

ÔN TẬP GÓC Ở TÂM

A. Lý thuyết

1. Góc ở tâm

Định nghĩa: Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

Ví dụ: $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm ($=\alpha$)

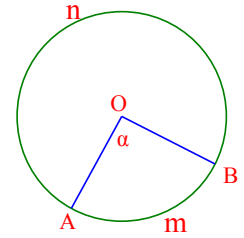
- Nếu $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì cung nằm bên trong góc được gọi là cung nhỏ, cung nằm bên ngoài góc gọi là cung lớn

Trên hình vẽ ta có

- Nếu $\alpha = 180^\circ$ thì mỗi cung là một nửa đường tròn.

- Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn. Góc bẹt chắn nửa đường tròn

- Kí hiệu cung AB là $\widehat{AB}$



2. Số đo cung

Định nghĩa: Số đo cung AB , kí hiệu là $sđ\widehat{AB}$

- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180° , cung lớn có số đo lớn hơn 180° , khi hai mút của cung trùng nhau ta có “cung không” với số đo 0°

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó

Ví dụ: $\widehat{AOB} = sđ\widehat{AB}$ (góc ở tâm chắn $\widehat{AB}$)

- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn)

- Số đo của nửa đường tròn bằng 180° . Cung cả đường tròn có số đo bằng 360° .

3. So sánh hai cung

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau

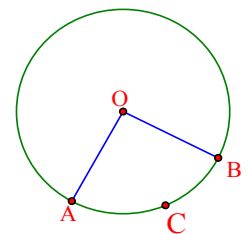
$sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{CD}$ khi và chỉ khi $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn

$sđ\widehat{AB} > sđ\widehat{CD}$ khi và chỉ khi $\widehat{AB} > \widehat{CD}$

4. Khi nào thì $sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{AB}$

Nếu điểm C là một điểm nằm trên cung AB thì: $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}$



B. Bài tập

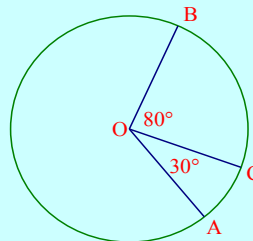
Dạng 1: Tính số đo của góc ở tâm, của cung bị chắn

Cách giải:

- Đưa về cách tính số đo một góc của tam giác, tam giác
- Để tính số đo của cung nhỏ, ta tính số đo của góc ở tâm tương ứng
- Để tính số đo của cung lớn ta lấy 360^0 trừ đi số đo của cung nhỏ.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc
- Sử dụng quan hệ giữa đường kính và dây

Bài 1:

Tính số đo cung AB nhỏ trong hình vẽ dưới đây, biết rằng $\widehat{AOC} = 30^0$ và $\widehat{BOC} = 80^0$



Lời giải

Điểm C nằm trên cung nhỏ AB nên ta có: $sd\widehat{AB} = sd\widehat{AC} + sd\widehat{BC}$ (1)

Góc ở tâm $\widehat{AOC}$ chắn cung AC nên $sd\widehat{AC} = \widehat{AOC} = 30^0$

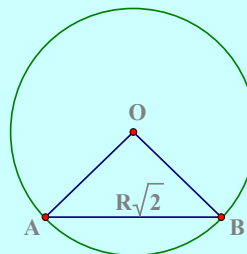
Góc ở tâm $\widehat{BOC}$ chắn cung BC nên $sd\widehat{BC} = \widehat{BOC} = 80^0$

Thay vào (1) ta được: $sd\widehat{AB} = sd\widehat{AC} + sd\widehat{BC} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 30^0 + 80^0 = 110^0$

Bài 2:

Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ dây $AB = R\sqrt{2}$.

Tính số đo của hai cung AB



Lời giải

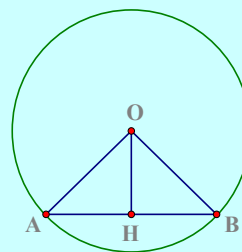
Xét $\triangle AOB$ có: $OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 = AB^2 \Rightarrow \triangle AOB$ vuông tại O

$$\Rightarrow \text{sđ} \widehat{AB} = 90^\circ$$

Vậy số đo cung lớn là $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$

Bài 3:

Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ dây AB sao cho số đo cung nhỏ AB bằng nửa số đo cung lớn AB . Tính diện tích tam giác AOB



Lời giải

Vì số đo cung nhỏ bằng nửa số đo cung lớn

$$\Rightarrow \text{sđ} \widehat{AB_{\text{nhỏ}}} = 360^\circ : 3 = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\Delta AOB \text{ cân tại } O \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$$

Kẻ OH vuông góc với AB , ta được:

$$OH = OA \cdot \sin A = R \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}R \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

