

RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. Kiến thức cần nhớ

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

- Nếu biểu thức chứa phân thức thì mẫu số phải khác không
- Nếu biểu thức chứa căn bậc chẵn thì biểu thức dưới dấu căn phải lớn hơn hoặc bằng 0

*) Chú ý: Các bài toán thường gặp có sự kết hợp của cả phân thức và căn bậc chẵn. Khi đó chúng ta giải riêng lẻ từng phần, sau đó kết hợp kết quả lại với nhau để chọn ra kết luận cuối cùng nhất

Bước 2: Phân tích tử số và mẫu số thành nhân tử rồi rút gọn nếu có thể

*) Chú ý: Các dạng đa thức, hằng đẳng thức thường gặp để phân tích đa thức thành nhân tử

$$- x\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^3 + 1 = (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$$

$$- x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + \sqrt{y})$$

(hằng đẳng thức $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$)

$$- x\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x})^3 - 1 = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$$

$$- x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + \sqrt{y})$$

(hằng đẳng thức $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$)

$$- x - \sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \text{ và } x + \sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$- x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \text{ và } x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$$

$$- x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$- (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = x - 1$$

(hằng đẳng thức $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$)

$$- 1 - x = 1 - (\sqrt{x})^2 = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = -(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

(hằng đẳng thức $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$)

$$- 1 - x = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x} \ (x \leq 1) \text{ và } 1 + x = \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x} \ (x \geq -1)$$

$$- x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$$

$$x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2 \text{ và } x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$$

$$(\text{hằng đẳng thức } A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2)$$

Bước 3: Quy đồng

- Tìm mẫu số chung: Là tích của nhân tử chung và riêng của mỗi nhân tử lấy với số mũ lớn nhất

- Nhân tử phụ: Lấy mẫu chung cho từng mẫu để được nhân tử phụ tương ứng

- Nhân nhân tử phụ với từng tử và giữ nguyên mẫu chung

Bước 4: Phá ngoặc bằng cách nhân khai triển các hạng tử với nhau hoặc khi triển hằng đẳng thức

Bước 5: Thu gọn bằng cách cộng, trừ các hạng tử đồng dạng

Bước 6: Phân tích tử thành nhân tử

Bước 7: Rút gọn lần cuối.

Dạng 1: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến

Cách giải: Thực hiện theo hai bước

Bước 1: Để rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai đã cho, ta sử dụng các phép biến đổi như đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn, trục căn thức ở mẫu, quy đồng mẫu thức... một cách linh hoạt

Bước 2: Để tìm giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến ta rút gọn giá trị của biến (nếu cần) sau đó thay vào biểu thức đã được rút gọn ở trên và tính kết quả.

Bài 1:

Cho biểu thức $P = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 9} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P trong các trường hợp

$$- x = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$$

$$- x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } P = \frac{x-\sqrt{x}}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} (x \geq 0; x \neq 9)$$

$$\text{b) Ta có: } x = \sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = |2+\sqrt{2}| + |2-\sqrt{2}| = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{thay } x=4 \text{ vào } P \text{ ta được } P = \frac{4}{5}$$

$$- x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} - \frac{\sqrt{2}-1}{1} = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Thay } x=2 \text{ vào } P \text{ ta được } P = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$$

Bài 2:

$$\text{Cho biểu thức } Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - 1 \right) \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4$$

a) Rút gọn Q

b) Tính giá trị của Q trong các trường hợp

$$- x = \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{18+8\sqrt{2}}$$

$$- x = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{3}}}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - 1 \right) = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} (x \geq 0; x \neq 4)$$

$$\text{b) Ta có } x = \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{18+8\sqrt{2}} \Rightarrow x = |5+\sqrt{2}| - |4+\sqrt{2}| = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào } Q \text{ ta được } Q=2$$

$$- x = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{3}}} = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay $x=2$ vào Q ta được $Q = \frac{8-3\sqrt{2}}{2}$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm giá trị của biến khi biết giá trị của biểu thức

Cách giải: Để tìm giá trị của biến khi biết giá trị của biểu thức ta ử dụng kết quả biểu thức rút gọn và giá trị đã biết của biểu thức trong đề bài để tìm ra kết quả.

