

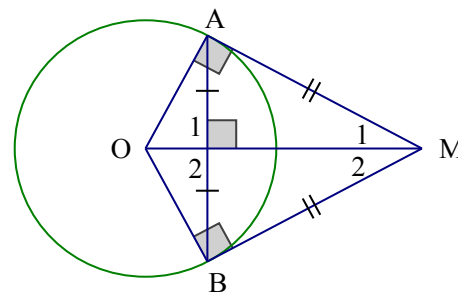
TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

*) Định lí: Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

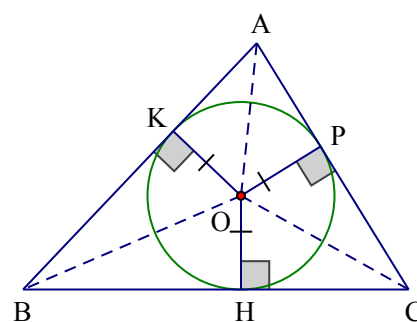
- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm
- Đường thẳng đi qua điểm đó và qua tâm đường tròn là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai tiếp điểm



Giả thiết	Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại M (A và B là tiếp điểm)
Kết luận	- $MA = MB$ - $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ - $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ - MO là trung trực của AB

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác của các góc trong tam giác



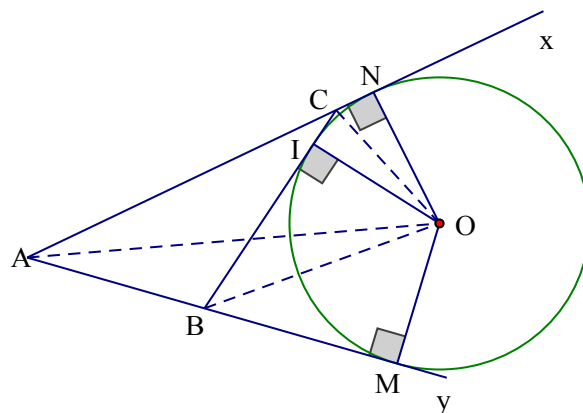
Giả thiết	- AB, AC, BC là các tiếp tuyến của (O); H, P, K là các tiếp điểm - $IH = IK = IP = R$ - $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{B_1} = \widehat{B_2}; \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$
Kết luận	- Đường tròn (O) nội tiếp $\triangle ABC$

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với 1 cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác

- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc $\hat{A}$ là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc $\hat{A}$ và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C)

- Mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp tam giác



Giả thiết	- BC, Ax, Ay là các tiếp tuyến của (O); L, M, N là các tiếp điểm - $OL = OM = ON = R$ - $\hat{A}_1 = \hat{A}_2; \hat{B}_1 = \hat{B}_2; \hat{C}_1 = \hat{C}_2$
Kết luận	- Đường tròn (O) là đường tròn bàng tiếp $\triangle ABC$

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc

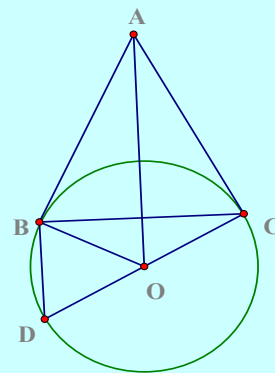
Cách giải: Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

Bài 1:

Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau ở A

a. Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC

b. Vẽ đường kính CD của (O) . Chứng minh $BD \parallel AO$



Lời giải

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $AB = AC$

$\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC

Lại có: $OB = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC

Vậy AO là đường trung trực của đoạn BC

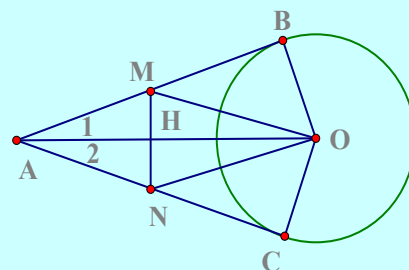
b) Ta có $AO \perp BC; DB \perp BC \Rightarrow BD \parallel AO$ (đpcm).

Bài 2:

Từ 1 điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M

a. Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi

b. Điểm A cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O)



Lời giải

a) Ta có : $\begin{cases} ON \parallel AM \\ AN \parallel OM \end{cases} \Rightarrow \diamond AMON$ là hình bình hành

Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \diamond AMON$ là hình thoi $\Rightarrow MN \perp OA; HA = HO$

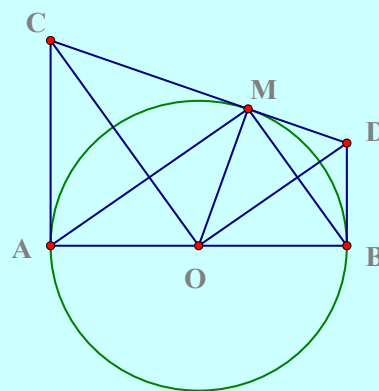
b) Để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) thì $OH = R$ hay

$$OA = 2OH = 2R \Rightarrow OA = 2R$$

Bài 3:

Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB . Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D

a. Chứng minh rằng: $\triangle COD \sim \triangle AMB$



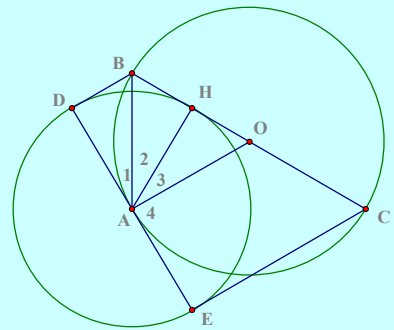
- b. Chứng minh $MC.MD$ không đổi khi M đi động trên nửa đường tròn
- c. Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R

