

ÔN TẬP HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$

A. Các kiến thức cần nhớ

1. Tính chất của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$
- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$

*) Nhận xét:

- Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ với mọi $x \neq 0$; $y = 0$ khi $x = 0$

Giá trị nhỏ nhất của y bằng 0.

- Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ với mọi $x \neq 0$; $y = 0$ khi $x = 0$

Giá trị lớn nhất của y bằng 0.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một đường cong luôn đi qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng

Đường cong được gọi là Parabol với đỉnh O

- Nếu $a > 0$ thì (P) nằm phía trên trục hoành và O là điểm thấp nhất
- Nếu $a < 0$ thì (P) nằm phía dưới trục hoành và O là điểm cao nhất.

B. Bài tập áp dụng

Dạng 1: Tính giá trị của hàm số tại một điểm cho trước

Cách giải: Giá trị của hàm số $y = ax^2$ tại điểm $x = x_0$ là $y = ax_0^2$

Bài 1:

Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$

- Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là $-2; 0$ và $3 - 2\sqrt{2}$
- Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = -10 + 4\sqrt{6}$
- Tìm điều kiện của b biết rằng $f(b) \geq 4b + 6$.

Lời giải

a) Ta có: $f(-2) = -8$; $f(0) = 0$; $f(3 - 2\sqrt{2}) = -34 + 24\sqrt{2}$

b) Ta có: $f(a) = -10 + 4\sqrt{6} \Leftrightarrow a = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) Ta có: $f(b) \geq 4b + 6 \Rightarrow -2b^2 \geq 4b + 6 \Leftrightarrow b^2 + 2b + 3 \leq 0 \Rightarrow b \in \emptyset$

Bài 2:

Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2$

a. Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là $-3; 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}$

b. Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = 12 + 6\sqrt{3}$

c. Tìm b biết rằng $f(b) \geq 6b + 12$

Lời giải

a) Ta có: $f(-3) = 27; f(2\sqrt{2}) = 24; f(3 - 2\sqrt{2}) = 39 - 12\sqrt{3}$

b) Ta có: $f(a) = 12 + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow 3a^2 = 12 + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \pm(\sqrt{3} + 1)$

c) Ta có: $f(b) \geq 6b + 12 \Leftrightarrow 3b^2 \geq 6b + 12 \Leftrightarrow 3b^2 - 6b - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 1 + \sqrt{5} \\ b \leq 1 - \sqrt{5} \end{cases}$

Bài 3:

Cho hàm số $y = (2m + 1)x^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases}$$

Lời giải

a. Thay $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ vào phương trình $y = (2m + 1)x^2 \Rightarrow \frac{4}{3} = (2m + 1)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow m = 1$

b. $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (-2; 1) \text{ là nghiệm của hệ phương trình} \Rightarrow m = \frac{-3}{8}$

Bài 4:

Cho hàm số $y = (2m - 1)x^2$ (m là tham số).

a. Tìm các giá trị của m để $y = -2$ khi $x = -1$

b. Tìm giá trị của m biết $(x; y)$ thỏa mãn

$$+) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 2y = -4 \end{cases}$$

Lời giải

a) Thay $y = -2$ và $x = -1$ vào hàm số $y = (2m - 1)x^2$ (m : tham số) ta được:

$$-2 = (2m - 1)(-1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}.$$

b) Ta đi giải các hệ phương trình

$$+) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{8}$$

$$+) \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x^2 - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = -2 \end{bmatrix} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1$$

Dạng 2: Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Cách giải: Xét hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Ta có:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$ và đồng biến khi $x < 0$

Bài 1:

Cho hàm số $y = (3m + 2)x^2$ ($m \neq \frac{-2}{3}$). Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- a. Đồng biến với mọi $x < 0$
- b. Nghịch biến với mọi $x < 0$
- c. Đạt giá trị nhỏ nhất là 0.
- d. Đạt giá trị lớn nhất là 0.

