

BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

A. Lý thuyết

Cho đường thẳng $d: y = mx + n$ và Parabol $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$. Khi đó số giao điểm của d và (P) bằng đúng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 = mx + n$

Ta có bảng sau:

Số giao điểm của d và (P)	Biệt thức Δ của phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)	Vị trí tương đối của d và (P)
0	$\Delta < 0$	d không cắt (P)
1	$\Delta = 0$	d tiếp xúc với (P)
2	$\Delta > 0$	d cắt (P) tại hai điểm phân biệt

B. Bài tập

Bài 1:

Cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$, $(d): y = \frac{1}{2}x + n$

a. Với $n=1$ hãy:

- Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ
- Tìm tọa độ các giao điểm A và B của d và (P)
- Tính diện tích ΔAOB

b. Tìm các giá trị của n để:

- d và (P) tiếp xúc nhau
- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt
- d cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía đối của trục Oy .

Lời giải

a) $n=1 \Rightarrow d: y = \frac{1}{2}x + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow A(-1; \frac{1}{2}) \\ x = 2 \Rightarrow B(2; 2) \end{cases}$

- Tính $S_{AOB} = \frac{3}{2}$ bằng 1 trong 3 cách sau:

+) Cách 1: Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục Ox , khi đó:

$$S_{AOB} = S_{AHKB} - S_{AHO} - S_{BKO}$$

+) Cách 2: Gọi I là giao điểm của d và Oy . M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên Oy . Khi đó $S_{AOB} = S_{AOI} + S_{BOI} = \frac{1}{2}AM.OI + \frac{1}{2}BN.OI$

$$S_{AOB} = S_{AOI} + S_{BOI} = \frac{1}{2}AM.OI + \frac{1}{2}BN.OI$$

+) Cách 3: Gọi T là hình chiếu vuông góc của O trên d , khi đó: $S_{AOB} = \frac{1}{2}OT.AB$

b. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) : $x^2 - x - 2n = 0$

Ta có $\Delta = 1 + 8n$

- d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{8}$

- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow n > -\frac{1}{8}$

- d cắt (P) tại hai điểm nằm ở hai phía trục $Oy \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -2n < 0 \Leftrightarrow n > 0$

Bài 2:

Cho parabol $(P): y = x^2, (d): y = -2x + m$

a. Với $m = 3$ hãy:

- Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ
- Tìm tọa độ các giao điểm M và N của d và (P)
- Tính độ dài đoạn thẳng MN

b. Tìm các giá trị của m để:

- d và (P) tiếp xúc nhau
- d và (P) không cắt nhau
- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm.

Lời giải

a) Với $m = 3$ ta được $d: y = -2x + 3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_M = -3; x_N = 1$

$$\Rightarrow M(-3; 9); N(1; 1)$$

- Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = 4\sqrt{5}$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): x^2 + 2x - m = 0$

- d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m = -1$

- d không cắt $(P) \Leftrightarrow \Delta < 0 \Rightarrow m < -1$

- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$

Bài 3:

Cho parabol $(P): y = x^2, (d): y = -2x + m$

a. Với $m = 3$ hãy:

- Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ
- Tìm tọa độ các giao điểm M và N của d và (P)
- Tính độ dài MN

b. Tìm các giá trị của m để:

- d và (P) tiếp xúc nhau
- d và (P) không cắt nhau
- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm

Lời giải

a) Với $m = 3 \Rightarrow d: y = -2x + 3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x_M = -3; x_N = 1 \Leftrightarrow M(-3; 9); N(1; 1)$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $d: x^2 + 2x - m = 0$

+ d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$

+ d và (P) không cắt nhau $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m < -1$

+ d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Bài 4:

Viết phương trình đường thẳng d , biết:

a) d đi qua hai điểm A, B thuộc $(P): y = \frac{x^2}{4}$ và có hoành độ lần lượt là $-2; 4$

b) d song song với đường thẳng $d': 2y + 4x = 5$ và tiếp xúc với $(P): y = x^2$

c) d tiếp xúc với $(P): y = \frac{x^2}{3}$ tại điểm $C(3; 3)$.

Lời giải

a) Gọi phương trình d có dạng $d: y = ax + b$

Theo đầu bài ta có: $A, B \in (P) \Rightarrow A(-2; 1); B(4; 4)$

$$\text{Do } A, B \in d \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 1 \\ 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow d: y = \frac{1}{2}x + 2$$

b) Phương trình đường thẳng d có dạng $y = -2x + b$ với $b \neq \frac{5}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 + 2x - b = 0$

d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow \Delta' = 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow y = -2x - 1$

c) Gọi phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $\frac{x^2}{3} - ax - b = 0$, với $\Delta = a^2 + \frac{4}{3}b$

Để d tiếp xúc với (P) tại điểm $C(3; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow d: y = 2x - 3.$

Bài 5:

Viết phương trình đường thẳng d , biết:

a) d đi qua hai gốc tọa độ và điểm M thuộc $(P): y = 2x^2$ có hoành độ là $\frac{1}{2}$

- b) d vuông góc với đường thẳng $d': x - 3y + 1 = 0$ và tiếp xúc với $(P): y = \frac{x^2}{3}$
- c) d tiếp xúc với $(P): y = 3x^2$ tại điểm $N(1;3)$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng: $y = ax + b$

a) Vì $M \in (P) \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Do $O, M \in d \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow d: y = x$

b) Vì $d \perp d' \Rightarrow d: y = -3x + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 + 6x - 2b = 0$

Vì d tiếp xúc với (P) nên $\Delta' = 0 \Rightarrow d: y = -3x - \frac{9}{2}$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $3x^2 - ax - b = 0$

Vì d tiếp xúc với (P) tại điểm $N(1;3) \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow d: y = 6x - 3$.

