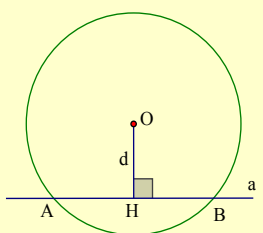
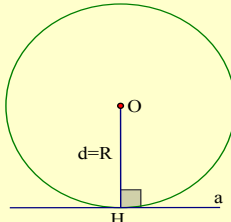
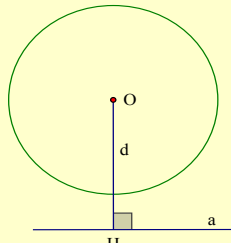


VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Gọi d là khoảng cách từ tâm O của đường tròn $(O; R)$ đến đường thẳng a , khi đó ta có:

Hệ thức	Số điểm chung	Quan hệ	Hình vẽ
$d < R$	2	Đường thẳng a cắt đường tròn $(O; R)$ tại 2 điểm	
$d = R$	1	Đường thẳng a tiếp xúc đường tròn $(O; R)$	
$d > R$	0	Đường thẳng a không cắt đường tròn $(O; R)$	

2. Định lý

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

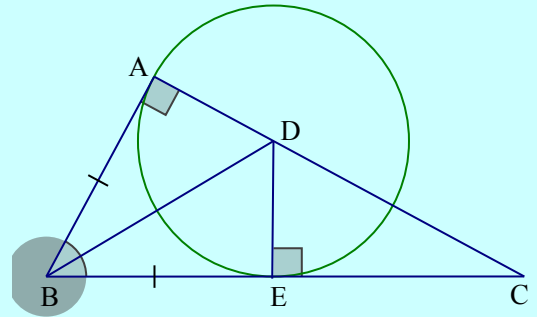
B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn và ngược lại

Cách giải: So sánh d và R dựa vào bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn đã nêu trong lý thuyết

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có BD là đường phân giác. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA



Lời giải

Vẽ $DE \perp BC (E \in BC)$

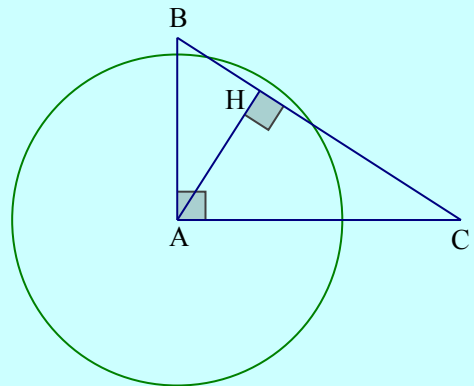
D thuộc tia phân giác $\widehat{ABC}$; $DA \perp AB, DE \perp BC \Rightarrow DE = DA$

Do đó đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA tiếp xúc nhau.

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3cm, AC = 4cm$

Vẽ đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.



Lời giải

Vẽ AH là đường cao của tam giác vuông ABC

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \Rightarrow AH = 2,4cm < 2,8 (d < r)$

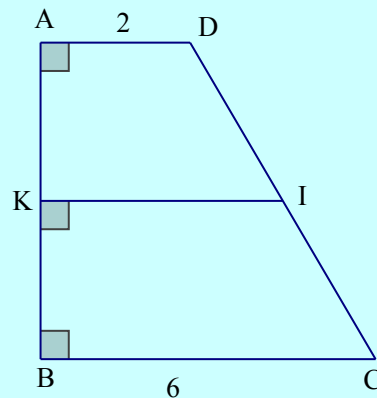
Do đó đường thẳng BC và đường tròn $(A; 2,8cm)$ cắt nhau

Bài 3:

Cho hình thang vuông $ABCD$ có

$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $AD = 2\text{cm}$, $BC = 6\text{m}$, $CD = 8\text{cm}$.

Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD



Lời giải

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của CD và AB

Ta có: IK là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IK = \frac{AD + BC}{2} = 4(\text{cm})$

Lại có: $AD \parallel IK, AD \perp AB \Rightarrow IK \perp AB; IK = \frac{CD}{2} (= 4\text{cm}), IK \perp AB$

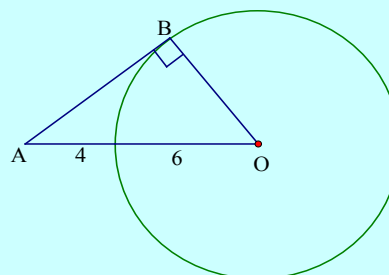
Do đó AB tiếp xúc với đường tròn tâm I đường kính CD .

Dạng 2: Bài toán liên quan đến tính độ dài

Cách giải: Ta nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp điểm và sử dụng định lý pyatago.

Bài 1:

Cho đường tròn tâm O bán kính 6cm và một điểm A cách O là 10cm . Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn trong đó B là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn AB

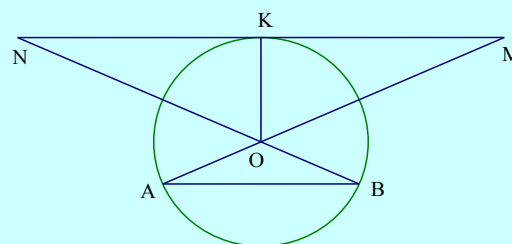


Lời giải

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow AB = 8\text{cm}$

Bài 2:

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = \frac{8}{5}R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB , cắt các tia OA, OB lần lượt tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN



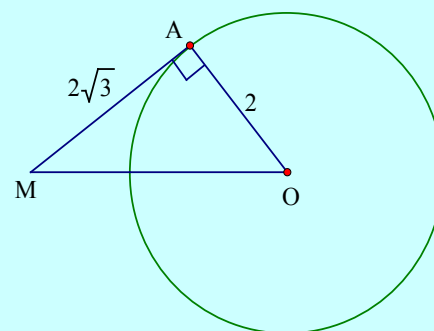
Lời giải

Tiếp tuyến MN , tiếp điểm K . Vì $AB \parallel MN$ nên $OK \perp AB$

Ta tính được: $OK = \frac{3}{5}R \Rightarrow KN = \frac{4}{3}R \Rightarrow S_{OMN} = \frac{4}{3}R^2$

Bài 3:

Cho đường tròn $(O; 2\text{cm})$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy . Trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}(\text{cm})$. Hỏi điểm M di động trên đường nào khi A chạy trên (O)

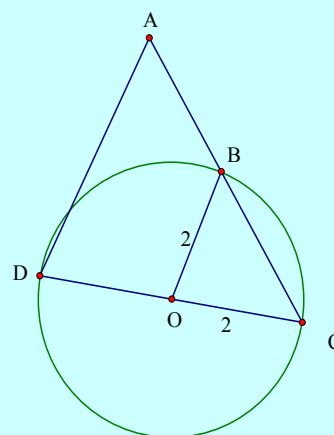


Lời giải

Tính được $OM = 4 \Rightarrow M$ di chuyển trên $(O; 4cm)$

Bài 4:

Cho đường tròn $(O; 2cm)$ và điểm A ngoài (O) . Từ A kẻ cát tuyến với (O) , cắt (O) tại B và C . Cho biết $AB = BC$ và kẻ đường kính CD , tính độ dài đoạn thẳng AD .



Lời giải

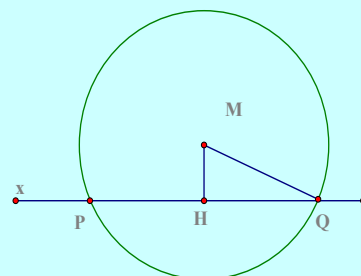
Chứng minh được OB là đường trung bình của $\triangle CDA \Rightarrow AD = 4cm$

Bài 5:

Cho điểm M cách đường thẳng xy $6cm$, vẽ đường tròn $(M; 10cm)$

a. Chứng minh rằng đường tròn tâm M và đường thẳng xy cắt nhau

b. Gọi hai giao điểm là P và Q . Tính PQ



Lời giải

a. Kẻ $MH \perp xy = H \Rightarrow MH$ là khoảng cách từ M đến xy

$$\Rightarrow \begin{cases} MH = 6cm \\ R = 10cm \end{cases} \Rightarrow MH < R \Rightarrow xy \text{ cắt } (O; 10cm) \text{ tại } P \text{ và } Q$$