Bài 1:

Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn M

b) Tìm x để $M = \frac{-1}{2}$

Lời giải

a) Ta có: $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} \right) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$, với $x \geq 0; x \neq 1$

b) Ta có: $M = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Bài 2:

Cho biểu thức $N = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3}$ với $x \geq 0$

a) Rút gọn N

b) Tìm x để $N = \frac{8}{9}$

Lời giải

a) Ta có: $N = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}}{3} = \frac{4\sqrt{x}}{3(x-\sqrt{x}+1)}$, với $x \geq 0$

b) Ta có $N = \frac{8}{9} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 4; \frac{1}{4} \right\}$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm giá trị của biến để biểu thức nhận giá trị nguyên

Cách giải: Ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Tìm giá trị nguyên của biến để biểu thức nhận giá trị nguyên

Trường hợp 2: Tìm giá trị thực của biến để biểu thức nhận giá trị nguyên

Bài 1:

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên, x là số chính phương để $M = A \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x-\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$ có giá trị nguyên

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \right) = \frac{2\sqrt{x}+1}{x-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } M = A \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x-\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x-\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{7}{\sqrt{x}+3}$$

Để M nguyên, ta cần có $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ và $(x+3) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow x = 16$ (thỏa mãn) b

Vậy $x = 16$ là giá trị cần tìm.

Bài 2:

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

a) Rút gọn B

b) Tìm x nguyên để $C = A(B-2)$ có giá trị nguyên

Lời giải

a) Ta có: $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

b) $C = A(B-2) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} - 2 \right) = \frac{-2}{\sqrt{x}-2}$

Ta có C nguyên $\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2) \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{0; 1; 6; 16\}$

Bài 3:

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tìm x thực để $\frac{7P}{3}$ có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} + \frac{\sqrt{x}+4}{x-4} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

b) Đặt $M = \frac{7P}{3}$. Ta có $M = \frac{14}{3\sqrt{x}+6}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Cách 1: Ta tìm được $0 < M \leq \frac{7}{3}$. Mà $M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in \{1; 2\}$

Từ đó tìm được $x = \frac{64}{9}; x = \frac{1}{9}$

Cách 2: Đặt $\frac{14}{3\sqrt{x}+6} = n$, với n nguyên

Ta có $\sqrt{x} = \frac{14-6n}{3n} \geq 0 \Rightarrow 0 < n \leq \frac{7}{3} \Rightarrow n \in \{1; 2\} \Rightarrow x = \frac{64}{9}; x = \frac{1}{9}$

Bài 4:

Cho hai biểu thức $A = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 25$

a) Rút gọn A

b) Tìm x thực để $M = A - B$ có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có: $A = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2(\sqrt{x} - 5)}{x - 25} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$, với $x \geq 0$ và

$x \neq 25$

b) Ta có: $M = A - B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 25$

Cách 1: Tìm được $0 \leq M < 1$. Mà $M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Cách 2: Đặt $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = n$, với n nguyên

Ta có: $\sqrt{x} = \frac{n}{1 - n} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq n < 1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Dạng 4: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và so sánh biểu thức với một số (hoặc một biểu thức khác)

Cách giải: Để so sánh một biểu thức M với một số a , ta xét hiệu $M - a$ và xét dấu của hiệu này, từ đó đi đến kết quả của phép so sánh

Bài 1:

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{1+\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 1; x \neq 25$

a) Rút gọn B

b) So sánh $C = \left(A \cdot B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}$ với 3

Lời giải

a) Ta có: $B = \frac{\sqrt{x}+3}{1+\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{x-1} + \frac{5(\sqrt{x}+1)}{x-1} + \frac{4}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

b) Ta có: $C = \left(A \cdot B + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-5}{\sqrt{x}-5} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, với $x > 0; x \neq 1$

Xét hiệu $C - 3 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} > 0$ (vì $x > 0; x \neq 1; x \neq 25$)

Từ đó ta có: $C > 3$

Bài 2:

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ và $B = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9; x \neq 25$

a) Rút gọn các biểu thức A, B

b) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Hãy so sánh P với 1

Lời giải

a) Rút gọn được $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9; x \neq 25$

b) Ta có: $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$ và $P - 1 = \frac{-8}{\sqrt{x}+3} < 0 \Rightarrow P < 1$

Dạng 5: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và tìm GTNN (hoặc GTLN) của biểu thức

