

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Khái niệm hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Trong đó: a, b, a', b' là các số thực cho trước và $a^2 + b^2 \neq 0, a'^2 + b'^2 \neq 0$ và x, y là ẩn

- Nếu hai phương trình (1)(2) có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ gọi là nghiệm của hệ phương trình

- Nếu hai phương trình (1)(2) không có nghiệm chung thì hệ phương trình vô nghiệm

- Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó (tập nghiệm)

2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax + by = c \quad (d) \\ a'x + b'y = c' \quad (d') \end{cases}$$

- Tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng $(d): ax + by = c$ và $(d'): a'x + b'y = c'$

+) TH1: Nếu d cắt d' thì hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất

+) TH2: $d // d'$ thì hệ phương trình vô nghiệm

+) TH3: $d \equiv d'$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

3. Tổng quát

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax + by = c \quad (a, b, c \neq 0) \\ a'x + b'y = c' \quad (a', b', c' \neq 0) \end{cases}$$

- Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

- Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

- Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

4. Hệ phương trình tương đương

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: không giải hệ phương trình dự đoán số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Cách giải:

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax + by = c \ (a, b, c \neq 0) \\ a'x + b'y = c' \ (a', b', c' \neq 0) \end{cases}$$

- Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

- Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

- Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Bài 1: Dựa vào các hệ số a, b, c, a', b', c' hãy dự đoán số nghiệm của các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = 3 \\ 3\sqrt{2}x - 6y = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -2x + y = \frac{1}{2} \\ -3x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x + 4y = 3 \\ -\sqrt{2}x - 2y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 0x - 5y = -11 \\ 2x - 0y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

b) Hệ phương trình vô nghiệm vì $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

c) Hệ phương trình vô nghiệm vì $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

d) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất vì $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$, xác định các giá trị của tham số m để HPT

a) Có nghiệm duy nhất

b) Vô nghiệm

c) Vô số nghiệm

Lời giải

Xét các tỷ số: $\frac{a'}{a} = \frac{m}{1} = m; \frac{b'}{b} = 1; \frac{c'}{c} = 2m$

a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b} \Leftrightarrow m \neq 1$

Vậy $m \neq 1$ là giá trị cần tìm

b) Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq 2m \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

c) Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2m \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

Vậy không có giá trị nào của m để hệ vô nghiệm

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - y = m^2 \end{cases}$, xác định các giá trị của tham số m để HPT

a) Có nghiệm duy nhất

b) Vô nghiệm

c) Vô số nghiệm

Lời giải

- Với $m = 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

- Với $m \neq 0$

a) Ta tìm được điều kiện của m là $m = \pm 1$

b) Ta tìm được điều kiện của m là $m = -1$

c) Ta tìm được điều kiện của m là $m = 1$

Dạng 2: Kiểm tra một cặp số cho trước có phải là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hay không?

Cách giải: Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} ax+by=c (a,b,c \neq 0) \\ a'x+b'y=c' (a',b',c' \neq 0) \end{cases}$ khi và chỉ

khi nó thỏa mãn cả hai phương trình của hệ.

Bài 1: Kiểm tra xem cặp số $(-4; 5)$ là nghiệm của hệ phương trình nào trong các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ -3x+2y=21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=-12 \\ x+\frac{1}{3}=\frac{-7}{3} \end{cases}$

Lời giải

a) Thay $x=-5; y=5$ vào $-3x+2y=21$ ta được: $-1.(-4)+2.5=21$ (vô lý)

Vậy cặp số $(-4;5)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ -3x+2y=21 \end{cases}$

b) Tương tự ta có cặp số $(-4;5)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=-12 \\ x+\frac{1}{3}=\frac{-7}{3} \end{cases}$