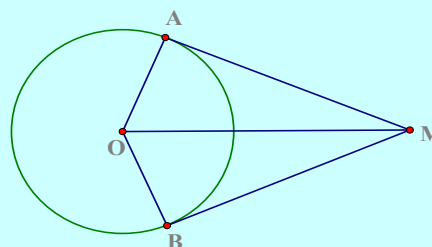
Bài 4:

Cho đường tròn O , hai tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở M , biết $\widehat{AMB} = 65^\circ$

a. Tính số đo $\widehat{AMO}$; $\widehat{AOM}$

b. Tính số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB

c. Tính số đo cung nhỏ AB và số đo cung lớn AB



Lời giải

a) Chứng minh được OM là tia phân giác của $\widehat{AMB}$

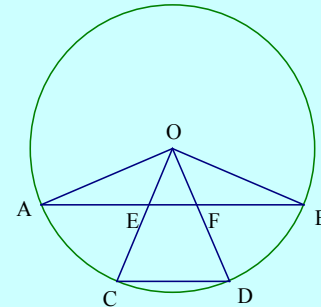
$$\Rightarrow \widehat{AMO} = 32,5^\circ \Rightarrow \widehat{AOM} = 180^\circ - 90^\circ - 32,5^\circ = 57,5^\circ$$

$$b) \widehat{AOB} = 360^0 - 180^0 - 65^0 = 115^0$$

$$c) \text{sđ } \widehat{AB}_{ngo} = \text{sđ } \widehat{AOB} = 115^0; \text{sđ } \widehat{AB}_{lon} = 360^0 - 115^0 = 245^0$$

Bài 5:

Trên cung nhỏ $\widehat{AB}$ của (O) , cho hai điểm C và D sao cho cung $\widehat{AB}$ được chia thành ba cung bằng nhau ($\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$). Bán kính OC và OD cắt dây AB lần lượt tại E và F



- So sánh các đoạn thẳng AE và BF
- Chứng minh đường thẳng AB song song với đường thẳng CD

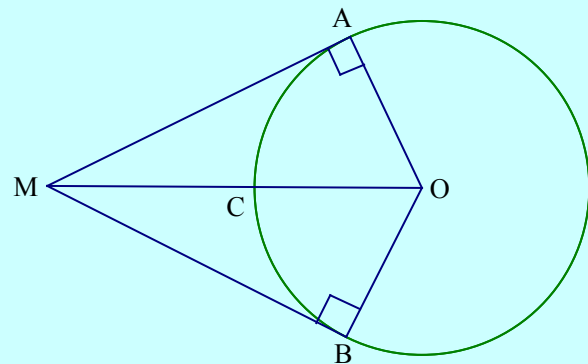
Lời giải

a) Chứng minh được: $\triangle OEA = \triangle OFB \Rightarrow AE = FB$

b) Chứng minh được: $\widehat{OEF} = \widehat{OCD}$, mà hai góc nằm ở vị trí đồng vị nên $AB \parallel CD$

Bài 6:

Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm)



- Tính $\widehat{AOM}$
- Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung nhỏ AB
- Biết đoạn thẳng OM cắt (O) tại C . Chứng minh C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB .

Lời giải

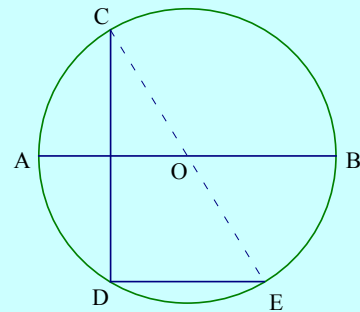
a) Xét tam giác vuông AMO , ta có: $\widehat{AOM} = 60^0$
(Sử dụng tỉ số lượng giác)

b) Tính được: $\widehat{AOB} = 120^\circ$, số đo $\widehat{ACB} = 120^\circ$

c) Ta có: $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$.

Bài 7:

Cho đường tròn (O) đường kính AB , vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC} = 50^\circ$ với C nằm trên (O) . Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB



a. Tính số đo cung nhỏ $\widehat{BE}$

b. Tính số đo cung $\widehat{CBE}$. Từ đó suy ra ba điểm C, O, E thẳng hàng

Lời giải

a) Tính được số đo $\widehat{BE} = 50^\circ$

b) Chứng minh được: số đo $\widehat{CBE} = 180^\circ \Rightarrow C, O, E$ thẳng hàng (đpcm)

