}$

□

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = 3x - 1$. Tìm các giá trị của x sao cho:

- ① y nhận giá trị âm.
- ② y nhận giá trị lớn hơn 5.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Theo yêu cầu bài toán ta có $y < 0 \Leftrightarrow 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

Vậy $x < \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

- ② Theo yêu cầu bài toán ta có $y > 5 \Leftrightarrow 3x - 1 > 5 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy $x > 2$ là giá trị cần tìm.

□

🎯 BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

✎ LỜI GIẢI.

Có là hàm số vì với mỗi giá trị của x ta luôn tìm được chỉ một giá trị tương ứng của y .

□

BÀI 2. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là

x	-4	-2	0	1	3	5	7
y	8	8	8	8	8	8	8

✎ LỜI GIẢI.

Có là hàm số vì với mỗi giá trị của x ta luôn tìm được chỉ một giá trị tương ứng của y , và đây là hàm hằng $y = 8$.

□

BÀI 3. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là

x	-8	-4	-4	-2	0	3	5
y	2	4	12	6	1	7	9

✎ LỜI GIẢI.

Không là hàm số, vì với $x = -4$ ta xác định được 2 giá trị khác nhau của y là 4 và 12. □

BÀI 4. Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = \frac{36}{x}$.

❶ Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số $y = f(x)$ vào bảng sau:

x	-9	-6	3	12	
$y = f(x)$					1

❷ Xác định $f(-12)$, $f(72)$.

✎ LỜI GIẢI.

❶ Ta có được kết quả

x	-9	-6	3	12	36
$y = \frac{36}{x}$	-4	-6	12	3	1

❷ Ta có $f(-12) = \frac{36}{-12} = -3$; $f(72) = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$. □

BÀI 5. Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = 2x + 9$.

❶ Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số $y = f(x)$ vào bảng sau:

x	-3	-1	2	6	
$y = f(x)$					27

❷ Xác định $f(-8)$, $f(7)$.

✎ LỜI GIẢI.

❶ Ta có được kết quả

x	-3	-1	2	6	9
$y = 2x + 9$	3	7	11	21	27

❷ Ta có $f(-8) = 2 \cdot (-8) + 9 = -7$; $f(7) = 2 \cdot 7 + 9 = 23$. □

BÀI 6. Cho hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = x^2 - 9$.

- ① Tính $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$.
- ② Tính các giá trị của x ứng với $y = -8$, $y = -5$, $y = 0$, $y = -10$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Ta lần lượt có

$$\begin{aligned} \text{a) } f(-4) &= (-4)^2 - 9 = 7; & \text{b) } f(-2) &= (-2)^2 - 9 = -5; \\ \text{c) } f(0) &= 0^2 - 9 = -9; & \text{d) } f(1) &= 1^2 - 9 = -8; \\ \text{e) } f(5) &= 5^2 - 9 = 16. \end{aligned}$$

- ② Ta lần lượt có

$$\begin{aligned} &\text{— Với } y = -8 \text{ thì } x^2 - 9 = -8 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1. \\ &\text{— Với } y = -5 \text{ thì } x^2 - 9 = -5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2. \\ &\text{— Với } y = 0 \text{ thì } x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3. \\ &\text{— Với } y = -10 \text{ thì } x^2 - 9 = -10 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ (vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

□

BÀI 7. Cho hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = |x^2 - 1|$.

- ① Tính $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(6)$.
- ② Tính các giá trị của x ứng với $y = -9$, $y = 0$, $y = 8$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Ta lần lượt có

$$\begin{aligned} f(-2) &= |(-2)^2 - 1| = 3; \\ f(0) &= |0^2 - 1| = 1; \\ f(3) &= |3^2 - 1| = 8; \\ f(6) &= |6^2 - 1| = 35. \end{aligned}$$

- ② Ta lần lượt có

$$\begin{aligned} &\text{— Với } y = -9 \text{ thì } |x^2 - 1| = -9 \text{ (vô nghiệm vì } |x^2 - 1| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}). \\ &\text{— Với } y = 0 \text{ thì } |x^2 - 1| = 0 \Leftrightarrow x = 1. \\ &\text{— Với } y = 8 \text{ thì } |x^2 - 1| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 8 \\ x^2 - 1 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = -7 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 3. \end{aligned}$$

□

BÀI 8. Cho hàm số $y = 2x - 6$. Tìm các giá trị của x sao cho:

- ① y nhận giá trị dương.
- ② y nhận giá trị nhỏ hơn 3.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Theo yêu cầu bài ta có $y > 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy $x > 3$ là giá trị cần tìm.

- ② Theo yêu cầu bài ta có $y < 3 \Leftrightarrow 2x - 6 < 3 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}$.

Vậy $x < \frac{9}{2}$ là giá trị cần tìm.

□

BÀI 9. Cho hàm số $y = 6 - 5x$. Tìm các giá trị của x sao cho:

❶ y nhận giá trị âm.

❷ y nhận giá trị lớn hơn 1.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Theo yêu cầu bài ta có $y < 0 \Leftrightarrow 6 - 5x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}$.

Vậy $x > \frac{6}{5}$ là giá trị cần tìm.

❷ Theo yêu cầu bài ta có $y > 1 \Leftrightarrow 6 - 5x > 1 \Leftrightarrow x < 1$.

Vậy $x < 1$ là giá trị cần tìm.

□

BÀI 4 MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

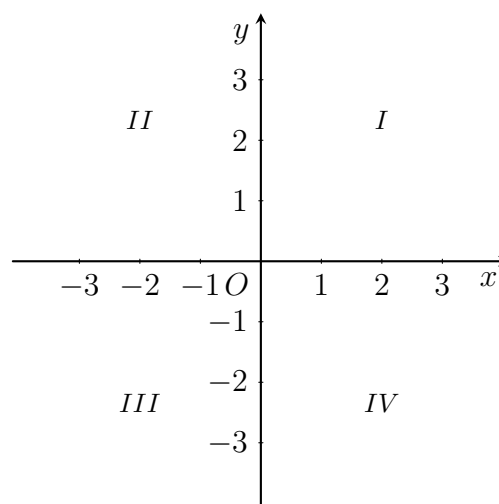
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt phẳng tọa độ

Trên mặt phẳng tọa độ, vẽ hai trục số Ox , Oy vuông góc với nhau tại O . Khi đó ta có hệ trục tọa độ Oxy .

Trong hệ trục tọa độ Oxy ta có:

- Ox , Oy gọi là các trục tọa độ.
- Ox gọi là trục hoành (người ta thường vẽ Ox nằm ngang).
- Oy gọi là trục tung (người ta thường vẽ Oy thẳng đứng).
- Giao điểm O biểu diễn số 0 của cả hai trục gọi là gốc tọa độ.



Mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy .

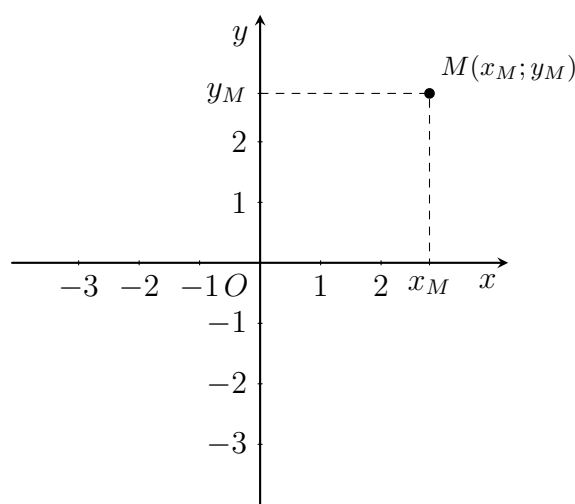
⚠ Chú ý: Cần biết:

- Các đơn vị dài trên hai trục tọa độ được chọn bằng nhau (nếu không nói gì thêm).
- Hai trục tọa độ chia mặt phẳng thành 4 góc, bao gồm góc phần tư thứ I, II, III, IV theo thứ tự ngược chiều quay kim đồng hồ.

2. Tọa độ của một điểm trong mặt phẳng tọa độ

Trên mặt phẳng tọa độ:

- Mỗi điểm M xác định một cặp số $(x_M; y_M)$. Ngược lại, mỗi cặp số $(x_M; y_M)$ xác định một điểm M .
- Cặp số $(x_M; y_M)$ được gọi là tọa độ của điểm M , x_M được gọi là hoành độ và y_M được gọi là tung độ của điểm M .
- Điểm M có tọa độ $(x_M; y_M)$ được kí hiệu là $M(x_M; y_M)$. (Lưu ý rằng hoành độ luôn được viết trước).



⚠ Chú ý: Ta luôn có $O(0; 0)$.

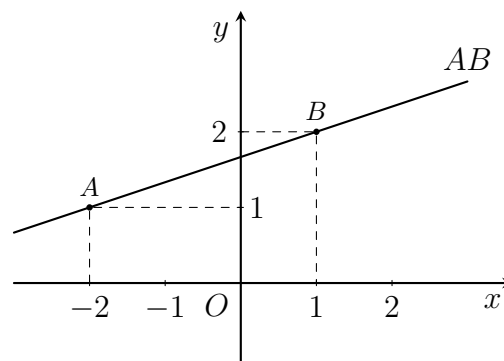
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Vẽ đường thẳng AB , biết $A(-2; 1)$ và $B(1; 2)$.

LỜI GIẢI.

Để vẽ đường thẳng AB , ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(-2; 1)$ và $B(1; 2)$.
- Nối 2 điểm A và B , ta được đường thẳng AB .

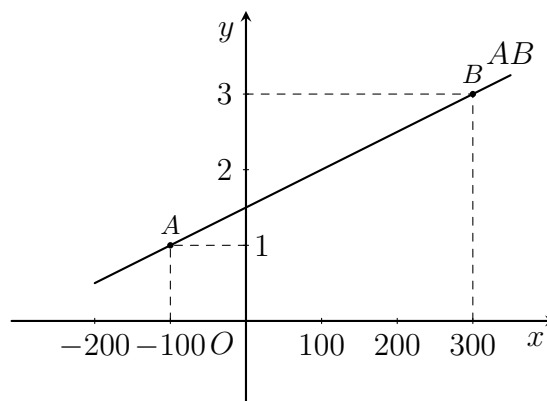


VÍ DỤ 2. Vẽ đường thẳng AB , biết $A(-100; 1)$ và $B(300; 3)$.

LỜI GIẢI.

Để vẽ đường thẳng AB , ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(-100; 1)$ và $B(300; 3)$.
- Nối 2 điểm A và B , ta được đường thẳng AB .



Nhận xét. Trong phần kiến thức cơ bản, chúng ta đã thấy chú ý “Các đơn vị dài trên hai trục tọa độ được chọn bằng nhau (nếu không nói gì thêm)”. Tuy nhiên, với tọa độ $A(-100; 1)$ và $B(300; 3)$ nếu ta sử dụng đơn vị dài trên hai trục tọa độ là như nhau thì việc vẽ đường thẳng AB sẽ vượt ra ngoài khuôn khổ trang vở, do đó ở đây ta chọn tỉ lệ trên trục Ox bằng 1 : 100.

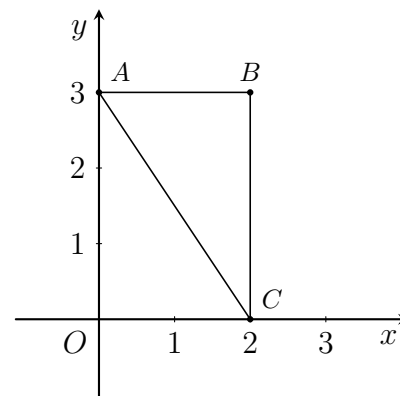
VÍ DỤ 3. Vẽ $\triangle ABC$, biết $A(0; 3)$, $B(2; 3)$ và $C(2; 0)$. Khi đó có nhận xét gì về $\triangle ABC$?

LỜI GIẢI.

Để vẽ $\triangle ABC$, ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(0; 3)$, $B(2; 3)$ và $C(2; 0)$.
- Nối các điểm A , B và C , ta được $\triangle ABC$.

Nhận thấy rằng, $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B .



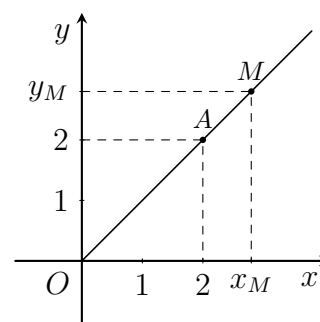


VÍ DỤ 4. Trên hệ trục tọa độ Oxy , vẽ tia phân giác của góc phần tư thứ I .

- ❶ Lấy điểm A trên tia phân giác đó có hoành độ $x_A = 2$, hãy xác định tung độ của điểm A .
- ❷ Nhận xét gì về mối liên hệ giữa hoành độ và tung độ của các điểm M nằm trên tia phân giác đó?

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Dựa vào hình vẽ, ta thấy ngay $y_A = 2$.
- ❷ Mọi điểm M thuộc đường phân giác trên ta đều có $x_M = y_M \geq 0$.



🎯 BÀI TẬP LUYỆN TẬP

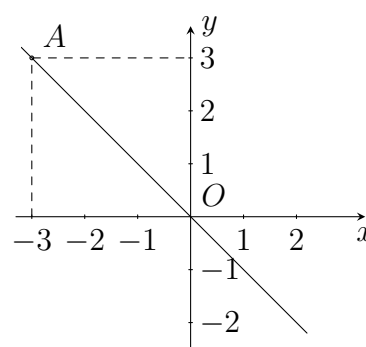
BÀI 1. Trong hệ trục tọa độ Oxy , vẽ các đường phân giác của góc phần tư thứ II , IV .

- ❶ Lấy điểm A trên đường phân giác đó có hoành độ $x_A = -3$, hãy xác định tung độ của điểm A .
- ❷ Nhận xét gì về mối quan hệ giữa tung độ và hoành độ của các điểm M nằm trên đường phân giác đó.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Điểm A có hoành độ bằng -3 suy ra tung độ bằng $y_A = 3$.
- ❷ Với mọi điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đường phân giác đã cho, ta luôn có

$$x_M = -y_M.$$



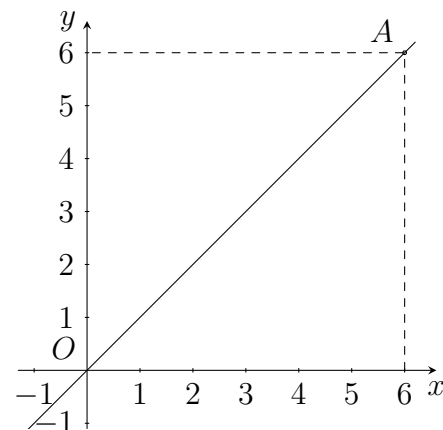
BÀI 2. Trong hệ trục tọa độ Oxy , vẽ các đường phân giác của góc phần tư thứ I , III .

- ❶ Lấy điểm A trên đường phân giác đó có hoành độ $x_A = 6$, hãy xác định tung độ của điểm A .
- ❷ Nhận xét gì về mối quan hệ giữa tung độ và hoành độ của các điểm M nằm trên đường phân giác đó.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Điểm A có hoành độ bằng 6 suy ra tung độ bằng $y_A = 6$.
 ② Với mọi điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đường phân giác đã cho, ta luôn có

$$x_M = y_M.$$



□

BÀI 3. Vẽ đường thẳng AB , biết:

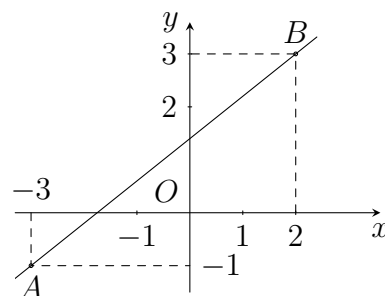
- a) $A(-3; -1)$ và $B(2; 3)$.
 b) $A(-2; -1)$ và $B(-1; 4)$.
 c) $A\left(\frac{5}{4}; 2\right)$ và $B(3; 2)$.
 d) $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và $B\left(0; \frac{3}{2}\right)$.
 e) $A(2700; 1)$ và $B(-900; -3)$.

LỜI GIẢI.

①

Để vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B ta làm như sau:

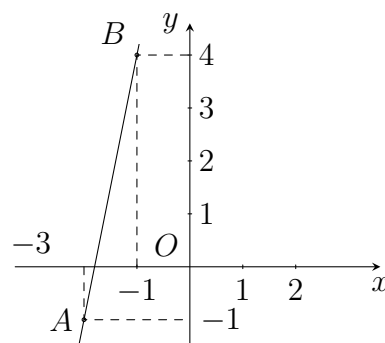
- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định tọa độ hai điểm $A(-3; -1)$ và $B(2; 3)$.
- Nối hai điểm AB , ta được đường thẳng AB .



②

Để vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B ta làm như sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định tọa độ hai điểm $A(-2; -1)$ và $B(-1; 4)$.
- Nối hai điểm AB , ta được đường thẳng AB .



- ③ Tương tự cho câu c, d, e .

□

BÀI 4. Vẽ tam giác ABC , biết:

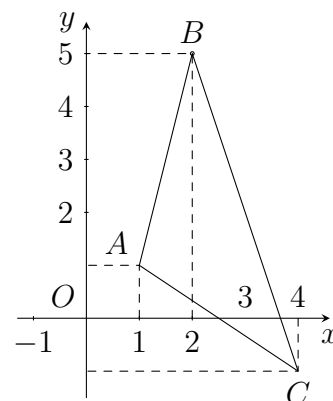
- ① $A(1; 1)$, $B(2; 5)$ và $C(4; -1)$.
 ② $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$ và $C(3; 0)$.
 ③ $A(-180; -30)$, $B(-60; -60)$ và $C(90; 15)$.

LỜI GIẢI.

①

Để vẽ tam giác ABC ta làm như sau:

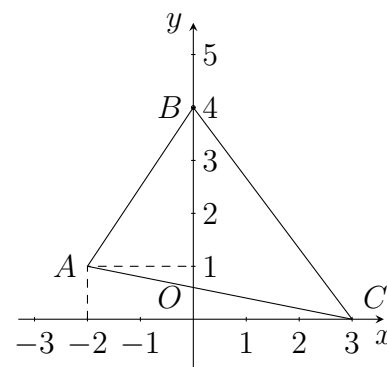
- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(1; 1)$, $B(2; 5)$ và $C(4; -1)$.
- Nối A và B , B và C , C và A , ta được tam giác ABC cần vẽ.



②

Để vẽ tam giác ABC ta làm như sau:

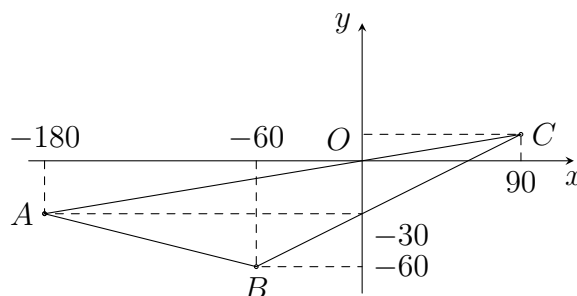
- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$ và $C(3; 0)$.
- Nối A và B , B và C , C và A , ta được tam giác ABC cần vẽ.



③

Để vẽ tam giác ABC ta làm như sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(-180; -30)$, $B(-60; -60)$ và $C(90; 15)$. (Lưu ý: Tỷ lệ trên trục Ox và Oy bằng 1 : 30)
- Nối A và B , B và C , C và A , ta được tam giác ABC cần vẽ.



□

BÀI 5. Vẽ tứ giác $ABCD$, biết:

- ① $A(-1; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 3)$ và $D(2; 1)$. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?
- ② $A(-2; 1)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 3)$ và $D(2; -1)$. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

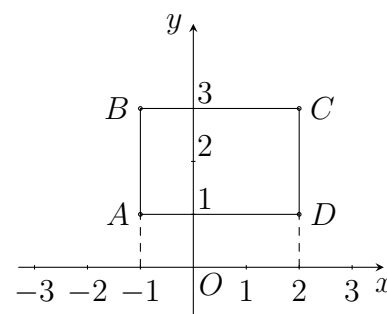
✎ **LỜI GIẢI.**

①

Để vẽ tứ giác $ABCD$ ta thực hiện các bước sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(-1; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 3)$ và $D(2; 1)$.
- Nối A và B , B và C , C và D , D và A , ta được tứ giác $ABCD$ cần vẽ.

Để thấy $ABCD$ là hình chữ nhật.

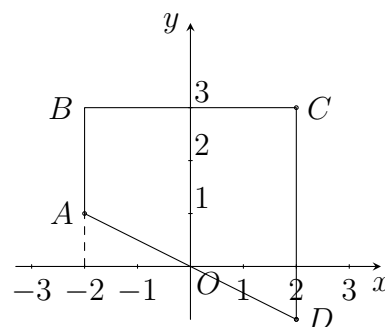


②

Để vẽ tứ giác $ABCD$ ta thực hiện các bước sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(-2; 1)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 3)$ và $D(2; -1)$.
- Nối A và B , B và C , C và D , D và A , ta được tứ giác $ABCD$ cần vẽ.

Để thấy $ABCD$ là hình thang vuông.



□

BÀI 6. Vẽ ngũ giác $ABCDE$, biết:

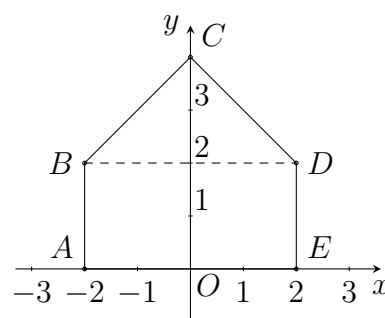
- ① $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$, $C(0; 4)$, $D(2; 2)$, $E(2; 0)$.
- ② $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(2; 0)$, $D(0; -3)$, $E(-3; -3)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

①

Để vẽ ngũ giác $ABCDE$ ta thực hiện các bước sau:

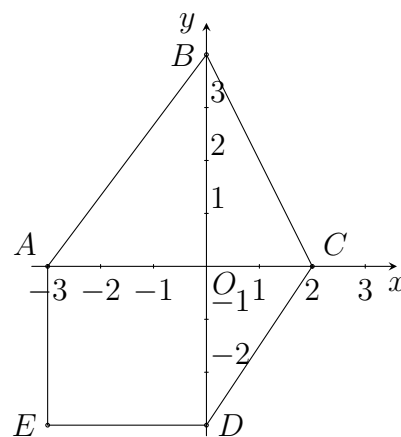
- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$, $C(0; 4)$, $D(2; 2)$ và $E(2; 0)$.
- Nối A và B , B và C , C và D , D và E , E và A , ta được ngũ giác $ABCDE$ cần vẽ.



②

Để vẽ ngũ giác $ABCDE$ ta thực hiện các bước sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(2; 0)$, $D(0; -3)$ và $E(-3; -3)$.
- Nối A và B , B và C , C và D , D và E , E và A , ta được ngũ giác $ABCDE$ cần vẽ.



□

BÀI 7. Cho $A(x_A; y_A)$, tìm điều kiện của x_A và y_A để

- ① Điểm A thuộc trục Ox .
- ② Điểm A thuộc trục Oy .
- ③ Điểm A thuộc góc phần tư thứ I.
- ④ Điểm A thuộc góc phần tư thứ II.
- ⑤ Điểm A thuộc góc phần tư thứ III.
- ⑥ Điểm A thuộc góc phần tư thứ IV.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Để điểm A thuộc trục Ox điều kiện là $y_A = 0$.
- ② Để điểm A thuộc trục Oy điều kiện là $x_A = 0$.
- ③ Để điểm A thuộc góc phần tư thứ I điều kiện là $x_A > 0$ và $y_A > 0$.

- ④ Để điểm A thuộc góc phần tư thứ II điều kiện là $x_A < 0$ và $y_A > 0$.
- ⑤ Để điểm A thuộc góc phần tư thứ III điều kiện là $x_A < 0$ và $y_A < 0$.
- ⑥ Để điểm A thuộc góc phần tư thứ IV điều kiện là $x_A > 0$ và $y_A < 0$.

□

BÀI 5 ĐỒ THỊ HÀM SỐ $Y = AX$, VỚI $A \neq 0$

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đồ thị của hàm số

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax$, $a \neq 0$

Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$), ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm $A(x_A; ax_A)$ với $x_A \neq 0$.
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = ax$.

Nhận xét. Ta thấy:

- Đồ thị hàm số $y = x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ I và III.
- Đồ thị hàm số $y = -x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ II và IV.

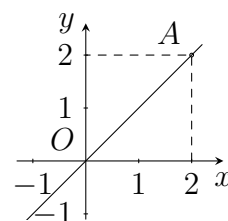
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = x$.

LỜI GIẢI.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm $A(2; 2)$.
- Nối hai điểm O và A ta được đồ thị hàm số $y = x$.



□

VÍ DỤ 2. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số: $y = 2x$ và $y = -\frac{1}{2}x$.
Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này?

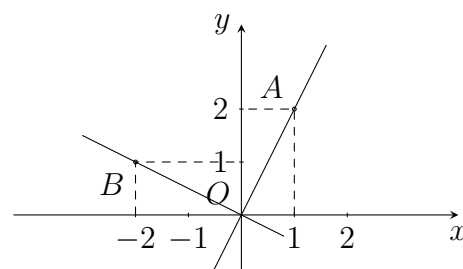
LỜI GIẢI.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = 2x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm $A(1; 2)$.
- Nối O và A ta được đồ thị hàm số $y = 2x$.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm $B(-2; 1)$.
- Nối O và B ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.



Nhận xét. Đồ thị của hai hàm số này vuông góc với nhau.



VÍ DỤ 3. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số: $y = 3x$ và $y = -3x$.
Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này?

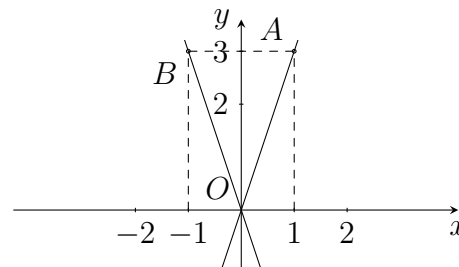
🔗 LỜI GIẢI.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = 3x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm $A(1; 3)$.
- Nối O và A ta được đồ thị hàm số $y = 3x$.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = -3x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm $B(-1; 3)$.
- Nối O và B ta được đồ thị hàm số $y = -3x$.



Nhận xét. Đồ thị của hai hàm số này đối xứng với nhau qua Oy .

Nhận xét.

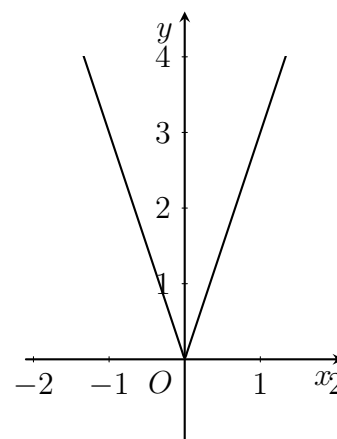
1.

$$\text{Ta biết rằng: } |3x| = \begin{cases} 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ -3x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Do đó, nếu lấy hai phần đồ thị là:

- $y = 3x$ trong góc phần tư thứ I.
- $y = -3x$ trong góc phần tư thứ II.

Ta nhận được đồ thị hàm số $y = |3x|$.



2. Từ đó để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax|$ ta thực hiện như sau:

- Vẽ tia OA , với $A(x_A; ax_A)$, $x_A > 0$.
- Vẽ tia OB , với $B(-x_A; ax_A)$, $x_A > 0$.

hoặc chỉ cần vẽ tia OA rồi lấy đối xứng qua trục Oy .

VÍ DỤ 4. Cho đồ thị hàm số $y = ax$. Hãy xác định hệ số a biết:

- ❶ Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3; 2)$.
- ❷ Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II và IV.

🔗 LỜI GIẢI.

- ❶ Vì điểm $A(3; 2)$ thuộc đồ thị của hàm số nên $2 = a \cdot 3 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$.

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{2}{3}x$.

- ❷ Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II và IV, ta có ngay $a = -1$.



VÍ DỤ 5. Đồ thị của hàm số $y = ax$ nằm ở góc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ Oxy , nếu:

❶ $a > 0$.

❷ $a < 0$.

✎ **LỜI GIẢI.**

❶ Với $a > 0$ ta nhận xét rằng điểm $A(x_A; y_A)$ thuộc đồ thị thì

$$y_A = ax_A \Leftrightarrow x_A \cdot y_A = a(x_A)^2 \Rightarrow x_A \text{ và } y_A \text{ cùng dấu.}$$

Do đó đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ *I* và thứ *III*.

❷ Với $a < 0$ ta nhận xét rằng điểm $A(x_A; y_A)$ thuộc đồ thị thì

$$y_A = ax_A \Leftrightarrow x_A \cdot y_A = a(x_A)^2 \Rightarrow x_A \text{ và } y_A \text{ trái dấu.}$$

Do đó đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ *II* và thứ *IV*.

□

📁 BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Vẽ đồ thị các hàm số

❶ $y = 2x$.

❷ $y = 81x$.

❸ $y = -x$.

❹ $y = -3x$.

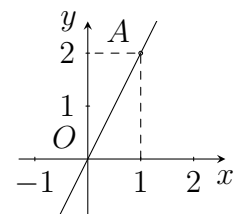
❺ $y = -\frac{1}{2}x$.

✎ **LỜI GIẢI.**

❶

Lấy thêm điểm $A(1; 2)$.

Nối điểm O và A ta được đồ thị $y = 2x$.

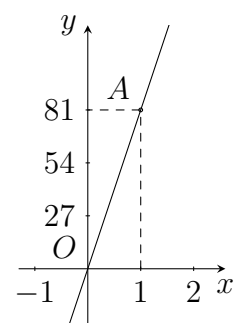


❷

Lấy thêm điểm $A(1; 81)$.

Nối điểm O và A ta được đồ thị $y = 81x$.

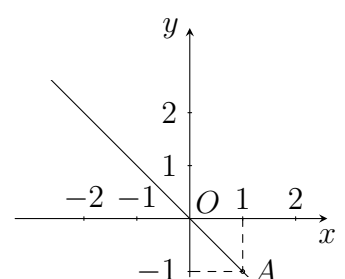
(Lưu ý: Tỷ lệ trên trục Oy bằng 1 : 27.)



❸

Lấy thêm điểm $A(1; -1)$.

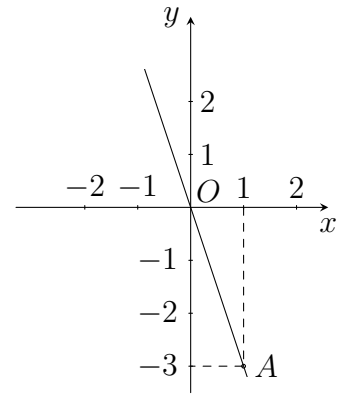
Nối điểm O và A ta được đồ thị $y = -x$.



④

Lấy thêm điểm $A(1; -3)$.

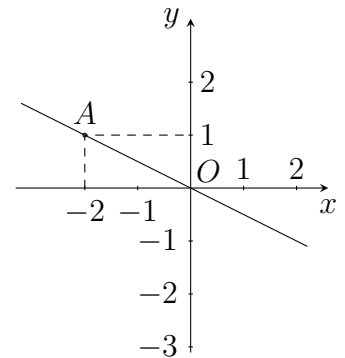
Nối điểm O và A ta được đồ thị $y = -3x$.



⑤

Lấy thêm điểm $A(-2; 1)$.

Nối điểm O và A ta được đồ thị $y = -\frac{1}{2}x$.



□

BÀI 2. Cho hàm số $y = ax$. Hãy xác định hệ số a , biết:

- ① Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 8)$.
- ② Đồ thị hàm số đi qua điểm $B\left(\frac{3}{4}; -3\right)$.
- ③ Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I và III .

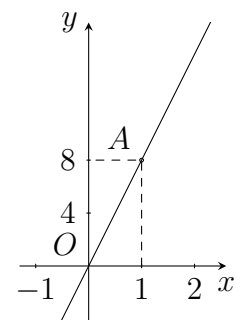
Vẽ đồ thị hàm số trong mỗi trường hợp.

LỜI GIẢI.

①

Vì điểm $A(1; 8)$ thuộc đồ thị nên $8 = a \cdot 1 \Leftrightarrow a = 8$.

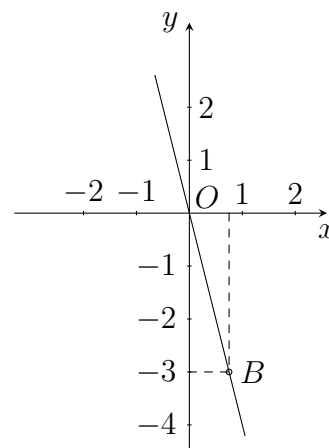
Vậy hàm số có dạng $y = 8x$.



②

Vì điểm $B\left(\frac{3}{4}; -3\right)$ thuộc đồ thị nên $-3 = a \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -4$.

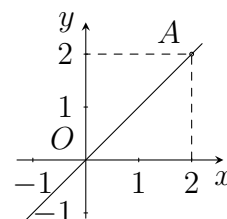
Vậy hàm số có dạng $y = -4x$.



③

Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I và III, ta có ngay $a = 1$.

Vậy hàm số có dạng $y = x$.



□

BÀI 3. Cho hàm số $y = (2a - 3)x$. Hãy xác định hệ số a , biết:

- ① Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 3)$.
- ② Đồ thị hàm số đi qua điểm $B\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right)$.
- ③ Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II và IV.

Vẽ đồ thị hàm số trong mỗi trường hợp.

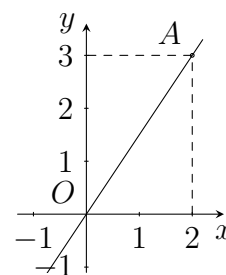
✎ **LỜI GIẢI.**

①

Vì điểm $A(2; 3)$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = (2a - 3) \cdot 2 \Leftrightarrow 4a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{9}{2}x$.

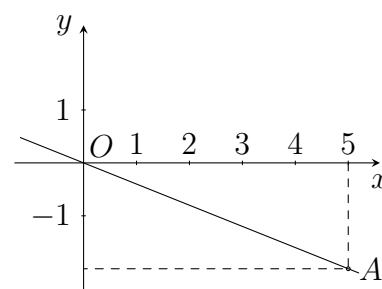


②

Vì điểm $B\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$-\frac{1}{2} = (2a - 3) \cdot \frac{5}{4} \Leftrightarrow 10a = 13 \Leftrightarrow a = \frac{13}{10}.$$

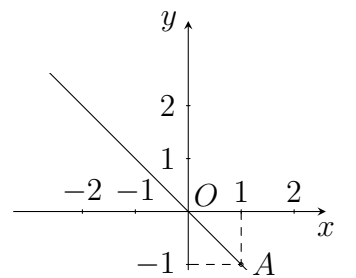
Vậy hàm số có dạng $y = -\frac{2}{5}x$.



③

Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II và IV ta có ngay, $2a - 3 = -1 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy hàm số có dạng $y = -x$.



□

BÀI 4. Cho hàm số $y = |a - 1|x$. Hãy xác định hệ số a , biết:

- ① Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 3)$.
- ② Đồ thị hàm số đi qua điểm $B\left(-\frac{1}{2}; 8\right)$.

Vẽ đồ thị hàm số trong mỗi trường hợp.

✎ **LỜI GIẢI.**

①

Vì điểm $A(1; 3)$ thuộc đồ thị nên:

$$3 = |a - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -2. \end{cases}$$

Vậy hàm số có dạng $y = 3x$.

- ② Vì đồ thị hàm số đi qua $B\left(-\frac{1}{2}; 8\right)$ nên:

$$8 = |a - 1| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy không tồn tại a .

□

BÀI 5. Vẽ đồ thị các hàm số sau

① $y = |x|$.

② $y = |2x|$.

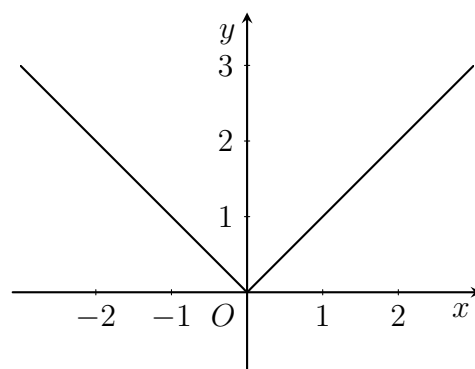
③ $y = \left|\frac{3}{4}x\right|$.

④ $y = \left|-\frac{x}{2}\right|$.

✎ **LỜI GIẢI.**

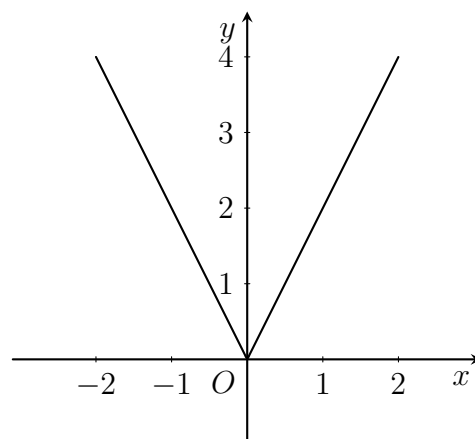
①

- Vẽ đường $y = x$ trong góc phần tư thứ I .
- Vẽ đường $y = -x$ trong góc phần tư thứ II .



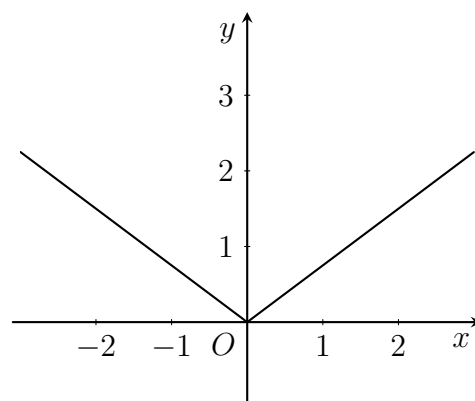
②

- Vẽ đường $y = 2x$ trong góc phần tư thứ I .
- Vẽ đường $y = -2x$ trong góc phần tư thứ II .



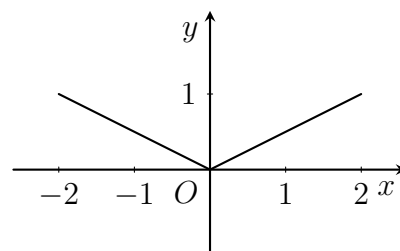
③

- Vẽ đường $y = \frac{3}{4}x$ trong góc phần tư thứ I .
- Vẽ đường $y = -\frac{3}{4}x$ trong góc phần tư thứ II .



④

- Vẽ đường $y = \frac{1}{2}x$ trong góc phần tư thứ I .
- Vẽ đường $y = -\frac{1}{2}x$ trong góc phần tư thứ II .



□

CHƯƠNG

3

THỐNG KÊ

BÀI 1 THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Thu thập số liệu - Bảng số liệu thống kê ban đầu

Định nghĩa 1. Thu thập số liệu thống kê là việc ghi lại các số liệu về vấn đề được quan tâm. Các số liệu được ghi lại trong một bảng, gọi là *bảng thống kê ban đầu*.

2. Dấu hiệu - Giá trị của dấu hiệu

Định nghĩa 2.

- Các số liệu thu nhập được khi điều tra về một dấu hiệu gọi là số liệu thống kê.
- Mỗi số liệu là một giá trị của dấu hiệu.

3. Tần số của mỗi giá trị

Định nghĩa 3. Tần số của một giá trị là số lần lặp lại của mỗi giá trị đó trong bảng số liệu ban đầu. Kí hiệu: m .

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Khi điều tra về “Môn học mà bạn yêu thích nhất” đối với bạn trong lớp, bạn Hoa đã thu được kết quả và thành lập bảng dưới đây.

Hóa học	Sinh học	Vật lý	Hóa học	Toán học
Văn học	Toán học	Hóa học	Sinh học	Địa lý
Anh văn	Vật lý	Anh văn	Văn học	Toán học
Địa lý	Lịch sử	Địa lý	Vật lý	Sinh học
Toán học	Văn học	Toán học	Lịch sử	Văn học

- ❶ Có bao nhiêu bạn tham gia vào quá trình điều tra của bạn Hoa?
- ❷ Dấu hiệu ở đây là gì?
- ❸ Có bao nhiêu môn học được các bạn đưa ra?
- ❹ Tần số của mỗi môn học ở đây là như thế nào?

🔗 LỜI GIẢI.

- ❶ Trong bảng số liệu, ta thấy:

- Có 5 cột.
- Mỗi cột có 5 hàng.

Vậy, trong quá trình điều tra của bạn Hoa có tất cả $5 \cdot 5 = 25$ bạn tham gia.

- ❷ Ở đây, dấu hiệu là “*Môn học bạn yêu thích nhất*”.

- ❸ Có 8 môn học được các bạn đưa ra.

Đó là: Toán học, Vật lý, Hóa học, Anh văn, Văn học, Sinh học, Lịch sử.

- ❹ Ta có:

- Môn Toán học có 5 bạn yêu thích.
- Môn Vật lý có 3 bạn yêu thích.
- Môn Hóa học có 3 bạn yêu thích.
- Môn Văn học có 4 bạn yêu thích.
- Môn Anh văn có 2 bạn yêu thích.
- Môn Sinh học có 3 bạn yêu thích.
- Môn Lịch sử có 2 bạn yêu thích.
- Môn Địa lý có 3 bạn yêu thích.

□

VÍ DỤ 2. Chọn 30 hộp kẹo một cách tùy ý trong kho của một cửa hàng và đem cân, kết quả được ghi lại trong bảng sau (*khi đã trừ bao bì*):

Khối lượng kẹo trong hộp (đơn vị: gam)		
200	199	202
200	201	201
199	199	200
198	200	199
201	202	198
200	198	201
202	200	200
200	199	298
199	200	199
200	200	201

Hãy cho biết:

- ❶ Dấu hiệu cần tìm hiểu và số các giá trị của dấu hiệu đó.
- ❷ Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
- ❸ Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

LỜI GIẢI.

- ❶ • Dấu hiệu cần tìm hiểu là “Số gam kẹo có trong hộp (đã trừ bao bì)”.
• Có 30 giá trị của dấu hiệu đó.
- ❷ Có 5 giá trị khác nhau của dấu hiệu, đó là 198, 199, 200, 201, 202.
- ❸ Trong 30 hộp kẹo, ta có:
 - 4 hộp có khối lượng kẹo bằng 198 gam.
 - 7 hộp có khối lượng kẹo bằng 199 gam.
 - 11 hộp có khối lượng kẹo bằng 200 gam.
 - 5 hộp có khối lượng kẹo bằng 201 gam.

- 3 hộp có khối lượng kẹo bằng 202 gam.



BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Trong một đợt khám sức khỏe đầu năm của lớp 6A, người điều tra thu thập được bản số liệu sau:

STT	Chiều cao của học sinh nam (cm)	STT	Chiều cao của học sinh nữ (cm)
1	154	1	151
2	156	2	151
3	152	3	156
4	156	4	152
5	148	5	147
6	151	6	150
7	153	7	151
8	150	8	149
9	156	9	153
10	152	10	153
11	151	11	150
12	153	12	155
13	154	13	154
14	152	14	151
15	152	15	150

Bảng 1

Bảng 2

Hãy cho biết:

- ① Dấu hiệu cần tìm hiểu (cả hai bảng).
- ② Số các giá trị của dấu hiệu đó và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu (của từng bảng).
- ③ Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng (của từng bảng).

✎ LỜI GIẢI.

- ① Dấu hiệu cần tìm hiểu là “*Chiều cao của học sinh lớp 6A*”.
- ② • Trong bảng 1: có 15 giá trị và 7 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.
• Trong bảng 2: có 15 giá trị và 9 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.
- ③ Ta có

Trong bảng 1 ta có:	Trong bảng 2 ta có:
• 1 bạn cao 148 cm.	• 1 bạn cao 147 cm.
• 1 bạn cao 150 cm.	• 1 bạn cao 149 cm.
• 2 bạn cao 151 cm.	• 3 bạn cao 150 cm.
• 4 bạn cao 152 cm.	• 4 bạn cao 151 cm.
• 2 bạn cao 153 cm.	• 1 bạn cao 152 cm.
• 2 bạn cao 154 cm.	• 2 bạn cao 153 cm.
• 3 bạn cao 156 cm.	• 1 bạn cao 154 cm.
	• 1 bạn cao 155 cm.
	• 1 bạn cao 156 cm.

□

BÀI 2. Khi điều tra về chỉ số nước tiêu thụ của một khu nhà tập thể, người điều tra thu được kết quả và lập thành bảng dưới đây:

30 m ³	31 m ³	45 m ³	60 m ³	50 m ³
35 m ³	30 m ³	53 m ³	35 m ³	50 m ³
44 m ³	50 m ³	30 m ³	45 m ³	40 m ³
32 m ³	39 m ³	32 m ³	30 m ³	35 m ³
35 m ³	31 m ³	45 m ³	33 m ³	45 m ³

- ❶ Có bao nhiêu hộ gia đình trong khu nhà tập thể đó?
- ❷ Dấu hiệu ở đây là gì?
- ❸ Số các giá trị của dấu hiệu đó và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
- ❹ Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

✎ LỜI GIẢI.

- ❶ Có 25 hộ gia đình trong khu nhà tập thể đó.
- ❷ Dấu hiệu cần tìm hiểu là “*Chỉ số nước tiêu thụ*”.
- ❸ Có 25 giá trị và 12 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.
- ❹ Có 4 hộ tiêu thụ 30 m³ nước.
 Có 2 hộ tiêu thụ 31 m³ nước.
 Có 2 hộ tiêu thụ 32 m³ nước.
 Có 1 hộ tiêu thụ 33 m³ nước.
 Có 4 hộ tiêu thụ 35 m³ nước.
 Có 1 hộ tiêu thụ 39 m³ nước.
 Có 1 hộ tiêu thụ 40 m³ nước.
 Có 1 hộ tiêu thụ 44 m³ nước.
 Có 4 hộ tiêu thụ 45 m³ nước.
 Có 3 hộ tiêu thụ 50 m³ nước.
 Có 1 hộ tiêu thụ 53 m³ nước.
 Có 1 hộ tiêu thụ 60 m³ nước.

□

BÀI 3. Chọn 30 hộp bánh một cách tùy ý trong kho của một cửa hàng và đem đánh giá chất lượng, kết quả được ghi lại trong bảng sau:

Chất lượng bánh trong hộp		
A	C	A
A	A	A
B	B	B
C	A	B
A	B	C
C	B	C
B	C	A
B	C	B
C	A	C
A	B	C

Hãy cho biết:

- ❶ Dấu hiệu cần tìm hiểu và số các giá trị của dấu hiệu đó.
- ❷ Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
- ❸ Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

✍ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Dấu hiệu cần tìm hiểu là “*Chất lượng bánh trong hộp*” có 30 giá trị của dấu hiệu đó.
- ❷ Có 3 giá trị khác nhau của dấu hiệu. Đó là A, B, C.
- ❸
 - Có 10 hộp bánh có chất lượng A.
 - Có 9 hộp bánh có chất lượng B.
 - Có 11 hộp bánh có chất lượng C.

□

BÀI **2** BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Bảng tần số các giá trị của dấu hiệu hay bảng phân phối thực nghiệm của một dấu hiệu X thường có dạng:

Giá trị của X	Tần số tương ứng
x_1	m_1
x_2	m_2
$\dots$	$\dots$
x_k	m_k
	Tổng số $n = \dots$

hoặc có dạng:

x_1	x_2	x_2	$\dots$	x_{k-1}	x_k
m_1	m_2	m_3	$\dots$	m_{k-1}	m_k

Nhận xét. ❶ Từ bảng số liệu thống kê ban đầu ta có thể chỉ ra có thể lập bảng tần số.
❷ Bảng tần số giúp người điều tra dễ dàng đưa ra các nhận xét.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Khi điều tra về “Môn học mà bạn yêu thích nhất ”đối với bạn trong lớp, Hoa đã ghi lại bằng bảng điều tra ban đầu như sau:

Hóa học	Sinh học	Vật lý	Hóa học	Toán học
Văn học	Toán học	Hóa học	Sinh học	Địa lý
Anh văn	Vật lý	Anh văn	Văn học	Toán học
Địa lý	Lịch sử	Địa lý	Vật lý	Sinh học
Toán học	Văn học	Toán học	Lịch sử	Văn học

Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm và có nhận xét gì trong quá trình điều tra.

LỜI GIẢI.

Ta có bảng phân phối thực nghiệm như sau:

STT	Môn học	Tần số
1	Toán học	5
2	Vật lý	3
3	Hóa học	3
4	Văn học	4
5	Anh văn	2
6	Sinh học	3
7	Lịch sử	2
8	Địa lý	3

Từ bảng trên, ta thấy: Có nhiều bạn yêu thích môn Toán nhất và có ít bạn thích học môn Anh và môn Sử. □

VÍ DỤ 2. Điều tra 100 gia đình trong một khu vực dân cư, người ta có bảng số liệu như sau:

2	1	6	4	2	7	3	5	1	8
5	1	4	4	2	5	3	5	2	7
3	1	4	5	2	3	1	5	2	8
1	3	6	5	8	6	5	6	4	4
2	4	3	5	8	7	1	6	2	2
2	3	2	1	6	2	2	2	6	2
1	3	2	3	2	2	2	4	4	2
3	5	1	3	1	5	6	7	3	3
3	6	8	5	3	5	6	1	3	3
1	8	7	4	4	6	1	8	5	5

- ❶ Dấu hiệu là gì?
- ❷ Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của dấu hiệu đó.

LỜI GIẢI.

- ❶ Dấu hiệu “Số con trong gia đình trong khu vực”.
- ❷ Lập bảng phân phối thực nghiệm:

Số con trong một gia đình	Tần số
1	13
2	20
3	17
4	12
5	15
6	11
7	5
8	7
	Tổng số = 100

□

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Để khảo sát kết quả học Toán của trường, người ta chọn ra một lớp bất kì để làm bài kiểm tra. Kết quả kiểm tra như sau:

3	4	10	9	10
5	6	9	8	10
8	8	5	7	5
5	3	8	4	8
6	5	7	6	9
7	9	6	7	6
9	6	9	5	7
10	8	7	6	9
8	10	3	8	7
7	7	5	9	6

- ❶ Từ cuộc điều tra trên, nêu dấu hiệu là gì?
- ❷ Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của mỗi dấu hiệu đó.

LỜI GIẢI.

- ❶ Dấu hiệu cần điều tra “*Chất lượng học tập của học sinh*”.
- ❷ Ta có bảng phân phối thực nghiệm:

Điểm số	Tần số
3	3
4	2
5	7
6	8
7	9
8	8
9	Z
10	5
	Tổng số = 50

□

BÀI 2. Năng suất lao động của công nhân trong một xí nghiệp bánh kẹo như sau (hộp/ngày):

10	12	14	11	15
12	13	15	15	11
15	12	12	12	13
12	15	15	12	14
13	11	10	14	12

- ❶ Từ cuộc điều tra trên, hãy nêu dấu hiệu là gì?
- ❷ Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của mỗi dấu hiệu đó và nêu ra một vài nhận xét.

LỜI GIẢI.

- ① Dấu hiệu cần điều tra “*Năng suất làm việc của công nhân*”.
- ② Ta có bảng phân phối thức nghiệm:

Điểm số	Tần số
10	2
11	4
12	7
13	3
14	3
15	6
	Tổng số = 25

Từ bảng trên, ta thấy:

- Có 6 trên 25 công nhân làm được 15 hộp bánh một ngày, chiếm tỉ lệ cao.
- Số công nhân làm được 10, 13, 14 hộp/ngày chiếm tỉ lệ thấp.

□

BÀI 3. Cho bảng tần số:

Giá trị	10	20	30	40	50	
Tần số	5	9	7	3	6	$n = 30$

Hãy viết lại bảng số liệu ban đầu từ bảng trên.

LỜI GIẢI.

Từ bảng tần số, ta có bảng số liệu ban đầu như sau:

10	20	30
30	40	50
50	10	20
20	30	30
30	20	50
40	10	20
20	20	10
50	50	20
50	10	30
20	30	40

□

BÀI 3 BIỂU ĐỒ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Biểu đồ đoạn thẳng

Với bảng:

Giá trị của X	Tần số tương ứng
x_1	m_1
x_2	m_2
x_3	m_3
$\dots$	$\dots$
x_k	m_k

Nếu ta biểu diễn trên hệ trục tọa độ xOm theo cách:

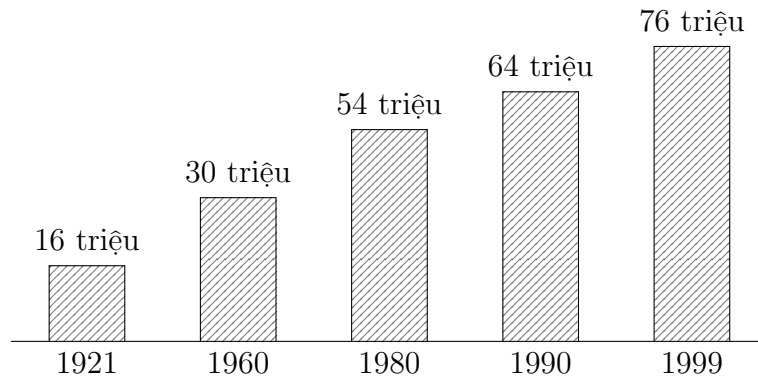
- Nối điểm $(x_1, 0)$ với điểm (x_1, m_1) để được một đoạn thẳng.
- Nối điểm $(x_2, 0)$ với điểm (x_2, m_2) để được một đoạn thẳng.
- $\dots$
- Nối điểm $(x_k, 0)$ với điểm (x_k, m_k) để được một đoạn thẳng.

Khi đó, ta nhận được một biểu đồ gọi là biểu đồ đoạn thẳng.

2. Biểu đồ hình chữ nhật

Nếu ta thay các đoạn thẳng bằng các hình chữ nhật thì ta được một loại biểu đồ mới. Đó là biểu đồ hình chữ nhật.

Thí dụ 1: Biểu đồ dân số Việt Nam qua tổng điều tra trong thế kỉ XX.



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho bảng tần số

Giá trị x	25	45	28	59	81	99	
Tần số n	2	3	2	4	5	4	$n = 20$

Hãy lập biểu đồ đoạn thẳng để biểu diễn các số liệu trên.

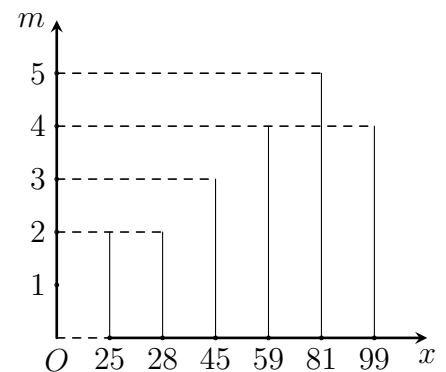
LỜI GIẢI.

Ta thực hiện các bước sau

Bước 1 Dựng hệ trục tọa độ. Trên đó, trục hoành biểu diễn các giá trị x , trục tung biểu diễn tần số m .

Bước 2 Xác định các điểm có tọa độ là cặp số gồm giá trị và tần số của nó. Ở đây, ta được: $(25, 2)$; $(45, 3)$; $(28, 2)$; $(59, 4)$; $(81, 5)$; $(99, 4)$.

Bước 3 Từ điểm đó kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành.



□

VÍ DỤ 2. Trong hồ sơ khảo sát của đài khí tượng thủy văn năm 2004 có ghi lại nhiệt độ trung bình của từng tháng như sau

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t°	18	20	24	28	30	31	32	31	28	25	18	17

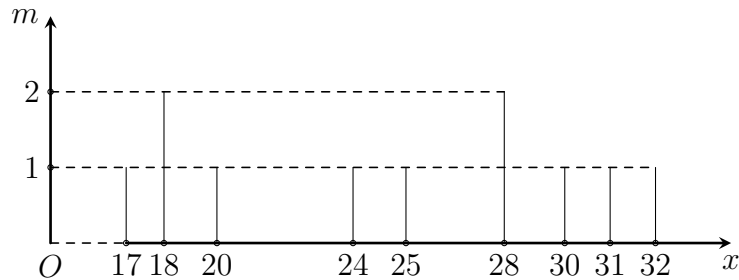
- Hãy lập bảng tần số.
- Hãy biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

✎ LỜI GIẢI.

❶ Ta có, bảng tần số:

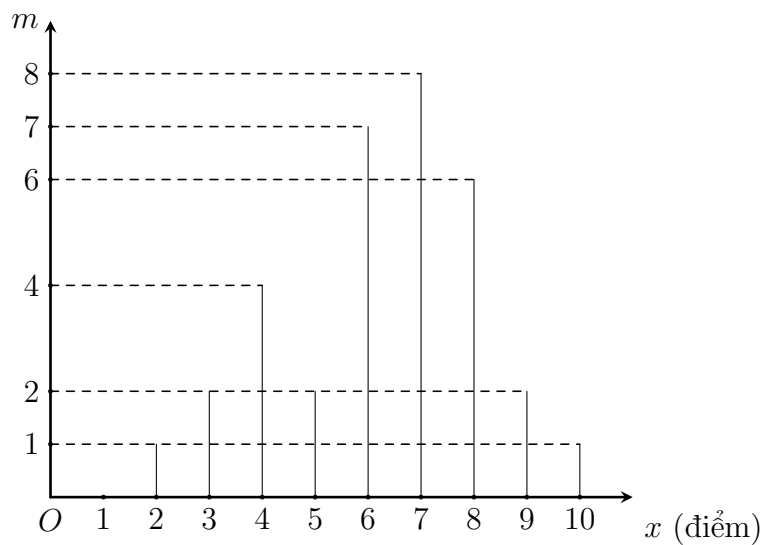
Giá trị	17	18	20	24	25	28	30	31	32	
Tần số	1	2	1	1	1	2	1	2	1	$n = 12$

❷ Biểu đồ đoạn thẳng



□

VÍ DỤ 3. Cho biểu đồ biểu diễn kết quả học tập của học sinh trong một lớp qua một bài kiểm tra.



Từ biểu đồ trên hãy

- ❶ Nhận xét sơ bộ về tình hình học tập của lớp.
- ❷ Lập bảng tần số.

✎ LỜI GIẢI.

❶ Từ biểu đồ trên, ta có một số nhận xét sau

- Tình hình học tập của lớp ở mức khá.
- Không có bạn nào bị điểm 1 song vẫn có bạn bị điểm dưới trung bình.
- Tỷ lệ đạt điểm 6, 7, 8 là khá cao.

❷ Lập bảng tần số

Giá trị	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	0	1	2	4	2	7	8	6	2	1	$n = 32$

□

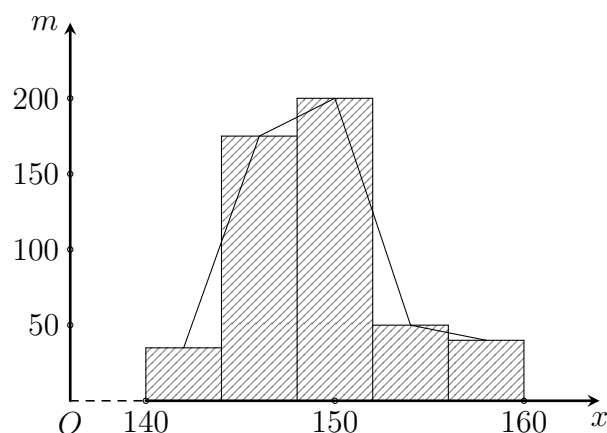
VÍ DỤ 4. Để kiểm tra sức khỏe của một trường trung học cơ sở có 500 học sinh. Người ta điều tra đã thống kê về chiều cao của các em thông qua bảng sau

Chiều cao (tính theo cm)	Giá trị trung tâm	Tần số
140 – 144	142	35
144 – 150	146	175
150 – 154	152	200
154 – 158	156	50
158 – 160	159	40
		Tổng số = 500

Hãy lập biểu đồ hình chữ nhật để biểu diễn các số liệu trên.

✎ LỜI GIẢI.

Lập biểu đồ hình chữ nhật



□

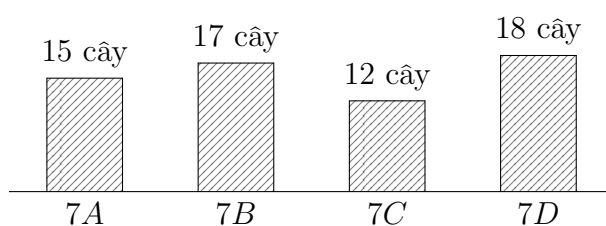
1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Trong đợt hè vừa qua, nhà trường tổ chức hoạt động trồng cây gây rừng. Kết quả thu được như sau

Lớp	7A	7B	7C	7D
Số cây trồng	15	17	12	18

Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật để biểu diễn kết quả trên.

LỜI GIẢI.



Biểu đồ biểu diễn số cây trồng trong dịp hè của khối 7.

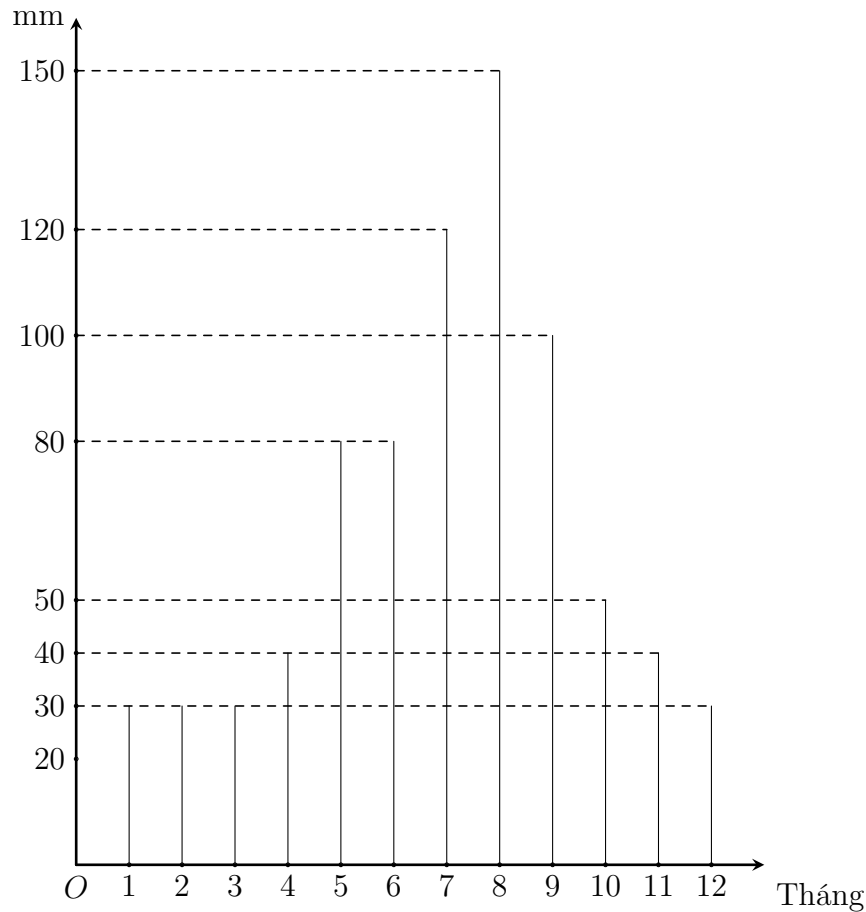
□

BÀI 2. Lượng mưa trung bình hàng tháng trong năm 2004 ở Hà Nội được trạm khí tượng thủy văn ghi lại trong bảng dưới đây (đo theo mm và làm tròn đến mm)

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lượng mưa	30	30	30	40	80	80	120	150	100	50	40	30

Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng và nhận xét.

LỜI GIẢI.



Biểu đồ lượng mưa trong năm 2004 ở Hà Nội.

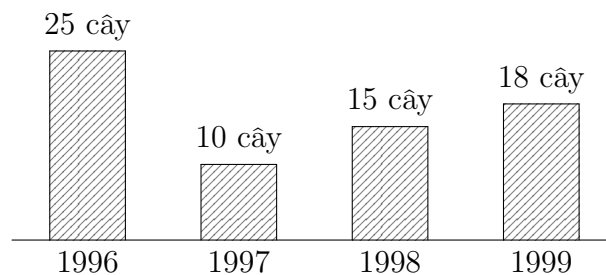
Từ biểu đồ trên ta có nhận xét ở khu vực Hà Nội, lượng mưa lớn nhất là vào tháng 8 và trời khá hanh khô vào cuối năm và đầu năm. □

BÀI 3. Diện tích đất rừng ở nước ta ngày càng bị thu hẹp. Theo thống kê từ năm 1995 đến 1998, mỗi năm số diện tích đất rừng bị tàn phá như sau (đơn vị: nghìn ha)

Năm	1996	1997	1998	1999
Diện tích	25	10	15	18

Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật để biểu diễn kết quả trên.

LỜI GIẢI.



Biểu đồ biểu diễn diện tích rừng bị phá.

□

BÀI 4 SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số trung bình cộng của dấu hiệu

Định nghĩa 1. Giá trị trung bình của một dấu hiệu là trung bình cộng các giá trị của dấu hiệu đó. Giá trị trung bình X được kí hiệu là $\overline{X}$.

2. Công thức tính số trung bình cộng của dấu hiệu

Nhận xét rằng, dựa vào bảng tần số, ta có thể tính số trung bình cộng của một dấu hiệu như sau

1. Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.
2. Cộng tất cả các tích vừa tìm được.
3. Chia tổng đó cho số các giá trị (hay tổng các tần số).

Vậy, ta có thể sử dụng ngay công thức khi đã có bảng thực nghiệm

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \cdots + x_kn_k}{n}$$

trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.
- $x_1, x_2, \dots, x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu X .
- $n_1, n_2, \dots, n_k$ là k tần số tương ứng.

3. Ý nghĩa của số trung bình cộng

“Số trung bình cộng thường được dùng làm đại diện cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại”.

 **Chú ý**

1. Khi các giá trị của biến lượng có sự chênh lệch quá lớn thì giá trị trung bình không thể đại diện cho biến lượng mà phải kết hợp cùng những số khác.
2. Số trung bình cộng có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

4. Mốt của dấu hiệu

Định nghĩa 2. Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng tần số. Kí hiệu: M_0

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Điều tra 100 gia đình chọn ra từ 800 gia đình trong một khu vực dân cư, người ta có bảng phân phối thực nghiệm sau

X_i	m_i
1	13
2	20
3	17
4	12
5	15
6	11
7	5
8	7
	Tổng số = 100

Tìm giá trị trung bình $\bar{X}$ của biến lượng.

LỜI GIẢI.

Áp dụng công thức, ta được

$$\bar{X} = \frac{1 \cdot 13 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 15 + 6 \cdot 11 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7}{100} = \frac{384}{100} \approx 3,84.$$

□

VÍ DỤ 2. Tìm giá trị trung bình $\bar{X}$ của biến lượng được cho bởi bảng phân phối thực nghiệm sau

Điểm số mỗi lần bắn ($\overline{X}_i$)	m_i
10	25
9	20
8	31
7	8
6	10
5	6
Tổng số = 100	

LỜI GIẢI.

Áp dụng công thức, ta được

$$\overline{X} = \frac{10 \cdot 25 + 9 \cdot 20 + 8 \cdot 31 + 7 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{100} = \frac{824}{100} = 8,24.$$

□

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng

“Nếu cộng các giá trị của biến lượng với cùng một số thì số trung bình của biến lượng cũng được cộng với số đó”.

LỜI GIẢI.

Giả sử

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ là các giá trị của biến lượng.
- $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ là các tần số tương ứng.

Ta có

$$\begin{aligned} n &= m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k \\ \Rightarrow \overline{X} &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \dots + x_k m_k}{n}. \end{aligned}$$

Giả sử a là số được cộng thêm vào mỗi biến lượng.

Vậy giá trị của biến lượng là

$$(x_1 + a), (x_2 + a), (x_3 + a), \dots, (x_k + a).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= \frac{(x_1 + a)m_1 + (x_2 + a)m_2 + (x_3 + a)m_3 + \cdots + (x_k + a)m_k}{n} \\
 &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_km_k + (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k)a}{n} \\
 &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_km_k + na}{n} \\
 &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_km_k}{n} + a \\
 &= \bar{X} + a \quad (\text{đpcm})
 \end{aligned}$$

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tính trung bình cộng của 10 thùng hàng. Trong đó có 3 thùng nặng 5 kg, 2 thùng nặng 6 kg, 4 gói nặng 7,5 kg, 3 thùng nặng 8 kg và 1 thùng nặng 9 kg.

 **LỜI GIẢI.**

Ta có bảng phân phối thực nghiệm sau

Trọng lượng	Tần số (m)	Tích $x \cdot m$	
5	3	15	
6	2	12	
7,5	4	30	
8	3	24	
9	1	9	
	$N = 10$	Tổng: 90	$\bar{X} = \frac{90}{10} = 9$

Vậy trung bình cộng của 10 thùng hàng là 9 kg.

□

BÀI 2. Người ta điều tra trên 8 phần tử, các thông số nhận được là: 15, 30, 25, 45, 35, 40, 45, 50.

① Tính tần số của mỗi thông số.

② Tính giá trị trung bình của một biến lượng.

 **LỜI GIẢI.**

Ta có bảng phân phối thực nghiệm sau

Thông số	Tần số (m)	Tích $x \cdot m$	
15	1	15	
25	1	25	
30	1	30	
35	1	35	
40	1	40	
45	2	90	
50	1	50	
	$N = 8$	Tổng: 285	$\bar{X} = \frac{285}{8} = 35,625$

Vậy trung bình cộng của các thông số là 35,625.

□

BÀI 3. Người ta kiểm tra 10 em học sinh để đánh giá chất lượng học tập chung của cả lớp. Điểm mà các em đó đạt được như sau: 9, 4, 6, 5, 10, 6, 8, 4, 8, 9.

- ❶ Tính tần số của mỗi thông số.
- ❷ Lập bảng phân phối thực nghiệm.
- ❸ Tính giá trị trung bình của biến lượng.

 **LỜI GIẢI.**

Ta có bảng phân phối thực nghiệm sau

Điểm số	Tần số (m)	Tích $x \cdot m$	
4	2	8	
5	1	5	
6	2	12	
8	2	16	
9	2	18	
10	1	10	
	$N = 10$	Tổng: 69	$\bar{X} = \frac{69}{10} = 6,9$

Vậy trung bình cộng điểm của các em học sinh là 6,9.

□

BÀI 4. Chứng minh rằng

“Nếu trừ các giá trị của biến lượng với cùng một số thì số trung bình của biến lượng cũng được trừ với số đó”.

✎ LỜI GIẢI.

Giả sử:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ là các giá trị của biến lượng.
- $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ là các tần số tương ứng.

Ta có

$$\begin{aligned} n &= m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k \\ \Rightarrow \bar{X} &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \dots + x_k m_k}{n}. \end{aligned}$$

Giả sử a là số được cộng thêm vào mỗi biến lượng.

Vậy giá trị của biến lượng là

$$(x_1 - a), (x_2 - a), (x_3 - a), \dots, (x_k - a).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
 \overline{X} &= \frac{(x_1 - a)m_1 + (x_2 - a)m_2 + (x_3 - a)m_3 + \cdots + (x_k - a)m_k}{n} \\
 &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_km_k - (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k)a}{n} \\
 &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_km_k - na}{n} \\
 &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_km_k}{n} - a \\
 &= \overline{X} - a \quad (\text{đpcm}).
 \end{aligned}$$

□

CHƯƠNG

4

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

BÀI 1

KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Biểu thức số

Định nghĩa 1. Các số được nối với nhau bởi các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) được gọi là các biểu thức số.

2. Biểu thức đại số

Định nghĩa 2. Các biến được nối với nhau bởi các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) được gọi là các biểu thức đại số.

**Chú ý**

- ① Trong biểu thức đại số, người ta cũng dùng các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.
- ② Trong biểu thức đại số, vì các chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ, ta có thể áp dụng các tính chất, quy tắc phép toán như trên các số.

VÍ DỤ 1. Một vài tính chất

- $x + y = y + x$; $xy = yx$ - Tính chất giao hoán.
- $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(xy)z = x(yz)$ - Tính chất kết hợp.
- $(x + y)z = xz + yz$ - Tính chất phân phối.
- $xx = x^2$; $xxx = x^3$.
- $-(x - y + z) = -x + y - z$ - Quy tắc đổi dấu.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 2. Viết biểu thức đại số để biểu đạt các ý sau

- a) Tổng của a và b .
- b) Tích của a và b .
- c) Tổng của a và b lập phương.
- d) Tổng các lập phương của a và b .
- e) Lập phương của tổng của a và b .

f) Tích của tổng a và b với hiệu của a và b .

LỜI GIẢI.

- a) Tổng của a và b là $a + b$.
- b) Tích của a và b là $a \cdot b$.
- c) Tổng của a và b lập phương là $a + b^3$.
- d) Tổng các lập phương của a và b là $a^3 + b^3$.
- e) Lập phương của tổng của a và b là $(a + b)^3$.
- f) Tích của tổng a và b với hiệu của a và b là $(a + b)(a - b)$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng a và b .

- a) Viết biểu thức tính chu vi của hình chữ nhật.
- b) Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật.

LỜI GIẢI.

- a) Biểu thức tính chu vi của hình chữ nhật là $CV = 2 \cdot (a + b)$.
- b) Biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật là $S = a \cdot b$.

□

VÍ DỤ 4. Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $2cm$. Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật.

LỜI GIẢI.

Cách 1 Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x , suy ra chiều dài bằng $x + 2$. Khi đó, diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi $x(x + 2)$.

Cách 2 Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x , suy ra chiều rộng bằng $x - 2$. Khi đó, diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi $x(x - 2)$.

□

VÍ DỤ 5. (Bài 2/tr 26-SGK) Viết biểu thức đại số biểu thị diện tích hình thang có đáy lớn là a , đáy nhỏ là b , đường cao là h (a, b và h có cùng đơn vị).

LỜI GIẢI.

Diện tích hình thang được viết như sau $S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$.

Công thức trên được đọc là “*Diện tích hình thang bằng đáy lớn cộng đáy nhỏ nhân chiều cao chia đôi.*”

□

VÍ DỤ 6. Sử dụng các thuật ngữ đã học để đọc các biểu thức sau

- a) $x^2 + 8$.
- b) $9x^3$.
- c) $(x - 1)(x + 1)$.

LỜI GIẢI.

- ① Ta đọc $x^2 + 8$ là tổng của x bình phương và 8.
- ② Ta đọc $9x^3$ là tích của 9 và x lập phương.

- ③ Ta đọc $(x - 1)(x + 1)$ là tích của hiệu số x và 1 với tổng của chúng.

□

VÍ DỤ 7. Viết biểu thức đại số hiển thị

- ① Số giờ đi hết quãng đường AB dài x (km) của một người đi xe máy với vận tốc 30km/h.
- ② Tổng quãng đường đi của một người, biết
 - Người đó đi bộ trong x giờ với vận tốc 5km/h.
 - Người đó đi xe đạp trong y giờ với vận tốc 12km/h.
 - Người đó đi xe máy trong z giờ với vận tốc 30km/h.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Người đi xe máy đi quãng đường AB dài x km với vận tốc 30km/h mất khoảng thời gian bằng $\frac{x}{30}$ (giờ).
- ② Ta có
 - Quãng đường người đó đi bộ trong x giờ với vận tốc 5km/h là $5x$ (km).
 - Quãng đường người đó đi xe đạp trong y giờ với vận tốc 12km/h là $12y$ (km).
 - Quãng đường người đó đi xe máy trong z giờ với vận tốc 30km/h là $30z$ (km).
 Vậy tổng quãng đường đi của người đó đi là $5x + 12y + 30z$ (km).

□

© BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Viết biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau

- ① Tổng của a bình phương và b lập phương.
- ② Hiệu các lập phương của a và b .
- ③ Lập phương của hiệu a và b .

✎ LỜI GIẢI.

- ① Tổng của a bình phương và b lập phương là $a^2 + b^3$.
- ② Hiệu các lập phương của a và b là $a^3 - b^3$.
- ③ Lập phương của hiệu a và b là $(a - b)^3$.

□

BÀI 2. Sử dụng các thuật ngữ đã học để đọc các biểu thức sau

a) $x^3 - 1$.

b) $5 : x^2$.

c) $(x + 8)(x - 2)$.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta đọc $x^3 - 1$ là hiệu của x lập phương và 1.
- ② Ta đọc $5 : x^2$ là thương của 5 và x bình phương.
- ③ Ta đọc $(x + 8)(x - 2)$ là tích của tổng hai số x và 8 với hiệu hai số x và 2.

□

BÀI 3. Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2 cm.

✎ LỜI GIẢI.

Cách 1 Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x , suy ra chiều dài bằng $x + 2$. Khi đó, diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi $x(x + 2)$.

Cách 2 Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x , suy ra chiều rộng bằng $x - 2$. Khi đó, diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi $x(x - 2)$. $\square$

BÀI 4. Viết biểu thức tính diện tích của hình thang có đáy lớn bằng hai đáy nhỏ và đường cao là h .

✎ **LỜI GIẢI.**

Cách 1 Giả sử hình có đáy nhỏ bằng a , suy ra đáy lớn bằng $2a$. Khi đó, diện tích hình thang (S) được cho bởi $\frac{(a + 2a)h}{2} = \frac{3}{2}ah$.

Cách 2 Giả sử hình có đáy lớn bằng a , suy ra đáy nhỏ bằng $\frac{a}{2}$. Khi đó, diện tích hình thang (S) được cho bởi $\frac{(a + \frac{a}{2})h}{2} = \frac{3}{4}ah$. $\square$

BÀI 5. Viết biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau

- ① Một số khi chia cho 5 được thương là a và dư 1. Tổng của số đó với 2 thì chia cho 6 được thương là b và dư 2.
- ② Một số khi chia cho 8 được thương là a và dư 5. Hiệu của số đó với 9 thì chia cho 11 được thương là b và dư 3.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Một số khi chia cho 5 được thương là a và dư 1. Vậy số đó là $5 \cdot a + 1$.
Tổng của số đó với 2 thì chia cho 6 được thương là b và dư 2. Ta được $5 \cdot a + 1 + 2 = 6b + 2$.
- ② Một số khi chia cho 8 được thương là a và dư 5. Vậy số đó là $8 \cdot a + 5$.
Hiệu của số đó với 9 thì chia cho 11 được thương là b và dư 3, ta được $8 \cdot a + 5 - 911b + 3$

$\square$

BÀI 6. Trong hóa đơn thu tiền điện của một hộ gia đình, chỉ số điện tiêu thụ là 250 số. Hỏi người đó phải trả bao nhiêu tiền điện nếu

- ① Hóa đơn được tính theo hệ số 1, ta có
 - Số tiền 100 số đầu tiên là $100a$ đồng.
 - Số tiền 100 số đầu tiên là $100b$ đồng.
 - Số tiền 50 số đầu tiên là $50c$ đồng.
 Vậy tổng số tiền họ phải trả là $100a + 100b + 50c$ (đồng).
- ② Hóa đơn được tính theo hệ số 1, nghĩa là
 - Số tiền 50 số đầu tiên là $50a$ đồng.
 - Số tiền 50 số đầu tiên là $50b$ đồng.
 - Số tiền 150 số đầu tiên là $150c$ đồng.
 Vậy tổng số tiền họ phải trả là $50a + 50b + 150c$ (đồng).

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Hóa đơn được tính theo hệ số 1, nghĩa là
 - 100 số đầu tiên họ phải trả a đồng/ 1 số điện.
 - 100 số tiếp theo họ phải trả b đồng/ 1 số điện.
 - Từ số 201 trở đi họ phải trả c đồng/ 1 số điện.

- ② Hóa đơn được tính theo hệ số 1, nghĩa là
- 50 số đầu tiên họ phải trả a đồng/ 1 số điện.
 - 50 số tiếp theo họ phải trả b đồng/ 1 số điện.
 - Từ số 101 trở đi họ phải trả c đồng/ 1 số điện.

□

BÀI 2

GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

⚠ *Chú ý* Để phát triển bài toán tính giá trị của biểu thức đại số, người ta thường xuyên yêu cầu “Xây dựng biểu thức rồi tính giá trị của biểu thức trong một hay nhiều trường hợp cụ thể.”

