

ÔN TẬP TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa: Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó

- Trong hình vẽ ta có $\diamond ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và (O) ngoại tiếp $\diamond ABCD$

2. Các tính chất: Cho $\diamond ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , khi đó:

- Tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$$

- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

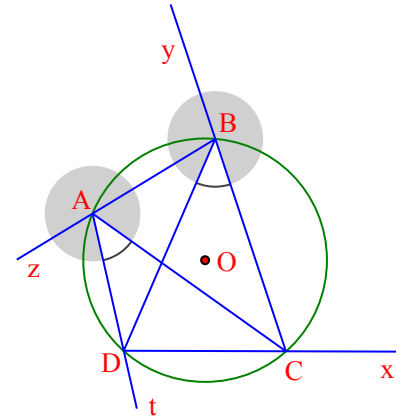
- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°

- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện

- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều 1 điểm cố định (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác

- Tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α (dựa vào kiến thức cung chứa góc)

***) Chú ý:** Trong các hình đã học thì hình chữ nhật, hình vuông và hình thang cân nội tiếp được đường tròn



Bài 1:

Cho tam giác ABC cân tại A , các đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle AHE$

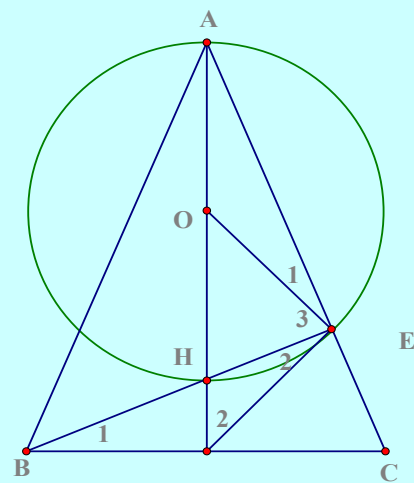
a. $\diamond CEHD$ nội tiếp

b. A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn

c. $ED = \frac{1}{2}BC$

d. DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

e. Tính DE biết $DH = 2cm, AH = 6cm$



Lời giải

c) $\triangle ABC$ cân tại A , AD là đường cao $\Rightarrow AD$ là đường trung trực $\Rightarrow D$ là trung điểm của BC

$\triangle BEC$ có ED là đường trung tuyến $\Rightarrow ED = \frac{1}{2}BC$

d) Ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHE \Rightarrow O$ là trung điểm của $AH \Rightarrow OA = OE \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (1)

$\triangle BDE$ cân tại $D \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{E_3}$, mà $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (phụ $\widehat{C}$) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_3}$, Lại có $\widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E_2} + \widehat{E_3} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{OED} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp OE$ tại E

e) Ta có $AH = 6 \Rightarrow OH = OE = 3; HD = 2 \Rightarrow OD = 5$.

$\triangle OED$ vuông tại $E \Rightarrow DE = 4cm$.

Bài 2:

Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt (O) lần lượt tại M, N, P . Kẻ đường kính AK , I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:

a. $\diamond CEHD, \diamond BCEF$ nội tiếp và ba điểm H, I, K thẳng hàng

b. Chứng minh tứ giác $BMKC$ là hình thang cân

c. OH cắt AI tại G . Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC

d. $AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC$

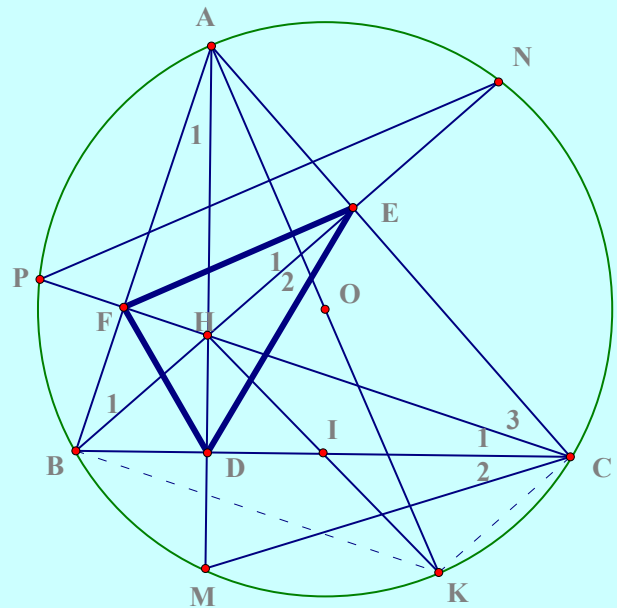
$AE.AC = FA.BA$ ($\triangle AFE \sim \triangle ABC$)

e. H và M đối xứng nhau qua BC

f. Xác định tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$

g. Chứng minh $MN \parallel EF$ và $OA \perp EF$

h. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF và diện tích hình tròn (AEF) không đổi khi A di động trên cung lớn BC



Lời giải

a. $\diamond CEHD, \diamond BCEF$ nội tiếp và ba điểm H, I, K thẳng hàng

Xét $\diamond CEHD$, có: $\widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow dpcm$

- Tứ giác BHCK là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm của HK

b. Chứng minh tứ giác BMKC là hình thang cân

Ta có $MK \parallel BC \Rightarrow \diamond BMKC$ là hình thang

Lại có BC là đường trung trực của $HM \Rightarrow CH = CM$, mà $CH = BK \Rightarrow CM = BK$

Hình thang $BMCK$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân

c. OH cắt AI tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có G là trọng tâm tam giác $AHK \Rightarrow GI = \frac{1}{3} AI$

- Xét $\triangle ABC$ có AI là trung tuyến và $\Rightarrow GI = \frac{1}{3} AI \Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABC$

d) $\triangle AEH \# \triangle ADC (gg) \Rightarrow AE.AC = AH.AD; \triangle BEC \# \triangle ADC (gg) \Rightarrow AD.BC = BE.AC$

e) H và M đối xứng nhau qua BC

Ta đi chứng minh CB là đường trung trực của HM

Có: $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1$ (phụ $\widehat{ABC}$); $\widehat{C}_2 = \widehat{A}_1 = \frac{1}{2} sd \widehat{Bm} \Rightarrow CB$ là phân giác của $\widehat{C}$

