

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

A. Lý thuyết

1. Phương trình trùng phương: Phương trình trùng phương là phương trình có dạng:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Cách giải: Đặt ẩn phụ $t = x^2 \ (t \geq 0)$ để đưa phương trình về phương trình bậc hai

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của ẩn của phương trình

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được ở bước 2

Bước 4: So sánh các nghiệm tìm được ở bước 3 với điều kiện xác định và kết luận

3. Phương trình đưa về dạng tích

Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có thể thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0

Bước 2: Xét từng nhân tử bằng 0 để tìm nghiệm.

B. Bài tập và các dạng toán

I. Phương trình không chứa tham số

Dạng 1: Giải phương trình trùng phương

Cách giải: Xét phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (a \neq 0)$

Bước 1: Đặt $t = x^2 \ (t \geq 0)$ ta được phương trình bậc hai: $at^2 + bt + c = 0 \ (a \neq 0)$

Bước 2: Giải phương trình bậc hai ẩn t từ đó tìm được các nghiệm của phương trình trùng phương đã cho.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 20 = 0$

c) $(x+1)^4 - 5(x+1)^2 - 84 = 0$

Lời giải

a) Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^2 + 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (TM) \\ t = -6 & (KTM) \end{cases}$

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\pm 1\}$.

b) **Cách 1:** Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 4t - 20 = 0$

$\Leftrightarrow (t+5)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 & (KTM) \\ t = 4 & (TM) \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\pm 2\}$.

Cách 2: Giải trực tiếp

Ta có $x^4 + x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 5x^2 - 4x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 5) - 4(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5)(x^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\pm 2\}$.

c) Đặt $(x+1)^2 = t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 5t - 84 = 0$, từ đó $\Rightarrow x = -1 \pm 2\sqrt{3}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 + 7x^2 + 5 = 0$

b) $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$

Lời giải

a) Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $2t^2 + 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (KTM) \\ t = -\frac{5}{2} & (KTM) \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, ta có: $4t^2 + 8t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (TM) \\ t = -3 & (KTM) \end{cases}$

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\pm 1\}$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $5x^4 - 3x^2 + \frac{7}{16} = 0$

b) $4x^2 - 29 + \frac{25}{x^2} = 0$

Lời giải

a) Đặt $y = x^2 (y \geq 0) \Rightarrow 5y^2 - 3y + \frac{7}{16} = 0 \Leftrightarrow 80y^2 - 48y + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,35 \\ y = 0,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0,35 \\ x^2 = 0,25 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in \{\pm\sqrt{0,35}; \pm\sqrt{0,25}\}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\pm\sqrt{0,35}; \pm\sqrt{0,25}\}$

b) Điều kiện $x \neq 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 4x^4 - 29x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 29y + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 6,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2,5 \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\pm 1; \pm \frac{5}{2}\right\}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $4,5x^4 + 4x^2 - \frac{1}{2} = 0$

b) $x^4 - 10(2 - \sqrt{2})x^2 - 2\sqrt{2} + 3 = 0$

c) $x^4 - (3\sqrt{2} - 5)x^2 + 10 - 7\sqrt{2} = 0$

d) $(\sqrt{5} - 3)x^4 - (4\sqrt{5} + 1)x^2 + 3\sqrt{5} + 4 = 0$

Lời giải

a) Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $4,5t^2 + 4t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 9t^2 + 8t - 1 = 0$

$$\text{Có } a - b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 & (KTM) \\ t = \frac{1}{9} & (TM) \end{cases}$$

Với $t = \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{3}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\pm \frac{1}{3}\right\}$.

b) Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 10(2 - \sqrt{2})t - 2\sqrt{2} + 3 = 0$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - (3\sqrt{2} - 5)x^2 + 10 - 7\sqrt{2} = 0$

b) $(\sqrt{5} - 3)x^4 - (4\sqrt{5} + 1)x^2 + 3\sqrt{5} + 4 = 0$

Lời giải

a) Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - (3\sqrt{2} - 5)t + 10 - 7\sqrt{2} = 0$

b) Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $(\sqrt{5}-3)t^2 - (4\sqrt{5}+1)t + 3\sqrt{5}+4 = 0$

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Cách giải: Ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của ẩn của phương trình