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Tính giá trị biểu thức $x^2 + 3x - 12$ tại $x = 7$ và tại $x = 8$.

✍ LỜI GIẢI.

- ① Thay $x = 7$ vào biểu thức đã cho, ta được $7^2 + 3 \cdot 7 - 12 = 58$.

Vậy giá trị của biểu thức tại $x = 7$ bằng 58.

- ② Thay $x = 8$ vào biểu thức đã cho, ta được $8^2 + 3 \cdot 8 - 12 = 76$.

Vậy giá trị của biểu thức tại $x = 8$ bằng 76.

□

⚠ *Chú ý* Sử dụng máy tính CASIO Fx - 570MS tính giá trị của biểu thức trên tại các giá trị x khác nhau chúng ta thực hiện như sau

- 1) Nhập biểu thức $x^2 + 3x - 12$ vào máy, bằng cách ấn

$\boxed{ALPHA} \boxed{X} \boxed{x^2} \boxed{+} 3 \boxed{ALPHA} \boxed{X} \boxed{-} 12$

- 2) Lưu trữ biểu thức vào bộ nhớ CACL, bằng cách ấn

$\boxed{CACL}$.

- 3) Để nhận được giá trị của hàm số với $X = 7$, ta ấn

$\boxed{7} \boxed{=}$ $\boxed{58}$

- 4) Để nhận được giá trị của hàm số với $X = 8$, ta ấn

$\boxed{CACL} \boxed{8} \boxed{=}$ $\boxed{76}$

Trong đó

- 1) Dấu $\boxed{=}$ được nhập vào bằng phím màu đỏ trên bàn phím của máy tính.

$\boxed{ALPHA} \boxed{X} \boxed{x^2} \boxed{+} 3 \boxed{ALPHA} \boxed{X} \boxed{-} 12$

- 2) Biểu thức lưu trữ trong bộ nhớ CACL bị xóa khi ta

- Thực hiện một phép toán khác.
- Thay đổi Mode khác.
- Tắt máy tính.

VÍ DỤ 2. Tính giá trị biểu thức $x^2y + xy^2$ tại $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$.

✍ LỜI GIẢI.

Thay $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$ vào biểu thức đã cho, ta được

$$1^2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị biểu thức $x^2y + xy^2$ tại $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$ bằng $\frac{3}{4}$. $\square$

 **Chú ý** Sử dụng máy tính CASIO Fx - 570MS tính giá trị của biểu thức trên tại các giá trị x khác nhau chúng ta thực hiện như sau

1) Nhập biểu thức $x^2y + xy^2$ vào máy, bằng cách ấn

[ALPHA] [X] [x²] [ALPHA] [Y] [+] [+] [ALPHA] [X] [ALPHA] [Y] [x²]

2) Ấn [CACL].

3) Để nhập giá trị của $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$, ta ấn

1 [=] [Y?] 1
1 [a^{b/c}] 2 [=] [3/4]

VÍ DỤ 3. Tính giá trị biểu thức $a - 2b^2 + c^3$ tại $a = 4$, $b = -1$ và $c = -1$.

 **LỜI GIẢI.**

Thay $a = 4$, $b = -1$ và $c = -1$ vào biểu thức đã cho, ta được

$$4 - 2(-1)^2 + (-1)^3 = 4 - 2 - 1 = 1$$

Vậy giá trị biểu thức $a - 2b^2 + c^3$ tại $a = 4$, $b = -1$ và $c = -1$ bằng 1. $\square$

 **Chú ý 1.** Sử dụng máy tính CASIO Fx - 570MS tính giá trị của biểu thức trên tại các giá trị x khác nhau chúng ta thực hiện như sau

1) Nhập biểu thức $a - 2b^2 + c^3$ vào máy, bằng cách ấn

[ALPHA] [A] [−] [2] [ALPHA] [B] [x²] [+] [ALPHA] [C] [3]

2) Ấn [CACL].

3) Để nhập giá trị của $a = 4$, $b = -1$ và $c = -1$, ta ấn

4 [=] [B?] 1
[(-)] 1 [=] [C?] 1
[(-)] 1 [=] [1]

2. Để phát triển bài toán tính giá trị của biểu thức đại số, người ta thường yêu cầu chúng ta “Xây dựng biểu thức rồi tính giá trị của biểu thức trong một hay nhiều trường hợp cụ thể.” Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

VÍ DỤ 4. Một vòi nước chảy vào một bể nước, mỗi phút được x lít. Cùng một lúc đó một vòi nước khác chảy ra từ bể ra, mỗi phút chảy được một lượng nước bằng $\frac{1}{4}$ lượng nước chảy vào.

- ❶ Hãy biểu thị số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong y phút.
- ❷ Tính số nước có thêm trong bể trên, biết $x = 36$, $y = 60$.

 **LỜI GIẢI.**

- ① Nhận xét rằng, lượng nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong mỗi phút bằng $\frac{3}{4}$ lượng nước chảy vào, tức là bằng $\frac{3}{4}x$.

Do đó, số nước có thêm trong bể sau khi ở đồng thời cả hai vòi nước trong y phút bằng $\frac{3}{4}xy$ (lít).

- ② Thay $x = 36, y = 60$ vào biểu thức trên, ta có $\frac{3}{4} \cdot 36 \cdot 60 = 1620$ (lít).

Vậy số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên với $x = 36, y = 60$ bằng 1620 (lít).

□

VÍ DỤ 5. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng x (m), chiều rộng bằng y (m) (với $x, y > 2$). Người ta mở một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng 1(m).

- ① Viết biểu thức tính diện tích của phần đất còn lại để trồng trọt.
② Tính diện tích khu đất trồng trọt biết $x = 14\text{m}, y = 10\text{m}$.

✎ LỜI GIẢI.

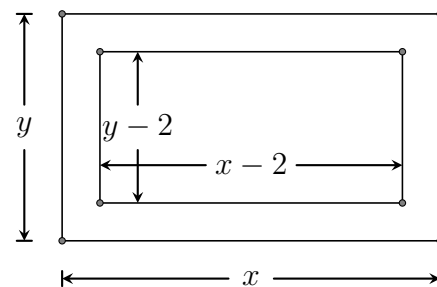
- ① Phần đất còn lại để trồng trọt có hình chữ nhật với

- Chiều dài bằng $x - 2$.
- Chiều rộng bằng $y - 2$.

Do đó, diện tích của phần đất trồng trọt là $(x - 2)(y - 2)$.

- ② Thay $x = 14\text{m}, y = 10\text{m}$ vào biểu thức trên, ta được $(14 - 2)(10 - 2) = 12 \cdot 8 = 96\text{m}^2$.

Vậy diện tích của phần đất được trồng trọt với $x = 14\text{m}, y = 10\text{m}$ bằng 96m^2 .



□

VÍ DỤ 6. Một người công nhân lắp ráp được hưởng lương như sau

- Lương cứng 20 đồng/tháng.
- Lương trách nhiệm (nếu có) 5 đồng/tháng.
- Lương làm thêm (nếu có) 1 đồng/1 sản phẩm.

Hỏi mức lương của anh An là bao nhiêu nếu

- ① Trong một tháng, anh An đã lắp thêm được 4 sản phẩm.
② Trong một tháng, anh An được công nhận là người có trách nhiệm và đã lắp thêm được 3 sản phẩm.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Trong một tháng, anh An đã lắp thêm được 4 sản phẩm. Do đó, lương của anh An là $20 + 1 \cdot 4 = 24$ (đồng).

- ② Trong một tháng, anh An được công nhận là người có trách nhiệm và đã lắp thêm được 3 sản phẩm. Do đó, lương của anh An là $20 + 5 + 1 \cdot 3 = 28$ (đồng).

□

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho biểu thức $9x^2 + 3x - 1$. Tính giá trị của biểu thức tại $x = -1$ và tại $x = -\frac{1}{3}$.

 **LỜI GIẢI.**

① Thay $x = -1$ vào biểu thức đã cho, ta được $9(-1)^2 + 3(-1) - 1 = 9 \cdot 1 - 3 - 1 = 5$.

Vậy giá trị của biểu thức $9x^2 + 3x - 1$ tại $x = -1$ bằng 5.

② Thay $x = \frac{1}{3}$ vào biểu thức đã cho, ta được $9\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$.

Vậy giá trị của biểu thức $9x^2 + 3x - 1$ tại $x = \frac{1}{3}$ bằng 1.

□

BÀI 2. Cho biểu thức $4x^2 + 6x - 8$. Tính giá trị của biểu thức tại

a) $x = 3$.

b) $x = -2$.

c) $x = -\frac{1}{2}$.

 **LỜI GIẢI.**

Đáp số

a) 46.

b) -4.

c) -10.

□

BÀI 3. Tính giá trị biểu thức của biểu thức $x^3 - 2y + z^5$ tại $x = -3$, $y = 3$ và $z = -2$.

 **LỜI GIẢI.**

Thay $x = -3$, $y = 3$ và $z = -2$ vào biểu thức, ta có $(-3)^3 - 2 \cdot 3 + (-2)^5 = -27 - 6 - 32 = -65$.

Vậy giá trị của biểu thức $x^3 - 2y + z^5$ tại $x = -3$, $y = 3$ và $z = -2$ bằng -65.

□

BÀI 4. Cho biểu thức $(x^2y - 2x - 2z)xy$. Tính giá trị của biểu thức tại

a) $x = 1, y = -1, z = 3$.

b) $x = -\frac{1}{2}, y = 4, z = -3$.

 **LỜI GIẢI.**

Đáp số

a) 9.

b) -16.

□

BÀI 5. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng $x(m)$, chiều rộng bằng $y(m)$ (với $x, y > 4$). Người ta mở một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng $2(m)$.

① Viết biểu thức tính diện tích của phần đất còn lại để trồng trọt.

② Tính diện tích khu đất trồng trọt biết $x = 16m$, $y = 12m$.

 **LỜI GIẢI.**

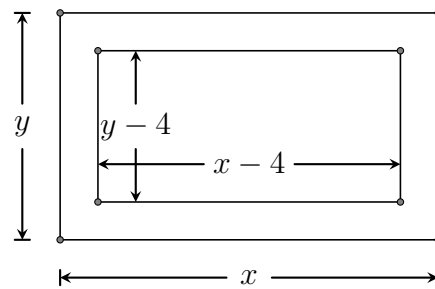
① Phần đất còn lại để trồng trọt có hình chữ nhật với

- Chiều dài bằng $x - 4$.
- Chiều rộng bằng $y - 4$.

Do đó, diện tích của phần đất trồng trọt là $(x - 4)(y - 4)$.

② Thay $x = 16\text{m}$, $y = 12\text{m}$ vào biểu thức trên, ta được $(16 - 4)(12 - 4) = 12 \cdot 8 = 96\text{m}^2$.

Vậy diện tích của phần đất được trồng trọt với $x = 16\text{m}$, $y = 12\text{m}$ bằng 96m^2 .



□

BÀI 6. Một vòi nước chảy vào một bể nước, mỗi phút được x lít. Cùng một lúc đó một vòi nước khác chảy ra từ bể ra, mỗi phút chảy được một lượng nước bằng $\frac{2}{3}$ lượng nước chảy vào.

- ① Hãy biểu thị số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong y phút.
- ② Tính số nước có thêm trong bể trên, biết $x = 27$, $y = 30$.

✎ **LỜI GIẢI.**

① Nhận xét rằng, lượng nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong mỗi phút bằng $\frac{1}{3}$ lượng nước chảy vào, tức là bằng $\frac{1}{3}x$.

Do đó, số nước có thêm trong bể sau khi ở đồng thời cả hai vòi nước trong y phút bằng $\frac{1}{3}xy$ (lít).

② Thay $x = 27$, $y = 30$ vào biểu thức trên, ta có $\frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 30 = 270$ (lít).

Vậy số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên với $x = 27$, $y = 30$ bằng 270 (lít).

□

BÀI 7. Hóa đơn thu tiền điện thoại của một hộ gia đình được tính như sau

- Thuê bao hàng tháng là 27000 đồng (bắt buộc).
- 200 phút đầu tiên họ phải trả 120đồng/1 phút.
- 500 số tiếp theo họ phải trả 80đồng/1 phút.
- Từ số 701 trở đi họ phải trả 40 đồng/1 phút.

Hỏi gia đình đó phải thanh toán bao nhiêu tiền điện nếu

- ① Một tháng họ sử dụng hết 680 phút.
- ② Một tháng họ sử dụng hết 1028 phút.

✎ **LỜI GIẢI.**

① Một tháng họ sử dụng hết 680 phút. Do đó, số tiền chi tiết như sau

- Thuê bao hàng tháng 27000 (đồng).
- 200 phút đầu tiên họ phải trả $120 \cdot 200 = 24000$ (đồng).
- 480 phút tiếp theo họ phải trả $80 \cdot 480 = 38400$ (đồng).

Vậy, tổng số tiền họ phải thanh toán là $27000 + 24000 + 38400 = 89400$ (đồng).

② Một tháng họ sử dụng hết 1028 phút. • Thuê bao hàng tháng 27000 (đồng).

- 200 phút đầu tiên họ phải trả $120 \cdot 200 = 24000$ (đồng).
- 500 phút tiếp theo họ phải trả $80 \cdot 500 = 40000$ (đồng).

- 328 phút tiếp theo họ phải trả $40 \cdot 328 = 13120$ (đồng). Vậy, tổng số tiền họ phải thanh toán là $27000 + 24000 + 40000 + 13120 = 104120$ (đồng).

□

BÀI 3 ĐƠN THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đơn thức

Định nghĩa 1. Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

Số 0 được gọi là đơn thức không.

Nhận xét: Một biểu thức đại số nếu có chứa một trong các phép toán $+$, $-$, $:$ (số cho biến hoặc biến cho biến) thì sẽ không phải là đơn thức.

2. Đơn thức thu gọn

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Trong đó:

- Số nói trên được gọi là hệ số của đơn thức thu gọn.
- Phần còn lại được gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.

Chú ý:

- Ta cũng coi một số là đơn thức thu gọn.
- Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Thông thường, khi viết đơn thức thu gọn ta viết hệ số trước, phần biến sau và các biến được viết theo bảng chữ cái.

3. Bậc của một đơn thức

Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng của số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.

Chú ý: Một số là đơn thức thu gọn có bậc bằng 0.

4. Nhân hai đơn thức

Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Nhận xét:

- Tích của hai đơn thức là một đơn thức.
- Mỗi đơn thức đều có thể viết thành một đơn thức thu gọn, thí dụ:

$$3x^2y(-4)xy^3(-8)y = 96x^3y^5.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức (Vì sao?) và nếu là đơn thức hãy chỉ ra bậc của nó:

a) $-\frac{1}{2}$.

b) a .

c) $2xy^2 \cdot 3z$.

d) $2x - y$

 **LỜI GIẢI.**

- ❶ $-\frac{1}{2}$ là đơn thức, vì nó chỉ gồm một số. Đơn thức này có bậc bằng 0.
- ❷ a là đơn thức, vì nó chỉ gồm một biến. Đơn thức này có bậc bằng 1.
- ❸ $2xy^2 \cdot 3z$ là đơn thức, vì nó là một tích giữa các số và các biến. Bậc của đơn thức này bằng 4.
- ❹ $2x - y$ không là đơn thức, vì nó chứa phép trừ

□

VÍ DỤ 2. Cho hai chữ số x, y , hãy lập hai biểu thức đại số, trong đó một biểu thức là đơn thức còn biểu thức kia không là đơn thức.

 **LỜI GIẢI.**

Với hai chữ số x, y ta có:

- Đơn thức là $2xy$ (hoặc $x, 3y, 4x^2y^3, \dots$)
- $x - y$ (hoặc $x + 2y, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \frac{x}{y}, \dots$) không là đơn thức.

□

VÍ DỤ 3. Cho hai chữ số x, y . Hãy lập hai đơn thức thu gọn, trong đó một là đơn thức bậc 4 còn một là đơn thức bậc 6.

 **LỜI GIẢI.**

Với hai chữ số x, y ta có:

- Đơn thức thu gọn bậc 4 là $6x^3y$ (hoặc $4x^4, 3y^4, 2xy^3, \dots$)
- Đơn thức thu gọn bậc 6 là $5xy^5$ (hoặc $x^6, 3y^6, 4x^3y^3, \dots$).

□

VÍ DỤ 4. Cho đơn thức $3xy^2z^3(-2xy^4)$. Thu gọn đơn thức và chỉ ra hệ số cùng bậc của nó.

 **LỜI GIẢI.**

Viết lại đơn thức dưới dạng:

$$3xy^2z^3(-2xy^4) = [3 \cdot (-2)] \cdot (xy^2z^3 \cdot xy^4) = -6 \cdot (x \cdot x)(y^2 \cdot y^4) \cdot z^3 = -6x^2y^6z^3.$$

Như vậy đơn thức có:

- Hệ số bằng -6 .
- Có bậc bằng $2 + 6 + 3 = 11$.

□

VÍ DỤ 5. Cho hai đơn thức $\frac{2}{3}a^2b$ và $\frac{3}{2}ab^2c$. Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.

LỜI GIẢI.

Ta có: $\frac{2}{3}a^2b \cdot \frac{3}{2}ab^2c = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot (a^2b \cdot ab^2c) = (a^2 \cdot a) \cdot (b \cdot b^2) \cdot c = a^3b^3c$.

Khi đó, đơn thức a^3b^3c có hệ số bằng 1 và có bậc bằng 7. □

Nhận xét:

- ❶ Tích của hai đơn thức là một đơn thức.
- ❷ Mỗi đơn thức đều có thể viết thành một đơn thức thu gọn, thí dụ:

$$3x^2y(-4)xy^3(-8)y = 96x^3y^5.$$

VÍ DỤ 6. Cho hai đơn thức $-x^8y^8z^9$ và $6xy^3$. Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.

LỜI GIẢI.

Ta có: $-x^8y^8z^9 \cdot 6xy^3 = (-1 \cdot 6) \cdot (x^8y^8z^9 \cdot xy^3) = -6(x^8 \cdot x) \cdot (y^8 \cdot y^3) \cdot z^9 = -6x^9y^{11}z^9$.

Khi đó, đơn thức $-6x^9y^{11}z^9$ có hệ số bằng -6 và có bậc bằng $9 + 11 + 9 = 29$. □

VÍ DỤ 7. Thu gọn các đơn thức rồi chỉ ra phần hệ số và bậc của chúng:

a) $6x \cdot (-8x^2y) \cdot (9x^3y^2z)$.

b) $2x^6yz^4 \cdot \left(-\frac{1}{4}y^2z^3\right) \cdot (2xz^6)$.

LỜI GIẢI.

- ❶ Viết lại đơn thức dưới dạng:

$$[6 \cdot (-8) \cdot 9] (x \cdot x^2y \cdot x^3y^2z) = -432 \cdot (x \cdot x^2 \cdot x^3)(y \cdot y^2) \cdot z = -432x^6y^3z.$$

Như vậy, đơn thức có hệ số bằng -432 và có bậc bằng 10.

- ❷ Viết lại đơn thức dưới dạng:

$$\left[2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2\right] \cdot (x^6x) \cdot (y \cdot y^2) \cdot (z^4 \cdot z^3 \cdot z^6) = -x^7y^3z^{13}.$$

Như vậy, đơn thức có hệ số bằng -1 và có bậc bằng 23. □

VÍ DỤ 8. Viết biểu thức tính diện tích hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng.

LỜI GIẢI.

Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x , suy ra chiều dài bằng $2x$ do đó biểu thức diện tích:

$$2x \cdot x = 2x^2.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức (Vì sao?):

a) $-\frac{1}{6}$.

b) y^9 .

c) $3xy \cdot 2xz$.

d) $8x - 3y^2$

 **LỜI GIẢI.**

- ① $-\frac{1}{6}$ là đơn thức, vì nó chỉ gồm một số.
- ② y^9 là đơn thức, vì nó chỉ gồm một biến.
- ③ $3xy \cdot 2xz$ là đơn thức, vì nó là một tích giữa các số và các biến.
- ④ $8x - 3y^2$ không là đơn thức, vì nó chứa phép trừ.

□

BÀI 2. Cho ba chữ số x, y, z .

- ① Hãy lập hai biểu thức đại số, trong đó một biểu thức là đơn thức còn một biểu thức không là đơn thức.
- ② Hãy lập hai đơn thức thu gọn, trong đó một là đơn thức bậc 8 còn một là đơn thức bậc 9.

 **LỜI GIẢI.**

- ① Với ba chữ số x, y, z ta có:
 - Đơn thức là xyz^2 (hoặc $x, 6y, 8z, 9xyz^2, \dots$)
 - $xy + z$ (hoặc $x - 6yz, \frac{1}{x}, \frac{9x}{yz}, \dots$) không là đơn thức.
- ② Với ba chữ số x, y, z ta có:
 - Đơn thức thu gọn bậc 8 là x^6yz (hoặc $2x^8, 8y^8, 9z^8, x^2y^6, \dots$)
 - Đơn thức thu gọn bậc 9 là $6x^4y^2z^3$ (hoặc $x^9, 7y^9, 9z^9, x^3z^6, \dots$)

□

BÀI 3. Cho biết phần hệ số và phần biến của các đơn thức sau rồi tính giá trị của chúng tại $a = 1$, $b = 2$ và $c = -1$.

a) $5,8a^2bc^8$.

b) $0,12^2abc^{11}$.

 **LỜI GIẢI.**

- ① Đơn thức $5,8a^2bc^8$ có phần hệ số là 5,8 và phần biến là a^2bc^8 .
Thay $a = 1$, $b = 2$ và $c = -1$ vào $5,8a^2bc^8$ ta được

$$5,8 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot (-1)^8 = 11,6.$$

- ② Đơn thức $0,12^2abc^{11}$ có phần hệ số là $0,12^2$ và phần biến là abc^{11} .
Thay $a = 1$, $b = 2$ và $c = -1$ vào $0,12^2abc^{11}$ ta được

$$0,12^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1)^{11} = 0,0288.$$

□

BÀI 4. Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.

a) $\frac{5}{2}a^2b^3c^6$ và $-2a^6d^9$.

b) 2^4xy^4 và $\frac{3}{4}x^6y^8z^9$.

LỜI GIẢI.

① Ta có: $\frac{5}{2}a^2b^3c^6 \cdot (-2a^6d^9) = \left[\frac{5}{2} \cdot (-2)\right] \cdot (a^2b^3c^6 \cdot a^6d^9) = -5a^8b^3c^6d^9$.

Khi đó đơn thức $-5a^8b^3c^6d^9$ có hệ số bằng -5 và có bậc bằng 26 .

② Ta có: $2^4xy^4 \cdot \left(\frac{3}{4}x^6y^8z^9\right) = \left(2^4 \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot (xy^4 \cdot x^6y^8z^9) = 12x^7y^{12}z^9$.

Khi đó đơn thức $12x^7y^{12}z^9$ có hệ số bằng 12 và có bậc bằng 28 .

□

BÀI 5. Thu gọn các đơn thức rồi tìm hệ số và bậc của chúng:

① $x^2 \cdot y \cdot (-2xy^2z) \cdot (-3x^3y^4z^8)$.

② $\frac{2}{3}x^3y^2z^4 \cdot \left(\frac{1}{4}xy^2z^3\right) \cdot (12 \cdot xyz^2)$.

LỜI GIẢI.

① Ta có: $x^2 \cdot y \cdot (-2xy^2z) \cdot (-3x^3y^4z^8) = 6x^6y^7z^9$ có hệ số bằng 6 và có bậc bằng 22 .

② Ta có: $\frac{2}{3}x^3y^2z^4 \cdot \left(\frac{1}{4}xy^2z^3\right) \cdot (12 \cdot xyz^2) = 2x^5y^5z^9$ có hệ số bằng 2 và có bậc bằng 19 .

□

BÀI 6. Viết biểu thức tính diện tích hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng.

LỜI GIẢI.

Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x , suy ra chiều dài bằng $3x$ do đó biểu thức diện tích:

$$3x \cdot x = 3x^2.$$

□

LỜI GIẢI.

□

BÀI 7. Hãy viết đơn thức với biến a, b và có giá trị bằng 18 tại $a = -2$ và $b = 1$.

LỜI GIẢI.

□

BÀI 8. Tính giá trị của các đơn thức sau:

a) $8xy^2z^3$ với $x = 3, y = 2$ và $z = -1$. b) $\frac{2}{5}x^2y^4$ với $x = 5$ và $y = -1$.

c) $\sqrt{\frac{1}{81}}x^2y$ với $x = -3$ và $y = 9$.

LỜI GIẢI.

① Thay $x = 3, y = 2$ và $z = -1$ vào $8xy^2z^3$ ta được $8 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot (-1)^3 = -96$.

② Thay $x = 5, y = -1$ vào $\frac{2}{5}x^2y^4$ ta được $\frac{2}{5} \cdot 5^2 \cdot (-1)^4 = 10$.

③ Thay $x = -3, y = 9$ vào $\sqrt{\frac{1}{81}}x^2y$ ta được $\sqrt{\frac{1}{81}} \cdot (-3)^2 \cdot 9 = 9$.

□

BÀI 4 ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đơn thức đồng dạng

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

Chú ý: Tất cả các số khác 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

2. Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng

Để cộng (hoặc trừ) hai đơn thức đồng dạng, ta cộng (hoặc trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Chú ý: Phép cộng, trừ các đơn thức đồng dạng còn được sử dụng trong bài toán tính giá trị biểu thức.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Trong các đơn thức sau, hãy chỉ ra đơn thức đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.

- a) $-ab^6$. b) $\frac{2}{ab^6}$. c) $\frac{1}{4}ab^6$. d) $ab^6 - a$.

LỜI GIẢI.

- Các đơn thức $-ab^6$, $\frac{1}{4}ab^6$ đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.
- Các biểu thức $\frac{2}{ab^6}$, $ab^6 - a$ không đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.

VÍ DỤ 2. Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau: $-2xy^2z$, $6x^2yz$, $\frac{3}{2}xy^2z$, $8xzy^2$, $\frac{3}{4}x^2yz$.

LỜI GIẢI.

- Các đơn thức $-2xy^2z$, $\frac{3}{2}xy^2z$, $8xzy^2$ đồng dạng với nhau.
- Các đơn thức $6x^2yz$, $\frac{3}{4}x^2yz$ đồng dạng với nhau.

VÍ DỤ 3. Thực hiện phép tính

- a) $3x^2y^3 + \frac{1}{3}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^2y^3$. b) $6x^4y - 5x \cdot 3x^3y + 4x^2 \cdot 2xy \cdot 3x$.

LỜI GIẢI.

- $3x^2y^3 + \frac{1}{3}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^2y^3 = \left(3 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)x^2y^3 = \frac{8}{3}x^2y^3$.
- $6x^4y - 5x \cdot 3x^3y + 4x^2 \cdot 2xy \cdot 3x = (6 - 15 + 24)x^4y = 15x^4y$.



VÍ DỤ 4. Thực hiện phép tính

a) $3xy^2 + \frac{3}{2}xy^2$.

b) $\frac{1}{2}x^4y^3 - 2x^4y^3$.

✎ **LỜI GIẢI.**

① $3xy^2 + \frac{3}{2}xy^2 = \left(3 + \frac{3}{2}\right)xy^2 = \frac{9}{2}xy^2$.

② $\frac{1}{2}x^4y^3 - 2x^4y^3 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)x^4y^3 = -\frac{3}{2}x^4y^3$.



VÍ DỤ 5. Tính giá trị biểu thức $2abc - 3a^3c + 8$ tại $a = 1$ và $b = \frac{3}{2}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Thay $a = 1$ và $b = \frac{3}{2}$ vào biểu thức đã cho, ta được

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot c - 3 \cdot 1^3 \cdot c + 8 = 3c - 3c + 8 = 8.$$

Vậy giá trị biểu thức $2abc - 3a^3c + 8$ tại $a = 1$ và $b = \frac{3}{2}$ bằng 8.



VÍ DỤ 6. Cho biểu thức $3x \cdot 2xy - \frac{2}{3}x^2y - 4 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{3}y$.

① Thực hiện đơn giản biểu thức.

② Tính giá trị của biểu thức với $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

① Ta có $3x \cdot 2xy - \frac{2}{3}x^2y - 4 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{3}y = 6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - \frac{4}{3}x^2y = \left(6 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right)x^2y = 4x^2y$.

② Thay $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$ vào đơn thức $4x^2y$, ta được: $4 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{8} = 2$.

Vậy, giá trị của biểu thức tại $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$ bằng 2.



VÍ DỤ 7. Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 6 cm. Viết biểu thức tính chu vi hình chữ nhật.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng là x , suy ra chiều dài bằng $x + 6$. Khi đó, chu vi của hình chữ nhật được cho bởi:

$$2(x + x + 6) = 2(2x + 6) = 4x + 12.$$

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài là x , suy ra chiều rộng bằng $x - 6$. Khi đó, chu vi của hình chữ nhật được cho bởi:

$$2(x + x - 6) = 2(2x - 6) = 4x - 12.$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau:

a) $6x^2yz^2$. b) $6x^3y^2z$. c) $\frac{7}{5}x^2yz^2$. d) $-4x^3zy^2$. e) $\frac{3}{4}x^3y^2z$.

 **LỜI GIẢI.**

- Các đơn thức $6x^2yz^2$, $\frac{7}{5}x^2yz^2$ đồng dạng với nhau.
- Các đơn thức $6x^3y^2z$, $-4x^3zy^2$, $\frac{3}{4}x^3y^2z$ đồng dạng với nhau. □

BÀI 2. Các cặp đơn thức sau có đồng dạng với nhau không?

a) $4\frac{1}{2}x^8$ và $-0,25x^8y$. b) $\frac{11}{8}x^8y^4z$ và $9x^8y^4z$.

c) $11xy^4z^2$ và $\frac{7}{8}xy^4z$. d) $-3xy^2z^3$ và $\frac{3}{5}xy^2z^6$.

BÀI 3. Thực hiện phép tính

① $x^2 + 6x^2 - 0,25x^2$.

② $8xy^2 - 0,25xy^2 + \frac{3}{4}xy^2$.

③ $1,5xy^2z^3 - 1\frac{1}{3}xy^2z^3 + 1,8xy^2z^3 + 4\frac{2}{3}xy^2z^3$.

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có: $x^2 + 6x^2 - 0,25x^2 = 6,25x^2$.

② Ta có: $8xy^2 - 0,25xy^2 + \frac{3}{4}xy^2 = 8,5xy^2$.

③ Ta có: $1,5xy^2z^3 - 1\frac{1}{3}xy^2z^3 + 1,8xy^2z^3 + 4\frac{2}{3}xy^2z^3 = 6\frac{19}{30}xy^2z^3$. □

BÀI 4. Cho biểu thức $6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - x^2y + \frac{1}{6}x^2y$.

- ① Thực hiện đơn giản biểu thức.
- ② Tính giá trị của biểu thức với $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$.

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có $6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - x^2y + \frac{1}{6}x^2y = \left(6 - \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{6}\right)x^2y = \frac{9}{2}x^2y$.

② Thay $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$ vào đơn thức $\frac{9}{2}x^2y$, ta được: $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2 = 1$.

Vậy, giá trị của biểu thức tại $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$ bằng 1. □

BÀI 5. Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 8 cm. Viết biểu thức tính chu vi hình chữ nhật.

 **LỜI GIẢI.**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng là x , suy ra chiều dài bằng $x + 8$. Khi đó, chu vi của hình chữ nhật được cho bởi:

$$2(x + x + 8) = 2(2x + 8) = 4x + 16.$$

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài là x , suy ra chiều rộng bằng $x - 8$. Khi đó, chu vi của hình chữ nhật được cho bởi:

$$2(x + x - 8) = 2(2x - 8) = 4x - 16.$$

□

BÀI 6. Điền đơn thức vào ô trống:

① $4x^2 + \boxed{} = 6x^2.$

② $\boxed{} - 9x^2y^3 = -6x^2y^3.$

③ $\boxed{} - \boxed{} + x^3yz^2 = 9x^3yz^2.$

✎ **LỜI GIẢI.**

① $2x^2.$

② $3x^2y^3.$

③ Có nhiều cách điền, thí dụ:

$$\boxed{9x^3yz^2} - \boxed{x^3yz^2} + x^3yz^2 = 9x^3yz^2.$$

□

BÀI 5 ĐA THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

Mỗi đơn thức được gọi là một đa thức.

Thu gọn đa thức: đưa đa thức về dạng thu gọn tức là trong đa thức không còn hai hạng tử đồng dạng.

Định nghĩa 2. Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.



- Số 0 cũng được gọi là đa thức không và nó không có bậc.
- Khi tìm bậc của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

B CÁC DẠNG TOÁN

□ DẠNG 1. Nhận biết đa thức

Phương pháp giải:

- Đa thức là một tổng của các đơn thức.
- Mỗi đơn thức được gọi là một đa thức.

VÍ DỤ 1. Hãy chỉ ra các đa thức trong các biểu thức sau

$$x - 1 + \frac{2}{x}; \quad xyz - ax^2; \quad 101;$$

$$y^3 - 4; \quad \frac{z+1}{x^2+2} + yz; \quad x(y+2).$$

✎ LỜI GIẢI.

Các đa thức là $xyz - ax^2$; 101 ; $y^3 - 4$; $x(y+2)$. □

VÍ DỤ 2. Cho a là hằng số. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đa thức?

$$A = \frac{1}{a+1} \cdot x + xy^2 + x^2y; \quad B = x^2y + \frac{a}{x} + x^2y;$$

$$C = \frac{x+y}{a} + 2x - 3y; \quad D = 05xy - \frac{a}{x} + \frac{y}{a} + x^2y.$$

✎ LỜI GIẢI.

A ; C là các đa thức;

B ; D không phải đa thức vì có chứa phép chia cho biến x . □

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đa thức?

$$x^2 + 2y; \quad 2x^2y; \quad \frac{2x^2}{y}; \quad \frac{x^2 + 2}{y}; \quad \frac{x^2 + y}{2}; \quad 2018 - xya.$$

 **LỜI GIẢI.**

Các đa thức là $x^2 + 2y$; $2x^2y$; $\frac{x^2 + y}{2}$; $2018 - xya$. □

DẠNG 2. Thu gọn đa thức

Phương pháp giải: Muốn thu gọn một đa thức, ta thực hiện:

- Nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau;
- Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng trong từng nhóm.

VÍ DỤ 3. Thu gọn các đa thức sau

- ① $A = 5x^3y^2 + 3y^2x^3 - 4x^3y^2$;
- ② $B = 5x^2y - 2xy^2 + 3x^3y^3 + 3xy^2 - 4x^2y - 4x^3y^3$;
- ③ $C = (5x + 5y) - (3x - 2y)$.

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có

$$\begin{aligned} A &= 5x^3y^2 + 3y^2x^3 - 4x^3y^2 \\ &= 5x^3y^2 + 3x^3y^2 - 4x^3y^2 = 4x^3y^2. \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} B &= 5x^2y - 2xy^2 + 3x^3y^3 + 3xy^2 - 4x^2y - 4x^3y^3 \\ &= 5x^2y - 4x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 + 3x^3y^3 - 4x^3y^3 \\ &= x^2y + xy^2 - x^3y^3. \end{aligned}$$

③ Ta có

$$C = (5x + 5y) - (3x - 2y) = 5x + 5y - 3x + 2y = 2x + 7y. \quad \square$$

VÍ DỤ 4. Thu gọn các đa thức sau

- ① $3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 + 7xy^2 - 3x^5y^3$.
- ② $-\frac{1}{2}xy^2z + 3x^3y^2 + 2xy^2z - \frac{2}{3}xy^2z - \frac{1}{3}x^3y^2 + xy^2z$.

 **LỜI GIẢI.**

① Ta có

$$\begin{aligned} &3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 + 7xy^2 - 3x^5y^3 \\ &= (3x^5y^3 - 3x^5y^3) + (-4x^4y^3 + 2x^4y^3) + 7xy^2 \\ &= 0 + (-2x^4y^3) + 7xy^2 = 7xy^2 - 2x^4y^3. \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}xy^2z + 3x^3y^2 + 2xy^2z - \frac{2}{3}xy^2z - \frac{1}{3}x^3y^2 + xy^2z \\
 = & \left(-\frac{1}{2}xy^2z + 2xy^2z - \frac{2}{3}xy^2z + xy^2z\right) + \left(3x^3y^2 - \frac{1}{3}x^3y^2\right) \\
 = & 1\frac{5}{6}xy^2z + 2\frac{2}{3}x^3y^2.
 \end{aligned}$$

□

2. Bài tập tự luyện

BÀI 2. Thu gọn các đa thức sau

$$\begin{aligned}
 A &= 2x^2 - 3y^3 - z^4 - 4x^2 + 2y^4 + 3z^4; \\
 B &= 2x^2y - 5xy^2 + 4x^2y - 6xy^2.
 \end{aligned}$$

✎ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}
 A &= 2x^2 - 3y^3 - z^4 - 4x^2 + 2y^4 + 3z^4 = 2z^4 + 2y^4 - 3y^3 - 2x^2; \\
 B &= 2x^2y - 5xy^2 + 4x^2y - 6xy^2 = 6x^2y - 11xy^2.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tìm x , biết

- ① $(2x - 3) + (3x - 4) - (4x + 5) = 6;$
 ② $\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + \left(\frac{2}{3}x - 2\right) - \left(\frac{3}{4}x - 3\right) = 4.$

✎ **LỜI GIẢI.**

① Ta có

$$\begin{aligned}
 (2x - 3) + (3x - 4) - (4x + 5) &= 6 \\
 2x - 3 + 3x - 4 - 4x - 5 &= 6 \\
 x - 12 &= 6 \\
 x &= 18
 \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) + \left(\frac{2}{3}x - 2\right) - \left(\frac{3}{4}x - 3\right) &= 4 \\
 \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2}{3}x - 2 - \frac{3}{4}x + 3 &= 4 \\
 \frac{5}{12}x &= 4 \\
 x &= 9\frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

□

☐ DẠNG 3. Tìm bậc của đa thức*Phương pháp giải:*

- Viết đa thức dưới dạng thu gọn (nếu đa thức chưa thu gọn).
- Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

VÍ DỤ 5. Thu gọn các đa thức sau rồi tìm bậc của chúng.

- ① $A = 3x^4y^3 - 4x^2y^3 + 2x^2y^3 + 5x^2y - 4x^4y^3;$
- ② $B = 3x^2y^3z^4 + 3x^4 - 5x^2y^3z^4 + 6y^2z^3 + 2x^2y^3z^4.$

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta có

$$\begin{aligned}
 A &= 3x^4y^3 - 4x^2y^3 + 2x^2y^3 + 5x^2y - 4x^4y^3 \\
 &= (3x^4y^3 - 4x^4y^3) + (-4x^2y^3 + 2x^2y^3) + 5x^2y \\
 &= -x^4y^3 - 2x^2y^3 + 5x^2y.
 \end{aligned}$$

Vậy bậc của đa thức A là 7.

- ② Ta có

$$\begin{aligned}
 B &= 3x^2y^3z^4 + 3x^4 - 5x^2y^3z^4 + 6y^2z^3 + 2x^2y^3z^4 \\
 &= (3x^2y^3z^4 - 5x^2y^3z^4 + 2x^2y^3z^4) + 3x^4 + 6y^2z^3 \\
 &= 3x^4 + 6y^2z^3.
 \end{aligned}$$

Vậy bậc đa thức B là 5.

□

VÍ DỤ 6. Tìm bậc của đa thức sau

- ① $A = 2x^2y^3 + 3x^4 - 7x^2 + 6x^4 - x^2y^3;$
- ② $B = 2x^2y^3 + 4x^4 - 5x^2 + 3x^4 - 2x^2y^3.$

✎ LỜI GIẢI.

- ① Thu gọn đa thức

$$A = 2x^2y^3 + 3x^4 - 7x^2 + 6x^4 - x^2y^3 = x^2y^3 + 9x^4 - 7x^2.$$

Vậy bậc của đa thức A là 5.

- ② Thu gọn đa thức

$$B = 2x^2y^3 + 4x^4 - 5x^2 + 3x^4 - 2x^2y^3 = 7x^4 - 5x^2.$$

Vậy bậc đa thức B là 4.

□

3. Bài tập tự luyện**BÀI 4.** Thu gọn các đa thức sau rồi tìm bậc của chúng.

$$\textcircled{1} P = -4x^3y^3 - 3x^4y^3 + x^4y^3 - 6xy^2 + 4x^3y^3;$$

$$\textcircled{2} Q = xy - x + 1 + 2xy - (xy - x + 2);$$

$$\textcircled{3} R = x^2y + 2x^2y - 3xz + x^2y - 2xy + 3xz.$$

✎ LỜI GIẢI.

$\textcircled{1}$ Ta có

$$P = -4x^3y^3 - 3x^4y^3 + x^4y^3 - 6xy^2 + 4x^3y^3 = -2x^4y^3 - 6xy^2.$$

Vậy đa thức P có bậc là 7.

$\textcircled{2}$ Ta có

$$Q = xy - x + 1 + 2xy - (xy - x + 2) = xy - x + 1 + 2xy - xy + x - 2 = 2xy - 1.$$

Vậy bậc của đa thức Q là 2.

$\textcircled{3}$ Ta có

$$R = x^2y + 2x^2y - 3xz + x^2y - 2xy + 3xz = 4x^2y - 2xy.$$

Vậy đa thức R có bậc là 3.

□

BÀI 5. Cho đa thức $P = 4x^5y^2 - 3x^3y + 7x^3y + ax^5y^2$ (a là hằng số). Để đa thức p có bậc là 4 thì a là bao nhiêu?

✎ LỜI GIẢI.

Ta có $P = (4 + a)x^5y^2 + 4x^3y$.

Để đa thức P có bậc là 4 thì $4 + a = 0$ hay $a = -4$.

□

BÀI 6. Tìm bậc của đa thức

$$\textcircled{1} B = 6xy^2 + 7xy^3 + 8x^2y^3.$$

$$\textcircled{2} M = x^6 + 2x^2y^3 - x^5 + xy - xy^5 - x^6.$$

$$\textcircled{3} N = 7x^2y - 4x^6 + 3y^2z + 4x^6.$$

✎ LỜI GIẢI.

$\textcircled{1}$ Bậc của đa thức B là 5.

$\textcircled{2}$ Ta có

$$M = x^6 - 2x^2y^3 - x^5 + xy - xy^5 - x^6 = -2x^2y^3 - x^5 + xy - xy^5.$$

Vậy bậc của đa thức M là 5.

$\textcircled{3}$ Ta có

$$N = 7xy - 4x^6 + 3y^2z + 4x^6 = 7xy + 3y^2z.$$

Do đó, bậc của đa thức N là 3.

□

BÀI 7. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2y + xy^2$ tại $x = -3$; $y = -2$.

✎ LỜI GIẢI.

Thay $x = -3$; $y = -2$ vào đa thức P , ta có

$$(-3)^2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-2)^2 = -30.$$

□

BÀI 8. Cho a, b, c là những hằng số thỏa mãn $a + b + c = 2015$.

Tìm giá trị của biểu thức $A = axy^2z^3 + bx^3y + cxy^2z$, với $x = 1, y = 1, z = 1$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Với $x = 1, y = 1, z = 1$ thì

$$A = a \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 1^3 + b \cdot 1 \cdot 1^3 + c \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1^2 = a + b + c = 2015.$$

□

BÀI 6 CỘNG TRỪ ĐA THỨC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Khi cộng hoặc trừ hai đa thức, ta thường làm như sau:

- Viết hai đa thức trong dấu ngoặc;
- Bỏ dấu ngoặc theo quy tắc “dấu ngoặc”;
- Nhóm các hạng tử đồng dạng;
- Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng.

B CÁC DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 1. Tính tổng, hiệu của hai đa thức

Phương pháp giải:

- Viết hai đa thức trong dấu ngoặc;
- Bỏ dấu ngoặc theo quy tắc “dấu ngoặc”;
- Nhóm các hạng tử đồng dạng;
- Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng.

VÍ DỤ 1. Tính tổng của hai đa thức

① $M = -5x^2y + 3xy^2 + 7$ và $N = -6x^2y + 4xy^2 - 5$;

② $P = 5,7x^2y - 3,1xy + 8y^3$ và $Q = 2,3x^2y - 8y^3 - 6,9xy$.

✍ **LỜI GIẢI.**

① Ta có

$$\begin{aligned} M + N &= (-5x^2y + 3xy^2 + 7) + (-6x^2y + 4xy^2 - 5) \\ &= -5x^2y + 3xy^2 + 7 - 6x^2y + 4xy^2 - 5 \\ &= (-5x^2y - 6x^2y) + (3xy^2 + 4xy^2) + (7 - 5) \\ &= -11x^2y + 7xy^2 + 2. \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} P + Q &= (5,7x^2y - 3,1xy + 8y^3) + (2,3x^2y - 8y^3 - 6,9xy) \\ &= 5,7x^2y - 3,1xy + 8y^3 + 2,3x^2y - 8y^3 - 6,9xy \\ &= 8x^2y - 10xy. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 2. Tính hiệu của hai đa thức

① $M = 15x^2y - 7xy^2 - 6y^3$ và $N = 12x^2y - 2y^3 - 7xy^2$;

$$\textcircled{2} \quad M = 1,2x - 3,5y + 2 \text{ và } N = 0,2x - 2,5y + 3.$$

✎ LỜI GIẢI.

① Ta có

$$\begin{aligned} M - N &= (15x^2y - 7xy^2 - 6y^3) - (12x^2y - 2y^3 - 7xy^2) \\ &= (15x^2y - 7xy^2 - 6y^3 - 12x^2y + 2y^3 + 7xy^2) \\ &= (15x^2y - 12x^2y) + (-7xy^2 + 7xy^2) + (-6y^3 + 2y^3) \\ &= 3x^2y - 4y^3. \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} M - N &= (1,2x - 3,5y + 2) - (0,2x - 2,5y + 3) \\ &= 1,2x - 3,5y + 2 - 0,2x + 2,5y - 3 \\ &= x - y - 1. \end{aligned}$$

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Tính tổng của hai đa thức

① $M = 2x^2y + xy^2 - 2$ và $N = -2xy^2 + x^2y + 1$;

② $P = 2x^2y + 9xy^2 - 5y^3$ và $Q = 6x^2y + xy^2$.

✎ LỜI GIẢI.

① Ta có

$$\begin{aligned} M + N &= (2x^2y + xy^2 - 2) + (-2xy^2 + x^2y + 1) \\ &= 2x^2y + xy^2 - 2 - 2xy^2 + x^2y + 1 \\ &= 3x^2y - xy^2 - 1. \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} P + Q &= (2x^2y + 9xy^2 - 5y^3) + (6x^2y + xy^2) \\ &= 2x^2y + 9xy^2 - 5y^3 + 6x^2y + xy^2 \\ &= 8x^2y + 10xy^2 - 5y^3. \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Tính tổng và hiệu của hai đa thức P và Q , biết

① $P = xy - x + 1$ và $Q = 2xy - (xy - x + 5)$;

② $P = y - [y - (y + x)]$ và $Q = y - [y - x + (2x - 2y)]$.

✎ LỜI GIẢI.

① Ta có $Q = 2xy - (xy - x + 5) = 2xy - xy + x - 5 = xy + x - 5$.

Khi đó $P + Q = 2xy - 4$ và $P - Q = -2x + 6$.

- ② Ta có $P = y - [y - (y + x)] = y - (-x) = y + x$ và
 $Q = y - [y - x + (2x - 2y)] = y - (x - y) = y - x + y = 2y - x$.
 Khi đó $P + Q = 3y$ và $P - Q = 2x - y$.

□

BÀI 3. Cho hai đa thức $M = 2x^2 + 4xy - 4y^2$ và $N = 3x^2 - 2xy + 2y^2$. Tính giá trị của đa thức $M + N$ tại $x = 1, y = -2$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$M + N = 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 3x^2 - 2xy + 2y^2 = 5x^2 + 2xy - 2y^2.$$

Thay $x = 1, y = -2$ vào ta có $M + N = 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2 = -7$.

□

📦 DẠNG 2. Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức

Phương pháp giải: Phương pháp chung là sử dụng quy tắc chuyển vế.

- Nếu $M + B = A$ thì $M = A - B$.
- Nếu $M - B = A$ thì $M = A + B$.
- Nếu $B - M = A$ thì $M = B - A$.

VÍ DỤ 3. Tìm đa thức M , biết

- ① $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.
- ② $M - (4xy - 3y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$.
- ③ $(25x^2y - 13xy^2 + x^3) - M = 11x^2y - 2x^3$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Ta có

$$\begin{aligned} M + (5x^2 - 2xy) &= 6x^2 + 9xy - y^2 \\ \Rightarrow M &= (6x^2 + 9xy - y^2) - (5x^2 - 2xy) = x^2 - 11xy - y^2. \end{aligned}$$

- ② Ta có

$$\begin{aligned} M - (4xy - 3y^2) &= x^2 - 7xy + 8y^2 \\ \Rightarrow M &= (x^2 - 7xy + 8y^2) + (4xy - 3y^2) = x^2 - 3xy + 5y^2. \end{aligned}$$

- ③ Ta có

$$\begin{aligned} (25x^2y - 13xy^2 + x^3) - M &= 11x^2y - 2x^3 \\ \Rightarrow M &= (25x^2y - 13xy^2 + x^3) - (11x^2y - 2x^3) = 14x^2y - 13xy^2 + 3x^3. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Cho đa thức $P = x^2 - 2x^2y + x$. Tìm đa thức M thỏa mãn

$$M + P = 3x^2y + 2x - 1.$$

LỜI GIẢI.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= (3x^2y + 2x - 1) - (x^2 - 2x^2y + x) \\ &= -x^2x^2y + x - 1. \end{aligned}$$

□

2. Bài tập tự luyện**BÀI 4.** Tìm đa thức N , biết

- ① $M + (2x - 3y) = x - 4y + 5$;
- ② $M - (2xy - 0,5y^2) = -2xy + 5y^2$;
- ③ $(2x^2 - 3xy + 4y^2) - M = 5x^2 + 6xy - 7y^2$.

LỜI GIẢI.

- ① $M = -x - y + 5$;
- ② $M = 4,5y^2$;
- ③ $M = -3x^2 - 9xy + 11y^2$.

□

BÀI 5. Cho đa thức $Q = 3xy^2 - 2xy + x^2y - 2y^4$. Tìm đa thức N thỏa mãn

$$Q - N = 2y^4 + x^2y + xy^2.$$

LỜI GIẢI.

Ta có

$$\begin{aligned} N &= Q - (2y^4 + x^2y + xy^2) \\ &= (3xy^2 - 2xy + x^2y - 2y^4) - (2y^4 + x^2y + xy^2) \\ &= 2xy^2 - 2xy - 4y^4. \end{aligned}$$

□

BÀI 6. Tìm đa thức P biết

$$2 \cdot P + (2x^2 + 3y^2) = 6x^2 - 3y^2 - 2x^2y^2.$$

LỜI GIẢI.

Ta có

$$\begin{aligned} 2 \cdot P &= (6x^2 - 3y^2 - 2x^2y^2) - (2x^2 + 3y^2) \\ 2 \cdot P &= 4x^2 - 6y^2 - 2x^2y^2 \\ \Rightarrow P &= 2x^2 - 3y^2 - x^2y^2. \end{aligned}$$

□

BÀI 7. Cho các đa thức

- $A = x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1$;
- $B = -2x^2 + xy + 2y^2 - 3 - 5x + 2y$;
- $C = 7y^2 + 3x^2 - 4xy - 6x + 4y + 5$.

Rút gọn các đa thức $A + B + C$, $A - B + C$, $A - B - C$ rồi xác định bậc của đa thức đó.

LỜI GIẢI.

① Ta có

$$\begin{aligned} A + B + C &= (x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1) + (-2x^2 + xy + 2y^2 - 3 - 5x + 2y) \\ &\quad + (7y^2 + 3x^2 - 4xy - 6x + 4y + 5) \\ &= 2x^2 - 6xy + 8y^2 - 9x + 3y + 3. \end{aligned}$$

Vậy đa thức $A + B + C$ có bậc 2.

② Ta có

$$\begin{aligned} A - B + C &= (x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1) - (-2x^2 + xy + 2y^2 - 3 - 5x + 2y) \\ &\quad + (7y^2 + 3x^2 - 4xy - 6x + 4y + 5) \\ &= 6x^2 - 8xy + 4y^2 + x - y + 9. \end{aligned}$$

Vậy đa thức $A - B + C$ có bậc 2.

③ Ta có

$$\begin{aligned} A + B - C &= (x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1) - (-2x^2 + xy + 2y^2 - 3 - 5x + 2y) \\ &\quad - (7y^2 + 3x^2 - 4xy - 6x + 4y + 5) \\ &= -10y^2 + 13x - 9y - 1. \end{aligned}$$

Vậy đa thức $A - B - C$ có bậc 2.

□

DẠNG 3. Bài toán liên quan đến chia hết

Phương pháp giải: Vận dụng kiến thức về chia hết: Cho a , b , m là hai số nguyên thì

- Nếu a , b chia hết cho m thì tổng $a + b$ chia hết cho m .
- Nếu a chia hết cho m thì tích $a \cdot b$ chia hết cho m .

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ chia hết cho 37.

LỜI GIẢI.

Ta có

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c).$$

Do $111 : 37$ nên $111(a + b + c) : 37$ hay $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ chia hết cho 37.

□

3. Bài tập tự luyện

BÀI 8. Cho a, b, c là các số nguyên. Đặt $A = 3a - 5b$, $B = 7b - 9c$; $C = 11c - 13a$. Chứng tỏ tích $A \cdot B \cdot C$ là số chẵn.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét $A + B + C = 3a - 5b + 7b - 9c + 11c - 13a = -10a + 2b + 2c$.

suy ra trong ba số A, B, C phải có một số chẵn, do đó tích $A \cdot B \cdot C$ là số chẵn.

□

BÀI 9. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng $A = 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n$ chia hết cho 10.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n \\ &= 3^2 \cdot 3^n + 3^n - 2^3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= 9 \cdot 3^n + 3^n - 8 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Mà $10 \cdot 3^n : 10$ và $10 \cdot 2^{n-1} : 10$ với n nguyên dương nên $A : 10$.

□

BÀI 7

ĐA THỨC MỘT BIẾN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đa thức một biến

Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

Để chỉ rõ:

- A là đa thức của biến x người ta viết $A(x)$;
- B là đa thức của biến y người ta viết $B(y)$.

Khi đó, giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = 8$ được kí hiệu là $A(8)$, ...

 Mỗi số được coi là một đa thức một biến.

2. Sắp xếp một đa thức

Để thuận lợi cho việc tính toán đối với các đa thức một biến, người ta sắp xếp các hạng tử của chúng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến.

3. Hệ số

Xét đa thức: $P(x) = 2x^3 + cx - 3$ đó là một đa thức đã thu gọn, trong đó:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 3;
- c là hệ số của lũy thừa bậc 1;
- -3 là hệ số của lũy thừa bậc 0 (còn gọi là *hệ số tự do*).

Ngoài ra, vì $P(x)$ có bậc bằng 3 nên hệ số của lũy thừa bậc 3 còn gọi là *hệ số cao nhất*.

 Có thể viết đa thức $P(x)$ đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0 như sau: $P(x) = 2x^3 + 0x^2 + cx - 3$.

Do đó, ta nói hệ số của lũy thừa bậc 2 của $P(x)$ bằng 0.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho đa thức $A(x) = x^2 - 8x + 19$.

- a) Tìm bậc của đa thức $A(x)$; b) Tính $A(4)$, $A(-1)$.

 **LỜI GIẢI.**

- ① Đa thức $A(x)$ có bậc 2.
- ② Ta có $A(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 19 = 3$; $A(-1) = (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 19 = 28$.

□

VÍ DỤ 2. Viết một đa thức một biến và đưa ra dạng tổng quát của nó trong các trường hợp sau:

- ❶ Có hai hạng tử mà bậc cao nhất là 8 và hệ số tự do là -5 ;
- ❷ Có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 7 và hệ số tự do là -2 .

✎ LỜI GIẢI.

- ❶ Đa thức một biến có hai hạng tử mà bậc cao nhất là 8 và hệ số tự do là -5 . Chẳng hạn: $x^8 - 5$, $3x^8 - 5$, ...

Vậy dạng tổng quát của đa thức trên là: $m \cdot x^8 - 5$, với $m \neq 0$.

- ❷ Đa thức một biến có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 7 và hệ số tự do là -2 . Chẳng hạn: $7x^2 + 5x - 2$, $7x^5 + 8x^2 - 2$, ...

Vậy dạng tổng quát của đa thức trên là: $7x^m + ax^n - 2$, với $m > n \geq 1$, $a \neq 0$ và $a < 7$.

□

VÍ DỤ 3. Hãy sắp xếp các hạng tử của các đa thức sau: $P(x) = 7 + x^3 + 9x - 27x^2$.

✎ LỜI GIẢI.

Khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo:

- Lũy thừa tăng, ta được: $P(x) = 7 + 9x - 27x^2 + x^3$;
- Lũy thừa giảm, ta được: $P(x) = x^3 - 27x^2 + 9x + 7$.

□

⚠ Để sắp xếp các hạng tử của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

VÍ DỤ 4. Hãy sắp xếp các hạng tử của đa thức sau: $Q(x) = 2 - 3x^2 + x^4 - 6x^3 + 9x + 3x^3 - x - 7$.

✎ LỜI GIẢI.

Thu gọn đa thức bằng cách:

$$Q(x) = (2 - 7) - 3x^2 + x^4 - (6x^3 - 3x^3) + (9x - x) = -5 - 3x^2 + x^4 - 3x^3 + 8x.$$

Khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo:

- Lũy thừa tăng, ta được: $Q(x) = -5 + 8x - 3x^2 - 3x^3 + x^4$;
- Lũy thừa giảm, ta được: $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5$.

□

Nhận xét. Mọi đa thức bậc hai của biến x , sau khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo lũy thừa giảm của biến đều có dạng: $ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

Như vậy, ta có một biểu thức đại số trong đó x là biến còn a, b, c đại diện cho các số xác định cho trước. Để phân biệt với biến, người ta gọi những chữ như vậy là hằng số (gọi tắt là hằng).

VÍ DỤ 5. Cho đa thức $Q(x) = 2x^5 - 3x^2 - 3 + x^4 - 2 + 6x^3 + 8x - 6x^3 + 5 - 2x^5$.

- ❶ Sắp xếp các hạng tử của $Q(x)$ theo lũy thừa giảm của biến.
- ❷ Viết đa thức $Q(x)$ đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.
- ❸ Chỉ ra các hệ số của $Q(x)$.
- ❹ Tính $Q(-2)$, $Q(1)$.

✎ LỜI GIẢI.

① Thu gọn $Q(x)$, ta được:

$$Q(x) = (2x^5 - 2x^5) - 3x^2 - (3 + 2 - 5) + x^4 + (6x^3 - 6x^3) + 8x = -3x^2 + x^4 + 8x.$$

Khi đó, $Q(x)$ được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$$Q(x) = x^4 - 3x^2 + 8x.$$

② Dạng đầy đủ của $Q(x)$ là: $Q(x) = x^4 - 0x^3 - 3x^2 + 8x + 0$.

③ Như vậy, $Q(x)$ có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 4;
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 3;
- -3 là hệ số của lũy thừa bậc 2;
- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 1;
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

④ Ta có: $Q(-2) = (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) = 16 - 12 - 16 = -12$.

$$Q(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 1 - 3 + 8 = 6.$$

□

VÍ DỤ 6. Cho đa thức $Q(x) = x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 9 - 5x^3 + x^3 + 11$.

- ① Sắp xếp các hạng tử của $Q(x)$ theo lũy thừa giảm của biến.
- ② Viết đa thức $Q(x)$ đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.
- ③ Chỉ ra các hệ số của $Q(x)$.
- ④ Tính $Q(-3)$, $Q(2)$.

➤ LỜI GIẢI.

① Thu gọn $Q(x)$, ta được:

$$Q(x) = (1 - 5 + 1)x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 11 + 9 = -3x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 20.$$

Khi đó, $Q(x)$ được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 20.$$

② Dạng đầy đủ của $Q(x)$ là: $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 0x + 20$.

③ Như vậy, $Q(x)$ có:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 4;
- -3 là hệ số của lũy thừa bậc 3;
- -6 là hệ số của lũy thừa bậc 2;
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 1;
- 20 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

④ Ta có: $Q(-3) = 2 \cdot (-3)^4 - 3 \cdot (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 20 = 209$.

$$Q(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 20 = 4.$$

□

VÍ DỤ 7. Tính giá trị của đa thức sau:

- ❶ $x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{50}$ tại $x = -1$.
- ❷ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại $x = 1$ (a, b, c, d là hằng số).

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Thay $x = -1$ vào $x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{50}$, ta được:

$$(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \dots + (-1)^{50} = -1 + 1 - 1 + \dots + 1 = 0.$$

- ❷ Thay $x = 1$ vào $ax^3 + bx^2 + cx + d$, ta được:

$$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d.$$

□

© BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Viết một đa thức một biến và đưa ra dạng tổng quát của nó trong các trường hợp sau:

- ❶ Có ba hạng tử mà bậc cao nhất là 5 và hệ số tự do là 9.
- ❷ Có bốn hạng tử mà hệ số cao nhất là 11 và hệ số tự do là 6.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Đa thức một biến có ba hạng tử mà bậc cao nhất là 5 và hệ số tự do là 9. Chẳng hạn: $x^5 + x^2 + 9$, $2x^5 + 3x^4 + 9$, ...

Vậy dạng tổng quát của đa thức trên là: $ax^5 + bx^n + 9$ với $a, b, n \neq 0$ và $1 \leq n < 5$.

- ❷ Đa thức một biến có bốn hạng tử mà hệ số cao nhất là 11 và hệ số tự do là 6. Chẳng hạn: $11x^8 + 3x^2 - 9x + 6$, $11x^3 - x^2 + 10x + 6$, ...

Vậy dạng tổng quát của đa thức trên là: $11x^m + ax^n + bx^p + 6$ với $m > n > p \geq 1$; $a, b \neq 0$ và $a, b < 11$.

□

BÀI 2. Cho đa thức $P(x) = 4x^2 + x^4 - x^2 + 50 + 2x^3 + 6x - 2x^3 + 2x + 4$.

- ❶ Sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo lũy thừa giảm của biến.
- ❷ Viết đa thức $P(x)$ đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.
- ❸ Chỉ ra các hệ số của $P(x)$.
- ❹ Tính $P(-2)$, $P(1)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Thu gọn $P(x)$, ta được:

$$P(x) = (4 - 1)x^2 + x^4 + (50 + 4) + (2 - 2)x^3 + (6 + 2)x = 3x^2 + x^4 + 54 + 8x.$$

Khi đó, $P(x)$ được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$$P(x) = x^4 + 3x^2 + 8x + 54.$$

- ❷ Dạng đầy đủ của $P(x)$ là: $P(x) = x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 8x + 54$.

③ Như vậy, $P(x)$ có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 4;
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 3;
- 3 là hệ số của lũy thừa bậc 2;
- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 1;
- 54 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

④ Ta có: $P(-2) = (-2)^4 + 3 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 54 = 66$.

$$P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 54 = 66.$$

□

BÀI 3. Cho đa thức $Q(x) = 8 + 3x - x^2 + 9x^3 - 3x - x^2 - x^3 - 6$.

- ① Sắp xếp các hạng tử của $Q(x)$ theo lũy thừa giảm của biến.
- ② Viết đa thức $Q(x)$ đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.
- ③ Chỉ ra các hệ số của $Q(x)$.
- ④ Tính $Q(-4)$, $Q(3)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

① Thu gọn $Q(x)$, ta được:

$$Q(x) = (8 - 6) + (3 - 3)x - (1 + 1)x^2 + (9 - 1)x^3 = 2 - 2x^2 + 8x^3.$$

Khi đó, $Q(x)$ được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$$Q(x) = 8x^3 - 2x^2 + 2.$$

② Dạng đầy đủ của $Q(x)$ là: $Q(x) = 8x^3 - 2x^2 + 0x + 2$.

③ Như vậy, $Q(x)$ có:

- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 3;
- -2 là hệ số của lũy thừa bậc 2;
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 1;
- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

④ Ta có: $Q(-4) = 8 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 2 = -542$.

$$Q(3) = 8 \cdot 3^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 = 200.$$

□

BÀI 4. Cho đa thức $R = -4xy + x^2 + 2y^2$.

- ① Sắp xếp các hạng tử của $R(x)$ theo lũy thừa giảm của biến. Chỉ ra các hệ số của $R(x)$. Tính $R(-3)$.
- ② Sắp xếp các hạng tử của $R(y)$ theo lũy thừa giảm của biến. Chỉ ra các hệ số của $R(y)$. Tính $R(2)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

① $R(x)$ được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là: $R(x) = x^2 - 4xy + 2y^2$.

Như vậy, $R(x)$ có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 2;
- $-4y$ là hệ số của lũy thừa bậc 1;
- $2y^2$ là hệ số của lũy thừa bậc 0.

Ta có ngay $R(-3) = (-3)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot y + 2y^2 = 9 + 12y + 2y^2$.

② $R(y)$ được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là: $R(x) = 2y^2 - 4xy + x^2$.

Như vậy, $R(y)$ có:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 2;
- $-4x$ là hệ số của lũy thừa bậc 1;
- x^2 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

Ta có ngay $R(2) = 2 \cdot 2^2 - 4x \cdot 2 + x^2 = 8 - 8x + x^2$.

□

BÀI 5. Cho đa thức: $P(x) = ax^2 + 5x^4 - 8x + 9 - x^2 + ax$ (a là hằng số).

- ① Thu gọn rồi sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo lũy thừa giảm của biến.
- ② Chỉ ra các hệ số của $P(x)$.
- ③ Tính $P(-2)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Thu gọn $P(x)$, ta được:

$$P(x) = (a - 1)x^2 + 5x^4 + (a - 8)x + 9.$$

Khi đó, $P(x)$ được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$$P(x) = 5x^4 + (a - 1)x^2 + (a - 8)x + 9.$$

- ② Như vậy, $P(x)$ có:
 - 5 là hệ số của lũy thừa bậc 4;
 - $a - 1$ là hệ số của lũy thừa bậc 3;
 - $a - 8$ là hệ số của lũy thừa bậc 1;
 - 9 là hệ số của lũy thừa bậc 0.
- ③ Ta có $P(-2) = 5 \cdot (-2)^4 + (a - 1) \cdot (-2)^2 + (a - 8) \cdot (-2) + 9 = 101 + 2a$.

□

BÀI 8

CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Cộng hai đa thức một biến

Ví dụ minh họa. Để cộng hai đa thức:

$$P(x) = x^2 + 12x - 16 \text{ và } Q(x) = x + 2x^2.$$

ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1. Ta có

$$P(x) + Q(x) = (x^2 + 12x - 16) + (x + 2x^2) = (x^2 + 2x^2) + (12x + x) - 16 = 3x^2 + 13x - 16.$$

Cách 2. Ta đặt và thực hiện phép cộng như sau:

$$\begin{array}{r} + \quad P(x) = \quad x^2 + 12x - 16 \\ \\ Q(x) = \quad 2x^2 + \quad x \\ \hline P(x) + Q(x) = \quad 3x^2 + 13x - 16 \end{array}$$

Các bước:

- Đặt các đa thức đồng dạng
- Viết $P(x)$
- Viết $Q(x)$

Nhận xét. Như vậy, để thực hiện theo cách 2 ta sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi thực hiện phép cộng theo cột dọc.

2. Trừ hai đa thức một biến

Ví dụ minh họa. Để tính $P(x) - Q(x)$, biết:

$$P(x) = x^2 + 12x - 16 \text{ và } Q(x) = x + 2x^2.$$

ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (x^2 + 12x - 16) - (x + 2x^2) = x^2 + 12x - 16 - x - 2x^2 \\ &= (x^2 - 2x^2) + (12x - x) - 16 = -x^2 + 11x - 16. \end{aligned}$$

Cách 2. Ta đặt và thực hiện phép trừ như sau:

$$\begin{array}{rcl}
 & P(x) = & x^2 + 12x - 16 \\
 - & & \\
 & Q(x) = & 2x^2 + x \\
 \hline
 & P(x) - Q(x) = & -x^2 + 11x - 16
 \end{array}$$

Các bước:

- Đặt các đa thức đồng dạng
- Viết $P(x)$
- Viết $Q(x)$

Nhận xét. Như vậy, để thực hiện theo cách 2 ta sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi thực hiện phép trừ theo cột dọc.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho hai đa thức $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x$ và $Q(x) = x^3 + x - 1$.
 Hãy tính $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $Q(x) - P(x)$.

✎ LỜI GIẢI.

Để tính $P(x) + Q(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{rcl}
 + & P(x) = & x^3 - 5x^2 - 2x \\
 & & \\
 & Q(x) = & x^3 \quad \quad + x - 1 \\
 \hline
 & P(x) + Q(x) = & 2x^3 - 5x^2 - x - 1.
 \end{array}$$

Để tính $P(x) - Q(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{rcl}
 - & P(x) = & x^3 - 5x^2 - 2x \\
 & & \\
 & Q(x) = & x^3 \quad \quad + x - 1 \\
 \hline
 & P(x) - Q(x) = & -5x^2 - 3x + 1.
 \end{array}$$

Để tính $Q(x) - P(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{r} Q(x) = x^3 + x - 1 \\ \underline{ P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x} \\ Q(x) - P(x) = 5x^2 + 3x - 1. \end{array}$$

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x$$

$$Q(x) - P(x) = 5x^2 + 3x - 1.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho hai đa thức $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - x + 8$ và $g(x) = x^4 - x^2 - 3x + 9$. Tìm đa thức $h(x)$ sao cho

a) $f(x) - h(x) = g(x);$

b) $h(x) - g(x) = f(x).$

✎ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$\begin{aligned} f(x) - h(x) = g(x) &\Leftrightarrow h(x) = f(x) - g(x) \\ &\Leftrightarrow h(x) = (2x^4 + 5x^3 - x + 8) - (x^4 - x^2 + 3x + 9) \\ &\Leftrightarrow h(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x - 1. \end{aligned}$$

Vậy đa thức cần tìm là $h(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x - 1$.

❷ Ta có

$$\begin{aligned} h(x) - g(x) = f(x) &\Leftrightarrow h(x) = f(x) + g(x) \\ &\Leftrightarrow h(x) = (2x^4 + 5x^3 - x + 8) + (x^4 - x^2 + 3x + 9) \\ &\Leftrightarrow h(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x + 17. \end{aligned}$$

Vậy đa thức cần tìm là $h(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x + 17$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hai biểu thức sau

$$f(x) + g(x) = 2x^4 + 5x^2 - 3x; \quad (4.1)$$

$$f(x) - g(x) = x^4 - x^2 + 2x. \quad (4.2)$$

Tìm hai đa thức $f(x), g(x)$ thỏa mãn hai biểu thức trên.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được

$$\begin{aligned} 2f(x) &= 2x^4 + 5x^2 - 3x + x^4 - x^2 + 2x = 3x^4 + 4x^2 - x \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được

$$\begin{aligned} 2g(x) &= 2x^4 + 5x^2 - 3x - (x^4 - x^2 + 2x) = x^4 + 6x^2 - 5x \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}x. \end{aligned}$$

Vậy hai hàm số cần tìm là

$$f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}x \text{ và } g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}x.$$

□

📁 BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho hai đa thức

$$P(x) = 5x^3 - 13x + 10 \text{ và } Q(x) = x^2 + 6x - 1.$$

Hãy tính $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $Q(x) - P(x)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Để tính $P(x) + Q(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{r} + \quad P(x) = \quad 5x^3 \quad - 13x + 10 \\ \quad Q(x) = \quad \quad x^2 + 6x - 1 \\ \hline P(x) + Q(x) = 5x^3 + x^2 - 7x + 9. \end{array}$$

Để tính $P(x) - Q(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{r} - \quad P(x) = \quad 5x^3 \quad - 13x + 10 \\ \quad Q(x) = \quad \quad x^2 + 6x - 1 \\ \hline P(x) - Q(x) = 5x^3 - x^2 + 19x + 11. \end{array}$$

Để tính $Q(x) - P(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{r} - \quad Q(x) = \quad \quad x^2 + 6x - 1 \\ \quad P(x) = \quad 5x^3 \quad - 13x + 10 \\ \hline Q(x) - P(x) = -5x^3 + x^2 - 19x + 11. \end{array}$$

□

BÀI 2. Cho hai đa thức

$$P(x) = 8x^3 - x + 2 \text{ và } Q(x) = x^2 + 6x - 3.$$

Hãy tính $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $Q(x) - P(x)$.

LỜI GIẢI.

Để tính $P(x) + Q(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{r} + \quad P(x) = \quad 8x^3 \quad - x + 2 \\ \\ Q(x) = \quad x^2 + 6x - 3 \\ \hline P(x) + Q(x) = \quad 8x^3 + x^2 + 5x - 1. \end{array}$$

Để tính $P(x) - Q(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{r} - \quad P(x) = \quad 8x^3 \quad - x + 2 \\ \\ Q(x) = \quad x^2 + 6x - 3 \\ \hline P(x) - Q(x) = \quad 8x^3 - x^2 - 7x + 5. \end{array}$$

Để tính $Q(x) - P(x)$ ta đặt

$$\begin{array}{r} - \quad Q(x) = \quad x^2 + 6x - 3 \\ \\ P(x) = \quad 8x^3 \quad - x + 2 \\ \hline Q(x) - P(x) = \quad -8x^3 + x^2 + 7x - 5. \end{array}$$

□

BÀI 3. Cho hai đa thức

a) $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7;$

b) $g(x) = 2x^4 + 3x^2 - x - 5.$

Tìm đa thức $h(x)$ sao cho

❶ $f(x) - h(x) = g(x);$

❷ $h(x) - g(x) = f(x).$

LỜI GIẢI.

❶ Ta có

$$\begin{aligned}
 f(x) - h(x) &= g(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) - g(x) \\
 &\Leftrightarrow h(x) = (3x^4 - 6x^3 - 2x + 7) - (2x^4 + 3x^2 - x - 5) \\
 &\Leftrightarrow h(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7 - 2x^4 - 3x^2 + x + 5 \\
 &\Leftrightarrow h(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 - x + 12.
 \end{aligned}$$

Vậy đa thức cần tìm $h(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 - x + 12$.

❷ Ta có

$$\begin{aligned}
 h(x) - g(x) &= f(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) + g(x) \\
 &\Leftrightarrow h(x) = (3x^4 - 6x^3 - 2x + 7) + (2x^4 + 3x^2 - x - 5) \\
 &\Leftrightarrow h(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7 + 2x^4 + 3x^2 - x - 5 \\
 &\Leftrightarrow h(x) = 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2.
 \end{aligned}$$

Vậy đa thức cần tìm $h(x) = 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

□

BÀI 4. Cho hai biểu thức sau

$$\begin{aligned}
 2f(x) + g(x) &= x^3 + 6x^2 + 3x^4; \\
 f(x) - g(x) &= 2x^3 - x^2 + 3x^4.
 \end{aligned}$$

Tìm hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn hai biểu thức trên.

✎ **LỜI GIẢI.**

Cộng vế theo vế hai biểu thức đã cho ta được

$$\begin{aligned}
 2f(x) + g(x) + f(x) - g(x) &= x^3 + 6x^2 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x^4 \\
 \Leftrightarrow 3f(x) &= 3x^3 + 5x^2 + 6x^4 \\
 \Rightarrow f(x) &= x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 2x^4.
 \end{aligned}$$

Do $f(x) - g(x) = 2x^3 - x^2 + 3x^4$ nên

$$\begin{aligned}
 g(x) &= f(x) - (2x^3 - x^2 + 3x^4) \\
 &= x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x^4 \\
 &= -x^3 + \frac{8}{3}x^2 - x^4.
 \end{aligned}$$

□

BÀI 5. Cho hai đa thức sau

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n; \\
 g(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n.
 \end{aligned}$$

a) Tính $f(x) + g(x)$;

b) Tính $f(x) - g(x)$.

LỜI GIẢI.**①** Ta có

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\
&\quad + b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n \\
&= (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + a_n + b_n.
\end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\
&\quad - (b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n) \\
&= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\
&\quad - b_0x^n - b_1x^{n-1} - b_2x^{n-2} - \dots - b_{n-1}x - b_n \\
&= (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + a_n - b_n.
\end{aligned}$$

□

BÀI 6. Tính $f(x) - g(x) + h(x)$ biết

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + x + 3; g(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 1; h(x) = 2x^4 - 1.$$

LỜI GIẢI.Thực hiện phép tính đa thức $f(x) - g(x)$ ta được

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= x^5 - 2x^3 + x + 3 - (2x^4 - 3x^2 - x + 1) \\
&= x^5 - 2x^3 + x + 3 - 2x^4 + 3x^2 + x - 1 \\
&= x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2.
\end{aligned}$$

Từ đó ta tính $f(x) - g(x) + h(x)$ như sau

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) + h(x) &= x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 + (2x^4 - 1) \\
&= x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 + 2x^4 - 1 \\
&= x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.
\end{aligned}$$

□

BÀI 9

NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

! Một đa thức (khác đa thức 0) có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm, ... hoặc không có nghiệm (gọi là vô nghiệm).

Định lý 1. Một đa thức (khác đa thức 0) có số nghiệm không vượt quá bậc của nó.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho đa thức: $Q(x) = x^3 - 9x$. Chứng minh rằng đa thức $Q(x)$ có ba nghiệm $x = -3, x = 0, x = 3$.

LỜI GIẢI.

- Ta có $Q(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = 0$. Suy ra $x = -3$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.
- Ta có $Q(0) = 0^3 - 9 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$. Suy ra $x = 0$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.
- Ta có $Q(3) = 3^3 - 9 \cdot 3 = 27 - 27 = 0$. Suy ra $x = 3$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

□

VÍ DỤ 2. Chứng tỏ rằng đa thức $R(y) = y^2 + 2$ vô nghiệm.

LỜI GIẢI.

Ta có nhận xét sau:

$$R(y) = y^2 + 2 \geq 0 + 2 > 0 \text{ (với mọi } y\text{)}.$$

Do đó $R(y)$ vô nghiệm.

□

VÍ DỤ 3. Tìm nghiệm của đa thức $P(x) = 2x + 3$.

LỜI GIẢI.

Nghiệm của đa thức thỏa mãn:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Vậy $x = -\frac{3}{2}$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

□

VÍ DỤ 4. Chứng tỏ rằng nếu $a + b + c = 0$ thì $x = 1$ là nghiệm của đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Ngoài ra nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{c}{a}$ cũng là nghiệm của đa thức $f(x)$.

LỜI GIẢI.

Vì $x = 1$ là nghiệm của $f(x)$ suy ra $f(1) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$, điều này nghĩa là $a + b + c = 0$.
 Với $a \neq 0$. Xét $f\left(\frac{c}{a}\right) = a \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 + b \cdot \frac{c}{a} + c = \frac{c}{a}(c + b + a) = 0$ (vì $a + b + c = 0$). $\square$

 **Áp dụng kết quả trên, ta có thể tìm được nghiệm của các đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $a + b + c = 0$. Ví dụ sau đây sẽ minh họa cho điều này.**

VÍ DỤ 5. Tìm các nghiệm của đa thức $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$.

 **LỜI GIẢI.**

Ta có $3 - 7 + 4 = 0$, do đó đa thức $f(x)$ có các nghiệm là $x = 1, x = \frac{4}{3}$. $\square$

VÍ DỤ 6. Tìm mối liên hệ của a, b, c, d để $x = 1$ là nghiệm của đa thức

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

 **LỜI GIẢI.**

Để $x = 1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$ thì cần có

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0.$$

Vậy với $a + b + c + d = 0$ thì $f(x)$ nhận $x = 1$ làm nghiệm. $\square$

VÍ DỤ 7. Chứng tỏ rằng đa thức $x^2 + 2x + 3$ không có nghiệm.

 **LỜI GIẢI.**

Ta có $x^2 + 2x + 3 = x^2 + x + x + 1 + 2 = x(x + 1) + (x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ (với mọi x).

Do đó đa thức $x^2 + 2x + 3$ không có nghiệm. $\square$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho đa thức: $Q(x) = x^2 - 8x + 7$.

Kiểm nghiệm rằng đa thức $Q(x)$ có hai nghiệm $x = 1, x = 7$.

