

ÔN TẬP HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. Tóm tắt lý thuyết

Khi giải các bài toán liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ngoài việc nắm vững các kiến thức về định lý Talet, về các trường hợp đồng dạng của tam giác, cần phải nắm vững các kiến thức sau:

Tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , ta có:

1) Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

Định lý 1: Trong một tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền

Ta có: $AB^2 = BH.BC$; $AC^2 = HC.BC$

2) Hệ thức liên qua tới đường cao

Định lý 2: Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền

Ta có: $AH^2 = BH.HC$

Định lý 3: Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng

Ta có: $AB.AC = AH.BC$

Định lý 4: Trong một tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

*) Tóm tắt các công thức

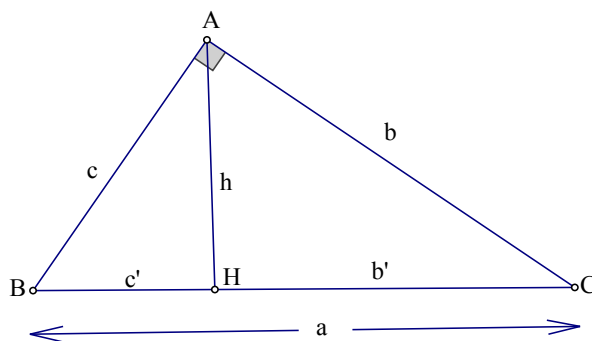
1) $a^2 = b^2 + c^2$.

2) $b^2 = a.b'$; $c^2 = a.c'$

3) $h^2 = b'.c'$

4) $a.h = b.c$.

5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.



Chú ý: Diện tích tam giác vuông: $S = \frac{1}{2}ab$

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông

Cách giải:

Bước 1: Xác định vai trò của đoạn thẳng đã biết và đoạn thẳng cần tính trong tam giác vuông. Cụ thể, xác định xem đoạn thẳng đó là

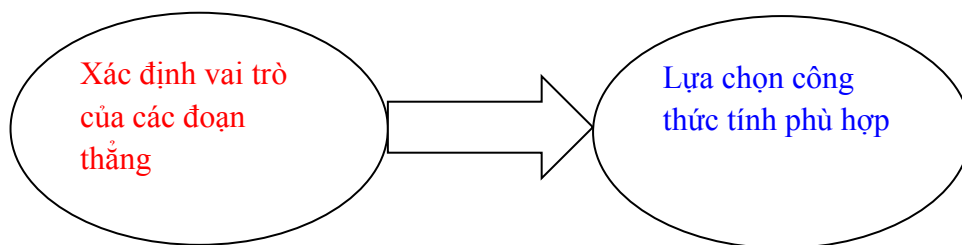
+) Là cạnh góc vuông

+) Là đường cao

+) Là cạnh huyền

+) Là hình chiếu

Bước 2: Từ đó lựa chọn công thức tính phù hợp (trong 6 công thức ở phần lý thuyết)



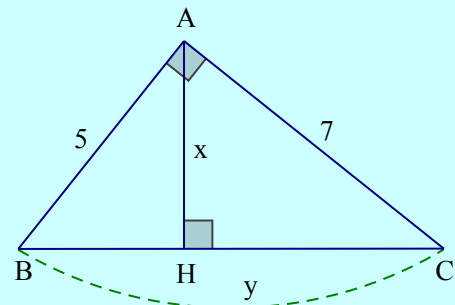
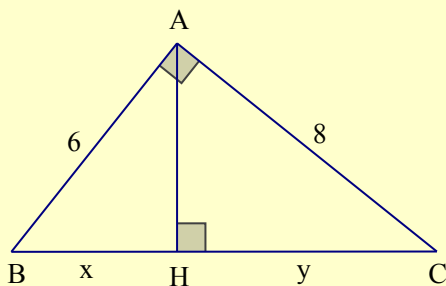
***) Lưu ý:** Đôi khi phải dùng kỹ thuật đại số hóa để giải

Chẳng hạn:

- Nếu có $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$ thì đặt $\frac{AB}{m} = \frac{AC}{n} = k (m, n, k > 0) \Rightarrow AB = km$ và $AC = kn$

- Nếu có $BH = x \Rightarrow CH = BC - BH = BC - x$

Bài 1: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



Lời giải

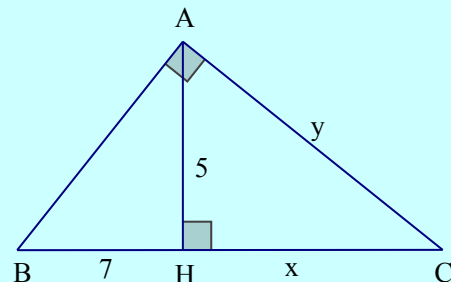
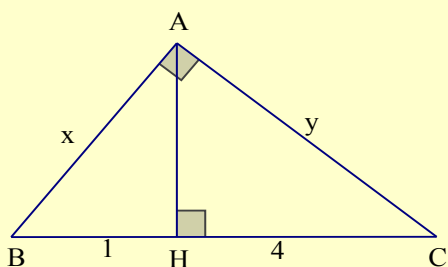
a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, ta có:

Dùng định lý Pytago tính được $BC = 10(cm) \Rightarrow \begin{cases} x = 3,6(cm) \\ y = 6,4(cm) \end{cases}$

b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, ta có:

Dùng định lý Pytago tính được $BC = \sqrt{74}(cm) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{35\sqrt{74}}{74}(cm) \\ y = \sqrt{74}(cm) \end{cases}$

Bài 2: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



Lời giải

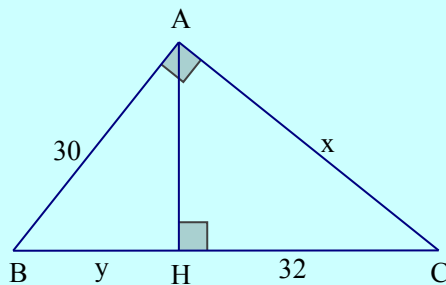
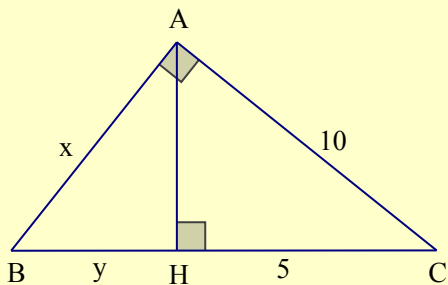
a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, ta có:

$$AH^2 = HB.HC \Leftrightarrow AH^2 = 4 \Rightarrow AH = 2 \Rightarrow x = \sqrt{5}(cm); y = 2\sqrt{5}(cm)$$

b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, ta có:

$$AH^2 = HB.HC \Leftrightarrow HC = \frac{AH^2}{HB} = \frac{25}{7} \Rightarrow x = \frac{25}{4}(cm); y = \frac{5\sqrt{41}}{4}(cm)$$

Bài 3: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, ta có:

Áp dụng hệ thức về cạnh ta có: $b^2 = b'.a$, ta được: $10^2 = 8(y+8) \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}$

Áp dụng hệ thức về cạnh: $c^2 = c'.a$, ta được: $x^2 = \frac{9}{2} \left(8 + \frac{9}{2} \right) = \left(\frac{15}{2} \right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2} (x > 0)$

b) Áp dụng hệ thức về cạnh: $c^2 = c'.a$, ta được:

$$30^2 = y(y+32) \Leftrightarrow (y-18)(y+50) = 0 \Leftrightarrow y = 18 (y+50 > 0)$$

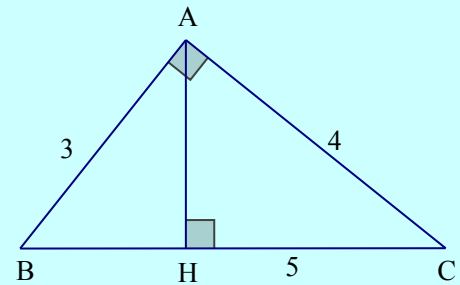
Áp dụng hệ thức về cạnh: $b^2 = b'.a$, ta được: $x^2 = 32(32+18) \Leftrightarrow x^2 = 40^2 \Leftrightarrow x = 40 (x > 0)$.

Bài 4: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$

a) Cho biết $AB = 3(cm), BC = 5(cm)$. Tính BH
 CH, AC, AH

b) Cho biết $BH = 9(cm), CH = 16(cm)$. Tính độ
dài các đoạn thẳng AB, AC, BC, AH



Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, ta có:

$$+) AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{9}{5} = 1,8(cm) \Rightarrow CH = 3,2(cm)$$

$$+) AC^2 = CB \cdot BC \Rightarrow AC^2 = 5 \cdot 3,2 = 16 \Rightarrow AC = 4(cm)$$

$$+) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \Rightarrow AH = 2,4(cm)$$

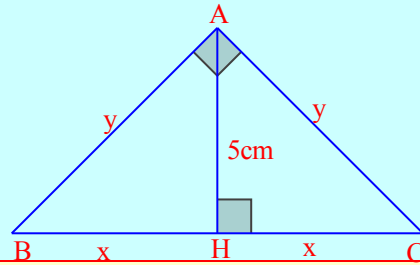
b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, ta có:

$$AB = 15cm, AC = 20cm, BC = 25cm, AH = 12cm$$

Bài 5:

Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau, biết

$$AH = 5\text{cm}$$



Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao ta có:

$$+ AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow 5^2 = x \cdot x \Rightarrow x = 5(\text{cm})$$

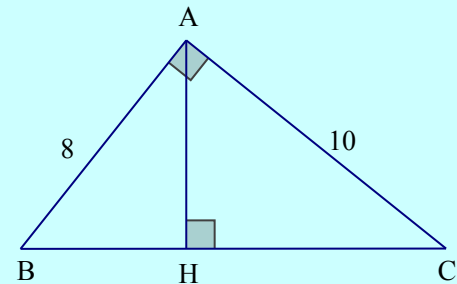
$$+ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{5^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{2}{y^2} \Rightarrow y^2 = 50 \Rightarrow y = 5\sqrt{2}(\text{cm}).$$

Bài 6:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao

$AH (H \in BC)$, có $AC = 10\text{cm}, AB = 8\text{cm}$. Tính

BC, BH, CH, AH



Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 (\text{pytago}) \Rightarrow BC = 2\sqrt{41}(\text{cm})$$

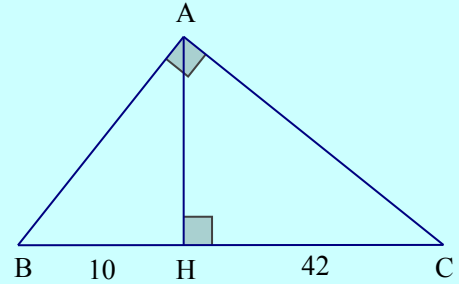
$$+ AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{64}{2\sqrt{41}} = \frac{32}{\sqrt{41}}(\text{cm})$$

$$+ CH = BC - BH = 2\sqrt{41} - \frac{32}{\sqrt{41}} = \frac{50}{\sqrt{41}}(\text{cm})$$

$$+ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} = \frac{1}{64} + \frac{1}{100} \Rightarrow AH = 6,4(\text{cm})$$