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được ở bước 2

Bước 4: So sánh các nghiệm tìm được ở bước 3 với điều kiện xác định và kết luận

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x-7}{x-1} + 3$

b) $\frac{x^2-3x+5}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}$

c) $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x^2-5x+6}$

Lời giải

a) Điều kiện $x \neq -1; x \neq -2; x \neq 1$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} + \frac{(3x-1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{(x-7)(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)} + \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x+2)(x-1) + (3x-1)(x+1)(x-1) = (x-7)(x+1)(x+2) + (x+1)(x-1)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x^2-x+2x-2) + (3x-1)(x^2-1) = (x-7)(x^2+3x+2) + (x^2-1)(x+2)$$

Tìm được: $x = \frac{-5}{4}$ hoặc $x = 5$

b) Tìm được $x = 1$

c) Tìm được: $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 5$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x}{x-2}$

b) $\frac{x+5}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x+5}$

c) $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right) = \frac{3}{14-x}$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \neq 1; x \neq 2$

$$\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x}{x-2} \Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{3x(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow (2x-5)(x-2) = 3x(x-1) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 10 = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = 36 + 40 = 76 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{19} \Rightarrow x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{19}}{2} = \sqrt{19} - 3; x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{19}}{2} = -\sqrt{19} - 3$$

b) Điều kiện $x \neq 3; x \neq -5$

$$\text{Ta có phương trình} \Leftrightarrow \frac{5(x-3)(x+5)^2}{15(x-3)(x+5)} - \frac{3(x-3)^2(x+5)}{15(x-3)(x+5)} = \frac{75(x+5)}{15(x-3)(x+5)} - \frac{45(x-3)}{15(x-3)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 5(x-3)(x+5)^2 - 3(x-3)^2(x+5) = 75(x+5) - 45(x-3)$$

$$\text{Tìm được: } x = -17 \text{ hoặc } x = -1 \pm \sqrt{31}$$

c) Điều kiện $x \neq \pm 1; \frac{1+x}{1-x} - 1 \neq 0; x \neq 14$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1 \right) = \frac{3}{14-x} \Leftrightarrow \left[\frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1-x)(1+x)} \right] : \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \right) = \frac{3}{14-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1-x)(1+x)} : \frac{2x}{1-x} = \frac{3}{14-x} \Leftrightarrow \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{2x(1+x)} = \frac{3}{14-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x+1-x)(1+x-1+x)}{2x(1+x)} = \frac{3}{14-x} \Leftrightarrow \frac{2}{1+x} = \frac{3}{14-x} \Rightarrow 28 - 2x = 3 + 3x$$

$$\Leftrightarrow 5x = 25 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. $\frac{1}{3x^2 - 27} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{x-3}$

b. $\frac{30}{x^2 - 1} - \frac{13}{x^2 + x + 1} = \frac{18x + 17}{x^3 - 1} \quad (x \neq \pm 1)$

Lời giải

a. Điều kiện xác định: $x \neq \pm 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{1}{3(x+3)(x-3)} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{x-3}$

$$\Rightarrow 4 + 9(x^2 - 9) = 12(x^2 - 9) + 12(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 4 + 9x^2 - 81 = 12x^2 - 108 + 12x + 36 \Leftrightarrow -3x^2 - 12x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{...\}$$

b. $x \in \{-4; 9\}$

Bài 4: Giải các phương trình sau

c.
$$\frac{38}{x^4 - x^2 + 20x - 100} = \frac{x+10}{x^2 + x - 10} - \frac{x+10}{x^2 - x + 10}$$

d.
$$\frac{4}{2x^3 + 3x^2 - 8x - 12} - \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{4}{2x^2 + 7x + 6} + \frac{1}{2x + 3} = 0$$

Lời giải

c. Ta có $x^2 - x + 10 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{39}{4} > 0 \Rightarrow x^2 + x - 10 \neq 0$ (không nên giải điều kiện) $\Rightarrow S = \{-9; 9\}$

d. Ta có: $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = (2x + 3)(x + 2)(x - 2)$; $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$; $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$

Vậy điều kiện xác định: $x \neq -1, 5; x \neq \pm 2 \Rightarrow S = \{1; 5\}$

Dạng 3: Phương trình đưa về dạng tích

Cách giải: Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có thể làm theo các bước sau:

Bước 1: Chuyển vế và phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0

Bước 2: Xét từng nhân tử bằng 0 và tìm nghiệm

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

b. $2x(3x - 1)^2 - 9x^2 + 1 = 0$

Lời giải

a) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-3\}$

b) $2x(3x - 1)^2 - 9x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(6x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 6x^2 - x + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Giải phương trình (*) $6x^2 - x + 1 = 0$

