

DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Một đường thẳng được gọi là một tiếp tuyến của đường tròn nếu nó chỉ có 1 điểm chung với đường tròn đó

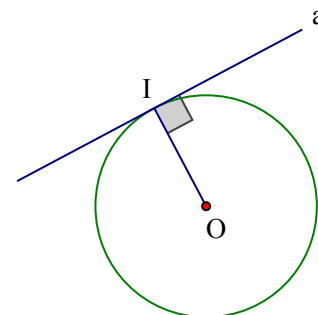
2. Các định lí

a) Định lí 1: Nếu một đường thẳng a là tiếp tuyến của một đường tròn $(O; R)$ thì nó vuông góc với tiếp tuyến đi qua tiếp điểm

b) Định lí 2: Nếu một đường thẳng a đi qua một điểm của đường tròn $(O; R)$ và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn

3. Các dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

a) Nếu một đường thẳng đi qua 1 điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.



Giả thiết	Đường thẳng a , điểm C thuộc (O) $a \perp OC = C$
Kết luận	a là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$

b) Nếu khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn

Giả thiết	Đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng a d bằng khoảng cách từ O đến a và $d = R$
Kết luận	a là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$

c) Nếu một đường thẳng và một đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn

B. Bài tập áp dụng và các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn

Cách giải: Để chứng minh đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại tiếp điểm C , ta có thể làm theo một trong các cách sau:

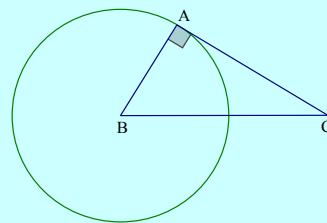
Cách 1: Chứng minh C nằm trên (O) và OC vuông góc với a tại C

Cách 2: Kẻ OH vuông góc với a tại H và chứng minh $OH = OC = R$

Cách 3: Vẽ tiếp tuyến a' của (O) và chứng minh a trùng với a'

Bài 1:

Cho tam giác $\triangle ABC$ có $AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm}, BC = 10\text{cm}$. Vẽ đường tròn $(B; BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B)



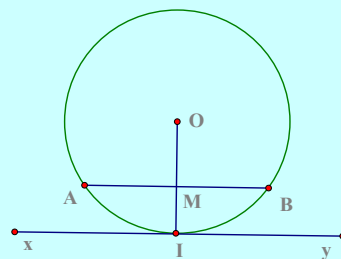
Lời giải

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow BA \perp AC$

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (B) .

Bài 2:

Cho đường tròn (O) và một dây AB . Gọi M là trung điểm của AB , vẽ bán kính OI đi qua M . Từ I vẽ đường thẳng $xy \parallel AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có $OI \perp AB$ (đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây)

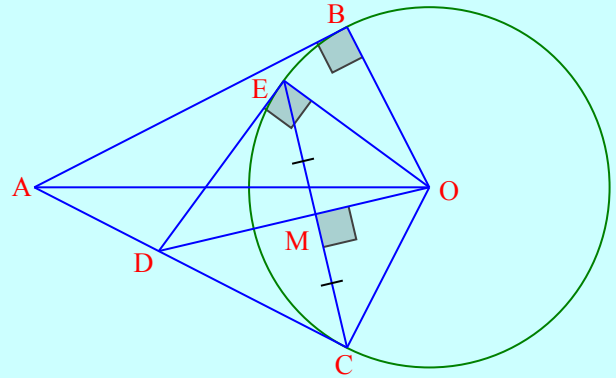
Mà $xy \parallel AB \Rightarrow OI \perp xy \Rightarrow xy$ là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 3:

Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC = AB$

a) Chứng minh rằng AC là tiếp điểm của đường tròn (O)

b) D là điểm trên AC . Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E ($E \neq C$). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)



Lời giải

a) Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OAB$, có: $OC = OB (= R)$; OA : chung; $AC = AB$ (gt) $\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OAB$ (ccc)

$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OBA} = 90^\circ \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) $OD \perp EC$ (gt) $\Rightarrow M$ là trung điểm của EC (định lý đường kính vuông góc với dây cung)