Bài 7:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), có $BH = 10\text{cm}$, $CH = 42\text{cm}$. Tính BC, AH, AB, AC



Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), ta có:

$$- BC = BH + HC = 10 + 42 = 52(\text{cm})$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

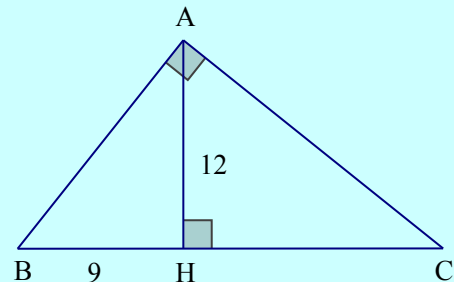
$$+) AB^2 = BH \cdot BC = 10 \cdot 52 = 520 \Rightarrow AB = 2\sqrt{130}(\text{cm})$$

$$+) AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH = 2\sqrt{105}(\text{cm})$$

$$+) AC^2 = AH^2 + HC^2 (\text{pytago}) \Rightarrow AC = 2\sqrt{546}(\text{cm})$$

Bài 8:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), có $BH = 10\text{cm}$, $CH = 42\text{cm}$. Tính BC, AH, AB, AC



Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), ta có:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$+) AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{12^2}{9^2} = 16 \Rightarrow CH = 4(\text{cm})$$

$$+) AB^2 = BH \cdot BC = 9 \cdot 13 = 117 \Rightarrow AB = 3\sqrt{13}(\text{cm}); AC^2 = BC \cdot CH = 13 \cdot 4 = 52 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13}(\text{cm})$$

$$+) S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 = 78(\text{cm}^2)$$

+) Chu vi $\triangle ABC = AB + BC + CA = 3\sqrt{13} + 2\sqrt{13} + 13 = 13 + 5\sqrt{13}(cm)$

Bài 9:

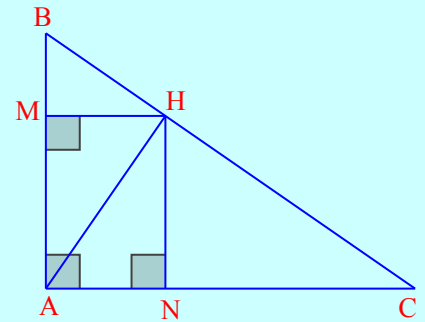
Cho tam giác ABC có $AB = 6cm, AC = 8cm$ và

$$BC = 10cm$$

a) Chứng minh tam giác ABC vuông

b) Tính đường cao AH

c) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Tính HM, HN



Lời giải

a) $\triangle ABC$ có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (vì $10^2 = 6^2 + 8^2$) $\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A (định lý Pythagoras đảo)

b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có: $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ (hệ thức về cạnh và đường cao) $\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8(cm)$

c) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có: $AH^2 = BH \cdot HC$ (hệ thức về cạnh và đường cao)

$$\Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6(cm)$$

$$\Rightarrow CH = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4(cm)$$

+ Vì M, N lần lượt là hình chiếu của H trên $AB, AC \Rightarrow HM \perp AB, HN \perp AC$

+ $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC}$. Do đó các tam giác $\triangle ABH, \triangle ACH$ vuông tại H

+ Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , đường cao HM , có $MH \cdot AB = BH \cdot AH$ (hệ thức về cạnh và đường cao) $\Rightarrow MH = \frac{BH \cdot AH}{AB} = \frac{3,6 \cdot 4,8}{6} = 2,88(cm)$

+ Xét $\triangle ACH$ vuông tại H , đường cao HN , có $HN \cdot AC = AH \cdot CH$ (hệ thức về cạnh và đường cao) $\Rightarrow HN = \frac{CH \cdot AH}{AC} = \frac{6,4 \cdot 4,8}{8} = 3,84(cm)$.

Bài 10:

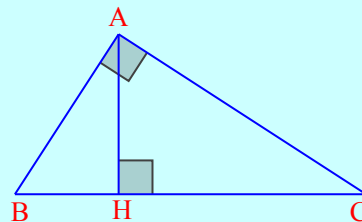
Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao

AH

a) Biết $AC = 16\text{cm}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Tính AB, BC, AH

BH, CH

b) Biết $AH = 14\text{cm}$, $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{4}$. Tính BC

**Lời giải**

a) Có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12(\text{cm})$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pythagore)

$$\Rightarrow BC^2 = 12^2 + 16^2 = 400 \Rightarrow BC = 20(\text{cm})$$

Hơn nữa lại có $AB^2 = BH \cdot BC$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao)

$$\Rightarrow BH = AB^2 : BC = 12^2 : 20 = 7,2(\text{cm})$$

$$HC = BC - BH = 20 - 7,2 = 12,8(\text{cm})$$

Mặt khác $AH^2 = BH \cdot HC = 7,2 \cdot 12,8 = 92,16 \Rightarrow AH = 9,6(\text{cm})$

Vậy $AB = 12\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$, $AH = 9,6\text{cm}$, $BH = 7,2\text{cm}$, $HC = 12,8\text{cm}$

b) Ta có $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{4} \Rightarrow CH = 4BH$ (1)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , có $AH^2 = HB \cdot HC$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $AH^2 = 4HB \cdot HB \Leftrightarrow 14^2 = 4HB^2 \Rightarrow BH^2 = 49 \Rightarrow BH = 7(\text{cm}) \Rightarrow CH = 4 \cdot 7 = 28(\text{cm})$

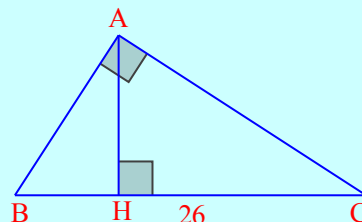
Vậy $BC = BH + HC = 7 + 28 = 35(\text{cm})$.

Bài 11:

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao

AH . Biết $BC = 26\text{cm}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$. Tính AB, AC

Và AH, BH, CH



Lời giải

Cách 1: Từ giả thiết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{AC}{12} \Rightarrow \frac{AB^2}{25} = \frac{AC^2}{144}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{AB^2}{25} = \frac{AC^2}{144} = \frac{AB^2 + AC^2}{25 + 144} = \frac{BC^2}{169} = \frac{26^2}{169} = 4$

$$\Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{AC}{12} = 2 \Rightarrow AB = 10(cm), AC = 24(cm)$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = AB^2 : BC = 10^2 : 26 = \frac{50}{13}(cm)$

$$\Rightarrow HC = BC - BH = 26 - \frac{50}{13} = \frac{288}{13}(cm)$$

$$\text{Mặt khác } AH^2 = BH \cdot CH = \frac{50}{13} \cdot \frac{288}{13} = \frac{14400}{13^2} \Rightarrow AH = \frac{120}{13}(cm)$$

$$\text{Vậy } AB = 10cm, AC = 24cm, AH = \frac{120}{13}cm, BH = \frac{50}{13}cm, HC = \frac{288}{13}cm$$

Cách 2: Dùng phương pháp đại số

$$\text{Từ giả thiết } \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{AC}{12}$$

$$\text{Đặt } \frac{AB}{5} = \frac{AC}{12} = k (k > 0) \Rightarrow AB = 5k, AC = 12k$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pitago)

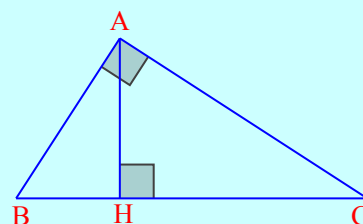
$$\text{Hay } 26^2 = (5k)^2 + (12k)^2 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 (k > 0)$$

Suy ra $AB = 10cm, AC = 24cm$.

Bài 12:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết

$$AH = 12cm, \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}. \text{ Tính } AB, AC, BC, BH, CH$$



Lời giải

Từ giả thiết $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$

Đặt $\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = k (k > 0) \Rightarrow AB = 3k (cm); AC = 4k (cm)$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2 \Rightarrow BC = 5k (cm)$$

+ $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ (hệ thức về cạnh và đường cao)

$$\Rightarrow 12.5k = 3k.4k \Rightarrow 60k = 12k^2 \Rightarrow 12k^2 - 60k = 0 \Leftrightarrow k = 5$$

Do đó $AB = 3.5 = 15 (cm); AC = 4.5 = 20 (cm); BC = 5.5 = 25 (cm)$

Mặt khác $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{15^2}{25} = 9 (cm)$

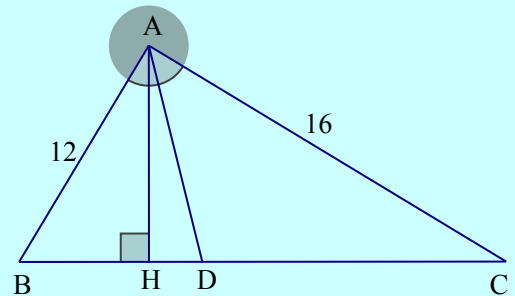
+ $CH = BC - BH = 25 - 9 = 16 (cm)$

Vậy $AB = 15 (cm), AC = 20 (cm), BH = 9 (cm), CH = 16 (cm)$

Bài 13:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao, phân giác trong AD . Biết $BD = 75cm, DC = 100cm$.

Tính BH, CH



Lời giải

Cách 1: Ta có $BC = BD + DC = 75 + 100 = 175 (cm)$

$\triangle ABC$ có AD là phân giác $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{25} = \frac{BC^2}{25} = \frac{175^2}{25} = 1225$

$$\Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = 35 \Rightarrow AB = 3.35 = 105 (cm); AC = 4.35 = 140 (cm)$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có: $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = AB^2 : BC = 105^2 : 175 = 63(cm)$

$$CH = BC - BH = 175 - 63 = 112(cm)$$

Vậy $BH = 63cm, CH = 112cm$

Cách 2:

$\triangle ABC$ có AD là phân giác $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có:

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = CH \cdot BC \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot BC} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow BH = \frac{9}{16}CH \quad (1)$$

$$\text{Hơn nữa } BC = BD + DC = 75 + 100 = 175(cm)$$

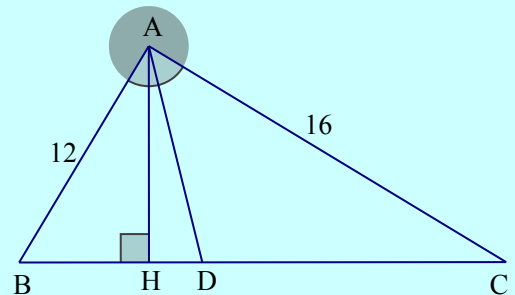
$$\text{Do đó } BH + CH = 175(cm) \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được } \frac{9}{16}CH + CH = 175 \Leftrightarrow \frac{25}{16}CH = 175 \Leftrightarrow CH = 112(cm)$$

$$\Rightarrow BH = 175 - 112 = 63(cm).$$

Bài 14:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), biết $AB = 12cm; AC = 16cm$, Phân giác trong AD . Tính độ dài đoạn HD



Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (pytago)

$$\Rightarrow BC = 20(cm)$$

+) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

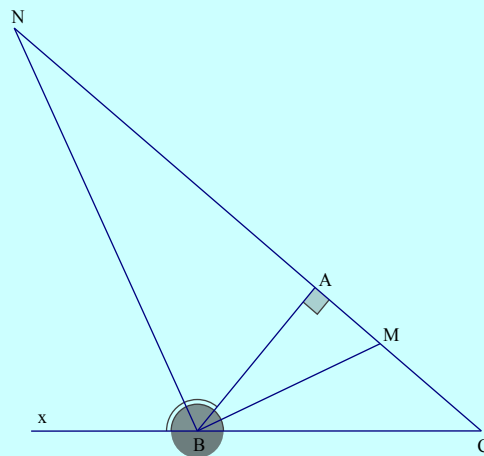
$$AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{12^2}{20} = 7,2(cm)$$

$$\text{+) Ta có } AD \text{ là phân giác của } \widehat{BAC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BD}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{20}{7}(cm)$$

$$\Rightarrow DB = \frac{20}{7} \cdot 3 = \frac{60}{7} (cm) \Rightarrow HD = DB - BH = \frac{60}{7} - \frac{36}{5} = \frac{552}{35} (cm).$$

Bài 15:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 6cm$, $BC = 10cm$. Phân giác trong và ngoài tại đỉnh B cắt AC lần lượt tại M và N . Tính BM , BN



Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 (\text{pytago}) \Rightarrow AC = 8(cm)$$

+) Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AM}{3} = \frac{MC}{5} = \frac{AC}{8} = 1 \Rightarrow AM = 3(cm)$$

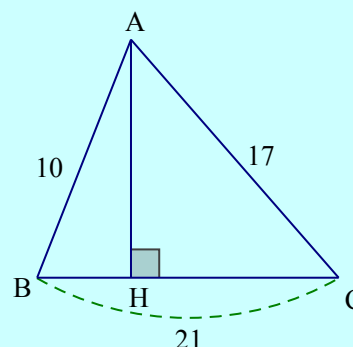
+) Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông BMN , ta có:

$$AB^2 = AM \cdot AN \Rightarrow 36 = 3 \cdot AN \Rightarrow AN = 12(cm); MN = AM + AN = 15(cm)$$

$$BM^2 = MN \cdot AM = 15 \cdot 3 \Rightarrow BM = 3\sqrt{5}(cm); BN^2 = MN \cdot AN = 15 \cdot 12 \Rightarrow BN = 6\sqrt{5}(cm).$$

Bài 16:

Tính diện tích tam giác có độ dài ba cạnh là $10cm, 17cm, 21cm$



Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có $AB = 10\text{cm}$, $BC = 21\text{cm}$, $CA = 17\text{cm}$

Kẻ đường cao $AH \perp BC \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot AH$

Gọi $BH = x(\text{cm})(x > 0)$ thì $HC = 21 - x$

Áp dụng hệ pytago cho hai tam giác vuông ABH , AHC ta được:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - x^2 \quad (1); AH^2 = AC^2 - CH^2 = 17^2 - (21 - x)^2 \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra: $17^2 - (21 - x)^2 = 10^2 - x^2 \Rightarrow 42x = 252 \Rightarrow x = 6$

Thay $x = 6$ vào (1) ta được: $AH^2 = 8^2 \Leftrightarrow AH = 8(\text{cm})(AH > 0)$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 84(\text{cm}^2)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

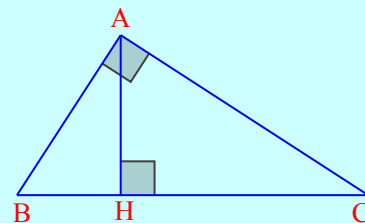
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH

a) Biết $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Tính BH , CH , AH

và BC

b) Biết $BH = 9\text{cm}$, $CH = 16\text{cm}$.

Tính AB , AC , BC , AH



Lời giải

a) Dùng định lí Pitago tính được $BC = 5\text{cm}$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao tính được $AH = 2,4\text{cm}$, $BH = 1,8\text{cm}$, $CH = 3,2\text{cm}$

b) Có $BC = BH + HC = 9 + 16 = 25(\text{cm})$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao ta tính được $AH = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$

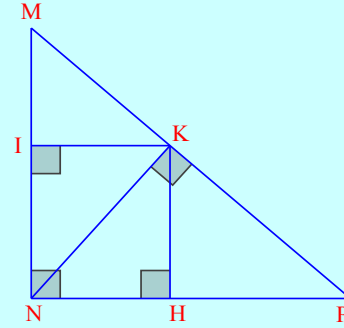
Bài 2:

Cho $\triangle MNP$ có $MN = 3cm, NP = 4cm, MP = 5cm$

a) Chứng minh tam giác MNP là tam giác vuông

b) Tính đường cao NK

c) Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của K trên MN, NP . Tính IK, HK



Lời giải

a) Dùng định lý Pitago đảo, chỉ ra $\triangle MNP$ vuông tại N

b) $\triangle MNP$ vuông tại N , đường cao NK . Tính được $NK = 2,4cm$

c) Tính được $MK = 1,8cm, KP = 3,2cm$

$\triangle MNK$ vuông tại K , đường cao KI , tính được $KI = 1,44cm$

$\triangle NKP$ vuông tại K , đường cao KH , tính được $HK = 1,92cm$.

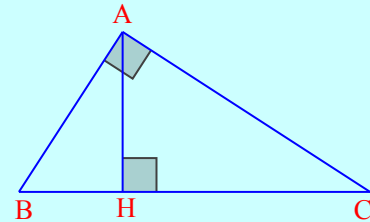
Bài 3:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH

a) Biết $AB = 30cm, \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$.

Tính AC, BC, AH, BH, CH

b) Biết $AH = 6cm, \frac{HB}{HC} = \frac{9}{16}$. Tính BC



Lời giải

a) $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} \Rightarrow AC = \frac{4}{3} AB = 40(cm)$

Áp dụng định lý Pitago tính được $BC = 50(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao, tính được $AH = 24cm, BH = 18cm, CH = 32cm$

b) $\frac{HB}{HC} = \frac{9}{16} \Rightarrow HB = \frac{9}{16} HC$

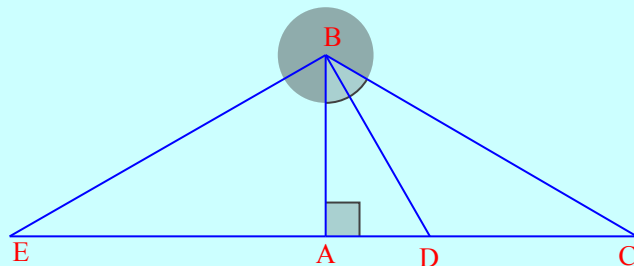
Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao,

$$\text{có } AH^2 = HB.HC \Rightarrow 6^2 = \frac{9}{16} HC.HC \Rightarrow HC^2 = 64 \Rightarrow HC = 8(cm)$$

$$\Rightarrow HB = 4,5(cm) \Rightarrow BC = 12,5(cm).$$

Bài 4:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 6cm, AC = 8cm$. Các đường phân giác trong và ngoài góc B cắt đường thẳng AC tại D và E . Tính AD, AE



Lời giải

Áp dụng định lý Pitago cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 10(cm)$

Mặt khác $\triangle ABC$ có phân giác trong $BD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{3} = \frac{DC}{5}$

Đặt $\frac{AD}{3} = \frac{DC}{5} = k (k > 0) \Rightarrow AD = 3k; DC = 5k$

Mà $AD + DC = AC \Rightarrow 3k + 5k = 8 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow AD = 3cm, DC = 5cm$

Hơn nữa $\triangle ABC$ có phân giác ngoài $BE \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AE}{3} = \frac{EC}{4}$

Đặt $\frac{AE}{3} = \frac{EC}{4} = h (h > 0) \Rightarrow AE = 3h, EC = 4h$

Mà $AE + AC = EC \Rightarrow 3h + 8 = 4h \Rightarrow h = 8 \Rightarrow AE = 3.8 = 24(cm).$

Dạng 2: Tính chu vi, diện tích các hình

Cách giải:

Bước 1: Hình cần tính chu vi, diện tích là hình gì?

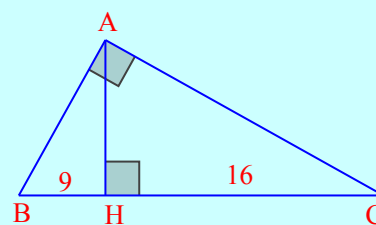
Bước 2: Viết công thức tính chu vi, diện tích của hình đó

Bước 3: Tính độ dài các đoạn thẳng chưa biết (đã học ở dạng 1)

Bước 4: Thay số và tính chu vi, diện tích. Kết luận.

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$). Biết $BH = 9cm$, $CH = 16cm$. Tính chu vi và diện tích của $\triangle ABC$



Lời giải

Ta có $BC = 9 + 16 = 25(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , có:

$$AB^2 = BH \cdot BC = 9 \cdot 25 \Rightarrow AB = \sqrt{9 \cdot 25} = 15(cm)$$

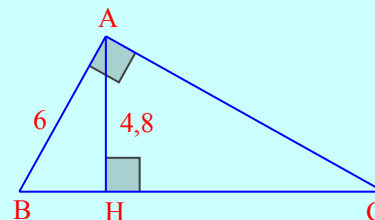
$$AC^2 = CH \cdot BC = 16 \cdot 25 \Rightarrow AC = \sqrt{16 \cdot 25} = 20(cm)$$

Chu vi của $\triangle ABC$ là $AB + BC + CA = 15 + 20 + 25 = 60(cm)$

Diện tích của $\triangle ABC$ là $\frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150(cm^2)$

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$). Biết $AB = 6cm$, $AH = 4,8cm$. Tính chu vi và diện tích của $\triangle ABC$



Lời giải

Cách 1: Vì $AH \perp BC$ nên $\widehat{AHB} = 90^\circ$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , có $AB^2 = AH^2 + BH^2$ (Định lý Pitago) $\Rightarrow BH = 3,6(cm)$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , có $AH^2 = BH \cdot BC$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao)

$$\Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{6^2}{3,6} = 10(cm)$$

Hơn nữa $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Định lý Pitago)

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow AC = 8(cm)$$

Chu vi của $\triangle ABC$ là $AB + BC + CA = 6 + 8 + 10 = 24(cm)$

Diện tích của $\triangle ABC$ là $\frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24(cm^2)$

Cách 2:

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{4,8^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AC = 8(cm)$

$$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow AC = 8(cm)$$

Chu vi của $\triangle ABC$ là $AB + BC + CA = 6 + 8 + 10 = 24(cm)$

Diện tích của $\triangle ABC$ là $\frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24(cm^2)$

