

CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình bậc hai một ẩn

- Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng:

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, trong đó a, b, c là các số thực cho trước và x là ẩn số.

- Giải phương trình bậc hai một ẩn là đi tìm tập nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn đó.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Trường hợp 1: Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2: Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

- Trường hợp 3: Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ với $b = 2b'$. Gọi biệt thức $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Trường hợp 1: Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2: Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.

- Trường hợp 3: Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

*) **Chú ý:** Trong trường hợp hệ số b có dạng $2b'$ ta nên sử dụng Δ' để giải phương trình sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.

- Nếu a, c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Không dùng công thức nghiệm, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước

Cách giải: Ta có thể sử dụng một trong các cách sau

Cách 1: Đưa phương trình đã cho về dạng tích

Cách 2: Đưa phương trình đã cho về phương trình mà vế trái là một bình phương còn vế phải là một hằng số.

Bài 1: Giải các phương trình sau

a) $5x^2 - 7x = 0$

b) $-3x^2 + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$

d) $3x^2 + 12x + 1 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $5x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{7}{5}\right\}$

b) Ta có: $-3x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm\sqrt{3}\}$

c) Ta có: $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 5\}$

d) Ta có: $3x^2 + 12x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3(x + 2)^2 = 11 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{3}$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a) $-\sqrt{3}x^2 - 7x = 0$

b) $\frac{-3}{5}x^2 - \frac{7}{2} = 0$

c) $x^2 - x - 9 = 0$

d) $3x^2 + 6x + 5 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $-\sqrt{3}x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow -x(\sqrt{3}x + 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -2\sqrt{3}\}$

b) Ta có: $\frac{-3}{5}x^2 - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow -6x^2 - 35 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-35}{6} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

c) Ta có: $x^2 - x - 9 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}\right\}$

d) Ta có: $3x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + 2x + \frac{5}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3(x + 1)^2 + 2 = 0$ (vô lý).

Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 3: Giải các phương trình sau

a) $x^2 + 2\sqrt{2}x = 0$

b) $(m^2 + 2)x^2 - 5 = 0$ với $m \in \mathbb{R}$

$$c) \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - 0,25 = 0$$

$$d) x^2 - 3x + 2 = 0$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } x^2 + 2\sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -2\sqrt{2}\}$

$$b) \text{ Ta có } (m^2 + 2)x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{m^2 + 2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{m^2 + 2}} \text{ (vì } m^2 + 2 > 0)$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \sqrt{\frac{5}{m^2 + 2}}; -\sqrt{\frac{5}{m^2 + 2}} \right\}$$

$$c) \text{ Ta có } \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - 0,25 = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,25 \Leftrightarrow \left|2x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{1}{2}; 0 \right\}$$

$$d) \text{ Ta có } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

Bài 4:

Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4x^2 + m^2x + 4m = 0$ có nghiệm $x = 1$

Lời giải

Thay $x = 1$ vào phương trình ta có: $4.1^2 + m^2.1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$

Bài 5:

Cho phương trình $4mx^2 - x - 10m^2 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x = 2$

Lời giải

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được: $4m.2^2 - 2 - 10m^2 = 0 \Leftrightarrow -10m^2 + 16m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{5}$.

Bài 6

:

Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 3 = 0$ (1). Giải phương trình (1) biết phương trình (1) có một nghiệm $x = 2$

Lời giải

Vì phương trình có nghiệm $x = 2$ nên ta có: $2^2 - (2m+1).2 + m^2 - 2m + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - 4m - 2 + m^2 - 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow m \in \{m = 1; m = 5\}$$

$$+) \ m = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$$

$$+) \ m = 5 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \Leftrightarrow x \in \{9; 2\}$$

Dạng 2: Giải phương trình bậc hai bằng cách sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn

Cách giải: Sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai để giải.

Bài 1:

Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

d) $-3x^2 + 4x - 4 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $a = 2; b = -3; c = -5$ và $\Delta = 49 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x \in \left\{ -1; \frac{5}{2} \right\}$$

b) Ta có: $a = 1; b = -6; b' = -3; c = 8; \Delta' = 1 > 0 \Rightarrow x \in \{2; 4\}$

c) Ta có: $a = 9; b = -12; c = 4; \Delta = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$

d) Ta có: $a = -3; b = 4; c = -4; \Delta = -32 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Bài 2:

Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a) $x^2 - x - 11 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $-5x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $-2x^2 + x - 3 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $a = 1; b = -1; c = -11; \Delta = 45 > 0 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2} \right\}$

b) Ta có: $a = 1; b = -4; c = 4; \Delta = 0 \Rightarrow x = 2$

c) Ta có: $a = -5; b = -4; c = 1; \Delta = 36 > 0 \Rightarrow x \in \left\{ -1; \frac{1}{5} \right\}$

d) Ta có: $a = -2; b = 1; c = -3; \Delta = -23 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Bài 3:

Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

c) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$

d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $a = 1; b = \sqrt{5}; c = -1; \Delta = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2} \right\}$

b) Ta có: $a = 2; b = -2\sqrt{2}; c = 1; \Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Ta có: $a = \sqrt{3}; b = -(1 - \sqrt{3}); c = -1; \Delta = 4 + 6\sqrt{3} > 0 \Rightarrow x \in \left\{ -1; \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

d) Ta có: $a = -3; b = 4\sqrt{6}; c = 4; \Delta = 144 > 0 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{6 + 2\sqrt{6}}{3}; \frac{-6 + 2\sqrt{6}}{3} \right\}$

Bài 4:

Giải các phương trình sau

a) $2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0$

b) $152x^2 - 5x + 1 = 0$

c) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

d) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $a = 2; b = 2\sqrt{11}; c = -7; \Delta = 100 > 0 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{-\sqrt{11} \pm 5}{2} \right\}$

b) Ta có: $a = 152; b = -5; c = 1; \Delta = -583 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

c) Ta tính được: $x \in \{2; \sqrt{3}\}$

d) Ta tính được: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 5:

Giải các phương trình sau

a) $x^2 + 2\sqrt{5}x + 4 = 0$

b) $\sqrt{2}x^2 - 3x + 5 = 0$

Lời giải

a) Ta có $\Delta' = (\sqrt{5})^2 - 4 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 1$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ và $x_2 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$

b) Ta có $\Delta = 3^2 - 4.5.\sqrt{2} = 9 - 20\sqrt{2} < 0$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6:

Cho phương trình $3x^2 - (5-m)x + 2-m = 0$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số

a) Xác định các hệ số a, b, c của phương trình

b) Giải phương trình trong các trường hợp $m = 2; m = 5; m = 1$

Lời giải

a) Ta có $a = 3, b = -(5-m), c = 2-m$

b) Với $m = 5$ ta có phương trình $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Với $m = 2$ ta có phương trình $3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Với $m = 1$ ta có phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 1 \end{cases}$

*) Nhận xét: Trong cả 3 trường hợp phương trình đều có nghiệm $x = 1$

Ta có thể biến đổi phương trình ban đầu tương đương với $(x-1)(3x-2+m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2-m}{3} \end{cases}$

Dạng 3: Sử dụng công thức nghiệm, xác định số nghiệm của phương trình dạng bậc hai

Cách giải: Xét phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$

1. Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
3. Phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b \neq 0 \\ \text{hoặc} \\ a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
4. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b = 0; c \neq 0 \\ \text{hoặc} \\ a \neq 0; \Delta < 0 \end{cases}$

Chú ý: Nếu $b = 2b'$ ta có thể thay thế điều kiện của Δ tương ứng bằng Δ'

Bài 1:

Cho phương trình $4x^2 + 4mx + m + 6 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép

Lời giải

Ta có: $\Delta' = 4m^2 - 4m - 24$

Phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 24 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$

Vậy $m \in \{-2; 3\}$.

Bài 2:

Cho phương trình $mx^2 + (2m - 5)x + m - 2 = 0$ (1) với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Khi nào

- a) Phương trình (1) có nghiệm
- b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

Xét 2 trường hợp

TH1: Với $m = 0$ phương trình trở thành $-5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

TH2: Với $m \neq 0$ phương trình $mx^2 + (2m - 5)x + m - 2 = 0$ là một phương trình bậc hai và có

$$\Delta = (2m - 5)^2 - 4m(m - 2) = -12m + 25$$

+ Nếu $\Delta = -12m + 25 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{25}{12}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

+ Nếu $\Delta = -12m + 25 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{25}{12}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2$

Vậy:

a) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \frac{25}{12}$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq 0$ và $m < \frac{25}{12}$

Bài 3:

Cho phương trình $(2m-3)x^2 - 2(m-2)x - 1 = 0$ với m là tham số. Khi nào

a) Giải phương trình với $m = 2$

b) Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình luôn có nghiệm. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Với $m = 2$, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

b) Xét hai trường hợp

TH1: Với $m = \frac{3}{2}$ phương trình đã cho trở thành $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

TH2: Với $m \neq \frac{3}{2}$ phương trình $(2m-3)x^2 - 2(m-2)x - 1 = 0$ là một phương trình bậc hai và có

$$\Delta' = (m-2)^2 + (2m-3) = (m-1)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra phương trình luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ \Delta = (m-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$

