

HÀM SỐ BẬC NHẤT

NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Khái niệm hàm số

a) Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số

b) Hàm số có thể cho bằng bảng hoặc công thức

c) Khi y là hàm số của x , ta có thể viết: $y = f(x); y = g(x); \dots$

d) Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì y được gọi là hàm hằng.

2. Giá trị của hàm số, điều kiện xác định của hàm số

- Giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 kí hiệu là: $y_0 = f(x_0)$

- Điều kiện xác định của hàm số $f(x)$ là tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa

3. Đồ thị của hàm số

- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho x, y thỏa mãn hệ thức: $y = f(x)$

- Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

4. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Cho hàm số: $y = f(x)$ xác định với $\forall x \in R$

- Nếu giá trị của x tăng lên mà giá trị $y = f(x)$ tương ứng cũng tăng lên thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên R .

- Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị của $y = f(x)$ tương ứng giảm đi thì hàm số gọi là nghịch biến trên R .

Nói cách khác: Với x_1, x_2 bất kỳ thuộc R .

- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên R .

- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên R .

***) Chú ý:** Trong quá trình giải toán ta có thể sử dụng kiến thức sau đây để xét tính đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số trên R .

Cho x_1, x_2 thuộc R và $x_1 \neq x_2$. Đặt $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

+) Nếu $T > 0$ thì hàm số đã cho đồng biến trên R

+) Nếu $T < 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên R .

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Tính giá trị của hàm số tại một điểm

Cách giải: Để tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , ta thay $x = x_0$ vào $y = f(x)$ được:

$$y_0 = f(x_0)$$

Bài 1: Tính giá trị của hàm số

a) $y = f(x) = x^2 + x - 2$ tại $x_0 = \frac{1}{2}$

b) $y = f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{x^2 + 1}$ tại $x_0 = \sqrt{3}$

Lời giải

a) Thay $x_0 = \frac{1}{2}$ vào $y = f(x) = x^2 + x - 2$ ta được: $y_0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{5}{4}$

b) Thay $x_0 = \sqrt{3}$ vào $y = f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{x^2 + 1}$ ta được: $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 2: Tính giá trị của hàm số $y = f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x^2 - 1} + 2$ tại

a) $x_0 = \sqrt{5}$

b) $x_0 = \frac{1}{4}$

Lời giải

a) Thay $x_0 = \sqrt{5}$ vào $y = f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x^2 - 1} + 2$ ta được: $y = f(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) Thay $x_0 = \frac{1}{4}$ vào $y = f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x^2 - 1} + 2$ ta được: $\frac{1}{4} : 2 - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1} + 2 = \frac{1}{8} - \sqrt{-\frac{15}{16}} + 2$ (không tồn tại)

Bài 3:

Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{(2-x)(x-1)}$. Cho $x_0 = \frac{5}{4}; x_1 = \frac{7}{4}$. Hãy so sánh $f(x_0)$ và $f(x_1)$

Lời giải

Với $x_0 = \frac{5}{4}; x_1 = \frac{7}{4}$ thỏa mãn điều kiện để căn thức có nghĩa

$$\text{Ta có: } x_0 = \frac{5}{4} \Rightarrow f(x_0) = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{4} - 1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad x_1 = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x_1) = \sqrt{\left(2 - \frac{7}{4}\right)\left(\frac{7}{4} - 1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } f(x_0) = f(x_1)$$

Bài 4:

Cho hai hàm số $f(x) = 5x - 3$ và $g(x) = -4x + 1$

a) Tính $f(-2) - g\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Tính $2f^2(-3) - 3g^3(-2)$

Lời giải

a) Ta có: $f(-2) - g\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot (-2) - 3 - (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -12$

b) Ta có: $2f^2(-3) - 3g^3(-2) = 2 \cdot [5 \cdot (-3) - 3]^2 - 3 \cdot [-4 \cdot (-2) + 1]^3 = -1539$

Bài 5:

Cho hàm số $y = f(x) = 3\sqrt{x+1} + mx^2 - 2x + 3$ (m là tham số). Tìm m để $f(3) = f(-1)$

Lời giải

Ta có: $f(3) = 9m + 3; f(-1) = m + 5$

$$\text{Để } f(3) = f(-1) \Leftrightarrow 9m + 3 = m + 5 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Vậy $m = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 6:

Tìm m để hàm số $y = f(x) = (\sqrt{m^2 + 4} - m)x^2 - 2mx + 5$ thỏa mãn điều kiện: $f(0) = f(1)$

Lời giải

Ta có: $f(0)=5$ và $f(1)=\sqrt{m^2+4}-3m+5$

$$\Rightarrow f(0)=f(1) \Leftrightarrow \sqrt{m^2+4}=3m \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \geq 0 \\ m^2+4=(3m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 7:

Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$

a) Tính $f(-1); f(5)$

b) Tìm x để $f(x)=10$

c) Rút gọn $A=\frac{f(x)}{x^2-9} (x \neq \pm 3)$

Lời giải

a) Ta có: $y=f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}=|x-3| \Rightarrow f(-1)=4; f(5)=2$

b) $f(x)=10 \Leftrightarrow |x-3|=10 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=10 \\ x-3=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ x=-7 \end{cases}$

c) $A=\frac{f(x)}{x^2-9}=\frac{|x-3|}{(x-3)(x+3)}$

+ Nếu $x < 3 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow |x-3|=3-x \Rightarrow A=\frac{-1}{x+3}$

+ Nếu $x > 3 \Rightarrow A=\frac{1}{x+3}$

Bài 8:

Cho hai hàm số $f(x)=5x-3$ và $g(x)=\frac{-1}{2}x+1$

a) Tìm a sao cho $f(a)=g(a)$

b) Tìm b sao cho $f(b-2)=g(2b+4)$

Lời giải

a) Ta có: $f(a)=g(a) \Leftrightarrow 5a-3=\frac{-1}{2}a+1 \Leftrightarrow a=\frac{8}{11}$

b) Ta có: $f(b-2)=g(2b+4) \Leftrightarrow b=2$

Bài 9:

Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + x + 1$ và $g(x) = 2 - x$. Tìm a sao cho $2f(a) = g(a)$

Lời giải

Ta có: $f(a) = a^2 + a + 1$ và $g(a) = 2 - a$

Theo bài ra ta có: $2(a^2 + a + 1) = 2 - a \Leftrightarrow 2a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow a(2a + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy $a = 0$ hoặc $a = -\frac{3}{2}$ thì $2f(a) = g(a)$

Bài 10:

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1}$

a) Tìm tập xác định của hàm số

b) Tính $f(4 - 2\sqrt{3})$

c) Tìm x nguyên để $f(x)$ nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

b) Ta có: $f(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + 1}}{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$

c) Ta có: $y = f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1) \in U(2) \Rightarrow \sqrt{x}-1 \in \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{0; 4; 9\}$

Dạng 2: Tìm điều kiện xác định của hàm số

Cách giải: Chú ý rằng

+) Hàm số dạng căn thức: $y = \sqrt[k]{A(x)}$ ($k \in \mathbb{Z}$) xác định (hay có nghĩa) $\Leftrightarrow A(x) \geq 0$ và $A(x)$ có nghĩa

+) Hàm số dạng phân thức: $y = \frac{A(x)}{B(x)}$ xác định (hay có nghĩa) $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$ và $A(x), B(x)$ có nghĩa

***) Chú ý:**

+) Đôi khi các điều kiện được kết hợp chồng chéo nhau trong một hàm số

+) Điều kiện để hàm số xác định trên tập K là $K \subset D$

$$+) A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$$

Bài 1: Tìm điều kiện của x để hàm số sau xác định

a) $y = \frac{2}{x+1} + 3$

b) $y = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{1-x}}$

c) $y = \frac{5x+3}{x^2+1}$

d) $y = \frac{x-4\sqrt{x}}{x-1}$

Lời giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$

c) Hàm số xác định $\forall x$

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 0 \leq x \neq 1$

Bài 2: Tìm điều kiện của x để hàm số sau xác định

a) $y = \frac{x}{x^2-2x}$

b) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$

c) $y = \sqrt{2x-1} - 3\frac{x}{x-1} + 5$

d) $y = x - 3\sqrt{x+7} + \frac{4}{x}$

$$e) y = \frac{2 + \sqrt{2-x}}{\sqrt{3x+4}}$$

Lời giải

$$a) \text{ Hàm số xác định } \Leftrightarrow x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$b) \text{ Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$$