Mà $CB \perp HM \Rightarrow \triangle CHM$ cân tại C nên CB là đường trung trực của HM

f. Xác định tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$

Ta có $\diamond BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1 = \frac{1}{2} sd \widehat{BF}$, ta có $\diamond CEHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{E}_2 = \frac{1}{2} sd \widehat{HD}$,

$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 \Rightarrow EB$ là phân giác $\widehat{FED}$

+) Chứng minh tương tự, ta có FC là phân giác của $\widehat{F}$

g. Chứng minh $MN \parallel EF$ và $OA \perp EF$

$\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 = \widehat{C}_3 \Rightarrow \widehat{AP} = \widehat{AN} \Rightarrow OA \perp NP(1) \\ \widehat{N}_1 = \widehat{C}_1; \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow NP \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp EF$

h. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF và diện tích hình tròn (AEF) không đổi khi A di động trên cung lớn BC

+) Chứng minh được $\diamond BHCK$ là hình bình hành (các cạnh đối song song)

Xét $\triangle AHK$, có OI là đường trung bình của $\triangle AHK \Rightarrow OI = \frac{1}{2} AH$

O, I cố định nên OI không đổi $\Rightarrow AH$ không đổi. Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ không đổi.

+) $\diamond AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH \Rightarrow \triangle AEF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

$$S_{(AEF)} = \Pi.OI^2 \text{ (không đổi).}$$

Bài 3:

Cho đường tròn $(O; R)$ từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O) . Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP , kẻ tiếp tuyến MB , B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB, BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của OM và AB

a. $\diamond AMBO$ nội tiếp

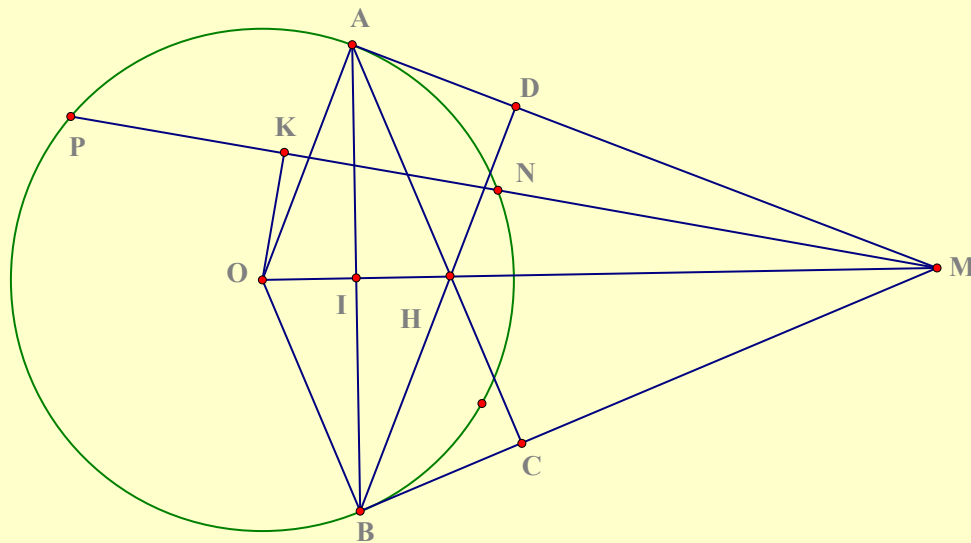
b. O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn

c. $OI.OM = R^2; OI.IM = IA^2$

d. $\diamond OAHB$ là hình thoi

e. O, H, M thẳng hàng

f. Tìm quỹ tích điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d



Lời giải

b) Ta có K là trung điểm của $NP \Rightarrow OK \perp NP$

Lại có A, B, K cùng nhìn OM dưới 1 góc $90^\circ \Rightarrow$ nằm trên đường tròn đường kính OM .

Vậy 5 điểm cùng nằm trên 1 đường tròn

c) Ta có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến); $OA = OB = R \Rightarrow OM$ là đường trung trực của AB

$$\Rightarrow OM \perp AB \equiv I$$

$$\text{Xét } \triangle OAM (\widehat{OAM} = 90^\circ) \Rightarrow \begin{cases} OI \cdot OM = OA^2 (\text{cạnh.và.đường.cao}) \\ OI \cdot IM = IA^2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \left. \begin{matrix} OB // AH (\perp BM) \\ OA // BH (\perp AM) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} HBH \\ OA = OB \end{cases} \Rightarrow \text{hình.thoi}$$

e) $\diamond OAHB$ là hình thoi $\Rightarrow OH \perp AB, OM \perp AB \Rightarrow O, H, M$ thẳng hàng

Vì qua O chỉ có 1 đường thẳng vuông góc với AB

f) Theo chứng minh trên $\diamond OAHB$ là hình thoi $\Rightarrow AH = AO = R$

Vậy khi M di động trên d thì H di động nhưng luôn cách A cố định 1 khoảng bằng R . Do đó quỹ tích của H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính $AH = R$.

Bài 4:

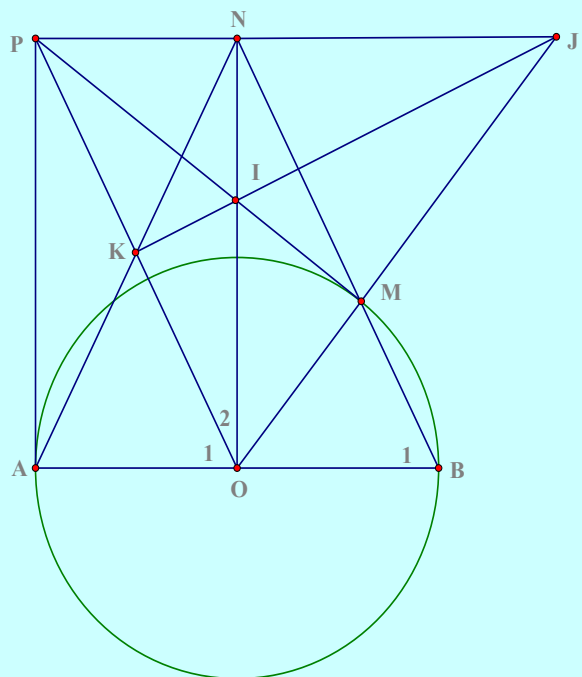
Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M

a. $\diamond APMO$ nội tiếp

b. $BM // OP$

c. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N . Chứng minh rằng $\diamond OBNP$ là hình bình hành

d. Biết AN cắt OP tại K , PM cắt ON tại I , PN và OM kéo dài cắt nhau tại J . Chứng minh rằng: I, J, K thẳng hàng



