

BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} \quad (B \geq 0) = \begin{cases} A\sqrt{B} & (A \geq 0; B \geq 0) \\ -A\sqrt{B} & (A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2 B} & (\text{khi } A \geq 0; B \geq 0) \\ -\sqrt{A^2 B} & (\text{khi } A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \quad (B \neq 0; AB \geq 0)$$

4. Trục căn thức ở mẫu

$$\text{a) } \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$$

$$\text{b) } \frac{C}{\sqrt{A} + B} = \frac{C(\sqrt{A} - B)}{A - B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$\text{c) } \frac{C}{\sqrt{A} - B} = \frac{C(\sqrt{A} + B)}{A - B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$\text{d) } \frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B} \quad (A, B \geq 0; A \neq B)$$

$$\text{e) } \frac{C}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B} \quad (A, B \geq 0; A \neq B)$$

***) Chú ý:** Để trục căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

- Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

$$\text{+) } (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$$

$$\text{+) } (A - \sqrt{B})(A + \sqrt{B}) = A^2 - B$$

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn hoặc vào trong dấu căn

Cách giải: Sử dụng kiến thức sau

- Cách đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} (B \geq 0) = \begin{cases} A\sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0) \\ -A\sqrt{B} (A < 0; B \geq 0) \end{cases}$

- Cách đưa thừa số vào trong dấu căn: $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} (khi A \geq 0; B \geq 0) \\ -\sqrt{A^2B} (khi A < 0; B \geq 0) \end{cases}$

Bài 1: Viết gọn các biểu thức sau

a. $\sqrt{25.90}$

b. $\sqrt{96.125}$

c. $\sqrt{75.54}$

d. $\sqrt{245.35}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{25.90} = 5\sqrt{10}$

b) Ta có: $\sqrt{96.125} = \sqrt{16.6.5.25} = 20\sqrt{30}$

c) Ta có: $\sqrt{75.54} = 45\sqrt{2}$

d) Ta có: $\sqrt{245.35} = \sqrt{49.5.5.7} = 35\sqrt{7}$

Bài 2: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a. $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{245}$

b. $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$

c. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

d. $\sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{245} = \sqrt{3^2.5} + \sqrt{2^2.5} - \sqrt{7^2.5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

b) Ta có: $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

c) Ta có: $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = |\sqrt{5}+1| = \sqrt{5}+1$

d) Ta có: $\sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |\sqrt{5}-\sqrt{2}| + \sqrt{2} = \sqrt{5}-\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$.

Bài 3: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a. $\sqrt{27x^2} (x \geq 0)$

b. $\sqrt{8xy^2} (x \geq 0; y \leq 0)$

c. $\sqrt{25x^3} (x > 0)$

d. $\sqrt{48xy^4} (x \geq 0; y \in R)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{27x^2} = \sqrt{(3x)^2.3} = |3x|\sqrt{3} = 3\sqrt{3}x (x \geq 0)$

b) Ta có: $\sqrt{8xy^2} = \sqrt{(2y)^2.2x} = |2y|\sqrt{2x} = -2y\sqrt{2x} (x \geq 0; y \leq 0)$

c) Ta có: $\sqrt{25x^3} = 5x\sqrt{x} (x > 0)$

d) Ta có: $\sqrt{48xy^4} (x \geq 0; y \in R) = 4y^2\sqrt{3x} (y^2 \geq 0)$

Bài 4: Đưa thừa số vào trong dấu căn

a. $a\sqrt{13} (a \geq 0)$

b. $a\sqrt{\frac{-15}{a}} (a < 0)$

c. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} (a > 0)$

d. $a\sqrt{2} (a \leq 0)$

Lời giải

a) Ta có: $a\sqrt{13} = \sqrt{13a^2} (a \geq 0)$

b) Ta có: $a\sqrt{\frac{-15}{a}} = -(-a)\sqrt{\frac{-15}{a}} = -\sqrt{\frac{-15a^2}{a}} = -\sqrt{-15a} (a < 0)$

