

MỤC LỤC

I ĐẠI SỐ 1

CHỦ ĐỀ 1. CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA 2

§1 – CĂN BẬC HAI 2

- (A) Tóm tắt lí thuyết.....2
- (B) Bài tập và các dạng toán.....2
 -  Dạng 1. Tìm căn bậc hai, căn bậc hai số học của một số.....2
 -  Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai.....3
 -  Dạng 3. Tìm giá trị x thỏa mãn biểu thức cho trước.....5
 -  Dạng 4. So sánh các căn bậc hai số học.....7
- (C) Bài tập vận dụng.....9

§2 – CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẸNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$. 13

- (A) Tóm tắt lí thuyết.....13
- (B) Bài tập và các dạng toán.....13
 -  Dạng 1. Tìm giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai.....13
 -  Dạng 2. Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn bậc hai có nghĩa.....16
 -  Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai.....18
 -  Dạng 4. Phân tích đa thức thành nhân tử.....19
 -  Dạng 5. Giải phương trình.....20
- (C) Bài tập về nhà.....23

§3 – LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG 28

- (A) Tóm tắt lí thuyết.....28
- (B) Bài tập và các dạng toán.....28
 -  Dạng 1. Thực hiện phép tính.....28
 -  Dạng 2. Rút gọn biểu thức.....31
 -  Dạng 3. Giải phương trình.....33
- (C) Bài tập về nhà.....34

§4 – LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG 37

- (A) Tóm tắt lí thuyết.....37
- (B) Bài tập và các dạng toán.....37
 -  Dạng 1. Thực hiện phép tính.....37
 -  Dạng 2. Rút gọn biểu thức.....40
 -  Dạng 3. Giải phương trình.....41

(C)	Bài tập về nhà.....	43
§5 –	BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI	47
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	47
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	47
📁	Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn.....	47
📁	Dạng 2. So sánh các căn bậc hai.....	49
📁	Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.....	49
(C)	Bài tập về nhà.....	51
§6 –	BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI (tiếp theo)	53
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	53
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	53
📁	Dạng 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn.....	53
📁	Dạng 2. Trục căn thức ở mẫu.....	55
📁	Dạng 3. Thực hiện phép tính.....	57
(C)	Bài tập về nhà.....	58
§7 –	RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI	61
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	61
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	61
📁	Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai.....	61
📁	Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.....	65
📁	Dạng 3. Tìm giá trị của biến để biểu thức đã cho thỏa mãn một điều kiện có dạng phương trình hoặc bất phương trình.....	66
📁	Dạng 4. So sánh biểu thức với một số.....	68
📁	Dạng 5. Tìm giá trị nguyên của biến để biểu thức nhận giá trị nguyên.....	69
📁	Dạng 6. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và câu hỏi phụ.....	71
(C)	Bài tập về nhà.....	74
§8 –	CĂN BẬC BA	78
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	78
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	78
📁	Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba.....	78
📁	Dạng 2. So sánh các căn bậc ba.....	81
📁	Dạng 3. Tìm điều kiện của biến để biểu thức thỏa mãn điều kiện có dạng phương trình hoặc bất phương trình.....	81
(C)	Bài tập vận dụng.....	84
§9 –	ÔN TẬP CHƯƠNG 1	86
CHỦ ĐỀ 2.	HÀM SỐ BẬC NHẤT	96
§1 –	NHẮC LẠI VÀ BỔ TÚC KHÁI NIỆM HÀM SỐ	96

(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	96
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	96
	<i>Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm.....</i>	96
	<i>Dạng 2. Tìm điều kiện xác định của hàm số.....</i>	98
	<i>Dạng 3. Biểu diễn các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy.....</i>	99
(C)	Bài tập về nhà.....	101
§2 – HÀM SỐ BẬC NHẤT		104
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	104
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	104
	<i>Dạng 1. Nhận dạng hàm số bậc nhất.....</i>	104
	<i>Dạng 2. Tìm hàm số bậc nhất thỏa mãn yêu cầu cho trước.....</i>	106
	<i>Dạng 3. Biểu diễn tọa độ các điểm trong mặt phẳng tọa độ.....</i>	107
	<i>Dạng 4. Kiểm tra tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.....</i>	108
(C)	Bài tập về nhà.....	110
§3 – ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax + b$ ($a \neq 0$)		113
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	113
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	113
	<i>Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$).....</i>	113
	<i>Dạng 2. Tìm tham số m biết hàm số bậc nhất đi qua điểm cho trước.....</i>	115
	<i>Dạng 3. Xác định giao điểm của hai đường thẳng.....</i>	119
	<i>Dạng 4. Xét tính đồng quy của ba đường thẳng.....</i>	121
	<i>Dạng 5. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới một đường thẳng cho trước không đi qua O.....</i>	124
(C)	Bài tập về nhà.....	125
§4 – ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU		131
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	131
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	131
	<i>Dạng 1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.....</i>	131
	<i>Dạng 2. Xác phương trình đường thẳng.....</i>	135
(C)	Bài tập về nhà.....	138
§5 – HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ ($a \neq 0$)		142
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	142
(B)	Bài tập và các dạng toán.....	142
	<i>Dạng 1. Tìm hệ số góc của đường thẳng.....</i>	142
	<i>Dạng 2. Xác định góc tạo bởi đường thẳng và tia Ox.....</i>	145
	<i>Dạng 3. Xác định phương trình đường thẳng biết hệ số góc.....</i>	147
(C)	Bài tập về nhà.....	150
§6 – ÔN TẬP CHƯƠNG II		153

II HÌNH HỌC**167****CHỦ ĐỀ 1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG 168****§1 – HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG 168**

- (A) Tóm tắt lí thuyết..... 168
- (B) Bài tập và các dạng toán..... 168
- 📁 Dạng 1. Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông..... 168*
- 📁 Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông..... 173*
- (C) Bài tập về nhà..... 174

§2 – TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN 178

- (A) Tóm tắt lí thuyết..... 178
- (B) Bài tập và các dạng toán..... 179
- 📁 Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc..... 179*
- 📁 Dạng 2. Sắp xếp dãy tỉ số lượng giác theo thứ tự..... 182*
- (C) Bài tập về nhà..... 184

§3 – MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC 185

- (A) Tóm tắt lí thuyết..... 185
- (B) Bài tập và các dạng toán..... 185
- 📁 Dạng 1. Giải tam giác vuông..... 185*
- 📁 Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác..... 187*

§4 – ÔN TẬP CHƯƠNG 1 188**CHỦ ĐỀ 2. ĐƯỜNG TRÒN 203****§1 – SỰ XÁC ĐỊNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN 203**

- (A) Tóm tắt lí thuyết..... 203
- (B) Bài tập và các dạng toán..... 204
- 📁 Dạng 1. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đi qua nhiều điểm..... 204*
- 📁 Dạng 2. Xác định vị trí tương đối của điểm và đường tròn..... 204*
- 📁 Dạng 3. Vẽ đường tròn thỏa mãn một yêu cầu cho trước..... 205*
- (C) Bài tập về nhà..... 205

§2 – ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN 208

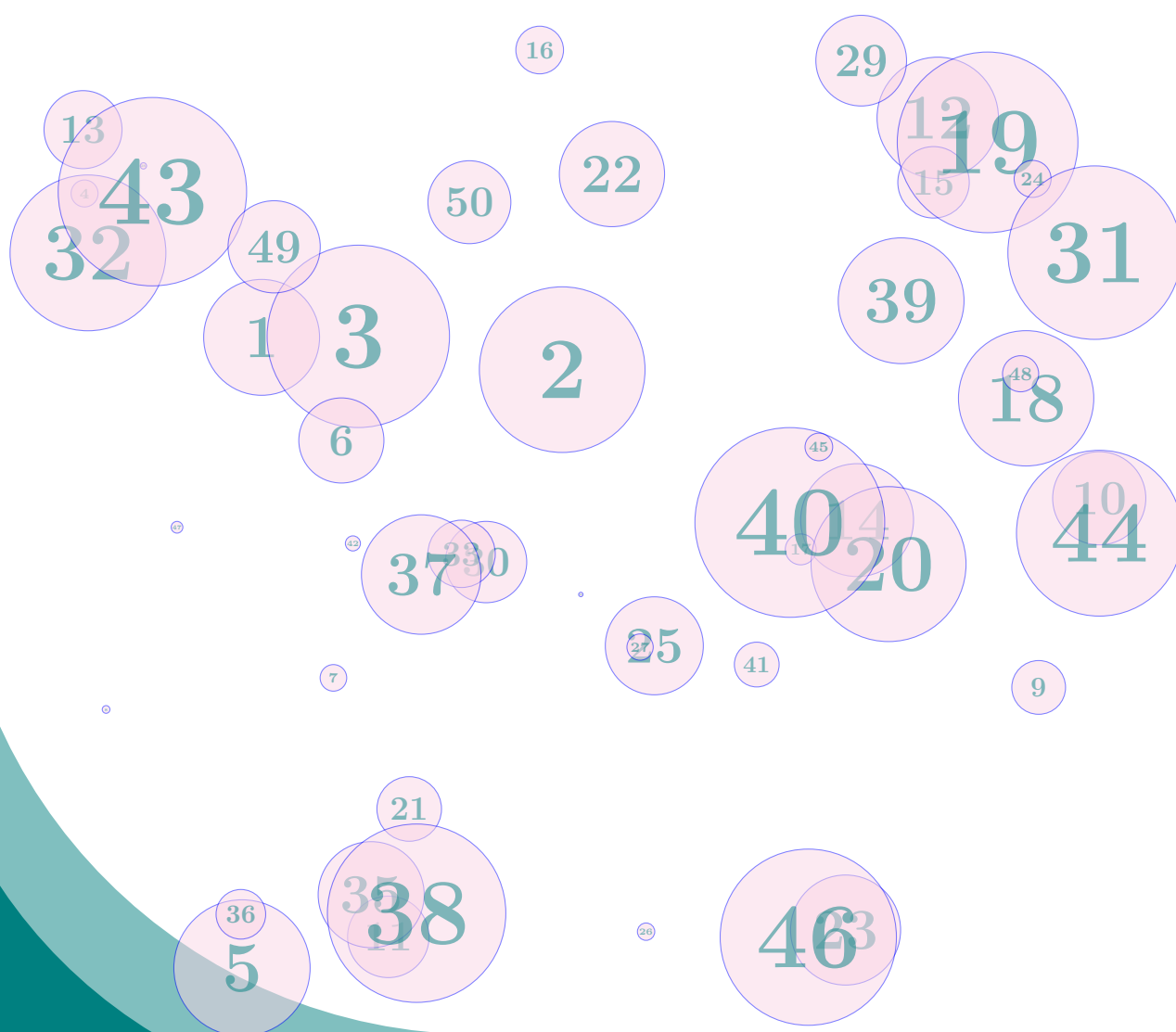
- (A) Tóm tắt lí thuyết..... 208
- (B) Bài tập và các dạng toán..... 208
- 📁 Dạng 1. So sánh các đoạn thẳng..... 208*
- 📁 Dạng 2. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau..... 209*
- (C) Bài tập về nhà..... 210

§3 – LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY	213
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	213
(B) Bài tập và các dạng toán.....	213
Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau.....	213
Dạng 2. So sánh độ dài các đoạn thẳng.....	215
(C) Bài tập về nhà.....	216
§4 – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN	219
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	219
(B) Bài tập và các dạng toán.....	219
Dạng 1. Cho biết d, R , xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn hoặc ngược lại.....	219
Dạng 2. Bài toán liên quan đến tính độ dài.....	220
(C) Bài tập vận dụng.....	221
§5 – DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN	224
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	224
(B) Bài tập và các dạng toán.....	224
Dạng 1. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn.....	224
Dạng 2. Bài toán liên quan đến tính độ dài.....	226
(C) Bài tập về nhà.....	228
§6 – TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU	231
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	231
(B) Bài tập và các dạng toán.....	231
Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc.....	231
Dạng 2. Tính độ dài, tính số đo góc.....	233
(C) Bài tập về nhà.....	235
§7 – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN (Phần 1)	237
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	237
(B) Bài tập và các dạng toán.....	237
Dạng 1. Chứng minh song song, vuông góc, tính độ dài đoạn thẳng	237
(C) Bài tập về nhà.....	239
§8 – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN (Phần 2)	242
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	242
(B) Bài tập và các dạng toán.....	242
Dạng 1. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.....	242
Dạng 2. Các bài toán liên qua đến hai đường tròn tiếp xúc nhau.....	243
(C) Bài tập về nhà.....	244

§9 – ÔN TẬP CHƯƠNG 2	248
§10 – ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 2	255
A ĐỀ SỐ 1	255
B ĐỀ SỐ 2	258

PHẦN ĐẠI SỐ

I



CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

BÀI 1. CĂN BẬC HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Căn bậc hai

- ☑ Căn bậc hai của số thực a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.
- ☑ Chú ý.
 - Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau:
 - + Số dương ký hiệu là $\sqrt{a}$;
 - + Số âm ký hiệu là $-\sqrt{a}$;
 - Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0.
 - Số âm không có căn bậc hai.

Ví dụ 1: Số 4 có hai căn bậc hai là 2 và -2 ; số $\frac{9}{4}$ có hai căn bậc hai là $\frac{3}{2}$ và $-\frac{3}{2}$; Số -25 không có căn bậc hai.

b) Căn bậc hai số học

🔗 **Định nghĩa 1.1.** Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a . Số 0 được gọi là căn bậc hai số học của 0.

Ví dụ 2. Căn bậc hai số học của 9 là 3; căn bậc hai số học của $\frac{4}{9}$ là $\frac{2}{3}$.

⚠ Ta có $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = a. \end{cases}$

c) So sánh các căn bậc hai số học

🔗 **Định lý 1.1.** Với $a, b \geq 0$: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ví dụ 3. So sánh 3 và $\sqrt{5}$.

Ta có $9 > 5$ nên $\sqrt{9} > \sqrt{5}$. Vậy $3 > \sqrt{5}$.

Ví dụ 4. Tìm số x không âm, biết $\sqrt{x} > 3$.

Ta có $\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$ (TMDK). Vậy với mọi $x > 9$ thì $\sqrt{x} > 3$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 1. Tìm căn bậc hai, căn bậc hai số học của một số

Sử dụng kiến thức

- ☑ Số dương a có hai căn bậc $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$; có căn bậc hai số học là $\sqrt{a}$.

- ☑ Số 0 có căn bậc hai và căn bậc hai số học cùng bằng 0.
- ☑ Số âm không có căn bậc hai và cũng không có căn bậc hai số học.

🔗 **Ví dụ 1.** Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng.

- a) 0; b) 81; c) -196 ; d) 4,41;
 e) 0,25; f) $\frac{169}{49}$; g) $\frac{36}{121}$; h) $3\frac{6}{25}$.

💬 **Lời giải.**

Câu	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
	0	81	-196	4,41	0,25	$\frac{169}{49}$	$\frac{36}{121}$	$3\frac{6}{25}$
CBHSH	0	9	Không	2,1	0,5	$\frac{13}{7}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{5}$
CBH	0	± 9		$\pm 2,1$	$\pm 0,5$	$\pm \frac{13}{7}$	$\pm \frac{6}{11}$	$\pm \frac{9}{5}$

□

🔗 **Ví dụ 2.** Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng.

- a) 1; b) 64; c) -144 ; d) 2,25;
 e) 0,16; f) $\frac{25}{36}$; g) $\frac{256}{225}$; h) $1\frac{15}{49}$.

💬 **Lời giải.**

Câu	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
	1	64	-144	2,25	0,16	$\frac{25}{36}$	$\frac{256}{225}$	$1\frac{15}{49}$
CBHSH	1	8	Không	1,5	0,4	$\frac{5}{6}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{8}{7}$
CBH	± 1	± 8		$\pm 1,5$	$\pm 0,4$	$\pm \frac{5}{6}$	$\pm \frac{16}{15}$	$\pm \frac{8}{7}$

□

📁 Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai

Sử dụng kiến thức

- ☑ Với số $a \geq 0$, ta có $\sqrt{a^2} = a$ và $(\sqrt{a})^2 = a$.

🔗 **Ví dụ 3.** Tính:

- a) $\sqrt{16}$; b) $\sqrt{0,81}$; c) $\sqrt{\frac{324}{289}}$; d) $\sqrt{\frac{-625}{-64}}$.

🗨️ **Lời giải.**

a) $\sqrt{16} = 4.$

b) $\sqrt{0,81} = 0,9.$

c) $\sqrt{\frac{324}{289}} = \sqrt{\left(\frac{18}{17}\right)^2} = \frac{18}{17}.$

d) $\sqrt{\frac{-625}{-64}} = \sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2} = \frac{25}{8}.$

□

🔗 **Ví dụ 4.** Tính:

a) $\sqrt{25};$

b) $\sqrt{0,16};$

c) $\sqrt{\frac{25}{81}};$

d) $\sqrt{\frac{-64}{-49}}.$

🗨️ **Lời giải.**

a) $\sqrt{25} = 5.$

b) $\sqrt{0,16} = 0,4.$

c) $\sqrt{\frac{25}{81}} = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2} = \frac{5}{9}.$

d) $\sqrt{\frac{-64}{-49}} = \sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^2} = \frac{8}{7}.$

□

🔗 **Ví dụ 5.** Tính:

a) $(\sqrt{75})^2;$

b) $(\sqrt{0,4})^2;$

c) $\left(\sqrt{\frac{4}{81}}\right)^2;$

d) $\left(\sqrt{\frac{-19}{-16}}\right)^2.$

🗨️ **Lời giải.**

a) $(\sqrt{75})^2 = 75.$

b) $(\sqrt{0,4})^2 = 0,4.$

c) $\left(\sqrt{\frac{4}{81}}\right)^2 = \frac{4}{81}.$

d) $\left(\sqrt{\frac{-19}{-16}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{19}{16}}\right)^2 = \frac{19}{16}.$

□

🔗 **Ví dụ 6.** Tính:

a) $(\sqrt{19})^2;$

b) $(\sqrt{0,16})^2;$

c) $\left(\sqrt{\frac{10}{9}}\right)^2;$

d) $\left(\sqrt{\frac{-27}{-4}}\right)^2.$

🗨️ **Lời giải.**

a) $(\sqrt{19})^2 = 19.$

b) $(\sqrt{0,16})^2 = 0,16.$

c) $\left(\sqrt{\frac{10}{9}}\right)^2 = \frac{10}{9}.$

d) $\left(\sqrt{\frac{-27}{-4}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2 = \frac{27}{4}.$

□

🔗 **Ví dụ 7.** Thực hiện phép tính:

a) $3\sqrt{25} + 10\sqrt{9} - 19\sqrt{4};$

🔍 7 b) $2 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + 5 \cdot \sqrt{0,64};$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{3}{2}\sqrt{16} + 13;$

🔍 13 d) $3\sqrt{\frac{4}{9}} - 50\sqrt{\frac{-1}{-4}} + 1.$

🔍 7

🔍 -22

Lời giải.

$$a) 3\sqrt{25} + 10\sqrt{9} - 19\sqrt{4} = 3 \cdot 5 + 10 \cdot 3 - 19 \cdot 2 = 7.$$

$$b) 2 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + 5 \cdot \sqrt{0,64} = 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = 2 \cdot \frac{3}{2} + 5 \cdot 0,8 = 7.$$

$$c) \frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{3}{2}\sqrt{16} + 13 = \frac{2}{3} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 4 + 13 = 13.$$

$$d) 3\sqrt{\frac{4}{9}} - 50\sqrt{\frac{-1}{-4}} + 1 = 3\sqrt{\frac{4}{9}} - 50\sqrt{\frac{1}{4}} + 1 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 50 \cdot \frac{1}{2} + 1 = -22.$$

□

◀▶ **Ví dụ 8.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) 0,5\sqrt{64} - 2\sqrt{25};$$

-6

$$b) 10 \cdot \sqrt{1,69} + 5 \cdot \sqrt{1\frac{11}{25}};$$

19

$$c) \frac{1}{3}\sqrt{9} - \frac{2}{5}\sqrt{25};$$

-1

$$d) 9\sqrt{\frac{121}{9}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{196}{9}} - 27.$$

-1

Lời giải.

$$a) 0,5\sqrt{64} - 2\sqrt{25} = 0,5 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = -6.$$

$$b) 10 \cdot \sqrt{1,69} + 5 \cdot \sqrt{1\frac{11}{25}} = 10 \cdot \sqrt{1,69} + 5 \cdot \sqrt{\frac{36}{25}} = 10 \cdot \frac{13}{10} + 5 \cdot \frac{6}{5} = 19.$$

$$c) \frac{1}{3}\sqrt{9} - \frac{2}{5}\sqrt{25} = \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{2}{5} \cdot 5 = -1.$$

$$d) 9\sqrt{\frac{121}{9}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{196}{9}} - 27 = 9 \cdot \frac{11}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{3} - 27 = -1.$$

□

Dạng 3. Tìm giá trị x thỏa mãn biểu thức cho trước

Sử dụng kiến thức

$x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a$ hoặc $x = -a$.

Với $a \geq 0$, ta có $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ hoặc $x = -\sqrt{a}$.

Với $a \geq 0$, ta có $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2$.

◀▶ **Ví dụ 9.** Tìm x , biết:

$$a) x^2 = 289;$$

$x = \pm 17$

$$b) 25x^2 = 16;$$

$x = \pm \frac{4}{5}$

$$c) 0,49x^2 = 2,56;$$

$x = \pm \frac{16}{7}$

$$d) 9x^2 + 10 = 0.$$

Vô nghiệm

Lời giải.

a) $x^2 = 289 \Leftrightarrow x^2 = 17^2 \Leftrightarrow x = \pm 17$.

b) $25x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{5}$.

c) $0,49x^2 = 2,56 \Leftrightarrow x^2 = \frac{256}{49} \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{16}{7}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{16}{7}$.

d) $9x^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{10}{9}$ (vô nghiệm).

□

✧ Ví dụ 10. Tìm x , biết:

a) $x^2 = 324$;

☞ $x = \pm 18$

b) $9x^2 = 16$;

☞ $x = \pm \frac{4}{3}$

c) $0,25x^2 = 1,96$;

☞ $x = \pm \frac{14}{5}$

d) $4x^2 + 19 = 0$.

☞ Vô nghiệm

💬 Lời giải.

a) $x^2 = 324 \Leftrightarrow x = \pm 18$.

b) $9x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{3}$.

c) $0,25x^2 = 1,96 \Leftrightarrow x^2 = \frac{196}{25} \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{14}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{14}{5}$.

d) $4x^2 + 19 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{19}{4}$ (Vô nghiệm).

□

✧ Ví dụ 11. Tìm x , biết:

a) $x^2 = 17$;

☞ $x = \pm \sqrt{17}$

b) $x^2 - 31 = 0$;

☞ $x = \pm \sqrt{31}$

c) $81x^2 = 23$;

☞ $x = \pm \frac{\sqrt{23}}{9}$

d) $27x^2 - 6 = 0$.

☞ $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$

💬 Lời giải.

a) $x^2 = 17 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{17}$.

b) $x^2 - 31 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 31 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{31}$.

c) $81x^2 = 23 \Leftrightarrow x^2 = \frac{23}{81} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{23}}{9}$.

d) $27x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$.

□

✧ Ví dụ 12. Tìm x , biết:

a) $x^2 = 2$;

☞ $x = \pm \sqrt{2}$

b) $x^2 - 15 = 0$;

☞ $x = \pm \sqrt{15}$

c) $64x^2 = 13$;

☞ $x = \pm \frac{\sqrt{13}}{8}$

d) $49x^2 - 26 = 0$.

☞ $x = \pm \frac{\sqrt{26}}{7}$

💬 Lời giải.

a) $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

b) $x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}$.

c) $64x^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 = \frac{13}{64} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{13}}{8}$.

d) $49x^2 - 26 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{26}{49} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{26}}{7}$.

□

❖ **Ví dụ 13.** Tìm x không âm, biết:

a) $\sqrt{x} = 21$;

🔍 $x = 441$

b) $2\sqrt{x} = -1$;

🔍 Vô nghiệm

c) $(\sqrt{x} + 1)^2 = 4$;

🔍 $x = 1$

d) $|\sqrt{x} - 1| = 2$.

🔍 $x = 9$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 21^2 = 441$ (TMĐK).

b) $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ (Vô nghiệm).

c) $(\sqrt{x} + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 2 \\ \sqrt{x} + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (TMĐK).

d) $|\sqrt{x} - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 2 \\ \sqrt{x} - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$ (TMĐK).

□

❖ **Ví dụ 14.** Tìm x không âm, biết:

a) $\sqrt{x} = 6$;

🔍 $x = 36$

b) $\sqrt{x} + 2 = 1$;

🔍 Vô nghiệm

c) $(\sqrt{x} - 1)^2 = 4$;

🔍 $x = 9$

d) $|\sqrt{x} + 1| = 4$.

🔍 $x = 9$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 6^2 = 36$ (TMĐK).

b) $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ (Vô nghiệm).

c) $(\sqrt{x} - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 2 \\ \sqrt{x} - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$ (TMĐK).

d) $|\sqrt{x} + 1| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 4 \\ \sqrt{x} + 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$ (TMĐK).

□

📁 Dạng 4. So sánh các căn bậc hai số học

Sử dụng Định lý

🌀 Với $a, b \geq 0$: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

❖ **Ví dụ 15.** So sánh:

a) 6 và $\sqrt{37}$;

b) 4 và $\sqrt{37} - 2$;

c) $\sqrt{10} + 3$ và 6;

d) 4 và $\sqrt{26} - 1$.

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $6 = \sqrt{36} < \sqrt{37}$ nên $6 < \sqrt{37}$. b) Ta có $\sqrt{36} - 2 < \sqrt{37} - 2$ nên $4 < \sqrt{37} - 2$.
 c) Ta có $\sqrt{10} + 3 > \sqrt{9} + 3$ nên $\sqrt{10} + 3 > 6$. d) Ta có $\sqrt{25} - 1 < \sqrt{26} - 1$ nên $4 < \sqrt{26} - 1$.

□

🔗 Ví dụ 16. So sánh:

- a) 6 và $\sqrt{41}$; b) $3\sqrt{2}$ và 5; c) $\sqrt{5} + 1$ và 3; d) 4 và $\sqrt{17} - 2$.

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $6 = \sqrt{36} < \sqrt{41}$ nên $6 < \sqrt{41}$. b) Ta có $18 < 25$ nên $3\sqrt{2} < 5$.
 c) Ta có $\sqrt{5} + 1 > \sqrt{4} + 1$ nên $\sqrt{5} + 1 > 3$. d) Ta có $\sqrt{36} - 2 > \sqrt{17} - 2$ nên $4 > \sqrt{17} - 2$.

□

🔗 Ví dụ 17. Tìm x không âm, biết:

- a) $\sqrt{x} < 5$; $\text{☞ } 0 \leq x < 25$ b) $\sqrt{2x} \leq 0,4$; $\text{☞ } 0 \leq x \leq 0,08$
 c) $\sqrt{x} - 1 > 3$; $\text{☞ } x > 16$ d) $1 - \sqrt{x} \geq \frac{1}{3}$. $\text{☞ } 0 \leq x \leq \frac{4}{9}$

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $\sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow x < 25$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x < 25$.
 b) Ta có $\sqrt{2x} \leq 0,4 \Leftrightarrow 2x \leq 0,16 \Leftrightarrow x \leq 0,08$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x \leq 0,08$.
 c) Ta có $\sqrt{x} - 1 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow x > 16$ (TMDK).
 d) Ta có $1 - \sqrt{x} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{9}$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x \leq \frac{4}{9}$.

□

🔗 Ví dụ 18. Tìm x không âm, biết:

- a) $\sqrt{x} < 2$; $\text{☞ } 0 \leq x < 4$ b) $\sqrt{3x} \leq 0,6$; $\text{☞ } 0 \leq x \leq 0,12$
 c) $\sqrt{x} + 1 > 3$; $\text{☞ } x > 4$ d) $1 - \sqrt{2x} \geq \frac{2}{5}$. $\text{☞ } 0 \leq x \leq \frac{9}{50}$

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x < 4$.
 b) Ta có $\sqrt{3x} \leq 0,6 \Leftrightarrow 3x \leq 0,36 \Leftrightarrow x \leq 0,12$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x \leq 0,12$.
 c) Ta có $\sqrt{x} + 1 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$ (TMDK).
 d) Ta có $1 - \sqrt{2x} \geq \frac{2}{5} \Leftrightarrow \sqrt{2x} \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow 2x \leq \frac{9}{25} \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{50}$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x \leq \frac{9}{50}$.



❖ **Ví dụ 19.** Chứng minh rằng với $x \geq 0$ thì

a) $\sqrt{x} - 3 \geq -3$; b) $3 - \sqrt{x} \leq 3$; c) $\frac{3}{\sqrt{x} + 1} \leq 3$; d) $1 - \frac{5}{\sqrt{x} + 2} \geq -\frac{3}{2}$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 3 \geq -3$.

b) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow 3 - \sqrt{x} \leq 3$.

c) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \leq 3$.

d) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 1 - \frac{5}{\sqrt{x} + 2} \geq -\frac{3}{2}$.



❖ **Ví dụ 20.** Chứng minh rằng với $x \geq 0$ thì

a) $\sqrt{x} - 2 \geq -2$; b) $2 - \sqrt{x} \leq 2$; c) $\frac{4}{\sqrt{x} + 2} \leq 2$; d) $1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{1}{2}$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 \geq -2$.

b) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x} \leq 2$.

c) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x} + 2} \leq 2$.

d) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{1}{2}$.



C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai số học của chúng.

a) 0; b) 64; c) -289; d) 2,56; e) 0,36; f) $\frac{169}{324}$; g) $\frac{49}{144}$; h) $2\frac{14}{25}$.

💬 **Lời giải.**

Câu	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
	0	64	-289	2,56	0,36	$\frac{169}{324}$	$\frac{49}{144}$	$2\frac{14}{25}$
CBHSH	0	8	Không có	1,6	0,6	$\frac{13}{18}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{5}$
CBH	0	± 8		$\pm 1,6$	$\pm 0,6$	$\pm \frac{13}{18}$	$\pm \frac{7}{12}$	$\pm \frac{8}{5}$



❖ Bài 2. Tính:

a) $\sqrt{361}$; b) $\sqrt{0,01}$; c) $\sqrt{\frac{64}{25}}$; d) $\sqrt{\frac{-25}{-9}}$.

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{361} = 19$. b) $\sqrt{0,01} = 0,1$.
c) $\sqrt{\frac{64}{25}} = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{8}{5}$. d) $\sqrt{\frac{-25}{-9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}$.



❖ Bài 3. Tính:

a) $(\sqrt{23})^2$; b) $(\sqrt{1,2})^2$; c) $\left(\sqrt{\frac{9}{16}}\right)^2$; d) $\left(\sqrt{\frac{-25}{-4}}\right)^2$.

💬 Lời giải.

a) $(\sqrt{23})^2 = 23$. b) $(\sqrt{1,2})^2 = 1,2$.
c) $\left(\sqrt{\frac{9}{16}}\right)^2 = \frac{9}{16}$. d) $\left(\sqrt{\frac{-25}{-4}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right)^2 = \frac{25}{4}$.



❖ Bài 4. Thực hiện phép tính:

a) $3\sqrt{4} + 8\sqrt{9} - 15\sqrt{16}$; $\text{☞ } -30$ b) $5\sqrt{0,16} + 3\sqrt{0,04}$; $\text{☞ } \frac{13}{5}$
c) $\frac{2}{3}\sqrt{9} - \frac{3}{2}\sqrt{36} + 19$; $\text{☞ } 12$ d) $11\sqrt{\frac{81}{121}} - 3\sqrt{\frac{-1}{-9}} + 1$. $\text{☞ } 9$

💬 Lời giải.

a) $3\sqrt{4} + 8\sqrt{9} - 15\sqrt{16} = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - 15 \cdot 4 = -30$.
b) $5\sqrt{0,16} + 3\sqrt{0,04} = 5 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 = \frac{13}{5}$.
c) $\frac{2}{3}\sqrt{9} - \frac{3}{2}\sqrt{36} + 19 = \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot 6 + 19 = 12$.
d) $11\sqrt{\frac{81}{121}} - 3\sqrt{\frac{-1}{-9}} + 1 = 11\sqrt{\frac{81}{121}} - 3\sqrt{\frac{1}{9}} + 1 = 11 \cdot \frac{9}{11} - 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 9$.



❖ Bài 5. Tìm x , biết

a) $x^2 = 400$; $\text{☞ } \pm 20$ b) $75x^2 = 48$; $\text{☞ } \pm \frac{4}{5}$
c) $0,16x^2 = 0,09$; $\text{☞ } \pm \frac{3}{4}$ d) $27x^2 + 10 = 0$. $\text{☞ } \text{Vô nghiệm}$

 Lời giải.

a) $x^2 = 400 \Leftrightarrow x = \pm 20$.

b) $75x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = \frac{48}{75} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{5}$;

c) $0,16x^2 = 0,09 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{4}$;

d) $27x^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-10}{27}$ (Vô nghiệm).

□

 Bài 6. Tìm x , biết:

a) $x^2 = 11$;

 $\pm\sqrt{11}$

b) $x^2 - 7 = 0$;

 $\pm\sqrt{7}$

c) $9x^2 = 17$;

 $\pm\frac{\sqrt{17}}{3}$

d) $12x^2 - 21 = 0$.

 $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

 Lời giải.

a) $x^2 = 11 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}$.

b) $x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

c) $9x^2 = 17 \Leftrightarrow x^2 = \frac{17}{9} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{17}}{3}$;

d) $12x^2 - 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{21}{12} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

□

 Bài 7. Tìm x không âm, biết:

a) $\sqrt{x} = 5$;

 25

b) $7\sqrt{x} = 3$;

 $\frac{9}{49}$

c) $(1 - \sqrt{x})^2 = 9$;

 16

d) $|1 - \sqrt{x}| = 3$.

 16

 Lời giải.

a) Ta có $\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 5^2 \Leftrightarrow x = 25$ (TMĐK).

b) $7\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = \frac{9}{49}$ (TMĐK).

c) $(1 - \sqrt{x})^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} = 3 \\ 1 - \sqrt{x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2 \\ \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16$ (TMĐK).

d) $|1 - \sqrt{x}| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} = 3 \\ 1 - \sqrt{x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2 \\ \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16$ (TMĐK).

□

 Bài 8. So sánh:

a) 7 và $\sqrt{41}$;

b) $2\sqrt{5}$ và 4;

c) $\sqrt{15} + 4$ và 8;

d) 3 và $\sqrt{17} - 1$.

 Lời giải.

a) Ta có $7 = \sqrt{49} > \sqrt{41}$ nên $7 > \sqrt{41}$.

- b) Ta có $20 > 16$ nên $2\sqrt{5} > 4$.
- c) Ta có $\sqrt{15} + 4 < \sqrt{16} + 4$ nên $\sqrt{15} + 4 < 8$.
- d) Ta có $\sqrt{16} - 1 < \sqrt{17} - 1$ nên $3 < \sqrt{17} - 1$.

□

✎ **Bài 9.** Tìm x không âm, biết:

- a) $\sqrt{x} < 3$; ✎ $0 \leq x < 9$ b) $\sqrt{4x} \leq 0,6$; ✎ $0 \leq x \leq 0,09$
- c) $\sqrt{3x} - 2 > 5$; ✎ $x > \frac{49}{3}$ d) $2 - \sqrt{x} \geq \frac{3}{4}$. ✎ $0 \leq x \leq \frac{25}{16}$

💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $\sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x < 9$.
- b) Ta có $\sqrt{4x} \leq 0,6 \Leftrightarrow 4x \leq 0,36 \Leftrightarrow x \leq 0,09$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x \leq 0,09$.
- c) Ta có $\sqrt{3x} - 2 > 5 \Leftrightarrow \sqrt{3x} > 7 \Leftrightarrow 3x > 49 \Leftrightarrow x > \frac{49}{3}$ (TMDK).
- d) Ta có $2 - \sqrt{x} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow x \leq \frac{25}{16}$. Kết hợp ĐK, ta tìm được $0 \leq x \leq \frac{25}{16}$

□

✎ **Bài 10.** Chứng minh rằng với $x \geq 0$ thì

- a) $\sqrt{x} + 3 \geq 3$; b) $2\sqrt{x} - 1 \geq -1$; c) $1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \geq -1$; d) $0 < \frac{7}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{7}{3}$.

💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3$.
- b) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} - 1 \geq -1$.
- c) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \leq 2 \Rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \geq -1$.
- d) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} + 3 \leq 3 \Rightarrow 0 < \frac{7}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{7}{3}$.

□

BÀI 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC

$$\sqrt{A^2} = |A|.$$

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Căn thức bậc hai

Tổng quát

- ☑ Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A , A là biểu thức lấy căn.
- ☑ $\sqrt{A}$ xác định khi $A \geq 0$.

Ví dụ 1. $\sqrt{x+1}$ là căn thức bậc hai của $x+1$, $\sqrt{x+1}$ xác định khi $x+1 \geq 0$, tức là $x \geq -1$.

b) Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

🔗 **Định lý 2.1.** Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ví dụ 2.

a) $\sqrt{13^2} = |13| = 13.$

b) $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8.$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}.$



Với A là một biểu thức, ta có $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0. \end{cases}$

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai

Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0. \end{cases}$

🔗 **Ví dụ 1.** Tính:

a) $\sqrt{25};$

b) $\sqrt{(2,5)^2};$

c) $\sqrt{\frac{81}{100}};$

d) $\sqrt{-\left(\frac{121}{-49}\right)}.$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5.$

b) $\sqrt{(2,5)^2} = |2,5| = 2,5.$

c) $\sqrt{\frac{81}{100}} = \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2} = \left|\frac{9}{10}\right| = \frac{9}{10}.$

d) $\sqrt{-\left(\frac{121}{-49}\right)} = \sqrt{\frac{121}{49}} = \sqrt{\left(\frac{11}{7}\right)^2} = \left|\frac{11}{7}\right| = \frac{11}{7}.$

□

❖ Ví dụ 2. Tính:

a) $\sqrt{13^2}$;

b) $\sqrt{(-2)^2}$;

c) $\sqrt{\frac{64}{25}}$;

d) $\sqrt{-\left(\frac{-36}{169}\right)}$.

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{13^2} = |13| = 13$.

b) $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.

c) $\sqrt{\frac{64}{25}} = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \left|\frac{8}{5}\right| = \frac{8}{5}$.

d) $\sqrt{-\left(\frac{-36}{169}\right)} = \sqrt{\frac{36}{169}} = \sqrt{\left(\frac{6}{13}\right)^2} = \left|\frac{6}{13}\right| = \frac{6}{13}$.

□

❖ Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(3 - \sqrt{2})^2}$;

👉 $3 - \sqrt{2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{11} + 3)^2}$;

👉 $\sqrt{11} + 3$

c) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$;

👉 $\sqrt{3} - 1$

d) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

👉 $2 + \sqrt{3}$

💬 Lời giải.

Ta có

a) $\sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$.

b) $\sqrt{(\sqrt{11} + 3)^2} = |\sqrt{11} + 3| = \sqrt{11} + 3$;

c) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$.

d) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$.

□

❖ Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}$;

👉 $2 + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{(\sqrt{7} + 3)^2}$;

👉 $\sqrt{7} + 3$

c) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$;

👉 $\sqrt{5} - 1$

d) $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$.

👉 $1 + \sqrt{7}$

💬 Lời giải.

Ta có

a) $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{(\sqrt{7} + 3)^2} = |\sqrt{7} + 3| = \sqrt{7} + 3$.

c) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = |1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$.

d) $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{(1 + \sqrt{7})^2} = |1 + \sqrt{7}| = 1 + \sqrt{7}$.

□

❖ Ví dụ 5. Thực hiện các phép tính:

a) $\sqrt{196} \cdot \sqrt{25} - 5\sqrt{81}$;

🔍 25

b) $(32 : \sqrt{16} + \sqrt{289}) \cdot \sqrt{49}$;

🔍 175

c) $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} - \sqrt{10}$;

🔍 -3

d) $\sqrt{(5 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{(8 - 2\sqrt{7})}$.

🔍 6

💬 **Lời giải.**

Ta có

a) $\sqrt{196} \cdot \sqrt{25} - 5\sqrt{81} = 14 \cdot 5 - 5 \cdot 9 = 25.$

b) $(32 : \sqrt{16} + \sqrt{289}) \cdot \sqrt{49} = (32 : 4 + 17) \cdot 7 = 175.$

c) $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} - \sqrt{10} = |\sqrt{10} - 3| - \sqrt{10} = \sqrt{10} - 3 - \sqrt{10} = -3.$

d) $\sqrt{(5 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{(8 - 2\sqrt{7})} = |5 + \sqrt{7}| - \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} = 5 + \sqrt{7} - |\sqrt{7} - 1| = 5 + \sqrt{7} - (\sqrt{7} - 1) = 6.$

□

💡 **Ví dụ 6.** Thực hiện các phép tính:

a) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{25} + 10\sqrt{36}$;

🔍 100

b) $(81 : \sqrt{9} + \sqrt{169}) \cdot \sqrt{225}$;

🔍 600

c) $\sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} - \sqrt{7}$;

🔍 -1

d) $\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

🔍 2

💬 **Lời giải.**

Ta có

a) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{25} + 10\sqrt{36} = 8 \cdot 5 + 10 \cdot 6 = 100.$

b) $(81 : \sqrt{9} + \sqrt{169}) \cdot \sqrt{225} = (81 : 3 + 13) \cdot 15 = 600.$

c) $\sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} - \sqrt{7} = |\sqrt{7} - 1| - \sqrt{7} = \sqrt{7} - 1 - \sqrt{7} = -1.$

d) $\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| - |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2.$

□

💡 **Ví dụ 7.** Chứng minh:

a) $(3 - \sqrt{7})^2 = 16 - 6\sqrt{7}$;

b) $\sqrt{11} - \sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = 3$;

c) $\sqrt{41 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{41 - 12\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

💬 **Lời giải.**

a) Chú ý rằng $VT = (3 - \sqrt{7})^2 = 9 - 6\sqrt{7} + 7 = 16 - 6\sqrt{7} = VP$ (ĐPCM).

b) Ta có

$$VT = \sqrt{11} - \sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = \sqrt{11} - \sqrt{(\sqrt{11} - 3)^2} = \sqrt{11} - |\sqrt{11} - 3| = \sqrt{11} - (\sqrt{11} - 3) = 3 = VP.$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{41 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{41 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(6 + \sqrt{5})^2} - \sqrt{(6 - \sqrt{5})^2} = |6 + \sqrt{5}| - |6 - \sqrt{5}| \\ &= 6 + \sqrt{5} - (6 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} = VP. \end{aligned}$$

□

❖ Ví dụ 8. Chứng minh:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (1 + \sqrt{2})^2 &= 3 + 2\sqrt{2}; & \text{b)} \quad \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} &= -1; & \text{c)} \quad \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} &= -2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

💬 Lời giải.

a) Chú ý rằng $VT = (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 2 + 2\sqrt{2} = VP$ (ĐPCM).

b) Ta có $VT = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5} - 1| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} = -1 = VP$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| - |2 + \sqrt{3}| \\ &= 2 - \sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) = -2\sqrt{3} = VP. \end{aligned}$$

□

📁 Dạng 2. Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn bậc hai có nghĩa

Chú ý rằng $\sqrt{A}$ có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$.

❖ Ví dụ 9. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sqrt{72a}; & \quad \text{b)} \quad \sqrt{\frac{-13}{3a}}; \\ \text{c)} \quad \sqrt{19 + 4a}; & \quad \text{d)} \quad \sqrt{27 - 6a}. \end{aligned}$$

💬 Lời giải.

a) Căn thức có nghĩa khi $72a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$.

b) Căn thức có nghĩa khi $\frac{-13}{3a} > 0 \Leftrightarrow a < 0$.

c) Căn thức có nghĩa khi $19 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{-19}{4}$.

d) Căn thức có nghĩa khi $27 - 6a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{9}{2}$.

□

❖ Ví dụ 10. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{86a}$;

$\text{a) } a \geq 0$

b) $\sqrt{\frac{-10}{9}a}$;

$\text{b) } a \leq 0$

c) $\sqrt{24 + 10a}$;

$\text{c) } a \geq \frac{-12}{5}$

d) $\sqrt{17 - 5a}$.

$\text{d) } a \leq \frac{17}{5}$

Lời giải.

a) Căn thức có nghĩa khi $86a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$

b) Căn thức có nghĩa khi $\frac{-10}{9}a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$.

c) Căn thức có nghĩa khi $24 + 10a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{-24}{10} \Leftrightarrow a \geq \frac{-12}{5}$.

d) Căn thức có nghĩa khi $17 - 5a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{17}{5}$.

□

Ví dụ 11. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{15}{x-2}}$;

$\text{a) } x > 2$

b) $\sqrt{\frac{-17}{12-x}}$;

$\text{b) } x > 12$

c) $\sqrt{\frac{10-30x}{3x^2+1}}$;

$\text{c) } x \leq \frac{1}{3}$

d) $\sqrt{\frac{4x+2}{x^2+4x+5}}$.

$\text{d) } x \geq \frac{-1}{2}$

Lời giải.

a) Căn thức có nghĩa khi $\frac{15}{x-2} \geq 0$. Vì $15 > 0$ nên $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

b) Căn thức có nghĩa khi $\frac{-17}{12-x} \geq 0$. Vì $-17 < 0$ nên $12-x < 0 \Leftrightarrow x > 12$.

c) Căn thức có nghĩa khi $\frac{10-30x}{3x^2+1} \geq 0$. Vì $3x^2+1 > 0$ nên $10-30x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$.

d) Căn thức có nghĩa khi $\frac{4x+2}{x^2+4x+5} \geq 0$. Vì $x^2+4x+5 > 0$ nên $4x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

□

Ví dụ 12. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{1}{x+3}}$;

$\text{a) } x > -3$

b) $\sqrt{\frac{-22}{5-x}}$;

$\text{b) } x > 5$

c) $\sqrt{\frac{22-5x}{x^2+1}}$;

$\text{c) } x \geq \frac{22}{5}$

d) $\sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x+3}}$.

$\text{d) } x \geq 2$

Lời giải.

a) Căn thức có nghĩa khi $\frac{1}{x+3} \geq 0$. Vì $1 > 0$ nên $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

b) Căn thức có nghĩa khi $\frac{-22}{5-x} \geq 0$. Vì $-22 < 0$ nên $5-x < 0 \Leftrightarrow x > 5$.

c) Căn thức có nghĩa khi $\frac{22-5x}{x^2+1} \geq 0$. Vì $x^2+1 > 0$ nên $22-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{22}{5}$.

d) Căn thức có nghĩa khi $\frac{x-2}{x^2+2x+3} \geq 0$. Vì $x^2+2x+3 > 0$ nên $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

□

Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0. \end{cases}$

✎ **Ví dụ 13.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $3\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$;  $3a$ b) $\sqrt{81a^2} + 9a$ với $a \leq 0$;  0
 c) $\sqrt{25a^4} - 3a^2$;  $2a^2$ d) $\sqrt{9a^6} - 2a^3$ với $a < 0$.  $-5a^3$

 **Lời giải.**

- a) $3\sqrt{a^2} = 3|a| = 3a$ (Vì $a \geq 0$ nên $|a| = a$).
 b) $\sqrt{81a^2} + 9a = 9|a| + 9a = -9a + 9a = 0$ (Vì $a \leq 0$ nên $|a| = -a$).
 c) $\sqrt{25a^4} - 3a^2 = 5a^2 - 3a^2 = 2a^2$.
 d) $\sqrt{9a^6} - 2a^3 = 3|a^3| - 2a^3 = -5a^3$ (Vì $a < 0$ nên $|a| = -a$).

□

✎ **Ví dụ 14.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $-2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$;  $-2a$ b) $\sqrt{16a^2} + 4a$ với $a < 0$;  0
 c) $\sqrt{a^4} - 4a^2$;  $-3a^2$ d) $\sqrt{a^6} + a^3$ với $a < 0$.  0

 **Lời giải.**

- a) $-2\sqrt{a^2} = -2|a| = -2a$. (Vì $a \geq 0$ nên $|a| = a$).
 b) $\sqrt{16a^2} + 4a = 4|a| + 4a = -4a + 4a = 0$. (Vì $a < 0$ nên $|a| = -a$).
 c) $\sqrt{a^4} - 4a^2 = a^2 - 4a^2 = -3a^2$.
 d) $\sqrt{a^6} + a^3 = |a^3| + a^3 = -a^3 + a^3 = 0$. (Vì $a < 0$ nên $|a| = -a$).

□

✎ **Ví dụ 15.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{(a-4)^2}$ với $a \geq 4$;  $a-4$ b) $\sqrt{(5-a)^2} + 4a$ với $a < 5$;  $5+3a$
 c) $\sqrt{a^2+6a+9}$ với $a \geq -3$;  $a+3$ d) $\sqrt{4a^2-4a+1} + 2a$ với $a < \frac{1}{2}$.  1

 **Lời giải.**

- a) $\sqrt{(a-4)^2} = |a-4| = a-4$ (Vì $a \geq 4$ nên $|a-4| = a-4$).
 b) $\sqrt{(5-a)^2} + 4a = |5-a| + 4a = 5+3a$ (Vì $a < 5$ nên $|5-a| = 5-a$).
 c) $\sqrt{a^2+6a+9} = \sqrt{(a+3)^2} = |a+3| = a+3$ (Vì $a \geq -3$ nên $|a+3| = a+3$).

$$d) \sqrt{4a^2 - 4a + 1} + 2a = \sqrt{(2a - 1)^2} + 2a = |2a - 1| + 2a = 1 - 2a + 2a = 1$$

(Vì $a < \frac{1}{2}$ nên $|2a - 1| = 1 - 2a$).

□

❖ **Ví dụ 16.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(a-1)^2}$ với $a \geq 1$; ❖ $a-1$ b) $\sqrt{(2-a)^2} + a$ với $a < 2$; ❖ 2

c) $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$ với $a \geq -1$; ❖ $a+1$ d) $\sqrt{9a^2 - 6a + 1} + 3a$ với $a < \frac{1}{3}$. ❖ 1

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{(a-1)^2} = |a-1| = a-1$ (Vì $a \geq 1$ nên $|a-1| = a-1$).

b) $\sqrt{(2-a)^2} + a = |2-a| + a = 2-a+a = 2$ (Vì $a < 2$ nên $|2-a| = 2-a$).

c) $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a+1| = a+1$ (Vì $a \geq -1$ nên $|a+1| = a+1$).

d) $\sqrt{9a^2 - 6a + 1} + 3a = \sqrt{(3a-1)^2} + 3a = |3a-1| + 3a = 1-3a+3a = 1$
(Vì $a < \frac{1}{3}$ nên $|3a-1| = 1-3a$).

□

📁 Dạng 4. Phân tích đa thức thành nhân tử

Dùng kết quả Với $a \geq 0$ thì $a = (\sqrt{a})^2$.

❖ **Ví dụ 17.** Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - 7$; b) $4x^2 - 3$; c) $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7$; d) $9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $x^2 - 7 = x^2 - (\sqrt{7})^2 = (x + \sqrt{7}) \cdot (x - \sqrt{7})$.

b) Biến đổi tương tự $4x^2 - 3 = (2x - \sqrt{3}) \cdot (2x + \sqrt{3})$.

c) Chú ý rằng $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7 = x^2 + 2\sqrt{7}x + (\sqrt{7})^2 = (x + \sqrt{7})^2$.

d) Tương tự $9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2 = (3x + \sqrt{2})^2$.

□

❖ **Ví dụ 18.** Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - 3$; b) $9x^2 - 5$; c) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$; d) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$.

b) Biến đổi tương tự $9x^2 - 5 = (3x - \sqrt{5}) \cdot (3x + \sqrt{5})$.

c) Chú ý rằng $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2$.

d) Tương tự $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = (2x + \sqrt{3})^2$.

□

Dạng 5. Giải phương trình

B1. Tìm ĐKXD;

B2. Biến đổi về các phương trình đã biết cách giải;

B3. Kiểm tra điều kiện (nếu có) rồi kết luận.

Chú ý một số phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } A^2 = B &\Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases}; & \text{b) } \sqrt{A^2} = B &\Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ |A| = B \end{cases}; \\ \text{c) } \sqrt{A^2} = \sqrt{B^2} &\Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B. \end{aligned}$$

❖ Ví dụ 19. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 5 = 0; & \quad \text{a) } 4x^2 - 2 = 0; & \text{b) } x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{c) } x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 0; & \quad \text{d) } 4x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0. & \text{c) } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

 Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 5 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}. \\ \text{b) } 4x^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}. \\ \text{c) } x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 0 &\Leftrightarrow (x + \sqrt{5})^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}. \\ \text{d) } 4x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0 &\Leftrightarrow (2x - \sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□

❖ Ví dụ 20. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 2 = 0; & \quad \text{b) } 4x^2 - 3 = 0; & \text{c) } x = \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \text{c) } x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0; & \quad \text{d) } x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0. & \text{c) } x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

 Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}. \\ \text{b) } 4x^2 - 3 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}. \\ \text{c) } x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0 &\Leftrightarrow (x + \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}. \\ \text{d) } x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

❖ Ví dụ 21. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2} = 8;$

$\text{☞ } x = \pm 8$

b) $\sqrt{9x^2} = 10;$

$\text{☞ } x = \pm \frac{10}{3}$

c) $\sqrt{4x^2} - 19 = 0;$

$\text{☞ } x = \pm \frac{19}{2}$

d) $\sqrt{49x^2} = |-14|.$

$\text{☞ } x = \pm 2$

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{x^2} = 8 \Leftrightarrow |x| = 8 \Leftrightarrow x = \pm 8.$

b) $\sqrt{9x^2} = 10 \Leftrightarrow |3x| = 10 \Leftrightarrow x = \pm \frac{10}{3}.$

c) $\sqrt{4x^2} - 19 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(2x)^2} = 19 \Leftrightarrow |2x| = 19 \Leftrightarrow x = \pm \frac{19}{2}.$

d) $\sqrt{49x^2} = |-14| \Leftrightarrow |7x| = 14 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

□

☞ Ví dụ 22. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2} = 3;$

$\text{☞ } x = \pm 3$

b) $\sqrt{16x^2} = 1;$

$\text{☞ } x = \pm \frac{1}{4}$

c) $\sqrt{25x^2} - 125 = 0;$

$\text{☞ } x = \pm 25$

d) $\sqrt{36x^2} = |-12|.$

$\text{☞ } x = \pm 2$

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{x^2} = 3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$

b) $\sqrt{16x^2} = 1 \Leftrightarrow |4x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{4}.$

c) $\sqrt{25x^2} - 125 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(5x)^2} = 125 \Leftrightarrow |5x| = 125 \Leftrightarrow x = \pm 25.$

d) $\sqrt{36x^2} = |-12| \Leftrightarrow |6x| = 12 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

□

☞ Ví dụ 23. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-2)^2} = 3;$

$\text{☞ } S = \{-1; 5\}$

b) $\sqrt{25 - 10x + x^2} = 1;$

$\text{☞ } S = \{4; 6\}$

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1 - x;$

$\text{☞ } S = \emptyset$

d) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = -x;$

$\text{☞ } S = \emptyset$

e) $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0;$

$\text{☞ } x = 1$

f) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0.$

$\text{☞ } x = 9$

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{(x-2)^2} = 3 \Leftrightarrow |x-2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{-1; 5\}.$

b) $\sqrt{25 - 10x + x^2} = 1 \Leftrightarrow |x-5| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{4; 6\}.$

c) ĐK: $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Chú ý rằng:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1 - x \Leftrightarrow |x - 2| = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 - x \\ x - 2 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ 0 \cdot x = 1 \end{cases} \text{ (KTM).}$$

Vậy $S = \emptyset$.

d) ĐK: $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ Ta có:

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = -x \Leftrightarrow |3x - 1| = -x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = -x \\ 3x - 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (KTM).}$$

Vậy $S = \emptyset$.

e) Căn thức có nghĩa khi $x \geq 0$

$$x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TMDK).}$$

f) Căn thức có nghĩa khi $x \geq 0$

$$x - 2\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 2 \\ \sqrt{x} - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = -1(L) \end{cases} \Leftrightarrow x = 9 \text{ (TMDK).}$$

□

❖ Ví dụ 24. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{(x+1)^2} = 4;$

🔍 $\begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$

b) $\sqrt{9 - 6x + x^2} = 1;$

🔍 $\begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2 - x;$

🔍 $x = \frac{3}{2}$

d) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x + 1;$

🔍 $S = \emptyset$

e) $x - 4\sqrt{x} + 4 = 0;$

🔍 $x = 4$

f) $x - 4\sqrt{x} - 5 = 0.$

🔍 $x = 25$

🗨️ Lời giải.

a) $\sqrt{(x+1)^2} = 4 \Leftrightarrow |x+1| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}.$

b) $\sqrt{9 - 6x + x^2} = 1 \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}.$

c) ĐK: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Chú ý rằng:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2 - x \Leftrightarrow |x - 1| = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 - x \\ x - 1 = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ 0 \cdot x = -1 \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}$.

d) ĐK: $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Ta có:

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x + 1 \Leftrightarrow |x + 3| = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = x + 1 \\ x + 3 = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x = -2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (KTM)}$$

Vậy $S = \emptyset$.

e) Căn thức có nghĩa khi $x \geq 0$

$$x - 4\sqrt{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMDK).}$$

Vậy $x = 4$.

f) Căn thức có nghĩa khi $x \geq 0$

$$x - 4\sqrt{x} - 5 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 2 = 3 \\ \sqrt{x} - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{x} = -2(L) \end{cases} \Leftrightarrow x = 25 \text{ (TMDK)}.$$

Vậy $x = 25$.

□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

✎ Bài 1. Tính

a) $\sqrt{225}$;

b) $\sqrt{(3,7)^2}$;

c) $\sqrt{\frac{324}{169}}$;

d) $\sqrt{-\left(\frac{-25}{361}\right)}$.

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = |15| = 15$.

b) $\sqrt{(3,7)^2} = |3,7| = 3,7$.

c) $\sqrt{\frac{324}{169}} = \sqrt{\left(\frac{18}{13}\right)^2} = \left|\frac{18}{13}\right| = \frac{18}{13}$.

d) $\sqrt{-\left(\frac{-25}{361}\right)} = \sqrt{\frac{25}{361}} = \sqrt{\left(\frac{5}{19}\right)^2} = \left|\frac{5}{19}\right| = \frac{5}{19}$.

□

✎ Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(3 + \sqrt{5})^2}$;

☞ $3 + \sqrt{5}$

b) $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$;

☞ $3 - \sqrt{7}$

c) $\sqrt{14 - 2\sqrt{13}}$;

☞ $\sqrt{13} - 1$

d) $\sqrt{12 + 2\sqrt{11}}$.

☞ $1 + \sqrt{11}$

💬 Lời giải.

a) Ta có $\sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} = |3 + \sqrt{5}| = 3 + \sqrt{5}$.

b) Ta có $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2} = |\sqrt{7} - 3| = 3 - \sqrt{7}$.

c) Ta có $\sqrt{14 - 2\sqrt{13}} = \sqrt{(1 - \sqrt{13})^2} = |1 - \sqrt{13}| = \sqrt{13} - 1$.

d) Ta có $\sqrt{12 + 2\sqrt{11}} = \sqrt{(1 + \sqrt{11})^2} = |1 + \sqrt{11}| = 1 + \sqrt{11}$.

□

✎ Bài 3. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{625} - 5\sqrt{81}$;

☞ 55

b) $(-35 : \sqrt{25} + \sqrt{4}) \cdot \sqrt{100}$;

☞ -50

c) $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} - \sqrt{5}$;

☞ $3 - 2\sqrt{5}$

d) $\sqrt{(5 + \sqrt{6})^2} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$.

☞ 6

 Lời giải.