OD là đường trung trực của đoạn thẳng $EC \Rightarrow DE = DC \Rightarrow \widehat{OED} = \widehat{OCD} = 90^\circ$ (tính chất đối xứng trục)

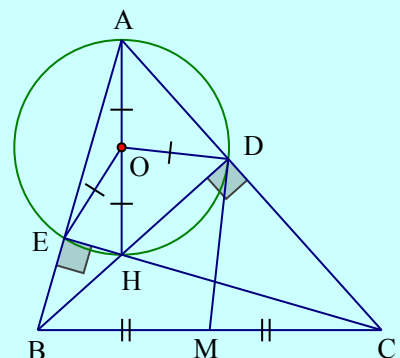
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 4:

Cho $\triangle ABC$, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .



Lời giải

a) Gọi O là trung điểm của AH

Xét $\triangle ADH$ và $\triangle AEH$ vuông tại D và E ta có: $OD = OE = OA = OH = \frac{1}{2}AH$

Suy ra bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH

b) Tam giác DBC vuông tại D có DM là đường trung tuyến nên $MD = MB = \frac{1}{2}BC$

Ta có: $\widehat{ODA} = \widehat{OAD}$ ($\triangle OAD$ cân)

$\widehat{OAD} = \widehat{DBC}$ (phụ với $\widehat{ACB}$)

$\widehat{DBC} = \widehat{BDM}$ (Vì $\triangle MBD$ cân)

Do đó: $\widehat{ODA} = \widehat{BDM}$

Ta có: $\widehat{ODA} + \widehat{ODB} = 90^\circ$ ($BD \perp AC$) $\Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{ODB} = 90^\circ$ ($\widehat{ODA} = \widehat{BDM}$)

Hay $\widehat{ODM} = 90^\circ \Rightarrow MD \perp OD$

Vậy MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .

Tương tự ta chứng minh được ME là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .

Bài 5:

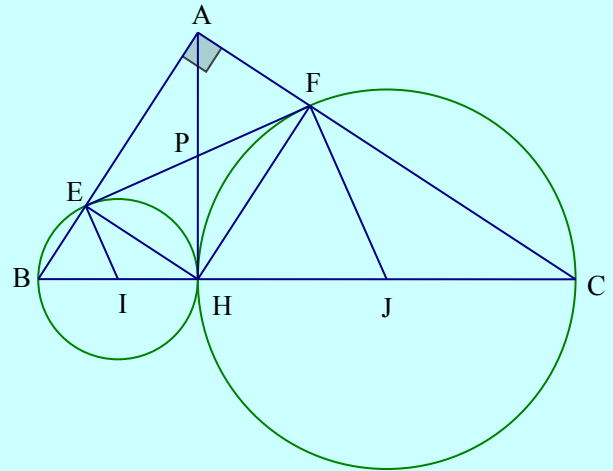
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại E , đường tròn tâm J đường kính HC cắt AC

Tại F . Chứng minh rằng:

a) AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (J) tại H

b) EF là tiếp tuyến của (I) tại E , tiếp tuyến của (J) tại F .



Lời giải

a) Gọi I là trung điểm của BH thì I là tâm của đường tròn đường kính BH

Gọi J là trung điểm của HC thì J là tâm của đường tròn đường kính HC

Ta có: $IH \perp AH \Rightarrow BH$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BH

Cũng vậy CH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HC

Vậy AH là tiếp tuyến chung của đường tròn (I) và (J)

b) Ta có: $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow \diamond AFHE$ là hình chữ nhật

Gọi P là giao điểm của AH và EF

Ta có: $PE = PF = PH = PA$

Lại có: $\triangle PEI = \triangle PHI (ccc) \Rightarrow \widehat{IEP} = \widehat{IHP} = 90^\circ \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của đường tròn (I)

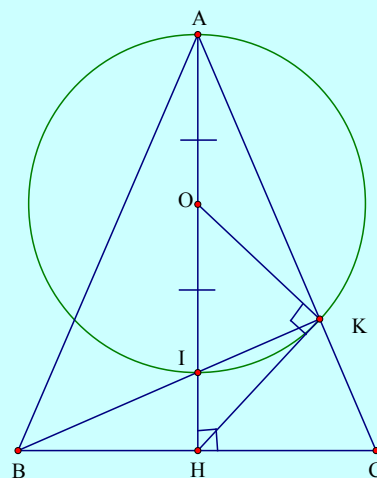
Chúng minh được: $\triangle PEJ = \triangle PHJ (ccc) \Rightarrow \widehat{IFJ} = \widehat{PHJ} = 90^\circ \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của đường tròn (J) .