c) Ta có: $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} = \sqrt{3a} (a > 0)$

d) Ta có: $a\sqrt{2} = -\sqrt{2a^2} (a \leq 0)$

Dạng 2: So sánh các căn bậc hai

Cách giải: Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn rồi so sánh

Bài 1: So sánh các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{29}$ và $4\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$

d) $\sqrt{7}$ và $3\sqrt{5}$

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} 2\sqrt{29} = \sqrt{2^2 \cdot 29} = \sqrt{116} \\ 4\sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{29} < 4\sqrt{3}$

b) Ta có: $\begin{cases} \frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}} \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{8}} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{4}\sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) Ta có: $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{27} > \sqrt{12}$

d) Ta có: $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45} > \sqrt{7}$

Bài 2: So sánh các cặp số dưới đây

a) $5\sqrt{2}$ và $3\sqrt{13}$

b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$

a) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} 5\sqrt{2} = \sqrt{50} \\ 3\sqrt{13} = \sqrt{117} \end{cases} \rightarrow 5\sqrt{2} < 3\sqrt{13}$

b) Ta có: $\begin{cases} \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{24}} \\ 6\sqrt{\frac{1}{37}} = \sqrt{\frac{36}{37}} \end{cases} \rightarrow \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} > 6\sqrt{\frac{1}{37}} \left(\frac{25}{4} > 1 > \frac{36}{37} \right)$

c) Ta có:
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3}\sqrt{51} &= \sqrt{\frac{51}{9}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{17}{3}} \\ \frac{1}{5}\sqrt{150} &= \sqrt{\frac{150}{25}} = \sqrt{6} \end{aligned} \right\}, \text{ mà } \sqrt{\frac{17}{3}} < \sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{51} < \frac{1}{5}\sqrt{150}$$

d) Ta có:
$$\frac{1}{2}\sqrt{6} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 6} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}; 6\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{6^2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = \sqrt{18}$$

mà $\sqrt{18} > \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow 6\sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}\sqrt{6}.$

Bài 3

Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}; 4\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $3\sqrt{5} = \sqrt{45}; 2\sqrt{6} = \sqrt{24}; 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$

Vậy: $2\sqrt{6} < \sqrt{29} < 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5}$

Bài 4

Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần: $7\sqrt{2}; 2\sqrt{8}; \sqrt{28}; 5\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}; \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Vậy: $7\sqrt{2} > 5\sqrt{2} > 2\sqrt{8} > \sqrt{28}$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Cách giải: Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn rồi rút gọn

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau

a. $A = \sqrt{125} + \sqrt{45} - \sqrt{405}$

b. $B = \sqrt{50} - \sqrt{128} + \sqrt{162} - \sqrt{18}$

c. $C = \sqrt{63} - \sqrt{252} - \sqrt{343} + \sqrt{175}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{125} + \sqrt{45} - \sqrt{405} = \sqrt{25 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{81 \cdot 5} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

b) Ta có: $B = \sqrt{50} - \sqrt{128} + \sqrt{162} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{64 \cdot 2} + \sqrt{81 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

c) Ta có:

$$C = \sqrt{63} - \sqrt{252} - \sqrt{343} + \sqrt{175} = \sqrt{7 \cdot 9} - \sqrt{7 \cdot 36} - \sqrt{7 \cdot 49} + \sqrt{7 \cdot 25} = 3\sqrt{7} - 6\sqrt{7} - 7\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = -5\sqrt{7}.$$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = \sqrt{200} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$

b. $B = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 5\sqrt{45} - 15\sqrt{\frac{1}{5}}$

c. $C = (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2})$

d. $D = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(\sqrt{20} - 3)^2}}$

e. $E = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}}$

f. $F = \sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$

g. $G = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + \sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{200} - \sqrt{32} + \sqrt{72} = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

b) Ta có:

$$B = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 5\sqrt{45} - 15\sqrt{\frac{1}{5}} = 4 \cdot 2\sqrt{5} - 3 \cdot 5\sqrt{5} + 5 \cdot 3\sqrt{5} - 3\sqrt{\frac{25}{5}} = 8\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 15\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

c) Ta có:

$$C = (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2}) = (2 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(6\sqrt{2} - 10\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) = (3\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(4\sqrt{2} - 10\sqrt{5})$$

$$C = 3 \cdot 2(\sqrt{5} - \sqrt{2})(2\sqrt{2} - 5\sqrt{5}) = 6(2\sqrt{10} - 4 - 25 + 5\sqrt{10}) = 6(7\sqrt{10} - 29)$$

d) Ta có: $D = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(\sqrt{20} - 3)^2}} = \sqrt{5} - \sqrt{3 - (\sqrt{20} - 3)} = \sqrt{5} - \sqrt{6 - \sqrt{20}}$

$$D = \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) = 1$$

e) Ta có: $E = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1} = 1$

f) Ta có:

$$F = \sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$$

g) Ta có:

$$G = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + \sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10(2 + \sqrt{3})}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} = \sqrt{9} = 3$$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a^2 - 4a + 4)} (a \neq 2)$

b. $B = 4\sqrt{25u} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{16u}{9}} - \frac{2}{u}\sqrt{\frac{169u^3}{4}} (u > 0)$

c. $C = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} (x > 0)$

d. $D = -\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} (b \geq 0)$

e) $E = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 6v + v^2} + \frac{4v}{3} + 5 (v \leq -3)$

f) $F = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{4 - 4t + t^2} - 2 (t \leq 2)$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a^2 - 4a + 4)} = \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a-2)^2} = \frac{2\sqrt{2}a^4|a-2|}{a-2}$

+) Nếu $a - 2 > 0 \Rightarrow A = 2\sqrt{2}a^4$

+) Nếu $a - 2 < 0 \Rightarrow A = -2\sqrt{2}a^4$

b) Ta có: $B = 4\sqrt{25u} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{16u}{9}} - \frac{2}{u}\sqrt{\frac{169u^3}{4}} = 20\sqrt{u} - 10\sqrt{u} - 13\sqrt{u} = -3\sqrt{u} (u \geq 0)$

c) Ta có: $C = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} = 10\sqrt{x} - 10\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -2\sqrt{x}$

d) Ta có:

$$D = -\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} = -6\sqrt{b} - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{6b} + \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \sqrt{6b} = -6\sqrt{b} - \sqrt{6b} + \sqrt{6b} = -6\sqrt{b} (b \geq 0)$$

e) Ta có: $E = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 6v + v^2} + \frac{4v}{3} + 5 (v \leq -3) = \frac{1}{3}\sqrt{(v+3)^2} + \frac{4v}{3} + 5 = v + 4$

f) Ta có: $F = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{4 - 4t + t^2} - 2 (t \leq 2) = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}|2 - t| - 2 = 1 - t (t \leq 2)$

Dạng 4: Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai

Cách giải: Nắm vững cách khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai

1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \quad (B \neq 0; AB \geq 0)$$

Bài 1: Khử căn thức ở mẫu số các phân số

a. $\sqrt{\frac{7}{108}}$

b. $\sqrt{\frac{5}{6}}$

c. $\sqrt{\frac{10}{13}}$

d. $\sqrt{\frac{4}{75}}$

e. $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$

f. $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{3}}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{\frac{7}{108}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{36 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{18}$

b) Ta có: $\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

c) Ta có: $\sqrt{\frac{10}{13}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{130}}{13}$

d) Ta có: $\sqrt{\frac{4}{75}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \frac{2}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$

e) Ta có: $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1) \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