Cách khác: $(2m-3)x^2 - 2(m-2)x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2m-3)x^2 - (2m-3)x + x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(2m-3)x+1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (2m-3)x+1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình luôn có nghiệm $x=1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(2m-3)x+1=0$ có nghiệm

$$\text{khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \neq 0 \\ x = -\frac{1}{2m-3} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Bài 4:

Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m-3 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| a) Có hai nghiệm phân biệt | b) Có nghiệm kép |
| c) Vô nghiệm | d) Có đúng một nghiệm |
| e) Có nghiệm | |

Lời giải

Ta có: $\Delta = (m-1)^2 - m(m-3) = m+1$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \end{cases}$

b) Xét $m \neq 0$. Phương trình có nghiệm kép khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

c) Ta tìm được $m < -1$

d) Ta tìm được $m = 0; m = -1$

e) Ta tìm được $m \geq -1$

Bài 5:

Cho phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| a) Có hai nghiệm phân biệt | b) Có nghiệm kép |
| c) Vô nghiệm | d) Có đúng một nghiệm |
| e) Có nghiệm | |

Lời giải

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m(m-2) = 4m+1$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > \frac{-1}{4} \end{cases}$

b) Tìm được $m = \frac{-1}{4}$

c) Ta tìm được $m < \frac{-1}{4}$

d) Ta tìm được $m = 2; m = \frac{-1}{4}$

e) Ta tìm được $m \geq \frac{-1}{4}$

Bài 6:

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau vô nghiệm $x^2 + 2x - 2m + 7 = 0$;
 $x^2 + 6x + m^2 + 6 = 0$

Lời giải

Đặt $x^2 + 2x - 2m + 7 = 0$ là phương trình (1)

$x^2 + 6x + m^2 + 6 = 0$ là phương trình (2)

Ta có $\Delta'_1 = 1 + 2m - 7 = 2m - 6$ và $\Delta'_2 = 3^2 - (m^2 + 6) = 3 - m^2$

Suy ra $\Delta'_1 + \Delta'_2 = 2m - 6 + 3 - m^2 = -(m^2 - 2m + 1) - 2 = -(m - 1)^2 - 2 < 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

Vậy một trong hai Δ'_1 và Δ'_2 có ít nhất một số nhỏ hơn 0 (đpcm).

Bài 7:

Với giá trị nào của m , hai phương trình sau có nghiệm chung

(1) $2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$ và (2) $4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$

Lời giải

Gọi x_0 là một nghiệm chung của hai phương trình, ta có

$$\begin{cases} 2x_0^2 - (3m + 2)x_0 + 12 = 0 \\ 4x_0^2 - (9m - 2)x_0 + 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x_0^2 - (9m - 2)x_0 + 36 - 2[2x_0^2 - (3m + 2)x_0 + 12] = 0$$

$$\Rightarrow (-3m + 6)x_0 + 12 = 0 \quad (*)$$

+ Nếu $-3m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình (*) vô nghiệm

+ Nếu $-3m + 6 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ thì phương trình (*) có 1 nghiệm $x_0 = \frac{-12}{-3m + 6} = \frac{4}{m - 2}$

Thay vào phương trình (1) ta có

$$2\left(\frac{4}{m-2}\right)^2 - \frac{(3m+2)4}{m-2} + 12 = 0 \Leftrightarrow 16 - 2(3m+2)(m-2) + 6(m-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 2(3m^2 - 4m - 4) + 6(m^2 - 4m + 4) = 0 \Leftrightarrow -16m + 48 = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy với $m = 3$ hai phương trình đã cho có một nghiệm chung $x_0 = 4$.

Bài 8:

Cho phương trình $x^2 + (m-5)x - 3(m-2) = 0$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm $x = 3$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 3x_2$

Lời giải

a) Ta có $x^2 + (m-5)x - 3(m-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + (m-2)x - 3(m-2) = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-3) + (m-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2-m \end{cases}$$

Vậy phương trình trên luôn có nghiệm $x = 3$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

b) Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi hai nghiệm của phương trình trùng nhau

Theo câu a) suy ra $2-m = 3 \Rightarrow m = -1$

Ta cũng có thể xét $\Delta = (m-5)^2 + 4.3(m-2) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

c) Xét 2 trường hợp

TH1: $x_1 = 3$ và $x_2 = 2-m$

Khi đó $x_1 = 3x_2 \Rightarrow 3 = 3(2-m) \Rightarrow 2-m = 1 \Leftrightarrow m = 1$

TH2: $x_1 = 2-m$ và $x_2 = 3$

Khi đó $x_1 = 3x_2 \Rightarrow 2-m = 3m \Rightarrow 4m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Bài 9:

Cho Parabol $(P): y = 4x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - 1$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Tìm m để:

a) Đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

b) Đường thẳng d là tiếp tuyến của parabol (P)

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $4x^2 = 2mx + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow |m| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi $m > 2$ hoặc $m < -2$.

b) Đường thẳng d là một tiếp tuyến của (P) khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Khi đó ta có đường thẳng $y = 4m - 1$ và $y = -4m - 1$ là các tiếp tuyến của Parabol (P) .