$$c) \text{ Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \neq 1$$

$$d) \text{ Hàm số xác định } \Leftrightarrow -7 \leq x \neq 0$$

$$e) \text{ Hàm số xác định } \Leftrightarrow \frac{-4}{3} < x \leq 2$$

Bài 3: Tìm điều kiện của x để hàm số sau xác định

$$a) y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$b) y = \frac{\sqrt{x-1}}{|x|-4}$$

$$c) y = \sqrt{x+3+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$$

Lời giải

$$a) \text{ Hàm số xác định}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \text{ hoặc } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy điều kiện: } [-1; 1] \cup [2; +\infty]$$

$$b) \text{ Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ |x|-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 4$$

$$\begin{aligned} \text{c) Điều kiện } &\Leftrightarrow y = \sqrt{x+3+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{(\sqrt{x+2}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{1-x^2}+1)^2} \\ &= |\sqrt{x+2}+1| + |\sqrt{1-x^2}+1| = \sqrt{x+2} + \sqrt{1-x^2} + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

(vonghiem)

Dạng 3: Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số

Cách giải: Ta thực hiện một trong các cách sau

Cách 1: Sử dụng định nghĩa

Giải sử $x_1 < x_2$, ta xét hiệu $f(x_1) < f(x_2)$

- Nếu $f(x_1) - f(x_2) < 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $f(x_1) - f(x_2) > 0$ thì hàm số nghịch biến

Cách 2: Với mọi $x_1, x_2 \in R; x_1 \neq x_2$, xét tỉ số $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- Nếu $T > 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $T < 0$ thì hàm số nghịch biến

Bài 1: Chứng minh rằng:

a) Hàm số $y = f(x) = 3x - \frac{1}{4}$ đồng biến trên R

b) Hàm số $y = f(x) = \frac{-1}{2}x + 3$ nghịch biến trên R

Lời giải

a) Ta có: $a = 3 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến

b) Ta có: $b = \frac{-1}{2} < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến

Bài 2: Với a là hằng số, các hàm số sau đồng biến hay nghịch biến trên R

a) $y = f(x) = \frac{-2}{3}x + 5a$

b) $y = f(x) = 5x + a^2 - \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{-2}{3} < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến

b) Ta có: $5 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến

Bài 3: Xét sự biến thiên của các hàm số sau

a) $y = f(x) = x - 2$

b) $y = f(x) = 2x + 3$

c) $y = f(x) = -2x^2$

Lời giải

a)

Cách 1: Hàm số xác định trên R

Cho các giá trị bất kỳ x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$

$$\text{Xét } f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - 2) - (x_2 - 2) = x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

Cách 2: Hàm số xác định trong R

$$\text{Với mọi } x_1, x_2 \text{ thuộc } R, x_1 \neq x_2, \text{ ta có: } T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = a$$

+) Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên R

+) Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên R .

b) Hàm số $y = f(x) = 2x + 3$ xác định với mọi $x \in R$

Cách 1: Với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$

$$\text{Suy ra } y_1 = f(x_1) = 2x_1 + 3; y_2 = f(x_2) = 2x_2 + 3$$

$$\text{Ta có: } f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 + 3) - (2x_2 + 3) = 2(x_1 - x_2) < 0 (x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

Cách 2: Với mọi x_1, x_2 thuộc R , $x_1 \neq x_2$, suy ra $y_1 = 2x_1 + 3; y_2 = 2x_2 + 3$

$$\text{Ta có: } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1 + 3) - (2x_2 + 3)}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0$$

Do đó hàm số $y = f(x) = 2x + 3$ đồng biến trên R

c) Hàm số $y = f(x) = -2x^2$ xác định với $\forall x \in R$

$$\text{Với } x_1, x_2 \in R \text{ và } x_1 < x_2 \text{ (hay } x_1 - x_2 < 0), \text{ suy ra } y_1 = f(x_1) = -2x_1^2; y_2 = f(x_2) = -2x_2^2$$

$$\text{Ta có: } f(x_1) - f(x_2) = (-2x_1^2) - (-2x_2^2) = -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$+) \text{ Xét } x \in (-\infty; 0) \Rightarrow x_1, x_2 < 0 \Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Do đó hàm số $y = f(x) = -2x^2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