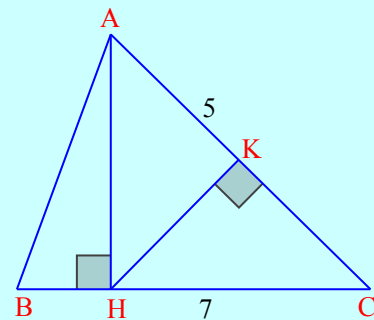
Bài 3:

Cho $\triangle ABC$ có $AC = 5cm, BC = 7cm$

a) Gọi H là hình chiếu của A trên BC và biết

$HC = 4cm$. Tính AH và diện tích $\triangle ABC$

b) Gọi K là hình chiếu của H trên AC . Tính chu vi tứ giác $ABHK$



Lời giải

a) Vì H là hình chiếu của A trên BC nên $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H có $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AH = 3(cm)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 10,5 (cm^2)$$

b) Có $BH = BC - HC = 7 - 4 = 3 (cm)$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H có $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = 3\sqrt{2} (cm)$

Vì K là hình chiếu của H trên AC nên $HK \perp AC$ tại $K \Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{CKH} = 90^\circ$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , đường cao HK có $AH^2 = AK \cdot AC \Rightarrow AK = AH^2 : AC = 3^2 : 5 = 1,8 (cm)$

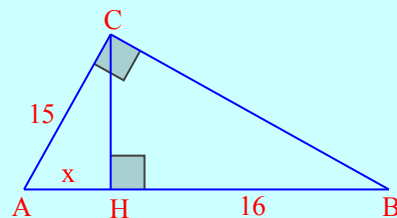
$$\Rightarrow KC = AC - AK = 5 - 1,8 = 3,2 (cm)$$

Hơn nữa $HK^2 = AK \cdot KC = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76 \Rightarrow HK = 2,4 (cm)$

Vậy chu vi của tứ giác $ABHK$ là $AB + AK + HK + HB = 3\sqrt{2} + 1,8 + 2,4 + 3 \approx 11,443 (cm)$.

Bài 4:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại C , đường cao CH . Biết $AC = 15cm, BH = 16cm$. Tính diện tích $\triangle ABC$.



Lời giải

Đặt $AH = x (cm), x > 0 \Rightarrow AB = x + 16 (cm)$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại C , đường cao CH có $AC^2 = AH \cdot AB$ (hệ thức về cạnh và đường cao)

$$\Rightarrow 15^2 = x(x + 16) \Leftrightarrow (x - 9)(x + 25) = 0 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $AH = 9cm, AB = 9 + 16 = 25 (cm)$

Hơn nữa $CH^2 = AH \cdot HB = 9 \cdot 16 \Rightarrow CH = \sqrt{9 \cdot 16} = 12 (cm)$

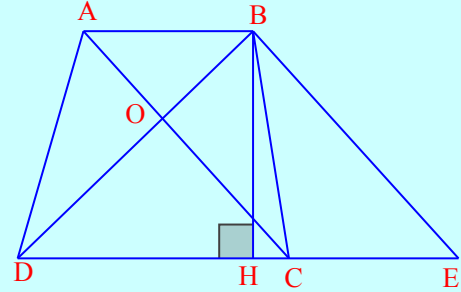
Diện tích $\triangle ABC$ là $\frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 25 = 150 (cm^2)$.

Bài 5:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau tại O

a) Chứng minh $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

b) Biết $BD = 5\text{cm}$, đường cao $BH = 4\text{cm}$. Tính diện tích hình thang $ABCD$



Lời giải

a) Ta có $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2} AO \cdot BD + \frac{1}{2} CO \cdot BD = \frac{1}{2} BD (AO + CO) = \frac{1}{2} BD \cdot AC$

b) Kẻ $BE \parallel AC$ ($E \in DC$)

mà $AB \parallel CD, E \in DC \Rightarrow AB \parallel CE$ do đó tứ giác $ABEC$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow AC = BE$ (tính chất hình bình hành)

Xét $\triangle BHD$ vuông tại H có $BD^2 = BH^2 + HD^2$ (Pythagore)

$\Rightarrow 5^2 = 4^2 + HD^2 \Rightarrow HD = 3(\text{cm})$

Vì $BD \perp AC$ và $AC \parallel BE \Rightarrow BD \perp BE \Rightarrow \widehat{DBE} = 90^\circ$

Xét $\triangle DBE$ vuông tại B , đường cao BH có $BH^2 = HD \cdot HE \Rightarrow 4^2 = 3 \cdot HE \Rightarrow HE = \frac{16}{3}(\text{cm})$

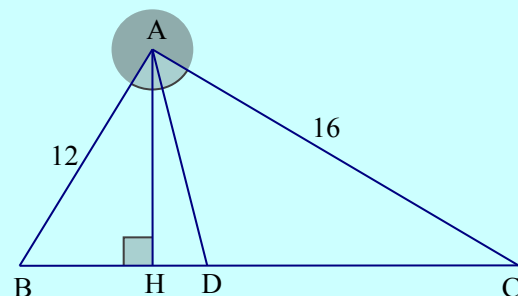
$BE^2 = HE \cdot (HD + HE) = \frac{16}{3} \cdot \left(3 + \frac{16}{3}\right) = \frac{400}{9} \Rightarrow BE = \frac{20}{3}(\text{cm})$

Do đó $AC = \frac{20}{3}(\text{cm})$. Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot 5 = \frac{50}{3}(\text{cm}^2)$.

Bài 6:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), biết $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$; $AH = 420(\text{cm})$,

Tính chu vi $\triangle ABC$?



Lời giải

Ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21} \Rightarrow \frac{AB}{20} = \frac{AC}{21} = k (k > 0) \Rightarrow AB = 20k; AC = 21k$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow 420 \cdot BC = 20 \cdot 21 \cdot k^2 = 420k^2 \Rightarrow BC = k^2$$

Lại có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 400k^2 + 441k^2 = 841k^2 = (29k)^2 \Rightarrow \begin{cases} BC = 29k \\ BC = k^2 \end{cases} \Rightarrow k^2 = 29k \Leftrightarrow k = 29$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = 580(cm) \\ AC = 609(cm) \\ BC = 841(cm) \end{cases} \Rightarrow P_{ABC} = 2030(cm)$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

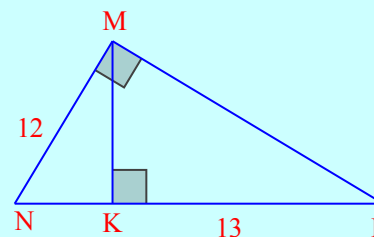
Bài 1:

Cho $\triangle MNP$ vuông tại M , $MN = 12cm$, $NP = 13cm$

, đường cao MK

a) Tính MK, MN, KP

b) Tính diện tích $\triangle MNP$



Lời giải

a) Áp dụng định lý Pitago, tính được $MP = 5(cm)$

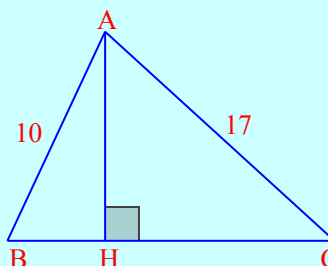
Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao, tính được $MK = \frac{60}{13}(cm)$, $NK = \frac{144}{13}(cm)$, $KP = \frac{25}{13}(cm)$

b) $S_{MNP} = 30(cm^2)$

Bài 2:

Tính diện tích tam giác ABC có

$$AB = 10cm, AC = 17cm, BC = 21cm$$



Lời giải

Kẻ $AH \perp BC$ tại H và đặt $BH = x(cm)$, $x > 0 \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ và $HC = 21 - x(cm)$

Hơn nữa $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H có $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2$ (1)

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H có $AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AH^2 = AC^2 - CH^2$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2 \Leftrightarrow 10^2 - x^2 = 17^2 - (21 - x)^2 \Leftrightarrow x = 6$ (thỏa mãn)

Vậy $BH = 6(cm)$

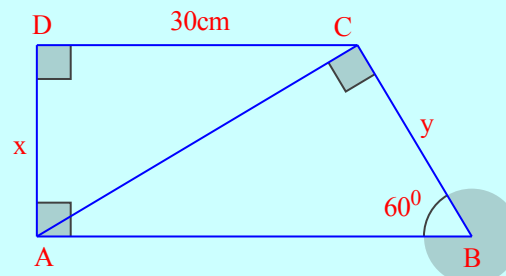
Ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow AH = 8(cm)$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.8.21 = 84(cm^2)$.

Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$

$CD = 30cm$, $CA \perp CB$. Tính diện tích hình thang $ABCD$



Lời giải

a) Cách 1: Dùng phương pháp đại số hóa

Ta có $\widehat{CAB} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (1)

Hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow DC \parallel AB \Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{CAB}$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{DCA} = 30^\circ$

Đặt $AD = x(cm)$, $x > 0$

Xét $\triangle ADC$ vuông tại D có $\widehat{DCA} = 30^\circ \Rightarrow AD = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AC = 2AD = 2x(cm)$

Hơn nữa $AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow (2x)^2 = x^2 + 30^2 \Rightarrow x^2 = 300 \Rightarrow x = AD = 10\sqrt{3}(cm)$

$$\Rightarrow AC = 2x = 20\sqrt{3} (cm)$$

Đặt $BC = y (cm), y > 0$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại C , có $\widehat{CAB} = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = 2BC = 2y (cm)$

Lại có $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow (2y)^2 = (20\sqrt{3})^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 400 \Rightarrow y = BC = 20 (cm)$

$$\Rightarrow AB = 2BC = 40 (cm)$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(30 + 40) \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 350\sqrt{3} (cm^2)$$

b) Cách 2: Chỉ ra $AC = 2AD$

Tính được $AD = 10\sqrt{3} (cm)$

Kẻ $CH \perp AB$ tại H

Chỉ ra được $ADCH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CH = AD = 10\sqrt{3} (cm), HA = CD = 30 (cm)$

Hơn nữa $CH^2 = HA \cdot HB \Rightarrow HB = \frac{CH^2}{HA} = 10 (cm) \Rightarrow AB = HA + HB = 40 (cm)$

Tính được $S_{ABCD} = 350\sqrt{3} (cm^2)$.