 **LỜI GIẢI.**

Ta có:

$$Q(1) = 1^2 - 8 \cdot 1 + 7 = 1 - 8 + 7 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ là một nghiệm của đa thức } Q(x).$$

$$Q(7) = 7^2 - 8 \cdot 7 + 7 = 49 - 56 + 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \text{ là một nghiệm của đa thức } Q(x). \quad \square$$

BÀI 2. Tìm nghiệm của các đa thức:

a) $x + 8$;

b) $3x - 7$.

 **LỜI GIẢI.**

① Nghiệm của đa thức $x + 8$ thỏa mãn $x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$.

Vậy $x = -8$ là nghiệm của đa thức $x + 8$.

- ② Nghiệm của đa thức $3x - 7$ thỏa mãn $3x - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.

Vậy $x = \frac{7}{3}$ là nghiệm của đa thức $3x - 7$.

□

BÀI 3. Tìm nghiệm của các đa thức:

a) $(x - 2)(2x + 8)$;

b) $(3x - 9)(2x + 5)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Nghiệm của đa thức $(x - 2)(2x + 8)$ thỏa mãn:

$$(x - 2)(2x + 8) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -4.$$

Vậy $x = 2$ hoặc $x = -4$ là nghiệm của đa thức $(x - 2)(2x + 8)$.

- ② Nghiệm của đa thức $(3x - 9)(2x + 5)$ thỏa mãn:

$$(3x - 9)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0 \text{ hoặc } 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{2}.$$

Vậy $x = 3$ hoặc $x = -\frac{5}{2}$ là nghiệm của đa thức $(3x - 9)(2x + 5)$.

□

BÀI 4. Tìm nghiệm của các đa thức:

a) $(x - 3)(x^2 + 1)$;

b) $(x^2 + 2)(x^2 - 3)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Nghiệm của đa thức $(x - 3)(x^2 + 1)$ thỏa mãn:

$$(x - 3)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm của đa thức $(x - 3)(x^2 + 1)$.

- ② Nghiệm của đa thức $(x^2 + 2)(x^2 - 3)$ thỏa mãn:

$$(x^2 + 2)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \text{ hoặc } x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy $x = \pm\sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức $(x^2 + 2)(x^2 - 3)$.

□

BÀI 5. Chứng tỏ rằng nếu $a - b + c = 0$ thì $x = -1$ là nghiệm của đa thức:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Ngoài ra nếu $a \neq 0$ thì $x = -\frac{c}{a}$ cũng là nghiệm của đa thức $f(x)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Với $a \neq 0$, ta có: $f(-\frac{c}{a}) = a \cdot \left(-\frac{c}{a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) + c = \frac{c^2}{a} - \frac{bc}{a} + c = \frac{c}{a}(c - b + a) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

□

BÀI 6. Tìm các nghiệm của các đa thức:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

b) $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

LỜI GIẢI.

a) $x = 1, x = 3.$

b) $x = 1, x = \frac{3}{2}.$

□

BÀI 7. Tìm các nghiệm của các đa thức:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 3;$

b) $g(x) = 6x^2 - 5x - 11.$

LỜI GIẢI.

a) $x = -1, x = -3.$

b) $x = -1, x = \frac{11}{6}.$

□

BÀI 8. Tìm một nghiệm của các đa thức:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 5;$

b) $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$

LỜI GIẢI.

a) $x = 1;$

b) $x = 1.$

□

BÀI 9. Tìm mối liên hệ của a, b, c, d để $x = -1$ là nghiệm của đa thức:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

LỜI GIẢI.Ta có: $x = -1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$

$$\Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 0 \Leftrightarrow -a + b - c + d = 0.$$

□

BÀI 10. Chứng tỏ rằng các đa thức sau không có nghiệm.

a) $x^2 + 1;$

b) $x^2 - 4x + 5;$

c) $x^2 + x + 1;$

d) $x^2 - x + 1.$

LỜI GIẢI.

① Ta có: $x^2 + 1 \geq 0 + 1 \geq 1.$

Do đó, đa thức $x^2 + 1$ không có nghiệm

② Ta có: $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 0 + 1 \geq 1.$

Do đó, đa thức $x^2 - 4x + 5$ không có nghiệm.

③ Ta có: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$

Do đó, đa thức $x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

④ Ta có: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$

Do đó, đa thức $x^2 - x + 1$ không có nghiệm.

□

PHẦN
III

HÌNH HỌC

CHƯƠNG

1

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

BÀI 1 HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Thế nào là hai góc đối đỉnh

Định nghĩa 1. Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

2. Tính chất của hai góc đối đỉnh

Tính chất 1. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

Chứng minh:

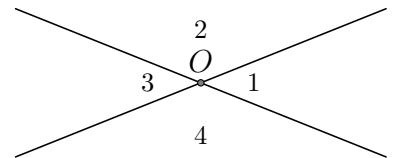
Nhận xét rằng:

$\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ$, vì là hai góc kề bù.

$\widehat{O_1} + \widehat{O_4} = 180^\circ$, vì là hai góc kề bù.

Suy ra $\widehat{O_2} = \widehat{O_4}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$.



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1 (Bài 7/tr83 - Sgk). Cho ba đường thẳng xx' , yy' , zz' đồng quy tại O . Hãy viết tên các cặp góc đối đỉnh.

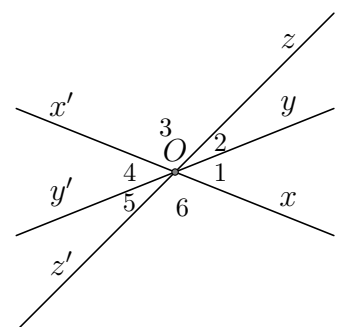
LỜI GIẢI.

Từ hình vẽ ta nhận thấy ngay các cặp góc đối đỉnh bằng nhau, bao gồm:

$\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_4}$; $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_5}$; $\widehat{O_3}$ và $\widehat{O_6}$.

$\widehat{xOz}$ và $\widehat{x'Oz'}$; $\widehat{yOx'}$ và $\widehat{y'Ox}$; $\widehat{zOy'}$ và $\widehat{z'Oy}$.

Vậy theo giả thiết ta nhận được 6 cặp góc đối đỉnh.



□

VÍ DỤ 2 (Bài 6/tr83 - Sgk). Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 47° . Tính số đo các góc còn lại.

LỜI GIẢI.

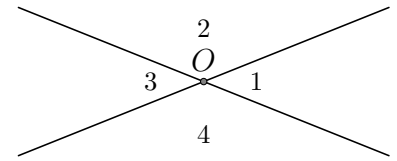
Giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\widehat{O_1} = 47^\circ$. Ta có:

$\widehat{O_3} = \widehat{O_1} = 47^\circ$ vì chúng là hai góc đối đỉnh.

Vì $\widehat{O_1}, \widehat{O_2}$ là hai góc kề bù nên

$$\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ.$$

Suy ra $\widehat{O_4} = \widehat{O_2} = 133^\circ$ vì chúng là hai góc đối đỉnh.



□

VÍ DỤ 3. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một cặp góc đối đỉnh có tổng số đo bằng 130° . Tính số đo của mỗi góc.

LỜI GIẢI.

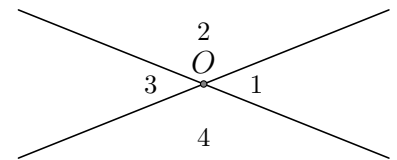
Theo giả thiết, ta có thể giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và

$$\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 130^\circ.$$

Khi đó:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_3} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ.$$

$$\widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$



□

Nhận xét. Qua ví dụ 2 và ví dụ 3, chúng ta có thể khẳng định được rằng: hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc, ta có thể tính được số đo của các góc nếu biết:

- ① Số đo của một trong bốn góc.
- ② Tổng số đo của một cặp góc đối đỉnh.
- ③ Tổng số đo của ba trong bốn góc.
- ④ Hiệu số đo của hai góc kề bù.
- ⑤ Tỉ số số đo của hai góc kề bù.

VÍ DỤ 4. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 90° . Chứng tỏ rằng số đo các góc còn lại đều bằng nhau.

LỜI GIẢI.

Giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\widehat{O_1} = 90^\circ$.

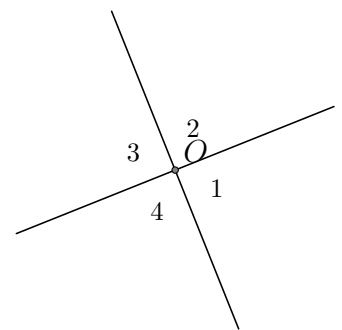
Ta có: $\widehat{O_3} = \widehat{O_1} = 90^\circ$ vì chúng là hai góc đối đỉnh.

Vì $\widehat{O_1}, \widehat{O_2}$ là hai góc kề bù nên

$$\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Suy ra $\widehat{O_4} = \widehat{O_2} = 90^\circ$ vì chúng là hai góc đối đỉnh.

Vậy ta được $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \widehat{O_3} = \widehat{O_4} = 90^\circ$.



□

Nhận xét. Như vậy, nếu hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông thì các góc còn lại cũng vuông. Trường hợp này chúng ta sẽ xem xét kỹ hơn trong chủ đề hai đường thẳng

vuông góc.

VÍ DỤ 5. Hãy thực hiện các công việc sau:

- ❶ Vẽ góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$.
- ❷ Vẽ góc $\widehat{x'Oy'}$ đối đỉnh với góc $\widehat{xOy}$.
- ❸ Vẽ tia phân giác Ot của góc $\widehat{xOy}$.
- ❹ Vẽ tia đối Ot' của tia Ot . Giải thích tại sao Ot' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$.
- ❺ Viết tên sáu cặp góc đối đỉnh và tính số đo của chúng.

LỜI GIẢI.

Công việc của các câu a), b), c) được mô tả trên hình vẽ.

d) Từ hình vẽ ta thấy:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_3} \text{ vì đối đỉnh.}$$

$$\widehat{O_2} = \widehat{O_4} \text{ vì đối đỉnh.}$$

Mặt khác, vì Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ nên:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Leftrightarrow Ot' \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{x'Oy'}.$$

e) Sáu cặp góc đối đỉnh, gồm có:

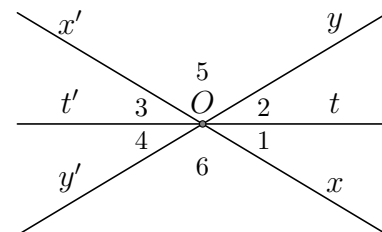
$$\widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 30^\circ; \widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 30^\circ; \widehat{O_5} = \widehat{O_6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

$$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'} = 60^\circ;$$

$$\widehat{tOx'} = \widehat{t'Ox} = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ;$$

$$\widehat{yOt'} = \widehat{y'Ot} = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ.$$

□

**Nhận xét.** Trong ví dụ trên chúng ta đã chứng minh được kết quả: “Chứng minh rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau”. Kết quả này thường sử dụng để:

- Chứng minh hai tia đối nhau.
- Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

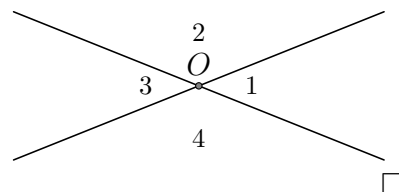
© BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau rồi đặt tên cho các góc tạo thành.

- ❶ Viết tên các cặp góc đối đỉnh.
- ❷ Viết tên các góc bằng nhau.

LỜI GIẢI.

- ❶ Các cặp góc đối đỉnh: $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_3}$; $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_4}$.
- ❷ Các góc bằng nhau: $\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$; $\widehat{O_2} = \widehat{O_4}$.



□

BÀI 2. Vẽ bốn đường thẳng cắt nhau tại O rồi đặt tên cho các góc tạo thành.

- ❶ Viết tên các cặp góc đối đỉnh.
- ❷ Viết tên các góc bằng nhau.

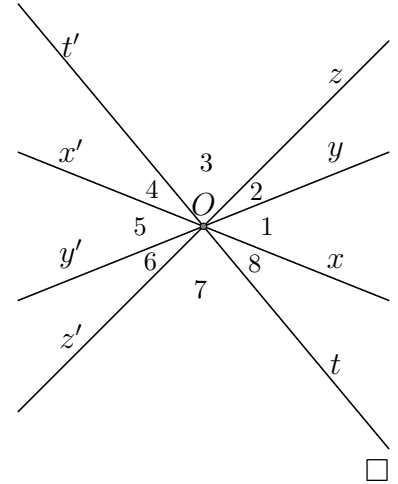
LỜI GIẢI.

① Các cặp góc đối đỉnh:
 $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_5}$; $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_6}$; $\widehat{O_3}$ và $\widehat{O_7}$; $\widehat{O_4}$ và $\widehat{O_8}$;

 $\widehat{tOy}$ và $\widehat{t'Oy'}$; $\widehat{tOz}$ và $\widehat{t'Oz'}$; $\widehat{xOz}$ và $\widehat{x'Oz'}$; $\widehat{xOt'}$ và $\widehat{x'Ot}$;

 $\widehat{yOt'}$ và $\widehat{y'Ot}$; $\widehat{yOx'}$ và $\widehat{yOx}$; $\widehat{zOx'}$ và $\widehat{z'Ox}$; $\widehat{zOy'}$ và $\widehat{z'Oy}$.
② Các góc bằng nhau:
 $\widehat{O_1} = \widehat{O_5}$; $\widehat{O_2} = \widehat{O_6}$; $\widehat{O_3} = \widehat{O_7}$; $\widehat{O_4} = \widehat{O_8}$;

 $\widehat{tOy} = \widehat{t'Oy'}$; $\widehat{tOz} = \widehat{t'Oz'}$; $\widehat{xOz} = \widehat{x'Oz'}$; $\widehat{xOt'} = \widehat{x'Ot}$;

 $\widehat{yOt'} = \widehat{y'Ot}$; $\widehat{yOx'} = \widehat{yOx}$; $\widehat{zOx'} = \widehat{z'Ox}$; $\widehat{zOy'} = \widehat{z'Oy}$.


BÀI 3. Nếu có n đường thẳng cắt nhau tại một điểm thì chúng tạo thành bao nhiêu cặp góc đối đỉnh.

LỜI GIẢI.

- Hai đường thẳng cắt nhau tạo ra $2 = 2 \cdot 1$ cặp góc đối đỉnh.
- Ba đường thẳng cắt nhau tạo ra $6 = 3 \cdot 2$ cặp góc đối đỉnh.
- Bốn đường thẳng cắt nhau tạo ra $12 = 4 \cdot 3$ cặp góc đối đỉnh.
- Vậy n đường thẳng cắt nhau tạo ra $n(n - 1)$ cặp góc đối đỉnh.

BÀI 4. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 80° . Tính số đo các góc còn lại.

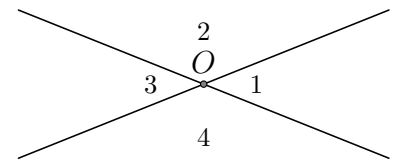
LỜI GIẢI.

Theo giả thiết, ta có thể giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\widehat{O_1} = 80^\circ$.

Khi đó:

$$\widehat{O_3} = \widehat{O_1} = 80^\circ.$$

$$\widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$



BÀI 5. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 68° . Tính số đo các góc còn lại.

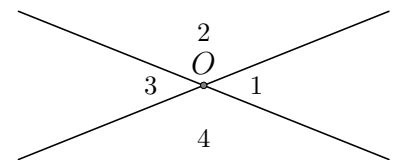
LỜI GIẢI.

Theo giả thiết, ta có thể giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\widehat{O_1} = 68^\circ$.

Khi đó:

$$\widehat{O_3} = \widehat{O_1} = 68^\circ.$$

$$\widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ.$$



BÀI 6. Hãy thực hiện các công việc sau:

- ① Vẽ góc $\widehat{xOy} = 80^\circ$.
- ② Vẽ góc $\widehat{x'Oy'}$ đối đỉnh với góc $\widehat{xOy}$.
- ③ Vẽ tia phân giác Ot của góc $\widehat{xOy}$.
- ④ Vẽ tia đối Ot' của tia Ot . Giải thích tại sao Ot' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$.

5) Viết tên sáu cặp góc đối đỉnh và tính số đo của chúng.

LỜI GIẢI.

Công việc của các câu a), b), c) được mô tả trên hình vẽ.

d) Từ hình vẽ ta thấy:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_3} \text{ vì đối đỉnh.}$$

$$\widehat{O_2} = \widehat{O_4} \text{ vì đối đỉnh.}$$

Mặt khác, vì Ot là tia phân giác của góc xOy nên:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Leftrightarrow Ot' \text{ là tia phân giác của góc } x'Oy'.$$

e) Sáu cặp góc đối đỉnh, gồm có:

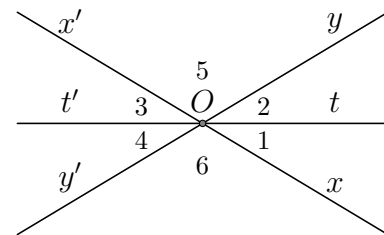
$$\widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 40^\circ; \widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 40^\circ; \widehat{O_5} = \widehat{O_6} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ;$$

$$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'} = 80^\circ;$$

$$\widehat{tOx'} = \widehat{t'Ox} = 40^\circ + 100^\circ = 140^\circ;$$

$$\widehat{yOt'} = \widehat{y'Ot} = 40^\circ + 100^\circ = 140^\circ.$$

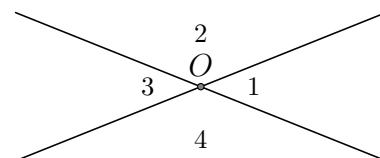
□



BÀI 7.

Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc (như trong hình vẽ).

Tính số đo của các góc còn lại nếu biết:



a) $\widehat{O_1} = 75^\circ$.

b) $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 140^\circ$.

c) $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 240^\circ$.

d) $\widehat{O_2} - \widehat{O_1} = 30^\circ$.

e) $\widehat{O_2} = 2\widehat{O_1}$.

LỜI GIẢI.

1) $\widehat{O_3} = \widehat{O_1} = 75^\circ$ vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$$\text{Vì } \widehat{O_1}, \widehat{O_2} \text{ là hai góc kề bù nên } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{O_4} = \widehat{O_2} = 105^\circ \text{ vì chúng là hai góc đối đỉnh.}$$

2) $\widehat{O_3} = \widehat{O_1} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$ vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$$\text{Vì } \widehat{O_1}, \widehat{O_2} \text{ là hai góc kề bù nên } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{O_4} = \widehat{O_2} = 110^\circ \text{ vì chúng là hai góc đối đỉnh.}$$

3) Ta có: $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 360^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{O_4} = 360^\circ - (\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 120^\circ \text{ vì chúng là hai góc đối đỉnh.}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 60^\circ.$$

4) Ta có: $\widehat{O_2} - \widehat{O_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = 30^\circ + \widehat{O_1}$.

$$\text{Mặt khác, ta cũng có: } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} + 30^\circ + \widehat{O_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{O_3} = \widehat{O_1} = 75^\circ \text{ và } \widehat{O_4} = \widehat{O_2} = 30^\circ + \widehat{O_1} = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ.$$

5) Ta có: $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} + 2\widehat{O_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

$$\text{Suy ra } \widehat{O_3} = \widehat{O_1} = 60^\circ \text{ và } \widehat{O_4} = \widehat{O_2} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ.$$

□

BÀI 8. Cho hai góc đối đỉnh. Vẽ một tia phân giác của một trong hai góc đó. Chứng minh rằng tia đối của tia này là tia phân giác của góc còn lại.

LỜI GIẢI.

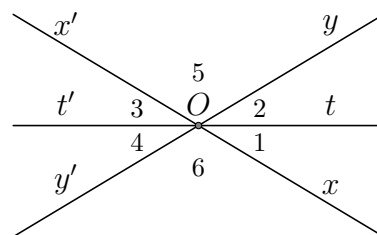
Giả sử hai đường thẳng xx', yy' cắt nhau tại O và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ và Ot' là tia đối của tia Ot . Ta chứng minh Ot' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$. Từ hình vẽ ta thấy:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_3} \text{ vì đối đỉnh.}$$

$$\widehat{O_2} = \widehat{O_4} \text{ vì đối đỉnh.}$$

Mặt khác, vì Ot là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ nên:

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Leftrightarrow Ot' \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{x'Oy'}.$$



□

BÀI 2 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Thế nào là hai đường thẳng vuông góc ?

Định nghĩa 1. Hai đường thẳng a, b cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là **hai đường thẳng vuông góc** và được kí hiệu là $a \perp b$.

! Hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau (và cắt nhau tại O) còn được gọi là:

- “Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b (tại O)”.
- Hoặc “Đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a (tại O)”.
- Hoặc “Hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau (tại O)”.

2. Về hai đường thẳng vuông góc

Tính chất 1. Qua một điểm chỉ kẻ được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

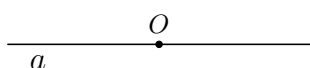
Bài toán: Cho một điểm O và một đường thẳng a . Hãy vẽ đường thẳng b đi qua O và vuông góc với đường thẳng a .

Cách thực hiện

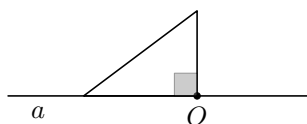
Ta xét hai trường hợp về vị trí của điểm O so với đường thẳng a .

Trường hợp 1: Nếu điểm O nằm trên đường thẳng a .

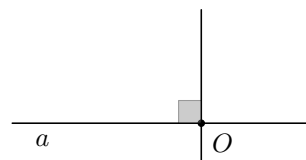
Cách vẽ đường thẳng b được minh họa qua các hình vẽ.



Hình ban đầu.



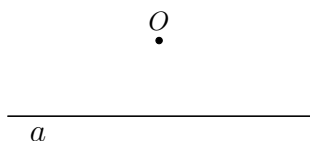
Đặt eke như trên.



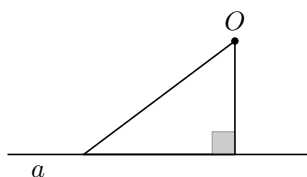
Vẽ đường thẳng qua O như hình vẽ.

Trường hợp 2: Nếu điểm O nằm ngoài đường thẳng a .

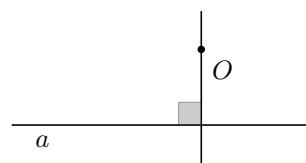
Cách vẽ đường thẳng b được minh họa qua các hình vẽ.



Hình ban đầu.



Đặt eke như trên.



Vẽ đường thẳng qua O như hình vẽ.

3. Đường trung trực của đoạn thẳng

Định nghĩa 2. Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là **đường trung trực** của đoạn thẳng ấy.

! Khi a là đường trung trực của đoạn thẳng AB ta cũng nói "Hai điểm A và B đối xứng qua đường thẳng a ".

Như vậy, để dựng được đường trung trực của đoạn AB cho trước, chúng ta thực hiện các bước:

- Lấy điểm O là trung điểm của AB .
- Dựng đường thẳng qua O vuông góc với AB . Đường thẳng này là đường trung trực của đoạn AB .

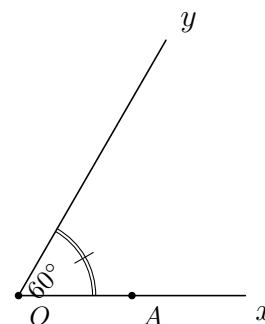
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Vẽ hình theo cách diễn đạt "Vẽ góc $\widehat{xOy}$ có số đo bằng 60° ". Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A . Lấy điểm B trên đường thẳng a rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy ".

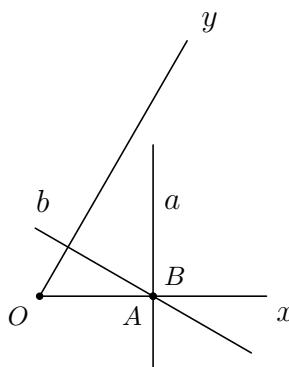
✎ LỜI GIẢI.

Thực hiện:

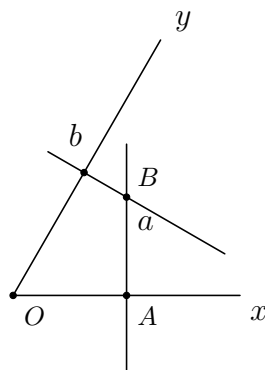
- Vẽ góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$, sau đó lấy điểm A trên tia Ox .
- Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1, ta dựng được đường thẳng a đi qua A và vuông góc với Ox .
- Lấy điểm B trên đường thẳng a , khi đó ta có thể có các trường hợp sau:



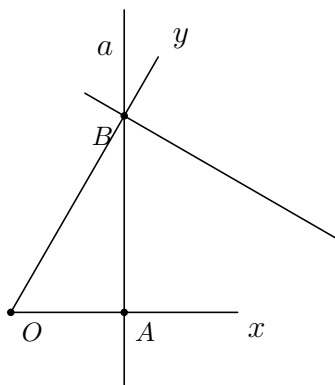
Trường hợp 1: Lấy điểm B trùng với điểm A , ta được hình vẽ:



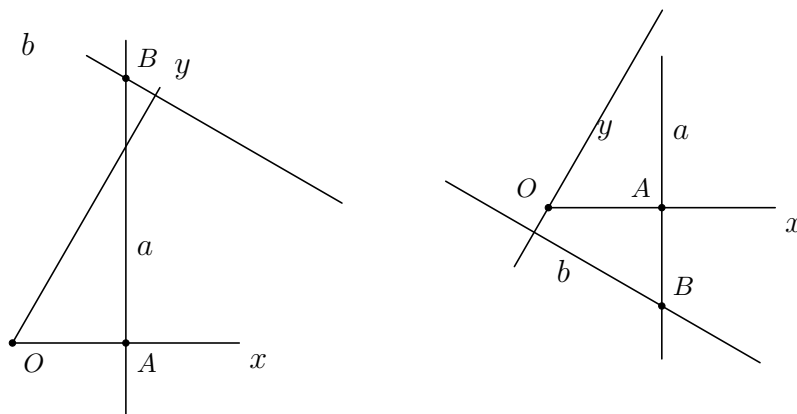
Trường hợp 2: Lấy điểm B nằm trong góc $\widehat{xOy}$, ta được hình vẽ:



Trường hợp 3: Lấy điểm B giao điểm của a với Oy , ta được hình vẽ:



Trường hợp 4: Lấy điểm B ngoài góc $\widehat{xOy}$ (có hai khả năng), ta được hình vẽ:



□

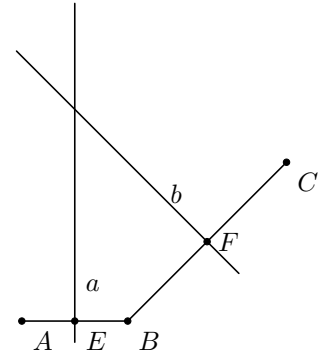
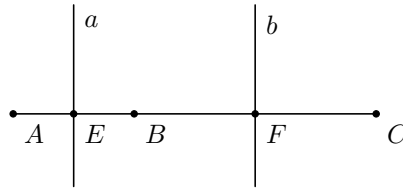
VÍ DỤ 2. Vẽ hình theo cách diễn đạt “Vẽ đoạn thẳng $AB = 4\text{cm}$ và đoạn thẳng $BC = 6\text{cm}$ rồi vẽ đường trung trực của mỗi đoạn AB và BC ”.

✎ LỜI GIẢI.

Thực hiện:

- Vẽ đoạn $AB = 4\text{cm}$. Lấy điểm E là trung điểm AB (E nằm giữa A, B và $EA = 2\text{cm}$).
- Vẽ đoạn $BC = 6\text{cm}$. Lấy điểm F là trung điểm BC (F nằm giữa B, C và $FB = 3\text{cm}$).
- Dựng đường thẳng a qua E vuông góc với AB (Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1).
- Dựng đường thẳng b qua F vuông góc với BC (Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1).

Với các bước làm như trên chúng ta có được hình cần vẽ, tuy nhiên ở đây chúng ta nhận được hai hình bởi A, B, C có thể thẳng hàng hoặc không thẳng hàng.



□

VÍ DỤ 3. Cho góc tù $\widehat{AOB}$. Trong góc $\widehat{AOB}$ vẽ các tia $OC \perp OA$ và $OD \perp OB$.

- ❶ Chứng minh $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$.
- ❷ Chứng minh $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^\circ$.
- ❸ Gọi Ox, Oy theo thứ tự là tia phân giác của các góc $\widehat{AOD}$ và $\widehat{BOC}$. Chứng minh $Ox \perp Oy$.

✎ LỜI GIẢI.

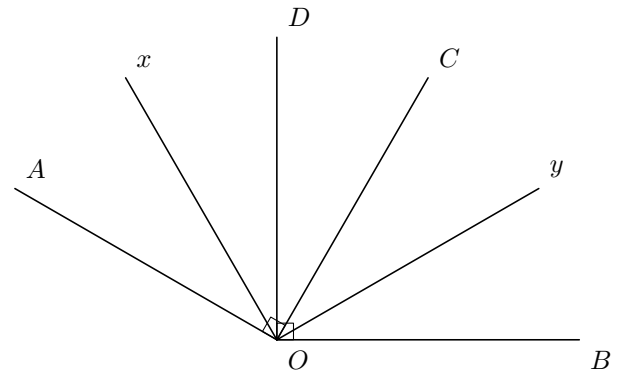
a) Vì các tia OC và OD ở trong góc $\widehat{AOB}$ nên:

$$\widehat{AOD} = \widehat{AOC} - \widehat{COD} = 90^\circ - \widehat{COD}. (1)$$

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOD} - \widehat{COD} = 90^\circ - \widehat{COD}. (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$90^\circ - \widehat{COD} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOD} = \widehat{BOC}.$$



b) Ta có

$$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = (\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) + \widehat{COD} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} = \widehat{AOC} + \widehat{BOD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

c) Từ giả thiết, ta có: $\widehat{AOD} = 2 \cdot \widehat{xOD}$.

Mặt khác, ta lại có:

$$\widehat{xOy} = \widehat{xOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COy} = 2 \cdot \widehat{xOD} + \widehat{DOC} = \widehat{AOD} + \widehat{DOC} = \widehat{AOC} = 90^\circ.$$

Vậy $Ox \perp Oy$.

□

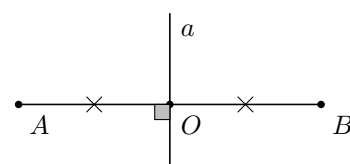
📄 BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho đoạn thẳng $AB = 8\text{cm}$. Hãy trình bày cách vẽ đường trung trực của đoạn AB .

✎ LỜI GIẢI.

Ta thực hiện các bước:

- Lấy điểm O là trung điểm của AB .
- Vẽ đường thẳng qua O vuông góc với AB . Đường thẳng này là đường trung trực của đoạn AB .

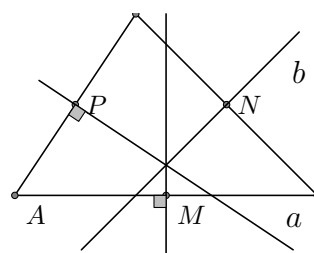


□

BÀI 2. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA .

- Hãy trình bày các vẽ các đường trung trực của các đoạn AB, BC, CA .
- Có nhận xét gì về ba đường trung tuyến trên.

✎ **LỜI GIẢI.**



- Các đường trung trực của các đoạn AB, BC, CA lần lượt là c, b, a .
- Ba đường trung trực đồng quy tại một điểm - Điểm này chính là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

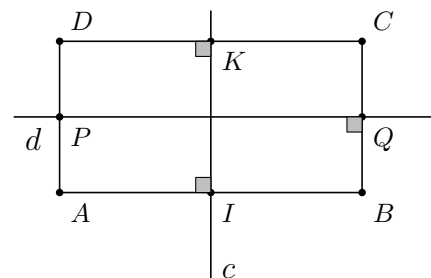
□

BÀI 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$.

- Hãy trình bày các vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, CD . Có nhận xét gì về hai đường trung trực này.
- Hãy trình bày cách vẽ các đường trung trực của các đoạn AD, BC . Có nhận xét gì về hai đường trung trực này.
- Nhận xét gì về hai đường trung trực AB và AD .

✎ **LỜI GIẢI.**

- Vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, CD . Hai đường trung trực này trùng nhau chính là đường thẳng c .
- Vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AD, BC . Hai đường trung trực này trùng nhau chính là đường thẳng d .
- Hai đường thẳng c và d vuông góc với nhau.



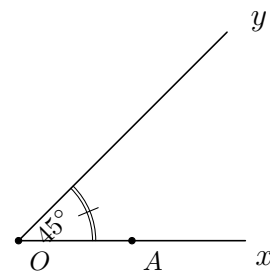
□

BÀI 4. Vẽ hình theo cách diễn đạt “Vẽ góc $\widehat{xOy}$ có số đo bằng 45° . Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A . Lấy điểm B trên đường thẳng a rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với tia Oy ”.

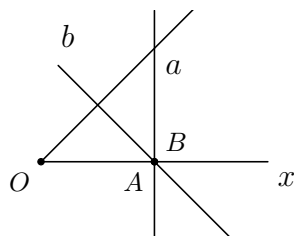
✎ **LỜI GIẢI.**

Thực hiện:

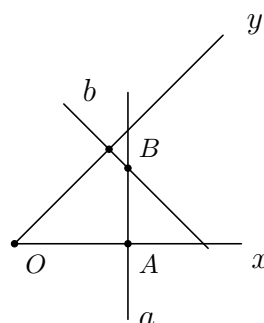
- Vẽ góc $\widehat{xOy} = 45^\circ$, sau đó lấy điểm A trên tia Ox .
- Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1, ta dựng được đường thẳng a đi qua A và vuông góc với Ox .
- Lấy điểm B trên đường thẳng a , khi đó ta có thể có các trường hợp sau:



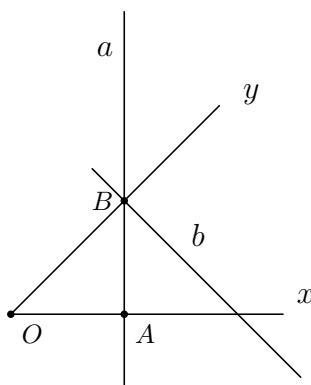
Trường hợp 1: Lấy điểm B trùng với điểm A , ta được hình vẽ:



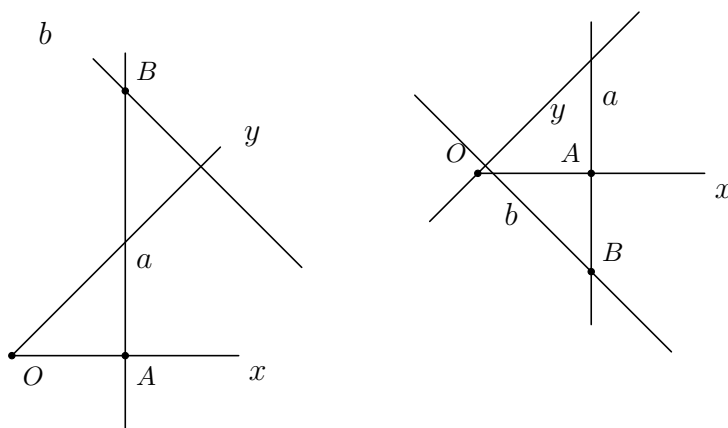
Trường hợp 2: Lấy điểm B nằm trong góc $\widehat{xOy}$, ta được hình vẽ:



Trường hợp 3: Lấy điểm B giao điểm của a với Oy , ta được hình vẽ:



Trường hợp 4: Lấy điểm B ngoài góc $\widehat{xOy}$ (có hai khả năng), ta được hình vẽ:



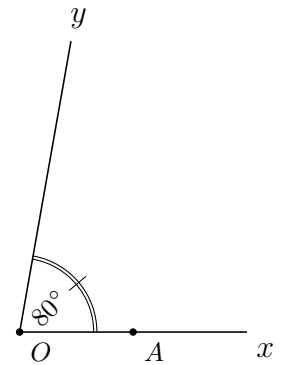


BÀI 5. Vẽ hình theo cách diễn đạt “Vẽ góc $\widehat{xOy}$ có số đo bằng 80° . Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A . Lấy điểm B trên đường thẳng a rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy ”.

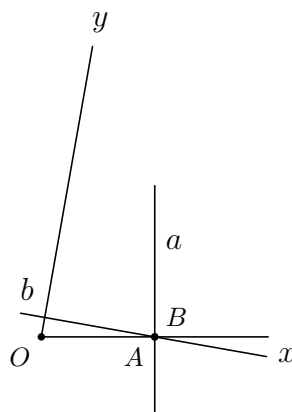
✎ LỜI GIẢI.

Thực hiện:

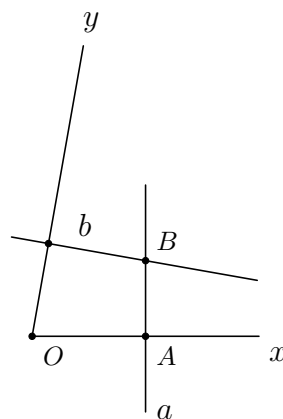
- Vẽ góc $\widehat{xOy} = 80^\circ$, sau đó lấy điểm A trên tia Ox .
- Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1, ta dựng được đường thẳng a đi qua A và vuông góc với Ox .
- Lấy điểm B trên đường thẳng a , khi đó ta có thể có các trường hợp sau:



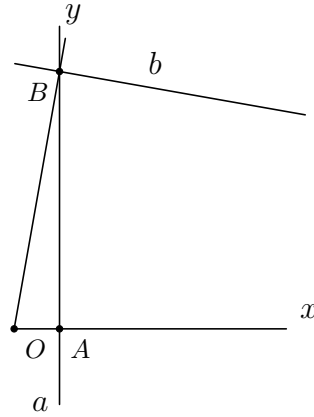
Trường hợp 1: Lấy điểm B trùng với điểm A , ta được hình vẽ:



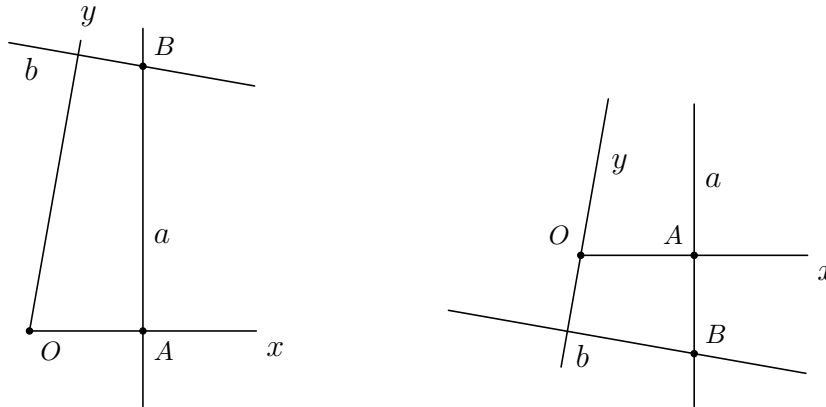
Trường hợp 2: Lấy điểm B nằm trong góc $\widehat{xOy}$, ta được hình vẽ:



Trường hợp 3: Lấy điểm B giao điểm của a với Oy , ta được hình vẽ:



Trường hợp 4: Lấy điểm B ngoài góc $\widehat{xOy}$ (có hai khả năng), ta được hình vẽ:



□

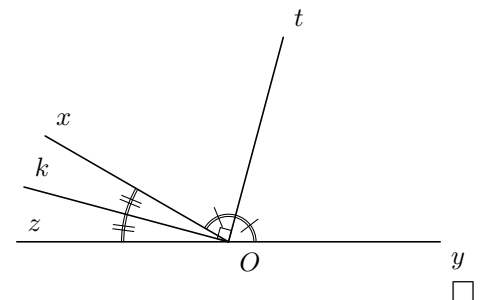
BÀI 6. Chứng minh rằng góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù là một góc vuông.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét góc $\widehat{xOy}$ có góc kề bù là góc $\widehat{xOz}$. Gọi tia Ot, Ok lần lượt là tia phân giác của các góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{xOz}$. Khi đó, ta có:

$$180^\circ = \widehat{xOy} + \widehat{xOz} = 2 \cdot \widehat{xOt} + 2 \cdot \widehat{xOk}.$$

Vậy $\widehat{xOt} + \widehat{xOk} = 90^\circ$, hay là $Ot \perp Ok$.



□

BÀI 7. Cho góc $\widehat{xOy}$ và tia Oz nằm trong góc đó sao cho $\widehat{xOz} = 4 \cdot \widehat{yOz}$. Tia phân giác Ot của góc $\widehat{xOz}$ thỏa mãn $Ot \perp Oy$. Tính số đo của góc $\widehat{xOy}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

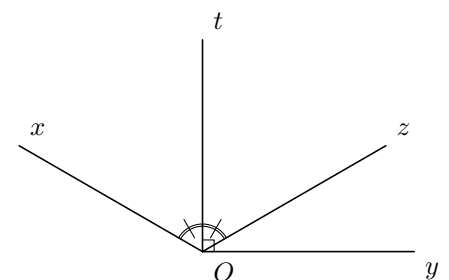
Ta có $\widehat{zOy} = \widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 4 \cdot \widehat{yOz} + \widehat{yOz} = 5 \cdot \widehat{yOz}$ (1).

Mặt khác, ta lại có:

$$\begin{aligned} \widehat{yOt} = 90^\circ &\Leftrightarrow 90^\circ = \widehat{yOz} + \widehat{zOt} = \widehat{yOz} + \frac{1}{2}\widehat{xOz} = 3 \cdot \widehat{yOz} \\ &\Leftrightarrow \widehat{yOz} = 30^\circ (2). \end{aligned}$$

Thay (2) vào (1), ta được: $\widehat{xOz} = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$.

Vậy $\widehat{xOy} = 150^\circ$.



□

BÀI 8. Cho góc $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Trong góc $\widehat{AOB}$ vẽ các tia OC, OD sao cho $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 60^\circ$.

a) Tính số đo của các góc $\widehat{AOD}, \widehat{DOC}, \widehat{COB}$.

b) Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng OA và chứa tia OB ta vẽ tia OE sao cho OB là phân giác của góc $\widehat{DOE}$. Chứng minh rằng $OC \perp OE$.

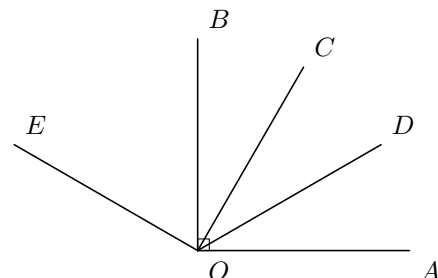
LỜI GIẢI.

a) Ta có

$$\widehat{AOD} = \widehat{AOB} - \widehat{BOD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \quad (1.1)$$

$$\widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \quad (1.2)$$

$$\widehat{COD} = \widehat{AOB} - \widehat{AOD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \quad (1.3)$$



b) Ta có ngay:

$$\widehat{COE} = \widehat{COB} + \widehat{BOE} = \widehat{COB} + \widehat{BOD} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow OC \perp OE.$$

□

BÀI 9. Cho góc tù $\widehat{AOB}$. Trong góc $\widehat{AOB}$ vẽ tia OC sao cho $\widehat{AOC} + \widehat{AOB} = 180^\circ$. Vẽ tia phân giác OD của góc $\widehat{BOC}$.

a) $\widehat{BOC} + 2 \cdot \widehat{AOC} = 180^\circ$.

b) Chứng minh rằng $OA \perp OD$.

LỜI GIẢI.

a) Theo giả thiết, ta có

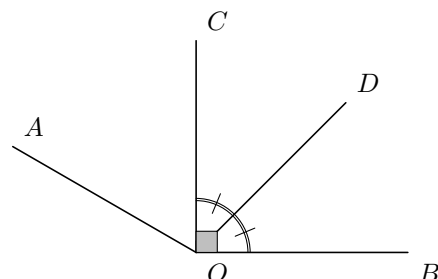
$$180^\circ = \widehat{AOC} + \widehat{AOB} = \widehat{AOC} + (\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) = 2 \cdot \widehat{AOC} + \widehat{BOC}.$$

b) Vì OD là tia phân giác góc $\widehat{BOC}$ nên $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{DOC}$. Kết hợp với câu a), ta có

$$180^\circ = 2 \cdot \widehat{DOC} + 2 \cdot \widehat{AOC}$$

Do đó: $\widehat{AOC} + \widehat{DOC} = 90^\circ$. Hay là $OA \perp OD$.

□



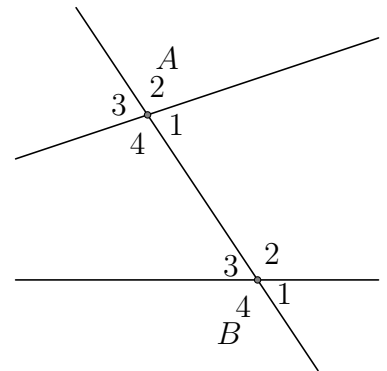
BÀI 3 CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG

A. Tóm tắt lí thuyết

A GÓC SO LE TRONG. GÓC ĐỒNG VỊ

Chúng ta sẽ bắt đầu với giả thiết cho hai đường thẳng a và b .
Vẽ đường thẳng c cắt cả a và b theo thứ tự tại A, B . Khi đó

- Tại giao điểm A ta có 4 góc là $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \widehat{A_3}, \widehat{A_4}$.
- Tại giao điểm B ta có 4 góc là $\widehat{B_1}, \widehat{B_2}, \widehat{B_3}, \widehat{B_4}$.



Để thiết lập mối tương quan giữa các góc ở đỉnh A và các góc tại đỉnh B người ta sử dụng định nghĩa

- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$, $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$, $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$ được gọi là các cặp góc *đồng vị*.
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$ được gọi là các cặp góc *so le trong*.
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_3}$ được gọi là các cặp góc *trong cùng phía*.

B TÍNH CHẤT

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b và trong các góc tạo thành có

- Một cặp góc đồng vị bằng nhau thì
 - Hai góc đồng vị còn lại bằng nhau.
 - Hai góc so le trong bằng nhau.
- Một cặp góc so le trong bằng nhau thì
 - Hai góc so le trong còn lại bằng nhau.
 - Hai góc đồng vị bằng nhau.

B. Phương pháp giải toán

VÍ DỤ 1. Xem hình vẽ dưới đây rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.

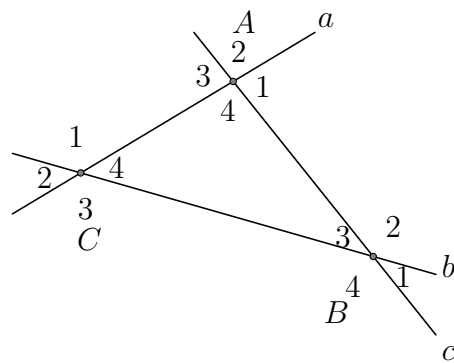
LỜI GIẢI.

Ta xét ba trường hợp

TH1.

Đường thẳng c cắt cả a và b theo thứ tự tại A, B . Khi đó

- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$, $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$, $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$ được gọi là các cặp góc đồng vị.
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$ được gọi là các cặp góc so le trong.
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_3}$ được gọi là các cặp góc trong cùng phía.



TH2. Đường thẳng b cắt cả a và c theo thứ tự tại B, C . Khi đó

- Các cặp góc $\widehat{B_1}$ và $\widehat{C_3}$, $\widehat{B_4}$ và $\widehat{C_2}$, $\widehat{B_2}$ và $\widehat{C_4}$, $\widehat{B_3}$ và $\widehat{C_1}$ là các cặp góc đồng vị.
- Các cặp góc $\widehat{B_4}$ và $\widehat{C_4}$, $\widehat{B_3}$ và $\widehat{C_3}$ là các cặp góc so le trong.
- Các cặp góc $\widehat{B_4}$ và $\widehat{C_3}$, $\widehat{B_3}$ và $\widehat{C_4}$ là các cặp góc trong cùng phía.

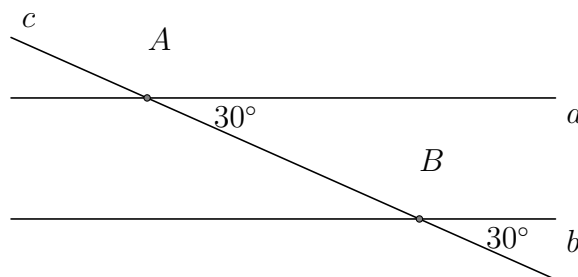
TH3. Đường thẳng a cắt cả b và c theo thứ tự tại A, C . Khi đó

- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{C_4}$, $\widehat{A_2}$ và $\widehat{C_1}$, $\widehat{A_3}$ và $\widehat{C_2}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{C_3}$ là các cặp góc đồng vị.
- Các cặp góc $\widehat{A_3}$ và $\widehat{C_4}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{C_1}$ là các cặp góc so le trong.
- Các cặp góc $\widehat{A_3}$ và $\widehat{C_1}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{C_4}$ là các cặp góc trong cùng phía.

□

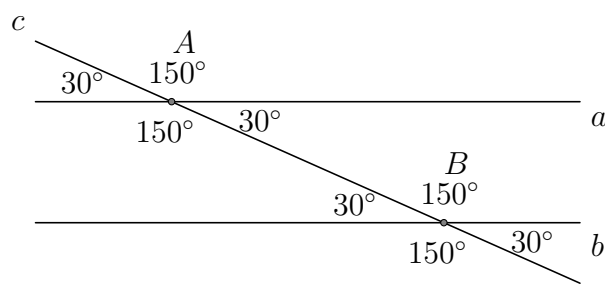
VÍ DỤ 2.

Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại.



LỜI GIẢI.

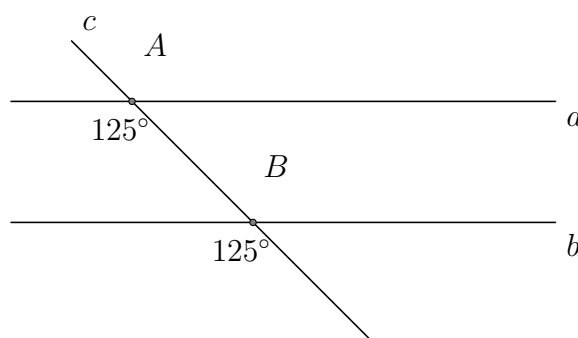
Từ hình vẽ ta nhận thấy rằng đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau. Do đó ta nhận được kết quả điền như hình bên.



□

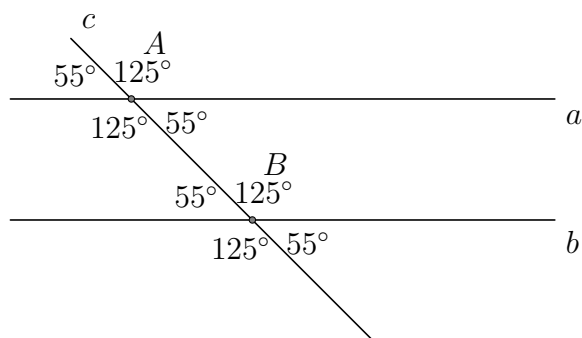
VÍ DỤ 3.

Hãy điền vào hình bên số đo của các góc còn lại.



LỜI GIẢI.

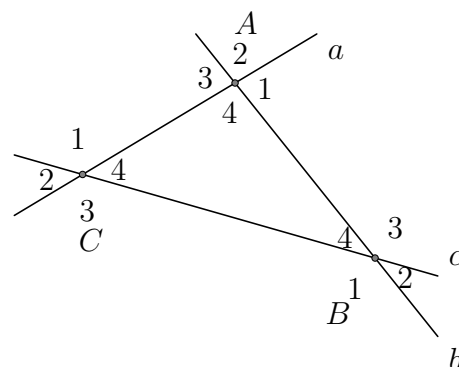
Từ hình vẽ ta nhận thấy rằng đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau. Do đó ta nhận được kết quả như hình bên.



□

C. Bài tập luyện tập**BÀI 1.**

Xem hình vẽ bên rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.

**LỜI GIẢI.**

Ta xét các trường hợp

TH1. Đường thẳng c cắt các đường thẳng a, b theo thứ tự tại A, B thì

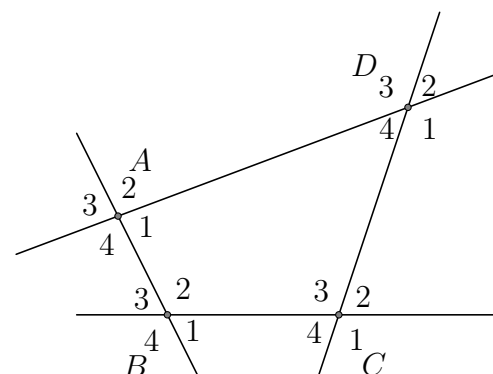
- Các cặp góc $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$, $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_4}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_1}$ là các cặp góc đồng vị.
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_4}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_3}$ là các cặp góc so le trong.
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$ là các cặp góc trong cùng phía.

TH2. Đường thẳng a cắt các đường thẳng b, c theo thứ tự tại B và C , đường thẳng b cắt các đường thẳng a, c theo thứ tự tại A và C được suy ra tương tự.

□

BÀI 2.

Xem hình vẽ bên rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.

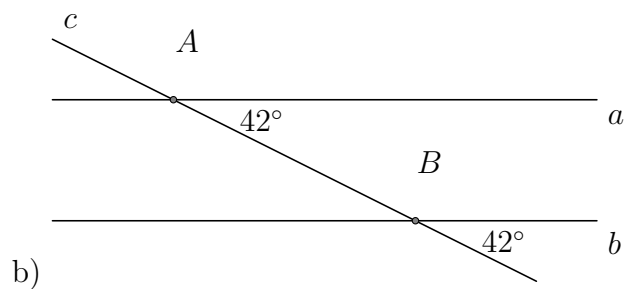
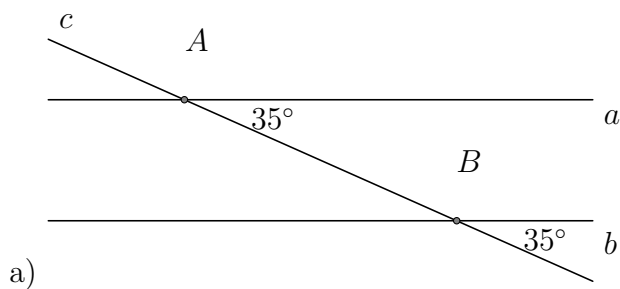
**LỜI GIẢI.**

Đường thẳng AB cắt các đường thẳng AD và BC theo thứ tự tại A và B . Khi đó

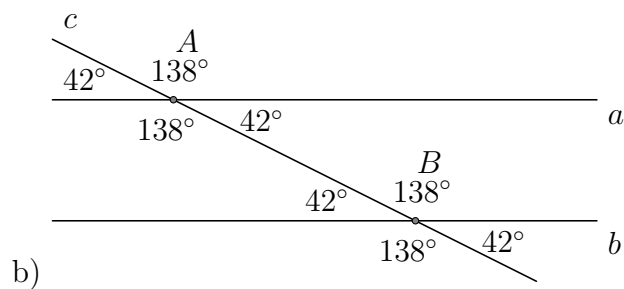
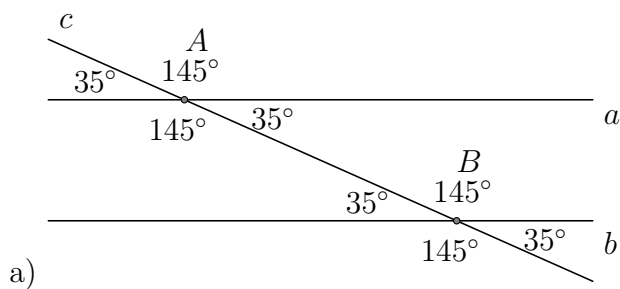
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$, $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$, $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$ là các cặp góc đồng vị.
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_3}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$ là các cặp góc so le trong.
- Các cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$, $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_3}$ là các cặp góc trong cùng phía.

Các trường hợp khác tương tự. □

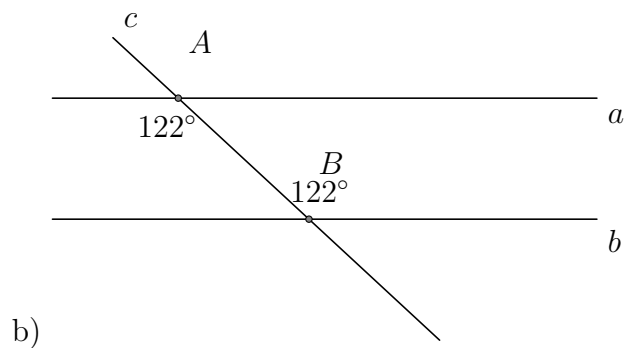
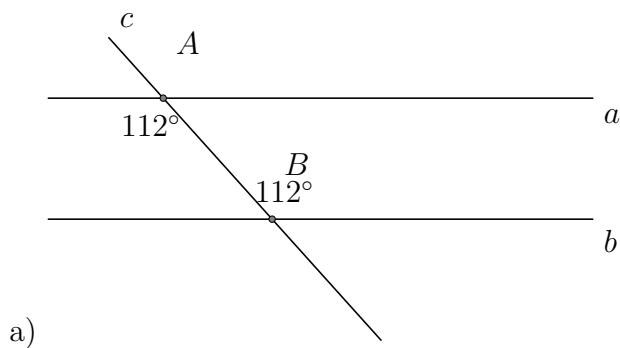
BÀI 3. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại.



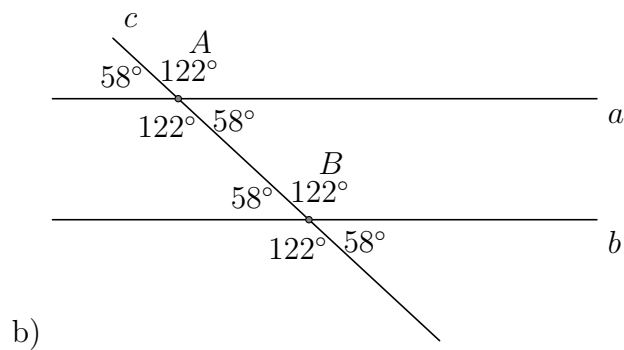
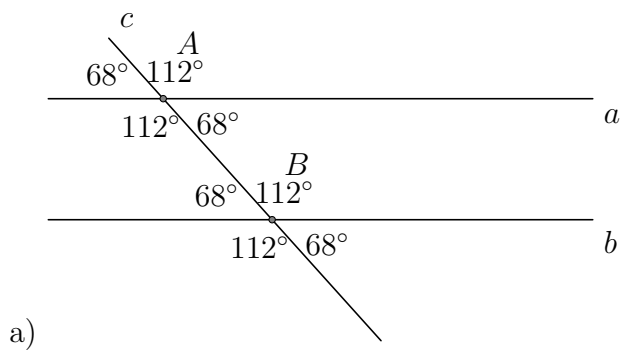
LỜI GIẢI.



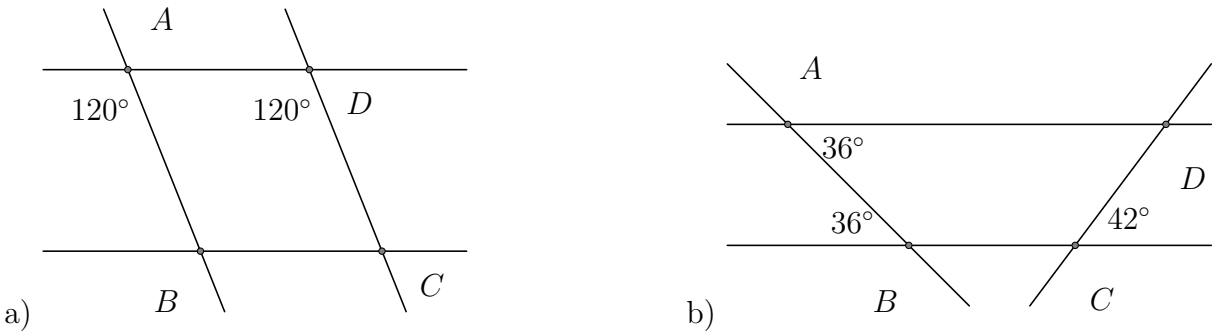
BÀI 4. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại. □



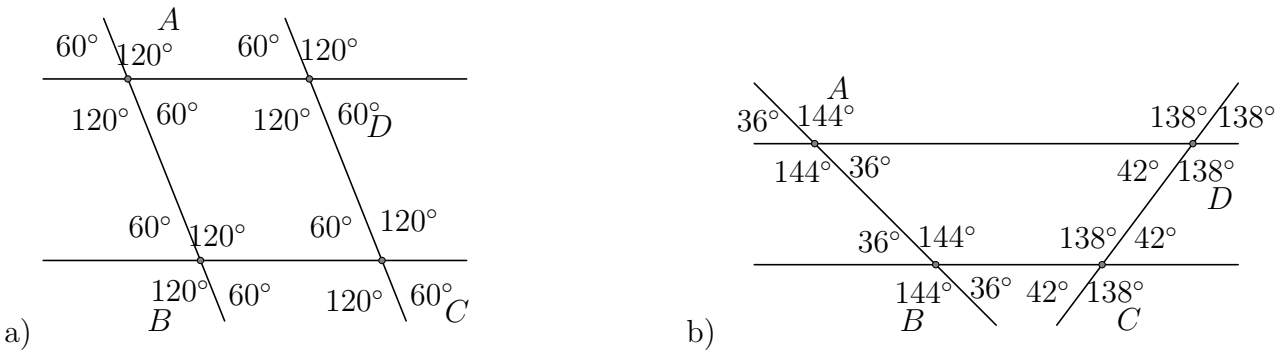
LỜI GIẢI.



BÀI 5. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại. □



LỜI GIẢI.



□

BÀI 4

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b **song song với nhau**.

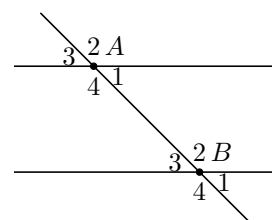
Nhận xét.

Như vậy, ta có hai đường thẳng a và b song song với nhau nếu một trong các điều kiện sau xảy ra:

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}; \widehat{A_2} = \widehat{B_2};$$

$$\widehat{A_3} = \widehat{B_3}; \widehat{A_4} = \widehat{B_4};$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_3}; \widehat{A_4} = \widehat{B_2}.$$



Hai đường thẳng a và b song song thì

— Kí hiệu $a \parallel b$.

— Khi đó ta còn có thể nói: “Đường thẳng a song song với đường thẳng b ” hoặc “Đường thẳng b song song với đường thẳng a ”.

2. Vẽ hai đường thẳng song song

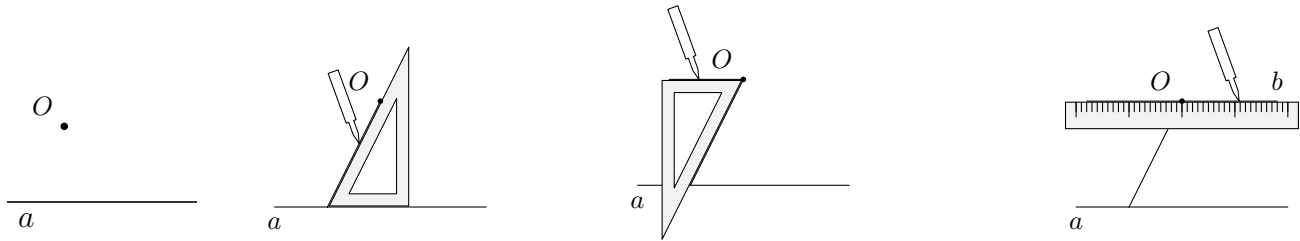
Qua một điểm O ở ngoài đường thẳng a chỉ kẻ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng a .

Bài toán: Cho một điểm O và một đường thẳng a không đi qua O . Hãy vẽ đường thẳng b đi qua O và song song với đường thẳng a .

Cách thực hiện

Ta có thể chọn một trong các cách sau đây:

Cách 1: Cách vẽ đường thẳng b được minh họa qua các hình vẽ.



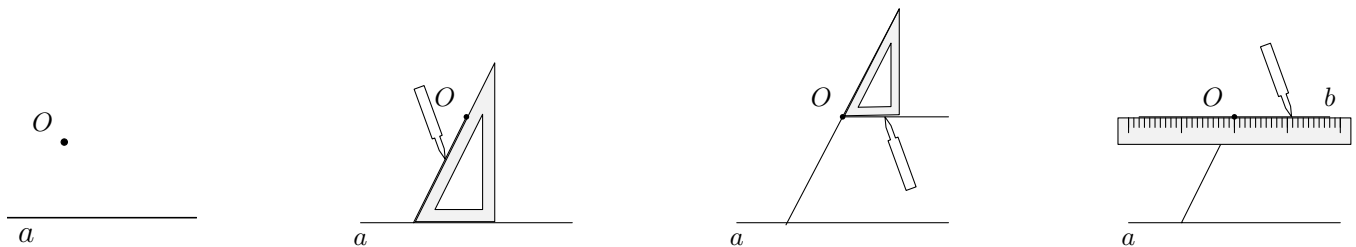
Hình ban đầu

- Đặt êke với một cạnh góc vuông trùng với đường thẳng a và cạnh huyền đi qua O .
- Dùng bút vạch một tia trên cạnh huyền.

- Đặt êke với cạnh huyền trùng với tia vừa vẽ và một đỉnh trùng với O .
- Dùng bút vạch một tia trên cạnh góc vuông.

Đặt thước trùng với tia vừa vẽ và dùng thước kéo dài tia.

Cách 2: Cách vẽ đường thẳng b được minh họa qua các hình vẽ.



3. Tính chất của hai đường thẳng song song

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì

- ① Hai góc so le trong bằng nhau.
- ② Hai góc đồng vị bằng nhau.
- ③ Hai góc trong cùng phía bù nhau.



- Nếu $a \parallel b$ thì mỗi đoạn thẳng (mỗi tia) thuộc đường thẳng a sẽ song song với mỗi đoạn (mỗi tia) thuộc đường thẳng b .
- Hai đoạn thẳng (hoặc hai tia) không có điểm chung thì chưa chắc song song với nhau.

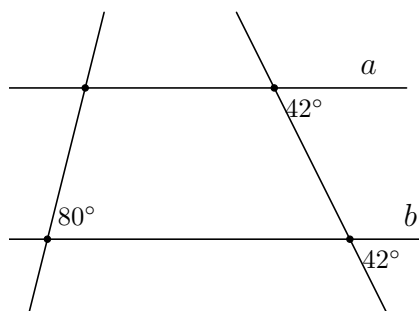
4. Cặp góc có cạnh tương ứng song song

Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau hoặc bù nhau, cụ thể:

- ① Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.
- ② Chúng bù nhau nếu góc này nhọn và góc kia tù.
- ③ Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.

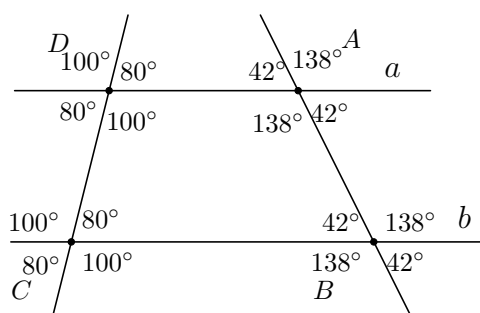
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại



LỜI GIẢI.

Từ hình vẽ ta thấy $a \parallel b$, nên ta nhận được kết quả điền như sau



□

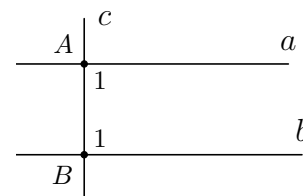
VÍ DỤ 2. Biết rằng hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c . Chứng tỏ rằng $a \parallel b$.

LỜI GIẢI.

Theo giả thiết :

$$a \perp c \Leftrightarrow \widehat{A_1} = 90^\circ;$$

$$b \perp c \Leftrightarrow \widehat{B_1} = 90^\circ.$$



Khi đó, ta nhận được $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow a \parallel b$, vì có hai góc trong cùng phía bù nhau.

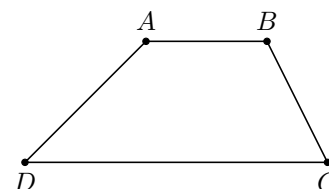
□

VÍ DỤ 3. Tính các góc của tứ giác $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết $\widehat{A} = 3\widehat{D}$, $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$.

LỜI GIẢI.

Vì $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$, ta có

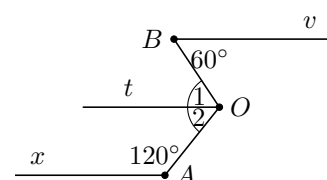
$$\begin{aligned} 180^\circ &= \widehat{A} + \widehat{D} = 3\widehat{D} + \widehat{D} \\ \Leftrightarrow \widehat{D} &= 45^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 135^\circ. \\ 180^\circ &\stackrel{\widehat{B}-\widehat{C}=30^\circ}{=} (30^\circ + \widehat{C}) + \widehat{C} = 30^\circ + 2\widehat{C} \Leftrightarrow \widehat{C} = 75^\circ \\ \Rightarrow \widehat{B} &= 180^\circ - \widehat{C} = 105^\circ. \end{aligned}$$



□

VÍ DỤ 4.

Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$ và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel Ot$ và $By \parallel Ot$.



LỜI GIẢI.

Theo giả thiết, Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB} = 120^\circ$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = 60^\circ$.

Nhận xét rằng:

- Vì $\widehat{O_1} = \widehat{OBy}$ nên $Ot \parallel By$ bởi vì chúng có hai góc so le trong bằng nhau.
- Vì $\widehat{O_2} + \widehat{OAx} = 180^\circ$ nên $Ot \parallel Ax$ bởi vì chúng có hai góc trong cùng phía bù nhau.

□

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC . Tính tổng $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$.

LỜI GIẢI.

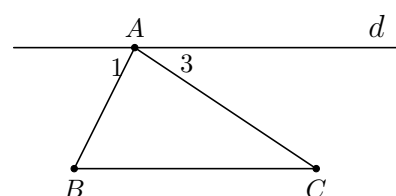
Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC , ta nhận thấy ngay:

$\widehat{B} = \widehat{A_1}$ vì là cặp góc so le trong;

$\widehat{C} = \widehat{A_3}$ vì là cặp góc so le trong.

Khi đó:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 180^\circ.$$



□

Nhận xét.

- Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng phương pháp dựng thêm hình phụ để thực hiện. Nếu biết cách vận dụng phương pháp này thì nhiều bài toán sẽ được giải quyết một cách khá đơn giản. Chúng ta sẽ còn gặp lại phương pháp này trong những chủ đề tiếp theo.
- Qua ví dụ trên ta ghi nhận được một kết quả
“Tổng ba góc của một tam giác luôn bằng 180° ”

VÍ DỤ 6. Cho $a \parallel b$, chứng tỏ rằng nếu đường thẳng c cắt đường thẳng a thì cũng cắt đường thẳng b .

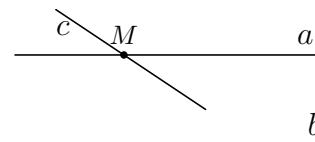
LỜI GIẢI.

Giả sử đường thẳng c cắt đường thẳng a tại M .

Giả sử ngược lại c không cắt b , tức là $c \parallel b$.

Khi đó “Qua điểm M kẻ được hai đường thẳng phân biệt a và c song song với b ”, điều này mâu thuẫn với tiên đề Ô-clit.

Vậy c luôn cắt b .



□

Nhận xét. 1. Trong ví dụ trên ta đã sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng để thực hiện. Lược đồ khi sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng để chứng minh tính chất K được minh họa theo các bước:

Bước 1: Giả sử trái lại tính chất K không đúng, khi đó ta có tính chất K' .

Bước 2: Khai thác tính chất K' dẫn tới mâu thuẫn.

Bước 3: Kết luận về tính chất K .

2. Qua ví dụ trên ta ghi nhận được một kết quả:

“Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cắt đường thẳng còn lại”.

VÍ DỤ 7. Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ $n + 1$ đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất cũng có n đường thẳng cắt a .

✎ LỜI GIẢI.

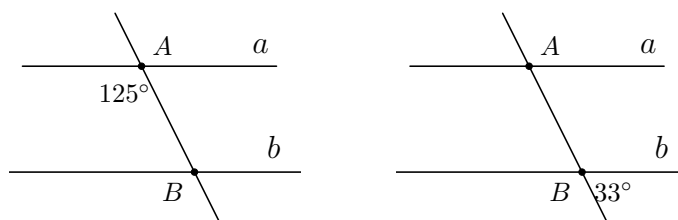
Giả sử ngược lại, trong số $n + 1$ đường thẳng phân biệt kẻ qua A có chưa đến n đường thẳng cắt a . Suy ra, còn lại ít nhất hai đường thẳng không cắt a . Vậy hai đường thẳng đó sẽ cùng đi qua A và song song với a , điều này mâu thuẫn với tiên đề Ô-clit.

Vậy ít nhất cũng có n đường thẳng cắt a .

□

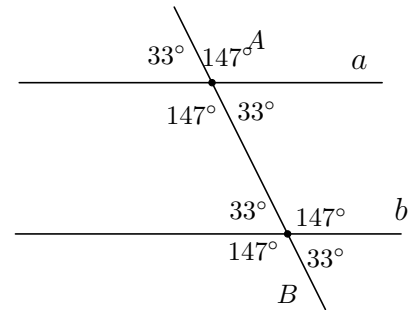
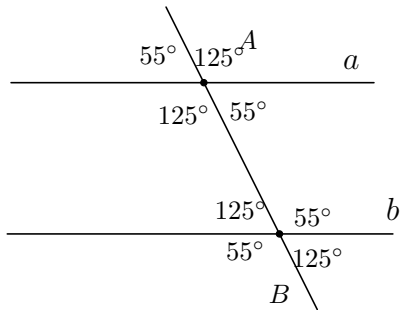
1. Bài tập luyện tập

BÀI 1. Biết $a \parallel b$, điền vào hình sau các góc còn lại



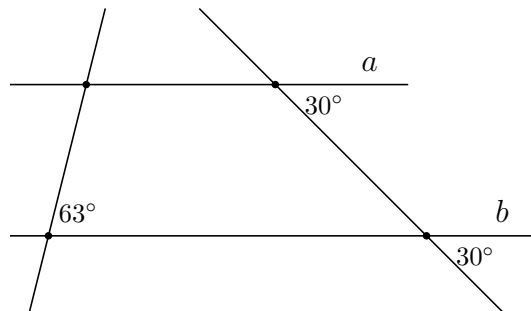
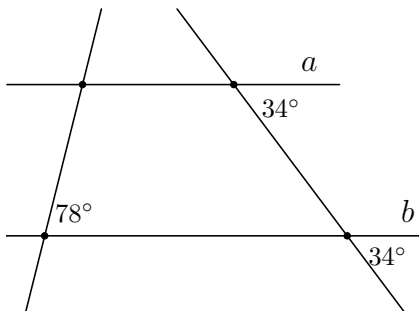
✎ LỜI GIẢI.

Theo giả thiết $a \parallel b$ nên một đường thẳng cắt hai đường thẳng nói trên tạo ra các cặp góc đồng vị bằng nhau và các cặp góc so le trong bằng nhau. Dựa vào quan hệ đồng vị và so le trong của các góc ta có giá trị các góc được điền như hình vẽ



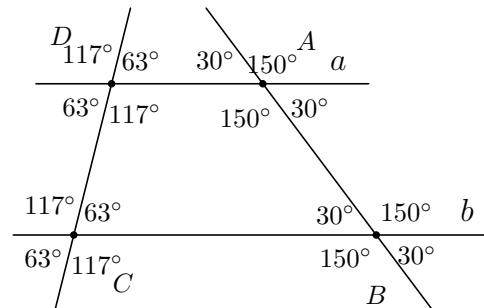
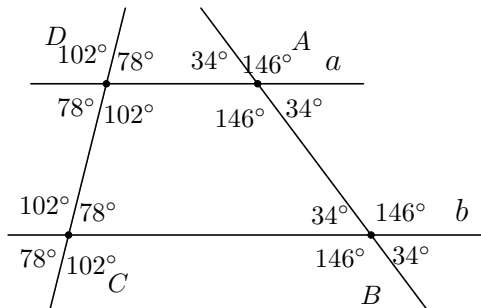
□

BÀI 2. Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại



LỜI GIẢI.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $a \parallel b$ (do có hai góc đồng vị bằng nhau). Dựa vào quan hệ đồng vị và so le trong của các góc ta có giá trị các góc được điền như hình vẽ



□

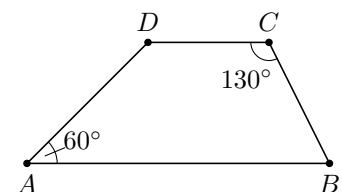
BÀI 3. Cho hình $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Tính các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$, biết $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{C} = 130^\circ$.

LỜI GIẢI.

Vì $AB \parallel CD$ nên ta có

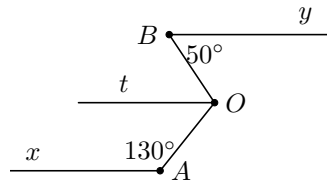
$$\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{A} = 120^\circ;$$

$$\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{C} = 50^\circ.$$



□

BÀI 4. Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 100^\circ$ và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel Ot$ và $By \parallel Ot$.

**LỜI GIẢI.**

Theo giả thiết $\widehat{AOB} = 100^\circ$ nên $\widehat{AOt} = \widehat{tOB} = 50^\circ$. Từ đó suy ra:

- $\widehat{AOt} + \widehat{AOx} = 180^\circ \Rightarrow Ax \parallel Ot$ vì có hai góc trong cùng phía bù nhau.
- $\widehat{tOB} = \widehat{OBy} = 50^\circ \Rightarrow By \parallel Ot$ vì có hai góc so le trong bằng nhau (cùng bằng 50°).

□

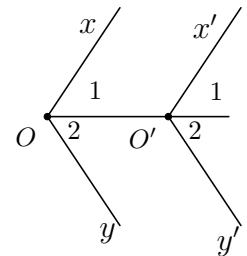
BÀI 5. Cho hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$, biết $Ox \parallel O'x'$ (cùng chiều) và $Oy \parallel O'y'$ (cùng chiều). Chứng minh rằng $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

LỜI GIẢI.

Nói O và O' , ta có nhận xét rằng:

- Vì $Ox \parallel O'x'$ nên $\widehat{O}_1 = \widehat{O'_1}$ do đồng vị.
- Vì $Oy \parallel O'y'$ nên $\widehat{O}_2 = \widehat{O'_2}$ do đồng vị.

Khi đó: $\widehat{xOy} = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = \widehat{O'_1} + \widehat{O'_2} = \widehat{x'O'y'}$, điều phải chứng minh.



Nhận xét. Qua bài tập trên ta ghi nhận một kết quả:

“Hai góc có cạnh tương ứng song song cùng chiều thì bằng nhau”.

□

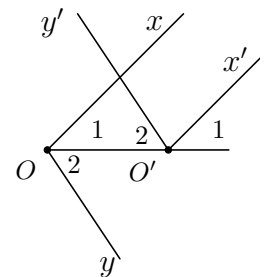
BÀI 6. Cho hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$, biết $Ox \parallel O'x'$ (cùng chiều) và $Oy \parallel O'y'$ (ngược chiều). Chứng minh rằng $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$.

LỜI GIẢI.

Nói O và O' , ta có nhận xét rằng

- Vì $Ox \parallel O'x'$ nên $\widehat{O}_1 = \widehat{O'_1}$ do đồng vị.
- Vì $Oy \parallel O'y'$ nên $\widehat{O}_2 = \widehat{O'_2}$ do đồng vị.

Khi đó: $\widehat{xOy} = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = \widehat{O'_1} + \widehat{O'_2} = 180^\circ - \widehat{x'O'y'}$
 $\Leftrightarrow \widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$, điều phải chứng minh.



□

BÀI 7. Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng a vẽ 100 đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất có 99 đường thẳng cắt a .

LỜI GIẢI.

Giả sử ngược lại, trong số 100 đường thẳng phân biệt kẻ qua A có chưa đến 99 đường thẳng cắt a .

Suy ra, còn lại ít nhất hai đường thẳng không cắt a .

Vậy hai đường thẳng đó sẽ cùng đi qua A và song song với a , điều này mâu thuẫn với tiên đề Ô-clít.

