

GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A. Lý thuyết

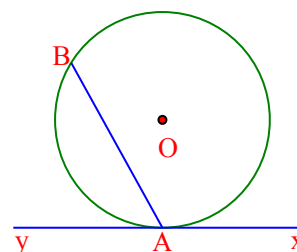
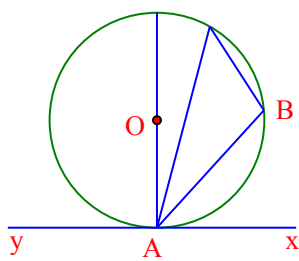
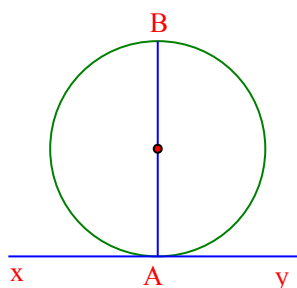
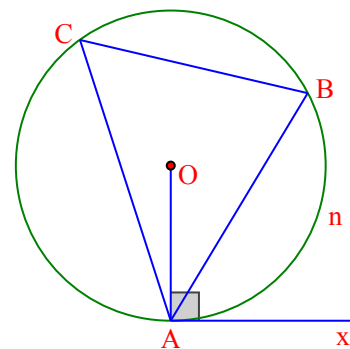
1. Định nghĩa:

*) Góc $\widehat{BAx}$ có đỉnh nằm trên đường tròn cạnh Ax là một tia tiếp tuyến còn cạnh AB chứa dây cung AB , góc $\widehat{BAx}$ gọi là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung

+) $\widehat{AnB}$ gọi là cung bị chắn

2. Định lý: Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn.

Ta có: $\widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AnB}$



$$\text{sđ} \widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AB} = 90^\circ$$

$$\text{sđ} \widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AB}$$

$$\text{sđ} \widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AB}$$

3. Hệ quả: Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau: $\widehat{ACB} = \widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AnB}$

4. Định lý bổ sung (Bổ đề): Nếu góc $\widehat{BAx}$ (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung $\widehat{AB}$ căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

B. Bài tập

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức, các góc bằng nhau

Cách giải: Ta áp dụng các kiến thức sau

- Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau
- Hai góc kề đáy của tam giác cân thì bằng nhau

- Hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau thì cặp góc còn lại cũng bằng nhau

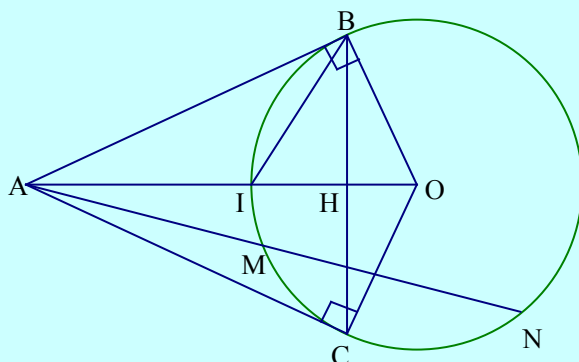
Bài 1:

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AMN với (O) (M nằm giữa A và N)

a) Chứng minh $AB^2 = AM \cdot AN$

b) Gọi $H = AO \cap BC$. Chứng minh $AH \cdot AO = AM \cdot AN$

c) Đoạn thẳng AO cắt đường tròn (O) tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .



Lời giải

a) Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BM}$

$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ANB (gg)$

b) Ta có AO là đường trung trực của BC nên $\Rightarrow AO \perp BC$

Xét tam giác vuông AOB , có: $AB^2 = AH \cdot AO$

c) Chứng minh được $\widehat{ABI} = \widehat{CBI}$ (do: $\widehat{BI} = \widehat{CI}$) $\Rightarrow BI$ là phân giác $\widehat{ABC}$. mà AO là tia phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

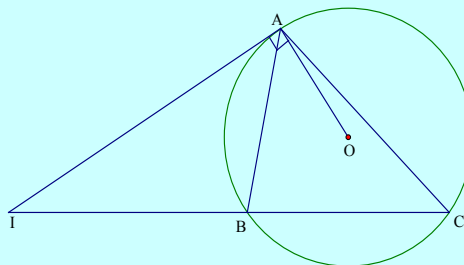
Bài 2:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) .