Ta có

$$a) \sqrt{16} \cdot \sqrt{625} - 5\sqrt{81} = 4 \cdot 25 - 5 \cdot 9 = 55.$$

$$b) (-35 : \sqrt{25} + \sqrt{4}) \cdot \sqrt{100} = (-35 : 5 + 2) \cdot 10 = -50.$$

$$c) \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5} - 3| - \sqrt{5} = 3 - \sqrt{5} - \sqrt{5} = 3 - 2\sqrt{5}.$$

$$d) \sqrt{(5 + \sqrt{6})^2} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(5 + \sqrt{6})^2} - \sqrt{(\sqrt{6} - 1)^2} = |5 + \sqrt{6}| - |\sqrt{6} - 1| \\ = 5 + \sqrt{6} - (\sqrt{6} - 1) = 6.$$

□

 Bài 4. Chứng minh

$$a) (3 - \sqrt{11})^2 = 20 - 6\sqrt{11}; \quad b) \sqrt{7} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}} = 2; \quad c) \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = -2.$$

 Lời giải.

$$a) \text{ Chú ý rằng } VT = (3 - \sqrt{11})^2 = 9 - 6\sqrt{11} + 11 = 20 - 6\sqrt{11} = VP \text{ (ĐPCM).}$$

$$b) \text{ Ta có } VT = \sqrt{7} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}} = \sqrt{7} - \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} = \sqrt{7} - |\sqrt{7} - 2| = \sqrt{7} - (\sqrt{7} - 2) = 2 = VP.$$

c) Ta có

$$VT = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = |1 - \sqrt{5}| - |1 + \sqrt{5}| \\ = \sqrt{5} - 1 - (1 + \sqrt{5}) = -2 = VP.$$

□

 Bài 5. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

$$a) \sqrt{-2a}; \quad \text{a) } \sqrt{5a}; \quad c) \sqrt{9 - 2a}; \quad d) \sqrt{7 + 3a}.$$

 Lời giải.

$$a) \text{ Căn thức có nghĩa khi } -2a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0. \quad b) \text{ Căn thức có nghĩa khi } 5a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0.$$

$$c) \text{ Căn thức có nghĩa khi } 9 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{9}{2}. \quad d) \text{ Căn thức có nghĩa khi } 7 + 3a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{7}{3}.$$

□

 Bài 6. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{1}{x+2}};$

$\text{đ} x > -2$

b) $\sqrt{\frac{7}{7-x}};$

$\text{đ} x < 7$

c) $\sqrt{\frac{1+3x}{x^2+2}};$

$\text{đ} x \geq \frac{1}{3}$

d) $\sqrt{\frac{x-2}{x^2-2x+3}}.$

$\text{đ} x \geq 2$

Lời giải.

a) Căn thức có nghĩa khi $\frac{1}{x+2} \geq 0$. Vì $1 > 0$ nên $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

b) Căn thức có nghĩa khi $\frac{7}{7-x} \geq 0$. Vì $7 > 0$ nên $7-x > 0 \Leftrightarrow x < 7$.

c) Căn thức có nghĩa khi $\frac{1+3x}{x^2+2} \geq 0$. Vì $x^2 > 0$ nên $1+3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

d) Căn thức có nghĩa khi $\frac{x-2}{x^2-2x+3} \geq 0$. Vì $x^2-2x+3 > 0$ nên $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

□

❖ Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$;

$\text{đ} 2a$

b) $\sqrt{9a^2} + 3a$ với $a < 0$;

$\text{đ} 0$

c) $\sqrt{a^4} - a^2$;

$\text{đ} 0$

d) $\sqrt{16a^6} - 4a^3$ với $a < 0$.

$\text{đ} -8a^3$

Lời giải.

a) $2\sqrt{a^2} = 2|a| = 2a$ (Vì $a \geq 0$ nên $|a| = a$).

b) $\sqrt{9a^2} + 3a = 3|a| + 3a = -3a + 3a = 0$ (Vì $a < 0$ nên $|a| = -a$).

c) $\sqrt{a^4} - a^2 = a^2 - a^2 = 0$.

d) $\sqrt{16a^6} - 4a^3 = 4|a^3| - 4a^3 = -4a^3 - 4a^3 = -8a^3$ (Vì $a < 0$ nên $|a| = -a$).

□

❖ Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(a-2)^2}$ với $a \geq 2$;

$\text{đ} a-2$

b) $\sqrt{(1-a)^2} + a$ với $a < 1$;

$\text{đ} 1$

c) $\sqrt{a^2+4a+4}$ với $a \geq -2$;

$\text{đ} a+2$

d) $\sqrt{16a^2-8a+1} + 4a$ với $a < \frac{1}{4}$.

$\text{đ} 1$

Lời giải.

a) $\sqrt{(a-2)^2} = |a-2| = a-2$ (Vì $a \geq 2$ nên $|a-2| = a-2$).

b) $\sqrt{(1-a)^2} + a = |1-a| + a = 1-a+a = 1$ (Vì $a < 1$ nên $|1-a| = 1-a$).

c) $\sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = |a+2| = a+2$ (Vì $a \geq -2$ nên $|a+2| = a+2$).

$$d) \sqrt{16a^2 - 8a + 1} + 4a = \sqrt{(4a - 1)^2} + 4a = |4a - 1| + 4a = 1 - 4a + 4a = 1$$

(Vì $a < \frac{1}{4}$ nên $|4a - 1| = 1 - 4a$).

□

❖ **Bài 9.** Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - 13$; b) $4x^2 - 2$; c) $x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$; d) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $x^2 - 13 = x^2 - (\sqrt{13})^2 = (x + \sqrt{13})(x - \sqrt{13})$.

b) Biến đổi tương tự ta được $4x^2 - 2 = (2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2})$.

c) Chú ý rằng $x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = x^2 + 2\sqrt{5}x + (\sqrt{5})^2 = (x + \sqrt{5})^2$.

d) Tương tự $x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = (x + \sqrt{3})^2$.

□

❖ **Bài 10.** Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 2 = 0$; $\text{☞ } x = \pm\sqrt{2}$ b) $16x^2 - 7 = 0$; $\text{☞ } x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 0$; $\text{☞ } x = -\sqrt{13}$ d) $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$. $\text{☞ } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

💬 **Lời giải.**

a) $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

b) $16x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{16} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{13})^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{13}$.

d) $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

□

❖ **Bài 11.** Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2} = 3$; $\text{☞ } x = \pm 3$ b) $\sqrt{9x^2} = 5$; $\text{☞ } x = \pm\frac{5}{3}$

c) $\sqrt{4x^2} - 5 = 0$; $\text{☞ } x = \pm\frac{5}{2}$ d) $\sqrt{169x^2} = |-4|$; $\text{☞ } x = \pm\frac{4}{13}$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{x^2} = 3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

b) $\sqrt{9x^2} = 5 \Leftrightarrow |3x| = 5 \Leftrightarrow x = \pm\frac{5}{3}$.

$$c) \sqrt{4x^2} - 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(2x)^2} = 5 \Leftrightarrow |2x| = 5 \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{2}.$$

$$d) \sqrt{169x^2} = |-4| \Leftrightarrow |13x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{13}.$$

□

✧ **Bài 12.** Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{(x+2)^2} = 2;$$

$$S = \{0; 4\}$$

$$b) \sqrt{4-4x+x^2} = 3;$$

$$S = \{-1; 5\}$$

$$c) \sqrt{x^2-4x+4} = 3+x;$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$d) \sqrt{9x^2+6x+1} = x-1.$$

$$S = \emptyset$$

💬 **Lời giải.**

$$a) \sqrt{(x-2)^2} = 2 \Leftrightarrow |x-2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{0; 4\}.$$

$$b) \sqrt{4-4x+x^2} = 3 \Leftrightarrow |x-2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{-1; 5\}.$$

c) ĐK: $3+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$. Chú ý rằng:

$$\sqrt{x^2-4x+4} = 3+x \Leftrightarrow |x-2| = 3+x \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3+x \\ x-2 = -3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x = 5 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (TMĐK)}.$$

$$\text{Vậy } x = -\frac{1}{2}.$$

d) ĐK: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ Ta có:

$$\sqrt{9x^2-6x+1} = x-1 \Leftrightarrow |3x-1| = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 = x-1 \\ 3x-1 = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (KTM)}$$

$$\text{Vậy } S = \emptyset.$$

□

BÀI 3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định lý 3.1.** Với $a \geq 0, b \geq 0$, ta có: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Ví dụ 1. $\sqrt{100 \cdot 49} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{49} = 10 \cdot 7 = 70$.

! Với $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$, ta có: $\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{a_n}$.

2. Áp dụng

2.1 Quy tắc khai phương một tích

Muốn khai phương một tích các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

Ví dụ 2.

$$\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 0,25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{0,25} = 2 \cdot 3 \cdot 0,5 = 3.$$

$$\sqrt{27 \cdot 6 \cdot 2} = \sqrt{27 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2 = 18.$$

2.2 Quy tắc nhân các căn bậc hai

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó

Ví dụ 3.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10.$$

$$\sqrt{8,1} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{8,1 \cdot 10} = \sqrt{81} = 9.$$

! Với $A \geq 0, B \geq 0$, ta có $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

Với $A \geq 0$, ta có $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$.

Ví dụ 4.

$$\sqrt{0,25 \cdot a^2} = \sqrt{0,25} \sqrt{a^2} = 0,5 \cdot |a|.$$

$$\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a} = \sqrt{16a^2} = \sqrt{(4a)^2} = |2a| = 2a \text{ với } a \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}a^4} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a^2\right)^2} = \left|\frac{2}{3}a^2\right| = \frac{2}{3}a^2.$$

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính

Áp dụng quy tắc khai phương một tích và quy tắc nhân các căn bậc hai để tính

Ví dụ 5. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{36 \cdot 0,81}$;

? 5,4

b) $\sqrt{49 \cdot \frac{64}{625}}$;

? $\frac{56}{25}$

c) $\sqrt{8 \cdot 11 \cdot 22}$;

? 44

d) $\sqrt{5^4 \cdot (-13)^2}$.

? 325

! Lời giải.

- a) $\sqrt{36 \cdot 0,81} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{0,81} = 6 \cdot 0,9 = 5,4;$
 b) $\sqrt{49 \cdot \frac{64}{625}} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{\frac{64}{625}} = 7 \cdot \frac{8}{25} = \frac{56}{25};$
 c) $\sqrt{8 \cdot 11 \cdot 22} = \sqrt{4 \cdot 22^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{22^2} = 2 \cdot 22 = 44;$
 d) $\sqrt{5^4 \cdot (-13)^2} = \sqrt{5^4} \cdot \sqrt{13^2} = 25 \cdot 13 = 325.$

□

✎ **Ví dụ 6.** Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

- a) $\sqrt{0,04 \cdot 256};$ 🔍 3,2 b) $\sqrt{4 \cdot \frac{144}{81}};$ 🔍 $\frac{8}{3}$
 c) $\sqrt{7 \cdot 63};$ 🔍 21 d) $\sqrt{3^4 \cdot (-4)^2}.$ 🔍 36

💬 **Lời giải.**

- a) $\sqrt{0,04 \cdot 256} = \sqrt{0,04} \cdot \sqrt{256} = 0,2 \cdot 16 = 3,2;$ b) $\sqrt{4 \cdot \frac{144}{81}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{144}{81}} = 2 \cdot \frac{12}{9} = \frac{8}{3};$
 c) $\sqrt{7 \cdot 63} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 9} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{9} = 7 \cdot 3 = 21;$ d) $\sqrt{3^4 \cdot (-4)^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{4^2} = 9 \cdot 4 = 36.$

□

✎ **Ví dụ 7.** Biến đổi biểu thức dưới dấu căn rồi tính:

- a) $\sqrt{65^2 - 16^2};$ 🔍 63 b) $\sqrt{29^2 - 20^2};$ 🔍 21
 c) $\sqrt{20^2 - 16^2};$ 🔍 12 d) $\sqrt{50^2 - 14^2}.$ 🔍 48

💬 **Lời giải.**

- a) $\sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{81 \cdot 49} = 9 \cdot 7 = 63;$ b) $\sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{9 \cdot 49} = 3 \cdot 7 = 21;$
 c) $\sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{36 \cdot 4} = 6 \cdot 2 = 12;$ d) $\sqrt{50^2 - 14^2} = \sqrt{64 \cdot 36} = 8 \cdot 6 = 48.$

□

✎ **Ví dụ 8.** Biến đổi biểu thức dưới dấu căn rồi tính:

- a) $\sqrt{10^2 - 6^2};$ 🔍 8 b) $\sqrt{26^2 - 10^2};$ 🔍 24
 c) $\sqrt{17^2 - 8^2};$ 🔍 15 d) $\sqrt{25^2 - 24^2}.$ 🔍 7

💬 **Lời giải.**

- a) $\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{4 \cdot 16} = 2 \cdot 4 = 8;$ b) $\sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24;$
 c) $\sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15;$ d) $\sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{1 \cdot 49} = 2 \cdot 7 = 7.$

□

✎ **Ví dụ 9.** Áp dụng quy tắc nhân các căn thức bậc hai, hãy tính:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{80}$;

🔍 20

b) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{32}$;

🔍 24

c) $\sqrt{3,6} \cdot \sqrt{8,1}$;

🔍 5,4

d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{0,5}$.

🔍 4,5

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{80} = \sqrt{5 \cdot 80} = \sqrt{400} = 20$;

b) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{0,9 \cdot 20 \cdot 32} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16} = 24$;

c) $\sqrt{3,6} \cdot \sqrt{8,1} = \sqrt{\frac{36}{10}} \cdot \sqrt{\frac{81}{10}} = \frac{6 \cdot 9}{10} = 5,4$;

d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{0,5} = \sqrt{2,7 \cdot 15 \cdot 0,5} = \sqrt{0,27 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} = 4,5$.

□

💡 Ví dụ 10. Áp dụng quy tắc nhân các căn thức bậc hai, hãy tính:

a) $\sqrt{17} \cdot \sqrt{68}$;

🔍 34

b) $\sqrt{1,6} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{18}$;

🔍 24

c) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{2,5}$;

🔍 1,5

d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1,8}$.

🔍 5,4

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{17} \cdot \sqrt{68} = \sqrt{17 \cdot 68} = \sqrt{324} = 18$;

b) $\sqrt{1,6} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{1,6 \cdot 20 \cdot 18} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24$;

c) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{2,5} = \sqrt{0,9 \cdot 2,5} = \sqrt{2,25} = 1,5$;

d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1,8} = \sqrt{2,7 \cdot 6 \cdot 1,8} = \sqrt{5,4}$.

□

💡 Ví dụ 11. Tính giá trị biểu thức:

a) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{169} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$;

🔍 50

b) $(\sqrt{27} - \sqrt{243} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}$.

🔍 -21

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{169} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = 5 \cdot 13 - \sqrt{225} = 65 - 15 = 50$;

b) $(\sqrt{27} - \sqrt{243} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = (3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - \sqrt{3})\sqrt{3} = -21$.

□

💡 Ví dụ 12. Tính giá trị biểu thức:

a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{49} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$;

🔍 42

b) $(\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}) \cdot \sqrt{2}$.

🔍 2

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{49} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{28} = 4 \cdot 7 + \sqrt{196} = 28 + 14 = 42$;

b) $(\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}) \cdot \sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 2$.

□

Dạng 2. Rút gọn biểu thức

Áp dụng quy tắc khai phương một tích và quy tắc nhân các căn bậc hai để rút gọn.

🔗 **Ví dụ 13.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{0,81a^2}$ với $a \geq 0$; $\text{Đ} -0,9a$ b) $\sqrt{32 \cdot 50(3-a)^2}$ với $a \leq 3$; $\text{Đ} 40(3-a)$
- c) $\sqrt{\frac{4}{9}a^4(a-5)^2}$ với $a < 5$; $\text{Đ} \frac{2}{3}a^2(5-a)$ d) $\frac{1}{a-3}\sqrt{4a^4(a-3)^2}$ với $a > 3$; $\text{Đ} 2a^2$
- e) $\sqrt{2,25(9-6a+a^2)}$ với $a < 3$. $\text{Đ} 1,5(3-a)$

💬 **Lời giải.**

- a) $\sqrt{0,81a^2} = \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{a^2} = 0,9 \cdot |a| = -0,9a$ vì $a \leq 0$;
- b) $\sqrt{32 \cdot 50(3-a)^2} = \sqrt{16 \cdot 4 \cdot 25 \cdot (3-a)^2} = 40|3-a| = 40(3-a)$;
- c) $\sqrt{\frac{4}{9}a^4(a-5)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{(a-5)^2} = \frac{2}{3}a^2|a-5| = \frac{2}{3}a^2(5-a)$;
- d) $\frac{1}{a-3}\sqrt{4a^4(a-3)^2} = \frac{1}{a-3} \cdot 2a^2 \cdot |a-3| = \frac{2a^2}{a-3} \cdot (a-3) = 2a^2$;
- e) $\sqrt{2,25(9-6a+a^2)} = \sqrt{2,25 \cdot (a-3)^2} = 1,5|a-3| = 1,5(3-a)$ (vì $a < 3$).

□

🔗 **Ví dụ 14.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{1,44a^2}$ với $a < 0$; $\text{Đ} -1,2a$ b) $\sqrt{\frac{9}{25}a^4(a-1)^2}$ với $a < 1$; $\text{Đ} \frac{3}{5}a^2(1-a)$
- c) $\sqrt{48 \cdot 27(2-a)^2}$ với $a \leq 2$; $\text{Đ} 36(2-a)$ d) $\frac{1}{a+1}\sqrt{4a^4(a+1)^2}$ với $a > -1$; $\text{Đ} 2a^2$
- e) $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$ với $a \geq -1$. $\text{Đ} a+1$

💬 **Lời giải.**

- a) $\sqrt{1,44a^2} = \sqrt{1,44} \cdot \sqrt{a^2} = -1,2a$;
- b) $\sqrt{\frac{9}{25}a^4(a-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{(a-1)^2} = \frac{3}{5}a^2(1-a)$;
- c) $\sqrt{48 \cdot 27(2-a)^2} = \sqrt{16 \cdot 81 \cdot (2-a)^2} = 4 \cdot 9 \cdot |2-a| = 36(2-a)$;
- d) $\frac{1}{a+1}\sqrt{4a^4(a+1)^2} = \frac{1}{a+1} \cdot 2a^2 \cdot |a+1| = \frac{2a^2}{a+1} \cdot (a+1) = 2a^2$;
- e) $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2} = a+1$ do $a \geq -1$.

□

🔗 **Ví dụ 15.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{3,6a} \cdot \sqrt{10a}$ với $a \geq 0$;

🔗 6a

b) $\sqrt{-63a} \cdot \sqrt{-28a}$ với $a < 0$;

🔗 -42a

c) $\sqrt{14a} \cdot \sqrt{56a} - 19a$ với $a \geq 0$;

🔗 9a

d) $\sqrt{7a} \cdot \sqrt{\frac{9}{28a}}$ với $a > 0$.

🔗 $\frac{3}{2}$

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{3,6a} \cdot \sqrt{10a} = \sqrt{36a^2} = 6|a| = 6a$;

b) $\sqrt{-63a} \cdot \sqrt{-28a} = \sqrt{9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2} = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot |a| = -42a$;

c) $\sqrt{14a} \cdot \sqrt{56a} - 19a = \sqrt{28^2 \cdot a^2} = 28|a| - 19a = 28a - 19a = 9a$;

d) $\sqrt{7a} \cdot \sqrt{\frac{9}{28a}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

□

💡 Ví dụ 16. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{0,4a} \cdot \sqrt{40a}$ với $a \geq 0$;

🔗 4a

b) $\sqrt{-27a} \cdot \sqrt{-3a}$ với $a < 0$;

🔗 -9a

c) $\sqrt{27a} \cdot \sqrt{75a} - 10a$ với $a \geq 0$;

🔗 35a

d) $\sqrt{13a} \cdot \sqrt{\frac{1}{52a}}$ với $a > 0$.

🔗 $\frac{1}{2}$

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{0,4a} \cdot \sqrt{40a} = \sqrt{0,4a \cdot 40a} = \sqrt{16a^2} = 4a$;

b) $\sqrt{-27a} \cdot \sqrt{-3a} = \sqrt{81a^2} = -9a$;

c) $\sqrt{27a} \cdot \sqrt{75a} - 10a = \sqrt{3^3 a \cdot 3 \cdot 25a} - 10a = \sqrt{3^4 \cdot 25a^2} - 10a = 45a - 10a = 35a$;

d) $\sqrt{13a} \cdot \sqrt{\frac{1}{52a}} = \sqrt{16a \cdot \frac{1}{52a}} = \frac{1}{2}$.

□

💡 Ví dụ 17. Rút gọn rồi tìm giá trị của các căn thức sau:

a) $A = \sqrt{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ tại $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

🔗 $3 + \sqrt{2}$

b) $B = \sqrt{\frac{4}{9}(x^2 - 4x + 4)^2}$ tại $x = -\sqrt{3}$.

🔗 $\frac{2}{3}(7 + 4\sqrt{3})$

💬 Lời giải.

a) $A = \sqrt{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \sqrt{(2x + 1)^4} = (2x + 1)^2$. Thay $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ta có $A = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

b) $B = \sqrt{\frac{4}{9}(x^2 - 4x + 4)^2} = \frac{2}{3}(x - 2)^2$. Thay $x = -\sqrt{3}$, ta có $B = \frac{2}{3}(-\sqrt{3} - 2)^2 = \frac{2}{3}(7 + 4\sqrt{3})$.

□

💡 Ví dụ 18. Rút gọn rồi tìm giá trị của các căn thức sau:

a) $C = \sqrt{(x^2 + 2x + 1)^2}$ tại $x = \sqrt{2}$;

$\text{Đ} 3 + 2\sqrt{2}$

b) $D = \sqrt{\frac{1}{16}(x^2 - 2x + 1)^2}$ tại $x = -\sqrt{3}$.

$\text{Đ} \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

Lời giải.

a) $C = \sqrt{(x^2 + 2x + 1)^2} = \sqrt{(x + 1)^4} = (x + 1)^2$. Thay $x = \sqrt{2}$, ta có $C = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$;

b) $D = \sqrt{\frac{1}{16}(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{1}{4}(x - 1)^2$. Thay $x = -\sqrt{3}$, ta có $D = \frac{1}{4}(-\sqrt{3} + 1)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

□

Dạng 3. Giải phương trình

☑ Tìm Điều kiện xác định;

☑ Áp dụng quy tắc khai phương một tích;

☑ Chú ý một số biến đổi sau:

1) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$;

2) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$.

VD 19. Tìm x , biết:

a) $\sqrt{25x} = 10$;

 $\text{Đ} 4$

b) $\sqrt{-6x} = \sqrt{5}$;

$\text{Đ} \frac{5}{6}$

c) $\sqrt{16(x - 5)} = 28$;

 $\text{Đ} 54$

d) $\sqrt{9(3 - x)^2} - 6 = 0$.

$\text{Đ} -1$

Lời giải.

a) ĐKXD: $x \geq 0$.

Ta có $25x = 10 \Leftrightarrow 25x = 100 \Leftrightarrow x = 4$ (TMDK). Vậy $S = \{4\}$.

b) ĐKXD: $x \leq 0$.

Ta có $\sqrt{-6x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow -6x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}$. Vậy $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$.

c) ĐKXD: $x \geq 5$.

Ta có $\sqrt{16(x - 5)} = 28 \Leftrightarrow 16(x - 5) = 784 \Leftrightarrow x - 5 = 49 \Leftrightarrow x = 54$. Vậy $S = \{54\}$.

d) ĐKXD: $x \leq 3$.

Ta có $\sqrt{9(3 - x)^2} - 6 = 0 \Leftrightarrow 9(3 - x)^2 = 36 \Leftrightarrow 3 - x = 4 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy $S = \{-1\}$.

□

VD 20. Tìm x , biết:

a) $\sqrt{4x} = 2$;

 $\text{Đ} 1$

b) $\sqrt{-9x} = \sqrt{33}$;

$\text{Đ} \frac{-33}{9}$

c) $\sqrt{25(x - 5)} = 5$;

 $\text{Đ} 6$

d) $\sqrt{(2 - x)^2} - 3 = 0$.

$\text{Đ} 1; -5$

Lời giải.

a) ĐKXD: $x \geq 0$.

Ta có $\sqrt{4x} = 2 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $S = \{1\}$.

b) ĐKXD: $x \leq 0$.

Ta có $\sqrt{-9x} = \sqrt{33} \Leftrightarrow -9x = 33 \Leftrightarrow x = \frac{-33}{9}$. Vậy $S = \left\{\frac{-33}{9}\right\}$.

c) ĐKXD: $x \geq 5$.

Ta có $\sqrt{25(x-5)} = 5 \Leftrightarrow 25(x-5) = 25 \Leftrightarrow x = 6$. Vậy $S = \{6\}$.

d) ĐKXD: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\sqrt{(2-x)^2-3} = 0 \Leftrightarrow (2-x)^2 = 3 \Leftrightarrow (2-x)^2 = 9 \Leftrightarrow 4-4x+x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2+4x-5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5. \end{cases}$$

Vậy $S = \{1; -5\}$.



C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

🔗 **Bài 1.** Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{121 \cdot 0,64}$;

🔗 8,8

b) $\sqrt{144 \cdot \frac{16}{169}}$;

🔗 $\frac{48}{13}$

c) $\sqrt{13 \cdot 52}$;

🔗 26

d) $\sqrt{7^4 \cdot (-12)^2}$.

🔗 588

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{121 \cdot 0,64} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{0,64} = 11 \cdot 0,8 = 8,8$;

b) $\sqrt{144 \cdot \frac{16}{169}} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{\frac{16}{169}} = 12 \cdot \frac{4}{13} = \frac{48}{13}$;

c) $\sqrt{13 \cdot 52} = \sqrt{13 \cdot 13 \cdot 4} = 13 \cdot 2 = 26$;

d) $\sqrt{7^4 \cdot (-12)^2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{12^2} = 7^2 \cdot 12 = 588$.



🔗 **Bài 2.** Biến đổi các biểu thức dưới căn rồi tính:

a) $\sqrt{104^2 - 40^2}$;

🔗 96

b) $\sqrt{40^2 - 24^2}$;

🔗 32

c) $\sqrt{53^2 - 28^2}$;

🔗 45

d) $\sqrt{45^2 - 36^2}$.

🔗 27

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{104^2 - 40^2} = \sqrt{64 \cdot 144} = 8 \cdot 12 = 96$;

b) $\sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{16 \cdot 64} = 4 \cdot 8 = 32$;

c) $\sqrt{53^2 - 28^2} = \sqrt{25 \cdot 81} = 5 \cdot 9 = 45$;

d) $\sqrt{45^2 - 36^2} = \sqrt{9 \cdot 81} = 3 \cdot 9 = 27$.



🔗 **Bài 3.** Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$;

🔗 15

b) $\sqrt{3,6} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{5}$;

🔗 3,6

c) $\sqrt{4,9} \cdot \sqrt{3,6}$;

🔗 4,2

d) $\sqrt{4,8} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2,5}$.

🔗 6

🗨️ Lời giải.

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 75} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$; b) $\sqrt{3,6} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{36 \cdot 5 \cdot 5} = 6 \cdot 5 = 30$;
 c) $\sqrt{4,9} \cdot \sqrt{3,6} = \sqrt{4,9 \cdot 3,6} = 4,2$; d) $\sqrt{4,8} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2,5} = \sqrt{4,8 \cdot 3 \cdot 2,5} = \sqrt{36} = 6$.

□

🔗 Bài 4. Tính giá trị biểu thức:

- a) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{49} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$; 46 b) $(\sqrt{6} + \sqrt{96} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6}$. 18

🗨️ Lời giải.

- a) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{49} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = 3 \cdot 7 + \sqrt{5 \cdot 125} = 21 + 25 = 46$;
 b) $(\sqrt{6} + \sqrt{96} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6} = (\sqrt{6} + \sqrt{6 \cdot 16} - \sqrt{4 \cdot 6}) \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 18$.

□

🔗 Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{2,25a^2}$ với $a < 0$; -1,5a b) $\sqrt{a^4(a-2)^2}$ với $a < 2$; 16(2-a)
 c) $\sqrt{8 \cdot 32(2-a)^2}$ với $a \leq 2$ 16(2-a) d) $\frac{1}{a+2} \sqrt{a^4(a+2)^2}$ với $a > -2$; a²
 e) $\sqrt{6,25(a^2-4a+4)}$ với $a < 2$. 2,5(2-a)

🗨️ Lời giải.

- a) $\sqrt{2,25a^2} = \sqrt{2,25} \cdot \sqrt{a} = -1,5a$;
 b) $\sqrt{a^4(a-2)^2} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{(a-2)^2} = a^2(2-a)$;
 c) $\sqrt{8 \cdot 32(2-a)^2} = \sqrt{16^2} \sqrt{(2-a)^2} = 16(2-a)$;
 d) $\frac{1}{a+2} \sqrt{a^4(a+2)^2} = \frac{1}{a+2} \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{(a+2)^2} = \frac{a^2(a+2)}{a+2} = a^2$;
 e) $\sqrt{6,25(a^2-4a+4)} = \sqrt{6,25} \cdot \sqrt{(a-2)^2} = 2,5(2-a)$.

□

🔗 Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{4,9a} \cdot \sqrt{10a}$ với $a \geq 0$; 7a b) $\sqrt{-2a} \cdot \sqrt{-8a}$ với $a < 0$; -4a
 c) $\sqrt{12a} \cdot \sqrt{27a} - 18a$ với $a \geq 0$; 0 d) $\sqrt{6a} \cdot \sqrt{\frac{25}{24a}}$ với $a > 0$. $\frac{5}{2}$

🗨️ Lời giải.

- a) $\sqrt{4,9a} \cdot \sqrt{10a} = \sqrt{49a^2} = 7a$;
 b) $\sqrt{-2a} \cdot \sqrt{-8a} = \sqrt{16a^2} = -4a$;

$$c) \sqrt{12a} \cdot \sqrt{27a} - 18a = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 27a^2} - 18a = 18a = 0;$$

$$d) \sqrt{6a} \cdot \sqrt{\frac{25}{24a}} = \sqrt{4a \cdot \frac{25}{24a}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

□

✧ **Bài 7.** Rút gọn rồi tìm giá trị các căn thức sau:

$$a) \sqrt{(9x^2 + 6x + 1)^2} \text{ tại } x = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{A} \quad 4 + 2\sqrt{3}$$

$$b) \sqrt{\frac{4}{25}(x^2 - 6x + 9)^2} \text{ tại } x = -\sqrt{5}.$$

$$\text{B} \quad 14 + 6\sqrt{5}$$

💬 **Lời giải.**

$$a) A = \sqrt{(9x^2 + 6x + 1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{(3x + 1)^2}. \text{ Thay } x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ ta được } A = 4 + 2\sqrt{3}.$$

$$b) B = \sqrt{\frac{4}{25}(x^2 - 6x + 9)^2} = \frac{2}{5}\sqrt{(x - 3)^2}. \text{ Thay } x = -\sqrt{5}, \text{ ta được } B = 14 + 6\sqrt{5}.$$

□

✧ **Bài 8.** Tìm x , biết:

$$a) \sqrt{81x} = 18;$$

$$\text{A} \quad 4$$

$$b) \sqrt{-3x} = 27;$$

$$\text{B} \quad -243$$

$$c) \sqrt{36(x - 5)} = 24;$$

$$\text{C} \quad 21$$

$$d) \sqrt{64(1 - x)^2} - 8 = 0.$$

$$\text{D} \quad 0 \text{ hoặc } 2$$

💬 **Lời giải.**

$$a) \text{ĐKXD: } x \geq 0.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{81x} = 18 \Leftrightarrow 81x = 324 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$b) \text{ĐKXD } x \leq 0.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{-3x} = 27 \Leftrightarrow -3x = 729 \Leftrightarrow x = -243.$$

$$c) \text{ĐKXD } x \geq 5.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{36(x - 5)} = 24 \Leftrightarrow 36(x - 5) = 576 \Leftrightarrow x - 5 = 16 \Leftrightarrow x = 21.$$

$$d) \text{ĐKXD } x \leq 1.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{64(1 - x)^2} - 8 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{64(1 - x)^2} = 8 \Leftrightarrow 64(x^2 - 2x + 1) = 64 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

□

✧ **Bài 9.**

$$a) \sqrt{x^2 - 4x + 7} = 5 - x;$$

$$\text{A} \quad 3$$

$$b) \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{2 - 2x}.$$

$$\text{B} \quad -5 \text{ hoặc } 1$$

💬 **Lời giải.**

$$a) \text{ĐKXD } x \leq 5.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 - 4x + 7} = 5 - x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$b) \text{ĐKXD } x \leq 1.$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{2 - 2x} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 2 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5. \end{cases}$$

□

BÀI 4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định lý 4.1.** Với $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Ví dụ 1. $\sqrt{\frac{100}{49}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}} = \frac{10}{7}$.

2. Áp dụng

2.1 Quy tắc khai phương một thương

Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó số a không âm và số b dương, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b , rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

Ví dụ 2.

$$\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{121}} = \frac{6}{11};$$

$$\sqrt{\frac{16}{25} : \frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{16}{25} : \frac{4}{81}} = \frac{4}{5} : \frac{2}{9} = \frac{18}{5};$$

$$\sqrt{0,0144} = \sqrt{\frac{144}{10000}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}.$$

2.2 Quy tắc chia căn bậc 2

Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

Ví dụ 3.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{2}{50}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5};$$

$$\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16} : \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{5}{9}$$

$$\sqrt{8,1a} : \sqrt{10a} = \sqrt{(8,1a) : (10a)} = \sqrt{0,81} = 0,9 \text{ với } a > 0$$

! Với $A \geq 0, B > 0$, ta có $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính

Áp dụng quy tắc khai phương một thương và quy tắc chia căn bậc hai để tính.

Ví dụ 4. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{0,81 : 0,36}$;

$\frac{3}{2}$

b) $\sqrt{49 : \frac{64}{25}}$;

$\frac{35}{8}$

c) $\sqrt{\frac{49}{81}}$;

$\frac{7}{9}$

d) $\sqrt{1\frac{23}{121}}$.

$\frac{12}{11}$

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{0,81 : 0,36} &= \sqrt{0,81} : \sqrt{0,36} = 0,9 : 0,6 = \frac{3}{2} & \text{b) } \sqrt{49 : \frac{64}{25}} &= \sqrt{49} : \sqrt{\frac{64}{25}} = 7 : \frac{8}{5} = \frac{35}{8}; \\ \text{c) } \sqrt{\frac{49}{81}} &= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}; & \text{d) } \sqrt{1\frac{23}{121}} &= \sqrt{\frac{144}{121}} = \frac{12}{11}. \end{aligned}$$

□

🔗 **Ví dụ 5.** Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{0,04 : 2,56}; & \quad \text{b) } \sqrt{4 : \frac{64}{81}}; & \text{c) } \sqrt{\frac{16}{25}}; & \quad \text{d) } \sqrt{1\frac{15}{49}}. \end{aligned}$$

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{0,04 : 2,56} &= \sqrt{0,04} : \sqrt{2,56} = 0,2 : 1,6 = \frac{1}{8} & \text{b) } \sqrt{4 : \frac{64}{81}} &= \sqrt{4} : \sqrt{\frac{64}{81}} = 2 : \frac{8}{3} = \frac{3}{2}; \\ \text{c) } \sqrt{\frac{16}{25}} &= \frac{4}{5}; & \text{d) } \sqrt{1\frac{15}{49}} &= \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

□

🔗 **Ví dụ 6.** Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn rồi tính:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{26^2 - 17^2}{688}}; \quad \text{b) } \sqrt{\frac{7^2 - 3^2}{32}}.$$

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{a) } \sqrt{\frac{26^2 - 17^2}{688}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 46}{688}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}; \quad \text{b) } \sqrt{\frac{7^2 - 3^2}{32}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{32}} = \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

□

🔗 **Ví dụ 7.** Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn rồi tính:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}; \quad \text{b) } \sqrt{\frac{125^2 - 61^2}{101^2 - 85^2}}.$$

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} &= \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} = \sqrt{\frac{225}{841}} = \frac{15}{29}; \\ \text{b) } \sqrt{\frac{125^2 - 61^2}{101^2 - 85^2}} &= \sqrt{\frac{64 \cdot 186}{16 \cdot 186}} = \sqrt{\frac{64}{16}} = 2. \end{aligned}$$



❖ **Ví dụ 8.** Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính:

a) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}};$

☞ 0,4

b) $\frac{\sqrt{12,1}}{\sqrt{22,5}};$

☞ $\frac{11}{25}$

c) $\frac{\sqrt{170}}{\sqrt{1,7}};$

☞ 10

d) $\frac{\sqrt{12^3}}{\sqrt{3^3 \cdot 2^2}}.$

☞ 4

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{0,16} = 0,4;$

b) $\frac{\sqrt{12,1}}{\sqrt{22,5}} = \sqrt{\frac{12,1}{22,5}} = \sqrt{\frac{121}{225}} = \frac{11}{25};$

c) $\frac{\sqrt{170}}{\sqrt{1,7}} = \sqrt{\frac{170}{1,7}} = 10;$

d) $\frac{\sqrt{12^3}}{\sqrt{3^3 \cdot 2^2}} = \sqrt{\frac{12^3}{3^3 \cdot 2^2}} = \sqrt{2^4} = 4.$



❖ **Ví dụ 9.** Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính:

a) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}};$

☞ $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{0,03}}{\sqrt{0,27}};$

☞ $\frac{1}{3}$

c) $\frac{\sqrt{470}}{\sqrt{4,7}};$

☞ 10

d) $\frac{\sqrt{10^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 5}}.$

☞ 50

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{5}{80}} = \frac{1}{4};$

b) $\frac{\sqrt{0,03}}{\sqrt{0,27}} = \sqrt{\frac{0,03}{0,27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3};$

c) $\frac{\sqrt{470}}{\sqrt{4,7}} = \sqrt{100} = 10;$

d) $\frac{\sqrt{10^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{10^5}{2^3 \cdot 5}} = \sqrt{2500} = 50.$



❖ **Ví dụ 10.** Tính giá trị biểu thức

a) $\frac{\sqrt{16,9}}{\sqrt{2,5}} - \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}};$

☞ $-\frac{12}{5}$

b) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{27} - \sqrt{18} - \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}.$

☞ $-\sqrt{6}$

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{\sqrt{16,9}}{\sqrt{2,5}} - \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{16,9}{2,5}} - \sqrt{\frac{75}{3}} = \frac{13}{5} - 5 = -\frac{12}{5};$

b) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{27} - \sqrt{18} - \sqrt{3}\right) : \sqrt{3} = (\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{3}) : \sqrt{3} = \sqrt{-6}.$



❖ **Ví dụ 11.** Tính giá trị biểu thức

a) $\sqrt{\frac{49}{16}} + \frac{\sqrt{2,8}}{\sqrt{0,7}};$

☞ $\frac{15}{4}$

b) $(\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}) : \sqrt{2}.$

☞ 1

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{49}{16}} + \frac{\sqrt{2,8}}{\sqrt{0,7}} = \frac{7}{4} + \sqrt{\frac{2,8}{0,7}} = \frac{7}{4} + 2 = \frac{15}{4};$

b) $(\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}) : \sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 1.$



Dạng 2. Rút gọn biểu thức

Áp dụng quy tắc khai phương một thương và quy tắc chia hai căn thức bậc hai để rút gọn.

✎ **Ví dụ 12.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{9a^2}{16}}$ với $a \leq 0$;

☞ $-\frac{3}{4}a$

b) $\sqrt{\frac{(a-5)^2}{a^4}}$ với $a \geq 5$;

☞ $\frac{a-5}{a^2}$

c) $\frac{\sqrt{243a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$;

☞ 9

d) $\frac{\sqrt{32(3-a)^4}}{\sqrt{50(a-3)^2}}$ với $a < 3$.

☞ $\frac{4}{5}(3-a)$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{9a^2}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} \cdot \sqrt{a^2} = -\frac{3}{4}a$;

b) $\sqrt{\frac{(a-5)^2}{a^4}} = \frac{(a-5)^2}{a^4} = \frac{a-5}{a^2}$;

c) $\frac{\sqrt{243a}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{243}{3}} = \sqrt{81} = 9$;

d) $\frac{\sqrt{32(3-a)^4}}{\sqrt{50(a-3)^2}} = \sqrt{\frac{32(a-3)^4}{50(a-3)^2}} = \frac{4}{5}(3-a)$.

□

✎ **Ví dụ 13.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{25a^2}{49}}$ với $a \leq 0$;

☞ $-\frac{5}{7}a$

b) $\sqrt{\frac{(a+3)^2}{a^4}}$ với $a \leq -3$;

☞ $\frac{-(a+3)}{a^2}$

c) $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{50a}}$ với $a > 0$;

☞ $\frac{1}{5}$

d) $\frac{\sqrt{27(1-a)^2}}{\sqrt{48(a-1)^4}}$ với $a < 1$.

☞ $\frac{3}{4(1-a)}$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{25a^2}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} \sqrt{a^2} = -\frac{5}{7}a$;

b) $\sqrt{\frac{(a+3)^2}{a^4}} = \frac{\sqrt{(a+3)^2}}{\sqrt{a^4}} = \frac{-(a+3)}{a^2}$;

c) $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{50a}} = \sqrt{\frac{2a}{50a}} = \frac{1}{5}$;

d) $\frac{\sqrt{27(1-a)^2}}{\sqrt{48(a-1)^4}} = \sqrt{\frac{27(1-a)^2}{48(1-a)^4}} = \frac{3}{4(1-a)}$.

□

✎ **Ví dụ 14.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{81}{a^2}}$ với $a > 0$;

☞ $\frac{9}{a}$

b) $\sqrt{\frac{16}{49(a-3)^2}}$ với $a < 3$;

☞ $\frac{4}{7(3-a)}$

c) $\sqrt{\frac{16a^2}{(a-1)^2}}$ với $a > 1$;

☞ $\frac{4a}{a-1}$

d) $\sqrt{\frac{52a^2}{117(2-a)^4}}$ với $a < 0$;

☞ $\frac{-2a}{3(2-a)^2}$

e) $\sqrt{\frac{16}{9-6a+a^2}}$ với $a < 3$;

☞ $\frac{4}{3-a}$

f) $\sqrt{\frac{4a^2-4a+1}{a^2+2a+1}}$ với $a \geq \frac{1}{2}$.

☞ $\frac{2a-1}{a+1}$

💬 **Lời giải.**

$$a) \sqrt{\frac{81}{a^2}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{a^2}} = \frac{9}{a};$$

$$b) \sqrt{\frac{16}{49(a-3)^2}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49(3-a)^2}} = \frac{4}{7(3-a)};$$

$$c) \sqrt{\frac{16a^2}{(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{16a^2}}{\sqrt{(a-1)^2}} = \frac{4a}{a-1};$$

$$d) \sqrt{\frac{52a^2}{117(2-a)^4}} = \sqrt{\frac{4a^2}{9(2-a)^4}} = \frac{-2a}{3(2-a)^2};$$

$$e) \sqrt{\frac{16}{9-6a+a^2}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{(3-a)^2}} = \frac{4}{3-a};$$

$$f) \sqrt{\frac{4a^2-4a+1}{a^2+2a+1}} = \frac{\sqrt{(2a-1)^2}}{\sqrt{(a+1)^2}} = \frac{2a-1}{a+1}.$$

□

❖ Ví dụ 15. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{\frac{49}{a^2}} \text{ với } a > 0;$$

$$\text{☞ } \frac{7}{a}$$

$$b) \sqrt{\frac{9}{4(a+2)^2}} \text{ với } a < -2;$$

$$\text{☞ } -\frac{3}{2(a+2)}$$

$$c) \sqrt{\frac{4a^2}{25(a+1)^2}} \text{ với } a > 0;$$

$$\text{☞ } \frac{2a}{5(a+1)}$$

$$d) \sqrt{\frac{27a^2}{12(1-a)^4}} \text{ với } a < 0;$$

$$\text{☞ } \frac{-3a}{2(1-a)^2}$$

$$e) \sqrt{\frac{25}{4-4a+a^2}} \text{ với } a < 2;$$

$$\text{☞ } \frac{5}{2-a}$$

$$f) \sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}} \text{ với } a \geq 1.$$

$$\text{☞ } \frac{a-1}{a+1}$$

💬 Lời giải.

$$a) \sqrt{\frac{49}{a^2}} = \frac{7}{a};$$

$$b) \sqrt{\frac{9}{4(a+2)^2}} = \frac{\sqrt{9}}{4(a+2)^2} = -\frac{3}{2(a+2)};$$

$$c) \sqrt{\frac{4a^2}{25(a+1)^2}} = \frac{\sqrt{4a^2}}{25(a+1)^2} = \frac{2a}{5(a+1)};$$

$$d) \sqrt{\frac{27a^2}{12(1-a)^4}} = \sqrt{\frac{9a^2}{4(1-a)^4}} = \frac{-3a}{2(1-a)^2};$$

$$e) \sqrt{\frac{25}{4-4a+a^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{(2-a)^2}} = \frac{5}{2-a};$$

$$f) \sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}} = \frac{\sqrt{(a-1)^2}}{(a+1)^2} = \frac{a-1}{a+1}.$$

□

📁 Dạng 3. Giải phương trình

Áp dụng quy tắc khai phương một thương.

❖ Ví dụ 16. Tìm x , biết:

$$a) \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{27} = 0;$$

$$\text{☞ } 3$$

$$b) x\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{27} - \sqrt{12};$$

$$\text{☞ } 2$$

$$c) \sqrt{5} \cdot x^2 - \sqrt{45} = 0;$$

$$\text{☞ } \pm 3$$

$$d) \frac{x^2}{\sqrt{11}} - \sqrt{99} = 0.$$

$$\text{☞ } \pm\sqrt{33}$$

💬 Lời giải.

$$a) \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{27} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x = \sqrt{27} \Leftrightarrow x = \sqrt{9} = 3;$$

$$b) x\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{27} - \sqrt{12} \Leftrightarrow x\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2;$$

$$c) \sqrt{5} \cdot x^2 - \sqrt{45} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot x^2 = \sqrt{45} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3;$$

$$d) \frac{x^2}{\sqrt{11}} - \sqrt{99} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{11}} = \sqrt{99} \Leftrightarrow x^2 = 33 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{33}.$$

□

✎ **Ví dụ 17.** Tìm x , biết:

$$a) \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} = 0;$$

🔍 2

$$b) x\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{80} - \sqrt{125};$$

🔍 0

$$c) \sqrt{7} \cdot x^2 - \sqrt{28} = 0;$$

🔍 ± 2

$$d) \frac{x^2}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} = 0.$$

🔍 $\pm\sqrt{6}$

💬 **Lời giải.**

$$a) \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot x = \sqrt{8} \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2;$$

$$b) x\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{80} - \sqrt{125} \Leftrightarrow x\sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 0;$$

$$c) \sqrt{7} \cdot x^2 - \sqrt{28} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{7} \cdot x^2 = \sqrt{28} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2;$$

$$d) \frac{x^2}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{12} \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}.$$

□

✎ **Ví dụ 18.** Giải phương trình:

$$a) \sqrt{\frac{3x-1}{x+3}} = 3;$$

🔍 $-\frac{14}{3}$

$$b) \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+3}} = 3;$$

🔍 $-\frac{14}{3}$

$$c) \sqrt{16x^2-25} = \sqrt{4x-5};$$

🔍 $\frac{14}{4}$

$$d) \sqrt{16x^2-25} = \sqrt{4x+5}.$$

🔍 $\frac{3}{2}$

💬 **Lời giải.**

$$a) \text{ĐKXD: } \frac{3x-1}{x+3} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{3x-1}{x+3}} = 3 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+3} = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{14}{3} \text{ (TMDK);}$$

$$b) \text{ĐKXD: } x \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+3}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x-1}{x+3}} = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{14}{3} \text{ (TMDK);}$$

$$c) \text{ĐKXD: } x \geq \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{16x^2-25} = \sqrt{4x-5} \Leftrightarrow \sqrt{4x-5} \cdot (\sqrt{4x+5}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = \frac{5}{4} \text{ (TMDK)} \end{cases};$$

$$d) \text{ĐKXD: } x \geq \frac{5}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{4}$$

$$\sqrt{16x^2-25} = \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} \cdot (\sqrt{4x-5}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \\ x = -\frac{5}{4} \text{ (TMDK)} \end{cases}$$

□

🔗 **Ví dụ 19.** Giải phương trình:

a) $\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}} = 2;$

🔗 $\frac{3}{2}$

b) $\sqrt{x^2-9} = 2\sqrt{x-3};$

🔗 3

c) $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2-x}} = 2;$

🔗 $\frac{3}{2}$

d) $\sqrt{x^2-9} = 2\sqrt{x+3}.$

🔗 -3; 7

💬 **Lời giải.**

a) ĐKXD: $\frac{2x-1}{2-x}$

$$\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2-x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2};$$

b) ĐKXD: $x \geq 3$

$$\sqrt{x^2-9} = 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow (x^2-9) = 4(x-3) \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0 \begin{cases} x = 3 \text{ (TMĐK)} \\ x = 1 \text{ (Loại)} \end{cases};$$

c) ĐKXD: $\frac{1}{2} \leq x < 2$ $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2-x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2-x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2};$

d) ĐKXD: $x \geq 3$ hoặc $x = -3$

$$\sqrt{x^2-9} = 2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow (x^2-9) = 4(x+3) \Leftrightarrow (x+3)(x-7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (TMĐK)} \\ x = 7 \text{ (TMĐK)}. \end{cases}$$

□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

🔗 **Bài 1.** Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{0,09 : 1,44};$

🔗 0,36

b) $\sqrt{36 : \frac{225}{256}};$

🔗 $\frac{32}{5}$

c) $\sqrt{\frac{9}{16}};$

🔗 $\frac{3}{4}$

d) $\sqrt{3\frac{6}{25}}.$

🔗 $\frac{9}{5}$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{0,09 : 1,44} = \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{1,44} = 0,3 \cdot 1,2 = 0,36;$

b) $\sqrt{36 : \frac{225}{256}} = \sqrt{36} : \sqrt{\frac{225}{256}} = 6 : \frac{15}{16} = \frac{32}{5};$

c) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4};$

d) $\sqrt{3\frac{6}{25}} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}.$

□

🔗 **Bài 2.** Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn rồi tính:

a) $\sqrt{\frac{27^2-9^2}{50}};$

🔗 $\frac{18}{5}$

b) $\sqrt{\frac{143^2-53^2}{173^2-83^2}}.$

🔗 $\frac{13}{16}$

💬 **Lời giải.**

$$\text{a) } \sqrt{\frac{27^2 - 9^2}{50}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 36}{50}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 36}{25}} = \frac{18}{5}; \quad \text{b) } \sqrt{\frac{143^2 - 53^2}{173^2 - 83^2}} = \sqrt{\frac{169 \cdot 90}{256 \cdot 90}} = \frac{13}{16}.$$



❖ **Bài 3.** Áp dụng quy tắc chia căn bậc hai, hãy tính:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{448}}; & \text{b) } \frac{\sqrt{44,1}}{\sqrt{16,9}}; \\ \text{c) } \frac{\sqrt{190}}{\sqrt{1,9}}; & \text{d) } \frac{\sqrt{14^5}}{\sqrt{2 \cdot 7^3}}. \end{array}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{448}} = \sqrt{\frac{63}{448}} = \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}; & \text{b) } \frac{\sqrt{44,1}}{\sqrt{16,9}} = \sqrt{\frac{441}{169}} = \frac{21}{13}; \\ \text{c) } \frac{\sqrt{190}}{\sqrt{1,9}} = \sqrt{\frac{190}{1,9}} = 10; & \text{d) } \frac{\sqrt{14^5}}{\sqrt{2 \cdot 7^3}} = \sqrt{\frac{2^5 \cdot 7^5}{2 \cdot 7^3}} = \sqrt{2^4 \cdot 7^2} = 28. \end{array}$$



❖ **Bài 4.** Tính giá trị biểu thức:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{243}{75}} + \frac{\sqrt{52,9}}{\sqrt{28,9}}; \quad \text{b) } (\sqrt{125} + \sqrt{5} - \sqrt{75}) : \sqrt{5}.$$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{array}{l} \text{a) } \sqrt{\frac{243}{75}} + \frac{\sqrt{52,9}}{\sqrt{28,9}} = \sqrt{\frac{81}{25}} + \sqrt{\frac{529}{289}} = \frac{9}{5} + \frac{23}{21} = \frac{304}{105}; \\ \text{b) } (\sqrt{125} + \sqrt{5} - \sqrt{75}) : \sqrt{5} = (5\sqrt{5} + \sqrt{5} - 5\sqrt{3}) : \sqrt{5} = 6 - \sqrt{15}. \end{array}$$



❖ **Bài 5.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{\frac{64a^2}{25}} \text{ với } a < 0; & \text{b) } \sqrt{\frac{(a-2)^2}{4a^4}} \text{ với } a \geq 2; \\ \text{c) } \frac{\sqrt{15a}}{\sqrt{735a}} \text{ với } a > 0; & \text{d) } \frac{\sqrt{2(4-a)^2}}{\sqrt{18(a-4)^4}} \text{ với } a < 4. \end{array}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{\frac{64a^2}{25}} = \frac{\sqrt{64a^2}}{\sqrt{25}} = -\frac{8a}{5} & \text{b) } \sqrt{\frac{(a-2)^2}{4a^4}} = \frac{\sqrt{(a-2)^2}}{\sqrt{4a^4}} = \frac{a-2}{2a^2}; \\ \text{c) } \frac{\sqrt{15a}}{\sqrt{735a}} = \sqrt{\frac{15a}{735a}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}; & \text{d) } \frac{\sqrt{2(4-a)^2}}{\sqrt{18(a-4)^4}} = \sqrt{\frac{2(4-a)^2}{18(4-a)^4}} = \frac{1}{3(4-x)}. \end{array}$$



❖ **Bài 6.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{144}{a^2}}$ với $a > 0$;

$\frac{12}{a}$

b) $\sqrt{\frac{121}{81(a-1)^2}}$ với $a < 1$;

$\frac{11}{9(1-a)}$

c) $\sqrt{\frac{49a^2}{(a-2)^2}}$ với $a > 2$;

$\frac{7a}{a-2}$

d) $\sqrt{\frac{27a^2}{48(3-a)^4}}$ với $a < 0$;

$\frac{3}{4(3-a)^2}$

e) $\sqrt{\frac{169}{1-2a+a^2}}$ với $a < 1$;

$\frac{13}{1-a}$

f) $\sqrt{\frac{a^2+4a+4}{a^2-2a+1}}$ với $a > 1$.

$\frac{a+2}{a-1}$

🗨️ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{144}{a^2}} = \frac{12}{a}$

b) $\sqrt{\frac{121}{81(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{81(a-1)^2}} = \frac{11}{9(1-a)}$;

c) $\sqrt{\frac{49a^2}{(a-2)^2}} = \frac{\sqrt{49a^2}}{\sqrt{(a-2)^2}} = \frac{7a}{a-2}$;

d) $\sqrt{\frac{27a^2}{48(3-a)^4}} = \sqrt{\frac{9a^2}{16(3-a)^4}} = \frac{3}{4(3-a)^2}$;

e) $\sqrt{\frac{169}{1-2a+a^2}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{(1-a)^2}} = \frac{13}{1-a}$;

f) $\sqrt{\frac{a^2+4a+4}{a^2-2a+1}} = \frac{\sqrt{(a+2)^2}}{\sqrt{(a-1)^2}} = \frac{a+2}{a-1}$.

□

🔗 **Bài 7.** Tìm x , biết:

a) $\sqrt{13} \cdot x - \sqrt{52} = 0$;

$\frac{2}{\sqrt{13}}$

b) $x \cdot \sqrt{7} - \sqrt{28} = \sqrt{63}$;

$\frac{5}{\sqrt{7}}$

c) $\sqrt{6} \cdot x^2 - \sqrt{96} = 0$;

$\pm 2\sqrt{6}$

d) $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{125} = 0$;

$\pm 5\sqrt{5}$

🗨️ **Lời giải.**

a) $\sqrt{13} \cdot x - \sqrt{52} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{13} \cdot x = \sqrt{52} \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$;

b) $x\sqrt{7} - \sqrt{28} = \sqrt{63} \Leftrightarrow x\sqrt{7} = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} \Leftrightarrow x = 5$;

c) $\sqrt{6} \cdot x^2 - \sqrt{96} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} \cdot x^2 = \sqrt{96} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 2$;

d) $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{125} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{5}} = \sqrt{125} \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

□

🔗 **Bài 8.** Giải phương trình

a) $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$;

-2

b) $\sqrt{4x^2-1} = \sqrt{2x-1}$;

$\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}} = 1$;

-2

d) $\sqrt{4x^2-1} = \sqrt{2x+1}$.

$-\frac{1}{2}; 1$

🗨️ **Lời giải.**

a) DKXD: $\frac{x-1}{2x+1} \geq 0$

$\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -2$ (TMĐK);

b) ĐKXD: $x \geq \frac{1}{2}$

$$\sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x - 1} \Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} \cdot (\sqrt{2x + 1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (TMĐK)} \\ x = 0 \text{ (Loại)} \end{cases};$$

c) ĐKXD: $x \geq \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (TMĐK)};$$

d) ĐKXD: $x \geq \frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{-1}{2}$

$$\sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x + 1} \Leftrightarrow \sqrt{2x + 1} \cdot (\sqrt{2x - 1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ (TMĐK)} \\ x = 1 \text{ (TMĐK)} \end{cases}.$$

□

BÀI 5. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Tổng quát: Với hai biểu thức A và B , ta có $\sqrt{A^2B} = |A|B = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0, B \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0, B \geq 0. \end{cases}$

❖ Ví dụ 1.

$$\begin{aligned}\sqrt{7^2 \cdot 5} &= 7\sqrt{5}; \\ \sqrt{16 \cdot 3} &= \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}; \\ \sqrt{75} &= \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}; \\ \sqrt{4x^2y} &= \sqrt{(2x)^2y} = |2x| \cdot \sqrt{y} \quad \text{với } x \geq 0, y \geq 0.\end{aligned}$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Tổng quát: Với hai biểu thức A và B , ta có $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{khi } A \geq 0, B \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{khi } A < 0, B \geq 0. \end{cases}$

❖ Ví dụ 2.

$$\begin{aligned}2\sqrt{3} &= \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}; \\ -3\sqrt{13} &= -\sqrt{3^2 \cdot 13} = -\sqrt{117}; \\ a\sqrt{3a} &= \sqrt{a^2 \cdot 3a} = \sqrt{3a^2} \quad \text{với } a \geq 0; \\ -2a^2\sqrt{5} &= -\sqrt{(2a)^2 \cdot 5} = -\sqrt{20a^4}.\end{aligned}$$

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn

Sử dụng các kiến thức sau

- Cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn $\sqrt{A^2B} = |A|B = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0, B \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0, B \geq 0. \end{cases}$
- Cách đưa thừa số vào trong dấu căn $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{khi } A \geq 0, B \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{khi } A < 0, B \geq 0. \end{cases}$

❖ **Bài 1.** Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

- a) $\sqrt{148}$; ❖ $2\sqrt{37}$ b) $-0,2\sqrt{125}$; ❖ $-\sqrt{5}$
 c) $\sqrt{80a^2}$ với $a \geq 0$; ❖ $4a\sqrt{5}$ d) $\sqrt{15 \cdot 12a^2}$ với $a < 0$. ❖ $-6a\sqrt{5}$

💬 **Lời giải.**

- a) $\sqrt{148} = \sqrt{4 \cdot 37} = \sqrt{2 \cdot 37} = 2\sqrt{37}$.
 b) $-0,2\sqrt{125} = -0,2\sqrt{25 \cdot 5} = -0,2\sqrt{5^2 \cdot 5} = -0,2 \cdot 5\sqrt{5} = -\sqrt{5}$.
 c) Có $a \geq 0$ nên $\sqrt{80a^2} = |a|\sqrt{16 \cdot 5} = a\sqrt{4^2 \cdot 5} = 4a\sqrt{5}$.
 d) Có $a < 0$ nên $\sqrt{15 \cdot 12a^2} = |a|\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4} = -a\sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 5} = -6a\sqrt{5}$.

