

GÓC NỘI TIẾP

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa: Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn gọi là góc nội tiếp ($\widehat{ACB}$).

Lưu ý: Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là cung bị chắn

2. Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AOB}$$

3. Hệ quả: Trong một đường tròn

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.

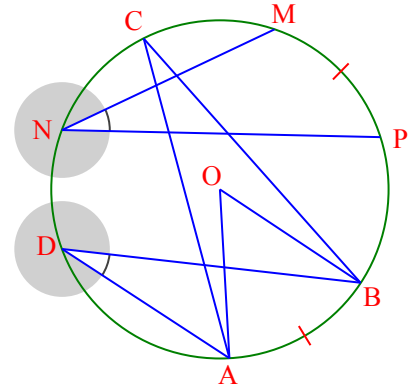
$$\widehat{ADB} = \widehat{MNP} \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{MP}$$

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$$

c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.



B. Bài tập

Dạng 1: Chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau

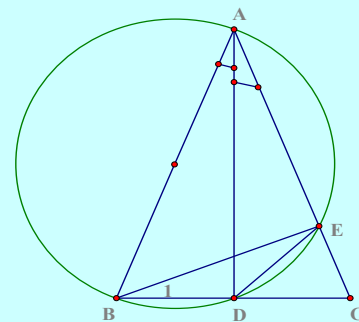
Cách giải: Dùng hệ quả trong phần lý thuyết

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

a. $\triangle DBE$ cân

b. $\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$



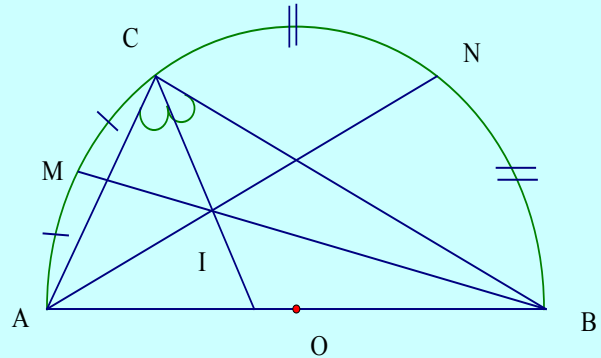
Lời giải

- a) $\widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow AD$ là phân giác của $\widehat{A}$
 $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DE} \Rightarrow BD = DE \Rightarrow \triangle BED$ cân tại D
- b) Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2} \widehat{DE} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$.

Bài 2:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60°

- a. So sánh các góc của $\triangle ABC$
b. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC , hai dây AN và BM cắt nhau tại I . Chứng minh rằng CI là tia phân giác của $\widehat{ACB}$



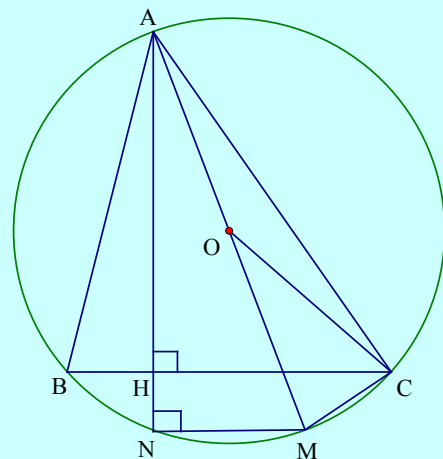
Lời giải

- a) Ta có: $\widehat{AC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{B} < \widehat{A} < \widehat{C}$
b) AN là phân giác của góc A , BM là phân giác của góc B nên CI là phân giác của góc C (đpcm)

Bài 1:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính AM

- a) Tính $\widehat{ACM}$
b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$
c) Gọi N là giao điểm của AH với (O) . Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

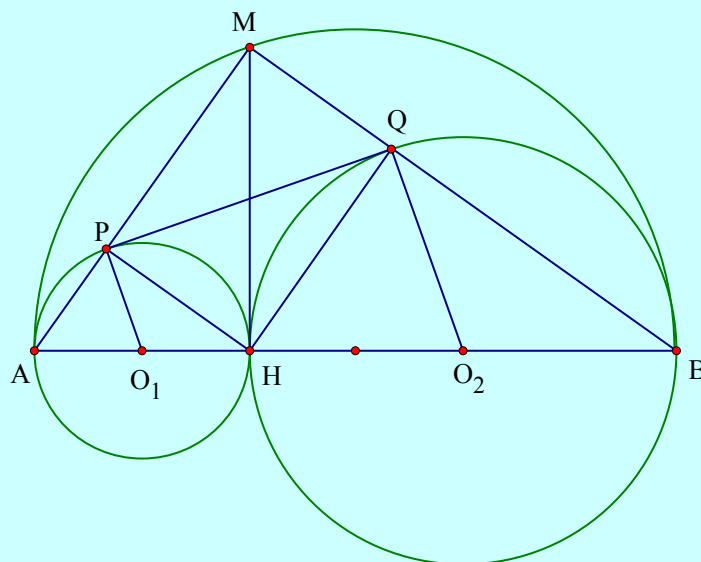


Lời giải

- a) Ta có $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp)
- b) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle AMC$ (gg)
- $$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}; \widehat{OCA} = \widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OCA}$$
- c) $\widehat{ANM} = 90^\circ \Rightarrow MNBC$ là hình thang
- $$\Rightarrow BC \parallel MN \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BN} = \text{sđ } \widehat{CM}$$
- $$\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BCM} \Rightarrow BCMN \text{ hình thang cân.}$$