Cách giải: Chú ý rằng

- Biểu thức P có giá trị lớn nhất là a , ký hiệu $P_{\max} = a$, nếu $P \leq a$ với mọi giá trị của biến và tồn tại ít nhất một giá trị của biến để dấu “=” xảy ra
- Biểu thức P có giá trị nhỏ nhất là b , ký hiệu $P_{\min} = b$, nếu $P \geq b$ với mọi giá trị của biến và tồn tại ít nhất một giá trị của biến để dấu “=” xảy ra

Bài 1:

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Rút gọn được $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4; x \neq 9$

b) Tìm được $P = \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4; x \neq 9$

$$\text{Ta có: } P = (\sqrt{x}+1) + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}} = 4$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 4 \Leftrightarrow x=1$$

Bài 2:

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Hãy tìm giá trị lớn nhất của P

Lời giải

a) Rút gọn được $P = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

b) Tìm được $P_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1:

Cho biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

a. Tìm x để biểu thức A có nghĩa

b. Rút gọn A

c. Tìm x để $A = \frac{3}{2}$

d. So sánh A với $\frac{2}{3}$

e. Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{a) Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2\sqrt{x}-3 \neq 0 \\ 1-\sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x}+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \\ \sqrt{x}+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) Ta có: } A = \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+22}{\sqrt{x}+3} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

$$\text{c) Ta có: } A = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+22}{\sqrt{x}+3} = \frac{3}{2} \quad (x \geq 0; x \neq 1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+44 = 3\sqrt{x}+9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 35 \Leftrightarrow x = 1225(tm)$$

$$\text{d) Xét hiệu: } A - \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{x}+22}{\sqrt{x}+3} - \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{x}+60}{3(\sqrt{x}+3)} > 0 \Rightarrow A > \frac{2}{3}$$

$$\text{e) Ta có: } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+22}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{19}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+3 \in U(19) \\ \sqrt{x}+3 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 19 \Leftrightarrow x = 256 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 2:

Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \quad (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9)$

a. Rút gọn M

b. Tính giá trị của M khi $x = 11 - 6\sqrt{2}$

c. Tìm các giá trị thực của x để $M = 2$

d. Tìm các giá trị thực của x để $M < 1$

e. Tìm x nguyên để M có giá trị nguyên

Lời giải

a) Ta có: $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9)$

b) Ta có: $x = 11 - 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 - \sqrt{2} (tm) \Rightarrow M = 1 - 2\sqrt{2}$

c) Ta tìm được $x = 49$

d) Ta có: $M < 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$

e) $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3} (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9) \Rightarrow x \in \{1; 16; 25; 49\}$

Bài 3:

Cho biểu thức $Q = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} (x \geq 0; x \neq 1)$

a. Rút gọn Q

b. Tính giá trị của Q khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

c. Tìm các giá trị của x để $Q = 3$

d. Tìm các giá trị của x để $Q > \frac{1}{2}$

e. Tìm x nguyên để Q có giá trị nguyên

Lời giải

a) Rút gọn được: $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} (x \geq 0; x \neq 1)$

b) Ta có: $x = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow Q = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

c) Ta có: $Q = 3 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

d) Có: $Q > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{2(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

e) Rút gọn được: $Q = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}, Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1) \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{0; 4; 9\}$

Bài 4:

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right) (x \geq 0; x \neq 1)$

a. Rút gọn P

b. Tìm giá trị của x để $P < \frac{1}{2}$

c. Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$

d. Tìm x nguyên để P nguyên

Lời giải

a) Ta có: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} (x \geq 0; x \neq 1)$

b) Ta có: $P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+1)} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$

c) Có: $P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 4(tm)$

d) Ta có: $P = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1) \in U(2) \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Bài 5:

Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}}; B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} (x > 0; x \neq 1)$

a. Tính giá trị biểu thức B khi $x = 9$

b. Rút gọn $C = A : B$

c. Tìm giá trị của x để $C = 3$

d. So sánh C với $\frac{1}{4}$

e. Chứng minh $C > 2$

f. Tìm x nguyên để biểu thức C có giá trị nguyên

g. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức C

h. Tìm các giá trị của m để nghiệm x thỏa mãn bất phương trình: $-\sqrt{x}.C > \sqrt{x} + m - 3$