□

❖ **Bài 2.** Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

- a) $\sqrt{175}$. ❖ $5\sqrt{7}$ b) $-1,5\sqrt{125}$. ❖ $-7,5\sqrt{5}$
 c) $\sqrt{80a^2}$ với $a \geq 0$. ❖ $4a\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6,42a^2}$ với $a < 0$. ❖ $-2a\sqrt{1,605}$

🗨 **Lời giải.**

- a) $\sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = 5\sqrt{7}$.
 b) $-1,5\sqrt{125} = -1,5\sqrt{25 \cdot 5} = -1,5\sqrt{5^2 \cdot 5} = -1,5 \cdot 5\sqrt{5} = -7,5\sqrt{5}$.
 c) Có $a \geq 0$ nên $\sqrt{80a^2} = |a|\sqrt{16 \cdot 5} = a\sqrt{4^2 \cdot 5} = 4a\sqrt{5}$.
 d) Có $a < 0$ nên $\sqrt{6,42a^2} = |a|\sqrt{4 \cdot 1,605} = -2a\sqrt{1,605}$.

□

❖ **Bài 3.** Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- a) $8\sqrt{7}$; ❖ $\sqrt{448}$ b) $-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{27}{125}}$; ❖ $-\sqrt{\frac{3}{5}}$
 c) $a\sqrt{\frac{13}{a}}$ với $a > 0$; ❖ $\sqrt{13a}$ d) $\frac{3}{a}\sqrt{\frac{-6a}{5}}$ với $a < 0$. ❖ $-\sqrt{\frac{-18}{5a}}$

🗨 **Lời giải.**

- a) $8\sqrt{7} = \sqrt{8^2 \cdot 7} = \sqrt{448}$. b) $-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{27}{125}} = -\sqrt{\frac{5^2}{3^2} \cdot \frac{3^3}{5^3}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$.
 c) Có $a > 0$ nên $a\sqrt{\frac{13}{a}} = \sqrt{a^2 \frac{13}{a}} = \sqrt{13a}$.
 d) Có $a < 0$ nên $\frac{3}{a}\sqrt{\frac{-6a}{5}} = -\sqrt{\frac{3^2}{a^2} \cdot \frac{-6a}{5}} = -\sqrt{\frac{-18}{5a}}$.

□

❖ **Bài 4.** Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- a) $3\sqrt{5}$; ❖ $\sqrt{40}$ b) $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{49}}$; ❖ $-\sqrt{\frac{6}{49}}$
 c) $a^2\sqrt{\frac{11}{a}}$ với $a > 0$; ❖ $\sqrt{11a^3}$ d) $\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{a}{-8}}$ với $a < 0$. ❖ $-\sqrt{\frac{-1}{32a}}$

🗨 **Lời giải.**

- a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{40}$. b) $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{49}} = -\sqrt{\frac{1}{2^2} \cdot \frac{24}{49}} = -\sqrt{\frac{6}{49}}$.
 c) Có $a > 0$ nên $a^2\sqrt{\frac{11}{a}} = \sqrt{a^4 \cdot \frac{11}{a}} = \sqrt{11a^3}$.
 d) Có $a < 0$ nên $\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{a}{-8}} = -\sqrt{\frac{1}{(2a)^2} \cdot \frac{a}{-8}} = -\sqrt{\frac{-1}{32a}}$.

□

Dạng 2. So sánh các căn bậc hai

Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn để đánh giá.

✧ Bài 5.

a) $3\sqrt{5}$ và $2\sqrt{13}$;

✎ $3\sqrt{5} < 2\sqrt{13}$

b) $2\sqrt{3}$ và 4;

✎ $2\sqrt{3} < 4$

c) $\frac{6}{7}\sqrt{7}$ và $\frac{7}{6}\sqrt{6}$;

✎ $\frac{6}{7}\sqrt{7} < \frac{7}{6}\sqrt{6}$

d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

✎ $\frac{1}{2}\sqrt{6} < 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

💬 Lời giải.

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{40}$ nhỏ hơn $2\sqrt{13} = \sqrt{2^2 \cdot 13} = \sqrt{52}$.

b) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$ nhỏ hơn $4 = \sqrt{16}$.

c) $\frac{6}{7}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{6^2}{7^2} \cdot 7} = \sqrt{\frac{36}{7}}$ nhỏ hơn $\frac{7}{6}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{7^2}{6^2} \cdot 6} = \sqrt{\frac{49}{6}}$.

d) $\frac{1}{2}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{1}{2^2} \cdot 6} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ nhỏ hơn $6\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{6^2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{18}$.

□

✧ Bài 6.

a) $\sqrt{31}$ và $2\sqrt{8}$;

✎ $\sqrt{31} < 2\sqrt{8}$

b) $3\sqrt{5}$ và 7;

✎ $3\sqrt{5} < 7$

c) $\frac{5}{2}\sqrt{4}$ và $\frac{4}{5}\sqrt{5}$;

✎ $\frac{5}{2}\sqrt{4} > \frac{4}{5}\sqrt{5}$

d) $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ và $5\sqrt{\frac{1}{3}}$.

✎ $\frac{1}{3}\sqrt{5} < 5\sqrt{\frac{1}{3}}$

💬 Lời giải.

a) $\sqrt{31}$ nhỏ hơn $\sqrt{2^2 \cdot 8} = \sqrt{32}$.

b) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$ nhỏ hơn $7 = \sqrt{49}$.

c) $\frac{5}{2}\sqrt{4} = 5\sqrt{\frac{1}{2^2} \cdot 4} = 5$ lớn hơn $\sqrt{5}$ lớn hơn $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

d) $\frac{1}{3}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{1}{3^2} \cdot 5}$ nhỏ hơn $5\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{25}{3}}$.

□

Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn rồi rút gọn.

✧ Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a) $A = \sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{\frac{4x}{25}} + \sqrt{\frac{9x}{49}}$;

✎ $\frac{3}{2}\sqrt{x}$

b) $B = \sqrt{2x} - 3\sqrt{32x} + \sqrt{8x}$.

✎ $-9\sqrt{2x}$

💬 Lời giải.

$$a) A = \sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{\frac{4x}{25}} + \sqrt{\frac{9x}{49}} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{5}\sqrt{x} + \frac{3}{5}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

$$b) B = \sqrt{2x} - 3\sqrt{32x} + \sqrt{8x} = \sqrt{2x} - 3 \cdot 4\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x} = -9\sqrt{2x}.$$

□

✧ **Bài 8.** Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

$$a) C = \sqrt{\frac{25x}{3}} + \sqrt{\frac{x}{27}} - \sqrt{\frac{4x}{243}}; \quad \text{🔗 } \frac{41}{9}\sqrt{\frac{x}{3}} \quad b) D = 6\sqrt{5x} - \sqrt{125x} + \sqrt{3125x}. \quad \text{🔗 } 26\sqrt{5x}$$

💬 **Lời giải.**

$$a) C = \sqrt{\frac{25x}{3}} + \sqrt{\frac{x}{27}} - \sqrt{\frac{4x}{243}} = 5\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{3}} - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{41}{9}\sqrt{\frac{x}{3}}.$$

$$b) D = 6\sqrt{5x} - \sqrt{125x} + \sqrt{3125x} = 6\sqrt{5x} - 5\sqrt{5x} + 25\sqrt{5x} = 26\sqrt{5x}.$$

□

✧ **Bài 9.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) E = 2\sqrt{9x} - 3\sqrt{\frac{4x}{81}} - \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{16}} \text{ với } x > 0; \quad \text{🔗 } \frac{29}{6}\sqrt{x}$$

$$b) F = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + 3x + 2 \text{ với } x \geq 2. \quad \text{🔗 } 4x$$

💬 **Lời giải.**

a) Có $x > 0$ nên

$$E = 2\sqrt{9x} - 3\sqrt{\frac{4x}{81}} - \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{16}} = 2 \cdot 3\sqrt{x} - 3 \cdot \frac{2}{9}\sqrt{x} - \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{4}\sqrt{x} = (6 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2})\sqrt{x} = \frac{29}{6}\sqrt{x}.$$

b) Có $x \geq 2$ nên

$$F = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + 3x + 2 = \sqrt{(x-2)^2} + 3x + 2 = |x-2| + 3x + 2 = (x-2) + 3x + 2 = 4x.$$

□

✧ **Bài 10.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) G = \sqrt{x} - 3\sqrt{\frac{4x}{9}} - \frac{8}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} \text{ với } x > 0; \quad \text{🔗 } -5\sqrt{x}$$

$$b) H = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - x + 1 \text{ với } x \geq -1. \quad \text{🔗 } 2$$

💬 **Lời giải.**

a) Có $x > 0$ nên

$$G = \sqrt{x} - 3\sqrt{\frac{4x}{9}} - \frac{8}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} = \sqrt{x} - 3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{8}{x} \cdot \frac{x}{2}\sqrt{x} = (1 - 2 - 4)\sqrt{x} = -5\sqrt{x}.$$

b) Có $x \geq -1$ nên

$$H = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - x + 1 = \sqrt{(x+1)^2} - x + 1 = |x+1| - x + 1 = (x+1) - x + 1 = 2.$$

□

C – BÀI TẬP VỀ NHÀ

✧ **Bài 11.** Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{72}$.

✎ $6\sqrt{2}$

b) $-2,5\sqrt{112}$.

✎ $-10\sqrt{7}$

c) $\sqrt{72a^2}$ với $a \geq 0$.

✎ $6a\sqrt{2}$

d) $\sqrt{6 \cdot 30a^2}$ với $a < 0$.

✎ $-6a\sqrt{5}$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$.

b) $-2,5\sqrt{112} = -2,5\sqrt{16 \cdot 7} = -2,5\sqrt{4^2 \cdot 7} = -2,5 \cdot 4\sqrt{7} = -10\sqrt{7}$.

c) Có $a \geq 0$ nên $\sqrt{72a^2} = |a|\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2} = a\sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = a \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 6a\sqrt{2}$.

d) Có $a < 0$ nên $\sqrt{6 \cdot 30a^2} = |a|\sqrt{6 \cdot 6 \cdot 5} = 6a\sqrt{5}$

□

✧ **Bài 12.** Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $4\sqrt{3}$;

✎ $\sqrt{48}$

b) $-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{32}{25}}$;

✎ $-\sqrt{\frac{2}{25}}$

c) $a\sqrt{\frac{1}{2a}}$ với $a \geq 0$;

✎ $\sqrt{\frac{a}{2}}$

d) $\frac{5}{3a} \cdot \sqrt{\frac{-12a}{125}}$ với $a < 0$.

✎ $-\sqrt{\frac{-4}{15a}}$

💬 **Lời giải.**

a) $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$.

b) $-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{32}{25}} = -\sqrt{\frac{1}{4^2} \cdot \frac{16 \cdot 2}{25}} = -\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{16 \cdot 2}{25}} = -\sqrt{\frac{2}{25}}$.

c) Có $a \geq 0$ nên $a\sqrt{\frac{1}{2a}} = \sqrt{\frac{a^2}{2a}} = \sqrt{\frac{a}{2}}$.

d) Có $a < 0$ nên $\frac{5}{3a} \cdot \sqrt{\frac{-12a}{125}} = -\sqrt{\frac{5^2}{(3a)^2} \cdot \frac{-4 \cdot 3a}{5^2 \cdot 5}} = -\sqrt{\frac{1}{3a} \cdot \frac{-4}{5}} = -\sqrt{\frac{-4}{15a}}$.

□

✧ **Bài 13.** Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a) $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$;

✎ $2\sqrt{5} > \sqrt{19}$

b) $4\sqrt{5}$ và 9;

✎ $4\sqrt{5} < 9$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{50}$;

✎ $\frac{1}{3}\sqrt{51} > \frac{1}{5}\sqrt{50}$

d) $\frac{23}{9}\sqrt{3}$ và $3\sqrt{\frac{23}{9}}$.

✎ $\frac{23}{9}\sqrt{3} < 3\sqrt{\frac{23}{9}}$

💬 **Lời giải.**

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$ lớn hơn $\sqrt{19}$.

b) $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$ nhỏ hơn $9 = \sqrt{81}$.

c) $\frac{1}{3}\sqrt{51} = \sqrt{\frac{1}{3^2} \cdot 51} = \sqrt{\frac{51}{9}}$ lớn hơn $\frac{1}{5}\sqrt{50} = \sqrt{\frac{1}{5^2} \cdot 50} = \sqrt{\frac{50}{25}}$;

d) $\frac{23}{9}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{23^2}{9^2} \cdot 3} = \sqrt{\frac{23}{3}} \cdot \sqrt{\frac{23}{9}}$ nhỏ hơn $3\sqrt{\frac{23}{9}}$

□

✧ **Bài 14.** Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a) $A = \sqrt{x} + \sqrt{4x} - \sqrt{9x} - 3$;

🔍 -3

b) $B = \sqrt{2x} - 3\sqrt{2x} + \sqrt{8x}$.

🔍 0

💬 **Lời giải.**

a) $A = \sqrt{x} + \sqrt{4x} - \sqrt{9x} - 3 = \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 = -3$.

b) $B = \sqrt{2x} - 3\sqrt{2x} + \sqrt{8x} = \sqrt{2x} - 3\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x} = 0$.

□

✧ **Bài 15.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $G = \sqrt{\frac{x}{25}} - \frac{12}{3}\sqrt{\frac{81x}{144}} - \frac{1}{x^2}\sqrt{x^4}$ với $x > 0$;

🔍 $-\frac{14}{5}\sqrt{x} - 1$

b) $H = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 3$ với $x \geq 3$.

🔍 -6

💬 **Lời giải.**

a) Có $x > 0$ nên

$$G = \sqrt{\frac{x}{25}} - \frac{12}{3}\sqrt{\frac{81x}{144}} - \frac{1}{x^2}\sqrt{x^4} = \frac{1}{5}\sqrt{x} - \frac{12}{3} \cdot \frac{9}{12}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \cdot x^2 = \left(\frac{1}{5} - 3\right)\sqrt{x} - 1 = -\frac{14}{5}\sqrt{x} - 1.$$

b) Có $x \geq 3$ nên

$$H = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 3 = \sqrt{(x-3)^2} - x - 3 = |x-3| - x - 3 = (x-3) - x - 3 = -6.$$

□

BÀI 6. BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI (TIẾP THEO)

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Khử mẫu của biểu thức chứa căn

Với hai biểu thức A, B mà $A \cdot B \geq 0$ và $B \neq 0$, ta có $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|}$.

💡 Ví dụ 1.

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{5}{7}} &= \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{7^2} = \frac{\sqrt{35}}{7}; \\ \sqrt{\frac{2a}{3b}} &= \frac{\sqrt{2a \cdot 3b}}{|3b|} = \frac{\sqrt{6ab}}{3|b|} \quad \text{với } ab \geq 0 \quad \text{và } b \neq 0; \\ \sqrt{\frac{2}{125a^3}} &= \frac{\sqrt{2 \cdot 125a^3}}{|125a^3|} = \frac{5a\sqrt{10a}}{125a^3} = \frac{\sqrt{10a}}{25a^2} \quad \text{với } a > 0.\end{aligned}$$

Trục căn thức ở mẫu

- Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.
- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$.
- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$.

💡 Ví dụ 2.

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{3}} &= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \\ \frac{5}{\sqrt{3} - 2} &= \frac{5(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} = \frac{5(\sqrt{3} + 2)}{-1} = -5(\sqrt{3} + 2); \\ \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} &= \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = 3(\sqrt{5} + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Cách khử mẫu của biểu thức lấy căn như sau: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|}$ với $A \cdot B \geq 0$ và $B \neq 0$.

💡 Bài 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $\sqrt{\frac{3}{125}};$

$\frac{\sqrt{15}}{25}$

b) $-\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-2)^2}{27}};$

$\frac{3-2\sqrt{3}}{9}$

c) $\sqrt{\frac{x^3}{36y}}$ với $x \geq 0, y > 0$;

$\frac{x\sqrt{xy}}{6y}$

d) $-\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x^3}}$ với $xy > 0$.

$-\frac{\sqrt{xy}}{xy}$

🗨️ Lời giải.

a) $\sqrt{\frac{3}{125}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 125}}{125} = \frac{5\sqrt{15}}{125} = \frac{\sqrt{15}}{25}$.

b) $-\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-2)^2}{27}} = -\frac{\sqrt{27(\sqrt{3}-2)^2}}{27} = -\frac{3|\sqrt{3}-2|\sqrt{3}}{27} = -\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{9} = \frac{3-2\sqrt{3}}{9}$.

c) Có $x \geq 0, y > 0$ nên $\sqrt{\frac{x^3}{36y}} = \frac{\sqrt{36x^3y}}{|36y|} = \frac{6|x|\sqrt{xy}}{36y} = \frac{x\sqrt{xy}}{6y}$.

d) Có $xy > 0$ nên $\frac{x}{y} > 0$ và $-\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x^3}} = -\sqrt{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y}{x^3}} = -\sqrt{\frac{1}{xy}} = -\frac{\sqrt{xy}}{|xy|} = -\frac{\sqrt{xy}}{xy}$.

□

🔗 Bài 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $\sqrt{\frac{2}{27}}$;

$\frac{\sqrt{6}}{9}$

b) $-\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{54}}$;

$\frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{6}}{18}$

c) $\sqrt{\frac{4x^3}{49y}}$ với $x \geq 0, y > 0$;

$\frac{2x\sqrt{xy}}{7y}$

d) $\frac{2x}{y}\sqrt{\frac{y^3}{x}}$ với $xy > 0$.

$2\sqrt{xy}$

🗨️ Lời giải.

a) $\sqrt{\frac{2}{27}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 27}}{27} = \frac{3\sqrt{2 \cdot 3}}{27} = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

b) $-\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{54}} = -|\sqrt{3}-1|\frac{\sqrt{54}}{54} = -3(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{6}}{54} = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{6}}{18}$.

c) Có $x \geq 0, y > 0$ nên $\sqrt{\frac{4x^3}{49y}} = \frac{\sqrt{4x^3 \cdot 49y}}{|49y|} = \frac{2|x| \cdot 7 \cdot \sqrt{xy}}{49y} = \frac{2x\sqrt{xy}}{7y}$.

d) Có $xy > 0$ nên $\frac{x}{y} > 0$ và $\frac{2x}{y}\sqrt{\frac{y^3}{x}} = 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^3}{x}} = 2\sqrt{xy}$.

□

🔗 Bài 3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn;

a) $xy\sqrt{\frac{-x}{y}}$ với $x < 0, y > 0$;

$x\sqrt{-xy}$

b) $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}$ với $x > 0$;

$\frac{\sqrt{1+x}}{x}$

c) $2xy\sqrt{\frac{-3}{xy}}$ với $xy < 0$;

$-2\sqrt{-3xy}$

d) $\frac{1}{2xy}\sqrt{\frac{xy}{7}}$ với $xy > 0$.

$\frac{\sqrt{7xy}}{14xy}$

🗨️ Lời giải.

- a) Có $x < 0, y > 0$ nên $xy\sqrt{\frac{-x}{y}} = x\sqrt{y^2\frac{-x}{y}} = x\sqrt{-xy}$.
- b) Có $x > 0$ nên $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1+x}{x^2}} = \frac{1}{|x|}\sqrt{1+x} = \frac{\sqrt{1+x}}{x}$.
- c) Có $xy < 0$ nên $2xy\sqrt{\frac{-3}{xy}} = -2\sqrt{(xy)^2\frac{-3}{xy}} = -2\sqrt{-3xy}$.
- d) Có $xy > 0$ nên $\frac{1}{2xy}\sqrt{\frac{xy}{7}} = \frac{1}{2xy}\frac{\sqrt{7xy}}{7} = \frac{\sqrt{7xy}}{14xy}$.

□

❖ **Bài 4.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

- a) $\frac{1}{2}xy\sqrt{-\frac{x}{y}}$ với $x < 0, y > 0$; $\frac{1}{2}\sqrt{-xy}$ b) $\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}}$ với $x > 0$; $\frac{\sqrt{1+x^3}}{x^2}$
- c) $-2xy\sqrt{\frac{51}{9xy}}$ với $xy > 0$; $-\frac{2\sqrt{51xy}}{3}$ d) $\frac{1}{xy}\sqrt{\frac{6xy}{27}}$ với $xy > 0$. $\frac{\sqrt{2xy}}{3xy}$

💬 **Lời giải.**

- a) Có $x < 0, y > 0$ nên $\frac{1}{2}xy\sqrt{-\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}x\sqrt{y^2(-\frac{x}{y})} = \frac{1}{2}\sqrt{-xy}$.
- b) Có $x > 0$ nên $\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1+x^3}{x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^2}$.
- c) Có $xy > 0$ nên $-2xy\sqrt{\frac{51}{9xy}} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{51(xy)^2}{xy}} = -\frac{2\sqrt{51xy}}{3}$.
- d) Có $xy > 0$ nên $\frac{1}{xy}\sqrt{\frac{6xy}{27}} = \frac{1}{xy}\sqrt{\frac{2xy}{9}} = \frac{\sqrt{2xy}}{3xy}$.

□

📁 Dạng 2. Trục căn thức ở mẫu

Cách trục căn thức ở mẫu như sau:

- Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có: $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.
- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B$, ta có: $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$.
- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có: $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$.

❖ **Bài 5.** Trục căn thức ở mẫu:

- a) $\frac{5}{\sqrt{75}}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{-3}{2 - \sqrt{10}}$; $\frac{2 + \sqrt{10}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{2} + 2}{3 + \sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{2} + 4}{7}$ d) $\frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$; $\frac{5(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2}$

🗨️ Lời giải.

$$a) \frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{5\sqrt{75}}{75} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{3}}{75} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$b) \frac{-3}{2-\sqrt{10}} = \frac{-3(2+\sqrt{10})}{(2-\sqrt{10})(2+\sqrt{10})} = \frac{-3(2+\sqrt{10})}{4-10} = \frac{-3(2+\sqrt{10})}{-6} = \frac{2+\sqrt{10}}{2}.$$

$$c) \frac{\sqrt{2}+2}{3+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+2)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+4}{9-2} = \frac{\sqrt{2}+4}{7}.$$

$$d) \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}.$$

□

🔗 Bài 6. Trục căn thức ở mẫu:

$$\begin{array}{ll} a) \frac{3}{\sqrt{20}}; & \text{🔗 } \frac{3\sqrt{5}}{10} \quad b) \frac{-5}{1-\sqrt{6}}; \quad \text{🔗 } 1+\sqrt{6} \\ c) \frac{\sqrt{11}-2}{4-\sqrt{11}}; & \text{🔗 } \frac{2\sqrt{11}+3}{5} \quad d) \frac{-16}{\sqrt{19}-\sqrt{3}}. \quad \text{🔗 } -(\sqrt{19}+\sqrt{3}) \end{array}$$

🗨️ Lời giải.

$$a) \frac{3}{\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{20}}{20} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

$$b) \frac{-5}{1-\sqrt{6}} = \frac{-5(1+\sqrt{6})}{(1-\sqrt{6})(1+\sqrt{6})} = \frac{-5(1+\sqrt{6})}{-5} = 1+\sqrt{6}$$

$$c) \frac{\sqrt{11}-2}{4-\sqrt{11}} = \frac{(\sqrt{11}-2)(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})} = \frac{2\sqrt{11}+3}{5}.$$

$$d) \frac{-16}{\sqrt{19}-\sqrt{3}} = \frac{-16(\sqrt{19}+\sqrt{3})}{(\sqrt{19}-\sqrt{3})(\sqrt{19}+\sqrt{3})} = \frac{-16(\sqrt{19}+\sqrt{3})}{16} = -(\sqrt{19}+\sqrt{3}).$$

□

🔗 Bài 7. Trục căn thức ở mẫu (với giả thiết các biểu thức đều vô nghĩa)

$$\begin{array}{ll} a) \frac{3}{2\sqrt{9a}}; & \text{🔗 } \frac{\sqrt{a}}{2a} \quad b) \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}; \quad \text{🔗 } \frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{2b})}{a-2b} \\ c) \frac{-2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}; & \text{🔗 } \frac{-2ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \quad d) \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}. \quad \text{🔗 } \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)^2}{a-1} \end{array}$$

🗨️ Lời giải.

$$a) \frac{3}{2\sqrt{9a}} = \frac{3}{6\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2a}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{2b}} &= \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{2b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{2b})(\sqrt{a} - \sqrt{2b})} = \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{2b})}{a - 2b}. \\ \text{c)} \quad \frac{-2ab}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} &= \frac{-2ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{-2ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}. \\ \text{d)} \quad \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)^2}{a - 1}. \end{aligned}$$

□

✎ **Bài 8.** Trục căn thức ở mẫu (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{1}{2\sqrt{a}}; & \quad \text{b)} \quad \frac{25}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}; \\ \text{c)} \quad \frac{-ab}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}; & \quad \text{d)} \quad \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}. \end{aligned}$$

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{1}{2\sqrt{a}} &= \frac{\sqrt{a}}{2a}. \\ \text{b)} \quad \frac{25}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} &= \frac{25(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{25(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}. \\ \text{c)} \quad \frac{-ab}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} &= \frac{-ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{-ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}. \\ \text{d)} \quad \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)^2}{a - 1}. \end{aligned}$$

□

📁 Dạng 3. Thực hiện phép tính

Khử mẫu của biểu thức lấy căn hoặc trục căn thức ở mẫu để tính toán.

✎ **Bài 9.** Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}; \quad \text{b)} \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - 2\sqrt{3}.$$

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \text{Ta có} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}-1} - 2\sqrt{3} &= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - 2\sqrt{3} \\
 &= 4 - 4\sqrt{3} + 3 - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} - 2\sqrt{3} \\
 &= 6 - 7\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 10.** Trục căn thức ở mẫu và thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}; \quad \text{b) } \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3}.$$

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{1} - \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \frac{\sqrt{2}-4}{2}.$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3} &= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \sqrt{3} \\
 &= 7 - 4\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \\
 &= \frac{13-8\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 11.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } &\sqrt{\frac{5}{98}}; & \text{b) } &-\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{50}}; \\
 \text{c) } &\sqrt{\frac{x}{64y^3}} \text{ với } x \geq 0, y > 0; & \text{d) } &\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ với } x > 0, y > 0.
 \end{aligned}$$

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5}{98}} = \frac{5\sqrt{98}}{98} = \frac{5 \cdot 7\sqrt{2}}{98} = \frac{5\sqrt{2}}{7}.$$

$$\text{b) } -\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{50}} = -\frac{|\sqrt{5}-2|\sqrt{50}}{50} = -\frac{(\sqrt{5}-2)\sqrt{50}}{50}.$$

$$\text{c) } \text{Có } x \geq 0, y > 0 \text{ nên } \sqrt{\frac{x}{64y^3}} = \frac{\sqrt{64xy^3}}{|64y^3|} = \frac{8|y|\sqrt{xy}}{64y^3} = \frac{8y\sqrt{xy}}{64y^3} = \frac{\sqrt{xy}}{8y^2}.$$

d) Có $x > 0, y > 0$ nên $\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x\sqrt{xy}}{|x|y} = \frac{x\sqrt{xy}}{|x|y} = \frac{\sqrt{xy}}{y}$.

□

❖ **Bài 12.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $xy\sqrt{\frac{-x}{y}}$ với $x < 0, y > 0$;

🔗 $x\sqrt{-xy}$

b) $\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}}$ với $x \neq 0$;

🔗 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$

c) $xy\sqrt{\frac{1}{-xy}}$ với $xy < 0$;

🔗 $\sqrt{-xy}$

d) $\frac{1}{-2xy}\sqrt{\frac{xy}{9}}$ với $xy > 0$.

🔗 $\frac{\sqrt{xy}}{-6xy}$

🗨 **Lời giải.**

a) Có $x < 0, y > 0$ nên $xy\sqrt{\frac{-x}{y}} = \frac{xy\sqrt{-xy}}{|y|} = \frac{xy\sqrt{-xy}}{y} = x\sqrt{-xy}$.

b) Có $x \neq 0$ nên $\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$.

c) Có $xy < 0$ nên $xy\sqrt{\frac{1}{-xy}} = \frac{xy\sqrt{-xy}}{|-xy|} = \frac{xy\sqrt{-xy}}{xy} = \sqrt{-xy}$.

d) Có $xy > 0$ nên $\frac{1}{-2xy}\sqrt{\frac{xy}{9}} = \frac{\sqrt{xy}}{-6xy}$.

□

❖ **Bài 13.** Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{13}{\sqrt{18}}$;

🔗 $\frac{13\sqrt{18}}{18}$

b) $\frac{-1}{2-\sqrt{3}}$;

🔗 $-(2+\sqrt{3})$

c) $\frac{\sqrt{13}-3}{3-\sqrt{13}}$;

🔗 -1

d) $\frac{-7}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$.

🔗 $-(\sqrt{10}+\sqrt{3})$

🗨 **Lời giải.**

a) $\frac{13}{\sqrt{18}} = \frac{13\sqrt{18}}{18}$.

b) $\frac{-1}{2-\sqrt{3}} = \frac{-(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{-(2+\sqrt{3})}{4-3} = -(2+\sqrt{3})$.

c) $\frac{\sqrt{13}-3}{3-\sqrt{13}} = \frac{-(3-\sqrt{13})}{3-\sqrt{13}} = -1$.

d) $\frac{-7}{\sqrt{10}-\sqrt{3}} = \frac{-7(\sqrt{10}+\sqrt{3})}{(\sqrt{10}-\sqrt{3})(\sqrt{10}+\sqrt{3})} = \frac{-7(\sqrt{10}+\sqrt{3})}{10-3} = -(\sqrt{10}+\sqrt{3})$.

□

❖ **Bài 14.** Trục căn thức ở mẫu (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa)

a) $\frac{1}{\sqrt{8a}};$

$\frac{\sqrt{2a}}{4}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3a} - \sqrt{b}};$

$\frac{\sqrt{3a} + \sqrt{b}}{3a - b}$

c) $\frac{-3ab}{\sqrt{4a} + \sqrt{b}};$

$\frac{-3ab(\sqrt{4a} - \sqrt{b})}{4a - b}$

d) $\frac{a + \sqrt{a^3}}{\sqrt{a} - 1}.$

$\frac{a(1 + \sqrt{a})^2}{a - 1}$

Lời giải.

a) $\frac{1}{\sqrt{8a}} = \frac{\sqrt{8a}}{8a} = \frac{2\sqrt{2a}}{8a} = \frac{\sqrt{2a}}{4}.$

b) $\frac{1}{\sqrt{3a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{3a} - \sqrt{b})(\sqrt{3a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{3a} + \sqrt{b}}{3a - b}.$

c) $\frac{-3ab}{\sqrt{4a} + \sqrt{b}} = \frac{-3ab(\sqrt{4a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{4a} + \sqrt{b})(\sqrt{4a} - \sqrt{b})} = \frac{-3ab(\sqrt{4a} - \sqrt{b})}{4a - b}.$

d) $\frac{a + \sqrt{a^3}}{\sqrt{a} - 1} = \frac{a(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})}{(\sqrt{a} - 1)(1 + \sqrt{a})} = \frac{a(1 + \sqrt{a})^2}{a - 1}.$

□

Bài 15. Trục căn thức ở mẫu và thực hiện phép tính:

a) $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{7}};$

$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}.$

$-2\sqrt{3}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{7}} &= \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} - \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{7})}{(\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5} - \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{7})}{5 - 7} \\ &= -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} + \sqrt{7}) \\ &= \sqrt{7} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} - \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5} - \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} \\ &= -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \\ &= -2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

□

BÀI 7. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Để rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai, ta thường sử dụng linh hoạt các phép biến đổi như:

- ☑ Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong căn.
- ☑ Trục căn thức ở mẫu.
- ☑ Quy đồng mẫu thức.

🔗 **Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$.	☑ $6\sqrt{5}$	b) $B = \sqrt{80} + \sqrt{45} - \sqrt{5}$.	☑ $6\sqrt{5}$
c) $C = \frac{5}{\sqrt{10}} + 3,5 \cdot \sqrt{40}$.	☑ $\frac{15\sqrt{10}}{2}$	d) $D = \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{20}$.	☑ $\frac{11\sqrt{5}}{5}$
e) $E = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{90}$.	☑ $\frac{7\sqrt{10}}{2}$	f) $F = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18}$.	☑ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
g) $G = \frac{2}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{8}$.	☑ $4\sqrt{2} + 2$	h) $H = \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{300}}{10} - \sqrt{12}$.	☑ $-2 - 2\sqrt{3}$

🗨️ Lời giải.

a) $A = (4 + 3 - 1)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

b) $B = \sqrt{16 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = (4 + 3 - 1)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

c) $C = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{10} + 3,5 \cdot \sqrt{4 \cdot 10} = \frac{\sqrt{10}}{2} + 3,5 \cdot 2\sqrt{10} = \frac{1}{2}\sqrt{10} + 7\sqrt{10} = (\frac{1}{2} + 7)\sqrt{10} = \frac{15}{2}\sqrt{10}$.

d) $D = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{5} = (\frac{1}{5} + 2)\sqrt{5} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$.

e) $E = \frac{\sqrt{10}}{2} + 3\sqrt{10} = (\frac{1}{2} + 3)\sqrt{10} = \frac{7\sqrt{10}}{2}$.

f) $F = \frac{\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} = (\frac{1}{2} + 3)\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

g) $G = 2(\sqrt{2} + 1) + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 2$.

h) $H = -(\sqrt{3} + 2) + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -2 - 2\sqrt{3}$.



❖ Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức sau:

a) $A = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \sqrt{2}.$

🔗 $6\sqrt{2}$

b) $B = \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{2}.$

🔗 $6\sqrt{2}$

c) $C = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{18}.$

🔗 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$

d) $D = \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{27}.$

🔗 $-\frac{7\sqrt{3}}{3}$

e) $E = \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60}.$

🔗 $\frac{7\sqrt{15}}{3}$

f) $F = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{24}.$

🔗 $\frac{5\sqrt{6}}{2}$

g) $G = \frac{2}{(\sqrt{5} + 2)} + \sqrt{45}.$

🔗 $5\sqrt{5} - 4$

h) $H = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{48}.$

🔗 8

💬 Lời giải.

a) $A = (3 + 4 - 1)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$

b) $B = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$

c) $C = \frac{\sqrt{2}}{2} + 6\sqrt{2} = \frac{13\sqrt{2}}{2}.$

d) $D = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{3} = (\frac{2}{3} - 3)\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$

e) $E = \frac{\sqrt{15}}{3} + 2\sqrt{15} = \frac{7\sqrt{15}}{3}.$

f) $F = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$

g) $G = \frac{2(\sqrt{5} - 2)}{5 - 4} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 4.$

h) $H = 4(2 + \sqrt{3}) - 4\sqrt{3} = 8.$



❖ Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x^2} - \sqrt{16x}$ với $x \geq 0.$

🔗 $2x$

b) $B = \sqrt{25x + 25} - \sqrt{9x + 9} + \sqrt{4x + 4}$ với $x \geq -1.$

🔗 $4\sqrt{x + 1}$

c) $C = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ với $x \neq 1.$

🔗 x

d) $D = \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1.$

🔗 $\sqrt{a}$

💬 Lời giải.

a) $A = 4\sqrt{x} + 2x - 4\sqrt{x} = 2x.$

b) $B = 5\sqrt{x + 1} - 3\sqrt{x + 1} + 2\sqrt{x + 1} = 4\sqrt{x + 1}.$

c) $C = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x.$

d) $D = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1} = \sqrt{a}.$



❖ Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - \sqrt{25x}$ với $x \geq 0.$

🔗 $-6\sqrt{x}$

b) $B = \sqrt{25x - 25} - \sqrt{9x - 9} + \sqrt{4x - 4}$ với $x \geq 1.$

🔗 $4\sqrt{x - 1}$

c) $C = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ với $x \neq 2.$

🔗 x

$$d) D = \frac{a - 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2} \text{ với } a \geq 0; a \neq 4.$$

 $\sqrt{a}$

 **Lời giải.**

$$a) A = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = -6\sqrt{x}.$$

$$b) B = 5\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} = 4\sqrt{x-1}.$$

$$c) C = \frac{x(x-2)}{x-2} = x.$$

$$d) D = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}-2} = \sqrt{a}.$$

□

✎ **Ví dụ 5.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1.$$

 $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$b) B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

 $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$c) C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right) \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

 $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$

 **Lời giải.**

$$a) A = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

$$b) B = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

$$c) C = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$

□

✎ **Ví dụ 6.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{x-9}{2\sqrt{x}+6} \text{ với } x \geq 0.$$

 $\frac{\sqrt{x}-3}{2}$

$$b) B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3}{\sqrt{x}+3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9.$$

 $\frac{x+9}{x-9}$

$$c) C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \left(\frac{x-9}{2\sqrt{x}+6} \right) \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

 $\frac{x+9}{2(\sqrt{x}+3)}$

 **Lời giải.**

$$a) A = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{2(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{2}.$$

$$b) B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \frac{x+9}{x-9}.$$

$$c) C = \frac{x+9}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} = \frac{x+9}{2(\sqrt{x}+3)}.$$

□

❖ Ví dụ 7. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x > 0.$$

$$a) \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$b) B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x > 0.$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$c) C = \frac{3\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

$$c) \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$d) D = \left(\frac{3\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} \right) \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

$$d) 2\sqrt{x}$$

💬 Lời giải.

$$a) A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$b) B = \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$c) C = \frac{3\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$d) D = \frac{2}{\sqrt{x}+1} \cdot (\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)) = 2\sqrt{x}.$$

□

❖ Ví dụ 8. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \text{ với } x \geq 0, x \neq 16.$$

$$a) \frac{x+16}{x-16}$$

$$b) B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+4} \text{ với } x \geq 0, x \neq 16.$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{x}-4}$$

$$c) C = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$d) D = \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

$$d) \frac{1}{\sqrt{x}}$$

💬 Lời giải.

$$a) A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) + 4(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{x+16}{x-16}$$

$$b) B = \frac{x+16}{x-16} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{x+16} = \frac{\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{1}{\sqrt{x}-4}$$

$$c) C = \frac{2 + \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$d) D = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

□

❖ **Ví dụ 9.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 2x}{x - \sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

$$\text{🔗 } \sqrt{x} - 1$$

$$b) B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} - \frac{10\sqrt{x}}{x - 25} - \frac{5}{\sqrt{x} + 5} \text{ với } x \geq 0, x \neq 25.$$

$$\text{🔗 } \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 5}$$

💬 **Lời giải.**

$$a) A = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} - 1.$$

$$b) B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 5) - 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{x - 10\sqrt{x} + 25}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{(\sqrt{x} - 5)^2}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 5}.$$

□

❖ **Ví dụ 10.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) C = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \text{ với } x > 0.$$

$$\text{🔗 } \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}$$

$$b) D = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{4 - 6\sqrt{x}}{1 - x} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

$$\text{🔗 } \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

💬 **Lời giải.**

$$a) C = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) + 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}.$$

$$b) D = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 3(\sqrt{x} - 1) + 4 - 6\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}.$$

□

📁 Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến

Thực hiện theo bốn bước:

- 🔍 Tìm điều kiện xác định của biểu thức (nếu cần);
- 🔍 Rút gọn biểu thức (nếu cần);
- 🔍 Rút gọn giá trị của biến (nếu cần);
- 🔍 Kiểm tra điều kiện, thay giá trị của biến vào biểu thức đã thu gọn và tính kết quả.

❖ **Ví dụ 11.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tính giá trị của biểu thức A khi

a) $x = 4$; $\frac{3}{2}$ b) $x = (1 - \sqrt{2})^2$; $2 + \sqrt{2}$ c) $x = 3 - 2\sqrt{2}$. $2 + \sqrt{2}$

Lời giải.

a) Thay $x = 4$ vào A ta được $A = \frac{\sqrt{4} + 1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$;

b) Ta có $\sqrt{x} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1$. Suy ra $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2}$.

c) Ta có $x = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2$. Suy ra $A = 2 + \sqrt{2}$.

□

❖ **Ví dụ 12.** Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tính giá trị của biểu thức A khi

a) $x = 9$; $\frac{2}{3}$ b) $x = (1 + \sqrt{3})^2$; $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ c) $x = 4 + 2\sqrt{3}$. $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

Lời giải.

a) $B = \frac{\sqrt{9} - 1}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$;

b) Ta có $\sqrt{x} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} + 1$. Suy ra $B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

c) Ta có $x = 4 + 2\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} + 1)^2$. Suy ra $B = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

□

Dạng 3. Tìm giá trị của biến để biểu thức đã cho thỏa mãn một điều kiện có dạng phương trình hoặc bất phương trình

Thực hiện theo bốn bước:

- ④ Tìm điều kiện của biểu thức (nếu cần);
- ④ Rút gọn biểu thức (nếu cần);
- ④ Sử dụng biểu thức (đã rút gọn), kết hợp với giả thiết để tìm ra kết quả;
- ④ Kiểm tra điều kiện, kết luận.

❖ **Ví dụ 13.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. Tìm x để $A = 2$.

$\frac{16}{1}$

Lời giải.

$A = 2$ ta có $\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = 2(\sqrt{x} - 1) \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ (thỏa mãn).

□

❖ **Ví dụ 14.** Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm x để $B = 2$.

$\frac{1}{1}$

Lời giải.

$B = 2$ ta có $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn). $\square$

❖ **Ví dụ 15.** Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm x để $A = 3$. 🔗 1,4

🗨 **Lời giải.**

$A = 3$ ta có $\frac{x+2}{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow x+2 = 3\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn). $\square$

❖ **Ví dụ 16.** Cho biểu thức $B = \frac{x+4}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm x để $B = 4$. 🔗 4

🗨 **Lời giải.**

$B = 4$ ta có $\frac{x+4}{\sqrt{x}} = 4 \Rightarrow x+4 = 4\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x}-2)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn). $\square$

❖ **Ví dụ 17.** Giải các bất phương trình sau:

- a) $\sqrt{x}+1 > 3$; 🔗 $x > 4$ b) $\frac{\sqrt{x}+2}{2} > 2$; 🔗 $x > 4$
- c) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} < 0$; 🔗 $0 \leq x < 1$ d) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} > 1$. 🔗 $0 \leq x < 1$

🗨 **Lời giải.**

- a) Điều kiện $x \geq 0$.
 $\sqrt{x}+1 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$ (thỏa mãn điều kiện).
- b) Điều kiện $x \geq 0$.
 $\frac{\sqrt{x}+2}{2} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$ (thỏa mãn điều kiện).
- c) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$.
 $\frac{1}{\sqrt{x}-1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$. Đối chiếu điều kiện ta được $0 \leq x < 1$.
- d) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$.
 $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$. $\square$

❖ **Ví dụ 18.** Giải các bất phương trình sau:

- a) $\sqrt{x}+2 > 3$; 🔗 $x > 1$ b) $\frac{\sqrt{x}+5}{2} > 3$; 🔗 $x > 1$
- c) $\frac{-1}{\sqrt{x}-5} < 0$; 🔗 $x > 25$ d) $\frac{2\sqrt{x}-11}{\sqrt{x}-5} < 2$. 🔗 $x > 25$

🗨 **Lời giải.**

- a) Điều kiện $x \geq 0$.
 $\sqrt{x}+2 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$ (thỏa mãn điều kiện).

b) Điều kiện $x \geq 0$.

$$\frac{\sqrt{x} + 5}{2} > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 5 > 6 \Leftrightarrow x > 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

c) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 25$.

$$\frac{-1}{\sqrt{x} - 5} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 5 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 5 \Leftrightarrow x > 25 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

d) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 25$.

$$\frac{2\sqrt{x} - 11}{\sqrt{x} - 5} < 2 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 11 - 2\sqrt{x} + 10}{\sqrt{x} - 5} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x} - 5} < 0 \Leftrightarrow x > 25 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

□

✧ **Ví dụ 19.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + 2$. Tìm x để $A \geq 3$.

$$0 \leq x < 1$$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$.

$$A \geq 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x} - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1. \text{ Đối chiếu điều kiện ta được } 0 \leq x < 1.$$

□

✧ **Ví dụ 20.** Cho biểu thức $B = \sqrt{x} + 5$. Tìm x để $B \geq 6$.

$$x \geq 1$$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện $x \geq 0$.

$$B \geq 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

□

📁 Dạng 4. So sánh biểu thức với một số

Để so sánh một biểu thức A với một số a , thực hiện theo ba bước:

- 🔴 Tìm điều kiện của biểu thức A (nếu cần);
- 🔴 Rút gọn biểu thức A (nếu cần);
- 🔴 Ta xét hiệu $A - a$, kết hợp với điều kiện của A để xét dấu của hiệu này, từ đó đi đến kết quả của phép so sánh.

✧ **Ví dụ 21.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$. Hãy so sánh A với 1.

$$A < 1$$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện xác định: $x > 0$.

$$\text{Ta có } A - 1 = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{-2}{\sqrt{x}}. \text{ Theo ví dụ 23 thì } A - 1 < 0 \text{ nên } A < 1.$$

□

✧ **Ví dụ 22.** Cho biểu thức $B = \frac{2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$. Hãy so sánh B với 2.

$$B > 2$$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện xác định: $x > 0$.

$$\text{Ta có } B - 2 = \frac{2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{2}{\sqrt{x}}. \text{ Theo ví dụ 24 thì } B - 2 > 0 \text{ nên } B > 2.$$

□

✧ **Ví dụ 23.** Cho hai biểu thức $A = \frac{-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. So sánh $\frac{B}{A}$ với 1.

$$\frac{B}{A} < 1$$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{-2} = \frac{2-\sqrt{x}}{2}$.

Xét hiệu $\frac{B}{A} - 1 = \frac{2-\sqrt{x}}{2} - 1 = \frac{-\sqrt{x}}{2} < 0$, suy ra $\frac{B}{A} < 1$. □

❖ **Ví dụ 24.** Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. So sánh $\frac{B}{A}$ với 1. ❖ $\frac{B}{A} > 1$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\frac{B}{A} = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} = \sqrt{x} + 1$.

Xét hiệu $\frac{B}{A} - 1 = \sqrt{x} > 0$, suy ra $\frac{B}{A} > 1$. □

📁 Dạng 5. Tìm giá trị nguyên của biến để biểu thức nhận giá trị nguyên

Thực hiện theo năm bước:

- ❖ Tìm điều kiện của biểu thức (nếu cần);
- ❖ Rút gọn biểu thức (nếu cần);
- ❖ Đưa biểu thức đã rút gọn về dạng biểu thức chỉ chứa ẩn ở mẫu;
- ❖ Lập luận biểu thức là số nguyên thì mẫu là số nguyên và là ước của tử, từ đó tìm các giá trị của biến;
- ❖ Kết hợp điều kiện để suy ra các giá trị cần tìm của ẩn.

❖ **Ví dụ 25.** Tìm x nguyên để các biểu thức sau có giá trị nguyên:

a) $A = \frac{4}{x+1}$; ❖ $x \in \{-5, -3, -2, 0, 1, 3\}$ b) $B = \frac{4}{\sqrt{x}+1}$; ❖ $x \in \{0, 1, 9\}$

c) $C = 1 + \frac{-4}{\sqrt{x}+1}$; ❖ $x \in \{0, 1, 9\}$ d) $D = \frac{x+2}{x+1}$; ❖ $x \in \{-2, 0\}$

e) $E = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$; ❖ $x \in \{0\}$ f) $F = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. ❖ $x \in \{0, 1, 9, 16\}$

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x \neq -1$.

Để A nguyên $\Leftrightarrow \frac{4}{x+1}$ nguyên $\Rightarrow x+1$ là ước của 4 $\Rightarrow x+1 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

Ta có bảng:

$x+1$	-4	-2	-1	1	2	4
x	-5	-3	-2	0	1	3

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{-5, -3, -2, 0, 1, 3\}$

b) Điều kiện $x \geq 0$.

Để B nguyên $\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+1}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}+1$ là ước của 4 $\Rightarrow \sqrt{x}+1 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

Với x thỏa mãn điều kiện thì $\sqrt{x}+1 \geq 1$ nên $\sqrt{x}+1 \in \{1, 2, 4\}$ Ta có bảng:

$\sqrt{x} + 1$	1	2	4
x	0	1	9

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{0, 1, 9\}$.

c) Điều kiện $x \geq 0$.

Để C nguyên $\Leftrightarrow \frac{-4}{\sqrt{x}+1}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}+1$ là ước của 4.

Tương tự ví dụ b, ta được tập các giá trị của x là $\{0, 1, 9\}$.

d) Điều kiện $x \neq -1$.

Ta có $D = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$.

Để D nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}$ nguyên $\Rightarrow x+1$ là ước của 1 $\Rightarrow x+1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow x \in \{-2, 0\}$.

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{-2, 0\}$.

e) Điều kiện $x \geq 0$.

Ta có $E = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Để E nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}+1$ là ước của 1 $\Rightarrow \sqrt{x}+1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow x \in \{0\}$ (do $\sqrt{x}+1 \geq 0$).

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{0\}$.

f) Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

Ta có $F = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-2}$.

Để F nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}-2$ là ước của 2 $\Rightarrow \sqrt{x}-2 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{0, 1, 3, 4\} \Rightarrow x \in \{0, 1, 9, 16\}$.

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{0, 1, 9, 16\}$.

□

❖ Ví dụ 26. Tìm x nguyên để các biểu thức sau có giá trị nguyên:

a) $A = \frac{1}{x};$

☞ $x \in \{-1, 1\}$

b) $B = \frac{1}{\sqrt{x}};$

☞ $x \in \{1\}$

c) $C = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}};$

☞ $x \in \{1\}$

d) $D = \frac{x+3}{x+1};$

☞ $x \in \{-3, -2, 0, 1\}$

e) $E = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}};$

☞ $x \in \{1\}$

f) $F = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}.$

☞ $x \in \{1, 9, 25\}$

💬 Lời giải.

a) Điều kiện $x \neq 0$.

Để A nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{x}$ nguyên $\Rightarrow x$ là ước của 1 $\Rightarrow x \in \{-1, 1\}$.

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{-1, 1\}$

b) Điều kiện $x > 0$.

Để B nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}$ là ước của 1 $\Rightarrow \sqrt{x} \in \{-1, 1\}$.

Với x thỏa mãn điều kiện thì $\sqrt{x} \geq 0$ nên $\sqrt{x} \in \{1\} \Rightarrow x \in \{1\}$ Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{1\}$.

c) Điều kiện $x > 0$.

Để C nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}$ là ước của 1.

Tương tự ví dụ b, ta được tập các giá trị của x là $\{1\}$.

d) Điều kiện $x \neq -1$.

Ta có $D = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}$.

Để D nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x+1}$ nguyên $\Rightarrow x+1$ là ước của 2 $\Rightarrow x+1 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow x \in \{-3, -2, 0, 1\}$.

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{-3, -2, 0, 1\}$.

e) Điều kiện $x > 0$.

Ta có $E = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Để E nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x} + 1$ là ước của 1 $\Rightarrow \sqrt{x} \in \{-1, 1\} \Rightarrow x \in \{1\}$ (do $\sqrt{x} > 0$).

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{1\}$.

f) Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$.

Ta có $F = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-2}$.

Để F nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}-2$ là ước của 3.

Suy ra $\sqrt{x}-2 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{-1, 1, 3, 5\} \Rightarrow x \in \{1, 9, 25\}$ (do $\sqrt{x} \geq 0$).

Kết hợp điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{1, 9, 25\}$.

□

Dạng 6. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai và câu hỏi phụ

Tổng hợp các kiến thức ở trên.

🔗 **Ví dụ 27.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{x+9}{2\sqrt{x}+6} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A .

$$\text{🔗 } A = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

$$\text{🔗 } A = -2$$

c) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 11 + 6\sqrt{2}$.

$$\text{🔗 } A = \sqrt{2}$$

d) Tìm x để $A = 2$.

$$\text{🔗 } x = 16$$

Lời giải.

a) Với x thỏa mãn điều kiện xác định, ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{2(\sqrt{x}+3)}{x+9} = \frac{x+9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{2}{x+9} = \frac{2}{\sqrt{x}-3}.$$

b) Thay $x = 4$ vào A ta được $A = \frac{2}{\sqrt{4}-3} = \frac{2}{2-3} = -2$.

c) Ta có $x = 11 + 6\sqrt{2} = 3^2 + 2.3.\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = (3 + \sqrt{2})^2$, suy ra $\sqrt{x} = 3 + \sqrt{2}$.

Thay vào A ta được $A = \frac{2}{3 + \sqrt{2} - 3} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

d) Để $A = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 3} = 2 \Leftrightarrow 1 = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn điều kiện).

□

⇨ **Ví dụ 28.** Cho biểu thức $B = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức B .

🔗 $B = \sqrt{x}$

b) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 1$.

🔗 1

c) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

🔗 $\sqrt{2} + 1$

d) Tìm x để $B = 1$.

🔗 $x = 1$

🗨️ **Lời giải.**

a) Với x thỏa mãn điều kiện xác định, ta có $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2} = \sqrt{x}$.

b) Thay $x = 1$ vào B ta được $B = \sqrt{1} = 1$.

c) Ta có $x = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$, thay vào B ta được $B = \sqrt{2} + 1$.

d) Để $B = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

□

⇨ **Ví dụ 29.** Cho hai biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2}{x - 1} \right)$ và $B = \frac{1}{x - 1}$ ($x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A .

🔗 $A = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

🔗 $\frac{3}{2}$

c) Tìm x để $A = 0$.

🔗 không tồn tại x

d) Tìm x nguyên để $C = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

🔗 không tồn tại x

🗨️ **Lời giải.**

a) Với x thỏa mãn điều kiện xác định, ta có:

$$A = \frac{x - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{\sqrt{x} - 1 + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 1) = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}.$$

b) Thay $x = 4$ vào A ta được $A = \frac{4 - 1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

c) Để $A = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (Không thỏa mãn điều kiện).
Vậy không tồn tại x để $A = 0$.

d) Với x thỏa mãn điều kiện, ta có $C = AB = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Để C nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}$ là ước của 1 $\Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn điều kiện).

□

❖ **Ví dụ 30.** Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

🔗 $\frac{7}{13}$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

c) Tìm x nguyên để biểu thức $P = AB$ nguyên.

🔗 $x = 16$

💬 **Lời giải.**

a) Thay $x = 25$ vào A ta được $A = \frac{7}{\sqrt{25}+8} = \frac{7}{13}$.

b) Với x thỏa mãn điều kiện, ta có

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+5\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3},$$
 ta có điều phải chứng minh.

c) $P = AB = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$.

Để P nguyên $\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}+3$ là ước của 7 $\Leftrightarrow \sqrt{x}+3 \in \{-7, -1, 1, 7\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{4\} \Leftrightarrow x \in \{16\}$.

Đối chiếu điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{16\}$.

□

❖ **Ví dụ 31.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

🔗 $A = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

🔗 $A = \frac{5}{2}$

c) Tìm x để $A = 2$.

🔗 không tồn tại x

d) So sánh biểu thức A với 2.

🔗 $A > 2$

💬 **Lời giải.**

a) Với x thỏa mãn điều kiện, ta có:

$$A = \frac{1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{2+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Thay $x = 4$ vào A ta được $A = \frac{4+1}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$.

c) Để $A = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn điều kiện).
 Vậy không tồn tại x thỏa mãn điều kiện.

d) Ta có $A - 2 = \frac{x+1}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$.

Với x thỏa mãn điều kiện thì $\sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 > 0$ và $\sqrt{x} > 0$, suy ra $A - 2 > 0$.

□

❖ **Ví dụ 32.** Cho biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 64$.

$$A = \frac{5}{4}$$

b) Rút gọn biểu thức B .

$$\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > 1$.

$$x > 0$$

🗨️ **Lời giải.**

a) Thay $x = 64$ vào A ta được $A = \frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2+8}{8} = \frac{5}{4}$.

b) Với x thỏa mãn điều kiện, ta có: $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + 2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$.

c) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, suy ra $\frac{A}{B} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ với mọi $x > 0$.

□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5}$.

$$3\sqrt{5}$$

b) $B = \sqrt{180} - \sqrt{20} - \sqrt{5}$.

$$3\sqrt{5}$$

c) $C = \frac{3}{\sqrt{10}} + \sqrt{40}$.

$$\frac{23\sqrt{10}}{10}$$

d) $D = \frac{2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20}$.

$$-\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

e) $E = \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{20}$.

$$\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

f) $F = \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{27}$.

$$\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

g) $G = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + 2\sqrt{8}$.

$$5\sqrt{2}+1$$

h) $H = \frac{3}{\sqrt{5}-2} + \frac{\sqrt{500}}{10} - \sqrt{20}$.

$$2$$

🗨️ **Lời giải.**

a) $A = (6-2-1)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

b) $B = 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

c) $C = \frac{3\sqrt{10}}{10} + 2\sqrt{10} = \frac{23}{10}\sqrt{10}$.

d) $D = \frac{2\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{5} = -\frac{8}{5}\sqrt{5}$.

e) $E = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{5} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

f) $F = \frac{\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$.

g) $G = \sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 1$.

h) $H = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2$.



❖ **Bài 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x^2} - \sqrt{16x}$ với $x \geq 0$. ❖ $3x - 2\sqrt{x}$ b) $B = \sqrt{25x - 25} - \sqrt{9x - 9} + \sqrt{4x - 4}$ với $x \geq 1$. ❖ $4\sqrt{x - 1}$

c) $C = \frac{x^2 + x}{x + 1}$ với $x \geq 1$. ❖ x d) $D = \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}$ với $a \geq 0$. ❖ $\sqrt{a}$

🗨 **Lời giải.**

a) $A = 2\sqrt{x} + 3x - 4\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x}$.

b) $B = 5\sqrt{x - 1} - 3\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x - 1} = 4\sqrt{x - 1}$.

c) $C = \frac{x(x + 1)}{x + 1} = x$.

d) $D = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1} = \sqrt{a}$.



❖ **Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{3}{\sqrt{x} + 1} + \frac{6}{x - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. ❖ $\frac{3}{\sqrt{x} - 1}$

b) $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x}}$ với $x > 0$. ❖ $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

c) $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{x} + 1} + \frac{6}{x - 1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$. ❖ $\frac{3}{\sqrt{x}}$

🗨 **Lời giải.**

a) $A = \frac{3(\sqrt{x} - 1) + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{3(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{3}{\sqrt{x} - 1}$.

b) $B = \frac{x - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$.

c) $C = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{3}{\sqrt{x} - 1} = \frac{3}{\sqrt{x}}$.



❖ **Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 2x}{x + \sqrt{x}}$ với $x > 0$. ❖ $\sqrt{x} + 1$

b) $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} + \frac{10\sqrt{x}}{x - 25} - \frac{5}{\sqrt{x} + 5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$. ❖ $\frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 5}$

🗨 **Lời giải.**

$$\text{a) } A = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(x + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x} + 1.$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 5) + 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{x + 10\sqrt{x} + 25}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{(\sqrt{x} + 5)^2}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 5}.$$

□

✧ **Bài 5.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}$ với $x > 0$. Tính giá trị của biểu thức A khi

a) $x = 4$; $\text{a} \quad -5$ b) $x = (3 - \sqrt{2})^2$; $\text{a} \quad 1 - 3\sqrt{2}$ c) $x = 11 - 6\sqrt{2}$. $\text{a} \quad 1 - 3\sqrt{2}$

🗨 **Lời giải.**

a) Thay $x = 4$ vào A ta được $A = \frac{2 + 3}{2 - 3} = -5$.

b) Thay $x = (3 - \sqrt{2})^2$ vào A ta được $A = \frac{3 - \sqrt{2} + 3}{3 - \sqrt{2} - 3} = \frac{6 - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1 - 3\sqrt{2}$.

c) Ta có $x = 11 - 6\sqrt{2} = (3 - \sqrt{2})^2$, thay vào A ta được $A = 1 - 3\sqrt{2}$.