Lời giải

$$\text{a. } \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AM} \Rightarrow \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AOM} = \widehat{O_1} \text{ (tính chất hai tiếp tuyến)}$$

Mà hai góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow BN // OP \Rightarrow \text{đpcm}$

$$\text{b. } \triangle AOP = \triangle OBN (\text{g.c.g}) \Rightarrow OP = BN$$

Vậy $\diamond OBNP$ là hình bình hành

c) Ta có $PN // OB \Rightarrow PJ // AB$ mà $ON \perp AB \Rightarrow ON \perp PJ$. Lại có: $PM \perp OJ$

mà $ON \cap PM \equiv I \Rightarrow I$ là trực tâm ΔPJO

$$+) \diamond PNOA \text{ là hình chữ nhật } \Rightarrow \begin{cases} KO = KP \\ \widehat{APO} = \widehat{NOP} (slt) \end{cases}$$

Có PO là phân giác $\widehat{APM} \Rightarrow \Delta IOP$ cân tại I , IK là đường trung tuyến nên là đường cao $\Rightarrow IK \perp OP$

Xét ΔOPJ , I là trực tâm, mà $IK \perp OP \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài 7:

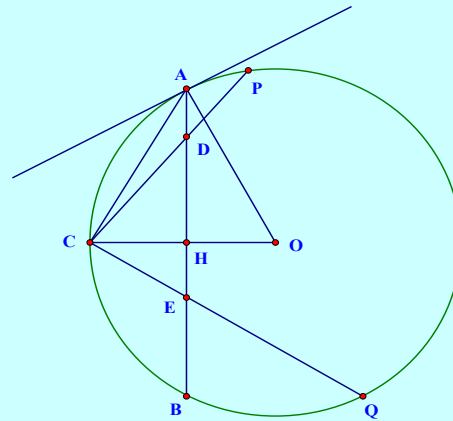
Cho đường tròn (O) , dây AB . C là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Lấy các điểm D, E thuộc dây AB (D nằm giữa A, E). Tia CD, CE cắt (O) lần lượt tại P, Q

a. Chứng minh rằng tứ giác $PQED$ nội tiếp được

b. Nếu $AD = BE$ thì tứ giác $PQED$ là hình gì?

c. Chứng minh rằng: $CA^2 = CP \cdot CD$

d. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP .



Lời giải

a. Xét (O) có C là điểm chính giữa cung nhỏ AB (gt) $\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$

Ta có: $\widehat{CDB} = \frac{sd(\widehat{BC} + \widehat{AP})}{2}$ (góc có đỉnh bên trong đường tròn)

$$\widehat{CQP} = \frac{sd\widehat{CP}}{2} = \frac{sd(\widehat{CA} + \widehat{AP})}{2} (goc.noi.tiep) \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{CQP}$$

Ta có: $\widehat{CDB} + \widehat{BDP} = 180^\circ (ke.bu)$

Mà $\widehat{CDB} = \widehat{CQP} (cmt) \Rightarrow \widehat{CQP} + \widehat{BDP} = 180^\circ$

Hay $\widehat{EQP} + \widehat{CDP} = 180^\circ$

Xét $\diamond PQED$, có: $\widehat{EQP} + \widehat{EDP} = 180^\circ \Rightarrow \diamond PQED$ nội tiếp đường tròn.

b. Nếu $AD = EB$ thì tứ giác $PQED$ là hình gì?

Gọi H là giao điểm của OC và AB

+) Xét (O) có: OC là đường kính, C là điểm chính giữa cung nhỏ AB (gt) $\Rightarrow H$ là trung điểm của dây AB và $OC \perp AB \Rightarrow AH = BH$

Ta lại có $AD = EB \Rightarrow HD = HE$

+) Vì $OC \perp AB; HD = HE(cmt) \Rightarrow CH$ là đường trung trực của AB $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow \triangle CDE$ cân tại C
 $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CED}(t/c) \Rightarrow \widehat{EDP} = \widehat{DEQ}(1)$

+) Vì $\widehat{CDE} = \widehat{CQP}(cmt); \widehat{CED} = \widehat{CEP}(cmt) \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CQP} \Rightarrow DE \parallel PQ \Rightarrow \diamond PQED$ là hình thang (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \diamond PQED$ là hình thang cân (dấu hiệu nhận biết)

c. Chứng minh rằng: $CA^2 = CP.CD$

+) Xét (O), có: $\widehat{CAB} = \frac{sd \widehat{BC}}{2} (goc.noi.tiep); \widehat{APC} = \frac{sd \widehat{AC}}{2}; \widehat{AC} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{APC}$

+) Xét $\triangle CAD, \triangle CPA$, có: $\begin{cases} \widehat{C}: chung \\ \widehat{CAD} = \widehat{CPA} \end{cases} \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle CPA(g.g)$

$\Rightarrow \frac{CA}{CP} = \frac{CD}{CA}(tc) \Rightarrow CA^2 = CP.CD.$

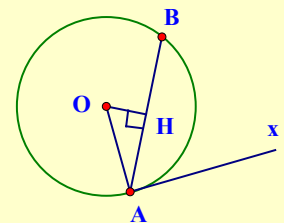
d. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP

Chứng minh định lý đảo của định lý về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, cụ thể là: Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên một đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn. Hình minh họa

Chứng minh:

Kẻ OH là tia phân giác của $\widehat{AOB}$

Vì $OA = OB \Rightarrow \triangle AOB$ cân tại O nên OH đồng thời là đường cao của tam giác AOB
 $\Rightarrow OH \perp AB; \widehat{OHA} = 90^\circ$



