

LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định lý: Với hai số $a, b \geq 0$, ta có: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Chú ý: Định lý trên còn có thể mở rộng cho tích của nhiều số không âm

2. Quy tắc khai phương một tích

Với $A \geq 0, B \geq 0$, ta có: $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

Mở rộng: Với $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0, \dots, A_n \geq 0$ ta có: $\sqrt{A_1 A_2 \dots A_n} = \sqrt{A_1} \cdot \sqrt{A_2} \dots \sqrt{A_n}$

3. Quy tắc nhân các căn bậc hai

Với hai biểu thức $A \geq 0, B \geq 0$, ta có: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$

Chú ý: Với $A \geq 0$, ta có: $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = |A| = A$

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức

Cách giải: Áp dụng công thức khai phương một tích

Bài 1: Tính

a. $\sqrt{25.144}$

b. $\sqrt{52.13}$

c. $\sqrt{45.80}$

d. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{25.144} = 5.12 = 60$

b) Ta có: $\sqrt{52.13} = \sqrt{52.13} = \sqrt{4.13.13} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13^2} = 26$

c) Ta có: $\sqrt{45.80} = \sqrt{5.9.5.16} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 60$

d) Ta có: $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7.28} = \sqrt{7.7.4} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2^2} = 14$

Bài 2: Tính

a. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24} \right) \cdot \sqrt{6}$

b. $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}$

c. $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \cdot \sqrt{12}$

d. $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8}$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24}\right) \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 6 + \sqrt{\frac{50}{3}} \cdot 6 - \sqrt{24 \cdot 6} = 0$

b) Ta có: $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1$

c) Ta có: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cdot \sqrt{12} = 7$

d) Ta có: $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8} = 2(\sqrt{5}-1)$

Bài 3: Tính

a. $\sqrt{55.77.35}$

b. $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$

c. $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}$

d. $2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{55.77.35} = \sqrt{5.11.7.11.5.7} = 5.7.11 = 385$

b) Ta có: $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 125 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 125}{8 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

c) Ta có: $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2-1} = 1$

d) Ta có: $2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{6} = 9$

Bài 4: Tính

a) $A = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$

b) $B = \sqrt{4+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

c) $C = (\sqrt{12} + 3\sqrt{15} - 4\sqrt{135})\sqrt{3}$

d) $D = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{75} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5+2\sqrt{3}})^2} = \sqrt{9 - (5+2\sqrt{3})}$

$= \sqrt{9-5-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$

b) Ta có:

$$B = \sqrt{4+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{4+\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2^2 - (\sqrt{2+\sqrt{2}})^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{2 \cdot (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$

c) Ta có: $(\sqrt{12} + 3\sqrt{15} - 4\sqrt{135})\sqrt{3} = \sqrt{36} + 3\sqrt{9 \cdot 5} - 4\sqrt{9^2 \cdot 5} = 6 + 9\sqrt{5} - 36\sqrt{5} = 6 - 27\sqrt{5}$

d) Ta có:

$$C = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}} = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}} = 2\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow C = 8\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}} = \sqrt{5\sqrt{3}}(8 - 2 - 6) = 0$$

Bài 5: Tính

a) $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

b) $B = (3 - \sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} + (3 + \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$

c) $C = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

Lời giải

a) Ta có: $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$

$$= (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} = \sqrt{10} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{6})(4 + \sqrt{15})}$$

$$= \sqrt{10} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{4\sqrt{10} + \sqrt{150} - 4\sqrt{6} - \sqrt{90}} = \sqrt{10} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{10} + \sqrt{6})} = \sqrt{4} = 2$$

b) Ta có: $B = (3 - \sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} + (3 + \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} + (3 + \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$

$$= \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} (\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}) = 2(\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}) = \sqrt{2}(\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}) = \sqrt{2}(\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}) = \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} + 1) = 2\sqrt{10}$$

c) Ta có: $C = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

$$\Rightarrow C = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{2^2 - (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}) = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1$$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

Cách giải: Áp dụng công thức khai phương của một tích

Bài 6: Rút gọn

a) $A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$

b) $B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$

c) $C = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$

d) $D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) Ta có: $B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{-\sqrt{21}}{7}$

c) Ta có: $C = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

d) Ta có: $D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)}{2(\sqrt{5} - 2)} = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Bài 7: Rút gọn các biểu thức sau

a) $B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$

b) $C = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

c) $D = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$

Lời giải

a) Ta có: $B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{2\sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Ta có: $C = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \sqrt{2} + 1$

c) Ta có: $D = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{3 \cdot 3\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} = \frac{2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2}{3}$