Bài 4:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1 , đường kính AH và tâm O_2 , đường kính BH. Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng:



- a) $MH = PQ$
- b) $\triangle MPQ \sim \triangle MBA$
- c) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Lời giải

- a) Ta có: $\diamond MPHQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH = PQ$
- b) Xét các tam giác vuông AHM và BHM ta có: $MP \cdot MA = MQ \cdot MB \Rightarrow \triangle MPQ \sim \triangle MBA$ (cgc)
- c) $\widehat{PMH} = \widehat{MBH} \Rightarrow \widehat{PQH} = \widehat{O_2QB} \Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của O_2

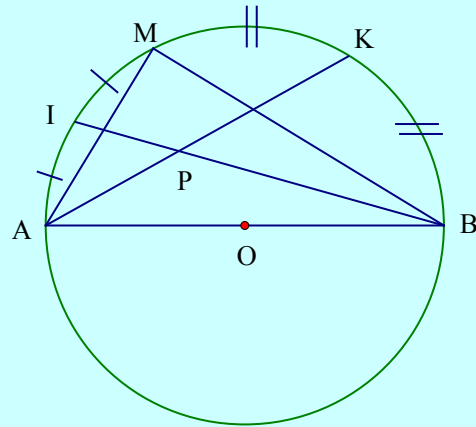
Chứng minh tương tự ta có PQ là tiếp tuyến của O_1 .

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba điểm thẳng hàng

Bài 1:

Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB .

- Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng
- Gọi P là giao điểm của AK và BI . Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB .



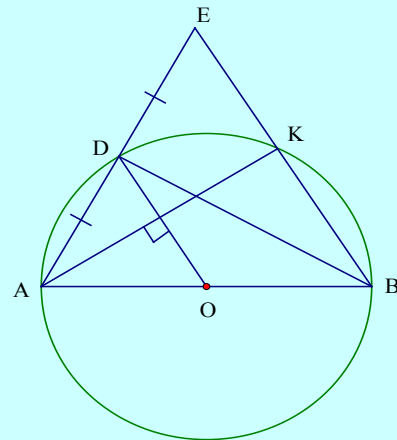
Lời giải

- Ta có: $M, A, B \in (O)$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AB$ là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow A, O, B$ thẳng hàng.
- Ta có: AK, BI là phân giác của góc $\widehat{MAB}; \widehat{MBA} \Rightarrow P$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMB$

Bài 2:

Cho đường tròn (O) , đường kính AB , điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D

- Tam giác ABE là tam giác gì?
- Gọi K là giao điểm của EB với (O) . Chứng minh $OD \perp AK$.



Lời giải

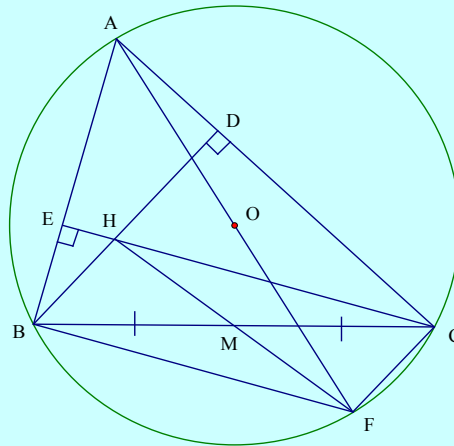
- Xét $\triangle ABE$ có BD đồng thời là đường cao, đường trung tuyến nên $\triangle ABE$ cân tại B .
- Xét $\triangle ABE$ có OD là đường trung tuyến $\Rightarrow OD \parallel BE$

mà: $AK \perp BE$ ($\widehat{AKB} = 90^\circ$) $\Rightarrow AK \perp OD$

Bài 3:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF

- Tứ giác BFCH là hình gì?
- Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng
- Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.



Lời giải

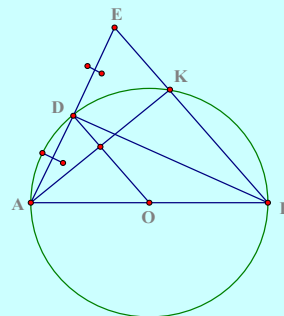
- Tứ giác BFCH có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.
- Tứ giác BHCF là hình bình hành mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HF $\Rightarrow H, M, F$ thẳng hàng.
- Xét $\triangle AHF$ có OM là đường trung bình của

$$\triangle AHF \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH.$$

Bài 4:

Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D

- $\triangle ABE$ là tam giác gì
- Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$



Lời giải

a. $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \begin{cases} BD \perp AE \\ AD = DE \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE \text{ cân tại B}$$

