

SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN, TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa đường tròn

+) Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng R không đổi

+) Đường tròn tâm O bán kính R được kí hiệu là: $(O; R)$ hoặc (O) khi không chú ý đến bán kính. Vị trí tương đối của một điểm đối với đường tròn

2. Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn $(O; R)$

Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn (O)	$OM = R$
M nằm trong đường tròn (O)	$OM < R$
M nằm ngoài đường tròn (O)	$OM > R$

3. Cách xác định 1 đường tròn

*) Định lí:

- Qua 3 điểm không thẳng hàng bao giờ cũng chỉ vẽ được 1 đường tròn và chỉ một đường tròn mà thôi
- Biết tâm và bán kính
- Biết 1 đoạn thẳng là đường kính
- Đặc biệt: Nếu tam giác ABC vuông thì tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của cạnh huyền

*) Chú ý:

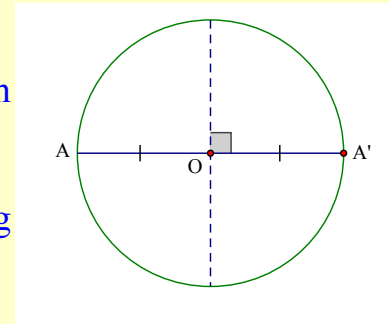
- Qua hai điểm cho sẵn, ta dựng được vô số đường tròn, tâm của các đường tròn này phụ thuộc vào đường thẳng trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đã cho
- Không có đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng
- Nếu một tam giác nội tiếp đường tròn có một cạnh là đường kính của đường tròn thì tam giác đó là tam giác vuông

4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác

- Đường tròn đi qua 3 đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của 3 đường trung trực.

5. Tính chất đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng: Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó
- Đường tròn là hình có trục đối xứng: Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.



B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh các điểm cho trước cùng nằm trên một đường tròn

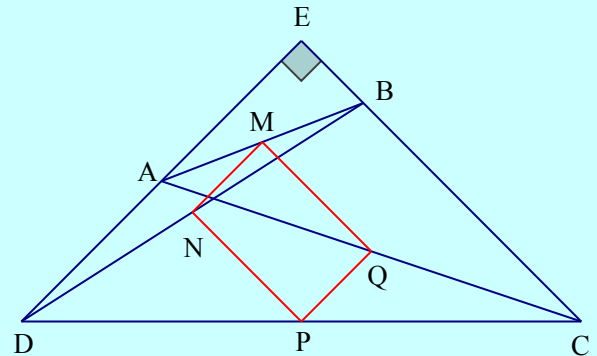
Cách giải:

Cách 1: Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều 1 điểm cho trước nào đó

Cách 2: Sử dụng kết quả: Nếu $\widehat{ABC} = 90^\circ$ thì B thuộc đường tròn đường kính AC

Bài 1:

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên 1 đường tròn



Lời giải

Xét tứ giác $MNPQ$, ta có: $\begin{cases} MQ \parallel NP \\ MN \parallel PQ \end{cases} \Rightarrow \diamond MNPQ$ là hình bình hành (dnhb)

Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E

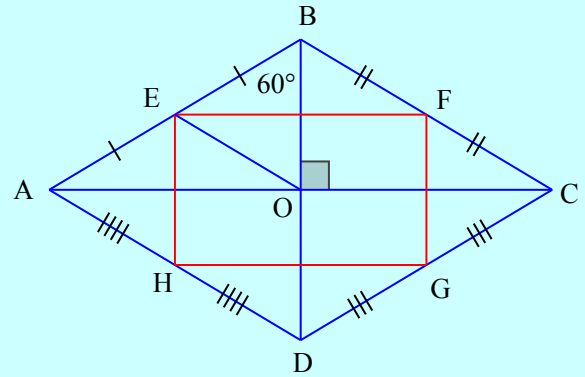
Ta có: $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} = 90^\circ$

Lại có: $\begin{cases} MN \parallel ED \\ MQ \parallel EC \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow \diamond MNPQ$ là hình chữ nhật (dnhb) $\Rightarrow M, N, P, Q$ nằm trên 1 đường tròn với tâm là giao điểm của 2 đường chéo của hình chữ nhật, bán kính bằng nửa

đường chéo.

Bài 2:

Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên 1 đường tròn



Lời giải

Xét tứ giác $EFGH$, có: $\begin{cases} EF \parallel GH \\ EH \parallel FG \end{cases} \Rightarrow \diamond EFGH$ là hình bình hành (dnhb)

Lại có: $\widehat{HEF} = 90^\circ \Rightarrow \diamond EFGH$ là hình chữ nhật (dnhb)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

$\Rightarrow OE = OF = OG = OH$ (1)

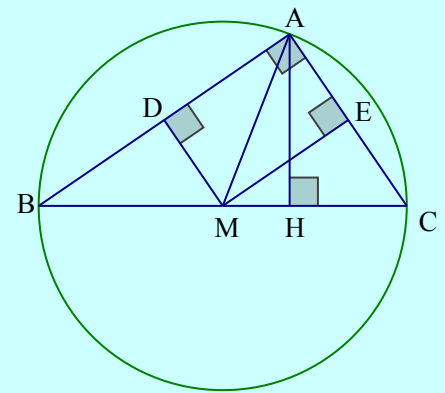
Xét tam giác OBE có: $\begin{cases} OE = BE \\ \widehat{B} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle OBE$ đều $\Rightarrow OE = OB = OD$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow OE = OB = OF = OG = OH = OD \Rightarrow E, B, F, G, D, H \in (O)$

Bài 3:

Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$), đường cao AH .

Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn



Lời giải

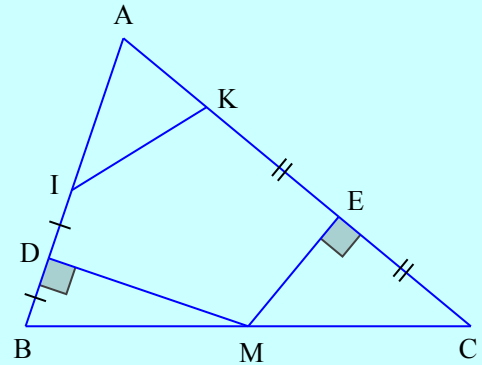
Vì ba tam giác ADM, AEM, AHM có chung cạnh huyền AM nên ba đỉnh góc vuông D, E, H

Nằm trên đường tròn đường kính AM có tâm là trung điểm của AM

Vậy 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn

Bài 4:

Cho tam giác ABC và điểm M là trung điểm của BC . Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB, AC . Trên tia đối của tia DB và EC lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI , E là trung điểm của CK . Chứng minh rằng B, I, C, K cùng nằm trên 1 đường tròn.



Lời giải

Cách 1: sử dụng định nghĩa

Ta có: M là trung điểm $BC \Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC$ (1)

MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB$ (2)

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MC = MK$ (3)

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow MB = MC = MI = MK = \frac{1}{2}BC$ (đpcm)

Cách 2:

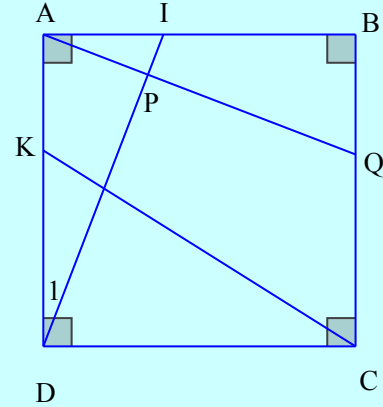
Ta có: MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \triangle BIC$ vuông tại $I \Rightarrow I \in (O; BC)$

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MK = MC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle BKC$ vuông tại $K \Rightarrow K \in (O; BC)$

Vậy: $B, I, C, K \in (O; BC)$.

Bài 5:

Gọi I, K theo thứ tự là các điểm nằm trên AB, AD của hình vuông $ABCD$ sao cho $AI = AK$. Đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DI ở P và cắt BC ở Q . Chứng minh rằng C, D, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.



Lời giải

Ta có $\triangle ADI = \triangle BAQ$ (g.c.g) $\Rightarrow AI = BQ \Rightarrow \begin{cases} KD = CQ \\ KD \parallel CQ \end{cases} \Rightarrow \diamond KDCQ$ là hình bình hành, mà $\hat{C} = 60^\circ$

$\Rightarrow \diamond CDKQ$ là hình chữ nhật.

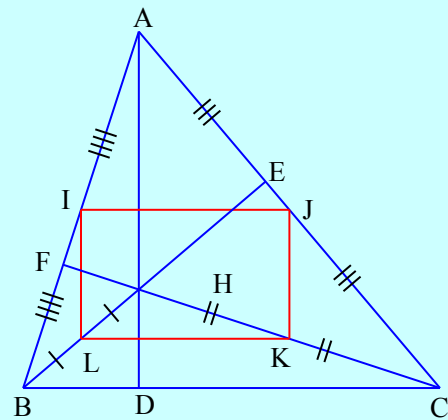
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo CK và $DQ \Rightarrow OC = OD = OK = OQ$

$\triangle PDQ$ vuông cân tại $P \Rightarrow PQ = OD = OC$

Vậy 5 điểm C, D, K, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Bài 6:

Cho tam giác ABC , ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AC, HC, HB . Chứng minh rằng 5 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn.



Lời giải

Ta có tứ giác $IJKL$ là hình bình hành (dnhb)

Mà $\widehat{ILK} = 90^\circ \Rightarrow \diamond IJKL$ là hình chữ nhật có hai đường chéo là LJ và IK

Xét tam giác vuông ELJ vuông tại $E \Rightarrow OE = \frac{1}{2} LJ = OJ$

Xét tam giác vuông FLK vuông tại $I \Rightarrow OF = \frac{1}{2}IK = OJ$

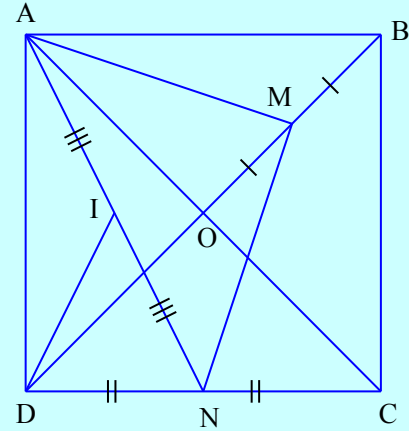
Vậy 6 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn đường kính là đường chéo của hình chữ nhật.