Bài 8: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{5.3} - 2\sqrt{5.2} + \sqrt{3.2} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{5.2} - \sqrt{3} + \sqrt{3.2}} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2\sqrt{5}(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(1 - \sqrt{2})}$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

Bài 9: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3t}{8}} \quad (t \leq 0)$

b) $B = \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} \quad (y < 0)$

c) $C = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \geq 1)$

d) $D = \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3t}{8}} = \sqrt{\frac{-2t}{3} \cdot \left(\frac{-3t}{8}\right)} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \frac{-t}{2} \quad (t \leq 0)$

b) Ta có: $B = \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} \quad (y < 0) \Rightarrow B = -2y$

a) Ta có: $C = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2 = 1$

a) Ta có: $\sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2} = \sqrt{(\sqrt{x^4 + 4} - x^2)(\sqrt{x^4 + 4} + x^2)} = \sqrt{(x^4 + 4) - (x^2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Bài 10: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 0)$

b) $B = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{xy} + y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x \neq y)$

c) $\frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1} \quad (a \geq 0; a \neq \frac{1}{4})$

d) $D = \frac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4 - a}{\sqrt{a} - 2} \quad (a \geq 0; a \neq 4)$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

b) Ta có: $B = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{xy} + y} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

c) Ta có: $\frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1} = \frac{(2\sqrt{a} - 1)(1 - \sqrt{a})}{(2\sqrt{a} - 1)^2} = \frac{1 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}$

d) Ta có: $D = \frac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4 - a}{\sqrt{a} - 2} = \frac{(\sqrt{a} + 2)^2}{\sqrt{a} + 2} - \frac{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)}{\sqrt{a} - 2} = 0$

Dạng 3: Giải phương trình

Cách giải: Khi giải phương trình chứa căn thức, luôn cần chú ý đến các điều kiện đi kèm.

$$+) \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$+) \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (hoac } A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

Bài 1: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2$

b) $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2 - 3x}$

c) $\sqrt{-x^2 + x + 4} = x - 3$

d) $\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x^2 - 9} = 0$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 4 = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$

b) Ta có: $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2 - 3x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3x \geq 0 \\ x^2 - 2x = 2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2$

c) Ta có: $\sqrt{-x^2 + x + 4} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ -x^2 + x + 4 = (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

d) **Cách 1:** Ta có $\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x^2 - 9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x - 3 = 4(x^2 - 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(tm) \\ x = \frac{-11}{4}(loai) \end{cases} \Rightarrow x = 3$

Cách 2: Với $x \geq 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3} \Rightarrow \sqrt{x-3}(1 - 2\sqrt{x+3}) = 0 \Rightarrow x = 3(tm)$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{9 \cdot (2 - 3x)^2} = 6$

b. $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$

c. $\sqrt{10(x - 3)} = \sqrt{20}$

d. $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 6$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{9.(2-3x)^2} = 6 \Leftrightarrow 3|2-3x| = 6 \Leftrightarrow |2-3x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 0 \end{cases}$

b) Ta có: $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \sqrt{(2x-3)(2x+3)} = 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{2x+3} = 2\sqrt{2x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3} \cdot (\sqrt{2x-3} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3} = 0 \\ \sqrt{2x-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

c) Ta có: $\sqrt{10(x-3)} = \sqrt{20} \Leftrightarrow 10(x-3) = 20 \Leftrightarrow x = 5(tm) \text{ (điều kiện } x \geq 3)$

d) Ta có: $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2} = 3x-6 \Leftrightarrow |x+3| = 3x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6 \geq 0 \\ x+3 = 3x-6 \\ x+3 = -3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{9}{2}(tm) \\ x = \frac{3}{4}(loai) \end{cases}$

Bài 3: Giải phương trình ẩn y

a) $\sqrt{4y-20} + \sqrt{y-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9y-45} = 4$

b) $2\sqrt{9y-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25y-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49y-147} = 20$