Lời giải

- a) Ta có: $3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-2}{3}$. Vậy $m < \frac{-2}{3}$ là giá trị cần tìm.
- b) Ta có: $3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-2}{3}$. Vậy $m > \frac{-2}{3}$ là giá trị cần tìm.
- c) Ta có: $3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-2}{3}$. Vậy $m > \frac{-2}{3}$ là giá trị cần tìm.
- d) Ta có: $3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-2}{3}$. Vậy $m < \frac{-2}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 2:

Cho hàm số $y = (3m - 4)x^2$ ($m \neq \frac{4}{3}$). Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- a. Nghịch biến với mọi $x > 0$
- b. Đồng biến với mọi $x > 0$
- c. Đạt giá trị lớn nhất là 0
- d. Đạt giá trị nhỏ nhất là 0

Lời giải

- a) Ta có: $3m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$. Vậy $m < \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.
- b) Ta có: $3m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}$. Vậy $m > \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.
- c) Ta có: $3m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$. Vậy $m < \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.
- d) Ta có: $3m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}$. Vậy $m > \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3:

Cho hàm số $y = (-m^2 - 2m - 3)x^2$

a) Chứng minh rằng với mọi tham số m , hàm số luôn nghịch biến với mọi $x > 0$ và đồng biến với mọi $x < 0$

b) Tìm các giá trị của tham số m để khi $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$ thì $y = \frac{-11}{4}$

Lời giải

a) Ta có: $a = -m^2 - 2m - 3 = -(m+1)^2 - 2 < 0 \forall m \Rightarrow$ đpcm.

b) Ta có: $(-m^2 - 2m - 3)\frac{1}{4} = \frac{-11}{4} \Leftrightarrow m \in \{-4; 2\}$

Bài 4:

Cho hàm số $y = (\sqrt{2m-3} - 2)x^2$ với $m \geq \frac{3}{2}; m \neq \frac{7}{2}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến với mọi $x > 0$ và nghịch biến với mọi $x < 0$

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2m-3} - 2 > 0 \\ 2m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$. Vậy $m > \frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm.

Dạng 3: Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Cách giải: Ta lập bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = ax^2$	-2a	a	0	a	2a

- Biểu diễn các điểm đặc biệt trên mặt phẳng tọa độ và vẽ đồ thị dạng Parabol của hàm số đi qua các điểm đặc biệt đó.

Bài 1:

Cho hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ có đồ thị là Parabol (P).

a. Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{2}; 4)$

b. Với giá trị a vừa tìm được, hãy:

- Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ
- Tìm các điểm trên (P) có tung độ bằng 2
- Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

Lời giải

a. $A(-\sqrt{2}; 4) \in (P) \Rightarrow a = 2$. Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

b. Ta có $y = 2x^2$

Cho $y = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1; 2); (-1; 2)$

- Ta có: $M(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = 2x_0$.

M cách đều Ox, Oy nên ta có: $|x_0| = |y_0| \Rightarrow x_0 = \pm 2x_0 \Rightarrow x_0 \in \left\{0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

$\Rightarrow M_1(0; 0); M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); M_3\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 2:

Cho hàm số $y = (m-1)x^2 (m \neq 1)$ có đồ thị là Parabol (P).

a. Xác định m để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 1)$

b. Với giá trị m vừa tìm được, hãy:

- Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ

- Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 1
- Tìm các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ.

Lời giải

a) Ta có (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3};1) \Rightarrow 1 = (m-1).3^2 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$

b) Ta có $y = \frac{4}{3}x^2$

Vì các điểm có hoành độ bằng 1 nên ta có: $y = \left(\frac{4}{3}-1\right).1^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow$ điểm cần tìm $\left(1; \frac{1}{3}\right)$

+) Các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ là: $(0;0);(6;12)$

Bài 3:

Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P) .

a) Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ

b) Trong các điểm $A(1;2); B(-1;-1); C(10;-200)$, điểm nào thuộc (P) , điểm nào không thuộc (P) .