Có $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$. Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 - 9x^2 - 24x - 16 = 0$

Lời giải

a) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 2; 3; 6\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 2; 3; 6\}$

b) $x^4 - 9x^2 - 24x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 - (9x^2 + 24x + 16) = 0 \Leftrightarrow x^4 - (3x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 4\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 4\}$

Bài 1:

Giải phương trình sau: $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$

Lời giải

Nhận xét: Phương trình này nhằm được một nghiệm $x = 2$ nên ta sẽ tách được nhân tử $x - 2$

Cách 1: Ta có $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 + 4x - 2x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) - 2x(x-2) - 2(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; 1 \pm \sqrt{3}\}$$

Cách 2: Ta có $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 8) - 4(x^2 - 4) + 2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) -$

$$4(x-2)(x+2) + 2(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Rightarrow x \in \{2; 1 \pm \sqrt{3}\}$$

Cách 3: Đặt phép chia đa thức $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$ cho đa thức $x - 2$ ta được thương là $x^2 - 2x - 2$ nên $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0 = (x-2)(x^2 - 2x - 2) \Rightarrow x \in \{2; 1 \pm \sqrt{3}\}$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a) $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$

b) $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 - (x+2)^3 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm\sqrt{2}; -3\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-\sqrt{2}; -3; \sqrt{2}\}$

b) Ta có: $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 - (x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{4\}$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $2x^3 - 7x^2 + 4x + 1 = 0$

b) $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$

Lời giải

a) $2x^3 - 7x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4} \end{cases}$

b) $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{10}{3}\right\}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $(x^3 - 4x^2 + 5)^2 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 5)^2 = 0$

b) $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

Lời giải

a) Ta có $(x^3 - 4x^2 + 5)^2 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 - 4x^2 + 5 + x^3 - 6x^2 + 12x - 5)(x^3 - 4x^2 + 5 - x^3 + 6x^2 - 12x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (2x^3 - 10x^2 + 12x)(2x^2 - 12x + 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 10x^2 + 12x = 0 \\ 2x^2 - 12x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 5\}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; 1; 2; 3; 5\}$

b) Ta có $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x^3 + (\sqrt{2})^3 + 2x(x + \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 2) + 2x(x + \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})[x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2] = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-\sqrt{2}\}$

Dạng 4: Giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Cách giải: Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có thể làm theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện xác định (nếu có)

Bước 2: Đặt ẩn phụ, đặt điều kiện của ẩn phụ (nếu có) và giải phương trình theo ẩn mới

Bước 3: Tìm nghiệm ban đầu và so sánh với điều kiện xác định và kết luận.

Bài 1:

Giải phương trình sau $x(x-1)(x^2-x+1) = 6$

Lời giải

Ta có: $x(x-1)(x^2-x+1)=6 \Leftrightarrow (x^2-x)(x^2-x+1)=6$

Đặt $t = x^2 - x$, ta được $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$

- Với $t = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$

- Với $t = -3 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-1; 2\}$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0$

b. $(x^2 + 16x + 60)(x^2 + 17x + 60) = 6x^2$

c. $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$

Lời giải

a) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 0$.

Đặt $y = x^2 + 3x + 1$, ta được $y = \pm 3$

Với $y = \pm 3 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

b) Ta đi xét 2 trường hợp

Trường hợp 1: Với $x = 0$, thay vào phương trình không thấy thỏa mãn

Trường hợp 2: Với $x \neq 0$, chia cả 2 vế cho x^2 ta được: $\left(x + 16 + \frac{60}{x}\right)\left(x + 17 + \frac{60}{x}\right) = 6$

Đặt $y = x + 16 + \frac{60}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -15 \\ x = -4 \end{cases}$

c) Ta đi xét 2 trường hợp

Trường hợp 1: Với $x = 0$, thay vào phương trình không thấy thỏa mãn

Trường hợp 2: Với $x \neq 0$, chia cả 2 vế cho x^2 sau đó đặt $y = 3x + \frac{2}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = -11 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $(x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) - 7 = 0$

b. $x^6 + 61x^3 - 8000 = 0$

$$c. \frac{x}{x+1} - 10 \frac{x+1}{x} = 3$$

Lời giải

a) Đặt $y = x^2 - 3x$, từ đó tìm được $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$ hoặc $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) Đặt $y = x^3$, từ đó tìm được $x = 4$ hoặc $x = -5$