Lời giải

a) Điều kiện $y \geq 5$

Ta có: $\sqrt{4y-20} + \sqrt{y-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9y-45} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{y-5} = 4 \Leftrightarrow y = 9 \text{ (thỏa mãn)}$

b) Điều kiện $y \geq 3$

Ta có: $2\sqrt{9y-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25y-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49y-147} = 20 \Leftrightarrow 2\sqrt{9(y-3)} - \frac{1}{5}\sqrt{25(y-3)} - \frac{1}{7}\sqrt{49(y-3)} = 20$

$2\sqrt{9(y-3)} - \frac{1}{5}\sqrt{25(y-3)} - \frac{1}{7}\sqrt{49(y-3)} = 20 \Leftrightarrow 6\sqrt{y-3} - \sqrt{y-3} - \sqrt{y-3} = 20 \Leftrightarrow 4\sqrt{y-3} = 20$

$\Leftrightarrow \sqrt{y-3} = 5 \Leftrightarrow y = 28 \text{ (thỏa mãn)}$

Bài 4: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x+3}$

b) $\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 9} = \sqrt{8x+12} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-3}{2} \\ 4x^2 - 9 = 8x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-3}{2} \\ 4x^2 - 8x - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{2} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{7}{2}; \frac{-3}{2} \right\}$$

$$\text{b) Điều kiện } 7x+5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-5}{7}$$

$$\text{Ta có: } \frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5} \Leftrightarrow 9x-7 = (\sqrt{7x+5})^2 = 7x+5 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức

Cách giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số không âm, ta có:

$$+) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a=b$$

$$+) \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Bài 1: Cho các số không âm a, b, c . Chứng minh

$$a) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (BĐT Cauchy)}$$

$$b) \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$c) a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$d) a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Lời giải

$$a) \text{ Do } a, b, c \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} \geq 0 \\ \sqrt{ab} \geq 0 \end{cases}$$

Bình phương hai vế của bất đẳng thức ta được:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-2ab+b^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0 \text{ (bất đẳng thức đúng)}$$

b) Bình phương hai vế của bất đẳng thức ta được:

$$(\sqrt{a+b})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a+b < a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{ab} \text{ (bất đẳng thức đúng)}$$

$$c) \text{ Ta có: } a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a+b+\frac{1}{2} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-1)^2 + (\sqrt{b}-1)^2 \geq 0 \text{ (bất đẳng thức đúng)}$$

$$d) \text{ Ta có: } a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \Leftrightarrow 2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2\sqrt{ab}+b) + (b-2\sqrt{bc}+c) + (c-2\sqrt{ca}+a) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Bài 2: Cho các số không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

b) $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2 (\forall a \in \mathbb{R})$

c) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

d) $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$

e) $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$

Lời giải

a) Bình phương hai vế ta được:

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} \right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} \Leftrightarrow \frac{a+b}{4} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{4} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{bất đẳng thức đúng})$$

b) Ta có: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(a^2+1)+1}{\sqrt{a^2+1}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a^2+1 và 1, ta có:

$$a^2+1+1 \geq 2\sqrt{(a^2+1) \cdot 1} \Leftrightarrow a^2+2 \geq 2\sqrt{a^2+1}$$

Như vậy $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{2\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}} = 2$ (đpcm)

c) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$, ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

d) Ta có: $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 + 2 = 4$ (đpcm)

e) Ta có: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$ (đpcm)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính $P = \sqrt{117,5^2 - 26,5^2 - 1440}$

a) $P = 108$

b) $P = 110$

c) $P = 120$

d) $P = 135$

Lời giải

Chọn đáp án A

Giải thích:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \sqrt{117,5^2 - 26,5^2 - 1440} = \sqrt{(117,5 + 26,5)(117,5 - 26,5) - 1440} = \sqrt{144 \cdot 91 - 144 \cdot 10} \\ &= \sqrt{144 \cdot (91 - 10)} = \sqrt{144 \cdot 81} = 12 \cdot 9 = 108 \end{aligned}$$

Câu 2: Phép tính nào sai

a) $\sqrt{13,5} \cdot \sqrt{150} = 45$

b) $\sqrt{4,8} \cdot \sqrt{30} = 12$

c) $\sqrt{7,2} \cdot \sqrt{80} = 36$

d) $\sqrt{0,05} \cdot \sqrt{500} = 5$

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

A) $\sqrt{13,5} \cdot \sqrt{150} = \sqrt{13,5 \cdot 150} = \sqrt{135 \cdot 15} = \sqrt{15 \cdot 9 \cdot 15} = 15 \cdot 3 = 45$