*) **Cách khác:** Sử dụng $\widehat{CDE} = 90^\circ \Rightarrow$ đpcm

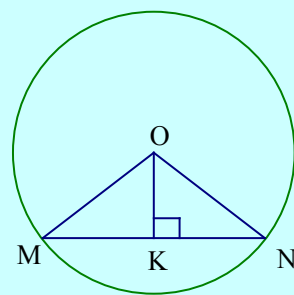
Bài 8:

Cho $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K . Tính:

a. Độ dài OK theo R

b. Số đo các góc $\widehat{MOK}; \widehat{MON}$

c. Số đo cung nhỏ và cung lớn $\widehat{MN}$



Lời giải

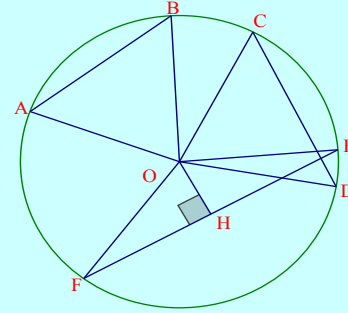
a) Xét tam giác vuông OMK , tính được $OK = \frac{R}{2}$

b) Tính được $\widehat{MOK} = 60^\circ; \widehat{MON} = 120^\circ$

c) Số đo cung nhỏ $\widehat{MN}$ là: $120^\circ \Rightarrow$ số đo cung lớn $\widehat{MN}$ là: 240°

Bài 9:

Cho $(O; R)$ các dây AB, CD, EF có độ dài như sau $AB = R, CD = R\sqrt{2}, EF = R\sqrt{3}$. Tính số đo các cung AB, CD, EF

**Lời giải**

Ta có $OA = OB = AB (= R) \Rightarrow \triangle OAB$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow sđ \widehat{AB} = 60^\circ$

Lại có $OC^2 + OD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2; CD^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$

$\triangle OCD$ có $OC^2 + OD^2 = CD^2$

Theo định lí Pitago đảo ta có $\triangle OCD$ vuông tại $O \Rightarrow sđ \widehat{CD} = sđ \widehat{COD} = 90^\circ$

Vẽ $OH \perp EF$ tại H , suy ra $EH = \frac{EF}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét $\triangle OHE$ vuông tại H , ta có $EH = \frac{OE\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \triangle OHE$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EOH} = 60^\circ$

$\triangle OEF$ cân tại O (vì $OE = OF$) có OH là đường cao nên cũng là đường phân giác

Do đó $\widehat{EOH} = \frac{1}{2} \widehat{EOF} \Rightarrow \widehat{EOF} = 2.60^\circ = 120^\circ$

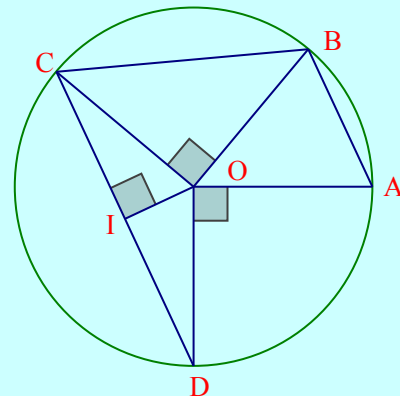
$sđ \widehat{EF} = sđ \widehat{EOF} = 120^\circ$

Bài 10:

Cho đường tròn $(O; R)$. Trên đường tròn lấy lần lượt các điểm A, B, C, D sao cho các cung AB, BC, CD có số đo lần lượt là $60^\circ; 90^\circ; 120^\circ$

a) Tính số đo các góc ở tâm chắn các cung ấy và số đo các cung sau $\widehat{ABC}; \widehat{BCD}; \widehat{ACD}$

b) Tính độ dài các dây cung AB, BC, CD theo R .



Lời giải

a) Ta có: $\widehat{AOB} = 60^\circ; \widehat{BOC} = 90^\circ; \widehat{COD} = 120^\circ$

$$sd \widehat{ABC} = sd \widehat{AB} + sd \widehat{BC} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$$sd \widehat{BCD} = sd \widehat{BC} + sd \widehat{CD} = 90^\circ + 120^\circ = 210^\circ$$

$$sd \widehat{ACD} = sd \widehat{AB} + sd \widehat{BC} + sd \widehat{CD} = 60^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 270^\circ$$

b) Ta có $\triangle AOB$ cân lại có $\widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOB$ đều $\Rightarrow AB = OA = R$

Theo định lí Pitago ta có: $BC^2 = BD^2 + OC^2 = 2R^2 \Rightarrow BC = R\sqrt{2}$

$$\widehat{AOD} = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ \Rightarrow AD = BC = R\sqrt{2}$$

Vậy $OI \perp CD$

Tam giác vuông COI có $\widehat{COI} = 60^\circ$ nên là nửa tam giác đều

$$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}OC = \frac{R}{2} \Rightarrow CI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Do đó $CD = 2CI = R\sqrt{3}$.