Dạng 3: Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông

Cách giải: Sử dụng các hệ thức về cạnh và đường cao một cách hợp lý theo 3 bước:

Bước 1: Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức

Bước 2: Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao

Bước 3: Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

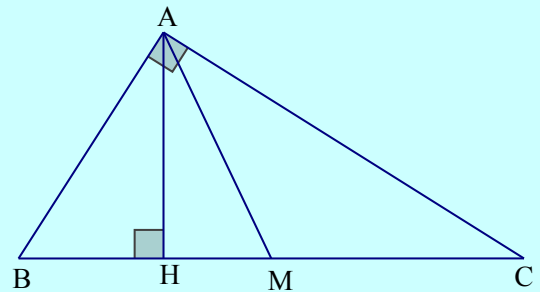
Chứng minh rằng:

a. $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$

b. Về trung tuyến AM của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

+) $AB^2 + AC^2 = \frac{BC^2}{2} + 2AM^2$

+) $AC^2 - AB^2 = 2 \cdot BC \cdot HM$ ($AC > AB$)



Lời giải

a) Xét tam giác vuông HAB và tam giác vuông HAC , theo định lý Pythagore ta có:

$$AB^2 - BH^2 = AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

b) Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ABC , ta có:

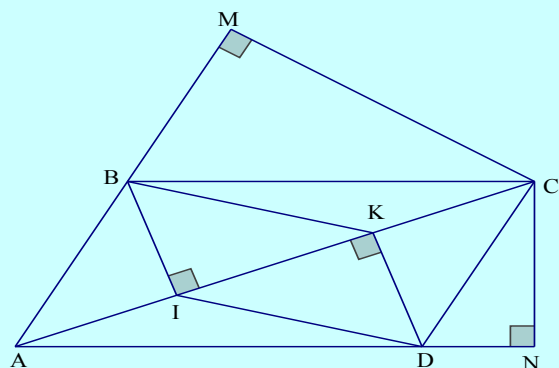
$$AB^2 + AC^2 = BC^2; \frac{BC^2}{2} + 2AM^2 = \frac{BC^2}{2} + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{2} + \frac{BC^2}{2} = BC^2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 2:

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc nhọn A .

Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, D trên đường chéo AC . Gọi M, N là hình chiếu của C trên các đường thẳng AB, AD . Chứng minh rằng:

a. $AK = IC$



b. Tứ giác $BIDK$ là hình bình hành

c. $AC^2 = AD \cdot AN + AB \cdot AM$

Lời giải

a) Ta có: $AK = AI + IK; IC = IK + KC \Rightarrow AK = IC$ (đpcm)

b) Xét tứ giác $BIDK$, có: $\begin{cases} BI \parallel DK \\ BI = KD \end{cases} \Rightarrow \diamond BIDK$ là hình bình hành.

c) Ta có: $\triangle AKD \# \triangle ANC (g.g); \triangle ABI \# \triangle ACM (g.g) \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AN + AB \cdot AM$ (đpcm).

Bài 3:

Cho $AB = 2a$ cố định. O là trung điểm của AB , về cùng một phía của AB ta vẽ hai tia Ax, By , trong đó $AB \perp By, AB \perp Ax$. Lấy điểm C thuộc Ax , D thuộc By sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$ ($AC \leq BD$). Hạ OM vuông góc với CD , nối OC cắt AM tại E , nối OD cắt BM tại F .

a. Chứng minh CO và DO là phân giác của $\widehat{ACD}; \widehat{BCD}$

b. Chứng minh tam giác MAB vuông tại M

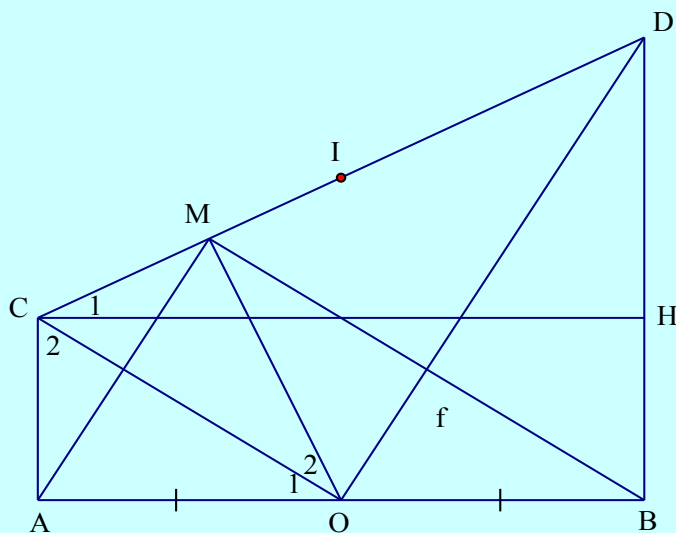
c. Chứng minh tứ giác $OEMF$ là hình chữ nhật

d. $OE \cdot OC = OF \cdot OD$

e. Cho C và D chuyển động mà $\widehat{COD} = 90^\circ$. Chứng minh $AC \cdot BD$ không đổi

f. Cho $\widehat{MBA} = 30^\circ$. Tính AC và BD theo a

g. Xác định vị trí của C để cho: $\tan \widehat{CDB} = 3$



Lời giải

a. Từ giả thiết suy ra $AC \parallel BD$ vì cùng $\perp AB$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang.

Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang $ABCD$

$$\Rightarrow OI \parallel AC \Rightarrow \widehat{IOC} = \widehat{C_2} \text{ (so le trong)}$$

Ta có $\triangle COD$ vuông tại O (giả thiết)

$$IC = ID \Rightarrow IO = IC \Rightarrow \widehat{IOC} = \widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow CO \text{ là phân giác } \widehat{ACD}$$

Tương tự: DO là phân giác của góc $\widehat{BDC}$

b) Theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow OM = OA = OB \Rightarrow MO = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle MAB$ vuông tại M

c) $\triangle OMC$ vuông tại M và $\triangle OAC$ vuông tại A , mà $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (chứng minh trên)

$$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MOC} = \widehat{AOC} \\ OM = OA \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow OC \perp AM = E$$

$$\text{d) + e). Ta có: } \widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle BDO \Rightarrow \frac{AO}{BD} = \frac{AC}{BO} \Rightarrow AC \cdot BD = AO \cdot BO = a^2$$

$$\text{f) Ta có: } OC \parallel MB (\perp AM) \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{MBO} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow AC = AO \cdot \tan 30^\circ = a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}; AC \cdot BD = a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$$

g) Hạ $CH \perp BD$, đặt $AC = x (x > 0)$

Tứ giác $ACHD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BH = x; CH = AB = 2a$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{CDB} = 3 \Leftrightarrow \frac{CH}{HD} = 3 \Leftrightarrow DH = \frac{CH}{3} = \frac{2a}{3} \Rightarrow BD = \frac{2a}{3} + x$$

Theo chứng minh trên: $AC \cdot BD = a^2$

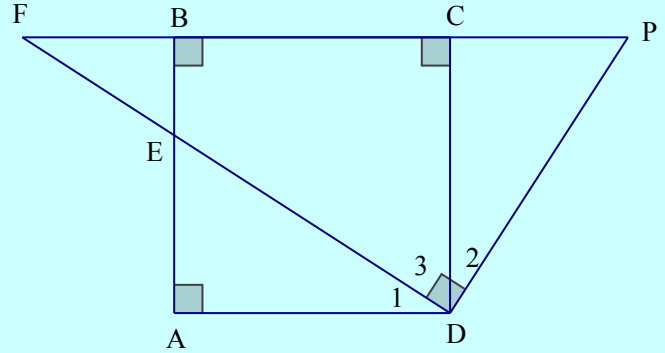
$$\Leftrightarrow x \cdot \left(x + \frac{2a}{3} \right) = a^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2ax}{3} = a^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{9} = a^2 + \frac{a^2}{9} \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{3} \right)^2 = \frac{10a^2}{9} (x, a > 0)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{a}{3} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a(\sqrt{10} - 1)}{3} \Rightarrow AC = \frac{a(\sqrt{10} - 1)}{3}.$$

Bài 4:

Cho hình vuông $ABCD$, một điểm E bất kỳ thuộc cạnh AB . Gọi F là giao điểm của DE và BC . Chứng minh rằng: $\frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2}$ không đổi.



Lời giải

Dựng qua D đường thẳng vuông góc với DE cắt BC tại P

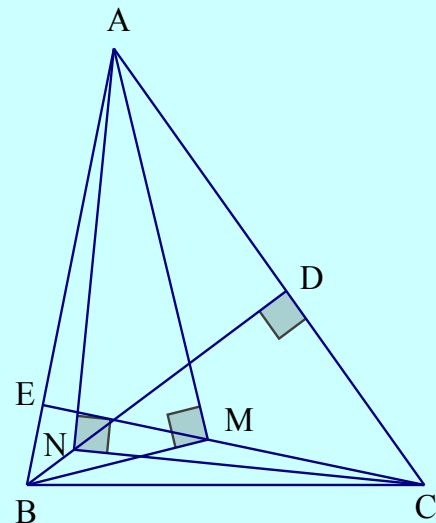
Tam giác DPF , có: $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{DP^2} + \frac{1}{DF^2}$, mà $CD = DA$; $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (cùng phụ với $\widehat{D_3}$)

$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle DCP \Rightarrow DE = DP$

Vậy $\frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2} = \frac{1}{DA^2}$ (đpcm).

Bài 5:

Cho tam giác nhọn ABC , BD và CE là hai đường cao. Các điểm N, M trên các đường thẳng BD, CE sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ cân.



Lời giải

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$$\widehat{BAD}: \text{chung}; \widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AE \cdot AB = AD \cdot AC (1)$$

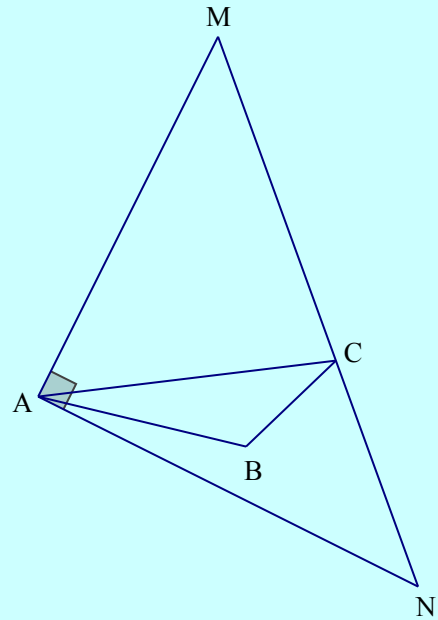
$\triangle AMB$ vuông tại M (gt), ME là đường cao, theo hệ thức liên quan tới đường cao có:

$$AM^2 = AE \cdot AB (2). \text{ Tương tự ta có: } AN^2 = AD \cdot AC (3)$$

Từ (1)(2)(3) có: $AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân.