Lời giải

- a. Ta có $\triangle COD \# \triangle AMB (gg)$
- b. Theo câu a ta có: $\triangle COD \# \triangle AMB \Rightarrow MC.MD = OM \Rightarrow đpcm$
- c. Xét $\triangle AOC (\hat{A} = 90^\circ) \Rightarrow OC^2 = OA^2 + AC^2 (pytago)$
 $\Rightarrow AC = R\sqrt{3}(cm)$
- Ta lại có: $AC.BD = MC.MD = R^2 \Rightarrow BD = \frac{R\sqrt{3}}{3}(cm)$.

Bài 4:

- Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ (A, AH) , kẻ các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn (A) (D, E là các tiếp điểm khác H)
- a. Chứng minh rằng: D, A, E thẳng hàng
- b. DE là tiếp tuyến của đường tròn với đường kính BC



Lời giải

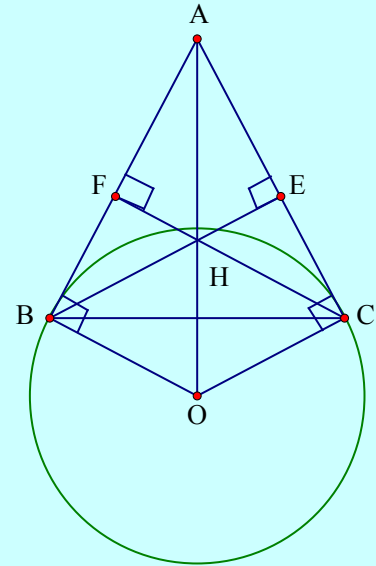
- a. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:
 $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = 3\widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng.
- b. Gọi O là trung điểm của BC
 $\diamond DBEC$ là hình thang ($DB, CE \perp ED$)
 $\Rightarrow OA$ là đường trung bình của hình thang $DBEC \Rightarrow OA \parallel DB \parallel EC \Rightarrow OA \perp DE$
 Hay DE là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O; \frac{BC}{2}\right)$

Bài 5:

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ

$BE \perp AC; CF \perp AB$ ($E \in AC, F \in AB$), $BE \cap CF = H$.

- Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi
- Chứng minh ba điểm A, O, H thẳng hàng
- Xác định vị trí điểm A để H nằm trên (O)



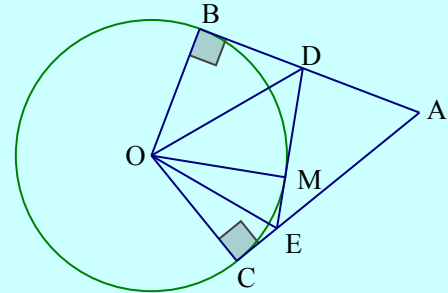
Lời giải

- Ta có A, H, O cùng nằm trên đường vuông góc với BC nên thẳng hàng nhau
- Để $H \in (O)$ thì $OH = OC \Rightarrow \widehat{CAO} = 60^\circ$

Bài 6:

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) , cắt các tiếp tuyến AB, AC lần lượt tại D và E . Chứng minh rằng:

- Chu vi $\triangle ADE = 2AB$
- $\widehat{BOC} = 2\widehat{DOE}$



Lời giải

- Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DB = DM; ME = CE; AB = AC$
Do đó $CV(\triangle ADE) = AD + DE + AE = AD + DM + ME + AE = AD + DB + CE + AE = AB + AC = 2AB$
- Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OD, OE lần lượt là các tia phân giác của các

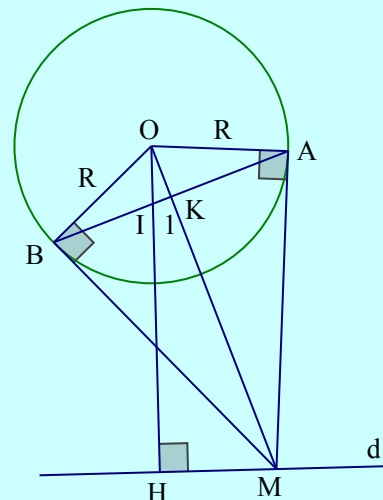
góc BOM, MOC

$$\text{Ta có: } \widehat{DOM} = \frac{1}{2} \widehat{BOM}; \widehat{MOE} = \frac{1}{2} \widehat{MOC} \Rightarrow \widehat{DOE} = \widehat{DOM} + \widehat{MOE} = \frac{1}{2} (\widehat{BOM} + \widehat{MOC}) = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{DOE}$$

Bài 7:

Cho $(O; R)$ và M là một điểm di động trên đường thẳng d cố định nằm ngoài (O) . Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của (O) trên d , dây cung AB cắt OH, OM lần lượt tại I, K . Chứng minh



a) $OI.OH = OK.OM = R^2$

b) AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên d

Lời giải

a) Xét $\triangle OIK$ và $\triangle OMH$ có:

$$\widehat{O_1}: \text{chung}; \widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ \Rightarrow \triangle OIK \sim \triangle OMH (gg) \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Leftrightarrow OI.OH = OM.OK$$

Mà $\triangle OAM$ vuông tại A , nên theo hệ thức lượng ta có: $OA^2 = OK.OM \Rightarrow OI.OH = OK.OM = R^2$

b) Ta có (O) cố định và đường thẳng d cố định $\Rightarrow$ điểm H cố định

Ta lại có $OI = \frac{R^2}{OH} \Rightarrow I$ cố định, nên AB qua I cố định.