Vậy ít nhất cũng có 99 đường thẳng cắt a .

□

BÀI 8. Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt và một điểm A ở trong đó. Một đường thẳng a đi qua A và song song với Ox . Chứng minh rằng a cắt Oy .

LỜI GIẢI.

Giả sử đường thẳng a đi qua A nhưng không cắt Oy , vì $A \notin Oy$ suy ra $a \parallel Oy$ nên $Ox \parallel Oy$, điều này là vô lí.

Vậy đường thẳng a cắt Oy . □

BÀI 9. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng song song bị cắt bởi hai cát tuyến thì

- ① Hai tia phân giác của một cặp góc so le trong song song với nhau.
- ② Hai tia phân giác của một cặp góc đồng vị bằng nhau.
- ③ Hai tia phân giác của một cặp góc trong cùng phía vuông góc với nhau.

LỜI GIẢI.

Không làm mất tính tổng quát ta coi cát tuyến zz' cùng cắt hai đường thẳng song song xx' và yy' tại A và B (như hình vẽ).

- ① Hai góc so le trong $\widehat{x'AB}$ và $\widehat{yBA}$ có hai tia phân giác lần lượt là At và Bs . Ta cần chỉ ra rằng $At \parallel Bs$. Thật vậy

Vì $xx' \parallel yy'$ nên $\widehat{x'AB} = \widehat{yBA}$ suy ra $\widehat{tAB} = \widehat{sBA} = \frac{1}{2}\widehat{x'AB}$. Đường thẳng zz' cắt hai tia At và Bs và có một cặp góc so le trong $\widehat{tAB} = \widehat{sBA}$ nên $At \parallel Bs$.

- ② Hai góc đồng vị $\widehat{xAz'}$ và $\widehat{yBA}$ có hai tia phân giác lần lượt là At' và Bs . Ta cần chỉ ra rằng $At' \parallel Bs$. Thật vậy

Vì $xx' \parallel yy'$ nên $\widehat{xAz'} = \widehat{yBA}$ suy ra $\widehat{z'At'} = \widehat{sBA} = \frac{1}{2}\widehat{xAz'}$. Đường thẳng zz' cắt hai tia At' và Bs và có một cặp góc đồng vị $\widehat{z'At'} = \widehat{sBA}$ nên $At' \parallel Bs$.

- ③ Hai góc trong cùng phía $\widehat{x'AB}$ và $\widehat{y'BA}$ có hai tia phân giác lần lượt là At và Bs' . Ta cần chỉ ra rằng $At \perp Bs'$. Thật vậy

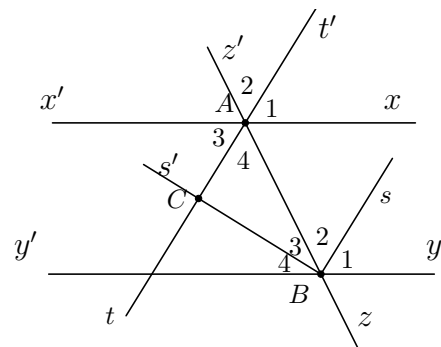
Vì $xx' \parallel yy'$ nên $\widehat{x'AB} + \widehat{y'BA} = 180^\circ$.

Gọi C là giao điểm của At và Bs' .

Tam giác ABC có

$$\begin{aligned}
 \widehat{CAB} + \widehat{CBA} &= \widehat{A_4} + \widehat{B_3} \\
 &= \widehat{CAB} + \widehat{CBA} \\
 &= \frac{1}{2}\widehat{x'AB} + \frac{1}{2}\widehat{y'BA} \\
 &= \frac{1}{2}(\widehat{x'AB} + \widehat{y'BA}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ
 \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ hay $At \perp Bs'$. □



BÀI 5 TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

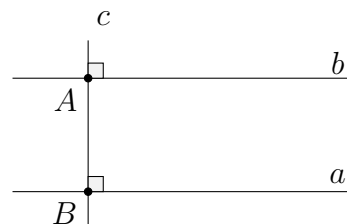
1. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

Chúng ta ghi nhận kết quả sau

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

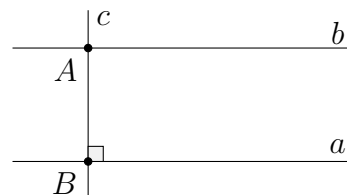
Cụ thể ta có minh họa sau



- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường thẳng kia.

$$\begin{cases} a \parallel b \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$$

Cụ thể ta có minh họa sau



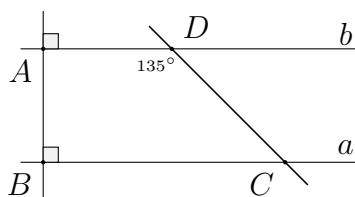
2. Ba đường thẳng song song

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau. Cụ thể ta có minh họa sau

$$\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

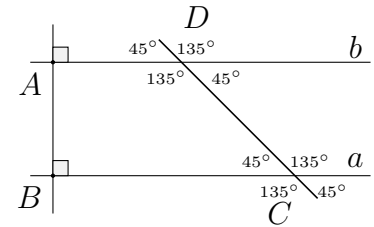
VÍ DỤ 1. Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại tại đỉnh C và D .



LỜI GIẢI.

Theo hình vẽ ta có

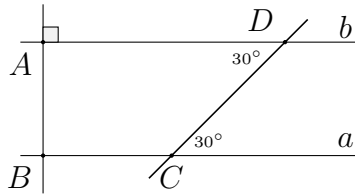
$$\begin{cases} a \perp AB \\ b \perp AB \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$



Từ đó, ta có cách điền góc như hình vẽ bên.

□

VÍ DỤ 2. Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại

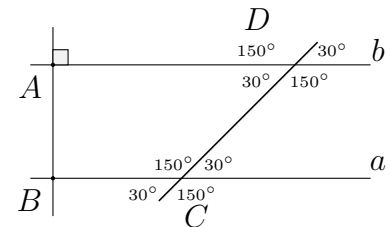


LỜI GIẢI.

Theo hình vẽ ta có

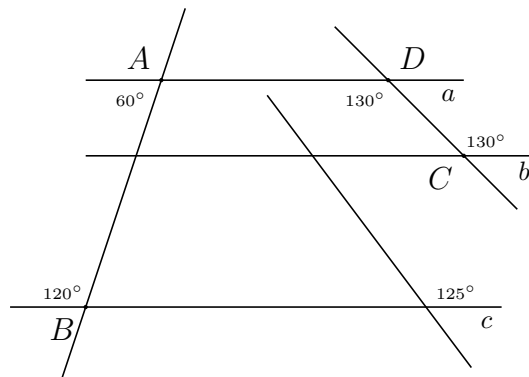
$$\begin{cases} a \parallel b \\ b \perp AB \end{cases} \Rightarrow a \perp AB.$$

Từ đó, ta có cách điền góc như hình vẽ bên.



□

VÍ DỤ 3. Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại có trong hình vẽ

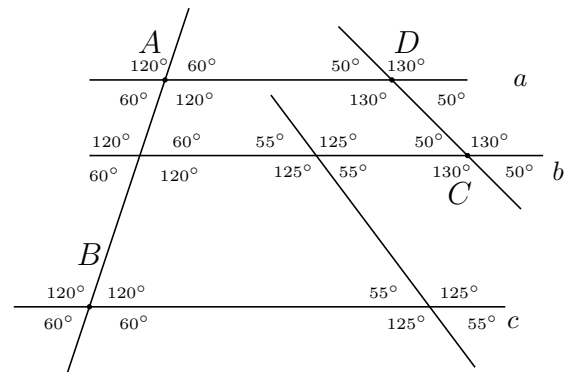


LỜI GIẢI.

Theo hình vẽ ta có

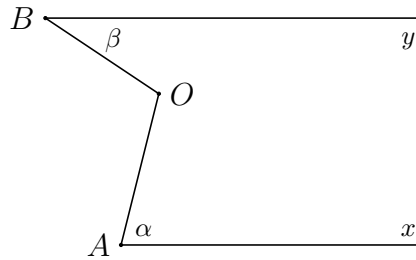
- $a \parallel b$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).
 - $a \parallel c$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).
- $\Rightarrow b \parallel c$.

Từ đó, ta có cách điền các góc như hình vẽ bên.



□

VÍ DỤ 4. Trên hình vẽ dưới đây, cho $\widehat{AOB} = \alpha + \beta$. Chứng minh rằng $Ax \parallel By$.



LỜI GIẢI.

Trong $\widehat{AOB}$ dựng tia $Ot \parallel Ax$. (1)

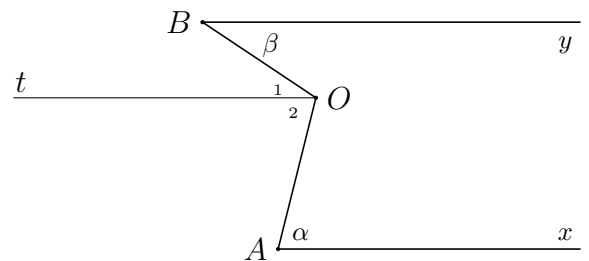
Suy ra $\widehat{O_2} = \widehat{A} = \alpha$ (2 góc so le trong).

Khi đó $\widehat{O_1} = \widehat{AOB} - \widehat{O_2} = \alpha + \beta - \alpha = \beta = \widehat{B}$.

$\Rightarrow Ot \parallel By$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $Ax \parallel By$ (vì cùng song song với Ot).

Vậy $Ax \parallel By$ (điều phải chứng minh). □



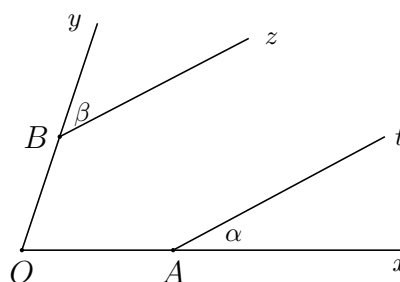
Nhận xét. 1. Như vậy trong lời giải trên, chúng ta đã dùng đường phụ là tia Ot . Một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra: “Tại sao lại nghĩ được như vậy?”. Câu trả lời có thể được lý giải như sau

— Ta thấy hai tia Ax và By chưa có một đường thẳng thứ ba cắt hai đường thẳng Ax và By nên chưa thể có được các cặp góc so le trong hoặc cặp góc trong cùng phía.

— Theo hình vẽ, ta có hai đường thẳng đi qua điểm O là đường thẳng OA và đường thẳng OB . Chính vì vậy, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng một đường thẳng trung gian đi qua điểm O , đó chính là tia Ot .

2. Ở đây, để chứng minh hai đường thẳng song song, ta đi chứng minh nó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Ví dụ tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng điều ngược lại; tức là với hai đường thẳng song song cho trước chúng ta sẽ tạo ra một đường thẳng song song với chúng để thực hiện đòi hỏi của bài toán.

VÍ DỤ 5. Trên hình vẽ, cho $\widehat{xOy} = \alpha + \beta$. Chứng minh rằng $At \parallel Bz$.



LỜI GIẢI.

Trong $\widehat{AOB}$ dựng tia $Om \parallel At$.

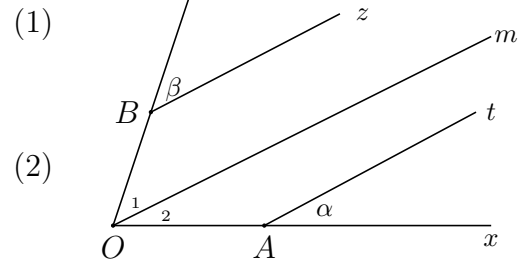
Suy ra $\widehat{O_2} = \widehat{xAt} = \alpha$ (2 góc đồng vị).

Khi đó $\widehat{O_1} = \widehat{xOy} - \widehat{O_2} = \alpha + \beta - \alpha = \beta = \widehat{yBz}$.

$\Rightarrow Om \parallel Bz$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

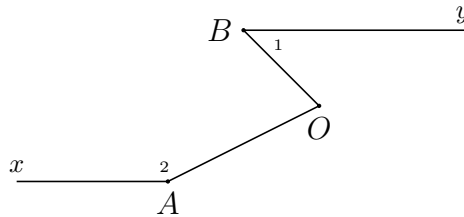
Từ (1) và (2) suy ra $At \parallel Bz$ (vì cùng song song với Bm).

Vậy $At \parallel Bz$ (điều phải chứng minh).



□

VÍ DỤ 6. Trên hình vẽ, cho $\widehat{AOB} + \widehat{A_2} - 180^\circ = \widehat{B_1}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel By$.



LỜI GIẢI.

Trong $\widehat{AOB}$ dựng tia $Ot \parallel Ox$.

Suy ra $\widehat{O_2} + \widehat{A_2} = 180^\circ$ (2 góc trong cùng phía).

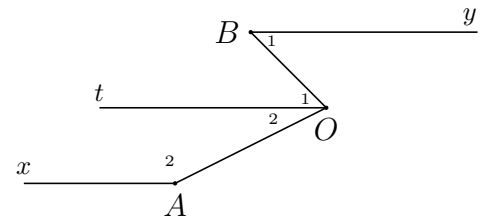
Khi đó

$$\begin{aligned}\widehat{O_1} &= \widehat{AOB} - \widehat{O_2} \\ &= \widehat{AOB} - (180^\circ - \widehat{A_2}) \\ &= \widehat{AOB} + \widehat{A_2} - 180^\circ \\ &= \widehat{B_1}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow Ot \parallel By$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (2)

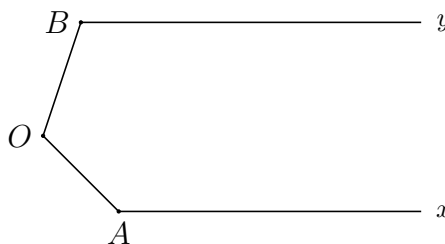
Từ (1) và (2) suy ra $Ax \parallel By$ (vì cùng song song với Ot).

Vậy $At \parallel Bz$ (điều phải chứng minh).



□

VÍ DỤ 7. Trên hình vẽ, cho $Ax \parallel By$. Chứng minh rằng $\widehat{A} + \widehat{AOB} + \widehat{B} = 360^\circ$.



LỜI GIẢI.

Dựng tia $Ot \parallel Ax$. Khi đó

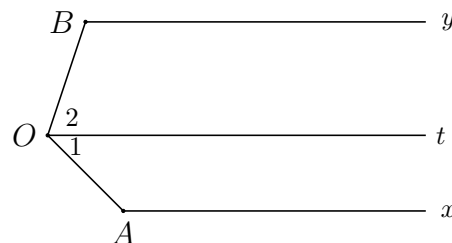
$$\widehat{O_1} + \widehat{A} = 180^\circ \text{ (2 góc trong cùng phía).}$$

Mặt khác $By \parallel Ax$ nên $Ot \parallel By$ (cùng song song với Ax).

$$\Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{B} = 180^\circ \text{ (2 góc trong cùng phía).}$$

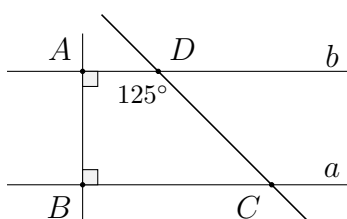
Suy ra $\widehat{A} + \widehat{AOB} + \widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{B} = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

Vậy $\widehat{A} + \widehat{AOB} + \widehat{B} = 360^\circ$ (điều phải chứng minh). □

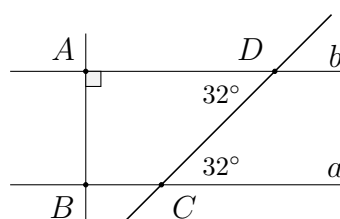


© BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại có trong hình.



a)



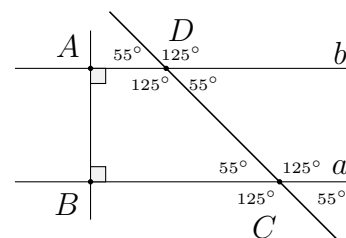
b)

LỜI GIẢI.

①

$$\text{Do } \begin{cases} b \perp AB \\ a \perp AB \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

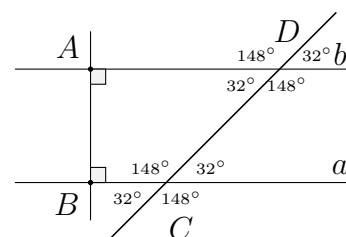
Khi đó ta có cách điền số đo của các góc còn lại trong hình vẽ bên.



②

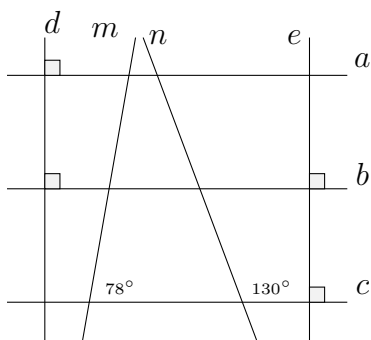
$$\text{Do } \begin{cases} b \perp AB \\ a \perp AB \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

Khi đó ta có cách điền số đo của các góc còn lại trong hình vẽ bên.

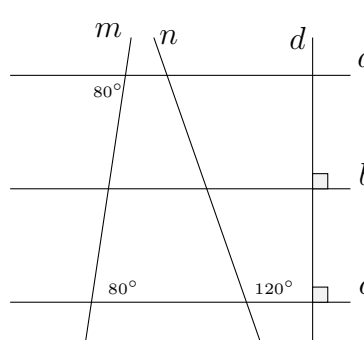


□

BÀI 2. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại.



a)



b)

✎ LỜI GIẢI.

①

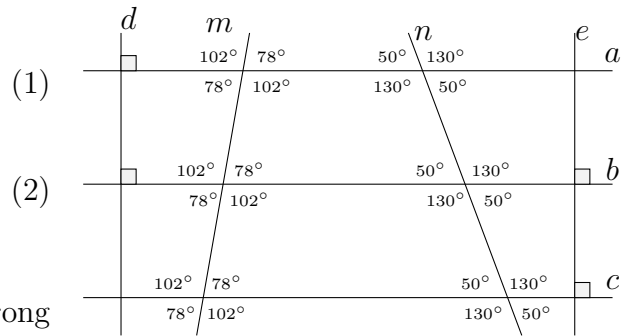
Theo hình vẽ ta có

$$\begin{cases} a \perp d \\ b \perp d \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

$$\text{Mặt khác, } \begin{cases} b \perp e \\ c \perp e \end{cases} \Rightarrow b \parallel c.$$

Từ (1) và (2) suy ra $a \parallel b \parallel c$.

Do đó ta có cách điền các góc còn lại ở trong hình bên.



②

Theo hình vẽ ta có

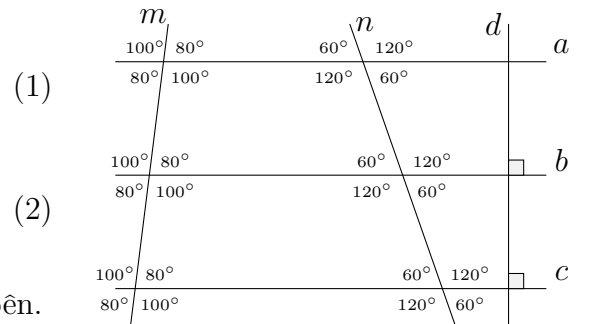
$$\begin{cases} c \perp d \\ b \perp d \end{cases} \Rightarrow c \parallel b.$$

Mặt khác,

$a \parallel c$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

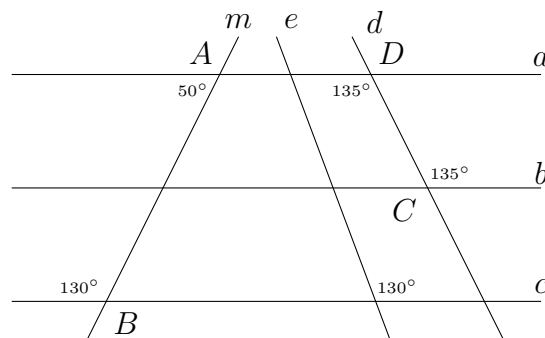
Từ (1) và (2) suy ra $a \parallel b \parallel c$.

Do đó ta có cách điền các góc còn lại ở trong hình bên.



□

BÀI 3. Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại.



✎ LỜI GIẢI.

Theo hình vẽ ta có

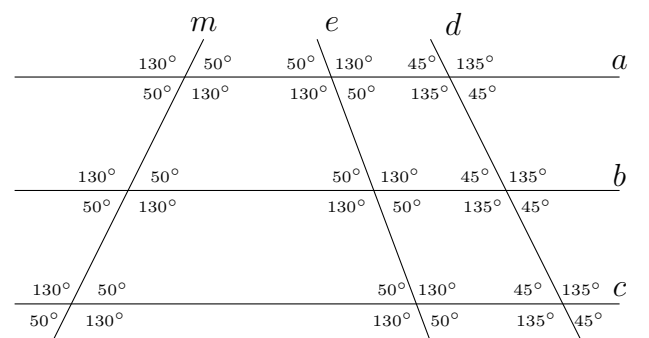
$a \parallel b$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (1)

Mặt khác,

$a \parallel c$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a \parallel b \parallel c$.

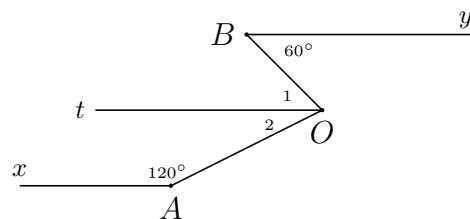
Do đó ta có cách điền các góc còn lại ở trong hình bên.



□

BÀI 4.

Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$ và Ot là tia phân giác của $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel By$.



LỜI GIẢI.

Vì Ot là tia phân giác của $\widehat{AOB}$ nên

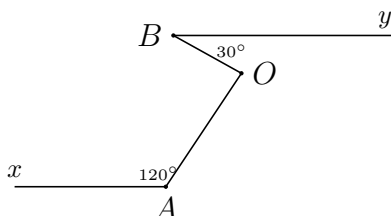
$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Ta có $\widehat{O_1} = \widehat{B} = 60^\circ$ và là cặp góc so le trong nên $By \parallel Ot$. (1)

Và $\widehat{O_2} + \widehat{A} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ và là cặp góc trong cùng phía nên $Ax \parallel Ot$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $Ax \parallel By$ (vì cùng song song với Ot). $\square$

BÀI 5. Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $Ax \parallel By$.



LỜI GIẢI.

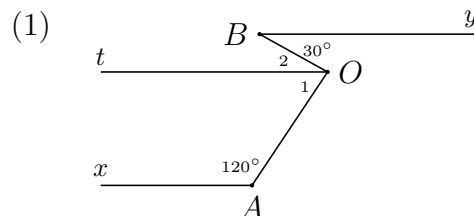
Trong $\widehat{AOB}$ dựng tia $Ot \parallel By$.

Khi đó

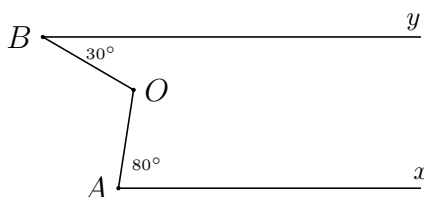
$$\begin{aligned} \widehat{O_2} &= \widehat{B} = 30^\circ \text{ (2 góc so le trong).} \\ \Rightarrow \widehat{O_1} &= 90^\circ - \widehat{O_2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \\ \Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{A} &= 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

$\Rightarrow Ot \parallel Ax$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $Ax \parallel By$ (vì cùng song song với Ot). $\square$



BÀI 6. Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 110^\circ$. Chứng minh rằng $Ax \parallel By$.



LỜI GIẢI.

Trong $\widehat{AOB}$ dựng tia $Ot \parallel Ax$.

Khi đó

$$\widehat{O}_1 = \widehat{A} = 80^\circ \text{ (2 góc so le trong).}$$

$$\Rightarrow \widehat{O}_2 = 110^\circ - \widehat{O}_1 = 110^\circ - 80^\circ = 30^\circ$$

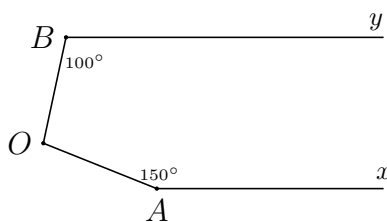
$$\Rightarrow \widehat{O}_2 = \widehat{B} = 30^\circ.$$

$\Rightarrow Ot \parallel By$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $Ax \parallel By$ (vì cùng song song với Ot).

□

BÀI 7. Trên hình vẽ bên dưới, cho $\widehat{AOB} = 110^\circ$. Chứng minh rằng $Ax \parallel By$.



✎ LỜI GIẢI.

Trong $\widehat{AOB}$ dựng tia $Ot \parallel Ax$.

Khi đó

$$\widehat{O}_1 + \widehat{A} = 180^\circ \text{ (2 góc trong cùng phía).}$$

$$\Rightarrow \widehat{O}_1 = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{O}_2 = 110^\circ - \widehat{O}_1 = 110^\circ - 30^\circ = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{O}_2 + \widehat{B} = 80^\circ + 100^\circ = 180^\circ.$$

$\Rightarrow Ot \parallel By$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $Ax \parallel By$ (vì cùng song song với Ot).

□

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ và một đường thẳng d song song với BC . Chứng minh rằng

① Nếu d cắt cạnh AB thì d cắt cạnh AC .

② Nếu d cắt tia đối của tia BA thì d cắt tia đối của tia CA .

✎ LỜI GIẢI.

①

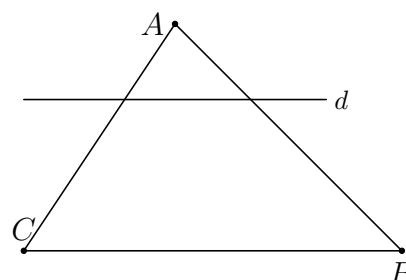
Giả sử đường thẳng d cắt cạnh AB nhưng đường thẳng d không cắt cạnh AC . Khi đó, đường thẳng d song song hoặc trùng với đường thẳng AC .

Mặt khác $d \parallel BC$ nên $AC \parallel BC$ (điều này sai vì ABC là tam giác).

Suy ra điều giả sử sai.

Vậy nếu d cắt cạnh AB thì d cắt cạnh AC .

② Tương tự câu a).

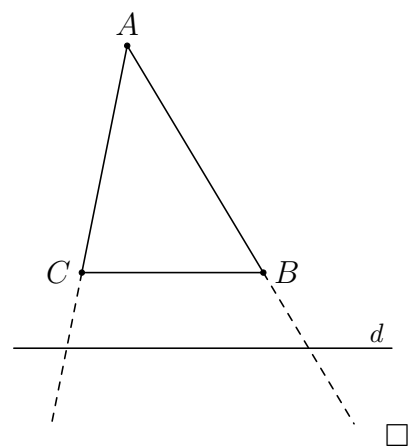


Giả sử đường thẳng d cắt tia đối của tia BA nhưng đường thẳng d không tia đối của tia CA . Khi đó, đường thẳng d song song hoặc trùng với đường thẳng CA .

Mặt khác $d \parallel BC$ nên $AC \parallel BC$ (điều này sai vì ABC là tam giác).

Suy ra điều giả sử sai.

Vậy nếu d cắt tia đối của tia BA thì d cắt tia đối của tia CA .



CHƯƠNG

2

TAM GIÁC

BÀI 1 TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tổng ba góc của một tam giác

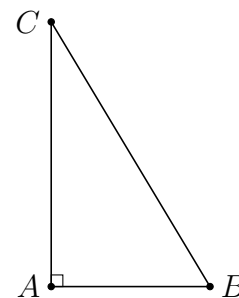
Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

2. Áp dụng vào tam giác vuông

Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

Với $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, ta nói:

- $\triangle ABC$ vuông tại A .
- AB, AC gọi là các cạnh góc vuông và BC là cạnh huyền.
- Các góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ là hai góc nhọn của tam giác.



Nhận xét. Như vậy, nếu $\triangle ABC$ vuông tại A ta sẽ nhận được $\widehat{A} = 90^\circ$. Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 90^\circ \\ &\Leftrightarrow \widehat{B} \text{ và } \widehat{C} \text{ phụ nhau.}\end{aligned}$$

Vậy, ta có kết quả “Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau”.

3. Góc ngoài của tam giác

Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.

Nhận xét. — Ta có:

$$\widehat{xAB} + \widehat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{xAB} = 180^\circ - \widehat{A}.$$

Mặt khác, ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}.$$

Từ đó, suy ra:

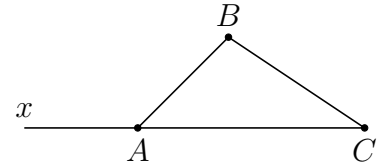
$$\widehat{xAB} = 180^\circ - (180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}) = \widehat{B} + \widehat{C}.$$

Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

— Ta có:

$$\widehat{xAB} = \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{xAB} > \widehat{B} \text{ và } \widehat{xAB} > \widehat{C}.$$

Từ đây, ta thu được nhận xét quan trọng “Góc ngoài của một tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó”



4. Cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc

Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì chúng bằng nhau hoặc bù nhau, cụ thể:

- ❶ Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.
- ❷ Chúng bù nhau nếu góc này nhọn và góc kia tù.
- ❸ Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

📁 DẠNG 1. Giải bài toán định lượng

Phương pháp giải: Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° .

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$. Tính $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC , ta nhận thấy ngay: $\widehat{B} = \widehat{A_1}$,

vì so le trong.

$\widehat{C} = \widehat{A_3}$, vì so le trong.

Khi đó:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 180^\circ.$$

Nhận xét. Như vậy, để tính được tổng của ba góc trong một tam giác chúng ta đã lược chọn cách chuyển chúng về các góc cùng đỉnh (trong lời giải này chúng ta lựa chọn đỉnh A). Các em học sinh hãy sử dụng đỉnh B, C để tìm lại kết quả trên.

□

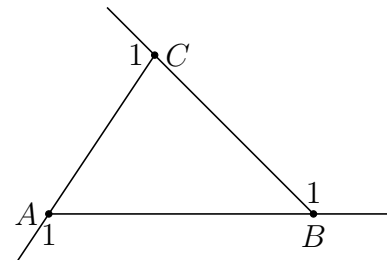
VÍ DỤ 2. Tính tổng ba góc ngoài của một tam giác.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $\widehat{A}_1$, $\widehat{B}_1$, $\widehat{C}_1$ theo thứ tự là ba góc ngoài của các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ của $\triangle ABC$. Ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

$$\widehat{A}_1 = 180^\circ - \widehat{A}, \widehat{B}_1 = 180^\circ - \widehat{B}, \widehat{C}_1 = 180^\circ - \widehat{C}$$



suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 &= (180^\circ - \widehat{A}) + (180^\circ - \widehat{B}) + (180^\circ - \widehat{C}) \\ &= 540^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ, \text{ điều phải chứng minh} \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$, biết $\widehat{A} = 45^\circ$ và $\widehat{B} = 80^\circ$. Tính số đo của góc $\widehat{C}$.

✎ LỜI GIẢI.

Ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 45^\circ - 80^\circ = 55^\circ.$$

Vậy, ta có $\widehat{C} = 55^\circ$.

□

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$. Tính $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

✎ LỜI GIẢI.

Từ giả thiết:

$$\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 10^\circ + \widehat{C}.$$

Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 10^\circ + \widehat{C} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{C} = 110^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 55^\circ.$$

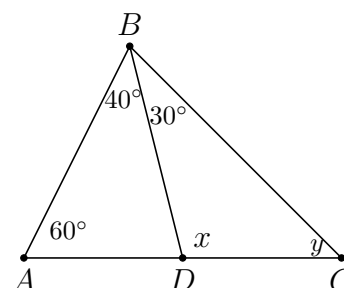
Khi đó: $\widehat{B} = 10^\circ + \widehat{C} = 10^\circ + 55^\circ = 65^\circ$.

Vậy, ta tìm được $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 55^\circ$.

□

VÍ DỤ 5.

Tính số đo x và y ở hình vẽ bên.



✎ LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABD$, ta có:

$$x = \widehat{CDB} = \widehat{A} + \widehat{ABD} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ.$$

Trong $\triangle BCD$, ta có:

$$\widehat{C} + \widehat{CDB} + \widehat{CBD} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow y = \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{CDB} - \widehat{CBD} = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ.$$

Vậy, ta được $x = 100^\circ$ và $y = 50^\circ$.

Nhận xét. Như vậy, ta có:

$$\widehat{xAB} = \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{xAB} > \widehat{B} \text{ và } \widehat{xAB} > \widehat{C}.$$

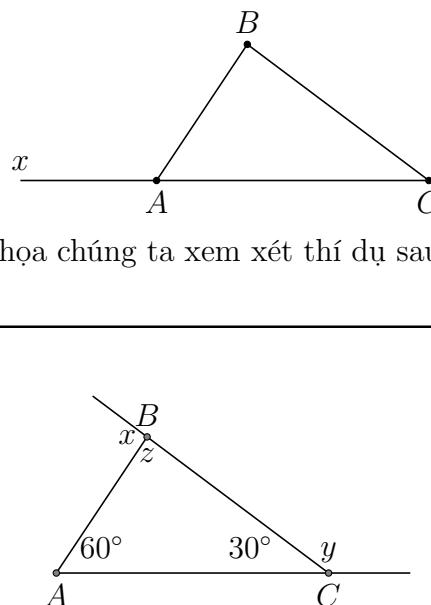
“Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó”

. Kết quả này sẽ có ích trong các bài toán so sánh góc, để minh họa chúng ta xem xét thí dụ sau:

□

VÍ DỤ 6.

Tính số đo x , y và z ở hình vẽ bên



✎ LỜI GIẢI.

Ta có ngay:

$$x = \widehat{A} + \widehat{C} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

$$y + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow y = 180^\circ - \widehat{C} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

$$z = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Vậy, ta được $x = 90^\circ$, $y = 150^\circ$ và $z = 90^\circ$.

□

VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D . Tính số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$.

✎ LỜI GIẢI.

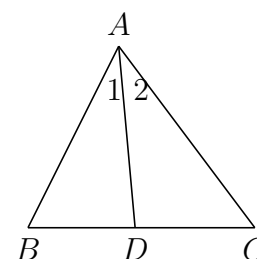
Ta có: $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$.

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2}\widehat{A} = 35^\circ.$$

Trong $\triangle ACD$, ta có:

$$\widehat{ADB} = \widehat{A_2} + \widehat{C} = 35^\circ + 30^\circ = 65^\circ.$$

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$



Vậy ta nhận được $\widehat{A} = 70^\circ$, $\widehat{ADB} = 65^\circ$, $\widehat{ADC} = 115^\circ$.

□

VÍ DỤ 8. Cho $\triangle ABC$ có số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 3, 5. Tính số đo các góc của $\triangle ABC$.

✎ LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABC$, ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{5} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{5} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1 + 3 + 5} = \frac{180}{9} = 20.$$

Từ đó, suy ra:

$$\widehat{A} = 20^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 100^\circ.$$

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\widehat{A} = 20^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 100^\circ$. □

VÍ DỤ 9. Cho $\triangle ABC$, điểm M nằm trong tam giác đó. Tia AM cắt BC tại K . Hãy so sánh các góc:

a) $\widehat{CMK}$ với $\widehat{CAK}$.

b) $\widehat{CMB}$ với $\widehat{CAB}$.

LỜI GIẢI.

- ❶ Xét $\triangle AMC$, có $\widehat{CMK}$ là góc ngoài đỉnh C nên:

$$\widehat{CMK} = \widehat{CAK} + \widehat{ACM} > \widehat{CAK}.$$

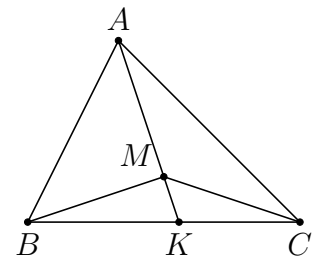
Vậy, ta luôn có $\widehat{CMK} > \widehat{CAK}$. (1)

- ❷ Tương tự, ta cũng có $\widehat{BMK} > \widehat{BAK}$. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$\widehat{CMK} + \widehat{BMK} > \widehat{CAK} + \widehat{BAK} \Leftrightarrow \widehat{CMB} > \widehat{CAB}.$$

Vậy, ta luôn có $\widehat{CMB} > \widehat{CAB}$.



⚠️ ❶ Với cách trình bày như trên chúng ta sẽ thực hiện được bài toán “Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi M là một điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng góc $\widehat{BMC}$ là góc tù”.

- ❷ Ta thấy, với mỗi đỉnh của tam giác ta có được hai góc (góc trong và góc ngoài), từ đó ta cũng sẽ có được hai đường phân giác tương ứng (phân giác trong và phân giác ngoài). Vấn đề đặt ra là hai đường phân giác này có mối liên hệ với nhau như thế nào?

□

1. Giải bài toán định tính

VÍ DỤ 10. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Qua B kẻ đường thẳng a song song với AC , qua C kẻ đường thẳng b song song với AB . Giả sử a, b cắt nhau tại D . Chứng minh rằng $\triangle BCD$ vuông.

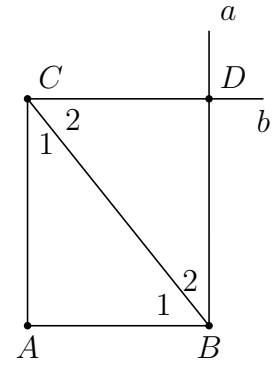
LỜI GIẢI.

Ta lần lượt có:

- Vì $BD \parallel AC$ nên $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_1$.
- Vì $CD \parallel AB$ nên $\widehat{C}_2 = \widehat{B}_1$.
- Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên:

$$90^\circ = \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 + \widehat{B}_2$$

$$\Leftrightarrow \triangle BCD \text{ vuông tại } D.$$



□

VÍ DỤ 11. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng hai tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ vuông góc với nhau.

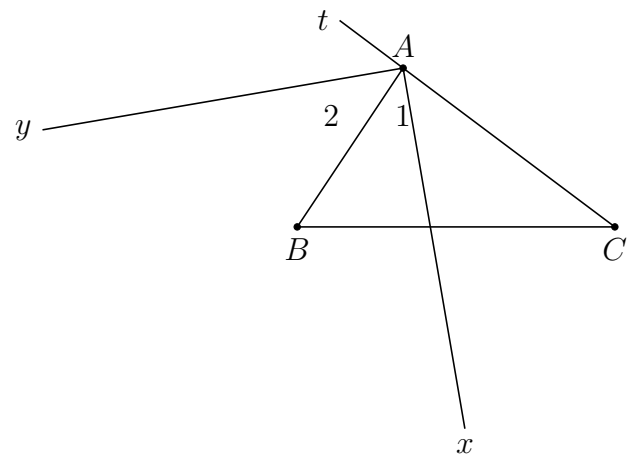
LỜI GIẢI.

Gọi Ax , Ay theo thứ tự là các tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$, ta phải đi chứng minh $Ax \perp Ay$, tức là chứng minh $\widehat{xAy} = 90^\circ$.

Thật vậy, ta có: $\widehat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, $\widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BAx}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} \widehat{xAy} &= \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{BAx} \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{BAx}) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ \\ &= 90^\circ, \text{ điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$



⚠ Kể từ đây, chúng ta được phép sử dụng kết quả này vào các bài tập khác.

□

VÍ DỤ 12. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ BH vuông góc với AC ($H \in AC$), vẽ CK vuông góc với AB ($K \in AB$). Chứng minh rằng $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.

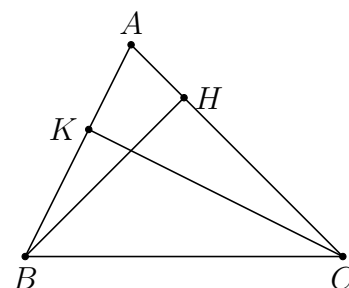
LỜI GIẢI.

Ta lần lượt có:

$$\text{— Vì } \triangle ABH \text{ vuông tại } H \text{ nên: } \widehat{ABH} = 90^\circ - \widehat{A}. \quad (1)$$

$$\text{— Vì } \triangle ACK \text{ vuông tại } K \text{ nên: } \widehat{ACK} = 90^\circ - \widehat{A}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$, điều phải chứng minh.



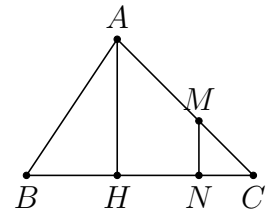
□

VÍ DỤ 13. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Lấy điểm M bất kì trên cạnh AC , vẽ MN vuông góc với BC ($N \in BC$).

a) Tìm góc bằng góc $\widehat{B}$.b) Tìm góc bằng góc $\widehat{C}$.c) Tìm góc bù với góc $\widehat{B}$.**LỜI GIẢI.****①**

Ta có: $BA \perp AC < BC \perp AH$. Các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{CAH}$ đều nhọn suy ra $\widehat{B} = \widehat{CAH}$. Ta có:

$$\begin{cases} MN \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AH \Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{CAH} = \widehat{B}.$$

**②** Tương tự câu a), ta có ngay $\widehat{C} = \widehat{BAH}$.**③** Ta có: $BA \perp MA$, $BC \perp MN$.Góc $\widehat{B}$ nhọn còn góc $\widehat{AMN}$ tù suy ra $\widehat{B} + \widehat{AMN} = 180^\circ$.

Nhận xét. Ở đây, cũng có thể sử dụng góc có cạnh tương ứng vuông góc để kết luận $\widehat{NMC} = \widehat{B}$. Việc trình bày lời giải như trên chỉ với mục đích giúp các em học sinh ôn lại kiến thức về mối quan hệ giữa tính song song và vuông góc.

□

VÍ DỤ 14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC. Các tia phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{BAH}$ cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = 90^\circ$.

LỜI GIẢI.

Theo tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc, ta có:

$$\widehat{BAH} = \widehat{C}, \widehat{CAH} = \widehat{B}.$$

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}, \widehat{BAI} = \widehat{HAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAH} = \frac{1}{2}\widehat{C}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{AIC} &= 180^\circ - \widehat{IAC} - \widehat{C}_2 = 180^\circ - (\widehat{IAH} + \widehat{CAH}) - \widehat{C}_2 \\ &= 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\widehat{C} + \widehat{B}\right) - \frac{1}{2}\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 15. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Vẽ đường phân giác BD, giả sử $\widehat{ADB} = \alpha$.

① Chứng minh rằng $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.**②** Tính theo α số đo của góc $\widehat{C}$.**LỜI GIẢI.**

①

Trong $\triangle ABD$ vuông tại A , ta có:

$$\widehat{ADB} < 90^\circ \Leftrightarrow \alpha < 90^\circ. \quad (1)$$

$$\widehat{ADB} = 90^\circ - \widehat{B}_2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B}. \quad (*)$$

Trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\widehat{B} < 90^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\widehat{B} < 45^\circ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\widehat{B} > -45^\circ \Leftrightarrow 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B} > 90^\circ - 45^\circ$$

$$\widehat{ADB} > 45^\circ \Leftrightarrow \alpha > 45^\circ. \quad (2)$$

Từ (1), (2), ta được $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, điều phải chứng minh.

② Ta có: $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}. \quad (3)$

Từ (*), suy ra $\widehat{B} = 180^\circ - 2\alpha. \quad (4)$

Thay (4) vào (3), ta được: $\widehat{C} = 90^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha - 90^\circ$.

Nhận xét. Để tránh được việc phải sử dụng các biến đổi dạng bất đẳng thức, chúng ta có thể chứng minh $\alpha > 45^\circ$ bằng phương pháp giả sử phản chứng như sau:

Giả sử trái lại: $\alpha < 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{ADB} < 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{B}_2 > 45^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{B}_2 > 2 \cdot 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} > 90^\circ$, mâu thuẫn.

□

VÍ DỤ 16. Cho $\triangle ABC$. Đường phân giác của góc $\widehat{B}$ và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{C}$ cắt nhau tại M . Đường phân giác của góc $\widehat{C}$ và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{B}$ cắt nhau tại N . Chứng minh rằng:

$$\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{A}.$$

🔗 LỜI GIẢI.

Dựa trên tính chất hai đường phân giác ta có ngay:

$$\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{B}, \widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{C},$$

$$\widehat{OCM} = 90^\circ, \widehat{OBN} = 90^\circ.$$

Vì $\widehat{O}_1$ là một góc ngoài của $\triangle OBC$ nên:

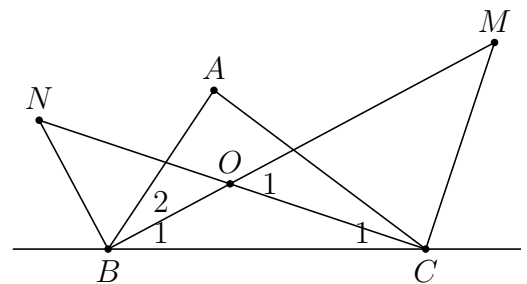
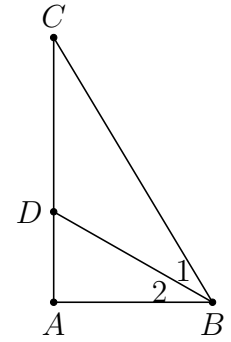
$$\widehat{O}_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{A}.$$

Trong $\triangle CMO$ vuông tại C , ta có:

$$\widehat{BMC} = \widehat{OMC} = 90^\circ - \widehat{O}_1 = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{A}\right) = \frac{1}{2}\widehat{A}.$$

Trong $\triangle BNO$ vuông tại B , ta có:

$$\widehat{BNC} = \widehat{BNO} = 90^\circ - \widehat{O}_2 = 90^\circ - \widehat{O}_1 = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{A}\right) = \frac{1}{2}\widehat{A}.$$

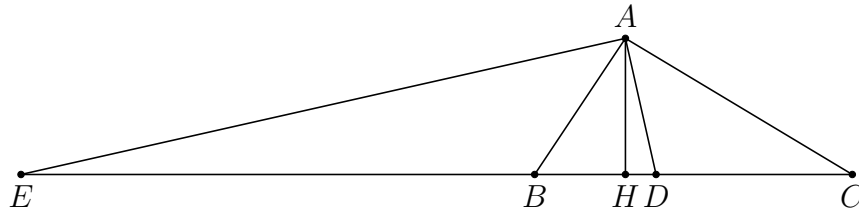


Vậy, ta được $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{A}$. □

VÍ DỤ 17. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Gọi AD , AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc A (D , E thuộc đường thẳng BC).

- ❶ Chứng minh rằng $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C}$.
- ❷ Kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng: $\widehat{AEB} = \widehat{HAD} = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$.
- ❸ Tính số đo của các góc $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$ và $\widehat{HAD}$, biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 40^\circ$.

✎ LỜI GIẢI.



- ❶ Vì AD là tia phân giác góc $\widehat{A}$ nên: $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{A}$.

Vì các góc $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ADB}$ theo thứ tự là các góc ngoài của $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ nên:

$$\widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{BAD}; \quad \widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{CAD}.$$

suy ra: $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} + \widehat{BAD} - \widehat{C} - \widehat{CAD} = \widehat{B} - \widehat{C}$, điều phải chứng minh.

- ❷ Trước tiên ta có: $\widehat{AEB} = \widehat{HAD}$, vì hai góc có cạnh tương ứng vuông góc.

Ta có: $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADB}$. (*)

Thay (*) vào kết quả câu a), ta được:

$$\begin{aligned} (180^\circ - \widehat{ADB}) - \widehat{ADB} &= \widehat{B} - \widehat{C} \Leftrightarrow 2\widehat{ADB} = 180^\circ - (\widehat{B} - \widehat{C}) \\ \Leftrightarrow \widehat{ADB} &= 90 - \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C}) \end{aligned}$$

Trong $\triangle HAD$ vuông tại H ta lại có:

$$\begin{aligned} \widehat{HAD} &= 90^\circ - \widehat{ADH} = 90^\circ - \widehat{ADB} = 90^\circ - \left[90^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C}) \right] \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C}). \end{aligned}$$

Vậy, ta được $\widehat{AEB} = \widehat{HAD} = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$.

- ❸ Theo giả thiết, ta có: $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = 40^\circ$. (1)

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$. (2)

Từ (1), (2), suy ra: $\widehat{ADB} = 70^\circ$, $\widehat{ADC} = 110^\circ$.

Trong $\triangle HAD$ vuông tại H , ta có:

$$\widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH} = 90^\circ - \widehat{ADB} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ.$$

□

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$. Tính số đo của góc $\widehat{C}$, biết:

a) $\widehat{A} = 45^\circ$ và $\widehat{B} = 85^\circ$.

b) $\widehat{A} = 40^\circ$ và $\widehat{B} = 30^\circ$.

c) $\widehat{A} = \widehat{B} = 39^\circ$.

d) $\widehat{A} = 36^\circ$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$.

 **LỜI GIẢI.**

① $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 50^\circ$.

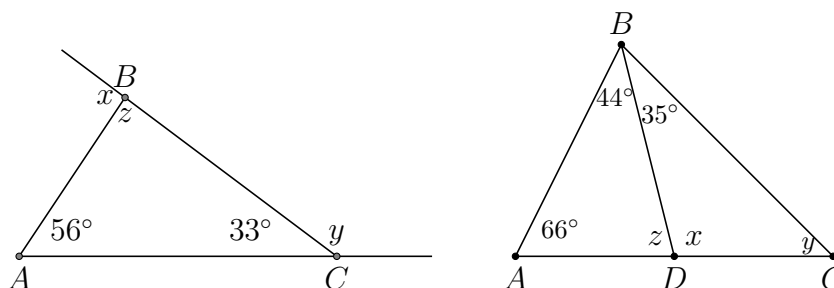
② $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 110^\circ$.

③ $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 102^\circ$.

④ $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 72^\circ$.

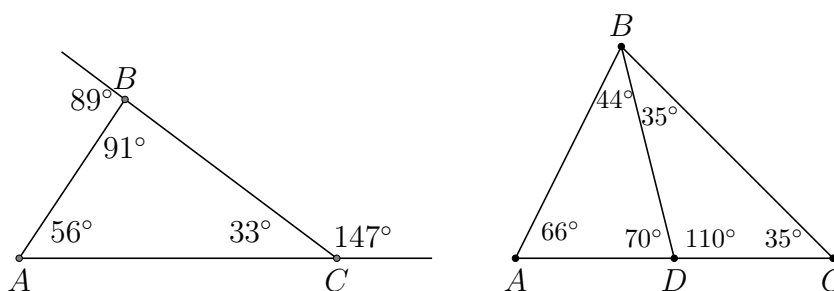
□

BÀI 2. Tìm số đo x, y, z ở các hình vẽ bên.



 **LỜI GIẢI.**

Dựa vào hình vẽ, ta có số đo x, y, z ở các hình vẽ lần lượt như sau



□

BÀI 3. Tính các góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ của $\triangle ABC$, biết:

a) $\widehat{A} = 80^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$.

b) $\widehat{A} = 100^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$.

c) $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 60^\circ$.

d) $\widehat{A} = 40^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$.

 **LỜI GIẢI.**

① Từ giả thiết: $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 20^\circ + \widehat{C}$.

Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \widehat{C} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{C} = 80^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 40^\circ.$$

Khi đó: $\widehat{B} = 20^\circ + \widehat{C} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

Vậy, ta tìm được $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

- ② Từ giả thiết: $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 20^\circ + \widehat{C}$.

Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + 20^\circ + \widehat{C} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{C} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 30^\circ.$$

Khi đó: $\widehat{B} = 20^\circ + \widehat{C} = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$.

Vậy, ta tìm được $\widehat{B} = 50^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$.

- ③ Từ giả thiết: $\widehat{B} - \widehat{C} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 60^\circ + \widehat{C}$.

Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + \widehat{C} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{C} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 30^\circ.$$

Khi đó: $\widehat{B} = 60^\circ + \widehat{C} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

Vậy, ta tìm được $\widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$.

- ④ Từ giả thiết: $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 30^\circ + \widehat{C}$.

Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 30^\circ + \widehat{C} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{C} = 110^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 55^\circ.$$

Khi đó: $\widehat{B} = 30^\circ + \widehat{C} = 30^\circ + 55^\circ = 85^\circ$.

Vậy, ta tìm được $\widehat{B} = 85^\circ$, $\widehat{C} = 55^\circ$.

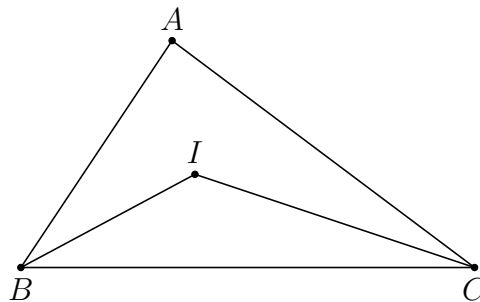
□

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$. Hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I . Tính số đo góc $\widehat{BIC}$, biết:

a) $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

b) $\widehat{A} = 100^\circ$.

✎ **LỜI GIẢI.**



- ① Ta có $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{C} = 20^\circ$.

Vậy $\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 120^\circ$.

- ② Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 80^\circ$.

Suy ra $\frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 40^\circ$.

Ta có $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{B}$; $\widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{C}$. Khi đó

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Vậy $\widehat{BIC} = 140^\circ$.

□

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D . Tính số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$, biết:

a) $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 44^\circ$.

b) $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$.

c) $\widehat{B} = 50^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$.

LỜI GIẢI.

①

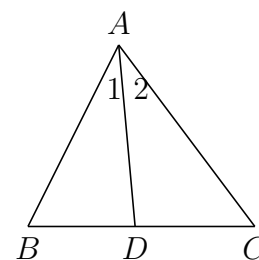
Ta có: $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 80^\circ - 44^\circ = 56^\circ$; $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{A} = 28^\circ$.

Trong $\triangle ACD$, ta có:

$$\widehat{ADB} = \widehat{A}_2 + \widehat{C} = 28^\circ + 44^\circ = 72^\circ.$$

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Vậy ta nhận được $\widehat{A} = 56^\circ$, $\widehat{ADB} = 72^\circ$, $\widehat{ADC} = 108^\circ$.



②

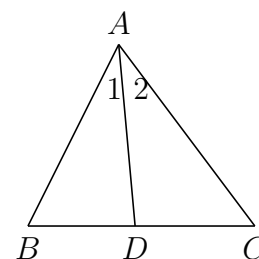
Ta có: $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$; $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{A} = 35^\circ$.

Trong $\triangle ACD$, ta có:

$$\widehat{ADB} = \widehat{A}_2 + \widehat{C} = 35^\circ + 30^\circ = 65^\circ.$$

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

Vậy ta nhận được $\widehat{A} = 70^\circ$, $\widehat{ADB} = 65^\circ$, $\widehat{ADC} = 115^\circ$.



③ Ta có $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$; $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{A} = 35^\circ$. Trong $\triangle ACD$, ta có:

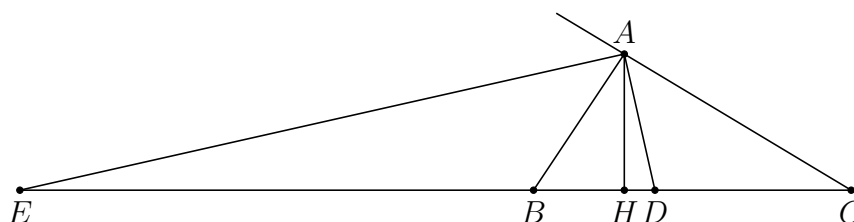
$$\widehat{ADB} = \widehat{A}_2 + \widehat{C} = 35^\circ + 60^\circ = 95^\circ.$$

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ.$$

Vậy ta nhận được $\widehat{A} = 70^\circ$, $\widehat{ADB} = 95^\circ$, $\widehat{ADC} = 85^\circ$.

□

BÀI 6. Điền số đo các góc vào hình vẽ sau, biết $\widehat{BAD} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, AD , AE theo thứ tự là đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$.



LỜI GIẢI.

Theo giả thiết, ta có: $\widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{BAD} - \widehat{ABC} = 75^\circ$ suy ra $\widehat{ADC} = 105^\circ$.

Khi đó $\widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{ADC} - \widehat{DAC} = 30^\circ$.

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{EAB} + \widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAB} = 45^\circ$. Suy ra: $\widehat{AEB} = 180^\circ - \widehat{EAD} - \widehat{ADE} = 15^\circ$,

Trong $\triangle HAD$ vuông tại H , ta có:

$$\widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH} = 90^\circ - \widehat{ADB} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

□

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 4, 7. Tính số đo các góc của $\triangle ABC$.

LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABC$, ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{7} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{7} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1 + 4 + 7} = \frac{180}{12} = 15^\circ.$$

Từ đó, suy ra: $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 105^\circ$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 105^\circ$.

□

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 3, 5, 7. Tính số đo các góc của $\triangle ABC$.

LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABC$, ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{7} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{7} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{3 + 5 + 7} = \frac{180}{15} = 12^\circ.$$

Từ đó, suy ra: $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 84^\circ$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 84^\circ$.

□

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 2, 3. Tính số đo các góc của $\triangle ABC$ và khi đó có kết luận gì về $\triangle ABC$?

LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABC$, ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1 + 2 + 3} = \frac{180}{6} = 30^\circ.$$

Từ đó, suy ra: $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 90^\circ$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 90^\circ$.

Như vậy, ta thấy $\triangle ABC$ vuông tại C .

□

BÀI 10. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi M là một điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng $\widehat{BMC}$ là góc tù.

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle AMC$, có $\widehat{CMK}$ là góc ngoài đỉnh C nên:

$$\widehat{CMK} = \widehat{CAK} + \widehat{ACM} > \widehat{CAK}.$$

Vậy, ta luôn có $\widehat{CMK} > \widehat{CAK}$. (1)

Tương tự, ta cũng có $\widehat{BMK} > \widehat{BAK}$. (2)

Cộng theo vế (1), (2) ta được:

$$\widehat{CMK} + \widehat{BMK} > \widehat{CAK} + \widehat{BAK} \Leftrightarrow \widehat{CMB} > \widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{BMK} > 90^\circ.$$

Vậy, góc $\widehat{CMB}$ là góc tù.

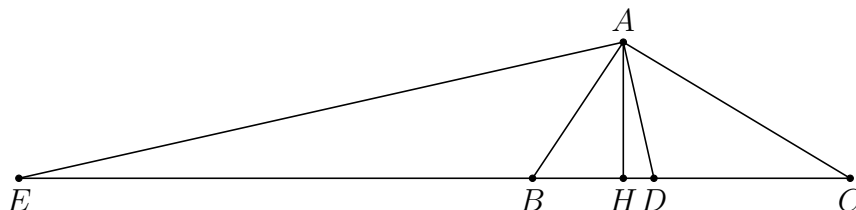
□

BÀI 11. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$. Gọi AD , AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ (D , E thuộc đường thẳng BC).

① Tính số đo của các góc $\widehat{ADC}$, $\widehat{ADB}$.

② Kẻ đường cao AH . Tính số đo của các góc $\widehat{AEB}$, $\widehat{HAD}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Theo giả thiết, ta có: $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. (1)

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$. (2)

Từ (1), (2), suy ra: $\widehat{ADB} = 80^\circ$, $\widehat{ADC} = 100^\circ$.

Trong $\triangle HAD$ vuông tại H , ta có:

$$\widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH} = 90^\circ - \widehat{ADB} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ.$$

Trong $\triangle AED$ vuông tại A , ta có:

$$\widehat{AEB} = 90^\circ - \widehat{ADE} = 90^\circ - \widehat{ADB} = 10^\circ.$$

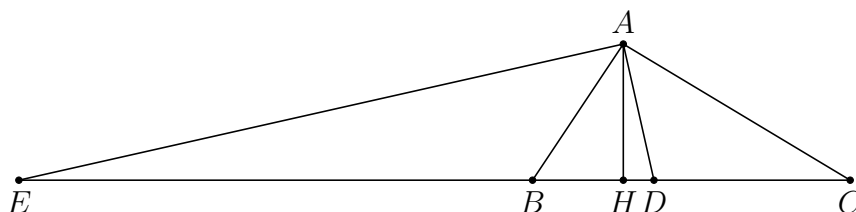
□

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$. Gọi AD , AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ (D , E thuộc đường thẳng BC).

① Tính số đo của các góc $\widehat{ADC}$, $\widehat{ADB}$.

② Kẻ đường cao AH . Tính số đo của các góc $\widehat{AEB}$, $\widehat{HAD}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Theo giả thiết, ta có: $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$. (1)

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$. (2)

Từ (1), (2), suy ra: $\widehat{ADB} = 75^\circ$, $\widehat{ADC} = 105^\circ$.

Trong $\triangle HAD$ vuông tại H , ta có:

$$\widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH} = 90^\circ - \widehat{ADB} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

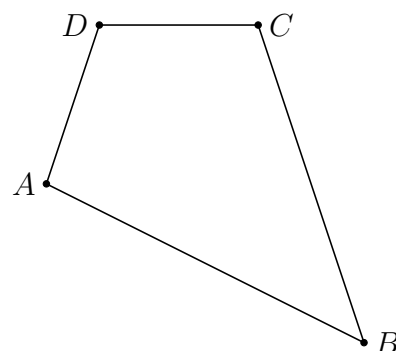
Trong $\triangle AED$ vuông tại A , ta có:

$$\widehat{AEB} = 90^\circ - \widehat{ADE} = 90^\circ - \widehat{ADB} = 15^\circ.$$

□

BÀI 13.

Chứng minh rằng $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$, với các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ được cho trong hình vẽ.



LỜI GIẢI.

Nối AC , ta lần lượt xét các $\triangle ABC$, $\triangle ADC$.

— Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{A}_2 + \widehat{B} + \widehat{C}_2 = 180^\circ. \quad (1)$$

— Trong $\triangle ADC$, ta có:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{D} + \widehat{C}_1 = 180^\circ. \quad (2)$$

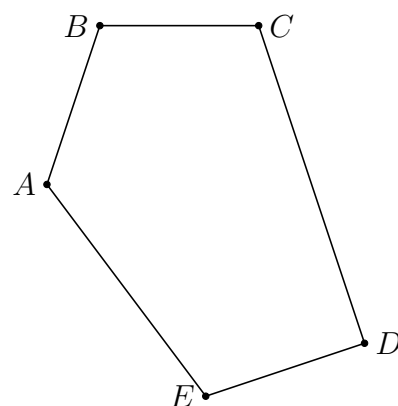
Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$\begin{aligned} (\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) + \widehat{B} + \widehat{D} + (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2) &= 180^\circ + 180^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} &= 360^\circ, \text{ điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

□

BÀI 14.

Xác định $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E}$, với các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ được cho trong hình vẽ.



LỜI GIẢI.

Nối AC , AD , ta lần lượt xét các $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$.

— Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B} + \widehat{C}_1 = 180^\circ. \quad (1)$$

— Trong $\triangle ACD$, ta có:

$$\widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 + \widehat{D}_2 = 180^\circ. \quad (2)$$

— Trong $\triangle ADE$, ta có:

$$\widehat{A}_3 + \widehat{D}_1 + \widehat{E} = 180^\circ. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

$$(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3) + \widehat{B} + (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2) + (\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2) + \widehat{E} = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} = 540^\circ, \text{ điều phải chứng minh.}$$

□

BÀI 15. Chứng minh rằng với một tam giác bất kì, bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài nhỏ hơn 120° .

LỜI GIẢI.

Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.

Giả sử trái lại, tất cả các góc ngoài $\widehat{A}_1$, $\widehat{B}_1$, $\widehat{C}_1$ của $\triangle ABC$ đều lớn hơn 120° , tức là:

$$\widehat{A}_1 > 120^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{A} > 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} < 60^\circ, \quad (1)$$

$$\widehat{B}_1 > 120^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{B} > 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} < 60^\circ, \quad (2)$$

$$\widehat{C}_1 > 120^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{C} > 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} < 60^\circ, \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ, \text{ mâu thuẫn.}$$

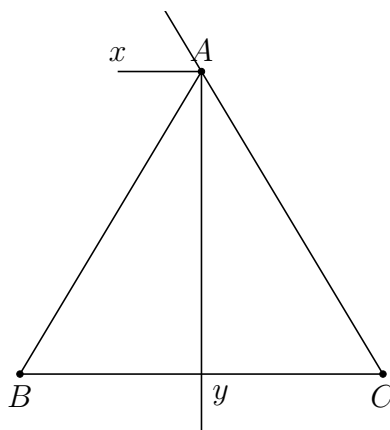
Vậy, với một tam giác bất kì, bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài nhỏ hơn 120° .

□

BÀI 16. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ$. Gọi Ax là tia phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel BC$.

LỜI GIẢI.

Học sinh tự làm dựa trên hai góc so le trong bằng nhau



Gọi Ay là tia phân giác trong của góc $\widehat{A}$. Ta có $\widehat{BAy} = \frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}) = 40^\circ$.

Ta có $\widehat{xAB} = 90^\circ - \widehat{BAy} = 50^\circ$. Do đó $\widehat{xAB} = \widehat{ABC}$ ở vị trí so le trong suy ra $Ax \parallel BC$. $\square$

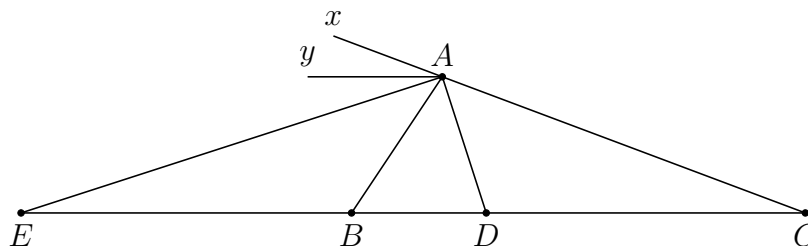
BÀI 17. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 3\widehat{C}$. Vẽ tia Ax là tia đối của tia AC . Phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ cắt BC tại E . Vẽ tia phân giác Ay của góc $\widehat{EAx}$. Chứng minh rằng:

① $\triangle AEC$ là tam giác cân.

② $Ay \parallel BE$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Sử dụng kết quả trong phần các ví dụ minh họa.



① Ta có $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C} = 2\widehat{C}$.

Lại có $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$.

Do đó $\widehat{ADC} = 90^\circ + \widehat{C}$ suy ra $\widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 90^\circ - \widehat{C}$.

Mà $\widehat{AED} = 90^\circ - \widehat{ADE} = \widehat{C}$. Vậy tam giác AEC là tam giác cân tại A.

② Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ - \widehat{C}$, nên $\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{ADB} = 90^\circ - 2\widehat{C}$.

Suy ra $\widehat{EAB} = 90^\circ - \widehat{ADB} = 2\widehat{C}$.

Ta có $\widehat{EAC} = 180^\circ - 2\widehat{AEC} - \widehat{C} = 180^\circ - 2\widehat{C}$ suy ra $\widehat{yAE} = \frac{1}{2}\widehat{xAE} = \widehat{C}$.

Vậy $\widehat{yAB} = 3\widehat{C} = \widehat{B}$. Do đó $Ay \parallel BE$.

$\square$

BÀI 2 HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

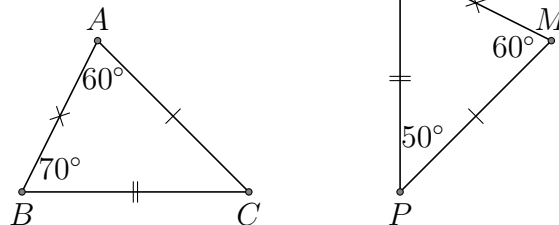
Nếu có $\triangle ABC$ bằng $\triangle A_1B_1C_1$ ta kí hiệu $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Như vậy $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, CA = C_1A_1 \\ \widehat{A_1} = \widehat{A}, \widehat{B_1} = \widehat{B}, \widehat{C_1} = \widehat{C}. \end{cases}$

⚠ Khi viết $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ chúng ta cần hiểu ở đó có sự tương ứng giữa các đỉnh của hai tam giác với nhau, tức là không thể viết lại kí hiệu trên dưới dạng $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ và nếu muốn đảo đỉnh thì cần đảo cả hai vế của dấu bằng $\triangle BAC = \triangle B_1A_1C_1$.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Hai tam giác trong các hình sau có bằng nhau không? Nếu có, hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



✎ LỜI GIẢI.

Theo hình vẽ

- Trong $\triangle ABC$, ta suy ra $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$.
- Trong $\triangle MNP$ ta suy ra $\widehat{N} = 180^\circ - \widehat{M} - \widehat{P} = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$.

Khi đó, với $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ ta có

- $AB = MN, BC = NP, CA = PM$ các cạnh bằng nhau.
- $\widehat{A} = \widehat{M}, \widehat{B} = \widehat{N}, \widehat{C} = \widehat{P}$ các góc bằng nhau

Suy ra $\triangle ABC = \triangle MNP$. □

Nhận xét. Qua ví dụ trên, ta thấy ngay được việc có thể giảm bớt một yếu tố giả thiết về góc mà hai tam giác vẫn bằng nhau. Điều này chính là lí do để chúng ta cần thiết đi xem xét “Có bao nhiêu trường hợp bằng nhau của hai tam giác”.

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC = \triangle HIK$.

- ① Tìm cạnh tương ứng với cạnh BC . Tìm góc tương ứng với góc H .
- ② Tìm các cạnh bằng nhau, tìm các góc bằng nhau.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Ta có
 - Cạnh tương ứng với cạnh BC là cạnh IK .
 - Góc tương ứng với góc H là góc A .
- ② Vì $\triangle ABC = \triangle HIK$ suy ra $AB = HI$, $BC = IK$, $AC = HK$, $\widehat{A} = \widehat{H}$, $\widehat{B} = \widehat{I}$, $\widehat{C} = \widehat{K}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC = \triangle HIK$ trong đó $AB = 2$ cm, $\widehat{B} = 40^\circ$, $BC = 4$ cm. Em có thể suy ra được số đo của những cạnh nào, những góc nào của $\triangle HIK$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Từ tính tương ứng ta có ngay $HI = AB = 2$ cm, $\widehat{I} = \widehat{B} = 40^\circ$, $IK = BC = 4$ cm.

□

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$.

- ① Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác.
- ② Biết $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm và $MP = 5$ cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Ta có thể viết $\triangle ACB = \triangle MPN$ hoặc $\triangle BCA = \triangle NPM$.
- ② Từ giả thiết $\triangle ABC = \triangle MNP$
Suy ra $MN = AB = 4$ cm, $NP = BC = 6$ cm và $MP = AC = 5$ cm.

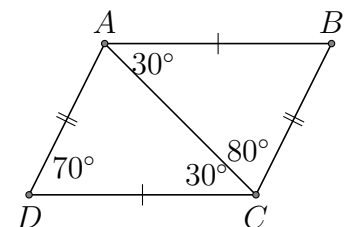
Khi đó chu vi của tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ lần lượt là

- $C_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = 4 + 6 + 5 = 15$ cm.
- $C_{\triangle MNP} = MN + NP + PM = 4 + 6 + 5 = 15$ cm.

□

Nhận xét. Qua ví dụ trên, ta thấy ngay “Hai tam giác bằng nhau sẽ có chu vi bằng nhau”.

VÍ DỤ 5. Cho hình vẽ, chứng tỏ rằng hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ bằng nhau.



✎ **LỜI GIẢI.**

Theo hình vẽ, ta có

- Trong $\triangle ABC$ suy ra $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ$.
- Trong $\triangle ADC$, suy ra $\widehat{DAC} = 180^\circ - \widehat{ACD} - \widehat{D} = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$.

Khi đó với $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$, ta có

- $AB = CD, BC = DA, AC$ chung (các cạnh bằng nhau).
- $\widehat{CAB} = \widehat{ACD}, \widehat{B} = \widehat{D}, \widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ (các góc bằng nhau).

Suy ra $\triangle ABC = \triangle CDA$. □

VÍ DỤ 6. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 80^\circ$. Tính số đo của các góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ biết rằng tam giác $\triangle ABC = \triangle ACB$.

✎ LỜI GIẢI.

Từ giả thiết $\triangle ABC = \triangle ACB \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh).

Mặt khác, ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 50^\circ$.

Vậy $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ$. □

VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết có $\widehat{A} = 80^\circ, \widehat{N} = 75^\circ$. Tính số đo các góc còn lại của tam giác.

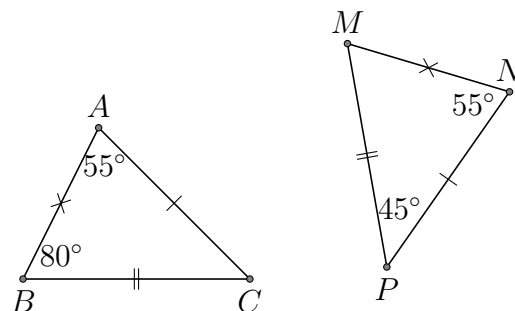
✎ LỜI GIẢI.

Từ giả thiết $\triangle ABC = \triangle MNP$ suy ra

- $\widehat{A} = \widehat{M} = 80^\circ$.
 - $\widehat{B} = \widehat{N} = 75^\circ$.
 - $\widehat{C} = \widehat{P} = 180^\circ - \widehat{M} - \widehat{N} = 180^\circ - 80^\circ - 75^\circ = 25^\circ$.
-

🕒 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

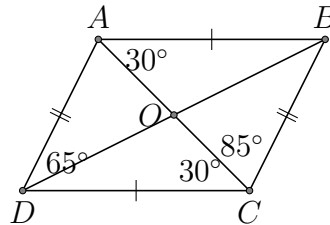
BÀI 1. Hai tam giác trong hình sau có bằng nhau không? Nếu có, hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



✎ LỜI GIẢI.

Ta có $\triangle ABC = \triangle NMP$ vì $\begin{cases} AC = NP, BC = MP, AB = MN \\ \widehat{A} = \widehat{N}, \widehat{B} = \widehat{M}, \widehat{C} = \widehat{P}. \end{cases}$ □

BÀI 2. Hãy chỉ ra các tam giác bằng nhau trong hình sau. Hãy kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.

**LỜI GIẢI.**

Ta có $\triangle ABC = \triangle CDA$ vì $\begin{cases} AB = DC, AD = BC, AC \text{ chung} \\ \widehat{CAB} = \widehat{ACD}, \widehat{ADC} = \widehat{ABC} \end{cases}$

Tương tự $\triangle BAD = \triangle DCB$ vì $\begin{cases} AB = DC, AD = BC, AC \text{ chung} \\ \widehat{DAB} = \widehat{BCD}, \widehat{ABD} = \widehat{CDB} \end{cases}$

□

BÀI 3. Tính các góc của $\triangle ABC$ biết $\triangle ABC = \triangle ACB = \triangle BCA$.

LỜI GIẢI.

Từ giả thiết

— $\triangle ABC = \triangle ACB \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh).

— $\triangle ACB = \triangle BCA \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh).

Mặt khác ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{A} + \widehat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^\circ$.

Vậy $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

□

BÀI 4. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{N} = 60^\circ$. Tính số đo các góc còn lại của mỗi tam giác đó.

LỜI GIẢI.

Từ giả thiết $\triangle ABC = \triangle MNP$ suy ra

— $\widehat{A} = \widehat{M} = 30^\circ$.

— $\widehat{B} = \widehat{N} = 60^\circ$.

— $\widehat{C} = \widehat{P} = 180^\circ - \widehat{M} - \widehat{N} = 90^\circ$.

□

BÀI 5. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$.

① Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác.

② Biết $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm và $MP = 5$ cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

LỜI GIẢI.

① Ta có thể viết $\triangle ACB = \triangle MPN$ hoặc $\triangle BCA = \triangle NPM$.

② Từ giả thiết $\triangle ABC = \triangle MNP$

Suy ra $MN = AB = 3$ cm, $NP = BC = 4$ cm và $MP = AC = 5$ cm.

Khi đó, chu vi của tam giác ABC và tam giác MNP là

— $C_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = 12$ cm.

— $C_{\triangle MNP} = MN + NP + PM = 12$ cm.

□

BÀI 6. Cho $\triangle ABC = \triangle ADC$.

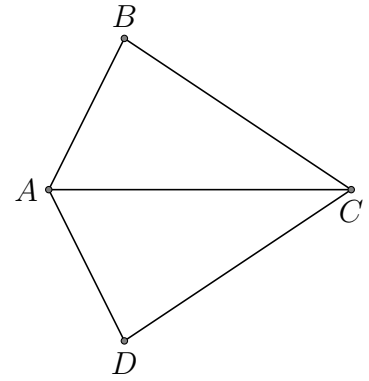
① Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác và thử vẽ hình minh họa.

② Biết $AB = 6$ cm, $DC = 8$ cm và $AC = 10$ cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta có thể viết $\triangle ACB = \triangle ACD$ hoặc $\triangle BCA = \triangle DCA$.

Khi đó, ta có thể minh họa theo hình vẽ



- ② Từ giả thiết $\triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow AB = AD = 6 \text{ cm}$, $BC = DC = 8 \text{ cm}$, $AC = 10 \text{ cm}$.

Khi đó chu vi của tam giác $\triangle ABC = \triangle ADC$ là

$$C_{\triangle ADC} = C_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = 6 + 8 + 10 = 24 \text{ cm}.$$

□

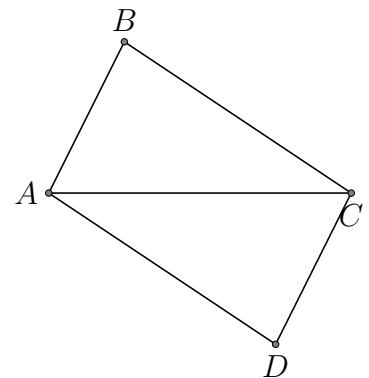
BÀI 7. Cho $\triangle ABC = \triangle CDA$.

- ① Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác và thử vẽ hình minh họa.
 ② Biết $AB = 8 \text{ cm}$, $AD = 15 \text{ cm}$ và $AC = 16 \text{ cm}$. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta có thể viết $\triangle ACB = \triangle CAD$ hoặc $\triangle BCA = \triangle DAC$.

Khi đó, ta có thể minh họa theo hình vẽ



- ② Từ giả thiết $\triangle ABC = \triangle CDA \Rightarrow AB = CD = 8 \text{ cm}$, $AD = BC = 15 \text{ cm}$ và $AC = 16 \text{ cm}$.

Khi đó chu vi của tam giác $\triangle ABC = \triangle ADC$ là

$$C_{\triangle ABC} = C_{\triangle ADC} = AB + BC + CA = 8 + 15 + 16 = 39 \text{ cm}.$$

□

BÀI 3 HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU CẠNH - CẠNH - CẠNH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

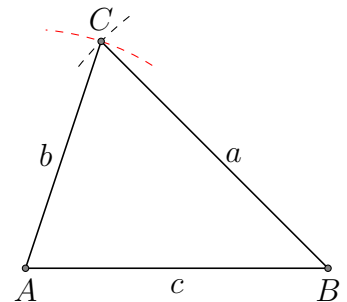
1. Vẽ tam giác biết ba cạnh

Bài toán: Vẽ $\triangle ABC$ biết $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Cách vẽ

Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = c$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A bán kính b , vẽ cung tròn tâm B , bán kính a . Hai cung tròn này cắt nhau ở C .
- Nối AC , BC ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.



2. Trường hợp bằng nhau cạnh – cạnh – cạnh

Định lý 1. Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

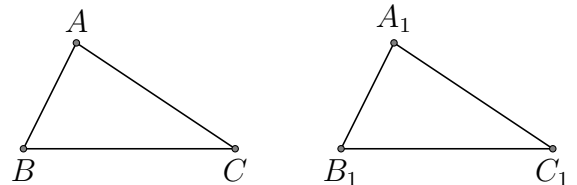
Như vậy, nếu hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ thỏa mãn:

$AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; $CA = C_1A_1$ thì $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

và khi đó ta có ngay: $\widehat{A_1} = \widehat{A}$; $\widehat{B_1} = \widehat{B}$; $\widehat{C_1} = \widehat{C}$

Nhận xét.

- Như vậy, để chứng tỏ hai tam giác bằng nhau chúng ta chỉ cần khẳng định ba cặp cạnh bằng nhau mà không cần phải nêu đủ 6 yếu tố bằng nhau (3 yếu tố cạnh và 3 yếu tố góc).
- Bằng việc khẳng định được sự bằng nhau của hai tam giác chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với việc chứng minh các tính chất trong tam giác.