Bài 10:

Cho phương trình: $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$

a. Giải phương trình với $m = \frac{-3}{5}$

b. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với $\forall m \in R$

c. Tìm m để phương trình (1) có 1 nghiệm lớn hơn 2

Lời giải

b)

$$+) m = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$+) m \neq 0 \Rightarrow \Delta = 1 > 0 \Rightarrow (1) \text{ luôn có nghiệm } \forall m \in R$$

c) Với $m = 0$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm $x = 1 < 2$

$$\text{Với } m \neq 0 \Rightarrow \text{pt(1) luôn có 2 nghiệm phân biệt: } x_1 = \frac{m+1}{m}; x_2 = \frac{2m}{2m} = 1 < 2$$

$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{m+1}{m} > 2 \end{cases} (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} - \frac{2m}{m} > 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{m} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

$$\begin{cases} 1-m < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Vậy $0 < m < 1$.

Dạng 4: Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai

Cách giải: Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai theo tham số m là tìm tập nghiệm của phương trình tùy theo sự thay đổi của m .

*) Xét phương trình bậc hai dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ với $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$).

- Nếu $a = 0$, ta đưa về biện luận phương trình bậc nhất

- Nếu $a \neq 0$, ta biện luận phương trình bậc hai theo Δ .

Bài 1:

Giải và biện luận phương trình $(m-2)x^2 - (2m-1)x + m+2 = 0$

Lời giải

$$+) m = 2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$+) m \neq 2, \Delta = -4m + 17$$

$$- m > \frac{17}{4} \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow (1). \text{vô nghiệm}$$

$$- m = \frac{17}{4} \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow (1). \text{o nghiệm kép: } x_1 = x_2 = \frac{2m-1}{2(m-2)} = \frac{5}{3}$$

$$- m < \frac{17}{4} \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow (1). \text{có hai nghiệm phân biệt: } x_{1,2} = \frac{2m-1 \pm \sqrt{-4m+17}}{2(m-2)}$$

Vậy $m = 2$ phương trình có nghiệm $x = \frac{4}{3}$

$$m > \frac{17}{4} \rightarrow \text{phương trình vô nghiệm}$$

$$m = \frac{17}{4} \Rightarrow \text{phương trình có nghiệm kép } x = \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} m \neq 2 \\ m < \frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình có hai nghiệm phân biệt.}$$

Bài 2:

Cho phương trình $mx^2 - 2mx + m + 1$ (m là tham số)

a. Giải phương trình khi $m = -2$

b. Giải và biện luận phương trình theo m

Lời giải

a. $m = -2 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

b. Ta xét hai trường hợp sau:

- TH1: $m = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (vô nghiệm)

- TH2: $m \neq 0 \Rightarrow \Delta' = -m \neq 0$

+) $m < 0 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{-m}}{m}$

+) $m > 0 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ vô nghiệm

Kết luận: - $m \geq 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

- $m < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{-m}}{m}$

Bài 3:

Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số)

a) $x^2 + (1-m)x - m = 0$

b) $(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |m+1|$

+) $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$: Phương trình đã cho có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m-1}{2}$

+) $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = m; x_2 = -1$

b) Với $m = 3 \Rightarrow$ Phương trình có dạng: $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$

Với $m \neq 3 \Rightarrow \Delta' = 9m - 18$

+) $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 9m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 2$: Phương trình vô nghiệm

+) $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 2$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m}{m-3}$

+) $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 2 \end{cases}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{9m-18}}{m-3}$

Bài 4:

Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số)

a) $mx^2 + (2m-1)x + m + 2 = 0$

b) $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$

Lời giải

a) Với $m = 0 \Rightarrow x = 2$

Với $m \neq 0 \Rightarrow \Delta = -12m + 1$

+) $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$: Phương trình vô nghiệm

+) $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{1-2m}{2m}$

+) $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{12} \end{cases}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{1-2m \pm \sqrt{1-12m}}{2m}$

b) Với $m = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Với $m \neq 2 \Rightarrow \Delta' = 4m + 1$

+) $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$ Phương trình vô nghiệm

+) $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m+1}{m-2}$

+) $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{4m+1}}{m-2}$

Dạng 5: Dạng toán liên quan đến tính có nghiệm của phương trình bậc hai, nghiệm chung của phương trình bậc hai

Cách giải:

1. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$).
2. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0$ có nghiệm chung ta làm như sau:

Bước 1: Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Thay x_0 vào 2 phương trình để tìm được điều kiện của tham số.