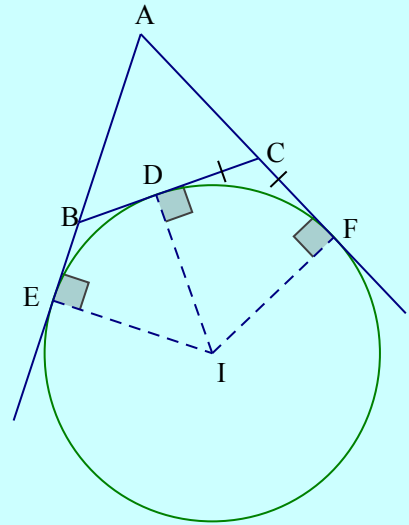
Bài 8:

Cho $\triangle ABC$, đường tròn tâm I bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB, AC theo thứ tự tại E, F . Cho $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF = \frac{a+b+c}{2}$

b) $BE = \frac{a+b-c}{2}$

c) $CF = \frac{c+a-b}{2}$



Lời giải

Gọi D là tiếp tuyến của (I) với cạnh BC

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì: $BD = BE, CD = CF, AE = AF$

Do $AE = AB + BE = c + BD$ (1); $AF = AC + CF = b + CD$ (2)

Cộng (1) với (2) theo vế ta được: $2AE = 2AF = b + c + BD + CD = a + b + c \Rightarrow AE = AF = \frac{a+b+c}{2}$

b) Theo câu a) ta có: $BD + c = BE + c = AE = \frac{a+b+c}{2}; CD + b = CF + b = \frac{a+b+c}{2}$

$$\Rightarrow BE = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}; CF = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2}$$

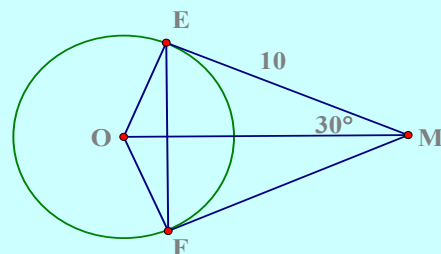
Dạng 2: Chứng minh tiếp tuyến, tính độ dài, tính số đo góc

Cách giải: Ta sử dụng các kiến thức sau

- Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau
- Khái niệm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp
- Hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông

Bài 1:

Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M ở ngoài (O) , vẽ hai tiếp tuyến ME, MF (E, F là các tiếp điểm) sao cho $\widehat{EMO} = 30^\circ$. Biết chu vi tam giác MEF là 30cm



- a. Tính độ dài dây EF
- b. Tính diện tích $\triangle MEF$

Lời giải

a. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

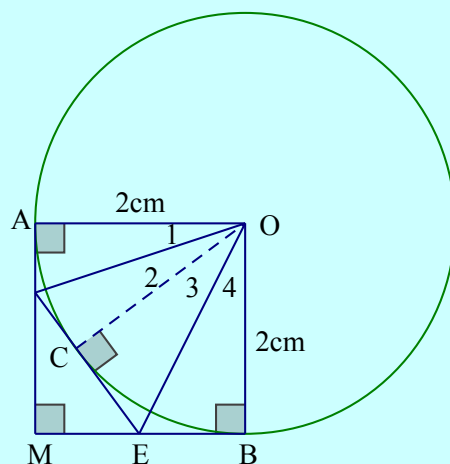
$$\widehat{OME} = \widehat{OMF} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{EMF} = 60^\circ \Rightarrow \triangle MEF \text{ đều} \Rightarrow EF = 10\text{cm}$$

b. Xét $\triangle MEI$ ($\hat{I} = 90^\circ$) $\Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{MI}{ME} \Rightarrow MI = \cos 30^\circ \cdot ME = 8,6\text{cm} \Rightarrow S_{MEF} = \frac{1}{2} \cdot MI \cdot EF = 25\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

Bài 2:

Cho đường tròn $(O; 2\text{cm})$ các tiếp tuyến MA, MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A, B là các tiếp điểm)

- a. Tứ giác $MBOA$ là hình gì? Vì sao
- b. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AB . Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB tại D và E . Tính chu vi tam giác MDE



- c. Tính $\widehat{DOE}$

Lời giải

a. Xét hình chữ nhật $AMBO$ có: $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow \diamond AMBO$ là hình vuông .

b. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $\begin{cases} DA = DC \\ EB = EC \end{cases}$

Chu vi $\Delta = MD + ME + ED = MD + ME + EB + DA = 2MA = 4cm$

c. $\widehat{DOE} = \widehat{DOC} + \widehat{COE} = 2\widehat{BOC} = 45^\circ$

Bài 3:

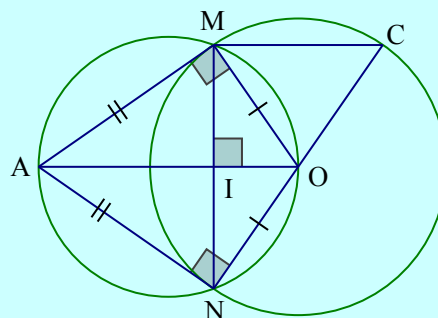
Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) .

Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm)

a) Chứng minh rằng: $OA \perp MN$

b) Vẽ đường kính NOC . Chứng minh rằng $MC \parallel AO$

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết $OM = 3cm, OA = 5cm$



Lời giải

a) Vì $AM = AN, OM = ON$ (1) $\Rightarrow OA$ là trung trực của $MN \Rightarrow OA \perp MN; MI = IN = \frac{MN}{2}$ (2) (I là giao điểm của OA với MN)

b) Từ (1)(2) $\Rightarrow IO$ là đường trung bình của tam giác $MNC \Rightarrow IO \parallel MC; MC \parallel AO$

c) Vì AM là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AM \perp MO$ hay ΔAMO vuông tại M có cạnh huyền $AO = 5cm$ thu được: $OM^2 = OI.OA \Leftrightarrow 3^2 = OI.5 \Leftrightarrow OI = 1,8(cm) \Rightarrow AI = 5 - 1,8 = 3,2(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh ta có: $AM^2 = 3,2.5 = 4^2 \Leftrightarrow AM = 4(cm) (AM > 0)$

Áp dụng hệ thức về đường cao, ta có: $MI^2 = 3,2.1,8 = 2,4^2 \Leftrightarrow MI = 2,4(cm) (MI > 0)$

Vậy $AM = AN = 4cm, MN = 4,8cm$.

Bài 4:

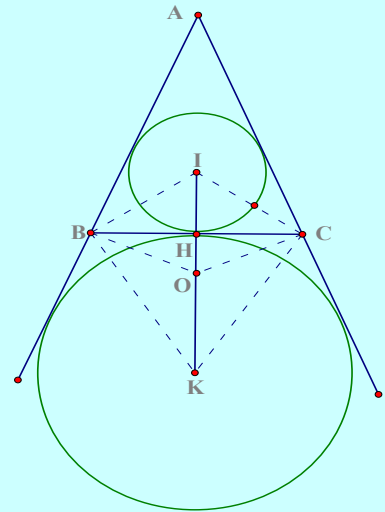
Cho tam giác ABC cân tại A , điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp $\hat{A}$ của tam giác. Gọi O là trung điểm của IK

a. Chứng minh 4 điểm B, I, C, K cùng thuộc 1 đường tròn

b. Gọi (O) là đường tròn đi qua 4 điểm B, I, C, K . Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; OK)$

c. Tính bán kính của (O) biết

$$AB = AC = 20cm, BC = 24cm$$



Lời giải

a. Ta có BI, BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\Rightarrow BI \perp BK = B$

Tương tự CI và CK là hai tia phân giác hai góc kề bù $\Rightarrow CI \perp CK = C$

$\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{ICK} = 90^\circ \Rightarrow I, B, K, C$ cùng nằm trên một đường tròn.

b. Ta có: $\widehat{ACO} = \widehat{ACI} + \widehat{ICB} + \widehat{BCO}$; $\widehat{ICK} = 90^\circ = \widehat{ICB} + \widehat{BCO} + \widehat{OCK}$

Ta đi chứng minh:

$$\widehat{OCK} = \widehat{ACI} \Leftrightarrow \widehat{OKC} = \widehat{ICB}$$

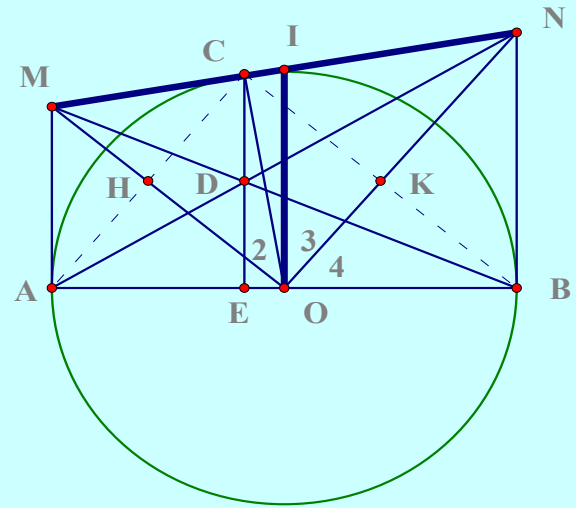
Lại có: $\widehat{OKC} + \widehat{OIC} = 90^\circ$ ($\widehat{ICK} = 90^\circ$); $\widehat{ICB} + \widehat{OIC} = 90^\circ$ ($\widehat{IHC} = 90^\circ$) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ICK} = 90^\circ \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến

c. Ta có AK cắt BC tại $H \Rightarrow HC = 12cm, AH = 16cm$

$$\triangle ACH \sim \triangle COH (gg) \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CO} \Rightarrow CO = 15cm$$

Bài 5:

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB .
Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By ở cùng một nửa mặt phẳng bờ AB).
Gọi M là điểm bất kỳ thuộc tia Ax , qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C cắt By tại N



- Tính $\widehat{MON}$
- Chứng minh rằng: $MN = AM + BN$
- Chứng minh tích $AM.BN$ luôn không đổi khi M di chuyển
- Gọi D là giao điểm của AN và BM , E là giao điểm của CD và AB . Chứng minh rằng: $CD \perp AB, CD = ED$
- Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MON$
- Gọi H là giao điểm của AC với MO , K là giao điểm của CD với NO . Tứ giác $CKOH$ là hình gì, tính HK ?
- Chứng minh A, M, C, O cùng nằm trên 1 đường tròn, chỉ ra bán kính đường tròn đó
- Tìm vị trí của điểm M sao cho S_{ACDB} nhỏ nhất

Lời giải

- Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$
- Ta có: $MN = MC + CN = MA + BN$ (đpcm)
- Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc vuông trong tam giác vuông ta được $AM.BN = MC.CN = OC^2 = R^2$

d. $AM \parallel BN (\perp AB) \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{AD}{DN}$ (hệ quả Talet) $\Rightarrow \frac{MC}{NC} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow CD \parallel NM$ (1) (Talet đảo).