Bài 6:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI



Lời giải

a) Chứng minh được: $\widehat{BKA} = 90^\circ$

b) Gọi O là trung điểm của AI . Ta có:

- $OK = OA \Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{OAK}$

- $\widehat{OAK} = \widehat{HBK}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

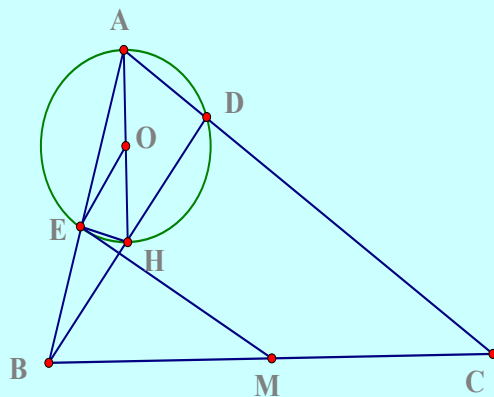
$HB = HK \Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HKB} \Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{HBK} \Rightarrow \widehat{HKO} = 90^\circ$

Bài 7:

Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H

a. Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên 1 đường tròn

b. Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC . Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O)



Lời giải

a) Xét $\triangle ADH (\hat{H} = 90^\circ) \Rightarrow D \in \left(O; \frac{AH}{2}\right); \triangle AEH (\hat{E} = 90^\circ) \Rightarrow E \in \left(O; \frac{AH}{2}\right)$

. Vậy 4 điểm A, D, H, E cùng thuộc 1 đường tròn

b) Xét $\triangle BEC (\hat{E} = 90^\circ)$, M là trung điểm của $BC \Rightarrow EM = MC \Rightarrow \triangle EMC$ cân tại M
 $\Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{ECM}$

Ta lại có $\triangle AOE$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{EAO}$

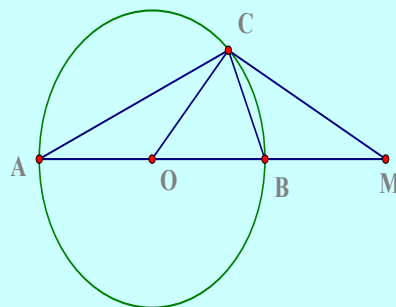
Mặt khác $\widehat{EAO} = \widehat{EAM}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) và $\widehat{AEO} + \widehat{OEC} = 90^\circ \Rightarrow OE \perp ME \Rightarrow ME$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 8:

Cho $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$, trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng :

a. MC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b. $MC^2 = 3R^2$



Lời giải

a. Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BOC$ đều $\Rightarrow BC = OB = BM = R$

Vậy $\triangle OCM$ vuông tại C (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền) $\Rightarrow OM \perp OC \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b. $\triangle BMC$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{M} = 30^\circ$

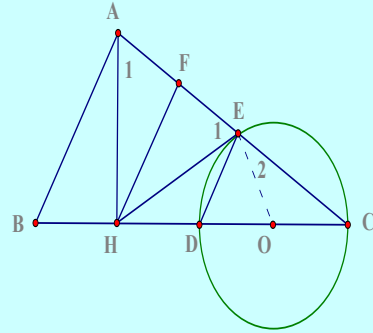
$$\triangle BCM \sim \triangle CAM (gg) \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA \cdot MB = 3R^2$$

Bài 9:

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 8cm, AC = 15cm$. Vẽ đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng với B qua H . Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E

a. Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn

b. Tính HE



Lời giải

a. Ta có E thuộc đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^\circ \Rightarrow DE \parallel AB$