□

✧ **Bài 6.** Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. Tìm x để $A = 1$.

$\text{a} \quad x = 4$

🗨 **Lời giải.**

Để $A = 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 3 = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập các giá trị của x là $\{4\}$.

□

✧ **Bài 7.** Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x} + 1 > 4$; $\text{a} \quad x > 9$ b) $\frac{\sqrt{x} + 3}{2} > 3$; $\text{a} \quad x > 9$

c) $\frac{1}{\sqrt{x} - 2} < 0$; $\text{a} \quad 0 \leq x < 4$ d) $\frac{2\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} - 4} > 1$. $\text{a} \quad x > 4$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình tương đương $\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$ (thỏa mãn điều kiện).

b) Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình tương đương $\sqrt{x} + 3 > 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$ (thỏa mãn điều kiện).

c) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$.

Bất phương trình tương đương $\sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$, kết hợp điều kiện được $0 \leq x < 4$.

d) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$.

Bất phương trình tương đương $\frac{1}{2(\sqrt{x} - 2)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$ (thỏa mãn điều kiện).



❖ **Bài 8.** Tìm x nguyên để các biểu thức sau có giá trị nguyên:

a) $A = \frac{4}{x+1};$ 🔍 $x \in \{-5, -3, -2, 0, 1, 3\}$ b) $B = \frac{2}{\sqrt{x}+1};$ 🔍 $x \in \{0, 1\}$

c) $C = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}+1}.$ 🔍 $x \in \{0, 1\}$

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x \neq -1$.

Để A nguyên $\Leftrightarrow \frac{4}{x+1}$ nguyên $\Leftrightarrow x+1$ là ước của 4 $\Leftrightarrow x+1 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\} \Leftrightarrow x \in \{-5, -3, -2, 0, 1, 3\}$. Đối chiếu điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{-5, -3, -2, 0, 1, 3\}$.

b) Điều kiện $x \geq 0$.

Để B nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ là ước của 2 $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{0, 1\} \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$. Đối chiếu điều kiện ta được tập các giá trị của x là $\{0, 1\}$.

c) Điều kiện $x \geq 0$.

Để C nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1}$ nguyên. Theo câu b, ta có tập các giá trị cần tìm của x là $\{0, 1\}$.



❖ **Bài 9.** Cho biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+2x}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

🔍 $A = 3$

b) Tính giá trị của A khi $x = (2 - \sqrt{3})^2$.

🔍 $A = 3 + \sqrt{3}$

c) Tính giá trị của A khi $x = 7 - 2\sqrt{3}$.

🔍 $A = 3 + \sqrt{3}$

d) Tìm x để $A = 2$.

🔍 $x = 1$

e) Tìm x để $A > 1$.

🔍 $x > 0$

💬 **Lời giải.**

Với $x > 0$ ta có $A = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x} + 1$

a) Thay $x = 4$ vào A ta được $A = 3$.

b) Thay $x = (2 - \sqrt{3})^2$ vào A ta được $A = 2 - \sqrt{3} + 1 = 3 + \sqrt{3}$.

c) Ta có $x = 7 - 2\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$, thay vào A ta được $A = 3 + \sqrt{3}$.

d) Để $A = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

e) Để $A > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 0$ (luôn đúng với mọi $x > 0$).



BÀI 8. CĂN BẬC BA

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

☑ Căn bậc ba của số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$, ký hiệu là $\sqrt[3]{a}$.



— Mọi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.

— Căn bậc ba của số dương là số dương, của số âm là số âm, của 0 là 0.

☑ Các công thức liên quan đến căn bậc ba

a) $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$;

b) $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A = B$;

c) $\sqrt[3]{AB} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ với $B \neq 0$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba

Áp dụng công thức $\sqrt[3]{a^3} = a$ và kết hợp với các hằng đẳng thức.
Một số lập phương của các số đơn giản:

a	2	3	4	5	6	7	8	9
a^3	8	27	64	125	216	343	512	729

🔗 Ví dụ 1. Hãy tính:

a) $\sqrt[3]{3^3}$;

🔗 3

b) $\sqrt[3]{27}$;

🔗 3

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{5^3}}$;

🔗 $\frac{1}{5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$;

🔗 $\frac{1}{5}$

e) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{625}}$;

🔗 $\frac{1}{5}$

f) $\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}}$.

🔗 $\frac{1}{3}$

💬 Lời giải.

a) $\sqrt[3]{3^3} = 3$;

b) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$;

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{5^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{1}{5}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$;

e) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{625}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5 \cdot 125}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{5}$;

f) $\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$.

□

🔗 Ví dụ 2. Hãy tính:

a) $\sqrt[3]{5^3}$;

🔗 5

b) $\sqrt[3]{125}$;

🔗 5

c) $\sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}}$;

🔗 $\frac{3}{5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$;

🔗 $\frac{3}{5}$

e) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$;

🔗 2

f) $\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}$.

🔗 $\frac{4}{5}$

 Lời giải.

a) $\sqrt[3]{5^3} = 5;$

b) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5;$

c) $\sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3}{5};$

d) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5};$

e) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 2;$

f) $\frac{\sqrt[3]{4^3}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{4}{5}.$

□

❖ **Ví dụ 3.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = 2\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{4^3} + 3\sqrt[3]{3^3};$

🔍 19

b) $B = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{27};$

🔍 9

c) $C = \frac{1}{\sqrt[3]{5^3}} + \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^3}};$

🔍 $\frac{13}{15}$

d) $D = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}};$

🔍 $\frac{13}{15}$

e) $E = \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} - \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{5^3}};$

🔍 $\frac{58}{15}$

f) $F = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} - \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}.$

🔍 $\frac{58}{15}$

 Lời giải.

a) $A = 2 \cdot 3 + 4 + 3 \cdot 3 = 19;$

b) $B = 2 + 4 + 3 = 9;$

c) $C = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15};$

d) $D = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15};$

e) $E = 4 \cdot 3 - \frac{2}{5} = 12 - \frac{2}{5} = \frac{58}{5};$

f) $F = 4 \cdot 3 - \frac{2}{5} = 12 - \frac{2}{5} = \frac{58}{5}.$

□

❖ **Ví dụ 4.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[3]{-27};$

🔍 -6

b) $B = 3\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{\frac{1}{343}} + 3\sqrt[3]{-8};$

🔍 $\frac{20}{7}$

c) $C = 2\sqrt[3]{-3^3} \cdot \sqrt[3]{6^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{4^3}};$

🔍 $-\frac{145}{4}$

d) $D = 2\sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{216} - \frac{1}{\sqrt[3]{64}}.$

🔍 $-\frac{145}{4}$

 Lời giải.

a) $A = 2 - 5 - 3 = -6;$

b) $B = 3 \cdot 3 - \frac{1}{7} - 3 \cdot 2 = 3 - \frac{1}{7} = \frac{20}{7};$

c) $C = -2 \cdot 3 \cdot 6 - \frac{1}{4} = -36 - \frac{1}{4} = -\frac{145}{4};$

d) $D = -2 \cdot 3 \cdot 6 - \frac{1}{4} = -36 - \frac{1}{4} = -\frac{145}{4}.$

□

❖ **Ví dụ 5.** Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt[3]{8a^3};$

🔍 2a

b) $B = \sqrt[3]{-64a^3};$

🔍 -4a

c) $C = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{27}};$

🔍 $\frac{a}{3}$

d) $D = \sqrt[3]{-27a^3};$

🔍 -3a

e) $E = \sqrt[3]{-\frac{a^3}{64}};$

🔍 $-\frac{a}{4}$

f) $F = -2\sqrt[3]{27a^3}.$

🔍 -6a

🗨️ Lời giải.

a) $A = \sqrt[3]{8a^3} = 2a;$

b) $B = -4a;$

c) $C = \frac{a}{3};$

d) $D = -3a;$

e) $E = -\frac{a}{4};$

f) $F = -6a.$

□

🔗 Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt[3]{64a^3};$

🔗 4a

b) $B = \sqrt[3]{27a^3};$

🔗 3a

c) $C = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{8}};$

🔗 $\frac{a}{2}$

d) $D = \sqrt[3]{125a^3};$

🔗 5a

e) $E = \sqrt[3]{-\frac{a^3}{125}};$

🔗 $-\frac{a}{5}$

f) $F = 2\sqrt[3]{27a^3}.$

🔗 6a

🗨️ Lời giải.

a) $A = 4a;$

b) $B = 3a;$

c) $C = \frac{a}{2};$

d) $D = 5a;$

e) $E = -\frac{a}{5};$

f) $F = 6a.$

□

🔗 Ví dụ 7. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt[3]{(x-1)^3};$

🔗 $x-1$

b) $B = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1};$

🔗 $x-1$

c) $C = \sqrt[3]{(2x-1)^3};$

🔗 $2x-1$

d) $D = \sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}.$

🔗 $2x-1$

🗨️ Lời giải.

a) $A = x - 1;$

b) $B = \sqrt[3]{(x-1)^3} = x - 1;$

c) $C = 2x - 1;$

d) $D = \sqrt[3]{(2x-1)^3} = 2x - 1.$

□

🔗 Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt[3]{(x+1)^3};$

🔗 $x+1$

b) $B = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1};$

🔗 $x+1$

c) $C = \sqrt[3]{(2x+1)^3};$

🔗 $2x+1$

d) $D = \sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}.$

🔗 $2x+1$

🗨️ Lời giải.

a) $A = x + 1;$

b) $B = \sqrt[3]{(x+1)^3} = x + 1;$

c) $C = 2x + 1;$

d) $D = \sqrt[3]{(2x+1)^3} = 2x + 1.$

□

Dạng 2. So sánh các căn bậc ba

Để so sánh các căn bậc ba ta chú ý:

$$a) \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B;$$

$$b) \sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A > B;$$

$$c) \sqrt[3]{A} \leq \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A \leq B$$

$$d) \sqrt[3]{A} \geq \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A \geq B$$

❖ Ví dụ 9. So sánh các cặp số sau:

$$a) \sqrt[3]{27} \text{ và } \sqrt[3]{216};$$

$$b) 4 \text{ và } \sqrt[3]{27};$$

$$c) 2\sqrt[3]{3} \text{ và } \sqrt[3]{23};$$

$$d) 5 \text{ và } \sqrt[3]{125};$$

🗨️ Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } 27 < 216 \text{ nên } \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{216};$$

$$b) \text{ Ta có } \sqrt[3]{27} = 3 < 4;$$

$$c) \text{ Ta có } 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{23};$$

$$d) \text{ Ta có } \sqrt[3]{125} = 5.$$

□

❖ Ví dụ 10. So sánh các cặp số sau:

$$a) \sqrt[3]{343} \text{ và } \sqrt[3]{512};$$

$$b) \sqrt[3]{-343} \text{ và } \sqrt[3]{-125};$$

$$c) 7 \text{ và } 2\sqrt[3]{43};$$

$$d) 2\sqrt[3]{3} \text{ và } 3\sqrt[3]{2};$$

🗨️ Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } 343 < 512 \text{ nên } \sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{512};$$

$$b) \text{ Ta có } -343 < -125 \text{ nên } \sqrt[3]{-343} < \sqrt[3]{-125};$$

$$c) \text{ Ta có } 2\sqrt[3]{43} = \sqrt[3]{8 \cdot 43} = \sqrt[3]{344} > \sqrt[3]{343} = 7;$$

$$d) \text{ Ta có } 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}.$$

□

Dạng 3. Tìm điều kiện của biến để biểu thức thỏa mãn điều kiện có dạng phương trình hoặc bất phương trình

Áp dụng:

$$a) \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B;$$

$$b) \sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A > B;$$

$$c) \sqrt[3]{A} \leq \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A \leq B$$

$$d) \sqrt[3]{A} \geq \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A \geq B$$

$$e) \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A = B$$

❖ Ví dụ 11. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt[3]{(x-1)^3} = 2;$$

$$\text{☞ } x = 3$$

$$b) \sqrt[3]{(2x-1)^3} = 5;$$

$$\text{☞ } x = 3$$

$$c) \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 2;$$

$$\text{☞ } x = 3$$

$$d) \sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} - 5 = 0.$$

$$\text{☞ } x = 3$$

🗨️ Lời giải.

- a) $\sqrt[3]{(x-1)^3} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3;$
 b) $\sqrt[3]{(2x-1)^3} = 5 \Leftrightarrow 2x-1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3;$
 c) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)^3} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3;$
 d) $\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} - 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x-1)^3} = 5 \Leftrightarrow 2x-1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$

□

❖ **Ví dụ 12.** Giải các phương trình sau:

- a) $\sqrt[3]{(x+1)^3} = 2;$ 🔍 $x = 1$ b) $\sqrt[3]{(2x+1)^3} = 5;$ 🔍 $x = 2$
 c) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = 2;$ 🔍 $x = 1$ d) $\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1} - 5 = 0.$ 🔍 $x = 2$

💬 **Lời giải.**

- a) $\sqrt[3]{(x+1)^3} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1;$
 b) $\sqrt[3]{(2x+1)^3} = 5 \Leftrightarrow 2x+1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2;$
 c) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)^3} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1;$
 d) $\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1} - 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x+1)^3} = 5 \Leftrightarrow 2x+1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$

□

❖ **Ví dụ 13.** Giải các phương trình sau:

- a) $\sqrt[3]{x-1} = 2;$ 🔍 $x = 9$ b) $\sqrt[3]{x+1} = x+1.$ 🔍 $x = 0, -1, 2$

💬 **Lời giải.**

- a) Phương trình tương đương $x-1 = 8 \Leftrightarrow x = 9;$
 b) Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x+1 &= (x+1)^3 \Leftrightarrow x+1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 14.** Giải các phương trình sau:

- a) $\sqrt[3]{x-1} = 1;$ 🔍 $x = 2$ b) $\sqrt[3]{x-1} = x-1.$ 🔍 $x = 0, 1, 2$

💬 **Lời giải.**

- a) Phương trình tương đương $x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2;$

b) Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x - 1 &= (x - 1)^3 \Leftrightarrow x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

□

✧ Ví dụ 15. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\sqrt[3]{(x+1)^3} > 2$; 🔍 $x > 7$ b) $\sqrt[3]{2x+1} > \sqrt[3]{x+2}$; 🔍 $x > 1$
 c) $\sqrt[3]{1-x} \geq 3$; 🔍 $x \leq -26$ d) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} < 2$. 🔍 $x < 1$

💬 Lời giải.

- a) $\sqrt[3]{(x+1)^3} > 2 \Leftrightarrow x+1 > 8 \Leftrightarrow x > 7$;
 b) $\sqrt[3]{2x+1} > \sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow 2x+1 > x+2 \Leftrightarrow x > 1$;
 c) $\sqrt[3]{1-x} \geq 3 \Leftrightarrow 1-x \geq 27 \Leftrightarrow x \leq -26$;
 d) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)^3} < 2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$.

□

✧ Ví dụ 16. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\sqrt[3]{(x+1)^3} > 1$; 🔍 $x > 0$ b) $\sqrt[3]{2x+3} > \sqrt[3]{x+2}$; 🔍 $x > -1$
 c) $\sqrt[3]{x-1} \geq 3$; 🔍 $x \geq 28$ d) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} < 2$. 🔍 $x < 3$

💬 Lời giải.

- a) $\sqrt[3]{(x+1)^3} > 1 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$;
 b) $\sqrt[3]{2x+3} > \sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow 2x+3 > x+2 \Leftrightarrow x > -1$;
 c) $\sqrt[3]{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow x-1 \geq 27 \Leftrightarrow x \geq 28$;
 d) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)^3} < 2 \Leftrightarrow x-1 < 2 \Leftrightarrow x < 3$.

□

C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

✧ Bài 1. Hãy tính:

a) $\sqrt[3]{6^3}$;

b) $\sqrt[3]{216}$;

c) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{343}}$.

🗨️ Lời giải.

a) $\sqrt[3]{6^3} = 6$;

b) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$;

c) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{343}} = \frac{1}{\sqrt[3]{343}} = \frac{1}{7}$.

□

✧ Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = -\sqrt[3]{27} + 2\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{64}$;

b) $B = -\sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$.

🗨️ Lời giải.

a) $A = -3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -3 + 4 - 6 = -5$;

b) $B = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{13}{12}$.

□

✧ Bài 3. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt[3]{-8}$ và $\sqrt[3]{-27}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$;

c) $\sqrt[3]{343}$ và 7;

d) $\sqrt[3]{23}$ và 6.

🗨️ Lời giải.

a) Ta có $-8 > -27$ nên $\sqrt[3]{-8} > \sqrt[3]{-27}$;

b) Ta có $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$. Do $\frac{1}{8} < \frac{1}{3}$ nên $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} < \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$;

c) Ta có $\sqrt[3]{343} = 7$;

d) Ta có $6 = \sqrt[3]{216} > \sqrt[3]{23}$.

□

✧ Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{-8a^3}$;

b) $\sqrt[3]{64a^3}$;

c) $\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{-27}}$;

d) $\sqrt[3]{27a^3}$;

e) $\sqrt[3]{\frac{a^3}{64}}$;

f) $-3\sqrt[3]{27a^3}$.

g) $-9a$.

🗨️ Lời giải.

a) $\sqrt[3]{-8a^3} = -2a;$

b) $\sqrt[3]{64a^3} = 4a;$

c) $\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{-27}} = -\frac{a}{3};$

d) $\sqrt[3]{27a^3} = 3a;$

e) $\sqrt[3]{\frac{a^3}{64}} = \frac{a}{4};$

f) $-3\sqrt[3]{27a^3} = -9a.$

□

🔗 Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt[3]{(2x-3)^3};$

🔗 $2x-3$ b) $B = \sqrt[3]{(3x+1)^3};$

🔗 $3x+1$

🗨️ Lời giải.

a) $A = 2x - 3.$

b) $B = 3x + 1.$

□

🔗 Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{(x-3)^3} = 2;$

🔗 $x=5$ b) $\sqrt[3]{x^3-6x^2+12x-8} = 2.$

🔗 $x=4$

🗨️ Lời giải.

a) $\sqrt[3]{(x-3)^3} = 2 \Leftrightarrow x-3 = 2 \Leftrightarrow x = 5;$

b) $\sqrt[3]{x^3-6x^2+12x-8} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-2)^3} = 2 \Leftrightarrow x-2 = 2 \Leftrightarrow x = 4.$

□

🔗 Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{(x+1)^3} < 2;$

🔗 $x < 7$ b) $\sqrt[3]{2x+1} < \sqrt[3]{x+2};$

🔗 $x < 1$

c) $\sqrt[3]{1-x} < 2;$

🔗 $x > -7$ d) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1} < 2x-3.$

🔗 $x > 4$

🗨️ Lời giải.

a) $\sqrt[3]{(x+1)^3} < 2 \Leftrightarrow x+1 < 8 \Leftrightarrow x < 7;$

b) $\sqrt[3]{2x+1} < \sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow 2x+1 < x+2 \Leftrightarrow x < 1;$

c) $\sqrt[3]{1-x} < 2 \Leftrightarrow 1-x < 8 \Leftrightarrow x > -7;$

d) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1} < 2x-3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)^3} < 2x-3 \Leftrightarrow x+1 < 2x-3 \Leftrightarrow x > 4.$

□

BÀI 9. ÔN TẬP CHƯƠNG 1

❖ **Bài 1.** Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $3\sqrt{16} + 10\sqrt{9} - 19\sqrt{4}$.

🔍 4

b) $2 \cdot \sqrt{0,25} + 5 \cdot \sqrt{0,36}$.

🔍 4

c) $\frac{2}{3}\sqrt{9} - \frac{3}{2}\sqrt{16} + 13$.

🔍 9

d) $27\sqrt{\frac{4}{9}} - 50 \cdot \sqrt{\frac{-1}{-4}} + \sqrt{36}$.

🔍 -1

💬 **Lời giải.**

a) $3\sqrt{16} + 10\sqrt{9} - 19\sqrt{4} = 3 \cdot 4 + 10 \cdot 3 - 19 \cdot 2 = 4$.

b) $2\sqrt{0,25} + 5\sqrt{0,36} = 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,6 = 4$.

c) $\frac{2}{3}\sqrt{9} - \frac{3}{2}\sqrt{16} + 13 = \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot 4 + 13 = 2 - 3 \cdot 2 + 13 = 9$.

d) $27\sqrt{\frac{4}{9}} - 50 \cdot \sqrt{\frac{-1}{-4}} + \sqrt{36} = 27 \cdot \frac{2}{3} - 50 \cdot \frac{1}{2} + 6 = 18 - 25 + 6 = -1$.

□

❖ **Bài 2.** Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $0,5\sqrt{36} - 2\sqrt{81}$.

🔍 -15

b) $10 \cdot \sqrt{1,21} + 5 \cdot \sqrt{1,44}$.

🔍 17

c) $\frac{1}{4}\sqrt{16} - \frac{2}{5}\sqrt{25}$.

🔍 -1

d) $9 \cdot \sqrt{\frac{25}{9}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{9}} - 19$.

🔍 -6

💬 **Lời giải.**

a) $0,5\sqrt{36} - 2\sqrt{81} = 0,5 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 3 - 18 = -15$.

b) $10\sqrt{1,21} + 5\sqrt{1,44} = 10 \cdot 1,1 + 5 \cdot 1,2 = 17$.

c) $\frac{1}{4}\sqrt{16} - \frac{2}{5}\sqrt{25} = \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{2}{5} \cdot 5 = 1 - 2 = -1$.

d) $9 \cdot \sqrt{\frac{25}{9}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{9}} - 19 = 9 \cdot \frac{5}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} - 19 = -6$.

□

❖ **Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $27\sqrt{a^2} - 6a$ với $a \geq 0$.

🔍 $21a$

b) $5\sqrt{36a^2} - 2\sqrt{81a^2}$ với $a \geq 0$.

🔍 $12a$

c) $19\sqrt{(a-2)^2} - 19a$ với $a \geq 2$.

🔍 -38

d) $\sqrt{1-8a+16a^2}$ với $a \leq \frac{1}{4}$.

🔍 $1-4a$

💬 **Lời giải.**

a) $\sqrt{a^2} = |a| = a$ ($a \geq 0$)
 $27\sqrt{a^2} - 6a = 27a - 6a = 21a$.

b) $5\sqrt{36a^2} - 2\sqrt{81a^2} = 5 \cdot 6a - 2 \cdot 9a = 30a - 18a = 12a$.

$$c) 19\sqrt{(a-2)^2} - 19a = 19 \cdot (a-2) - 19a = 19a - 38 - 19a = -38 \text{ vì } a \geq 2 \Rightarrow a-2 \geq 0.$$

$$d) \sqrt{1-8a+16a^2} = \sqrt{(1-4a)^2} = |1-4a| = 1-4a. \text{ Vì } a \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1-4a \geq 0 \Rightarrow |1-4a| = 1-4a.$$

□

❖ **Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau

$$a) 3\sqrt{a^2} - 3a \text{ với } a \geq 0.$$

🔗 0

$$b) 5\sqrt{16a^2} - 2\sqrt{9a^2} \text{ với } a \geq 0.$$

🔗 14a

$$c) \sqrt{(a+1)^2} \text{ với } a \geq -1.$$

🔗 a+1

$$d) \sqrt{a^2 - 10a + 25} \text{ với } a < 5.$$

🔗 5-a

💬 **Lời giải.**

$$a) \sqrt{a^2} = |a| = a (a \geq 0)$$

$$3\sqrt{a^2} - 3a = 3a - 3a = 0.$$

$$b) 5\sqrt{16a^2} - 2\sqrt{9a^2} = 5 \cdot 4a - 2 \cdot 3a = 20a - 6a = 14a.$$

$$c) \sqrt{(a+1)^2} = |a+1| = a+1 \text{ vì } a \geq -1 \Rightarrow a+1 \geq 0 \Rightarrow |a+1| = a+1.$$

$$d) \sqrt{a^2 - 10a + 25} = \sqrt{(a-5)^2} = |a-5| = 5-a. \text{ Vì } a < 5 \Rightarrow a-5 < 0 \Rightarrow |a-5| = 5-a.$$

□

❖ **Bài 5.** Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ và $P = \frac{A}{B}$ với $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{4}$.

$$a) \text{ Rút gọn và tính giá trị của } P \text{ khi } x = 4.$$

🔗 $\frac{1}{2}$

$$b) \text{ So sánh } P \text{ với } 0.$$

🔗 $P > 0$

$$c) \text{ Tìm } x \text{ nguyên để } P \text{ nhận giá trị nguyên.}$$

🔗 không có x

💬 **Lời giải.**

$$a) \text{ Với } x \text{ thỏa mãn điều kiện thì}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-1)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-1)} : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Với } x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện) thì } P = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$b) P = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ có } \begin{cases} 1 > 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow P > 0.$$

$$c) \text{ Với } x > 0; x \neq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 \Rightarrow 0 < P < 1.$$

Vậy không có giá trị nào của x để P là số nguyên.

□

✧ **Bài 6.** Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M .

$$\text{☞ } M = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

b) So sánh M với 1.

$$\text{☞ } M < 1$$

c) Tìm x nguyên để M nhận giá trị nguyên.

$$\text{☞ } x \in \emptyset$$

☞ **Lời giải.**

a) Với x thỏa mãn điều kiện, ta có

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right] : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } M - 1 = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}} < 0 \Rightarrow M < 1.$$

$$\text{c) } M = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Để } M \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ (vì } x > 0; x \neq 1).$$

□

✧ **Bài 7.** Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{x - 25}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 25$.

$$\text{a) Tính giá trị của } A \text{ khi } x = 9. \quad \text{☞ } A = \frac{5}{-2} \quad \text{b) Chứng minh } B = \frac{1}{\sqrt{x} - 5}. \quad \text{☞ } A = \frac{1}{\sqrt{x} - 5}$$

☞ **Lời giải.**

$$\text{a) Thay } x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A \text{ ta được } A = \frac{\sqrt{9} + 2}{\sqrt{9} - 5} = \frac{3 + 2}{3 - 5} = \frac{5}{-2}.$$

b) Với $x \geq 0$ và $x \neq 25$, ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{x - 25} = \frac{3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x} - 5) + 20 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 15 + 20}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{\sqrt{x} + 5}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 5}. \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 8.** Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ khi $x = 9$.

$$\text{☞ } 2$$

☞ **Lời giải.**

$$\text{Với } x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \text{ vào biểu thức } A, \text{ ta được } A = \frac{3 + 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

□

✧ **Bài 9.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+1}{x+\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

🔗 $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

b) Tìm giá trị của x để $2P = 1$.

🔗 $x = 4$

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x > 0, x \neq 1$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+1}{x+\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b) Ta có $2P = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

So với điều kiện, thỏa mãn. Vậy $x = 4$.

□

✧ **Bài 10.** Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

🔗 $\frac{7}{13}$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

c) Tìm x nguyên để biểu thức $P = A \cdot B$ nhận giá trị là số nguyên.

🔗 $x = 16$

d) Tìm các số thực x để biểu thức $P = A \cdot B$ nhận giá trị là số nguyên.

🔗 $x = 16$ hoặc $x = \frac{1}{4}$

💬 **Lời giải.**

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{7}{\sqrt{25}+8} = \frac{7}{5+8} = \frac{7}{13}$.

b) Với $x \geq 0; x \neq 9$, ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+5\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

c) $P = A \cdot B = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$.

P nguyên khi và chỉ khi $7 : \sqrt{x}+3$ mà $\sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 7 \Leftrightarrow x = 16$.

d) Ta có $0 < P \leq \frac{7}{3}$. Mà P nguyên nên $P \in \{1; 2\}$.

$$\text{TH1. } P = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 16.$$

$$\text{TH2. } P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

□

✧ **Bài 11.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1}$.

a) Rút gọn P .

$$\text{M} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

$$\text{M} x \in \{1; 9\}$$

🗨️ **Lời giải.**

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$.

a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x+2 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - x - \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{x+2 + x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-2}$.

$$P \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-2 \in \{-1; 1\} \Rightarrow x \in \{1; 9\}.$$

□

✧ **Bài 12.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 16$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 36$.

$$\text{M} \frac{5}{4}$$

b) Rút gọn biểu thức B .

$$\text{M} B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

c) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

$$\text{M} x \in \{14; 15; 17; 18\}$$

🗨️ **Lời giải.**

a) Thay $x = 36$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{6+4}{6+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) + 4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+4\sqrt{x}+16}{x-16} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } B(1-A) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} - 1 \right) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{x-16}$$

$$\text{Để } B(A-1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{x-16} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-16 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\} \Rightarrow x \in \{14; 15; 17; 18\}.$$

□

✧ **Bài 13.** Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn M .

$$\text{✎ } M = \frac{2}{x-1}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để M nhận giá trị nguyên.

$$\text{✎ } x \in \{2; 3\}$$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$.

a) Ta có

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2 \cdot (\sqrt{x}-1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2 \cdot (\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x-1}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Để } M \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \in \{-2; -1; 1; 2\}.$$

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow x-1 > -1 \text{ suy ra } x-1 \in \{1; 2\} \Rightarrow x \in \{2; 3\}.$$

□

✧ **Bài 14.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$.

a) Rút gọn A .

$$\text{✎ } A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

b) Tìm x để $A < 0$.

$$\text{✎ } 0 < x < 1$$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right] : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b) $A < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ (vì $\sqrt{x} > 0$).

□

✧ **Bài 15.** Cho biểu thức $M = \frac{1}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{x-9}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa. Rút gọn biểu thức M .

☞ $M = \frac{4}{\sqrt{x}-3}$

b) Tìm các giá trị của x để $M > 0$.

☞ $x > 9$

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện xác định: $x \geq 0$; $x \neq 9$, khi đó

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{x-9} \\ &= \frac{1 \cdot (\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+3-x+3\sqrt{x}+x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{4\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{4 \cdot (\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{4}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

b) $M = \frac{4}{\sqrt{x}-3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$. Kết hợp với điều kiện ta có $x > 9$ thì $M > 0$.

□

✧ **Bài 16.** Cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 64$.

☞ $\frac{5}{4}$

b) Rút gọn biểu thức B .

☞ $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

☞ $x < 4$

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x > 0$.

Thay $x = 64 \Rightarrow \sqrt{x} = 8$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được $A = \frac{2+8}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) + 2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

c) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. Khi đó

$$\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0.$$

Vì $2\sqrt{x} > 0$ nên $2-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$. Kết hợp với điều kiện $x > 0$, suy ra $0 < x < 4$.

□

✧ **Bài 17.** Cho biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

$$Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

b) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 9$.

$$Q = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

💬 **Lời giải.**

Điều kiện $x > 0; x \neq 4$

a) Với x thỏa mãn điều kiện xác định thì

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

b) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức Q , ta có $Q = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$.

□

✧ **Bài 18.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$.

a) Tìm a để biểu thức P có nghĩa.

$$a > 0; a \neq 1; a \neq 4$$

b) Rút gọn P .

$$P = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$$

c) Tìm a để $P > \frac{1}{6}$.

$$a > 16$$

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện $a > 0; a \neq 1; a \neq 4$.

b) Với x thỏa mãn điều kiện xác định thì

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1) - (\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{a-1-a+4}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{3} = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

c) Ta có

$$P > \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}-4-\sqrt{a}}{6\sqrt{a}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-4}{6\sqrt{a}} > 0.$$

Vì $6\sqrt{a} > 0$ nên $\sqrt{a}-4 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > 4 \Leftrightarrow a > 16$.

□

✧ **Bài 19.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A .

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

b) Tìm x để A bằng -1 .

$$x = \frac{1}{4}$$

c) So sánh A với 1 .

$$A < 1$$

d) Tìm x để $A < 0$.

$$0 < x < 1$$

💬 **Lời giải.**

a) Với x thỏa mãn điều kiện xác định thì

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$A = -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$$

So với điều kiện, thỏa mãn. Vậy $x = \frac{1}{4}$.

c) Xét $A - 1 = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}} < 0$.

Vì $-1 < 0$ và $\sqrt{x} > 0$ suy ra $\frac{-1}{\sqrt{x}} < 0$, do đó $A < 1$.

d) $A < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp với điều kiện $x > 0; x \neq 1 \Rightarrow 0 < x < 1$.



❖ **Bài 20.** Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$.

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa.

$$x \geq 0; x \neq 4$$

b) Rút gọn P .

$$P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

c) Tìm giá trị của x để $P = 2$.

$$x = 16$$

d) Tìm x để P nhận giá trị nguyên.

$$x \in \{0; 1; 16\}$$

🗨️ Lời giải.

a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2 + 2x - 4\sqrt{x} - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3x - 6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

$$c) P = 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

So với điều kiện, thỏa mãn.

$$d) P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 3 - \frac{6}{\sqrt{x}+2}$$

Ta thấy $0 \leq P < 3$, nên $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow P \in \{0; 1; 2\}$

TH1. $P = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. So với điều kiện, thỏa mãn.

TH2. $P = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 1 \Rightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$. So với điều kiện, thỏa mãn.

TH3. $P = 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$. So với điều kiện, thỏa mãn.

Vậy $x \in \{0; 1; 16\}$.



HÀM SỐ BẬC NHẤT

BÀI 1. NHẮC LẠI VÀ BỔ TÚC KHÁI NIỆM HÀM SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x , và x được gọi là biến số.

✧ **Ví dụ 1.** Ta có $y = 2x + 1$ là hàm số của y theo biến x .

b) Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc công thức,...

c) Khi hàm số được cho bằng công thức $y = f(x)$ cần hiểu rằng biến số x chỉ lấy những giá trị mà tại đó $f(x)$ xác định.

d) Khi y là hàm số của x , ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$,...

e) Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y được gọi là hàm hằng.

f) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$:

(a) Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

(b) Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

i. Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng $f(x)$ cũng tăng lên thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tức là: Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ với mọi x_1, x_2 thuộc $\mathbb{R}$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

ii. Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng $f(x)$ giảm đi thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Tức là: Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ với mọi x_1, x_2 thuộc $\mathbb{R}$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

Thay mỗi giá trị của x vào hàm số $y = f(x)$ ta tìm được giá trị y tương ứng.

✧ **Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = f(x) = 2x$. Tính: $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.

👉 $f(-2) = -4$; $f(-1) = -2$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4$.

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}f(-2) &= 2 \cdot (-2) = -4; \\f(-1) &= 2 \cdot (-1) = -2; \\f(0) &= 2 \cdot 0 = 0; \\f(1) &= 2 \cdot 1 = 2; \\f(2) &= 2 \cdot 2 = 4.\end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x+1}$. Tính: $f(-5)$; $f(-4)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(4)$.

$$\text{☞ } f(-5) = \frac{5}{4}; f(-4) = \frac{4}{3}; f(0) = 0; f(1) = \frac{1}{2}; f(4) = \frac{4}{5}.$$

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}f(-5) &= \frac{-5}{(-5)+1} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}; f(-4) = \frac{-4}{(-4)+1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}; \\f(0) &= \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0; \\f(1) &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; \\f(4) &= \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 4.** Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+1} - 1$. Tính: $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f(2)$; $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

$$\text{☞ } f(0) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}; f(1) = \sqrt{2} - 1; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-2+\sqrt{10}}{2}; f(2) = \sqrt{3} - 1; \\f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-2+\sqrt{14}}{2}$$

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}f(0) &= \sqrt{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0; \\f\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}+1} - 1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}; \\f(1) &= \sqrt{1+1} - 1 = \sqrt{2} - 1; \\f\left(\frac{3}{2}\right) &= \sqrt{\frac{3}{2}+1} - 1 = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1 = \frac{-2+\sqrt{10}}{2}; \\f(2) &= \sqrt{2+1} - 1 = \sqrt{3} - 1; \\f\left(\frac{5}{2}\right) &= \sqrt{\frac{5}{2}+1} - 1 = \sqrt{\frac{7}{2}} - 1 = \frac{-2+\sqrt{14}}{2}.\end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 5.**

a) Cho hàm số $y = f(x) = 2x$. Tính: $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(a)$; $f(a+1)$.

$$\text{☞ } f(-2) = -4; f(-1) = -2; f(0) = 0; f(1) = 2; f(2) = 4; f(a) = 2a; f(a+1) = 2(a+1)$$

.

b) Cho hàm số $y = g(x) = 2x + 1$. Tính: $g(-2)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(a)$; $g(a+1)$.

$$\text{☞ } g(-2) = -3; g(-1) = -1; g(0) = 1; g(1) = 3; g(2) = 5; g(a) = 2a + 1; g(a+1) = 2a + 3$$

.

c) Có nhận xét gì về giá trị của hai hàm số ở trên khi biến x lấy cùng một giá trị?

$$\text{☞ Khi biến } x \text{ lấy cùng một giá trị thì giá trị của hàm số } y = 2x + 1 \text{ lớn hơn giá trị của hàm số } y = 2x \text{ một đơn vị}$$

.

💬 **Lời giải.**

- a) $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$; $f(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$;
 $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$;
 $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$; $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$;
 $f(a) = 2 \cdot a = 2a$; $f(a+1) = 2 \cdot (a+1) = 2(a+1)$.
- b) $g(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3$; $g(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$;
 $g(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$; $g(1) = 2 \cdot 1 = 2 + 1 = 3$;
 $g(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$; $g(a) = 2 \cdot a + 1 = 2a + 1$;
 $g(a+1) = 2 \cdot (a+1) + 1 = 2a + 3$.
- c) Khi biến x lấy cùng một giá trị thì giá trị của hàm số $y = 2x + 1$ lớn hơn giá trị của hàm số $y = 2x$ một đơn vị.

□

Dạng 2. Tìm điều kiện xác định của hàm số

- a) Hàm số dạng phân thức $y = \frac{A(x)}{B(x)}$ xác định (hoặc có nghĩa) khi và chỉ khi $B(x) \neq 0$.
- b) Hàm số dạng căn thức $y = \sqrt{A(x)}$ xác định (hoặc có nghĩa) khi và chỉ khi $A(x) \geq 0$. Tổng quát: Các hàm số chứa căn bậc chẵn thì điều kiện xác định hay điều kiện có nghĩa của hàm số là biểu thức trong căn bậc chẵn phải không âm.

🔗 **Ví dụ 6.** Tìm điều kiện xác định của mỗi hàm số sau:

- a) $y = 2x + 1$;  $x \in \mathbb{R}$ b) $y = \frac{2x+1}{x-1}$;  $x \neq 1$
- c) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$;  $x \geq -1, x \neq 1$ d) $y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x-2}$.  $x \geq 2$

 **Lời giải.**

- a) Hàm số $y = 2x + 1$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$;
- b) Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ xác định với mọi $x \neq 1$;
- c) Hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ xác định với mọi $x \geq -1, x \neq 1$;
- d) Hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x-2}$ xác định với mọi $x \geq 2$.

□

🔗 **Ví dụ 7.** Tìm điều kiện xác định của mỗi hàm số sau:

- a) $y = 2x - 1$;  $x \in \mathbb{R}$ b) $y = \frac{x+1}{x-1}$;  $x \neq 1$
- c) $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$;  $x \geq 0, x \neq 1$ d) $y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{2x-4}$.  $x \geq 2$

 **Lời giải.**

- a) Hàm số $y = 2x + 1$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$;
 b) Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ xác định với mọi $x \neq 1$;
 c) Hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ xác định với mọi $x \geq 0, x \neq 1$;
 d) Hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{2x-4}$ xác định với mọi $x \geq 2$.

□

Dạng 3. Biểu diễn các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy

❖ **Ví dụ 8.** Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = 2x + 1$.

$$A(1; 3), B(0; 1), C(4; 9), D(1; 2), E\left(\frac{1}{3}; 6\right).$$

 A, B, C

 **Lời giải.**

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Điểm A thuộc đồ thị hàm số.

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Điểm B thuộc đồ thị hàm số.

$x = 4 \Rightarrow y = 2 \cdot 4 + 1 = 9$. Điểm C thuộc đồ thị hàm số.

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Điểm D không thuộc đồ thị hàm số.

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$. Điểm E không thuộc đồ thị hàm số.

□

❖ **Ví dụ 9.** Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = 2x$.

$$A(1; 2), B(0; 1), C(4; 2), D(-1; 2), E\left(4; \frac{1}{2}\right).$$

 A

 **Lời giải.**

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2$. Điểm A thuộc đồ thị hàm số.

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0$. Điểm B không thuộc đồ thị hàm số.

$x = 4 \Rightarrow y = 2 \cdot 4 = 8$. Điểm C không thuộc đồ thị hàm số.

$x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) = -2$. Điểm D không thuộc đồ thị hàm số.

$x = 4 \Rightarrow y = 2 \cdot 4 = 8$. Điểm E không thuộc đồ thị hàm số.

□

❖ **Ví dụ 10.** Cho các điểm $A(0; 1), B(2; -1), C(-2; 4), D(1; 3)$.

a) Biểu diễn các điểm A, B, C, D trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Trong các điểm A, B, C, D điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = 2x + 1$.

 A, D

 **Lời giải.**

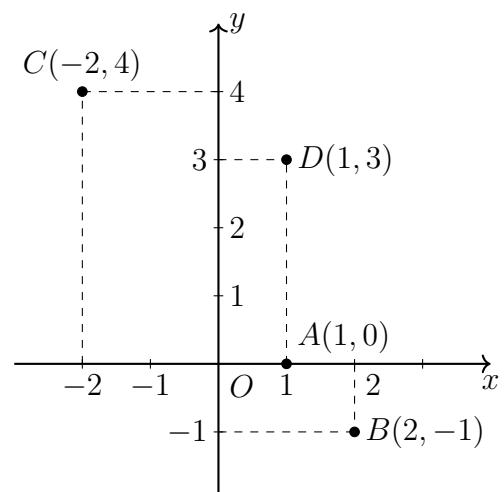
a) Biểu diễn các điểm A, B, C, D trên mặt phẳng tọa độ Oxy (hình vẽ bên).

b) $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Điểm A thuộc đồ thị hàm số.

$x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Điểm B không thuộc đồ thị hàm số.

$x = -2 \Rightarrow y = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$. Điểm C không thuộc đồ thị hàm số.

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Điểm D thuộc đồ thị hàm số.



□

❖ **Ví dụ 11.** Cho các điểm $M(0; 1)$, $N(2; 2)$, $P(-2; 3)$, $Q(1; 4)$.

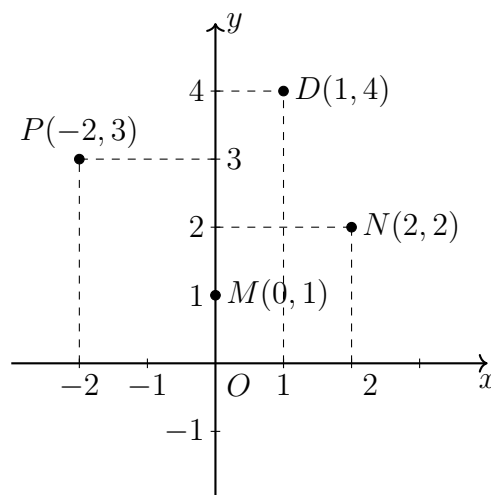
- a) Biểu diễn các điểm M , N , P , Q trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Trong các điểm M , N , P , Q điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x}{2} + 1$.

🔍 A, B

💬 **Lời giải.**

- a) Biểu diễn các điểm M , N , P , Q trên mặt phẳng tọa độ Oxy (hình vẽ bên).

- b) $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{2} + 1 = 1$. Điểm M thuộc đồ thị hàm số.
 $x = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{2} + 1 = 2$. Điểm N thuộc đồ thị hàm số.
 $x = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{2} + 1 = 0$. Điểm P không thuộc đồ thị hàm số.
 $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. Điểm Q không thuộc đồ thị hàm số.



□

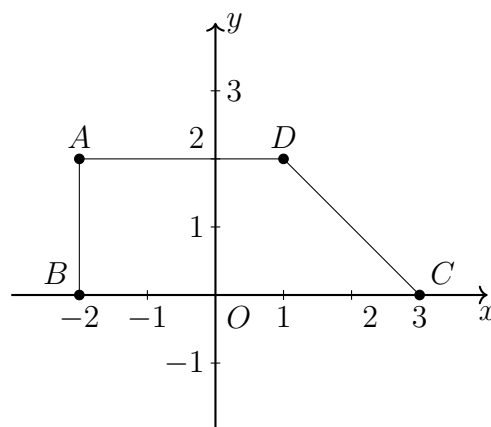
❖ **Ví dụ 12.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ với tọa độ các đỉnh $A(-2; 2)$, $B(-2; 0)$, $C(3; 0)$, $D(1; 2)$.

- a) Vẽ hình thang $ABCD$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Tính diện tích hình thang $ABCD$.

🔍 8 (đvdt)

💬 **Lời giải.**

- a) Vẽ hình thang $ABCD$ (hình vẽ bên).
- b) Hình thang $ABCD$ là hình thang vuông, có $AD = 3$, $BC = 5$, $AB = 2$. Suy ra
 $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot (3 + 5) \cdot 2 = 8$ (đvdt).



□

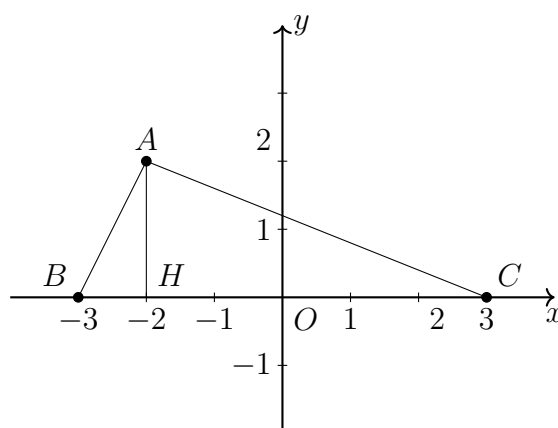
❖ **Ví dụ 13.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với tọa độ các đỉnh $A(-2; 2)$, $B(-3; 0)$, $C(3; 0)$.

- a) Vẽ tam giác ABC trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Tính diện tích tam giác ABC .

🔍 6 (đvdt)

Lời giải.

- a) Vẽ tam giác ABC (hình vẽ bên).
- b) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC có $AH = 2$,
 $BC = 6$. Suy ra
 $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$ (đvdt).



□

C – BÀI TẬP VỀ NHÀ

✧ **Bài 1.** Cho hàm số $y = f(x) = 2x + 5$. Tính $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.

Lời giải.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2x + 5$	1	3	5	7	9

□

✧ **Bài 2.** Tìm điều kiện xác định của mỗi hàm số sau:

- a) $y = 5x + 6$; $x \in \mathbb{R}$ b) $y = \frac{2x + 1}{2x - 1}$; $x \neq \frac{1}{2}$
- c) $y = \frac{\sqrt{2x + 1}}{2x - 1}$; $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ d) $y = \frac{1}{x - 3} + \sqrt{x - 1}$. $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Lời giải.

- a) Hàm số $y = 5x + 6$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $y = \frac{2x + 1}{2x - 1}$ xác định khi $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.
- c) Hàm số $y = \frac{\sqrt{2x + 1}}{2x - 1}$ xác định khi $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.
- d) Hàm số $y = \frac{1}{x - 3} + \sqrt{x - 1}$ xác định khi $\begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$.

□

✧ **Bài 3.** Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = x + 1$.

$A(1; 0), B(0; 1), C(4; -3), D(-1; 2), E\left(\frac{1}{2}; 6\right).$

 B

 **Lời giải.**

- ☑ Các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = x + 1$ là $B(0; 1)$ vì $1 = 0 + 1$ (đúng).
- ☑ Các điểm $A(1; 0), C(4; -3), D(-1; 2), E\left(\frac{1}{2}; 6\right)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = x + 1$.

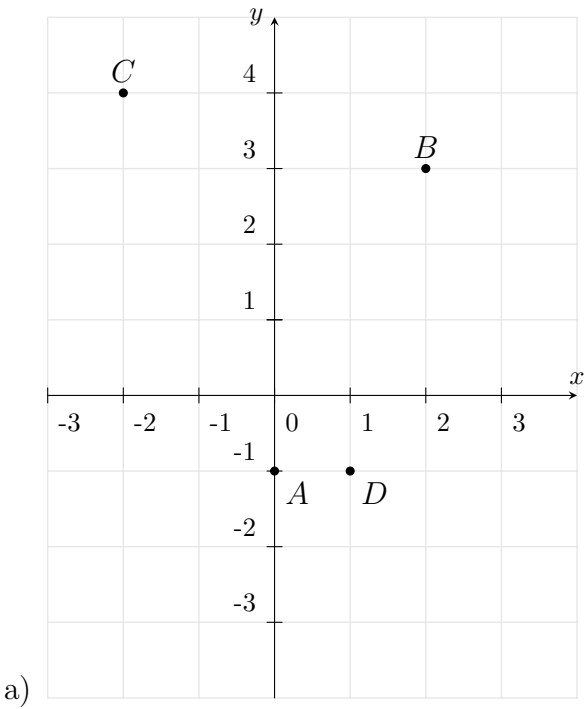
□

🔗 **Bài 4.** Cho các điểm $A(0; -1), B(2; 3), C(-2; 4), D(1; -1).$

- a) Biểu diễn các điểm A, B, C, D trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Trong các điểm A, B, C, D điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 1$.

 Điểm A, B

 **Lời giải.**



- b) Các điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 1$.

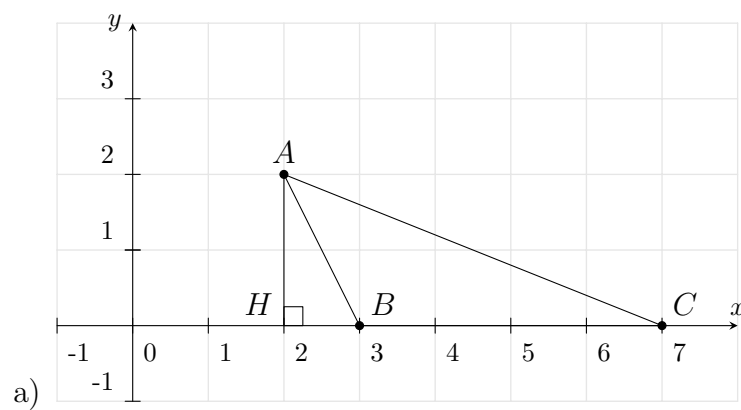
□

🔗 **Bài 5.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với tọa độ các đỉnh $A(2; 2), B(3; 0), C(7; 0).$

- a) Vẽ tam giác ABC trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Tính diện tích tam giác ABC .

 4

 **Lời giải.**



b) Kẻ $AH \perp BC$ khi đó $S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.

□

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

✎ **Định nghĩa 2.1.** Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các hằng số cho trước và $a \neq 0$.

⚠ Khi $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ là hàm số biểu thị sự tương quan tỉ lệ thuận.

2. Tính chất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbb{R}$ và có chất sau:

- ✔ Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$.
- ✔ Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Nhận dạng hàm số bậc nhất

Hàm số $y = ax + b$ là hàm số bậc nhất hi và chỉ khi $a \neq 0$.

✎ **Ví dụ 1.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy chỉ rõ các hệ số a và b trong trường hợp đó là hàm số bậc nhất.

- a) $y = 5x - 1$; $\text{a} = 5; b = -1$ b) $y = -2,5x$; $\text{a} = -2,5; b = 0$
 c) $y = 3(x - 2) + 1$; $\text{a} = 3; b = -5$ d) $y = 2x^2 - 5$. Không có

Lời giải.

- a) $y = 5x - 1$ là hàm số bậc nhất $a = 5; b = -1$.
 b) $y = -2,5x$ là hàm số bậc nhất $a = -2,5; b = 0$.
 c) $y = 3(x - 2) + 1$ là hàm số bậc nhất $a = 3; b = -5$.
 d) $y = 2x^2 - 5$ không là hàm số bậc nhất.

□

✎ **Ví dụ 2.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy chỉ rõ các hệ số a và b trong trường hợp đó là hàm số bậc nhất.

- a) $y = 1 - 5x$; $\text{a} = -5; b = 1$ b) $y = 0,5x$; $\text{a} = 0,5; b = 0$
 c) $y = -\frac{1}{2}(x - 6) + 1$; $\text{a} = -\frac{1}{2}, b = 4$ d) $y = x^2 + \sqrt{5}$. Không có

Lời giải.

- a) $y = 1 - 5x$ là hàm số bậc nhất $a = -5$, $b = 1$.
- b) $y = 0,5x$; là hàm số bậc nhất $a = -$, $0,5$, $b = 0$.
- c) $y = -\frac{1}{2}(x - 6) + 1$ là hàm số bậc nhất $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$.
- d) $y = x^2 + \sqrt{5}$ không là hàm số bậc nhất.

□

❖ **Ví dụ 3.** Tìm các giá trị của tham số m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

- a) $y = mx + 1$; 🔍 $m \neq 0$ b) $y = mx + \sqrt{m+1}$; 🔍 $m \neq 0, m \geq -1$
- c) $y = m(x - 1) + 3$; 🔍 $m \neq 0$ d) $y = (m^2 - m)x^2 + mx + 8$. 🔍 $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

- a) $y = mx + 1$ là hàm số bậc nhất khi $m \neq 0$.
- b) $y = mx + \sqrt{m+1}$ là hàm số bậc nhất khi $m \neq 0, m \geq -1$.
- c) $y = m(x - 1) + 3$ là hàm số bậc nhất khi $m \neq 0$.
- d) $y = (m^2 - m)x^2 + mx + 8$ là hàm số bậc nhất khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

□

❖ **Ví dụ 4.** Tìm các giá trị của tham số m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

- a) $y = mx$; 🔍 $m \neq 0$ b) $y = \frac{m}{2}x + \sqrt{m+1}$; 🔍
- c) $y = m(x - 1) + 3 + m$; 🔍 d) $y = (m^2 + m)x^2 + mx + 8$. 🔍 $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -1 \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

- a) $y = mx$ là hàm số bậc nhất khi $m \neq 0$.
- b) $y = \frac{m}{2}x + \sqrt{m+1}$ là hàm số bậc nhất khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -1 \end{cases}$.
- c) $y = m(x - 1) + 3 + m$ là hàm số bậc nhất khi $m \neq 0$.
- d) $y = (m^2 + m)x^2 + mx + 8$ là hàm số bậc nhất khi $m = -1$.

□

❖ **Ví dụ 5.** Chứng minh rằng các hàm số sau là hàm số bậc nhất với mọi giá trị của tham số m :

- a) $y = (m^2 + 1)x + 1$; b) $y = \sqrt{m^2 + 1}(x - 1)$.

💬 **Lời giải.**

- a) Hệ số $a = m^2 + 1 \neq 0 \forall m$ nên hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b) Hệ số $a = \sqrt{m^2 + 1} \neq 0 \forall m$ nên hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

□

❖ **Ví dụ 6.** Chứng minh rằng các hàm số sau là hàm số bậc nhất với mọi giá trị của tham số m :

a) $y = 2(m^2 + 1)x + 1$;

b) $y = \sqrt{m^2 + 1}(x - 2)$.

💬 **Lời giải.**

a) Hệ số $a = 2(m^2 + 1) \neq 0 \forall m$ nên hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b) Hệ số $a = \sqrt{m^2 + 1} \neq 0 \forall m$ nên hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

□

📁 Dạng 2. Tìm hàm số bậc nhất thỏa mãn yêu cầu cho trước

❖ **Ví dụ 7.** Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 1$. Tìm hệ số a , biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2$. 🔗 $a = 1$

💬 **Lời giải.**

Thay $x = 1, y = 2$ vào hàm số ta được $2 = a \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow a = 1$.

□

❖ **Ví dụ 8.** Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 1$. Tìm hệ số a , biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 3$. 🔗 $a = 2$

💬 **Lời giải.**

Thay $x = 1, y = 3$ vào hàm số ta được $3 = a \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow a = 2$.

□

❖ **Ví dụ 9.** Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Tìm hệ số a, b biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2$; khi $x = 2$ thì $y = 5$. 🔗 $a = 3; b = -1$

💬 **Lời giải.**

Thay $x = 1, y = 2$ vào hàm số ta được $2 = a \cdot 1 + b \Leftrightarrow a + b = 2$. (1)

Thay $x = 1, y = 2$ vào hàm số ta được $5 = a \cdot 2 + b \Leftrightarrow 2a + b = 5$. (2)

Trừ từng vế ta được $a = 3 \Rightarrow b = -1$.

□

❖ **Ví dụ 10.** Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Tìm hệ số a, b biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2$; khi $x = -2$ thì $y = -1$. 🔗 $a = 1; b = 1$

💬 **Lời giải.**

Thay $x = 1, y = 2$ vào hàm số ta được $2 = a \cdot 1 + b \Leftrightarrow a + b = 2$. (1)

Thay $x = 1, y = 2$ vào hàm số ta được $-1 = a \cdot (-2) + b \Leftrightarrow -2a + b = -1$. (2)

Trừ từng vế ta được $a = 1 \Rightarrow b = 1$.

□

❖ **Ví dụ 11.** Cho hàm số $y = (m - 1)x + 1 - 4m^2$.

a) Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất. 🔗 $m \neq 1$

b) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ. 🔗 $m = \pm \frac{1}{2}$

💬 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = (m - 1)x + 1 - 4m^2$ là hàm số bậc nhất khi $m \neq 1$.

b) Thay $x = 0$; $y = 0$ vào hàm số ta được $0 = (m - 1) \cdot 0 + 1 - 4m^2 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.



❖ **Ví dụ 12.** Cho hàm số $y = (m + 1)x + 9m^2 - 1$.

a) Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

🔍 $m \neq -1$

b) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

🔍 $m = \pm \frac{1}{3}$

💬 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = (m + 1)x + 9m^2 - 1$ là hàm số bậc nhất khi $m \neq -1$.

b) Thay $x = 0$; $y = 0$ vào hàm số ta được $0 = (m + 1) \cdot 0 + 9m^2 - 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{3}$.



📁 Dạng 3. Biểu diễn tọa độ các điểm trong mặt phẳng tọa độ

Để biểu diễn tọa độ điểm $M(x_0; y_0)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ta làm như sau:

- 🕒 Vẽ đường thẳng song song với trục Oy tại điểm có hoành độ $x = x_0$;
- 🕒 Vẽ đường thẳng song song với trục Ox tại điểm có tung độ $y = y_0$;
- 🕒 Giao điểm của hai đường thẳng vẽ ở trên chính là tọa độ của điểm $M(x_0; y_0)$.

❖ **Ví dụ 13.** Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả các điểm

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) Có tung độ bằng 0; | b) Có hoành độ bằng 0; |
| c) Có hoành độ bằng 3; | d) Có hoành độ bằng 2; |
| e) Có tung độ bằng hai lần hoành độ; | f) Có hoành độ bằng hai lần tung độ. |

💬 **Lời giải.**

- a) Đường thẳng $y = 0$.
 b) Đường thẳng $x = 0$.
 c) Đường thẳng $y = 3$.
 d) Đường thẳng $x = -2$.
 e) Đường thẳng $y = 2x$.
 f) Đường thẳng $y = \frac{x}{2}$.



❖ **Ví dụ 14.** Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả các điểm:

- a) Có tung độ bằng 2.
 b) Có hoành độ bằng 1.

🔍 $y = 2$

🔍 $x = 1$

c) Có hoành độ và tung độ bằng nhau.

$$y = x$$

d) Có hoành độ và tung độ đối nhau.

$$y = -x$$

Lời giải.

a) Tập hợp các điểm có tung độ bằng 2 là đường thẳng $y = 2$.

b) Tập hợp các điểm có hoành độ bằng 1 là đường thẳng $x = 1$.

c) Tập hợp các điểm có hoành độ và tung độ bằng nhau là đường thẳng $y = x$.

d) Tập hợp các điểm có hoành độ và tung độ đối nhau là đường thẳng $y = -x$.