Lời giải

a) Với $x = 9$ thỏa mãn điều kiện xác định $\Rightarrow B = \frac{1}{8}$

b) Ta có: $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow C = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$

c) Ta có: $C = 3 \Leftrightarrow C = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(loại) \\ x = 4(tm) \end{cases} \Rightarrow C = 3 \Leftrightarrow x = 4$

$$d) C - \frac{1}{4} = \frac{x+2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4} = \frac{4x - \sqrt{x} + 8}{4\sqrt{x}} = \frac{\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{127}{16}}{4\sqrt{x}}; x > 0 \Rightarrow 4\sqrt{x} > 0 \Rightarrow C > \frac{1}{4}$$

$$e) \text{ Xét hiệu: } C - 2 = \frac{x+2}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 + 1}{\sqrt{x}} \Rightarrow C > 2$$

$$f) C = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in U_{(2)} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{1; 2\} \Rightarrow x \in \{1; 4\} \Rightarrow x = 4$$

$$g) C = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{2} (\text{cosi}) \Rightarrow A_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$h) -\sqrt{x}.C > \sqrt{x} + m - 3 \Rightarrow -x - \sqrt{x} + 1 - m > 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 + m < 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} + m - \frac{5}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + m - \frac{5}{4} < 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4} - m; x > 0 \rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4} - m \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{5}{4} - m \Rightarrow m < 1.$$

Bài 6:

Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} (x \geq 0; x \neq 1)$

a. Rút gọn biểu thức A

b. Tính giá trị của A khi $x = 9$

c. Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{2}$

d. Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

e. Tìm m để phương trình $mA = \sqrt{x} - 2$ có hai nghiệm phân biệt

f. Tính các giá trị của x để $A < 1$

g. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} (x \geq 0; x \neq 1)$

c) $A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (loại). Vậy không có giá trị nào của x để $A = \frac{1}{2}$

d) $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}+1)-3}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow (\sqrt{x}+1) \in U_{(3)}$

$\sqrt{x}+1$	-3	-1	1	3
$\sqrt{x}$	-4	-2	0	2
x	$\emptyset$	$\emptyset$	0	4
Điều kiện	-	-	t/m	t/m

$\Rightarrow x \in \{0; 4\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$

e) $mA = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow m \cdot \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow 2m\sqrt{x} - m = x - \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow x - (2m+1)\sqrt{x} + m + 2 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x} (t \geq 0; t \neq 1) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t^2 - (2m+1)t + m - 2 = 0(*)$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1 và

$$t_2 > t_1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \geq 0 \\ S > 0 \\ a+b+c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [-(2m+1)]^2 - 4.(m-2) > 0 \\ m-2 > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 1-(2m+1)+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + > 0 \forall m \\ m \geq 2 \\ m > \frac{-1}{2} \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$$

Vậy điều kiện là $m \geq 2$

f) $A < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} < 0$

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \in DKXD \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \forall x \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp với điều kiện ta được: $0 \leq x < 4; x \neq 1$

g) $A = 2 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} (x \geq 0; x \neq 1); co: \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 2-3 \Leftrightarrow A \geq -1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0(tm) \Rightarrow A_{min} = -1 \Leftrightarrow x = 0$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1:

Biểu thức $(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ có kết quả là số nào?

a. 12

b. 13

c. 14

d. 15

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

Ta có: $(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
 $- 6\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 2.5 + 6\sqrt{10} - \sqrt{10} - 3.2 - 2.2 - 6\sqrt{10} + \sqrt{10} + 3.5 = 10 - 6 - 4 + 15 = 15$

Câu 2:

Rút gọn $\frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{50})(\sqrt{5} - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}}$ có kết quả là số nào?

a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

Lời giải

Chọn đáp án A

Giải thích:

Ta có: $\frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{50})(\sqrt{5} - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}} = \frac{(25\sqrt{3} + \sqrt{50})(\sqrt{5} - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{3} + 25\sqrt{2} - 30\sqrt{2} - 20\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}} = 1$

Câu 3:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 4$ là số nào?

a. -1

b. -3

c. -5

d. -7

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Ta có: $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 4 = 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 - 5 = (\sqrt{2}x - 3)^2 - 5 \geq -5$

Điều “=” xảy ra khi và chỉ khi $(\sqrt{2}x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 4$ là -5 khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4:

Biểu thức $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} + \frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)$ có kết quả rút gọn là số nào?