f) Ta có: $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

Bài 2: Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

a. $\sqrt{\frac{5x^3}{49y}} \quad (x \geq 0; y > 0)$

b. $7xy \sqrt{\frac{-3}{xy}} \quad (x < 0; y > 0)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{\frac{5x^3}{49y}} (x \geq 0; y > 0) = \frac{x}{7} \sqrt{\frac{5x}{y}} = \frac{x}{7} \sqrt{\frac{5xy}{y^2}} = \frac{x}{7|y|} \sqrt{5xy} = \frac{x}{7y} \sqrt{5xy} (x \geq 0; y > 0)$

b) Ta có: $7xy \sqrt{\frac{-3}{xy}} (x < 0; y > 0) = 7xy \sqrt{\frac{-3xy}{x^2 y^2}} = \frac{7xy}{|xy|} \sqrt{-3xy} = -7 \sqrt{-3xy} (x < 0; y > 0)$

Bài 3: Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

a. $\sqrt{\frac{5b}{49a^3}} (a > 0, b \geq 0)$

b. $\frac{-1}{4} ab \sqrt{\frac{16}{ab}} (a < 0, b < 0)$

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{5b}{49a^3}} (a > 0, b \geq 0) = \frac{1}{7a} \sqrt{\frac{5b}{a}} = \frac{1}{7a} \sqrt{\frac{5ab}{a^2}} = \frac{1}{7a^2} \sqrt{5ab} (a > 0, b \geq 0)$

b) $\frac{-1}{4} ab \sqrt{\frac{16}{ab}} (a < 0, b < 0) = -ab \sqrt{\frac{1}{ab}} = -ab \sqrt{\frac{ab}{a^2 b^2}} = -\sqrt{ab}$

Dạng 5: Trục căn thức ở mẫu

Cách giải: Nhớ vững cách trục căn thức ở mẫu

$$1) \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$

$$2) \frac{m}{\sqrt{A}}$$

$$3) \frac{m}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}$$

Bài 1: Trục căn thức ở mẫu và rút gọn

$$a. \frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$$

$$b. \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } \frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{8-27} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{-19} = \frac{-(\sqrt{8}+\sqrt{27})}{19}$$

$$b) \text{ Ta có: } \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{4}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Bài 2: Trục căn thức ở mẫu rồi rút gọn

$$a. \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$b. \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{10} + \sqrt{6}$$

$$b) \text{ Ta có: } \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}} = 2-\sqrt{3}$$

Bài 3: Trục căn thức và thực hiện phép tính

$$a. A = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$$

$$b. B = \left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1 \right)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } \frac{15}{\sqrt{6}+1} = \frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} = 3(\sqrt{6}-1); \frac{4}{\sqrt{6}-2} = 2(\sqrt{6}+2); \frac{12}{3-\sqrt{6}} = 4(3+\sqrt{6}) \Rightarrow A = -115$$

b) Ta có: $\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{5}; \frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \rightarrow B = 4$

Bài 4: Trục căn thức và thực hiện phép tính

a. $A = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})$

b. $B = \left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - 2 \right) \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} - 2 \right)$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \Rightarrow A = 2$

b) Ta có: $B = \left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - 2 \right) \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} - 2 \right) \Rightarrow B = -1$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

a. $A = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}$

b. $B = \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$

c. $C = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$

d. $D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

b) Ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1} = \frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{6}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}-1} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}-1+1} - \frac{1}{\sqrt{6}+1-1} = 0$$

c) Ta có:

$$C = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11) = \left[\frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-2} + \frac{12(3+\sqrt{6})}{9-6} \right] (\sqrt{6}+11) = -115$$

d) Ta có: $D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1} = \sqrt{3} \left[\frac{(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1) - (\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)} \right] = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}+1-1} = 2$