□

❖ **Ví dụ 15.** Tìm khoảng cách giữa hai điểm trong mặt phẳng tọa độ, biết rằng:

a) $A(1; 1)$ và $B(6; 4)$.

$$AB = \sqrt{34}$$

b) $M(-1; 1)$ và $N(-2; 2)$.

$$MN = \sqrt{2}$$

c) $P(x_1; y_1)$ và $Q(x_2; y_2)$.

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Lời giải.

a) Khoảng cách giữa hai điểm A, B là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{34}.$$

b) Tương tự $MN = \sqrt{2}$.

c) $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

□

❖ **Ví dụ 16.** Tìm khoảng cách giữa hai điểm trong mặt phẳng tọa độ, biết rằng:

a) $A(2; 2)$ và $B(6; 4)$.

$$AB = 2\sqrt{5}$$

b) $M(-1; 1)$ và $N(3; 2)$.

$$MN = \sqrt{17}$$

Lời giải.

a) Khoảng cách giữa hai điểm A, B là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = 2\sqrt{5}.$$

b) Tương tự câu a). $MN = \sqrt{17}$.

□

Dạng 4. Kiểm tra tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Xét hàm số bậc nhất $y = ax + b (a \neq 0)$

☑ Khi $a > 0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

☑ Khi $a < 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

❖ **Ví dụ 17.** Các hàm số bậc nhất dưới đây đồng biến hay nghịch biến? Vì sao?

a) $y = 1 - 5x$

🔍 Nghịch biến

b) $y = 2x + 1$

🔍 Đồng biến

c) $y = (\sqrt{3} - 1)x + 1$

🔍 Đồng biến

d) $y = (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{3}$

🔍 Nghịch biến

💬 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = 1 - 5x$ nghịch biến vì $a = -5 < 0$.b) Hàm số $y = 2x + 1$ đồng biến vì $a = 2 > 0$.c) Hàm số $y = (\sqrt{3} - 1)x + 1$ đồng biến vì $a = \sqrt{3} - 1 > 0$.d) Hàm số $y = (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{3}$ nghịch biến vì $a = 1 - \sqrt{2} < 0$.

□

❖ **Ví dụ 18.** Các hàm số bậc nhất dưới đây đồng biến hay nghịch biến? Vì sao?

a) $y = -2x + 1$

🔍 Nghịch biến

b) $y = x + 1$

🔍 Đồng biến

c) $y = (\sqrt{3} + 1)x + 1$

🔍 Đồng biến

d) $y = (1 - \sqrt{2})x$

🔍 Nghịch biến

💬 **Lời giải.**

Tương tự bài 11A.

□

❖ **Ví dụ 19.** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = (m - 1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

🔍 $m > 1$

b) $y = (1 - m)x + 1 + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

🔍 $m < 1$

💬 **Lời giải.**

a) Để hàm số $y = (m - 1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.b) Để hàm số $y = (1 - m)x + 1 + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $1 - m < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

□

❖ **Ví dụ 20.** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = (m + 1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

🔍 $m > -1$

b) $y = (2 - m)x + 1 + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

🔍 $m < 2$

💬 **Lời giải.**

a) Để hàm số $y = (m + 1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.b) Để hàm số $y = (2 - m)x + 1 + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $2 - m < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

□

C – BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy chỉ rõ các hệ số a và b trong trường hợp đó là hàm số bậc nhất.

a) $y = x - 1$

b) $y = 2,5x$

c) $y = 2(x - 1) + 1$

d) $y = x^2 - x - 4$

💬 **Lời giải.**

a) $y = x - 1$ là hàm số bậc nhất với $a = 1, b = -1$.

b) $y = 2,5x$ là hàm số bậc nhất với $a = 2,5, b = 0$.

c) $y = 2(x - 1) + 1$ là hàm số bậc nhất với $a = 2, b = -1$.

d) $y = x^2 - x - 4$ không là hàm số bậc nhất.

□

❖ **Bài 2.** Tìm các giá trị của tham số m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

a) $y = mx - 1$

💡 $m \neq 0$

b) $y = mx - \sqrt{m+2}$

💡 $m \neq 0; m \geq -2$

c) $y = m(x - 2)$

💡 $m \neq 0$

d) $y = (m^2 - 2m)x^2 + mx + 1$

💡 $m \neq 0; m \neq 2$

💬 **Lời giải.**

a) Để $y = mx - 1$ là hàm số bậc nhất thì $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

b) Để $y = mx - \sqrt{m+2}$ là hàm số bậc nhất thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ m+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -2 \end{cases}$.

c) $y = m(x - 2)$ là hàm số bậc nhất thì $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

d) $y = (m^2 - 2m)x^2 + mx + 1$ là hàm số bậc nhất thì $a \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m(m - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

□

❖ **Bài 3.** Chứng minh rằng các hàm số sau là hàm số bậc nhất với mọi giá trị của tham số m .

a) $y = (3m^2 + 1)x$

b) $y = \sqrt{2m^2 + 1}(x - 2)$

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $3m^2 + 1 \neq 0, \forall m$ nên hàm số $y = (3m^2 + 1)x$ luôn là hàm bậc nhất với mọi m .

b) Ta có $2m^2 + 1 \neq 0, \forall m$ nên hàm số $y = \sqrt{2m^2 + 1}(x - 2)$ luôn là hàm bậc nhất với mọi m .

□

❖ **Bài 4.** Cho hàm số bậc nhất $y = 2ax + 1$. Tìm hệ số a , biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2$ 💡 $a = \frac{1}{2}$

Lời giải.

Thay $x = 1, y = 2$ vào hàm số ta được $2 = 2a.1 + 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. □

✧ **Bài 5.** Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Tìm hệ số a, b biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2$; khi $x = 2$ thì $y = 6$. 🔗 $a = 4, b = -2$

Lời giải.

✔ Thay $x = 1$ và $y = 2$ vào $y = ax + b$ ta được $a + b = 2$. (1)

✔ Thay $x = 2$ và $y = 6$ vào $y = ax + b$ ta được $2a + b = 6$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$. □

✧ **Bài 6.** Cho hàm số $y = (m + 1)x + m^2 - 16$

a) Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất. 🔗 $m \neq -1$

b) Tìm m để hàm số đi qua gốc tọa độ. 🔗 $m = 4, m = -4$

Lời giải.

a) Để hàm số là hàm bậc nhất thì $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

b) Để hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ thì $0 = (m + 1).0 + m^2 - 16 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = 4; m = -4$. □

✧ **Bài 7.** Tìm khoảng cách giữa hai điểm trong mặt phẳng tọa độ, biết rằng:

a) $A(1; 1)$ và $B(1; 4)$ 🔗 3

b) $M(1; 2)$ và $N(4; 2)$ 🔗 $\sqrt{5}$

c) $P(a; b)$ và $Q(c; d)$ 🔗 $PQ = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$

Lời giải.

a) Khoảng cách giữa hai điểm A và B là: $AB = \sqrt{(1 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = 3$.

b) Tương tự $MN = \sqrt{(4 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{5}$.

c) $PQ = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$ □

✧ **Bài 8.** Tìm khoảng cách giữa hai điểm trong mặt phẳng tọa độ, biết rằng:

a) $A(-2; 1)$ và $B(6; 2)$ 🔗 $\sqrt{65}$ b) $M(2; 1)$ và $N(4; 2)$ 🔗 $\sqrt{5}$

Lời giải.

a) $AB = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{65}$ b) $MN = \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5}$.



❖❖ **Bài 9.** Các hàm số bậc nhất dưới đây đồng biến hay nghịch biến? Vì sao?

- a) $y = 2x - 1$ 🔍 đồng biến b) $y = -x + 10$ 🔍 nghịch biến
- c) $y = (\sqrt{3} - \frac{1}{2})x + 1$ 🔍 đồng biến d) $y = (1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3}$ 🔍 nghịch biến

💬 **Lời giải.**

- a) Hàm số $y = 2x - 1$ đồng biến vì $a = 2 > 0$
- b) Hàm số $y = -x + 10$ nghịch biến vì $a = -1 < 0$
- c) Hàm số $y = (\sqrt{3} - \frac{1}{2})x + 1$ đồng biến vì $a = \sqrt{3} - \frac{1}{2} > 0$
- d) Hàm số $y = (1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3}$ nghịch biến vì $a = 1 - \sqrt{3} < 0$



❖❖ **Bài 10.** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- a) $y = (2m - 1)x + 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ 🔍 $m > \frac{1}{2}$
- b) $(1 + m)x + 1 + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. 🔍 $m < -1$

💬 **Lời giải.**

- a) Để $y = (2m - 1)x + 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.
- b) Để $(1 + m)x + 1 + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $1 + m < 0 \Leftrightarrow m < -1$.



BÀI 3. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $Y = AX + B$ ($A \neq 0$)

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng

- ☑ Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b ;
- ☑ Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$; trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

b) Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$):

- ☑ *Bước 1.* Cho $x = 0$ thì $y = b$, ta có điểm $A(0; b)$ thuộc trục tung Oy . Cho $y = 0$ thì $x = -\frac{b}{a}$, ta có điểm $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ thuộc trục hoành Ox ;
- ☑ *Bước 2.* Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B ta được đồ thị hàm số $y = ax + b$.

c) Cho hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$):

- ☑ *Trường hợp 1.* $a > 0$.
 - Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 - Đồ thị hàm số là một đường thẳng đi từ trái qua phải và có hướng từ dưới lên trên.
- ☑ *Trường hợp 2.* $a < 0$.
 - Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 - Đồ thị hàm số là một đường thẳng đi từ trái qua phải và có hướng từ trên xuống dưới.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Xét đường thẳng $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- ☑ Nếu $b = 0$ ta có đường thẳng $d: y = ax$ đi qua hai điểm $O(0; 0)$; $A(1; a)$.
- ☑ Nếu $b \neq 0$ đường thẳng đi qua hai điểm $O(0; b)$; $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

🔗 **Ví dụ 1.** Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

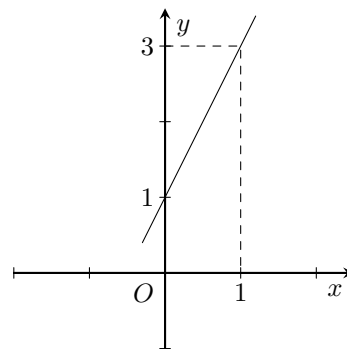
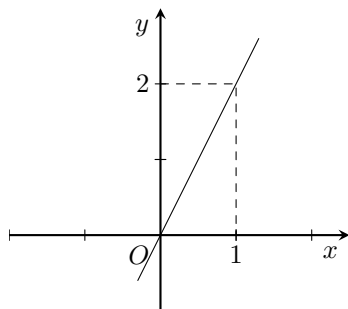
a) $y = 2x$;

b) $y = 2x + 1$;

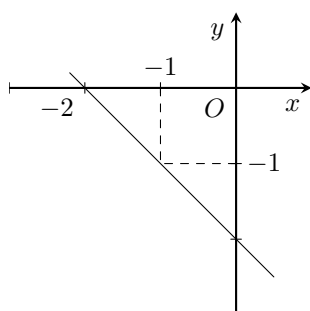
c) $y = -x - 2$.

 **Lời giải.**

- a) Đồ thị hàm số $y = 2x$ đi qua hai điểm là gốc tọa độ $O(0; 0)$ và $(1; 2)$
- b) Đồ thị hàm số $y = 2x + 1$ đi qua hai điểm $(0; 1)$ và $(1; 3)$



- c) Đồ thị hàm số $y = -x - 2$ đi qua hai điểm $(-1, -1)$ và $(0, -2)$

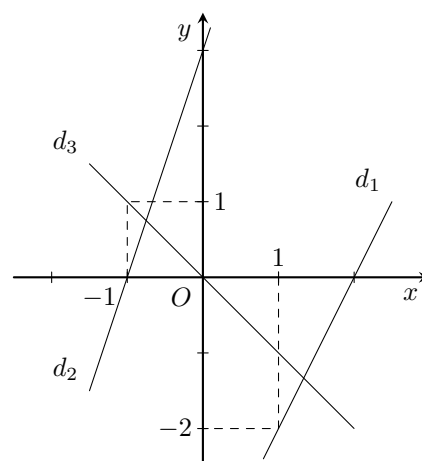


□

❖ **Ví dụ 2.** Vẽ đồ thị các hàm số sau trong cùng một hệ trục tọa độ: $y = 2x - 4$; $y = 3x + 3$; $y = -x$.

💬 **Lời giải.**

Đồ thị hàm số $d_1: y = 2x - 4$ đi qua hai điểm $(1; -2)$, $(2; 0)$;
 đồ thị hàm số $d_2: y = 3x + 3$ đi qua hai điểm $(-1; 0)$, $(0; 3)$;
 đồ thị hàm số $d_3: y = -x$ đi qua hai điểm $O(0; 0)$, $(-1; 1)$.



□

❖ **Ví dụ 3.**

- a) Vẽ đồ thị của các hàm số $d_1: y = \frac{2}{3}x + 2$ và $d_2: y = 2x + 2$ trong cùng một mặt phẳng tọa độ;
- b) Gọi A , B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d_1 , d_2 với trục hoành và giao điểm của hai đường thẳng là C . Tìm tọa độ giao điểm A , B , C ;

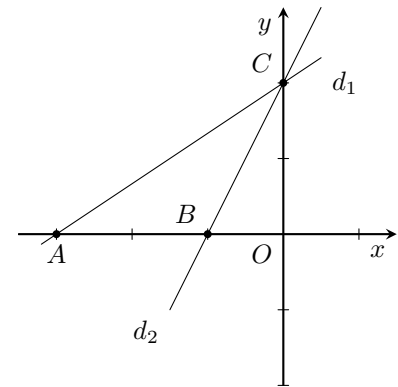
📍 $A(-3; 0)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 2)$

c) Tính diện tích tam giác ABC .

🔗 2 đvdt

💬 Lời giải.

- a) d_1 đi qua hai điểm có tọa độ là $(0, 2)$ và $(-3, 0)$ còn d_2 đi qua hai điểm có tọa độ là $(0, 2)$ và $(-1, 0)$.
- b) Dựa vào đồ thị ta có tọa độ các điểm cần tìm là $A(-3, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 2)$.
- c) Diện tích tam giác ABC là $\frac{1}{2} \cdot |y_C| \cdot |x_B - x_A| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (đơn vị diện tích).



□

💡 Ví dụ 4.

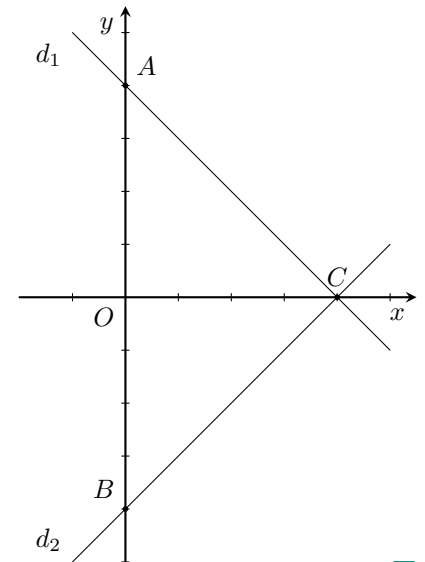
- a) Vẽ đồ thị của các hàm số $d_1: y = -x + 4$ và $d_2: y = x - 4$ trong cùng một mặt phẳng tọa độ;
- b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d_1, d_2 với trục tung và giao điểm của hai đường thẳng là C . Tìm tọa độ giao điểm A, B, C ;
- c) Tính diện tích tam giác ABC .

🔗 $A(0; 4), B(0; -4), C(4; 0)$

🔗 16 đvdt

💬 Lời giải.

- a) d_1 đi qua hai điểm có tọa độ là $(0, 4)$ và $(4, 0)$ còn d_2 đi qua hai điểm có tọa độ là $(0, -4)$ và $(4, 0)$.
- b) Dựa vào đồ thị ta có tọa độ các điểm cần tìm là $A(0, 4)$, $B(0, -4)$, $C(4, 0)$.
- c) Diện tích tam giác ABC là $\frac{1}{2} \cdot |x_C| \cdot |y_B - y_A| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$ (đơn vị diện tích)



□

📁 Dạng 2. Tìm tham số m biết hàm số bậc nhất đi qua điểm cho trước

- a) *Bước 1.* Thay tọa độ điểm thuộc đồ thị vào phương trình đường thẳng.
- b) *Bước 2.* Giải phương trình ẩn m .

💡 Ví dụ 5. Cho hàm số $y = (m - 1)x + 1$.

- a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(1; 2)$;
- b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $B(3; -2)$;

🔗 $m = 2$.

🔗 $m = 0$.

c) Vẽ đồ thị hàm số tìm được ứng với giá trị của m tìm được ở câu a) và b).

Lời giải.

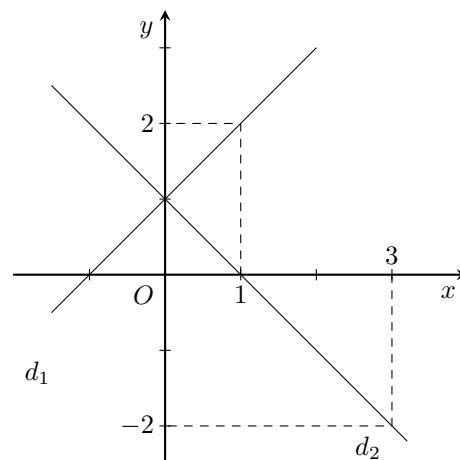
a) Thay $x = 1, y = 2$ vào $y = (m - 1)x + 1$. Ta được
 $2 = (m - 1) \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$.

b) Thay $x = 3, y = -2$ vào $y = (m - 1)x + 1$. Ta được
 $-2 = (m - 1) \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $B(3; -2)$.

c) Đồ thị hàm số ở câu a) đi qua hai điểm $(1; 2)$, $(0; 1)$ và đồ thị hàm số ở câu b) đi qua hai điểm $(3; -2)$, $(1; 0)$.



□

❖ **Ví dụ 6.** Cho hàm số $y = (m + 1)x - 1$.

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(1; 3)$;

🔴 $m = 3$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $B(3; 1)$;

🔴 $m = -\frac{1}{3}$.

c) Vẽ đồ thị hàm số tìm được ứng với giá trị của m tìm được ở câu a) và b).

Lời giải.

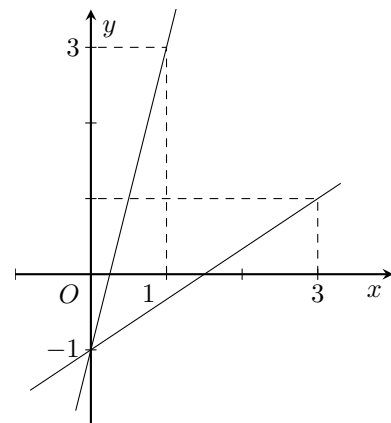
a) Thay $x = 1, y = 3$ vào $y = (m + 1)x - 1$. Ta được
 $3 = (m + 1) \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy hàm số có dạng: $y = 4x - 1$.

b) Thay $x = 3, y = 1$ vào $y = (m + 1)x - 1$. Ta được
 $1 = (m + 1) \cdot 3 - 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$.

Vậy hàm số có dạng: $y = \frac{2}{3}x - 1$.

c) Đồ thị hàm số ở câu a) đi qua hai điểm $(1; 3)$, $(0; -1)$ và đồ thị hàm số ở câu b) đi qua hai điểm $(3; 1)$, $(0; -1)$.



□

❖ **Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = (m - 2)x + m - 1$

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2;

🔴 $m = \frac{5}{3}$

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

🔴 $m = 3$

Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 có nghĩa điểm $(2; 0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Ta thay $x = 2, y = 0$ vào $y = (m - 2)x + m - 1$, ta được $0 = (m - 2) \cdot 2 + m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$.

Vậy hàm số có dạng: $y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}$.

- b) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 có nghĩa điểm $(0; 2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Ta thay $x = 0, y = 2$ vào $y = (m - 2)x + m - 1$, ta được $2 = m - 1 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy hàm số có dạng $y = x + 2$.



❖ Ví dụ 8. Cho hàm số $y = (m - 1)x + m$

- a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2;

🔗 $m = \frac{2}{3}$

- b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

🔗 $m = 2$

💬 Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 có nghĩa điểm $(2; 0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Ta thay $x = 2, y = 0$ vào $y = (m - 1)x + m$, ta được $0 = (m - 1) \cdot 2 + m \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}$.

- b) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 có nghĩa điểm $(0; 2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Ta thay $x = 0, y = 2$ vào $y = (m - 1)x + m$, ta được $2 = m \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy hàm số có dạng $y = x + 2$.



❖ Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(0; 3)$, $B(-2; 0)$ và $C(2; 0)$.

- a) Hãy viết phương trình đường thẳng AB , BC , CA ;

- b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC nếu coi độ dài mỗi đơn vị trên các trục Ox , Oy là 1 cm.

🔗 11,21 cm; 6 cm²

💬 Lời giải.

a) Phương trình đường thẳng AB có dạng tổng quát $y = ax + b$.

Thế $x = 0, y = 3$ vào ta được $3 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow y = ax + 3$.

Thế $x = -2, y = 0$ vào ta được $0 = -2a + 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = \frac{3}{2}x + 3$.

Phương trình đường thẳng BC có dạng tổng quát $y = ax + b$.

Thế $x = -2, y = 0$ vào ta được $0 = a \cdot (-2) + b \Leftrightarrow -2a + b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$. (1)

Thế $x = 2, y = 0$ vào ta được $0 = a \cdot 2 + b \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2a$. (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được $a = b = 0$.

Vậy đường thẳng BC có dạng $y = 0$ (trục hoành).

Tương tự câu a) ta tìm được phương trình đường thẳng AC có dạng

$$y = -\frac{3}{2}x + 3.$$

b) Biểu diễn tọa độ ba điểm A, B, C lên mặt phẳng tọa độ.

Áp dụng Pitago trong tam giác AOB vuông tại O , ta có: $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{13}$.

Tương tự vậy ta tính được $AC = \sqrt{13}$.

Chu vi tam giác $ABC = AB + AC + BC = \sqrt{13} + \sqrt{13} + 4 \approx 11,21$ (cm).

Diện tích tam giác $ABC = \frac{1}{2}AO \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (cm²).

□

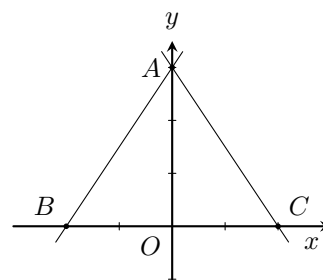
❖ **Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(0; -3)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 0)$.

a) Hãy viết phương trình đường thẳng AB, BC, CA ;

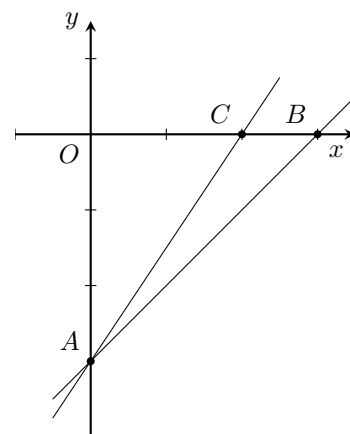
b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC nếu coi độ dài mỗi đơn vị trên các trục Ox, Oy là 1 cm.

🔗 8,85 cm; 1,5 cm²

💬 **Lời giải.**



- a) Phương trình đường thẳng AB có dạng tổng quát $y = ax + b$.
 Vì đồ thị đi qua điểm $A(0; -3)$ nên thế $x = 0, y = -3$ vào ta được
 $-3 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow y = ax - 3$.
 Vì đồ thị đi qua điểm $B(3; 0)$ nên thế $x = 3, y = 0$ vào ta được
 $0 = 3a - 3 \Rightarrow a = 1$.
 Vậy phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = x - 3$.
 Phương trình đường thẳng BC có dạng tổng quát $y = ax + b$.
 Vì đồ thị đi qua điểm $B(3; 0)$ nên thế $x = 3, y = 0$ vào.
 Ta được $0 = a \cdot 3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 0 \Leftrightarrow b = -3a$ (1)
 Vì đồ thị đi qua điểm $C(2; 0)$ nên thế $x = 2, y = 0$ vào.
 Ta được $0 = a \cdot 2 + b \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2a$ (2)
 Từ (1) và (2) ta tìm được $a = b = 0$.
 Vậy đường thẳng BC có dạng $y = 0$ (trục hoành).
 Tương tự câu a) ta tìm được phương trình đường thẳng AC có
 dạng $y = \frac{3}{2}x - 3$.



- b) Biểu diễn tọa độ ba điểm A, B, C lên mặt phẳng tọa độ. Áp dụng Pitago trong tam giác AOB vuông tại O , ta có: $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{18}$.
 Tương tự vậy ta tính được $AC = \sqrt{13}$.
 Chu vi tam giác $ABC = AB + AC + BC = \sqrt{18} + \sqrt{13} + 1 \approx 8,85$ (cm).
 Diện tích tam giác $ABC = \frac{1}{2}AO \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$ (cm²).

□

Dạng 3. Xác định giao điểm của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d: ax + b$ và $d': y = a'x + b'$; ($a \neq a'$). Để xác định giao điểm của hai đường thẳng d và d' , ta thường làm như sau:

☑ **Cách 1:** Phương pháp đồ thị.

- Bước 1. Vẽ hai đường thẳng d và d' trong cùng một hệ tọa độ;
- Bước 2. Xác định tọa độ giao điểm trên hình vẽ;
- Bước 1. Kiểm tra tọa độ giao điểm đó cùng thuộc hai đường thẳng d và d' .

☑ **Cách 2:** Phương pháp đại số.

- Bước 1. Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và d' : $ax + b = a'x + b'$, tìm nghiệm x_0 ;
- Bước 2. Tính $y_0 = ax_0 + b$ từ đó suy ra giao điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$.

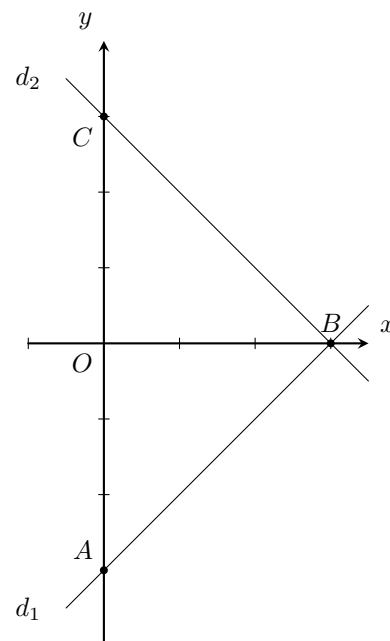
🔗 **Ví dụ 11.** Cho hai đường thẳng $d_1: y = x - 3$ và $d_2: y = 3 - x$.

- a) Vẽ các đường thẳng d_1, d_2 trong cùng một hệ trục tọa độ;
 b) Dựa vào đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

📍 (3; 0)

Lời giải.

- a) Đường thẳng d_1 đi qua hai điểm $(0; -3)$ và $(3; 0)$; đường thẳng d_2 đi qua hai điểm $(0; 3)$ và $(3; 0)$
- b) Dựa vào đồ thị ta thấy giao điểm của d_1 và d_2 là điểm B có tọa độ $(3; 0)$. Kiểm tra lại, thế tọa độ điểm B vào phương trình đường thẳng d_1 và d_2 ta thấy đều thỏa mãn. Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(3; 0)$.



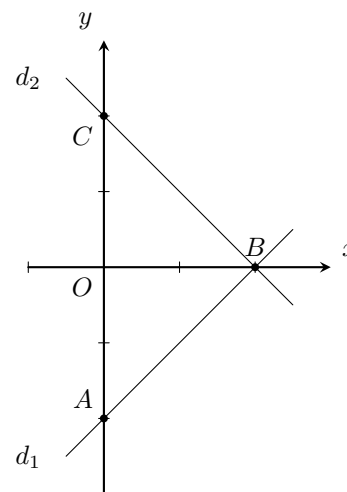
❖ **Ví dụ 12.** Cho hai đường thẳng $d_1: y = x - 2$ và $d_2: y = 2 - x$.

- a) Vẽ các đường thẳng d_1, d_2 trong cùng một hệ trục tọa độ;
- b) Dựa vào đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

🔗 (2; 0)

💬 **Lời giải.**

- a) Đường thẳng d_1 đi qua hai điểm $(0; -2)$ và $(2; 0)$; đường thẳng d_2 đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(2; 0)$
- b) Dựa vào đồ thị ta thấy giao điểm của d_1 và d_2 là điểm B có tọa độ $(2; 0)$. Kiểm tra lại, thế tọa độ điểm B vào phương trình đường thẳng d_1 và d_2 ta thấy đều thỏa mãn. Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(2; 0)$.



❖ **Ví dụ 13.** Cho các đường thẳng $d_1: y = 2x + 1$; $d_2: y = 3x - 4$; $d_3: y = \frac{1}{2}x - 3$; $d_4: y = -x$.
Tìm giao điểm của các đường thẳng:

- a) d_1 và d_2 ; 🔗 (5; 11) b) d_3 và d_4 .

🔗 (6; -6)

💬 **Lời giải.**

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $2x + 1 = 3x - 4 \Leftrightarrow x = 5$.
Thay $x = 5$ vào $y = 2x + 1 \Rightarrow y = 11$.
Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(5; 11)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_3 và d_4 : $\frac{1}{2}x - 3 = -x \Leftrightarrow x = 6$.

Thay $x = 6$ vào $y = -x \Rightarrow y = -6$.

Vậy tọa độ giao điểm của d_3 và d_4 là $(6; -6)$.

□

❖ **Ví dụ 14.** Cho các đường thẳng $d_1: y = x + 1$; $d_2: y = 2x - 3$; $d_3: y = \frac{1}{2}x$; $d_4: y = -x + 1$. Tìm giao điểm của các đường thẳng:

a) d_1 và d_2 ;

📍 $(4; 5)$

b) d_3 và d_4 .

📍 $(2; -2)$

💬 **Lời giải.**

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $x + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 4$.

Thay $x = 4$ vào $y = x + 1 \Rightarrow y = 5$.

Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(4; 5)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_3 và d_4 : $\frac{1}{2}x = -x + 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Thay $x = 2$ vào $y = -x \Rightarrow y = -2$.

Vậy tọa độ giao điểm của d_3 và d_4 là $(2; -2)$.

□

📁 Dạng 4. Xét tính đồng quy của ba đường thẳng

📍 Ba đường thẳng đồng quy là ba đường thẳng phân biệt cùng đi qua một điểm.

📍 Để xét tính đồng quy của ba đường thẳng (phân biệt) cho trước ta làm như sau:

— *Bước 1.* Tìm tọa độ giao điểm hai trong ba đường thẳng đã cho;

— *Bước 2.* Kiểm tra tọa độ giao điểm vừa tìm được thuộc đường thẳng còn lại thì ba đường thẳng đó đồng quy và ngược lại.

❖ **Ví dụ 15.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = x - 2$, $d_2: y = 2x - 3$ và $d_3: y = -x$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 ;

📍 $(1; -1)$

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 đồng quy.

💬 **Lời giải.**

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 : $x - 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 1$, thay $x = 1$ vào $y = x - 2 \Rightarrow y = -1$.

Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(1; -1)$.

b) Thế $x = 1$, $y = -1$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được $-1 = -1$ là đẳng thức đúng. Suy ra điểm $(1; -1)$ thuộc đường thẳng d_3 .

Vậy ba đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 đồng quy.

□

❖ **Ví dụ 16.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = x - 2$, $d_2: y = 2 - x$ và $d_3: y = 2x - 4$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 ;

📍 $(2; 0)$

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 đồng quy.

 Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 : $x - 2 = 2 - x \Leftrightarrow x = 2$, thay $x = 2$ vào $y = 2 - x \Rightarrow y = 0$.

Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(2; 0)$.

b) Thế $x = 2$, $y = 0$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được $0 = 0$ là đẳng thức đúng. Suy ra điểm $(2; 0)$ thuộc đường thẳng d_3 .

Vậy ba đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 đồng quy. □

❖ **Ví dụ 17.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = 2x + 1$, $d_2: y = 1 - x$ và $d_3: y = 4x + 1$. Chứng minh rằng d_1 , d_2 và d_3 đồng quy.

 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 : $2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$, thay $x = 0$ vào $y = 2x + 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(0; 1)$.

Thế $x = 0$, $y = 1$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được $1 = 1$ là đẳng thức đúng. Suy ra điểm $(0; 1)$ thuộc đường thẳng d_3 .

Vậy ba đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 đồng quy. □

❖ **Ví dụ 18.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = x + 1$, $d_2: y = 1 - 3x$ và $d_3: y = \frac{1}{3}x + 1$. Chứng minh rằng d_1 , d_2 và d_3 đồng quy.

 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 : $x + 1 = 1 - 3x \Leftrightarrow x = 0$, thay $x = 0$ vào $y = \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow y = 1$. Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(0; 1)$.

Thế $x = 0$, $y = 1$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được $1 = 1$ là đẳng thức đúng. Suy ra điểm $(0; 1)$ thuộc đường thẳng d_3 .

Vậy ba đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 đồng quy. □

❖ **Ví dụ 19.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = x + 2$, $d_2: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ và $d_3: y = (2 - m)x + 1$.

a) Tìm giao điểm A của hai đường thẳng d_1 và d_2 ;

 $A(-1; 1)$

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d_3 đi qua điểm A ;

 $m = 2$

c) Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

 $m = 2$

 Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $x + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -1$, thay $x = -1$ vào $y = x + 2 \Rightarrow y = 1$.

Vậy giao điểm của d_1 và d_2 là $A(-1; 1)$.

b) Thế $x = -1$ và $y = 1$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được:
 $(2 - m)(-1) + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 2$. Vậy khi $m = 2$ thì đường thẳng d_3 đi qua A .

- c) Theo câu a) A là giao điểm của d_1 và d_2 , theo câu b) với $m = 2$ thì d_3 cũng đi qua A .
 Mặt khác lúc đó cả đường thẳng đều phân biệt.
 Vậy $m = 2$ thì ba đường thẳng đồng quy tại A .



❖ **Ví dụ 20.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = x - 2$, $d_2: y = 2 - x$ và $d_3: y = (2 - m)x + 1$.

- a) Tìm giao điểm A của hai đường thẳng d_1 và d_2 ; 🔗 $A(2; 0)$
 b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d_3 đi qua điểm A ; 🔗 2
 c) Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng đã cho đồng quy. 🔗 2

💬 Lời giải.

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $x - 2 = 2 - x \Leftrightarrow x = 2$, thay $x = 2$ vào $y = x - 2 \Rightarrow y = 0$.
 Vậy giao điểm của d_1 và d_2 là $A(2; 0)$.
 b) Thế $x = 2$ và $y = 0$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được:
 $(2 - m) \cdot 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-5}{2}$.
 Vậy khi $m = \frac{-5}{2}$ thì đường thẳng d_3 đi qua A .
 c) Theo câu a) A là giao điểm của d_1 và d_2 , theo câu b) với $m = \frac{-5}{2}$ thì d_3 cũng đi qua A .
 Mặt khác lúc đó cả đường thẳng đều phân biệt.
 Vậy $m = 2$ thì ba đường thẳng đồng quy tại A .



❖ **Ví dụ 21.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = -x + 1$, $d_2: y = x - 1$ và $d_3: y = -4ax + 2a - 1$. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng d_1 cắt d_2 tại một điểm thuộc đường thẳng d_3 . 🔗 $a = \frac{-1}{2}$

💬 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $-x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$, thay $x = 1$ vào $y = x - 1 \Rightarrow y = 0$.
 Vậy giao điểm của d_1 và d_2 là $A(1; 0)$;
 Thế $x = 1$ và $y = 0$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được: $-4a + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}$.
 Vậy khi $a = \frac{-1}{2}$ là giá trị cần tìm. 🔗

❖ **Ví dụ 22.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = -x + 1$, $d_2: y = x$ và $d_3: y = -ax + 2a + 1$. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng d_1 cắt d_2 tại một điểm thuộc đường thẳng d_3 . 🔗 $a = \frac{-1}{3}$

💬 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $-x + 1 = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, thay $x = \frac{1}{2}$ vào $y = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.
 Vậy giao điểm của d_1 và d_2 là $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;
 Thế $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được: $-a \cdot \frac{1}{2} + 2a + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{-1}{3}$.
 Vậy khi $a = \frac{-1}{3}$ là giá trị cần tìm. 🔗

Dạng 5. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới một đường thẳng cho trước không đi qua O

Để tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng d không đi qua O , ta làm như sau:

- ☑ **Bước 1.** Tìm lần lượt tọa độ giao điểm A, B của đường thẳng d với hai trục tọa độ Ox, Oy ;
- ☑ **Bước 2.** Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d . Xét tam giác vuông OAB có hệ thức $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$.

Từ đó tính được độ dài OH chính là khoảng cách từ O đến đường thẳng d .

🔗 **Ví dụ 23.** Cho đường thẳng $d: y = x + 1$. Tính khoảng cách:

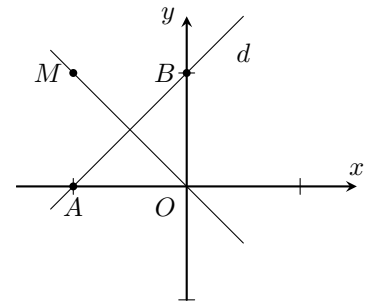
- a) Từ gốc tọa độ O tới đường thẳng d ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) Từ điểm $M(-1; 1)$ tới đường thẳng d . $\frac{\sqrt{2}}{2}$

💬 **Lời giải.**

- a) Giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt là $A(-1; 0), B(0; 1)$. Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d . Ta có thể thức:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = 2 \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng d là $\sqrt{\frac{1}{2}}$.



- b) Ta có M và O đối xứng nhau qua đường thẳng d nên khoảng cách từ M đến đường thẳng d cũng bằng $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

□

🔗 **Ví dụ 24.** Cho đường thẳng $d: y = x - 1$. Tính khoảng cách:

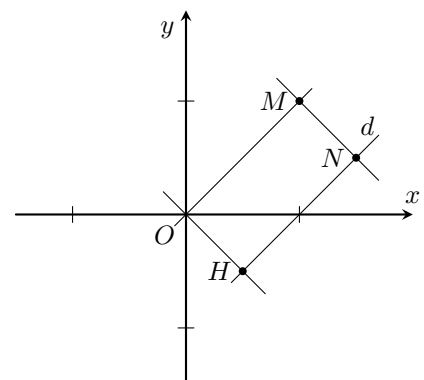
- a) Từ gốc tọa độ O tới đường thẳng d ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) Từ điểm $M(1; 1)$ tới đường thẳng d . $\frac{\sqrt{2}}{2}$

💬 **Lời giải.**

- a) Giao điểm của đường thẳng $y = x - 1$ với hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt là $A(1; 0), B(0; -1)$. Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d .

$$\text{Ta có thể thức: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = 2 \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng d là $\sqrt{\frac{1}{2}}$.



- b) Vẽ điểm N là hình chiếu của M lên AB khi đó ta được $OMNH$ là hình chữ nhật, nên $OH = MN$ suy ra khoảng cách của M tới đường thẳng AB là $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

□

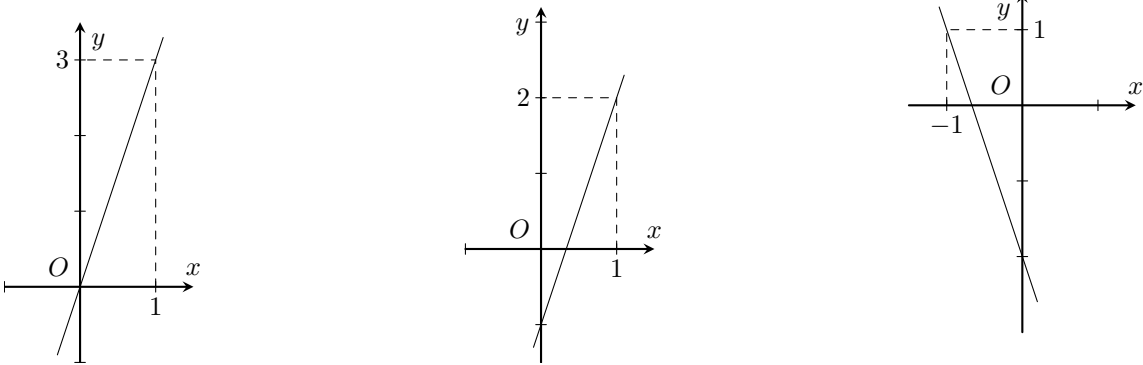
C – BÀI TẬP VỀ NHÀ

🔗 **Bài 1.** Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

- a) $y = 3x$;
- b) $y = 3x - 1$;
- c) $y = -3x - 2$.

💬 **Lời giải.**

- a)
- b)
- c)



🔗 **Bài 2.**

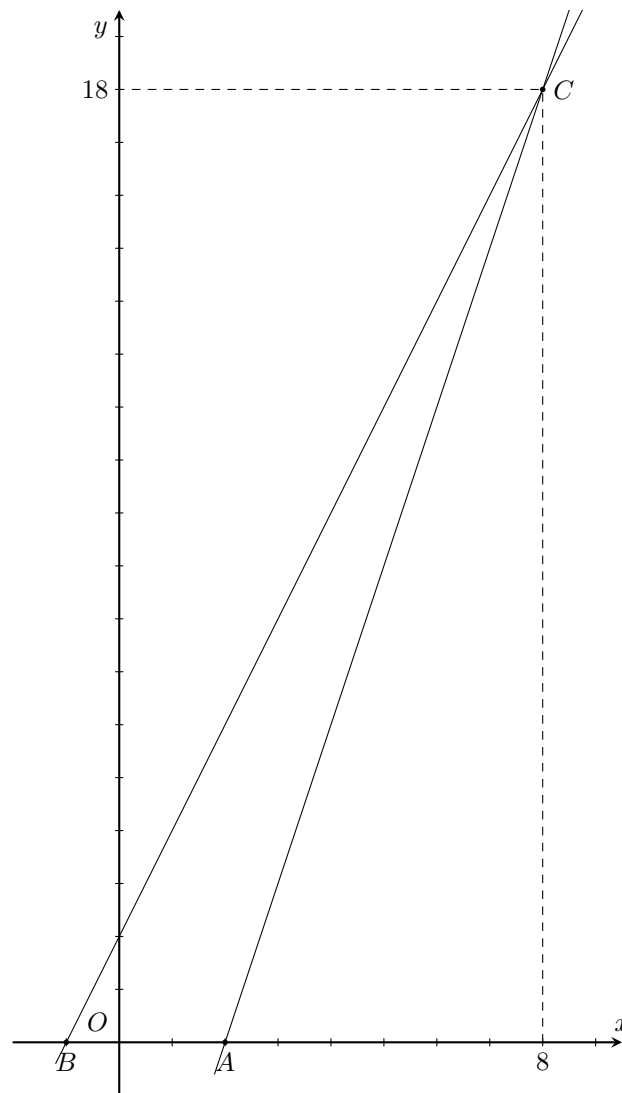
- a) Vẽ đồ thị của các hàm số $d_1: y = 3x - 6$ và $d_2: y = 2x + 2$ trong cùng một mặt phẳng tọa độ;
- b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của các đường thẳng d_1, d_2 với trục hoành và giao điểm của hai đường thẳng là C . Tìm tọa độ giao điểm A, B, C ;
- c) Tìm diện tích tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**

a)

b) Tọa độ giao điểm của d_1, d_2 với trục hoành là $A(2; 0), B(-1; 0)$. Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $3x - 6 = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 8$, thế $x = 8$ vào $y = 2x + 2 \Rightarrow y = 18$. Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $C(8; 18)$.

c) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$



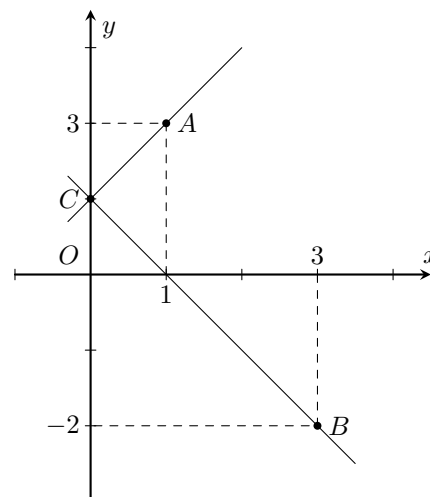
□

✧ **Bài 3.** Cho hàm số $y = (2m - 1)x + 1$ với m là tham số.

- Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$;
- Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $B(3; -2)$;
- Vẽ đồ thị hàm số tìm được ứng với giá trị của m tìm được ở câu a) và b).

💬 **Lời giải.**

- Thế $x = 1$ và $y = 2$ vào $y = (2m - 1)x + 1 \Rightarrow 2m - 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy $m = 1$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$. Khi đó hàm số câu a) có dạng: $d_1: y = x + 1$.
- Tương tự câu a) ta tìm được $m = 0$ khi đó hàm số câu b) có dạng $d_2: y = -x + 1$.
- Cả d_1 và d_2 đều qua điểm $C(0; 1)$, ta có đồ thị như hình





✧ **Bài 4.** Cho hàm số $y = (m + 2)x + m$ với m là tham số.

- Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2,
- Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2

💬 **Lời giải.**

- Thế $x = 2$ và $y = 0$ vào $y = (m + 2)x + m \Rightarrow (m + 2) \cdot 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$. Vậy $m = -\frac{4}{3}$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2.
- Thế $x = 0$ và $y = 2$ vào $y = (m + 2)x + m \Rightarrow m = 2$. Vậy $m = 2$ thì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2.

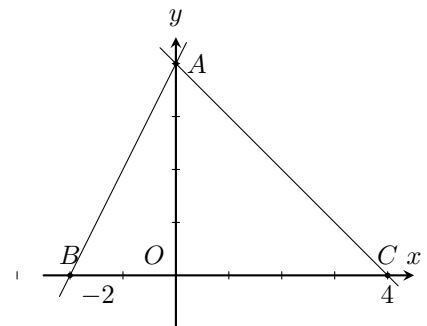


✧ **Bài 5.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(0; 4)$, $B(-2; 0)$ và $C(4; 0)$.

- Hãy viết phương trình các đường thẳng AB , BC , CA ;
- Tính chu vi và diện tích tam giác ABC nếu coi độ dài mỗi đơn vị trên các trục Ox , Oy là 1 cm.

💬 **Lời giải.**

- Phương trình đường thẳng AB có dạng tổng quát $y = ax + b$.
Thế $x = 0$, $y = 4$ vào ta được $4 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 4 \Rightarrow y = ax + 4$.
Thế $x = -2$, $y = 0$ vào ta được $0 = -2a + 4 \Rightarrow a = 2$. Vậy phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = 2x + 4$.
Phương trình đường thẳng BC có dạng tổng quát $y = ax + b$.
Thế $x = -2$, $y = 0$ vào ta được $0 = a \cdot (-2) + b \Leftrightarrow -2a + b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$ (1)
Thế $x = 4$, $y = 0$ vào ta được $0 = a \cdot 4 + b \Leftrightarrow 4a + b = 0 \Leftrightarrow b = -4a$ (2)
Từ (1) và (2) ta tìm được $a = b = 0$. Vậy đường thẳng BC có dạng $y = 0$ (trục hoành).
Tương tự câu a) ta tìm được phương trình đường thẳng AC có dạng $y = -x + 4$



- Biểu diễn tọa độ ba điểm A , B , C lên mặt phẳng tọa độ.
Áp dụng Pitago trong tam giác AOB vuông tại O , ta có:
 $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 2\sqrt{5}$. Tương tự vậy ta tính được $AC = 4\sqrt{2}$
Chu vi tam giác $ABC = AB + AC + BC = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 6 \approx 16,13$ (cm)
Diện tích tam giác $ABC = \frac{1}{2}AO \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ (cm²)



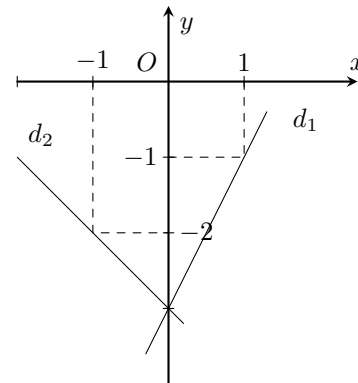
✧ **Bài 6.** Cho hai đường thẳng $d_1: y = 2x - 3$ và $d_2: y = -3 - x$.

- a) Vẽ các đường thẳng d_1, d_2 trong cùng một hệ trục tọa độ;
 b) Dựa vào đồ thị, hãy tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

📍 $(0; -3)$

🗨️ Lời giải.

- a) Đường thẳng d_1 đi qua hai điểm $(0; -3)$ và $(1; -1)$; đường thẳng d_2 đi qua hai điểm $(0; -3)$ và $(-1; 2)$.
 b) Dựa vào đồ thị ta thấy giao điểm của d_1 và d_2 là điểm A có tọa độ $(0; -3)$. Kiểm tra lại, thế tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d_1 và d_2 ta thấy đều thỏa mãn. Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $A(0; -3)$.



□

🔗 **Bài 7.** Cho các đường thẳng $d_1: y = 2x + 1$; $d_2: y = 3x + 4$; $d_3: y = \frac{1}{2}x - 3$; $d_4: y = -x + 2$. Tìm giao điểm của các đường thẳng:

- a) d_1 và d_2 ; 📍 $(-3; -5)$ b) d_3 và d_4 .

📍 $(\frac{10}{3}; \frac{-4}{3})$

🗨️ Lời giải.

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $2x + 1 = 3x + 4 \Leftrightarrow x = -3$. Thay $x = -3$ vào $y = 2x + 1 \Rightarrow y = -5$. Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(-3; -5)$.
 b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_3 và d_4 : $\frac{1}{2}x - 3 = -x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$. Thay $x = \frac{10}{3}$ vào $y = -x + 2 \Rightarrow y = \frac{-4}{3}$. Vậy tọa độ giao điểm của d_3 và d_4 là $(\frac{10}{3}; \frac{-4}{3})$.

□

🔗 **Bài 8.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = x - 2$, $d_2: y = 2x + 3$ và $d_3: y = 3x + 8$.

- a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 ;
 b) Chứng minh rằng ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

📍 $(-5; -7)$

🗨️ Lời giải.

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 : $x - 2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -5$, thay $x = -5$ vào $y = x - 2 \Rightarrow y = -7$. Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(-5; -7)$.
 b) Thế $x = -5, y = -7$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được $-7 = -7$ là đẳng thức đúng. Suy ra điểm $(-5; -7)$ thuộc đường thẳng d_3 . Vậy ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

□

✧ **Bài 9.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = 2x + 1$, $d_2: y = -2x + 3$ và $d_3: y = x + 1$. Chứng minh rằng d_1 , d_2 và d_3 đồng quy.

💬 **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 : $2x + 1 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 0$, thay $x = 0$ vào $y = 2x + 1 \Rightarrow y = 1$. Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(0; 1)$.

Thế $x = 0$, $y = 1$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được $1 = 1$ là đẳng thức đúng. Suy ra điểm $(0; 1)$ thuộc đường thẳng d_3 . Vậy ba đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 đồng quy. □

✧ **Bài 10.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = x + 2$, $d_2: y = 3x + 2$ và $d_3: y = (4 - m)x + 1 + m$.

- Tìm giao điểm A của hai đường thẳng d_1 và d_2 ; 🔗 $A(0; 2)$
- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d_3 đi qua điểm A ; 🔗 $m = 1$
- Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

💬 **Lời giải.**

- Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $x + 2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x = 0$, thay $x = 0$ vào $y = x + 2 \Rightarrow y = 2$. Vậy giao điểm của d_1 và d_2 là $A(0; 2)$
- Thế $x = 0$ và $y = 2$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được: $(4 - m) \cdot 0 + 1 + m = 2 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy khi $m = 1$ thì đường thẳng d_3 đi qua A .
- Theo câu a) A là giao điểm của d_1 và d_2 , theo câu b) với $m = 1$ thì d_3 cũng đi qua A . Mặt khác lúc đó cả đường thẳng đều phân biệt. Vậy $m = 1$ thì ba đường thẳng đồng quy tại A . □

✧ **Bài 11.** Cho ba đường thẳng $d_1: y = x - 1$, $d_2: y = -x + 1$ và $d_3: y = -3ax + 2a - 1$. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng d_1 cắt d_2 tại một điểm thuộc đường thẳng d_3 . 🔗 $a = -1$

💬 **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $x - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1$, thay $x = 1$ vào $y = x - 1 \Rightarrow y = 0$.

Vậy giao điểm của d_1 và d_2 là $A(1; 0)$;

Thế $x = 1$ và $y = 0$ vào hai vế của phương trình đường thẳng d_3 ta được: $-3a + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Vậy khi $a = -1$ là giá trị cần tìm. □

✧ **Bài 12.** Cho đường thẳng $d: y = x - 1$. Tính khoảng cách:

- Từ gốc tọa độ O tới đường thẳng d ; 🔗 $\sqrt{\frac{1}{2}}$
- Từ điểm $M(2; 2)$ tới đường thẳng d . 🔗 $\sqrt{\frac{1}{2}}$

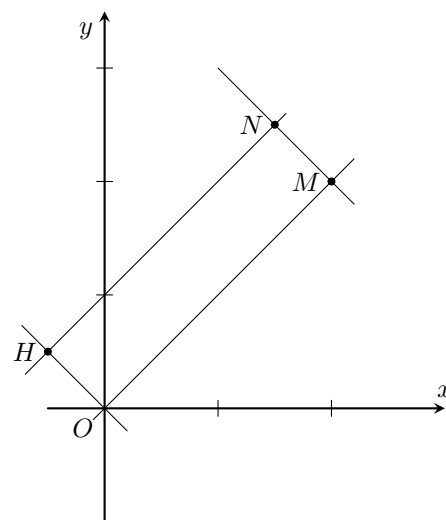
💬 **Lời giải.**

- a) Giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với hai trục tọa độ Ox , Oy lần lượt là $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$. Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d . Ta có thể thức:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = 2 \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng d là $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

- b) Vẽ điểm N là hình chiếu của M lên AB khi đó ta được $OMNH$ là hình chữ nhật, nên $OH = MN$ suy ra khoảng cách của M tới đường thẳng AB là $\sqrt{\frac{1}{2}}$.



□

BÀI 4. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- ☑ Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) song song khi và chỉ khi $a = a'$, $b \neq b'$ và trùng nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b = b'$.
- ☑ Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) cắt khi và chỉ khi $a \neq a'$. Đặc biệt, hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a \cdot a' = -1$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng: $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $d': y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$). Khi đó:

a) d và d' song song $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.

b) d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

c) d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$. Đặc biệt d và d' vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a \cdot a' = -1$.

🔗 **Ví dụ 1.** Hãy nhận xét về vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d' trong các trường hợp sau:

- a) $d: y = 3x + 5$ và $d': y = 3x - 2$; 🔗 song song
- b) $d: y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$ và $d': y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$; 🔗 cắt nhau
- c) $d: y = 2x + 1$ và $d': y = -\frac{1}{2}x + 1$; 🔗 vuông góc
- d) $d: 2y = 2x + 1$ và $d': y = x + \frac{1}{2}$. 🔗 trùng nhau

 **Lời giải.**

a) Ta có $\begin{cases} 3 = 3 \\ 5 \neq -2 \end{cases}$ nên d và d' song song.

b) Ta có $\frac{4}{3} \neq \frac{3}{4}$ nên d và d' cắt nhau.

c) Ta có $2 \cdot \frac{-1}{2} = -1$ nên d và d' vuông góc.

d) Ta có $d: 2y = 2x + 1 \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}$ nên d và d' trùng nhau.

□

❖ **Ví dụ 2.** Hãy nhận xét về vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d' trong các trường hợp sau:

- a) $d: y = -2x + 1$ và $d': y = -2x - 6$; 🔗 song song
- b) $d: y = -\frac{3}{7}x + 3$ và $d': y = -\frac{7}{3}x - \frac{2}{11}$; 🔗 cắt nhau
- c) $d: y = -3x + 1$ và $d': y = \frac{1}{3}x - 1$; 🔗 vuông góc
- d) $d: 4y = -3x - 4$ và $d': y = -\frac{3}{4}x - 1$. 🔗 trùng nhau

💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $\begin{cases} -2 = -2 \\ 1 \neq -6 \end{cases}$ nên d và d' song song.
- b) Ta có $-\frac{3}{7} \neq -\frac{7}{3}$ nên d và d' cắt nhau.
- c) Ta có $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ nên d và d' vuông góc.
- d) Ta có $d: 4y = -3x - 4 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - 1$ nên d và d' trùng nhau.

□

❖ **Ví dụ 3.** Cho các đường thẳng:

$$d_1: y = 4x + 1; d_2: y = x; d_3: x + y - 2 = 0; d_4: y = x + \frac{3}{5}; d_5: y = 4x - 7 \text{ và } d_6: y = \frac{1}{4}x + 1.$$

Trong các đường thẳng trên, hãy chỉ ra các cặp đường thẳng:

- a) Song song; 🔗 d_1 và d_5 ; d_2 và d_4 b) Vuông góc. 🔗 d_2 và d_3 , d_4 và d_3

💬 **Lời giải.**

Ta biến đổi phương trình đường thẳng $d_3: x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 2$

- a) Các cặp đường thẳng song song: d_1 và d_5 ; d_2 và d_4 .
- b) Các cặp đường thẳng vuông góc: d_2 và d_3 , d_4 và d_3 .

□

❖ **Ví dụ 4.** Cho các đường thẳng:

$$d_1: y = 2x - 3; d_2: y = -x; d_3: x - y + 1 = 0; d_4: y = \frac{2}{5} - x; d_5: y = 2x + 7 \text{ và } d_6: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$

Trong các đường thẳng trên, hãy chỉ ra các cặp đường thẳng:

- a) Song song; 🔗 d_1 và d_5 ; d_2 và d_4
- b) Vuông góc. 🔗 d_2 và d_3 , d_4 và d_3 ; d_1 và d_6 ; d_5 và d_6

💬 **Lời giải.**

Ta biến đổi phương trình đường thẳng $d_3: x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$

- a) Các cặp đường thẳng song song: d_1 và d_5 ; d_2 và d_4 .

b) Các cặp đường thẳng vuông góc: d_2 và d_3 ; d_4 và d_3 ; d_1 và d_6 ; d_5 và d_6 .

□

❖ **Ví dụ 5.** Cho đường thẳng $\Delta: y = (m + 1)x - 5$ với m là tham số. Tìm m để:

- a) Δ song song với đường thẳng $d_1: y = 4x + 3$; 🔴 $m = 3$
- b) Δ cắt đường thẳng $d_2: y = x + 2$ tại điểm có hoành độ bằng 1; 🔴 $m = 7$
- c) Δ vuông góc với đường thẳng $d_3: y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$. 🔴 $m = \frac{-8}{3}$

💬 **Lời giải.**

- a) Để Δ song song với đường thẳng $d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 4 \\ -5 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$. Vậy $m = 3$.
- b) Để Δ cắt đường thẳng $d_2 \Leftrightarrow m + 1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 0$. Thế $x = 1$ vào phương trình đường thẳng d_2 ta tìm được $y = 3$.
Thế $x = 1$ và $y = 3$ vào phương trình đường thẳng Δ , ta tìm được $m = 7$ (nhận). Vậy $m = 7$.
- c) Để Δ vuông góc với đường thẳng $d_3 \Leftrightarrow \frac{3}{5}(m + 1) = -1 \Leftrightarrow 3m + 3 = -5 \Leftrightarrow m = \frac{-8}{3}$. Vậy $m = \frac{-8}{3}$.