+) Gọi F là trung điểm của $AE \Rightarrow HF$ là đường trung bình của hình thang $ABDE \Rightarrow HF \perp AE \Rightarrow \triangle AHE$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$

+) Ta có: c cân tại

$$O \Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{A_1} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEO} = 90^\circ \Rightarrow HE \perp OE \quad (\text{đpcm})$$

b. Xét $\triangle ABC (\widehat{A} = 90^\circ) \Rightarrow BC = 17cm$

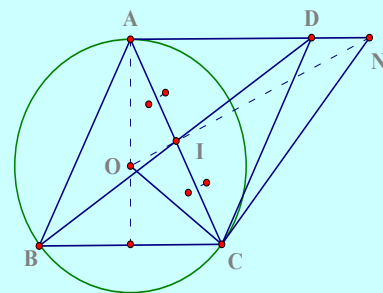
$$\text{Ta có: } AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = HE = \frac{120}{17} (cm)$$

Bài 10:

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm (O) . Vẽ hình bình hành $ABCD$, tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N . Chứng minh rằng:

a. Đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b. AC, BD, ON đồng quy



Lời giải

a. Ta có $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AD \parallel BC$ (2)

$\Rightarrow AD \parallel BC$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow AD \perp OA \Rightarrow$ đpcm

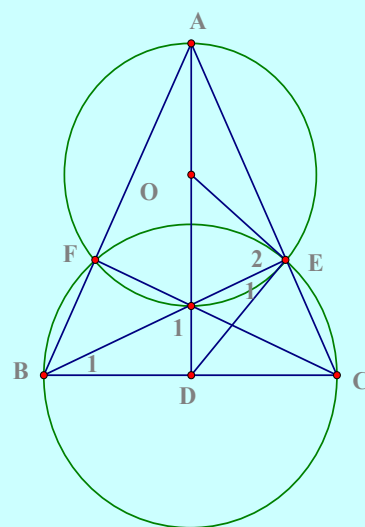
b. Gọi I là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow I$ là trung điểm của $AC \Rightarrow I \in ON$ (NA, NC là tiếp tuyến) $\Rightarrow AC, BD, ON$ đồng quy (đpcm)

Bài 11:

Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ đường tròn tâm D đường kính BC cắt AC và AB lần lượt ở E và F . Gọi H là giao điểm của BE và CF . Chứng minh rằng :

a. A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn

b. DE là tiếp tuyến của đường tròn ở câu a



Lời giải

a. Ta có D là tâm đường tròn đường kính

$BC \Rightarrow DC = DB = DE = DF \Rightarrow \triangle BEC, \triangle BFC$ vuông.

+) Gọi O là trung điểm của $AH \Rightarrow OF = OE = \frac{AH}{2}$

Vậy 4 điểm A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn

b. Có H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow AD$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow A, H, D$ thẳng hàng

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}; \widehat{E_2} = \widehat{H_2} = \widehat{H_1} \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{H_2} + \widehat{H_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OED} = 90^\circ \Rightarrow DE$

là tiếp tuyến (đpcm)

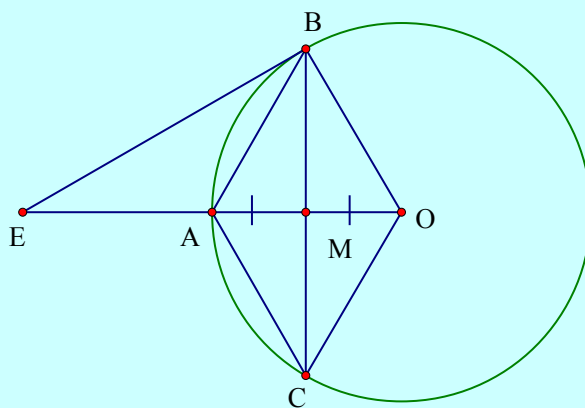
Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng

Cách giải: Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và sử dụng các công thức về hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài các đoạn thẳng

Bài 1:

Cho đường tròn tâm (O) có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA

- Tứ giác $OACB$ là hình gì? Vì sao
- Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , cắt đường thẳng OA tại E . Tính độ dài BE theo R