+) Xét $x \in [0; +\infty] \Rightarrow x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Do đó hàm số $y = f(x) = -2x^2$ nghịch biến trên $[0; +\infty]$

Bài 4:

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{4}{7}x + 3, \forall x \in R$. Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên R

Lời giải

Trên tập hợp số thực R cho x hai giá trị tùy ý x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$

$$\text{Ta có: } y_1 - y_2 = \left(\frac{4}{7}x_1 + 3\right) - \left(\frac{4}{7}x_2 + 3\right) = \frac{4}{7}(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow y_1 - y_2 < 0 \Rightarrow y_1 < y_2$$

Vậy hàm số đồng biến trên R .

Bài 5:

Chứng tỏ rằng hàm số $y = 4x^2 + 9$ đồng biến trong khoảng $(0; 5)$

Lời giải

Trong khoảng $(0; 5)$ lấy hai giá trị tùy ý của x sao cho $x_1 < x_2$, ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = (4x_1^2 + 9) - (4x_2^2 + 9) = 4(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$$\text{Vì } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$$

$$x_1, x_2 \in (0; 5) \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow 4(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 5)$

Bài 6:

Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0; 1)$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Chứng minh rằng:

$$f\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) < 0 \text{ và } f\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) > 0$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \in (0; 1) \text{ và } \frac{1}{2}; \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \in (0; 1)$$

Vì $\sqrt{3} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ và hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0;1) \Rightarrow f\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$

Mà $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) < 0$

Tương tự ta có: $\sqrt{2} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Bài 7:

Cho hàm số $y = 3x^2 + 6x + 5 (x \in R)$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

b) Chứng minh rằng hàm số đồng biến khi $x > -1$, hàm số nghịch biến khi $x < -1$

Lời giải

a) Ta có: $y = 3x^2 + 6x + 5 = 3(x+1)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in R \Rightarrow y_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = -1$

b) Trên tập hợp số R cho hai giá trị bất kỳ $x_1 < x_2$, ta có: $x_1 - x_2 < 0$ khi đó:

$$y_1 - y_2 = [3(x_1+1)^2 + 2] - [3(x_2+1)^2 + 2] = 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2)$$

+) Khi $x > -1 \Rightarrow x_1 + x_2 > -2 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 > 0 \Rightarrow 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) < 0 \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow$ hàm số đồng biến

+) Khi $x < -1 \Rightarrow x_1 + x_2 < -2 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 < 0 \Rightarrow 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) > 0 \Rightarrow y_1 > y_2 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến

Dạng 4: Biểu diễn tọa độ của một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Cách giải: Để biểu diễn tọa độ của điểm $M(x_0; y_0)$ trên hệ trục tọa độ Oxy, ta làm như sau:

- Vẽ đường thẳng song song với trục Oy tại điểm có hoành độ $x = x_0$
- Vẽ đường thẳng song song với trục Ox tại điểm có hoành độ $y = y_0$
- Giao điểm của hai đường thẳng trên chính là điểm $M(x_0; y_0)$

Bài 1:

Trên hệ trục tọa độ Oxy cho các điểm $A(-2;1); B(0;-1); C\left(\frac{-3}{2}; -2\right)$

a) Biểu diễn các điểm A, B, C trên hệ trục tọa độ Oxy

b) Trong các điểm A, B, C điểm nào thuộc hàm số $y = f(x) = 2x - 1$

Lời giải

b) Xét điểm $A(2;1)$

Thay $x = -2; y = 1$ vào hàm số $y = f(x) = 2x - 1$ ta được: $1 = 2 \cdot (-2) - 1 \Leftrightarrow 1 = -5$ (vô lý)

Vậy điểm $A(2;1)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1$

- Tương tự ta có điểm B và điểm C không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1$

Bài 2:

Trên hệ trục tọa độ Oxy cho các điểm $M(1;-1); N(2;0); P(-2;2)$

a) Biểu diễn các điểm M, N, P trên hệ trục tọa độ Oxy

b) Trong các điểm M, N, P điểm nào thuộc hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Lời giải

b) Ta có các điểm M, N không thuộc hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Điểm P thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Bài 3:

Trên hệ trục tọa độ Oxy cho tứ giác $ABCD$ với $A(-1;2); B(-3;0); C(2;0); D(2;2)$

a) Vẽ tứ giác $ABCD$ trên mặt phẳng tọa độ

b) Gọi độ dài mỗi đơn vị trên các trục Ox, Oy là $1cm$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$

Lời giải

b) Ta thấy tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông đáy AD và BC , chiều cao CD

Áp dụng công thức tính diện tích hình thang tính được: $S_{ABCD} = 8cm^2$

Bài 4:

Cho $\triangle ABC$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy với $A(3;0); B(-2;0); C(0;4)$

a) Vẽ tam giác ABC trên mặt phẳng tọa độ Oxy

b) Tính diện tích tam giác ABC biết mỗi đơn vị trên các trục $Ox; Oy$ cùng là $1m$

Lời giải

b) Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10(m^2)$

Vậy diện tích $\triangle ABC$ bằng $10(m^2)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. Tính $f(-2); f(0); f\left(\frac{1}{2}\right); f(6)$. Khẳng định nào sau đây sai

a. $f(-2) = 4$

b. $f(0) = 3$

c. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$

d. $f(6) = 0$

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Ta có: $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

A) $f(-2) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) + 3 = 4$

B) $f(0) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 3 = 3$

C) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4}$

D) $f(6) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 + 3 = -3 + 3 = 0$

Câu 2: Cho bốn điểm $E(1; -2); F(-2; -1); I(3; -3); H(0; 3)$. Điểm nào nằm trên đồ thị (d) của hàm số $y = -2x + 3$

a. E và F

b. E và I

c. H và F

d. I và H

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có $(d): y = -2x + 3$ (*)

A) Thay $x_E = 1; y_E = -2$ vào (*) ta được: $-2 \neq (-2) \cdot 1 + 3 \Rightarrow E \notin (d)$

B) Thay $x_F = -2; y_F = -1$ vào (*) ta được: $-1 \neq (-2) \cdot (-2) + 3 \Rightarrow F \notin (d)$

C) Thay $x_I = 3; y_I = -3$ vào (*) ta được: $-3 = (-2).3 + 3 \Rightarrow I \in (d)$

D) Thay $x_H = 0; y_H = 3$ vào (*) ta được: $3 = (-2).0 + 3 \Rightarrow H \in (d)$

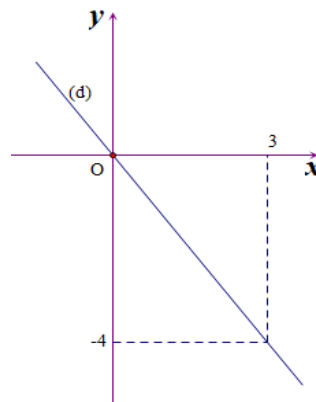
Câu 3: Đường thẳng (d) trong hình vẽ là đồ thị hàm số nào dưới đây

a. $y = \frac{3}{4}x$

b. $y = -\frac{3}{2}x$

c. $y = -\frac{4}{3}x$

d. $y = \frac{2}{3}x$



Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên (d) là đồ thị của hàm số $y = ax$

Đường thẳng (d) còn đi qua $M(3;-4)$ nên tọa độ điểm M nghiệm đúng $y = ax$

Ta có: $-4 = a.3 \Leftrightarrow a = \frac{-4}{3} \Rightarrow y = \frac{-4}{3}x$.

Câu 4: Cho hàm số $y = ax$. Tìm hệ số a , biết rằng khi $x = \frac{1}{4}$ thì $y = \frac{-1}{6}$

a. $a = \frac{1}{2}$

b. $a = \frac{1}{3}$

c. $a = \frac{-2}{3}$

d. $a = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Thay $x = \frac{1}{4}; y = \frac{-1}{6}$ vào $y = ax$ ta được: $-\frac{1}{6} = a \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \left(\frac{-1}{6}\right) : \frac{1}{4} = \frac{-2}{3} \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$

Câu 5: Xác định hàm số $g(x)$, biết rằng $g(x-5) = 2x-1$

a. $2x-9$

b. $2x+9$

c. $-2x-9$

d. $-2x+9$

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

Đặt $x-5=t \Rightarrow x=t-5 \Rightarrow g(t)=2(t+5)-1=2t+9$ hay $g(x)=2x+9$

Câu 6: Cho hàm số $y=ax+b$ ($a < 0$). Hỏi hàm số đã cho đồng biến hay nghịch biến