c) Tìm được: $x = \frac{-5}{4}$ hoặc $x = \frac{-2}{3}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 3) = 15$

b) $x - 9 - 2\sqrt{x-1} = 0$

Lời giải

c. Đặt $y = x^2 - x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow y(y+2) = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -4(\text{loại}) \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

d. $x - 9 - 2\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow (x-1) - 2\sqrt{x-1} - 8 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2(\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow x = 17$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} - x + 1$

b) $x^2 - 4x + 4 = 4\sqrt{x^2 - 4x + 1}$

Lời giải

a) Điều kiện $x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$

phương trình $\Leftrightarrow 3(x^2 + x) - 2\sqrt{x^2 + x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y - 1 = 0 \left(y = \sqrt{x^2 + x}; y \geq 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \quad (TM) \\ y = \frac{-1}{3} \quad (KTM) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$

b) Điều kiện $x^2 - 4x + 1 \geq 0$

$$x^2 - 4x + 4 = 4\sqrt{x^2 - 4x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 + 3 = 4\sqrt{x^2 - 4x + 1} \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } y = 1 \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (TM)} \\ x = 1 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } y = 3 \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (TM)} \\ x = 2 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 0\}$

Dạng 5: Phương trình chứa căn thức

Cách giải: Làm mất dấu căn bằng cách đặt ẩn phụ hoặc lũy thừa hai vế

Chú ý: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x - 6\sqrt{x} + 9} = 3 - \sqrt{x}$

b. $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3 - x$

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0$, ta có: $\sqrt{x - 6\sqrt{x} + 9} = 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 3| = 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9$

b) $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{7}.$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x - 5} = x - 7$

b. $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$

c. $x^2 - 4x = 8\sqrt{x - 1}$

d. $x^2 + \sqrt{x + 72} = 72$

Lời giải

a. Điều kiện $x \geq 7$

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x - 5} \Rightarrow x = t^2 + 5 (t \geq 0) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t = t^2 + 5 - 7 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (KTM)} \\ t = 2 \text{ (TM)} \end{cases}$

Với $t = 2 \Rightarrow \sqrt{x - 5} = 2 \Leftrightarrow x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Cách 2: Bình phương hai vế ta được: $x - 5 = x^2 - 14x + 49 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ (TM)} \\ x = 6 \text{ (KTM)} \end{cases}$

b. Điều kiện: $\begin{cases} 3x+7 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-7}{3} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x+7} = 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3x+7 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = x+1 \Leftrightarrow 4(x+1) = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow S = \{-1; 3\}$$

c. Điều kiện: $x \geq 1$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 = 64(x-1) \Leftrightarrow x^2(x^2 - 8x + 8) + 8(x^2 - 8x + 8) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 8x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{2}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{4 + 2\sqrt{2}\}$.

Dạng 6: Một số dạng khác

Cách giải: Ngoài các phương pháp trên, ta còn dùng các phương pháp hằng đẳng thức, thêm bớt hạng tử, hoặc đánh giá hai vế... để giải phương trình

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $x^4 = 24x + 32$

c. $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$

Lời giải

a) $x^4 = 24x + 32 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 = 4x^2 + 24x + 32 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$

b) $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 2: Giải các phương trình sau bằng phương pháp đánh giá

a. $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x} = 1$

b. $\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{12x^2 - 12x + 19} = 6$

Lời giải

a) Điều kiện: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \sqrt[4]{1-x} \geq 1-x; \sqrt[4]{x} \geq x \Rightarrow VT \geq 1-x+x=1=VP$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 1-x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{12x^2 - 12x + 19} = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. $4x^2 - 4x - 6|2x - 1| + 6 = 0$

b. $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

Lời giải

a) Đặt $|2x - 1| = t (t \geq 0) \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1; 5\} \Rightarrow x \in \{-2; 0; 1; 3\}$

b) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + 2x \cdot \frac{5x}{x+5} = 11$

Đặt $t = \frac{x^2}{x+5} \Rightarrow t \in \{-11; 1\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$

II. Phương trình chứa tham số

Dạng 1: Phương trình bậc ba đưa được về dạng tích $(x - k)(ax^2 + bx + c) = 0$

Cách giải:

Xét các phương trình bậc ba $ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$ đưa được về dạng tích

$$(x - k)(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ ax^2 + bx + c = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Như vậy phương trình bậc ba luôn có nghiệm $x = k$. Lúc này số nghiệm của phương trình bậc ba phụ thuộc vào điều kiện của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

*) Các trường hợp về số nghiệm của phương trình bậc ba

1) Phương trình bậc ba có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $ax^2 + bx + c$ có hai

nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $k \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ ak^2 + bk + c \neq 0 \end{cases}$

2) Phương trình bậc ba có đúng hai nghiệm phân biệt thì:

Trường hợp 1: Phương trình (*) có nghiệm kép khác k

Trường hợp 2: Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm là k , nghiệm

còn lại khác $k \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ ak^2 + bk + c = 0 \end{cases}$

3) Phương trình bậc ba có đúng một nghiệm

Trường hợp 1: Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Trường hợp 2: Phương trình (*) có nghiệm kép là $x = k \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ ak^2 + bk + c = 0 \end{cases}$

Bài 1:

Cho phương trình $x^3 - mx - 2(m - 4) = 0$. Tìm m để phương trình

a) Có ba nghiệm phân biệt

b) Có đúng hai nghiệm phân biệt

c) Có đúng một nghiệm

d) Có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 **thỏa mãn** $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 25$

Lời giải

Ta có $x^3 - mx - 2(m-4) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4 - m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x^2 - 2x + 4 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 - 2x + 4 - m = 0 \end{cases} (*)$$

a) Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ 12-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \neq 12 \end{cases}$$

b) Có đúng hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) thỏa mãn một trong các trường hợp sau

TH1: Phương trình (*) có nghiệm kép khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 = 0 \\ 12-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m \neq 12 \end{cases} \Rightarrow m = 3$$

TH2: Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ 12-m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m = 12 \end{cases} \Rightarrow m = 12$$

c) Phương trình đã cho có đúng một nghiệm khi phương trình (*) thỏa mãn một trong các trường hợp sau:

TH1: Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m-3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$

TH2: Phương trình (*) có nghiệm kép bằng -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 = 0 \\ 12-m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 12 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$$

d) Theo ý a) ta có $\begin{cases} m > 3 \\ m \neq 12 \end{cases}$ thì phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3

Trong đẳng thức $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 25$ thì x_1, x_2, x_3 có vai trò như nhau nên ta giả sử $x_3 = -2$

còn x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) thỏa mãn hệ thức Viết $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = 4 - m \end{cases}$

Thay $x_3 = -2$ vào $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 25$ ta được $x_1^2 + x_2^2 + 4 - x_1x_2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 21 = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - 3(4 - m) - 21 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{29}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = \frac{29}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2:

Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (3m+1)x - 3m+1 = 0$. Tìm m để phương trình

- a) Có ba nghiệm phân biệt trong đó có hai nghiệm dương và một nghiệm âm
- b) Có đúng hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm trái dấu
- c) Có đúng một nghiệm và nghiệm là nghiệm dương
- d) Có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = 2$

Lời giải

Ta có $x^3 - 3x^2 + (3m+1)x - 3m+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + 3m-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2 - 2x + 3m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - 2x + 3m-1=0 \end{cases} (*)$$

a) Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt trong đó có hai nghiệm dương và một nghiệm âm khi phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu và khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (3m-1) < 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + 3m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow m < \frac{1}{3}$$

Vậy $m < \frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm trái dấu khi phương trình (*) thỏa mãn một trong các trường hợp sau:

TH1: Phương trình (*) có nghiệm kép âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ x_1 = x_2 = -\frac{-b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3m=0 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$ (loại vì nghiệm kép dương)

TH2: Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu trong đó có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.(3m-1) < 0 \\ 1^2 - 2.1 + 3m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.

c) Phương trình đã cho có đúng một nghiệm và nghiệm là nghiệm dương khi phương trình (*) thỏa mãn một trong các trường hợp sau

TH1: Phương trình (*) có nghiệm kép bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3m=0 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

TH2: Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 2-3m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}$

Vậy $m \geq \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d) Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 2.1 + 3m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3m > 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow m < \frac{2}{3}$$

Theo giả thiết $(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = 2$ thì x_1, x_2, x_3 có vai trò như nhau nên ta giả sử $x_3 = 1$ còn

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) thỏa mãn hệ thức Viết $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = 3m-1 \end{cases}$