B) $\sqrt{4,8} \cdot \sqrt{30} = \sqrt{4,8 \cdot 30} = \sqrt{144} = 12$

C) $\sqrt{7,2} \cdot \sqrt{80} = \sqrt{7,2 \cdot 80} = \sqrt{72 \cdot 8} = \sqrt{8 \cdot 9 \cdot 8} = 8 \cdot 3 = 24$

D) $\sqrt{0,05} \cdot \sqrt{500} = \sqrt{0,05 \cdot 500} = \sqrt{5 \cdot 5} = 5$

Câu 3: Phép tính $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$ cho kết quả là số nào

a) 3

a) 4

a) 5

a) 6

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 &= \left(\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}-\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}\right)^2 = \left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right]^2 = \left(\left|\sqrt{2}-1\right|-\left|\sqrt{2}+1\right|\right)^2 \\ &= \left[\sqrt{2}-1-\left(\sqrt{2}+1\right)\right]^2 = \left(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1\right)^2 = (-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Câu 4: Biểu thức $\sqrt{(-3)^2(4x-4\sqrt{x}+1)(x+2\sqrt{xy}+y)}$ có giá trị bằng số nào nếu thay $x=9; y=4$

a) 60

a) 65

a) 70

a) 75

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{(-3)^2(4x-4\sqrt{x}+1)(x+2\sqrt{xy}+y)} &= \sqrt{(-3)^2(2\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} = |-3| \cdot |2\sqrt{x}-1| \cdot |\sqrt{x}+\sqrt{y}| \\ &= 3 \cdot |2\sqrt{x}-1|(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \end{aligned}$$

Thay $x=9$ và $y=4$ vào biểu thức $= 3 \cdot |2\sqrt{x}-1|(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, ta được:

$$= 3 \cdot |2\sqrt{9}-1|(\sqrt{9}+\sqrt{4}) = 3 \cdot (6-1)(3+2) = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$$

Câu 5: Rút gọn $2\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)+(1+2\sqrt{5})^2-25$ sẽ được số nào

a) 2

a) 4

a) -4

a) 6

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

Ta có:

$$2\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)+(1+2\sqrt{5})^2-25 = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 1 + 4\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 - 25 = 10 - 4\sqrt{5} + 1 + 4\sqrt{5} + 20 - 25 = 6$$

Câu 6: Rút gọn $E = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ ta được:

a) $E = 1 + \sqrt{5}$

b) $E = 1 - \sqrt{3}$

c) $\sqrt{5} - 1$

d) $E = 1 + \sqrt{2}$

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } E &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{4} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\ \Rightarrow E &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = 1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Câu 7: Trong các kết luận sau đây, kết luận nào sai

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $\sqrt{3} + \sqrt{5} > \sqrt{15}$ | b) $\sqrt{3} + \sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{8}$ |
| c) $1 - \sqrt{3} < \sqrt{5} - 2$ | d) $2\sqrt{7} - 5 > 3 - \sqrt{10}$ |

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích: Ta có

$$\text{A) } \sqrt{3} + \sqrt{5} > \sqrt{15} \Leftrightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 > 15 \Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{15} > 15, \text{ lại có } 2\sqrt{15} > 7, \text{ đúng vì } (2\sqrt{15})^2 > 7^2$$

$$\text{B) } \sqrt{3} + \sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{8} \Leftrightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 > (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 \Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{18} > 10 + 2\sqrt{16} = 18$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{18} > 9 \Leftrightarrow (2\sqrt{18})^2 > 9^2 \Leftrightarrow 72 > 81 \text{ (sai)}$$

$$\text{C) } 1 - \sqrt{3} < \sqrt{5} - 2, \text{ đúng vì } \begin{cases} 1 - \sqrt{3} < 0 \\ \sqrt{5} - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{D) } 2\sqrt{7} - 5 > 3 - \sqrt{10} \Leftrightarrow 2\sqrt{7} > 8 - \sqrt{10} \Leftrightarrow 28 > 64 - 16\sqrt{10} \Leftrightarrow 16\sqrt{10} > 36 - 28 = 8 \Leftrightarrow 8\sqrt{10} > 4$$

$$\Leftrightarrow 640 > 16 \text{ (đúng)}$$

Câu 8: Nếu $x - \sqrt{x+1} = 5$ thì x là số nào?