Bài 6: Trục căn thức ở mẫu

a. $A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}}$

b. $B = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$

c. $C = \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$

d. $D = \frac{31}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$

e. $E = \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{21}}$

f. $F = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})$

Lời giải

a. $A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7})(2\sqrt{3} + \sqrt{7})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{7})(2\sqrt{3} + \sqrt{7})} = \frac{\sqrt{2}(6 + 2\sqrt{21} + \sqrt{21} + 7)}{12 - 5} = \frac{\sqrt{2}(13 + 3\sqrt{21})}{5}$

b. $B = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{(3 + 4\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{(3 + 4\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{3 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$

c. $C = \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 2)}{(2 - 1)(5 - 4)} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 2)$

d. $D = \frac{31}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{31(2 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{2})^2 - 5} = \frac{31(2 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{1 + 4\sqrt{2}} = \frac{31(2 + \sqrt{2} + \sqrt{5})(4\sqrt{2} - 1)}{(4\sqrt{2})^2 - 1} = (2 + \sqrt{2} + \sqrt{5})(4\sqrt{2} - 1)$

e. $E = \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{21}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7})} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2}$

f. $F = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2$

Bài 7: Chứng minh rằng

a. $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (a, b > 0)$

b. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a + b}{a - b} (a, b \geq 0; a \neq b)$

c. $\frac{(a\sqrt{b} + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} \cdot \sqrt{\frac{ab + b^2 - 2\sqrt{ab}^3}{a(a + 2\sqrt{b}) + b}} = b(a, b > 0)$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = a - \sqrt{ab} + b - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

$$\text{b) Ta có: } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - \sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } & \frac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}, \sqrt{\frac{b[(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2]}{a^2 + 2a\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}} = \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+\sqrt{b})^2}} \\ & = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}} \Rightarrow C = b \end{aligned}$$

Dạng 6: Sử dụng các phép biến đổi căn thức bậc hai để giải phương trình

Cách giải:

+) Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa: $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$

+) Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} (B \geq 0) = \begin{cases} A\sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0) \\ -A\sqrt{B} (A < 0; B \geq 0) \end{cases}$

+) Rút gọn các căn thức đồng dạng

+) Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2 (B \geq 0)$

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $25\sqrt{\frac{a-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4a-12}{9}} - 7\sqrt{a^2-9} + 18\sqrt{\frac{9a^2-81}{81}} = 0$

b. $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$

Lời giải

a) Ta có: $25\sqrt{\frac{a-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4a-12}{9}} - 7\sqrt{a^2-9} + 18\sqrt{\frac{9a^2-81}{81}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{a-3} - \sqrt{a^2-9} = 0$

Cách 1: $\frac{1}{3}\sqrt{a-3} - \sqrt{a^2-9} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a-3} = 3\sqrt{a^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3 \\ a-3 = 9(a^2-9) \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$

Cách 2: Điều kiện $a \geq 3$

$$\frac{1}{3}\sqrt{a-3} - \sqrt{a^2-9} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a-3} \left(\frac{1}{3} - \sqrt{a+3} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3(tm) \\ a = \frac{-26}{9} (loại) \end{cases}$$

b) Ta có: $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{2x+1} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{35}{2}$

Bài 3:

Giải phương trình: $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{2x+1} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{35}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{35}{2}$

Bài 4: Giải các phương trình sau

$$a. \frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$$

$$b. \sqrt{9x-9} - \sqrt{4x-4} + \sqrt{16x-16} - 3\sqrt{x-1} = 16 (x \geq 1)$$

$$c. \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} + 2 = 0 (x \geq -1; x \neq 0)$$

$$d. \sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5+\sqrt{x-2}) (x \geq 2)$$

$$e. \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1 (x \geq 0)$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{4(x-2)} - 9\sqrt{\frac{x-2}{9^2}} = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{x-2} = 9 \cdot \frac{1}{9} \cdot \sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow x = 11$$

$$b) \text{ Ta có: } \sqrt{9x-9} - \sqrt{4x-4} + \sqrt{16x-16} - 3\sqrt{x-1} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 8 \Leftrightarrow x = 65(tm)$$

$$c) \text{ Ta có: } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} + 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x^2+1}-1) - (\sqrt{x^2+1}+1) + 2(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1 - \sqrt{x^2+1}-1 + 2(x+1-1) = 0 \Leftrightarrow -2+2x = 0 \Leftrightarrow x = 1(tm)$$