Xét $\triangle AOH$ vuông tại H có: $\widehat{HOA} + \widehat{OAH} = 90^\circ (tc)$

Ta lại có: $\widehat{HOA} = \widehat{xAB} \left(= \frac{sd \widehat{AB}}{2} \right) (gt) \Rightarrow \widehat{OAH} + \widehat{xAB} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp Ax \Rightarrow Ax$ là tia tiếp tuyến (O)

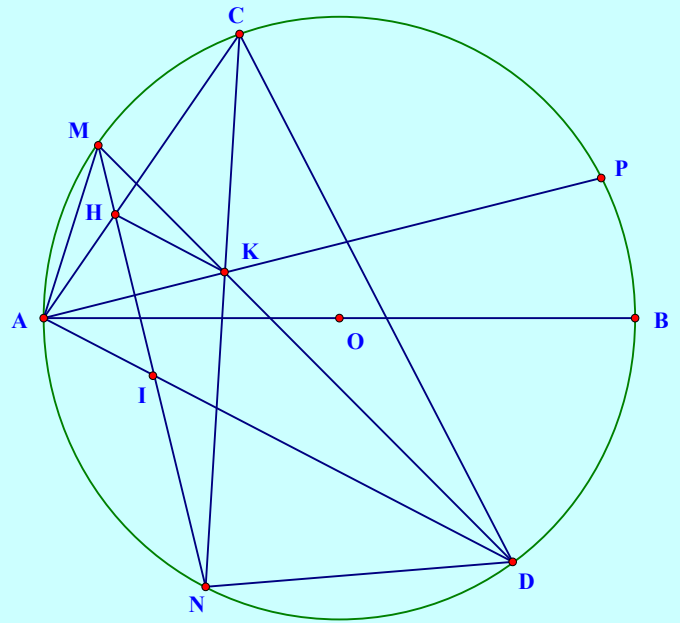
Chứng minh: Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP, có: $\widehat{APD} = \frac{sd \widehat{AD}}{2} (goc.noi.tiep)$

Mà $\widehat{CAD} = \widehat{APD}$ (cmt) nên theo định lý đảo của định lý về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP.

Bài 5:

Cho đường tròn (O) đường kính AB, các điểm C và D thuộc (O) sao cho CD không cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB, đồng thời $AD > AC$. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa cung AC, AD, MN cắt AC, AD lần lượt tại H, I. MD cắt CN tại K

- Chứng minh rằng tam giác NKD và tam giác MAK cân
- $KH \parallel AD$
- So sánh $\widehat{CAK} = \widehat{DAK}$
- Tìm một hệ thức giữa số đo cung AC, số đo AD là điều kiện cần và đủ để $AK \parallel ND$.



Lời giải

- Chứng minh rằng tam giác NKD và tam giác MAK cân

Xét đường tròn (O), có:

$$\begin{aligned}\widehat{NKD} &= \frac{1}{2}sd\widehat{MC} + \frac{1}{2}sd\widehat{ND} \\ &= \frac{1}{4}sd\widehat{AC} + \frac{1}{4}sd\widehat{AD} = \frac{1}{2}sd\widehat{MN} = \widehat{KDN}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \triangle NKD$ cân tại N

Xét $\triangle CAD$ có CN, DM là phân giác góc C và D $\Rightarrow K$ là giao điểm của 3 đường phân giác $\Rightarrow AK$ cắt (O) tại P $\Rightarrow PC = PD$

Xét (O), có $\widehat{NAK} = \frac{1}{2}sd\widehat{MP} = \frac{1}{2}sd\widehat{MC} + \frac{1}{2}sd\widehat{CP} = \frac{1}{2}sd\widehat{MA} + \frac{1}{2}sd\widehat{PD} = \widehat{PK} \Rightarrow \triangle MAK$ cân tại M.

- Chứng minh: $KH \parallel AD$

Xét $\triangle MAD$ có MI là phân giác $\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HMA} = \widehat{HCK} \Rightarrow \diamond MCKH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MCH} = \widehat{MDA} \Rightarrow HK \parallel AD$

c. So sánh $\widehat{CAK} = \widehat{DAK}$

Vì AP là phân giác $\widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{DAK}$

d. Tìm một hệ thức giữa số đo cung AC, số đo AD là điều kiện cần và đủ để $AK \parallel ND$

$\triangle AMK$ cân tại M có AN là đường phân giác $\Rightarrow MN \perp AK$

Để $AK \parallel ND \Rightarrow MN \perp ND \Rightarrow MD$ là đường kính $\Rightarrow \frac{1}{2}sd\widehat{AC} + sd\widehat{AD} = 180^\circ$.

Bài 6:

Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ có $R > R'$ tiếp xúc ngoài nhau tại C . Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O') . DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB . Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F , BD cắt (O') tại G . CMR:

a. $MDGC$ nội tiếp

b. M, D, B, F cùng nằm trên một nửa đường tròn

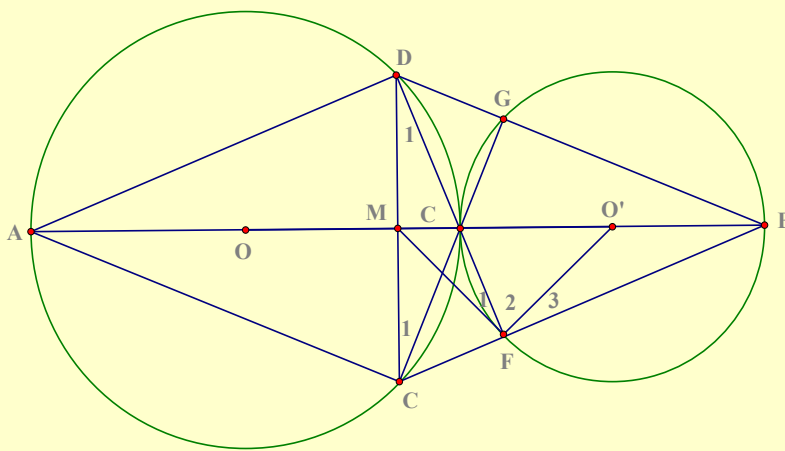
c. $\diamond ADBE$ là hình thoi

d. B, E, F thẳng hàng

e. DF, EG, AB đồng quy

f. $MF = \frac{1}{2}DE$

g. MF là tiếp tuyến của đường tròn (O')