B CÁC DẠNG TOÁN

☐ DẠNG 1. Chứng minh hai tam giác bằng nhau

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB . Vẽ hai cung tròn tâm A , tâm B bán kính AB , chúng cắt nhau tại C và D . Chứng minh rằng:

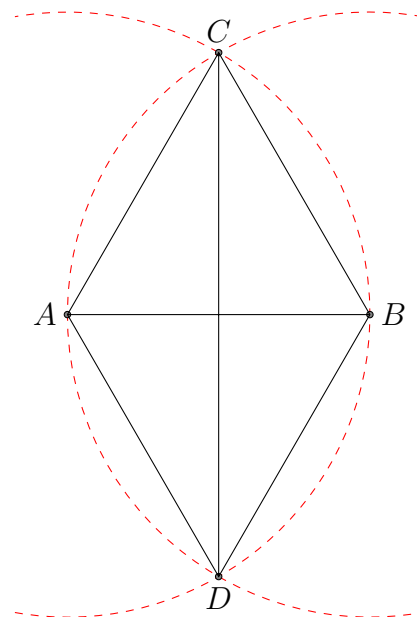
a) $\triangle ABC = \triangle ABD$.

b) $\triangle ACD = \triangle BCD$.

LỜI GIẢI.

Theo cách dựng của giả thiết, ta có: $AB = AC = BC = AD = BD$.

- ① Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ có
- AB là cạnh chung;
 - $AC = AB$ (cmt);
 - $BC = BD$ (cmt).
- $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABD$ (c-c-c).
- ② Xét $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ có
- CD là cạnh chung;
 - $AC = BC$ (cmt);
 - $AD = BD$ (cmt).
- $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$ (c-c-c).

**Nhận xét.**

- Như vậy, để chứng tỏ hai tam giác bằng nhau chúng ta chỉ cần khẳng định ba cặp cạnh bằng nhau mà không cần phải nêu ra đủ 6 yếu tố bằng nhau nữa (3 yếu tố cạnh và 3 yếu tố góc).
- Bằng việc khẳng định được sự bằng nhau của hai tam giác chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với việc chứng minh các tính chất trong tam giác, các ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

□

DẠNG 2. Sử dụng hai tam giác bằng nhau để giải toán

Phương pháp giải:

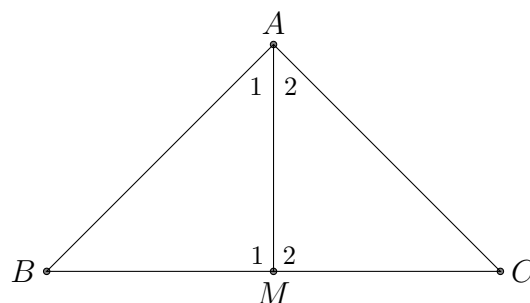
VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng AM là đường trung trực của BC .

LỜI GIẢI.

Để chứng minh AM là đường trung trực của BC , ta chỉ cần chứng minh $AH \perp BC$.

Xét hai tam giác $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$, ta có:

- $AB = AC$ (giả thiết);
- $BM = CM$ (vì M là trung điểm của BC);
- AM chung.



Suy ra: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Mặt khác, ta lại có:

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{M}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{M}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{M}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow AH \perp BC.$$

Vậy AM là đường trung trực của BC .

Nhận xét.

- Cũng từ kết quả $\triangle ABM = \triangle ACM$, ta suy ra được: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow AM$ là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.
- Như vậy, trong $\triangle ABC$ có $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A) thì AM vừa là trung tuyến, vừa là đường cao, vừa là đường trung trực, vừa là đường phân giác – Đây chính là tính chất cơ bản của tam giác cân.

□

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$. Vẽ cung tròn tâm A bán kính BC , vẽ cung tròn tâm C bán kính BA , chúng cắt nhau tại D (D và B nằm khác phía đối với AC). Chứng minh rằng $AD \parallel BC$.

LỜI GIẢI.

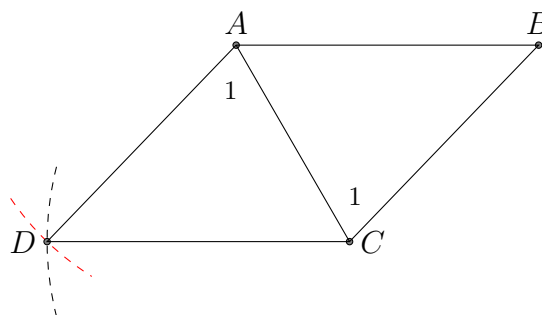
Từ cách vẽ, ta nhận được: $AD = BC$, $CD = AB$.

Xét hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$, ta có:

$AB = CD$, $BC = DA$, AC chung $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$

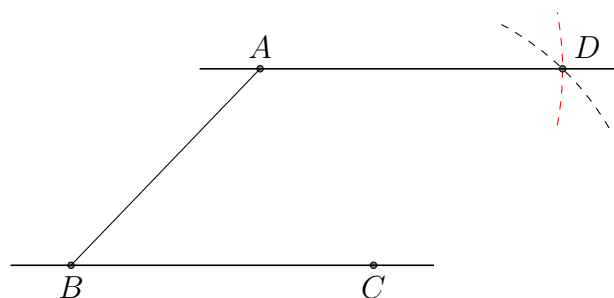
(c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AD \parallel BC$, vì có hai góc so le trong bằng nhau.



! Kết quả của ví dụ trên, cho phép chúng ta có thêm một phương pháp "Dựng đường thẳng a đi qua điểm A và song song với đường thẳng d cho trước ($A \notin d$)". Thật vậy:

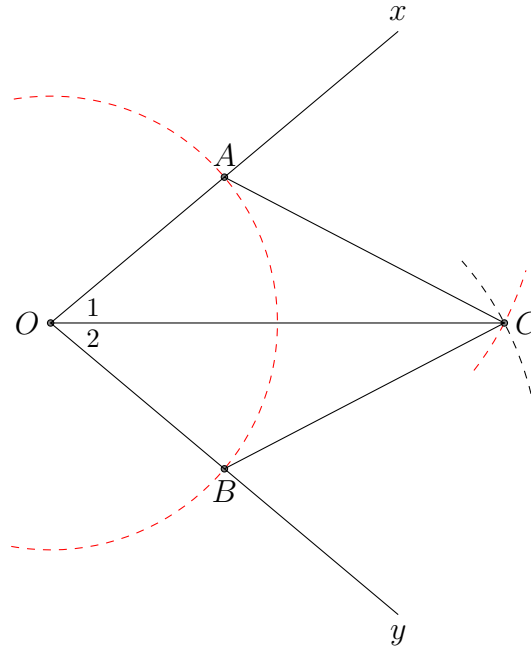
- Lấy hai điểm B, C trên đường thẳng d .
- Vẽ cung tròn tâm A bán kính BC , vẽ cung tròn tâm C bán kính BA , chúng cắt nhau tại D (D và B nằm khác phía đối với AC).
- Khi đó, a chính là đường thẳng đi qua hai điểm A và D .



□

VÍ DỤ 4. Cho góc $\widehat{xOy}$. Vẽ cung tròn tâm O , cung này cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A và B . Vẽ các cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm C . Nối O với C . Chứng minh rằng OC là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

LỜI GIẢI.



Từ cách vẽ, ta nhận được: $OA = OB$, $CA = CB$.

Xét hai tam giác $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$, ta có:

$OA = OB$, $CA = CB$; OC chung $\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow OC$ là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Nhận xét. Kết quả của ví dụ trên, cho phép chúng ta có thêm một phương pháp "Dựng đường phân giác của một góc". Thật vậy, để dựng tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ ta vẽ:

- Vẽ cung tròn tâm O , cung này cắt Ox , Oy theo thứ tự tại A và B .
- Vẽ các cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm C .
- Nối O với C , ta được OC là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

□

□ DẠNG 3. Vẽ $\triangle ABC$, biết $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$

Phương pháp giải: Ta lần lượt thực hiện:

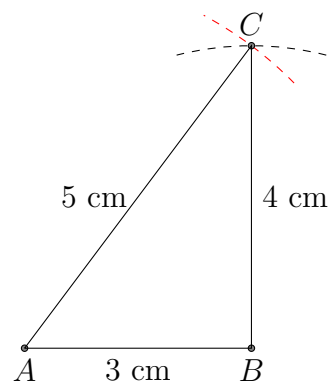
- Vẽ đoạn thẳng $AB = c$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A , bán kính b , vẽ cung tròn tâm B bán kính a . Hai cung tròn này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.

VÍ DỤ 5. Vẽ $\triangle ABC$, biết $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 5$ cm. Sau đó hãy thử đo góc $\widehat{B}$.

✍ LỜI GIẢI.

Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = 3$ cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A , bán kính 5 cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 4 cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.



Thực hiện phép đo, ta nhận được $\widehat{B} = 90^\circ$. □

VÍ DỤ 6. Cho hai tam giác $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ biết $AB = 4$ cm, $AC = BC = 3$ cm, $AD = BD = 5$ cm và C, D nằm khác phía đối với AB .

- ① Hãy vẽ $\triangle ABC$, $\triangle ABD$.
- ② Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

🔗 LỜI GIẢI.

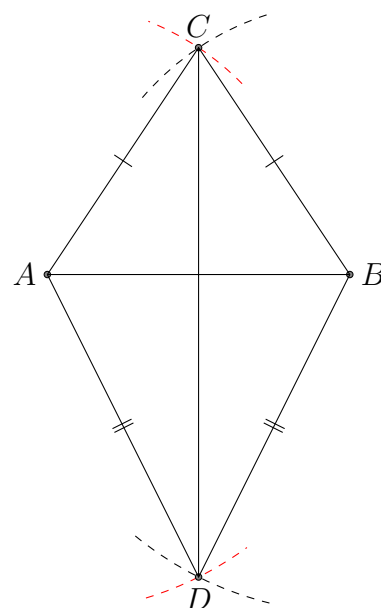
- ① Ta lần lượt thực hiện:

Vẽ $\triangle ABC$:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = 4$ cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A bán kính 3 cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 3 cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.

Vẽ $\triangle ABD$:

- Trên nửa mặt phẳng bờ AB khác phía với C , vẽ cung tròn tâm A bán kính 5 cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 5 cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại D .
- Nối AD , BD , ta nhận được $\triangle ABD$ thỏa mãn giả thiết.



- ② Xét hai tam giác $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$, ta có:

- $AC = BC$;
- $AD = BD$;
- CD chung.

$\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ suy ra điều phải chứng minh. □

© BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Vẽ $\triangle ABC$, biết:

- ① $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 10$ cm. Sau đó hãy thử đo góc $\widehat{B}$.
- ② $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 4$ cm.

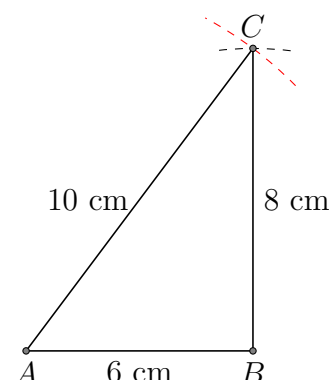
③ $AB = AC = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$.

④ $AB = BC = CA = 9 \text{ cm}$. Sau đó hãy thử đo các góc.

🔧 LỜI GIẢI.

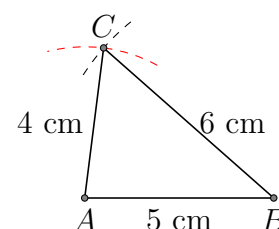
① Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = 6 \text{ cm}$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A bán kính 10 cm , vẽ cung tròn tâm B bán kính 8 cm . Hai cung tròn này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.
- Thực hiện phép đo ta nhận được $\widehat{B} = 90^\circ$.



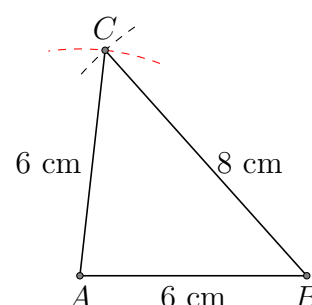
② Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = 5 \text{ cm}$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A bán kính 4 cm , vẽ cung tròn tâm B bán kính 6 cm . Hai cung tròn này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.



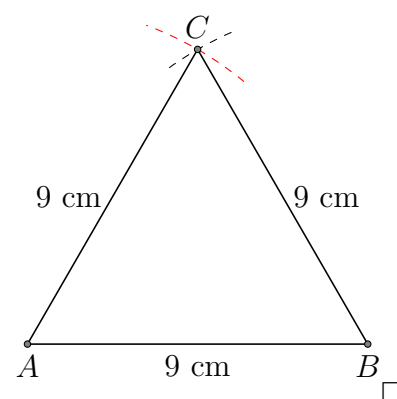
③ Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = 6 \text{ cm}$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A bán kính 10 cm , vẽ cung tròn tâm B bán kính 8 cm . Hai cung tròn này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.



④ Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = 9 \text{ cm}$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A bán kính 9 cm , vẽ cung tròn tâm B bán kính 9 cm . Hai cung tròn này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.
- Thực hiện phép đo ta nhận được $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.



BÀI 2. Cho hai tam giác $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, biết $AB = 8 \text{ cm}$, $AC = BC = 6 \text{ cm}$, $AD = BD = 10 \text{ cm}$ và C , D nằm khác phía đối với AB .

① Hãy vẽ $\triangle ABC$, $\triangle ABD$.

② Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

LỜI GIẢI.

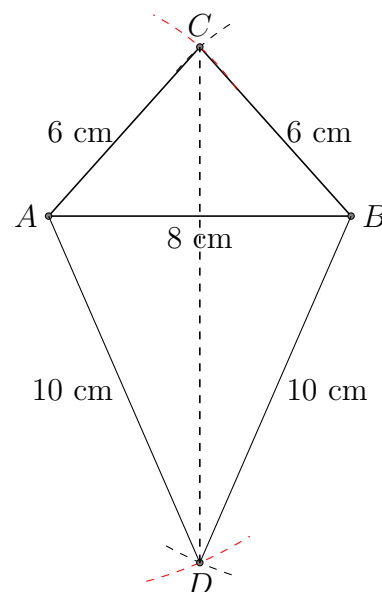
① Ta lần lượt thực hiện:

Vẽ $\triangle ABC$:

- Vẽ đoạn thẳng $AB = 8$ cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ cung tròn tâm A bán kính 6 cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 6 cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.

Vẽ $\triangle ABD$:

- Trên nửa mặt phẳng bờ AB khác phía với C , vẽ cung tròn tâm A bán kính 10 cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 10 cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại D .
- Nối AD , BD , ta nhận được $\triangle ABD$ thỏa mãn giả thiết.



② Xét hai tam giác $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$, ta có:

- $AC = BC$;
- $AD = BD$;
- CD chung.

$$\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD \text{ (c-c-c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

□

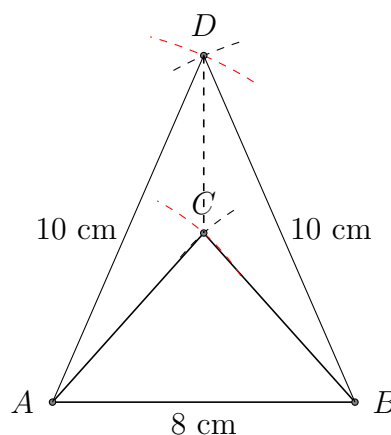
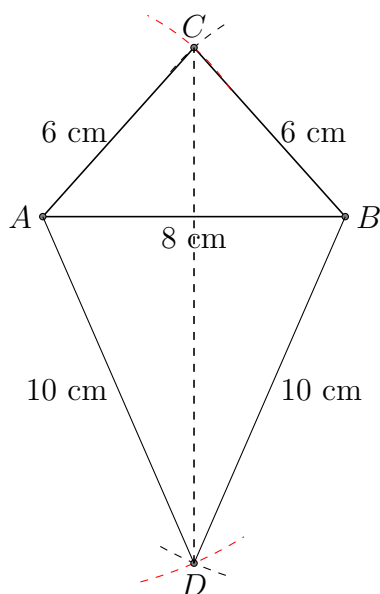
BÀI 3. Cho hai tam giác $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ biết $AB = 8$ cm, $AC = BC = 6$ cm, $AD = BD = 10$ cm.

① Hãy vẽ $\triangle ABC$, $\triangle ABD$.

② Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

LỜI GIẢI.

① Ta có hai trường hợp hình:



② Xét hai tam giác $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$, ta có:

— $AC = BC$;

— $AD = BD$;

— CD chung.

$\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (điều phải chứng minh).

□

BÀI 4. Cho $AB = 6$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 2 cm và đường tròn tâm B bán kính bằng 6 cm, chúng cắt nhau tại C và D . Chứng minh rằng AB là tia phân giác của góc $\widehat{CAD}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét tam giác ABC và tam giác ABD có

— AB là cạnh chung;

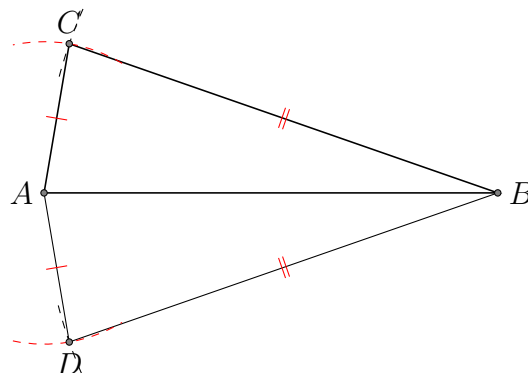
— $AC = AD = 2$ (cm);

— $BC = BD = 6$ (cm).

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABD$ (c.c.c).

$\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{DAB}$ (hai góc tương ứng).

Vậy AB là tia phân giác của góc $\widehat{CAD}$.



□

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng AM là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét hai tam giác $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$, ta có:

— $AB = AC$ (gt);

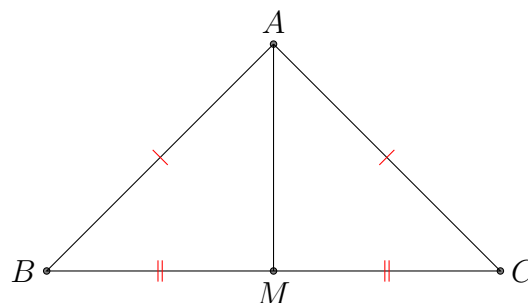
— AM (cạnh chung);

— $BM = MC$ (vì M là trung điểm của BC).

Suy ra: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (hai góc tương ứng).

Vậy AM là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.



□

BÀI 4 HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU CẠNH-GÓC-CẠNH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vẽ tam giác biết cạnh và góc xen giữa

VÍ DỤ 1. Vẽ $\triangle ABC$, biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$.

LỜI GIẢI.

Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ góc $\widehat{xAy} = \alpha$.
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = c$.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = b$.
- Nối tia BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.

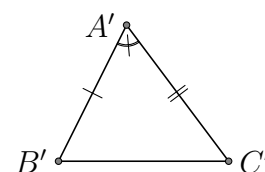
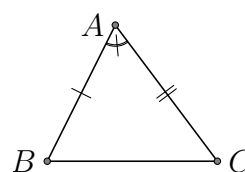
□

2. Trường hợp bằng nhau cạnh-góc-cạnh

Định lý 1. Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

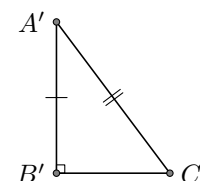
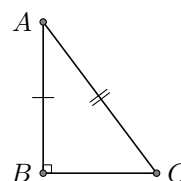
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ AC = A'C' \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Khi đó ta có ngay $\widehat{B_1} = \widehat{B}$, $\widehat{C_1} = \widehat{C}$ và $BC = B_1C_1$.



Hệ quả 1.

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

C CÁC DẠNG TOÁN

□ DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

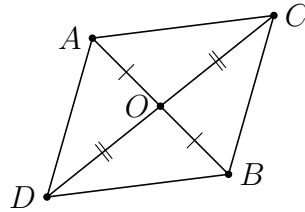
Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng.

Chứng minh rằng:

- ❶ $\triangle OAD = \triangle OBC$.
- ❷ $AD \parallel BC$.

✎ LỜI GIẢI.



- ❶ Xét tam giác $\triangle OAD$ và $\triangle OBC$, ta có

- $OA = OB$ (O là trung điểm AB),
- $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (đối đỉnh),
- $OC = OD$ (O là trung điểm CD).

Suy ra $\triangle OAD = \triangle OBC$ (c - g - c).

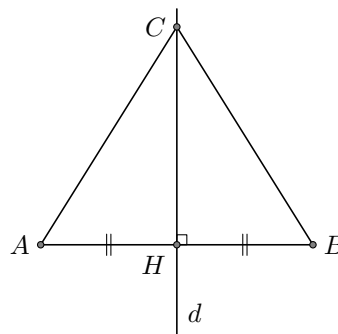
- ❷ Ta có $\triangle OAD = \triangle OBC$ (cmt) suy ra $\widehat{DAO} = \widehat{CBO}$ (hai góc tương ứng) mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AD \parallel BC$.

□

VÍ DỤ 2. Trên đường trung trực d của đoạn AB lấy điểm C bất kỳ, H là trung điểm AB .

- ❶ Chứng minh rằng $\triangle HAC = \triangle HBC$, từ đó suy ra $CA = CB$.
- ❷ Chứng minh rằng đường thẳng d là phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

✎ LỜI GIẢI.



Xét hai tam giác vuông $\triangle HAC$ và $\triangle HBC$, ta có

- $HA = HB$, (giả thiết),
- $\widehat{AHC} = \widehat{BHC} = 90^\circ$ (giả thiết),
- CH là cạnh chung.

Suy ra $\triangle HAC = \triangle HBC$ (c - g - c), suy ra $CA = CB$ (hai cạnh tương ứng).

Từ kết quả trên ta có $\widehat{ACH} = \widehat{BCH} \Rightarrow d$ là phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

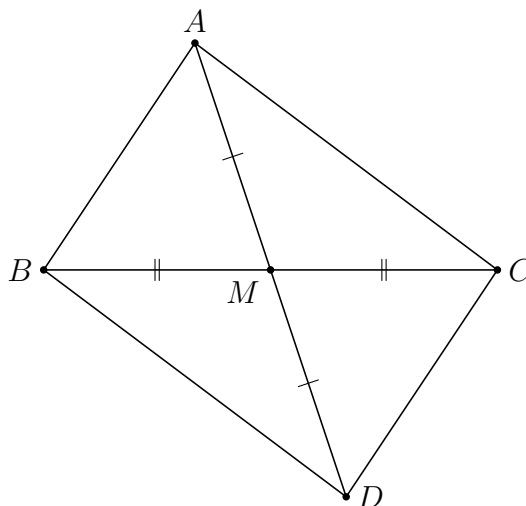
□

Nhận xét. Qua ví dụ trên, chúng ta ghi nhận kết quả: "Tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B cho trước là đường trung trực của AB "

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM . Trên tia AM , lấy điểm D sao cho $AD = 2AM$. Chứng minh rằng:

- ① $AB \parallel CD$.
- ② $AC \parallel BD$.

✎ **LỜI GIẢI.**



① Xét hai tam giác $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$, ta có

- $MB = MC$ (M là trung điểm BC),
- $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (hai góc đối đỉnh),
- $MA = MD$ (vì $AD = 2AM$).

Suy ra $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c - g - c) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CDM}$ (hai góc tương ứng) mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CD$.

② Xét hai tam giác $\triangle DMB$ và $\triangle AMC$, ta có

- $MB = MC$ (M là trung điểm BC),
- $\widehat{BMD} = \widehat{AMC}$ (đối đỉnh),
- $MA = MD$ (vì $AD = 2AM$).

Suy ra $\triangle BMD = \triangle CMA$ (c - g - c) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB}$ (hai góc tương ứng) mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BD$.

□

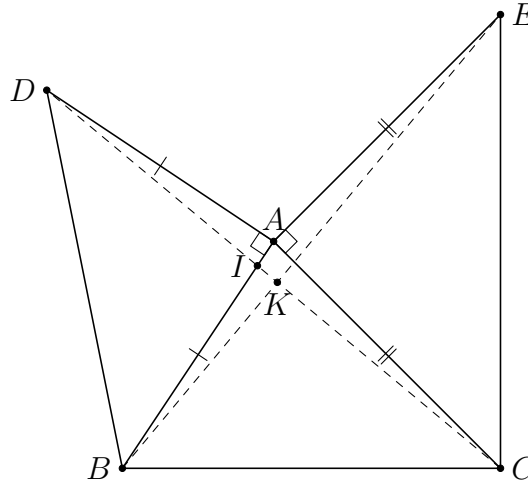
Nhận xét. Qua hai ví dụ trên, chúng ta đã xét những trường hợp thấy ngay được sự bằng nhau của cặp góc xen giữa, tuy nhiên, trong nhiều trường hợp để có được điều này cần sử dụng một vài phép biến đổi góc. Ví dụ sau sẽ minh họa cho trường hợp này.

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB (D, C khác phía đối với AB), vẽ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AC (E, B khác phía đối với AC). Chứng minh rằng

$$\textcircled{1} \quad CD = BE.$$

$$\textcircled{2} \quad CD \perp BE.$$

✎ LỜI GIẢI.



$\textcircled{1}$ Xét hai tam giác $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$, ta có

— $AB = AD$ (giả thiết),

— $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 90^\circ = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$,

— $AE = AC$ (giả thiết).

Suy ra $\triangle ABE = \triangle ADC$ (c - g - c) $\Rightarrow BE = CD$ (hai cạnh tương ứng).

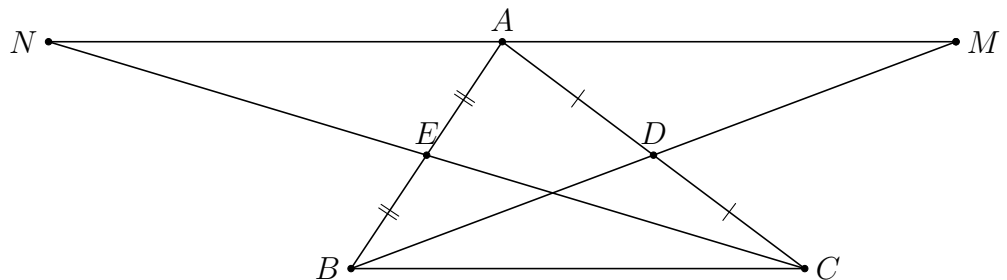
$\textcircled{2}$ Giả sử CD cắt AB , BE theo thứ tự tại I , K . Theo kết quả câu a, ta có $\widehat{ADI} = \widehat{IBK}$.

Trong tam giác $\triangle BIK$ ta có $\widehat{IKB} = 180^\circ - \widehat{IBK} - \widehat{KIB} = 180^\circ - \widehat{ADI} - \widehat{AID} = \widehat{BAD} = 90^\circ$

$\Leftrightarrow CD \perp BE$, đpcm.

□

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$, gọi D , E theo thứ tự là trung điểm của AC , AB . Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = 2BD$, trên tia CE lấy điểm N sao cho E là trung điểm của CN . Chứng minh rằng $MN = 2BC$.



✎ LỜI GIẢI.

Xét hai tam giác $\triangle DAM$ và $\triangle DCB$, ta có

— $BD = MD$ (vì $BM = 2BD$),

— $\widehat{D_2} = \widehat{D_1}$ (hai góc đối đỉnh),

— $DA = DC$ (vì D là trung điểm của AC).

Suy ra $\triangle DAM = \triangle DCB$ (c - g - c).

Từ đây, ta nhận được

— $AM = BC$ (1)

— $\widehat{B_1} = \widehat{M_2}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AM // BC$. (2)

Xét hai tam giác $\triangle EAN$ và $\triangle EBC$, ta có

— $NE = CE$ (vì E là trung điểm của CN),

— $\widehat{E_2} = \widehat{E_1}$ (vì đối đỉnh),

— $EA = EB$ (vì E là trung điểm của AB).

Suy ra $\triangle EAN = \triangle EBC$.

Từ đây, ta nhận được

— $AN = BC$, (3)

— $\widehat{C_1} = \widehat{N_2}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AN // BC$. (4)

. Từ (2) và (4) suy ra Ba điểm M, A, N thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow MN = MA + AN = BC + BC = 2BC$, đpcm. $\square$

□ DẠNG 2. VẼ $\triangle ABC$, BIẾT $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{BAC} = \alpha$

Phương pháp giải: Cách vẽ

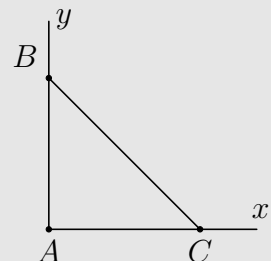
Ta lần lượt thực hiện

— Vẽ góc $\widehat{xAy} = \alpha$.

— Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = c$.

— Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = b$.

— Nối tia BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.

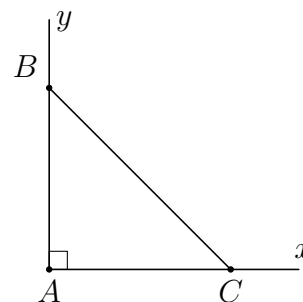


VÍ DỤ 1. Bài 24/tr 118 - SGK Vẽ $\triangle ABC$, biết $AB = AC = 3cm$, $\widehat{A} = 90^\circ$ sau đó hãy thử đo góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

✎ LỜI GIẢI.

Ta lần lượt thực hiện

- Vẽ góc $\widehat{xAy} = 90^\circ$
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 3cm$.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 3cm$.
- Nối tia BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.
- . Thực hiện phép đo, ta nhận được $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$.



Thật vậy, xét $\triangle ABC$

- $AB = AC = 3cm$,
 - $\widehat{A} = 90^\circ$.
- $\Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$.

□

D BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Vẽ $\triangle ABC$, biết:

- ① $AB = AC = 8cm$, $\widehat{A} = 90^\circ$. Sau đó hãy thử đo góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$
- ② $AB = 3cm$, $AC = 6cm$, $\widehat{A} = 60^\circ$.
- ③ $AB = 6cm$, $AC = 8cm$, $\widehat{A} = 90^\circ$.
- ④ $AB = AC = 4cm$, $\widehat{A} = 120^\circ$.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Ta lần lượt thực hiện:
 - Vẽ góc $\widehat{xAy} = 90^\circ$.
 - Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 8cm$.
 - Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 8cm$.
 - Nối tia BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.
 - . Thực hiện phép đo, ta nhận được $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$.

Thật vậy, xét $\triangle ABC$

 - $AB = AC = 8cm$,
 - $\widehat{A} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$
- ② Ta lần lượt thực hiện:
 - Vẽ góc $\widehat{xAy} = 60^\circ$.
 - Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 3cm$.
 - Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 6cm$.
 - Nối tia BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.
 - .
- ③ Ta lần lượt thực hiện:
 - Vẽ góc $\widehat{xAy} = 90^\circ$.
 - Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 6cm$.
 - Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 8cm$.
 - Nối tia BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.
 - .

④ Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ góc $\widehat{xAy} = 120^\circ$.
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 4cm$.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 4cm$.
- Nối tia BC , ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.

□

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Trên tia đối của tia HA , lấy điểm D sao cho $HA = HD$. Tính số đo $\widehat{BDC}$, biết:

① $\widehat{A} = 60^\circ$,

② $\widehat{A} = 90^\circ$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét hai tam giác $\triangle AHB$ và $\triangle DHB$, ta có

- $AH = HD$,
- $\widehat{AHB} = \widehat{DHB} = 90^\circ$,
- BH chung.

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle DHB (\text{c - g - c}) \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DBH}, \text{ và } AB = AC$$

Xét hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$, ta có

- $AB = AC$,
- $\widehat{ABH} = \widehat{DBH}$,
- BC chung.

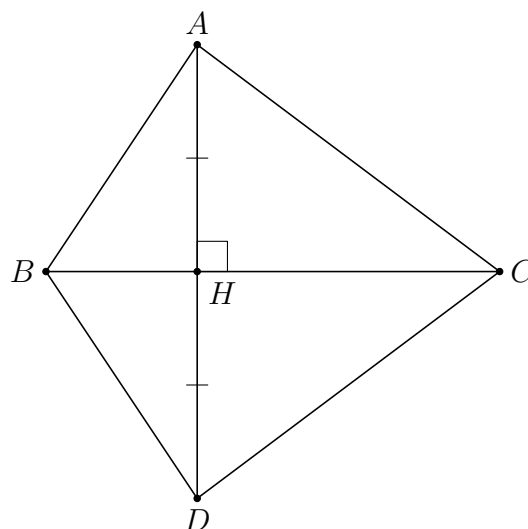
$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DBC (\text{c - g - c}) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC}.$$

Vậy nên:

① $\widehat{BDC} = \widehat{A} = 60^\circ$,

② $\widehat{BDC} = \widehat{A} = 90^\circ$,

□



BÀI 3. Qua trung điểm M của đoạn thẳng AB , kẻ đường thẳng d vuông góc với AB . Lấy điểm C trên d . Chứng minh rằng CM là tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

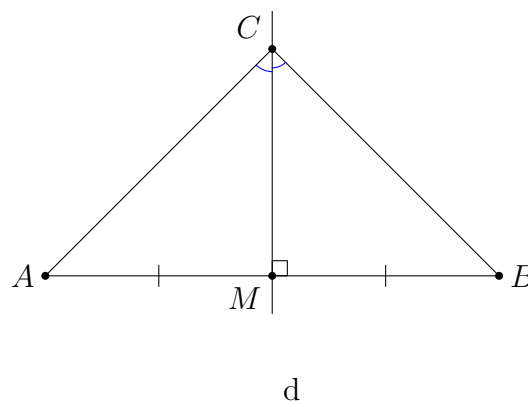
✎ **LỜI GIẢI.**

Xét hai tam giác $\triangle AMC$ và $\triangle BMC$, ta có

- $AM = BM$,
- $\widehat{AMC} = \widehat{BMC} = 90^\circ$,
- MC chung.

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle BMC (\text{c - g - c}) \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCM},$$

nên CM là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.





BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$, tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BC tại D . Chứng minh rằng:

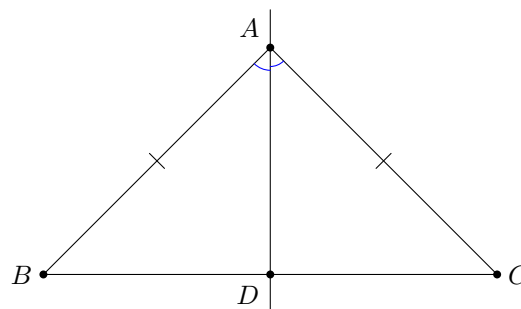
- ① $DB = DC$.
- ② $AD \perp BC$.

✎ **LỜI GIẢI.**

①

Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle ADC$, ta có

- $AB = AC$, giả thiết.
- $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$
- AD cạnh chung.



d

Suy ra: $\triangle ABD = \triangle ACD$ (c - g - c) $\Rightarrow DB = DC$ đpcm.

- ② Theo kết quả câu a, ta có $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow AD \perp BC$, đpcm.



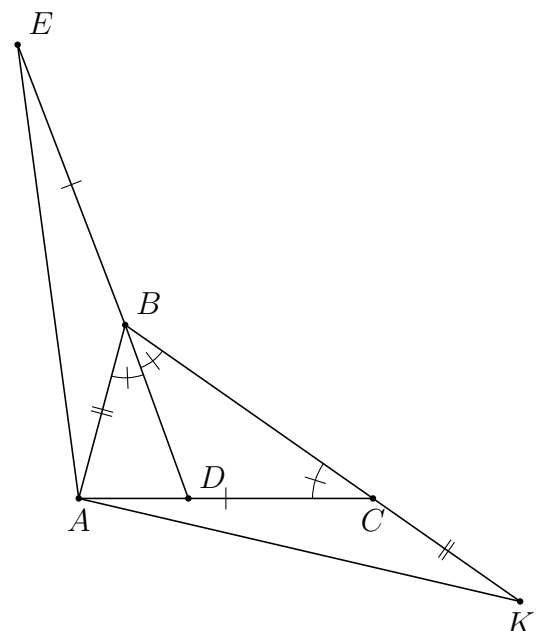
BÀI 5. Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho $AB = CK$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D , trên tia đối của tia BD lấy điểm E sao cho $AC = BE$. Chứng minh rằng $AK = AE$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét hai tam giác $\triangle KCA$ và $\triangle ABE$, ta có

- $AB = CK$ (giả thiết),
- $\widehat{ACK} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{ABE}$,
- $BE = AC$, giả thiết.

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle KCA$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = AK$.

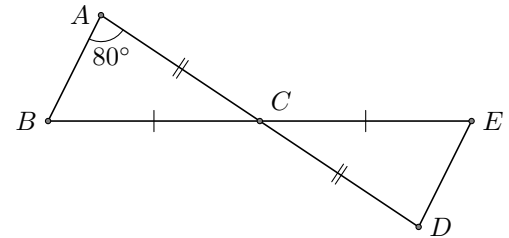


BÀI 6. Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 80^\circ$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CB$. Tính số đo của góc $\widehat{CDE}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét hai tam giác $\triangle ACB$ và $\triangle DCE$

- $AC = CD$ (giả thiết),
- $\widehat{ACB} = \widehat{ECD}$ (đối đỉnh),
- $CE = CB$ (giả thiết).



Suy ra $\triangle ACB = \triangle DCE$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{CAB} = 80^\circ$.

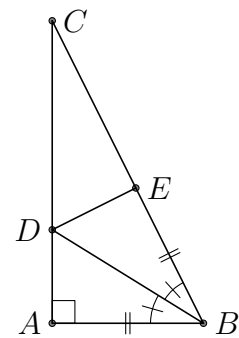
□

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 90^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = AB$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D .

- ❶ So sánh độ dài AD và ED .
- ❷ Tính số đo $\widehat{BED}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$, ta có
 - $AB = EB$,
 - $\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$ (giả thiết),
 - DB chung. $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (c-g-c) $\Rightarrow AD = ED$.
- ❷ Theo kết quả câu a ta có $\widehat{BED} = \widehat{BAD} = 90^\circ$.



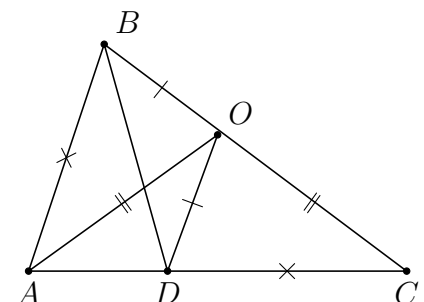
□

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Các đường trung trực của AC và BD cắt nhau tại O . Chứng minh rằng

- ❶ $\triangle OAB = \triangle OCD$
- ❷ AO là tia phân giác của $\widehat{A}$

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Xét hai tam giác $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$, ta có
 - $OA = OC$ (vì O thuộc đường trung trực của AC);
 - $AB = CD$ (giả thiết);
 - $OB = OD$ (vì O thuộc đường trung trực của BD). $\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OCD$ (c-c-c).



- ❷ Theo kết quả câu a) ta có $\widehat{BAO} = \widehat{DCO}$.

Xét $\triangle AOC$ có $OA = OC$ nên $\triangle AOC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{DCO}$.

Vậy $\widehat{BAO} = \widehat{AOD}$. Suy ra AO là tia phân giác của $\widehat{A}$.

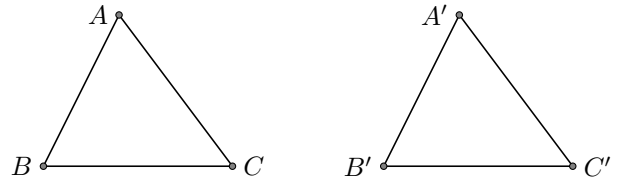
□

BÀI 5 HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU GÓC-CẠNH-GÓC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định lý 1. Nếu một tam giác có một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

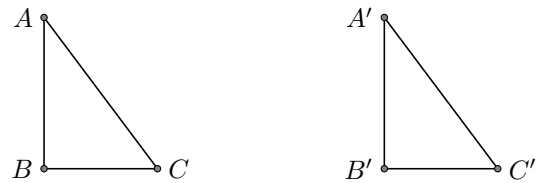
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$



Khi đó ta có ngay $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ và $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Hệ quả 1.

Nếu một tam giác vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và và góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.



— Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Như vậy, nếu $\triangle ABC$ vuông tại A và $\triangle A'B'C'$ vuông tại A'

TH1: $AB = A'B'$ và $\widehat{B} = \widehat{B'}$ thì $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

TH2: $BC = B'C'$ và $\widehat{B} = \widehat{B'}$ thì $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

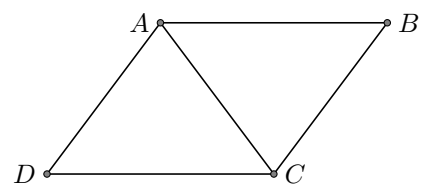
B CÁC DẠNG TOÁN

□ DẠNG 1. Chứng minh hai tam giác bằng nhau

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1.

Cho hình vẽ, ở đó $AB \parallel CD$ và $AD \parallel BC$. Chứng minh rằng $\triangle CDA = \triangle ABC$, từ đó suy ra $AB = CD$ và $AD = BC$.



✍ LỜI GIẢI.

Xét hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$, ta có:

- $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (vì $AB \parallel CD$),
- $\widehat{BCA} = \widehat{DAC}$ (vì $AD \parallel BC$),
- AC là cạnh chung.

Suy ra $\triangle CDA = \triangle ABC \Rightarrow AB = CD, AD = BC$. □

VÍ DỤ 2. Cho góc xOy . Lấy các điểm A, B theo thứ tự thuộc Ox, Oy sao cho $OA = OB$. Vẽ AH vuông góc với Oy ($H \in Oy$), vẽ BK vuông góc với Ox ($K \in Ox$). Gọi M là giao điểm của AH và BK .

- ❶ Chứng minh rằng $\triangle OAH = \triangle OBK$, từ đó suy ra $OH = OK$.
- ❷ Chứng minh rằng OM là tia phân giác của góc xOy .

✎ LỜI GIẢI.

- ❶ Xét hai tam giác vuông $\triangle OAH$ và $\triangle OBK$, ta có:

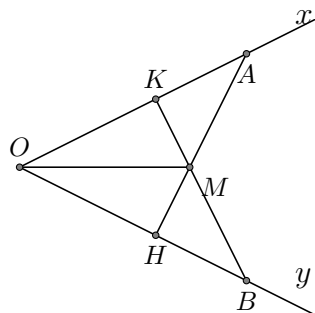
- $OA = OB$ (giả thiết),
- $\widehat{O}$ chung.

Suy ra $\triangle OAH = \triangle OBK$ (cạnh huyền góc nhọn).
 $\Rightarrow OH = OK$.

- ❷ Xét hai tam giác vuông $\triangle OMH$ và $\triangle OMK$, ta có

- OM chung,
- $OH = OK$.

Suy ra $\triangle OMH = \triangle OMK$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông)
 suy ra $\widehat{MOH} = \widehat{MOK} \Rightarrow OM$ là phân giác của góc xOy .



□ DẠNG 2. Sử dụng hai tam giác bằng nhau để giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Cho góc xOy . Vẽ tia phân giác Ot của góc xOy , trên Ot lấy điểm M . Đường thẳng d qua M và vuông với Ot cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A và B .

- ❶ Chứng minh rằng $OA = OB$.
- ❷ Lấy điểm C thuộc Ot , chứng minh rằng $CA = CB$ và $\widehat{OAC} = \widehat{OBC}$.

✎ LỜI GIẢI.

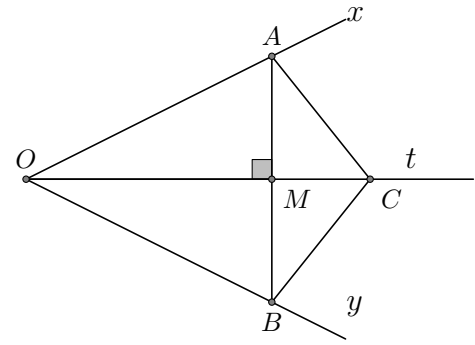
- ① Xét hai tam giác $\triangle OAM$ và $\triangle OBM$, ta có
- $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$ (vì Ot là phân giác của góc $\widehat{xOy}$),
 - OM chung,
 - $\widehat{AMO} = \widehat{BMO} = 90^\circ$,

Suy ra $\triangle OAM = \triangle OBM$ (g - c - g) $\Rightarrow OA = OB$.

- ② Xét hai tam giác $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$, ta có
- $OA = OB$ (cmt),
 - $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$ (vì Ot là phân giác $\widehat{xOy}$),
 - OC chung.

Suy ra $\triangle OAC = \triangle OBC$ (c - g - c)

$\Rightarrow CA = CB$ và $\widehat{OAC} = \widehat{OBC}$.



□

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC , có $AB = AC$. Lấy điểm D, E theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho $AD = AE$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng

- ① $BE = CD$.
- ② $\triangle OBD = \triangle OCE$.

✎ LỜI GIẢI.

①

Xét hai tam giác $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$, ta có

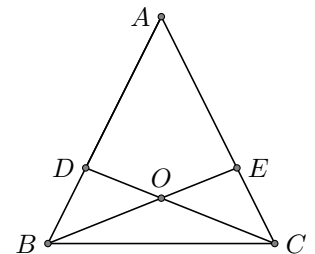
- $AB = AC$ (gt),
- $\widehat{A}$ chung,
- $AE = AD$ (gt).

Suy ra $\triangle ABE = \triangle ACD$ (c - g - c) $\Rightarrow BE = CD$.

- ② Xét hai tam giác $\triangle OBD$ và $\triangle OCE$, ta có

- $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (dựa vào kết quả câu a),
- $BD = CE$ (vì $AB = AC$ và $AD = AE$),
- $\widehat{BDO} = \widehat{CEO}$,

Suy ra $\triangle OBD = \triangle OCE$.



□

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), tại Ax đi qua trung điểm M của BC . Kẻ BE, CF vuông góc với Ax ($E, F \in Ax$). Chứng minh rằng $BE = CF$.

✎ LỜI GIẢI.

Ta có thể sử dụng một trong các cách trình bày sau:

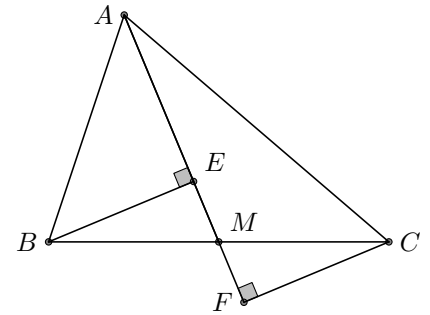
Cách 1 (sử dụng trường hợp bằng nhau g - c - g)

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} BE \perp Ax \\ CF \perp Ax \end{cases} \Rightarrow BE \parallel CF.$

Xét hai tam giác $\triangle MBE$ và $\triangle MCF$, ta có

- $\widehat{EBM} = \widehat{MCF}$ (vì $BE \parallel CF$),
- $MB = MC$ vì M là trung điểm BC ,
- $\widehat{EMB} = \widehat{FMC}$ (đối đỉnh).

Suy ra $\triangle MBE = \triangle MCF$ (g - c - g) suy ra $BE = CF$.



Cách 2 (sử dụng hệ quả)

Xét hai tam giác vuông $\triangle MBE$ và $\triangle MCF$, ta có

- $MB = MC$ vì M là trung điểm BC ,
- $\widehat{EMB} = \widehat{FMC}$ (đối đỉnh).

Suy ra $\triangle MBE = \triangle MCF$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $BE = CF$. □

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D, E sao cho $AD = BE$. Qua D và E kẻ các đường thẳng song song với BC chúng cắt AC theo thứ tự tại M và N . Chứng minh rằng $BC = DM + EN$.

✎ LỜI GIẢI.

Kẻ EF song song AC ($F \in BC$), xét hai tam giác $\triangle CEF$ và $\triangle ECN$, ta có

- $\widehat{FEC} = \widehat{ECN}$ (vì EF song song AC),
- $\widehat{ECF} = \widehat{NEC}$ (vì EN song song BC).

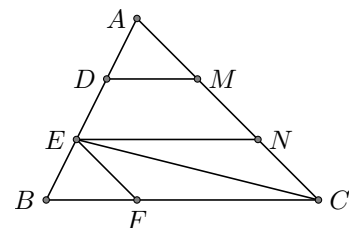
Suy ra $\triangle CEF = \triangle ECN$ (g - c - g) suy ra $EN = DC$ (1)

Xét hai tam giác $\triangle ADM$ và $\triangle EBF$, ta có

- $\widehat{A} = \widehat{BEF}$ (vì EF song song AC),
- $AD = BE$ (giả thiết),
- $\widehat{ADM} = \widehat{B}$ (vì DM song song BC).

Suy ra $\triangle ADM = \triangle EBF$ (g.c.g) suy ra $DM = BF$ (2)

Cộng theo vế (1), (2) ta được $EN + DM = FC + BD = BC$. □



VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC , gọi D, E lần lượt theo thứ tự là trung điểm của AB, AC . Trên tia DE lấy điểm F sao cho $DE = EF$. Chứng minh rằng

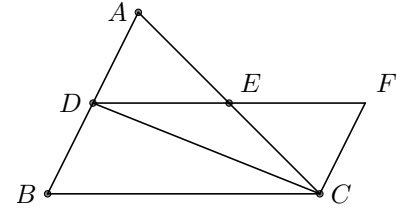
- ❶ $BD = CF$,
- ❷ $\triangle BCD = \triangle FDC$,
- ❸ $DE = \frac{1}{2}BC$.

✎ LỜI GIẢI.

- ❶ Xét hai tam giác $\triangle ADE$ và $\triangle CFE$, ta có

- $AE = CE$ (vì E là trung điểm AC),
- $\widehat{AED} = \widehat{CEF}$ (đối đỉnh),
- $DE = FE$, vì E là trung điểm DF .

suy ra $\triangle ADE = \triangle CFE$ (c - g - c) suy ra $CF = BD = AD$, vì D là trung điểm AB .



- ② Từ kết quả câu a), suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{EFC}$ suy ra AB song song CF .

Xét hai tam giác $\triangle BCD$ và $\triangle FDC$, ta có

- $BD = FC$ (câu a)),
- $\widehat{BDC} = \widehat{DCF}$ (do AB song song CF),
- CD chung.

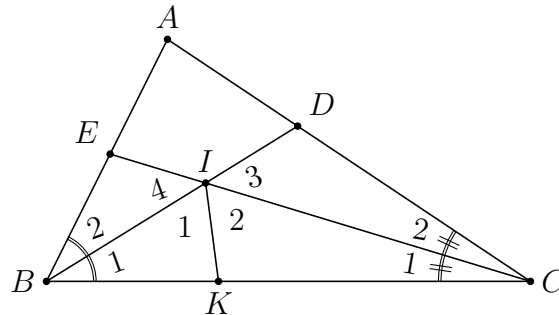
Suy ra $\triangle BCD = \triangle FDC$ (c.g.c)

- ③ Từ kết quả câu b) suy ra $DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$.

□

VÍ DỤ 6. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Các phân giác BD và CE cắt nhau tại điểm I . Chứng minh rằng $ID = IE$.

✎ LỜI GIẢI.



Từ giả thiết về các phân giác BD và CE , ta được $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B}$, $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 &= \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ. \\ \widehat{I}_3 &= \widehat{I}_4 = \widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ.\end{aligned}$$

Trong $\triangle IBC$ kẻ phân giác IK , ta nhận thấy

$$\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BIC} = \frac{1}{2}(180^\circ + \widehat{I}_3) = \frac{1}{2}(180^\circ + 60^\circ) = 60^\circ.$$

Xét hai tam giác $\triangle ICD$ và $\triangle ICK$, ta có

- $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$ (chứng minh trên),
- IC là cạnh chung,
- $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (chứng minh trên).

Suy ra $\triangle ICD = \triangle ICK$ (g - c - g) $\Rightarrow ID = IK$. (1)

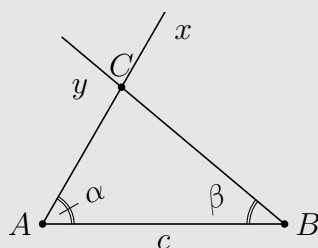
Chứng minh tương tự, ta được $IE = IK$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $ID = IE$. □

📦 DẠNG 3. Vẽ $\triangle ABC$, biết $AB = c$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$

Phương pháp giải: Ta lần lượt thực hiện

- Vẽ đoạn thẳng $AB = c$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ hai tia Ax và By sao cho $\widehat{xAB} = \alpha$, $\widehat{AB y} = \beta$. Hai tia này cắt nhau tại C .
- Nối AC , BC ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.



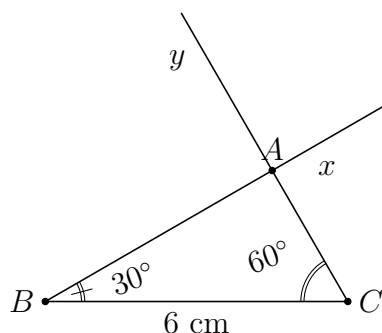
VÍ DỤ 1. Vẽ $\triangle ABC$, biết $BC = 6$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$. Sau đó hãy thử đo độ dài cạnh AC và đưa ra nhận xét.

🔧 LỜI GIẢI.

Ta lần lượt thực hiện

- Vẽ đoạn thẳng $BC = 6$ cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ BC , vẽ hai tia Bx và Cy sao cho $\widehat{xBC} = 30^\circ$, $\widehat{yCB} = 60^\circ$. Hai tia này cắt nhau tại A .
- Nối AC , AB ta nhận được $\triangle ABC$ thỏa mãn giả thiết.

Thực hiện phép đo, ta nhận được $AB = 3$ cm.

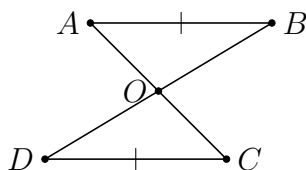


□

⚠️ Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° thì cạnh đối diện với góc 30° bằng một nửa cạnh huyền.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình vẽ, ở đó $AB \parallel CD$ và $AB = CD$. Chứng minh rằng O là trung điểm của mỗi đoạn thẳng AC và BD .



LỜI GIẢI.

Ta có $AB \parallel CD$ nên $\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$ (so le trong)

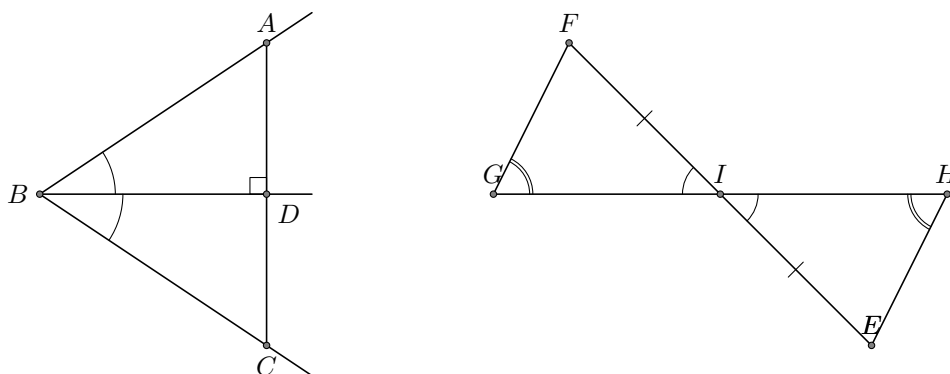
Xét hai tam giác $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$, ta có

- $\widehat{A} = \widehat{C}$ (chứng minh trên),
- $AB = CD$ (giả thiết),
- $\widehat{B} = \widehat{D}$ (chứng minh trên),

Suy ra $\triangle OAB = \triangle OCD$ (g - c - g) $\Rightarrow OA = OC$ và $OB = OD$.

Vậy O là trung điểm của mỗi đường. □

BÀI 2. Tìm các tam giác bằng nhau trên hình dưới đây (không xét các tam giác mà các cạnh chưa được kẻ).



LỜI GIẢI.

Hình 1: Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBD$ ta có:

- $\widehat{ADB} = \widehat{CDB} = 90^\circ$,
- BD là cạnh chung,
- $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ (giả thiết).

Vậy $\triangle ABD = \triangle CBD$ (g.c.g). □

Hình 2:

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{FIG} = \widehat{EIH} \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{FGI} = \widehat{EHI} \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{FIG} + \widehat{FGI} + \widehat{GFI} = \widehat{EIH} + \widehat{EHI} + \widehat{HEI} = 180^\circ \text{ (định lý tổng ba góc trong tam giác)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{GFI} = \widehat{HEI}.$$

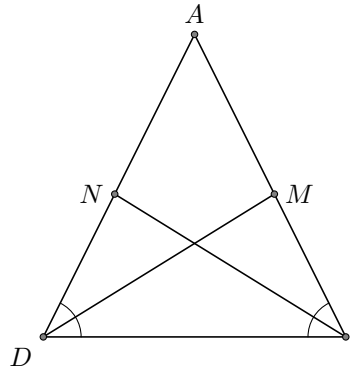
Xét $\triangle GFI$ và $\triangle HEI$ ta có

- $\widehat{FIG} = \widehat{EIH}$ (giả thiết),
- $FI = EI$ (giả thiết),
- $\widehat{GFI} = \widehat{HEI}$ (chứng minh trên).

Vậy $\triangle GFI = \triangle HEI$ (g-c-g).

BÀI 3. Cho tam giác ADE có $\widehat{D} = \widehat{E}$. Tia phân giác của góc $\widehat{D}$ cắt AE ở điểm M . Tia phân giác của góc $\widehat{E}$ cắt AD ở điểm N . So sánh các độ dài DN và EM .

✎ LỜI GIẢI.



$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{ADE} = \widehat{AED} \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{NDM} = \widehat{MDE} = \frac{1}{2}\widehat{ADE} \text{ (DM là phân giác của góc } \widehat{ADE}) \\ \widehat{MEN} = \widehat{NED} = \frac{1}{2}\widehat{AED} \text{ (EN là phân giác của góc } \widehat{AED}) \end{cases}$$

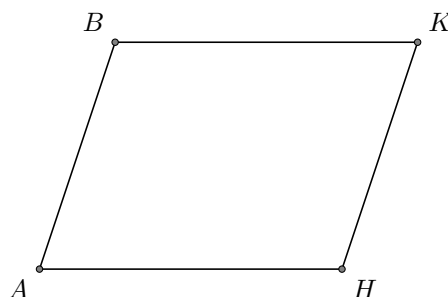
$$\Rightarrow \widehat{NED} = \widehat{MDE}.$$

Xét $\triangle NED$ và $\triangle MDE$ ta có:

- $\widehat{NDE} = \widehat{MED}$ (giả thiết),
- DE là cạnh chung,
- $\widehat{NED} = \widehat{MDE}$ (chứng minh trên).

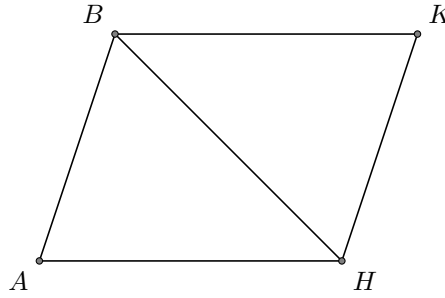
Vậy $\triangle NED = \triangle MDE$ (g.c.g). $\Rightarrow DN = EM$ (hai cạnh tương ứng). □

BÀI 4. Cho hình dưới đây có $AB \parallel HK$ và $AH \parallel BK$. Chứng minh rằng $AB = HK$ và $AH = BK$.



✎ LỜI GIẢI.

Nối hai điểm B và H để được hình như sau



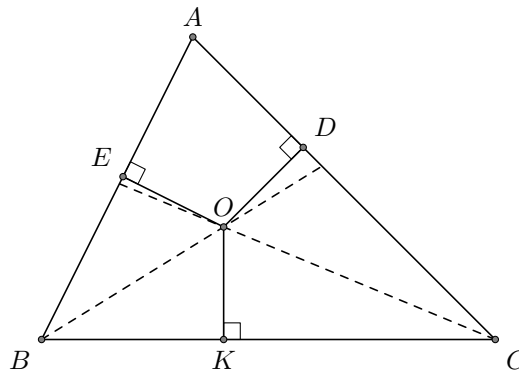
Xét $\triangle KBH$ và $\triangle AHB$ ta có:

- $\widehat{KBH} = \widehat{AHB}$ (hai góc so-le-trong),
- BH là cạnh chung,
- $\widehat{ABH} = \widehat{KHB}$ (chứng minh trên).

Vậy $\triangle KBH = \triangle AHB$ (g.c.g). $\Rightarrow \begin{cases} AB = HK \\ AH = BK \end{cases}$ (các cặp cạnh tương ứng). □

BÀI 5. Cho tam giác ABC . Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau ở O . Kẻ $OD \perp AC$, kẻ $OE \perp AB$. Chứng minh rằng $OD = OE$.

✎ LỜI GIẢI.



Ta có $\begin{cases} \widehat{DCO} = \widehat{KCO} \text{ (CO là tia phân giác } \widehat{DCK}) \\ \widehat{DCO} + \widehat{DOC} = 90^\circ \text{ (Hai góc nhọn trong một tam giác vuông)} \\ \widehat{KCO} + \widehat{KOC} = 90^\circ \text{ (Hai góc nhọn trong một tam giác vuông)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{KOC}.$

Xét $\triangle DCO$ và $\triangle KCO$ ta có

- $\widehat{DCO} = \widehat{KCO}$ (CO là tia phân giác của góc $\widehat{DCK}$),
- OC là cạnh chung,
- $\widehat{DOC} = \widehat{KOC}$ (chứng minh trên).

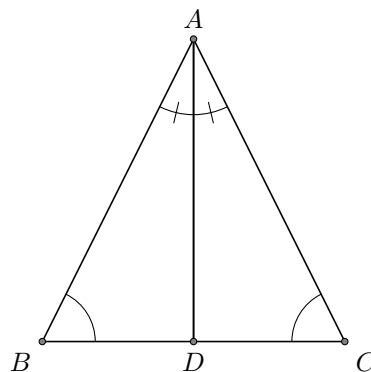
Vậy $\triangle DCO = \triangle KCO$ (g - c - g) $\Rightarrow DO = KO$ (hai cạnh tương ứng).

Chứng minh tương tự với $\triangle OEB$ và $\triangle OKB$ ta có $EO = KO$.

Vậy ta có $\begin{cases} DO = KO \\ EO = KO \end{cases} \Rightarrow DO = EO.$ □

BÀI 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D . Chứng minh rằng: $DB = DC$, $AB = AC$.

✎ LỜI GIẢI.



Ta có
$$\begin{cases} \widehat{ABD} = \widehat{ACD} \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{ABD} + \widehat{BAD} + \widehat{ADB} = \widehat{ACD} + \widehat{CAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ \text{ (định lý tổng ba góc trong tam giác)} \end{cases}$$

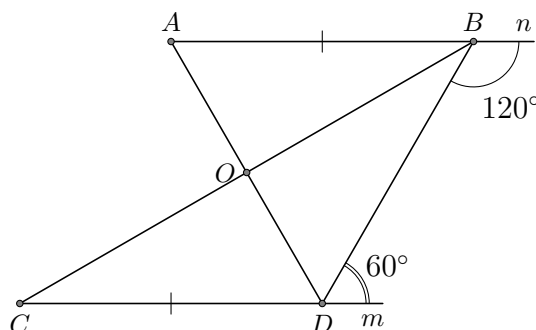
$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC}.$

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ ta có

- $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (giả thiết),
- AD là cạnh chung,
- $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ (chứng minh trên).

Vậy $\triangle ADB = \triangle ADC$ (g.c.g) $\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ BD = CD \end{cases}$ (các cặp cạnh tương ứng). □

BÀI 7. Cho hình bên, chứng minh rằng O là trung điểm của mỗi đoạn thẳng AD và BC .



✎ LỜI GIẢI.

Ta có $\widehat{nBD} + \widehat{mDB} = 180^\circ$ mà hai góc này lại ở vị trí trong cùng phía nên ta có $AB \parallel CD$.

Xét $\triangle ABO$ và $\triangle DCO$ ta có

- $\widehat{OAB} = \widehat{ODC}$ ($AB \parallel CD$ và hai góc này ở vị trí so-le-trong),
- $AB = CD$ (giả thiết),
- $\widehat{OBA} = \widehat{OCD}$ ($AB \parallel CD$ và hai góc này ở vị trí so-le-trong).

Vậy $\triangle ABO = \triangle DCO$ (g.c.g) $\Rightarrow \begin{cases} AO = DO \\ BO = CO \end{cases}$ (các cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow \begin{cases} O \text{ là trung điểm cạnh } AD \\ O \text{ là trung điểm cạnh } BC \end{cases}$

□

BÀI 6 TAM GIÁC CÂN

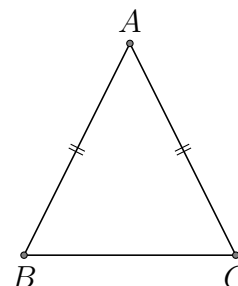
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Với $\triangle$ cân tại A , ta nói

- AB, AC gọi là hai *cạnh bên* ($AB = AC$) và BC là *cạnh đáy*.
- Các góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ là hai *góc ở đáy* và $\widehat{A}$ là *góc ở đỉnh*.
- Các góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ là hai *góc ở đáy* và $\widehat{A}$ là *góc ở đỉnh*.



2. Tính chất

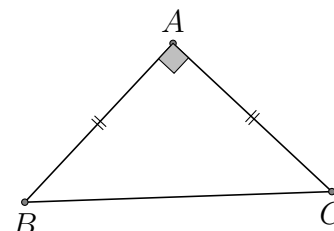
Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Định nghĩa 2.

Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai góc vuông bằng nhau. Như vậy, với $\triangle ABC$ vuông cân tại A , ta có

- $AB = AC$
- $\widehat{A} = 90^\circ$
- $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$.



3. Tam giác đều

Định nghĩa 3. Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

Ta có được các kết quả sau.

- ① Trong một tam giác đều, mỗi góc bằng 60° .
- ② Một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
- ③ Một tam giác cân có một góc 60° thì đó là tam giác đều.

B CÁC DẠNG TOÁN

□ DẠNG 1. Chứng minh tính chất của tam giác cân, tam giác đều.

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$ đều. Chứng minh rằng $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

LỜI GIẢI.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau.

Cách 1: Dựa trên tính chất của tam giác cân

Vì $\triangle ABC$ đều nên ta lần lượt có:

$$BC = AB \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } C \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B}.$$

$$AB = BC \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } B \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{C}.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{A} + \widehat{A} = 180^\circ$$

$$3\widehat{A} = 180^\circ$$

$$\widehat{A} = 60^\circ.$$

Vậy $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

Cách 2: Trình bày theo sự tương ứng đỉnh của các tam giác bằng nhau.

Từ giả thiết

$$\triangle ABC = \triangle ACB \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \text{ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)}$$

$$\triangle ACB = \triangle BCA \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \text{ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)}$$

Mặt khác, ta có

$$\widehat{A} + \widehat{A} + \widehat{A} = 180^\circ$$

$$3\widehat{A} = 180^\circ$$

$$\widehat{A} = 60^\circ.$$

Vậy $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$. □

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác đều.

LỜI GIẢI.

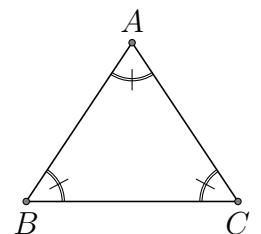
Từ giả thiết ta lần lượt có

$$\widehat{A} = \widehat{B} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } C \Leftrightarrow CA = CB.$$

$$\widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow AB = AC.$$

Từ đó, suy ra

$AB = BC = CA \Leftrightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều. □



Nhận xét. Trong trường hợp $\triangle ABC$ cân tại A có một góc bằng 60° thì nó cũng là tam giác đều, bởi nếu $\widehat{A} = 60^\circ$ thì

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$$

Do đó $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

- ❶ Nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì $\widehat{B} = \widehat{C}$.
- ❷ Nếu $\widehat{B} = \widehat{C}$ thì $\triangle ABC$ cân tại A .

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Dựng tia phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt BC ở D .

Xét hai tam giác $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$, ta có

- $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A);
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (vì AD là đường phân giác của góc $\widehat{A}$);
- AD cạnh chung.

Suy ra $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$.

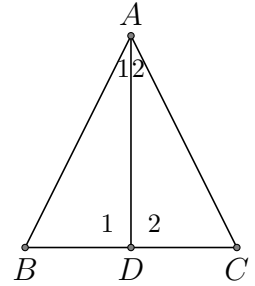
- ❷ Vẽ tia phân giác góc $\widehat{A}$, cắt BC tại D .

Xét hai tam giác $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$, ta có

- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (vì AD là đường phân giác của $\widehat{A}$).
- AD là cạnh chung.
- $\widehat{D}_1 = 180^\circ - \widehat{A}_1 - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A}_2 - \widehat{C} = \widehat{D}_2$.

Suy ra $\triangle ADB = \triangle ADC$ (g . c . g) $\Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow \triangle ABC$ cân.

□



VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

- ❶ Nếu đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến thì $\triangle ABC$ cân tại A .
- ❷ Nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì đường trung tuyến AH cũng đồng thời là đường cao.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ❶ Trong $\triangle ABC$, ta có

- Vì AH là đường cao nên $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$.
- Vì AH là trung tuyến nên $HB = HC$.

Xét hai tam giác $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$, ta có

- $HB = HC$;
- $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$;
- AH là cạnh chung.

Suy ra $\triangle AHB = \triangle AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow \triangle ABC$ cân tại A .

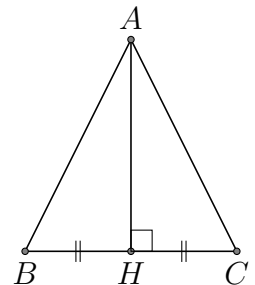
- ❷ Ta có nhận xét

- Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$.
- Vì AH là trung tuyến nên $HB = HC$.

Xét hai tam giác $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$, ta có

- $AB = AC$,
- $\widehat{B} = \widehat{C}$;
- $HB = HC$.

Suy ra $\triangle AHB = \triangle AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$.



Mặt khác $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{H}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \Leftrightarrow AH$ là đường cao. $\square$



❶ Từ đây, chúng ta có thêm được một tính chất là “Nếu một tam giác có đường cao đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân”.

❷ Các em học sinh hãy chứng minh thêm các tính chất:

- Nếu một tam giác có đường cao đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.
- Nếu một tam giác có đường phân giác đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân.
- Trong tam giác cân hai phân giác (đường cao, trung tuyến) ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau. Hãy thử xem điều ngược lại có đúng không?
- Nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì $\widehat{B} < 90^\circ$ - Hãy thử nêu ý nghĩa của tính chất này.

□ DẠNG 2. Chứng minh một tam giác là tam giác cân, tam giác đều

Phương pháp giải:

Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tam giác cân, tam giác đều.

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ cân.

✎ LỜI GIẢI.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa

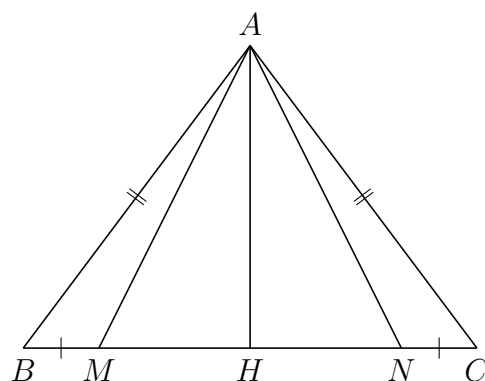
Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$

Xét $\triangle BAM$ và $\triangle CAN$ có

- $AB = AC$;
- $\widehat{B} = \widehat{C}$;
- $BM = CN$ (gt).

$\Rightarrow \triangle BAM = \triangle CAN$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A .



Cách 2: Sử dụng tính chất

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC . Suy ra $BH = CH$.

Từ giả thiết $BM = CN$ ta suy ra $HM = HN$.

Tam giác AMN có AH vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên $\triangle AMN$ cân tại A . $\square$

VÍ DỤ 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Vẽ đường thẳng a qua điểm A sao cho B, C cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ a . Vẽ $BH \perp a, CK \perp a (H, K \in a)$. Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh rằng:

❶ $AH = CK$.

- ② $HK = BH + CK$.
 ③ $\triangle MHK$ vuông cân.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Xét hai tam giác vuông $\triangle AHB$ và $\triangle CKA$, ta có

- $AB = AC$ (giả thiết)
- $\widehat{HAB} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{KAC} = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \widehat{ACK}) = \widehat{ACK}$

Suy ra: $\triangle AHB = \triangle CKA$ (cạnh huyền - góc nhọn).

$\Rightarrow \widehat{HBA} = \widehat{KAC}$, $BH = AK$ và $AH = CK$.

- ② Ta có ngay

$$HK = AK + AH = BH + CK$$

- ③ Xét hai tam giác $\triangle MHB$ và $\triangle MKA$, ta có

- $BH = AK$ (theo kết quả a)
- $\widehat{HBM} = \widehat{HBA} + \widehat{ABM} = \widehat{KAC} + 45^\circ = \widehat{KAM}$
- $MB = \frac{1}{2}BC = MA$, trung tuyến thuộc cạnh huyền.

$\Rightarrow \triangle MHB = \triangle MKA$ (c.g.c)

Từ đó, $MH = MK \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại M

$$\widehat{BMH} = \widehat{AMK}$$

$$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HMA} + \widehat{AMK} = \widehat{HMA} + \widehat{BMH} = \widehat{BMA} = 90^\circ$$

Vậy $\triangle MHK$ vuông cân tại M

□

VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$ đều. Lấy các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các tia đối của tia AC, BA, CB , sao cho $AM = BN = CP$. Chứng minh rằng $\triangle MNP$ là tam giác đều.

✎ LỜI GIẢI.

Xét ba tam giác $\triangle AMN, \triangle BNP, \triangle CPM$, ta có:

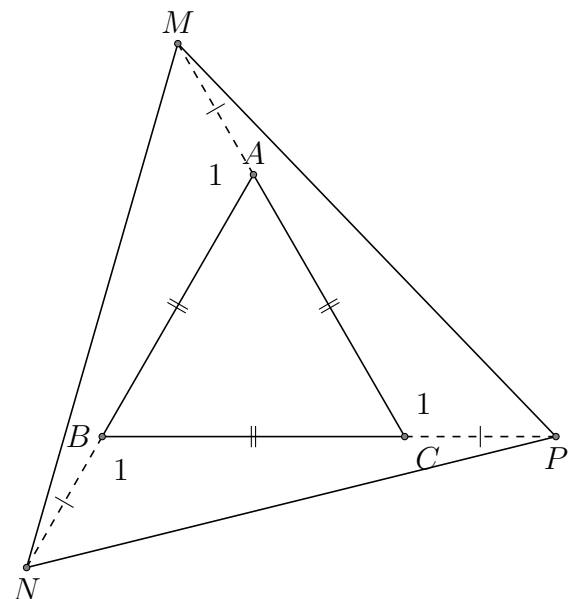
$$AM = BN = CP \text{ (gt)}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 120^\circ$$

$$AN = BP = CM = AM + AC$$

Suy ra: $\triangle AMN = \triangle BNP = \triangle CPM$

$\Rightarrow MN = NP = PM \Leftrightarrow \triangle MNP$ là tam giác đều.



□

VÍ DỤ 8. Cho ba điểm A, C, B thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ các tam giác đều ACD, BCE . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AE và BD . Chứng minh rằng $\triangle CIK$ là tam giác đều.

LỜI GIẢI.

Xét tam giác $\triangle ACE$ và tam giác $\triangle DCB$ có:

$AC = DC$, vì chúng là cạnh của tam giác đều

$$\widehat{ACE} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 60^\circ + \widehat{DCE} = \widehat{BCE} + \widehat{DCE} = \widehat{DCB}$$

$CE = CB$, vì chúng là cạnh của tam giác đều

Suy ra $\triangle ACE = \triangle DCB$ (c.g.c) $\Rightarrow CI = CK$ (hai trung tuyến tương ứng).

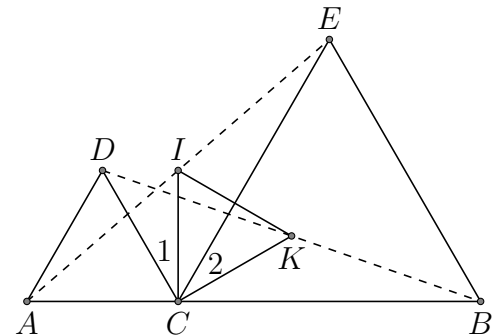
Mặt khác ta có:

$$\widehat{DCE} = 180^\circ - \widehat{ACD} - \widehat{BCE} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$$

$$\Rightarrow \widehat{ICK} = 60^\circ.$$

Vậy $\triangle CIK$ là tam giác cân có một góc bằng 60° nên nó là tam giác đều. □



DẠNG 3. Sử dụng tam giác cân, tam giác đều để giải toán định lượng

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° thì cạnh góc vuông đối diện với góc 30° bằng một phần hai cạnh huyền.

LỜI GIẢI.

Giả sử $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{C} = 30^\circ$, ta cần đi chứng minh $AB = \frac{1}{2}BC$. Ta có thể lựa chọn một trong những cách sau:

Cách 1: Trên BC lấy điểm M sao cho $AB = MB$.

$\Rightarrow \triangle ABM$ là tam giác cân.

$\Rightarrow \triangle ABM$ là tam giác đều vì có $\widehat{B} = 60^\circ$

$$\Leftrightarrow AB = BM = MA$$

Trong $\triangle MAC$, ta có:

$$\widehat{A_1} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \widehat{C_1} \Leftrightarrow MA = MC.$$

Khi đó:

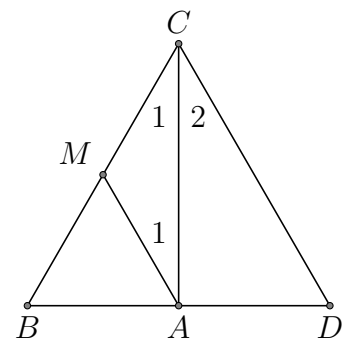
$$BC = BM + MC = AB + AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC.$$

Cách 2: Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$.

Nhận xét rằng $\triangle BCD$ có đường cao CA cũng là đường trung tuyến nên $\triangle BCD$ là tam giác cân.

$\Rightarrow \triangle BCD$ là tam giác đều vì có $\widehat{B} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow BC = BD = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC.$$



! Qua ví dụ trên, chúng ta thu nhận được một kết quả sau:

“Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° thì cạnh đối diện với góc 30° bằng một nửa cạnh huyền và ngược lại.”

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$, có đường cao AH và trung tuyến AM chia góc $\widehat{A}$ thành 3 góc bằng nhau. Tính số đo các góc của $\triangle ABC$.

LỜI GIẢI.

Lấy điểm K trên cạnh AC sao cho $AK = AH$.

Trong $\triangle ABM$ có đường cao AH cũng là đường phân giác nên

$$\triangle ABM \text{ cân tại } A \Rightarrow MH = \frac{1}{2}BM.$$

Xét hai tam giác $\triangle AHM, \triangle AKM$, ta có

- $AH = AK$;
- $\widehat{A_2} = \widehat{A_3}$ (gt);
- AM chung.

Suy ra $\triangle AHM = \triangle AKM$, nên

$$\widehat{AKM} = \widehat{AHM} = 90^\circ \text{ và } MK = MH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC.$$

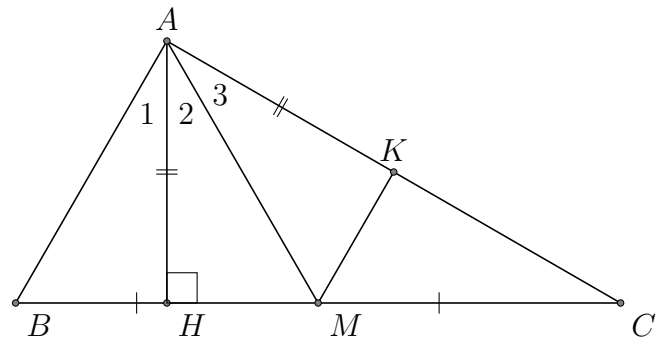
Trong $\triangle KMC$ vuông tại K , ta có

$$MK = \frac{1}{2}MC \Leftrightarrow \widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{HAC} = 90^\circ - 30^\circ =$$

$$60^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \frac{3}{2}\widehat{HAC} = 90^\circ.$$

$$\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 60^\circ.$$

□



! Qua ví dụ trên, chúng ta thấy được một kết quả:

“Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° thì các đường cao, đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông sẽ chia góc vuông thành 3 phần bằng nhau và ngược lại”

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ cân. Tính số đo của các góc $\widehat{B}, \widehat{C}$, biết:

- ① $\widehat{A} = 120^\circ$
- ② $\widehat{A} = 30^\circ$

LỜI GIẢI.