□

❖ **Ví dụ 6.** Cho đường thẳng $\Delta: y = (m^2 - 3)x - m + 1$ với m là tham số. Tìm m để:

- a) Δ song song với đường thẳng $d_1: y = x - 3$; 🔴 $m = 2$ hoặc $m = -2$
- b) Δ trùng với đường thẳng $d_2: y = -2x + 2$; 🔴 $m = -1$
- c) Δ cắt đường thẳng $d_3: y = -2x$ tại điểm có hoành độ bằng 2; 🔴 $m = -\frac{1}{2}$
- d) Δ vuông góc với đường thẳng $d_4: y = \frac{4}{11}x + \frac{1}{2}$. 🔴 $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$

💬 **Lời giải.**

- a) Để Δ song song với đường thẳng $d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 = 1 \\ -m + 1 \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ hoặc } m = -2 \\ m \neq 4 \end{cases}$. Vậy $m = 2$ hoặc $m = -2$.
- b) Để Δ trùng với đường thẳng $d_2: y = -2x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 = -2 \\ -m + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = -1 \\ m = -1 \end{cases}$.
Vậy $m = -1$.
- c) Để Δ cắt đường thẳng $d_3: y = -2x \Leftrightarrow m^2 - 3 \neq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$. Thế $x = 2$ vào phương trình đường thẳng d_3 ta tìm được $y = -4$.
Thế $x = 2$ và $y = -4$ vào phương trình đường thẳng Δ ta tìm được $m = 1$ (loại) hoặc $m = -\frac{1}{2}$ (nhận). Vậy $m = -\frac{1}{2}$.

$$\text{d) Để } \Delta \text{ vuông góc với đường thẳng } d_4 \Leftrightarrow \frac{4}{11}(m^2 - 3) = -1 \Leftrightarrow 4m^2 - 12 = -11 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{1}{2}.$$

□

✧ Ví dụ 7. Cho các đường thẳng:

$$d: y = (m - 2)x + m + 7;$$

$$d_1: y = -mx - 3 + 2m;$$

$$d_2: y = -m^2x - 2m + 1;$$

$$d_3: y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3};$$

$$d_4: y = -\frac{1}{6}(m + 3)x + 4.$$

Tìm m để:

a) $d \parallel d_1$;

☞ $m = 1$

b) $d \equiv d_2$;

☞ $m = -2$

c) $d \perp d_4$.

☞ $m = 3; m = -4$

d) d cắt d_3 tại điểm có tung độ $y = \frac{1}{3}$;

☞ $m = -\frac{8}{9}$

💬 Lời giải.

a) Để $d \parallel d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = -m \\ m + 7 \neq -3 + 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1. \text{ Vậy } m = 1 \text{ thì } d \parallel d_1.$

b) Để $d \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = -m^2 \\ m + 7 = -2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 = 0 \\ 3m = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = -2 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2. \\ \text{Vậy } m = -2 \text{ thì } d \equiv d_2.$

c) Để $d \perp d_4 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}(m - 2)(m + 3) = -1 \Leftrightarrow -m^2 - m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \text{ hoặc } m = -4. \\ \text{Vậy } m = 3; m = -4 \text{ thì } d \perp d_4.$

d) Để d cắt $d_3 \Leftrightarrow m - 2 \neq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow m \neq \frac{4}{3}$. Thế $y = \frac{1}{3}$ vào phương trình đường thẳng d_3 ta tìm được $x = 2$. Thế $x = 2$ và $y = \frac{1}{3}$ vào phương trình đường thẳng d , ta tìm được $m = -\frac{8}{9}$ (nhận).
Vậy $m = -\frac{8}{9}$ thì d cắt d_3 tại điểm có tung độ $y = \frac{1}{3}$.

□

✧ Ví dụ 8. Cho các đường thẳng:

$$d: y = (3 - m)x - m + 1;$$

$$d_1: y = 2mx - 2 + 3m;$$

$$d_2: y = 2m^2x - 3m - 2;$$

$$d_3: y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3};$$

$$d_4: y = -\frac{1}{4}(m + 2)x + 6.$$

Tìm m để:

a) $d \parallel d_1$;

☞ $m = 1$

b) $d \equiv d_2$;

$\text{a} \quad m = -\frac{3}{2}$

c) $d \perp d_4$.

$\text{a} \quad m = -1; m = 2$

d) d cắt d_3 tại điểm có hoành độ $x = -\frac{2}{3}$;

$\text{a} \quad m = -6$

Lời giải.

a) Để $d \parallel d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m = 2m \\ -m + 1 \neq -2 + 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1. \text{Vậy } m = 1 \text{ thì } d \parallel d_1.$

b) Để $d \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m = 2m^2 \\ -m + 1 = -3m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 3 = 0 \\ 2m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{3}{2} \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$
 Vậy $m = -\frac{3}{2}$ thì $d \equiv d_2$.

c) Để $d \perp d_4 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(3 - m)(m + 2) = -1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = 2.$
 Vậy $m = -1; m = 2$ thì $d \perp d_4$.

d) Để d cắt $d_3 \Leftrightarrow 3 - m \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \neq \frac{7}{2}$. Thế $x = -\frac{2}{3}$ vào phương trình đường thẳng d_3 ta tìm được $y = 1$. Thế $x = -\frac{2}{3}$ và $y = 1$ vào phương trình đường thẳng d ta tìm được $m = -6$ (nhận). Vậy $m = -6$ thì d cắt d_3 tại điểm có hoành độ $x = -\frac{2}{3}$.

□

Dạng 2. Xác phương trình đường thẳng

Để xác định phương trình đường thẳng, ta thường làm như sau:

Bước 1. Gọi $d: y = ax + b$ là phương trình đường thẳng cần tìm (a, b là hằng số, $a \neq 0$);*Bước 2.* Từ giả thiết của đề bài, tìm được a, b từ đó đi đến kết luận.**⚠** *Chú ý:* Mọi đường thẳng song song với đường thẳng $y = ax + m$ luôn có phương trình $y = ax + b$. Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta cần xác định b .**✎ Ví dụ 9.** Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua hai điểm A, B với $A(1; 3)$ và $B(2; 4)$;

$\text{a} \quad y = x + 2$

b) d đi qua hai điểm C, D với $C(-3; 2)$ và $D(2; 3)$.

$\text{a} \quad y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$

Lời giải.a) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$). Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1; 3), B(2; 4)$ nên ta có hai phương trình $a + b = 3$ và $2a + b = 4$ từ đó ta tìm được $a = 1$ và $b = 2$. Vậy phương trình đường thẳng d có dạng $y = x + 2$.

- b) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$). Đường thẳng d đi qua hai điểm $C(-3; 2)$, $D(2; 3)$ nên ta có hai phương trình $-3a + b = 2$ và $2a + b = 3$ từ đó ta tìm được $a = \frac{1}{5}$ và $b = \frac{13}{5}$. Vậy phương trình đường thẳng d có dạng $y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$.

□

❖ Ví dụ 10. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- a) d đi qua hai điểm A, B với $A(-1; -3)$ và $B(-4; -2)$;

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$$

- b) d đi qua hai điểm C, D với $C(1; -2)$ và $D(-1; 6)$.

$$y = -4x + 2$$

🗨️ Lời giải.

- a) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$). Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(-1; -3)$, $B(-4; -2)$ nên ta có hai phương trình $-a + b = -3$ và $-4a + b = -2$ từ đó ta tìm được $a = -\frac{1}{3}$ và $b = -\frac{10}{3}$. Vậy phương trình đường thẳng d có dạng $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$.

- b) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$). Đường thẳng d đi qua hai điểm $C(1; -2)$, $D(-1; 6)$ nên ta có hai phương trình $a + b = -2$ và $-a + b = 6$ từ đó ta tìm được $a = -4$ và $b = 2$. Vậy phương trình đường thẳng d có dạng $y = -4x + 2$.

□

❖ Ví dụ 11. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- a) d đi qua $M(2; -3)$ và song song với $d_1: y = -2x + 5$;

$$d: y = -2x + 1$$

- b) d đi qua $N(-1; -2)$ và vuông góc với $d_2: y = -x - 8$;

$$d: y = -x - 3$$

- c) d song song với $d_3: y = 3x - 4$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_4: y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$; $d_5: 2x - 3$.

$$d: y = 3x - 3$$

🗨️ Lời giải.

- a) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$);

$$\text{Do } d \parallel d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b \neq 5 \end{cases} \Rightarrow d: y = -2x + b \quad (b \neq 5);$$

Ta lại có d đi qua điểm $M(2; -3)$ nên thế $x = 2, y = -3$ vào $d: y = -2x + b \Rightarrow b = 1$ (nhận).
Vậy $d: y = -2x + 1$.

- b) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$);

$$\text{Do } d \perp d_2 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow d: y = -x + b;$$

Ta lại có d đi qua điểm $N(-1; -2)$ nên thế $x = -1, y = -2$ vào $d: y = -x + b \Rightarrow b = -3$. Vậy $d: y = -x - 3$.

- c) Phương trình hoành độ giao điểm của d_4 và $d_5: \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 3$. Thế $x = 3$ vào phương trình đường thẳng d_5 ta tìm được $y = 3$. Giao điểm của d_4 và d_5 có tọa độ là $A(3; 3)$; Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$);

$$\text{Do } d \parallel d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b \neq -4 \end{cases} \Rightarrow d: y = 3x + b \quad (b \neq -4);$$

Ta lại có: d đi qua điểm $A(3; 3)$ nên thế $x = 3$ và $y = 3$ vào $d: y = 3x + b \Rightarrow b = -3$ (nhận).
Vậy $d: y = 3x - 3$.



❖ **Ví dụ 12.** Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Tìm a và b biết:

- a) d đi qua điểm A nằm trên Ox có hoành độ bằng -3 và song song với đường thẳng $d_1: y = -5x + 4$;
 $\text{☞ } d: y = -5x - 15$
- b) d vuông góc với đường thẳng $d_2: y = -\frac{1}{2}x + 2018$ và đi qua giao điểm của $y = -x + 3$ với trục tung.
 $\text{☞ } d: y = 2x + 3$

💬 **Lời giải.**

a) Do $d \parallel d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b \neq 4 \end{cases} \Rightarrow d: y = -5x + b \ (b \neq 4);$

Mặt khác d cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ -3 nên thế $x = -3, y = 0$ vào phương trình đường thẳng d ta tìm được $b = -15$ (nhận). Vậy $d: y = -5x - 15$.

b) Do $d \perp d_2 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow d: y = 2x + b;$

Giao điểm của $y = -x + 3$ với trục tung là $B(0; 3)$ mà d đi qua B nên thế $x = 0, y = 3$ vào phương trình đường thẳng d ta tìm được $b = 3$. Vậy $d: y = 2x + 3$.



❖ **Ví dụ 13.** Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Tìm a và b biết:

- a) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 4 ;
 $\text{☞ } d: y = -\frac{1}{2}x + 2$
- b) d đi qua hai điểm A, B với $A(-2; 1)$ và $B(1; 4)$.
 $\text{☞ } d: y = x + 3$

💬 **Lời giải.**

a) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow d: y = ax + 2$. Mặt khác d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 4 thế $x = 4, y = 0$ vào $y = ax + 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$. Vậy $d: y = -\frac{1}{2}x + 2$

b) d đi qua điểm $A(-2; 1) \Rightarrow -2a + b = 1$. Mặt khác d đi qua điểm $B(1; 4) \Rightarrow a + b = 4$. Từ hai phương trình trên ta tìm được $a = 1$ và $b = 3$. Vậy $d: y = x + 3$.



❖ **Ví dụ 14.** Tìm a và b để đường thẳng $d: y = ax + b$

- a) Cắt $d_1: y = x + 4$ tại một điểm nằm trên trục Ox và cắt $d_2: y = 5x - 3$ tại một điểm nằm trên trục Oy .
 $\text{☞ } d: y = \frac{-3}{4}x - 3$
- b) Đi qua điểm $M(1; 2)$ và chẵn trên hai trục tọa độ những đoạn bằng nhau.
 $\text{☞ } d: y = x + 1, d: y = -x + 3$
- c) Song song với $d_3: y = x + 6$ và khoảng cách từ O đến d bằng $2\sqrt{2}$.
 $\text{☞ } d: y = x + 4, d: y = x - 4$

💬 **Lời giải.**

- a) Giao điểm của d_1 với trục Ox là $A(-4; 0)$. Giao điểm của d_2 với trục Oy là $B(0; -3)$. Do đường thẳng d đi qua hai điểm A, B nên ta có $-4a + b = 0$ và $b = -3 \Rightarrow a = \frac{-3}{4}$. Vậy $d: y = \frac{-3}{4}x - 3$.
- b) Do d đi qua điểm $M(1; 2) \Rightarrow a + b = 2$ (1);
 Giao điểm của d với hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt là $(\frac{-b}{a}; 0), (0; b)$.
 Do d chắn trên hai trục tọa độ những đoạn bằng nhau nên ta có $|b| = \left| \frac{b}{a} \right| \Leftrightarrow b = \frac{b}{a}$ hoặc $b = \frac{-b}{a} \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = -1$.
 Với $a = 1$ kết hợp với (1) $\Rightarrow b = 1$.
 Với $a = -1$ kết hợp với (1) $\Rightarrow b = 3$.
 Vậy $d: y = x + 1, d: y = -x + 3$.
- c) Do $d \parallel d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 6 \end{cases}$. Mặt khác khoảng cách từ O đến d bằng $2\sqrt{2}$ nên ta có $\frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{(2\sqrt{2})^2} \Rightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = 4$ hoặc $b = -4$. Ta nhận cả hai giá trị b . Vậy $d: y = x + 4, d: y = x - 4$.

□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

✦ **Bài 1.** Hãy nhận xét về vị trí tương đối hai đường thẳng d và d' trong các trường hợp sau:

- a) $d: y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ và $d': x - \sqrt{2}y + 2 = 0$;
 b) $d: y = -\sqrt{3}x + 3$ và $d': y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2\sqrt{2}}{7}$;
 c) $d: y = -\sqrt{5}x + 7$ và $d': x - \sqrt{5}y - 2 = 0$;
 d) $d: 2y = \sqrt{2}x + 6$ và $d': y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$.

💬 **Lời giải.**

- a) $d': x - \sqrt{2}y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$. Ta nhận thấy $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \neq 2 \end{cases}$ nên d và d' song song.
- b) $d': y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{2}}{7}$. Ta nhận thấy $\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{7} \neq 3 \end{cases}$ nên d và d' song song.
- c) $d': x - \sqrt{5}y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ta nhận thấy $\frac{\sqrt{5}}{5} \neq -\sqrt{5}$ nên d và d' cắt nhau.
- d) $d: 2y = \sqrt{2}x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$. Ta nhận thấy $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3 = 3 \end{cases}$ nên d và d' trùng nhau.



✧ **Ví dụ 15.** Cho các đường thẳng: $d_1: 2x + y - 3 = 0$; $d_2: 2y = x + 4$; $d_3: y = 5 - 2x$; $d_4: x + y - 1 = 0$. Trong các đường thẳng trên, hãy chỉ ra các cặp đường thẳng:

- a) Trong các đường thẳng trên, hãy chỉ ra các cặp đường thẳng song song và các cặp đường thẳng vuông góc với nhau
 🔍 d_1 và d_5 ; d_2 và d_4
- b) Hỏi có bao nhiêu cặp đường thẳng cắt nhau?
 🔍 d_2 và d_3 , d_4 và d_3

💬 **Lời giải.**

Ta có $d_1: 2x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 3$; $d_2: 2y = x + 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$; $d_4: y = -x + 1$.

- a) Các cặp đường thẳng song song: d_1 và d_3 .
 Các cặp đường thẳng vuông góc: d_1 và d_2 , d_1 và d_3 .
- b) Có 5 cặp đường thẳng cắt nhau.



✧ **Bài 2.** Cho các đường thẳng $d_1: y = (2m - 1)x - (2m - 5)$ và $d_2: y = (m + 1)x + m - 1$. Tìm m để:

- a) d_1 cắt d_2 ; 🔍 $m \neq 2$ b) d_1 song song d_2 ; 🔍 $m \in \emptyset$
- c) d_1 trùng d_2 ; 🔍 $m = 2$ d) d_1 vuông góc d_2 ; 🔍 $m = 0$; $m = -\frac{1}{2}$

💬 **Lời giải.**

- a) Để d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow 2m - 1 \neq m + 1 \Leftrightarrow m \neq 2$. Vậy $m \neq 2$.
- b) Để d_1 song song $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = m + 1 \\ -2m + 5 \neq m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$. Vậy $m \in \emptyset$.
- c) Để d_1 trùng $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = m + 1 \\ -2m + 5 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$. Vậy $m = 2$.
- d) Để d_1 vuông góc $d_2 \Leftrightarrow (2m - 1)(m + 1) = -1 \Leftrightarrow 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$. Vậy $m = 0$; $m = -\frac{1}{2}$.



✧ **Bài 3.** Cho đường thẳng $\Delta: y = (m^2 - m)x - 2m + 1$ với m là tham số. Tìm m để:

- a) Δ song song với đường thẳng $d_1: y = (m + 3)x - 7$; 🔍 $m \neq 4$
- b) Δ trùng với đường thẳng $d_2: y = 2x + m + 4$; 🔍 $m = -1$
- c) Δ vuông góc với đường thẳng $d_3: y = -\frac{1}{6}x - 2$; 🔍 $m = 3$ hoặc $m = -2$
- d) Δ đi qua giao điểm của các đường thẳng $d_4: y = 2x - 5$ và $d_5: y = -x + 1$. 🔍 $m = 1$

💬 **Lời giải.**

- a) Để Δ song song với đường thẳng $d_1: y = (m+3)x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m = m + 3 \\ -2m + 1 \neq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 = 0 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 4$. Vậy $m \neq 4$.
- b) Để Δ trùng với đường thẳng $d_2: y = 2x + m + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m = 2 \\ -2m + 1 = m + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ hoặc } m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$. Vậy $m = -1$.
- c) Để Δ vuông góc với đường thẳng $d_3: y = -\frac{1}{6}x - 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}(m^2 - m) = -1 \Leftrightarrow -m^2 + m = -6 \Leftrightarrow -m^2 + m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = -2$. Vậy $m = 3$ hoặc $m = -2$.
- d) Phương trình hoành độ giao điểm của d_4 và d_5 là $2x - 5 = -x + 1 \Leftrightarrow x = 2$, thế $x = 2$ vào phương trình đường thẳng d_4 ta tìm được $y = -1$. Giao điểm của d_4 và d_5 là $A(2; -1)$. Do Δ đi qua điểm A nên thế $x = 2, y = -1$ vào phương trình đường thẳng Δ ta tìm được $m = 1$. Vậy $m = 1$.

□

✎ **Bài 4.** Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- a) d đi qua $M(1; 5)$ và song song với $d_1: 2x - y = 5$; ✎ $d: y = -2x + 1$
- b) d cắt đường thẳng $d_2: x - y + 1 = 0$ tại điểm có tung độ bằng 3 và vuông góc với $d_3: y = \frac{1}{2}x - 3$; ✎ $d: y = -2x + 11$
- c) d đi qua gốc tọa độ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_4: y = 2x + 4$ và $d_5: y = -x - 5$; ✎ $d: y = \frac{2}{3}x$
- d) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 và đi qua điểm $N(-2; 3)$. ✎ $d: y = -3x - 3$

💬 Lời giải.

- a) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$); $d_2: y = 2x - 5$.
Do $d \parallel d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq -5 \end{cases} \Rightarrow d: y = 2x + b$ ($b \neq -5$);
Ta lại có d đi qua điểm $M(1; 5)$ nên thế $x = 1, y = 5$ vào $d: y = 2x + b \Leftrightarrow b = 3$ (nhận). Vậy $d: y = 2x + 3$.
- b) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$); $d_2: y = x + 1$.
Do $d \perp d_3 \Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow d: y = -2x + b$;
Thế $y = 3$ vào $d_2: y = 2x - 5$ ta tìm được $x = 4$.
Ta có d đi qua điểm có tọa độ $(4; 3)$ nên thế $x = 4, y = 3$ vào $d: y = -2x + b \Leftrightarrow b = 11$. Vậy $d: y = -2x + 11$.
- c) d đi qua gốc tọa độ nên d có dạng $d: y = ax$ ($a \neq 0$).
Phương trình hoành độ giao điểm của d_4 và d_5 có dạng: $2x + 4 = -x - 5 \Leftrightarrow x = -3$. Thế $x = -3$ vào $y = -x - 5 \Rightarrow y = -2$.
Mặt khác d vừa đi qua điểm vừa tìm được ở trên nên thế $x = -3$ và $y = -2$ vào $d: y = ax$, ta tìm được $a = \frac{2}{3}$. Vậy $d: y = \frac{2}{3}x$.

- d) Phương trình đường thẳng d có dạng tổng quát $y = ax + b$ (a, b là hằng số, $a \neq 0$). Theo đề bài ta có hai phương trình sau: $-a + b = 0$ và $-2a + b = 3$, từ hai phương trình này ta tìm được $a = -3$ và $b = -3$. Vậy $d: y = -3x - 3$.

□

❖ **Bài 5.** Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ với a, b là hằng số. Tìm a và b biết:

- a) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 và đi qua giao điểm của đường thẳng $d': y = 2x + 3$ với trục tung. 🔗 $a = 3, b = 3$
- b) d vuông góc với đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{3}$ và đi qua $A(3; -1)$. 🔗 $a = -3, b = 8$

💬 **Lời giải.**

- a) Giao điểm của đường thẳng $d': y = 2x + 3$ với trục tung là $(0; 3)$. Theo đề bài ta có d đi qua hai điểm có tọa độ là $(-1; 0)$ và $(0; 3)$ nên ta có hai phương trình $-a + b = 0$ và $b = 3$. Từ hai phương trình trên ta tìm được $a = 3$ và $b = 3$.
- b) d vuông góc với đường thẳng có hệ số góc $\frac{1}{3}$ nên $a \cdot \frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow a = -3$. Mặt khác d đi qua điểm $A(3; -1)$ nên ta có phương trình: $-9 + b = -1 \Leftrightarrow b = 8$. Vậy $a = -3$ và $b = 8$.

□

❖ **Bài 6.** Cho các đường thẳng: $d_1: y = mx + m - 2$ và $d_2: y = (1 - 2n)x - n$.

- a) Tìm điểm cố định mà d_1 luôn đi qua với mọi m ;
- b) Gọi I là điểm cố định mà d_1 luôn đi qua. Tìm n để d_2 đi qua I ;
- c) Tìm m để d_2 đi qua điểm cố định của d_1 ;
- d) Tìm m và n để d_1 và d_2 trùng nhau.

💬 **Lời giải.**

- a) $d_1: y = mx + m - 2 \Leftrightarrow y = m(x + 1) - 2$ với $x = -1, y = -2$ ta luôn được một đẳng thức đúng với mọi m . Vậy điểm cố định mà d_1 luôn đi qua với mọi m là $(-1; -2)$.
- b) Theo câu a), ta có $I(-1; -2)$, để d_2 đi qua I thì $(1 - 2n)(-1) - n = -2 \Leftrightarrow n = -1$. Vậy $n = -1$ thì d_2 qua I .
- c) $d_2: y = (1 - 2n)x - n \Leftrightarrow y = x - n(2x + 1)$ với $x = \frac{-1}{2}, y = \frac{-1}{2}$, ta luôn được đẳng thức đúng với mọi giá trị n . Vậy điểm cố định của d_2 là $\left(\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$.
 d_1 đi qua điểm cố định của $d_2 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}m + m - 2 = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow m = 3$. Vậy $m = 3$ thì d_1 đi qua điểm cố định của d_2 .
- d) d_1 và d_2 trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 - 2n \\ m - 2 = -n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -1 \end{cases}$.

□

BÀI 5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- ❶ Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox : trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khi nói góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox (hoặc nói rằng đường thẳng $y = ax + b$ tạo với trục Ox một góc α), ta cần hiểu rằng đó là góc tạo bởi tia Ax và tia AT , trong đó A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox , T là điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương.
- ❷ Cho đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Khi đó, hệ số góc của đường thẳng đã cho là $k = a$.
- ❸ Cho đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$):
 - Nếu $a > 0$ thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc nhọn. Hệ số a càng lớn thì góc càng lớn nhưng vẫn nhỏ hơn 90° .
 - Nếu $a < 0$ thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc tù. Hệ số a càng lớn thì góc càng lớn nhưng vẫn nhỏ hơn 180° .

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dang 1. Tìm hê số góc của đường thẳng

Sử dụng các kiến thức liên quan đến vị trí tương đối giữa hai đường thẳng và hệ số góc của hai đường thẳng.

🔗 **Ví dụ 1.** Xác định hệ số góc của các đường thẳng sau:

a) $d_1: y = 2x + 1$;

b) $d_2: y = -3x - 4$;

c) $d_3: y = \frac{1}{2}x - 3;$

d) $d_4: 3y = -x + 2$.

 **Lời giải.**

a) $k = a = 2$;

b) $k = a = -3$;

c) $k = a = \frac{1}{2}$;

d) $d_4: 3y = -x + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow k = a = -\frac{1}{3}.$

7

🔗 **Ví dụ 2.** Xác định hệ số góc của các đường thẳng sau:

a) $d_1: y = -5x - 4$;

b) $d_2: y = x + 1;$

c) $d_3: y = \frac{\sqrt{3}}{5}x + 2;$

d) $d_4: 2y = x$.

 Lời giải.

- a) $k = a = -5$;
 b) $k = a = 1$;
 c) $k = a = \frac{\sqrt{3}}{5}$;
 d) $d_4: 2y = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \Rightarrow k = a = \frac{1}{2}$.

□

✎ **Ví dụ 3.** Cho đường thẳng $d: y = ax + b$. Xác định hệ số góc của d biết:

- a) d song song với đường thẳng $d_1: 3x - y = 2$;  $k = 3$
 b) d tạo với tia Ox một góc $\alpha = 60^\circ$.  $k = \sqrt{3}$

 Lời giải.

- a) $d_1: 3x - y = 2 \Rightarrow y = 3x - 2$ mà d song song với d_1 nên hệ số góc của d bằng 3;
 b) $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

□

✎ **Ví dụ 4.** Cho đường thẳng $d: y = ax + b$. Xác định hệ số góc của d biết:

- a) d vuông góc với đường thẳng $d_1: 4x - y - 3 = 0$;  $k = -\frac{1}{4}$
 b) d tạo với tia Ox một góc $\alpha = 150^\circ$.  $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

 Lời giải.

- a) Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d . $d_1: 4x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 4x - 3$ mà d vuông góc với đường thẳng d_1 nên $k \cdot 4 = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$;
 b) $k = -\tan(180^\circ - 150^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

□

✎ **Ví dụ 5.** Cho đường thẳng $d: y = (2m - 5)x - 3m + 2$ với m là tham số. Tìm hệ số góc của d biết

- a) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2;  $k = 11$
 b) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5;  $k = -7$
 c) d đi qua điểm $A(-2; -2)$.  $k = -1$

 Lời giải.

- a) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 suy ra $x = 2, y = 0$.

Thay $x = 2, y = 0$ vào phương trình đường thẳng d , ta được

$$(2m - 5) \cdot 2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 8 \Leftrightarrow k = 2 \cdot 8 - 5 = 11.$$

Vậy $k = 11$.

- b) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5, suy ra $x = 0, y = 5$.

Thay $x = 0, y = 5$ vào phương trình đường thẳng d , ta được

$$-3m + 2 = 5 \Leftrightarrow m = -1 \Leftrightarrow k = -7.$$

Vậy $k = -7$.

- c) d đi qua điểm $A(-2; -2)$, suy ra $x = -2, y = -2$.

Thay $x = -2, y = -2$ vào phương trình đường thẳng d , ta được

$$(2m - 5) \cdot (-2) - 3m + 2 = -2 \Leftrightarrow m = 2 \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy $k = -1$.

□

❖ **Ví dụ 6.** Cho đường thẳng $d: y = (2m^2 - 5m)x + m + 4$ với m là tham số. Tìm hệ số góc của d biết rằng

- a) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3;

$$\text{☞ } k = -2, k = -\frac{13}{9}$$

- b) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 ;

$$\text{☞ } k = 102$$

- c) d đi qua điểm $A(2; 2)$.

$$\text{☞ } k = -2, k = -\frac{9}{8}$$

💬 Lời giải.

- a) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3, suy ra $x = 3, y = 0$.

Thay $x = 3, y = 0$ vào phương trình đường thẳng d , ta được

$$(2m^2 - 5m) \cdot 3 + m + 4 = 0 \Leftrightarrow 6m^2 - 14m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow k = -2 \\ m = \frac{1}{3} \Rightarrow k = -\frac{13}{9} \end{cases}$$

Vậy $k = -2, k = -\frac{13}{9}$.

- b) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 , suy ra $x = 0, y = -2$.

Thay $x = 0, y = -2$ vào phương trình đường thẳng d , ta được

$$m + 4 = -2 \Leftrightarrow m = -6 \Rightarrow k = 102.$$

Vậy $k = 102$.

- c) d đi qua điểm $A(2; 2)$ suy ra $x = 2, y = 2$.

Thay $x = 2, y = 2$ vào phương trình đường thẳng d , ta được

$$(2m^2 - 5m) \cdot 2 + m + 4 = 2 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow k = -2 \\ m = \frac{1}{4} \Rightarrow k = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

Vậy $k = -2, k = -\frac{9}{8}$.



❖ **Ví dụ 7.** Cho đường thẳng $d: y = (m^2 - 2m - 2)x + 5m + 7$ với m là tham số. Tìm m để d có hệ số góc nhỏ nhất.

🔗 $m = 1$

💬 **Lời giải.**

Vì $m^2 - 2m - 2 = (m - 1)^2 - 3 \geq -3$ với mọi m nên d có hệ số góc nhỏ nhất bằng -3 khi $m = 1$. □

❖ **Ví dụ 8.** Tìm m để đường thẳng $d: y = (-m^2 - 4m - 2)x - 2m + 1$ với m là tham số có hệ số góc lớn nhất.

🔗 $m = -2$

💬 **Lời giải.**

Vì $-m^2 - 4m - 2 = -(m + 2)^2 + 2 \leq 2$ với mọi m nên d có hệ số góc lớn nhất bằng 2 khi $m = -2$. □

📁 Dạng 2. Xác định góc tạo bởi đường thẳng và tia Ox

Để xác định góc giữa đường thẳng d và tia Ox , ta làm như sau

Cách 1. Vẽ d trên mặt phẳng tọa độ và sử dụng tỉ số lượng giác của tam giác vuông một cách hợp lý.

Cách 2. Gọi α là góc tạo bởi tia Ox và d . Ta có

- Nếu $\alpha < 90^\circ$ thì $a > 0$ và $a = \tan \alpha$;
- Nếu $\alpha > 90^\circ$ thì $a < 0$ và $a = -\tan(180^\circ - \alpha)$

❖ **Ví dụ 9.** Tìm góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d (làm tròn đến độ) biết:

- | | | | |
|---------------------------------|--------------|-------------------------|---------------|
| a) $d: y = 2x - 1$; | 🔗 63° | b) $d: y = -x + 4$; | 🔗 135° |
| c) $d: \sqrt{3}x - y + 1 = 0$; | 🔗 60° | d) $d: x - y - 1 = 0$. | 🔗 45° |

💬 **Lời giải.**

Gọi α là góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d .

- a) $y = 2x - 1 \Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63^\circ$.
- b) $y = -x + 4 \Rightarrow \tan(180^\circ - \alpha) = -(-1) \Rightarrow \alpha = 135^\circ$.
- c) $\sqrt{3}x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 1 \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.
- d) $x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.



❖ **Ví dụ 10.** Tìm góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d (làm tròn đến độ) biết:

- | | | | |
|-------------------------------|---------------|---------------------------------|---------------|
| a) $d_1: y = -3x + 1$; | 🔗 108° | b) $d_2: y = x - \frac{1}{2}$; | 🔗 45° |
| c) $d_3: \sqrt{3}y = x - 2$; | 🔗 30° | d) $d_4: x + y = 0$. | 🔗 135° |

💬 **Lời giải.**

Gọi α là góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d .

- a) $y = -3x + 1 \Rightarrow \tan(180^\circ - \alpha) = -(-3) \Rightarrow \alpha \approx 108^\circ$.

b) $y = x - \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

c) $\sqrt{3}y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

d) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow \tan(180^\circ - \alpha) = -(-1) \Rightarrow \alpha = 135^\circ$.



❖ **Ví dụ 11.** Tìm góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d biết:

a) d có phương trình là $y = -\sqrt{3}x - 2$;

🔗 120°

b) d cắt Oy tại điểm có tung độ bằng -1 và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 .

🔗 45°

💬 **Lời giải.**

a) Gọi α là góc tạo bởi Ox và đường thẳng d , $\tan(180^\circ - \alpha) = -(-\sqrt{3}) \Rightarrow \alpha = 120^\circ$.

b) d có phương trình là $y = x - 1$ suy ra góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d bằng 45° .



❖ **Ví dụ 12.** Tìm góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d biết:

a) d có phương trình là $y = 2x + 5$;

🔗 63°

b) d đi qua hai điểm $A(-1; 0)$ và $B(0; \sqrt{3})$.

🔗 60°

💬 **Lời giải.**

Gọi α là góc tạo bởi Ox và đường thẳng d .

a) d có phương trình là $y = 2x + 5 \Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63^\circ$.

b) d đi qua hai điểm $A(-1; 0)$ và $B(0; \sqrt{3})$ nên có phương trình là $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$. Suy ra $\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.



❖ **Ví dụ 13.** Cho các đường thẳng $d_1: y = x + 2$ và $d_2: x + y = 3$.

a) Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ;

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục hoành. Gọi C là giao điểm của d_1 và d_2 . Tính số đo các góc của tam giác ABC ;

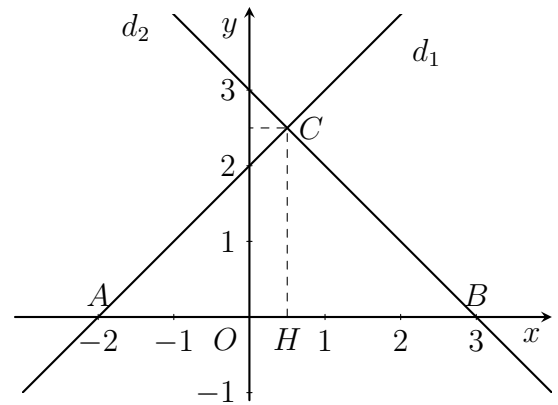
c) Tính diện tích tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**

a)

Bảng giá trị

x	0	-2	x	0	3
$y = x + 2$	2	0	$y = -x + 3$	3	0



b) Xét tam giác ABC . Ta có $\tan A = 1 \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ$, $\tan(180^\circ - B) = 1 \Rightarrow \widehat{B} = 45^\circ$. Từ đây suy ra $\widehat{C} = 90^\circ$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2

$$x + 2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}.$$

Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $C\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Gọi H là hình chiếu của C trên Ox . $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{25}{4}$ (đvdt)

□

❖ **Ví dụ 14.** Cho các đường thẳng $d_1: y = 2x + 4$ và $d_2: y = -\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}$.

- Vẽ các đường thẳng d_1 và d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ và chứng minh chúng cắt nhau tại điểm A nằm trên trục hoành;
- Gọi giao điểm của d_1 và d_2 với trục hoành lần lượt là B và C . Tính các góc của tam giác ABC ;
- Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**

- Học sinh tự vẽ hình và chứng minh;
- Góc giữa d_1 và d_2 với tia Ox lần lượt bằng 63° và 174° . Ta suy ra các góc đỉnh A, B, C lần lượt là $69^\circ, 27^\circ, 84^\circ$;
- Chu vi $\frac{38 + 2\sqrt{82} + 18\sqrt{5}}{9}$. Diện tích $\frac{38}{9}$.

□

Dạng 3. Xác định phương trình đường thẳng biết hệ số góc

Gọi $d: y = ax + b$ là phương trình đường thẳng cần tìm (a, b là các hằng số). Ta cần xác định a, b dựa vào các kiến thức về góc và hệ số góc.

❖ **Ví dụ 15.** Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua $M(-3; 1)$ và có hệ số góc bằng $\frac{2}{5}$;

$$Q(d) : y = \frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$$

b) d đi qua $N(1; 2)$ và tạo với tia Ox một góc 60° ;

$$Q(d) : y = \sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}$$

c) d đi qua điểm $P(0; -2)$ và tạo với tia Ox một góc 135° .

$$Q(d) : y = -x - 2$$

🗨️ Lời giải.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

a) d đi qua $M(-3; 1)$ và có hệ số góc bằng $\frac{2}{5}$ nên
$$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ a = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{11}{5} \\ a = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (d) : y = \frac{2}{5}x + \frac{11}{5}.$$

b) d đi qua $N(1; 2)$ và tạo với tia Ox một góc 60° nên
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a = \tan 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - \sqrt{3} \\ a = \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (d) : y = \sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}.$$

c) d đi qua điểm $P(0; -2)$ và tạo với tia Ox một góc 135° nên
$$\begin{cases} b = -2 \\ a = -\tan(180^\circ - 135^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = -2 \\ a = -1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (d) : y = -x - 2.$$

□

🔗 **Ví dụ 16.** Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ và có hệ số góc bằng -3 ;

$$Q(d) : y = -3x + \frac{1}{2}$$

b) d đi qua điểm $B(0; 1)$ và tạo với tia Ox một góc 150° ;

$$Q(d) : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$$

c) d đi qua điểm $C(-1; 0)$ và tạo với tia Ox một góc 30° .

$$Q(d) : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

🗨️ Lời giải.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

a) d đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ và có hệ số góc bằng -3 nên
$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = -1 \\ a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (d) : y = -3x + \frac{1}{2}.$$

b) d đi qua điểm $B(0; 1)$ và tạo với tia Ox một góc 150° nên
$$\begin{cases} b = 1 \\ a = -\tan(180^\circ - 150^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (d) : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1.$$

c) d đi qua điểm $C(-1; 0)$ và tạo với tia Ox một góc 30° nên $\begin{cases} -a + b = 0 \\ a = \tan 30^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Vậy $(d) : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

□

❖ **Ví dụ 17.** Xác định đường thẳng d biết d đi qua điểm $A(1; -1)$ sao cho d tạo với tia Ox một góc α có $\tan \alpha = \frac{1}{3}$.

❖ $(d) : y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

💬 **Lời giải.**

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -1)$ và d tạo với tia Ox một góc α có $\tan \alpha = \frac{1}{3}$

nên $\begin{cases} a + b = -1 \\ a = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{4}{3} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Vậy $(d) : y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

□

❖ **Ví dụ 18.** Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d có hệ số góc bằng $-\frac{3}{2}$ và chắn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 12;

❖ $(d) : y = -\frac{3}{2}x + 6$ hoặc $(d) : y = -\frac{3}{2}x - 6$

b) d có hệ số góc bằng $-\frac{4}{3}$ và khoảng cách từ O đến d bằng $\frac{3}{5}$. ❖ $(d) : y = -\frac{4}{3}x + 1$ hoặc $(d) : y = -\frac{4}{3}x - 1$

💬 **Lời giải.**

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

a) d có hệ số góc bằng $-\frac{3}{2}$, suy ra $(d) : y = -\frac{3}{2}x + b$.

d chắn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 12 nên $\frac{1}{2}|b| \cdot \left| \frac{2b}{3} \right| = 12 \Rightarrow b^2 = 36$
 $\Rightarrow b = \pm 6$.

Vậy $(d) : y = -\frac{3}{2}x + 6$ hoặc $(d) : y = -\frac{3}{2}x - 6$.

b) d có hệ số góc bằng $-\frac{4}{3}$ suy ra $(d) : y = -\frac{4}{3}x + b$.

Khoảng cách từ O đến d bằng $\frac{3}{5}$ nên $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\left(\frac{3b}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{9b^2} = \frac{25}{9} \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$.

Vậy $(d) : y = -\frac{4}{3}x + 1$ hoặc $(d) : y = -\frac{4}{3}x - 1$.

□

C – BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Xác định hệ số góc của đường thẳng sau:

a) $d_1: y = 3x - 1;$

b) $d_2: y = -3x + 7;$

c) $d_3: y = \frac{1}{5}x - 3;$

d) $d_4: 3y = -2x + 2.$

💬 **Lời giải.**

a) $k = 3;$

b) $k = -3;$

c) $k = \frac{1}{5};$

d) $k = -2.$

□

❖ **Bài 2.** Cho đường thẳng $d: y = ax + 5$. Xác định hệ số góc của d biết:

a) d song song với đường thẳng $d_1: 2x - y = 2;$

🔗 $k = 2$

b) d tạo với Ox một góc $\alpha = 60^\circ$.

🔗 $k = \sqrt{3}$

💬 **Lời giải.**

a) d song song với đường thẳng $d_1: 2x - y = 2$ suy ra $k = a = 2$.

b) d tạo với Ox một góc $\alpha = 60^\circ$ suy ra $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

□

❖ **Bài 3.** Cho đường thẳng $d: y = (3 - 2m)x + m - 1$ với m là tham số. Tìm hệ số góc của d biết rằng

a) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1;

🔗 $k = -1$

b) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 ;

🔗 $k = 9$

c) d đi qua điểm $A(3; 3)$.

🔗 $k = 1$

💬 **Lời giải.**

a) d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, suy ra $x = 1, y = 0$. Thay vào phương trình đường thẳng d ta được

$$3 - 2m + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow k = -1.$$

Vậy $k = -1$.

b) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 , suy ra $x = 0, y = -4$. Thay vào phương trình đường thẳng d ta được

$$m - 1 = -4 \Leftrightarrow m = -3 \Rightarrow k = 9.$$

Vậy $k = 9$.

c) d đi qua điểm $A(3; 3)$ suy ra $x = 3, y = 3$. Thay vào phương trình đường thẳng d ta được

$$(3 - 2m) \cdot 3 + m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow k = -1.$$

Vậy $k = 1$.

□

❖ **Bài 4.** Cho đường thẳng $d: y = (9m^2 - 6m + 2)x - m + 3$, với m là tham số. Tìm m để d có hệ số góc nhỏ nhất.

$$\text{☞ } m = \frac{1}{3}$$

💬 **Lời giải.**

Vì $9m^2 - 6m + 2 = (3m - 1)^2 + 1 \geq 1$ với mọi m nên d có hệ số góc nhỏ nhất bằng 1 khi $m = \frac{1}{3}$. □

❖ **Bài 5.** Tìm góc tạo bởi tia Ox và các đường thẳng sau (làm tròn đến độ) biết:

a) $d_1: y = -2x + 1;$

$$\text{☞ } 117^\circ$$

b) $d_2: y = -\frac{1}{3}x - 4;$

$$\text{☞ } 162^\circ$$

c) $d_3: \frac{\sqrt{3}}{2}x - y + \frac{1}{2} = 0;$

$$\text{☞ } 41^\circ$$

d) $d_4: x - 4y = 0.$

$$\text{☞ } 14^\circ$$

💬 **Lời giải.**

a) Gọi α là góc tạo bởi Ox với d_1 . Ta có $-\tan(180^\circ - \alpha) = -2 \Rightarrow \alpha \approx 117^\circ$.

b) Gọi α là góc tạo bởi Ox với d_2 . Ta có $-\tan(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 162^\circ$.

c) Gọi α là góc tạo bởi Ox với d_3 . Ta có $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha \approx 41^\circ$.

d) Gọi α là góc tạo bởi Ox với d_4 . Ta có $\tan \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \approx 14^\circ$.

□

❖ **Bài 6.** Tìm góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d biết:

a) d có phương trình là $y = 3x - 1;$

$$\text{☞ } 72^\circ$$

b) d cắt tia Oy tại điểm có tung độ bằng 4 và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng -3 .

$$\text{☞ } 53^\circ$$

💬 **Lời giải.**

a) Gọi α là góc tạo bởi Ox với d . Ta có $\tan \alpha = 3 \Rightarrow \alpha \approx 72^\circ$.

b) Gọi α là góc tạo bởi Ox với d . Đường thẳng d cắt tia Oy tại điểm có tung độ bằng 4 và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng -3 nên $\tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha \approx 53^\circ$.

□

❖ **Bài 7.** Cho các đường thẳng $d_1: y = 2x - 3$ và $d_2: y = \frac{1}{2}x$.

a) Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ;

- b) Gọi A là giao điểm của d_1 với trục tung, B là giao điểm của d_1 và d_2 . Tính số đo các góc của tam giác OAB ;
 $\hat{A} = 34^\circ, \hat{B} = 63^\circ, \hat{O} = 83^\circ$
- c) Tính diện tích tam giác OAB . 3

Lời giải.

- a) Học sinh tự vẽ hình.
- b) Học sinh tự tìm số đo các góc của tam giác OAB .
- c) $A(0; -3), B(2; 1), O(0; 0)$. Diện tích tam giác OAB bằng 3.

□

✎ **Bài 8.** Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- a) d đi qua $M(4; 3)$ và có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$;
 $(d) : y = \frac{1}{4}x + 2$
- b) d đi qua $N(-\sqrt{3}; 4)$ và tạo với tia Ox một góc 30° ;
 $(d) : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$
- c) d đi qua $P(0; 4)$ và tạo với tia Ox một góc 45° .
 $(d) : y = x + 4$

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

- a) d đi qua $M(4; 3)$ và có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$ nên $\begin{cases} 4a + b = 3 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy $(d) : y = \frac{1}{4}x + 2$.

- b) d đi qua $N(-\sqrt{3}; 4)$ và tạo với tia Ox một góc 30° nên $\begin{cases} -\sqrt{3}a + b = 4 \\ a = \tan 30^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Vậy $(d) : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$.

- c) d đi qua điểm $P(0; 4)$ và tạo với tia Ox một góc 45° nên $\begin{cases} b = 4 \\ a = \tan 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 1 \end{cases}$.

Vậy $(d) : y = x + 4$.

□

✎ **Bài 9.** Xác định đường thẳng d , biết d đi qua điểm $A(7; -3)$ sao cho d tạo với tia Ox một góc α có $\tan \alpha = \frac{5}{7}$.
 $(d) : y = \frac{5}{7}x - 8$

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(7; -3)$ và d tạo với tia Ox một góc α có $\tan \alpha = \frac{5}{7}$ nên

$$\begin{cases} 7a + b = -3 \\ a = \frac{5}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8 \\ a = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Vậy $(d) : y = \frac{5}{7}x - 8$.

□

BÀI 6. ÔN TẬP CHƯƠNG II

❖ **Bài 1.** Tìm tất cả các giá trị của x để hàm số sau được xác định

a) $y = x + 1$;

b) $y = \frac{x+1}{x-4}$;

c) $y = \sqrt{2x+1} - 1$;

d) $y = \frac{5}{x+3} + \sqrt{x-2}$.

💬 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = x + 1$ xác định với mọi số thực x .

b) Hàm số $y = \frac{x+1}{x-4}$ xác định khi và chỉ khi $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$.

c) Hàm số $y = \sqrt{2x+1} - 1$ xác định khi và chỉ khi $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

d) Hàm số $y = \frac{5}{x+3} + \sqrt{x-2}$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

□

❖ **Bài 2.** Tìm x để các hàm số sau có nghĩa

a) $y = x - 1$;

b) $y = \frac{x-1}{x-3}$;

c) $y = \sqrt{3x-2} + 1$;

d) $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{2} + \frac{1}{x-3}$.

💬 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = x - 1$ có nghĩa với mọi số thực x .

b) Hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

c) Hàm số $y = \sqrt{3x-2} + 1$ có nghĩa khi và chỉ khi $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

d) Hàm số $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{2} + \frac{1}{x-3}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

□

❖ **Bài 3.** Tìm các giá trị của tham số m để các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất

a) $y = (m-3)x - 2$;

❗ $m \neq 3$

b) $y = (m^2 + 1)x - 1$;

❗ với mọi m

c) $y = \frac{x}{m-3}$;

❗ $m \neq 3$

d) $y = (4m^2 - 1)x^2 + (1+m)x$.

❗ $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

 Lời giải.

- a) Hàm số $y = (m - 3)x - 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.
- b) Vì $m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên hàm số $y = (m^2 + 1)x - 1$ là hàm số bậc nhất với mọi số thực m .
- c) Hàm số $y = \frac{x}{m - 3}$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.
- d) Hàm số $y = (4m^2 - 1)x^2 + (1 + m)x$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4m^2 - 1 = 0 \\ 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

□

✧ **Bài 4.** Tìm các giá trị của tham số m để các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất

- a) $y = (m + 5)x + m$; ❗ $m \neq -5$ b) $y = (4m^2 - 3)x + \frac{3}{7}$; ❗ $m \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $y = \frac{2}{m - 2}x$; ❗ $m \neq 2$ d) $y = (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x$. ❗ $m \in \emptyset$

 Lời giải.

- a) $m \neq -5$.
- b) $m \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) $m \neq 2$.
- d) Hàm số $y = (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 16 = 0 \\ m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \\ m \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

□

✧ **Bài 5.** Cho hàm số $y = f(x) = (k^2 - 2k + 2)x + 3k - 1$ với k là tham số

- a) Chứng minh $y = f(x)$ luôn là hàm số bậc nhất và đồng biến với mọi k ;
- b) Không cần tính, hãy so sánh $f(-2)$ và $f(3)$. ❗ $f(-2) < f(3)$

 Lời giải.

- a) Ta có $k^2 - 2k + 2 = (k - 1)^2 + 1 > 0$, với mọi k nên hàm số $y = f(x)$ luôn là hàm số bậc nhất và đồng biến với mọi k .
- b) Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm số đồng biến và $-2 < 3$ nên $f(-2) < f(3)$.



✧ Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = (-k^2 - 4k - 5)x - 2k + 1$ với k là tham số

- a) Chứng minh $y = f(x)$ luôn là hàm số bậc nhất và nghịch biến với mọi k ;
b) Không cần tính, hãy so sánh $f(-2)$ và $f(5)$.

🔗 $f(-2) > f(5)$

💬 Lời giải.

- a) Ta có $-k^2 - 4k - 5 = -(k + 2)^2 - 1 < 0$, với mọi k nên hàm số $y = f(x)$ luôn là hàm số bậc nhất và nghịch biến với mọi k .
b) Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm số nghịch biến và $-2 < 5$ nên $f(-2) > f(5)$.



✧ Bài 7. Cho hai hàm số $y = x - 2$ và $y = -2x + 4$ có đồ thị lần lượt là hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- a) Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ;
b) Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

🔗 $(2; 0)$

💬 Lời giải.

- a) Bảng giá trị

x	0	1
$y = x - 2$	-2	-1
$y = -2x + 4$	4	2

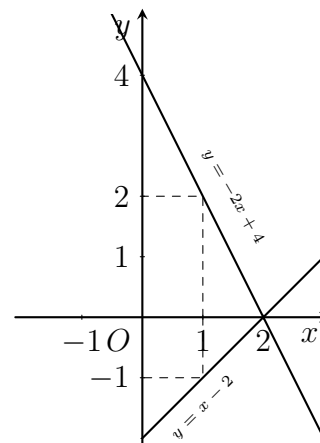
Đồ thị hàm số $y = x - 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; -2)$ và $(1; -1)$.

Đồ thị hàm số $y = -2x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; 4)$ và $(1; 2)$.

- b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 có dạng

$$x - 2 = -2x + 4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0.$$

Vậy d_1 cắt d_2 tại điểm $(2; 0)$.



✧ Bài 8. Cho hai đường thẳng $d_1: y = 2x - 3$ và $d_2: y = 3 - x$.

- a) Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ;
b) Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

🔗 $(2; 1)$

💬 Lời giải.

a) Bảng giá trị

x	0	1
$y = 2x - 3$	-3	-1
$y = 3 - x$	3	2

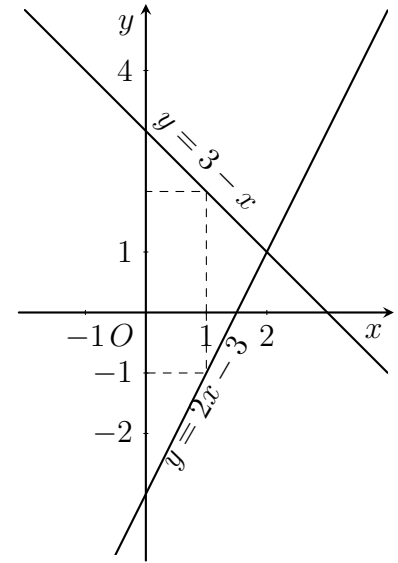
Đồ thị hàm số $y = 2x - 3$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; -3)$ và $(1; -1)$.

Đồ thị hàm số $y = 3 - x$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; 3)$ và $(1; 2)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 có dạng

$$2x - 3 = 3 - x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy d_1 cắt d_2 tại điểm $(2; 1)$.



□

❖ Bài 9. Xác định phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua điểm $A(-4; 1)$ và $B(-2; -3)$;

$$\text{Q: } (d): y = -2x - 7$$

b) d đi qua $C(-2; 2)$ và có hệ số góc bằng -2 ;

$$\text{Q: } d: y = -2x - 2$$

c) d đi qua $D(-1; 2)$ và cắt đường thẳng $d_1: y = 2x - 2$ tại một điểm trên trục tung;

$$\text{Q: } d: y = -4x - 2$$

d) d đi qua $E(4; -5)$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_2: y = 4x + 3$ và $d_3: y = 3x + 4$.

$$\text{Q: } d: y = -4x + 11$$

💬 Lời giải.

a) Giả sử $(d): y = ax + b$.

Vì đường thẳng d đi qua điểm $A(-4; 1)$ nên $1 = a \cdot (-4) + b \Leftrightarrow b = 4a + 1$ (1)

và đi qua $B(-2; -3)$ nên $-3 = a \cdot (-2) + b \Leftrightarrow -2a + b = -3$. (2)

Thay (1) và (2) ta được $-2a + 4a + 1 = -3 \Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow b = -7$.

Vậy đường thẳng $(d): y = -2x - 7$.

b) Giả sử $(d): y = ax + b$.

Vì đường thẳng d có hệ số góc bằng -2 nên $(d): y = -2x + b$ (1)

và đi qua $C(-2; -2)$ nên $-2 = -2 \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = -2$.

Vậy đường thẳng $(d): y = -2x - 2$.

c) Giả sử $(d): y = ax + b$.

Vì d đi qua $D(-1; 2)$ nên $2 = a \cdot (-1) + b \Leftrightarrow -a + b = 2$. (1)

và cắt đường thẳng $d_1: y = 2x - 2$ tại một điểm trên trục tung nên d đi qua điểm $M(0; -2)$.

Do đó $b = -2$. (2)

Thay (2) vào (1) ta được $a = -4$.

Vậy $d: y = -4x - 2$.

d) Phương trình hoành độ giao điểm của d_2 và d_3 có dạng

$$4x + 3 = 3x + 4 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 7.$$

Do d đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_2: y = 4x + 3$ và $d_3: y = 3x + 4$ nên

$$7 = a \cdot 1 + b \Leftrightarrow a + b = 7 \Leftrightarrow b = 7 - a. \quad (1)$$

$$\text{và } d \text{ đi qua } E(4; -5) \text{ nên } -5 = a \cdot 4 + b \Leftrightarrow 4a + b = -5. \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $4a + 7 - a = -5 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow b = 11$.

Vậy $d: y = -4x + 11$.

□

❖ **Bài 10.** Cho đường thẳng $d: y = (4m + 5)x - 2m + 7$ với m là tham số.

a) Tìm các giá trị của m để d cùng với hai đường thẳng $d_1: y = 3x - 1$ và $d_2: y = 2x + 1$ đồng quy; 🔗 $m = -2$

b) Tìm m để d song song với đường thẳng $d_3: y = -3x + 2$. 🔗 $m = -2$

💬 **Lời giải.**

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2

$$3x - 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 5.$$

Do d cùng với hai đường thẳng d_1 và d_2 đồng quy nên d đi qua điểm $(2; 5)$. Do đó

$$(4m + 5) \cdot 2 - 2m + 7 = 5 \Leftrightarrow 8m + 10 - 2m + 7 = 5 \Leftrightarrow 6m = -12 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy với $m = -2$ thì ba đường thẳng d , d_1 và d_2 đồng quy.

b) Để d song song với đường thẳng $d_3: y = -3x + 2$ thì

$$\begin{cases} 4m + 5 = -3 \\ -2m + 7 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy với $m = -2$ thì $d \parallel d_3$.

□

❖ **Bài 11.** Cho đường thẳng $d: y = (m + 2)x + m - 1$ với m là tham số.

a) Tìm các giá trị của m để d cùng với hai đường thẳng $d_1: y = 2x + 1$ và $d_2: y = -x + 4$ đồng quy; 🔗 $m = 1$

b) Tìm m để d vuông góc với đường thẳng $d_3: y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}$. 🔗 $m = \frac{1}{2}$

💬 **Lời giải.**

a) $m = 1$.

b) Để d vuông góc với đường thẳng $d_3: y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}$ thì $(m + 2) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thì $d \perp d_3$.



❖ **Bài 12.** Tìm điều kiện của x để hàm số sau được xác định

a) $y = 3x + 8;$

b) $y = \frac{x}{x-2};$

c) $y = x - \sqrt{3x};$

$\text{đ} x \geq 0$ d) $y = \frac{3}{x-1} + \sqrt{x-4}.$

$\text{đ} x \geq 4$

💬 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = 3x + 8$ xác định với mọi giá trị thực của x .

b) Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ xác định khi và chỉ khi $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

c) Hàm số $y = x - \sqrt{3x}$ xác định khi và chỉ khi $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

d) Hàm số $y = \frac{3}{x-1} + \sqrt{x-4}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$.



❖ **Bài 13.** Tìm các giá trị của tham số m để các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất

a) $y = (m-2)x - 3;$

$\text{đ} m \neq 2$

b) $y = \frac{m-1}{m^2+1}x + 1;$

$\text{đ} m \neq 1$

c) $y = 12 - \frac{\sqrt{m+3}}{2m-7}x;$

$\text{đ} m \neq -3 \text{ và } m \neq \frac{7}{2}$

d) $y = (m^2 - 1)x^2 + (1+m)x.$

$\text{đ} m \in \emptyset$

💬 **Lời giải.**

a) Hàm số $y = (m-2)x - 3$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

b) Hàm số $y = \frac{m-1}{m^2+1}x + 1$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ (vì $m^2+1 > 0$, với mọi m).

c) Hàm số $y = 12 - \frac{\sqrt{m+3}}{2m-7}x$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m+3 \neq 0 \\ 2m-7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m \neq -3$ và $m \neq \frac{7}{2}$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

d) Hàm số $y = (m^2 - 1)x^2 + (1+m)x$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$



❖ **Bài 14.** Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 + m + 1)x + 3$ với m là tham số

- a) Chứng minh $y = f(x)$ luôn là hàm số bậc nhất và đồng biến với mọi m ;
 b) Không cần tính, hãy so sánh $f(4)$ và $f(9)$.

🔗 mọi m 🔗 $f(4) < f(9)$

💬 Lời giải.

- a) Vì $m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, với mọi m nên hàm số $y = f(x)$ luôn là hàm số bậc nhất và đồng biến với mọi m .
 b) Vì hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến với mọi m và $4 < 9$ nên $f(4) < f(9)$.

□

🔗 **Bài 15.** Cho hai hàm số $y = 4x + 2$ và $y = -2x + 1$ có đồ thị lần lượt là hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- a) Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục tọa độ;
 b) Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

🔗 $\left(-\frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$

💬 Lời giải.

- a) Bạn đọc tự vẽ hình.
 b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 có dạng

$$4x + 2 = -2x + 1 \Leftrightarrow 6x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{4}{3}.$$

Vậy d_1 cắt d_2 tại điểm $A\left(-\frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

□

🔗 **Bài 16.** Xác định đường thẳng d trong các trường hợp sau

- a) d cắt đường thẳng $d_1: 2x + y - 4 = 0$ tại một điểm thuộc trục hoành và cắt đường thẳng $d_2: y = x + 2$ tại một điểm thuộc trục tung;
 b) d đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; -5\right)$ và song song với đường thẳng $d_3: y = -2x + 4$;
 c) d đi qua điểm $B\left(-\sqrt{3}; \frac{3}{5}\right)$ và tạo với tia Ox một góc 60° .