Bài 6:

Cho đoạn thẳng $AB = 4\text{cm}$. C là điểm di động sao cho $BC = 3\text{cm}$. Vẽ tam giác AMN vuông tại A có AC là đường cao. Xác định vị trí điểm C để $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải

Xét $\triangle AMN$ vuông tại A , AC là đường cao (gt)

Theo hệ thức liên quan đường cao trong tam giác vuông, ta có:

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AC^2}$$

Xét ba điểm A, B, C ta có: $AC \geq |AB - BC|$; $AC \geq 1(\text{cm})$

Do vậy: $\frac{1}{AC} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{AC^2} \leq 1$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi C nằm giữa A và B

Vậy khi C nằm giữa A và B sao cho $BC = 3\text{cm}$ thì $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 7:

Cho ΔABC có ba cạnh tỉ lệ với 3,4,5 và chu vi tam giác đó là 48(cm). Chứng minh rằng ΔABC vuông

Lời giải

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \\ a + b + c = 48 \end{cases}$$

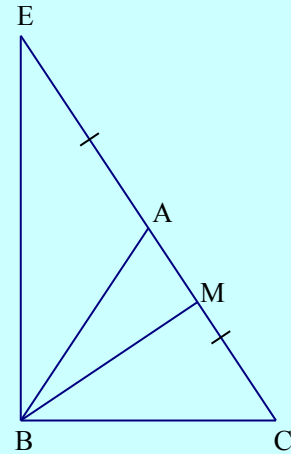
$$\text{Ta có: } \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{12} = \frac{48}{12} = 4 \Leftrightarrow a = 12; b = 16; c = 20$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 12^2 + 16^2 = 400(1) \\ c^2 = 20^2 = 400(2) \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông.}$$

Bài 8:

Cho ΔABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$), kẻ $BM \perp CA$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{AM}{MC} = 2 \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 - 1$$



Lời giải

Lấy E đối xứng với C qua A thì ΔBCE vuông tại B

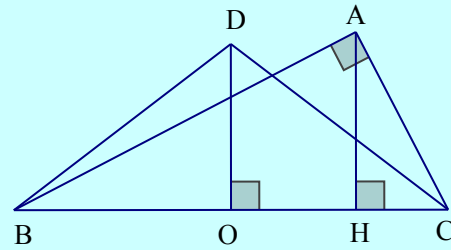
$$\text{Áp dụng hệ thức về cạnh } b'^2 = b'.a \text{ ta được: } BC^2 = MC.ME \Rightarrow MC = \frac{BC^2}{CE} = \frac{BC^2}{2AC} (1)$$

$$\text{Mặt khác } AM = AC - CM = AC - \frac{BC^2}{2AC} = \frac{2AC^2 - BC^2}{2AC} (2)$$

$$\text{Chia (1) cho (2) theo từng vế ta được: } \frac{AM}{MC} = \frac{2AC^2 - BC^2}{BC^2} = 2 \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 - 1 \text{ (đpcm).}$$

Bài 9:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A với đường cao AH .
Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A lấy điểm D sao cho $DB = DC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng BD, DH và HA là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.



Lời giải

Gọi O là trung điểm của BC

Đặt $OB = OC = R > 0$, do $DB = DC = \frac{AB}{R\sqrt{2}}$ (gt) $\Rightarrow DO$ là đường trung trực của đoạn BC hay $\triangle DOC$ vuông tại O .

Gọi $HC = x \Rightarrow OH = R - x; BH = 2R - x$

Áp dụng hệ thức pytago vào $\triangle DOC$ và $\triangle DOH$ vuông tại O , ta được:

$$DC^2 = OC^2 + DO^2 = R^2 + DO^2 \quad (2); \quad DH^2 = DO^2 + OH^2 = DO^2 + (R - x)^2 \Rightarrow DO^2 = DH^2 - (R - x)^2 \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được: $DC^2 = R^2 + DH^2 - R^2 + 2Rx - x^2 = DH^2 + AH^2 \quad (4)$

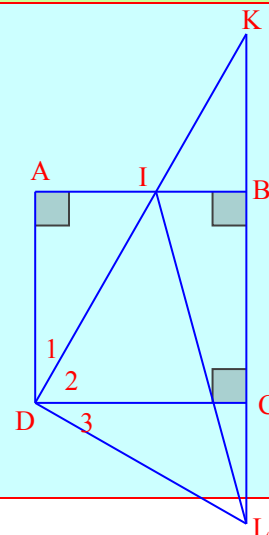
Lại có $DC = DB \Rightarrow BD^2 = DH^2 + AH^2 \Rightarrow BD, DH, HA$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông (theo định lý Pytago đảo).

Bài 10:

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B . Tia DI và tia CB cắt nhau ở K . Kẻ đường thẳng qua D , vuông góc với DI . Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L . Chứng minh rằng

a) Tam giác DIL là tam giác cân

b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi



trên cạnh AB .

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông (giả thiết)

$\Rightarrow AD = CD$ và $\widehat{ADC} = \widehat{DCB} = 90^\circ$ (tính chất hình vuông)

Lại có $\widehat{DCL} + \widehat{DCB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DCL} = 90^\circ$

Mặt khác $\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = \widehat{ADC} = 90^\circ$; $\widehat{D}_3 + \widehat{D}_2 = \widehat{IDL} = 90^\circ$ ($DL \perp DI$) $\Rightarrow \widehat{D}_3 = \widehat{D}_1$ (phụ $\widehat{D}_2$)

Xét $\triangle ADI$ và $\triangle CDL$, có $\left. \begin{array}{l} \widehat{DAI} = \widehat{DCL} = 90^\circ \\ AD = DC \\ \widehat{D}_1 = \widehat{D}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADI = \triangle CDL (g.c.g) \Rightarrow DI = DL \Rightarrow \triangle DIL$ cân tại D

b) Xét $\triangle DKL$ vuông tại D , đường cao DC có $\frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}$ (hệ thức cạnh và đường cao)

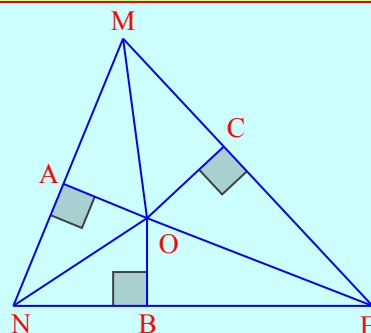
mà $DI = DL \Rightarrow \frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}$

hơn nữa DC là cạnh hình vuông $ABCD$ nên DC không đổi

Vậy $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB .

Bài 11:

Cho $\triangle MNE$. Từ một điểm O bất kỳ nằm trong tam giác kẻ OA, OB, OC lần lượt vuông góc với $MN < NE, EM$ (A thuộc MN , B thuộc NE , C thuộc EM). Chứng minh rằng $MA^2 + NB^2 + EC^2 = AN^2 + BE^2 + CM^2$



Lời giải

Ta có $OA \perp MN$ tại $A \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OAN} = 90^\circ$

$OB \perp NE$ tại $B \Rightarrow \widehat{OBN} = \widehat{OBE} = 90^\circ$; $OC \perp ME$ tại $C \Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OCM} = 90^\circ$

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông $\triangle OAM, \triangle OBN, \triangle OBE, \triangle OCE, \triangle OCM$, có:

$$MO^2 = MA^2 + OA^2 = MC^2 + OC^2 \quad (1); \quad NO^2 = OB^2 + NB^2 = OA^2 + AN^2 \quad (2)$$

$$EO^2 = OC^2 + EC^2 = OB^2 + BE^2 \quad (3)$$

Cộng (1)(2)(3) theo vế ta được:

$$MA^2 + OA^2 + OB^2 + NB^2 + OC^2 + EC^2 = MC^2 + OC^2 + OA^2 + AN^2 + OB^2 + BE^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + NB^2 + EC^2 = AN^2 + BE^2 + CM^2 \quad (\text{đpcm}).$$

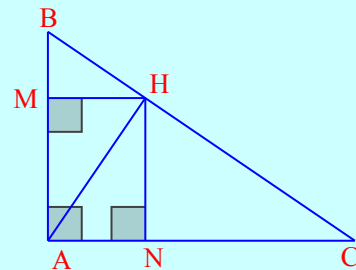
Bài 12:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Chứng minh rằng

a) $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

b) $\frac{HB}{HC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2$

c) $HB \cdot HC = MA \cdot MB + NA \cdot NC$



Lời giải

a) Ta có AH là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

Có M, N lần lượt là hình chiếu của H trên $AB, AC \Rightarrow HM \perp AB, HN \perp AC$ tại M, N

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , đường cao HM có $AH^2 = AM \cdot AB$ (1)

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , đường cao HN có $AH^2 = AN \cdot AC$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có $AB^2 = BH \cdot BC$; $AC^2 = CH \cdot CB \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot CB} = \frac{BH}{CH}$

hay $\frac{HB}{HC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2$

c) Xét $\triangle AHB$ vuông tại H đường cao HM có $HM^2 = MA \cdot MB$ (3)

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H đường cao HN có $HN^2 = NA \cdot NC$ (4)

Từ (3)(4) $\Rightarrow MA \cdot MB + NA \cdot NC = HM^2 + HN^2$ (5)

$\triangle MHN$ vuông tại $H \Rightarrow HM^2 + HN^2 = MN^2$ (6)

Từ (5)(6) $\Rightarrow MA \cdot MB + NA \cdot NC = MN^2$ (7)

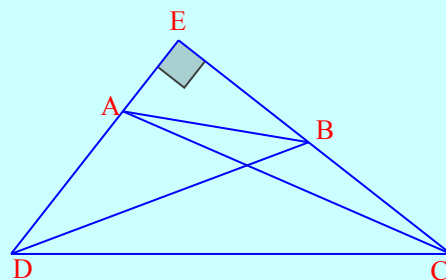
Tứ giác $AMHN$ có $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} = \widehat{MAN} = 90^\circ \Rightarrow \diamond AMNH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = MN$ (8)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có: $AH^2 = HB \cdot HC$ (9)

Từ (7)(8)(9) suy ra $HB.HC = MA.MB + NA.NC$.

Bài 13:

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$



Lời giải

Vì $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ < 180^\circ$ nên hai đường thẳng AD và BC cắt nhau

Gọi E là giao điểm của AD và BC

Xét $\triangle DCE$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCE} = 90^\circ$

Áp dụng định lý Pitago ta có:

$$\triangle ABE \text{ vuông tại } E \Rightarrow AB^2 = AE^2 + BE^2$$

$$\triangle DCE \text{ vuông tại } E \Rightarrow DC^2 = DE^2 + CE^2$$

$$\triangle ACE \text{ vuông tại } E \Rightarrow AC^2 = AE^2 + CE^2$$

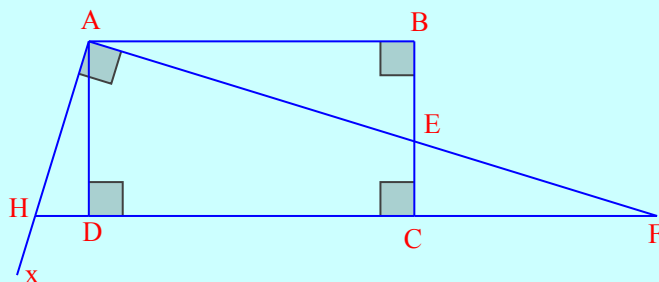
$$\triangle BDE \text{ vuông tại } E \Rightarrow BD^2 = DE^2 + BE^2$$

$$\text{Do đó } AB^2 + CD^2 = (AE^2 + BE^2) + (DE^2 + CE^2) = (AE^2 + CE^2) + (BE^2 + DE^2) = AC^2 + BD^2.$$

Bài 14:

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Trên cạnh lấy điểm E bất kì. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$$



Lời giải

Kẻ tia $Ax \perp AF$ tại A , cắt đường thẳng CD tại H

Xét $\triangle AHF$ vuông tại A , đường cao AD có $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AF^2}$ (1)