Lời giải

b) Thay $x=1; y=1$ vào (P) , ta được đẳng thức luôn đúng do đó điểm A thuộc (P)

- Tương tự ta có điểm B, C không thuộc vào (P) .

Dạng 4: Sự tương giao giữa (P) và (d)

Cách giải: Cho $(P): y = ax^2$ và $(d): y = mx + n (m \neq 0)$. Để tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và d ta làm như sau:

Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $d: ax^2 = mx + n (*)$

Bước 2: Giải phương trình $(*)$ ta tìm được nghiệm (nếu có). Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d

) Chú ý: Số nghiệm của $()$ đúng bằng số giao điểm của (P) và d , cụ thể

- Nếu $(*)$ vô nghiệm thì d không cắt (P)
- Nếu $(*)$ có nghiệm kép thì d tiếp xúc với (P)
- Nếu $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 1:

Cho $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x$

a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và d

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình: $x^2 \geq \frac{1}{2}x$

Lời giải

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $d: x^2 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (0;0); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

c) Dựa vào đồ thị, ta thấy $x \leq 0$ hoặc $x \geq \frac{1}{2}$ là nghiệm của bất phương trình $x^2 \geq \frac{1}{2}x$.

Bài 2:

Cho $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 1$

a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và d

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình: $2x^2 - x - 1 < 0$

Lời giải

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d: $2x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (1; 2); \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

c) Dựa vào đồ thị, ta thấy $\frac{-1}{2} < x < 1$ là nghiệm của bất phương trình $2x^2 - x - 1 < 0$.

Bài 3:

Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P)

a) Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ

b) Tìm các điểm thuộc (P) thỏa mãn:

- Có tung độ bằng 4

- Cách đều hai trục tọa độ

c) Dựa vào đồ thị, biện luận số nghiệm của phương trình $2x^2 - 2m + 3 = 0$ theo m .

Lời giải

b) Thay $y = 4$ vào hàm số $y = 2x^2$ ta được các điểm thỏa mãn bài toán là: $(\sqrt{2}; 4); (-\sqrt{2}; 4)$

- Các điểm cách đều hai trục tọa độ là: $(0; 0); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

c) Ta có: $2x^2 - 2m + 3 = 0$. Đường thẳng $d: y = 2m - 3$ là song song với trục hoành. Dựa vào đồ thị ta có:

- Với $m = \frac{3}{2}$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

- Với $m > \frac{3}{2}$: Phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2m-3}{2}}$

- Với $m < \frac{3}{2}$: Phương trình vô nghiệm.

Bài 4:

Cho (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (P)

a) Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ

b) Dựa vào đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $2x^2 - 2m + 4 = 0$ theo m .

Lời giải

b) Với $m = 2$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

- Với $m > 2$: Phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = \pm\sqrt{2m-4}$

- Với $m < 2$: Phương trình vô nghiệm.

Bài 5:

Cho hàm số $y = x^2$ (P) và $y = x + 2$ (d)

a. Vẽ đồ thị cả hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ

b. Gọi A và B là giao điểm của (P) và (d). Tính S_{AOB}

Lời giải

a) Xét hàm số $y = x^2$ (P)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

- Xét hàm số $y = x + 2$ (d)

x	0	-2
y	2	0

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow d \cap P$ tại hai điểm

phân biệt $A(-1;1); B(2;4)$

- Gọi $M = (d) \cap Oy; N = BN \perp Oy; S_{AOB} = S_{AOM} + S_{OMB} = \frac{1}{2}OM \cdot 1 + \frac{1}{2}OM \cdot 2$

$$\Rightarrow S_{AOB} = \frac{3}{2} \cdot OM = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \text{ (đvdt)}.$$

Bài 6:

Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị hàm số là (P).