🔗 $d: y = -x + 2$ 🔗 $d: y = -2x - 4$ 🔗 $d: y = \sqrt{3}x + \frac{18}{5}$

💬 Lời giải.

- a) d đi qua điểm $A(2; 0)$ và $B(0; 2)$. Do đó $d: y = -x + 2$.
 b) $d: y = -2x - 4$.
 c) Ta có $a = \tan 60^\circ \Rightarrow a = \sqrt{3}$. Do đó $d: y = \sqrt{3}x + \frac{18}{5}$.

□

❖ **Bài 17.** Cho đường thẳng $d: y = (m + 4)x - m + 2$ với m là tham số.

- a) Tìm m để d cùng với các đường thẳng $d_1: y = 4x + 6$ và $d_2: y = -2x$ đồng quy; 🔗 $m = -2$
- b) Tìm m để d vuông góc với đường thẳng $d_3: x + 2y - 1 = 0$. 🔗 $m = -2$

💬 **Lời giải.**

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2

$$4x + 6 = -2x \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2.$$

Vì d cùng với các đường thẳng d_1 và d_2 đồng quy nên d đi qua điểm $(-1; 2)$. Do đó

$$2 = (m + 4) \cdot (-1) - m + 2 \Leftrightarrow -2m = 4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy $m = -2$.

- b) Ta có $d_3: x + 2y - 1 = 0$ hay $d_3: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Do d vuông góc với đường thẳng d_3 nên

$$(m + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow m + 4 = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy $m = -2$.

□

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II - ĐỀ 01

1. Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Trong các hàm số sau, hàm số bậc nhất là

- Ⓐ $y = \frac{2}{x} + 5$. Ⓑ $y = \frac{2}{3} - 2x^2$. Ⓒ $x + 3y = 2$. Ⓓ $y = -3\sqrt{x} + 1$.

💬 **Lời giải.**

Hàm số bậc nhất là $x + 3y = 2$ vì $x + 3y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án Ⓒ

□

❖ **Câu 2.** Hàm số $y = (4 - m^2)x^2 + (2 - m)x + 3$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

- Ⓐ $m = 3$. Ⓑ $m = 0$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = -2$.

💬 **Lời giải.**

Hàm số $y = (4 - m^2)x^2 + (2 - m)x + 3$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4 - m^2 = 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \Leftrightarrow m = -2. \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy $m = -2$.

Chọn đáp án Ⓓ

□

❖ **Câu 3.** Điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 3$ là

- (A) $(0; 3)$. (B) $(3; 0)$. (C) $(0; -3)$. (D) $(-3; 0)$.

💬 **Lời giải.**

Điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 3$ là $(0; -3)$.

Chọn đáp án (C) □

❖ **Câu 4.** Cho đường thẳng $d: y = 3x - 4$. Đường thẳng d' nào sau đây song song với đường thẳng d ?

- (A) $d': y = 2x - 4$. (B) $d': y = -4x + 3$. (C) $d': y = 3x - 2$. (D) $d': y = -3x + 1$.

💬 **Lời giải.**

Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$. Do đó đường thẳng $d': y = 3x - 2$ thỏa đề bài.

Chọn đáp án (C) □

❖ **Câu 5.** Đường thẳng nào sau đây có hệ số góc là $\frac{1}{2}$?

- (A) $y = 2x + 3$. (B) $y = \frac{x+3}{2}$. (C) $x + 2y = 0$. (D) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $y = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ nên đường thẳng $y = \frac{x+3}{2}$ có hệ số góc bằng $\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 6.** Góc tạo bởi đường thẳng $y = \sqrt{3}x - 2$ và tia Ox là

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 120° . (D) 150° .

💬 **Lời giải.**

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = \sqrt{3}x - 2$ và tia Ox . Khi đó

$$\tan \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Chọn đáp án (A) □

❖ **Câu 7.** Đường thẳng $y = (m - 1)x - 3$ đi qua $A(2; 3)$ thì giá trị của m là

- (A) $m = 2$. (B) $m = 4$. (C) $m = 6$. (D) $m = 0$.

💬 **Lời giải.**

Vì đường thẳng $y = (m - 1)x - 3$ đi qua $A(2; 3)$ nên

$$3 = (m - 1) \cdot 2 - 3 \Leftrightarrow m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4.$$

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 8.** Đồ thị trong hình vẽ sau đây là của hàm số nào?

Ⓐ $y = 2x - 1.$

Ⓑ $y = -4x + 1.$

Ⓒ $y = \frac{1}{3}x + 1.$

Ⓓ $3y = -x + 1.$

💬 **Lời giải.**

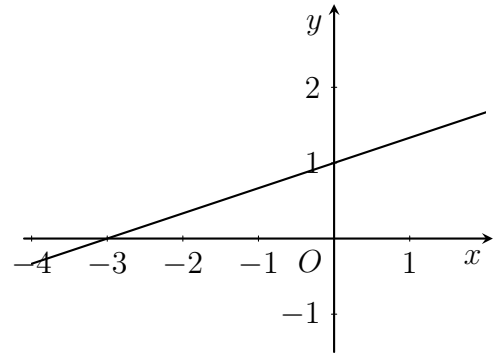
Giả sử ta có đường thẳng $d: y = ax + b.$

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 1)$ và $B(-3; 0)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 1 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{1}{3}x + 1.$

Chọn đáp án Ⓒ



2. Tự luận

❖ **Bài 1.** Gọi d_1, d_2 lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = 4x + 3$ và $y = -x - 2.$

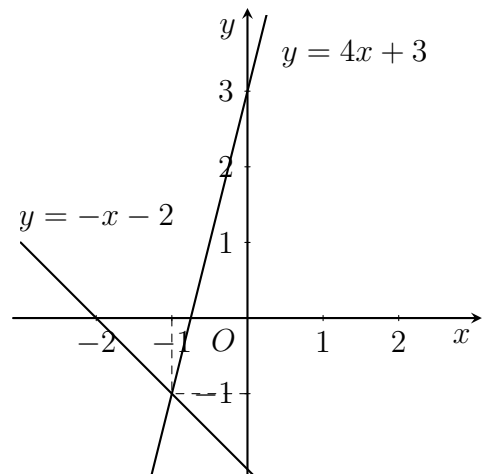
- Vẽ d_1 và d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm M của d_1 và $d_2.$
- Tính góc tạo bởi d_2 và tia $Ox.$

💬 **Lời giải.**

a)

Bảng giá trị

x	-1	0
$y = 4x + 3$	-1	3
$y = -x - 2$	-1	-2



b) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2

$$4x + 3 = -x - 2 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1.$$

Vậy tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $M(-1; -1).$

c) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = -x - 2$ và tia $Ox.$ Khi đó

$$\tan(180^\circ - \alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 135^\circ.$$



❖ **Bài 2.** Viết phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$ biết

- a) d có hệ số góc là -3 và đi qua điểm $A(-1; 4)$.
 b) d song song với đường thẳng $y = x - 3$ và đi qua một điểm trên trục hoành có hoành độ bằng 5.

💬 **Lời giải.**

- a) Vì $d: y = ax + b$ có hệ số góc là -3 nên d có dạng $d: y = -3x + b$.
 Mặt khác d đi qua điểm $A(-1; 4)$ nên $4 = (-3) \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = 1$.
 Vậy $d: y = -3x + 1$.
 b) Vì $d: y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = x - 3$ nên d có dạng $d: y = x + b$ ($b \neq -3$).
 Mặt khác d đi qua một điểm trên trục hoành có hoành độ bằng 5 nên

$$0 = 5 + b \Leftrightarrow b = -5 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } d: y = x - 5.$$



❖ **Bài 3.** Tìm m để đường thẳng $d: y = (2m^2 + 1)x + 2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{2}{19}$.

💬 **Lời giải.**

Đường thẳng $d: y = (2m^2 + 1)x + 2$ cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{2}{2m^2 + 1}; 0\right)$ và cắt trục tung tại điểm $B(0; 2)$.

Vì diện tích $\triangle ABO$ bằng $\frac{2}{19}$ nên

$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \Leftrightarrow \frac{2}{19} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-2}{2m^2 + 1} \right| \cdot 2 \Leftrightarrow 2m^2 + 1 = 19 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$



ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II - ĐỀ 02

1. Trắc nghiệm

❖ **Câu 1.** Trong các hàm số sau, hàm số bậc nhất là

- (A) $y = x^2 + 2x - 1$. (B) $y = -2x + 1$. (C) $y = -\sqrt{3x} - 2$. (D) $y = -3$.

💬 **Lời giải.**

Hàm số $y = -2x + 1$ là hàm số bậc nhất với $a = -2$, $b = 1$.

Chọn đáp án (B)



❖ **Câu 2.** Tìm m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^2 + (m - 1)x - 100$ là hàm số bậc nhất?

- (A) $m = 3$. (B) $m = -1$. (C) $m = 1$. (D) $m = 0$.

💬 **Lời giải.**

Hàm số $y = (m^2 - 1)x^2 + (m - 1)x - 100$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \Leftrightarrow m = -1. \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy với $m = -1$ thì hàm số $y = (m^2 - 1)x^2 + (m - 1)x - 100$ là hàm số bậc nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{x}{2} + 3$. Câu nào sau đây **sai**?

(A) $f(-2) = 4$.

(B) $f(1) = \frac{5}{2}$.

(C) $f(4) = 1$.

(D) $f(-4) = -1$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $f(-2) = -\frac{-2}{2} + 3 = 4$;

$$f(1) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2};$$

$$f(4) = -\frac{4}{2} + 3 = 1;$$

$$f(-4) = -\frac{-4}{2} + 3 = 5.$$

Vậy kết luận sai là $f(-4) = -1$.

Chọn đáp án **(D)** □

❖ **Câu 4.** Góc tạo bởi đường thẳng $d: y = -3x + 1$ với tia Ox là

(A) Góc nhọn.

(B) Góc vuông.

(C) Góc tù.

(D) Góc bẹt.

💬 **Lời giải.**

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $d: y = -3x + 1$ và tia Ox . Vì đường thẳng $d: y = -3x + 1$ có hệ số $a = -3 < 0$ nên α là góc tù.

Chọn đáp án **(C)** □

❖ **Câu 5.** Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$?

(A) $y = 2x + 1$.

(B) $y = \frac{x+3}{2}$.

(C) $2x + y + 1 = 0$.

(D) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

💬 **Lời giải.**

Hai đường thẳng vuông góc khi tích của hai hệ số góc của chúng bằng -1 nên

$$k \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow k = -2.$$

Chọn đáp án **(C)** □

❖ **Câu 6.** Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\frac{x-2}{x+1} - 3}{\sqrt{x-1}}$ là

(A) $x \neq 1$.

(B) $x \in \mathbb{R}$.

(C) $x \neq -1$.

(D) $x > 1$.

💬 **Lời giải.**

Hàm số $y = \frac{\frac{x-2}{x+1} - 3}{\sqrt{x-1}}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

❖ **Câu 7.** Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = (m - 1)x + 1$ và $y = (3 - m)x - 5$ song song với nhau?

(A) $m = 0$.

(B) $m = 2$.

(C) $m = 4$.

(D) $m = 6$.

💬 **Lời giải.**

Đường thẳng $y = (m - 1)x + 1$ và $y = (3 - m)x - 5$ song song với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 1 = 3 - m \\ 1 \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2m = 4 \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 8.**

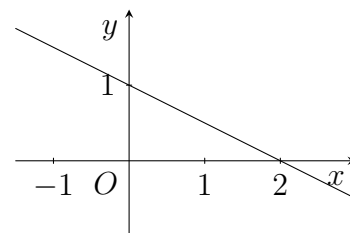
Đồ thị trong hình vẽ sau đây là của hàm số nào?

(A) $y = 2x - 1$.

(B) $2y = -x + 2$.

(C) $y = \frac{1}{2}x + 1$.

(D) $y = -2x + 1$.



💬 **Lời giải.**

Giả sử có đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Đồ thị hàm số trong hình vẽ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đi qua điểm $A(0; 1)$ và $B(2; 0)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng có phương trình $y = -\frac{1}{2}x + 1$ hay $2y = -x + 2$.

Chọn đáp án (B) □

2. Tự luận

❖ **Bài 1.** Cho đường thẳng $d: y = x + 3$.

- Biểu diễn d trên mặt phẳng tọa độ;
- Gọi A, B là giao điểm của d với hai trục Ox, Oy . Tìm tọa độ của A và B .
- Tính diện tích tam giác OAB .

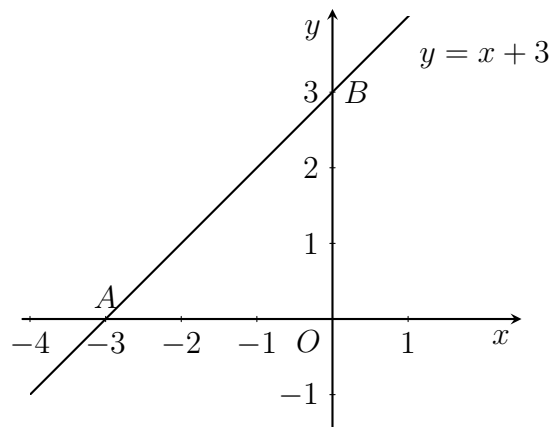
💬 **Lời giải.**

a)

Bảng giá trị

x	-3	0
$y = x + 3$	0	3

Đồ thị hàm số $y = x + 3$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(-3; 0)$ và $(0; 3)$.



b) A, B là giao điểm của d với hai trục Ox, Oy nên tọa độ của $A(-3; 0), B(0; 3)$.

c) Diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$ (đvdt)

□

❖ **Bài 2.** Cho đường thẳng $d: y = (a - 2)x + a - 3$ với a là tham số.

a) Tìm a để d đi qua điểm $A(1; -3)$;

b) Tìm a để d song song với đường thẳng $y = -2x + 3$.

💬 **Lời giải.**

a) Vì đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -3)$ nên

$$-3 = (a - 2) \cdot 1 + a - 3 \Leftrightarrow 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy $a = 1$.

b) Vì đường thẳng d song song với đường thẳng $y = -2x + 3$ nên

$$\begin{cases} a - 2 = -2 \\ a - 3 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

Vậy $a = 0$.

□

❖ **Bài 3.** Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng $d: y = (m - 2)x - 1$ bằng $\frac{4}{5}$.

💬 **Lời giải.**

Đường thẳng $d: y = (m - 2)x - 1$ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0; -1)$ và $B\left(\frac{1}{m - 2}; 0\right)$.

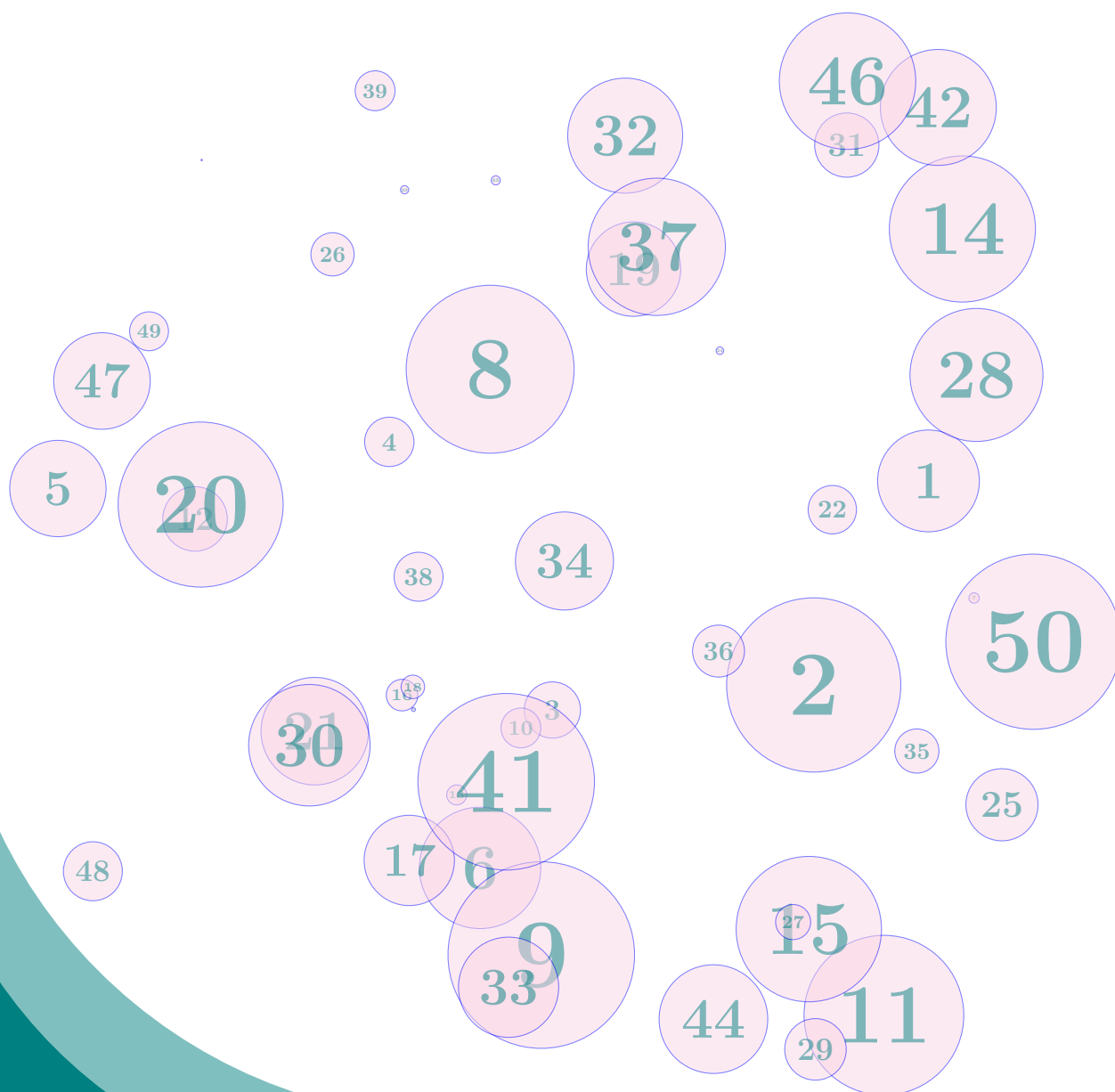
Vì khoảng cách từ O đến đường thẳng bằng $\frac{4}{5}$ nên $m - 2 \neq 0$ hay $m \neq 2$.

Gọi H là hình chiếu của gốc tọa độ O lên đường thẳng d .

$$\text{Ta có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \text{ suy ra } \frac{25}{9} = 1 + (m - 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{11}{4} \\ m = \frac{5}{4} \end{cases}$$

□

PHẦN HÌNH HỌC



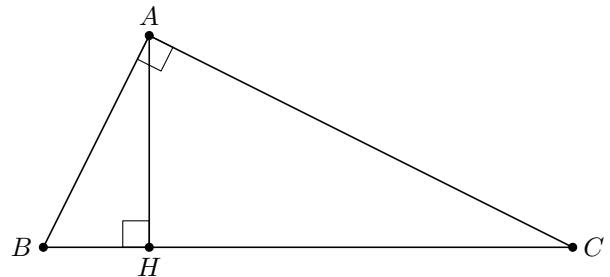
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Khi đó ta có các hệ thức sau:

- ☑ $AB^2 = BH \cdot BC$
- ☑ $AC^2 = CH \cdot BC$
- ☑ $AB \cdot AC = BC \cdot AH$
- ☑ $AH^2 = HB \cdot HC$
- ☑ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
- ☑ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pitago).

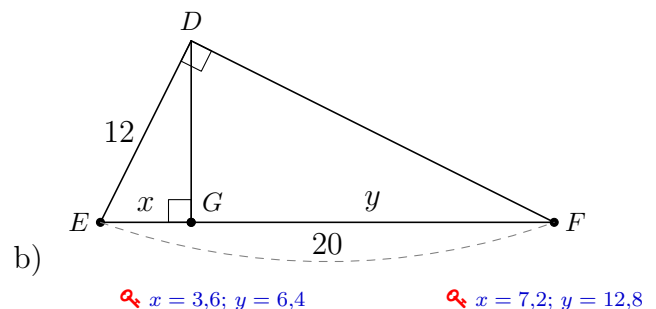
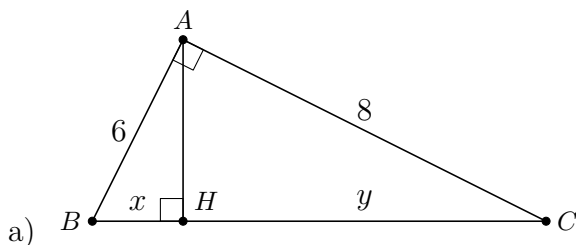


B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Nếu biết độ dài của hai trong 6 đoạn thẳng AB, AC, BC, HA, HB, HC thì ta luôn tính được độ dài của 4 đoạn thẳng còn lại.

🔗 **Ví dụ 1.** Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



💬 **Lời giải.**

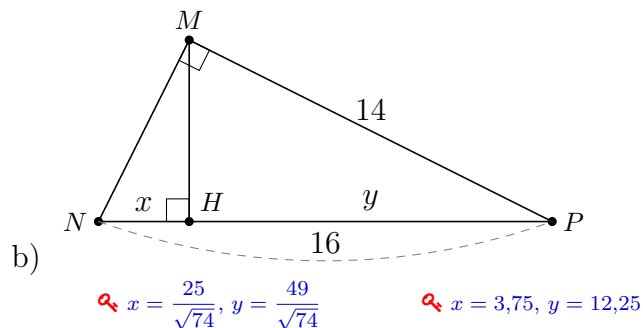
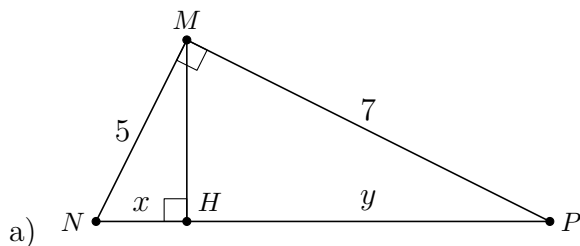
- a) Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{24}{5}$.
 Suy ra $\begin{cases} AB^2 = AH^2 + x^2 \Rightarrow x = 3,6 \\ AC^2 = AH^2 + y^2 \Rightarrow y = 6,4. \end{cases}$

b) Ta có $DE^2 = EG \cdot EF \Rightarrow x = 7,2$.

Mà $x + y = 20 \Rightarrow y = 12,8$.

□

❖ **Ví dụ 2.** Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



💬 **Lời giải.**

a) Ta có $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} \Rightarrow MH = \frac{35}{\sqrt{74}}$.

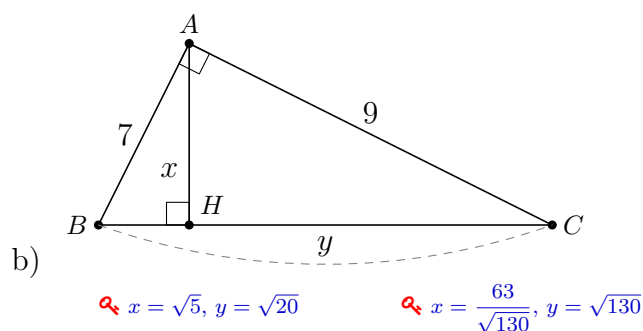
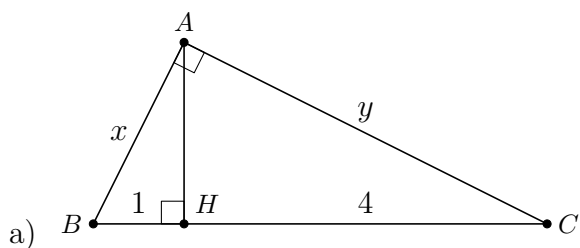
Suy ra
$$\begin{cases} MN^2 = MH^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{25}{\sqrt{74}} \\ MP^2 = MH^2 + y^2 \Rightarrow y = \frac{49}{\sqrt{74}} \end{cases}$$

b) Ta có $MP^2 = HP \cdot NP \Rightarrow y = 12,25$.

Mà $x + y = 16 \Rightarrow x = 3,75$.

□

❖ **Ví dụ 3.** Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



💬 **Lời giải.**

a) Ta có $BC = BH + HC = 5$.

Mà $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow x = \sqrt{5}$.

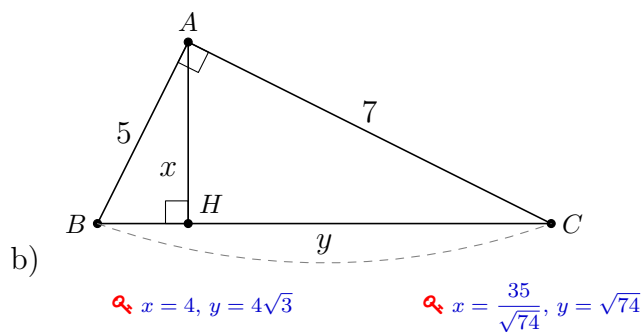
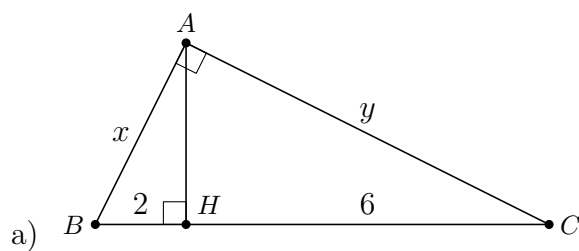
Mặt khác $x^2 + y^2 = BC^2 \Rightarrow y = \sqrt{20}$.

b) Ta có $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow x = \frac{63}{\sqrt{130}}$.

Mà $AB \cdot AC = xy \Rightarrow y = \sqrt{130}$.

□

🔗 **Ví dụ 4.** Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau

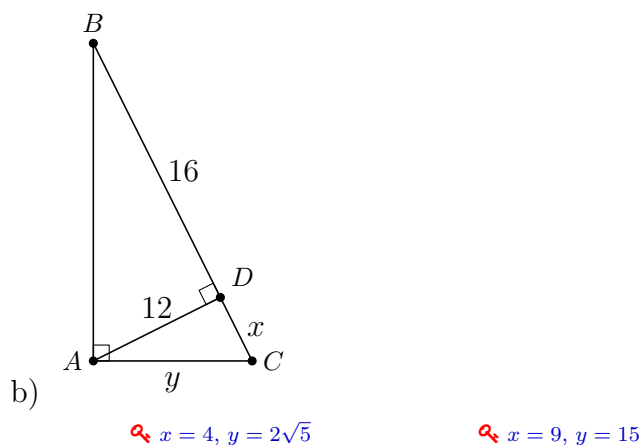
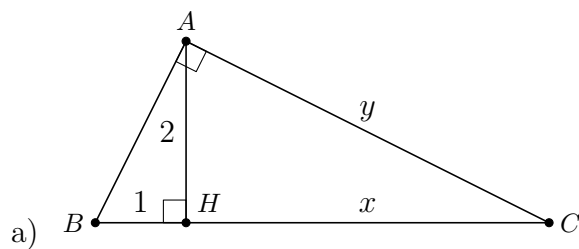


💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $BC = BH + HC = 8$.
 Mà $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow x = 4$.
 Mặt khác $x^2 + y^2 = BC^2 \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$.
- b) Ta có $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow x = \frac{35}{\sqrt{74}}$.
 Mà $AB \cdot AC = xy \Rightarrow y = \sqrt{74}$.

□

🔗 **Ví dụ 5.** Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau

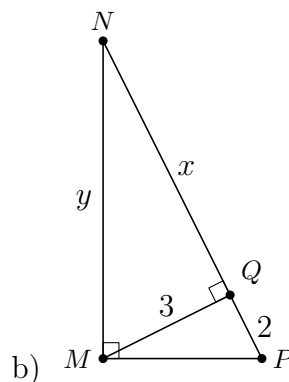
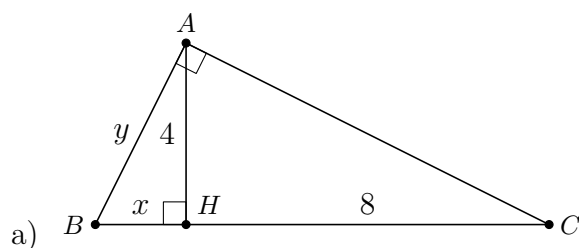


💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$.
 Mà $AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow BC = 5 \Rightarrow x = BC - BH = 4$.
 Mặt khác $y^2 = AH^2 + x^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$.
- b) Ta có $AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AB = 20$.
 Mà $AB^2 = BC \cdot BD \Rightarrow BC = 25 \Rightarrow x = BC - BD = 9$.
 Mặt khác $y^2 = AD^2 + x^2 \Rightarrow y = 15$.

□

🔗 **Ví dụ 6.** Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



$$x = 2, y = 2\sqrt{5}$$

$$x = \frac{9}{2}, y = \frac{\sqrt{117}}{2}$$

Lời giải.

a) Ta có $AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AB = 4\sqrt{5}$.

$$\text{Mà } AC^2 = BC \cdot CH \Rightarrow BC = 10 \Rightarrow x = BC - CH = 2.$$

$$\text{Mặt khác } y^2 = AH^2 + x^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}.$$

b) Ta có $MP^2 = MQ^2 + QP^2 \Rightarrow MP = \sqrt{13}$.

$$\text{Mà } MP^2 = NP \cdot PQ \Rightarrow NP = \frac{13}{2} \Rightarrow x = NP - PQ = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } y^2 = MQ^2 + x^2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{117}}{2}.$$

□

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

a) Cho biết $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH , CH , AH và AC .

$$BH = \frac{9}{5} \text{ cm}, CH = \frac{16}{5} \text{ cm}, AH = \frac{12}{5} \text{ cm}, AC = 4 \text{ cm}$$

b) Cho biết $AH = 16$ cm, $BH = 25$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC , BC và CH .

$$AB = \sqrt{881} \text{ cm}, AC \approx 19 \text{ cm}, BC = \frac{881}{25} \text{ cm}, CH = \frac{256}{25} \text{ cm}$$

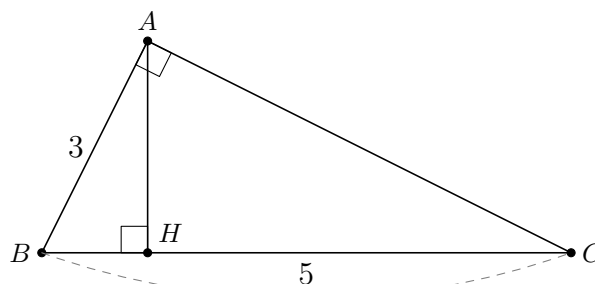
Lời giải.

a) Ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC = 4$ cm.

$$\text{Mà } AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{12}{5} \text{ cm.}$$

$$\text{Do đó } BH = AB^2 - AH^2 = \frac{9}{5} \text{ cm.}$$

$$\text{Suy ra } HC = BC - BH = \frac{16}{5} \text{ cm.}$$

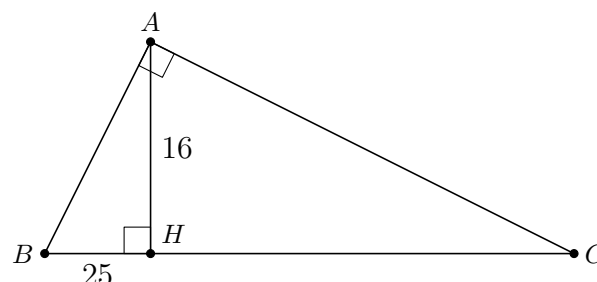


b) Ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = \sqrt{881}$ cm.

$$\text{Mà } AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow BC = \frac{881}{25} \text{ cm.}$$

$$\text{Suy ra } HC = BC - BH = \frac{256}{25} \text{ cm.}$$

$$\text{Mặt khác } AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC \approx 19 \text{ cm.}$$





❖ **Ví dụ 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH .

a) Cho biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH , CH , AH và BC .

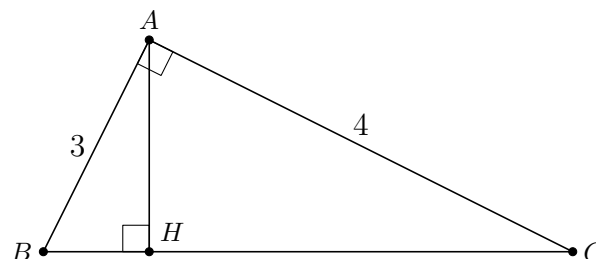
$$\text{Đ.Đ. } BH = \frac{81}{25} \text{ cm, } CH = \frac{44}{25} \text{ cm, } AH = \frac{12}{5} \text{ cm, } BC = 5 \text{ cm}$$

b) Cho biết $AH = 60$ cm, $CH = 144$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC , BC và BH .

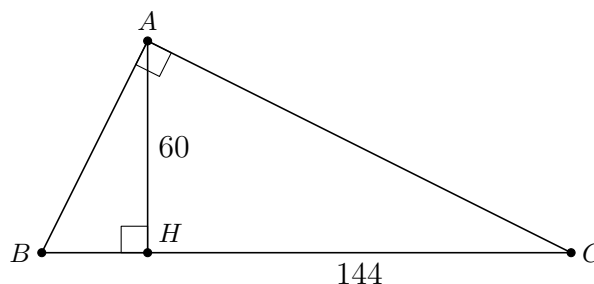
$$\text{Đ.Đ. } AB = 156 \text{ cm, } AC = 65 \text{ cm, } BC = 169 \text{ cm, } BH = 25 \text{ cm}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = 5$ cm.
 Và $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$ cm.
 Suy ra $BH = AB^2 - AH^2 = \frac{81}{25}$ cm.
 Do đó $HC = BC - BH = \frac{44}{25}$ cm.



b) Ta có $AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AB = 156$ cm.
 Mà $AC^2 = BC \cdot CH \Rightarrow BC = 169$ cm.
 Suy ra $HB = BC - CH = 25$ cm.
 Mặt khác $AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AC = 65$ cm.



❖ **Ví dụ 9.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $BC = 15$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và HC .

$$\text{Đ.Đ. } BH = \frac{27}{5} \text{ cm, } CH = \frac{48}{5} \text{ cm}$$

🗨 **Lời giải.**

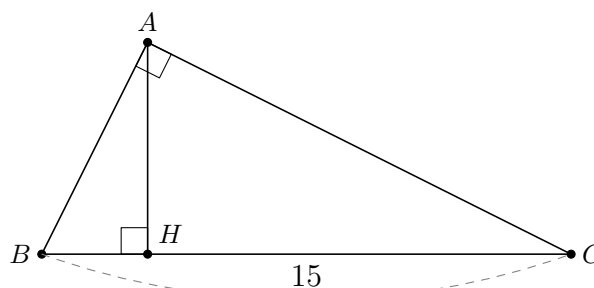
$$\text{Ta có } \begin{cases} AB^2 = BC \cdot BH \\ AC^2 = BC \cdot CH. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BH}{CH}.$$

$$\text{Hay } \frac{9}{16} = \frac{BH}{CH}.$$

$$\text{Mà } BH + CH = BC = 15 \text{ cm.}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} BH = \frac{27}{5} \text{ cm} \\ CH = \frac{48}{5} \text{ cm.} \end{cases}$$



❖ **Ví dụ 10.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 125$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và HC .

$$\text{Đ.Đ. } BH = 45 \text{ cm, } CH = 80 \text{ cm}$$

🗨 **Lời giải.**

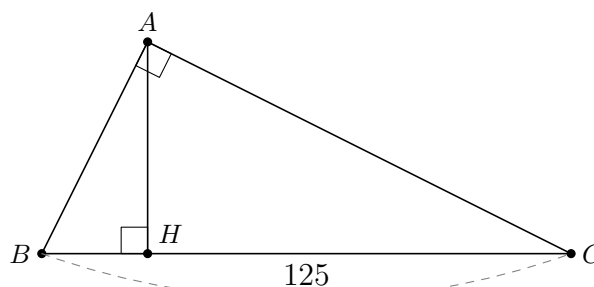
Ta có
$$\begin{cases} AB^2 = BC \cdot BH \\ AC^2 = BC \cdot CH. \end{cases}$$

Suy ra
$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BH}{CH}.$$

Hay
$$\frac{9}{16} = \frac{BH}{CH}.$$

Mà $BH + CH = BC = 125$ cm.

Suy ra
$$\begin{cases} BH = 45 \text{ cm} \\ CH = 80 \text{ cm}. \end{cases}$$



□

Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông

Sử dụng các hệ thức về cạnh và đường cao một cách hợp lý theo 3 bước sau:

- Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức;
- Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao;
- Liên kết các hệ thức trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

❖ **Ví dụ 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC . Chứng minh:

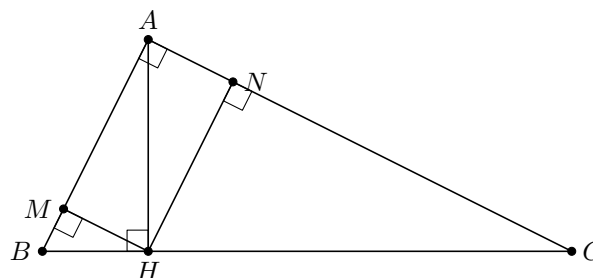
- $AM \cdot AB = AN \cdot AC$;
- $\frac{HB}{HC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

💬 **Lời giải.**

- Xét tam giác AHB vuông tại H có HM là đường cao, ta có $AH^2 = AM \cdot AB$. (1)
Xét tam giác AHC vuông tại H có HN là đường cao, ta có $AH^2 = AN \cdot AC$. (2)
Từ (1) và (2) ta có đpcm.

- Xét tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao, ta có
$$\begin{cases} AB^2 = BC \cdot BH \\ AC^2 = BC \cdot CH. \end{cases}$$

Chia vế theo vế, ta được đpcm.



□

❖ **Ví dụ 12.** Cho tam giác DEC nhọn, đường cao CH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H lên CD, CE . Chứng minh:

- $CD \cdot CM = CE \cdot CN$;
- $\triangle CMN \sim \triangle CED$.

💬 **Lời giải.**

- a) Xét tam giác CHD vuông tại H có HM là đường cao, ta có $CH^2 = CD \cdot CM$.

(1)

Xét tam giác CHE vuông tại H có HN là đường cao, ta có $CH^2 = CE \cdot CN$.

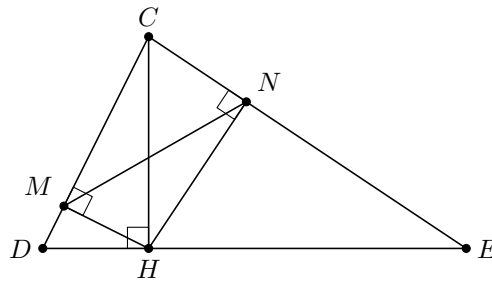
(2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

- b) Xét tam giác CMN và tam giác CED có

$$\begin{cases} \text{Góc } C \text{ chung} \\ \frac{CM}{CN} = \frac{CE}{CD} \end{cases}$$

Từ đó ta có đpcm.



□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

- a) Với $AB = 15$ cm, $BC = 25$ cm, tính độ dài các đoạn thẳng AC , AH , BH và CH .

🔗 $AC = 20$ cm, $AH = 12$ cm, $BH = 9$ cm, $CH = 16$ cm

- b) Với $AH = 6$ cm, $BH = 4,5$ cm, tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC , BC và CH .

🔗 $AB = 7,5$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 12,5$ cm, $CH = 8$ cm

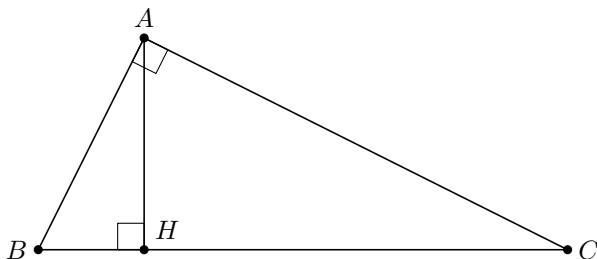
- c) Với $BH = 9$ cm, $CH = 16$ cm, tính độ dài các đoạn thẳng AH , AB , AC và BC .

🔗 $AH = 12$ cm, $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm

- d) Với $BC = 26$ cm, $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$, tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC , AH , BH và CH .

🔗 $AB = 10$ cm, $AC = 24$ cm, $AH = \frac{120}{13}$ cm, $BH = \frac{50}{3}$ cm, $CH = \frac{288}{13}$ cm

💬 **Lời giải.**



- a) Ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC = 20$ cm.
Mà $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = 12$ cm.
Do đó $BH^2 = AB^2 - AH^2 \Rightarrow BH = 9$ cm.
Suy ra $CH = BC - BH = 16$ cm.

- b) Ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = 7,5$ cm.
Mà $AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow BC = 12,5$ cm.
Do đó $CH = BC - BH = 8$ cm.
Suy ra $AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC = 20$ cm.

- c) Ta có $BC = BH + CH = 25$ cm.
 Mà $AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow AB = 15$ cm.
 Tương tự, $AC^2 = BC \cdot CH \Rightarrow AC = 20$ cm.
 Mặt khác $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = 12$ cm.

- d) Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 26^2 = 676$ cm².
 Mà $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$ nên $\begin{cases} AB = 10 \text{ cm} \\ AC = 24 \text{ cm} \end{cases}$ Mặt khác $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{120}{13}$ cm. Suy ra
 $BH^2 = AB^2 - AH^2 \Rightarrow BH = \frac{50}{3}$ cm. Do đó $CH = BC - BH = \frac{288}{13}$ cm.

□

❖ **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Với $AH = 5$ cm, $CH = 6$ cm, hãy tính:

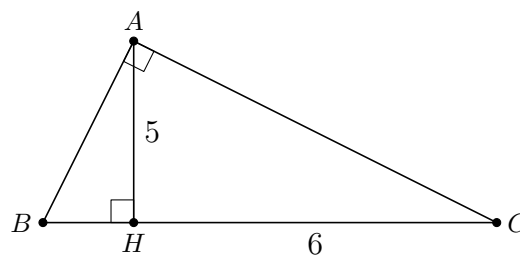
- a) Độ dài các đoạn thẳng AB , AC , BC và BH ; $\text{☞ } AB = \frac{5\sqrt{61}}{6}$ cm, $AC = \sqrt{61}$ cm, $BC = \frac{61}{6}$ cm, $BH = \frac{25}{6}$ cm
 b) Diện tích tam giác ABC . $\text{☞ } S_{ABC} = \frac{305}{12}$ cm²

💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{61}$ cm. Mà
 $AC^2 = BC \cdot HC \Rightarrow BC = \frac{61}{6}$ cm. Do đó $BH =$
 $BC - CH = \frac{25}{6}$ cm. Suy ra $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow$
 $AB = \frac{5\sqrt{61}}{6}$ cm.

- b) Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{305}{12}$ cm².

□



❖ **Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Với $AH = 16$ cm, $BH = 25$ cm, hãy tính:

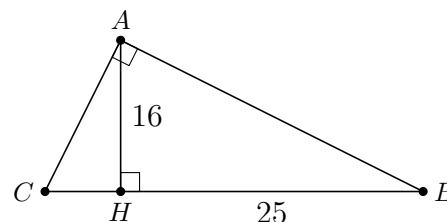
- a) Độ dài các đoạn thẳng AB , AC , BC và CH ; $\text{☞ } AB = \sqrt{881}$ cm, $AC \approx 19$ cm, $BC = 35,24$ cm, $CH = 10,24$ cm
 b) Diện tích tam giác ABC . $\text{☞ } S_{ABC} = 281,92$ cm²

💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{881}$ cm.
 Mà $AB^2 = BC \cdot HB \Rightarrow BC = 35,24$ cm.
 Do đó $CH = BC - BH = 10,24$ cm.
 Suy ra $AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC \approx 19$ cm.

- b) Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = 281,92$ cm².

□



❖ **Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $HC = 3HB$ và $AH = 12$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng HB và HC .

 Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB^2 = BC \cdot BH \\ AC^2 = BC \cdot CH \end{cases}$

Suy ra $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BH}{CH} = \frac{1}{3}$.

Mặt khác $\begin{cases} AB^2 = AH^2 + BH^2 \\ AC^2 = AH^2 + HC^2 \end{cases}$

Do đó $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AH^2 + BH^2}{AH^2 + CH^2} = \frac{12^2 + BH^2}{12^2 + (3BH)^2} = \frac{1}{9}$.

Suy ra $BH = 4\sqrt{13}$ cm.

Do đó $CH = 3BH = 12\sqrt{3}$ cm.

 $BH = 4\sqrt{13}$ cm, $CH = 12\sqrt{3}$ cm

□

✧ **Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$ và $AH = 30$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và CH .

 $BH = 36$ cm, $CH = 25$ cm

 Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB^2 = BC \cdot BH \\ AC^2 = BC \cdot CH \end{cases}$

Suy ra $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BH}{CH} = \frac{25}{36}$. (1)

Mặt khác $\begin{cases} AB^2 = AH^2 + BH^2 \\ AC^2 = AH^2 + HC^2 \end{cases}$

Suy ra $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AH^2 + BH^2}{AH^2 + CH^2} = \frac{30^2 + BH^2}{30^2 + CH^2} = \frac{25}{36}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH = 36$ cm, $CH = 25$ cm.

□

✧ **Bài 6.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Đường chéo BD vuông góc với BC . Biết $AD = 12$ cm, $DC = 25$ cm, tính độ dài AB , BC và BD .

 $AB = 16$ cm; $BC = 15$ cm; $BD = 20$ cm hoặc $BD = 15$ cm; $BC = 20$ cm

 Lời giải.

Kẻ $BH \perp CD = \{H\}$.

$\Rightarrow AD = BH = 12$ cm.

$\Rightarrow AB = DH = 16$ cm; $CH = 9$ cm;

$\Rightarrow BD = 20$ cm; $BC = 15$ cm.

Bài toán còn có 1 nghiệm hình khác.

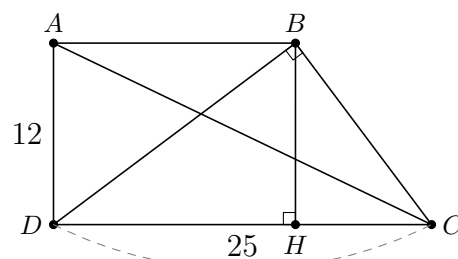
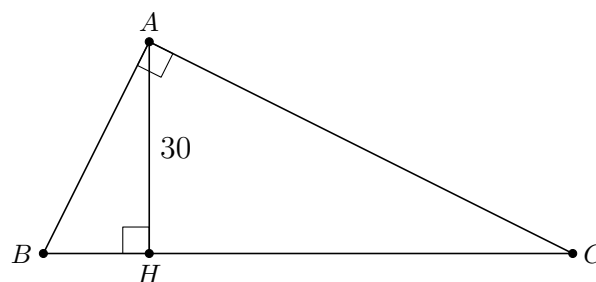
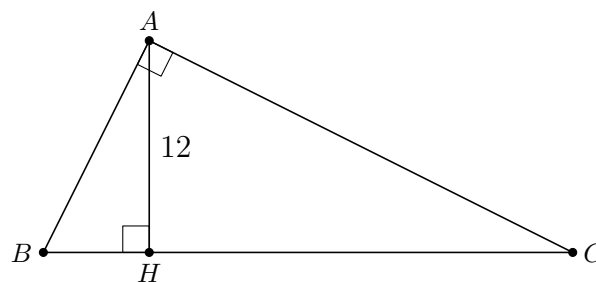
Tính được $AB = DH = 9$ cm và $HC = 16$ cm.

Từ đó tính được $BD = 15$ cm; $BC = 20$ cm.

□

✧ **Bài 7.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$ cm và $BC = 15$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BD ;



- b) Kẻ $AH \perp BD$ tại H . Tính độ dài đoạn thẳng AH ;
 c) Đường thẳng AH cắt BC , DC lần lượt tại I và K . Chứng minh $AH^2 = HI \cdot HK$.

 Lời giải.

a) Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD = 17 \text{ cm}$.  $BD = 17 \text{ cm}$

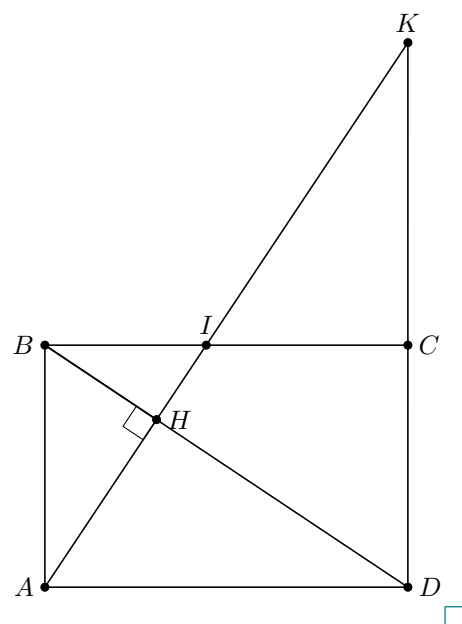
b) Ta có $AH \cdot BD = AB \cdot AD \Rightarrow AH = \frac{120}{17} \text{ cm}$.
 $AH = \frac{120}{17} \text{ cm}$

c) Ta có $\triangle BHI \sim \triangle KHD$ (g.g).

$$\text{Suy ra } \frac{BH}{KH} = \frac{HI}{HD} \Rightarrow HI \cdot HK = BH \cdot HD. \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADB ta được $BH \cdot HD = AH^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.



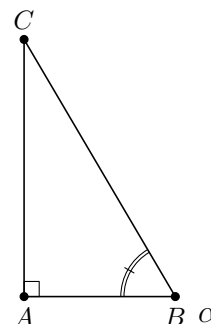
BÀI 2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho góc nhọn α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\widehat{ABC} = \alpha$. Từ đó ta có

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \quad \cos \alpha = \frac{AB}{BC}; \quad \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC}.$$



2. Tính chất

☑ Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì ta có

$$\sin \alpha = \cos \beta; \quad \cos \alpha = \sin \beta; \quad \tan \alpha = \cot \beta; \quad \cot \alpha = \tan \beta.$$

☑ Cho góc nhọn α bất kì, ta có

$$\begin{aligned} 0 < \sin \alpha < 1; \quad 0 < \cos \alpha < 1; & \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1; \\ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; & \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; & \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; & \end{aligned}$$

☑ Khi góc nhọn α tăng từ 0° đến 90° thì

$$\sin \alpha \text{ và } \tan \alpha \text{ tăng.} \quad \cos \alpha \text{ và } \cot \alpha \text{ giảm.}$$

3. Bảng tỉ số lượng giác của một số góc đặc biệt

	30°	45°	60°
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc.

Sử dụng các công thức về tỉ số lượng giác.

❖ **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại C , có $BC = 12\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A . $\rightarrow \cos A = 0,6$; $\sin A = 0,8$; $\tan A = \frac{4}{3}$; $\cot A = \frac{3}{4}$

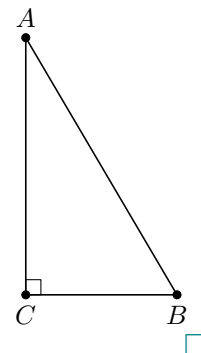
💬 **Lời giải.**

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC ta được

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 12^2 + 9^2 = 225 \Leftrightarrow AB = 15 \text{ (cm)}$$

Từ đó ta tính được $\sin B = \frac{9}{15}$; $\cos B = \frac{12}{15}$; $\tan B = \frac{3}{4}$; $\cot B = \frac{4}{3}$.

Do $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^\circ$ nên từ các tỉ số lượng giác của góc B ta suy ra được các tỉ số lượng giác của góc A như sau $\cos A = 0,6$; $\sin A = 0,8$; $\tan A = \frac{4}{3}$; $\cot A = \frac{3}{4}$.



❖ **Ví dụ 2.** Cho tam giác MNP vuông tại M , có $MN = 16\text{cm}$, $MP = 12\text{cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc N . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc P .

$$\rightarrow \sin N = 0,6; \cos N = 0,8; \tan N = \frac{3}{4}; \cot N = \frac{4}{3}; \cos P = 0,6; \sin P = 0,8; \cot P = \frac{3}{4}; \tan P = \frac{4}{3}.$$

💬 **Lời giải.**

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông MNP ta được

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 = 16^2 + 12^2 = 400 \Leftrightarrow NP = 20\text{cm}.$$

Từ đó ta tính được $\sin N = 0,6$; $\cos N = 0,8$; $\tan N = \frac{3}{4}$; $\cot N = \frac{4}{3}$.

Do $\widehat{P} + \widehat{N} = 90^\circ$ nên từ các tỉ số lượng giác của góc N ta suy ra được các tỉ số lượng giác của góc P như sau $\cos P = 0,6$; $\sin P = 0,8$; $\cot P = \frac{3}{4}$; $\tan P = \frac{4}{3}$.

❖ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC = \sqrt{3}AB$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B và góc C . Từ đó suy ra số đo của góc B và góc C .

$$\rightarrow \sin B = \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos B = \sin C = \frac{1}{2}; \tan B = \cot C = \sqrt{3}; \cot B = \tan C = \frac{1}{\sqrt{3}}; \widehat{B} = 60^\circ; \widehat{C} = 30^\circ.$$

💬 **Lời giải.**

Giả sử độ dài cạnh AB là x , khi đó độ dài cạnh $AC = \sqrt{3}x$. Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC ta được

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow BC = 2x.$$

Từ đó ta tính được các tỉ số lượng giác như sau $\sin B = \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos B = \sin C = \frac{1}{2}$; $\tan B = \cot C = \sqrt{3}$; $\cot B = \tan C = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dựa vào bảng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt ta có được $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 30^\circ$.

❖ **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có $BC = 12\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Tính tỉ số lượng giác của góc B .

$$\rightarrow \sin B = \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan B = \cot B = 1.$$

Lời giải.

Do tam giác ABC cân nên $AB = AC = 9\text{cm}$. Từ đó ta tính được tỉ số lượng giác của góc B như sau $\sin B = \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan B = \cot B = 1$. $\square$

❖ **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, $AC = 13\text{cm}$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

🔗 Tam giác ABC vuông tại B .

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc A và góc C .

🔗 $\sin A = \cos C = \frac{5}{13}$; $\cos A = \sin C = \frac{12}{13}$; $\tan A = \cot C = \frac{12}{5}$; $\cot A = \tan C = \frac{5}{12}$.

c) Kẻ đường cao BH . Tính AH , BH và CH .

🔗 $BH = \frac{25}{13}\text{cm}$; $AH = \frac{60}{13}\text{cm}$; $CH = \frac{109}{13}\text{cm}$.

Lời giải.

a) Do $AB^2 + BC^2 = 169 = AC^2$ nên suy ra tam giác ABC vuông tại B .

b) Trong tam giác vuông ABC có $\widehat{A} + \widehat{C} = 90^\circ$ nên ta tính được các tỉ số lượng giác như sau $\sin A = \cos C = \frac{5}{13}$; $\cos A = \sin C = \frac{12}{13}$; $\tan A = \cot C = \frac{12}{5}$; $\cot A = \tan C = \frac{5}{12}$.

c) Do BH là đường cao nên $BH \perp AC$, khi đó xét tam giác vuông ABH ta có

$$\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{13} \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot 5}{13} = \frac{25}{13}\text{cm}$$

$$\cos A = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{13} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}\text{cm}$$

$$\text{Khi đó } CH = AC - AH = 13 - \frac{60}{13} = \frac{109}{13}\text{cm}.$$

$\square$

❖ **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , $AB = 12\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$.

a) Tính AC , AH , BH và CH .

🔗 $AC = 16\text{cm}$, $AH = 9,6\text{cm}$, $BH = 7,2\text{cm}$, $HC = 12,8\text{cm}$.

b) Tính tỉ số lượng giác của các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAH}$ và $\widehat{CAH}$.

🔗 $\sin B = \cos C = 0,8$; $\cos B = \sin C = 0,6$; $\tan B = \cot C = \frac{4}{3}$; $\cot B = \tan C = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

a) Áp dụng định lí Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC ta được

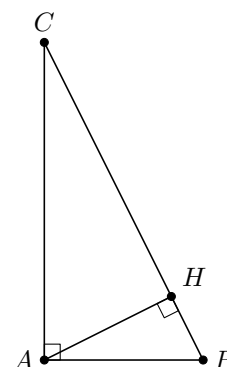
$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \Rightarrow AC = 16\text{cm}$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông ABC có đường cao AH , khi đó

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{12^2} + \frac{1}{16^2} \Rightarrow AH = 9,6\text{cm}$$

$$BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = 7,2\text{cm}$$

$$HC = BC - BH = 20 - 7,2 = 12,8\text{cm}$$



b) Từ độ dài các cạnh ta tính được các tỉ số lượng giác như sau $\sin B = \cos C = 0,8; \cos B = \sin C = 0,6; \tan B = \cot C = \frac{4}{3}; \cot B = \tan C = \frac{3}{4}$.
Do $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}; \widehat{CAH} = \widehat{ABC}$ nên tỉ số lượng giác của chúng bằng nhau.

9

❖ **Ví dụ 7.** Cho tam giác DEF vuông tại D , $DE = 5$ cm, $\widehat{E} = \alpha$. Biết $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, hãy tính các cạnh còn lại của tam giác DEF (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} DE^2 + DF^2 = EF^2 \\ \sin \widehat{E} = \frac{DF}{EF} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} EF^2 - DF^2 = 25 \\ EF^2 - \frac{16}{9}DF^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} EF^2 = \frac{400}{7} \\ DF^2 = \frac{225}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} EF = \frac{20\sqrt{7}}{7} \text{ cm} \\ DF = \frac{15\sqrt{7}}{7} \text{ cm.} \end{cases}$$

7

🔗 **Ví dụ 8.** Cho tam giác ABC vuông tại C . Biết $\cos A = \frac{5}{13}$ và $BC = 10$ cm. Hãy tính độ dài các cạnh góc vuông.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} AC^2 + BC^2 = AB^2 \\ \cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 - AC^2 = 100 \\ AB^2 - \frac{169}{25}AC^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = \frac{4225}{36} \\ AC^2 = \frac{625}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = \frac{65}{6} \text{ cm} \\ AC = \frac{25}{6} \text{ cm.} \end{cases}$$

3

🔗 **Ví dụ 9.** Tính các tỉ số lượng giác còn lại của góc α , biết

[illegible]

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{10} \\ \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases}.$$

b) Ta có

$$\begin{cases} \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3}{4} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \sin^2 \alpha - 16 \cos^2 \alpha = 0 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \\ \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

1

🔗 **Ví dụ 10.** Cho $\cos \alpha = 0,4$. Tính $\sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$.

 Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 0,84 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}, \cot \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}.$$

□

❖ **Ví dụ 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = 3$ cm. Tính độ dài các cạnh BC và AB .

 Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3\sqrt{3} \text{ cm} \\ BC = 6 \text{ cm.} \end{cases}$$

□

❖ **Ví dụ 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = \sqrt{3}$ cm. Tính độ dài các cạnh BC và AB .

 Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3 \text{ cm} \\ BC = 2\sqrt{3} \text{ cm.} \end{cases}$$

□

 Dạng 2. Sắp xếp dãy tỉ số lượng giác theo thứ tự

Thực hiện theo hai bước sau

- ❖ Đưa các tỉ số lượng giác về cùng một loại dựa vào tính chất của hai góc phụ nhau.
- ❖ Với hai góc nhọn α, β bất kì, ta có
 - $\sin \alpha < \sin \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
 - $\cos \alpha < \cos \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
 - $\tan \alpha < \tan \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
 - $\cot \alpha < \cot \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

❖ **Ví dụ 13.** Không dùng máy tính và bảng số, hãy so sánh

a) $\sin 20^\circ$ và $\sin 70^\circ$.

b) $\cos 52^\circ$ và $\cos 73^\circ$.

c) $\tan 57^\circ$ và $\tan 62^\circ$.

d) $\cot 34^\circ$ và $\cot 56^\circ$.