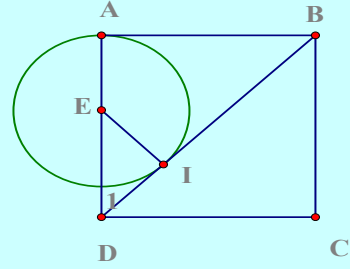
b. Ta có $MH \perp PQ \Rightarrow HP = HQ = \frac{1}{2}PQ$ (Quan hệ vuông góc đường kính và dây) $\Rightarrow PQ = 2.HQ$

$$\text{Xét } \triangle MHQ (\widehat{H} = 90^\circ) \Rightarrow HQ = 8cm (HQ > 0) \Rightarrow PQ = 16(cm)$$

Bài 6:

Cho hình vuông $ABCD$, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho $BI = BA$. Đường thẳng kẻ qua I vuông góc với BD cắt AD ở E .

- So sánh: AE, EI, ID
- Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BD với đường tròn $(E; EA)$



Lời giải

a. Ta có : $\triangle AEB = \triangle IEB (ch - cv) \Rightarrow AE = EI (1)$

$\triangle EID (\hat{I} = 90^\circ, \hat{D}_1 = 45^\circ \Rightarrow \text{vuông cân} \Rightarrow IE = ID (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow AE = EI = ID$

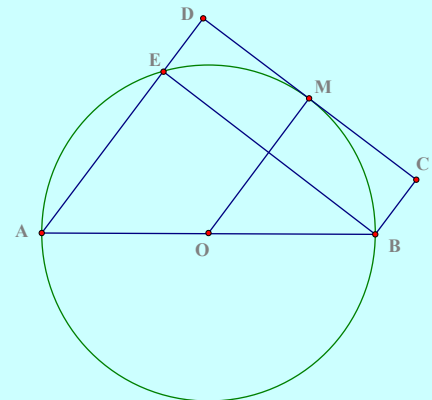
b. Ta lại có $EI = EA \Rightarrow I \in (E; EA) \Rightarrow R = EI$

mặt khác: $EI \perp BD \Rightarrow d = EI \Rightarrow d = R \Rightarrow \text{đường thẳng } BD \text{ tiếp xúc với } (E; EA)$

Bài 7:

Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB , M là 1 điểm thuộc nửa đường tròn, qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D và C theo thứ tự là các hình chiếu của A và B trên tiếp tuyến ấy

- Chứng minh rằng M là trung điểm của CD
- Chứng minh: $AB = BC + AD$
- Giả sử: $\widehat{AOM} > \widehat{BOM}$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác $BDCE$
- Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính của



nửa đường tròn đã cho.

Lời giải

a. Hình thang $ABCD$ có $AO = OB, OM \parallel AD \parallel BC \Rightarrow M$

là trung điểm của CD

b. Ta có: $AB = 2OM = BC + AD$

c. Tứ giác $BDCE$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông

$$d. S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE = OM \cdot BE \leq OM \cdot AB = 2R^2$$

$$\Rightarrow \max S_{ABCD} = 2R^2 \Leftrightarrow OM \perp AB$$

Bài 8:

Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB

. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia

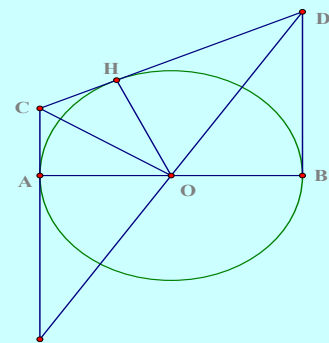
Ax, By vuông góc với AB . Trên các tia Ax và

By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho

$\widehat{COD} = 90^\circ$, kẻ $OH \perp CD$

a. Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB

b. Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O)