- | | |
|----------------------------------|--|
| a. Nghịch biến | b. Đồng biến |
| c. Không xác định
nghịch biến | d. Không đồng biến cũng không
nghịch biến |

Lời giải

Chọn đáp án A

Giải thích:

Với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 < x_2$. Ta có: $ax_1 > ax_2$ do $a < 0 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 3$ (với a, b là các hằng số). Biết $f(2) = 16$. Tính $f(-2)$

- | | |
|-------|--------------------|
| a. 11 | b. 12 |
| c. 13 | d. Không tính được |

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(2) = a \cdot 2^4 - b \cdot 2^2 + 2 + 3 \\ f(-2) = a \cdot (-2)^4 - b \cdot (-2)^2 + (-2) + 3 \end{cases} \Rightarrow f(2) - f(-2) = 4$$

Do đó $f(-2) = 16 - 4 = 12$.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$ có bao nhiêu điểm

- | | |
|-----------|----------------------|
| a. Vô số | b. 2 điểm |
| c. 1 điểm | d. Không có điểm nào |

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Do đó khi $x = 3 \Rightarrow y = 0$, đồ thị hàm số chỉ gồm 1 điểm $(3; 0)$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Tìm các giá trị của x để các hàm sau xác định

a) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+1}$

b) $y = \frac{\sqrt{5-2x}}{(x-2)\sqrt{x-1}}$

c) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

d) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

*) Hàm số chứa hai căn thức bậc hai nên ta cần tìm điều kiện để cả hai căn thức đó đều có nghĩa, tức là $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq \frac{5}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$

*) Nhận xét: Hàm số vừa chứa phân thức, vừa chứa căn thức, nên các điều kiện sẽ ràng buộc nhau, cụ thể $\begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x-1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \end{cases}$

*) Nhận xét: Ở câu c) và d) để giải các bất phương trình bậc hai chúng ta sử dụng phương

pháp phân tích đa thức thành nhân tử và vận dụng các điều kiện để $A.B \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$

Và $A.B \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A \leq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$

Bài 2: Tìm điều kiện của x để hàm số sau xác định

a) $y = \frac{1}{2} - \frac{3x}{2x+5}$

b) $y = \frac{4}{5}\sqrt{x+1} - 5x^2 + \frac{1}{2x-3}$

c) $y = \frac{x+2}{2\sqrt{x}-1}$

d) $y = \frac{\sqrt{x}}{5-2x} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x \neq -\frac{5}{2}$

b) Điều kiện: $-1 \leq x \neq \frac{3}{2}$

c) Điều kiện: $0 \leq x \neq \frac{1}{4}$

d) Điều kiện: $0 \leq x \leq 3; x \neq \frac{5}{2}$

Bài 3: Tính giá trị của hàm số

a) $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ tại $x_0 = 2$

b) $y = f(x) = \frac{-2}{3}x + 5$ tại $x_0 = \frac{3}{4}$

c) $y = f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$ tại $x_0 = \sqrt{6}$

d) $y = f(x) = mx + (2m-1)$ tại $x_0 = 3$ (m là tham số)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $f(2) = 9$

b) Ta có: $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{2}$

c) Ta có: $f(\sqrt{6}) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

d) Ta có: $f(3) = 5m - 1$

Bài 4: Cho các điểm $K(-1;2); M(0;-3); N(4;2)$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy

a) Biểu diễn các điểm K, M, N trên hệ trục Oxy

b) Điểm nào trong ba điểm trên thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

Hướng dẫn giải

b) Ta có: Điểm $M(0;-3)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

Bài 5: Trên mặt phẳng tọa độ cho tam giác ABC , biết $A(2;5); B(-1;1); C(3;1)$

a) Vẽ $\triangle ABC$ trên mặt phẳng tọa độ

b) Tính diện tích tam giác ABC nếu coi độ dài mỗi đơn vị trên các trục Ox, Oy là $1m$

Hướng dẫn giải

b) Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = 8(m^2)$

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $8(m^2)$

Bài 6:

Tìm m để hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + mx + 2$ (m là tham số) thỏa mãn $f(5-2\sqrt{3}) = f(2)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(5-2\sqrt{3}) = f(2) \Rightarrow m = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