Bài 7:

Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB, CD

a. Chứng minh rằng A, M, N, D thuộc 1 đường tròn

b. So sánh AN và DM



Lời giải

a. Kẻ NH vuông góc với BD tại H

Xét tam giác OCD , có: $\begin{cases} DN = NC \\ NH \parallel OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HO = HD = \frac{1}{2}CD \\ MO = MB = \frac{1}{2}OB \end{cases} \Rightarrow MH = \frac{1}{2}BD = OA$

Ta có: $\triangle OAM = \triangle HNM (cgc) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{M_1} \\ \widehat{A_1} + \widehat{M_2} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AMN} = 90^\circ$

+) Gọi I là trung điểm của $AN \Rightarrow IA = IN = \frac{1}{2}AN(1)$

Xét $\triangle ADN (\widehat{D} = 90^\circ) \Rightarrow ID = \frac{1}{2}AN(2); \triangle AMN (\widehat{M} = 90^\circ) \Rightarrow MI = \frac{1}{2}AN(3)$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow IA = IN = IM = ID \Rightarrow A, M, N, D \in (O)$

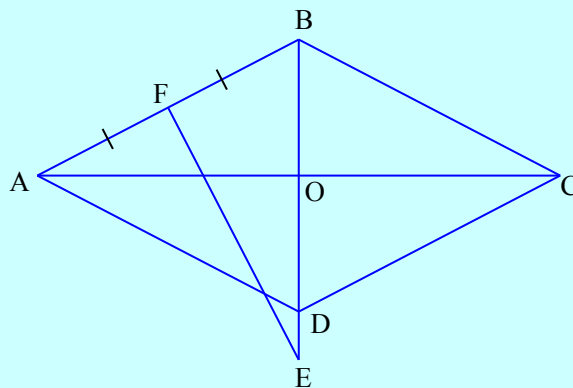
b. Xét đường tròn $(I; IA)$ có AN là đường kính, DM là dây không đi qua tâm $\Rightarrow AN > DM$

Dạng 2: Xác định tâm đường tròn đi qua 3 điểm

Cách giải: Ta có tâm của đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng là giao điểm của các đường trung trực

Bài 1:

Cho hình thoi $ABCD$, đường trung trực của cạnh AB cắt BD tại E và AC tại F . Chứng minh rằng E và F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và ABD .



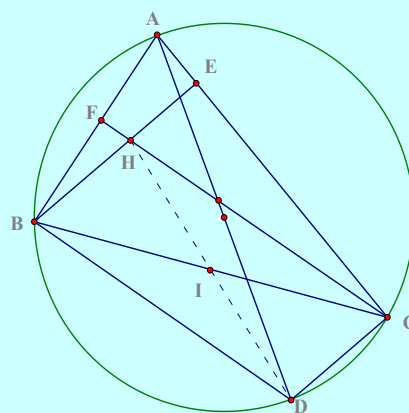
Lời giải

- +) Xét $\triangle ABC$, có đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại $E \Rightarrow E$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$
- +) Xét $\triangle ABD$, có đường trung trực của AB và BD cắt nhau tại $F \Rightarrow F$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính AD , gọi H là giao điểm của hai đường cao BE và CF của $\triangle ABC$.

- a. Chứng minh rằng tứ giác $BHCD$ là hình bình hành
- b. Gọi I là trung điểm của BC , chứng minh rằng: $AH = 2OI$
- c. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của $\triangle AHD$



Lời giải

a) Ta có $\triangle ABD$ nội tiếp đường tròn $(O; AD)$; $\triangle ADC$ nội tiếp đường tròn $(O; AD)$

$$\Rightarrow \triangle ABD; \triangle ADC \text{ vuông tại } B \text{ và } C \Rightarrow \begin{cases} BH // CD \\ BD // CH \end{cases}$$

$\Rightarrow \diamond BHCD$ nội tiếp (đpcm)

b) Ta có I là trung điểm $BC \Rightarrow I$ là trung điểm $HD \Rightarrow OI = \frac{1}{2} AH \Rightarrow AH = 2OI$

c) Xét $\triangle ABC$, có AI là đường trung tuyến, G là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow G \in AI; AG = \frac{2}{3} AI$

Xét $\triangle AHD$ có AI là đường trung tuyến, $G \in AI; AG = \frac{2}{3} AI \Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle AHD$.

Dạng 3: Xác định vị trí tương đối của một điểm với một đường tròn

Cách giải: Muốn xác định vị trí của điểm M đối với đường tròn $(O; OR)$ ta so sánh khoảng cách OM với bán kính R theo bảng sau

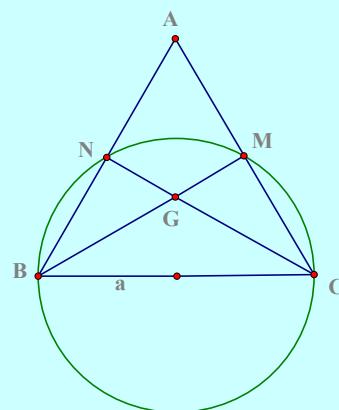
Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn (O)	$OM = R$
M nằm trong đường tròn (O)	$OM < R$
M nằm ngoài đường tròn (O)	$OM > R$

Bài 1:

Cho tam giác đều $\triangle ABC$ cạnh bằng a , các đường cao BM, CN . Gọi O là trung điểm của BC

a. Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc đường tròn (O)

b. Gọi G là giao điểm của BM và CN . Chứng minh điểm G nằm trong, điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC .



Lời giải

a) Ta có: $\widehat{BNC} = 90^\circ \Rightarrow N \in \left(O; \frac{BC}{2}\right); \widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow M \in \left(O; \frac{BC}{2}\right)$

Vậy B, C, M, N cùng thuộc 1 đường tròn $\left(O; \frac{BC}{2}\right)$

b) Ta có $\triangle ABC$ đều có G trực tâm đồng thời là trọng tâm

Xét $\triangle AOB$ ($\widehat{O} = 90^\circ$), $R = ON = \frac{a}{2} \cdot OA = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn (O)

Ta lại có: $OG = \frac{1}{3}OA = \frac{a\sqrt{3}}{6} < R \Rightarrow G$ nằm trong (O).

Bài 2:

Cho đường tròn (O) , đường kính $AD = 2R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R , cung này cắt (O) ở B và C

- a) Tứ giác $OBDC$ là hình gì? Vì sao?
- b) Tính số đo các góc $\widehat{CBD}$, $\widehat{CBO}$, $\widehat{OBA}$.
- c) Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

- a) Tứ giác $OBDC$ là hình thoi (bốn cạnh bằng nhau)
- b) Tính được: $\widehat{CBO} = \widehat{CBD} = \widehat{ABO} = 30^\circ$
- c) Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều

Dạng 4: Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác và số đo các góc liên quan

Cách giải: Ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

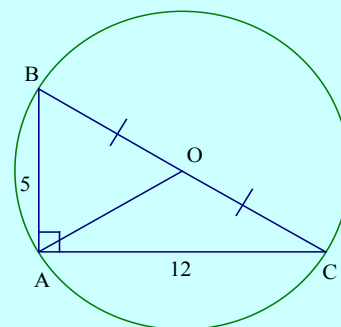
Cách 1. Sử dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông,

Cách 2. Dùng định lý Pytago trong tam giác vuông.

Cách 3. Dùng hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

Bài 1:

Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 5cm, AC = 12cm$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

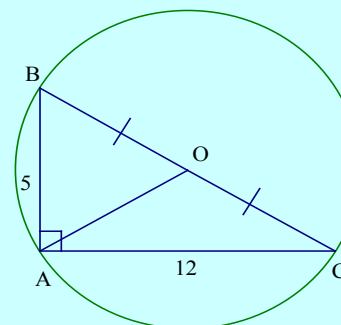


Lời giải

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông ABC , ta có: $BC = 13cm \Rightarrow R = 6,5cm$

Bài 2:

Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 2 cm. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC



Lời giải

Gọi O là giao 3 đường trung trực của $\triangle ABC$. Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Gọi H là giao điểm của AO và BC , ta có: $AH = \sqrt{3}(cm); OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}(cm)$

Bài 3:

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9cm, BC = 12cm$. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Tính

bán kính đường tròn đó.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có: $OA = OB = OC = OD \Rightarrow A, B, C, D \in (O; R = 7,5\text{cm})$

Bài 4:

Cho góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và điểm B nằm trên tia

Ax sao cho $AB = 3\text{cm}$

a) Vẽ đường tròn (O) đi qua A và B sao cho tâm O nằm trên tia Ay

b) Tính bán kính đường tròn (O)

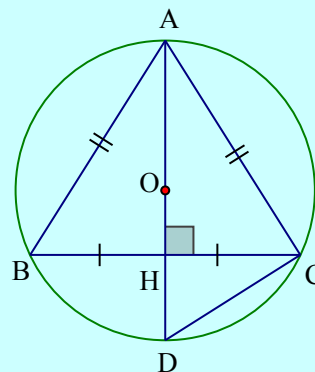
Lời giải

a) Vẽ đường thẳng d là trung trực của AB , d cắt tia Ay tại O suy ra $(O; OA)$ là đường tròn cần vẽ

b) Tính được: $OA = \frac{3\sqrt{2}}{3}\text{cm}$

Bài 5:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $BC = 12\text{cm}$, đường cao $AH = 4(\text{cm})$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, D là giao điểm của đường cao AH và đường tròn (O) . Tam giác ABC cân tại A nên AH là đường cao đồng thời là đường trung trực, đường trung tuyến của cạnh BC nên AD là đường trung trực của cạnh BC

Suy ra AD là đường kính của đường tròn (O) ; $CH = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6(cm)$

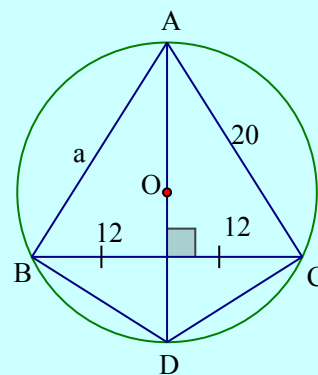
Tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $\triangle ACD$ vuông tại C , ta có:

$$CH^2 = AH.HD \Rightarrow HD = \frac{CH^2}{AH} = \frac{6^2}{4} = 9(cm) \Rightarrow AD = AH + HD = 9 + 4 = 13(cm)$$

$$\Rightarrow R = \frac{AD}{2} = \frac{13}{2} = 6,5(cm).$$

Bài 6:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AH cắt (O) ở D . Biết $BC = 24cm, AC = 20cm$. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O) .