Lại có: $AM \perp AB$ (2) $\Rightarrow CD \perp AB$

$$+) \begin{cases} \Delta MNA \Rightarrow \frac{CD}{AM} = \frac{ND}{AD} \\ \Delta ANB \Rightarrow \frac{ND}{DA} = \frac{BE}{AE} \Rightarrow CD = ED \text{ (đpcm)} \\ \Delta ABM \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{ED}{AM} \end{cases}$$

e. Gọi I là trung điểm của MN , ta có $OI \perp AB \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến.

f. Ta có $\diamond CKOH$ là hình chữ nhật và $HK = OC = R$

g. Ta có CA, CM là hai tiếp tuyến của (O) $(O) \Rightarrow A, C, M, O \in \left(\frac{CO}{2}\right)$

h. $S_{ACDB} = \frac{(AC + BD) \cdot AB}{2} = \frac{AD \cdot AB}{2} \Rightarrow S_{ACDB}$ nhỏ nhất khi CD có độ dài nhỏ nhất hay M nằm chính giữa cung AB .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ ngoại tiếp đường tròn tâm O . Khẳng định nào sau đây sai

- A) Chu vi hình thang $ABCD$ bằng hai lần tổng hai cạnh đáy
- B) $\triangle AOD$ là tam giác đều
- C) $OB = \frac{BC}{2}$
- D) Cả A, B, C đều đúng

Chọn đáp án D

Giải thích:

Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự M, N, P, Q

$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

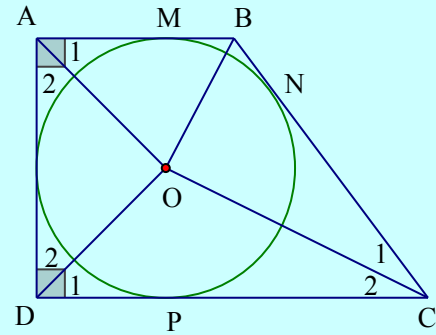
Do $\widehat{B} = 2\widehat{C} (gt) \Rightarrow \widehat{B} = 120^\circ; \widehat{C} = 60^\circ$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 45^\circ (\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ)$

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 60^\circ; \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 30^\circ$

$AM = AQ; BM = BN; CN = CP; DP = DQ$



A) Chu vi hình thang $ABCD$ là:

$$AB + BC + CD + DA = AM + MB + BN + NC + CP + PD + DQ + AQ = 2(AB + CD)$$

Vậy chu vi hình thang là: $P_{ABCD} = 2(AB + CD)$

B) Ta có: $\widehat{A}_2 = \widehat{D}_2 = 45^\circ \Rightarrow \triangle AOD$ vuông cân tại O

C) Ta có: $\widehat{B}_2 = 60^\circ; \widehat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow \triangle BOC$ vuông cân tại O hay $\triangle BOC$ vuông cân tại O hay $\triangle BOC$ bằng nửa tam giác đều cạnh BC

Ta thấy OB đối diện với $\widehat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow OB = \frac{1}{2}BC$

Cách khác: Tam giác BOC vuông tại O , ta có: $\sin \widehat{C_1} = \frac{OB}{BC} \Rightarrow OB = \sin 30^\circ \cdot BC = \frac{1}{2} BC$

Câu 2: Ba đường tròn tiếp xúc với nhau từng đôi một và tiếp xúc với các cạnh của tam giác như hình bên. Nếu mỗi đường tròn có bán kính là 3, thì chu vi của tam giác sẽ là?

A) $36 + 9\sqrt{2}$

B) $36 + 6\sqrt{2}$

C) $18 + 9\sqrt{3}$

D) $18 + 18\sqrt{3}$

Chọn đáp án D

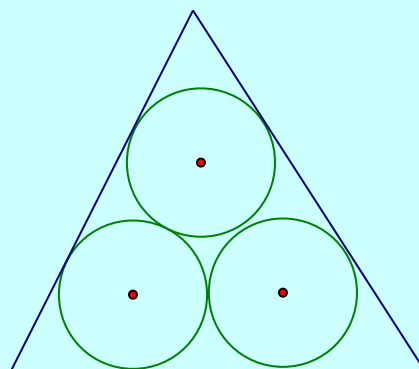
Giải thích:

Từ tâm P và Q vẽ PQ và CQ vuông góc với cạnh AD của tam giác

Các tam giác APB và DQC là nửa tam giác đều với $PB = QC = 3$

$$\Rightarrow AB = CD = 3\sqrt{3}; BC = PQ = 6 \Rightarrow AD = 6 + 6\sqrt{3}$$

Vậy chu vi tam giác là: $18 + 18\sqrt{3}$



Câu 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi R, r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Có được:

A) $AB + AC = R + r$

B) $AB + AC = 2(R + r)$

C) $AB + AC = \frac{1}{2}(R + r)$

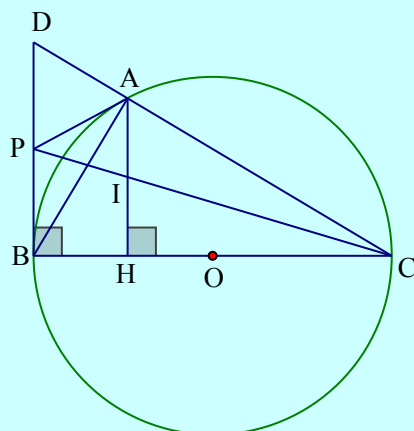
D) $AB + AC = 2R + r$

Chọn đáp án C

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA, PB với A và B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC . Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH



Lời giải

CA cắt BP tại D ; $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (A thuộc đường tròn đường kính BC)

$PA = PB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{PBA} = \widehat{PAB}$

$\triangle ABD$ có $\widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 90^\circ$; $\widehat{BAP} + \widehat{PAD} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, do đó $PB = PD$ (1)

$DB \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow DB \parallel AH$

$\triangle PBC$ có $IH \parallel PB \Rightarrow \frac{IH}{PB} = \frac{IC}{PC}$ (2); $\triangle PDC$ có $AI \parallel PD \Rightarrow \frac{IA}{PD} = \frac{IC}{PC}$ (3)

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow IH = IA \Rightarrow \text{đpcm.}$

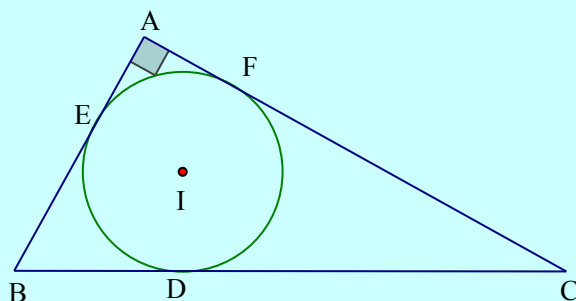
Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ($AB \leq AC$).

Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Chứng minh rằng:

a) $BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$

b) $S_{ABC} = BD \cdot DC$



Lời giải

a) Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, AC

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AE = AF; BE = BD; CD = CF$

Do đó: $2BD = BD + BE = BC - CD + AB - AE = BC + AB - (CD + AE) = BC + AB - (CF + AF)$

$$= BC + AB - AC \Rightarrow BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$$

b) Tương tự câu a) ta có: $DC = \frac{BC + AC - AB}{2}$

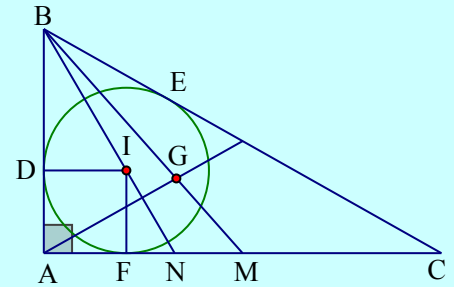
mà $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ($\triangle ABC$ vuông tại A), do đó: $BD \cdot DC = \frac{(BC + AB - AC)(BC + AC - AB)}{4}$

$$\frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{4} = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC}{4} = \frac{AB \cdot AC}{2} = S_{ABC}.$$

Bài 3:

$\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG



Lời giải

Gọi D, E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB

$\triangle ABC$ vuông tại A , theo định lý Pytago ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15(\text{cm})$

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AD = AF$; $BD = BE$; $CE = CF$

Do đó $2AD + 2BE + 2CE = AB + BC + CA = 9 + 12 + 15 = 36$

$$\Leftrightarrow 2AD + 2BC = 36 \Leftrightarrow AD = 3(\text{cm}) \Rightarrow BD = 6(\text{cm}); DI = 3(\text{cm})$$

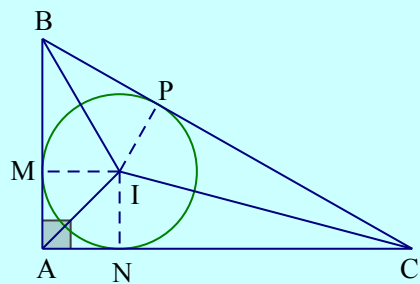
$$\text{Gọi } N = BI \cap AC, \text{ ta có: } \frac{BI}{BN} = \frac{BD}{BA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{BG}{BM} \Rightarrow \begin{cases} IG \parallel NM \\ IG = \frac{2}{3} NM \end{cases}$$

Ta có $\diamond IDAF$ là hình vuông, có: $\frac{BD}{BA} = \frac{DI}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow AN = 4,5(\text{cm})$

Mà M là trung điểm của AC nên: $NM = AM - AN = 6 - 4,5 = 1,5(\text{cm}) \Rightarrow IG = 1(\text{cm})$

Bài 4:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 6\text{cm}$ và $AC = 8\text{cm}$ ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Tính r



Lời giải

Đường tròn $(I; r)$ tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự M, N, P

Ta có: $S_{AIB} = \frac{1}{2} IM \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot AB$ (1); $S_{AIC} = \frac{1}{2} IN \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC$ (2); $S_{BIC} = \frac{1}{2} r \cdot BC$ (3)

Cộng (1)(2)(3) về theo về, ta được: $\frac{S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} r \cdot (AB + AC + BC)$

Mà $\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 (\text{cm}^2) \\ BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 (\text{cm}) \end{cases}$

Nên ta có: $24 = \frac{1}{2} r (6 + 8 + 10) \Leftrightarrow r = 2 (\text{cm})$.