Lời giải

c. M là trung điểm của AB, mà $DE \perp AB \Rightarrow M$ là trung điểm của DE (đường kính và dây) nên là hình thoi (hai đường chéo vuông góc tại trung điểm của mỗi đường).

d. Ta có $AD \parallel EB$ (tính chất hình thoi), $AD \perp DF$ (góc nội tiếp) $\Rightarrow BE \perp DF \Rightarrow F$

Lại có: $BF \perp DF$ ($\widehat{F} = 90^\circ$), mà qua B chỉ có 1 đường thẳng $\perp DF \Rightarrow B, E, F$ thẳng hàng

e. Xét $\triangle BDE$ có C là trực tâm $\Rightarrow EC \perp BD, CG \perp DB \Rightarrow E, C, G$ thẳng hàng.

Vậy DF, EG, AB đồng quy

f. $\triangle DEF$ vuông tại $F \Rightarrow MF = \frac{1}{2}DE$ (đpcm)

g. $MF = MD \Rightarrow \triangle MDF$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{F_1}$

$\triangle O'BE$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{F_3}$, mà $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (phụ $\widehat{DEB}$).

Vậy $\widehat{F_1} = \widehat{F_3} \Rightarrow \widehat{F_1} + \widehat{F_2} = \widehat{F_2} + \widehat{F_3} = 90^\circ \Leftrightarrow MF \perp O'F \Rightarrow MF$ là tiếp tuyến của (O') .

Bài 7:

Cho nửa đường tròn đường kính AB . Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By . Qua M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ 3 cắt các tiếp tuyến Ax, By tại C và D . Các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại N . Nối MA cắt CO tại D , nối MB cắt OD tại F

a. $OEMF$ là hình chữ nhật

b. $AC + BD = CD$

c. Khi M chuyển động trên nửa đường tròn thì $AC \cdot BD$ không đổi (hoặc lớp B thì $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$)

d. AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

e*. $MN \perp AB$

f. Cho $BD = R\sqrt{3}$ tính AM

g*. Gọi H là giao điểm của MN với AB , Chứng minh rằng khi M di động trên nửa đường tròn thì đường tròn ngoại tiếp $\triangle HEF$ luôn đi qua điểm cố định

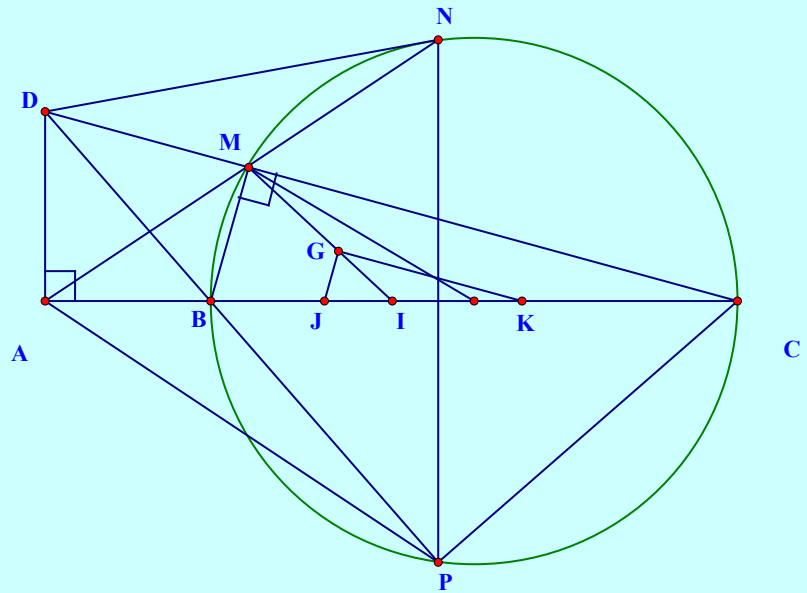
h. Xác định vị trí của điểm M để chu vi $\triangle ACDB$ đạt GTNN

là $CD \perp AC$ khi đó $CD \parallel AB \Rightarrow M$ là trung điểm của cung $\widehat{AB}$.

Bài 8:

Cho điểm B nằm giữa hai điểm A, C.
Vẽ đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ (O) đường kính BC và trên đó lấy một điểm M bất kỳ. Tia CM cắt d tại D, tia AM cắt (O) tại điểm thứ hai N. Tia DB cắt (O) tại điểm thứ hai P.

- Chứng minh rằng tứ giác ABMD, APCD nội tiếp được
- Chứng minh $CM \cdot CD$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên (O)
- Tứ giác APND là hình gì? Vì sao
- Chứng minh trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên một đường tròn cố định khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O).



Lời giải

a) Chứng minh rằng tứ giác ABMD, APCD nội tiếp được

Ta có: $\widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BMD} + \widehat{DAB} = 180^\circ \Rightarrow \diamond ABMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Ta lại có $\widehat{DPC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DPC} = 90^\circ \Rightarrow \diamond APCD$ nội tiếp.

b. Chứng minh $CM \cdot CD$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên (O)

Vì $\Delta CMB \sim \Delta CAD(gg) \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{CB}{CD} \Rightarrow CM \cdot CD = CA \cdot CB$

mà các điểm C, A, B cố định nên $CA \cdot CB$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn (O)

Vậy $CM \cdot CD$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên đường tròn (O).

c. Tứ giác APND là hình gì? Vì sao

Vì ABMD là tứ giác nội tiếp đường tròn nên $\widehat{DAM} = \widehat{DBM}$ (1) (chạ $\widehat{DM}$)

Lại có BMNP là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{DBM} = \widehat{MNP}$ (2) (chạ $\widehat{MBP}$)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{MNP} \Rightarrow AD // NP \Rightarrow \diamond APND$ là hình thang.

d. Chứng minh trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên một đường tròn cố định khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O).