Bước 2: Với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình có nghiệm chung hay không và kết luận.

3. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0$ tương đương, ta xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Hai phương trình cùng vô nghiệm

- **Trường hợp 2:** Hai phương trình cùng có nghiệm. Khi đó:

+) Điều kiện cần để hai phương trình tương đương là chúng có nghiệm chung. Từ đó tìm được điều kiện của tham số

+) Điều kiện đủ với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình tập nghiệm bằng nhau không và kết luận.

Bài 1:

Cho hai phương trình: $x^2 + x + a = 0; x^2 + ax + 1 = 0$

a. Tìm a để hai phương trình có nghiệm chung

b. Tìm a để hai phương trình tương đương

Lời giải

a. Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình $\rightarrow$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 + a = 0(1) \\ x_0^2 + ax_0 + 1 = 0(2) \end{cases} \rightarrow (1) - (2) = (1-a)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

+) Với $a = 1 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0(vn)$

$$+) x_0 = 1 \rightarrow (1): a = -2 \rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy với $a = -2$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$.

b. Theo câu a hai phương trình có tập nghiệm khác nhau. Vậy để chúng tương đương khi và

$$\text{chỉ khi chúng cùng vô nghiệm} \leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 1 - 4a < 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 4 < 0 \end{cases} \leftrightarrow \frac{1}{4} < a < 2$$

Bài 2:

Giả sử hai phương trình: $x^2 + ax + b = 0; x^2 + mx + n = 0$ có nghiệm chung. Chứng minh rằng:
 $(n - b)^2 = (m - a)(an - bm)(1)$

Lời giải

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình $\rightarrow$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + b = 0 \\ x_0^2 + mx_0 + n = 0 \end{cases} \rightarrow (a - m)x_0 = n - b(*)$$

$$+) a - m = 0 \leftrightarrow a = m \rightarrow (*) \rightarrow n = b \rightarrow (1): \text{đúng}$$

$$+) a \neq m \rightarrow (*) \rightarrow x_0 = \frac{n - b}{a - m}, \text{ thay vào phương trình ban đầu ta được: } \left(\frac{n - b}{a - m}\right)^2 + a\left(\frac{n - b}{a - m}\right) + b = 0$$

$$\leftrightarrow (n - b)^2 + a(n - b)(a - m) + b(a - m)^2 = 0 \leftrightarrow (n - b)^2 + (a - m)(an - bm) = 0 \leftrightarrow (n - b)^2 = (m - a)(an - bm)$$

Bài 3:

Tìm m để hai phương trình: $x^2 - (2m - 3)x + 6 = 0; 2x^2 + x + m - 5 = 0$ có duy nhất nghiệm chung.

Lời giải

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình $\rightarrow$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 - (2m - 3)x_0 + 6 = 0 \\ 2x_0^2 + x_0 + m - 5 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x_0^2 + 3x_0 + 6}{2x_0} \\ m = -2x_0^2 - x_0 + 5 \end{cases} \rightarrow \frac{x_0^2 + 3x_0 + 6}{2x_0} = -2x_0^2 - x_0 + 5 \leftrightarrow 4x_0^3 + 3x_0^2 - 7x_0 + 6 = 0$$

$$\leftrightarrow (x_0 + 2)(4x_0^2 - 5x_0 + 3) = 0 \leftrightarrow x_0 = -2 \rightarrow m = -1$$

$$+) m = -1 \text{ hai phương trình ban đầu trở thành: } x^2 + 5x + 6 = 0; 2x^2 + x - 6 = 0$$

Hai phương trình này có nghiệm chung $x = -2$. Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài 4:

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình $b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ luôn vô nghiệm.

Lời giải

Ta có: $\Delta = (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên:

$b-c-a < 0; b+c-a > 0; b-c+a > 0; b+c+a > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình luôn vô nghiệm.

Bài 5:

Cho phương trình $x^2 + (a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$ với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình trên luôn vô nghiệm

Lời giải

Ta có: $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

Vì $a < b+c \Rightarrow a^2 < ab+ca$. Tương tự ta có: $b^2 < ab+bc; c^2 < ca+cb \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình luôn vô nghiệm.