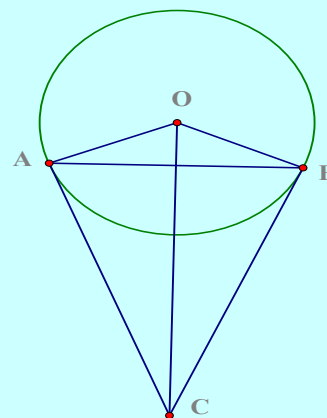
Lời giải

- OA vuông góc với BC tại $M \Rightarrow M$ là trung điểm của $BC \Rightarrow \diamond OACB$ là hình thoi
- Tính được: $BE = R\sqrt{3}$

Bài 2:

Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB , cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở C

- Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn
- Cho bán kính của (O) bằng 15cm và dây $AB = 24\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OC



Lời giải

a. Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$, có :

$$\begin{cases} OA = OC = R \\ OC : chung \end{cases} \Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC (cgc) \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 90^\circ \Rightarrow \text{đpcm}$$

b. Xét $\widehat{OBC}$; $\triangle OBI (\hat{I} = 90^\circ) \Rightarrow OI^2 = OB^2 - BI^2 \Rightarrow OI = 9cm$, áp dụng

Xét $\triangle OBC (\hat{B} = 90^\circ)$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

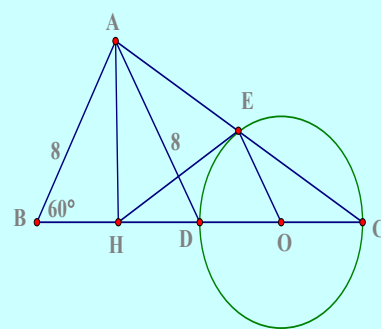
$$OB^2 = OI \cdot OC \Rightarrow OC = \frac{OB^2}{OI} = \frac{225}{9} = 25(cm)$$

Bài 3:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , AH là đường cao, $AB = 8cm, BC = 16cm$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H . Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E

a. Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn

b. Tính độ dài đoạn thẳng HE



Lời giải

a. Xét $\triangle ABC (\hat{A} = 90^\circ)$, $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$

Xét $\triangle ABD$ có AH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên $\triangle ABD$ cân tại A , $\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều.

+) Ta có $OD = OE \Rightarrow \triangle ODE$ cân tại O

Có: $AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{EDC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ODE$ đều

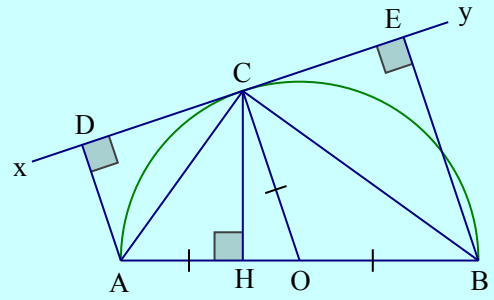
$$\Rightarrow DE = DH = DO = \frac{BC}{4} \Rightarrow \widehat{HEO} = 90^\circ \Rightarrow HE \text{ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính } CD.$$

b. Xét $\triangle HEO (\hat{E} = 90^\circ) \Rightarrow HO^2 = HE^2 + EO^2 \Rightarrow HE^2 = 8^2 - 4^2 = 12 \Rightarrow HE = 4\sqrt{3}(cm)$

Bài 4:

Cho nửa đường tròn tâm $(O; R)$ đường kính AB . Một đường thẳng xy tiếp xúc với đường tròn tại C . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của A và B trên xy . Chứng minh rằng:

- C là trung điểm của DE
- Tổng $AD + BE$ không đổi khi C di động trên nửa đường tròn
- Tích $4 \cdot AD \cdot BE = DE^2$



Lời giải

a) Nối OC ta được $OC \perp xy$

Ta có: $AD \parallel BE \parallel OC (\perp xy)$

Mặt khác $OA = OB \Rightarrow CD = CE$

b) Kẻ $CH \perp AB$

Xét hai tam giác vuông $\triangle DAC$ và $\triangle HAC$ có:

+) AC : chung

$$+) \widehat{DAC} = \widehat{HAC} (= \widehat{ACO}) \Rightarrow \triangle DAC = \triangle HAC \Rightarrow \begin{cases} AD = AH \\ CD = CH \end{cases}$$

Chứng minh được: $BE = BH; CE = CH \Rightarrow AD \cdot BC = AH \cdot BH$ (1)

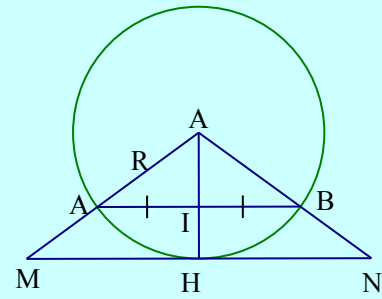
Điểm C nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $\triangle CAB$ vuông tại C

Vậy $AH \cdot BH = CH^2$ (2)

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow AD \cdot BE = CH^2 = CD \cdot CE = \left(\frac{DE}{2} \right)^2 = \frac{DE^2}{4} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 5:

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = 1,6R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB , nó cắt các tia OA và OB theo thứ tự tại M và N . Tính diện tích $\triangle MON$



Lời giải

a) Nối OH ta được $OH \perp MN$ (tính chất tiếp tuyến)

Ta lại có $AB \parallel MN \Rightarrow OH \perp AB = I$

Theo tính chất đường kính vuông góc với một dây ta được:

$$IA = IB = \frac{1,6R}{2} = 0,8R$$

$$\text{Tam giác } IOA \text{ vuông tại } I \Rightarrow OI^2 = OA^2 - IA^2 = R^2 - (0,8R)^2 = 0,36R^2 \Rightarrow OI = 0,6R$$

$$\text{Xét } \triangle MON \text{ có } AB \parallel MN \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OMN \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{OI}{OH} \text{ (tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ}$$

$$\text{số đồng dạng)} \Rightarrow MN = \frac{AB \cdot OH}{OI} = \frac{1,6R}{0,6R} = \frac{8}{3}R$$

$$\text{Diện tích tam giác } MON \text{ là: } S_{MON} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}R \cdot R = \frac{4}{3}R^2$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Xét bài toán: Cho góc xAy (khác góc bẹt) và lấy điểm D tùy ý trên cạnh Ax . Hãy nêu cách dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với Ax tại D và tiếp xúc với Ay . Hãy sắp xếp một cách hợp lý các câu sau để được lời giải đúng của bài toán trên

- a) Dựng tia phân giác At của góc xAy cắt d tại O
- b) Dựng đường tròn $(O; OD)$. Đó là đường tròn cần dựng
- c) Qua D dựng đường thẳng d vuông góc với Ax
- d) Dựng góc xAy khác góc bẹt và lấy điểm D trên cạnh Ax

Sắp xếp nào sau đây hợp lý?

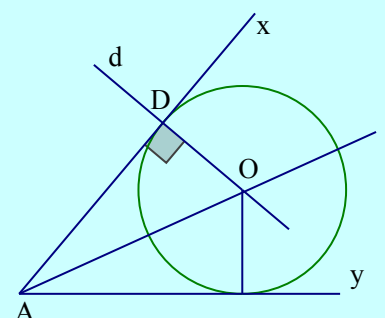
- A) $c), b), a), d)$
- B) $d), a), b), c)$
- C) $d), c), a), b)$
- D) $a), b), d), c)$

Chọn đáp án C

Giải thích:

Lời giải của bài toán như sau

- d) Dựng góc xAy khác góc bẹt và lấy điểm D trên cạnh Ax
- c) Qua D dựng đường thẳng d vuông góc với Ax
- a) Dựng tia phân giác At của góc xAy cắt d tại O



b) Vẽ đường tròn $(O; OD)$. Đó là đường tròn cần dựng.