Chỉ ra $\widehat{HAD} = \widehat{EAB}$ (phụ với $\widehat{DAE}$) dẫn đến $\triangle ADH \sim \triangle ABE$ (gg)

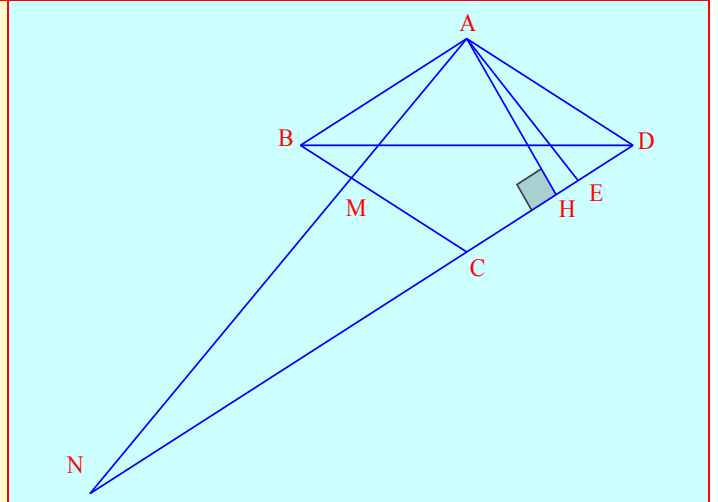
$$\Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} (AB = 2AD) \Rightarrow AH = \frac{1}{2} AE; AD = \frac{1}{2} AB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AH\right)^2} + \frac{1}{AF^2} \Leftrightarrow \frac{4}{AB^2} = \frac{4}{AH^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}.$$

Bài 15:

Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. Tia Ax tạo với góc $\widehat{BAx}$ bằng 15° và cắt cạnh BC tại M , cắt đường thẳng DC tại N . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{4}{3AB^2}.$$



Lời giải

Trên cạnh DC lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{BAD} - (\widehat{DAE} + \widehat{BAx}) = 90^\circ$

Kẻ $AH \perp DC$ tại H

Xét $\triangle AEN$ vuông tại A , đường cao $AH \Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AH^2}$ (1)

$$\triangle DAE = \triangle BAM \text{ (gcg)} \Rightarrow AE = AM \quad (2)$$

$\triangle ADC$ có $\widehat{ADC} = \widehat{DAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADC$ đều

$$\triangle ADH \text{ vuông tại } H \Rightarrow AD^2 = AH^2 + DH^2 \Rightarrow AH^2 = AD^2 - DH^2 = AD^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AD^2 = \frac{3}{4}AB^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{3AB^2} \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) suy ra $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{4}{3AB^2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , có $AB = 9(cm)$, $AC = 12(cm)$. Độ dài ba cạnh AB, BH, CH lần lượt là:

a) $9,6(cm)$

b) $6,9(cm)$

c) $8,6(cm)$

d) $6,8(cm)$

Chọn đáp án A

Giải thích: Ta có:

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác ABC

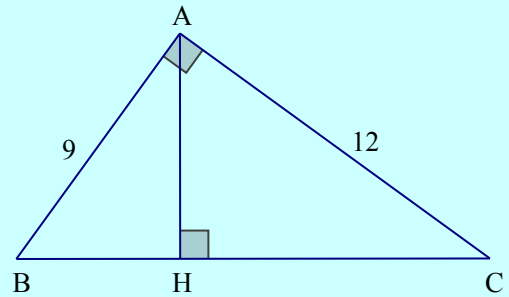
vuông tại A , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$= 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow BC = 15(cm)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow 9^2 = 15BH \Rightarrow BH = \frac{81}{15} = 5,4(cm)$$

$$\text{Ta có: } CH = BC - BH = 15 - 5,4 = 9,6(cm).$$



Câu 2: Cho $\triangle OEF$ vuông tại O , đường cao OI , có $IE = 3(cm)$, $FI = 12(cm)$. Độ dài đoạn thẳng OE, OF lần lượt là:

a) $3\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{5}$

c) $5\sqrt{5}$

d) $6\sqrt{5}$

Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

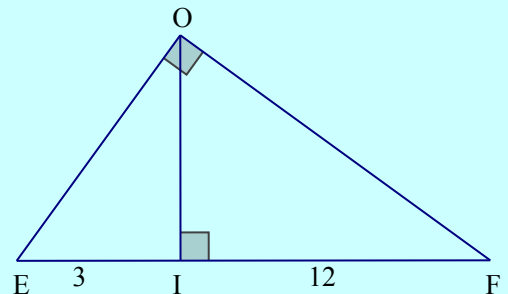
OEF vuông tại O , đường cao OI , ta có:

$$OE^2 = EF \cdot EI = (3 + 12) \cdot 3 = 45 \Rightarrow OE = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}(cm)$$

$$OF^2 = EF \cdot FI = (3 + 12) \cdot 12 = 180$$

$$\Rightarrow OF = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}(cm)$$

$$\text{Vậy } OE = 3\sqrt{5}(cm); OF = 6\sqrt{5}(cm).$$



Câu 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AI , có $AB = 13(cm)$, $AI = 12(cm)$. Diện tích tam giác ABC bằng?

- a) $202,6(cm^2)$
- b) $202,7(cm^2)$
- c) $202,8(cm^2)$
- d) $202,9(cm^2)$

Chọn đáp án C

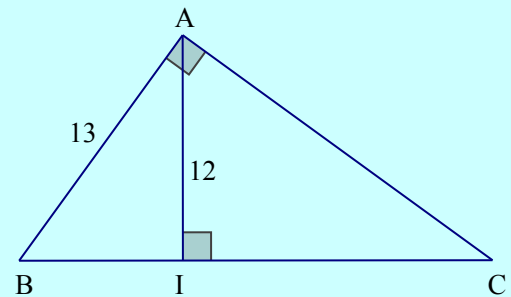
Giải thích: Ta có:

Áp dụng định lí Pytago vào $\triangle ABI$ vuông tại I , ta có: $AB^2 = AI^2 + BI^2 \Rightarrow BI^2 = AB^2 - AI^2$
 $= 13^2 - 12^2 \Rightarrow BI = \sqrt{25} = 5 (cm)$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta

$$\text{c3: } AB^2 = BC \cdot BI \Leftrightarrow BC = \frac{AB^2}{BI} = \frac{13^2}{5^2} = 33,8 (cm)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AI.BI = \frac{1}{2}.12.33,8 = 202,8 (cm^2)$$



Câu 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , có $AB = \frac{1}{2}AC = 5(cm)$. Độ dài đường cao AH bằng

- a) $\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{5}$
- b) $2\sqrt{5}$
d) $4\sqrt{5}$

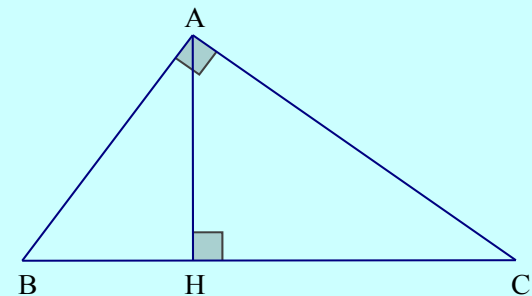
Chọn đáp án B

Giải thích: Ta có:

Ta có: $AB = \frac{1}{2} AC = 5 \Rightarrow AC = 10(cm)$

Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông ABC , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 10^2 = 125$
 $\Rightarrow BC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} (cm)$

Tam giác ABC , vuông tại A , có đường cao $AH \Rightarrow AH.BC = AB.AC$



$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 10}{2\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} (cm).$$

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$, $BC = 2\sqrt{13}$. Độ dài đường cao AH của $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

a) 0,3

b) 3,3

c) 3,33

d) 3,03

Chọn đáp án C

Giải thích: Ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} (1) \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{4}{13} (2)$$

$$\text{Mà } AB^2 + AC^2 = BC^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52$$

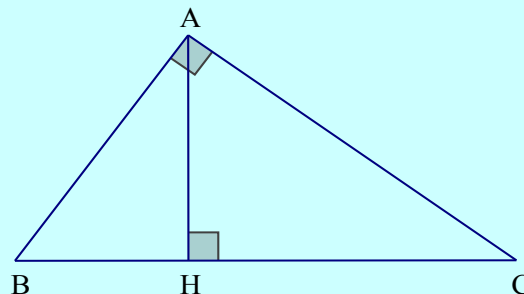
Từ (2), suy ra:

$$\frac{AB^2}{52} = \frac{4}{13} \Rightarrow AB^2 = 16 \Rightarrow AB = 4 (cm)$$

$$\text{Từ (1), suy ra: } \frac{4}{AC} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AC = 6 (cm)$$

Ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{\sqrt{13}} \approx 3,33$$



Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 18 (cm)$, $AC = 24 (cm)$. Các đường phân giác trong và ngoài của góc B cắt đường thẳng AC lần lượt tại M, N . Tính độ dài đoạn MN

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

Chọn đáp án D

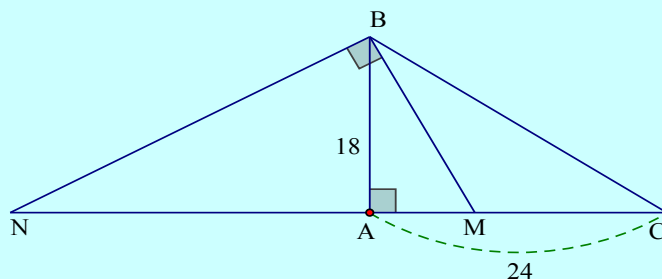
Giải thích: Ta có:

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 18^2 + 24^2 = 900$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{900} = 30 (cm)$$

Do BM là đường phân giác của $\widehat{ABC}$



$$\Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{\underbrace{AM+MC}_{AC}} = \frac{3}{3+5} \Leftrightarrow \frac{AM}{24} = \frac{3}{8} \Rightarrow AM = 9$$

Câu 7: Hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, hai đường chéo vuông góc. Diện tích hình thang bằng bao nhiêu biết $BD = 15\text{cm}$, đường cao hình thang bằng $12(\text{cm})$.

a) $150(\text{cm}^2)$

b) $250(\text{cm}^2)$

c) $105(\text{cm}^2)$

d) $205(\text{cm}^2)$

Chọn đáp án A

Giải thích: Ta có:

$$\begin{aligned} \text{Kẻ } BH \perp CD &\Rightarrow DH^2 = BD^2 - BH^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \\ &= 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow DH = 9(\text{cm}) \end{aligned}$$

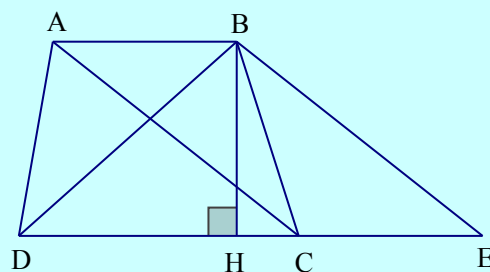
Qua B kẻ đường thẳng song song với AC , đường thẳng này cắt DC ở E