Bài 6:

Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$. Chứng minh nếu hai phương trình trên có nghiệm chung thì: $(b-d)^2 + (a-c)(ad-bc) = 0$

Lời giải

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta có: $(a-c)x_0 = d-b$

- Nếu $a \neq c \Rightarrow x_0 = \frac{d-b}{a-c}$. Thay x_0 vào phương trình ta được đpcm.

- Nếu $a = c \Rightarrow b = d \Rightarrow$ đpcm.

Bài 7:

Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + bx + a = 0$ trong đó $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a+b)$.

Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = \frac{1}{2}ab \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 8:

Cho hai phương trình $x^2 + x - m = 0$ và $x^2 - mx + 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để:

- a) Hai phương trình có nghiệm chung
- b) Hai phương trình tương đương

Lời giải

a) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta biến đổi được $(1+m)x_0 = m+1$. Tìm được $m = -1$ hoặc $m = 2$

b) Ta xét 2 trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Hai phương trình cùng vô nghiệm $\Rightarrow -2 < m < \frac{-1}{4}$

- **Trường hợp 2:** Hai phương trình cùng có nghiệm và tập nghiệm giống nhau $\Rightarrow m = -1$

Vậy $-2 < m < \frac{-1}{4}$ thì hai phương trình tương đương.

Bài 9:

Cho hai phương trình $x^2 - 2ax + 3 = 0$ và $x^2 - x + a = 0$ (a là tham số). Với giá trị nào của tham số a thì:

- a) Hai phương trình có nghiệm chung
- b) Hai phương trình trên tương đương

Lời giải

a) Ta tìm được $a \in \emptyset$

b) Tìm được $\frac{1}{4} < a < \sqrt{3}$

Dạng 6: Chứng minh phương trình bậc hai có nghiệm, vô nghiệm

Cách giải:

Để chứng minh một phương trình bậc hai vô nghiệm ta chứng minh phương trình có $\Delta < 0$.

Để chứng minh phương trình bậc hai có nghiệm ta chứng minh phương trình bậc hai có $\Delta \geq 0$.

Ngoài ra để chứng minh phương trình bậc hai có nghiệm ta còn có cách dựa vào tính chất sau: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ (1)

Nếu có 1 số thực m sao cho $a.f(m) < 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt

Chứng minh tính chất:

$$\text{Ta có: } f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \Rightarrow a.f(m) = a^2\left(m + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4} > a^2\left(m + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

Bài 1:

Chứng minh rằng với $\forall m$ các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^2 - 2(m+2)x - m - 7 = 0$

b) $x^2 - 4m^2x - 4m - 2 = 0$

Lời giải

a) Ta có $\Delta' = (m+2)^2 - (m-7) = m^2 + 5m + 11 = \left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0, \forall m \Rightarrow \Delta' > 0$ với mọi m

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Ta có $\Delta' = 4m^4 + 4m + 2 = 2(2m^4 + 2m + 1)$

$$\text{mà } 2m^4 + 2m + 1 = 2\left(m^4 - m^2 + \frac{1}{4}\right) + 2\left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right) = 2\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ m + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad (\text{vô.nghiệm}). \Rightarrow \Delta' > 0 \forall m.$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 2:

Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì phương trình sau vô nghiệm: $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$

Lời giải

Ta có $a^2 \neq 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) = [(a-b)^2 - c^2][(a+b)^2 - c^2] \\ &= \underbrace{(a-b+c)}_{>0} \underbrace{(a-b-c)}_{<0} \underbrace{(a+b+c)}_{>0} \underbrace{(a+b-c)}_{>0} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm}\end{aligned}$$

Bài 3:

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $4a^2 + (a+b)^2 + a(c+2) + 1 < 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt nên phương trình đã cho phải là phương trình bậc hai, tức là $a \neq 0$. Điều này dễ thấy luôn đúng, vì nếu $a = 0$ thì từ giả thiết ta có $b^2 + 1 < 0$ (vô lý). Do vậy để chứng minh yêu cầu bài toán, chúng ta cần chứng minh $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ hoặc chỉ ra số thực m sao cho $a.f(m) < 0$ với $f(x) = ax^2 + bx + c$

Cách 1: Để chứng minh $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ta biến đổi giả thiết bài toán như sau:

$$\begin{aligned}16a^2 + 4(a+b)^2 + 4ac + 8a + 4 < 0 &\Leftrightarrow b^2 - 4ac > 16a^2 + 4(a+b)^2 + 4ac + 8a + 4 = 12a^2 + 4(a+b)^2 + b^2 + 4(a+1)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \Delta &= b^2 - 4ac > 0\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt

Cách 2: Để chỉ ra có một số thực m sao cho $a.f(m) = a(am^2 + bm + c) < 0$

Ta viết lại giả thiết bài toán như sau: $4a^2 + a^2 + 2ab + b^2 + ac + 2a + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow a(4a + 2b + c) < -(a+1)^2 - b^2 \leq 0 \Rightarrow a(4a + 2b + c) < 0 \Leftrightarrow a.f(2) < 0.$$

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 4:

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $3a + 5b + 15c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Phương trình đã cho chưa phải là phương trình bậc hai vì ta chưa biết $a=0$ hay $a \neq 0$. Do đó ta xét các trường hợp sau

+ Xét $a=0$, khi đó:

- $b=0$, từ giả thiết có $c=0$. Do đó, phương trình đã cho có vô số nghiệm

- $b \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{-c}{b}$

+ Xét $a \neq 0$, khi đó phương trình đã cho là phương trình bậc hai. Để chứng minh phương trình có nghiệm, ta có thể chứng minh $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ hoặc chỉ ra số thực m thỏa mãn $a.f(m) < 0$ với $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Cách 1: Để chứng minh $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ta biến đổi như sau:

$$\text{Ta có } \Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{3a+15c}{5}\right)^2 - 4ac = \frac{9a^2 - 10ac + 225c^2}{25}$$

$$\text{Vì } 9a^2 - 10ac + 225c^2 = 25c^2 - 10ac + a^2 + 8a^2 + 200c^2 = (5c - a)^2 + 8a^2 + 200c^2 \geq 0.$$

$\Rightarrow \Delta \geq 0$, với mọi a, b, c . Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Cách 2: Để chỉ ra số thực m thỏa mãn $a.f(m) < 0$ ta xử lý như sau

$$\text{Ta có } f(0) = c; f(1) = a + b + c; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c.$$

$$\text{Giả sử } x.f(0) + y.f(1) + z.f\left(\frac{1}{2}\right) = 3a + 5b + 15c \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{4}z\right)a + \left(y + \frac{1}{2}z\right)b + (x + y + z)c = 3a + 5b + 15c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + \frac{1}{4}z = 3 \\ y + \frac{1}{2}z = 5 \\ x + y + z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 8 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy ta có } 6.f(0) + f(1) + 8.f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Do đó trong ba số $f(0), f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ luôn có một số không âm và một số không dương. Giả sử hai số đó là $f(0), f(1)$, tức là: $f(0).f(1) \leq 0 \Rightarrow a.f(0).af(1) \leq 0$

Do đó, ta suy ra $af(0) \leq 0$ hoặc $af\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$. Từ đây, ta có phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Chú ý: Khi đề bài cho a, b, c thỏa mãn $ma + nb + pc = 0$ và yêu cầu chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c$ có nghiệm, ta có thể chứng minh như sau

Cách 1: Chứng minh $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (khi $a \neq 0$)

Cách 2: Chỉ ra tồn tại x, y, z thỏa mãn: $x.f(\alpha) + y.f(\beta) + z.f(\gamma) = ma + nb + pc$ khi đó trong ba số

$f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ luôn có hai số trái dấu. Từ đó ta có đpcm.

Bài 5:

Cho các số a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $4x^2 - 4(2a+1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$ và $4x^2 - 4(2b+1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0$

Lời giải

Hai phương trình trên lần lượt có $\Delta'_1 = 16a(1-48bc); \Delta'_2 = 16b(1-24ac)$. Vì a, b là các số dương nên Δ'_1, Δ'_2 lần lượt cùng dấu với $1-48bc$ và $1-24ac$. Để chứng minh bài toán, ta cần chứng minh trong hai biệt thức Δ'_1, Δ'_2 luôn có ít nhất một số không âm. Để chứng minh điều này, ta đi xét tổng $\Delta'_1 + \Delta'_2$. Nếu $\Delta'_1 + \Delta'_2 \geq 0$ thì trong hai số Δ'_1, Δ'_2 có ít nhất một số không âm. Ta có

$$1 - 48bc + 1 - 24ac = 2 - 24c(a + 2b) = 2 - 24c(1 - 3c) = 2(6c - 1)^2 \geq 0$$

Hay $\Delta'_1 + \Delta'_2 \geq 0$

Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Bài 6:

Cho phương trình $ax^2 + bx + b^3 + c^3 - 4abc = 0 (a \neq 0)$ vô nghiệm. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau có 1 phương trình vô nghiệm, 1 phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$ax^2 + bx + c = 0(2); ax^2 + cx + b = 0(3)$$