Gọi I là trung điểm của AC, J là điểm nằm giữa B và I, K là điểm nằm giữa I và C sao cho:

$$BJ = \frac{2}{3}BI; CK = \frac{2}{3}CI$$

Vì A, B, C là các điểm cố định nên I, J, K là các điểm cố định.

$$\text{Do G là trọng tâm } \triangle AMC \Rightarrow MG = \frac{2}{3}MI \Rightarrow \frac{MG}{MI} = \frac{BJ}{BI} = \frac{2}{3} \Rightarrow GJ // BM$$

$$\text{Lại có } \frac{MG}{MI} = \frac{CK}{CI} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK // CM. \text{ Mà } \widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{JGK} = 90^\circ$$

$\Rightarrow G$ thuộc đường tròn đường kính JK cố định

Vậy khi M di chuyển trên đường tròn (O) thì trọng tâm G của tam giác AMC di chuyển trên đường tròn đường kính JK cố định.

Bài 9:

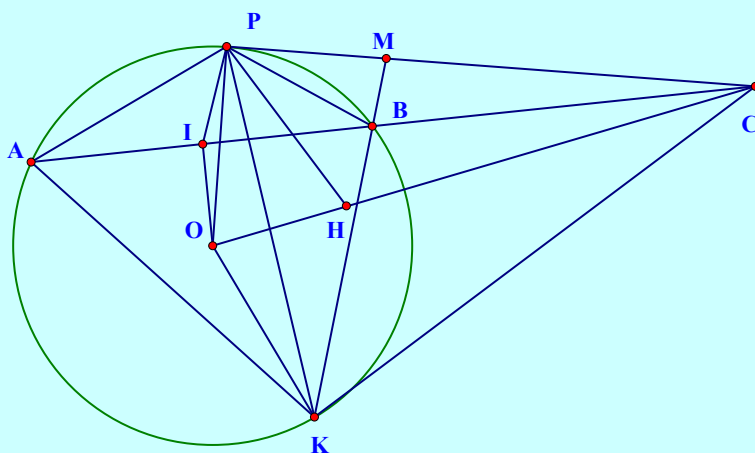
Cho (O; R) và dây $AB < 2R$. Lấy điểm C thuộc tia AB sao cho $AC > AB$. Từ C kẻ hai tiếp tuyến với (O) tại P và K. Gọi I là trung điểm của AB

a. Chứng minh rằng ngũ giác CPIOK nội tiếp đường tròn

b. Chứng minh $CP^2 = CA.CB$

c. Gọi H là trực tâm của tam giác CPK. Tính KH theo R

d. Giả sử $AP // CK$. Chứng minh tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP.



Lời giải

a) Chứng minh rằng ngũ giác CPIOK nội tiếp đường tròn

Xét $\triangle CPOK : \widehat{CPO} + \widehat{CKO} = 180^\circ \Rightarrow \triangle CPOK$

Nội tiếp

Xét $\triangle CIOK : \widehat{CIO} + \widehat{CKO} = 180^\circ \Rightarrow \triangle CIOK$

Nội tiếp

Vậy 5 điểm thuộc 1 đường tròn.

b. Chứng minh: $CP^2 = CA.CB$

Xét $\triangle CPB, \triangle CAP, co : \begin{cases} \widehat{CAp} = \widehat{CPB} \\ \widehat{PCB} : chung \end{cases}$

$$\Rightarrow \triangle CPB \sim \triangle CAP (gg) \Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow CP^2 = CA.CB$$

c. Gọi H là trực tâm của tam giác CPK. Tính KH theo R

Vì H là trực tâm $\triangle CPK \Rightarrow PH \perp CK; KH \perp CP$

Mà $OK \perp CK; OP \perp CP \Rightarrow PH \parallel OK; KH \parallel OP \Rightarrow \triangle OPHK$ là hình bình hành $\Rightarrow HK = OP = R$

d. Giả sử $AP \parallel CK$. Chứng minh tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP

Gọi $M = BB \cap CP$. Vì tứ giác PBKA nội tiếp (O) nên $\widehat{PBM} = \widehat{PAK}$ (cùng bù với $\widehat{PBK}$).

Xét (O) có $\widehat{ABK} = \widehat{AKx}$ (hệ quả của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Lại có $\widehat{MBC} = \widehat{ABK}$ (đối đỉnh); $\widehat{AKx} = \widehat{PAK}$ (sole trong; $AP \parallel CK$)

Do đó $\widehat{PBM} = \widehat{MBC} \Rightarrow$ tia đối của tia BK là tia phân giác của $\widehat{CBP}$

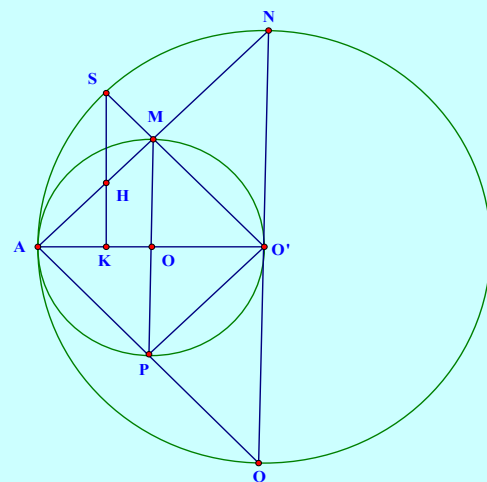
Bài 10:

Cho (O; R) và (O'; 2R) tiếp xúc trong tại A. Qua A kẻ hai cát tuyến AMN và APQ với M, P thuộc (O) và N, Q thuộc (O')

a. Chứng minh rằng $(O) \in (O')$

b. Chứng minh: $MP \parallel NQ$

c. Tia O'M cắt (O') tại S. Gọi H là trực tâm của tam giác SAO'. Chứng minh rằng tứ giác SHO'N nội tiếp được



d. Khi $\widehat{MAP} = 90^\circ$. Tính độ dài MP và NQ theo R.