- | | |
|------------|------------|
| a) $x = 3$ | b) $x = 4$ |
| c) $x = 6$ | d) $x = 8$ |

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

Ta có: $x - \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow x - 5 = \sqrt{x+1}$ ($x-5$ phải là số không âm)

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 = (\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 (tm) \\ x = 3 (loại) \end{cases}$$

Câu 9: Điều kiện để $4\sqrt{x+4} + \sqrt{x^2-16}$ có nghĩa là

a) $x = -4$

b) $x = 4$

c) $x = -4$ hoặc $x \geq 4$

d) $x \leq 4$

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Ta có: $4\sqrt{x+4} + \sqrt{x^2-16} = 4\sqrt{x+4} + \sqrt{(x-4)(x+4)}$

$$\text{Để } 4\sqrt{x+4} + \sqrt{x^2-16} \text{ có nghĩa thì } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ (x+4)(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x+4 \leq 0 \\ x-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x \geq 4 \end{cases} \end{cases}$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Tính

a) $A = \sqrt{32.200}$

b) $B = \sqrt{5}.\sqrt{125}$

c) $C = \sqrt{(9+2\sqrt{14})(9-2\sqrt{14})}$

d) $D = \sqrt{117,5^2 - 26,5^2 - 1440}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{32.200} = \sqrt{4.8.2.10^2} = \sqrt{2^2.4^2.10^2} = 2.4.10 \Rightarrow A = 80$

b) Ta có: $B = \sqrt{5}.\sqrt{125} = \sqrt{5.5.25} = \sqrt{5^2.5^2} = 5.5 \Rightarrow B = 25$

c) Ta có: $C = \sqrt{(9+2\sqrt{14})(9-2\sqrt{14})} = \sqrt{9^2 - (2\sqrt{14})^2} = \sqrt{81-56} = \sqrt{25} = 5$

d) Ta có: $D = \sqrt{117,5^2 - 26,5^2 - 1440} = \sqrt{(117,5 - 26,5)(117,5 + 26,5) - 1440} = \sqrt{144.91 - 144.10}$
 $= \sqrt{144.(91-10)} = \sqrt{144.81} = 12.9 = 108$

Bài 2: Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$

b) $B = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}} = \frac{-\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{-\sqrt{6}}{2}$

b) Ta có: $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức

a) $A = \frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}} - \frac{\sqrt{u^3}+\sqrt{v^3}}{u-v} (u, v \geq 0; u \neq v)$

b) $B = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} (x \neq \pm\sqrt{2})$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}} - \frac{\sqrt{u^3}+\sqrt{v^3}}{u-v} (u, v \geq 0; u \neq v) = \frac{-\sqrt{uv}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$

b) Ta có: $B = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} (x \neq \pm\sqrt{2})$

Bài 4: Rút gọn biểu thức

a) $A = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

b) $B = \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}$

c) $C = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \frac{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (x + y - 2\sqrt{xy}) = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (x + y - 2\sqrt{xy}) \\ &= x - \sqrt{xy} + y - (x + y - 2\sqrt{xy}) = \sqrt{xy} \end{aligned}$$

b) Ta có $B = \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)^2}} = \frac{|\sqrt{x} - 1|}{\sqrt{x} + 1}$

c) Ta có $C = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{y}-1)^4}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{y}-1}{x-1}$

Bài 5: So sánh các số sau

a) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ và 1

b) $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{7} + \sqrt{6}$

c) $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$ và $2\sqrt{2006}$

d) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ và $\sqrt{2} + 1$

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = 9 - 2\sqrt{14} \\ 1^2 = 1 \end{cases}$

Xét $9 - 2\sqrt{14} - 1 = 8 - 2\sqrt{14} = \sqrt{8^2} - \sqrt{2^2 \cdot 14} = \sqrt{64} - \sqrt{56} > 0$ (do: $64 > 56$)