Bài 5:

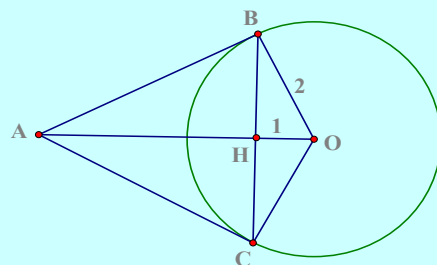
Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm

a. Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC

b. Gọi H là giao điểm của AO và BC . Biết $OB = 2\text{cm}, OH = 1\text{cm}$, tính

- Chu vi và diện tích tam giác ABC

- Diện tích tứ giác $ABOC$



Lời giải

b. Áp dụng định lý pytago ta tính được: $BH = \sqrt{3} (\text{cm})$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta được:

$$AB = AC = 2\sqrt{3}(cm) \Rightarrow P_{ABC} = 6\sqrt{3}cm; S_{ABC} = 3\sqrt{3}(cm^2)$$

$$+) \text{ Ta có: } S_{ABOC} = S_{ABC} + S_{BOC} \Rightarrow S_{ABOC} = 4\sqrt{3}(cm^2)$$

Cách khác: Áp dụng hệ thức lượng về cạnh góc vuông và đường cao trong tam giác vuông,

$$\text{ta có: } AB = AC = 2\sqrt{3}(cm) \Rightarrow P_{ABC} = 6\sqrt{3}cm; S_{ABC} = 3\sqrt{3}(cm^2)$$

$$+) \text{ Ta có: } S_{ABOC} = S_{ABC} + S_{BOC} \Rightarrow S_{ABOC} = 4\sqrt{3}(cm^2)$$

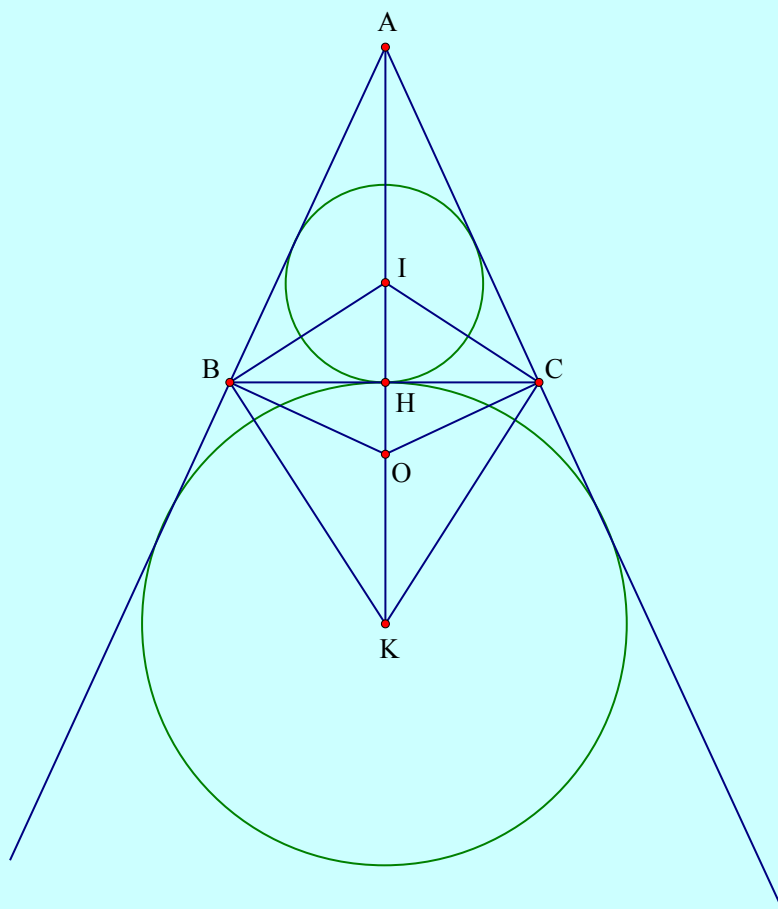
Bài 6:

Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, I, K cùng thuộc đường tròn $(O; OI)$ với O là trung điểm của đoạn thẳng IK

b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của (O)

c) Biết $AB = AC = 20cm; BC = 24cm$ tính bán kính của (O)



Lời giải

a) Sử dụng tính chất phân giác trong và phân giác ngoài tại 1 điểm ta có:

$$\widehat{IBK} = \widehat{ICK} = 90^\circ \Rightarrow B, C, I, K \text{ cùng thuộc 1 đường tròn tâm } O, \text{ đường kính } IK$$

b) Chứng minh: $\widehat{ICA} = \widehat{OCK}$

Từ đó chứng minh được: $\widehat{OCA} = 90^\circ$

Vậy AC là tiếp tuyến của (O)

c) Áp dụng pytago vào tam giác vuông $HAC \Rightarrow AH = 16cm$

- Xét tam giác vuông $AOC \Rightarrow OH = 9cm; OC = 15cm$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