Lời giải

Vì $\triangle ABC$ cân tại A , nên AH là trung trực của BC , do AH đi qua O hay dây AD đi qua tâm O nên AD là đường kính của (O) . Lúc đó $\triangle ACD$ nội tiếp (O) đường kính $BH = HC = 12cm$

Tam giác ACH vuông tại H có cạnh huyền $AC = 20cm$

Áp dụng hệ thức Pytago, ta được:

$$AC^2 = CH^2 + AH^2 \Leftrightarrow 20^2 = 12^2 + AH^2 \Leftrightarrow AH^2 = 16^2 \Leftrightarrow AH = 16(AH > 0)$$

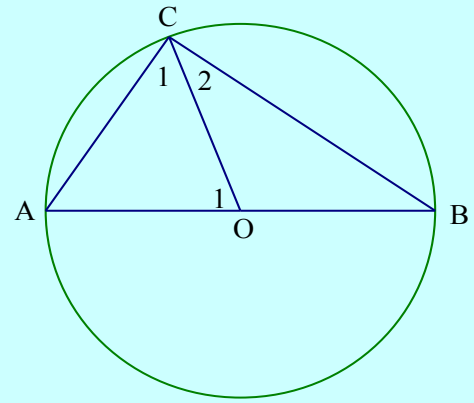
Áp dụng hệ thức về cạnh cho tam giác ACD vuông tại C , ta được:

$$AC^2 = AH.AD \Leftrightarrow 400 = 16.AD \Leftrightarrow AD = \frac{400}{16} = 25(cm)$$

Vậy bán kính đường tròn (O) bằng $12,5(cm)$.

Bài 7:

Cho đường tròn tâm (O) , đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn. Tính các góc của ΔABC



Lời giải

Tam giác OAC có ba cạnh bằng nhau ($AC = OA = OC$) nên là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}_1 = \widehat{O}_1 = 60^\circ$

Ta có: OAC có $OB = OC$ nên cân tại $O \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}_2$

$\widehat{O}_1$ là góc ngoài của $\Delta OBC \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{B} + \widehat{C}_2 = 2\widehat{B} = 2\widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{O}_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ$

Vậy $\widehat{A} = 60^\circ; \widehat{B} = 30^\circ; \widehat{C} = 90^\circ$

Có thể lí giải như sau: ΔCAB có trung tuyến CO bằng nửa cạnh đối xứng AB nên vuông tại C

$\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ$

Vậy ΔABC có $\widehat{C} = 90^\circ; \widehat{A} = 60^\circ; \widehat{B} = 30^\circ$

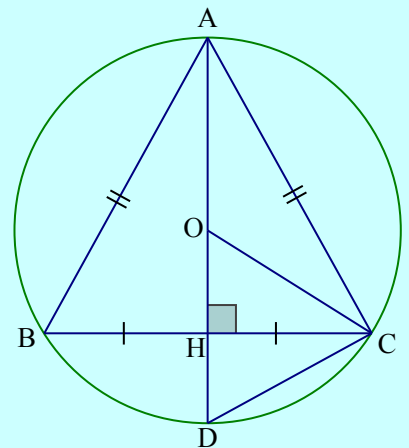
Bài 8:

Cho ΔABC cân tại A , nội tiếp đường tròn tâm (O) . Đường cao AH cắt đường tròn ở D

a) Vì sao AD là đường kính của đường tròn (O)

b) Tính số đo góc $\widehat{ACD}$

c) Cho $BC = 24(cm), AC = 20(cm)$. Tính đường cao AH và bán kính của đường tròn (O)



Lời giải

a) ΔABC cân tại A , nên AH là đường cao đồng thời là đường trung trực của đoạn thẳng BC

Suy ra AD là đường trung trực của đoạn thẳng BC , mà O nằm trên đường trung trực của BC

nên AD đi qua O

Suuy ra AD là đường kính của đường tròn (O)

b) Tam giác ACD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD nên tam giác ACD vuông tại C

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$$

c) Ta có: $CH = BH = \frac{BC}{2} = \frac{24}{2} = 12(cm)$

Xét $\triangle ACH$ vuông tại $H \Rightarrow AH^2 = AC^2 - CH^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \Rightarrow AH = \sqrt{256} = 16(cm)$

Xét $\triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow AC^2 = AH \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AC^2}{AH} = \frac{20^2}{16} = 25(cm)$

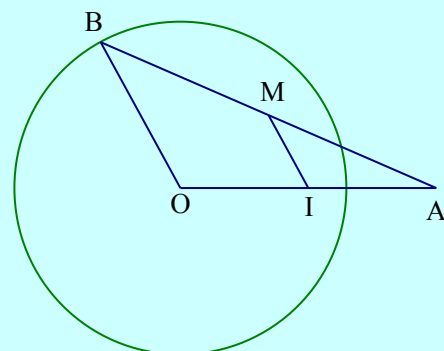
$$\Rightarrow OC = \frac{1}{2}AD = \frac{25}{2} = 12,5(cm)$$

Vậy bán kính của đường tròn (O) là $12,5(cm)$.

Dạng 5: Chứng minh đẳng thức

Bài 1:

Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. B là điểm di động trên đường tròn (O) . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AB, OA



a) Chứng minh rằng: $IM = \frac{1}{2}R$. Suy ra M

thuộc một đường cố định

b) Chứng minh rằng: $OA - R \leq AB \leq OA + R$

Lời giải

a) Xét $\triangle OAB$ có I, M lần lượt là trung điểm của OA, AB (gt)

$\Rightarrow IM$ là đường trung bình của $\triangle OAB \Rightarrow IM = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R$

Ta có I là trung điểm của đoạn thẳng cố định $OA \Rightarrow I$ cố định, $IM = \frac{1}{2}R$ không đổi

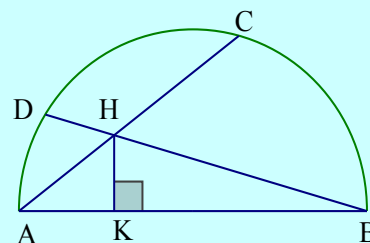
Do đó M thuộc đường tròn cố định tâm I , bán kính $\frac{1}{2}R$

b) Xét ba điểm O, A, B ta có: $OA - OB \leq AB \leq OA + OB$

mà $OA = R \Rightarrow OA - R \leq AB \leq OA + R$.