Lời giải

a. Kéo dài DO cắt AC ở E , ta có :

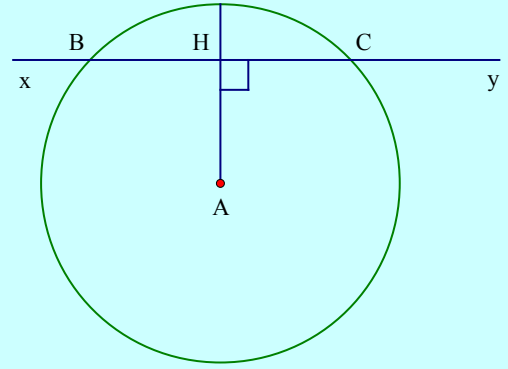
$$\triangle AOE = \triangle BOD (g.c.g) \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{D}; OD = OE \Rightarrow \triangle OHD = \triangle OAE (ch - gn) \Rightarrow OH = OA = OB \Rightarrow H \in (O; AB)$$

b. Ta có H thuộc đường tròn (O) , $CD \perp OH$ tại $H \Rightarrow$ khoảng cách từ O đến CD bằng bán kính của (O) . Vậy CD tiếp xúc với (O) tại H .

Bài 9:

Cho điểm A cách đường thẳng xy một khoảng 12 cm

- Chứng minh $(A; 13\text{ cm})$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt
- Gọi hai giao điểm của $(A; 13\text{ cm})$ với xy là B, C . Tính độ dài đoạn thẳng BC



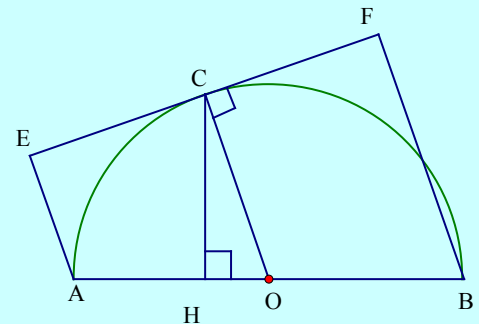
Lời giải

- Kẻ $AH \perp xy \Rightarrow AH = 12\text{ cm} < R \Rightarrow (A)$ cắt xy tại hai điểm B và C
- Tính được : $BC = 2.HC = 10\text{ cm}$.

Bài 10:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C là điểm thuộc (O) và gọi d là tiếp tuyến qua C với (O) . Kẻ AE và BF cùng vuông góc với d ; CH vuông góc với AB

- Chứng minh: $CE = CF$ và $CH^2 = AE.BF$
- Khi C di chuyển trên một nửa đường tròn, tìm vị trí của điểm C để EF có độ dài lớn nhất.



Lời giải

- Chứng minh được OC là đường trung bình của hình thang $AEFB$ nên C là trung điểm của EF . Chứng minh được : $AE = AH, BH = BF \Rightarrow CH^2 = HA.HB = AE.BF$
- Ta có:
 $BF \cap (O) = \{H\} \Rightarrow EF = AH \leq AB \Rightarrow EF_{\max} = AB \Rightarrow C$ là điểm chính giữa $\widehat{AB}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O; 8\text{cm})$ sao cho $OA = 12\text{cm}$. Kẻ tia Ax tạo với OA một góc 30° . Gọi H là hình chiếu của O trên tia Ax . Khẳng định nào sau đây đúng

- A) Tia Ax và đường tròn O không có điểm chung nào
- B) Tia Ax và đường tròn O chỉ có một điểm chung
- C) Tia Ax và đường tròn O có hai điểm chung

Chọn đáp án C

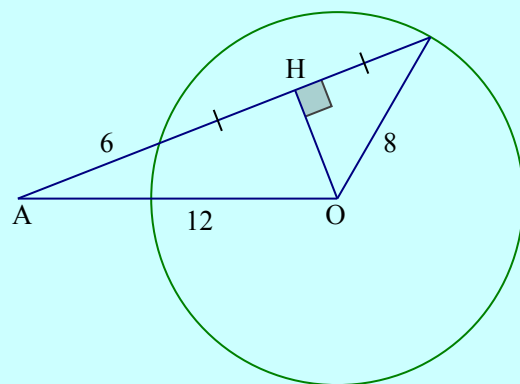
Giải thích:

Từ $\triangle AOH$ vuông tại H , ta có:

$$OH = OA \cdot \sin A = 12 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6(\text{cm})$$

$$\Rightarrow OH < R \text{ (bán kính)}$$

Vậy tia Ax và đường tròn (O) cắt nhau tại hai điểm.