Xét tam giác DBE vuông tại B , có:

$$BD^2 = DH.DE \Rightarrow 15^2 = 9.DE \Leftrightarrow DE = \frac{15^2}{9} = 25$$

Diện tích hình thang $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD).BH}{2} = \frac{DE.BH}{2} = 150(\text{cm}^2).$$



Câu 8: Tam giác MON vuông tại O , đường phân giác của $\widehat{O}$ cắt cạnh huyền MN thành hai đoạn có độ dài $\frac{45}{7}(\text{cm})$ và $\frac{60}{7}(\text{cm})$. Diện tích của $\triangle MON$ bằng bao nhiêu

a) $52(\text{cm}^2)$

b) $53(\text{cm}^2)$

c) $54(\text{cm}^2)$

d) $55(\text{cm}^2)$

Chọn đáp án C

Giải thích: Ta có:

Gọi I là giao điểm của tia phân giác của góc O và cạnh MN , ta có:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{IM}{IN} = \frac{\frac{45}{7}}{\frac{60}{7}} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \quad (1) \Rightarrow \frac{OM^2}{ON^2} = \frac{9}{16}$$

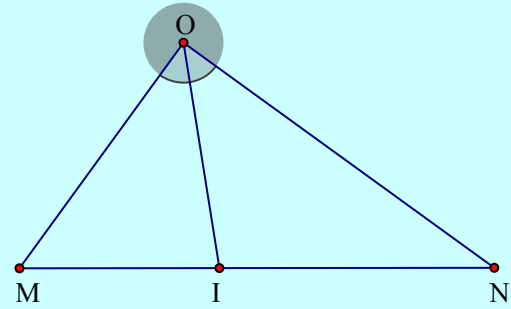
$$\Rightarrow \frac{OM^2}{\underbrace{OM^2 + ON^2}_{MN^2}} = \frac{9}{9+16} \Rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } MN = MI + IN = \frac{45}{7} + \frac{60}{7} = 15 \text{ (cm)}$$

$$\text{Từ (2), suy ra: } OM = \frac{3 \cdot MN}{5} = \frac{3 \cdot 15}{5} = 9 \text{ (cm)}$$

$$\text{Từ (1), suy ra: } ON = \frac{4 \cdot OM}{3} = \frac{4 \cdot 9}{3} = 12 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó } S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Câu 9: Tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây đúng

a) $\triangle AHB \sim \triangle CAB$

b) $\triangle AHC \sim \triangle BAC$

c) $\triangle AHB \sim \triangle CHA$

d) Cả A, B, C đều đúng

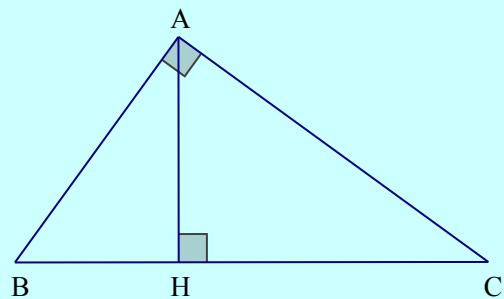
Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

a) $\triangle AHB \sim \triangle CAB$ (gg)

b) $\triangle AHC \sim \triangle BAC$ (gg)

c) $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ ($\sim \triangle CAB$)



Câu 10: Tam giác MNP vuông tại M , đường cao MH . Khẳng định nào sau đây sai

a) $MN^2 = NP \cdot NH$; $MP^2 = NP \cdot PH$

b) $MH^2 = HN \cdot HP$; $MN \cdot MP = NP \cdot MH$

c) $\frac{1}{NH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2}$

d) A, B đúng, C sai

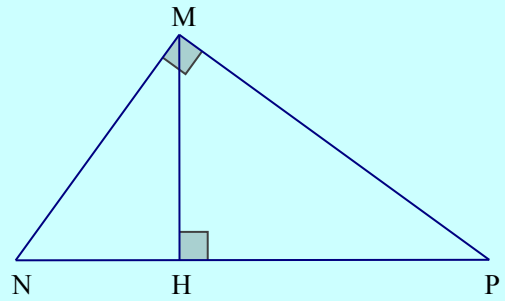
Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

a) $MN^2 = NP.NH; MP^2 = NP.PH$

b) $MH^2 = HN.HP; MN.MP = NP.MH$

c) $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2}$



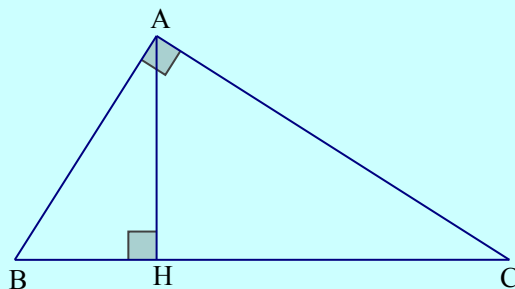
BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

a. Biết $AH = 6\text{cm}$, $BH = 4,5\text{cm}$. Tính AB , AC , BC , HC

b. Biết $AB = 6\text{cm}$, $BH = 3\text{cm}$. Tính AH và tính chu vi của các tam giác vuông trong hình vẽ



Hướng dẫn giải

a) Tính được: $AB = 7,5\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$, $BC = 12,5\text{cm}$, $HC = 8\text{cm}$

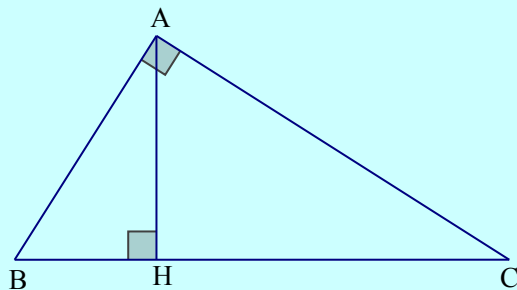
b) $AH = 3\sqrt{3}\text{cm}$, $P_{ABC} = 18 + 6\sqrt{3}\text{cm}$, $P_{ABH} = 9 + 3\sqrt{3}\text{cm}$; $P_{ACH} = 9 + 9\sqrt{3}\text{cm}$

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

Tính diện tích $\triangle ABC$, biết $AH = 12\text{cm}$

$BH = 9\text{cm}$



Hướng dẫn giải

Ta tính được: $S_{ABC} = 150\text{cm}^2$

Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D .

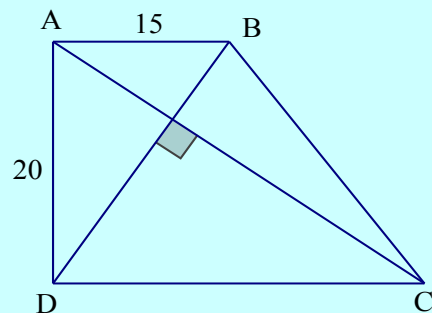
Cho biết $AB = 15\text{cm}$, $AD = 20\text{cm}$, các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O .

Tính

a. Độ dài các đoạn thẳng OB và OD

b. Độ dài đoạn thẳng AC

c. Diện tích hình thang $ABCD$



Hướng dẫn giải

a) Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông ABD , tính được:

$$BD = 2,5cm, OB = 9cm, OD = 16cm$$

b) Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông DAC tính được: $OA = 12cm$; $AC = \frac{100}{3}(cm)$

c) Tính được: $S_{ABCD} = \frac{1250}{3}(cm^2)$

Bài 4:

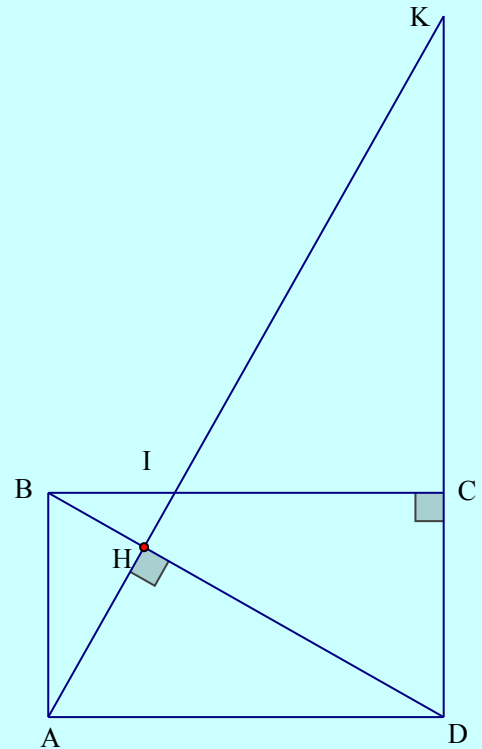
Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8cm$

$$BC = 15cm$$

a. Tính độ dài đoạn thẳng BD

b. Vẽ AH vuông góc BD tại H . Tính độ dài đoạn thẳng AH

c. Đường thẳng AH cắt BC và DC lần lượt tại I và K . Chứng minh $AH^2 = HI.HK$



Hướng dẫn giải

a) $BD = 17cm$

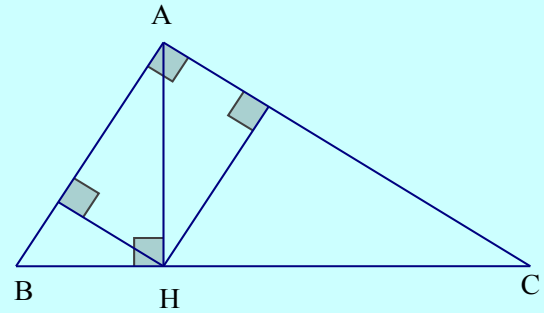
b) $AH = \frac{120}{17}cm$

Bài 5:

Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường cao AH , kẻ EH, HF lần lượt vuông góc với AB, AC . Chứng minh rằng:

a. $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$

b. $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$



Hướng dẫn giải

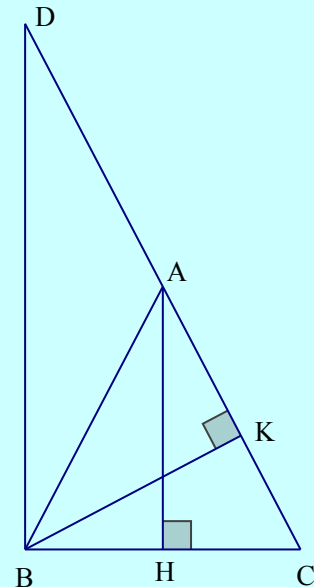
- a) Sử dụng hệ thức giữa cạnh góc vuông với hình chiếu của nó lên cạnh huyền và cạnh huyền trong các tam giác vuông HBA và HCA
- b) Áp dụng hệ thức giữa đường cao và hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền trong tam giác vuông ABC

Bài 6:

Cho tam giác ABC cân tại A có AH, BK là hai đường cao. Kẻ đường thẳng vuông góc BC tại B cắt tia CA tại D

a. $BD = 2AH$

b. $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4HA^2}$



Hướng dẫn giải

- a) Chứng minh AH là đường trung bình của $\triangle BCD$
- b) Sử dụng hệ thức giữa đường cao và các cạnh góc vuông trong tam giác vuông BCD và áp dụng câu a