Tiếp tuyến tại A cắt BC tại I

a) Chứng minh $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$

b) Tính IA, IC biết rằng $AB = 20\text{cm}$, $AC = 28\text{cm}$



$$BC = 24cm$$

Lời giải

a) Xét $\triangle BAI$ và $\triangle ACI$ có: $\hat{I}$ chung và $\widehat{ACB} = \widehat{BAI} \Rightarrow \triangle BAI \sim \triangle ACI (gg)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IA} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IA^2}$$

Mặt khác $IA^2 = IB \cdot IC \Rightarrow đpcm.$

b) Do $\triangle BAI \sim \triangle ACI (gg)$

$$\Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{AI} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IC - 24}{IA} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow IA = 35cm; IC = 49cm.$$

Bài 3:

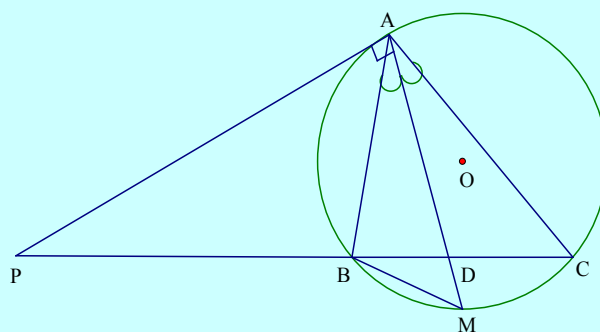
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) .

Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P

a) Chứng minh các tam giác PAC và PBA đồng dạng

b) Chứng minh $PA^2 = PB \cdot PC$

c) Tia phân giác trong của góc A cắt BC và (O) lần lượt tại D và M . Chứng minh $MB^2 = MA \cdot MD$



Lời giải

a) Ta có $\triangle PAB \sim \triangle PCA (gg)$

b) Vì $\triangle PAB \sim \triangle PCA (gg) \Rightarrow PA^2 = PB \cdot PC$

c) Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{MAC} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BM}$

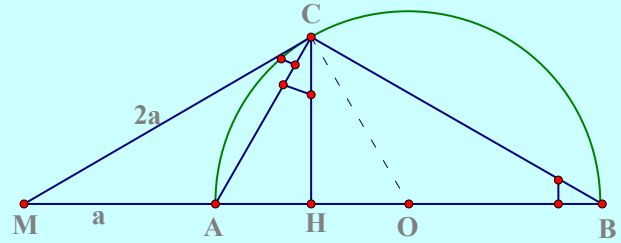
$$\Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MBD (gg) \Rightarrow MB^2 = MA \cdot MD$$

Bài 4:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB .
Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M . Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn, gọi H là hình chiếu của C trên AB

a. Chứng minh rằng CA là phân giác của $\widehat{MCH}$

b. Giả sử $MA = a; MC = 2a$. Tính AB và CH theo a ?



Lời giải

a. Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ACH} &= \widehat{B}(\text{phu.}\widehat{CAB}) \\ \widehat{ACM} &= \widehat{B}(=\frac{1}{2}sd\widehat{AC}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{ACM}$$

$$\text{b. } \triangle MAC \sim \triangle MCB(\text{gg}) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MC^2 = MA.MB \Rightarrow MB = \frac{MC^2}{MA} = 4a \Rightarrow AB = 4a - a = 3a$$

$$\text{Xét } \triangle COM(\widehat{C} = 90^\circ) \Rightarrow CM.CO = CH.OM \Rightarrow CH = \frac{CM.CO}{OM} = \frac{2a.1,5a}{2,5a} = \frac{6a}{5}.$$