Câu 2: Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng a . Gọi d là khoảng cách từ O đến a . Điền vào bảng để được các khẳng định đúng

Vị trí tương đối của a và (O)	Số điểm chung	Hệ số giữa d và R
a và (O) cắt nhau		
		$d = R$
a và (O) không giao nhau		

Đáp án

Vị trí tương đối của a và (O)	Số điểm chung	Hệ số giữa d và R
a và (O) cắt nhau	2	$d < R$
	1	$d = R$
a và (O) không giao nhau	0	$d > R$

Câu 3: Cho đường tròn $(O; R)$, bán kính OA , dây CD là trung trực của OA . Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C , tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I . Khẳng định nào sau đây đúng

A) $\triangle OAC$ là tam giác đều

B) Tứ giác $OCAD$ là hình thoi

C) $CI = R\sqrt{3}$

D) Cả A, B, C đều đúng

Chọn đáp án D

Giải thích:

A) Gọi J là giao điểm của OA và CD

Do CD là đường trung trực của OA nên

$$CA = CO = R \Rightarrow OA = OC = CA = R \quad (1)$$

Vậy $\triangle OAC$ là tam giác đều

B) Chứng minh tương tự:

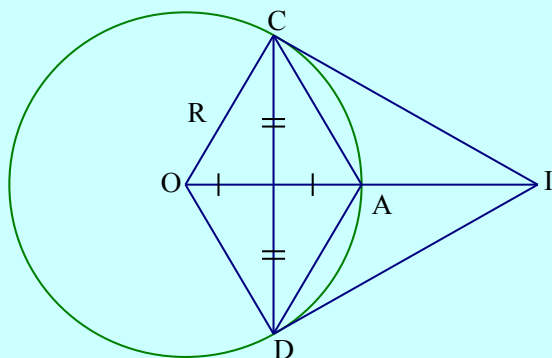
$$OA = OD = AD = R \quad (2)$$

$$\text{Từ } (1)(2) \Rightarrow OC = OD = AC = AD = R$$

$\Rightarrow$ $\diamond OCAD$ là hình thoi

C) Xét $\triangle OCI$, ta có: $\widehat{OCI} = 90^\circ$; $\widehat{COI} = 60^\circ$

$$\Rightarrow CI = OC \tan \widehat{COI} = R \tan 60^\circ = R\sqrt{3}$$



Câu 4: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm P nằm bên ngoài đường tròn sao cho $OP = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến PM và PN với đường tròn. Khẳng định nào sau đây sai

A) $\widehat{MON} = 120^\circ$

B) Tam giác PMN là tam giác đều

C) $MN = R$

D) Cả A, B, C đều sai

Chọn đáp án B

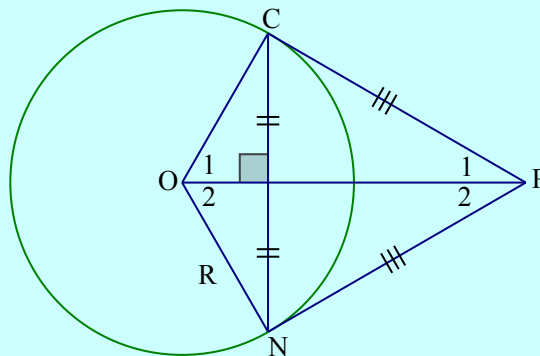
Giải thích:

A) Ta có $PM \perp OM \Rightarrow \widehat{OMP} = 90^\circ$

$\triangle OMP$ vuông tại M , ta có:

$$\cos \widehat{POM} = \frac{OM}{OP} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{POM} = 60^\circ$$

$$\text{Ta có } \widehat{POM} = \widehat{PON} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 120^\circ$$



B) Ta có $PM = PN \Rightarrow \triangle PMN$ cân tại P (1)

$$\triangle OMP \text{ có: } \widehat{O_1} + \widehat{P_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{P_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{P_2} = 30^\circ$$

Do đó $\widehat{MPN} = 60^\circ$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \triangle PMN$ là tam giác đều

C) $\triangle OMN$ cân tại O , có

$$\widehat{MON} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{ONM} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} > \widehat{OMN} \Rightarrow MN > ON$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

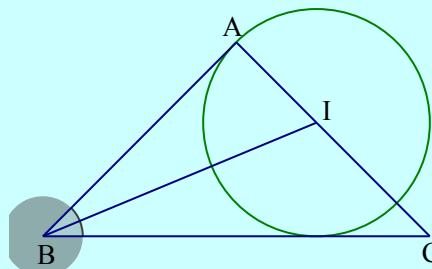
Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Vẽ tia phân giác

BI

a) Chứng minh rằng đường tròn $(I; IA)$ tiếp xúc với đường thẳng AB, AC

b) Cho biết $AB = a$. Tính IA và từ đó suy ra

$$\tan 22^\circ 33' = \sqrt{2} - 1$$



Lời giải

a) Ta có $IA \perp BA \Leftrightarrow IA = d(I, BA) \Leftrightarrow (I, IA)$ tiếp xúc với BA tại A

mặt khác BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$

Do đó đường tròn (I, IA) tiếp xúc với BC

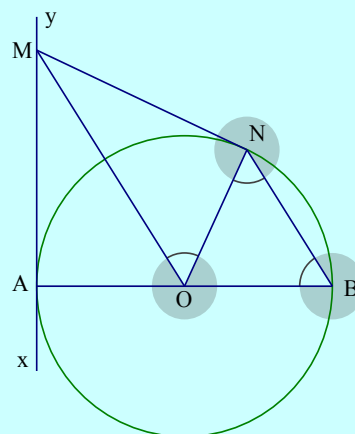
b) Áp dụng tính chất tia phân giác trong $\triangle ABC$, ta có: $\frac{IA}{IB} = \frac{IC}{BC} = \frac{AC - IA}{AB \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{IA}{a} = \frac{a - IA}{a\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot IA = a - IA \Leftrightarrow IA = \frac{a}{\sqrt{2} + 1} = a(\sqrt{2} - 1), \text{ khi đó } \triangle ABC \text{ vuông tại } A \text{ ta có: } \tan \widehat{ABI} = \frac{IA}{BA}$$

$$\Leftrightarrow \tan 22^\circ 33' = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{a} = \sqrt{2} - 1 \text{ (đpcm).}$$

Bài 2:

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và tiếp tuyến xAy . Trên xy lấy một điểm M , kẻ dây cung BN song song với OM . Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Lời giải

$$\text{Vì } BN \parallel OM \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{ABN}; \widehat{MON} = \widehat{ONB}$$

Mà $\triangle OBN$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{ONB} \Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{AOM}$

Ta có: $\triangle OAM = \triangle ONM \left(OA = ON = R; \widehat{AOM} = \widehat{MON}; OM : chung \right) \Rightarrow \widehat{ONM} = \widehat{OAM}$

Ta lại có: $\widehat{OAM} = 90^\circ$ (vì xy là tiếp tuyến tại A), nên ta có: $\widehat{ONM} = 90^\circ \Leftrightarrow MN \perp ON$

Vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

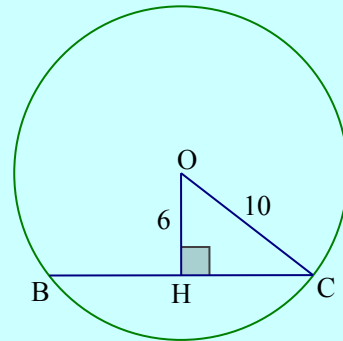
Bài 3:

Cho điểm (O) cách đường thẳng a là $6cm$.