Bài 2:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Hai dây cung AC và BD cắt nhau tại H . Chứng minh rằng: $AH.AC + BH.BD = AB^2$



Lời giải

Vẽ $HK \perp AB, K \in AB$

Vì D, C cùng thuộc đường tròn đường kính AB , nên: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$

Xét $\triangle BKH$ và $\triangle DBA$, có:

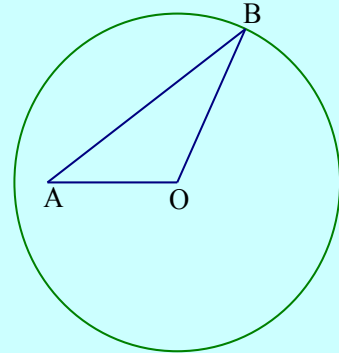
$$\widehat{KBH} : \text{chung} ; \widehat{HKB} = \widehat{ADB} (= 90^\circ) \Rightarrow \triangle BKH \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BK}{BD} \Rightarrow AH \cdot AC = AB \cdot AK$$

Chứng minh tương tự ta có: $\triangle AKH \sim \triangle ACB$

$$\text{Do đó: } AH \cdot AC + BH \cdot BD = AB \cdot AK + AB \cdot BK = AB(AK + BK) = AB^2.$$

Bài 3:

Cho điểm A cố định nằm trong đường tròn $(O; R) (A \neq O)$. B là điểm di động trên đường tròn (O) . Xác định vị trí của điểm B để độ dài AB lớn nhất, nhỏ nhất.



Lời giải

Xét ba điểm O, A, B ta có: $|OB - OA| \leq AB \leq OB + OA; |R - OA| \leq AB \leq R + OA$

Ta có: $R - OA$ và $R + OA$ không đổi

$$AB = R + OA \Leftrightarrow O \text{ nằm giữa } A \text{ và } B$$

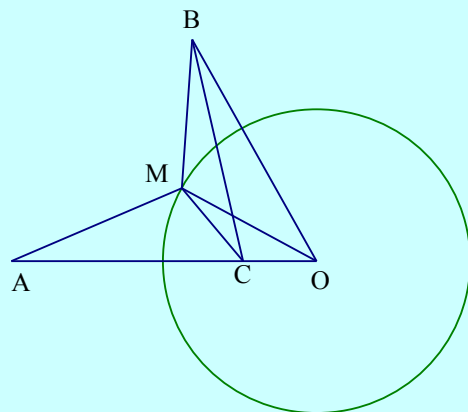
Vậy khi B là giao điểm của tia AO và đường tròn $(O; R)$ thì độ dài AB lớn nhất

$$AB = R - OA \Leftrightarrow A \text{ nằm giữa } O \text{ và } B$$

Vậy khi B là giao điểm của tia AO và đường tròn $(O; R)$ thì độ dài AB lớn nhất.

Bài 4:

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Tìm điểm M trên đường tròn để $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất



Lời giải

Gọi C là điểm trên đoạn thẳng OA sao cho: $OC = \frac{R}{2}$, ta có C cố định

Xét $\triangle OCM$ và $\triangle OMA$ có:

$$\widehat{COM} : chung; \frac{OC}{OM} = \frac{OM}{OA} \left(= \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \triangle OCM \sim \triangle OMA \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{OC}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2MC = MA$$

Xét ba điểm M, B, C có $MB + MC \geq BC \Rightarrow MA + 2MB = 2(MC + MB) \geq 2BC$, $2BC$ không đổi

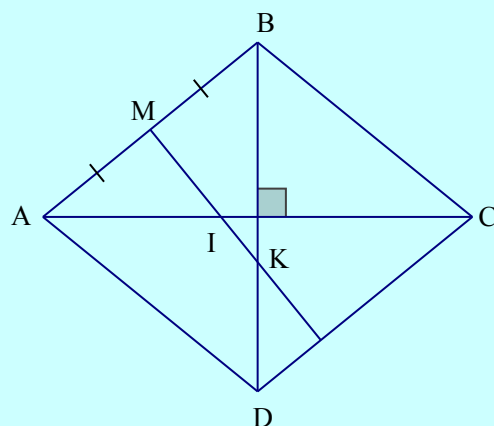
Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa B và C

Vậy khi M là giao điểm của đoạn thẳng BC và đường tròn (O) , (C là điểm nằm trên đoạn OA sao cho $OC = \frac{R}{2}$) thì $\triangle OMA$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5:

Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a . Gọi R và r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2}$$



Lời giải

Gọi M, I, K là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng AB với AB, AC, BD

O là giao điểm của AC và BD

Ta có: $OA = OC; OB = OD; AC \perp BD$ ($ABCD$ là hình thoi) nên AC là đường trung trực của BD , BD là đường trung trực của AC

Do đó I, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD, \triangle ABC$

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle MKB$ có: $\widehat{ABO} : chung; \widehat{AOB} = \widehat{KMB} (= 90^\circ) \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle MKB \Rightarrow \frac{OB}{MB} = \frac{AB}{KB}$

$$\Rightarrow \frac{OB}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{r} \Rightarrow OB^2 = \left(\frac{a^2}{2r} \right)^2 = \frac{a^4}{4r^2}. \text{ Tương tự ta có: } OA^2 = \frac{a^4}{4R^2}$$