a. Tìm hệ số a biết rằng (P) đi qua điểm $M(-2;4)$

b. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và đi qua điểm $N(2;4)$

c. Vẽ (P) và d xác định được ở các câu a và b trên cùng một hệ trục tọa độ

d. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) ở các câu a và b

Lời giải

a) Tìm được $a = 1$

b) Ta có d đi qua O nên $d: y = mx$ vì d đi qua $N(2; 4)$ nên $2m = 4 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow d: y = 2x$

d) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow (0; 0); (2; 4)$

Bài 7:

Cho $(P): y = x^2; (d): y = 2x + m - 2$. Tìm m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho:

a. A và B ở hai phía của Oy

b. A và B ở cùng 1 phía Oy

c. A và B ở bên phải Oy

d. A và B ở bên trái Oy

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x - m + 2 = 0(1)$

Để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 + m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

a. Theo Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2 - m(2) \end{cases}$

Để A và B ở hai phía của Oy thì x_1, x_2 trái dấu $\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2(tm)$

b. $x_1 \cdot x_2 > 0 \Leftrightarrow m < 2$

c. $x_1 > 0; x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2$

d. $x_1 < 0; x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} (vô.nghiệm)$

Bài 8: Tuyển sinh vào 10 Hà Nội, năm học 2011 - 2012

Cho $(P): y = -x^2; (d): y = mx - 1$

a. Chứng minh rằng: với mọi m thì (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt

b. Gọi x_1, x_2 là hoành độ của A và B . Tìm m sao cho: $x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1 - x_1 \cdot x_2 = 3(*)$

Lời giải

a) Xét phương trình: $x^2 + mx - 1 = 0; \Delta = m^2 + 4 > 0 \Rightarrow dpcm$

b. Theo Viet, ta có: $(*) \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2 - 1) = 3 \Leftrightarrow m = 2 \rightarrow m = 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$$

Bài 9: Tuyển sinh vào 10 Hà Nội, năm học 2011 - 2012

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$, $(P): y = x^2$

a. Tìm tọa độ các giao điểm của d và (P)

b. Gọi A, B là hai giao điểm của d và (P). Tính S_{AOB}

Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x \in \{2; -3\} \Leftrightarrow A(-3; 9); B(2; 4)$

b. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A và B xuống trục hoành

Ta có: $S_{OAB} = S_{A'AB'B} - S_{A'O A} - S_{OBB'}$; $A'B' = |x_{B'} - x_{A'}| = x_{B'} - x_{A'} = 5$; $A'A = y_A = 9$; $BB' = y_B = 4$

Diện tích hình thang: $S_{A'AB'B} = \frac{A'A + BB'}{2} \cdot A'B' = \frac{9+4}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2}$

$S_{A'AO} = \frac{1}{2} A'A \cdot A'O = \frac{27}{2}$; $S_{OBB'} = \frac{1}{2} BB' \cdot B'O = 4 \rightarrow S_{AOB} = S_{A'AB'B} - S_{O A' A} = \frac{65}{2} - (\frac{27}{2} + 4) = 15(dvdt)$

Bài 10:

Cho $(P): y = x^2$; $(d): y = 2mx - m^2 + 4$

a. Xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 1$

b. Tìm m sao cho (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 = 26$$

Lời giải

a. Xét phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0(1)$

Khi $m = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow (d) \cap (P) \text{ tại hai điểm phân biệt A, B}$

+) $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$

+) $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 9 \Rightarrow B(3; 9)$

b. (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 > 0(dung)$

Theo Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 4 \end{cases}$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 26 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 26 \Leftrightarrow m = \pm 3$

c. Thỏa mãn:

$x_1^3 + x_2^3 = 28 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 28 \Leftrightarrow 8m^3 - 3 \cdot 2m(m^2 - 4) = 28 \Leftrightarrow m^3 + 12m - 14 = 0 \Leftrightarrow \dots$

Bài 11:

Cho (P): $y = x^2$; (d): $y = mx - m + 1$

a. Tìm m sao cho d cắt P tại hai điểm phân biệt

b. Gọi x_1, x_2 là các hoành độ của hai giao điểm. Tìm m để

$+) x_2 = 9x_1$ $+) |x_2 - x_1| = 2$

$+) 3x_1 + 2x_2 = 7$ $+) |x_1| + |x_2| = 3$

Lời giải

a. $x^2 - mx + m - 1 = 0(1)$

(1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4(m - 1) > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

b. Theo Viet, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m(1) \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1(2) \end{cases}$$

$+)$ Do $x_2 = 9x_1 \rightarrow x_1 + 9x_1 = m \rightarrow x_1 = \frac{m}{10} \rightarrow x_2 = \frac{9m}{10}$

Từ (2) $\rightarrow \frac{m}{10} \cdot \frac{9m}{10} = m - 1 \Leftrightarrow 9m^2 - 100m + 100 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 10 \\ m_2 = \frac{10}{9} \end{cases}$

$+) 3x_1 + 2x_2 = 7 \Leftrightarrow x_1 + 2(x_1 + x_2) = 7 \Leftrightarrow x_1 + 2m = 7 \Leftrightarrow x_1 = 7 - 2m \rightarrow x_2 = m - x_1 = 3m - 7$

Từ (2) $\rightarrow (7 - 2m)(3m - 7) = m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = \frac{8}{3} (tm) \end{cases}$

$+) |x_2 - x_1| = 2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 4 \end{cases}$

$+) |x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 9 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 9$
 $\Leftrightarrow m^2 - 2(m - 1) + 2|m - 1| = 9(*)$

- Nếu $m \geq 1 (m \neq 2), (*) \Leftrightarrow m = \pm 3 (m = 3 \text{ thỏa mãn})$

- Nếu $m < 1 (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 (\text{thỏa mãn}) \\ m = 5 (\text{loại}) \end{cases}$

Bài 12:

Cho $(P): y = x^2; (d): y = ax + 1; K(0; 1)$

a. Chứng minh rằng với mọi a , d luôn cắt P tại hai điểm A và B

b. Gọi E và F là hình chiếu vuông góc của A và B trên Ox , Chứng minh rằng tam giác KFE vuông.

Lời giải

a. $\Delta = a^2 + 4 > 0 \Rightarrow dpcm$

b. Gọi x_1, x_2 là hoành độ của A và B

$$E(x_1; 0); F(x_2; 0) \Rightarrow OE = |x_1|; FO = |x_2|$$

Theo Viet, ta có:

$$x_1 x_2 = -1; OE \cdot FO = OK^2 \Rightarrow \frac{OE}{KO} = \frac{OK}{FO} \Rightarrow \tan \widehat{OKE} = \tan \widehat{KFO} \Rightarrow \widehat{OKE} = \widehat{KFO} \Rightarrow \widehat{KEO} + \widehat{KFO} = 90^\circ (+)$$

Hoặc dùng tam giác đồng dạng cũng được.

(**Lưu ý:** Nên vẽ hình minh họa)

Bài 13: Chuyên Sư Phạm 1

Cho $(P): y = x^2; (d): y = mx - m^2 + 3$

Tìm m để d cắt P tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là các độ dài của hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0(1); \Delta = -3m^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m(a) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3(b) \end{cases}$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow x_1 > 0; x_2 > 0; x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 > 3 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{5}{2} (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow m^2 - 2(m^2 - 3) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{7}{2}} (m > 0)$$

Bài 14:

Cho (P): $y = 2x^2$; (d): $y = 4x + m + 2$.