Lời giải

a. Chứng minh rằng: $(O) \in (O')$

Ta có A là tiếp điểm chung của (O) và (O') nên: $\begin{cases} OA = R \\ O'A = 2R \end{cases} \Rightarrow O'A = 2OA$

Mà (O) và (O') tiếp xúc trong tại A nên các điểm A, O', O thẳng hàng (đường nối tâm của 2 đường tròn tiếp xúc nhau luôn đi qua tiếp điểm)

$\Rightarrow O$ là trung điểm của O'A

$\Rightarrow O'$ và A đối xứng nhau qua O

Mà $A \in (O) \Rightarrow O' \in (O)$ (dpcm)

b. Chứng minh: $MP \parallel NQ$

Xét $\triangle O'MA$ có $\widehat{O'MA}$ chắn nửa đường tròn $(O; \frac{O'A}{2}) \Rightarrow \triangle O'MA$ vuông tại M $\Rightarrow O'M \perp AN$.

Ta có: $O'M \perp AN \Rightarrow M$ là trung điểm của AN (1)

Tương tự ta có: P là trung điểm của AQ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MP$ là đường trung bình của $\triangle ANQ \Rightarrow MP \parallel NQ$

c. Tia O'M cắt (O') tại S. Gọi H là trực tâm của tam giác SAO'. Chứng minh rằng tứ giác SHO'N nội tiếp được

Gọi K là giao điểm của SH và O'A, do H là trực tâm của $\triangle SAO' \Rightarrow SK$ là đường cao $\triangle SAO' \Rightarrow \triangle O'KS$ vuông tại K.

Xét $\triangle O'MA$ vuông tại M và $\triangle O'KS$ có $\widehat{MO'A} : chung$

$\Rightarrow \triangle O'MA \sim \triangle O'KS \Rightarrow \widehat{OSK} = \widehat{O'MA} \Rightarrow \widehat{O'SH} = \widehat{O'AN}$ (3)

Lại có: $\triangle O'NA$ cân tại O' (vì O'N, O'A đều là bán kính của (O')).

$\Rightarrow \widehat{O'AN} = \widehat{O'NA} \Rightarrow \widehat{O'AN} = \widehat{O'NH}$ (4)

Từ (3)(4) $\Rightarrow \widehat{O'SH} = \widehat{O'NH} \Rightarrow \diamond SHO'N$ nội tiếp đường tròn.

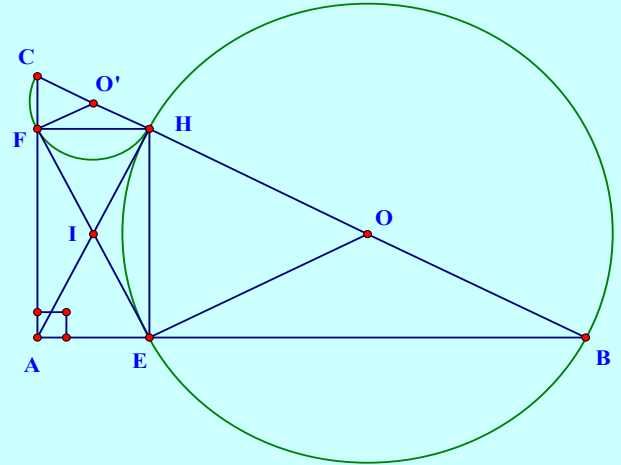
d. Khi $\widehat{MAP} = 90^\circ$. Tính độ dài MP và NQ theo R.

Nếu $\widehat{MAP} = 90^\circ \Rightarrow \diamond MAP'O$ là hình chữ nhật $\Rightarrow PM = AO' = 2R; QN = 2PM = 4R$.

Bài 11:

Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB > AC$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ nửa (O) đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn (O') đường kính HC cắt AC tại F.

- Chứng minh rằng tứ giác AFHE là hình chữ nhật
- Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp được
- Chứng minh $AE \cdot AB = AC \cdot AF$
- Chứng minh FE là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O) và (O')
- Giả sử $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Chứng minh rằng bán kính của nửa đường tròn (O) gấp ba lần bán kính của nửa (O').



Lời giải

a. Chứng minh rằng tứ giác AFHE là hình chữ nhật

Ta có: $\widehat{HEB} = \widehat{HFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp)
 $\Rightarrow \widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ (kề bù với góc vuông)
 $\Rightarrow \diamond AEHF$ là hình chữ nhật.

b. Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp được

Gọi I là giao điểm của AH và FE, ta có tam giác AIE cân tại I (Tính chất hình chữ nhật)
 $\Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{IEA}$. Mà $\widehat{IAE} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{IAF}$) $\Rightarrow \widehat{IEA} = \widehat{ACB} (= \widehat{IAE})$

Tứ giác BEFC có góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện nên nội tiếp được.

c. Chứng minh: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$

Xét $\triangle AEF, \triangle ACB$, có: $\begin{cases} \widehat{EAF} : \text{chung} \\ \widehat{AEF} = \widehat{ACB} \end{cases} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB (gg) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$

d. Chứng minh FE là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O) và (O').

Ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{ACB} (y.b)$. $\triangle OBE$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OBE} \Rightarrow \widehat{AEF} + \widehat{OEB} = \widehat{ACB} + \widehat{OBE} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{FEO} = 180^\circ - (\widehat{AEF} + \widehat{OEB}) = 90^\circ \Rightarrow FE \perp OE$

Mà $FE \cap (O) \equiv E \Rightarrow FE$ là tiếp tuyến của (O) .

Chứng minh tương tự ta có FE là tiếp tuyến của (O')

Vậy FE là tiếp tuyến chung của (O) và (O') .

e. Giả sử $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Chứng minh rằng bán kính của nửa đường tròn (O) gấp ba lần bán kính của nửa (O') .

Gọi $R = \frac{1}{2}HB$ là bán kính của (O) ; Gọi $r = \frac{1}{2}HC$ là bán kính của (O')

$$\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Trong tam giác BHE vuông tại E ta có $\sin \widehat{ABC} = \frac{HE}{HB} \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{1}{2} \Rightarrow HE = \frac{1}{2}HB = R \Rightarrow \diamond AEHF$

là hình chữ nhật $\Rightarrow AF = HE = R$.