- ❶ Nhận xét rằng, với $\widehat{A} = 120^\circ$ thì $\triangle ABC$ chỉ có thể cân tại A (bởi nếu trái lại, nó cân tại B thì $\widehat{C} = 120^\circ$ suy ra $\widehat{A} + \widehat{C} = 240^\circ > 180^\circ$ (mâu thuẫn), do đó

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

- ❷ Ta xét ba trường hợp:

TH1: Nếu tam giác ABC cân tại A thì

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

TH2: Nếu tam giác ABC cân tại C thì

$$\widehat{B} = \widehat{A} = 30^\circ.$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{A} = 120^\circ.$$

TH3: Nếu tam giác ABC cân tại B thì

$$\widehat{C} = \widehat{A} = 30^\circ.$$

$$\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{C} - \widehat{A} = 120^\circ.$$

□

⚠ Như vậy, ta cần thấy rằng với $\triangle ABC$ cân có một góc bằng α° ta có nhận xét sau

- ❶ Nếu $0 < \alpha < 90^\circ$ thì sẽ có hai trường hợp:

TH1: Khi α là góc ở đỉnh thì góc ở đáy bằng: $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

TH2: Khi α là góc ở đáy thì góc ở đỉnh bằng $180^\circ - 2\alpha$

- ❷ Nếu $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ thì α là góc ở đỉnh và khi đó góc ở đáy bằng $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Lấy các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho $BD = BA$ và $CA = CE$. Tính số đo góc $\widehat{DAE}$, biết $\widehat{A} = 80^\circ$

✍ LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ADE$, ta có

$$\widehat{DAE} = 180^\circ - \widehat{AED} - \widehat{ADE}. \quad (1)$$

Từ giả thiết ta lần lượt thấy

Vì $BD = BA$ nên $\triangle ABD$ cân tại B , do đó

$$\widehat{ADE} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B}. \quad (2)$$

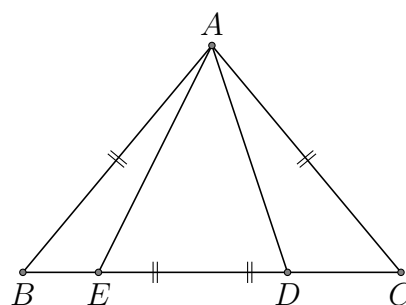
Vì $CA = CE$ nên $\triangle ACE$ cân tại C , do đó

$$\widehat{AED} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{C}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được

$$\widehat{DAE} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B}\right) - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{C}\right) = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) = 50^\circ. \quad \square$$

⚠ Rất nhiều học sinh mắc phải lỗi vẽ hình khi hực hiện ví dụ này và lỗi đó xuất phát từ sự tùy tiện về độ dài (cần nhớ rằng $AB + AC > BC$).



▢ DẠNG 4. Sử dụng tam giác cân giải bài toán định tính*Phương pháp giải:*

VÍ DỤ 1. Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C theo thứ tự đó. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC . Kẻ các tia Mx, Ny thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC sao cho $Mx \perp AB$ và $Ny \perp BC$. Một đường thẳng qua B cắt Mx, Ny theo thứ tự tại P, Q . Chứng minh $AP \parallel CQ$

✍ LỜI GIẢI.

Nhận xét rằng

Vì Mx là trung trực của AB nên:

$$PA = PB \Leftrightarrow \triangle PAB \text{ cân tại } P \Leftrightarrow \widehat{PAB} = \widehat{PBA}$$

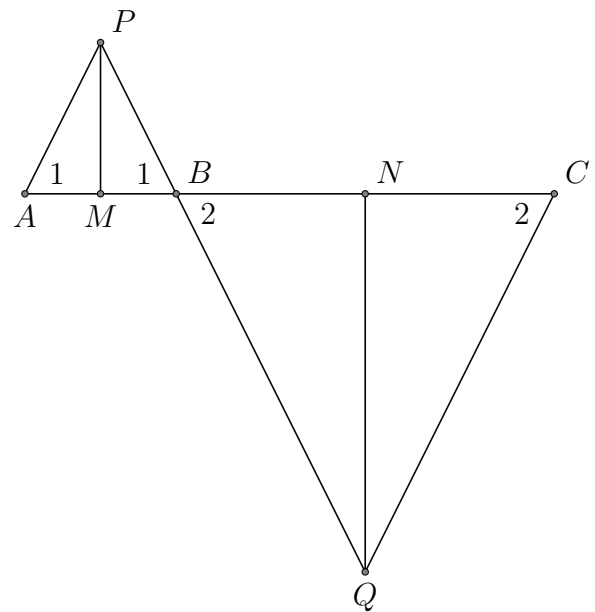
Vì Ny là trung trực của BC nên

$$QB = QC \Leftrightarrow \triangle QBC \text{ cân tại } Q \Leftrightarrow \widehat{QBC} = \widehat{QCB}$$

Mặt khác ta lại có

$$\widehat{PBA} = \widehat{QBC} \text{ (hai góc đối đỉnh).}$$

$\Rightarrow \widehat{PAB} = \widehat{QCA} \Leftrightarrow AP \parallel CQ$, vì có hai góc so le trong bằng nhau.



□

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi Ax là tia phân giác của góc ngoài đỉnh A . Chứng minh rằng $Ax \parallel BC$.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có thể chọn một trong ba cách trình bày sau

Cách 1: Sử dụng góc đồng vị

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$

Vì Ax là tia phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ nên

$$\widehat{A_1} = \frac{1}{2}\widehat{tAC} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{B}) = \widehat{B}$$

$\Rightarrow Ax \parallel BC$ vì có hai góc đồng vị bằng nhau.

Cách 2: Sử dụng góc so le trong.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Vì Ax là tia phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ nên

$$\widehat{A_2} = \frac{1}{2}\widehat{tAC} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1}{2}(\widehat{C} + \widehat{C}) = \widehat{C}$$

$\Rightarrow Ax \parallel BC$ vì có hai góc so le trong bằng nhau.

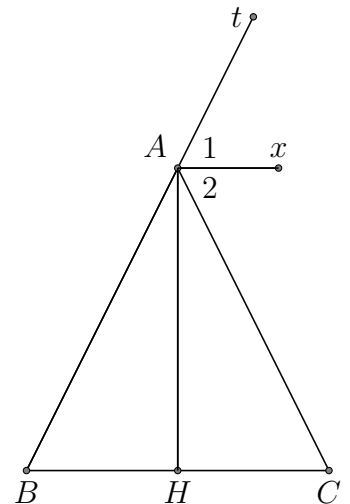
Cách 3: Sử dụng tính chất đường cao của tam giác vuông.

Vẽ đường cao AH , suy ra

$$AH \perp BC$$

AH cũng là phân giác của $\widehat{A} \Rightarrow AH \perp Ax$ (tính chất đường phân giác trong và đường phân giác ngoài)

Vậy $Ax \parallel BC$, vì cùng vuông góc với AH .

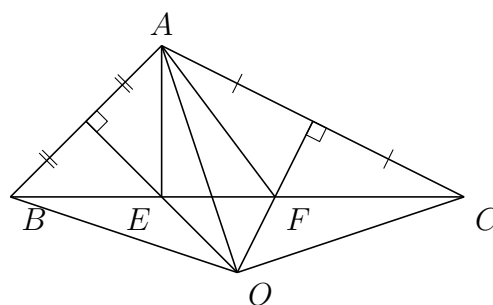


□

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O và cắt BC theo thứ tự E, F . Chứng minh rằng

- ❶ $OB = OC$.
- ❷ AO là tia phân giác của góc $\widehat{EAF}$.

✎ LỜI GIẢI.



❶ Ta lần lượt có

Vì O thuộc trung trực của AB nên

$$OA = OB. \quad (1)$$

Vì O thuộc trung trực của AC nên

$$OA = OC. \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra $OB = OC$. (đpcm)

② Theo kết quả câu a), ta có

$$OB = OC \Leftrightarrow \triangle OBC \text{ cân tại } O \Leftrightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}.$$

$\triangle OAE = \triangle OBE$ vì $OA = OB$, $EA = EB$ và OE chung. Suy ra

$$\widehat{OBC} = \widehat{OAE} \quad (3)$$

$\triangle OAFE = \triangle OCF$ vì $OA = OC$, $FA = FC$ và OF chung. Suy ra:

$$\widehat{OCB} = \widehat{OAF}. \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $\widehat{OAE} = \widehat{OAF} \Leftrightarrow AO$ là tia phân giác $\widehat{EAF}$.

□

🎯 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ cân. Tính số đo của các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, biết

a) $\widehat{A} = 160^\circ$.

b) $\widehat{A} = 90^\circ$.

c) $\widehat{A} = 36^\circ$.

✍ **LỜI GIẢI.**

① Nhận xét rằng, với $\widehat{A} = 160^\circ$ thì $\triangle ABC$ không thể cân tại A (bởi nếu trái lại, nó cân tại B chẳng hạn thì $\widehat{C} = 160^\circ$ suy ra $\widehat{A} + \widehat{C} = 320^\circ > 180^\circ$, mâu thuẫn), do đó

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ.$$

② Nhận xét rằng, với $\widehat{A} = 90^\circ$ thì $\triangle ABC$ chỉ có thể cân tại A (bởi nếu trái lại nó cân tại B chẳng hạn thì $\widehat{C} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$, mâu thuẫn), do đó

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

③ Ta xét ba trường hợp

— Trường hợp 1: Nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ.$$

— Trường hợp 2: Nếu $\triangle ABC$ cân tại C thì

$$\widehat{B} = \widehat{A} = 36^\circ \text{ và } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ.$$

— Trường hợp 3: Nếu $\triangle ABC$ cân tại B thì

$$\widehat{C} = \widehat{A} = 36^\circ \text{ và } \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ.$$

□

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Vẽ tam giác cân ADC ($DA = DC$), với góc ở đáy bằng 15° vào phía trong $\triangle ABC$. Vẽ tam giác đều $\triangle ABE$ ở phía $\triangle ABC$. Chứng minh rằng ba điểm C, D, E thẳng hàng.

LỜI GIẢI.

Từ giả thiết, ta được $\widehat{ACD} = 15^\circ$.

Xét $\triangle ACE$, ta có

$AC = AB$, vì $\triangle ABC$ cân tại A .

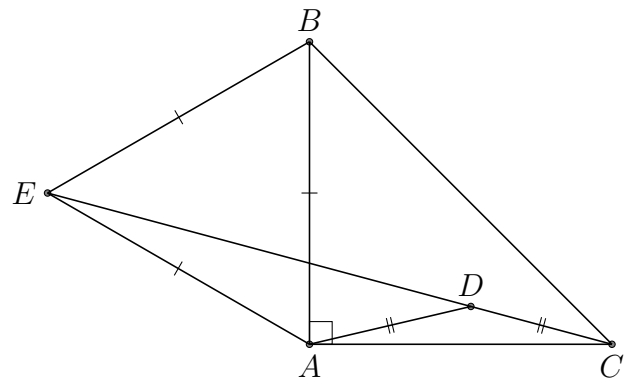
$AE = AB$, vì $\triangle ABE$ đều.

suy ra $AC = AE \Leftrightarrow \triangle ACE$ cân tại A .

Khi đó

$$\begin{aligned}\widehat{ACE} = \widehat{AEC} &= \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{CAE}) \\ &= \frac{1}{2}[180^\circ - (\widehat{EAC} + \widehat{BAC})] = 15^\circ.\end{aligned}$$

Vậy ta nhận thấy $\widehat{ACD} = \widehat{ACE} = 15^\circ \Rightarrow C, D, E$ thẳng hàng. $\square$

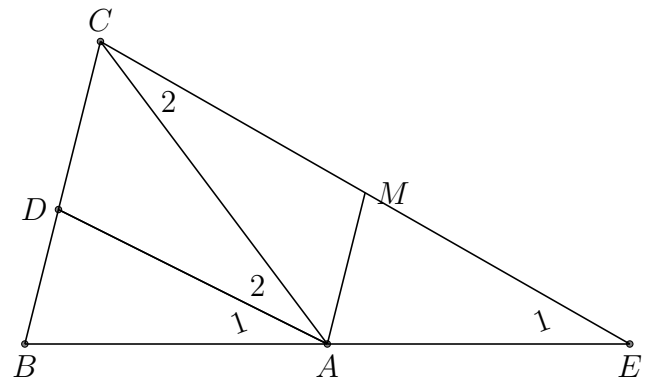


BÀI 3. Cho $\triangle ABC$, phân giác AD . Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AB = AE$. Chứng minh rằng $AD \parallel CE$.

LỜI GIẢI.

Hướng dẫn: có thể sử dụng một trong các cách sau.

- Cách 1: Chứng minh hai góc đồng vị bằng nhau.
- Cách 2: Chứng minh hai góc so le trong bằng nhau.
- Cách 3: Gọi M là trung điểm của CE , chứng minh AD và CE cùng vuông góc với AM .

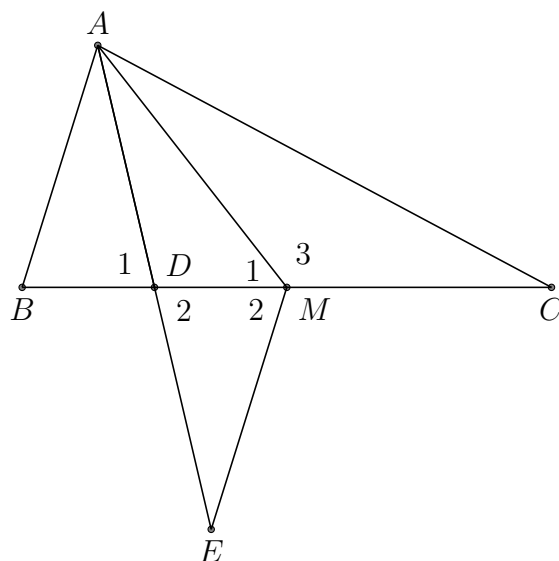


BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 2AB$. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM . Trên tia AD lấy điểm E sao cho $AE = 2AD$. Chứng minh rằng.

a) $\triangle MAE = \triangle MAC$.

b) $AC = 2AD$.

LỜI GIẢI.



❶ Xét hai tam giác $\triangle DAB$ và $\triangle DEM$, ta có

- $AD = ED$;
- giả thiết $AE = 2AD$;
- $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (vì đối đỉnh);
- $BD = MD$ (vì D là trung điểm của BM).

$\Rightarrow \triangle DAB = \triangle DEM \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M_2}$ và $ME = AB = BM = MC$.

Xét hai tam giác $\triangle MAE$, $\triangle MAC$, ta có

AM cạnh chung

$$\widehat{AME} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{MAB} + \widehat{B} = \widehat{M_3}$$

$$ME = MC$$

Suy ra $\triangle MAE = \triangle MAC$ (đpcm).

❷ Theo kết quả câu a, suy ra $AC = AE = 2AD$ (đpcm).

□

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Lấy các điểm D , E theo thứ tự thuộc AB , AC sao cho $AD = AE$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng:

a) $BE = CD$.

b) $DE \parallel BC$.

c) $\triangle OBD = \triangle OCE$.

✍ LỜI GIẢI.

❶ Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có

- $AD = AE$ (gt).
- $\widehat{A}$ chung.
- $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A).

Suy ra $\triangle ABE = \triangle ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$.

❷ Xét $\triangle ADE$ cân tại A ta có $\widehat{D_1} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{ABC}$.

Mà $\widehat{D_1}$ và $\widehat{ABC}$ ở vị trí đồng vị.

Suy ra $DE \parallel BC$.

❸ Xét $\triangle DCB$ và $\triangle ECB$ có

- $\widehat{DBC} = \widehat{ECB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A).
- $BD = EC$ (Vì $AB = AC$ và $AD = AE$).
- BC là cạnh chung.

Do đó $\triangle DCB = \triangle ECB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{ECB} \Rightarrow \triangle BOC$ cân tại O
 $\Rightarrow BO = OC$.

Xét $\triangle BOD$ và $\triangle COE$ có

- $BD = EC$ (Vì $AB = AC$ và $AD = AE$);
- $\widehat{DBO} = \widehat{OCE}$ ($\triangle ABE = \triangle ACD$);
- $BO = OC$ (cmt).

Suy ra $\triangle BOD = \triangle COE$ (c.g.c).

□

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Lấy các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho $BD = BA$ và $CA = CE$. Tính số đo góc $\widehat{DAE}$, biết:

- a) $\widehat{A} = 120^\circ$. b) $\widehat{A} = 90^\circ$. c) $\widehat{A} = 60^\circ$.

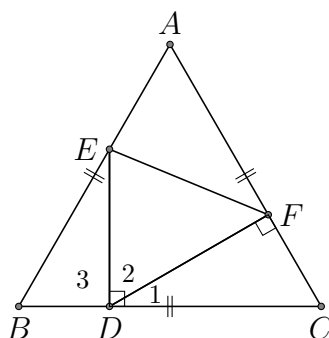
✎ **LỜI GIẢI.**

- a) 30° . b) 45° . c) 60° .

□

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ đều. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BC = 3BD$. Vẽ DE vuông góc với BC ($E \in AB$), vẽ DF vuông góc với AC ($F \in AC$). Chứng minh rằng $\triangle DEF$ là tam giác đều.

✎ **LỜI GIẢI.**



Ta lần lượt có

— $\triangle BDE$ vuông tại D có

$$\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{D_3} = 90^\circ \Rightarrow BE = 2BD = CD.$$

— $\triangle CDF$ vuông tại F ta có

$$\widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{D_1} = 30^\circ \Rightarrow CD = 2CF \Rightarrow CF = BD.$$

Xét hai tam giác $\triangle EBD$ và $\triangle CDF$ ta có

- $EB = CE$;
- $\widehat{B} = \widehat{C}$;
- $BD = CF$.

Suy ra $\triangle EBD = \triangle CDF \Rightarrow DE = DF \Rightarrow \triangle DEF$ cân tại D .

Mặt khác, ta lại có

$$\widehat{D_2} = 180^\circ - \widehat{D_1} - \widehat{D_3} = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

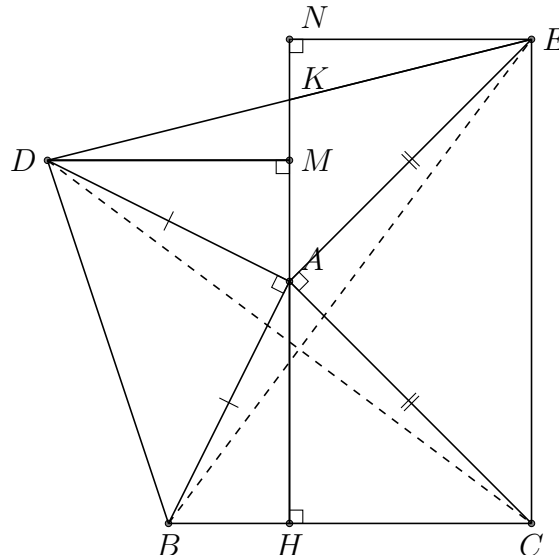
Vậy $\triangle DEF$ cân có một góc bằng 60° nên nó là tam giác đều.

□

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$. Vẽ phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác vuông cân ở A là $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$. Vẽ AH vuông góc với BC , đường thẳng AH cắt DE ở K . Vẽ DM và EN vuông góc với AH ($M, N \in AH$). Chứng minh rằng

- a) $DM = EN$.
- b) $DK = EK$.
- c) Biết $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Chứng minh rằng $CD \perp BE$.

✎ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét $\triangle ABH$ và $\triangle DAM$ có

- $AD = AB$ ($\triangle ABD$ cân tại A).
- $\widehat{DAM} = \widehat{ABH}$ (vì cùng phụ với $\widehat{BAH}$).
- $\widehat{DMA} = \widehat{AHB} = 90^\circ$.

Suy ra $\triangle ABH = \triangle DAM$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow DM = AH$. (1)

Chứng minh tương tự ta cũng có $AH = EN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DM = EN$ (đpcm)

❷ Xét $\triangle DMK$ và $\triangle ENK$ có

- $\widehat{KNE} = \widehat{KMD} = 90^\circ$.
- $DM = NE$ (cmt).
- $\widehat{KDM} = \widehat{ENK}$ (so le trong, $NE \parallel DM$).

Suy ra $\triangle DMK = \triangle ENK$ (g . c . g) $\Rightarrow DK = EK$.

❸ Xét hai tam giác $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có

- $AB = AD$ (giả thiết).
- $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 90^\circ = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.
- $AE = AC$ (giả thiết).

Suy ra $\triangle ABE = \triangle ADC$ (c . g . c) $\Rightarrow BE = CE$ (đpcm).

Giả sử CD cắt AB, BE theo thứ tự tại I, K_1 . Theo kết quả câu a) ta có $\widehat{ADI} = \widehat{IBK_1}$.

Trong $\triangle BIK_1$, ta có

$$\widehat{IK_1B} = 180^\circ - \widehat{IBK_1} - \widehat{K_1IB} = 180^\circ - \widehat{ADI} - \widehat{AID} = \widehat{BAD} = 90^\circ.$$

Suy ra $CD \perp BE$ (đpcm).

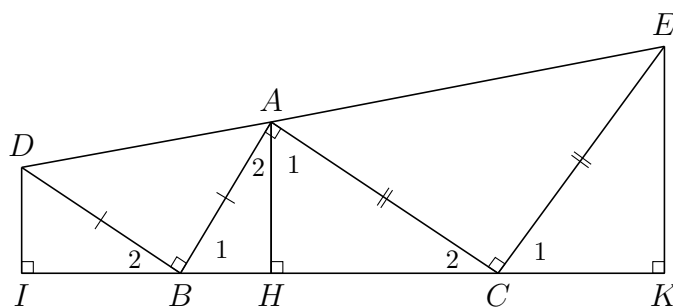
□

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có hai góc B, C nhọn. Vẽ phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác vuông cân $\triangle ABD$ (cân tại B) và $\triangle ACE$ (cân tại C). Vẽ DI và EK vuông góc với BC ($I, K \in BC$). Chứng minh rằng

❶ $BI = CK$.

❷ $BC = ID + EK$.

🔗 LỜI GIẢI.



Kẻ $AH \perp BC$

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle EKE$ có

- $\widehat{AHC} = \widehat{CKE} = 90^\circ$;
- $AC = CE$ (vì $\triangle ACE$ cân tại C);
- $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (vì cùng phụ với $\widehat{C_2}$).

Suy ra $\triangle AHC = \triangle CKE$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AH = CK$ và $HC = EK$. (1)

Chứng minh tương tự ta cũng có $\triangle AHB = \triangle BID$.

Suy ra $AH = BI$ và $HB = DI$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $NI = CK$.

Ta có $BC = BH + HC = DI + EK$ (Vì $HC = EK$ và $HB = DI$ (cmt)). $\square$

BÀI 7 ĐỊNH LÍ PY - TA - GO

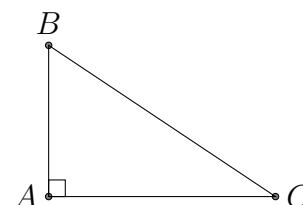
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí Py - ta - go

Trong tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

Như vậy, với $\triangle ABC$ vuông tại A ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



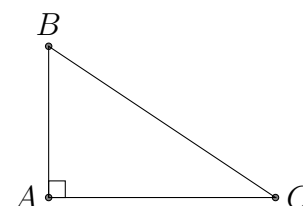
Nhận xét. Từ kết quả của định lí Py - ta - go, chúng ta nhận thấy rằng: “Với mỗi tam giác vuông nếu biết độ dài hai cạnh thì sẽ có được độ dài của cạnh còn lại.”

2. Định lí Py - ta - go đảo

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh còn lại thì tam giác đó là tam giác vuông.

Như vậy, với $\triangle ABC$ ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A.$$



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Tính độ dài cạnh BC .

LỜI GIẢI.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 3^2 + 4^2 = 25 \\ \Rightarrow BC &= 5. \end{aligned}$$

Vậy $BC = 5$ cm. □

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Tính độ dài cạnh AC .

LỜI GIẢI.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= 5^2 - 4^2 = 9 \\ \Rightarrow AC &= 3. \end{aligned}$$

Vậy $AC = 3$ cm. □

VÍ DỤ 3. Xác định dạng của $\triangle ABC$, biết $AB = 0,25$ cm, $BC = 0,2$ cm, $AC = 0,15$ cm.

LỜI GIẢI.

Nhận xét rằng

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 &= (0,2)^2 + (0,15)^2 \\ &= 0,04 + 0,0225 \\ &= 0,0625 \\ &= (0,25)^2 \\ &= AB^2. \end{aligned}$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại C . □

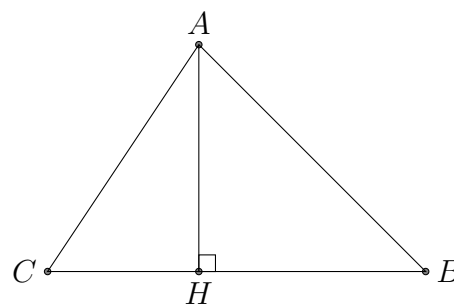
VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Tính chu vi $\triangle ABC$, biết $AC = 13$ cm, $AH = 12$ cm, $BH = 9$ cm.

LỜI GIẢI.

Để tính được chu vi $\triangle ABC$, ta cần xác định độ dài của AB, BC .

— Trong $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ &= 12^2 + 9^2 \\ &= 144 + 81 = 225 \\ \Rightarrow AB &= 15. \end{aligned}$$



— Trong $\triangle ACH$ vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} CH^2 &= AC^2 - AH^2 \\ &= 13^2 - 12^2 \\ &= 169 - 144 = 25 \\ \Rightarrow CH &= 5 \\ \Rightarrow BC &= BH + CH = 9 + 5 = 14. \end{aligned}$$

Khi đó, chu vi $\triangle ABC$ được tính bởi

$$CV_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 15 + 14 + 13 = 42 \text{ cm.}$$

□

© BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Tính độ dài cạnh AC , biết:

a) $AB = 3 \text{ cm}, BC = 5 \text{ cm};$

b) $AB = 8 \text{ cm}, BC = 10 \text{ cm};$

c) $AB = 1 \text{ cm}, BC = 1,25 \text{ cm};$

d) $AB = 0,8 \text{ cm}, BC = 1 \text{ cm}.$

LỜI GIẢI.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên

a)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= 5^2 - 3^2 = 16 \\ \Rightarrow AC &= 4 \end{aligned}$$

Vậy $AC = 4 \text{ cm}.$

b)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= 10^2 - 8^2 = 36 \\ \Rightarrow AC &= 6 \end{aligned}$$

Vậy $AC = 6 \text{ cm}.$

c)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= 1,25^2 - 1^2 = 0,5625 \\ \Rightarrow AC &= 0,75 \end{aligned}$$

Vậy $AC = 0,75 \text{ cm}.$

d)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= 1^2 - 0,8^2 = 0,36 \\ \Rightarrow AC &= 0,6 \end{aligned}$$

Vậy $AC = 0,6 \text{ cm}.$

□

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Tính độ dài cạnh BC , biết:

a) $AB = AC = 2 \text{ cm};$

b) $AB = 9 \text{ cm}, AC = 12 \text{ cm};$

c) $AB = 12 \text{ cm}, AC = 16 \text{ cm};$

d) $AB = \sqrt{7} \text{ cm}, AC = \sqrt{2} \text{ cm}.$

LỜI GIẢI.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên

a)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 2^2 + 2^2 = 8 \\ \Rightarrow BC &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy $BC = 2\sqrt{2}$ cm.

b)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 9^2 + 12^2 = 225 \\ \Rightarrow BC &= 15 \end{aligned}$$

Vậy $BC = 15$ cm.

c)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 12^2 + 16^2 = 400 \\ \Rightarrow BC &= 20 \end{aligned}$$

Vậy $BC = 20$ cm.

d)

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2 = 9 \\ \Rightarrow BC &= 3 \end{aligned}$$

Vậy $BC = 3$ cm.

□

BÀI 3. Xác định dạng của $\triangle ABC$, biết:a) $AB = 15$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 25$ cm; b) $AB = 4$ cm, $BC = 4\sqrt{2}$ cm, $AC = 4$ cm.**LỜI GIẢI.**

① Nhận xét rằng

$$AB^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2 = AC^2$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại B .

② Nhận xét rằng

$$AB^2 + AC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 = (4\sqrt{2})^2 = BC^2$$

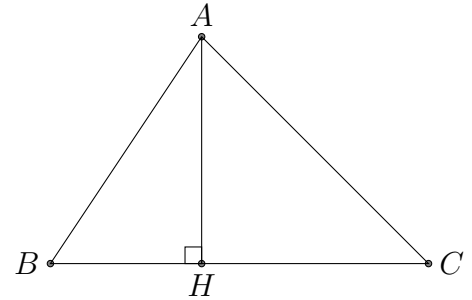
Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A .

□

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Tính chu vi $\triangle ABC$, biết $AC = 20$ cm, $AH = 12$ cm, $BH = 5$ cm.**LỜI GIẢI.**Để tính được chu vi $\triangle ABC$, ta cần xác định độ dài của AB, BC .

— Trong $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ &= 12^2 + 5^2 \\ &= 144 + 25 = 169 \\ \Rightarrow AB &= 13. \end{aligned}$$



— Trong $\triangle ACH$ vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} CH^2 &= AC^2 - AH^2 \\ &= 20^2 - 12^2 \\ &= 400 - 144 = 256 \\ \Rightarrow CH &= 16 \\ \Rightarrow BC &= BH + CH = 5 + 16 = 21. \end{aligned}$$

Khi đó, chu vi $\triangle ABC$ được tính bởi

$$CV_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 13 + 21 + 20 = 54 \text{ cm.}$$

□

BÀI 5. Cho hai đoạn thẳng $AC = 16 \text{ cm}$ và $BD = 12 \text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA biết AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

LỜI GIẢI.

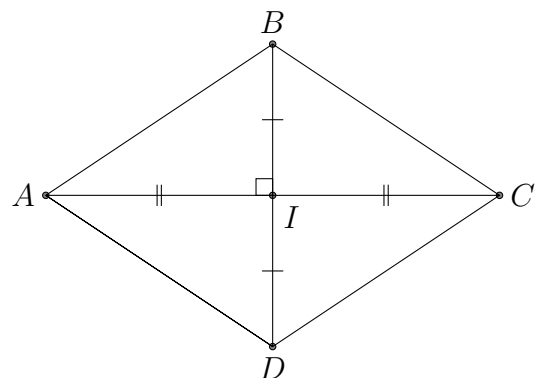
Gọi I là giao điểm của AC và BD , khi đó $AI = CI = 4 \text{ cm}$, $BI = DI = 3 \text{ cm}$, $\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \widehat{CID} = \widehat{DIA} = 90^\circ$.

Ta có $\triangle ABI = \triangle CBI = \triangle CDI = \triangle ADI$ (c.g.c).

$\Rightarrow AB = CB = CD = AD$ (các cạnh tương ứng).

Áp dụng định lý Py - ta - go, ta có $AB^2 = AI^2 + BI^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AB = 5 \text{ cm}$.

Vậy $AB = BC = CD = DA = 5 \text{ cm}$.



□

BÀI 6. Trên đường trung trực d của đoạn thẳng AB lấy điểm C bất kỳ. Chứng minh rằng:

- ① $CA = CB$;
- ② d là đường phân giác của $\widehat{ACB}$.

LỜI GIẢI.

① Gọi H là trung điểm của AB .

Theo đề ta có C nằm trên đường trung trực của AB nên $CH \perp AB$.

Xét $\triangle ACH$ và $\triangle BCH$, ta có:

- CH là cạnh chung
- $AH = BH$ (do H là trung điểm AB)
- $\widehat{CHA} = \widehat{CHB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ACH = \triangle BCH$ (c.g.c).

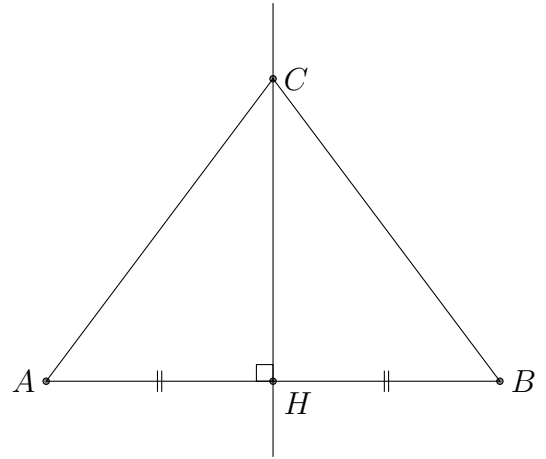
$\Rightarrow CA = CB$ (hai cạnh tương ứng).

② Lại có $\triangle ACH = \triangle BCH$

$\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{BCH}$ (hai góc tương ứng).

Vậy CH (hay d) là đường phân giác của $\widehat{ACB}$.

□

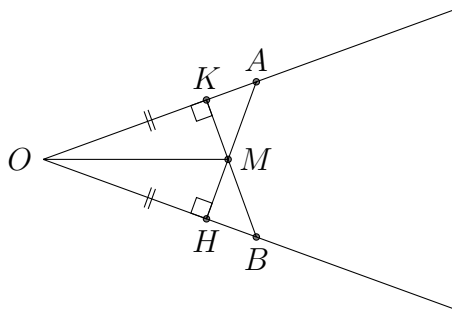


BÀI 7. Cho góc $\widehat{xOy}$. Lấy các điểm A, B theo thứ tự thuộc Ox và Oy sao cho $OA = OB$. Vẽ AH vuông góc với Oy ($H \in Oy$), vẽ BK vuông góc với Ox ($K \in Ox$). Gọi M là giao điểm của AH và BK . Chứng minh rằng:

① $OH = OK$;

② OM là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

✎ LỜI GIẢI.



① Xét $\triangle AOH$ có

$$\begin{aligned}\widehat{AOH} + \widehat{AHO} + \widehat{OAH} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{OAH} &= 180^\circ - (\widehat{AOH} + \widehat{AHO}) \\ \Rightarrow \widehat{OAH} &= 180^\circ - (\widehat{AOH} + 90^\circ) \\ &= 90^\circ - \widehat{AOH}.\end{aligned}$$

Xét $\triangle BOK$ có

$$\begin{aligned}\widehat{BOK} + \widehat{BKO} + \widehat{OBK} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{OBK} &= 180^\circ - (\widehat{BOK} + \widehat{BKO}) \\ \Rightarrow \widehat{OBK} &= 180^\circ - (\widehat{BOK} + 90^\circ) \\ &= 90^\circ - \widehat{BOK} \\ &= 90^\circ - \widehat{AOH}.\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{OAH} = \widehat{OBK}$.

Xét $\triangle AOH$ và $\triangle BOK$ có:

— $OA = OB$ (giả thiết)

— $\widehat{OAH} = \widehat{OBK}$

— $\widehat{O}$ là góc chung

$\Rightarrow \triangle AOH = \triangle BOK$ (g.c.g).

$\Rightarrow OH = OK$ (hai cạnh tương ứng).

② Ta có

$OA = OB, OH = OK$.

Mà $OA = OK + KA \Rightarrow KA = OA - OK$ và $OB = OH + HB \Rightarrow HB = OB - OH = OA - OK$.

Do đó $KA = HB$.

Xét $\triangle AKM$ và $\triangle BHM$ ta có:

— $KA = HB$

— $\widehat{MAK} = \widehat{MBH}$

— $\widehat{MKA} = \widehat{MHB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AKM = \triangle BHM$ (g.c.g).

$\Rightarrow KM = HM$ (hai cạnh tương ứng).

Xét $\triangle KMO$ và $\triangle HMO$ ta có:

— $OK = OH$

— OM là cạnh chung

— $MK = MH$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle KMO = \triangle HMO$ (c.c.c).

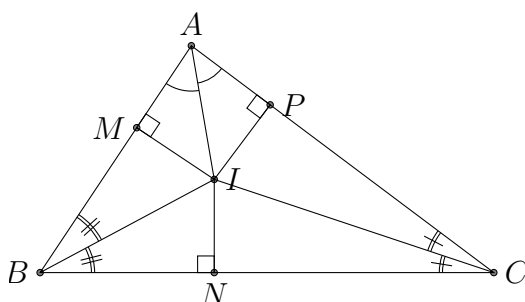
$\Rightarrow \widehat{KOM} = \widehat{HOM}$ (hai góc tương ứng).

Vậy OM là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

□

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$. Các tia phân giác của các góc A, B cắt nhau tại I . Vẽ $IM \perp AB$ ($M \in AB$), $IN \perp BC$ ($N \in BC$), $IP \perp AC$ ($P \in AC$). Chứng minh rằng $IM = IN = IP$.

✎ LỜI GIẢI.



Vì AI là tia phân giác của $\widehat{A}$ nên $\widehat{MAI} = \widehat{PAI}$.

Xét $\triangle AMI$ có

$$\begin{aligned}\widehat{MAI} + \widehat{MIA} + \widehat{AMI} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{MIA} &= 180^\circ - (\widehat{MAI} + \widehat{AMI}) \\ \Rightarrow \widehat{MIA} &= 180^\circ - (\widehat{MAI} + 90^\circ) \\ &= 90^\circ - \widehat{MAI}.\end{aligned}$$

Xét $\triangle API$ có

$$\begin{aligned}\widehat{PAI} + \widehat{PIA} + \widehat{API} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{PIA} &= 180^\circ - (\widehat{PAI} + \widehat{API}) \\ \Rightarrow \widehat{PIA} &= 180^\circ - (\widehat{PAI} + 90^\circ) \\ &= 180^\circ - (\widehat{MAI} + 90^\circ) = 90^\circ - \widehat{MAI}.\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{MIA} = \widehat{PIA}$.

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle API$ ta có:

- $\widehat{MAI} = \widehat{PAI}$
- AI là cạnh chung
- $\widehat{MIA} = \widehat{PIA}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle MIA = \triangle PIA$ (g.c.g).

$\Rightarrow IM = IP$ (hai cạnh tương ứng).

Tương tự, ta cũng có BI là tia phân giác của $\widehat{B}$ nên $\widehat{MBI} = \widehat{NBI}$.

$\Rightarrow \widehat{MIB} = \widehat{NIB} \Rightarrow \triangle MIB = \triangle NIB$ (g.c.g).

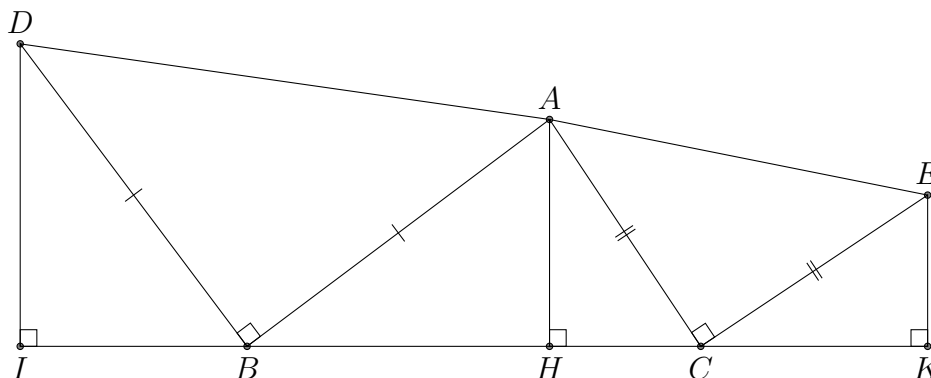
$\Rightarrow IM = IN$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy $IN = IM = IP$. □

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có hai góc B, C nhọn. Vẽ phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác vuông cân $\triangle ABD$ (cân tại B) và $\triangle ACE$ (cân tại C). Vẽ DI và EK vuông góc với BC ($I, K \in BC$). Chứng minh rằng:

- ① $BI = CK$;
- ② $BC = ID + EK$.

✎ **LỜI GIẢI.**



- ① Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Xét $\triangle ABH$ có

$$\begin{aligned}
\widehat{ABH} + \widehat{BAH} + \widehat{AHB} &= 180^\circ \\
\Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{BAH} &= 180^\circ - \widehat{AHB} \\
\Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{BAH} &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad (1)
\end{aligned}$$

Xét $\triangle DIB$ có

$$\begin{aligned}
\widehat{DIB} + \widehat{DBI} + \widehat{BDI} &= 180^\circ \\
\Rightarrow \widehat{DBI} + \widehat{BDI} &= 180^\circ - \widehat{DIB} \\
\Rightarrow \widehat{DBI} + \widehat{BDI} &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad (2)
\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}
\widehat{DBI} + \widehat{DBA} + \widehat{ABH} &= 180^\circ \\
\Rightarrow \widehat{DBI} + \widehat{ABH} &= 180^\circ - \widehat{DBA} \\
\Rightarrow \widehat{DBI} + \widehat{ABH} &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad (3)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{DBI}$.

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{BDI} = \widehat{ABH}$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle BDI$ ta có:

- $\widehat{BAH} = \widehat{DBI}$
- $\widehat{BDI} = \widehat{ABH}$
- $AB = BD$

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BDI$ (g.c.g).

$\Rightarrow AH = BI$ (hai cạnh tương ứng).

Xét $\triangle ACH$ có

$$\begin{aligned}
\widehat{ACH} + \widehat{CAH} + \widehat{AHC} &= 180^\circ \\
\Rightarrow \widehat{ACH} + \widehat{CAH} &= 180^\circ - \widehat{AHC} \\
\Rightarrow \widehat{ACH} + \widehat{CAH} &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad (4)
\end{aligned}$$

Xét $\triangle CEK$ có

$$\begin{aligned}
\widehat{CEK} + \widehat{CKE} + \widehat{ECK} &= 180^\circ \\
\Rightarrow \widehat{ECK} + \widehat{CEK} &= 180^\circ - \widehat{CKE} \\
\Rightarrow \widehat{ECK} + \widehat{CEK} &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad (5)
\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}
\widehat{ECK} + \widehat{ACE} + \widehat{ACH} &= 180^\circ \\
\Rightarrow \widehat{ECK} + \widehat{ACH} &= 180^\circ - \widehat{ACE} \\
\Rightarrow \widehat{ECK} + \widehat{ACH} &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad (6)
\end{aligned}$$

Từ (4) và (6) suy ra $\widehat{CAH} = \widehat{ECK}$.

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{ACH} = \widehat{CEK}$.

Xét $\triangle ACH$ và $\triangle CEK$ ta có:

$$— \widehat{CAH} = \widehat{ECK}$$

$$— \widehat{ACH} = \widehat{CEK}$$

$$— AC = CE$$

$$\Rightarrow \triangle ACH = \triangle CEK \text{ (g.c.g).}$$

$$\Rightarrow AH = CK \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

$$\text{Vậy } BI = CK.$$

② Theo câu a) ta có:

$$\triangle ABH = \triangle BDI \text{ nên } HB = ID \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

$$\triangle ACH = \triangle CEK \text{ nên } HC = EK \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

$$\text{Mặt khác, } BH + CH = BC \text{ do đó } ID + EK = BC \text{ (đpcm).}$$

□

BÀI 8

CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Chúng ta đã biết các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông như sau:

- **Trường hợp 1:** Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.
- **Trường hợp 2:** Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.
- **Trường hợp 3:** Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Ngoài ra nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Chứng minh trường hợp bằng nhau thứ 4 của hai tam giác vuông.

 LỜI GIẢI.

Giả sử, có $\triangle ABC$ vuông tại A và $\triangle A_1B_1C_1$ vuông tại A_1 , biết $AB = A_1B_1$ và $BC = B_1C_1$, ta cần đi chứng minh rằng $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Thật vậy

- Trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2. \quad (1)$$

- Trong $\triangle A_1B_1C_1$ vuông tại A_1 , ta có

$$B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 \Leftrightarrow A_1C_1^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC^2 = A_1C_1^2 \Leftrightarrow AC = A_1C_1$. Khi đó, xét $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ có

- $AB = A_1B_1$; — $\hat{A} = \hat{A}_1 = 90^\circ$; — $AC = A_1C_1$.

$$V_{\hat{a}y} \triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1 \text{ (c.g.c.)}.$$

VÍ DỤ 2. Cho $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt. Trên tia phân giác Ot của $\widehat{xOy}$ lấy điểm A . Gọi M là trung điểm của OA . Đường thẳng qua M vuông góc với OA cắt Ox, Oy theo thứ tự tại B, C . Chứng minh rằng $AB \parallel Ox, AC \parallel Oy$.

 LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle OBM$ có

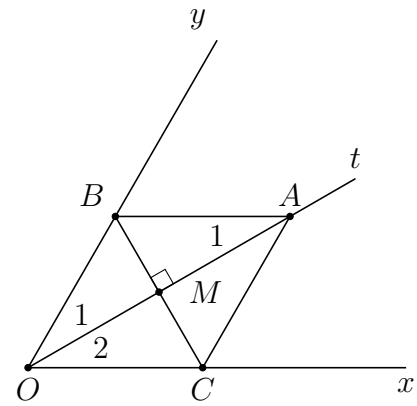
- BM chung;
- $\widehat{AMB} = \widehat{OMB} = 90^\circ$;
- $MA = MO$ (vì M là trung điểm OA).

Suy ra $\triangle ABM = \triangle OBM$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{O}_1$, mà $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (vì Ot là tia phân giác $\widehat{xOy}$).

Suy ra, $\widehat{A}_1 = \widehat{O}_2$, mà hai góc này ở vị trí so le trong. Suy ra $AB \parallel Ox$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $AC \parallel Oy$.

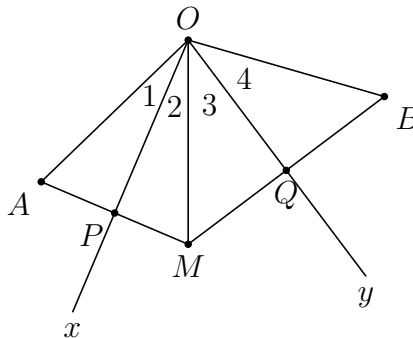


□

VÍ DỤ 3. Cho $\widehat{xOy}$ nhọn, M là điểm nằm trong góc đó.

- ❶ Hãy vẽ các điểm A và B sao cho Ox là đường trung trực của MA và Oy là đường trung trực của MB .
- ❷ Chứng minh rằng điểm O thuộc đường trung trực của AB .
- ❸ Tính số đo của góc $\widehat{AOB}$, biết $\widehat{xOy} = \alpha$.
- ❹ Hãy xác định vị trí của điểm O khi $\widehat{xOy} = 90^\circ$.

✎ LỜI GIẢI.



❶ Ta thực hiện như sau

- Vẽ $MP \perp Ox$, rồi lấy trên tia MP điểm A sao cho $PA = PM$.
- Vẽ $MQ \perp Oy$, rồi lấy trên tia MQ điểm B sao cho $QB = QM$.

❷ Ta có

$$OM = OA \text{ (vì } OP \text{ là trung trực của } AM\text{)}. \quad (1)$$

$$OM = OB \text{ (vì } OQ \text{ là trung trực của } BM\text{)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$OA = OB \Leftrightarrow O \text{ thuộc đường trung trực của } AB.$$

❸ Nhận xét về các cặp tam giác vuông có chung một cạnh khác bằng nhau, ta có

$$\triangle POA = \triangle POM \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2.$$

$$\triangle QOB = \triangle QOM \Rightarrow \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{xOy} &= \widehat{O_2} + \widehat{O_3}. \\ \widehat{AOB} &= \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} \\ &= (\widehat{O_1} + \widehat{O_4}) + (\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) \\ &= (\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) + (\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 2(\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 2\widehat{xOy} = 2\alpha.\end{aligned}$$

④ Do đã có $OA = OB$ nên nếu $\widehat{xOy} = 90^\circ$ thì

$$\widehat{AOB} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A, O, B \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow O \text{ là trung điểm của } AB.$$

□

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ đều. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BC = 3BD$. Vẽ $DE \perp BC$ ($E \in BC$), vẽ $DF \perp AC$ ($F \in AC$). Chứng minh $\triangle DEF$ là tam giác đều.

✎ **LỜI GIẢI.**

Trong $\triangle BDE$ vuông tại D ta có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $BE = 2BD = CD$.

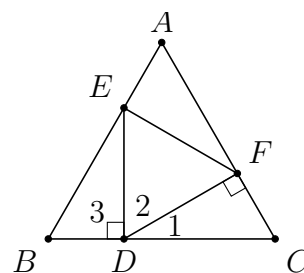
Xét $\triangle EBD$ vuông tại D và $\triangle CDF$ vuông tại F có

- $EB = CD$;
- $\widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

Suy ra $\triangle EBD = \triangle CDF \Rightarrow DE = DF \Rightarrow \triangle DEF$ cân tại D .

Lại có $\widehat{D_2} = 180^\circ - \widehat{D_1} - \widehat{D_3} = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$.

Vậy $\triangle DEF$ đều.



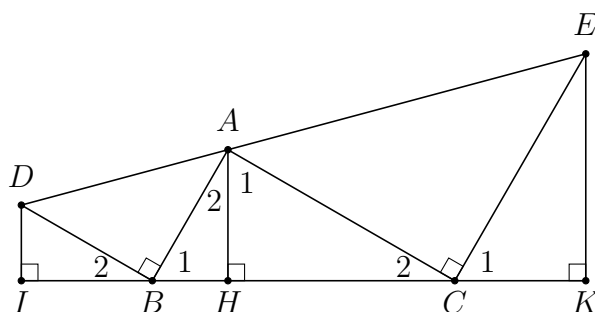
□

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nhọn. Vẽ phía ngoài $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ vuông cân tại B và $\triangle ACE$ vuông cân tại C . Vẽ $DI \perp BC$ và $EK \perp BC$ ($I, K \in BC$). Chứng minh

① $BI = CK$.

② $BC = ID + EK$.

✎ **LỜI GIẢI.**



Kẻ $AH \perp BC$. Ta lần lượt xét

- Xét $\triangle AHC$ vuông tại H và $\triangle ECK$ vuông tại K có
 - $AC = CE$ (vì $\triangle ACE$ cân tại C),
 - $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Suy ra $\triangle AHC = \triangle CKE$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra $AH = CK$ (1) và $HC = EK$ (2).

— Xét $\triangle AHB$ vuông tại H và $\triangle BID$ vuông tại I có

– $AB = BD$ (vì $\triangle ABD$ cân tại B),

– $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Suy ra $\triangle AHB = \triangle BID$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra $AH = BI$ (3) và $HB = DI$ (4).

❶ Từ (1) và (3) suy ra $BI = CK$.

❷ Từ (2) và (4) suy ra $HC + HB = EK + DI \Leftrightarrow BC = EK + DI$.

□

CHƯƠNG

3

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

BÀI 1 QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định lý 1. Trong một tam giác:

- Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

⚠ Nhận xét:

- Trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông), góc tù (hoặc góc vuông) là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông - cạnh huyền) là cạnh lớn nhất.
- Trong tam giác đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Chứng minh các tính chất về mối quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$. Hãy so sánh hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

LỜI GIẢI.

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$, do $AB > AC$ nên D nằm giữa A và B .

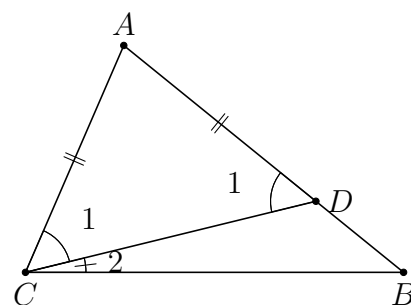
Trong $\triangle ACD$, ta có: $AC = AD \Leftrightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$. (*)

Nhật xét rằng:

$$\widehat{C} = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 > \widehat{C}_1 \quad (1)$$

$$\widehat{D}_1 = \widehat{B} + \widehat{C}_2 > \widehat{B} \quad (2)$$

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\widehat{C} > \widehat{B}$.



⚠ Nhận xét:

① Trong $\triangle ABC$, góc $\widehat{B}$ đối diện với cạnh AC , còn góc $\widehat{C}$ đối diện với cạnh AB , điều này có nghĩa là “Đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn”.

② Ta có thể chứng minh $\widehat{C} > \widehat{B}$ bằng cách khác như sau:

Kẻ tia phân giác AE của góc $\widehat{A}$ ($E \in BC$).

Xét hai tam giác $\triangle ACE$ và $\triangle ADE$, ta có:

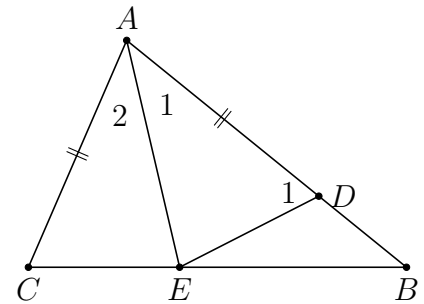
$AC = AD$ (giả thiết)

$\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$ (vì AE là phân giác góc $\widehat{A}$)

AE chung

Suy ra $\triangle ACE = \triangle ADE$.

$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D}_1 > \widehat{B}$ (vì $\widehat{D}_1$ là góc ngoài).



□

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Chứng minh rằng $AB < AC$.

✎ LỜI GIẢI.

Giả sử trái lại, ta có $AB \geq AC$.

Khi đó, nhận thấy rằng:

— Nếu $AB = AC$ thì $\widehat{C} = \widehat{B}$, mâu thuẫn.

— Nếu $AB > AC$ thì $\widehat{C} > \widehat{B}$, mâu thuẫn.

Vậy ta luôn có $AB < AC$.

⚠ Nhận xét Để thực hiện ví dụ trên chúng ta sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng và ở đó chúng ta đã tận dụng được hai định lý đã biết về góc.

□

□ DẠNG 2. Sử dụng tính chất về mối quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 3. So sánh các góc của $\triangle ABC$, biết $AB = 6\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.

✎ LỜI GIẢI.

Ta nhận thấy rằng $BC < AB < AC \Leftrightarrow \widehat{A} < \widehat{C} < \widehat{B}$.

□

VÍ DỤ 4. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$, biết $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$.

✎ LỜI GIẢI.

Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 100^\circ - 40^\circ = 40^\circ$.

Khi đó, nhận thấy rằng: $\widehat{B} = \widehat{C} < \widehat{A} \Leftrightarrow AC = AB < BC$.

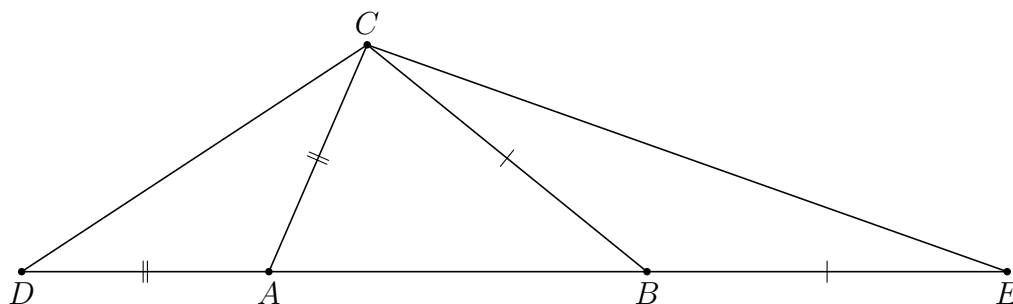
□

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 80^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$.

① So sánh các cạnh của $\triangle ABC$.

- ② Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$. So sánh độ dài các đoạn CD, CB, CE .

✎ LỜI GIẢI.



- ① Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ.$$

Khi đó, nhận thấy rằng:

$$\widehat{A} > \widehat{C} > \widehat{B} \Leftrightarrow BC > AB > AC.$$

- ② Trong $\triangle BCD$, ta có: $\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 40^\circ = \widehat{ABC} \Leftrightarrow CD = CB$.

Trong $\triangle BCE$, ta có:

$$\widehat{EBC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 40^\circ = 120^\circ \text{ là góc tù} \Rightarrow CE > CB.$$

Vậy, ta được $CD = CB < CE$.

□

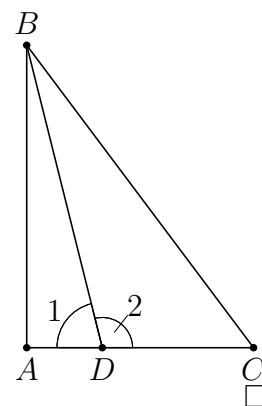
VÍ DỤ 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy điểm D trên cạnh AC . So sánh độ dài của BC và BD .

✎ LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABD$, ta có:

$$\widehat{D_2} = \widehat{A} + \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{D_2} \text{ là góc tù.}$$

Trong $\triangle BCD$ có $\widehat{D_2}$ là góc tù nên $BC > BD$.



□

VÍ DỤ 7. Chứng minh rằng trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

✎ LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , trung tuyến AD . Ta cần đi chứng minh $AD = \frac{1}{2}BC$.

Giả sử ngược lại, tức là $AD \neq \frac{1}{2}BC$.

— Nếu $AD > \frac{1}{2}BC$ suy ra:

$$AD > BD \Leftrightarrow \widehat{B} > \widehat{A_2},$$

$$AD > CD \Leftrightarrow \widehat{C} > \widehat{A_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A_1} + \widehat{A_2} \Leftrightarrow 90^\circ > \widehat{A}, \text{ mâu thuẫn.}$$

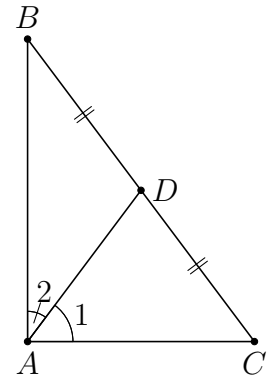
— Nếu $AD < \frac{1}{2}BC$ suy ra:

$$AD < BD \Leftrightarrow \widehat{B} < \widehat{A_2},$$

$$AD < CD \Leftrightarrow \widehat{C} < \widehat{A_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{A_1} + \widehat{A_2} \Leftrightarrow 90^\circ < \widehat{A}, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy ta luôn có $AD = \frac{1}{2}BC$.



□

VÍ DỤ 8. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$.

- ❶ Gọi M là trung điểm của BC . So sánh $\widehat{BAM}$ và $\widehat{CAM}$.
- ❷ Tia phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt BC tại D . So sánh độ dài của BD và CD .

✎ LỜI GIẢI.

❶

Trên tia AM lấy điểm K sao cho $AM = KM$.

Xét hai tam giác AMC và KMB , ta có:

— $AM = KM$.

— $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, vì đối đỉnh.

— $CM = BM$, vì M là trung điểm BC ,

Do đó, $\triangle AMC = \triangle KMB$ suy ra:

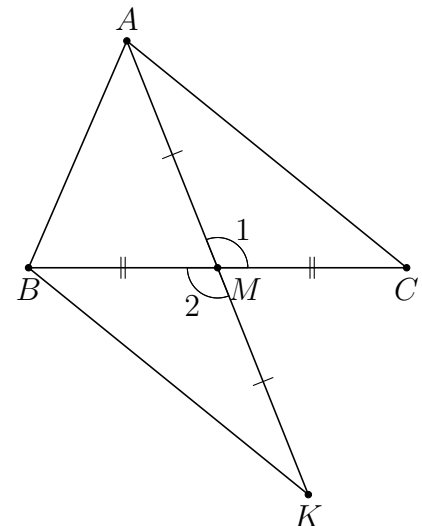
— $\widehat{CAM} = \widehat{BKM}$.

— $BK = AC > AB$.

Khi đó, trong $\triangle ABK$ vì:

$$BK > AB \Leftrightarrow \widehat{BAK} > \widehat{BKA} \Leftrightarrow \widehat{BAM} > \widehat{CAM}.$$

❷



Lấy điểm E trên AC sao cho $AE = AB$.

Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle AED$, ta có:

- $AB = AE$
- $\widehat{A_2} = \widehat{A_1}$, vì AD là phân giác
- AD chung

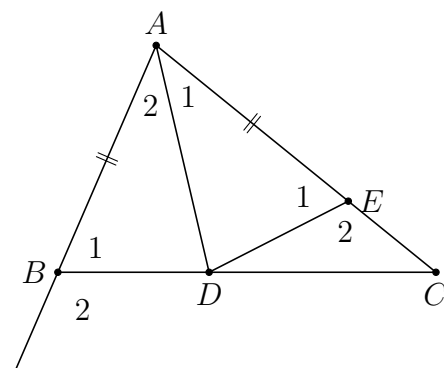
Do đó $\triangle ABD = \triangle AED$ suy ra:

- $BD = DE$.
- $\widehat{B_1} = \widehat{E_1} \Leftrightarrow \widehat{B_2} = \widehat{E_2}$. (1)

Mặt khác, ta lại có $\widehat{B_2} > \widehat{C}$, vì $\widehat{B_2}$ là góc ngoài $\triangle ABC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{E_2} > \widehat{C}$.

Khi đó, trong $\triangle CDE$ vì $\widehat{E_2} > \widehat{C} \Leftrightarrow CD > DE \Leftrightarrow CD > BD$.



⚠ Nhận xét Qua ví dụ trên chúng ta có thể đánh giá được vị trí của các tia AB , AD , AM đó là “Tia AD nằm giữa hai tia AB và AM ”.

□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. So sánh các góc của $\triangle ABC$, biết

- ① $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$.
- ② $AB = 8\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$.
- ③ $AB = 11\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.
- ④ $AB = AC = 11\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$.

🔑 LỜI GIẢI.

- ① Vì $AB < BC < AC$ nên $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}$.
- ② Vì $AB > BC > AC = 4\text{cm}$ nên $\widehat{C} > \widehat{A} > \widehat{B}$.
- ③ Vì $BC < AC < AB$ nên $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$.
- ④ Vì $AB = AC < BC$ nên $\widehat{C} = \widehat{B} < \widehat{A}$.

□

BÀI 2. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$, biết

- ① $\widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$.
- ② $\widehat{C} = 80^\circ$, $\widehat{A} = 20^\circ$.

🔑 LỜI GIẢI.

- ① Ta có: $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Khi đó, nhận thấy rằng

$$\widehat{A} = \widehat{C} < \widehat{B} \Leftrightarrow BC = AB < AC.$$

- ② Ta có: $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Khi đó, nhận thấy rằng

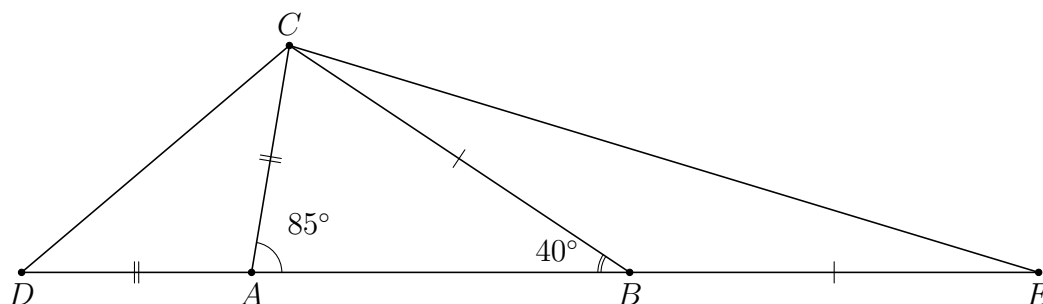
$$\widehat{A} < \widehat{C} < \widehat{B} \Leftrightarrow BC < AB < AC.$$

□

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 85^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$.

- ① So sánh các cạnh của $\triangle ABC$.
- ② Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$. So sánh độ dài các đoạn CD , CB , CE .

✎ **LỜI GIẢI.**



- ① Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 85^\circ - 40^\circ = 55^\circ$.

Khi đó, nhận thấy rằng

$$\widehat{B} < \widehat{C} < \widehat{A} \Leftrightarrow AC < AB < BC.$$

- ② Trong tam giác cân ACD có $\widehat{DAC} = 95^\circ$ (bù với góc $\widehat{BAC}$) nên $\widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 42,5^\circ$. Khi đó, xét tam giác BCD có

$$\widehat{CBD} < \widehat{BDC} \Leftrightarrow BC < CD. \quad (1)$$

Trong tam giác cân BCE có $\widehat{EBC} = 140^\circ$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{BCE} = 20^\circ$. Khi đó, xét tam giác DEC có

$$\widehat{DEC} < \widehat{EDC} \Leftrightarrow CD < CE. \quad (2)$$

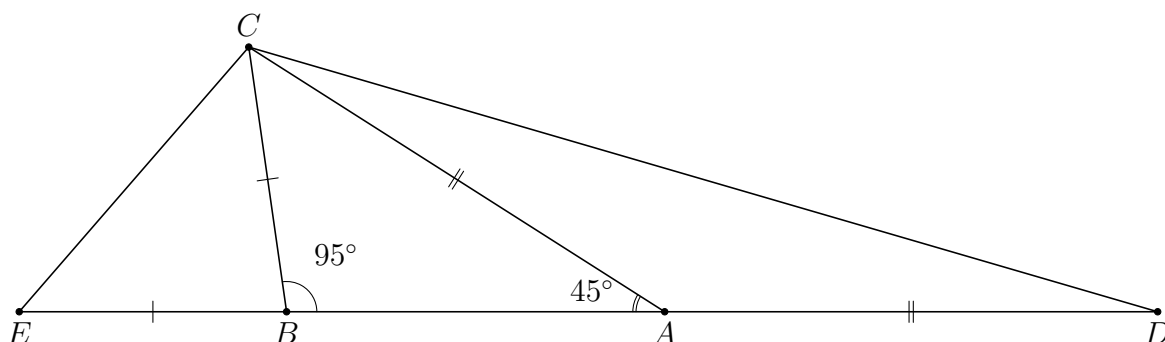
Từ (1) và (2) suy ra $CB < CD < CE$.

□

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 95^\circ$.

- ① So sánh các cạnh của $\triangle ABC$.
- ② Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$. So sánh độ dài các đoạn CD , CB , CE .

✎ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 45^\circ - 95^\circ = 40^\circ$.

Khi đó, nhận thấy rằng

$$\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B} \Leftrightarrow AB < BC < AC.$$

❷ Trong tam giác cân BCE có $\widehat{EBC} = 85^\circ$ (bù với góc $\widehat{ABC}$) nên $\widehat{BEC} = \widehat{BCE} = 47,5^\circ$. Khi đó, xét tam giác BCE có

$$\widehat{BEC} < \widehat{EBC} \Leftrightarrow CB < CE. \quad (1)$$

Trong tam giác cân ADC có $\widehat{DAC} = 135^\circ$ nên $\widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 22,5^\circ$. Khi đó, xét tam giác EDC có

$$\widehat{EDC} < \widehat{DEC} \Leftrightarrow CE < CD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CB < CE < CD$.

□

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ có góc B tù. Lấy điểm D trên cạnh BC . Chứng minh rằng $AB < AD < AC$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta lần lượt xét:

— Trong $\triangle ABD$ có góc $\widehat{B}$ tù, do đó:

$$\widehat{D_1} < \widehat{B} \Leftrightarrow AB < AD. \quad (1)$$

— Trong $\triangle ADC$, ta có:

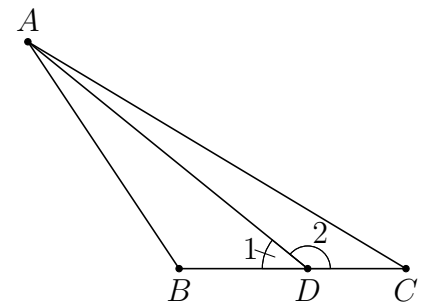
$\widehat{D_2} > \widehat{B}$, vì $\widehat{D_2}$ là góc ngoài $\triangle ABD$.

$\widehat{B} > \widehat{C}$, vì $\triangle ABC$ có góc $\widehat{B}$ tù.

$$\Rightarrow \widehat{C} < \widehat{D_2} \Leftrightarrow AD < AC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB < AD < AC$.

□



BÀI 6.

❶ Chứng minh rằng trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° thì cạnh góc vuông đối diện với góc 30° bằng một phần hai cạnh huyền.

❷ Áp dụng: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$, các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ đều nhọn. Gọi M , N theo thứ tự là trung điểm của AC , AB . Kẻ các đường cao BH , CK . Xác định dạng của các tam giác $\triangle AHN$, $\triangle AKM$.

✎ **LỜI GIẢI.**

❶

Giả sử $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{C} = 30^\circ$, ta cần đi chứng minh $AB = \frac{1}{2}BC$.

Ta có thể chứng minh bằng một trong hai cách sau:

Cách 1: Trên BC lấy điểm M sao cho $AB = MB$

$\Rightarrow \triangle ABM$ là tam giác cân

$\Rightarrow \triangle ABM$ là tam giác đều vì có $\widehat{B} = 60^\circ$

$\Leftrightarrow AB = BM = MA$.

Trong $\triangle MAC$, ta có:

$$\widehat{A_1} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \widehat{C_1}$$

$$\Leftrightarrow \triangle MAC \text{ cân tại } M \Leftrightarrow MA = MC.$$

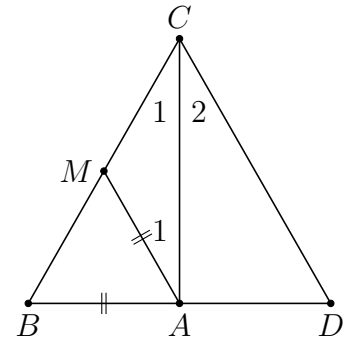
Khi đó $BC = BM + CM = AB + AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC$.

Cách 2: Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$.

Nhận xét rằng $\triangle BCD$ có đường cao CA cũng là đường trung tuyến nên

$\triangle BCD$ là tam giác cân $\Rightarrow \triangle BCD$ là tam giác đều vì có $\widehat{B} = 60^\circ$.

Khi đó $BC = BD = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC$.



② Ta lần lượt xét:

Trong $\triangle HAB$ vuông tại H , ta có

$$\widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABH} = 30^\circ \Leftrightarrow AH = \frac{1}{2}AB = AN.$$

Vậy tam giác AHN là tam giác đều vì nó là tam giác cân có góc A bằng 60° .

Trong $\triangle KAC$ vuông tại K , ta có

$$\widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{ACK} = 30^\circ \Leftrightarrow AK = \frac{1}{2}AC = AM.$$

Vậy tam giác AKM là tam giác đều vì nó là tam giác cân có góc A bằng 60° .

⚠ Nhận xét: Qua bài tập trên, chúng ta thu được kết quả: “Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° thì cạnh đối diện với góc 30° bằng nửa cạnh huyền và ngược lại”.

□

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B . Tia phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt BC tại D . So sánh độ dài của BD và CD .

LỜI GIẢI.

Lấy điểm E trên AC sao cho $AE = AB$.

Xét tam giác ABD và AED , ta có:

- $AB = AE$.
- $\widehat{A_2} = \widehat{A_1}$, vì AD là phân giác.
- AD chung.

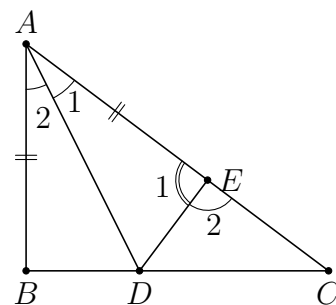
Do đó, $\triangle ABD = \triangle AED$ suy ra:

- $BD = DE$.
- $\widehat{E_1} = \widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E_2} = 90^\circ$.

Khi đó, trong $\triangle CDE$ vì

$$\widehat{E_2} = 90^\circ \Rightarrow CD > DE \Leftrightarrow CD > BD.$$

□



BÀI 8. Cho $\triangle ABC$. Tia phân giác của góc $\widehat{B}$ cắt AC tại D . So sánh độ dài của AB và BC , biết rằng góc $\widehat{BDC}$ tù.

LỜI GIẢI.

Để so sánh độ dài của AB và BC , ta cần đi so sánh hai góc $\widehat{C}$ và $\widehat{A}$.

Theo giả thiết góc BDC tù, tức là:

$$\widehat{D_1} > 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{D_1} > 180^\circ.$$

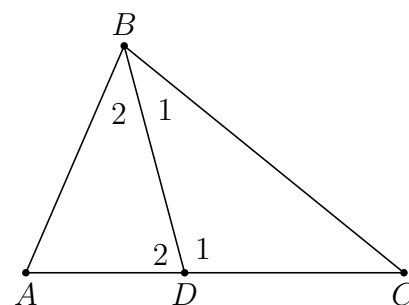
Trong $\triangle ABD$, ta có:

$$\widehat{D_1} + \widehat{B_1} + \widehat{A} = 180^\circ.$$

Cộng vế theo vế (1) và (2), ta được:

$$\begin{aligned} 2\widehat{D_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C} &= \widehat{A} + \widehat{B_2} + 180^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{A} - \widehat{C} &= 2\widehat{D_1} - 180^\circ > 0 \Leftrightarrow \widehat{A} > \widehat{C} \Leftrightarrow BC > AB. \end{aligned}$$

□



BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $AC = b$ và các chiều cao tương ứng với hai cạnh đó theo thứ tự bằng h_a , h_b .

- ❶ Tìm tam giác có $h_a = a$, $h_b = b$.
- ❷ Có thể khẳng định được $h_b < a$ không?
- ❸ Có nhận xét gì về quan hệ độ dài giữa h_a và b , giữa h_b và a ?

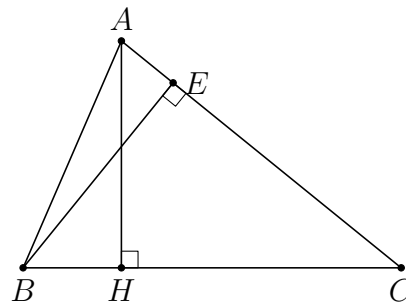
LỜI GIẢI.

❶ Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}BE \cdot AC$.

Hay $h_a \cdot a = h_b \cdot b$.

Giả sử $\triangle ABC$ thỏa mãn đồng thời $h_a = a; h_b = b$. Khi đó, thay $h_a = a; h_b = b$, ta được

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \text{ hay } BC = AC.$$



Vậy tam giác cần tìm là $\triangle ABC$ cân tại C và có $h_a = a$.

❷ Xét $\triangle BEC$ vuông tại E , suy ra cạnh huyền BC là cạnh lớn nhất.

Do đó $BE < BC$ hay $h_b < a$.

❸ Tương tự b) ta cũng chứng minh được $h_a < b$.

Vậy ta luôn có $h_a < b; h_b < a$.

□

BÀI 2

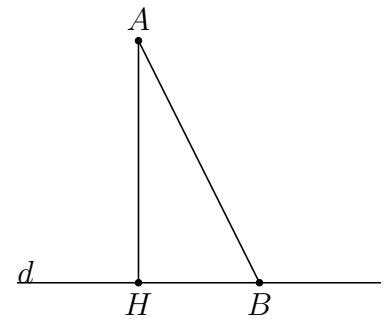
QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên

Điểm A ở ngoài đường thẳng d , kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H . Trên d lấy điểm B bất kì ($B \neq H$). Khi đó

- Đoạn thẳng AH gọi là *đoạn vuông góc* hay *đường vuông góc* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d . Điểm H được gọi là *chân* đường vuông góc hay *hình chiếu* của A trên đường thẳng d .
- Đoạn thẳng AB gọi là một *đường xiên* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d .
- Đoạn thẳng HB gọi là *hình chiếu* của đường xiên AB trên đường thẳng d .



2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

 Độ dài đường vuông góc AH gọi là *khoảng cách* từ điểm A đến đường thẳng d .

3. Các đường xiên và các hình chiếu của chúng

Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

- ① Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- ② Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.
- ③ Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

B CÁC DẠNG TOÁN

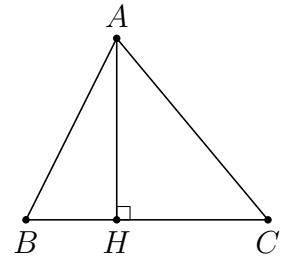
 **DẠNG 1.** Chứng minh các tính chất về mối quan hệ giữa các đường xiên và các hình chiếu của chúng

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1.

Cho hình vẽ, hãy chứng tỏ rằng :

- ❶ Nếu $HB < HC$ thì $AB < AC$ và ngược lại, nếu $AB < AC$ thì $HB < HC$.
- ❷ Nếu $HB = HC$ thì $AB = AC$ và ngược lại, nếu $AB = AC$ thì $HB = HC$.



✎ LỜI GIẢI.

Các tam giác HAB và tam giác HAC vuông tại H nên ta có

$$\begin{cases} HB^2 = AB^2 - AH^2, \\ HC^2 = AC^2 - AH^2. \end{cases}$$

- ❶ Với giả thiết

$$HB < HC \Leftrightarrow HB^2 < HC^2 \Leftrightarrow AB^2 - AH^2 < AC^2 - AH^2 \Leftrightarrow AB^2 < AC^2 \Leftrightarrow AB < AC \text{ (đpcm).}$$

- ❷ Với giả thiết

$$HB = HC \Leftrightarrow HB^2 = HC^2 \Leftrightarrow AB^2 - AH^2 = AC^2 - AH^2 \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow AB = AC \text{ (đpcm).}$$

□

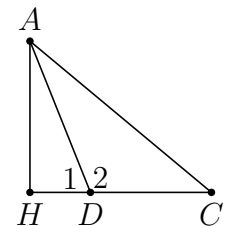
⚠ Ta cũng có thể chứng minh được “Nếu $HB < HC$ thì $AB < AC$ ” bằng việc sử dụng mối quan hệ góc với cạnh đối diện trong tam giác.

Thật vậy, lấy điểm D trên HC sao cho $HB = HD$.

Suy ra $\triangle ABD$ cân tại $A \Leftrightarrow AB = AD$.

Trong $\triangle AHD$ ta có $\widehat{D}_2 = \widehat{H} + \widehat{HAD} \Rightarrow \widehat{D}_2$ là góc tù.

Trong $\triangle ACD$ có $\widehat{D}_2$ là góc tù nên $AC > AD \Rightarrow AC > AB$.



□ DẠNG 2. Sử dụng tính chất về mối quan hệ giữa các đường xiên và các hình chiếu của chúng giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 5$ cm, $BC = 8$ cm. Tính khoảng cách từ A đến BC .

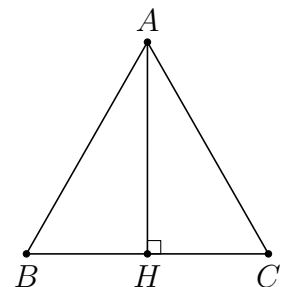
✎ LỜI GIẢI.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC , khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC .

Trong tam giác HAB vuông tại H , ta có:

$$BH = \frac{1}{2}BC = 4 \text{ cm, vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A.$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow AH = 3 \text{ cm.}$$



Vậy khoảng cách từ A đến BC bằng 3 cm.

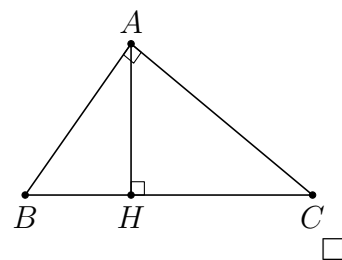
□

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Chứng tỏ rằng $HC > HB$.

LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABC$ vuông tại A ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \\ \Leftrightarrow AC &= 8 \text{ cm} \\ \Rightarrow AC > AB &\Leftrightarrow HC > HB \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$



Nhận xét. Trong ví dụ trên, nếu chúng ta không sử dụng tính chất về mối liên hệ giữa hình chiếu và đường xiên thì chúng ta cần đi xác định độ dài các đoạn thẳng BH và CH , để thực hiện công việc này rất công kềnh.

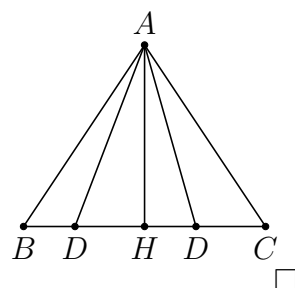
VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng trong một tam giác cân, độ dài đoạn thẳng nối đỉnh đối diện với đáy và một điểm bất kì của cạnh đáy nhỏ hơn hoặc bằng độ dài của cạnh bên.

LỜI GIẢI.