Câu 2: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy . Vẽ AD và BC vuông góc với xy . Điền Đ (đúng) hoặc S (sai) vào các ô trống ở các khẳng định sau:

- A) ☐ $MC = MD$
- B) ☐ $AD + BC$ có giá trị không đổi khi điểm M chuyển động trên nửa đường tròn
- C) ☐ Đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB
- D) ☐ Diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất khi M là điểm nằm giữa của cung tròn đường kính AB

Chọn đáp án B

Giải thích:

A) Đúng. Xét $\diamond ABCD$, ta có:

$AD \parallel BC (\perp xy) \Rightarrow ABCD$ là hình thang vuông

Lại có: $\begin{cases} OA = OB \\ OM \parallel AD \end{cases} \Rightarrow MC = MD$

B) Đúng. Dựa theo kết quả trên ta được:

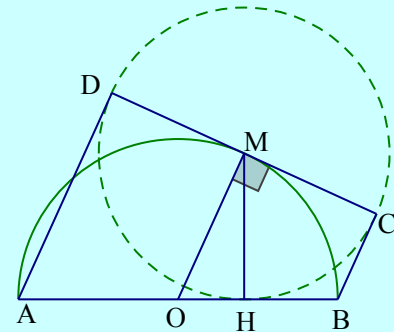
$AD + BC = 2OM = 2R$ (không đổi)

C) Đúng. Hạ $MH \perp AB \Rightarrow MH = MC$. Vậy đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB

D) Đúng. Ta có:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot CD = R \cdot CD$$

Do đó S_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi CD lớn nhất. Trong hình thang vuông $ABCD$, ta có nhận xét: $CD \leq AB = 2R \Leftrightarrow CD_{\max} = 2R$ đạt được khi và chỉ khi $ABCD$ là hình chữ nhật, nên



$$OM \perp AB$$

Do đó M là điểm giữa của cung tròn đường kính AB

Câu 3: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M . Xác định hình dạng của tứ giác $AMON$

A) Hình bình hành

B) Hình thoi

C) Hình chữ nhật

D) Hình vuông

Chọn đáp án B

Giải thích:

Xét $\diamond AMON$, ta có:

$$AM \parallel ON (\perp OB); AN \parallel OM (\perp OC)$$

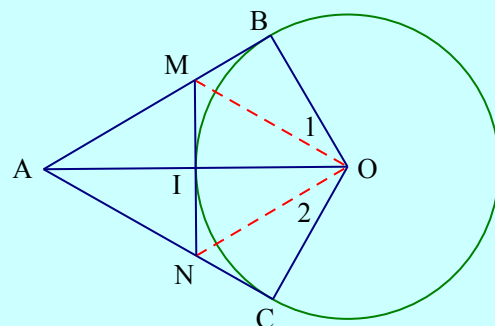
$\Rightarrow \diamond AMON$ là hình bình hành

Mặt khác, xét hai tam giác vuông $\triangle OBM$ và $\triangle OCN$, ta có:

$$OB = OC = R; \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ (phụ với } \widehat{MON})$$

$$\text{Do đó } \triangle OBM = \triangle OCN (ch - gn) \Rightarrow OM = ON$$

Vậy $AMON$ là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau)



Câu 4: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M . Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của đường tròn (O)

A) $OA = R$

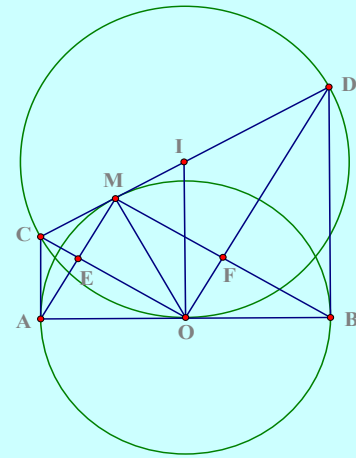
B) $OA = 2R$

C) $OA = 3R$

D) $OA = 4R$

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và M là điểm nằm trên (O) . Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt ở C và D . Đường thẳng AM cắt OC tại E , đường thẳng BM cắt OD tại F .