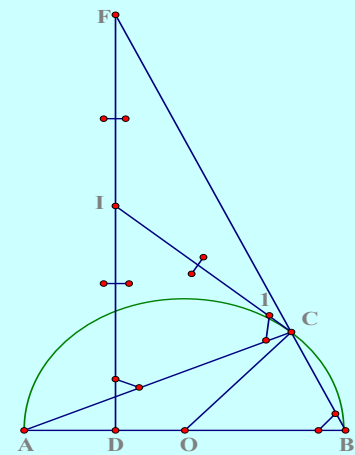
Bài 5:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C trên nửa đường tròn. Qua D trên đoạn AB kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BC tại F . Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại C cắt đường vuông góc ở D tại I . Gọi E là giao điểm của AC và DF .

a. So sánh $\widehat{IEC}; \widehat{ICE}; \widehat{ABC}$

b. $\triangle EIC$ cân

c. $IE = IC = FI$



Lời giải

a) Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ECF} = 90^\circ$

Xét $\triangle CEF, \triangle DBF$ có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{F} : \text{chung} \\ \widehat{C} = \widehat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IEC} (1)$

Lại có: $\widehat{ABC} = \widehat{ICE} (= \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AC}) (2) \Rightarrow \widehat{IEC} = \widehat{ICE} = \widehat{ABC}$

b. $\triangle IEC$ cân tại I

c) Ta có:

$\left. \begin{array}{l} \widehat{C}_1 + \widehat{ICE} = 90^\circ; \widehat{F} + \widehat{IEC} = 90^\circ \\ \widehat{ICE} = \widehat{IEC} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{F}$

$\triangle ICF$ cân tại I $\Rightarrow FI = IC$.

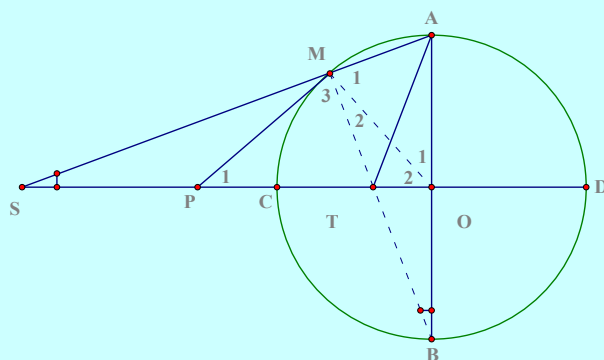
Bài 6:

Cho đường tròn $(O; R)$, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia CD lấy điểm S . SA cắt đường tròn tại M , tiếp tuyến của đường tròn ở M cắt CD ở P , BM cắt CD ở T . Chứng minh rằng

a. $PT.MA = MT.OA$

b. $PS = PM = PT$

c. Biết $PM = R$, tính $TA.SM$ theo R



Lời giải

a. Ta có $\widehat{OMP} = 90^\circ$

$\widehat{P}_1 = \widehat{O}_1$ (cùng phụ $\widehat{O}_2$)

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$ (cùng phụ $\widehat{M}_2$)

$\Rightarrow \triangle PMT \sim \triangle OMA (gg) \Rightarrow \frac{PT}{OA} = \frac{MT}{MA} \Leftrightarrow PT.MA = MT.OA$

b) $\widehat{S} = \widehat{B}$ (phụ góc $\widehat{MAB}$), $\widehat{SNP} = \widehat{OMB}$ (phụ góc $\widehat{M}_3$) $\Rightarrow \triangle PMS \sim \triangle OMB (gg)$

mà $\triangle OMB$ cân tại O $\Rightarrow \triangle PMS$ cân tại P $\Rightarrow PS = PM(1)$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M_3} + \widehat{PMS} = 90^0 \\ \widehat{PTM} + \widehat{S} = 90^0 \\ \widehat{S} = \widehat{PMS} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M_3} = \widehat{PTM} \Rightarrow \triangle MPT \text{ cân tại } P \Rightarrow PM = PT(2) \Rightarrow PS = PM = PT$$