d) Ta có:

$$\sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5+\sqrt{x-2}) \Leftrightarrow 6\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2} = 4(5+\sqrt{x-2}) \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = -20 \Rightarrow \text{ptvn}$$

e) Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x+3 = x+2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây sai

a. $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \cdot \sqrt{B} \ (A \neq 0; B \geq 0)$

b. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B} \ (A \geq 0; B \geq 0)$

c. $-A\sqrt{B} = \sqrt{(-A)^2 \cdot B} \ (A \geq 0; B \geq 0)$

d. $\sqrt{B^2 \cdot A} = -B \cdot \sqrt{A} \ (B < 0; A \geq 0)$

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Dễ thấy C là hệ thức sai, vì vế trái là số âm, còn vế phải dương

Câu 2: Khẳng định nào sau đây đúng

a. $-4\sqrt{3} = \sqrt{(-4)^2 \cdot 3}$

b. $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5} = -3\sqrt{5}$

c. $2\sqrt{7} = \sqrt{14}$

d. $\frac{-3}{5} \sqrt{\frac{5}{27}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

A) Sai. Khẳng định đúng là $-4\sqrt{3} = -\sqrt{(-4)^2 \cdot 3}$

B) Sai. Khẳng định đúng là $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5} = |-3| \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

C) Sai. Khẳng định đúng là $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28}$

D) Đúng. Ta có: $-\frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{27}} = -\sqrt{\frac{3^2}{5^2} \cdot \frac{5}{27}} = -\sqrt{\frac{1}{15}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$

Câu 3: Kết quả rút gọn $5\sqrt{5x} - 3\sqrt{45x} + 2\sqrt{80x} - 4\sqrt{20x}$ là số nào

a. $3\sqrt{5x}$

b. $-3\sqrt{5x}$

c. $4\sqrt{5x}$

d. $-4\sqrt{5x}$

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

Ta có: $5\sqrt{5x} - 3\sqrt{45x} + 2\sqrt{80x} - 4\sqrt{20x} = 5\sqrt{5x} - 3\sqrt{3^2 \cdot 5x} + 2\sqrt{4^2 \cdot 5x} - 4\sqrt{2^2 \cdot 5x} = -4\sqrt{5x}$

Câu 4: Rút gọn phân số $\frac{\sqrt{180} + \sqrt{45} - \sqrt{80} - \sqrt{245}}{\sqrt{125}}$ được kết quả nào

a. $\frac{-1}{5}$

b. $-\frac{2}{5}$

c. $-\frac{3}{5}$

d. $-\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

Ta có: $\frac{\sqrt{180} + \sqrt{45} - \sqrt{80} - \sqrt{245}}{\sqrt{125}} = \frac{6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 7\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{-2}{5}$

Câu 5: So sánh nào sai

a. $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$

b. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

c. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} < \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}$

d. $7\sqrt{2} > 2\sqrt{7}$

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

A) Đúng. Ta có: $\left. \begin{array}{l} 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45} \\ 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75} \end{array} \right\} \Rightarrow 3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$

B) Sai. Ta có: $\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

C) Đúng. Ta có: $\left. \begin{array}{l} \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{16}{9} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \\ \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{4}} > \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}$

D) Đúng. Ta có:
$$\left. \begin{aligned} 7\sqrt{2} &= \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{98} \\ 2\sqrt{7} &= \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7\sqrt{2} > 2\sqrt{7}.$$

Câu 6: Nếu $a=3$ và $b=\frac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức $a + \frac{2b}{2b-a} \cdot \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}$ sẽ là số nào

a. 2

b. 3

c. 4

d. 5

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

$$\text{Ta có: } a + \frac{2b}{2b-a} \cdot \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} = a + \frac{2b}{2b-a} \cdot \sqrt{(a-2b)^2}$$

$$\text{Thay } a=3 \text{ và } b=\frac{1}{2} \text{ ta được: } = 3 + \frac{2\left(\frac{-1}{2}\right)}{2\left(\frac{-1}{2}\right)-3} \cdot \left| 3 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) \right| = 3 + \frac{-1}{-1-3} \cdot 4 = 3 + 1 = 4$$