Tìm m để d cắt P tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ thỏa mãn:

a. $2x_1 - 3x_2 = 4$

b. $y_1 + 2y_2 = 22$

c. $y_1 \cdot y_2 > 4$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $2x^2 - 4x - m - 2 = 0(1)$

$$\Delta' = m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -4$$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-m-2}{2} \end{cases}$

a. Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-m-2}{2} = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow m = -2(tm)$

b. $y_1 = 4x_1 + m + 2; y_2 = 4x_2 + m + 2 \Rightarrow y_1 + 2y_2 = 22 \Rightarrow 4x_1 + m + 2 + 2(4x_2 + m + 2) = 22$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = \frac{16-3m}{4}$$

Kết hợp:

$$x_1 + x_2 = 2, ta.co : x_1 = \frac{3m}{4}; x_2 = \frac{8-3m}{4}; x_1 \cdot x_2 = \frac{-m-2}{2} \Rightarrow \frac{3m(8-3m)}{16} = \frac{-m-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{-4}{9} \end{cases} \text{ c.}$$

$$y_1 \cdot y_2 > 4 \Leftrightarrow (4x_1 + m + 2)(4x_2 + m + 2) > 4 \Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(m+2)(x_1 + x_2) + (m+2)^2 > 4$$

$$\Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(m+2)(x_1 + x_2) + (m+2)^2 > 4 \Leftrightarrow -8(m+2) + 8(m+2) + (m+2)^2 > 4 \Leftrightarrow (m+2)^2 > 4$$

$$\Leftrightarrow |m+2| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 2 \\ m+2 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -4 \end{cases}. \text{ Vậy } m > 0 \text{ là các giá trị cần tìm.}$$

Bài 15: Chuyên Hùng Vương Phú Thọ, năm học 2014 - 2015

Trong mặt phẳng cho hệ trục tọa độ Oxy và điểm $A(1;3)$, $(P): y = x^2$, $(d): y = ax + 3 - a$

a. Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt

b. Giả sử B và C là hai giao điểm của d và (P). Tìm a, biết $AB = 2AC$

Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 = ax + 3 - a \Leftrightarrow x^2 - ax + a - 3 = 0(1)$

$$\Delta = (a-2)^2 + 8 > 0 \forall a$$

b. Theo Viet, có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 \cdot x_2 = a - 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_2 - 3(*)$

Ta có: $B(x_1; ax_1 + 3 - a); C(x_2; ax_2 + 3 - a)$

$$AB = 2AC \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (ax_1 - a)^2} = 2\sqrt{(x_2 - 1)^2 + (ax_2 - a)^2} \Leftrightarrow (a^2 + 1)(x_1 - 1)^2 = 4(a^2 + 1)(x_2 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = 4(x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = 2(x_2 - 1) \\ x_1 - 1 = -2(x_2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 1 \\ x_1 = -2x_2 + 3 \end{cases}$$

$$+) \quad x_1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow (*) : 2x_2^2 - 4x_2 + 4 = 0(\text{vô nghiệm})$$

$$+) \quad x_1 = -2x_2 + 3 \Rightarrow (*) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$- \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$- \quad x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow a = 1$$

Vậy $a = 1$, $a = 3$ là các giá trị cần tìm.

Bài 16: Chuyên Sư Phạm Hà Nội, năm học 2014 - 2015

Trong mặt phẳng cho hệ trục tọa độ Oxy và điểm $A(1;3)$,

$$(P): y = x^2, (d): y = \frac{-2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3}(m: \text{tham số})$$

a. Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m d luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt

b. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (P) và d, đặt $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$.

$$\text{Chứng minh rằng: } f(x_1) - f(x_2) = \frac{-1}{2}(x_1 - x_2)^3$$

Lời giải

$$a. x^2 = \frac{-2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 2(m+1)x - 1 = 0(1)$$