Tam giác OAB vuông tại O , theo định lý Pytago ta có:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow \frac{a^4}{4R^2} + \frac{a^4}{4r^2} = a^2 \Rightarrow \frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng nhất

- A) Tập hợp các điểm có khoảng cách đến điểm O cố định bằng $4(cm)$ là đường tròn tâm O bán kính $4(cm)$
- B) Đường tròn tâm (O) bán kính $4(cm)$ gồm tất cả những điểm có khoảng cách đến O bằng $4(cm)$
- C) Hình tròn tâm O bán kính $4(cm)$ gồm tất cả những điểm có khoảng cách đến O nhỏ hơn hoặc bằng $4(cm)$
- D) Cả A, B, C đều đúng

Chọn đáp án D

Giải thích:

Cả A, B, C đều đúng

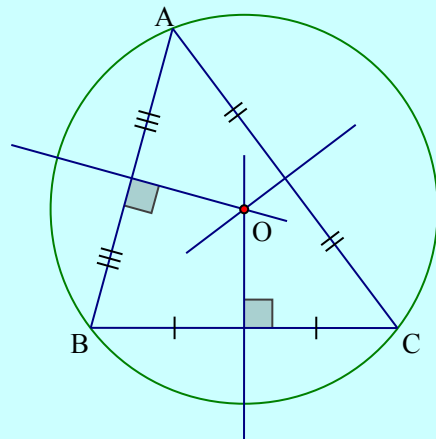
Câu 2: Khẳng định nào sau đây sai

- A) Qua một điểm ta vẽ được vô số đường tròn
- B) Qua hai điểm, ta vẽ được vô số đường tròn
- C) Qua ba điểm, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn
- D) Cả A, B đúng còn C sai

Chọn đáp án C

Giải thích:

- A) Qua một điểm vẽ được vô số đường tròn
- B) Qua hai điểm vẽ được vô số đường tròn, tâm những đường tròn đó đều thuộc đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đã cho
- C) Qua 3 điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn. Tâm đường tròn đó là giao điểm các đường trung trực của các đoạn thẳng tạo bởi ba điểm đó



D) Qua 3 điểm thẳng hàng ta không vẽ được đường tròn nào

Câu 3: Cho đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp $\triangle ABC$ vuông tại A . Khẳng định nào sau đây đúng

- A) Điểm O nằm bên trong $\triangle ABC$
- B) Điểm O nằm bên ngoài $\triangle ABC$
- C) Điểm O nằm tùy ý trên cạnh BC
- D) Điểm O là trung điểm của cạnh BC

Chọn đáp án D

Giải thích: Nhắc lại định lý sau

- Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền
- Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là tam giác vuông.

Câu 4: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , qua trung điểm H của OA vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tại M . Tính theo M diện tích $\triangle AMB$

A) $R^2\sqrt{3}$

B) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{R^2\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Chọn đáp án B

Giải thích: Ta có:

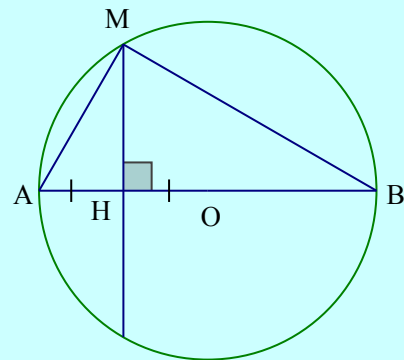
$\triangle AMB$ nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính nên $\triangle AMB$ vuông tại M

$\triangle AMB$, có đường cao MH , ta có:

$$MH^2 = HA \cdot HB (*)$$

$$HA = HO = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R \Rightarrow HB = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$\Rightarrow MH^2 = \frac{1}{2}R \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow MH = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$



Câu 5: Cho $\triangle ABC$, có $AB = 3,6(cm)$; $AC = 4,8(cm)$; $BC = 6(cm)$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Độ dài bán kính R bằng?

A) $38(cm)$

B) $4,5(cm)$

C) $5(cm)$

D) $61(cm)$

Chọn đáp án A

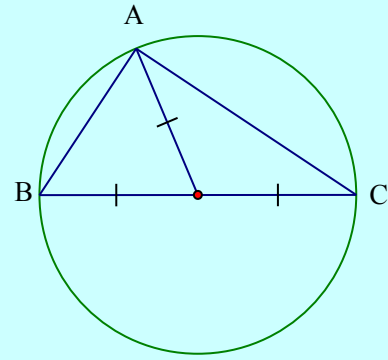
Giải thích:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC^2 = 6^2 = 36 & (1) \\ AB^2 + AC^2 = (3,6)^2 + (4,8)^2 = 36 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow BC$ là đường kính đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp $\triangle ABC$

$$\text{Ta có: } R = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3(cm)$$



Câu 6: Cho $\triangle MNP$ vuông tại M nội tiếp đường tròn $(O; 10cm)$, $\widehat{MNP} = 41^\circ$. Tính chu vi của $\triangle MNP$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