Bài 2: Hãy kiểm tra xem mỗi cặp số sau có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không

a) $(1;2)$ và $\begin{cases} 3x-5y=-7 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

b) $(-2;5)$ và $\begin{cases} 2x-3y=-19 \\ -3x+2y=7 \end{cases}$

Lời giải

a) Thay $x=1; y=2$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} 3.1-5.2=-7 \\ 2.1+2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7=-7 \\ 4=4 \end{cases} \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy cặp số $(1;2)$ là nghiệm của hệ phương trình

b) Thay $x=-2; y=5$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} 2.(-2) - 3.5 = -19 \\ -3.(-2) + 2.5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - 15 = -19 \\ 6 + 10 = 7 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Vậy cặp số $(-2; 5)$ không là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = -19 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} -mx + y = -2m \\ x - m^2y = -7 \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số m để HPT nhận cặp số $(1; 2)$ làm nghiệm

Lời giải

Thay $x = 1; y = 2$ vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases} -m + 2 = -2m \\ 1 - 2m^2 = -7 \end{cases} \Rightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + y = m \\ x - my = -1 - 6m \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số m để cặp số $(-2; 1)$ là nghiệm của phương trình đã cho

Lời giải

Thay $x = -2; y = 1$ vào hệ phương trình ta được: $\begin{cases} 2m.(-2) + 1 = m \\ -2 - m = -1 - 6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 1 = m \\ 5m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$.

Vậy $m = \frac{1}{5}$ là giá trị cần tìm.

Dạng 3: Giải hệ phương trình bằng phương pháp đồ thị

Cách giải

Bước 1: Vẽ hai đường thẳng $(d): ax + by = c; (d'): a'x + b'y = c'$ trên cùng một hệ trục tọa độ

Bước 2: Xác định nghiệm của hệ phương trình dựa vào đồ thị đã vẽ ở bước 1

Bài 1: Cho hai đường thẳng $(d_1): 2x - y = 5; (d_2): x - 2y = 1$

a) Vẽ hai đường thẳng d_1, d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Từ đồ thị của d_1, d_2 tìm nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

c) Cho đường thẳng $d_3: mx + (2m - 1)y = 3$. Tìm các giá trị của tham số m để ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải

b) Từ đồ thị của d_1, d_2 ta xác định được tọa độ giao điểm của d_1, d_2 là $M(3;1)$

Vậy $(3;1)$ là nghiệm của hệ phương trình

c) d_1, d_2, d_3 đồng quy $\Leftrightarrow M(3;1) \in d_3 \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}$

Bài 2: Cho ba đường thẳng $d_1: x + 2y = 5, d_2: 2x + y = 4, d_3: 2mx + (m - 1)y = 3m + 1$

a) Vẽ hai đường thẳng d_1, d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Từ đồ thị của d_1, d_2 tìm nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

c) Tìm các giá trị của tham số m để ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải

b) Tìm được nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$
 là $(1;2)$

c) Ba đường thẳng đồng quy $\Leftrightarrow m = 3$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm $m \in R$ để điểm $M(1; -3)$ để đường thẳng $(d): 2x - 3y = m, (d'): mx + 2y = 2$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành

A. $m = -1$

B. $m = \pm 2$

C. $m = 2$

D. Đáp án A, B, C đều sai

Lời giải

Chọn đáp án: B

Giải thích:

Giao điểm của (d) với trục hoành là $M(x_1; 0) \Rightarrow 2x_1 = m \Leftrightarrow x_1 = \frac{m}{2} \Rightarrow M\left(\frac{m}{2}; 0\right)$

Giao điểm của (d') với trục hoành là $N(x_2; 0) \Rightarrow mx_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{m} \Rightarrow M\left(\frac{2}{m}; 0\right)$ (để đường thẳng

(d') cắt được trục hoành thì $m \neq 0$)

Hai đường thẳng $(d): 2x - 3y = m, (d'): mx + 2y = 2$ cắt nhau tại 1 điểm trên trục hoành khi đó:

$$M \equiv N \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{m} \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Câu 2: Số nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 1 \\ (2 + \sqrt{2})x + (\sqrt{3} + \sqrt{6})y = 1 \end{cases}$$

A. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

B. Hệ phương trình có vô số nghiệm

C. Hệ phương trình vô nghiệm

D. Hệ phương trình có hai nghiệm x, y phân biệt

Lời giải

Chọn đáp án: C

Giải thích:

Xét phương trình thứ hai của hệ phương trình ta được:

$$(2 + \sqrt{2})x + (\sqrt{3} + \sqrt{6})y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})x + \sqrt{3}(1 + \sqrt{2})y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})} \quad (1)$$

Gọi đường thẳng $(d_1): y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$

+) Phương trình thứ nhất của hệ: $\sqrt{2} + \sqrt{3}y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

Gọi đường thẳng $(d_2): y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

+) Như vậy ta thấy nghiệm của hệ phương trình chính là giao điểm của (d_1) và (d_2)

+) Hai đường thẳng này có cùng hệ số góc, tung độ gốc khác nhau, do đó chúng song song. Như vậy không có giao điểm chung giữa hai đường thẳng hay hệ vô nghiệm.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ cho bốn điểm: $M(1;2), N\left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{4}\right), P\left(\frac{-2}{5}; 1\right), Q(3;2)$. Điểm nào

trong bốn điểm trên biểu diễn nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 2y = \frac{1}{2} \\ x - 6y = -5 \end{cases}$

A. Điểm M

B. Điểm N

C. Điểm P

D. Điểm Q

Lời giải

Chọn đáp án: B

Giải thích:

Lần lượt thay tọa độ tung điểm vào hệ phương trình, khi đó ta tìm được điểm N chính là điểm có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

Câu 4: Giá trị $x = \sqrt{2}; y = -2$ là nghiệm của hệ phương trình nào dưới đây

A. $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ x - \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Lời giải

Chọn đáp án: A

Giải thích:

Thay giá trị vào từng hệ phương trình, ta tìm được đáp án *A* thỏa mãn

Câu 5: Hệ phương trình nào dưới đây có nghiệm duy nhất

A.
$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ x - \frac{1}{3}y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 6x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{6}}{3} - 3\sqrt{2}x \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y = -x \\ x + y = 3 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y = x + \sqrt{2} \\ -3x + 3y - 3\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Chọn đáp án: B

Giải thích:

Xét từng hệ phương trình:

+) Câu A:
$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ x - \frac{1}{3}y = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

+) Câu C:
$$\begin{cases} y = -x \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

+) Câu D:
$$\begin{cases} y = x + \sqrt{2} \\ -3x + 3y - 3\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = \sqrt{2} \\ -3x + 3y = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Có:
$$\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

Từ đó ta có đáp án *B* đúng.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: không giải hệ phương trình, xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} 0x - 2y = 4 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 0x - y = 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

- a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất
- b) Hệ phương trình vô số nghiệm
- c) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Bài 2: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 3mx + y = 2m \\ -3x - my = -1 + 3m \end{cases}$$
. Xác định các giá trị của tham số m để hệ phương trình:

- a) Có nghiệm duy nhất
- b) Vô nghiệm
- c) Vô số nghiệm
- d) Nhận $\left(\frac{1}{9}; -\frac{10}{3}\right)$ làm nghiệm

Hướng dẫn giải

- a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = \pm 1$
- b) Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m = -1$
- c) Hệ phương trình vô số nghiệm $\Leftrightarrow m = 1$
- d) Hệ phương trình nhận $\left(\frac{1}{9}; -\frac{10}{3}\right)$ làm nghiệm $\Leftrightarrow m = -2$

Bài 3: Cho hai đường thẳng $d_1: 2x + y = 3$ và $d_2: x - 4y = 6$

- a) Vẽ hai đường thẳng d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ
- b) Từ đồ thị của d_1, d_2 tìm nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$$
- c) Cho đường thẳng $d_3: (2m+1)x + my = 2m-3$. Tìm các giá trị của tham số m để ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Hướng dẫn giải

b) Từ đồ thị ta thấy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; -1)$

c) Ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy $\Leftrightarrow m = -5$