

LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

A. Lý thuyết

1. Định lí 1

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau, ta có:

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau
- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau

Hay: $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$

2. Định lí 2

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau, ta có:

- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn
- Dây lớn hơn căng cung lớn hơn

Hay: $\widehat{AB} > \widehat{CD} \Leftrightarrow AB > CD$

3. Bổ sung

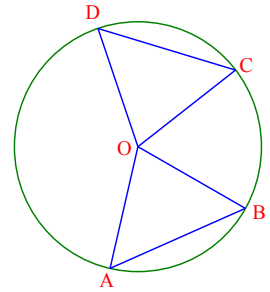
- Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau

Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$

- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

+) Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy

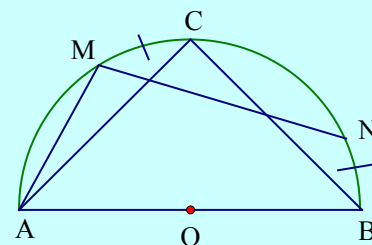
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.



B. Bài tập

Bài 1:

Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA và CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{CM} = \widehat{BN}$. Chứng minh:



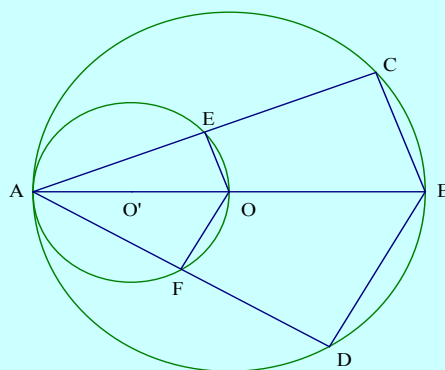
- a) $AM = CN$
 b) $MN = CA = CB$

Lời giải

- a) Ta có C là điểm chính giữa nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$
 mà $\widehat{CM} = \widehat{BN} \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{CN} \Rightarrow AM = CN$
 b) Chứng minh được $\widehat{MN} = \widehat{CA} = \widehat{CB} \Rightarrow MN = CA = CB$

Bài 2:

Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \widehat{CD}$ và $\widehat{BC} < \widehat{BD}$. Các dây AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F. Hãy so sánh:



- a) Độ dài các đoạn thẳng OE và OF
 b) Số đo các cung \widehat{AE} và \widehat{AF} của đường tròn (O')

Lời giải

a) Ta có: $OE \perp AC; BC \perp AC \Rightarrow OE \parallel BC$

Xét $\triangle ABC$ có $OE \parallel BC, AO = OB$

$\Rightarrow E$ là trung điểm của $AC \Rightarrow OE = \frac{1}{2}BC$

Tương tự: $OF = \frac{1}{2}BD$

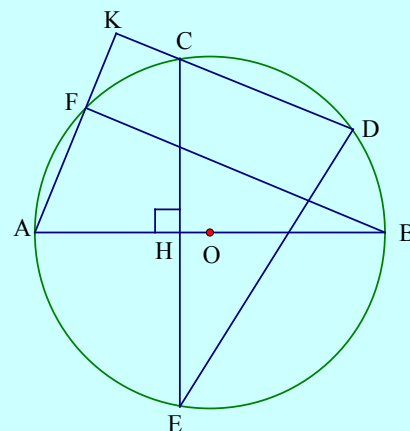
Mà $BC < BD \Rightarrow OE < OF$

b) Xét tam giác vuông OEA, AFO ta có: $AE^2 = AO^2 - OE^2$ và $AF^2 = AO^2 - OF^2$

$\Rightarrow AE^2 > AF^2 \Rightarrow AE > AF \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AE} > \text{sđ } \widehat{AF}$.

Bài 3:

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm C và D. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt (O) tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD tại K, AK cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh:



- Hai cung nhỏ \widehat{CF} và \widehat{DB} bằng nhau
- Hai cung nhỏ \widehat{BF} và \widehat{DE} bằng nhau
- $DE = BF$

Lời giải

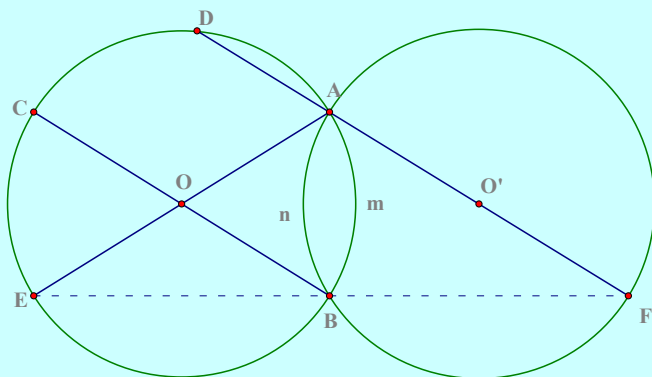
a) Ta có: $\left. \begin{array}{l} DK \perp AK \\ BF \perp AK \end{array} \right\} \Rightarrow DK \parallel BF \Rightarrow \widehat{CF} = \widehat{DB} \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Từ giả thiết ta có AB là đường trung trực của CE $\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{DE}$

c) Sử dụng mối liên hệ giữa cung và dây, ta có: $DE = BF$

Bài 4:

Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ các đường kính AOE, AOF và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau



Lời giải

+) Dây AB là dây chung của hai đường tròn nên AB căng hai cung nhỏ bằng nhau

$$\rightarrow \widehat{AmB} = \widehat{AnB} (1)$$

$$\text{Lại có: } \widehat{AOB} = \widehat{COE} \Rightarrow \widehat{AmB} = \widehat{CE} (2)$$

+) Chứng minh được:

$\widehat{ABE} = \widehat{ABF} = 90^\circ \Rightarrow E, B, F$ thẳng hàng

+) $\triangle EAB = \triangle FAB \Rightarrow EB = FB \Rightarrow BO$ là đường trung bình của $\triangle FEA \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{CD} = \widehat{AmB}$ (3)

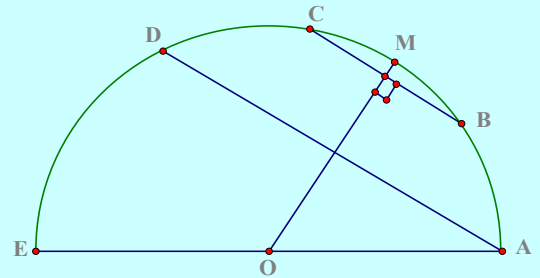
(Hai cung bị chắn giữa hai dây song song). Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow \widehat{AmB} = \widehat{AnB} = \widehat{CE} = \widehat{CD}$.

Bài 5:

Cho nửa đường tròn (O), đường kính AE. Gọi B, C, D là ba điểm trên nửa đường tròn, biết

$$\widehat{AC} = 2\widehat{AB}; \widehat{AD} = 3\widehat{AB}$$

- Chứng minh rằng: $AB = BC = CD$
- $AC = BD$
- Chứng minh cung AD và BC có chung điểm chính giữa
- Tứ giác ABCD là hình gì? Vì sao



Lời giải

a) $\widehat{BC} = \widehat{AC} - \widehat{AB} = \widehat{AB}; \widehat{CD} = \widehat{AD} - \widehat{AC} = 3\widehat{AB} - 2\widehat{AB} = \widehat{AB} \rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = BC = CD$

c) Gọi M là điểm chính giữa cả cung BC $\Rightarrow MB = MC$

Có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{MA} = \widehat{MB} + \widehat{AB} \\ \widehat{MD} = \widehat{MC} + \widehat{CD} \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{MA} = \widehat{MD} \Rightarrow dpcm$

d. Vì M là điểm chính giữa cung AD và BC $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} OM \perp AD \\ OM \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ABCD : hìnhthang \\ BD = AC \end{array} \right. \Rightarrow$

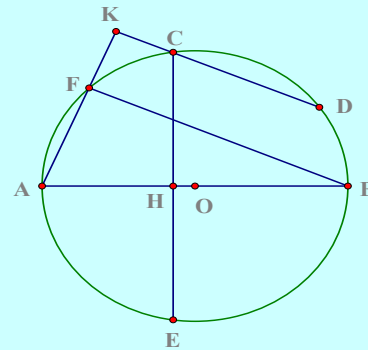
ABCD là hình thang cân.

Bài 6:

Cho đường tròn O , trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C và D . Kẻ $CH \perp AB$ nó cắt đường tròn tại E . Kẻ $AK \perp DC$ nó cắt đường tròn tại F . Chứng minh rằng

a. $\widehat{CF} = \widehat{DB}$

b. $\widehat{BF} = \widehat{DE}$



Lời giải

a. Ta có: $\widehat{AFB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \begin{cases} BF \perp AK \equiv F \\ CD \perp AK \equiv K \end{cases} \Rightarrow BF \parallel CD$$

Xét đường tròn (O) có $BF \parallel CD \Rightarrow \widehat{CF} = \widehat{DB}$ (chắn bởi hai dây song song)

b. Ta có: $AB \perp CE \Rightarrow B$ là điểm chính giữa \widehat{CBE}

$$\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BE} \Rightarrow sđ \widehat{BC} = sđ \widehat{BE}$$

$$\text{mà } \widehat{CF} = \widehat{BD} \Rightarrow sđ \widehat{CF} = sđ \widehat{BD} \Rightarrow sđ \widehat{BC} + sđ \widehat{CF} = sđ \widehat{BE} + sđ \widehat{DB}$$

$$\Rightarrow sđ \widehat{BF} = sđ \widehat{DE} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{DE} \Rightarrow BF = DE.$$

Bài 7:

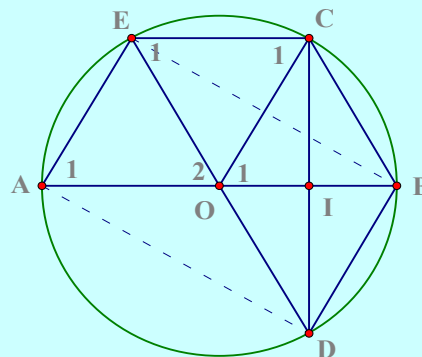
Cho đường tròn (O) đường kính AB . Qua trung điểm I của bán kính OB kẻ dây $CD \perp AB$. Kẻ dây CE song song với AB .