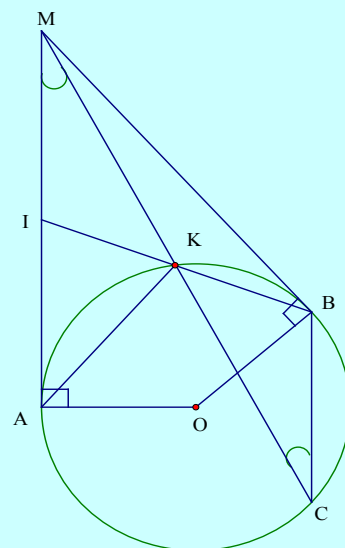
$$c) \left. \begin{array}{l} \triangle ATB \# \triangle OMB(gg) \\ \triangle SMP \# \triangle MOB(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ATB \# \triangle SPM \Rightarrow \frac{AT}{SP} = \frac{AB}{MS} \Leftrightarrow \frac{AT}{PM} = \frac{AB}{MS} (SP = PM) \Leftrightarrow AT.MS = AB.PM = 2R.R = 2R^2$$

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc, một tia là tiếp tuyến của đường tròn

Cách giải: Sử dụng hệ quả về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung hoặc hệ quả của hia góc nội tiếp.

Bài 1:

Cho đường tròn $(O; R)$ với A là điểm cố định trên đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với (O) và lấy M là điểm bất kì thuộc tia Ax . Vẽ tiếp tuyến thứ hai MB với đường tròn (O) . Gọi I là trung điểm của MA , K là giao điểm của BI với (O) .



a) Chứng minh các tam giác IKA và IAB đồng dạng. Từ đó suy ra tam giác IKM đồng dạng với tam giác IMB

b) Giả sử MK cắt (O) tại C . Chứng minh BC song song với MA .

Lời giải

$$\text{a) } \triangle IAK \sim \triangle IBA (gg) \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{IK}{IA}$$

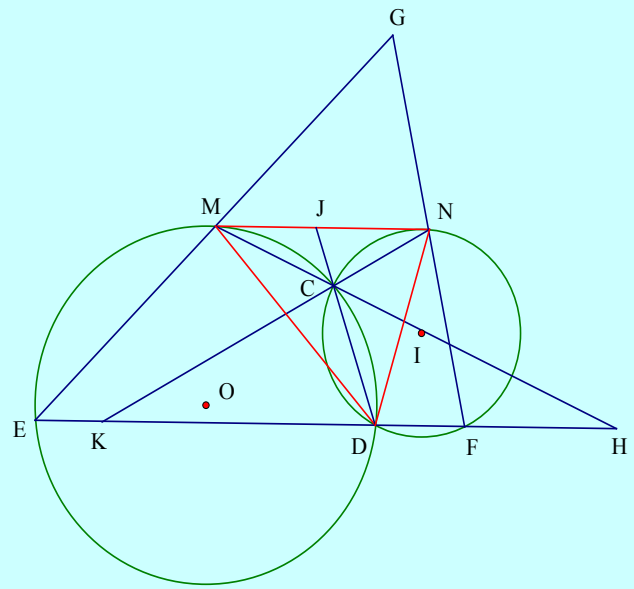
$$\text{mà } IA = IM \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{IK}{IM} \Rightarrow \triangle IKM \sim \triangle IMB (cgc)$$

b) Chứng minh được $\widehat{IMK} = \widehat{KCB} \Rightarrow BC \parallel MA \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 2:

Cho đường tròn (O) và (I) cắt nhau tại C và D , trong đó tiếp tuyến chung MN song song với cát tuyến EDF , M và E thuộc (O) , N và F thuộc (I) , D nằm giữa E và F . Gọi K, H theo thứ tự là giao điểm của NC, MC với EF . Gọi G là giao điểm của EM, FN . Chứng minh:

- Các tam giác GMN và DMN bằng nhau
- GD là đường trung trực của KH



Lời giải

a) Ta có $\widehat{DMN} = \widehat{E} = \widehat{GMN}$

$$\widehat{DNM} = \widehat{NFD} = \widehat{DNG} \Rightarrow \triangle GMN = \triangle DMN$$

b) Chứng minh được MN là đường trung trực của GD

$$\Rightarrow GD \perp EF (1)$$

Gọi J là giao điểm của DC và MN

$$\text{Ta có } \frac{IM}{DH} = \frac{JN}{DK} \left(= \frac{CI}{CD} \right)$$

$$\text{Mặt khác } JM = JN (= \sqrt{JC \cdot JD})$$

$$\Rightarrow DH = DK (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow$ đpcm.

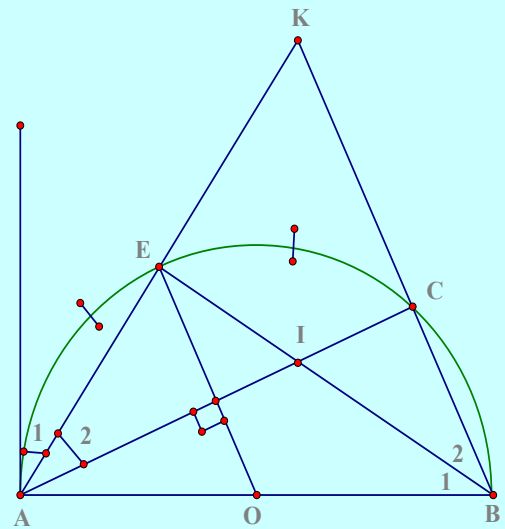
Bài 3:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , tiếp tuyến Ax . Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn. Tia phân giác của $\widehat{CAx}$ cắt nửa đường tròn ở E , AE và BC cắt nhau ở K

a. $\triangle ABK$ là tam giác gì? Vì sao

b. Gọi I là giao điểm của AC và BE . Chứng minh rằng $IK \parallel Ax$

c. Chứng minh rằng $OE \parallel BC$.



Lời giải

a) $BE \perp AK (\widehat{E} = 90^\circ)$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B_1} = \widehat{A_1} &= \frac{1}{2}sd \widehat{AE} \\ \widehat{B_2} = \widehat{A_2} &= \frac{1}{2}sd \widehat{EC} \\ \widehat{A_1} &= \widehat{A_2} (gt) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$$

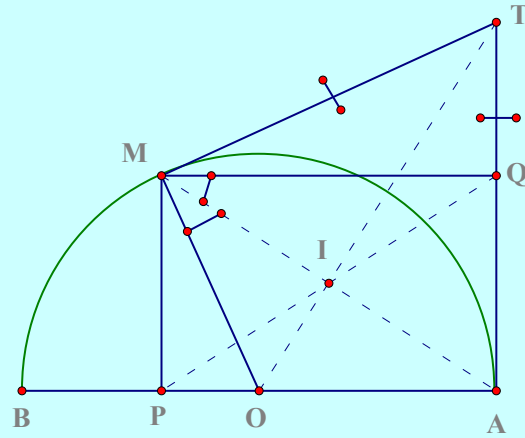
$\triangle ABK$ có BE là đường cao, đường phân giác nên cân tại B

b) I là trực tâm của $\triangle ABK \Rightarrow \left. \begin{aligned} KI &\perp AB \\ ma : BC &\perp AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow OE \parallel BC$

Bài 4:

Cho đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn ở A , qua điểm T trên đường thẳng d kẻ tiếp tuyến TM với đường tròn (M là tiếp điểm). Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của M trên AB và trên đường thẳng d . Chứng minh rằng

- AM, PQ, OT đồng quy tại I
- MA là tia phân giác của $\widehat{QMO}; \widehat{TMP}$
- $\triangle AIQ, \triangle ATM, \triangle AIP, \triangle AOM$ đồng dạng.