- Chứng minh $\widehat{COD} = 90^\circ$
- Tứ giác $MEOF$ là hình gì?
- Chứng minh OB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD



Lời giải

a. Dễ thấy $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EMF} = 90^\circ$

Có CM, CA là các tiếp tuyến $\Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OEM} = 90^\circ$

Tương tự ta có: $\widehat{OFM} = 90^\circ$

$\triangle CAO \cong \triangle CMO \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{MCO} \Rightarrow OC$ là phân giác của $\widehat{AMO}$

Tương tự OD là phân giác $\widehat{BOM} \Rightarrow OC \perp OD \Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ$

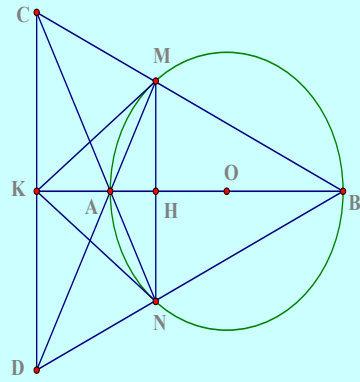
b. Do $\triangle AOM$ cân tại O nên OE là đường phân giác đồng thời là đường cao $\Rightarrow \widehat{OEM} = 90^\circ$

Tương tự $\widehat{OFM} = 90^\circ \Rightarrow \diamond MEOF$ là hình chữ nhật.

c. Gọi I là trung điểm của CD thì I là tâm đường tròn đường kính CD và $IO = IC = ID$. Có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $IO \parallel AC \parallel BD$. Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

Bài 3:

Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy M thuộc (O) sao cho $MA < MB$. Vẽ dây MN vuông góc với AB tại H . Đường thẳng AN cắt BM tại C . Đường thẳng qua C vuông góc với AB tại K và cắt BN tại D



- Chứng minh A, M, C, K cùng thuộc 1 đường tròn
- Chứng minh BK là tia phân giác của $\widehat{MBN}$
- Chứng minh $\triangle KMC$ cân và KM là tiếp tuyến của (O)
- Tìm vị trí của M trên (O) để tứ giác $MNKC$ trở thành hình thoi

Lời giải

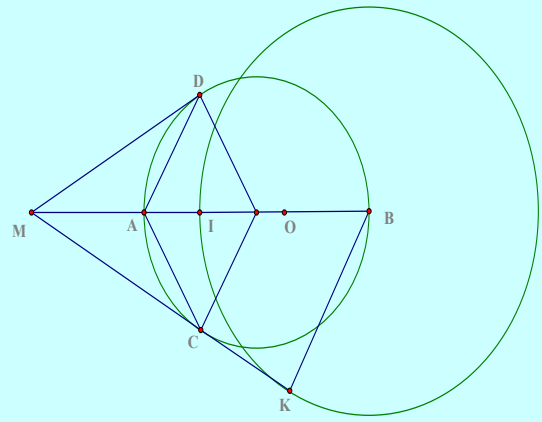
- Ta có: $\widehat{CKA} = \widehat{CMA} = 90^\circ \Rightarrow C, K, A, M \in (I; AC)$
 - $\triangle MBN$ cân tại B có BA là đường cao, trung tuyến và phân giác
 - $\triangle BCD$ có $BK \perp CD; CN \perp BN \Rightarrow H$ là trực tâm $\triangle BCD \Rightarrow D, A, M$ thẳng hàng
- Ta có $\triangle DMC$ vuông tại M có MK là trung tuyến nên $\triangle KMC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{KMC}$
- Lại có: $\widehat{KBC} = \widehat{OMB} \Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{OMB} = \widehat{KCB} + \widehat{KBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KMO} = 90^\circ$
- Mà OM là bán kính nên KM là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- $MNKC$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = CK; CM = CK \Leftrightarrow \triangle KCM$ đều $\Leftrightarrow \widehat{KBC} = 30^\circ \Leftrightarrow AM = R$

Bài 4:

Cho đường tròn (O) đường kính AB , vẽ $CD \perp OA$ tại trung điểm I của OA . Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và D cắt nhau ở M

- Chứng minh rằng A, B, M thẳng hàng

d. Chứng minh đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BI)$



$AC \perp BC \Rightarrow CB$ là phân giác $\widehat{DCK}$ d. $MNKC$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = CK; CM = CK \Leftrightarrow \Delta KCM$ đều
 $\Leftrightarrow \widehat{KBC} = 30^\circ \Leftrightarrow AM = R$