Ta có: $a.c < 0 \Rightarrow (1)$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$b. \text{ Theo Viet, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2}{3}(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1 = \frac{-3}{2}(x_1 + x_2) \\ -1 = 3x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^3 - x_2^3 + (m+1)(x_1^2 - x_2^2) + x_2 - x_1 = (x_1 - x_2) \left[x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + (m+1)(x_1 + x_2) - 1 \right] \\ &= (x_1 - x_2) \left[x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2)^2 + 3x_1 x_2 \right] = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \left[2x_1^2 + 8x_1 x_2 + 2x_2^2 - 3(x_1 + x_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(-x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2) = \frac{-1}{2}(x_1 - x_2)^3 \text{ (dpcm)} \end{aligned}$$

Bài 17: Chuyên Tiền Giang, năm học 2014-2015

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P): y = x^2, (d): y = x$

Tìm trên (P) điểm A và B sao cho $AB = 3\sqrt{2}$ và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng d, biết rằng điểm A có hoành độ dương

Lời giải

Vì $AB \perp d \Rightarrow (d): y = -x + m$

Hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình: $x^2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 + x - m = 0(1)$

Vì A, B phân biệt nên (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay: $\Delta = 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{4}$

Khi đó $A(x_1; -x_1 + m); B(x_2; -x_2 + m) \Rightarrow AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 18 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 18$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 1 - 4(-m) - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1; 1) \\ x = -2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(-2; 4) \end{cases}$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

không vẽ đồ thị hãy tìm tọa độ các giao điểm của các đồ thị hàm số sau (m là tham số)

a) $y = x^2$ và $y = \frac{1}{2}x$

b) $y = x^2$ và $y = 2x - 1$

c) $y = x^2$ và $y = 2x - 3$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2$ và $y = mx + \frac{1}{2}m^2 - 8$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $x^2 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow (0;0); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

b) Ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d là: $A(1;1)$

c) Không tồn tại giao điểm

d) Ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d là: $B\left(-m-4; \frac{-m^2}{2} - 4m - 8\right); C\left(4-m; \frac{-m^2}{2} + 4m - 8\right)$

Bài 2:

Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định giá trị của tham số m để các điểm sau thuộc đồ thị hàm số

a) $A(2; m)$

b) $B(-\sqrt{2}; m)$

c) $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $A(2; m)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow m = \frac{1}{4} \cdot 2^2 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $B(-\sqrt{2}; m)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow m = \frac{1}{4} \cdot 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$. Vậy $\pm\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm

Bài 3:

Cho hàm số $y = (m^2 + 2m + 3)x^2$ (m là tham số)

a) Chứng minh hàm số luôn nghịch biến với mọi $x < 0$ và đồng biến với mọi $x > 0$

b) Tìm các giá trị của m biết khi $x = 1$ hoặc $x = -1$ thì $y = 4$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $m^2 + 2m + 3 = (m+1)^2 + 2 > 0 \forall m \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Ta có: $m^2 + 2m + 3 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 + \sqrt{2} \\ m = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $m \in \{-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$.

Bài 4:

Cho hàm số $y = (\sqrt{3m+4} - 3)x^2$ với $m \geq \frac{-4}{3}; m \neq \frac{5}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) Nghịch biến với mọi $x > 0$

b) Đồng biến với mọi $x > 0$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số nghịch biến với $x > 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq m < \frac{5}{3}$.

b) Hàm số đồng biến với mọi $x > 0 \Leftrightarrow m > \frac{5}{3}$.

Bài 5:

Cho hàm số $y = (3m+1)x^2$ với $m \neq \frac{-1}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) Đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

b) Đi qua điểm $B(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow m = 0$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 16y = 8 \\ -12x + 9y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = -7 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Hàm số đi qua điểm có tọa độ

$(2; 1) \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4}$.

Bài 6:

Cho Parabol $(P): y = 2x^2$ và $d: y = \frac{3}{2}x$ Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình: $2x^2 \leq \frac{3}{2}x$

Hướng dẫn giải

b) Tọa độ giao điểm của (P) và d là: $(0;0)$ và $\left(\frac{3}{4}; \frac{9}{8}\right)$

c) Bất phương trình: $2x^2 \leq \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{4}$