Vẽ đường tròn $(O, 10cm)$

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng d

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C . Tính độ dài BC



Lời giải

a) Kẻ $OH \perp a \Rightarrow OH = 6cm$ là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a

Do $6 < 10 \Rightarrow (O)$ có hai giao điểm với đường thẳng a

b) Vì $OH \perp a \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow BH = HC = \frac{BC}{2}$

Áp dụng hệ thức pytago vào $\triangle OHC$ vuông tại H có cạnh huyền $OC = 10cm$, ta được:

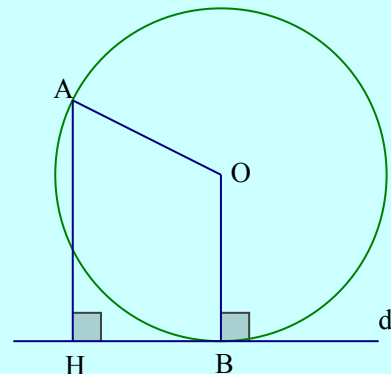
$$OC^2 = CH^2 + HO^2 \Leftrightarrow 10^2 = CH^2 + 6^2 \Leftrightarrow CH^2 = 8^2 \Leftrightarrow CH = 8(cm) (CH > 0)$$

Vậy $BC = 16(cm)$.

Bài 4:

Cho đường thẳng d và đường tròn $(O; R)$

không giao nhau. A là điểm trên (O) . Xác định vị trí điểm A để khoảng cách từ A đến đường thẳng d lớn nhất



Lời giải

Gọi H, B lần lượt là hình chiếu của A, O trên đường thẳng d , ta có: B cố định

$$AH \perp HB \Rightarrow AH \leq AB$$

Xét ba điểm O, A, B ta có: $AB \leq OA + OB \Rightarrow AH \leq R + OB, R + OB$ không đổi

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} H \equiv B \\ O \text{ nằm giữa } A \text{ và } B \end{cases}$$

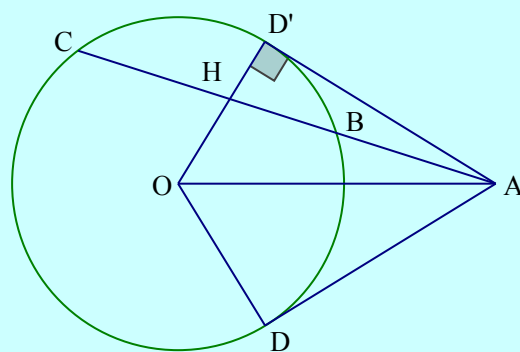
Vậy khi A là giao điểm của tia đối tia OB và đường tròn (O) (B là hình chiếu của O trên d) thì khoảng cách từ A đến d lớn nhất.

Bài 5:

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$.

Đường thẳng d qua A , gọi B và C là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (O) .

Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $AB + AC$ lớn nhất



Lời giải

Vẽ đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn tại D và D' , ta có D và D' cố định

- Nếu d trùng với AD hoặc AD'

Ta có các điểm B, C, D trùng nhau nên: $AB + AC = 2AD = 2AD'$

- Nếu d không trùng với AD hoặc AD'

Vẽ $OH \perp d (H \in d)$. Ta có H là trung điểm của BC (định lý đường kính vuông góc với dây cung) và có $OH < R \Rightarrow AB + AC = AH + HB + AH - HC = 2AH$

$$\text{Xét } \triangle OAH \text{ vuông tại } H \Rightarrow OH^2 + AH^2 = OA^2$$

$$\text{Xét } \triangle OAD \text{ vuông tại } D \Rightarrow OD^2 + AD^2 = OA^2$$

$$\text{Do đó: } OH^2 + AH^2 = OD^2 + AD^2, \text{ mà } OH < OD = R \Rightarrow AH > AD \Rightarrow AB + AC > 2AD$$

Vậy khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn thì $AB + AC$ nhỏ nhất.