Bài 6:

Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -1)$ có hệ số góc k

- a. Viết phương trình đường thẳng d và chứng minh với mọi giá trị của k thì d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B
- b. Gọi hoành độ của A, B lần lượt là x_1, x_2 . Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| \geq 2$
- c. Chứng minh $\triangle AOB$ vuông.

Lời giải

a. Ta có $d: y = kx - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 + kx - 1 = 0; \Delta = k^2 + 4 > 0, \forall k \Rightarrow \text{đpcm}$

b. $|x_1 - x_2|^2 = k^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2$

c. Sử dụng pytago đảo.

Bài 7:

Cho parabol $(P): y = (2m-1)x^2$ với $m \neq \frac{1}{2}$.

- Xác định tham số m biết đồ thị hàm số đi qua $A(3;3)$. Vẽ đồ thị hàm số với m tìm được
- Một đường thẳng song song với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ là 4, cắt (P) tại 2 điểm A và B . Tính diện tích tam giác AOB

Lời giải

- Thay tọa độ điểm A vào phương trình (P) ta tìm được $m = \frac{2}{3} \Rightarrow (P): y = \frac{1}{3}x^2$
- Tìm được $A(-2\sqrt{3}; 4)$ và $B(2\sqrt{3}; 4) \Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot 4 = 8\sqrt{3}$ (đvdt)

Bài 8:

Cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $d: mx + y = 2$.

- Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B
- Xác định m để AB nhỏ nhất. Tính diện tích ΔAOB với m vừa tìm được.

Lời giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $\frac{1}{2}x^2 + mx - 2 = 0$

Vì $a.c < 0, \forall m \Rightarrow d$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B

- Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$$\Rightarrow A(x_1; 2 - mx_1); B(x_2; 2 - mx_2); x_1 + x_2 = -2m; x_1 x_2 = -4$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(4m^2 + 1)(m^2 + 1)} \Rightarrow AB_{\min} = 4 \text{ tại } m = 0 \Rightarrow S_{AOB} = 4.$$

Bài 9:

Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị là (P) và đường thẳng d đi qua $N(-1; -2)$ và có hệ số góc k

- Viết phương trình đường thẳng d
- Tìm các giá trị của k để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B nằm về hai phía của trục tung

c) Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$. Tìm các giá trị của k để biểu thức $S = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Ta tìm được $d: y = kx + k - 2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $x^2 + kx + k - 2 = 0$

Ta có a, c trái dấu $\Leftrightarrow k < 2$

c) $S_{\max} = \frac{-15}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Bài 10:

Cho parabol $(P); y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 1$ (m là tham số)

a) Vẽ (P) và d khi $m = 1$

b) Chứng minh với mọi giá trị của m , d luôn đi qua một điểm cố định và luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B

c) Tìm các giá trị của m để ΔAOB có diện tích bằng 2 (đơn vị diện tích).

Lời giải

a) Khi $m = 1$ thì $d: y = x + 1$

b) d luôn đi qua điểm cố định $M(0; 1)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d có a, c trái dấu hoặc $\Delta = m^2 + 1 > 0 \forall m$

c) Ta tìm được $m = \pm 2\sqrt{3}$

Bài 11:

Cho phương trình $x^2 + (m + 2)x + 2m = 0$ (m là tham số)

a) Giải và biện luận phương trình

b) Biết phương trình có một nghiệm là $x = 3$. Tìm m và nghiệm còn lại

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$

d) Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm đối nhau

e) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó 2 nghiệm cùng âm hay cùng dương

f) Đặt $A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4$ với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Hãy:

- Tìm biểu thức A theo m
- Tìm các giá trị của m để $A = 8$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của A và giá trị tương ứng của m

g) Chứng minh biểu thức $P = 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 - 4$ không phụ thuộc vào m

Lời giải

a) Với $m = 2$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -2$.

Với $m \neq 2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -2; x_2 = -m$

b) $m = -3$ và nghiệm còn lại là $x = -2$

c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2 \Leftrightarrow m = 2$

d) Để phương trình có 2 nghiệm đối nhau thì $m = -2$

e) $m > 0$ và hai nghiệm cùng âm

f) $A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4 = m^2 - 8m + 8$

- $A = 8 \Leftrightarrow m = 0$

- $A_{\min} = -8 \Leftrightarrow m = 4$

g) $P = 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 - 4 = -8 \Rightarrow \text{đpcm.}$