CMR:

a. $AE = BC = BD$

b. E, O, D thẳng hàng

c. $ADBE$ là hình chữ nhật



Lời giải

a. AB là trung trực của CD $\Rightarrow BC = BD(1)$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_2 = \hat{E}_1 (slt) \\ +) \hat{O}_1 = \hat{C}_1 (slt) \\ \hat{E}_1 = \hat{C}_1 (tamgiaccan) \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_1 \Rightarrow AE = BC(2) \Rightarrow AE = BC = BD$$

b) $\triangle COD$ cân tại O, OI là đường cao nên là đường phân giác COD

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{COB} = \widehat{DOB} \\ \widehat{BOC} = \widehat{AOE} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{BOD} = \widehat{AOE} \\ \widehat{BOD} + \widehat{DOA} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DOA} + \widehat{AOE} = 180^\circ \Rightarrow E, O, D \text{ thẳng hàng (đpcm)}$$

c. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật.

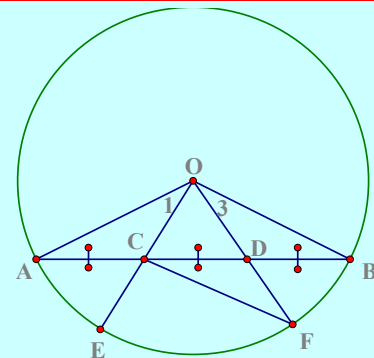
Bài 8:

Trên dây cung AB của đường tròn (O), lấy hai điểm C và D chia dây này thành 3 đoạn bằng nhau $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F.

CMR:

a. $\widehat{AE} = \widehat{BF}$

b. $\widehat{AE} < \widehat{FE}$



Lời giải

a. $\triangle AOB$ cân tại O $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$

+ $\triangle AOC = \triangle BOC (cgc) \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3 \rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BF}$

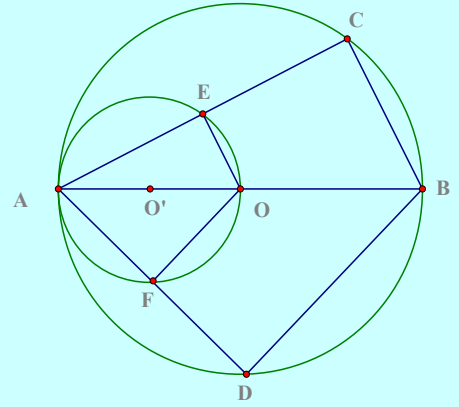
b. $\triangle OCD$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{ODC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{COD}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{COD} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{CDF} > 90^\circ$

Xét $\triangle CDF$ có: $\widehat{CDF} > \widehat{CFD} \Rightarrow CF > CD \Rightarrow CF > AC (AC = CD)$

Xét $\triangle OAC, \triangle CFO$ có: $\left. \begin{array}{l} OA = FO \\ OC : chung \\ FC > AC \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{COD} > \widehat{AOC} \Rightarrow \widehat{FOE} > \widehat{AOE} \Rightarrow sđ \widehat{FE} > sđ \widehat{AE} \Leftrightarrow FE > AE$

Bài 9:

Cho đường tròn (O) đường kính AB kẻ các dây BC và BD sao cho $\widehat{BC} < \widehat{BD}$ (C và D không cùng thuộc nửa mặt phẳng). Đường tròn (O'; $\frac{AO}{2}$) cắt AC và AD tại E và F



a. So sánh OE, OF

b. So sánh $\widehat{AE}, \widehat{AF}$ của (O')

Lời giải

a. Tam giác AOE vuông tại E $\Rightarrow OE \perp AC$

mà $\triangle OAC$ cân tại O nên OE là đường trung trực $\Rightarrow EA = EC$

+) $\triangle ABC \Rightarrow EO$ là đường trung bình $\Rightarrow EO = \frac{1}{2}BC; FO = \frac{1}{2}BD \Rightarrow OE < FO (BC < BD)$

b. Cách 1: $\triangle AEO; \triangle FAO, co: \begin{cases} AO : \text{cạnh.huyền} \\ EO < FO \end{cases} \Rightarrow AE < FA$

hoặc: $AE = \frac{1}{2}AC; FA = \frac{1}{2}AD(1)$

+) $\triangle ACB$ và $\triangle ADB$ có: AB là cạnh chung, $CB < DB$ nên $AC > AD$ (2)

Từ (1)(2) suy ra điều cần chứng minh.