Xét tam giác ABC cân tại A . Lấy một điểm D bất kì trên cạnh BC , chúng ta cần đi chứng minh $AD \leq AB$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC .

- Nếu D thuộc cạnh BH thì $DH \leq BH \Leftrightarrow AD \leq AB$.
- Nếu D thuộc cạnh CH thì $DH \leq CH \Leftrightarrow AD \leq AC \Leftrightarrow AD \leq AB$.



VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 10$ cm, $BC = 12$ cm.

- ① Tính khoảng cách từ A đến BC .
- ② Vẽ cung tròn tâm A có bán kính bằng 9 cm. Cung đó có cắt đường thẳng BC hay không, có cắt cạnh BC hay không? Vì sao?

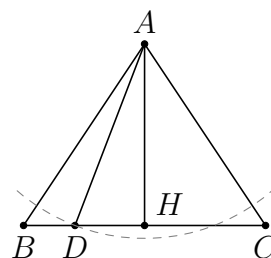
LỜI GIẢI.

- a) Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC .

Trong $\triangle HAB$ vuông tại H ta có

$$BH = \frac{1}{2}BC = 6 \text{ cm, vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A.$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow AH = 8 \text{ cm.}$$



Vậy khoảng cách từ A đến BC bằng 8 cm.

- b) Theo kết quả câu a) ta có $AH < 9$ cm $\Rightarrow$ Cung tròn tâm A bán kính 9 cm cắt đường thẳng BC . Giả sử cung tròn đó cắt đường thẳng BC tại D , suy ra $AD = 9$ cm $< AB \Leftrightarrow DH < BH$. Vậy cung tròn tâm A bán kính 9 cm cắt cạnh BC .

Nhận xét. Qua ví dụ trên, ta thấy:

- Một cung tròn tâm A bán kính R sẽ cắt đường thẳng a nếu khoảng cách từ A đến đường thẳng a lớn hơn R .
- Để xét xem cung tròn tâm A bán kính R có cắt đoạn thẳng BC hay không, chúng ta cần so sánh R với các đường xiên AB và AC .

VÍ DỤ 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên cạnh AB lấy điểm M ($M \neq B$). Trên cạnh AC lấy điểm N ($N \neq C$). Chứng minh rằng $MN < BC$.

LỜI GIẢI.

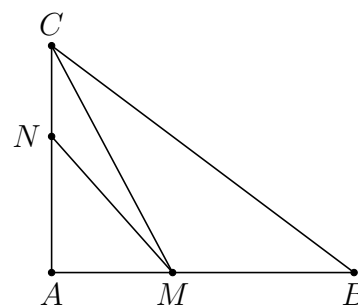
Nhận xét rằng:

- AM, AB theo thứ tự là hình chiếu của CM và CB , ta có

$$AM < AB \Leftrightarrow CM < CB. \quad (1)$$

- AN, AC theo thứ tự là hình chiếu của MN và MC , ta có

$$AN < AC \Leftrightarrow MN < MC. \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $MN < BC$ (đpcm).

□



- ① Kết quả trên vẫn đúng khi thay “ $\triangle ABC$ vuông tại A ” bằng “ $\triangle ABC$ có $\widehat{A}$ tù” hoặc “ $\triangle ABC$ cân tại C ” hoặc “ $\triangle ABC$ có $\widehat{A} \geq \widehat{B}$ ”.
- ② Ta có thể sử dụng mối quan hệ về góc và cạnh đối diện trong tam giác thực hiện ví dụ trên. Thật vậy

— Trong $\triangle BCM$ có $\widehat{BMC}$ là góc tù, do đó $CM < CB$. (3)

— Trong $\triangle CMN$ có $\widehat{CNM}$ là góc tù, do đó $MN < CM$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $MN < BC$ (đpcm).

VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi M là điểm bất kì trên cạnh đáy BC . Chứng minh rằng khi M thay đổi vị trí trên cạnh BC thì tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên AB và AC vẫn không đổi.

LỜI GIẢI.

Kẻ đường cao BH , $ME \perp AB$, $MF \perp AC$. Kẻ $MN \parallel AC$ ($N \in BH$), suy ra $MN \perp BH$ và $MF = NH$. (1)

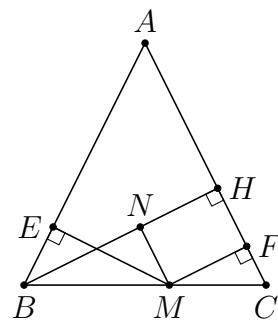
Xét hai tam giác vuông $\triangle BEM$ và $\triangle MNB$ ta có $\begin{cases} BM \text{ chung} \\ \widehat{BMN} = \widehat{C} = \widehat{B} \end{cases}$

do đó $\triangle BEM = \triangle MNB$ (cạnh huyền và góc nhọn).

Suy ra $ME = BN$.

Cộng theo vế (1) và (2) ta được

$$MF + ME = NH + BN = BH \text{ không đổi.}$$



Vậy khi M thay đổi vị trí trên cạnh BC thì tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên AB và AC vẫn không đổi. $\square$

VÍ DỤ 8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi M là trung điểm AC . Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM .

- ① So sánh AC với tổng $AE + CF$.
- ② Chứng minh rằng $AB < \frac{1}{2}(BE + BF)$.

LỜI GIẢI.

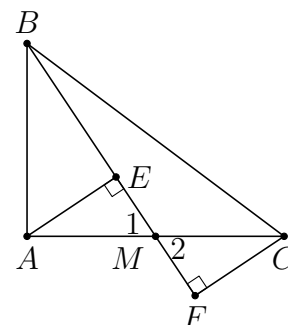
① Ta lần lượt thấy

— Trong tam giác vuông EAM , ta có $AM > AE$. (1)

— Trong tam giác vuông FCM , ta có $CM > CF$. (2)

Cộng theo vế (1), (2) ta được

$$AM + CM > AE + CF \Leftrightarrow AC > AE + CF.$$



b) Xét hai tam giác vuông $\triangle EAM$ và $\triangle FCM$, ta có:

— $AM = CM$, vì M là trung điểm AC

— $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, vì đối đỉnh

do đó $\triangle EAM = \triangle FCM$ (cạnh huyền và góc nhọn), suy ra $EM = FM$.

Trong tam giác vuông ABM , ta có:

— $AB < BM$, và vì $BM = BE + EM$ nên $AB < BE + EM$. (3)

— $AB < BM$, và vì $BM = BF - FM$ nên $AB < BF - FM$. (4)

Cộng theo vế (3), (4) và sử dụng kết quả $EM = FM$, ta được

$$2AB < BE + BF \Leftrightarrow AB < \frac{1}{2}(BE + FM), \text{ đpcm.}$$

$\square$



1. Kết quả câu a) vẫn đúng khi “ $\triangle ABC$ tùy ý và M là điểm bất kì trên AC ”.

2. Kết quả câu b) vẫn đúng khi “ $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A}$ tù”.

VÍ DỤ 9. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên BC lấy các điểm D và E sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC}$. So sánh các độ dài:

a) AB và AE .

b) BD và DE .

LỜI GIẢI.

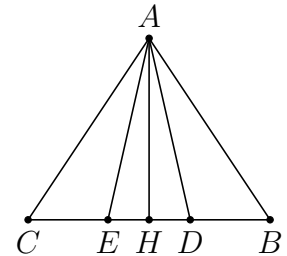
Ta có:

— $\widehat{B} = \widehat{C}$, vì $\triangle ABC$ cân tại A

— $\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$, giả thiết

suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} \Leftrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} \Leftrightarrow \triangle ADE$ cân tại A .

Khi đó, gọi H là trung điểm DE thì $AH \perp DE$.



❶ Vì BH, DH theo thứ tự là hình chiếu của AB và AD , ta có

$$BH > DH \Leftrightarrow AB > AD \Leftrightarrow AB > AE, \text{ vì } AD = AE.$$

b) Lấy điểm F trên AB sao cho $AE = AF$.

Xét hai tam giác $\triangle AED$ và $\triangle AFD$, ta có:

— $AF = AE$

— $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$, giả thiết

— AD chung

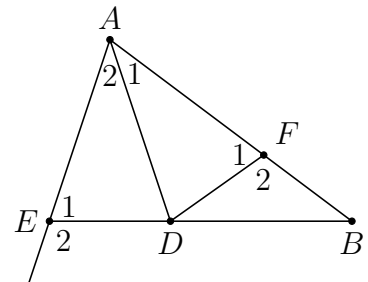
do đó $\triangle AED = \triangle AFD$ suy ra:

— $DE = DF$

— $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1 \Leftrightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{F}_2$. (1)

Mặt khác, ta lại có $\widehat{E}_2 > \widehat{B}$, vì $\widehat{E}_2$ là góc ngoài của $\triangle ABE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{F}_2 > \widehat{B}$. Khi đó, trong $\triangle BDF$ vì $\widehat{F}_2 > \widehat{B}$ nên $BD > DF \Leftrightarrow BD > DE$. $\square$



VÍ DỤ 10. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, phân giác AD , trung tuyến AM , đường cao AH .

❶ So sánh độ dài của BH và HC .

❷ Chứng minh rằng $\widehat{HAC} > \frac{\widehat{A}}{2}$.

❸ Nhận xét gì về vị trí của các tia AH, AD, AM .

LỜI GIẢI.

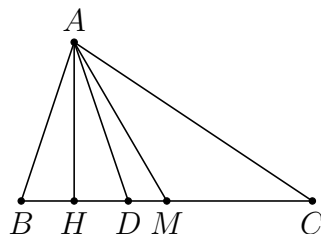
❶ Trong $\triangle ABC$ với giả thiết $AB < AC$, suy ra $HB < HC$.

❷ Trong $\triangle ABC$ với giả thiết $AB < AC$, suy ra $\widehat{C} < \widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{B} - \widehat{C} > 0$.

Trong $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có

$$\widehat{HAC} = 90^\circ - \widehat{C} = \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) - \widehat{C} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} > \frac{\widehat{A}}{2}, \text{ đpcm.}$$

❸ Ta có nhận xét: $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} = \frac{\widehat{A}}{2} < \widehat{CAH}$. Do đó AD nằm giữa hai tia AH và AM .

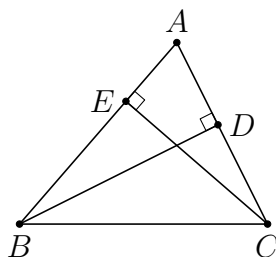


□

Nhận xét. Qua ví dụ trên, ta thấy: “Trong $\triangle ABC$ có không cân tại A thì tia phân giác của góc $\widehat{A}$ và đường trung trực cạnh BC bao giờ cũng cắt nhau tại một điểm nằm ngoài tam giác”. Nhận xét trên sẽ giúp các em học sinh tránh mắc sai lầm khi vẽ hình.

🕒 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình vẽ sau. Chứng minh rằng $AB + AC > BD + CE$. Hãy phát biểu kết quả tổng quát.



🔗 LỜI GIẢI.

Ta lần lượt nhận thấy:

- Trong tam giác vuông ABD , ta có $AB > BD$. (1)
- Trong tam giác vuông ACE , ta có $AC > CE$. (2)

Cộng theo vế (1), (2) ta được $AB + AC > BD + CE$.

Tổng quát: Trong một tam giác tổng ba cạnh lớn hơn tổng ba đường cao. □

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$. Tính khoảng cách từ A đến BC , biết:

- ① $AB = AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm.
- ② $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm.

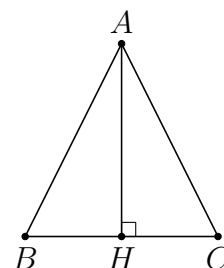
🔗 LỜI GIẢI.

- ① Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC .

Trong tam giác HAB vuông tại H , ta có

$$BH = \frac{1}{2}BC = 3 \text{ cm, vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AH = 4 \text{ cm.}$$



b) Xét tam giác ABC ta có

$$AB^2 + AC^2 = 15^2 + 20^2 = 625 = 25^2 = BC^2$$

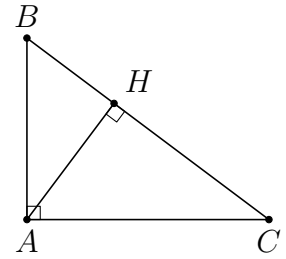
do đó tam giác ABC vuông tại A .

Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC .

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$, suy ra

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ cm.}$$

□



BÀI 3. Cho ΔABC đều có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ mỗi đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác.

LỜI GIẢI.

Vì ΔABC đều nên khoảng cách từ mỗi đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác là bằng nhau, do đó ta cần tính khoảng cách từ A đến BC .

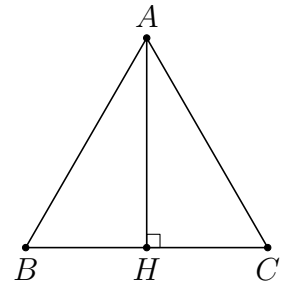
Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC .

Trong tam giác HAB vuông tại H ta có:

$$BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \text{ vì } \Delta ABC \text{ đều}$$

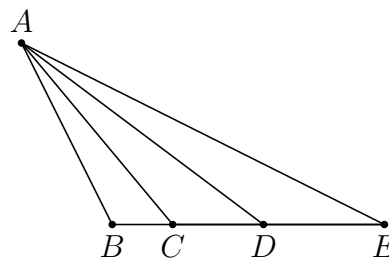
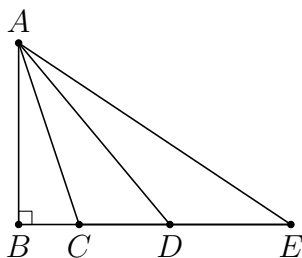
$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

□



Nhận xét. Qua bài tập trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả “Trong một tam giác đều cạnh bằng a thì độ dài đường cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ”.

BÀI 4. Cho các hình vẽ sau. So sánh các độ dài AB, AC, AD, AE .



LỜI GIẢI.

① $AB < AC < AD < AE$.

② $AB < AC < AD < AE$.

□

BÀI 5. Cho ΔABC cân tại A , có $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$.

① Tính khoảng cách từ A đến BC .

- ② Vẽ cung tròn tâm A có bán kính bằng 6cm. Cung đó có cắt đường thẳng BC hay không, có cắt cạnh BC hay không? Vì sao?.

✎ LỜI GIẢI.

- ① Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC .

Trong $\triangle HAB$ vuông tại H , ta có:

$$BH = \frac{1}{2}BC = 3 \text{ cm, vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A$$

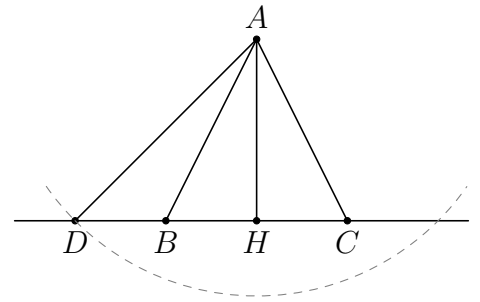
$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AH = 4 \text{ cm.}$$

Vậy khoảng cách từ A đến BC bằng 4 cm.

- b) Theo câu a) ta có: $AH < 6 \text{ cm} \Rightarrow$ cung tròn tâm A bán kính 6 cm cắt đường thẳng BC .

Giả sử cung tròn đó cắt đường thẳng BC tại D , suy ra $AD = 6 \text{ cm} > AB \Rightarrow DH > BH$.

Vậy cung tròn tâm A bán kính 6 cm không cắt cạnh BC .



BÀI 6. Cho $\triangle ABC$, điểm M nằm giữa A và C . Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM . So sánh AC với tổng $AE + CF$.

✎ LỜI GIẢI.

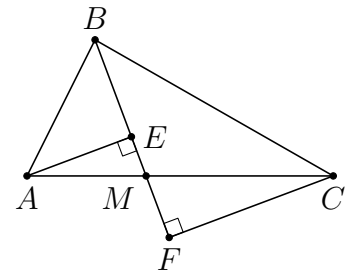
Ta lần lượt thấy

— Trong tam giác vuông EAM , ta có $AM > AE$. (1)

— Trong tam giác vuông FCM , ta có $CM > CF$. (2)

Cộng theo vế (1), (2) ta được:

$$AM + CM - AE - CF \Leftrightarrow AC > AE + CF.$$



BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A}$ tù. Gọi M là trung điểm AC . Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM . Chứng minh rằng $AB < \frac{1}{2}(BE + BF)$.

✎ LỜI GIẢI.

Xét hai tam giác vuông $\triangle EAM$ và $\triangle FCM$, ta có:

— $AM = CM$, vì M là trung điểm AC

— $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, vì đối đỉnh

do đó $\triangle EAM = \triangle FCM$ (cạnh huyền và góc nhọn). Suy ra $EM = FM$.

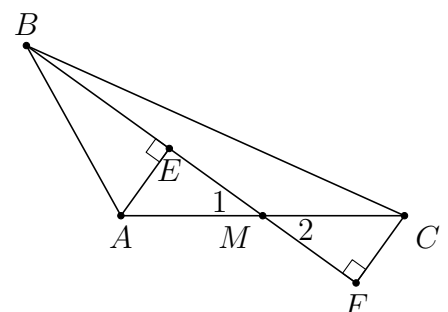
Trong tam giác ABM do $\widehat{A}$ là góc tù nên ta có:

— $AM < BM \Leftrightarrow AB < BE + EM$. (1)

— $AM < BM \Leftrightarrow AB < BF - FM$. (2)

Cộng theo vế (1), (2) và sử dụng kết quả $EM = FM$, ta được:

$$2AB < BE + BF \Leftrightarrow AB < \frac{1}{2}(BE + BF), \text{ đpcm.}$$



BÀI 3 QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC - BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

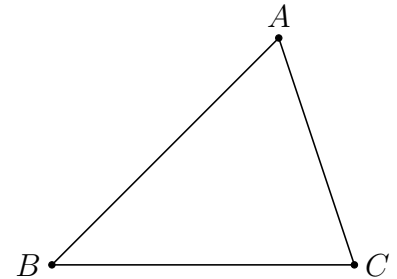
1. Bất đẳng thức tam giác

Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại. Tức là, với $\triangle ABC$ ta luôn có

$$AB + BC > AC,$$

$$AB + AC > BC,$$

$$AC + BC > AB.$$



2. HỆ QUẢ CỦA BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Từ bất đẳng thức tam giác, bằng phép chuyển vế ta suy ra

$$|AB - BC| < CA < AB + BC,$$

$$|BC - CA| < AB < BC + CA,$$

$$|CA - AB| < BC < CA + AB.$$

Tức là, trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

□ DẠNG 1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Phương pháp giải:

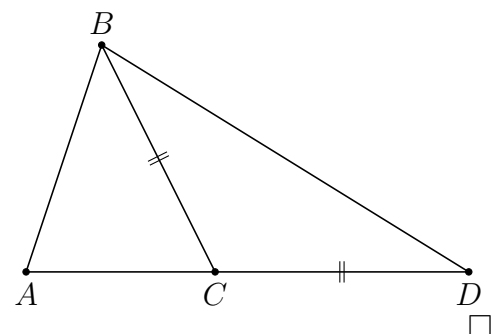
VÍ DỤ 1. Chứng minh bất đẳng thức tam giác.

✎ LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABC$, trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CB$. Ta có $\widehat{ABD} > \widehat{CBD}$. Lại có $\widehat{CDB} = \widehat{CBD}$ (do $CD = CB$).

Trong $\triangle ABD$ ta có $\widehat{ADB} = \widehat{CDB} = \widehat{CBD} < \widehat{ABD}$ nên $AB < AD = AC + CD$, hay

$$AB < AC + CB.$$



❏ DẠNG 2. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC ĐỂ GIẢI TOÁN*Phương pháp giải:*

VÍ DỤ 1. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, hãy kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài sau đây là độ dài ba cạnh của một tam giác và hãy dựng tam giác đó.

a) 2 cm, 4 cm, 7 cm.

b) 2 cm, 6 cm, 4 cm.

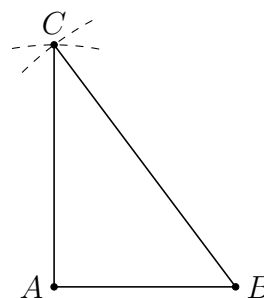
c) 3 cm, 4 cm, 5 cm.

✎ LỜI GIẢI.

- ❶ Đây không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $2 + 4 < 7$.
- ❷ Đây không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $2 + 4 = 6$.
- ❸ Đây là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $3 + 4 > 5$, $3 + 5 > 4$, $4 + 5 > 3$.

Giả sử cần dựng $\triangle ABC$ biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm, ta lần lượt thực hiện các bước như sau

- Dựng đoạn $AB = 3$ cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các cung tròn tâm A bán kính 4 cm và cung tròn tâm B bán kính 5 cm. Hai cung tròn này cắt nhau ở C . Nối AC , BC ta được $\triangle ABC$ cần dựng.

**Nhận xét.**

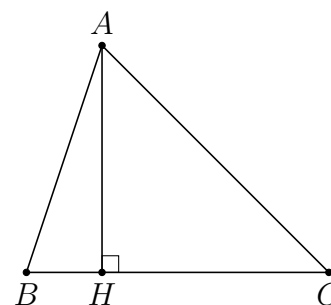
1. Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thỏa mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài cạnh lớn nhất với tổng độ dài hai cạnh còn lại.
2. Kết quả trên có được nhờ vào một phương pháp khác để chứng minh bất đẳng thức tam giác. Cụ thể

Trong tam giác $\triangle ABC$, giả sử BC là cạnh lớn nhất, suy ra $\widehat{A}$ là góc lớn nhất. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$).

Trong $\triangle HAB$ vuông tại H , ta có $BH < AB$. (1)

Trong $\triangle HAC$ vuông tại H , ta có $CH < AC$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được $BH + CH < AB + AC$, suy ra $BC < AB + AC$. Với BC là cạnh lớn nhất trong tam giác nên các bất đẳng thức còn lại là hiển nhiên.



□

VÍ DỤ 2. Dựa vào hệ quả của bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài sau đây là độ dài ba cạnh của một tam giác và hãy dựng tam giác đó.

a) 1,2 cm, 2,2 cm, 1 cm.

b) 2 cm, 3 cm, 6 cm.

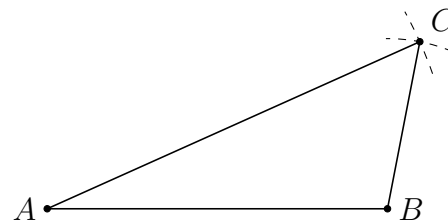
c) 10 cm, 12 cm, 5 cm.

✎ LỜI GIẢI.

- ❶ Đây không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $2,2 - 1,2 = 1$.
- ❷ Đây không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $6 - 3 > 2$.
- ❸ Đây là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $12 - 10 < 5$, $12 - 5 < 4$, $10 - 5 < 12$.

Giả sử cần dựng $\triangle ABC$ biết $AB = 10$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 5$ cm, ta lần lượt thực hiện các bước như sau

- Dựng đoạn $AB = 10$ cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các cung tròn tâm A bán kính 12 cm và cung tròn tâm B bán kính 5 cm. Hai cung tròn này cắt nhau ở C . Nối AC , BC ta được $\triangle ABC$ cần dựng.



Nhận xét. Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thỏa mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài đoạn nhỏ nhất với hiệu độ dài hai đoạn còn lại.

□

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$ cm, $AC = 1$ cm.

- ① Hãy tìm độ dài cạnh BC biết độ dài này là một số nguyên (cm).
- ② Dựng $\triangle ABC$.

✎ LỜI GIẢI.

a) Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$AB - AC < BC < AB + AC \Rightarrow 3 - 1 < BC < 3 + 1 \Rightarrow 2 < BC < 4$$

Do độ dài BC là một số nguyên (cm) nên $BC = 3$ cm.

b) Giả sử cần dựng $\triangle ABC$ biết $AB = 3$ cm, $AC = 1$ cm, $BC = 3$ cm, ta lần lượt thực hiện các bước như sau

- Dựng đoạn $BC = 3$ cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ BC dựng các cung tròn tâm B bán kính 3 cm và cung tròn tâm C bán kính 1 cm. Hai cung tròn này cắt nhau ở A . Nối AC , AB ta được $\triangle ABC$ cần dựng.

□

VÍ DỤ 4. Tìm chu vi của tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là 3,5 cm và 7 cm.

✎ LỜI GIẢI.

Giả sử $\triangle ABC$ cân tại A thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó cạnh AB không thể bằng 3,5 cm, vì trái lại ta có $AB + AC = 3,5 + 3,5 = BC$. Do đó $AB = AC = 7$ cm; $BC = 3,5$ cm.

Chu vi $\triangle ABC$ là $7 + 7 + 3,5 = 17,5$ cm.

□

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ và M là một điểm nằm trong tam giác.

a) Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC . Chứng minh rằng

$$MA + MB < IA + IB < CA + CB.$$

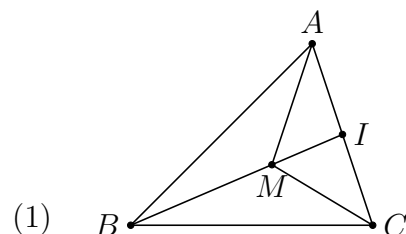
b) Chứng minh rằng $MA + MB + MC$ lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của $\triangle ABC$.

✎ LỜI GIẢI.

①

Trong $\triangle AMI$, ta có

$$\begin{aligned} MA &< IA + IM \\ \Rightarrow MA + MB &< IA + IM + MB \\ \Rightarrow MA + MB &< IA + IB. \end{aligned}$$



(1)

Trong $\triangle BIC$, ta có

$$IB < CI + CB \Rightarrow IA + IB < IA + CI + CB \Rightarrow IA + IB < CA + CB. \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta nhận được $MA + MB < IA + IB < CA + CB$.

② Trong $\triangle MAB$, ta có $MA + MB > AB$ (3)

Trong $\triangle MBC$, ta có $MB + MC > BC$ (4)

Trong $\triangle MAC$, ta có $MA + MC > AC$ (5)

Cộng theo vế (3), (4), (5) ta được

$$\begin{aligned} 2(MA + MB + MC) &> AB + BC + CA \\ \Rightarrow MA + MB + MC &> \frac{1}{2}(AB + BC + CA). \end{aligned}$$

Mặt khác, theo kết quả câu a), ta được

$$MA + MB < CA + CB \quad (6)$$

$$MB + MC < AB + AC \quad (7)$$

$$MA + MC < BA + BC \quad (8)$$

Cộng theo vế (6), (7), (8) ta được

$$\begin{aligned} 2(MA + MB + MC) &< 2(AB + BC + CA) \\ \Rightarrow MA + MB + MC &< AB + BC + CA. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 6. Cho $\triangle ABC$ và M là điểm nằm giữa B và C .

a) Chứng minh rằng MA nhỏ hơn nửa chu vi $\triangle ABC$.

b) Trong trường hợp M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $MA < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

✎ **LỜI GIẢI.**

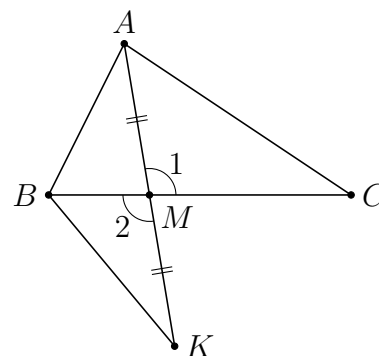
a)

Trong $\triangle MAB$, ta có $MA < AB + BM$. (1)

Trong $\triangle MAC$, ta có $MA < AC + CM$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} 2MA &< AB + AC + BM + CM \\ \Rightarrow MA &< \frac{1}{2}(AB + AC + BC). \end{aligned}$$



b) Trên tia AM lấy điểm K sao cho $AM = KM$.

Xét hai tam giác $\triangle AMC$ và $\triangle KMB$ ta có

$$AM = KM \text{ (do cách dựng)}$$

$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2} \text{ (vì đối đỉnh)}$$

$$CM = BM \text{ (vì } M \text{ là trung điểm của } BC)$$

Do đó $\triangle AMC = \triangle KMB$. Suy ra $BK = AC$.

Trong $\triangle ABK$ ta có $AK < AB + BK \Rightarrow 2MA < AB + AC \Rightarrow MA < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

□

Nhận xét. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, chúng ta giả được một dạng toán cực trị “**Cho đường thẳng d và hai điểm A, B không thuộc d . Tìm điểm C trên đường thẳng d sao cho $CA + CB$ đạt giá trị nhỏ nhất**”. Đây chính là dạng toán rất quen thuộc trong các đề thi đại học. Phương pháp được tổng kết thông qua hai ví dụ sau.

VÍ DỤ 7. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về hai phía của đường thẳng d . Tìm điểm C nằm trên đường thẳng d sao cho $CA + CB$ nhỏ nhất.

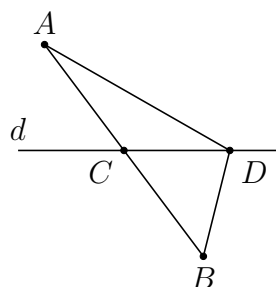
🔗 LỜI GIẢI.

Gọi C là giao điểm của AB và d và D là điểm bất kì trên d ($D \neq C$). Ta cần chứng minh $CA + CB < DA + DB$.

Thật vậy, trong $\triangle ABD$ ta luôn có

$$AB < DA + DB \Rightarrow CA + CB < DA + DB.$$

Vậy điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB và d .



□

Nhận xét. Ví dụ trên đã minh họa phương pháp tìm điểm C trong trường hợp hai điểm A, B nằm khác phía với đường thẳng d . Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa phương pháp tìm điểm C trong trường hợp hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d .

VÍ DỤ 8. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng d . Tìm điểm C nằm trên đường thẳng d sao cho $CA + CB$ nhỏ nhất.

🔗 LỜI GIẢI.

Kẻ BH vuông góc với d . Trên tia đối của tia HB lấy điểm B_1 sao cho $BH = B_1H$. Gọi C là giao điểm của AB_1 và d , D là điểm bất kì trên d . Ta cần chứng minh $CA + CB < DA + DB$.

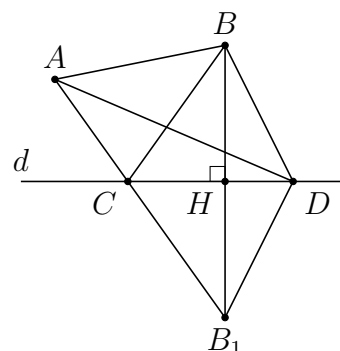
Thật vậy, trong $\triangle AB_1D$ ta luôn có

$$AB_1 < DA + DB_1 \Rightarrow CA + CB_1 < DA + DB_1. \quad (1)$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$\text{— } \triangle HBC = \triangle HB_1C \text{ (hai cạnh góc vuông)} \Rightarrow CB = CB_1. \quad (2)$$

$$\text{— } \triangle HBD = \triangle HB_1D \text{ (hai cạnh góc vuông)} \Rightarrow DB = DB_1. \quad (3)$$



Thay (2), (3) vào (1) ta được $CA + CB < DA + DB$. Vậy điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB_1 và d . $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Dựa vào hệ quả của bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài sau đây là độ dài ba cạnh của một tam giác và hãy dựng tam giác đó.

a) 3 cm, 4 cm, 8 cm.

b) 5 cm, 8 cm, 2 cm.

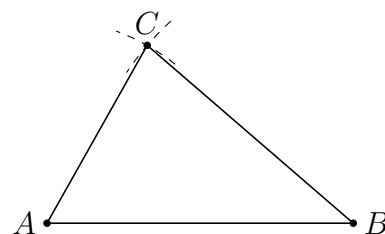
c) 6 cm, 8 cm, 9 cm.

LỜI GIẢI.

- ① Đây không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $3 + 4 < 8$.
- ② Đây không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $2 + 5 < 8$.
- ③ Đây là độ dài ba cạnh của một tam giác vì $6 + 8 > 9$, $6 + 9 > 8$, $9 + 8 > 6$.

Giả sử cần dựng $\triangle ABC$ biết $AB = 9$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 6$ cm, ta lần lượt thực hiện các bước như sau

- Dựng đoạn $AB = 9$ cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các cung tròn tâm A bán kính 8 cm và cung tròn tâm B bán kính 6 cm. Hai cung tròn này cắt nhau ở C . Nối AC , BC ta được $\triangle ABC$ cần dựng.

 $\square$

BÀI 2. Tìm chu vi tam giác cân $\triangle ABC$ biết độ dài hai cạnh của nó là

a) 4 cm, 9 cm.

b) 4 cm, 6 cm.

LỜI GIẢI.

- ① Giả sử $\triangle ABC$ cân tại A thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó cạnh AB không thể bằng 4 cm, vì trái lại ta có $AB + AC = 4 + 4 < BC$. Do đó $AB = AC = 9$ cm; $BC = 4$ cm.
Chu vi $\triangle ABC$ là $9 + 9 + 4 = 22$ cm.
- ② Giả sử $\triangle ABC$ cân tại A thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó ta có hai trường hợp
Trường hợp 1: Nếu $AB = AC = 4$ cm và $BC = 6$ cm thì chu vi $\triangle ABC$ là $4 + 4 + 6 = 14$ cm.
Trường hợp 2: Nếu $AB = AC = 6$ cm và $BC = 4$ cm thì chu vi $\triangle ABC$ là $6 + 6 + 4 = 16$ cm.

 $\square$

BÀI 3. Chứng minh rằng trong một tam giác, độ dài mỗi cạnh luôn nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

LỜI GIẢI.

Giả sử tam giác có ba cạnh có độ dài lần lượt là a, b, c , ta cần chứng minh

$$a < \frac{1}{2}(a + b + c), \quad b < \frac{1}{2}(a + b + c), \quad c < \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Thật vậy, ta luôn có

$$a < b + c \Rightarrow a + a < a + b + c \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Các bất đẳng thức còn lại chứng minh tương tự. $\square$

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 1$ cm, $AC = 6$ cm.

- ① Hãy tìm độ dài cạnh BC biết độ dài này là một số nguyên (cm).
- ② Lấy điểm D nằm giữa B và C . Chứng minh rằng $AD < 6,5$ cm.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Theo bất đẳng thức tam giác, ta nhận được

$$AC - AB < BC < AB + AC \Rightarrow 6 - 1 < BC < 6 + 1 \Rightarrow 5 < BC < 7.$$

Do BC có độ dài là một số nguyên (cm) nên $BC = 6$ cm.

- ② Dựa vào kết quả đã chứng minh ở **Ví dụ 6 - Dạng 2** ta có

$$AD < \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = 6,5 \text{ cm.}$$

□

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 7$ cm, $AC = 2$ cm.

- ① Hãy tìm độ dài cạnh BC biết độ dài này là một số nguyên lẻ (cm).
- ② M là một điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng $MA + MB + MC > 8$ cm.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Theo bất đẳng thức tam giác, ta nhận được

$$AC - AB < BC < AB + AC \Rightarrow 7 - 2 < BC < 7 + 2 \Rightarrow 5 < BC < 9.$$

Do BC có độ dài là một số nguyên lẻ (cm) nên $BC = 7$ cm.

- ② Dựa vào kết quả đã chứng minh ở **Ví dụ 5 - Dạng 2** ta có

$$MA + MB + MC > \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = 8 \text{ (cm).}$$

□

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Đường trung trực của BC cắt cạnh AC tại D . Gọi K là điểm bất kì khác D trên đường trung trực đó. So sánh chu vi các tam giác $\triangle KAB$ và $\triangle DAB$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Trước hết, vì D, K thuộc trung trực của BC nên $BD = CD$ và $BK = CK$.

Trong $\triangle ACK$ ta có $AC < AK + CK$. Khi đó

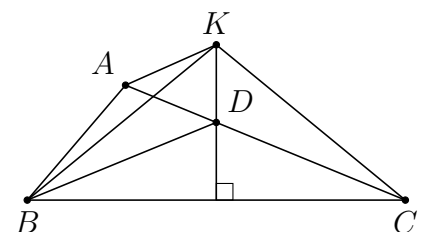
$$\begin{aligned} AB + AD + DB &= AB + AD + CD = AB + AC \\ &< AB + AK + CK = AB + AK + BK. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

□

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $AC = b$ ($b > c$), trung tuyến $AM = m$. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}(b - c) < m < \frac{1}{2}(b + c)$.

Hướng dẫn: Sử dụng kết quả “Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.”

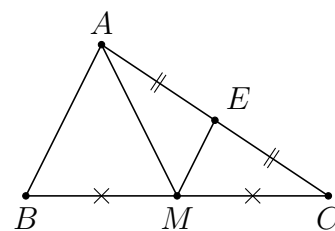


LỜI GIẢI.

Gọi E là trung điểm của AC , suy ra $ME = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$.

Xét $\triangle AEM$ ta có

$$\begin{aligned} AE - ME &< AM < AE + ME \\ \Rightarrow \frac{b}{2} - \frac{c}{2} &< m < \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(b - c) &< m < \frac{1}{2}(b + c). \end{aligned}$$



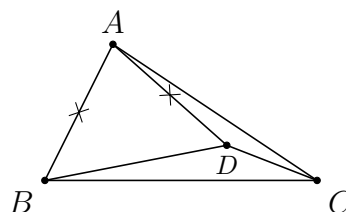
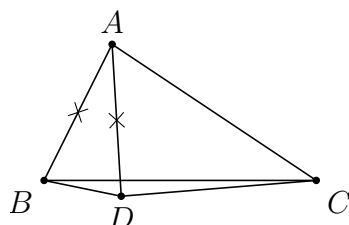
□

BÀI 8.

- ① Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC < B_1C_1$. Chứng minh rằng $\widehat{A} < \widehat{A_1}$.
- ② Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\widehat{A} < \widehat{A_1}$. Chứng minh rằng $BC < B_1C_1$.
- ③ Áp dụng: Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, trung tuyến AM . Lấy điểm D bất kì trên tia đối của tia MA . So sánh độ dài CD và BD .

LỜI GIẢI.

①



Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B , ta dựng điểm D sao cho $\triangle ACD = \triangle A_1C_1B_1$. Hiển nhiên $\widehat{A} \neq \widehat{A_1}$. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\widehat{A} > \widehat{A_1}$, suy ra $\widehat{CAB} > \widehat{CAD}$, do đó tia AD nằm giữa hai tia AB và AC . Ta có các trường hợp sau

— D nằm ngoài tam giác ABC .

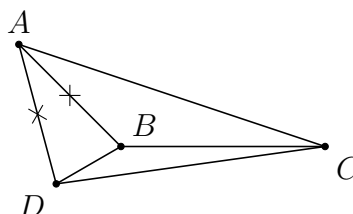
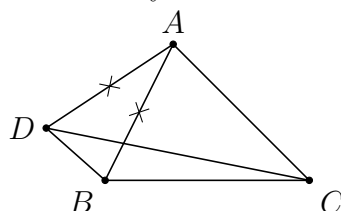
Khi đó các tia BC nằm giữa tia BA và BD , suy ra $\widehat{ABD} > \widehat{CBD}$. Theo các dựng điểm D thì $AD = A_1B_1 = AB$, hay tam giác ABD cân tại A , suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} > \widehat{CBD}$. Lại có $\widehat{BDC} > \widehat{ADB}$ nên $\widehat{CDB} > \widehat{CBD}$, do đó $BC > CD = B_1C_1$. Ta gặp mâu thuẫn.

— D nằm trong tam giác ABC .

Theo chứng minh trên tam giác ADB cân tại A nên $\widehat{ADB} < 90^\circ$, do đó $\widehat{BDC} > 90^\circ$, vì nếu $\widehat{BDC} \leq 90^\circ$ thì $\widehat{ADC} = 360^\circ - \widehat{ADB} - \widehat{BDC} > 180^\circ$ (vô lí). Do đó, trong tam giác BDC thì $\widehat{BDC}$ lớn nhất, suy ra $BC > CD = B_1C_1$. Ta gặp mâu thuẫn.

Như vậy điều giả sử là sai. Vậy $\widehat{A} < \widehat{A_1}$.

②



Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B , ta lấy điểm D sao cho $\triangle ACD = \triangle A_1C_1B_1$. Khi đó $\widehat{CAD} = \widehat{A_1} > \widehat{CAB}$, suy ra tia AB nằm giữa tia AD và tia AC . Ta có các trường hợp sau

— Tia CD nằm giữa hai tia CA và CB .

Khi đó tia BA , DC lần lượt nằm giữa các cặp tia BD và BC , DA và DB . Suy ra $\widehat{CBD} >$

$\widehat{ABD}$ và $\widehat{ADB} > \widehat{CDB}$. Theo cách dựng điểm D thì tam giác ABD cân tại A , suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$. Từ đó ta có $\widehat{CDB} < \widehat{CBD}$ hay $BC < DC$.

— Tia CB nằm giữa hai tia CA và CD .

Khi đó điểm B nằm trong tam giác ACD . Theo chứng minh trên tam giác ABD cân tại A nên $\widehat{ABD} < 90^\circ$, suy ra $\widehat{CBD} > 90^\circ$. Điều này chứng tỏ cạnh CD là cạnh lớn nhất trong tam giác BCD , suy ra $BC < DC$.

Như vậy trong các trường hợp ta đều có $BC < DC$, mà $DC = B_1C_1$ nên $BC < B_1C_1$.

③

Ta lần lượt nhận thấy

— Với hai tam giác $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ ta có

$$MB = MC, \text{ vì } M \text{ là trung điểm của } BC$$

AM chung

$$AB < AC$$

$$\text{do đó } \widehat{M_1} < \widehat{M_2}, \text{ hay } \widehat{M_3} < \widehat{M_4}.$$

— Với hai tam giác $\triangle BDM$ và $\triangle CDM$ ta có

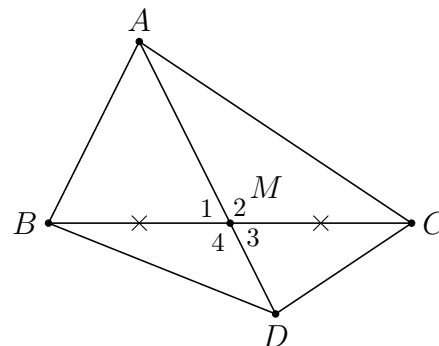
$$MB = MC, \text{ vì } M \text{ là trung điểm của } BC$$

DM chung

$$\widehat{M_3} < \widehat{M_4}$$

$$\text{do đó } CD < BD.$$

□



Nhận xét. Vận dụng kết quả của định lý trong các câu a), b) các em học sinh hãy thực hiện thêm bài tập sau: “Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi M là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA} > \widehat{MCA}$. So sánh $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MAC}$.”

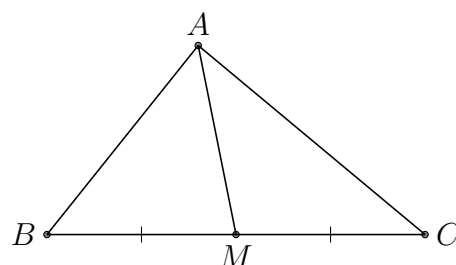
BÀI 4 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường trung tuyến của tam giác

Định nghĩa 1.

Cho tam giác ABC , đoạn thẳng AM nối đỉnh A với trung điểm M của cạnh BC gọi là *đường trung tuyến* (xuất phát từ điểm A hoặc ứng với cạnh BC) của tam giác ABC .



⚠ Mọi tam giác có ba đường trung tuyến.

2. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

Tính chất 1. Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm).

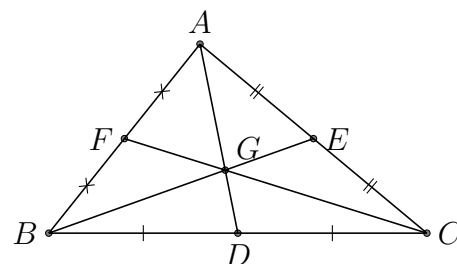
Tính chất 2. Điểm gặp nhau của ba đường trung tuyến gọi là *trọng tâm* của tam giác đó.

Tính chất 3.

Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Giả sử G là trọng tâm tam giác ABC , ta có

$$AG = \frac{2}{3}AD; \quad BG = \frac{2}{3}BE; \quad CG = \frac{2}{3}CF.$$



Nhận xét

① Từ kết quả trên ta có (AD, BE, CF là các trung tuyến)

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2; \quad \frac{GD}{AD} = \frac{GE}{BE} = \frac{GF}{CF} = \frac{1}{3}.$$

② Trọng tâm G của tam giác ABC luôn ở bên trong tam giác.

③ Để xác định trọng tâm G của tam giác ABC có thể sử dụng một trong hai cách

- Kẻ hai trung tuyến, và khi đó giao điểm của chúng là trọng tâm G .
- Kẻ một trung tuyến (giả sử AD), trên đoạn AD lấy điểm G sao cho $GA = 2GD$ (hoặc các tỉ số tương đương) và khi đó G là trọng tâm tam giác ABC .

⚠ Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

B CÁC DẠNG TOÁN

□ DẠNG 1. Tính độ dài đoạn thẳng

Phương pháp giải:

— Sử dụng tính chất trọng tâm: Nếu $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , trọng tâm G thì

$$AG = \frac{2}{3}AM; AG = 2GM; GM = \frac{1}{3}AM.$$

— Nếu một đường thẳng đi qua một đỉnh và trọng tâm thì chia đôi cạnh đối diện

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Đường trung tuyến BM , trọng tâm G . Tính độ dài đoạn BG .

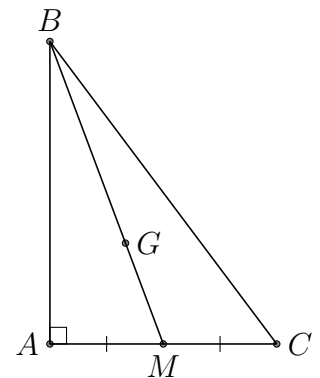
✎ LỜI GIẢI.

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại C

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{AC}{2} = 3 \text{ cm.}$$



Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ABM vuông tại A , ta có

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 8^2 + 3^2 = 73 \Rightarrow BM = \sqrt{73} \text{ cm.}$$

$$G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } BG = \frac{2}{3}BM = \frac{2\sqrt{73}}{3} \text{ cm.}$$

□

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến AM , BN vuông góc với nhau, trọng tâm G . Biết $AM = 4,5$ cm, $BN = 6$ cm. Tính độ dài AB .

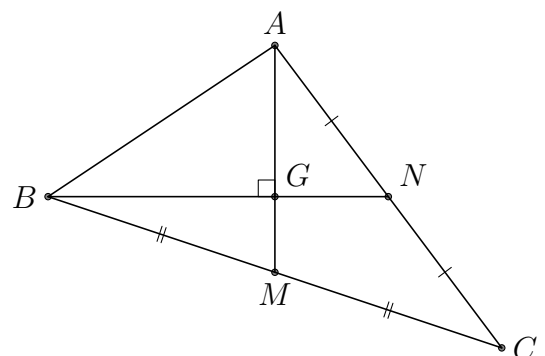
✎ LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABC$, theo tính chất trọng tâm ta có

$$AG = \frac{2}{3}AM = 3 \text{ cm, } BG = \frac{2}{3}BN = 4 \text{ cm.}$$

Xét $\triangle ABG$ vuông tại G , theo định lý Py-ta-go ta có

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow AB = 5 \text{ cm.}$$

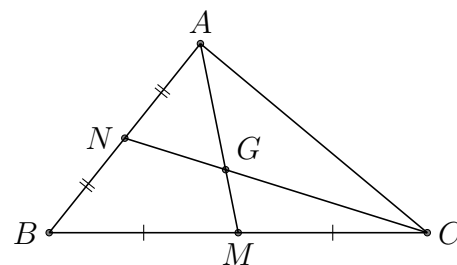


□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Trong hình sau, G là trọng tâm tam giác ABC

- ① Biết $AM = 15$ cm, tính AG .
- ② Biết $GN = 6$ cm, tính CN .
- ③ Tìm x biết $AG = 4x + 6$, $AM = 9x$.
- ④ Tìm x biết $CG = 5x$, $GN = 3x - 2$.



LỜI GIẢI.

- ① Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$ cm.
- ② Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $CN = 3GN = 3 \cdot 6 = 18$ cm.
- ③ Áp dụng tính chất trọng tâm ta có

$$AG = \frac{2}{3}AM$$

$$\Leftrightarrow 4x + 6 = \frac{2}{3} \cdot 9x$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (4x + 6) = 18x$$

$$\Leftrightarrow 12x + 18 = 18x$$

$$\Leftrightarrow 6x = 18$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

- ④ Áp dụng tính chất trọng tâm ta có

$$CG = 2GN$$

$$\Leftrightarrow 5x = 2(3x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 5x = 6x - 4$$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

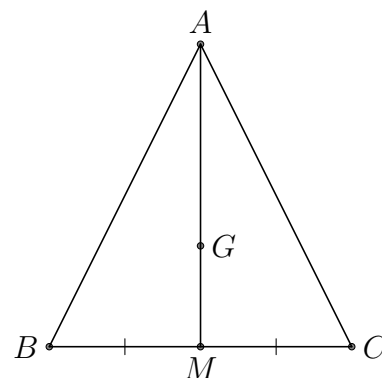
□

BÀI 2. Cho tam giác ABC có $AB = AC = 5$ cm, $BC = 8$ cm, đường trung tuyến AM , trọng tâm G . Tính độ dài đoạn thẳng AG .

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có

$$\left\{ \begin{array}{ll} AM & \text{cạnh chung} \\ AB = AC & (\text{gt}) \\ MB = MC & (M \text{ là trung điểm } BC) \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC.$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}.$$

Vì $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = \widehat{BMC} = 180^\circ$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow AM \perp BC$.

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác AMB vuông tại M

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 \Rightarrow AM^2 = AB^2 - BM^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow AM = 3 \text{ cm.}$$

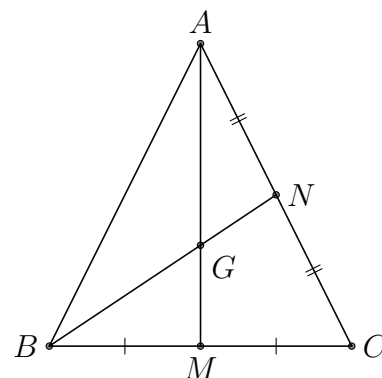
□

BÀI 3. Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ hai đường trung tuyến AM và BN . Cho biết $AM = 9 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$. Tính độ dài BN .

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có

$$\left\{ \begin{array}{ll} AM & \text{cạnh chung} \\ AB = AC & (\text{gt}) \\ MB = MC & (M \text{ là trung điểm } BC) \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC.$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}.$$

Vì $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = \widehat{BMC} = 180^\circ$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow AM \perp BC$.

Gọi G là giao điểm của AM và BN . Khi đó G là trọng tâm $\triangle ABC$.

$$BM = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm.}$$

$$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{9}{3} = 3 \text{ cm (tính chất trọng tâm).}$$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle GBM$ vuông tại M

$$BG^2 = GM^2 + BM^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BG = 5 \text{ cm.}$$

Theo tính chất trọng tâm $BG = \frac{2}{3}BN \Rightarrow BN = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2} \cdot 5 = 7,5 \text{ cm.}$ □

□ DẠNG 2. Chứng minh tính chất hình học

Phương pháp giải: Chú ý đến tính chất đường trung tuyến đi qua trung điểm của một cạnh và tính chất trọng tâm để giải quyết yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 3 (Nguyễn Phú Thạch, EX-C2-Lop7-2018). [7H3B4] Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy E sao cho $AE = 2AB$. Trên tia đối của tia BC lấy D sao cho $BD = BC$. Chứng minh rằng

- ① A là trọng tâm của $\triangle CDE$.
- ② CA đi qua trung điểm của DE .

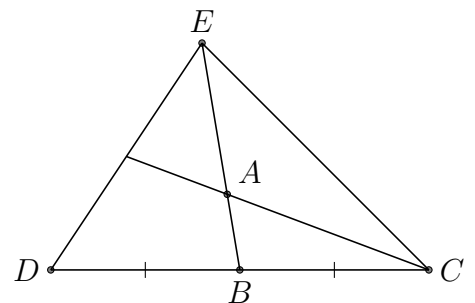
🔗 LỜI GIẢI.

- ① Vì $BC = BD$ nên B là trung điểm CD , suy ra EB là đường trung tuyến của $\triangle EDC$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác, } AE = 2AB &\Rightarrow EB = AE + AB = 3AB \\ &\Rightarrow EA = \frac{2}{3}EB. \end{aligned}$$

Vậy A là trọng tâm $\triangle CDE$.

- ② Vì A là trọng tâm $\triangle CDE$ nên CA đi qua trung điểm DE . □



VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường trung tuyến BM và CN . Chứng minh rằng $BM = CN$.

🔗 LỜI GIẢI.

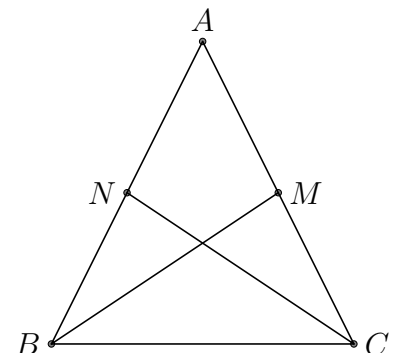
Tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$.

Ta có $AM = \frac{1}{2}AC$, $AN = \frac{1}{2}AB$ suy ra $AM = AN$.

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ANC$ có

$$\begin{cases} \widehat{A} \text{ góc chung} \\ AM = AN \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \triangle AMB = \triangle ANC \text{ (c.g.c).}$$

$\Rightarrow BM = CN$ (cạnh tương ứng). □



VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường trung tuyến AM , ta sẽ chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$.

Trên tia đối tia MA , lấy D sao cho $MD = MA$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có

$$\begin{cases} AM = MD \\ \widehat{AMC} = \widehat{DMB} \Rightarrow \triangle AMC = \triangle DMB \text{ (c.g.c)} \\ BM = MC \end{cases}$$

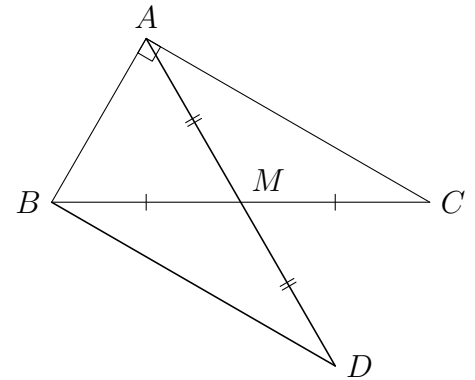
$\Rightarrow BD \parallel AC$.

Mà $AC \perp AB$ nên suy ra $BD \perp AB$.

Xét $\triangle ACB$ và $\triangle BDA$ có

$$\begin{cases} BD = AC \\ \widehat{CAB} = \widehat{DBA} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACB = \triangle BDA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BC = AD. \\ AB \text{ cạnh chung} \end{cases}$$

Vì $AM = \frac{1}{2}AD$ nên $AM = \frac{1}{2}BC$. □



2. Bài tập tự luyện

BÀI 4. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

LỜI GIẢI.

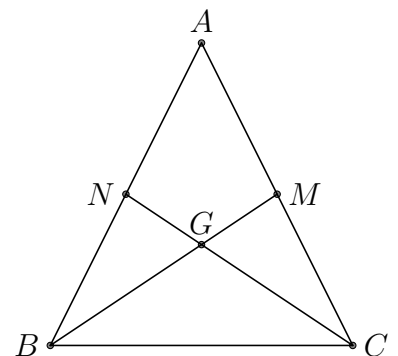
Giả sử $\triangle ABC$ có BM, CN là các đường trung tuyến, $BM = CN$, G là trọng tâm

$$\begin{aligned} BG &= \frac{2}{3}BM; \quad CG = \frac{2}{3}CN \\ GM &= \frac{1}{3}BM; \quad GN = \frac{1}{3}CN \end{aligned}$$

Suy ra $BG = CG; GM = GN$. Mặt khác $\widehat{BGN} = \widehat{CGM}$.

Suy ra $\triangle BGN = \triangle CGM$ (c.g.c) $\Rightarrow BN = CM$.

$\Rightarrow AB = AC$. Vậy $\triangle ABC$ cân tại A . □



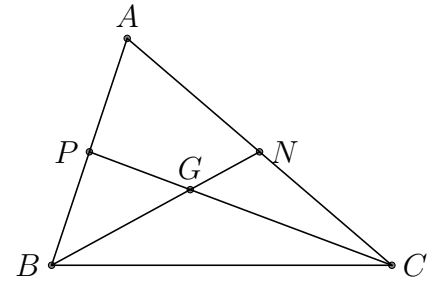
BÀI 5. Cho tam giác ABC có hai trung tuyến BN, CP và G là trọng tâm. Chứng minh rằng $BN + CP > \frac{3}{2}BC$.

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle GBC$ có $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác)

Mà $GB = \frac{2}{3}BN$, $GC = \frac{2}{3}CP$ (tính chất trọng tâm) nên

$$\frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}CP > BC \Rightarrow BN + CP > \frac{3}{2}BC.$$



□

BÀI 6. Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm. Trên tia đối của tia MG lấy điểm D sao cho $MD = MG$. Chứng minh rằng CG là đường trung tuyến của $\triangle ACD$.

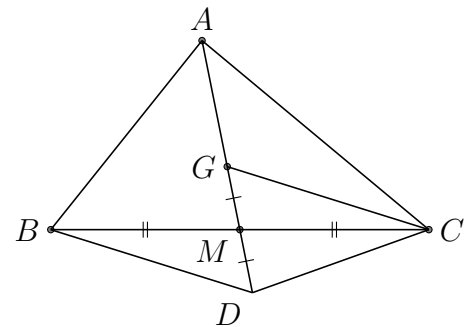
✎ **LỜI GIẢI.**

$\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm

$$\Rightarrow MG = \frac{1}{2}AG.$$

Mặt khác $MG = MD \Rightarrow MG = \frac{1}{2}GD$.

Do đó $GA = GD$. Vậy CG là đường trung tuyến của $\triangle ACD$.



□

BÀI 7. Cho tam giác nhọn ABC . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên cạnh AC lấy E sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$

① Chứng minh E là trọng tâm tam giác BCD .

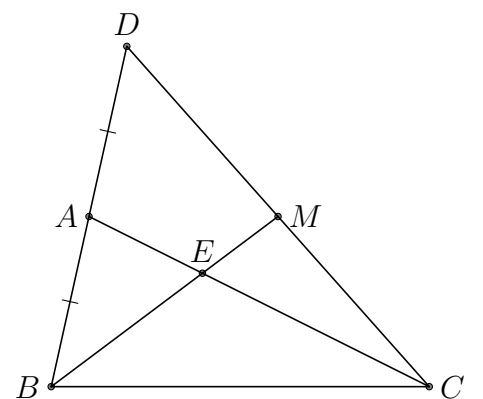
② Gọi M là trung điểm DC . Chứng minh ba điểm B, M, E thẳng hàng.

✎ **LỜI GIẢI.**

① Xét tam giác DBC có CA là đường trung tuyến và $AE = \frac{1}{3}AC$ nên suy ra E là trọng tâm $\triangle DBC$.

② M là trung điểm DC nên BM là đường trung tuyến của $\triangle DBC$. Mặt khác, E là trọng tâm $\triangle BCD$ nên $E \in BM$.

Vậy ba điểm B, M, E thẳng hàng.



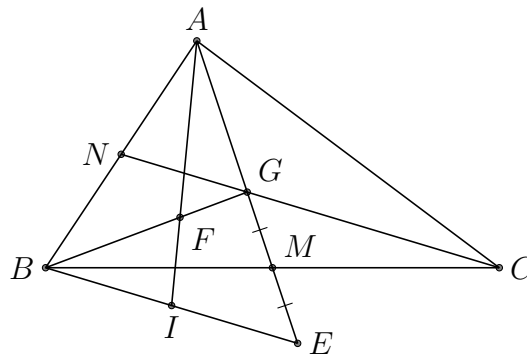
□

BÀI 8. Cho tam giác nhọn ABC . Trung tuyến AM và CN cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MG$.

① Chứng minh $BG \parallel EC$.

② Gọi I là trung điểm của BE , AI cắt BG tại F . Chứng minh $AF = 2FI$.

✎ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét $\triangle BMG$ và $\triangle CME$ ta có

$$\begin{cases} MG = ME & (\text{gt}) \\ MB = MC & (\text{M là trung điểm BC}) \\ \widehat{BMG} = \widehat{CME} & (\text{đối đỉnh}) \end{cases} \Rightarrow \triangle BMG = \triangle CME \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{MBG} = \widehat{MCE} \Rightarrow BG \parallel CE$ (hai góc bằng nhau ở vị trí so le trong).

❷ Vì $GM = ME$ nên $GE = 2GM$. Mặt khác, $AG = 2GM$ do tính chất trọng tâm $\Rightarrow GA = GE \Rightarrow G$ là trung điểm AE .

$\triangle ABE$ có hai đường trung tuyến AI và BG cắt nhau tại F nên F là trọng tâm $\Rightarrow AF = 2FI$. □

BÀI 9. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Trên đoạn AM lấy hai điểm D và E sao cho $AD = DE = EM$.

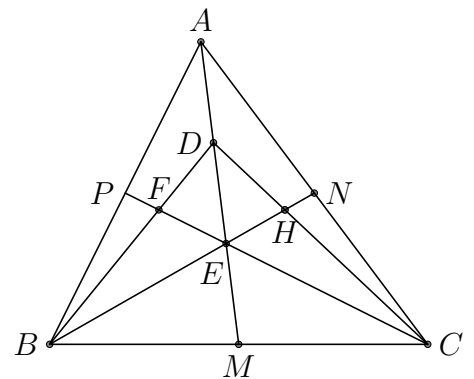
❶ Giải thích vì sao ba điểm B, E, N thẳng hàng và ba điểm C, E, P thẳng hàng.

❷ Gọi F là giao điểm của DB và CP , H là giao điểm của DC với BN . Điểm F và H lần lượt là trọng tâm của các tam giác nào? Vì sao?

✎ **LỜI GIẢI.**

❶ Vì $AD = DE = EM$ nên $AE = \frac{2}{3}AM$, suy ra E là trọng tâm $\triangle ABC$. Suy ra sao ba điểm B, E, N thẳng hàng và ba điểm C, E, P thẳng hàng.

❷ Xét $\triangle ABE$ có BD và EP là hai đường trung tuyến cắt nhau tại F nên F là trọng tâm $\triangle ABE$.
Xét $\triangle ACE$ có CD và EN là hai đường trung tuyến cắt nhau tại H nên H là trọng tâm $\triangle ACE$.



□

BÀI 10. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G . Biết $BM = CN$. Chứng minh rằng $AG \perp BC$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Ta có $BG = \frac{2}{3}BM$; $CG = \frac{2}{3}CN$ và $BM = CN$ (gt)

$$\Rightarrow BG = CG.$$

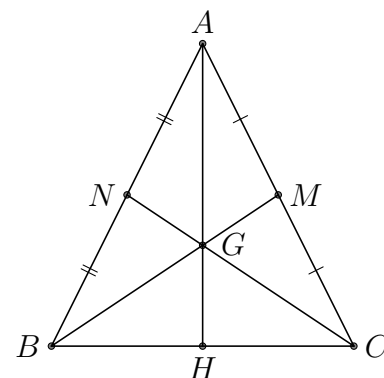
Gọi giao điểm của AG và BC là H , theo tính chất ta có $HC = HB$.

Xét $\triangle GHB$ và $\triangle GHC$ có

$$\begin{cases} GB = GC \\ HB = HC \\ GH \text{ cạnh chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle GHB = \triangle GHC \text{ (c.c.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{GHB} = \widehat{GHC}$ (yếu tố tương ứng).

Mà $\widehat{GHB} + \widehat{GHC} = 180^\circ$, do đó $\widehat{GHB} = 90^\circ$ hay $AG \perp BC$. □



BÀI 11. Cho hai đoạn thẳng AC , BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC , CD . Đoạn thẳng AM , AN cắt BD lần lượt tại I và K . Chứng minh $BI = IK = KD$

LỜI GIẢI.

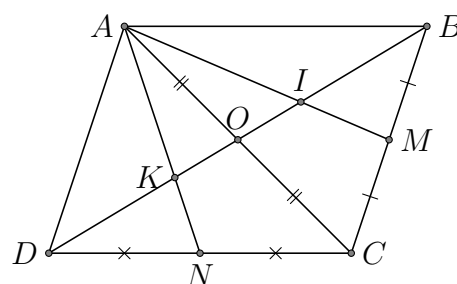
Xét $\triangle ABC$ có AM , BO là các đường trung tuyến, suy ra I là trọng tâm.

$$\Rightarrow BI = \frac{2}{3}BO \Rightarrow BI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD. \quad (1)$$

Tương tự ta có K là trọng tâm $\triangle ACD$.

$$\Rightarrow DK = \frac{1}{3}BD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KI = BD - BI - DK = \frac{1}{3}BD$. Vậy $BI = IK = KD$. □



BÀI 12. Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng các tam giác ADE và ABC có cùng trọng tâm.

LỜI GIẢI.

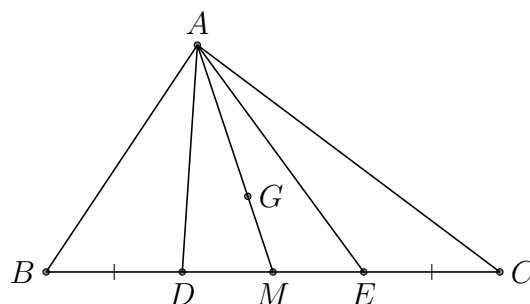
Gọi M là trung điểm BC .

$$BD = CE \Rightarrow MD = ME.$$

Suy ra AM là đường trung tuyến chung của $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$.

Trên AM lấy điểm G sao cho $GA = \frac{2}{3}MA$

Khi đó G là trọng tâm của $\triangle ADE$ và cũng là trọng tâm của $\triangle ABC$. □



BÀI 13. Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BM$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CN$. Gọi P là trung điểm của DE . Chứng minh rằng ba điểm M , N , P thẳng hàng.

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle MDE$ có $BD = BM$ (gt)

$\Rightarrow EB$ là đường trung tuyến. (1)

Lại có $BN = NC = CE$ (gt) $\Rightarrow NE = \frac{2}{3}BE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra N là trọng tâm của $\triangle MDE$.

Ta có $PD = PE$ (gt)

$\Rightarrow MP$ là một đường trung tuyến của $\triangle MDE$.

Suy ra MP phải đi qua trọng tâm N của tam giác. Vậy ba điểm M, N, P thẳng hàng. $\square$

BÀI 14. Cho tam giác ABC cân tại A , đường trung tuyến AH . Trên tia đối tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Trên tia đối tia BC lấy điểm E sao cho $BE = BC$. Đường thẳng AB cắt DE tại M . Chứng minh rằng M là trung điểm của DE .

LỜI GIẢI.

Ta có $HB = HC = \frac{1}{2}BC$.

Mặt khác $BE = BC$ nên $HB = \frac{1}{2}BE$

$$\Rightarrow BH = \frac{1}{3}EH \quad (1)$$

Ta có $HA = HD$ nên AH là đường trung tuyến của $\triangle ADE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra B là trọng tâm của $\triangle ADE$. Do đó đường thẳng AB là đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác này. Vậy $MD = ME$. $\square$

BÀI 15. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia MG lấy điểm I sao cho $MI = MG$. Trên tia đối của tia NG lấy điểm K sao cho $NK = NG$. Chứng minh rằng $IK = BC$ và $IK \parallel BC$.

LỜI GIẢI.

Ta có $GK = GC (= 2GN)$; $GI = GB (= 2GM)$.

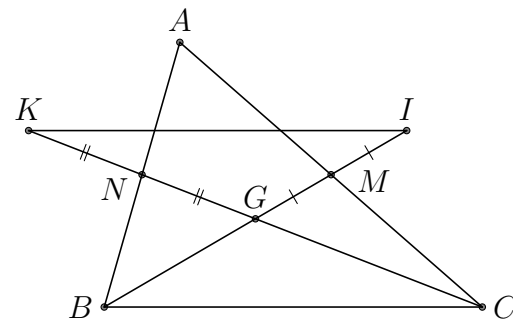
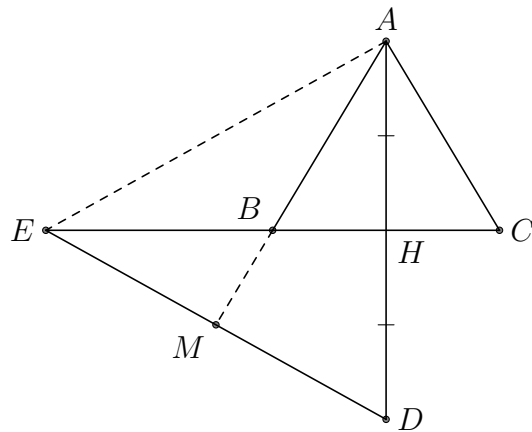
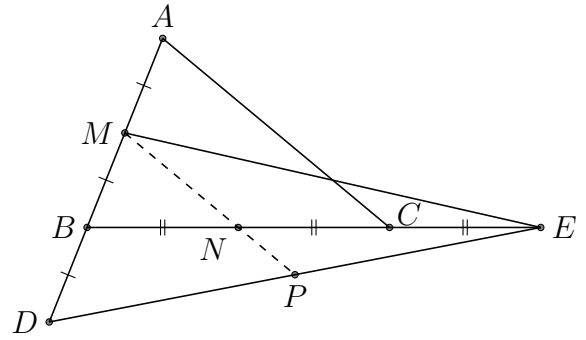
Xét $\triangle GBC$ và $\triangle GIK$ có

$$\begin{cases} GK = GC \\ \widehat{KGI} = \widehat{BGC} \text{ (hai góc đối đỉnh)} \\ GB = GI \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle GBC = \triangle GIK$ (c.g.c)

$\Rightarrow IK = BC$ và $\widehat{GIK} = \widehat{GBC}$ (yếu tố tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong, do đó $IK \parallel BC$. $\square$

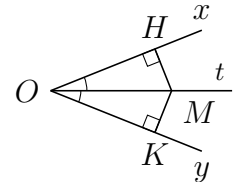


BÀI 5 TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý về tính chất các điểm thuộc tia phân giác

Định lý 1 (Định lý thuận). Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.



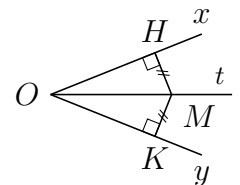
Như vậy, với góc xOy có tia phân giác Ot thì

$$M \in Ot \Rightarrow \text{kc}(M, Ox) = \text{kc}(M, Oy) \Rightarrow MH = MK.$$

⚠ M thuộc hình (H) và cách đều hai cạnh của $\widehat{xOy}$ khi M là giao điểm của (H) với tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

2. Định lý đảo

Định lý 2 (Định lý đảo). Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.



Như vậy, với góc xOy và điểm M sao cho $\text{kc}(M, Ox) = \text{kc}(M, Oy)$

$$\Rightarrow \widehat{MOx} = \widehat{MOy} \Rightarrow OM \text{ là tia phân giác của } \widehat{xOy}.$$

⚠ Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.

B CÁC DẠNG TOÁN

□ DẠNG 1. Chứng minh tính chất tia phân giác của một góc

Phương pháp giải: Sử dụng định lý thuận và đảo.

VÍ DỤ 1. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia phân giác Ot của góc xOy lấy điểm M bất kì. Chứng minh rằng điểm M cách đều Ox và Oy .

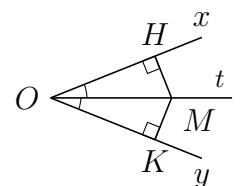
✎ LỜI GIẢI.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy . Ta cần chứng minh $MH = MK$.

Xét $\triangle OMH$ vuông tại H và $\triangle OMK$ vuông tại K có
 OM chung và $\widehat{MOH} = \widehat{MOK}$ (Ot là tia phân giác $\widehat{xOy}$).

$$\Rightarrow \triangle OMH = \triangle OMK \text{ (ch-gn).}$$

$$\Rightarrow MH = MK.$$



□

VÍ DỤ 2. Cho điểm M nằm bên trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc này. So sánh số đo của hai góc $\widehat{MOx}$ và $\widehat{MOy}$.

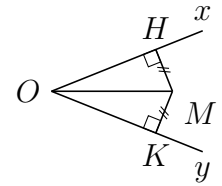
LỜI GIẢI.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy . Theo giả thiết ta có $MH = MK$.

Xét $\triangle OMH$ vuông tại H và $\triangle OMK$ vuông tại K có OM chung và $MH = MK$.

$\Rightarrow \triangle OMH = \triangle OMK$ (ch-cgv).

$\Rightarrow \widehat{MOx} = \widehat{MOy}$.



□

DẠNG 2. Chứng minh một tia là tia phân giác của một góc

Phương pháp giải: Sử dụng định lý đảo.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ $\triangle DBC$ vuông cân tại D ở phía ngoài $\triangle ABC$. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc A .

LỜI GIẢI.

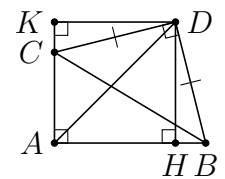
Kẻ $DH \perp AB, DK \perp AC$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle DHB$ và $\triangle DKC$ ta có

$DB = DC$ ($\triangle DBC$ cân tại D) và $\widehat{HDB} = \widehat{KDC}$ (cùng phụ với $\widehat{CDH}$).

$\Rightarrow \triangle DHB = \triangle DKC$ (ch-gn).

$\Rightarrow DH = DK \Rightarrow AD$ là tia phân giác của góc A .



□

! Vậy có hai cách chứng minh Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$

Cách 1. Chứng minh $\widehat{tOx} = \widehat{tOy}$.

Cách 2. Lấy M trên Ot , kẻ $MH \perp Ox, MK \perp Oy$. Chứng minh $MH = MK$.

DẠNG 3. Dựng tia phân giác của một góc

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 4. Cho góc xOy . Lấy các điểm A, B thuộc Ox sao cho $OA > OB$. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho $OC = OA$ và $OD = OB$. Gọi E là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng

- ① $AD = BC$.
- ② $\triangle ABE = \triangle CDE$.
- ③ OE là tia phân giác của góc xOy .

LỜI GIẢI.

❶ Chứng minh $AD = BC$.

Xét $\triangle OAD$ và $\triangle OCB$ ta có

$OA = OC$ (gt) và $\widehat{AOC}$ chung và $OD = OB$ (gt).

$\Rightarrow \triangle OAD = \triangle OCB$ (c-g-c).

$\Rightarrow AD = BC$.

❷ Chứng minh $\triangle ABE = \triangle CDE$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle CDE$ ta có

$\widehat{A} = \widehat{C}$ và $AB = OA - OB = OC - OD = CD$ và $\widehat{ABE} = 180^\circ - \widehat{OBC} = 180^\circ - \widehat{ODA} = \widehat{CDE}$.

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle CDE$ (g-c-g).

❸ Chứng minh OE là tia phân giác của góc xOy .

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle CDE$ ta có

$OA = OC$ (gt) và $\widehat{A} = \widehat{C}$ và $AE = CE$.

$\Rightarrow \triangle AOE = \triangle COE$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{COE}$.

$\Rightarrow OE$ là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

□

⚠ Phương pháp dựng tia phân giác của $\widehat{xOy}$

Bước 1. Chứng minh Lấy các điểm A, B thuộc Ox . Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho $OC = OA$ và $OD = OB$.

Bước 2. Xác định giao điểm I của AD và BC . Khi đó OI chính là tia phân giác của góc xOy .

❏ DẠNG 4. Sử dụng tính chất tia phân giác của một góc để giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Tìm điểm D thuộc trung tuyến AM sao cho D cách đều hai cạnh của góc B .

✎ LỜI GIẢI.

Do D cách đều hai cạnh của góc B nên BD là tia phân giác của góc B .

Vậy B là giao điểm của trung tuyến AM và tia phân giác của góc B .

□

VÍ DỤ 6. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

- ❶** Nếu đường trung tuyến AM đồng thời là đường phân giác của góc A thì $\triangle ABC$ cân tại A .
- ❷** Nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì đường trung tuyến AM cũng đồng thời là đường phân giác của góc A .

✎ LỜI GIẢI.

❶

Kẻ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$.

Vì AM là phân giác góc A nên $MH = MK$.

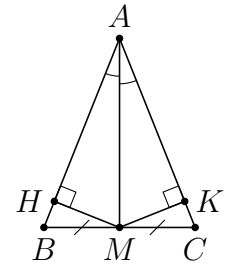
Xét hai tam giác vuông $\triangle HBM$ và $\triangle KCM$ ta có

$MH = MK$ (cmt) và $BM = CM$ (AM là trung tuyến).

$\Rightarrow \triangle HBM = \triangle KCM$ (ch-cgv).

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$.

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A .



②

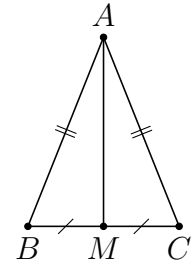
Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ ta có

$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A) và $\widehat{B} = \widehat{C}$ (vì $\triangle ABC$ cân tại A) và $MB = MC$ (vì AM là trung tuyến).

$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$.

$\Rightarrow AM$ là đường phân giác của góc A .



□

⚠ Câu a) còn có thể được chứng minh bằng cách lấy điểm A_1 trên tia AM sao cho $MA = MA_1$ (A_1 khác A).

VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C và phân giác trong của góc A cùng đi qua một điểm.

✎ LỜI GIẢI.

Gọi M là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C . Ta cần chứng minh M thuộc tia phân giác của góc A .

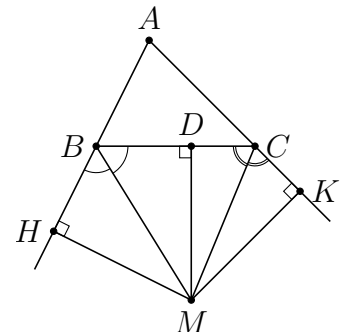
Kẻ $MH \perp AB$, $MD \perp BC$, $MK \perp AC$.

Vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại B nên $MH = MD$.

Vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại C nên $MK = MD$.

Suy ra $MH = MK \Rightarrow M$ thuộc tia phân giác của góc A .

Vậy ta có điều phải chứng minh.



□

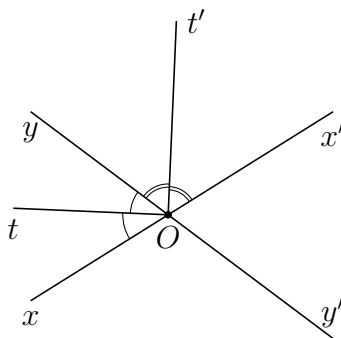
⚠ Vậy, ví dụ trên dùng cả định lý thuận và đảo.

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Cho hai đường thẳng xx' , yy' cắt nhau tại O .

- ① Chứng minh hai tia phân giác Ot và Ot' của một cặp góc kề bù tạo thành một góc vuông.
- ② Chứng minh rằng nếu M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot' thì M cách đều hai đường thẳng xx' và yy' .
- ③ Chứng minh rằng nếu điểm M cách đều hai đường thẳng xx' và yy' thì M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot' .
- ④ Hãy đưa ra nhận xét về tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau xx' và yy' .

✎ LỜI GIẢI.



- ❶ Chứng minh hai tia phân giác Ot và Ot' của một cặp góc kề bù tạo thành một góc vuông.

Ta có $\widehat{tOy} = \frac{\widehat{xOy}}{2}$ (Ot là phân giác của $\widehat{xOy}$) và $\widehat{yOt'} = \frac{\widehat{yOx'}}{2}$ (Ot' là phân giác của $\widehat{yOx'}$).

$$\text{Suy ra } \widehat{tOy} + \widehat{yOt'} = \frac{\widehat{xOy} + \widehat{yOx'}}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{tOt'} = 90^\circ \Rightarrow Ot \perp Ot'.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

- ❷ Chứng minh rằng nếu M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot' thì M cách đều hai đường thẳng xx' và yy' .

— Vì M thuộc Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ nên M cách đều Ox và Oy .

Vậy M cách đều xx' và yy' .

— Vì M thuộc Ot' là tia phân giác của $\widehat{x'Oy}$ nên M cách đều Ox' và Oy .

Vậy M cách đều xx' và yy' .

- ❸ Chứng minh rằng nếu điểm M cách đều hai đường thẳng xx' và yy' thì M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot' .