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{-1}{2}$

c. 1

d. -1

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} + \frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right) = \left[\frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} + \frac{a^2+1}{1-a^2}\right] \cdot \frac{a+1}{a} \\ & = \left[\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} + \frac{a^2+1}{1-a^2}\right] \cdot \frac{a+1}{a} = \left(\frac{1}{1-a} + \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{1+a-a^2-1}{(1-a)(1+a)} \cdot \frac{a+1}{a} = 1 \end{aligned}$$

Câu 5:

Rút gọn $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ ta được kết quả nào?

a. 2

b. -2

c. 4

d. -4

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

$$\text{Ta có: } \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right) = \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2 - (\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{a-2\sqrt{a}+1-a-2\sqrt{a}-1}{a-1} = -2$$

$$= \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{-4\sqrt{a}}{a-1} = -2$$

Câu 6:

Rút gọn $M = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} - a\sqrt{\frac{1}{ab}}$, với $a > 0, b > 0$ ta được:

a. $M = -\sqrt{ab}$

b. $M = -\sqrt{ab}$

c. $M = \frac{3\sqrt{ab}}{b}$

d. Một kết quả khác

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

Với $a, b > 0$, ta có: $M = \frac{\sqrt{ab}}{b} + \sqrt{ab} - \frac{1}{b}\sqrt{ab} = \sqrt{ab}$

Câu 7:

Rút gọn $Q = \left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2$, với $x > 0$ và $x \neq 1$

a. $Q = \sqrt{x}$

b. $Q = -\sqrt{x}$

c. $Q = 1$

d. $Q = -1$

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Với $x > 0; x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 = \left[\frac{1-x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}} \right] \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 = \left[\frac{1-x + \sqrt{x}(1-x)}{1-\sqrt{x}} \right] \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 \\ &= \frac{(1-x)(\sqrt{x}+1)}{1-\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Câu 8:

Giá trị của biểu thức $N = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ bằng:

a. $N = 4$

b. $N = \sqrt{5}$

c. $N = \sqrt{5} + 4$

d. $N = 2\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

$$\text{Ta có: } 9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2; 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$$

$$\text{Do đó } N = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| + |2 + \sqrt{5}| = 2\sqrt{5}$$

Câu 9:

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ là:

a. $S = \{-3\}$

b. $S = \{-3; 6\}$

c. $S = \{-6; 9\}$

d. $S = \{3; -9\}$

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{(x + \sqrt{3})^2} = \sqrt{(3 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$$

$$\Leftrightarrow |x + 3| = 3 + \sqrt{3} + 3 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 6 \\ x + 3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -9 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; -9\}$

Câu 10:

Cho $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1+2x}{1+\sqrt{1-2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$

a. $P = -1$

b. $P = 1$

c. $P = \sqrt{3}$

d. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

Thay $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ vào biểu thức P ta được :

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4}}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4}}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho $A = \left(\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} - \frac{4x}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-x}$

a. Rút gọn A

b. Tìm các giá trị của x để $A > 0; A < 0$

c. Tìm các giá trị của x sao cho $|A| = 1$

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$

b) Ta có: $A > 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x}-3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$

$$A < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

c) $|A| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{4x}{\sqrt{x}-3} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = \pm 1$

+) $\frac{4x}{\sqrt{x}-3} = 1 \Leftrightarrow 4x - \sqrt{x} + 3 = 0$ (vô nghiệm)

+) $\frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1 (\text{loại}) \\ \sqrt{x} = \frac{3}{4} (tm) \Rightarrow x = \frac{9}{16} (tm) \end{cases}$

Bài 2:

Cho $A = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} \right) (x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4)$

a. Rút gọn A

b. Tìm các giá trị của x thỏa mãn $A < \frac{1}{2}$

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Lời giải

$$a) A = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} \right) \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} (x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4)$$

$$b) \text{Ta có: } A < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 4 \Rightarrow 0 \leq x < 16 (x \neq 1; x \neq 4)$$

$$c) A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2} (x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4) \Rightarrow A_{\max} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 3:

Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} (x > 0; x \neq 1)$

a. Rút gọn A

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của A

c*. Tìm x để biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}}{A}$ nhận giá trị nguyên

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} = x - \sqrt{x} + 1 (x > 0; x \neq 1)$$

$$b) \text{Ta có: } A = x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow A_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$c) \text{Ta có: } M = \frac{2\sqrt{x}}{A} = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$$

+) Nếu $x = 0 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow M \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn)

$$+) \text{Nếu } x \neq 0 \Rightarrow M = \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \leq \frac{2}{2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} - 1} = 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ M = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \pm 3\sqrt{5} (tm) \\ x = 1 (loại) \end{cases}$$

Vậy $x \in \{0; 7 \pm 3\sqrt{5}\}$ là các giá trị cần tìm.