Lời giải

- Tứ giác $APMQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AM \cap PQ \equiv I$

Lại có $TM = TA$ (hai tiếp tuyến cắt nhau); $OM = OA (= R)$

$\Rightarrow OT$ là đường trung trực của $AM \Rightarrow OT$ cắt AM tại trung điểm I . Vậy có đpcm

- $$\left. \begin{array}{l} \widehat{AMP} = \widehat{MAQ} (slt) \\ \widehat{MAQ} = \widehat{AMT} = \frac{1}{2} sd \widehat{AM} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{AMQ} \Rightarrow MA \text{ là tia phân giác } \widehat{PMT}.$$

$\widehat{AMQ} = \widehat{MAO} (slt)$ và $\triangle OAM$ cân tại O , ta có: $\widehat{OAM} = \widehat{OMA} \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{AMQ} \Rightarrow MA$ là phân giác $\widehat{OMQ}$.

- $\triangle AIQ$ cân tại I , $\triangle AMT$ cân tại T , có: $\widehat{IAQ} = \widehat{MAT} \Rightarrow \triangle IAQ \# \triangle TAM (gg)$

Tương tự: $\triangle AIP$ cân tại I , $\triangle AOM$ cân tại O , có: $\widehat{IAP} = \widehat{MAO} \Rightarrow \triangle IAP \# \triangle AOM (gg)$

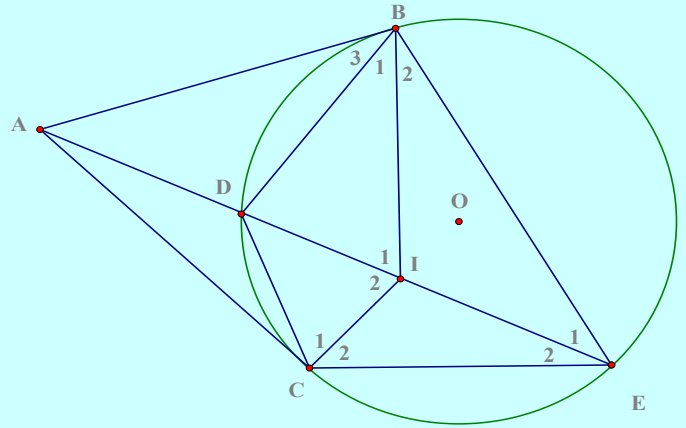
Bài 5:

Cho đường tròn (O) , điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (D nằm giữa A và E). Tia phân giác của góc DBE cắt DE ở I . CMR:

a. $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$

b. $AI = AB = AC$

c. CI là phân giác $\widehat{DCE}$



Lời giải

a) Xét $\triangle ABD, \triangle AEB$, có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A}: \text{chung} \\ \widehat{B}_3 = \widehat{E}_1 = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEB (gg) \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE} \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} \quad (2), AB = AC \quad (3) \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$

b. Ta có: $\widehat{I}_1 = \widehat{B}_2 + \widehat{E}_1$ (góc ngoài của tam giác), $\widehat{ABI} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3$

Lại có: $\widehat{E}_1 = \widehat{B}_3 \Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{ABI} \Rightarrow \triangle ABI$ cân tại A $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} AI = AB \\ AB = AC \end{array} \right\} \Rightarrow AI = AB = AC$

c. $\triangle ACI$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{I}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_3$, lại có: $\widehat{I}_2 = \widehat{C}_2 + \widehat{E}_2$ (góc ngoài của $\triangle ICE$), mà: $\widehat{E}_2 = \widehat{C}_3 = \frac{1}{2} \widehat{CD}$
 $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (đpcm).