Do đó $\sqrt{7} - \sqrt{2} > 1$

b) $\begin{cases} (\sqrt{8} + \sqrt{5})^2 = 13 + 2\sqrt{40} \\ (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2 = 13 + 2\sqrt{42} \end{cases}$

$$\text{Xét } (13+2\sqrt{40})-(13+2\sqrt{42})=2\sqrt{40}-2\sqrt{42}<0(40<42)\Rightarrow\sqrt{8}+\sqrt{5}<\sqrt{7}+\sqrt{6}$$

$$\text{c) Ta có: } \begin{cases} (\sqrt{2005}+\sqrt{2007})^2=4012+2\sqrt{2005.2007} \\ (2\sqrt{2006})^2=4.2006=8024 \end{cases}$$

$$\text{Xét } (4012+2\sqrt{2005.2007})-8024=2\sqrt{(2006-1)(2006+1)}-2.2006=2\sqrt{2006^2-1}-2.\sqrt{2006^2}<0$$

$$(\text{vì } 2006^2-1<2006^2)$$

$$\text{Do đó } \sqrt{2005}+\sqrt{2007}<2\sqrt{2006}$$

$$\text{d) Ta có: } \begin{cases} (\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=2+\sqrt{3}+2\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}+2-\sqrt{3}=6 \\ (\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Xét } 6-(3+2\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}>0\Rightarrow\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}>\sqrt{2}+1$$

Bài 6: Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \sqrt{25t^2-9}=2\sqrt{5t-3}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{t-3}}{\sqrt{2t+1}}=2$$

$$\text{c) } \sqrt{-2x^2+6}=x-1(x\geq 1)$$

$$\text{d) } \sqrt{t-5}+\sqrt{4t-20}-\frac{1}{5}\sqrt{9t-45}=3$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \sqrt{25t^2-9}=2\sqrt{5t-3}\Leftrightarrow\sqrt{25t^2-9}=\sqrt{4(5t-3)}\Rightarrow\begin{cases} t=\frac{1}{5}(\text{loại}) \\ t=\frac{3}{5}(tm) \end{cases}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{\sqrt{t-3}}{\sqrt{2t+1}}=2\Rightarrow\sqrt{t-3}=2\sqrt{2t+1}\Leftrightarrow\sqrt{t-3}=\sqrt{4(2t+1)}\Rightarrow t=\emptyset$$

$$\text{c) Ta có: } \sqrt{-2x^2+6}=x-1(x\geq 1)\Leftrightarrow-2x^2+6=(x-1)^2\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}(tm)$$

$$\text{d) Ta có: } \sqrt{t-5}+\sqrt{4t-20}-\frac{1}{5}\sqrt{9t-45}=3\Leftrightarrow\frac{12}{5}\sqrt{t-5}=3\Rightarrow t=\frac{105}{16}$$

Bài 7:

Cho biểu thức $A = \frac{x^2 - \sqrt{2}}{x^4 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 - \sqrt{6}}$. Rút gọn rồi tìm giá trị của x để A có GTLN, tìm GTLN đó

Lời giải

Ta có: $A = \frac{x^2 - \sqrt{2}}{x^2(x^2 - \sqrt{2}) + \sqrt{3}(x^2 - \sqrt{2})} = \frac{1}{x^2 + \sqrt{3}} (x \neq \pm\sqrt{\sqrt{2}})$

Vì $x^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \forall x$, nên $\frac{1}{x^2 + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{Max} A = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 0$.

Bài 8: So sánh các số sau

a) $3 + \sqrt{5}$ và $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$

b) $2\sqrt{3} + 4$ và $3\sqrt{2} + \sqrt{10}$

c) 18 và $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17}$

Lời giải

a) Ta có:

$$(3 + \sqrt{5})^2 = 14 + 6\sqrt{5} = 14 + \sqrt{180}; (2\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 14 + 4\sqrt{12} = 14 + \sqrt{192} \Rightarrow 3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

b) $(2\sqrt{3} + 4)^2 = 12 + 16\sqrt{3} + 16 = 28 + 16\sqrt{3} = 28 + \sqrt{256 \cdot 3}; (3\sqrt{2} + \sqrt{10})^2 = 28 + \sqrt{36 \cdot 20}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3} + 4 > 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

c)

Cách 1: $18^2 = 324; (\sqrt{15} \cdot \sqrt{17})^2 = 255 \Rightarrow 18 > \sqrt{15} \cdot \sqrt{17}$

Cách 2: $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{16-1} \cdot \sqrt{17-1} = \sqrt{16^2-1} < \sqrt{16^2} = 16 < 18$.