Thay $x_3 = 1$ vào $(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = 2$ ta được $(x_1 + x_2 + 1)x_1x_2 = 2 \Rightarrow (2+1).(3m-1) = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{9}$

Vậy $m = \frac{5}{9}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2:

Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4 = 0$. Tìm m để phương trình

- a) Có ba nghiệm phân biệt trong đó có hai nghiệm âm và một nghiệm dương
- b) Có đúng hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm cùng dấu
- c) Có đúng một nghiệm và nghiệm là nghiệm âm

d) Có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $-x_1x_2 - x_2x_3 = 6 + x_1x_3$

Lời giải

Ta có $x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 3m + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2 - 4x + 3m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - 4x + 3m + 4 = 0 \end{cases} (*)$$

a) Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt trong đó có hai nghiệm âm và một nghiệm dương khi phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 4 < 0 \\ 3m + 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{4}{3} \\ m \neq -3 \end{cases}$$

b) Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm cùng dấu khi phương trình (*) thỏa mãn một trong các trường hợp sau:

TH1: Phương trình (*) có nghiệm kép âm khác -1

Phương trình (*) có nghiệm kép khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow -3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$, khi đó nghiệm kép của phương trình (*) là $x_1 = x_2 = 2$ (không thỏa mãn)

TH2: Phương trình (*) có hai nghiệm âm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m > 0 \\ 3m + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m = -3 \end{cases} \Rightarrow m = -3$$

Vậy $m = -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Phương trình đã cho có đúng một nghiệm và nghiệm là nghiệm âm khi phương trình (*) thỏa mãn một trong các trường hợp sau

TH1: Phương trình (*) có nghiệm kép bằng -1

Phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow -3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$, khi đó nghiệm kép của phương trình (*) là $x_1 = x_2 = 2$ (không thỏa mãn)

TH2: Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow -3m < 0 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy $m > 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d) Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 khi phương trình (*) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m > 0 \\ 3m + 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

Ta có $-x_1x_2 - x_2x_3 = 6 + x_1x_3 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + 6 = 0$, trong đẳng thức này vai trò của x_1, x_2, x_3 là như nhau nên ta giả sử $x_3 = -1$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (*) thỏa mãn

$$\text{định lí Viét} \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = 3m + 4 \end{cases}$$

Thay $x_3 = -1$ vào $-x_1x_2 - x_2x_3 = 6 + x_1x_3$ ta được $x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 6 = 0$

$$\Rightarrow 3m + 4 - 4 + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2:

Cho phương trình $x^3 - m(x + 2) + 8 = 0$. Tìm m để phương trình

a) Có ba nghiệm âm phân biệt

b) Có đúng hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm trái dấu

c) Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình. Chứng minh $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$

Lời giải

$$\text{Ta có } x^3 - m(x + 2) + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 + 2x + 4 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 2x + 4 - m = 0 \end{cases} (*)$$

a) Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt

$$\text{khác } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 > 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \neq 4 \end{cases}$$

b) Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm và hai nghiệm trái dấu khi phương trình (*) thỏa mãn một trong các trường hợp sau:

TH1: Phương trình (*) có nghiệm kép dương

Phương trình (*) có nghiệm kép dương khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$, khi đó nghiệm kép của phương trình là $x_1 = x_2 = -1$ (loại)

TH2: Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu trong đó có một nghiệm bằng -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m < 0 \\ (-2)^2 + 2(-2) + 4 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ 4-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \neq 4 \end{cases} \Rightarrow m > 4$$

Vậy $m > 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Theo ý a) với $\begin{cases} m > 3 \\ m \neq 4 \end{cases}$ thì phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3

Trong đẳng thức $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$

Bài 1:

Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình đã cho:

- a) Có ba nghiệm phân biệt
- b) Có đúng hai nghiệm khác nhau
- c) Có đúng một nghiệm
- d) Có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -6$.

Lời giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 + 3m(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) + 3m(x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 + 3m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - 4x + 4 + 3m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

a) Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 - 3m > 0 \\ (-1)^2 - 4(-1) + 4 + 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

Vậy $m < 0; m \neq -3$ là các giá trị cần tìm.

b) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau $\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm $x \neq -1$

- Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 - 3m = 0 \\ (-1)^2 - 4(-1) + 4 + 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

- Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 - 3m > 0 \\ (-1)^2 - 4(-1) + 4 + 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m = -3 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

c) (1) có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) không có nghiệm nào thỏa mãn $x \neq -1$

- Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $x = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 - 3m = 0 \\ (-1)^2 - 4(-1) + 4 + 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases} \text{ (loại)}$$

- Trường hợp 2: (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 4 - 3m < 0 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy $m > 0$ là giá trị cần tìm

d) Theo câu a) với $m < 0; m \neq -3$ thì (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 . Do x_1, x_2, x_3 vai trò như nhau và trong ba nghiệm của (1) có một nghiệm bằng -1 nên ta giả sử $x_3 = -1$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của (2).

Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 4; x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 3m + 4$

Thay $x_3 = -1$ vào $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -6$ ta được: $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = -6 \Leftrightarrow 3m + 4 - 4 = -6 \Leftrightarrow m = -2$ (tm)

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2: Phương trình trùng phương

Bài toán: Tìm m để phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0 (a \neq 0)$ (1)

a) Có bốn nghiệm phân biệt

b) Có đúng ba nghiệm khác nhau

c) Có đúng hai nghiệm khác nhau

d) Có đúng một nghiệm

e) Vô nghiệm

Cách giải:

Bước 1: Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành $at^2 + bt + c = 0$

Bước 2: Nhận xét

- Với $t < 0$ thì không có x

- Với $t = 0$ thì có một giá trị $x = 0$
- Với $t > 0$ thì có hai giá trị của x là $x = \pm\sqrt{t}$

Do đó ta có các kết quả sau

- a) (1) có bốn nghiệm phân biệt khi (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1 > 0; t_2 > 0$
- b) (1) có đúng ba nghiệm khác nhau khi (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1 = 0; t_2 > 0$
- c) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau xảy ra hai trường hợp:
 - Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $t_1 = t_2 > 0$
 - Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$
- d) (1) có đúng một nghiệm xảy ra 2 trường hợp
 - Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = 0$
 - Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $t_1 < 0; t_2 = 0$
- e) (1) vô nghiệm xảy ra ba trường hợp
 - Trường hợp 1: (2) vô nghiệm $t_1 = t_2 < 0$
 - Trường hợp 2: (2) có nghiệm kép
 - Trường hợp 3: (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1 < 0; t_2 < 0$

Bài 2:

Cho phương trình: $x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 = 0$ (1). Tìm m để:

- a. Phương trình có bốn nghiệm
- b. Phương trình vô nghiệm
- c. Phương trình có ba nghiệm phân biệt

Lời giải

Đặt $y = x^2 (y \geq 0) \Rightarrow y^2 - 2(m+1)y + m^2 = 0$ (2); $\Delta' = 2m+1$; $S = 2(m+1)$; $P = m^2$

a. (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

b. (1) vô nghiệm khi (2) vô nghiệm hoặc (2) có hai nghiệm âm

$$+) (2) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' = 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-1}{2}$$

$$+) (2) \text{ có hai nghiệm âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq 0 \\ 2(m + 1) < 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

$$\text{Vậy (1) vô nghiệm khi } m < \frac{-1}{2}$$

$$c) (1) \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow c = m^2 = 0 \quad ((1) \text{ có nghiệm } x = 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 3:

Cho phương trình: $x^4 - 4x^3 + 8x = m$ (1). Tìm m để:

a. Giải phương trình với $m = 5$

b. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt

Lời giải

$$a. \text{ Với } m = 5 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) - 5 = 0 \Rightarrow S = \{1; 1 \pm \sqrt{6}\}$$

$$b. \text{ Đặt } t = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow t^2 - 4t - m = 0$$

$$\text{Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + 1 > 0 \\ t_2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 5$$

Bài 4:

Cho phương trình: $x^4 - (2m - 1)x^2 + 2m - 2 = 0$ (1). Tìm m để phương trình đã cho

a) Có bốn nghiệm phân biệt

b) Có đúng ba nghiệm khác nhau

c) Có đúng hai nghiệm khác nhau

d) Có bốn nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 10$

Lời giải

Cách 1:

a) Đặt $t = x^2, t \geq 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - (2m-1)t + 2m-2 = 0$ (2)

Nhận xét:

- Với $t < 0$ thì không có x
- Với $t = 0$ thì có một giá trị $x = 0$
- Với $t > 0$ thì có hai giá trị của x là $x = \pm\sqrt{t}$

a) (1) có bốn nghiệm phân biệt khi (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1 < 0; t_2 > 0$

$$\text{Ta có } \Delta = [-(2m-1)]^2 - 4.1.(2m-2) = (2m-1)^2 - 8m + 8 = (2m-2)^2$$