Câu 7: Nếu $5\sqrt{3x} - 4\sqrt{27x} + 6\sqrt{12x} - 7\sqrt{75x} = -120$ thì x là số nào

a. $x = \frac{16}{3}$

b. $x = \frac{17}{3}$

c. $x = \frac{19}{3}$

d. $x = \frac{20}{3}$

Lời giải

Chọn đáp án A

Giải thích:

$$\text{Ta có: } 5\sqrt{3x} - 4\sqrt{27x} + 6\sqrt{12x} - 7\sqrt{75x} = -120 \Leftrightarrow 5\sqrt{3x} - 12\sqrt{3x} + 12\sqrt{3x} - 35\sqrt{3x} = -12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x} = 4 \Leftrightarrow 3x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}$$

Câu 8: Giải phương trình $\sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2} \cdot x^2 = 3$ thì x là số nào

a. Phương trình có nghiệm là $x = \pm\sqrt{7}$

b. Phương trình có nghiệm là $x = \pm 7$

c. Phương trình có nghiệm là $x = \pm\frac{3}{7}$

d. Phương trình vô nghiệm

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích:

$$\text{Ta có: } \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2} \cdot x^2 = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{-3}{7}x\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{7}|x| = 3 \Leftrightarrow |x| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -7 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \pm 7$

Câu 9: Cho hai số a, b không âm. Khẳng định nào sau đây đúng

a. $\frac{a+b}{2} < ab$

b. $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$

c. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

d. $\frac{a+b}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}}{3}$

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích:

Do a và b không âm nên $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ xác định

$$\text{Ta có: } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Câu 10: Với a dương. Khẳng định nào sau đây là đúng

a. $a + \frac{1}{a} \geq 2$

b. $a + \frac{1}{a} \leq 3$

c. $a + \frac{1}{a} \geq 4$

d. $a + \frac{1}{a} \leq 4$

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

Với a dương nên $\sqrt{a}$ xác định

$$\text{Ta có: } \sqrt{a} \geq \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

- a) $\sqrt{5a^2} (a \leq 0)$ b) $\sqrt{18a^2} (a \geq 0)$ c) $\sqrt{-9b^3} (b \leq 0)$ d) $\sqrt{24a^4b^8} (a, b \in R)$

Lời giải

- a) Ta có: $\sqrt{5a^2} (a \leq 0) = 5|a| = -a\sqrt{5} (a \leq 0)$
b) Ta có: $\sqrt{18a^2} (a \geq 0) = 18|a| = 3a\sqrt{2} (a \geq 0)$
c) Ta có: $\sqrt{-9b^3} (b \leq 0) = -3b\sqrt{-b}$
d) Ta có: $\sqrt{24a^4b^8} (a, b \in R) = 2\sqrt{6}a^2b^4 (a, b \in R)$

Bài 2: Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- a) $x\sqrt{7} (x \geq 0)$ b) $x\sqrt{15} (x \leq 0)$ c) $\frac{1}{y}\sqrt{19y} (y > 0)$ d) $\frac{1}{3}y\sqrt{\frac{27}{y^2}} (y \leq 0)$

Lời giải

- a) Ta có: $x\sqrt{7} (x \geq 0) = \sqrt{7x^2} (x \geq 0)$
b) Ta có: $x\sqrt{15} (x \leq 0) = -\sqrt{15x^2}$
c) Ta có: $\frac{1}{y}\sqrt{19y} (y > 0) = \sqrt{\frac{19}{y}} (y > 0)$
d) Ta có: $\frac{1}{3}y\sqrt{\frac{27}{y^2}} (y \leq 0) = -\sqrt{3} (y \leq 0)$