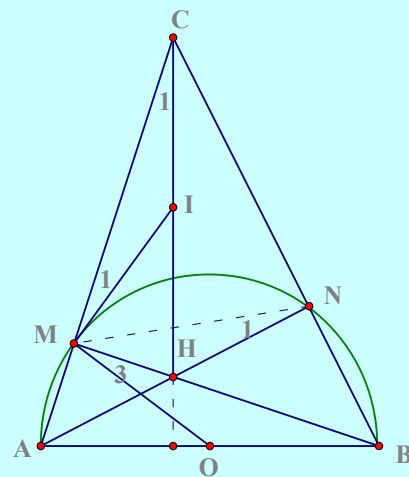
$$\text{b) } \begin{cases} OD \parallel EB \\ AK \perp EB \end{cases} \Rightarrow OD \perp AK$$

Bài 5:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M, CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM

a. $CH \perp AB$

b. Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)



Lời giải

a. Ta có H là trực tâm của tam giác $\Rightarrow CH \perp AB$

b. Cần chứng minh $MI \perp MO$

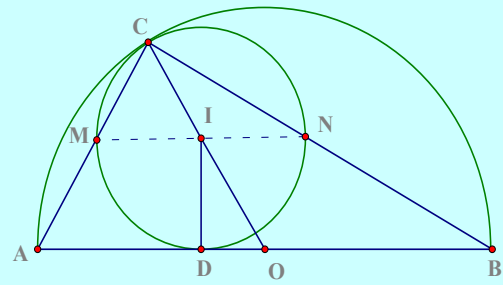
$$+) \text{ có: } C, M, H, N \in \left(I; \frac{CH}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \widehat{C}_1 = \widehat{N}_1 (= \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{MH}) \\ \widehat{N}_1 = \widehat{B}_1 (= \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{AM}) \\ \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3 (\Delta \text{can}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_3 \\ \widehat{M}_1 + \widehat{IMB} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{M}_3 + \widehat{IMB} = 90^\circ \rightarrow \widehat{OMI} = 90^\circ \end{aligned}$$

Bài 6:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

- M, N, I thẳng hàng
- $ID \perp MN$



Lời giải

$$a. \widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MCN} = 90^\circ$$

Xét (I), có: $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow N, M, I$ thẳng hàng

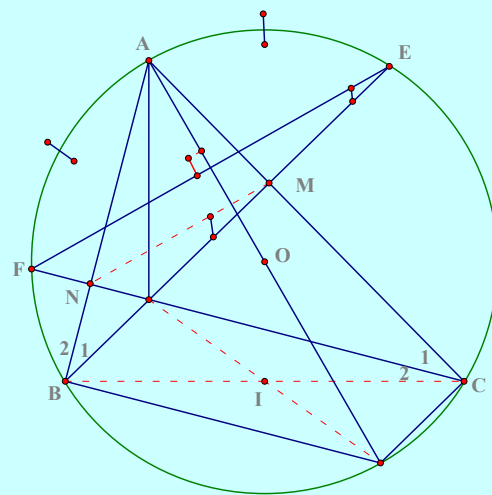
b. Đường tròn (O) và (I) tiếp xúc với nhau tại C nên O, I, C thẳng hàng

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ICN \rightarrow \widehat{INC} = \widehat{ICN} \\ \triangle OCB \rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{INC} = \widehat{OBC} \\ \text{đồng vị} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} MN \parallel AB \\ ID \perp AB (\text{t.c. tiếp tuyến}) \end{array} \right\} \Rightarrow ID \perp MN$$

Bài 7:

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F, chứng minh rằng

- A là điểm chính giữa cung FE
- $EF \parallel MN$
- $OA \perp MN$
- AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC
- F đối xứng với H qua AB



Lời giải

$$a. \widehat{B_1} = \widehat{C_1} \text{ (phụ góc } \widehat{BAC}) \Rightarrow \widehat{EA} = \widehat{FA} \text{ (chắn bởi hai góc nội tiếp bằng nhau)} \Rightarrow A \text{ là điểm chính}$$

giữa $\widehat{FE} \Rightarrow OA \perp FE(1)$

$$b) \left. \begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{C_2} \\ \widehat{NMB} = \widehat{C_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{NMB} \\ d.vi \end{array} \right\} \Rightarrow MN // FE(2)$$

$$\Rightarrow OA \perp MN$$

d) Kẻ đường kính AD và gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow IO \perp BC \equiv I$

Ta có:

$$\widehat{ACD} = 90 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} CD \perp AC \\ BH \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BH // CD \\ t.tu : CH // BD \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \diamond BHCD$ là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của BC nên I là trung điểm của HD

$$+) \text{ Xét } \triangle AHD, OI = \frac{1}{2} AH \Leftrightarrow AH = 2OI \text{ (không đổi)}$$

e. Ta có: $\widehat{AE} = \widehat{FA} \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ABE}$ (chắn hai cung bằng nhau)

Xét $\triangle BHF$ có BN là đường cao, đường phân giác nên cân tại B $\Rightarrow BN$ là đường trung tuyến

$\Rightarrow N$ là trung điểm của FH hay F đối xứng với H qua AB.