Vì M cách đều hai đường thẳng xx' và yy' nên OM là tia phân giác của góc tại đỉnh O có 2 cạnh nằm trên 2 đường thẳng xx' và yy' .

Vậy M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot' .

- ❹ Hãy đưa ra nhận xét về tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau xx' và yy' .

Tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau xx' và yy' là 2 đường phân giác Ot và Ot' .

□

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

- ❶ Nếu đường cao AM đồng thời là đường phân giác của góc A thì $\triangle ABC$ cân tại A .
 ❷ Nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì đường cao AM cũng đồng thời là đường phân giác của góc A .

✎ **LỜI GIẢI.**

❶

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ ta có

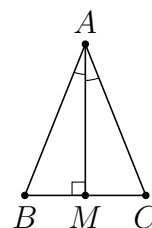
AM chung và $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (AM là phân giác góc $\widehat{BAC}$).

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM \text{ (g-c-g)}.$$

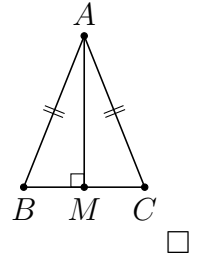
$$\Rightarrow AB = AC.$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A.$$

❷



Xét hai tam giác vuông $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ ta có
 AM chung và $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A).
 $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM$ (ch-cgv).
 $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$.
 $\Rightarrow AM$ là đường phân giác của góc A .



BÀI 3. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng hai đường phân giác của hai góc B và C và phân giác của góc A cùng đi qua một điểm.

LỜI GIẢI.

Gọi M là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc B và C . Ta cần chứng minh M thuộc tia phân giác của góc A .

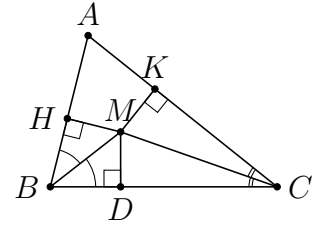
Kẻ $MH \perp AB$, $MD \perp BC$, $MK \perp AC$.

Vì M thuộc tia phân giác góc B nên $MH = MD$.

Vì M thuộc tia phân giác góc C nên $MK = MD$.

Suy ra $MH = MK \Rightarrow M$ thuộc tia phân giác của góc A .

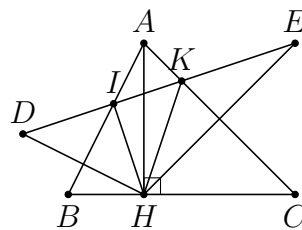
Vậy ta có điều phải chứng minh.



BÀI 4. Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Vẽ điểm D sao cho AB là đường trung trực của HD . Vẽ điểm E sao cho AC là đường trung trực của HE . Giả sử DE cắt AB , AC theo thứ tự tại I và K . Chứng minh rằng

- ① IB là tia phân giác của $\widehat{HID}$.
- ② KC là tia phân giác của $\widehat{HKE}$.
- ③ HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$.
- ④ IC là tia phân giác của $\widehat{HIK}$, từ đó suy ra IC vuông góc với AB .
- ⑤ KB là tia phân giác của $\widehat{HKI}$, từ đó suy ra KB vuông góc với AC .

LỜI GIẢI.



- ① Chứng minh IB là tia phân giác của $\widehat{HID}$.
 Vì $\triangle HID$ cân tại I nên IB là tia phân giác của $\widehat{HID}$.
- ② Chứng minh KC là tia phân giác của $\widehat{HKE}$.
 Vì $\triangle HKE$ cân tại K nên KC là tia phân giác của $\widehat{HKE}$.
- ③ Chứng minh HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$.

Trong $\triangle IHK$ ta có

- Theo kết quả câu a suy ra IA là phân giác ngoài của góc I .
- Theo kết quả câu b suy ra KA là phân giác ngoài của góc K .

Từ đó, suy ra HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$.

- ④ Chứng minh IC là tia phân giác của $\widehat{HIK}$, từ đó suy ra IC vuông góc với AB .

Trong $\triangle IHK$ ta có

- Theo kết quả câu b ta có KC là phân giác ngoài của góc K .
- Theo kết quả câu c ta có HA là phân giác của góc H .
- $HA \perp HC \Rightarrow HC$ là phân giác ngoài của góc H .

Từ đó, suy ra IC là tia phân giác của $\widehat{HIK}$.

Trong $\triangle IHD$ ta có

- IB là tia phân giác của góc I .
- IC là tia phân giác ngoài của góc I .

Từ đó, suy ra $IC \perp IB \Rightarrow IC \perp AB$.

- ⑤ Chứng minh KB là tia phân giác của $\widehat{HKI}$, từ đó suy ra KB vuông góc với AC .

Trong $\triangle IHK$ ta có

- IB là phân giác ngoài của góc I .
- HB là phân giác ngoài của góc H .

Từ đó, suy ra KB là tia phân giác của $\widehat{HKI}$.

Trong $\triangle KHE$ ta có

- KB là tia phân giác ngoài của góc K .
- KC là tia phân giác của góc K .

Từ đó, suy ra $KB \perp KC \Rightarrow KB \perp AC$.

□



TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường phân giác của tam giác

Ta có định nghĩa:

- Trong $\triangle ABC$, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm M , khi đó đoạn thẳng AM được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của $\triangle ABC$. Đôi khi, ta cũng gọi đường thẳng AM là đường phân giác của $\triangle ABC$.
- Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

Chú ý: Chúng ta đã có được các kết quả: "Trong tam giác cân đường phân giác xuất phát từ đỉnh thì cũng là đường cao, đường trung tuyến, đường trung trực của cạnh đáy".

2. Tính chất đường phân giác của tam giác

Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Nhận xét: Từ kết quả trên ta suy ra được:

- Để tìm điểm I trong $\triangle ABC$ cách đều ba cạnh của tam giác, ta chỉ cần dựng hai tia phân giác của hai góc và khi đó giao điểm I của chúng là điểm cần tìm.
- Nếu hai đường phân giác góc B và C cắt nhau tại I thì AI chính là tia phân giác của góc A .

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Chứng minh tính chất ba đường phân giác của tam giác

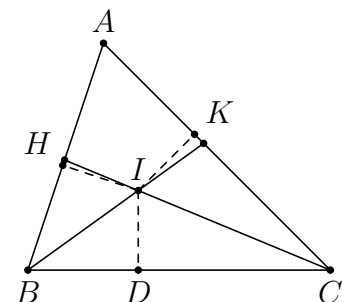
VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng ba đường phân giác của tam giác cùng đi qua một điểm.

LỜI GIẢI.

Xét tam giác ABC , gọi I là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$. Ta cần chứng minh I thuộc tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

Thật vậy, kẻ $IH \perp AB$, $ID \perp BC$, $IK \perp AC$, suy ra: $IH = ID$, vì I thuộc tia phân giác góc $\widehat{B}$, $IK = ID$, vì I thuộc tia phân giác góc $\widehat{C}$.

Suy ra $IH = IK \Leftrightarrow I$ là phân giác của góc $\widehat{A}$. Tức là, ba đường phân giác của $\triangle ABC$ cùng đi qua điểm I và ta có thêm $IH = IK = ID$, nghĩa là I cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$.



□

Vấn đề 2: Sử dụng tính chất ba đường phân giác của tam giác

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I . Tính số đo của góc A biết $\widehat{BIC} = 125^\circ$.

LỜI GIẢI.

Vì BK, CH là các đường phân giác nên

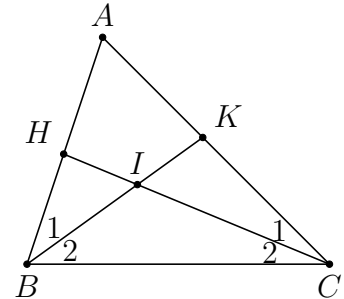
$$\widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B}_1, \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}_1$$

Trong $\triangle IBC$, ta có:

$$\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 = 180^\circ - \widehat{BIC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - 125^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 110^\circ$$

Trong $\triangle ABC$, ta có: $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Vậy ta có $\widehat{A} = 70^\circ$. □



VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 3$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD .

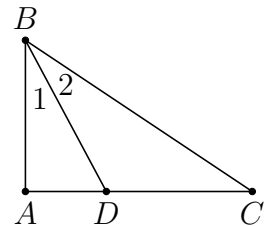
LỜI GIẢI.

Đặt $BD = x$. Trong $\triangle ABD$ vuông tại A , ta có:

$$\widehat{B}_1 = 30^\circ, \text{ vì } \widehat{B} = 60^\circ \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}.$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}.$$

Vậy độ dài phân giác $BD = 2\sqrt{3}$ cm. □

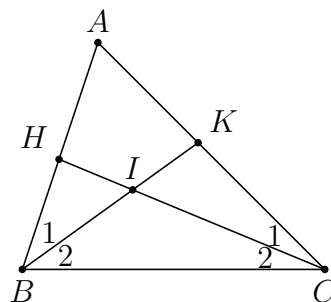


VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 80^\circ$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I .

a. Nối IA , tính số đo góc $\widehat{BAI}$.

b. Tính số đo góc $\widehat{BIC}$.

LỜI GIẢI.



a. Ta thấy ngay IA là phân giác của góc $\widehat{A}$ nên $\widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{A} = 40^\circ$.

Vậy ta có $\widehat{BAI} = 40^\circ$.

b. Trong $\triangle ABC$, ta có

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Vì BK, CH là các đường phân giác nên $\widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B}, \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}$.

Trong $\triangle IBC$, ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - \frac{1}{2}100^\circ = 130^\circ.$$

Vậy ta có $\widehat{BIC} = 130^\circ$.

□

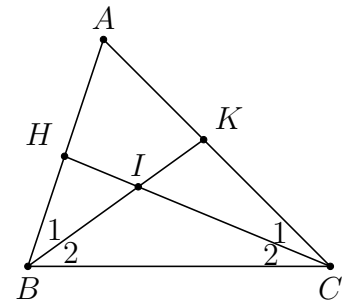
VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I . Chứng minh rằng $\widehat{BIC}$ là góc tù.

✎ LỜI GIẢI.

Trong $\triangle ABC$, ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A}$. Vì BK, CH là các đường phân giác nên $\widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B}, \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}$.

Trong $\triangle IBC$, ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{BIC} &= 180^\circ - (\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} > 90^\circ.\end{aligned}$$



Vậy ta có $\widehat{BIC}$ là góc tù.

□

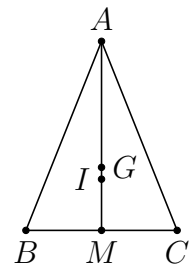
VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi G là trọng tâm của tam giác, gọi I là giao điểm các đường phân giác của tam giác. Chứng minh rằng ba điểm A, G, I thẳng hàng.

✎ LỜI GIẢI.

Ta có ngay:

- G thuộc trung tuyến AM .
- $\triangle ABC$ cân tại A nên AM là đường phân giác, do đó I thuộc AM .

Vậy ba điểm A, G, I thẳng hàng.



□

Nhận xét: Nếu $\triangle ABC$ là tam giác đều thì ba đường trung tuyến chính là ba đường phân giác, do đó trọng tâm G cách đều ba cạnh của tam giác.

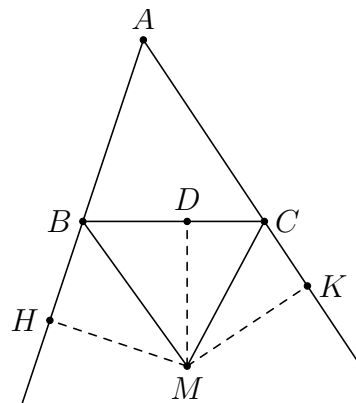
VÍ DỤ 6. Cho $\triangle ABC$. Hai đường phân giác của hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I . Hai đường phân giác ngoài của hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại M . Chứng minh rằng A, I, M thẳng hàng.

✎ LỜI GIẢI.

Từ giả thiết, hai đường phân giác của hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I suy ra AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$. Ta đi chứng minh M thuộc tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

Thật vậy, kẻ $MH \perp AB$, $MD \perp BC$, $MK \perp AC$, suy ra $MH = MD$, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại B , $MK = MD$, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại C .

Suy ra $MH = MK \Leftrightarrow M$ thuộc tia phân giác của góc $\widehat{A}$. Vậy ba điểm A, I, M thẳng hàng. □



VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$. Hãy tìm điểm sao cho

- Khoảng cách từ nó đến các đường thẳng AB, BC, AC bằng nhau.
- Khoảng cách từ nó đến các đường thẳng AB, BC, CA bằng nhau và khoảng cách là ngắn nhất.

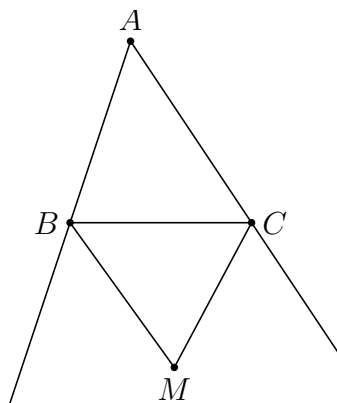
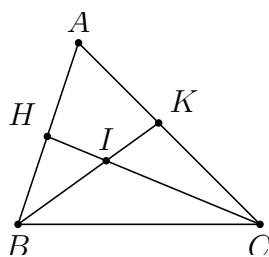
LỜI GIẢI.

- a. Điểm I thỏa mãn điều kiện đầu bài, có thể là:

Trường hợp 1: Điểm I là giao điểm ba đường phân giác của $\triangle ABC$, khi đó theo tính chất thì khoảng cách từ I đến các đường thẳng AB, BC, CA bằng nhau.

Trường hợp 2: Dựa trên kết quả đã được chứng minh “Cho $\triangle ABC$. Hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C và phân giác trong của góc $\widehat{A}$ cùng đi qua một điểm”, khi đó ta nhận được điểm I .

Trường hợp 3: Tương tự, chúng ta nhận được điểm I_2 là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại C và A .



Trường hợp 4: Tương tự, chúng ta nhận được điểm I_3 là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại A và B .

Vậy ta tìm được 4 điểm I, I_1, I_2, I_3 cách đều các đường thẳng AB, BC, AC .

- b. Khoảng cách từ I đến các đường thẳng AB, BC, AC bằng nhau và khoảng cách này là ngắn nhất. □

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I .

- a. Tính số đo góc $\widehat{BAI}$.

- b. Tính số đo góc $\widehat{BIC}$.
 c. Điểm I cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$ không? Vì sao?

✎ **LỜI GIẢI.**

- a. $\widehat{BAI} = 30^\circ$.
 b. $\widehat{BIC} = 120^\circ$.
 c. Điểm I có cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$ vì nó là giao điểm của ba đường phân giác.

□

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 2(\widehat{B} + \widehat{C})$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I . Tính số đo góc $\widehat{BIC}$, biết:

- a. $\widehat{BIC} = 121^\circ$.
 b. $\widehat{BIC} = \alpha$ với $\alpha > 90^\circ$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- a. Học sinh tự làm.
 b. Xét $\triangle ABC$ ta có

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 2(\widehat{B} + \widehat{C}) + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ.$$

Vì BK, CH là các đường phân giác nên $\widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B}$, $\widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}$.

Trong $\triangle IBC$, ta có:

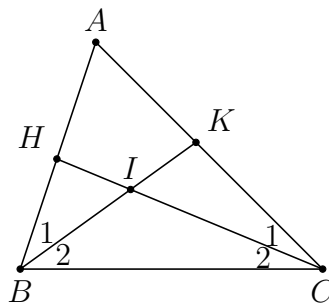
$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - \frac{1}{2}60^\circ = 150^\circ.$$

□

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I . Tính số đo của góc $\widehat{A}$, biết

- a. $\widehat{BIC} = 121^\circ$.
 b. $\widehat{BIC} = \alpha$, với $\alpha > 90^\circ$.

✎ **LỜI GIẢI.**



- a. $\widehat{A} = 62^\circ$.
 b. Vì BK, CH là các đường phân giác nên $\widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B}$, $\widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C}$.

Trong $\triangle IBC$, ta có:

$$\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 = 180^\circ - \widehat{BIC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - \alpha \Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ - 2\alpha.$$

Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - 360^\circ + 2\alpha = 2\alpha - 180^\circ.$$

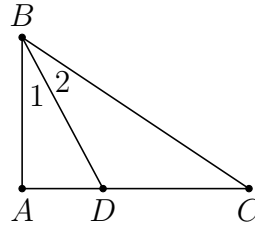
Vậy ta có $\widehat{A} = 2\alpha - 180^\circ$.



BÀI 4. Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I . Tính số đo của góc $\widehat{A}$, biết

- $AB = 6 \text{ cm}, \widehat{B} = 60^\circ$.
- $AB = 9 \text{ cm}, \widehat{B} = 30^\circ$.
- $AB = 3 \text{ cm}, AC = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.

LỜI GIẢI.



- Đặt $BD = x$. Trong $\triangle ABD$ vuông tại A , ta có:

$$\widehat{B_1} = 30^\circ, \text{ vì } \widehat{B} = 60^\circ \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}.$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}.$$

Vậy độ dài phân giác $BD = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

- Học sinh tự làm tương tự câu a) với nhận xét $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 60^\circ$.
- Trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 27 = 36 \Leftrightarrow BC = 6 = 2AB \Leftrightarrow \widehat{B} = 60^\circ.$$

Trong $\triangle ABD$ vuông tại A , ta có:

$$\widehat{B_1} = 30^\circ, \text{ vì } \widehat{B} = 60^\circ \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}.$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}.$$

Vậy độ dài phân giác $BD = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.



BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Chứng minh rằng $ME = MF$.

LỜI GIẢI.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên AM vừa là đường trung tuyến vừa là phân giác của góc $\widehat{A}$, suy ra điểm M cách đều hai cạnh AB và AC , tức là $ME = MF$. □

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I . Chứng minh rằng AI đi qua trung điểm của BC .

LỜI GIẢI.

Nhận xét rằng:

- Các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I nên AI là tia phân giác góc $\widehat{A}$.
- $\triangle$ cân tại A nên AI cũng là đường trung tuyến, do đó AI đi qua trung điểm của BC .



BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. Các đường phân giác AD, BE, CF .

- Chứng minh rằng DE là tia phân giác của $\widehat{ADC}$.
- Tính số đo của góc $\widehat{EDF}$.

 **LỜI GIẢI.**

Học sinh tự giải



BÀI 7

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý về tính chất các điểm thuộc đường trung trực

Định lý 1. (Định lý thuận) Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

Như vậy, với đoạn thẳng AB và đường trung trực d của nó thì " $M \in d \Rightarrow MA = MB$ ".

⚠ Nhận xét: Từ kết quả của định lý trên gợi ý cho chúng ta giải bài toán "Tìm điểm M thuộc hình (H) cách đều hai điểm A và B cho trước", bởi khi đó M chính là giao điểm của (H) với đường trung trực của đoạn thẳng AB .

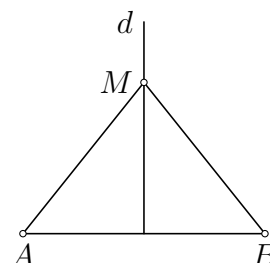
Định lý 2. (Định lý đảo) Điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Như vậy, với đoạn thẳng AB và đường trung trực d của nó thì

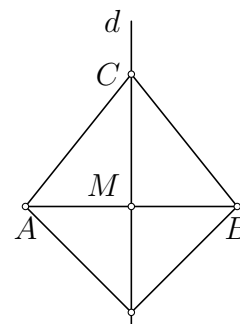
$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB.$$

Từ hai định lý trên ta có:

"Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó".



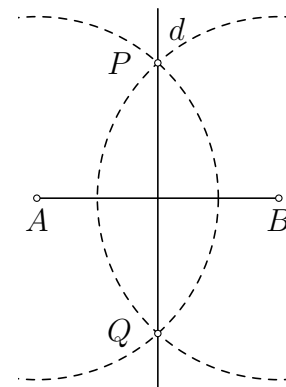
⚠ Nhận xét: Như vậy với AB cho trước thì tập các điểm C sao cho tam giác ABC cân tại C là đường trung trực của đoạn thẳng AB , trừ trung điểm M của đoạn thẳng AB .



2. Cách dựng đường trung trực

Để dựng đường trung trực d của đoạn thẳng AB cho trước bằng thước và compa, ta thực hiện theo các bước:

- **Bước 1:** Lấy điểm A làm tâm vẽ cung tròn có bán kính $R > \frac{1}{2}AB$.
Lấy điểm B làm tâm vẽ cung tròn có bán kính R . Hai cung tròn này cắt nhau tại P và Q .
- **Bước 2:** Dùng thước vẽ đường thẳng PQ , đó là đường trung trực của đoạn thẳng AB .



⚠ Chú ý:

- Khi vẽ hai cung tròn trên, ta phải lấy bán kính $R > \frac{1}{2}AB$ thì hai cung tròn đó mới có điểm chung.
- Giao điểm của hai đường thẳng PQ với đoạn thẳng AB là trung điểm của đoạn thẳng AB , do đó cách dựng trên cũng là cách dựng trung điểm của đoạn thẳng bằng thước thẳng và compa.

B CÁC DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 1. Chứng minh tính chất đường trung trực

Phương pháp giải: Với đoạn thẳng AB và đường trung trực d của nó thì $M \in d \Leftrightarrow MA = MB$.

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB . Trên đường trung trực d của đoạn thẳng AB lấy điểm M bất kì. Chứng minh rằng $MA = MB$.

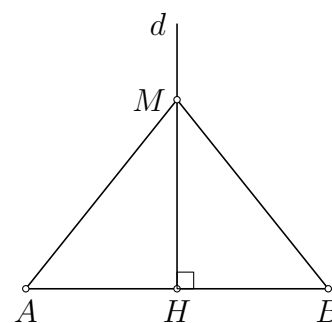
🔑 LỜI GIẢI.

Nếu M nằm trên đoạn thẳng AB thì M là trung điểm của đoạn thẳng AB và hiển nhiên $MA = MB$.

Ta xét trường hợp M nằm ngoài đoạn thẳng AB và gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Xét hai tam giác AHM và BHM cùng vuông tại H có HM chung và $HA = HB$ nên $\triangle AHM = \triangle BHM$ (2cv).

Khi đó ta thu được $MA = MB$ (đpcm).



□

VÍ DỤ 2. Cho đoạn thẳng AB và điểm M thỏa mãn $MA = MB$. Chứng minh rằng M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB .

🔑 LỜI GIẢI.

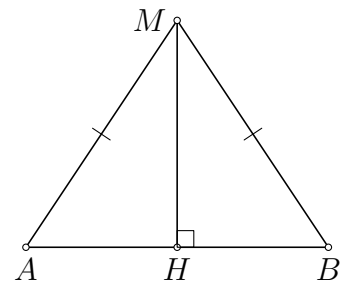
Nếu $M \in AB$, kết hợp với $MA = MB$ thì M là trung điểm của AB và hiển nhiên M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Ta xét trường hợp $M \notin AB$. Khi đó ta dựng $MH \perp AB$.

Xét hai tam giác AMH và BMH cùng vuông tại H có MH chung và $MA = MB$ nên $\triangle AMH = \triangle BMH$ (ch - gn).

Khi đó $HA = HB$ hay H là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do đó đường thẳng MH là đường trung trực của đoạn thẳng AB hay ta có điều phải chứng minh. □



❏ DẠNG 2. Sử dụng tính chất đường trung trực để giải toán

Phương pháp giải:

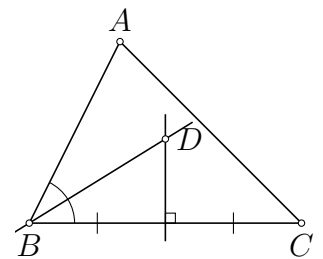
VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC . Tìm điểm D sao cho D cách đều hai cạnh của góc B và D cách đều hai điểm B và C .

🔗 LỜI GIẢI.

Điểm D cách đều hai cạnh của góc B nên D nằm trên đường phân giác của góc B .

Lại có D cách đều hai điểm B và C nên D nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC .

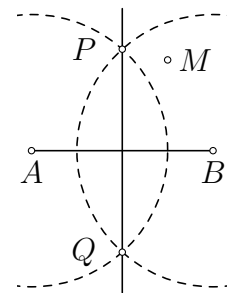
Vậy D là giao điểm của đường phân giác góc B và đường trung trực của đoạn thẳng BC .



VÍ DỤ 2.

Cho hình vẽ. Biết hai cung tròn có cùng bán kính R và điểm M nằm cùng phía với B so với đường thẳng PQ . Chứng minh rằng:

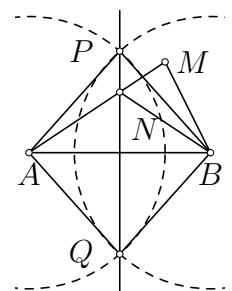
- ❶ Đường thẳng PQ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- ❷ $MA > MB$.



🔗 LỜI GIẢI.

- ❶ Do $AP = BP = R$ và $AQ = BQ = R$ nên P, Q cùng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB hay đường thẳng PQ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- ❷ Do M và A khác phía với nhau bờ là đường thẳng PQ nên đoạn thẳng AM cắt đường thẳng PQ tại điểm N , khi đó $NA = NB$ do đường thẳng PQ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Do đó $MA = MN + NA = MN + NB > NB$. □



⚠ Nhận xét: Như vậy, để chứng minh đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh d đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với AB .

Cách 2: Lấy hai điểm P, Q nằm trên d . Ta đi chứng minh $PA = PB$ và $QA = QB$.

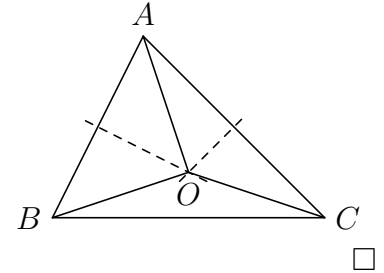
VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC . Hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O . Chứng minh rằng O thuộc đường trung trực của BC .

✍ LỜI GIẢI.

Do O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB nên $OA = OB$.

Do O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AC nên $OA = OC$.

Từ hai điều trên ta suy ra $OB = OC$ hay O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC .



⚠ Nhận xét: Như vậy, để hoàn thành bài toán trên ta đã sử dụng cả định lý thuận cả định lý đảo.

VÍ DỤ 4. Cho góc $\widehat{xOy} = 80^\circ$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng AB . Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của đoạn thẳng AC .

- ① Chứng minh rằng O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC .
- ② Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

✍ LỜI GIẢI.

- ① Do Ox là đường trung trực của AB nên $OA = OB$.

Do Oy là đường trung trực của AC nên $OA = OC$.

Từ hai điều trên ta thu được $OB = OC$ hay O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC .

- ② Gọi M, N thứ tự là trung điểm AB và AC , hiển nhiên $M \in Ox$ và $N \in Oy$ từ giả thiết.

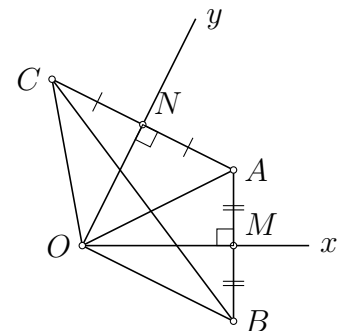
Xét hai tam giác OAM và OBM cùng vuông tại M có

$AM = MB$ và OM chung nên $\triangle OAM = \triangle OBM$ (2cv),

từ đó $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ hay $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOM}$.

Tương tự ta có $\widehat{AOC} = 2\widehat{AON}$.

Do đó $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 2(\widehat{AOM} + \widehat{AON}) = 2\widehat{xOy} = 160^\circ$.



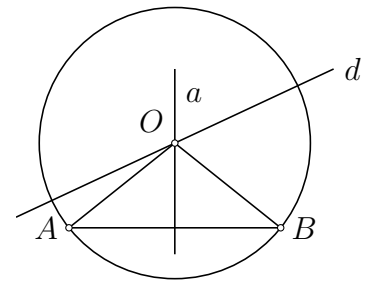
VÍ DỤ 5. Cho hai điểm A, B và đường thẳng d sao cho AB không vuông góc với d . Vẽ đường tròn có tâm O nằm trên đường thẳng d và đi qua hai điểm A, B .

✍ LỜI GIẢI.

Gọi đường thẳng a là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Do d không vuông góc với AB và $a \perp AB$ nên a và d không song song hay ta tìm được giao điểm O của a và d .

Khi đó $O \in d$ và $OA = OB$ nên đường tròn tâm O bán kính OA là đường tròn cần tìm.



□

VÍ DỤ 6. Cho ba tam giác cân DBC , EBC , FBC chung đáy BC . Chứng minh rằng D , E , F thẳng hàng.

🔗 LỜI GIẢI.

Do tam giác DBC cân có đáy BC nên $DB = DC$ hay D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC . Tương tự cho hai tam giác cân EBC và FBC chung đáy BC ta cũng có E , F thuộc trung trực của đoạn thẳng BC .

Do đó ta thu được D , E , F thẳng hàng.

□

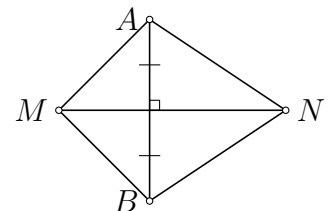
VÍ DỤ 7. Cho hai điểm M , N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB . Chứng minh rằng $\triangle AMN = \triangle BMN$.

🔗 LỜI GIẢI.

Do M , N nằm trên trung trực của đoạn thẳng AB nên $MA = MB$ và $NA = NB$.

Xét hai tam giác AMN và BMN có MN chung, $MA = MB$ và $NA = NB$ nên

$$\triangle AMN = \triangle BMN (c - c - c).$$



□

⚠️ Chú ý: Chúng ta đã được làm quen với dạng toán “Cho hai điểm A , B ở cùng về một phía với đường thẳng d . Tìm điểm C trên đường thẳng d sao cho $CA + CB$ nhỏ nhất.”, tuy nhiên khi đã có thêm kiến thức về tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng chúng ta có thể trình bày một cách đơn giản hơn. Ví dụ sau sẽ minh họa nhận định này.

VÍ DỤ 8. Cho đường thẳng d và hai điểm A , B nằm về một phía của đường thẳng d . Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho $CA + CB$ nhỏ nhất.

🔗 LỜI GIẢI.

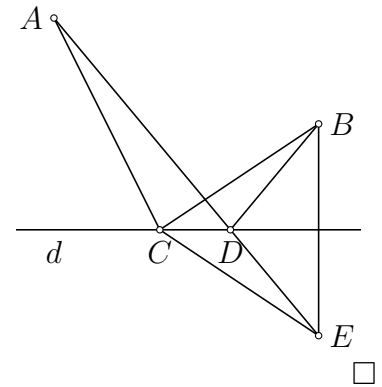
Gọi E là điểm sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng BE .

Gọi D là giao điểm của đoạn thẳng AE và đường thẳng d .

Khi đó: $DE = DB$ và $CE = CB$.

Do đó $CA + CB = CA + CE \geq AE = DA + DE = DA + DB$ không đổi.

Vậy giá trị $CA + CB$ nhỏ nhất bằng AE khi $C \equiv D$ hay C là giao điểm của đoạn thẳng AE và đường thẳng d .



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tam giác ABC . Tìm điểm O sao cho:

- ① O thuộc trung tuyến AM và cách đều hai đỉnh A, B .
- ② O cách đều các đỉnh A, B, C .
- ③ O cách đều các đỉnh A, C và cách đều các cạnh của góc $\hat{A}$.

LỜI GIẢI.

- ① O cách đều hai đỉnh A, B nên O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB .
Do đó O là giao điểm của đường trung trực đoạn thẳng AB và trung tuyến AM .
- ② O cách đều các đỉnh A, B, C nên $OA = OB = OC$ hay O là giao điểm của hai đường trung trực của đoạn thẳng AB, AC .
- ③ O cách đều các đỉnh A, C nên O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC .
Lại có O cách đều hai cạnh của góc $\hat{A}$ nên O nằm trên đường phân giác của góc $\hat{BAC}$.
Do đó O là giao điểm của đường trung trực đoạn thẳng AC và đường phân giác góc $\hat{BAC}$.

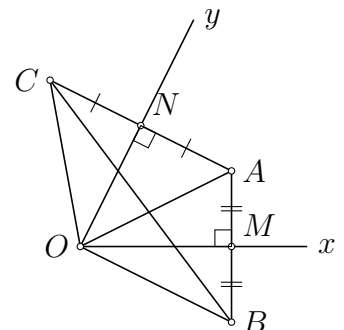
□

BÀI 2. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng AB . Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của đoạn thẳng AC .

- ① Chứng minh rằng $OB = OC$.
- ② Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

LỜI GIẢI.

- ① Do Ox là đường trung trực của AB nên $OA = OB$.
Do Oy là đường trung trực của AC nên $OA = OC$.
Từ hai điều trên ta thu được $OB = OC$.
- ② Gọi M, N thứ tự là trung điểm AB và AC , hiển nhiên $M \in Ox$ và $N \in Oy$ từ giả thiết.
Xét hai tam giác OAM và OBN cùng vuông tại M có $AM = BN$ và OM chung nên $\triangle OAM = \triangle OBN$ (2cv), từ đó $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ hay $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOM}$.
Tương tự ta có $\widehat{AOC} = 2\widehat{AON}$.
Do đó $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 2(\widehat{AOM} + \widehat{AON}) = 2\widehat{xOy} = 120^\circ$.



□

BÀI 3. Cho góc $\widehat{xOy} = 120^\circ$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$ sao cho $\widehat{xOA}$ và $\widehat{yOA}$ nhọn. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng AB . Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của đoạn

thẳng AC .

- ① Chứng minh rằng O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC .
- ② Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

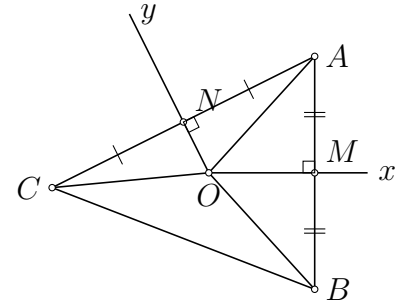
✎ LỜI GIẢI.

- ① Do Ox là đường trung trực của AB nên $OA = OB$.
Do Oy là đường trung trực của AC nên $OA = OC$.
Từ hai điều trên ta thu được $OB = OC$ hay O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC .
- ② Gọi M, N thứ tự là trung điểm AB và AC , hiển nhiên $M \in Ox$ và $N \in Oy$ từ giả thiết.
Xét hai tam giác OAM và OBM cùng vuông tại M có $AM = MB$ và OM chung nên $\triangle OAM = \triangle OBM$ (2cv), từ đó $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ hay $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOM}$.

Tương tự ta có $\widehat{AOC} = 2\widehat{AON}$.

Do đó $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 2(\widehat{AOM} + \widehat{AON}) = 2\widehat{xOy} = 240^\circ$.

Vậy $\widehat{BOC} = 360^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) = 120^\circ$. □



BÀI 4. Cho góc $\widehat{xOy}$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng AB . Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của đoạn thẳng AC . Tính số đo của góc $\widehat{xOy}$, biết $\widehat{BOC} = 110^\circ$.

✎ LỜI GIẢI.

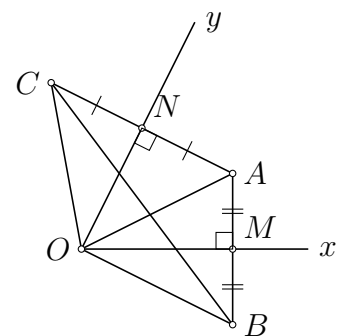
Gọi M, N thứ tự là trung điểm AB và AC , hiển nhiên $M \in Ox$ và $N \in Oy$ từ giả thiết.

Xét hai tam giác OAM và OBM cùng vuông tại M có $AM = MB$ và OM chung nên $\triangle OAM = \triangle OBM$ (2cv), từ đó $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ hay $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOM}$.

Tương tự ta có $\widehat{AOC} = 2\widehat{AON}$.

Do đó $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 2(\widehat{AOM} + \widehat{AON}) = 2\widehat{xOy}$.

Suy ra $\widehat{xOy} = 55^\circ$ vì $\widehat{BOC} = 110^\circ$. □



BÀI 5. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M trên đường phân giác ngoài góc A sao cho $MB + MC$ nhỏ nhất.

✎ LỜI GIẢI.

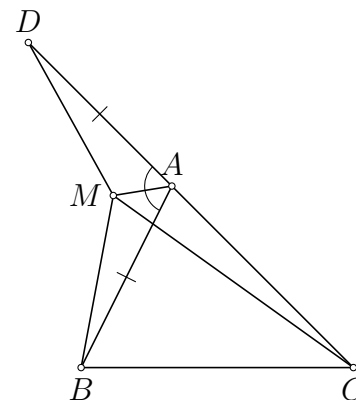
Gọi D là điểm nằm trên tia đối của tia AC sao cho $AB = AD$.
 Xét hai tam giác DAM và BAM có AM chung, $\widehat{DAM} = \widehat{BAM}$ do M nằm trên phân giác ngoài góc $\hat{A}$ và $AB = AD$ nên

$$\triangle DAM = \triangle BAM \text{ (c - g - c)}.$$

Suy ra $MB = MD$. Khi đó ta có:

$$MB + MC = MC + MD \geq CD \text{ (không đổi)}.$$

Do đó $MB + MC$ có giá trị nhỏ nhất là CD và điều này xảy ra khi M trùng A .



□



TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường trung trực của tam giác

Định nghĩa 1. Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.

Mỗi tam giác có ba đường trung trực.

 Trong một tam giác bất kì, đường trung trực của một cạnh không nhất thiết đi qua đỉnh đối diện của cạnh ấy. Tuy nhiên, trong tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy luôn đi qua đỉnh đối diện với cạnh đó.

Định lý 1. Trong tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác của cạnh đáy.

2. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

Tính chất 1. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Nhận xét. Từ định nghĩa và tính chất ba đường trung trực của tam giác ta có nhận xét sau:

- Để tìm được điểm O cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$, ta chỉ cần dựng hai đường trung trực của hai cạnh và khi đó giao điểm O của chúng là điểm cần tìm.
- Nếu hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O thì OM (với M là trung trực của BC) chính là đường trung trực của BC .
- Giao của ba đường trung trực của tam giác được gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Chứng minh tính chất ba đường trung trực của tam giác

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm.

LỜI GIẢI.

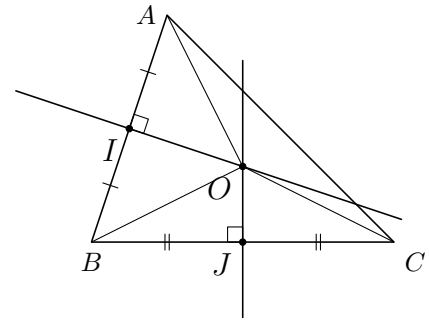
Xét $\triangle ABC$, gọi O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC . Ta cần đi chứng minh O thuộc đường trung trực của cạnh BC .

Thật vậy, ta có:

$OA = OB$ (vì O thuộc trung trực của AB).

$OA = OC$ (vì O thuộc trung trực của AC).

Suy ra $OB = OC$, do đó O thuộc trung trực của cạnh BC . Từ đó ta có ba đường trung trực của $\triangle ABC$ cùng đi qua điểm O và $OA = OB = OC$, nghĩa là điểm O cách đều ba đỉnh của tam giác ABC .



□

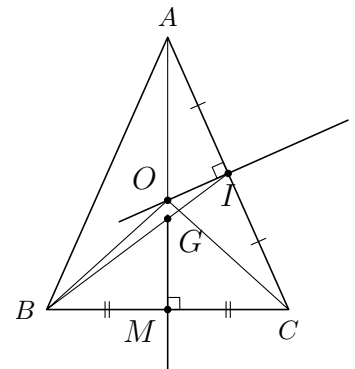
□ DẠNG 2. Sử dụng tính chất của ba đường trung trực của tam giác để giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 2. Xác định dạng của $\triangle ABC$, biết giao điểm O của ba đường trung trực, trọng tâm G và điểm A thẳng hàng.

✎ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết, ta suy ra giao điểm của ba đường trung trực thuộc AG nên AG là đường trung trực của BC , suy ra $\triangle ABC$ cân tại A .



□

Nhận xét. Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường phân giác, giao điểm của ba đường trung tuyến, giao điểm của ba đường trung trực trùng nhau.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường trung tuyến AM . Đường trung trực của AC cắt AM tại O . Chứng minh rằng $OA = OB$.

✎ **LỜI GIẢI.**

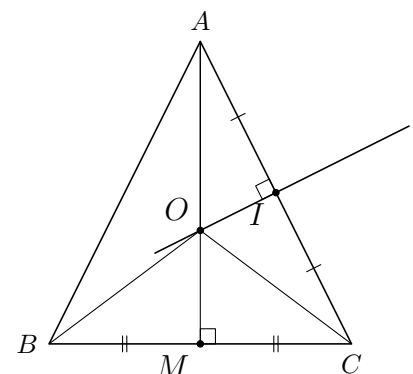
Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên đường trung tuyến AM cũng chính là đường trung trực của BC , do đó

$$OB = OC \quad (1)$$

Vì C thuộc đường trung trực của AC nên

$$OA = OC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB$.



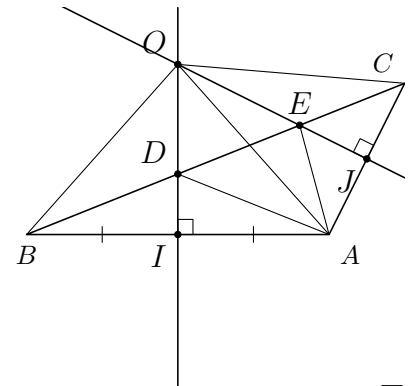


VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O và cắt BC theo thứ tự tại D, E .

- ❶ Các tam giác ABD và ACE là các tam giác gì?
- ❷ Đường tròn tâm O bán kính OA đi qua những điểm nào trong hình vẽ?

🔗 LỜI GIẢI.

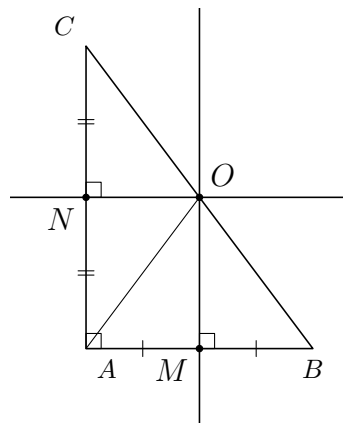
- ❶ Vì D thuộc đường trung trực của AB nên $DA = DB \Leftrightarrow \triangle BDA$ cân tại D .
 Vì E thuộc trung trực của AC nên $EA = EC \Leftrightarrow \triangle ACE$ cân tại E .
- ❷ Theo tính chất đường trung trực ta có $OC = OA = OB$ nên đường tròn tâm O bán kính OA đi qua điểm B và C .



VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.

🔗 LỜI GIẢI.

Xét tam giác ABC vuông tại A .



- Cách 1: Gọi O là trung điểm của BC , ta có O thuộc trung trực của BC và $OA = \frac{1}{2}BC$.
 Suy ra $OA = OB$, do đó O thuộc đường trung trực của AB .
 Vậy các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.
- Cách 2: Gọi M là trung điểm của AB , giả sử đường trung trực của AB cắt BC tại O . Ta cần chứng minh O thuộc đường trung trực của AC .
 Xét hai tam giác vuông OMA và OMB , ta có:
 OM chung; $MA = MB$. Do đó $\triangle OMA = \triangle OMB$ (hai cạnh góc vuông).
 Suy ra $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ (do $\widehat{OAC}$ phụ với $\widehat{OAB}$, $\widehat{OCA}$ phụ với $\widehat{OBA}$). Do đó $\triangle OAC$ cân tại $O \Leftrightarrow OA = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AC .
- Cách 3: Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC . Giả sử hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O . Ta cần chứng minh O thuộc BC . Trong tứ giác $MONA$ có

$$\widehat{OMA} = \widehat{NAM} = \widehat{ONA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ.$$

Vì O thuộc đường trung trực của AC nên $OA = OC \Leftrightarrow \triangle OAC$ cân tại O ,

suy ra $\widehat{NOC} = \widehat{NOA} = \widehat{AON}$. Tương tự, $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$.

Khi đó $\widehat{BOC} = \widehat{CON} + \widehat{NOA} + \widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 2\widehat{NOA} + 2\widehat{AOM} = 2\widehat{MON} = 180^\circ \Leftrightarrow B, O, C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow O \in BC$.

□

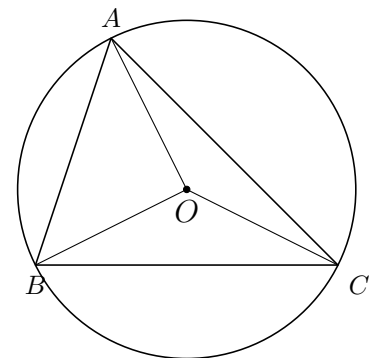
VÍ DỤ 6. Vẽ đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ trong mỗi trường hợp sau:

- ❶ $\triangle ABC$ nhọn;
- ❷ $\triangle ABC$ vuông tại A ;
- ❸ $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} > 90^\circ$.

✍ **LỜI GIẢI.**

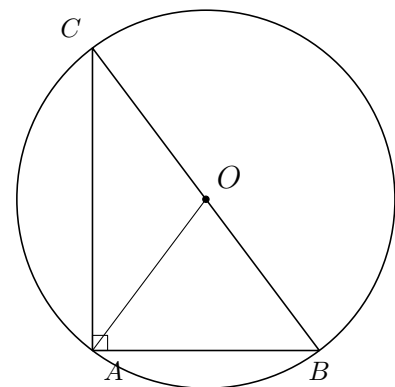
❶

$\triangle ABC$ nhọn.



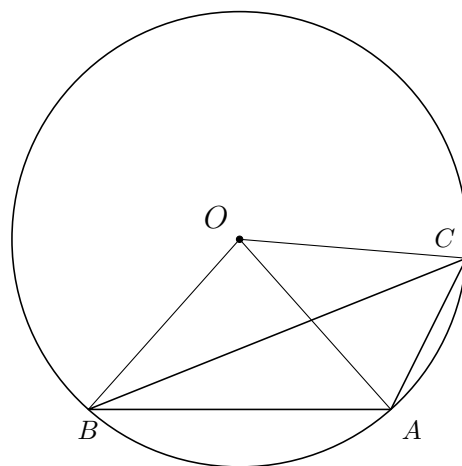
❷

$\triangle ABC$ vuông tại A .



❸

$\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} > 90^\circ$.



□

Nhận xét. Qua ví dụ trên ta có nhận xét sau:

- Nếu $\triangle ABC$ nhọn thì tâm O ở bên trong tam giác;
- Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì tâm O là trung điểm của cạnh BC ;
- Nếu $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} > 90^\circ$ thì tâm O ở bên ngoài tam giác.

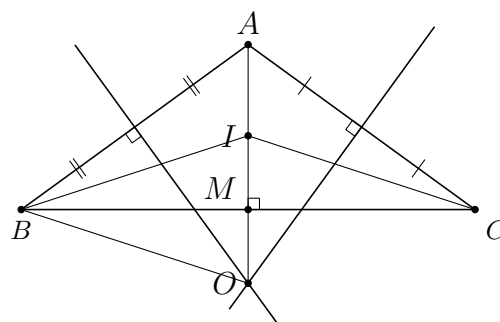
VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\widehat{ABC} = 36^\circ$. Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực, I là giao điểm của ba đường phân giác. Chứng minh rằng BC là đường trung trực của OI .

🔗 LỜI GIẢI.

Ta có $BC \perp OI$, $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 108^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $\widehat{BAM} = 54^\circ$.

Mặt khác ta có $OA = OB \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 54^\circ \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OBA} - \widehat{MBA} = 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ$. Xét hai tam giá MBO và MBI vuông tại M ta có: BM chung; $\widehat{OBM} = \widehat{MBI} = 18^\circ$, do đó $\triangle MBO = \triangle MBI$ (cạnh góc vuông - góc nhọn), suy ra $MO = MI$ mà $BM \perp IO$ nên BC là đường trung trực của OI .



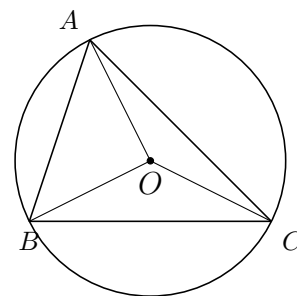
□

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$. Tìm một điểm O cách đều ba điểm A, B, C . Có bao nhiêu điểm như vậy?

🔗 LỜI GIẢI.

Gọi O là giao điểm của đường trung trực cạnh AB và đường trung trực cạnh AC . Khi đó theo tính chất đường trung trực thì $OA = OB$, $OB = OC$, suy ra $OA = OB = OC$ hay điểm O cách đều ba điểm A , B , C .
Có duy nhất điểm O thỏa mãn điều kiện trên.

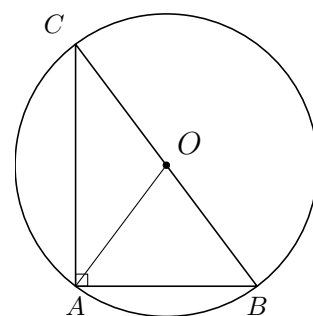


□

BÀI 2. Chứng minh rằng điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền của tam giác đó.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét tam giác vuông ABC vuông tại A , gọi O là trung điểm của cạnh BC , nên trung tuyến AO bằng nửa cạnh huyền, nghĩa là $AO = \frac{1}{2}BC$, suy ra $OA = OB = OC$, nghĩa là trung điểm O cách đều ba đỉnh của tam giác ABC .



□

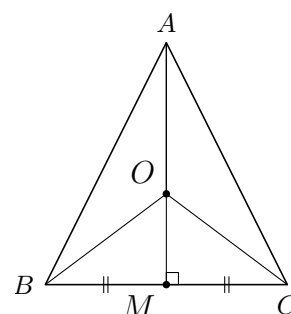
BÀI 3. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung trực đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét tam giác ABC , giả sử AM là đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực cạnh BC của tam giác.

Khi đó ta có: M là trung điểm của BC và $AM \perp BC$,

suy ra $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AC$, do đó tam giác ABC cân tại A .



□

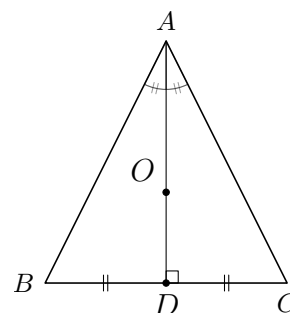
BÀI 4. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung trực đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

✎ **LỜI GIẢI.**

Xét tam giác ABC , giả sử AD là đường phân giác đồng thời là đường trung trực cạnh BC của tam giác. Khi đó ta có $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$

và $AD \perp BC$, suy ra $\triangle ADB = \triangle ADC$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = AC$, do đó tam giác ABC cân tại A .



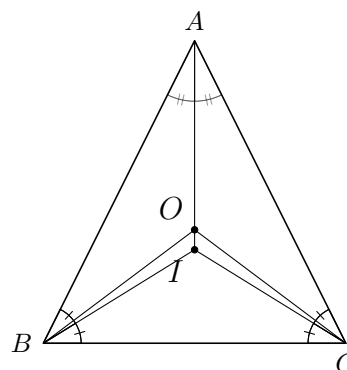
□

BÀI 5. Xác định dạng của $\triangle ABC$, biết giao điểm của ba đường trung trực, giao điểm của ba đường phân giác và điểm A thẳng hàng.

LỜI GIẢI.

Xét tam giác ABC , gọi I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác.

Vì giao điểm của ba đường trung trực, ba đường phân giác và điểm A thẳng hàng nên AI cũng là đường trung trực cạnh BC của tam giác ABC . Do đó, theo bài 4, suy ra $\triangle ABC$ cân tại A .



□

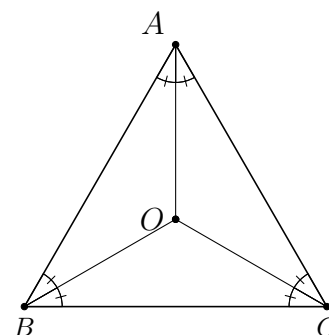
BÀI 6. Xác định dạng của $\triangle ABC$, biết giao điểm của ba đường trung trực, giao điểm của ba đường phân giác trùng nhau.

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABC$, gọi O là giao điểm của ba đường trung trực đồng thời là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC .

Do $\triangle OBC$ cân tại O nên $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, mà OB, OC lần lượt là đường phân giác trong góc B, C tương ứng nên $\widehat{B} = \widehat{C}$. Chứng minh tương tự ta có $\widehat{B} = \widehat{A}$.

Từ đó suy ra tam giác ABC đều.



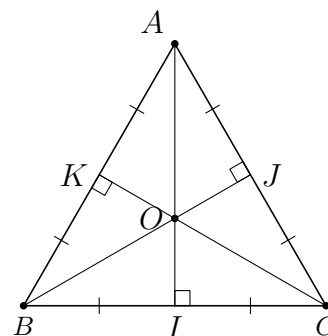
□

BÀI 7. Xác định dạng của $\triangle ABC$, biết giao điểm của ba đường trung trực, giao điểm của ba đường trung tuyến trùng nhau.

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABC$, gọi O là giao điểm của ba đường trung trực đồng thời là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác ABC . Gọi I, J, K tương ứng là chân các đường trung tuyến hạ từ đỉnh A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB .

Khi đó ta có $\triangle ABI = \triangle ACI$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AC$, $\triangle ABJ = \triangle CBJ = \triangle COJ$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = BC$. Do đó $AB = BC = CA$, suy ra tam giác ABC đều.



□

BÀI 9

TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường cao của tam giác

Định nghĩa 1. Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó. Mỗi tam giác có ba đường cao.

 **Chú ý:** “Trong một tam giác cân đường cao thuộc cạnh đáy thì cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực.”

2. Tính chất ba đường cao của tam giác

Tính chất 1. Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là trực tâm của tam giác.

Nhận xét. Để xác định trực tâm H của $\triangle ABC$ ta kẻ hai đường cao và khi đó giao điểm của chúng là trực tâm H .

Nhận xét. Nếu H là trực tâm của $\triangle ABC$ thì các tia AH, BH, CH sẽ vuông góc với cạnh đối diện.

3. Về đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác của tam giác cân

Định lý 1. Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

Nhận xét. Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Tính chất 2. Tính chất cho tam giác đều: “Trong một tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau”.

B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$, trực tâm H . Tìm trực tâm của các tam giác $\triangle ABH, \triangle ACH, \triangle BCH$.

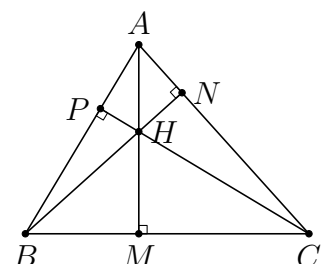
LỜI GIẢI.

Ta nhận thấy ngay:

$\triangle ABH$ nhận C là trực tâm.

$\triangle ACH$ nhận B là trực tâm.

$\triangle BCH$ nhận A là trực tâm.



□

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài đường cao AH .

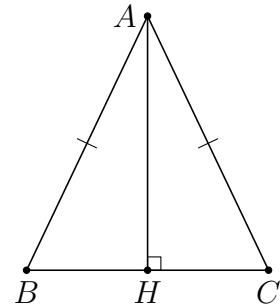
LỜI GIẢI.

Từ giả thiết suy ra $\triangle ABC$ cân tại A . Nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow HB = HC = \frac{1}{2}BC = 5$ cm.

Áp dụng định lý Py-Ta-Go vào $\triangle ABH$ vuông tại H ta có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AH = 12 \text{ cm.}$$

Vậy $AH = 12$ cm.



□

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- ① Chứng minh rằng A là trực tâm của $\triangle ABC$.
- ② Tìm trực tâm của các $\triangle ABH$, $\triangle ACH$.

LỜI GIẢI.

- ① Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên:

$AB \perp AC \Rightarrow AB$ là một đường cao.

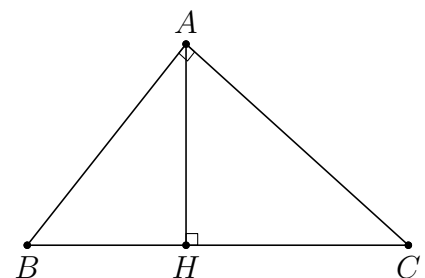
$AC \perp AB \Rightarrow AC$ là một đường cao.

Hai đường cao AB, AC cắt nhau tại A suy ra A là trực tâm của $\triangle ABC$.

- ② Nhận xét rằng :

$\triangle ABH$ vuông tại H nên H chính là trực tâm của nó.

$\triangle ACH$ vuông tại H nên H chính là trực tâm của nó.



□

Nhận xét. “Nếu một tam giác có trực tâm trùng với một đỉnh thì tam giác đó là tam giác vuông”.

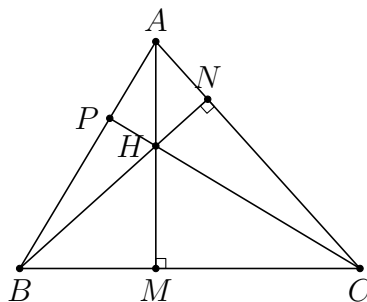
VÍ DỤ 4. Vẽ trực tâm $\triangle ABC$ trong các trường hợp:

- ① $\triangle ABC$ nhọn.
- ② $\triangle ABC$ vuông tại A .
- ③ $\triangle ABC$ có $\hat{A} > 90^\circ$.

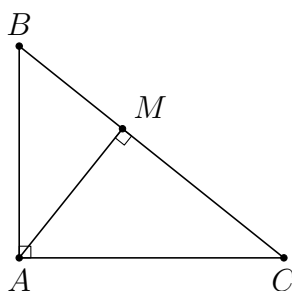
LỜI GIẢI.

Ta có được các hình vẽ sau:

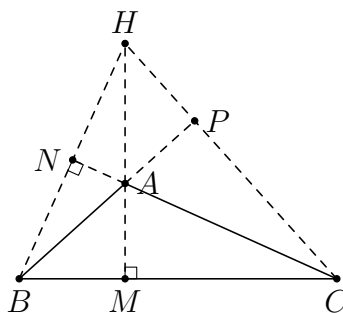
- ① $\triangle ABC$ nhọn.



② $\triangle ABC$ vuông tại A.



③ $\triangle ABC$ có $\hat{A} > 90^\circ$.



□

Nhận xét. Qua ví dụ trên, ta có nhận xét:

- ① Nếu $\triangle ABC$ nhọn thì trực tâm H ở bên trong $\triangle ABC$.
- ② Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì trực tâm H trùng với điểm A.
- ③ Nếu $\triangle ABC$ có $\hat{A} > 90^\circ$ thì trực tâm H ở bên ngoài $\triangle ABC$.

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$, gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Chứng tỏ rằng các đường cao của $\triangle MNP$ là các đường trung trực của $\triangle ABC$.

🔗 LỜI GIẢI.

Với đường cao MM_1 của $\triangle MNP$, ta có: $MM_1 \perp NP$.

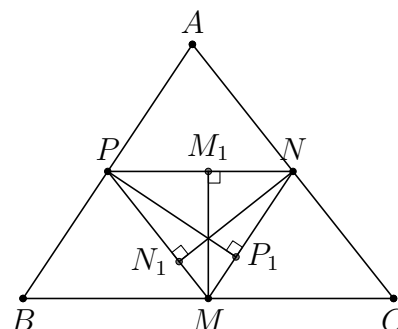
Vì N, P theo thứ tự là trung điểm của AC, AB

$\Rightarrow NP \parallel BC \Rightarrow MM_1 \perp BC$.

Vậy MM_1 là đường trung trực của $\triangle ABC$.

Tương tự, ta cũng có NN_1 , PP_1 là đường trung trực của $\triangle ABC$.

Vậy các đường cao của $\triangle MNP$ là đường trung trực của $\triangle ABC$.



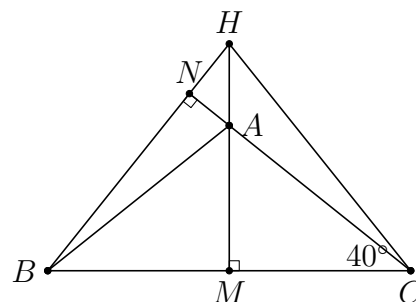


VÍ DỤ 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , gọi M là trung điểm của BC . Kẻ đường cao BN ($N \in AC$) cắt AM tại H .

- ❶ Chứng minh rằng $CH \perp AB$.
- ❷ Tính số đo các góc $\widehat{MBH}$ và $\widehat{MHN}$ biết $\widehat{C} = 40^\circ$.

🔗 LỜI GIẢI.

- ❶ Ta có $AM \perp BC$ vì $\triangle ABC$ cân tại A , mà $AM \cap BN = \{H\}$ suy ra H là trực tâm $\triangle ABC$, do đó $BA \perp CH$.
- ❷ Trong $\triangle CBN$ vuông tại N ta có
 $\widehat{CBN} = 90^\circ - \widehat{BCN} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
 Vậy $\widehat{MBH} = 50^\circ$.
 Trong $\triangle BHM$ vuông tại M ta có
 $\widehat{MHB} = 90^\circ - \widehat{MBH} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.
 Vậy $\widehat{MHN} = 40^\circ$



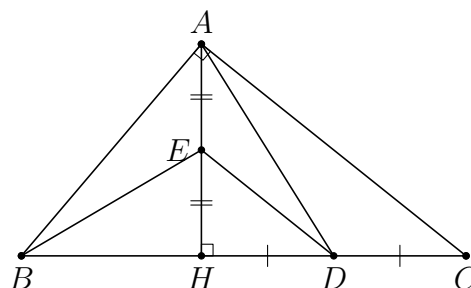
VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của HC, HA . Chứng minh rằng $BE \perp AD$.

🔗 LỜI GIẢI.

Vì D, E theo thứ tự là trung điểm của HC, HA suy ra:
 $DE \parallel AC$.

Kết hợp với $AC \perp AB$ ta suy ra $DE \perp AB$.

Trong $\triangle ABD$ ta có $AH \perp BD$ và $DE \perp AB \Rightarrow E$ là trực tâm của $\triangle ABD \Rightarrow BE \perp AD$.



VÍ DỤ 8. Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 45^\circ$ và $AC < BC$, đường cao CE . Trên tia đối của tia CE lấy điểm D sao cho $EB = ED$. Chứng minh rằng $BC \perp AD$.

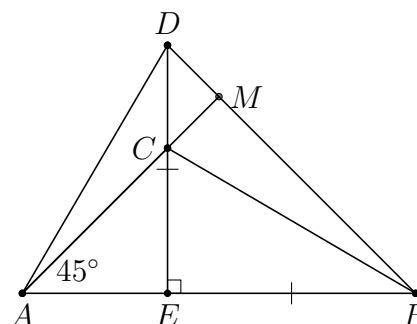
🔗 LỜI GIẢI.

Gọi $AC \cap BD = \{M\}$. Xét $\triangle ADE$ vuông tại E ta có:

$EB = ED \Leftrightarrow \triangle BDE$ vuông cân tại $E \Rightarrow \widehat{EBD} = 45^\circ$.

Suy ra : $\widehat{CAE} + \widehat{EBD} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BD$.

Trong tam giác $\triangle ABD$ ta có $AM \perp BD$ và $DE \perp AB$ mà $AM \cap DE = \{C\} \Rightarrow C$ là trực tâm của $\triangle ABD \Rightarrow BC \perp AD$.



VÍ DỤ 9. Cho $\triangle ABC$, có $\hat{A} = 45^\circ$ và trực tâm H . Chứng minh rằng $BC = AH$.

LỜI GIẢI.

Giải sử BH cắt AC tại E .

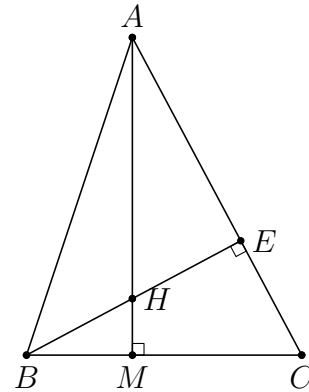
Xét $\triangle ABE$ vuông tại E ta có: $\widehat{BAE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABE$ vuông cân tại $E \Rightarrow AE = BE$.

Ta có $\widehat{EAH} = \widehat{EBC}$ (cùng phụ với $\hat{C}$).

Xét hai tam giác vuông $\triangle AEH$ và $\triangle BEC$ ta có:

$$\begin{cases} \widehat{EAH} = \widehat{EBC} \\ AE = BE \\ \widehat{AEH} = \widehat{BEC} \end{cases} \Rightarrow \triangle AEH = \triangle BEC \text{ (g-c-g)} \Rightarrow AH = BC.$$



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 10$ cm, $BC = 8$ cm. Tính độ dài đường cao AH .

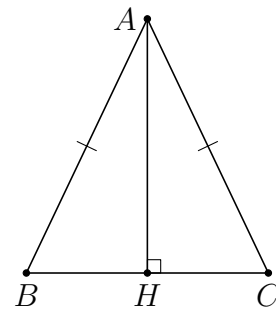
LỜI GIẢI.

$\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow HB = HC = \frac{1}{2}BC = 4$ (cm).

Áp dụng định lý Py-Ta-Go vào $\triangle ABH$ vuông tại H ta có

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 10^2 = 4^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow AH = 2\sqrt{21} \text{ (cm)}.$$



□

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Tính độ dài đường cao AH

LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABC$ có $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ và $BC^2 = 5^2 = 25$

$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác vuông tại A

(Định lý Py-Ta-Go đảo).

Vì $AC > AB \Rightarrow HC > HB$. Đặt $BH = x$ ($x > 0$).

Áp dụng định lý Py-Ta-Go vào các tam giác vuông ABH và

ACH ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2$ và $AH^2 = AC^2 - CH^2$

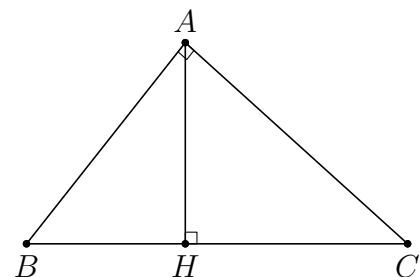
$$\Rightarrow 3^2 - x^2 = 4^2 - (5 - x)^2 \Rightarrow 9 - x^2 = 16 - (25 - 10x + x^2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{5}.$$

Áp dụng định lý Py-Ta-Go vào $\triangle ABH$ vuông tại H ta có

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = \frac{144}{25} \Rightarrow AH = 2,4.$$

Vậy $AH = 2,4$ (cm).



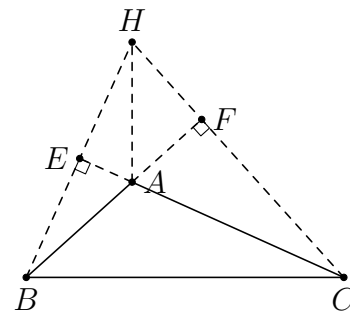
□

BÀI 3. Chứng tỏ rằng trực tâm của tam giác tù nằm ở bên ngoài tam giác.

🔗 LỜI GIẢI.

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} > 90^\circ$. Kẻ $BE \perp AC \Rightarrow E$ thuộc tia đối của tia AC . Hay BE nằm ở phía ngoài $\triangle ABC$.

Kẻ $CF \perp AB$. Ta cũng suy ra được CF nằm ở phía ngoài $\triangle ABC$. Gọi H là giao điểm của hai đường cao BE, CF từ đó ta suy ra trực tâm H nằm ở bên ngoài $\triangle ABC$.

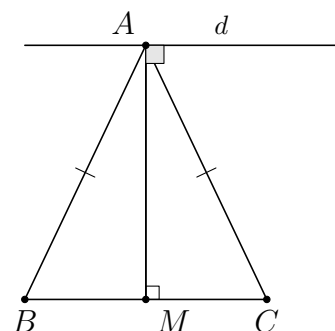


□

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , trung tuyến AM . Kẻ đường thẳng d qua A và vuông góc với AM . Chứng minh rằng d song song với BC .

🔗 LỜI GIẢI.

$\triangle ABC$ cân tại A có AM là đường trung tuyến nên AM cũng là đường cao $\Rightarrow AM \perp BC$ mà $AM \perp d$ (gt). Suy ra $d \parallel BC$.



□

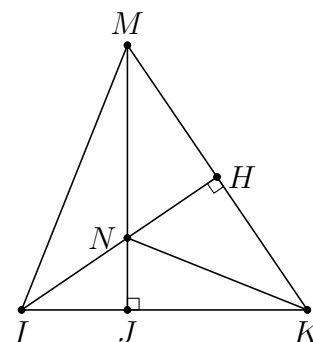
BÀI 5. Lấy ba điểm I, J, K theo thứ tự đó trên đường thẳng d . Trên đường thẳng l vuông góc với d tại J lấy điểm M . Đường thẳng qua I vuông góc với MK cắt l tại N . Chứng minh rằng $KN \perp IM$.

🔗 LỜI GIẢI.

Gọi H là giao điểm của IN với MK .

Xét $\triangle MIK$ có $IH \perp MK, MJ \perp IK$. Mà $MJ \cap IH = \{N\}$.

Suy ra N là trực tâm của $\triangle MIK \Rightarrow KN \perp IM$.



□

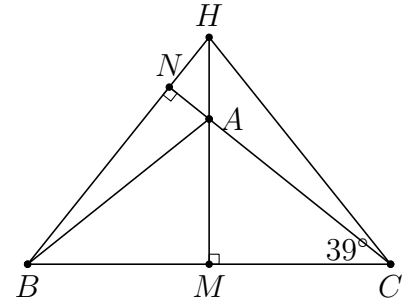
BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , phân giác AM . Kẻ đường cao BN cắt AM tại H .

① Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

② Tính số đo các góc $\widehat{MBH}, \widehat{MHN}$ và biết $\widehat{C} = 39^\circ$.

🔗 LỜI GIẢI.

- ① Xét $\triangle ABC$ có AM là đường phân giác nên đồng thời cũng là đường cao, suy ra $AM \perp BC$. Xét $\triangle ABC$ có $AM \perp BC$, $BN \perp AC$ mà $AM \cap BN = \{H\}$. Suy ra H là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow CH \perp AB$.
- ② Trong $\triangle CBN$ vuông tại N ta có
 $\widehat{MBH} = 90^\circ - \widehat{BCN} = 90^\circ - 39^\circ = 51^\circ$.
 Vậy $\widehat{MBH} = 51^\circ$.
 Trong $\triangle BHM$ vuông tại M ta có
 $\widehat{MHB} = 90^\circ - \widehat{MBH} = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$.
 Vậy $\widehat{MHN} = 39^\circ$.



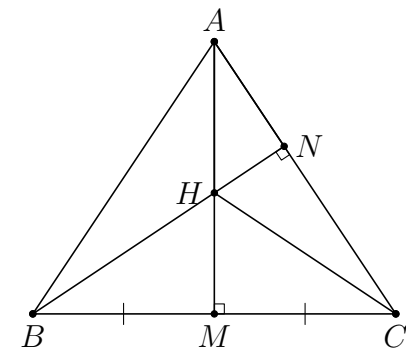
□

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , gọi M là trung điểm của BC . Kẻ đường cao BN ($N \in AC$) cắt AM tại H .

- ① Chứng minh rằng $CH \perp AB$.
 ② Tính số đo các góc $\widehat{BHM}$, $\widehat{MHN}$ biết $\widehat{C} = 50^\circ$.

✎ **LỜI GIẢI.**

- ① Xét $\triangle ABC$ cân có AM là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao, suy ra $AM \perp BC$. Xét $\triangle ABC$ có $AM \perp BC$, $BN \perp AC$ mà $AM \cap BN = \{H\}$. Suy ra H là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow CH \perp AB$.
- ② Xét $\triangle BCN$ vuông tại $N \Rightarrow \widehat{CBN} + \widehat{C} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{CBN} + 50^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBN} = 40^\circ$.
 Xét $\triangle BHM$ vuông tại $M \Rightarrow \widehat{BHM} + 40^\circ = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BHM} = 50^\circ$.
 Ta có $\widehat{BHM} + \widehat{MHN} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)
 $\Rightarrow \widehat{MHN} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.



□

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B}, \widehat{C}$ nhọn và $AB < AC$. Kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$.

✎ **LỜI GIẢI.**

Trên tia đối của tia HB lấy điểm D sao cho $HB = HD$.

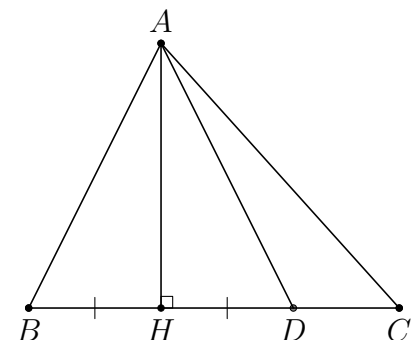
Vì $AB < AC \Rightarrow HB < HC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu) nên $HD < HC \Rightarrow D$ nằm giữa 2 điểm H và C . Ta suy ra $\widehat{DAH} < \widehat{CAH}$ (1).

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHD$ ta có: $\begin{cases} AH \text{ chung} \\ \widehat{AHB} = \widehat{AHD} = 90^\circ \\ HB = HD \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHD$ (c-g-c) $\Rightarrow HB = HD$

và $\widehat{ABH} = \widehat{ADH}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$.



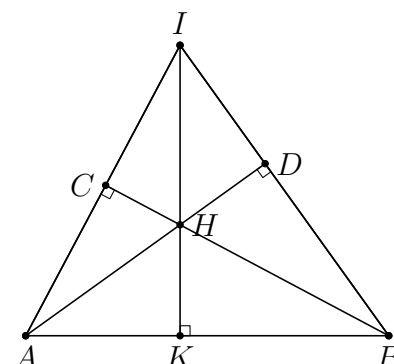
□

BÀI 9. Cho hai tam giác vuông $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ có chung cạnh huyền AB . Gọi H là giao điểm của AD và BC . Kẻ HK vuông góc với AB . Chứng minh rằng AC , BD , HK đồng quy.

LỜI GIẢI.

Gọi I là giao điểm của AC và BD . Xét $\triangle ABI$ có $BC \perp AI$, $AD \perp BI$ mà $BC \cap AD = \{H\} \Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABI \Rightarrow IH \perp AB$.

Mặt khác $HK \perp AB$, từ đó suy ra 2 đường thẳng IH , HK trùng nhau. Từ đó ta suy ra 3 đường thẳng AC , BD , HK đồng quy.



□

BÀI 10. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Kẻ đường cao AM của $\triangle ABC$, đường cao AN của $\triangle ACD$. Chứng minh rằng $\widehat{MAN} = 90^\circ$.

LỜI GIẢI.

Ta có $AD = AC \Rightarrow \triangle ACD$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{D}$.

$\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{ACB}$.

Trong $\triangle BCD$ có $\widehat{B} + \widehat{ACB} + \widehat{ACD} + \widehat{D} = 180^\circ$

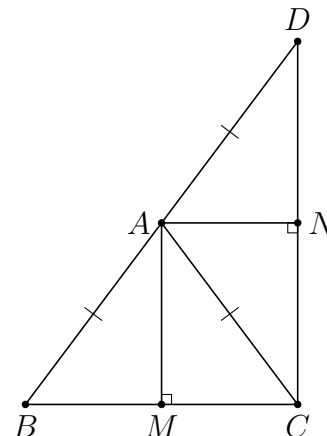
$\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{ACD} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại C .

Vì $AN \perp CD$, $BC \perp CD \Rightarrow AN \parallel BC \Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{ACM}$.

Vì $AM \perp BC$, $BC \perp CD \Rightarrow AM \parallel CD \Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{MAC}$.

Ta có $\widehat{MAN} = \widehat{CAN} + \widehat{MAC} = \widehat{ACM} + \widehat{ACN} = \widehat{BCD} = 90^\circ$.

Vậy $\widehat{MAN} = 90^\circ$.



□

BÀI 11. Cho $\triangle ABC$. Qua mỗi đỉnh A , B , C kẻ các đường thẳng song song với cạnh đối diện, chúng cắt nhau tại M , N , P .

❶ Chứng minh rằng A là trung điểm của MP .

❷ Chứng tỏ các đường cao của $\triangle ABC$ là các đường trung trực của $\triangle MNP$.

LỜI GIẢI.

① Ta có $AP \parallel BC$ nên $\widehat{CAP} = \widehat{ACB}$ (2 góc so le trong).

Vì $AB \parallel CP$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{PCA}$ (2 góc so le trong).

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CPA$ ta có $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{PCA} \\ AC \text{ cạnh chung} \\ \widehat{ACB} = \widehat{CAP} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CPA$ (g-c-g) $\Rightarrow BC = AP$ (1).

Chứng minh tương tự suy ra $\triangle ABC = \triangle BAM$

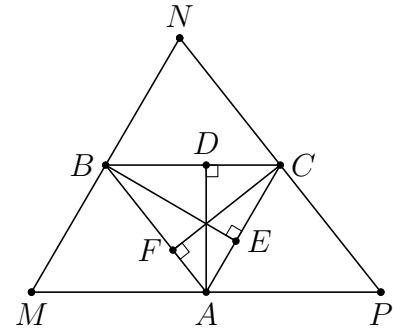
$\Rightarrow BC = AM$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $AM = AP$.

Vậy A là trung điểm của MP

② Ta có $BC \parallel MP$ mà $AD \perp BC \Rightarrow AD \perp MP$, kết hợp với $AM = AP$ ta suy ra AD là đường trung trực của $\triangle MNP$.

Chứng minh tương tự ta cũng suy ra được BE, CF là các đường trung trực của $\triangle MNP$.



□

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 135^\circ$ và trực tâm H . Chứng minh rằng $BC = AH$.

✎ LỜI GIẢI.

Gọi $BH \cap AC = \{M\}$; $BA \cap CH = \{E\}$.

Ta có $\widehat{CBE} = \widehat{AHE}$ (cùng phụ $\widehat{BCH}$).

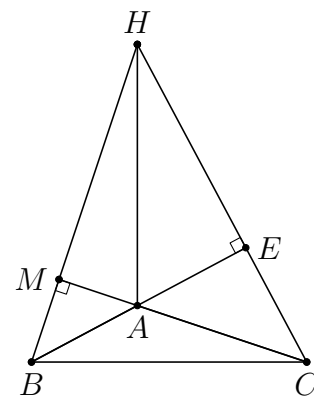
Vì $\widehat{BAC} + \widehat{BAM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = 180^\circ - \widehat{BAC}$
 $= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ABM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BHE} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BEH$ vuông cân tại E . Suy ra $EB = EH$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle AEH$ và $\triangle CEB$, ta có:

$$\begin{cases} EH = EB \text{ (gt)} \\ \widehat{AHE} = \widehat{CBE} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle AHE = \triangle CBE$ (g-c-g) $\Rightarrow AH = CB$.

Vậy $BC = AH$.



□

BÀI 13. Cho $\triangle ABC$, có trực tâm H và $AH = BC$. Tính số đo của $\widehat{A}$.

✎ LỜI GIẢI.

— TH 1: $\triangle ABC$ nhọn.

Gọi $AH \cap BC = \{M\}$; $BH \cap AC = \{E\}$.

Ta có $\widehat{HAE} = \widehat{CBE}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$).

Xét hai tam giác vuông $\triangle AEH$ và $\triangle BEC$ ta có:

$$\begin{cases} AH = BC (\text{gt}) \\ \widehat{HAE} = \widehat{CBE} \end{cases}$$

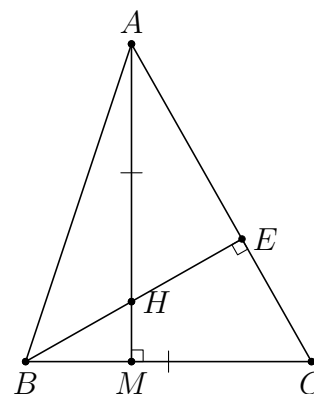
$\Rightarrow \triangle AEH = \triangle BEC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow AE = BE \Rightarrow \triangle ABE$ là tam giác vuông cân tại E

suy ra $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

— TH 2: $\triangle ABC$ là tam giác tù. Giả sử $\widehat{A} > 90^\circ$.

Giải tương tự như trên ta tìm được $\widehat{BAC} = 135^\circ$.



□