Vì $\widehat{FHC} = \widehat{ABC} = 30^\circ$. Chứng minh tương tự như trên, ta có $FC = \frac{1}{2}HC = r$

Vì $\widehat{FHA} = \widehat{ABC} = 30^\circ$ (cùng phụ với $\widehat{HAB}$). Chứng minh tương tự ta có: $HC = \frac{1}{2}AC = 2r$

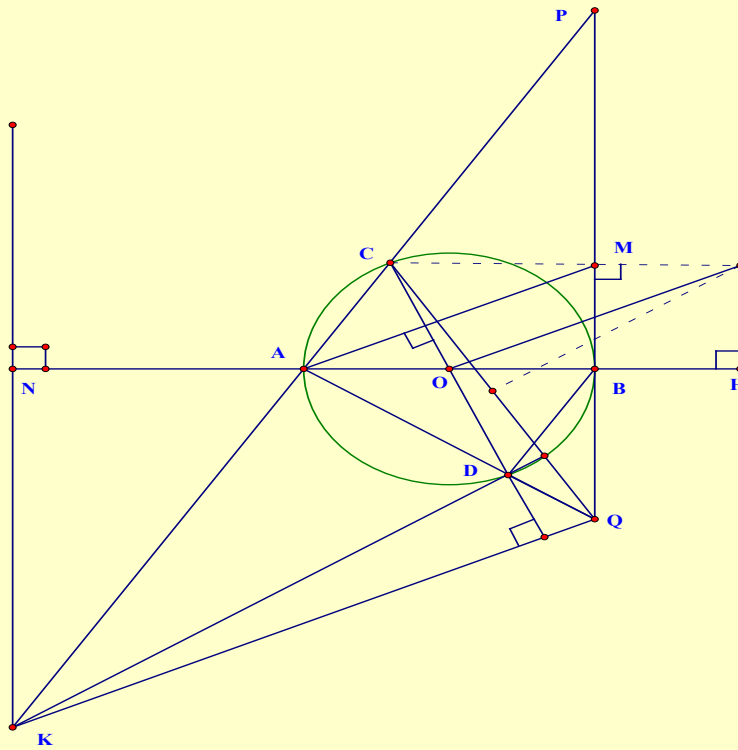
$$\Rightarrow AC = 4r \Leftrightarrow AF + FC = 4r \Leftrightarrow R + r = 4r \Rightarrow R = 3r$$

Vậy bán kính của nửa (O) gấp ba lần bán kính của nửa (O') .

Bài 12:

Cho (O) đường kính AB . Đường kính CD thay đổi. Các tia AC, AD cắt tiếp tuyến tại B lần lượt tại P và Q . Gọi M là trung điểm của PQ

- Chứng minh rằng tứ giác $PCDQ$ nội tiếp
- Chứng minh: $AM \perp CD$
- Chứng minh: $AC.PC + AD.DQ$ không đổi khi CD di động
- Tìm vị trí của CD để PQ nhỏ nhất
- Tìm tập hợp I của đường tròn ngoại tiếp tam giác PCQ
- Tìm tập hợp trục tâm tam giác CDQ .



Lời giải

a. Chứng minh rằng tứ giác PCDQ nội tiếp

Ta có: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (chan.nua.duong.tron) $\Rightarrow \widehat{DQB} = \widehat{ABD}$ (phu.DBQ)

Mà: $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (chan AD) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{DQB} \Rightarrow \widehat{DQB} + \widehat{DCQ} = 180^\circ \Rightarrow \diamond PCDQ$ nội tiếp.

b. Chứng minh: $AM \perp CD$

$\widehat{CAD} = 90^\circ$ (chan.nua.duong.tron)

$\triangle APQ$ vuông tại A, AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên:

$$AM = MP = MQ \Rightarrow \widehat{APM} = \widehat{PAM}$$

Mặt khác theo ý a thì tứ giác PCDQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{APM} = \widehat{CDA}$ (bu.CQD) $\Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{CDA}$

Ta lại có $\widehat{CDA} + \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PAM} + \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp CD$

c. Chứng minh: $AC.PC + AD.DQ$ không đổi khi CD di động

Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (chan.nua.duong.tron), $BC \perp AP$. Theo trên ta cũng có $BD \perp AQ$

Hai tam giác vuông ABP và ABQ có đường cao BC và BD tương ứng. Do đó ta có hệ thức:

$$AC.PC = BC^2; AD.DQ = BD^2 \Rightarrow AC.PC + AD.DQ = BC^2 + BD^2 = CD^2 = AB^2 \text{ không đổi khi CD thay đổi.}$$

d. Tìm vị trí của CD để PQ nhỏ nhất

Tam giác APQ vuông tại A có AB là đường cao nên:

$$AB^2 = PB.BQ \leq \left(\frac{PB+BQ}{2} \right)^2 = \frac{PQ^2}{4} \Rightarrow PQ_{\min} = 2AB \Leftrightarrow PB = BQ \Leftrightarrow \Delta APB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow DC \perp AB$$

e. Tìm tập hợp I của đường tròn ngoại tiếp tam giác PCQ

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCQ. Khi đó $IO \perp CD; MI \perp PQ \Rightarrow IO \parallel AM; IM \parallel AB \Rightarrow \diamond AMIO$ là hình bình hành. Hạ $IH \perp AB \Rightarrow \diamond MIHB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BH = MI = AO$ không đổi nên H là điểm cố định $\Rightarrow$

Đường thẳng HI cố định.

Vậy quỹ tích điểm I là đường thẳng đi qua H và vuông góc với đường thẳng AB

f. Tìm tập hợp trực tâm tam giác CDQ.

Gọi K là trực tâm của tam giác CDQ, khi đó $KQ \parallel AM (\perp CD)$

Ta có A, K, P thẳng hàng (vì $\widehat{CAD} = 90^\circ$)

ΔKPQ có M là trung điểm của PQ, $KQ \parallel AM$ nên AM là đường trung bình $\Delta \Rightarrow AP = KA$

- Từ K hạ $KN \perp AB \Rightarrow \Delta KNA = \Delta PBA \Rightarrow NA = AB$ không đổi hay N là điểm cố định $\Rightarrow$ đường thẳng NK cũng cố định. Do đó quỹ tích điểm K là đường thẳng đi qua N và vuông góc với đường thẳng AB.