Dạng 2: Chứng minh hai cung bằng nhau

Cách giải: Để chứng minh hai cung (của một đường tròn) bằng nhau ta chứng minh hai cung này có cùng một số đo

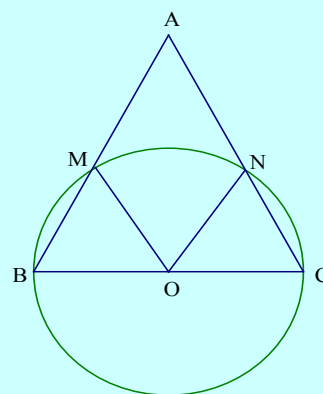
Bài 1:

Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ đường tròn tâm O , đường kính BC . Đường tròn (O) cắt

AB và AC lần lượt tại M và N

a. Chứng minh các cung nhỏ $\widehat{BM}$ và $\widehat{CN}$ có số đo bằng nhau

b. Tính $\widehat{MON}$, biết $\widehat{BAC} = 40^\circ$.



Lời giải

a) Chứng minh được: $\triangle BOM = \triangle CON$ (cgc) $\Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{CN}$

b) Tính được: $\widehat{MON} = 100^\circ$

Bài 2:

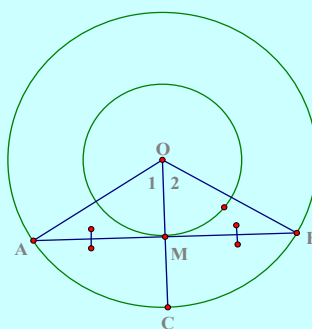
Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và

$\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ trên đường tròn nhỏ lấy một điểm

M . Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B . Tia OM cắt đường tròn lớn tại C

a. Chứng minh rằng: $\widehat{CA} = \widehat{CB}$

b. Tính số đo hai cung AB



Lời giải

a. Ta có: $AM \perp OB$ (tính chất hai tiếp tuyến)

+) $\triangle AOB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB}$ (hai góc ở tâm bằng nhau thì hai cung bị chắn bằng nhau)

b. Ta có: $MA = MB$ (đường kính vuông góc với dây)

$$MA^2 = OA^2 - OM^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow MA = \frac{R}{2} \Rightarrow AB = R$$

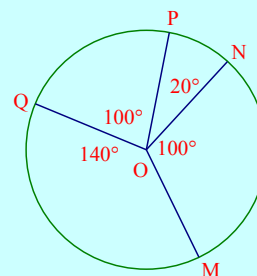
$\triangle AOB$ có ba cạnh bằng nhau $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow sđ \widehat{AB} = 60^\circ \Rightarrow sđ \widehat{AB}_{lon} = 300^\circ$.

Bài 3:

So sánh các cung nhỏ trong hình vẽ dưới đây.

Biết rằng $\widehat{MON} = 100^\circ$; $\widehat{ONP} = 20^\circ$; $\widehat{POQ} = 100^\circ$

$\widehat{MOQ} = 140^\circ$



Lời giải

Ta có $sđ \widehat{MQ} = \widehat{MOQ} = 140^\circ$ (góc ở tâm $\widehat{MOQ}$ chắn cung $\widehat{MQ}$)

$sđ \widehat{MN} = \widehat{MON} = 100^\circ$ (góc ở tâm $\widehat{MON}$ chắn cung $\widehat{MN}$)

$sđ \widehat{NP} = \widehat{NOP} = 20^\circ$ (góc ở tâm $\widehat{NOP}$ chắn cung $\widehat{NP}$)

$sđ \widehat{PQ} = \widehat{POQ} = 100^\circ$ (góc ở tâm $\widehat{POQ}$ chắn cung $\widehat{PQ}$)

Lại có: $\widehat{MON} = \widehat{POQ} = 100^\circ \Leftrightarrow sđ \widehat{MN} = sđ \widehat{PQ} \Leftrightarrow \widehat{MN} = \widehat{PQ}$

+) $100^\circ < 140^\circ \Leftrightarrow \widehat{MON} < \widehat{MOQ} \Leftrightarrow sđ \widehat{MN} < sđ \widehat{MQ} \Leftrightarrow \widehat{MN} < \widehat{MQ}$

+) $20^\circ < 100^\circ \Leftrightarrow \widehat{NOP} < \widehat{MPN} \Leftrightarrow sđ \widehat{NP} < sđ \widehat{MN} \Leftrightarrow \widehat{NP} < \widehat{MN}$

Vậy $\widehat{NP} < \widehat{MN} = \widehat{PQ} < \widehat{MQ}$.