A) $38(cm)$

B) $48(cm)$

C) $52(cm)$

D) $61(cm)$

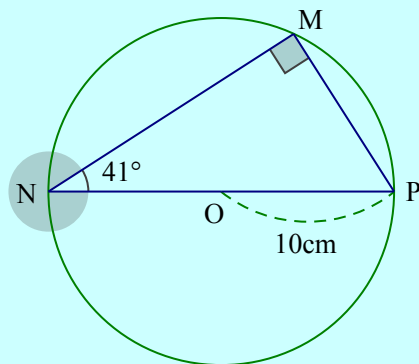
Chọn đáp án B

Giải thích: Ta có:

$$a) MN^2 = NP \cdot NH; MP^2 = NP \cdot PH$$

$$b) MH^2 = HN \cdot HP; MN \cdot MP = NP \cdot MH$$

$$c) \frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2}$$



Câu 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 18cm$, $AD = 14cm$. Khẳng định nào sau đây đúng

A) Giao điểm (O) của hai đường chéo AC và BD là tâm đường tròn đi qua A, B, C, D

B) Bán kính R của đường tròn (O) bằng $15cm$

C) BD là trục đối xứng của đường tròn (O)

D) A, B, C đều đúng

Chọn đáp án D

Giải thích:

- Theo tính chất hình chữ nhật: Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

- $ABCD$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

Do đó (O) là tâm đường tròn đi qua A, B, C, D

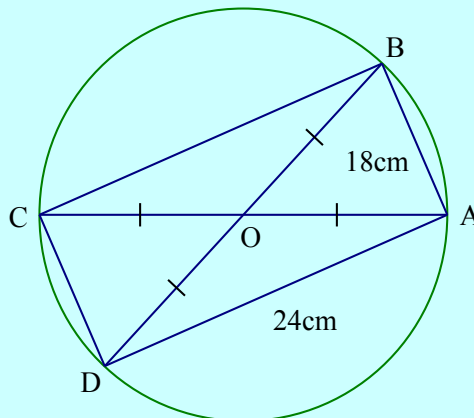
- $\triangle ABCD$ vuông tại A nội tiếp đường tròn (O)

Nên BD là đường kính của (O)

Do đó BD là trục đối xứng của đường tròn (O) . Ta có:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30(cm)$$

$$\text{Do đó: } R = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}.30 = 15(cm).$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho tam giác $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao $AH = 2\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng AH ở D

a) Chứng minh các điểm B, C cùng thuộc đường tròn đường kính AD

b) Tính độ dài đoạn thẳng AD

Lời giải

a) Ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính AD .
Chứng minh $\widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính $AD \Rightarrow BC$ cùng thuộc đường tròn đường kính AD

b) Tính được $AD = 10\text{cm}$

Bài 2:

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ đường tròn (O) có đường kính BC , cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D, E

a) Chứng minh $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$

b) Gọi K là giao điểm của BE và CD . Chứng minh $AK \perp BC$

Lời giải

a) Có O là trung điểm của BC
Mà $D \in \left(O; \frac{1}{2}BC\right) \Rightarrow OB = OD = OC$
 $\Rightarrow \triangle BDC$ vuông tại $D \Rightarrow CD \perp AB$
Tương tự ta có: $BE \perp AC$

b) Xét $\triangle ABC$ có K là trực tâm $\Rightarrow AK \perp BC$

Bài 3:

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ đường tròn (O) có đường kính BC , cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D, E

- a) Chứng minh $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$
 b) Gọi K là giao điểm của BE và CD . Chứng minh $AK \perp BC$

Lời giải

a) Có O là trung điểm của BC

$$\text{Mà } D \in \left(O; \frac{1}{2}BC\right) \Rightarrow OB = OD = OC$$

$$\Rightarrow \triangle BDC \text{ vuông tại } D \Rightarrow CD \perp AB$$

Tương tự ta có: $BE \perp AC$

b) Xét $\triangle ABC$ có K là trực tâm $\Rightarrow AK \perp BC$

Bài 4:

Cho đường tròn (O) đường kính AB . Điểm C di động trên đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB . Trên OC lấy điểm M sao cho

- a. Hỏi điểm M chạy trên đường nào?
 b. Trên tia BC lấy điểm D sao cho $CD = CB$.
 Hỏi điểm D chạy trên đường nào?

Lời giải

a) Gọi EF là đường kính của $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$ sao cho $EF \perp AB$

Xét trường hợp C chạy trên nửa đường tròn cung $\widehat{EBF}$

Ta có: $\triangle OMB = \triangle OHC(cgc) \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OHC} = 90^0$

Vậy M chạy trên đường tròn đường kính OB .

Chứng minh tương tự ta có khi C chạy trên nửa đường tròn $\widehat{EAF}$, ta có được M chạy trên đường tròn đường kính OA

b) Chứng minh $\triangle ADB$ cân tại $A \Rightarrow AD = AB$ nên D chạy trên $(A; AB)$

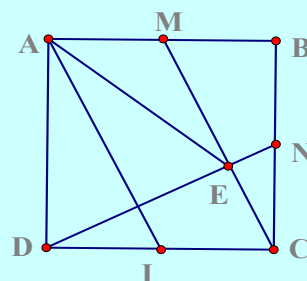
Bài 5:

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi E là giao điểm của CM và DN

a. Tính số đo góc CEN

b. Chứng minh A, D, E, M cùng nằm trên 1 đường tròn

c. Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B, D, E



Lời giải

a) Chứng minh $\triangle CMB = \triangle DNC \Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{CDN} \Rightarrow \widehat{CEN} = 90^0$

b) Ta có: A, D, E, M thuộc đường tròn đường kính DM

c) Gọi I là trung điểm CD , chứng minh được $AI \parallel MC$

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow B, D, E \in (A; AB)$