Bài 3: Tìm số lớn hơn trong các cặp số dưới đây

- a) $2\sqrt{6}$ và $3\sqrt{3}$ b) $\frac{2}{5}\sqrt{6}$ và $\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$

Lời giải

- a) Ta có: $\begin{cases} 2\sqrt{6} = \sqrt{24} \\ 3\sqrt{3} = \sqrt{27} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{6} < 3\sqrt{3}$
b) Ta có: $\frac{2}{5}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\frac{24}{25}}; \frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{49}{16}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{49}{48}} \Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{6} < \frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{24}{25} < 1 < \frac{49}{48} \right)$

Bài 4: Tìm số bé hơn trong các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{23}$ và $3\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{21}$

Lời giải

a) Ta có:
$$\begin{cases} 2\sqrt{23} = \sqrt{4 \cdot 23} = \sqrt{92} \\ 3\sqrt{10} = \sqrt{3^2 \cdot 10} = \sqrt{90} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{23} > 3\sqrt{10}$$

b) Ta có: $2\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}}; \frac{1}{5}\sqrt{21} = \frac{21}{25}; \frac{4}{5} > \frac{21}{25} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{5}} > \frac{1}{5}\sqrt{21}$

Bài 5: Sắp xếp các số

a) $2\sqrt{5}; 3\sqrt{2}; 5; \sqrt{23}$ theo thứ tự tăng dần

b) $5\sqrt{2}; 2\sqrt{13}; 4\sqrt{3}; \sqrt{47}$ theo thứ tự giảm dần

Lời giải

a) Ta có: $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} < \sqrt{23} < 5$

b) Ta có: $2\sqrt{13} > 5\sqrt{2} > 4\sqrt{3} > \sqrt{47}$

Bài 6: Rút gọn biểu thức

a. $A = 4\sqrt{\frac{25x}{4}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9x}{4}} - \frac{4}{3x}\sqrt{\frac{9x^3}{64}} (x \geq 0)$

b. $B = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{1-4y+4y^2} - \frac{3}{2} (y \leq \frac{1}{2})$

Lời giải

a) Ta có: $A = 4\sqrt{\frac{25x}{4}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9x}{4}} - \frac{4}{3x}\sqrt{\frac{9x^3}{64}} (x \geq 0) = \frac{11}{2}\sqrt{x}$

b) Ta có: $B = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{1-4y+4y^2} - \frac{3}{2} (y \leq \frac{1}{2}) = -y - \frac{3}{4}$

Bài 7: Thực hiện phép tính

a. $A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5}$

b. $B = \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5} = \frac{1}{2}$

b) Ta có: $B = \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$

Bài 8: Tìm u, biết

a. $\sqrt{4u-20} + 3\sqrt{\frac{u-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9u-45} = 4$

b. $\frac{2}{3}\sqrt{9u-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16u-16} + 27\sqrt{\frac{u-1}{81}} = 4$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{4u-20} + 3\sqrt{\frac{u-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9u-45} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{u-5} = 4 \Leftrightarrow u = 9$

b) Ta có: $\frac{2}{3}\sqrt{9u-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16u-16} + 27\sqrt{\frac{u-1}{81}} = 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{u-1} = 4 \Leftrightarrow u = 2$

Bài 9:

Tìm x, y, z biết: $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z)$

Lời giải

Cách 1: $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2 + (\sqrt{y-3}-1)^2 + (\sqrt{z-1}-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$

Cách 2: Ta có: $x+2 = (x+1)+1 \geq 2\sqrt{x+1}$; $y-2 = (y-3)+1 \geq 2\sqrt{y-3}$; $z = (z-1)+1 \geq 2\sqrt{z-1}$

Cộng vế các bất đẳng thức ta được: $x+y+z \geq 2(\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1}) \Leftrightarrow x=0; y=4; z=2$

Bài 10

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}-1$

Lời giải

Thực hiện trục căn thức ở mẫu với từng thừa số

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1; \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}; \dots$$

Thực hiện rút gọn ta được: $VT = \sqrt{n}-1 = VP$