Lời giải

Phương trình (1) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta_1 = b^2c^2 - 4a(b^3 + c^3 - 4abc) < 0(*)$

Ta có $\Delta_2 = b^2 - 4ac; \Delta_3 = c^2 - 4ab$

Ta đi chứng minh $\Delta_2 \Delta_3 < 0$

$$\text{Có } (*) \Leftrightarrow (b^2 - 4ac)(c^2 - 4ab) < 0 \Rightarrow \Delta_2 \cdot \Delta_3 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow dpcm$$

Bài 7:

Cho a, b, c là các số thực có tổng khác 0. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$$a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0(1)$$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow \underbrace{(a+b+c)}_{\neq 0} x^2 - 2(ab+bc+ca)x + 3abc = 0; \Delta' = (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c)$$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c) = \frac{1}{2}[(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2] \geq 0 \Rightarrow dpcm$$

Bài 8:

Cho các số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng có ít nhất 1 trong ba phương trình sau có nghiệm: $x^2 + ax + 1 = 0; x^2 + bx + 1 = 0; x^2 + cx + 1 = 0$

Lời giải

$$\Delta_1 = a^2 - 4; \Delta_2 = b^2 - 4; \Delta_3 = c^2 - 4 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 12 \geq a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} - 12$$

$$= a^2 + \frac{(6-a)^2}{2} - 12 = \frac{3(a-2)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0 \Rightarrow dpcm$$

Bài 9:

Cho phương trình $ax^2 + bcx + b^3 + c^3 - 4abc = 0(1) (a \neq 0)$ vô nghiệm. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau có một phương trình vô nghiệm và một phương trình có hai nghiệm phân biệt $ax^2 + bx + c = 0(2); ax^2 + cx + d = 0(3)$

Lời giải

Vì phương trình (1) vô nghiệm nên ta có: $\Delta_1 = b^2c^2 - 4a(b^3 + c^3 - 4abc) < 0(*)$

Hai phương trình (2)(3) có $\Delta_2 = b^2 - 4ac; \Delta_3 = c^2 - 4ab$

Để chứng minh bài toán ta cần chứng minh trong hai số Δ_2, Δ_3 luôn có một số âm và một số dương. Điều này gợi ý ta đi chứng minh $\Delta_2 \cdot \Delta_3 < 0$

(*) $\Leftrightarrow (b^2 - 4ac)(c^2 - 4ab) < 0 \Leftrightarrow \Delta_2 \cdot \Delta_3 < 0 \Rightarrow$ trong hai số Δ_2, Δ_3 có một số âm và một số dương dẫn đến trong hai phương trình (2)(3) luôn có một phương trình có hai nghiệm phân biệt và một phương trình vô nghiệm.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Giải các phương trình sau

a) $2x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

b) $3x^2 + 3 = 2(x + 1)$

c) $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

d) $\frac{1}{2}x(x + 1) = (x - 1)^2$

Hướng dẫn giải

a) Ta tìm được: $x \in \left\{ \frac{1}{2}; -\sqrt{2} \right\}$

b) Ta tìm được: $x \in \emptyset$

c) Ta tìm được: $x \in \left\{ \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{3} \right\}$

d) Ta tìm được: $x \in \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$

Bài 2:

Cho phương trình $2x^2 - (4m + 3)x + 2m^2 - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt

b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm

d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta = (4m + 3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2m^2 - 1) = 16m^2 + 24m + 9 - 16m^2 + 8 = 24m + 17$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m > \frac{-17}{24}$

b) Phương trình có nghiệm kép khi $m = \frac{-17}{24}$

c) Phương trình vô nghiệm khi $m < \frac{-17}{24}$

d) Không có giá trị nào của m để phương trình có đúng một nghiệm

e) Phương trình có nghiệm khi $m \geq \frac{-17}{24}$.

Bài 3:

Biện luận theo m số nghiệm phương trình $mx^2 - 4(m-1)x + 4m + 8 = 0$ (m là tham số).

Hướng dẫn giải

Ta chia ra làm các trường hợp sau:

- $m \neq 0; m > -1$
- $m < -1$
- $m \geq -1$
- $m = -1$
- $m = 0$

Bài 4:

Cho hai phương trình $x^2 + mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x + m = 0$. Xác định các giá trị của tham số m để hai phương trình:

- a) Có nghiệm chung
- b) Tương đương

Hướng dẫn giải

- a) Ta tìm được $m = 2$ hoặc $m = -3$
- b) Ta tìm được $1 < m < 2\sqrt{2}$.