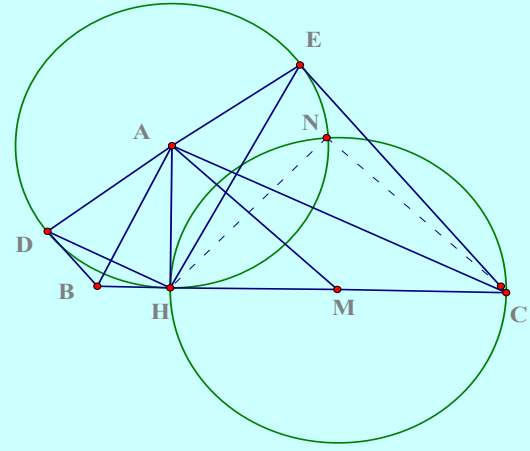
Bài 7:

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn $(A; AH)$. Từ B, C kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) trong đó D, E là các tiếp điểm

a. Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng

b. Chứng minh: $BD.CE = \frac{DE^2}{4}$

c. Gọi M là trung điểm của CH . Đường tròn tâm M đường kính CH cắt (A) tại N với N khác H . Chứng minh: $CN \parallel AM$



Lời giải

a. Ta có: AB là phân giác của $\widehat{DAH}$, AC là phân giác của $\widehat{HAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = 180^\circ$

b. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau và hệ thức lượng về đường cao và hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền tròn tam giác vuông BAC

$$\Rightarrow BD.CE = BH.CH = AH^2 = \frac{DE^2}{4}$$

c. Ta có $\triangle HNC$ nội tiếp đường tròn (M) đường kính $HC \Rightarrow HN \perp CN$

Chứng minh AN là tiếp tuyến của (M) , do đó $AM \perp HN \Rightarrow AM \parallel NC$

Bài 8:

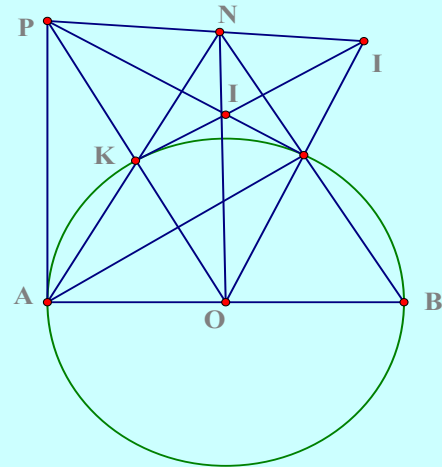
Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax , lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O)

a. Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn

b. Chứng minh: $BM \parallel OP$

c. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N . Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành

d. Giả sử AN cắt OP tại K ; PM cắt ON tại I ; PN cắt OM tại J . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.



Lời giải

a. A, P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính PO

b. Ta có: $OP \perp AM; BM \perp AM \Rightarrow BM \parallel OP$

c. $\triangle AOP = \triangle OBN \Rightarrow OP = BN$, ta lại có $BN \parallel OP$ nên $OPNB$ là hình bình hành

d. Ta có: $ON \perp PJ; PM \perp OJ$, mà $PM \cap ON \equiv I \Rightarrow I$

là trực tâm $\triangle POJ \Rightarrow IJ \perp OP$ (1)

Chứng minh được $PAON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow K$ là trung điểm OP

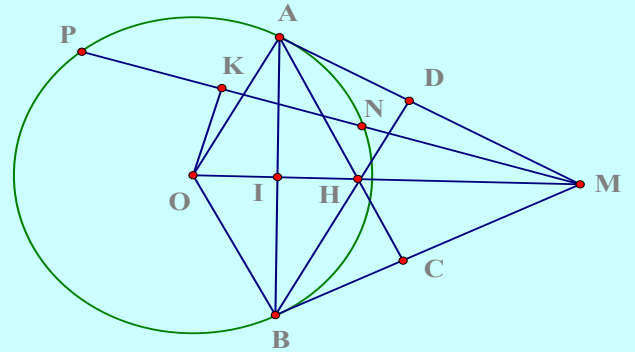
Lại có: $\widehat{APO} = \widehat{OPI} = \widehat{IOP} \Rightarrow \triangle IPO$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp OP$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài 9:

Cho đường tròn $(O; R)$. Từ A trên (O) , kẻ tiếp tuyến d với (O) . Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A), kẻ cát tuyến MNP , gọi K là trung điểm của NP , kẻ tiếp tuyến MP , kẻ $AC \perp MB, BD \perp AM$. Gọi H là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của OM và AB . Chứng minh:

- Bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn
- Năm điểm O, K, A, M, B cùng thuộc 1 đường tròn
- $OI \cdot OM = R^2; OI \cdot IM = IA^2$
- $OAHB$ là hình thoi
- O, H, M thẳng hàng.



Lời giải

- Ta có: $\widehat{OKM} = 90^\circ \Rightarrow A, M, B, O, K \in \left(\frac{OM}{2}\right)$
- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM (hoặc chứng minh tam giác đồng dạng)
- Chứng minh $OAHB$ là hình bình hành và chú ý: $A, B \in (O; R) \Rightarrow OAHB$ là hình thoi
- Chứng minh: $OH \perp AB, OM \perp AB \Rightarrow O, H, M$ thẳng hàng.