Bài 7: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

a) Tìm điều kiện xác định của hàm số

b) Tính $f(4-2\sqrt{3}); f(a^2) (a < -1)$

c) Tìm giá trị của x để $f(x) = \sqrt{3}$

d) Tìm giá trị của x để $f(x) = f(x^2)$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1$

b) Ta có: $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow f(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + 1}}{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$

$$f(a^2) = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} = \frac{|a| + 1}{|a| - 1} = \frac{1 - a}{-a - 1} = \frac{a - 1}{a + 1} \quad (a < -1 < 0)$$

c) Ta có: $f(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}$

d) Vì $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$

Ta có: $f(x^2) = \frac{\sqrt{x^2} + 1}{\sqrt{x^2} - 1} = \frac{|x| + 1}{|x| - 1} = \frac{x + 1}{x - 1} \Rightarrow f(x) = f(x^2) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x + 1}{x - 1} \Leftrightarrow x = 0$

Bài 8: Cho hàm số $y = f(x) = 2\sqrt{x+1}$

a) Tìm điều kiện xác định của hàm số

b) Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên miền xác định của nó

c) Trong các điểm $A(3;4); B(8;8); C(-2;5)$ điểm nào thuộc, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số đã cho

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

b) Giả sử: $-1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow 2\sqrt{x_1 + 1} < 2\sqrt{x_2 + 1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Vậy hàm số đồng biến trong miền xác định: $x \geq -1$

c) $f(3) = 2\sqrt{3+1} = 4 \Rightarrow A \in f(x); f(8) = 2\sqrt{8+1} = 6 \neq 8 \Rightarrow B \notin f(x)$

Ta có: -2 không thuộc miền xác định hàm số nên $C(-2;5)$ không thuộc hàm số.

Bài 9: Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x + 2m - 3$

a) Biết $f(1) = 2$, tính $f(2)$

b) Xác định hàm số, biết $f(-3) = 0$

Hướng dẫn giải

a) Theo bài ra ta có: $2 = (m-1) \cdot 1 + 2m - 3 \Leftrightarrow 3m = 6 \Leftrightarrow m = 2$

hàm số có dạng $y = f(x) = x + 1 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$

b) Theo bài ta có: $0 = (m-1) \cdot (-3) + 2m - 3 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow$ hàm số có dạng $y = f(x) = -x - 3$

Bài 10: Cho hai hàm số $y = f(x) = 5x - 3$ và $y = g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

a) Tìm a sao cho $f(a) = g(a)$

b) Tìm b sao cho $f(b-2) = g(2b+4)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $f(a) = 5a - 3; g(a) = -\frac{1}{2}a + 1$

Để $f(a) = g(a) \Leftrightarrow 5a - 3 = -\frac{1}{2}a + 1 \Leftrightarrow \frac{11}{2}a = 4 \Leftrightarrow a = \frac{8}{11}$

b) Ta có: $f(b-2) = 5(b-2) - 3 = 5b - 13; g(2b+4) = -\frac{1}{2}(2b+4) + 1 = -b - 1$

Để $f(b-2) = g(2b+4) \Leftrightarrow 5b - 13 = -b - 1 \Leftrightarrow 6b = 12 \Leftrightarrow b = 2$

Bài 11:

Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x^2$ với mọi $x \neq 1$. Tính $f(2)$

Hướng dẫn giải

Theo bài ta có: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x^2$ với mọi $x \neq 1$

Lần lượt cho x nhận các giá trị $2; -1; \frac{1}{2}$, ta có: $f(2) + 2f\left(\frac{1}{1-2}\right) = 2^2 \Leftrightarrow f(2) + 2f(-1) = 4$ (1)

$$f(-1) + 2f\left(\frac{1}{1-(-1)}\right) = (-1)^2 \Leftrightarrow f(-1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$
 (2)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(2) = \frac{1}{4}$$
 (3)

Lấy (1)+(2)+(3) ta được: $3\left[f(2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 4 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4} \Rightarrow f(2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$ (4)

Lấy (4)-(2) ta được: $\left[f(2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \left[f(-1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{7}{4} - 1 \Leftrightarrow f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ (5)

Lấy (3)+(5) ta được: $3f(2) = 1 \Leftrightarrow f(2) = \frac{1}{3}$