- (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-3)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$

Theo định lý Viet, ta có $t_1 + t_2 = \frac{-b}{a} = 2m-1; t_1 t_2 = \frac{c}{a} = 2m-2$

$$- t_1 > 0; t_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 > 0 \\ 2m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy $m > 1; m \neq \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) (1) có đúng ba nghiệm khác nhau khi (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1 = 0; t_2 > 0$

- Theo trên thì (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ khi $m \neq \frac{3}{2}$

$$- t_1 = 0; t_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0^2 - (2m-1).0 + 2m-2 = 0 \\ t_1 + t_2 = 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 (tm)$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

c) (1) có đúng hai nghiệm khác nhau xảy ra hai trường hợp

$$- \text{Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép } t_1 = t_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-3)^2 = 0 \\ \frac{-b}{a} = 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$- \text{Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn } t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow \frac{c}{a} = 2m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 1$$

Vậy $m < 1; m \neq \frac{3}{2}$ là các giá trị cần tìm.

d) Theo câu a) thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi $m > 1; m \neq \frac{3}{2}$

Do $t_1 > 0; t_2 > 0$ nên bốn nghiệm phân biệt của (1) là: $x_1 = -\sqrt{t_1}; x_2 = \sqrt{t_1}; x_3 = -\sqrt{t_2}; x_4 = \sqrt{t_2}$

$$\text{Suy ra } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 = 2(t_1^2 + t_2^2)$$

$$= 2[(t_1 + t_2)^2 - 2t_1t_2] = 2[(2m-1)^2 - 2(2m-2)] = 2(4m^2 - 8m + 5)$$

$$\text{Do } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 10 \Leftrightarrow 2(4m^2 - 8m + 5) = 10 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0(\text{loại}) \\ m = 2(tm) \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: Đưa về tích

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^4 - 2mx^2 + x^2 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 - 2mx^2 + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 2) - 2m(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2mx + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1; x^2 = 2m - 2$$

a) Vì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x = \pm 1$ nên để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình $x^2 = 2m - 2$ phải có hai nghiệm phân biệt khác ± 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ 2m - 2 \neq (\pm 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1; m \neq \frac{3}{2}$$

Vậy $m > 1; m \neq \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm

b) Vì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x = \pm 1$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm khác nhau thì phương trình $x^2 = 2m - 2$ phải có đúng một nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

c) Vì phương trình đã cho có hai nghiệm khác nhau là $x = \pm 1$ nên để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khác nhau thì phương trình $x^2 = 2m - 2$ hoặc vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm

$$\text{là } x = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 < 0 \\ 2m - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $m < 1; m = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

d) Theo câu a) thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi $m > 1; m \neq \frac{3}{2}$ khi đó bốn nghiệm của (1) là $x = \pm 1; x = \pm\sqrt{2m-2}$, do đó $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 10$

$$\Leftrightarrow (-1)^4 + 1^4 + (-\sqrt{2m-2})^4 + (\sqrt{2m-2})^4 = 10 \Leftrightarrow 1+1+(2m-2)^2 + (2m-2)^2 = 10 \Leftrightarrow (2m-2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2m-2 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0(\text{loại}) \\ m=2(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$

b. $(x+1)^4 + (x+1)^2 - 20 = 0$

Hướng dẫn giải

a) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

b) $(x+1)^4 + (x+1)^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; -3\}$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $\frac{x+2}{x-1} = \frac{4x^2 - 11x - 2}{(1-x)(x+2)}$

b. $\frac{x}{x+4} + \frac{2x}{2-x} = \frac{8(x+1)}{(2-x)(x+4)}$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{4x^2 - 11x - 2}{(1-x)(x+2)} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$

b) Phương trình vô nghiệm

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. $(x+1)(x-3)(x^2 - 2x) = -2$

b. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$

c. $(x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) = 2x^2$

b. $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2$

Hướng dẫn giải

a) $(x+1)(x-3)(x^2 - 2x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{3} \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$

b) $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{6}$

$$c) (x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$d) \frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Bài 4: Giải các phương trình sau

$$a. x^3 - x^2 - 8x - 6 = 0$$

$$b. x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$$

Hướng dẫn giải

$$a) x^3 - x^2 - 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

$$b) x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$$