 Lời giải.

a) $20^\circ < 70^\circ \Leftrightarrow \sin 20^\circ < \sin 70^\circ$.

b) $52^\circ < 73^\circ \Leftrightarrow \cos 52^\circ > \cos 73^\circ$.

c) $57^\circ < 62^\circ \Leftrightarrow \tan 57^\circ < \tan 62^\circ$.

d) $34^\circ < 56^\circ \Leftrightarrow \cot 34^\circ > \cot 56^\circ$.



❖ **Ví dụ 14.** Không dùng máy tính và bảng số, hãy so sánh

a) $\sin 60^\circ$ và $\sin 72^\circ$.

b) $\cos 72^\circ$ và $\cos 53^\circ$.

c) $\tan 79^\circ$ và $\tan 61^\circ$.

d) $\cot 74^\circ$ và $\cot 46^\circ$.

💬 **Lời giải.**

a) $60^\circ < 72^\circ \Leftrightarrow \sin 60^\circ < \sin 72^\circ$.

b) $72^\circ > 53^\circ \Leftrightarrow \cos 72^\circ < \cos 53^\circ$.

c) $79^\circ > 61^\circ \Leftrightarrow \tan 79^\circ > \tan 61^\circ$.

d) $74^\circ > 46^\circ \Leftrightarrow \cot 74^\circ < \cot 46^\circ$.



❖ **Ví dụ 15.** Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn:

a) $\sin 25^\circ, \cos 42^\circ, \sin 47^\circ, \cos 25^\circ, \sin 38^\circ$.

b) $\tan 42^\circ, \cot 61^\circ, \tan 28^\circ, \cot 79^\circ 1', \tan 35^\circ$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $\cos 42^\circ = \sin 48^\circ, \cos 15^\circ = \sin 75^\circ$.

Do đó: $\sin 25^\circ < \sin 38^\circ < \sin 47^\circ < \cos 42^\circ < \cos 15^\circ$.

b) Ta có $\cot 61^\circ = \tan 29^\circ, \cot 79^\circ 1' = \tan 10^\circ 59'$.

Do đó: $\cot 79^\circ 1' < \tan 28^\circ < \cot 61^\circ < \tan 35^\circ < \tan 42^\circ$.



❖ **Ví dụ 16.** Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ lớn đến bé:

a) $\sin 35^\circ, \cos 52^\circ, \sin 57^\circ, \cos 25^\circ, \sin 48^\circ$.

b) $\tan 48^\circ, \cot 21^\circ, \tan 68^\circ, \cot 72^\circ 8', \tan 75^\circ$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $\cos 52^\circ = \sin 38^\circ, \cos 25^\circ = \sin 65^\circ$.

Do đó $\cos 25^\circ > \sin 57^\circ > \sin 48^\circ > \cos 52^\circ > \sin 35^\circ$.

b) Ta có $\cot 21^\circ = \tan 69^\circ, \cot 72^\circ 8' = \tan 27^\circ 52'$.

Do đó $\tan 75^\circ > \cot 21^\circ > \tan 68^\circ > \tan 48^\circ > \cot 72^\circ 8'$.



C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 8$ cm, $AC = 15$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc C . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc B .

💬 **Lời giải.**

Áp dụng định lý Pitago:

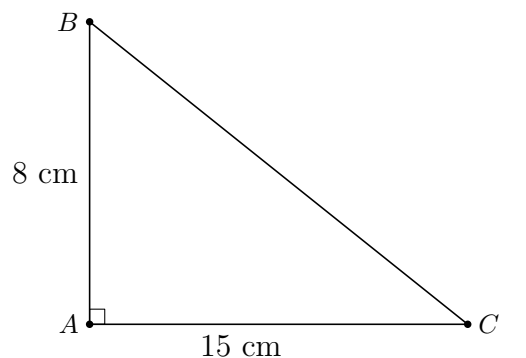
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \Rightarrow BC = 17.$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos B = \frac{8}{17}.$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin B = \frac{15}{17}.$$

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{15} \Rightarrow \cot B = \frac{15}{8}.$$

$$\cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{8} \Rightarrow \tan B = \frac{15}{8}.$$



□

❖ **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tìm các tỉ số lượng giác của góc B khi:

a) $BC = 5$ cm, $AC = 3$ cm.

b) $BH = 3$ cm, $CH = 4$ cm.

c) $AC = 3$ cm, $AB = 4$ cm.

💬 **Lời giải.**

a) Áp dụng định lý Pitago $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}.$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}, \cot B = \frac{1}{\tan B} = \frac{4}{3}.$$

b) Ta có $BC = BH + CH = 4 + 3 = 7$ cm.

$$AB^2 = BH \cdot BC = 3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow AB = \sqrt{21} \text{ cm.}$$

$$AC^2 = CH \cdot BC = 4 \cdot 7 = 28 \Rightarrow AC = 2\sqrt{7}.$$

Do đó:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \cot B = \frac{1}{\tan B} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$ cm.

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}.$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}, \cot B = \frac{1}{\tan B} = \frac{4}{3}.$$

□

BÀI 3. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Khi đó

☑ $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$.

☑ $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$.

☑ $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$.

☑ $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$.

⚠ *Giải tam giác là tính độ dài các cạnh và số đo các góc của tam giác dựa trên các dữ kiện cho trước của bài toán.*

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải tam giác vuông

Để giải tam giác vuông, ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc của một tam giác vuông và sử dụng bảng lượng giác hoặc máy tính cầm tay để tính các yếu tố còn lại.

⚠ *Các dạng về giải tam giác vuông bao gồm:*

☑ *Giải tam giác vuông khi biết độ dài một cạnh và số đo một góc nhọn.*

☑ *Giải tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh.*

🔗 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5$, $AC = 8$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

🔗 $BC \approx 9,43$; $\widehat{C} \approx 32^\circ$; $\widehat{B} \approx 58^\circ$

💬 **Lời giải.**

Theo định lý Py-ta-go, ta có

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 8^2} \\ &\approx 9,43. \end{aligned}$$

Mặt khác $\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8} = 0,625$.

Tra bảng hay dùng máy tính bỏ túi, ta tìm được $\widehat{C} \approx 32^\circ$.

Do đó $\widehat{B} \approx 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$. □

🔗 **Ví dụ 2.** Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 36^\circ$, $PQ = 7$. Hãy giải tam giác vuông OPQ .

🔗 $OP \approx 5,663$; $OQ \approx 4,114$; $\widehat{Q} \approx 54^\circ$

💬 **Lời giải.**

Ta có $\widehat{Q} = 90^\circ - \widehat{P} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$OP = PQ \cdot \sin Q = 7 \cdot \sin 54^\circ \approx 5,663$$

$$OQ = PQ \cdot \sin P = 7 \cdot \sin 36^\circ \approx 4,114.$$

□

❖ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A , giải tam giác ABC biết:

a) $\widehat{B} = 35^\circ$ và $BC = 40$ cm;

b) $AB = 70$ cm và $AC = 60$ cm.

🔗 $AB \approx 32,8$ cm; $AC \approx 23$ cm; $\widehat{C} = 55^\circ$

🔗 $BC = 10\sqrt{85}$ cm; $\widehat{B} \approx 40^\circ 36' 5''$; $\widehat{C} \approx 49^\circ 23' 55''$

💬 **Lời giải.**

a) Tam giác ABC vuông tại A nên ta có $\widehat{B} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

$$AB = BC \cdot \cos B = 40 \cdot \cos 35^\circ \approx 32,8 \text{ cm.}$$

$$AC = BC \cdot \sin B = 40 \cdot \sin 35^\circ \approx 23 \text{ cm.}$$

b) Tam giác ABC vuông tại A .

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 70^2 + 60^2 = 8500 \Rightarrow BC = 10\sqrt{85} \text{ cm.}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{7} \Rightarrow \widehat{B} \approx 40^\circ 36' 5''.$$

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 40^\circ 36' 5'' = 49^\circ 23' 55''.$$

□

❖ **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A , giải tam giác ABC biết

a) $AB = 6$ cm và $\widehat{B} = 60^\circ$;

b) $AB = 6$ cm và $BC = 7$ cm.

🔗 $AC = 6\sqrt{3}$ cm; $BC = 12$ cm; $\widehat{C} = 30^\circ$

🔗 $AC = \sqrt{13}$ cm; $\widehat{B} \approx 31^\circ 0' 10''$ cm; $\widehat{C} = 58^\circ 59' 50''$

💬 **Lời giải.**

a) Tam giác ABC vuông tại A nên ta có $AC = AB \cdot \tan B = 6 \cdot \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$ cm.

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12 \text{ cm.}$$

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

b) Ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 7^2 - 6^2 = 13 \Rightarrow AC = \sqrt{13}$ cm.

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{7} \Rightarrow \widehat{B} \approx 31^\circ 0' 10''.$$

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 58^\circ 59' 50''.$$

□

❖ **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính độ dài

a) AC .

🔗 $AC \approx 14,3$ cm

b) BC .

🔗 $BC \approx 18,7$ cm

c) Phân giác BD .

🔗 $BD = 13,2$ cm

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan 40^\circ} = \frac{12}{\tan 40^\circ} \approx 14,3$ cm.

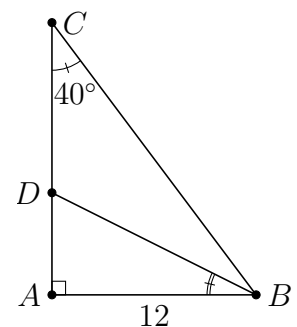
b) $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin 40^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \approx 18,7$ cm.

c) Ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

Vì BD là phân giác góc $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABD} = 25^\circ$.

$$\text{Do đó } \cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB}{\cos \widehat{ABD}} = \frac{12}{\cos 25^\circ} \approx 13,2 \text{ cm.}$$

□



❖ **Ví dụ 6.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A đường cao AH , biết $BH = 4\text{cm}$, $CH = 1\text{ cm}$. Hãy giải $\triangle ABC$.

🔗 $BC = 5\text{ cm}$; $AC = \sqrt{5}\text{ cm}$; $AB = 2\sqrt{5}\text{ cm}$; $\widehat{B} = 63^\circ 26' 6''$; $\widehat{C} = 26^\circ 33' 44''$

💬 **Lời giải.**

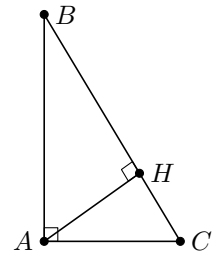
Ta có

✔ $BC = BH + HC = 5\text{ cm}.$

✔ $AC^2 = BC \cdot CH = 5 \Rightarrow AC = \sqrt{5}\text{ cm}.$

✔ $AB^2 = BC \cdot BH = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}\text{ cm}.$

✔ $\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB} = 2.$ Suy ra $\widehat{B} = 63^\circ 26' 6''$; $\widehat{C} = 26^\circ 33' 44''.$



□

📁 Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác

Kẻ thêm đường cao để xuất hiện tam giác vuông; áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

❖ **Ví dụ 7.** Cho tam giác ABC , trong đó $BC = 11\text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Hãy tính độ dài đoạn thẳng AN . 🔗 $AN \approx 3,65$

💬 **Lời giải.**

Ta có $\tan 38^\circ = \frac{AN}{BN} \Rightarrow BN = \frac{AN}{\tan 38^\circ}.$

Tương tự $NC = \frac{AN}{\tan 30^\circ}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} BC &= BN + NC \\ \Leftrightarrow 11 &= \frac{AN}{\tan 38^\circ} + \frac{AN}{\tan 30^\circ} \\ \Leftrightarrow 11 &= AN \cdot \left(\frac{1}{\tan 38^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ} \right) \\ \Rightarrow AN &= \frac{11}{\frac{1}{\tan 38^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ}} \approx 3,65. \end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 8.** Một cái thang khi dựa vào tường thì góc α giữa thang và mặt đất trong khoảng từ 60° đến 65° thì an toàn. Hỏi một cái thang AB dài 3 m dựng vào tường thì chân thang A cách chân tường C trong khoảng nào thì an toàn? (làm tròn đến hai chữ số thập phân). 🔗 1,27m đến 1,5m

🔗 Từ 1,27 m đến 1,5 m

💬 **Lời giải.**

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \cos \alpha.$

Với $\alpha = 60^\circ \Rightarrow AC = 3 \cdot \cos 60^\circ = 1,5\text{ m}.$

Với $\alpha = 65^\circ \Rightarrow AC = 3 \cdot \cos 65^\circ \approx 1,27\text{ m}.$

Vậy chân thang A cách chân tường C trong khoảng từ 1,27 m đến 1,5 m thì an toàn.

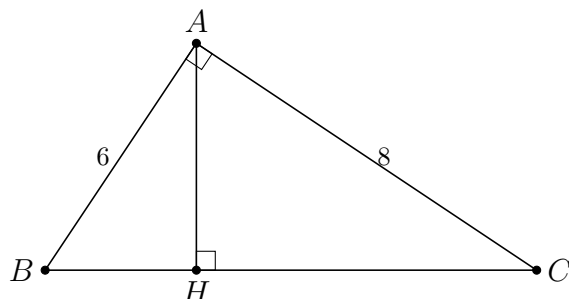
□

BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG 1

❖ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AH .

$$\text{Đáp án: } AH = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

💬 **Lời giải.**



✔ **Cách 1.**

Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{36} + \frac{1}{64} = \frac{25}{567} \Rightarrow AH^2 = \frac{567}{25} \Rightarrow AH = \frac{24}{5} \text{ cm.}$$

✔ **Cách 2.**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm.}$$

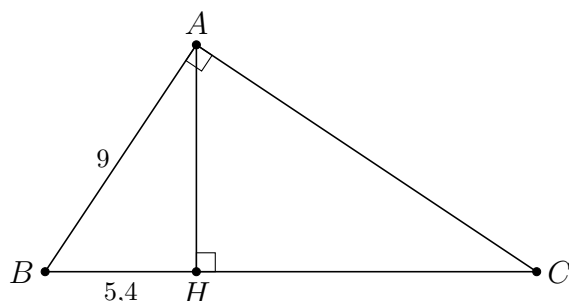
$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{24}{5} \text{ cm.}$$

□

❖ **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AB = 9$ cm, $HB = 5,4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

$$\text{Đáp án: } AC = 12 \text{ cm}$$

💬 **Lời giải.**



✔ **Cách 1.**

Ta có

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = 15 \text{ cm.}$$

$$HC = BC - BH = 15 - 5,4 = 9,6 \text{ cm.}$$

$$AC^2 = CH \cdot CB \Rightarrow AC = 12 \text{ cm.}$$

☑ **Cách 2.**

Ta có

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = 7,2 \text{ cm.}$$

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AC = 12 \text{ cm.}$$

□

💡 **Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ và $AC = 20 \text{ cm}$. Tính chu vi tam giác ABC .

🔍 60 cm

💬 **Lời giải.**

☑ **Cách 1.** Ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BC}{5} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{BC^2}{25} = \frac{AB^2}{9} = \frac{BC^2 - AB^2}{25 - 9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{400}{16} = 25.$$

Suy ra

$$\frac{BC^2}{25} = 25 \Rightarrow BC = 25 \text{ cm.}$$

$$\frac{AB^2}{9} = 25 \Rightarrow AB = 15 \text{ cm.}$$

☑ **Cách 2.** Ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{BC}{5}.$$

Đặt $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{5} = k \Rightarrow AB = 3k$ và $BC = 5k$ ($k > 0$).

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ hay $9k^2 + 400 = 25k^2 \Rightarrow k = 5$.

Do đó

$$AB = 3k = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm.}$$

$$BC = 5k = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm.}$$

Vậy chu vi tam giác ABC là $15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$.

□

💡 **Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Vẽ trung tuyến AD . Biết $BC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC .

🔍 $\frac{3}{2} \text{ cm}$

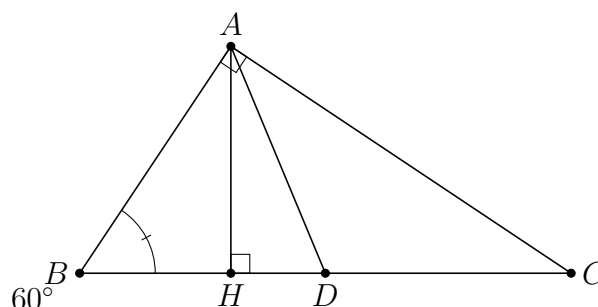
💬 **Lời giải.**

Tam giác ABD đều nên

$$AB = BD = \frac{BC}{2} = \sqrt{3} \text{ cm. Ta có}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 3 \text{ cm.}$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{3}{2} \text{ cm.}$$



□

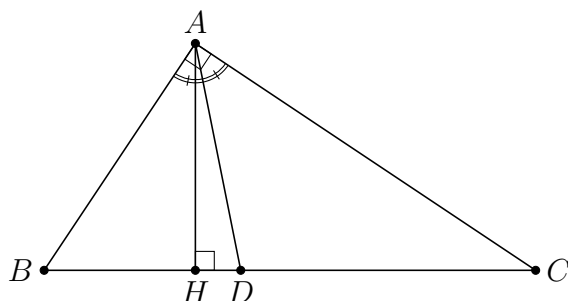
❖ **Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , phân giác AD của góc $\widehat{BAC}$.

a) Chứng minh $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$.

b) Biết $BD = 45$ cm, $CD = 60$ cm. Tính độ dài HB , HC .

🔗 $HB = 37,8$ cm; $HC = 67,2$ cm

💬 **Lời giải.**



a) Ta có hệ thức liên quan giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

$$AB^2 = BH \cdot BC \text{ và } AC^2 = CH \cdot CB.$$

Do đó

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot CB} = \frac{BH}{CH}.$$

b) Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{HB}{HC} &= \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}. \\ \Rightarrow \frac{HB}{9} &= \frac{HC}{16} = \frac{HB + HC}{9 + 16} = \frac{BC}{25} = \frac{105}{25} = \frac{21}{5}. \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{HB}{9} = \frac{21}{5}$ nên $HB = 37,8$ cm.

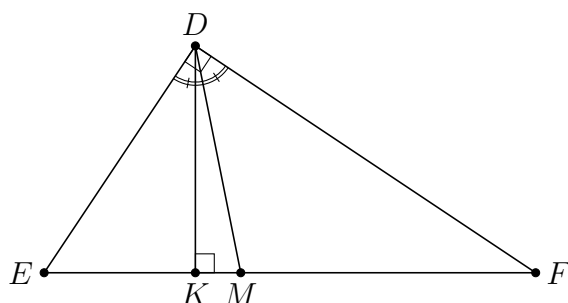
$$HC = BC - HB = 105 - 37,8 = 67,2 \text{ cm.}$$

□

❖ **Bài 6.** Cho tam giác DEF vuông tại D , phân giác DM , đường cao DK . Biết $DE = 30$ cm, $DF = 40$ cm. Tính độ dài DM .

🔗 $DM = 24,24$ cm

💬 **Lời giải.**



$$\checkmark EF^2 = DE^2 + DF^2 \Rightarrow EF = 50 \text{ cm.}$$

$$\checkmark DK \cdot EF = DE \cdot DF \Rightarrow DK = 24 \text{ cm.}$$

$$\checkmark \frac{ME}{MF} = \frac{DE}{DF} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{ME}{3} = \frac{MF}{4} = \frac{ME + MF}{3 + 4} = \frac{50}{7} \Rightarrow ME = \frac{150}{7} \text{ cm.}$$

$$\checkmark DE^2 = EK \cdot EF \Rightarrow EK = 18 \text{ cm.}$$

$$\checkmark KM = EM - EK = \frac{150}{7} - 18 = \frac{24}{7} \text{ cm.}$$

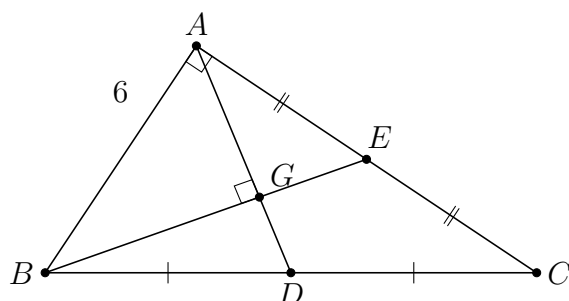
$$\checkmark DM^2 = DK^2 + KM^2 \Rightarrow DM \approx 24,24 \text{ cm.}$$

□

✧ **Bài 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Các đường trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G . Biết $AB = 6 \text{ cm}$. Tính BC .

🔗 $BC =$

💬 **Lời giải.**



Ta có $BG = \frac{2}{3}BE$ (tính chất trọng tâm của tam giác).

$$AB^2 = BG \cdot BE \text{ nên } 36 = \frac{2}{3}BE^2 \Rightarrow BE = 3\sqrt{6} \text{ cm.}$$

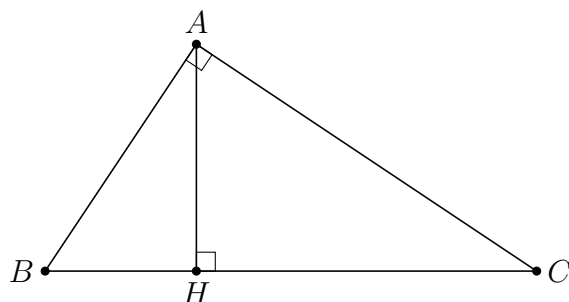
$$AE^2 = BE^2 - AB^2 = 18 \Rightarrow AE = 3\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

□

✧ **Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AH = 24 \text{ cm}$, $BC = 50 \text{ cm}$, $AB < AC$. Tính chu vi tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**



Do $AB < AC$ nên $HB < HC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

Đặt $x = HB \Rightarrow HC = 50 - x$.

Vì $HB < HC \Rightarrow x < 50 - x \Rightarrow 0 < x < 25$.

Áp dụng hệ thức liên quan đến đường cao $AH^2 = BH \cdot HC$.

$$\Leftrightarrow 576 = x(50 - x) \Leftrightarrow x^2 - 50x + 576 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 18)(x - 32) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \text{ (nhận)} \\ x = 32 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Do đó

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = 30 \text{ cm.}$$

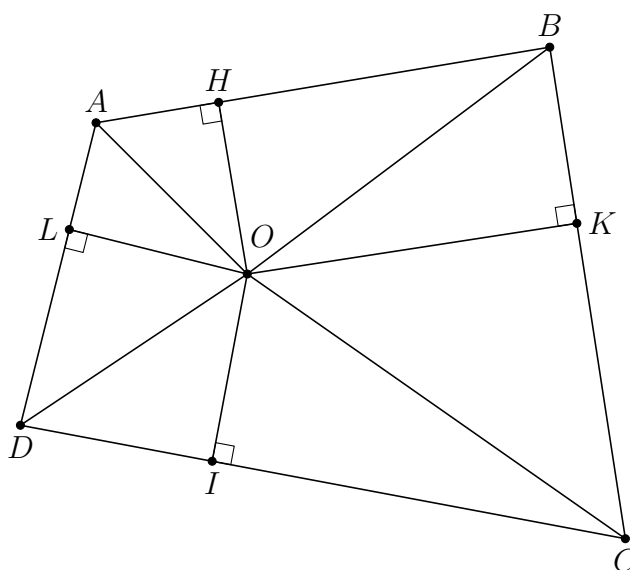
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC = 40 \text{ cm.}$$

□

❖ **Bài 9.** Cho tứ giác $ABCD$. Từ điểm O bất kì trong tứ giác kẻ OH, OK, OI, OL lần lượt vuông góc với các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh

$$HB^2 + KC^2 + ID^2 + LA^2 = AH^2 + BK^2 + CI^2 + DL^2.$$

💬 **Lời giải.**



Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$\begin{aligned} & HB^2 + KC^2 + ID^2 + LA^2 \\ &= (OB^2 - OH^2) + (OC^2 - OK^2) + (OD^2 - OI^2) + (OA^2 - OL^2) \\ &= (OA^2 - OH^2) + (OB^2 - OK^2) + (OC^2 - OI^2) + (OD^2 - OL^2) \\ &= AH^2 + BK^2 + CI^2 + DL^2. \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 10.** Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và hai đường chéo vuông góc tại O .

a) Chứng minh rằng $AD^2 = AB \cdot DC$.

b) Cho $AB = 9$; $CD = 16$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng OA , OB , OC , OD .

Lời giải.

a) Vẽ $AE \parallel BD$ (E thuộc đường thẳng CD) ta được $AB = ED$ và $AE \perp AC$. Áp dụng hệ thức $h^2 = b \cdot c$ ta được $AD^2 = DE \cdot DC$ hay $AD^2 = AB \cdot DC$.

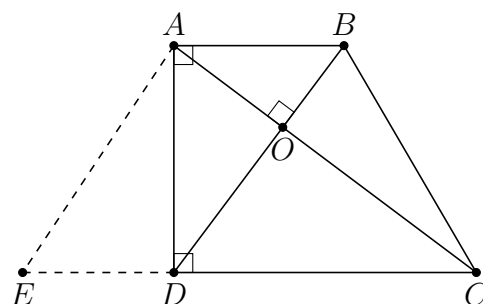
b) Ta có $AD = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$. Vậy

$$S_{ABCD} = \frac{(9 + 16) \cdot 12}{2} = 150 \text{ (đvdt)}.$$

c) Áp dụng định lý Py-ta-go ta tính được $AC = 20$ cm; $BD = 15$ cm.

Ta có $AB \parallel CD$ nên

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OC} &= \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \\ \Rightarrow \frac{OA + OC}{OC} &= \frac{OB + OD}{OD} = \frac{AB + CD}{CD} \\ \Rightarrow \frac{AC}{OC} &= \frac{BD}{OD} = \frac{25}{16}. \end{aligned}$$



Thay $AC = 20$; $BD = 15$ ta tính được $OC = 12,8$ và $OD = 9,6$. Từ đó suy ra $OA = 7,2$ cm và $OB = 5,4$ cm.

□

❖ **Bài 11.** Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120 cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.

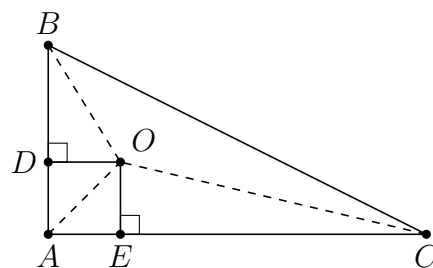
b) Tính khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{AB}{8} &= \frac{AC}{15} = \frac{BC}{17} \\ &= \frac{AB + AC + BC}{8 + 15 + 17} = \frac{120}{40} = 3. \end{aligned}$$

Suy ra $AB = 24$ cm; $AC = 45$ cm; $BC = 51$ cm.
Nhận xét $24^2 + 45^2 = 51^2$ nên tam giác ABC vuông tại A .



b) Gọi khoảng cách từ giao điểm O của ba đường phân giác đến mỗi cạnh là x . Ta có

$$\begin{aligned} S_{OBC} + S_{COA} + S_{AOB} &= S_{ABC} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x \cdot (24 + 45 + 51) &= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 45 \\ \Leftrightarrow 60x &= 540 \\ \Leftrightarrow x &= 9. \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến mỗi cạnh là 9 cm.



✎ **Bài 12.** Cho góc nhọn x thỏa mãn $\sin x = 0,8$. Tính $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

💬 **Lời giải.**

$$\textcircled{v} \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - 0,64} = 0,6.$$

$$\textcircled{v} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}.$$

$$\textcircled{v} \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{4}.$$



✎ **Bài 13.** Cho góc nhọn x thỏa mãn $\sin x = \frac{1}{2}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc $(90^\circ - x)$.

💬 **Lời giải.**

$$\textcircled{v} \sin(90^\circ - x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\textcircled{v} \cos(90^\circ - x) = \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{v} \tan(90^\circ - x) = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\cos(90^\circ - x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\textcircled{v} \cot(90^\circ - x) = \frac{1}{\tan(90^\circ - x)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



✎ **Bài 14.** Tính

a) $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}.$

b) $\tan 58^\circ - \cot 32^\circ.$

💬 **Lời giải.**

a) $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} = \frac{\sin 25^\circ}{\sin(90^\circ - 65^\circ)} = \frac{\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} = 1.$

b) $\tan 58^\circ - \cot 32^\circ = \tan 58^\circ - \tan(90^\circ - 32^\circ) = \tan 58^\circ - \tan 58^\circ = 0.$



✎ **Bài 15.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 8$ cm. Hãy tính độ dài của các cạnh góc vuông.

💬 **Lời giải.**

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

$$\textcircled{v} \sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}.$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 8 \cos 60^\circ = 4.$$

□

✧ **Bài 16.** Cho tam giác ABC , vẽ đường cao AH , ($H \in BC$). Cho biết $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $BH = 20$ cm, $HC = 21$ cm. Tính AC .

💬 **Lời giải.**

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} \tan B = \frac{AH}{BH} &\Rightarrow AH = BH \cdot \tan B \\ &= 20 \cdot \tan 45^\circ = 20 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Xét tam giác AHC vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= AH^2 + CH^2 \quad (\text{Định lý Py-ta-go}) \\ \Rightarrow AC &= \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29 \text{ cm.} \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 17.** Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), biết $AD = 12$ cm, $DC = 14$ cm, $AB = 9$ cm. Tính tỉ số lượng giác của góc C .

💬 **Lời giải.**

Dựng BH vuông góc CD (H thuộc CD). Tứ giác $ABHD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow BH = AD = 12 \text{ cm}, DH = AB = 9 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow CH = DC - DH = 14 - 9 = 5 \text{ cm.}$$

Xét tam giác CHB vuông tại H , ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= BH^2 + CH^2 \quad (\text{Định lý Py-ta-go}) \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm.} \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 18.** Hai trụ điện cùng chiều cao được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ rộng 80 m. Từ một điểm M trên mặt đường giữa hai trụ người ta nhìn thấy hai trụ điện với góc nâng lần lượt là 60° và 30° . Tính chiều cao của trụ điện và khoảng cách từ điểm M đến gốc mỗi trụ điện.

💬 **Lời giải.**

Đặt $AB = DC = x$ (m) ($x > 0$).

Xét tam giác ABM vuông tại A

$$\tan M = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AM = \frac{AB}{\tan M} = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Xét tam giác DCM vuông tại C

$$\tan M = \frac{DC}{CM} \Rightarrow CM = \frac{DC}{\tan M} = \frac{x}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3}.$$

Vì $AC = AM + MC$ nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{3}} + x\sqrt{3} &= 80 \\ \Leftrightarrow x + 3x &= 80\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 4x &= 80\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x &= 20\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } AM = \frac{x}{\sqrt{3}} = 20 \text{ m và } CM = x\sqrt{3} = 60 \text{ m.}$$

Vậy trụ điện cao $20\sqrt{3}$ m và khoảng cách từ điểm M đến mỗi trụ điện lần lượt là 20 m và 60 m.

□

❖ **Bài 19.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $AB = 5$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

- Tính độ dài đường cao kẻ từ B .
- Tính độ dài BC .

💬 **Lời giải.**

- Kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$).

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có

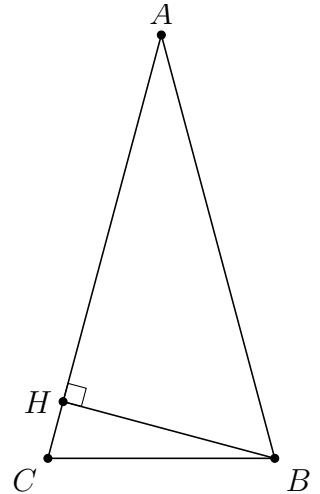
$$BH = AB \cdot \sin \widehat{BAC} = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2,5.$$

- Do $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 30^\circ$ nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại H , áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có

$$BC = \frac{BH}{\sin \widehat{BCH}} = \frac{2,5}{\sin 75^\circ} \approx 2,6.$$



□

❖ **Bài 20.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có BM là đường trung tuyến. Biết $\widehat{BCA} = 30^\circ$ và $CM = 4,5$. Tính độ dài BM .

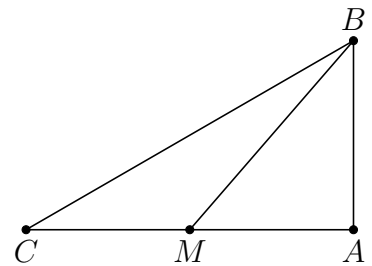
💬 **Lời giải.**

BM là đường trung tuyến của tam giác nên M là trung điểm cạnh AC . Do đó

$$AM = CM = 4,5; \quad AC = 2 \cdot CM = 2 \cdot 4,5 = 9.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có

$$AB = AC \cdot \tan \widehat{ACB} = 9 \cdot \tan 30^\circ = 3\sqrt{3}.$$



Xét $\triangle ABM$ vuông tại A , áp dụng định lí Pi-ta-go, ta có

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = (3\sqrt{3})^2 + 4,5^2 = 47,25 \Rightarrow BM = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

□

❖ **Bài 21.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 45^\circ$, $AB = BD = 18$ cm.

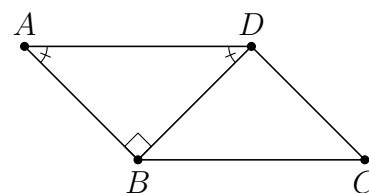
- Tính độ dài cạnh AD .
- Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

💬 **Lời giải.**

a) Vì $AB = BD$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên $\triangle ABD$ vuông cân tại B .

Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong $\triangle ABD$ vuông ta có

$$AD = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{18}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 18\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$



b) Ta có $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 18 = 162 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích hình bình hành $ABCD$ gấp đôi diện tích của tam giác ABD .

Do đó, diện tích của hình bình hành $ABCD$ là $324 \text{ (cm}^2\text{)}$.

□

❖ **Bài 22.** Cho tam giác ABC có $AB = 18$; $BC = 24$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

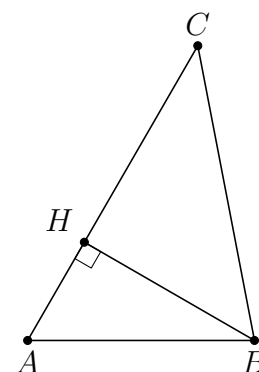
💬 **Lời giải.**

$\triangle ABC$ có $AB > BC$ nên $\widehat{BCA} < \widehat{BAC} = 60^\circ$.

Trong tam giác ABC , kẻ đường cao BH . Vì các góc tại đỉnh A và C đều là góc nhọn nên $H \in AC$.

Áp dụng hệ thức về cạnh và góc cho tam giác vuông ABH , ta có

$$\begin{aligned} BH &= AB \sin A = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}, \\ AH &= AB \cos A = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9. \end{aligned}$$



Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông BHC ta có:

$$CH^2 = BC^2 - BH^2 = 24^2 - (9\sqrt{3})^2 = 333 \Rightarrow CH = \sqrt{333} = 3\sqrt{37}.$$

Vậy $AC = AH + CH = 9 + 3\sqrt{37}$.

□

❖ **Bài 23.** Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh 60. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$. Đường trung trực của AD cắt AB tại E . Tính độ dài DE .

💬 **Lời giải.**

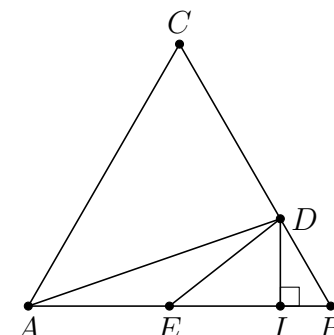
Kẻ $DI \perp AB$.

Ta có $DI = DB \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$ và $BI = DB \cdot \cos 60^\circ = 10$.

Đặt $DE = AE = x$ ($x > 0$) thì $EI = AB - BI - AE = 50 - x$.

Áp dụng định lý Pi-ta-go trong $\triangle DEI$ ta có

$$\begin{aligned} DE^2 &= DI^2 + EI^2 \Leftrightarrow x^2 = 300 + (50 - x)^2 \\ &\Leftrightarrow 100x = 2800 \\ &\Leftrightarrow x = 28. \end{aligned}$$



□

❖ **Bài 24.** Cho ABC là tam giác đều cạnh 6. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AD .

b) Kẻ CK vuông góc với AD , ($K \in AD$). Tính độ dài đoạn thẳng CK .

 Lời giải.

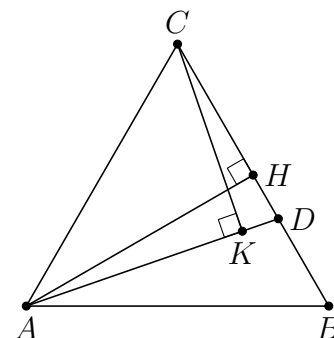
a) Từ đỉnh A của tam giác ABC , kẻ đường cao AH ($H \in BC$).

Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong $\triangle ABH$ vuông ta có

$$AH = AB \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Vì $\triangle ABC$ đều, $AH \perp BC$ nên H là trung điểm của BC . Do đó

$$DH = BH - BD = 3 - 2 = 1.$$



Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông AHD , ta có

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = (3\sqrt{3})^2 + 1 = 28 \Rightarrow AD = 2\sqrt{7}.$$

b) Trong tam giác vuông CKD ta có

$$\frac{CK}{CD} = \sin D = \frac{AH}{AD} \Rightarrow CK = \frac{AH}{AD} \cdot CD = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \cdot 4 = \frac{6\sqrt{21}}{7}.$$

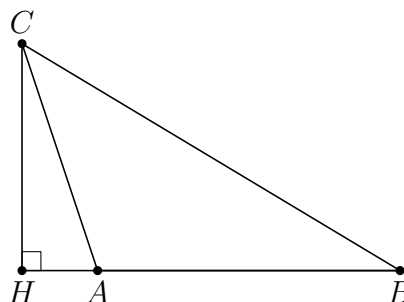
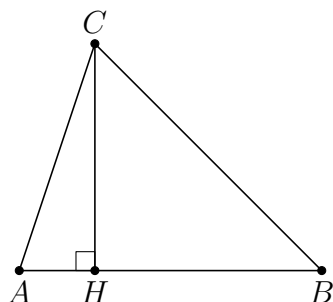
□

✧ **Bài 25.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $AC = b$, đường phân giác AD , đường trung tuyến AM . Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N . Tính $\frac{BN}{CN}$.

 Lời giải.

Bổ đề: Cho $\triangle ABC$ có α là góc nhọn tạo bởi đường thẳng AB và AC . Khi đó,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha.$$



Vẽ đường cao CH , ta có $CH = CA \cdot \sin \alpha$.

Do đó $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \alpha$.

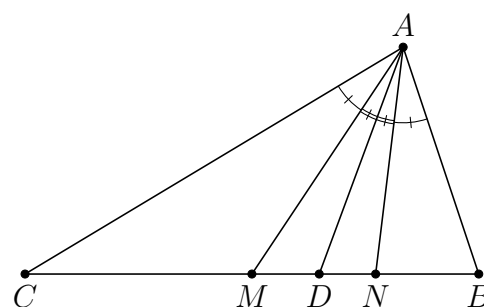
Quay lại bài toán.

Do AD là đường phân giác của $\triangle ABC$ nên

$$\widehat{CAD} = \widehat{BAD} < 90^\circ.$$

Mặt khác, do AN đối xứng với AM qua AD nên

$$\widehat{MAD} = \widehat{DAN}.$$



Từ đó, ta suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{NAB}$ và $\widehat{CAN} = \widehat{BAM}$.

Áp dụng bổ đề trên ta có

$$S_{\triangle CAN} = \frac{1}{2} AC \cdot AN \cdot \sin \widehat{CAN}$$

$$S_{\triangle BAM} = \frac{1}{2} AB \cdot AM \cdot \sin \widehat{BAM}.$$

Do $\widehat{CAN} = \widehat{BAM}$ nên $\frac{S_{\triangle CAN}}{S_{\triangle BAM}} = \frac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM} \Leftrightarrow \frac{CN}{BM} = \frac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM}.$

Tương tự ta có $\frac{BN}{CM} = \frac{AB \cdot AN}{AC \cdot AM}.$

Vì vậy

$$\begin{aligned} \frac{BN}{CN} &= \frac{BN}{CM} : \frac{CN}{BM} \quad (\text{do } BM = CM) \\ &= \frac{AB \cdot AN}{AC \cdot AM} : \frac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM} \\ &= \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}. \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 26.** Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H , trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\triangle AFB \sim \triangle AEC$ (g.g) nên

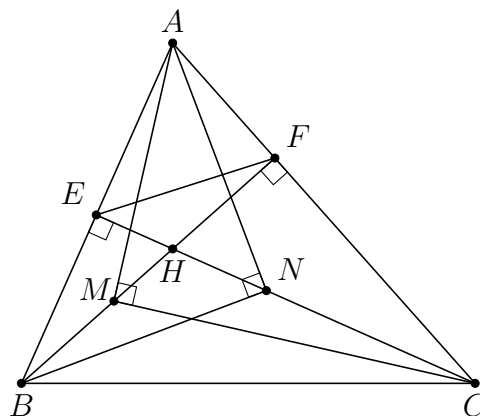
$$\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC. \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông ABN và ACM ta có

$$AE \cdot AB = AN^2; \quad AF \cdot AC = AM^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN.$$



□

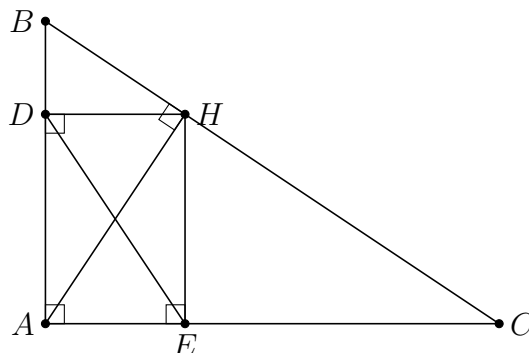
✧ **Bài 27.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC . Chứng minh rằng $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}.$

💬 **Lời giải.**

Ta có $BD = \frac{BH^2}{AB}, BC = \frac{AB^2}{BH}$ nên

$$\begin{aligned} \frac{BD^2}{BC^2} &= \frac{BH^4}{AB^2} \cdot \frac{BH^2}{AB^4} = \frac{BH^6}{AB^6} \\ \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{BD^2}{BC^2}} &= \frac{BH^2}{AB^2} = \frac{BH^2}{BH \cdot BC} = \frac{BH}{BC}. \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có $\sqrt[3]{\frac{CE^2}{BC^2}} = \frac{CH}{BC}.$



$$\text{Suy ra } \sqrt[3]{\frac{BD^2}{BC^2}} + \sqrt[3]{\frac{CE^2}{BC^2}} = \frac{BH + HC}{BC} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}. \quad \square$$

❖ **Bài 28.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên tia đối của tia AH lấy điểm D sao cho $HD = AC$. Vẽ hình chữ nhật $CHDE$. Chứng minh rằng BE vuông góc với CD .

🗨 **Lời giải.**

Đặt $DE = HC = a$, $EC = DH = AC = b$.

Ta có $\tan \widehat{D_1} = \frac{EC}{DE}$.

và $\tan \widehat{E_1} = \frac{BC}{EC} = \frac{BC}{b}$.

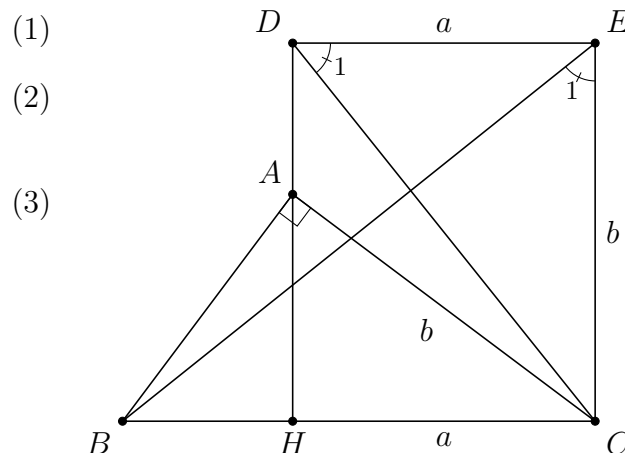
Tam giác vuông ABC có $AC^2 = BC \cdot HC$.

Suy ra $b^2 = BC \cdot a \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{BC}{b}$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\tan \widehat{D_1} = \tan \widehat{E_1}$.

Do đó $\widehat{D_1} = \widehat{E_1} \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{E_2} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 90^\circ$.

Vậy $BE \perp CD$.



❖ **Bài 29.** Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}$, $AC = 3$ và $\widehat{B} + 2\widehat{C} = 90^\circ$. Tính độ dài đoạn BC .

🗨 **Lời giải.**

Kẻ $CH \perp AB$. Do $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} < 90^\circ$ nên A nằm giữa B và H . Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{B_1} + \widehat{BCH} &= 90^\circ = \widehat{B_1} + 2\widehat{C_1} \\ \Rightarrow \widehat{BCH} &= 2\widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}. \end{aligned}$$

Giả sử đường vuông góc với BC tại B cắt CA ở K .

Ta có $\widehat{K} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$) $\Rightarrow \triangle ABK$ cân.

Kẻ $BM \perp AK$. Đặt $KM = MA = x$ ($x > 0$).

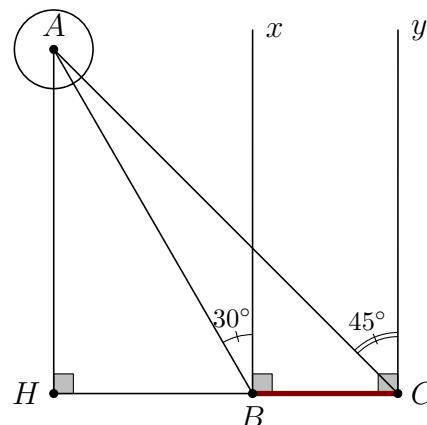
Từ $BK^2 = KM \cdot KC$ suy ra

$$(\sqrt{5})^2 = x(2x + 3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 5) = 0.$$

Do $x > 0$ nên $x = 1$, do đó $KC = 5$. Suy ra $BC = \sqrt{KC^2 - KB^2} = \sqrt{20}$.

❖ **Bài 30.**

Flycam là từ viết tắt của Fly Camera - Thiết bị dùng cho quay phim chụp ảnh trên không. Đây là một loại thiết bị bay không người lái có lắp camera hay máy ảnh để quay phim hoặc chụp ảnh từ trên cao. Một chiếc Flycam đang ở vị trí A cách chiếc cầu BC (theo phương thẳng đứng) một khoảng $AH = 120$ m. Biết góc tạo bởi AB , AC với các phương vuông góc với mặt cầu tại B , C theo thứ tự là $\widehat{ABx} = 30^\circ$, $\widehat{ACy} = 45^\circ$ (hình bên). Tính chiều dài BC của cây cầu. (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải.

Ta có $\widehat{yCA} = 45^\circ$ nên $\widehat{ACH} = \widehat{CAH} = 45^\circ$.

Do đó $\triangle HAC$ vuông cân tại $H \Rightarrow HC = HA = 120$ (m).

Lại có $\widehat{HAB} = \widehat{ABx} = 30^\circ$ (so le trong). Trong tam giác vuông AHB ta có

$$HB = AH \cdot \tan \widehat{HAB} = 120 \cdot \tan 30^\circ = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

Suy ra chiều dài của cây cầu là

$$BC = HC - HB = 120 - 40\sqrt{3} \approx 50,72 \text{ (m)}.$$

□

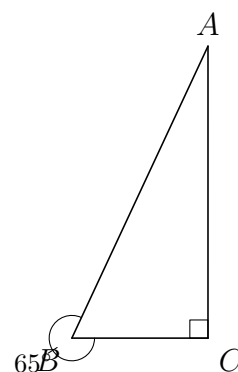
❖ Bài 31. Một chiếc thang dài 3 m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo với mặt đất một góc 65° để thang không bị đổ khi sử dụng? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải.

Gọi AB là cái độ dài cái thang và BC là hình chiếu vuông góc của AB lên mặt đất.

$\triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow BC = AB \cdot \cos 65^\circ \approx 1,57$ m.

Vậy cần đặt chân thang cách tường một khoảng bằng 1,57 m để thang không bị đổ.



□

❖ Bài 32. Tính chiều cao của cây AC trong hình vẽ, biết rằng người đo đứng cách cây $AE = 2,5$ m và khoảng cách từ mắt người đo đến mặt đất là $DE = 1,5$ m. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải.

Ta có $\triangle ADE = \triangle DAB$.

Xét hai tam giác vuông DAB và CDB có $\widehat{BAD} = \widehat{CDB}$ nên $\triangle DAB \sim \triangle CDB$.

Từ đó suy ra $\triangle ADE \sim \triangle CDB$.

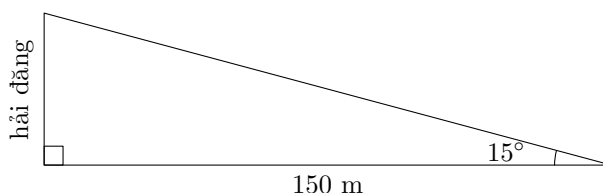
$$\text{Suy ra } \frac{AE}{CB} = \frac{DE}{BD} \Rightarrow CB = \frac{AE \cdot BD}{DE} = \frac{2,5 \cdot 2,5}{1,5} = 4,2 \text{ m}.$$

$$\text{Vậy } AC = AB + BC = 1,5 + 4,2 = 5,7 \text{ m}.$$

□

❖ Bài 33. Một người đang đi thuyền giữa biển cách ngọn hải đăng 150 m và nhìn thấy ngọn hải đăng với góc nâng 15° . Hỏi chiều cao của ngọn hải đăng là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải.

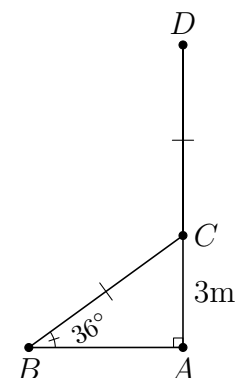


Chiều cao của ngọn hải đăng là $150 \cdot \tan 15^\circ = 40,2\text{m}$. □

❖ Bài 34.

Một cây tre AD bị gió thổi gãy gấp tại một điểm C trên thân cây cách gốc 3 mét (như hình vẽ). Tính chiều dài của cây tre biết ngọn tre chạm đất tại điểm B và tạo với mặt đất một góc $\widehat{CBA} = 36^\circ$ (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân)

🔗 8,1



💬 Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A nên ta có $BC = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{3}{\sin 36^\circ}$.

Độ dài đoạn AD (độ dài cây tre) là

$$AD = AC + CD = AC + BC = 3 + \frac{3}{\sin 36^\circ} \approx 8,1 \text{ (m)}.$$

□

❖ Bài 35. Cho tam giác ABC có $AB = 3,6 \text{ cm}$, $AC = 4,8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$. Tính các góc B, C (viết kết quả dạng độ, phút, giây) và đường cao AH của tam giác ABC .

💬 Lời giải.

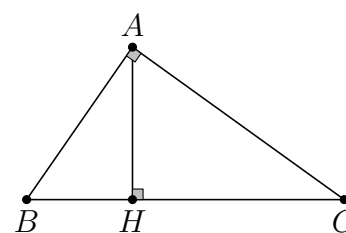
Ta có $AB^2 + AC^2 = 3,6^2 + 4,8^2 = 36 = BC^2$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4,8}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{B} \approx 53^\circ 7' 48''$.

$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} \approx 36^\circ 52' 12''$.

Ta có $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3,6 \cdot 4,8}{6} = \frac{72}{25} \text{ (cm)}$.



□

BÀI 1. SỰ XÁC ĐỊNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm

Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .

2. Vị trí tương đối của giữa điểm và đường tròn

- ☑ Điểm M nằm trong đường tròn $(O; R)$ khi $OM < R$.
- ☑ Điểm M nằm trên đường tròn $(O; R)$ khi $OM = R$.
- ☑ Điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ khi $OM > R$.

3. Các xác định đường tròn

Một đường tròn xác định khi:

- ☑ Biết tâm và bán kính đường tròn.
- ☑ Biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn.
- ☑ Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
- ☑ Đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác. Khi đó tam giác được gọi là tam giác nội tiếp đường tròn.
- ☑ Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác.
- ☑ Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.
- ☑ Nếu tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

4. Tâm đối xứng

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của hình tròn đó.

5. Trục đối xứng

Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đi qua nhiều điểm**

Dựa trên định nghĩa đường tròn. Ta sẽ tìm một điểm cách đều các điểm còn lại thì điểm đó chính là tâm đường tròn.

✎ **Ví dụ 1.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

💬 **Lời giải.**

Gọi $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow OA = OB = OC = OD$, suy ra $A, B, C, D \in (O; OA)$ với $OA = 2\sqrt{2}$ cm. □

✎ **Ví dụ 2.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đi qua 4 điểm A, B, C, D .

💬 **Lời giải.**

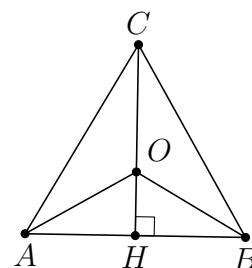
Gọi $\{I\} = AC \cap BD \Rightarrow IA = IB = IC = ID$ suy ra $A, B, C, D \in (I; IA)$. Tính được $AC = 13$ cm $\Rightarrow IA = 6,5$ cm □

✎ **Ví dụ 3.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 6 cm. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

💬 **Lời giải.**

Gọi O là giao điểm của các đường trung trực của $\triangle ABC$. Suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$OA = \frac{AH}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\cos 30^\circ} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$



✎ **Ví dụ 4.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**

Gọi M là trung điểm của BC , suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Vậy $MA = MB = MC = \frac{BC}{2} = 5$ cm. □

Dạng 2. Xác định vị trí tương đối của điểm và đường tròn

Dựa trên lý thuyết về vị trí tương đối của điểm và đường tròn.

✎ **Ví dụ 5.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định vị trí tương đối của điểm $M(1;1)$, $N(2;0)$, $P(2;3)$ đối với $(O;2)$.

💬 **Lời giải.**

$OM = \sqrt{2} < 2$ nên M nằm trong đường tròn $(O;2)$;

$ON = 2 \Rightarrow N \in (O;2)$;

$OP = \sqrt{13} > 2$ nên P nằm ngoài đường tròn $(O;2)$. □

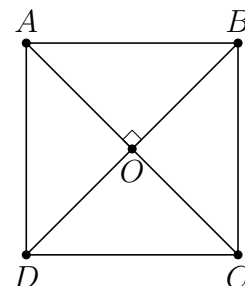
❖ **Ví dụ 6.** Cho hình vuông $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo, $OA = 2\sqrt{2}$ cm. Vẽ đường tròn $(A; 4\text{cm})$. Xác định vị trí tương đối của các điểm A, B, C, D với đường tròn $(O; 4\text{ cm})$

💬 **Lời giải.**

$AB = AD = 4\text{ cm}$, suy ra $B, D \in (A; 4\text{ cm})$.

Ta có $OA = 2\sqrt{2} < 4$ nên O nằm trong đường tròn $(A; 4\text{ cm})$.

$AC = 4\sqrt{2} > 4$ nên C nằm ngoài đường tròn $(A; 4\text{ cm})$.



□

📁 Dạng 3. Dựng đường tròn thỏa mãn một yêu cầu cho trước

Dựa trên phần lý thuyết về cách xác định một đường tròn.

❖ **Ví dụ 7.** Cho góc xAy nhọn và hai điểm B, C thuộc tia Ay . Dựng đường tròn tâm O đi qua hai điểm B, C sao cho O nằm trên tia Ax .

💬 **Lời giải.**

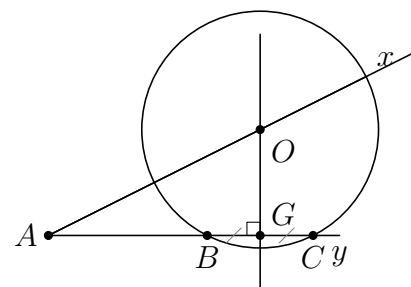
Cách dựng:

Dựng đường trung trực d của đoạn thẳng BC cắt Ay tại O .

Dựng đường tròn $(O; OB)$.

Chứng minh: Vì O thuộc trung trực của đoạn thẳng BC nên $OB = OC$.

Vậy O là tâm đường tròn đi qua hai điểm B, C .

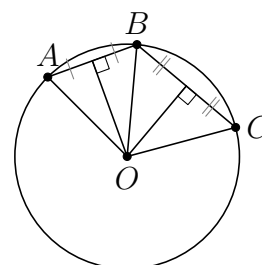


□

❖ **Ví dụ 8.** Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy xác định lại tâm và bán kính của hình tròn đó.

💬 **Lời giải.**

Lấy ba điểm A, B, C bất kì thuộc viền hình tròn. Dựng các đường trung trực của đoạn AB và BC , chúng cắt nhau tại O . Vậy O chính là tâm của hình tròn và OA là bán kính của hình tròn.



□

C – BÀI TẬP VỀ NHÀ

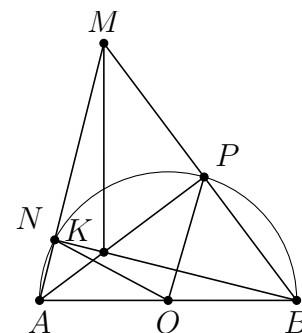
❖ **Bài 1.** Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB . M là điểm nằm bên ngoài đường tròn sao cho MA, MB cắt nửa đường tròn lần lượt tại N, P .

a) Chứng minh $BN \perp MA, AP \perp MB$;

b) Gọi K là giao điểm của BN và AP . Chứng minh $MK \perp AB$.

Lời giải.

- a) $\triangle ANB$ có đường trung tuyến NO ứng với cạnh AB và bằng nửa cạnh AB , suy ra $\triangle ANB$ vuông tại $N \Rightarrow BN \perp MA$.
 Làm tương tự, ta có $AP \perp MB$.
- b) Từ câu trên, ta có K là trực tâm tam giác $MAB \Rightarrow MK \perp AB$.

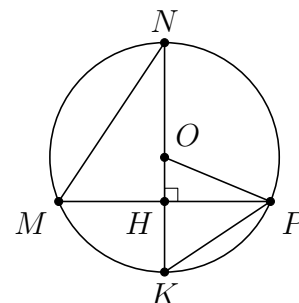


Bài 2. Cho $\triangle MNP$ cân tại N , nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao NH cắt đường tròn tại K .

- a) Chứng minh NK là đường kính của (O) ;
 b) Tính số đo $\widehat{NPK}$;
 c) Biết $MP = 24$ cm, $NP = 20$ cm. Tính NH và bán kính của đường tròn (O) .

Lời giải.

- a) $\triangle MNP$ cân tại N , suy ra NH là đường cao đồng thời là đường trung trực của MP , mà O thuộc đường trung trực của $MP \Rightarrow NK$ là đường kính của đường tròn (O) .
- b) $\triangle NPK$ nội tiếp đường tròn đường kính NK
 $\Rightarrow \widehat{PNK} = 90^\circ$.
- c) Ta có $HP = \frac{MP}{2} = 12$ cm.



Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle NHP$ vuông tại H
 $\Rightarrow NH = 16$ cm.

Áp dụng hệ thức lượng vào $\triangle NPK$ vuông tại P , $PH \perp NK$ ta tính được $NK = 25$ cm.
 Vậy bán kính của (O) là $25 : 2 = 12,5$ cm.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $BC = 36$ cm, đường cao $AH = 12$ cm. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

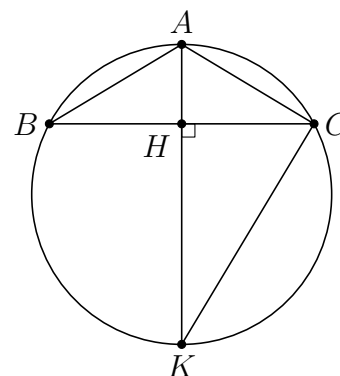
Lời giải.

Gọi $\{K\} = AH \cap (O)$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên AH vừa là đường cao vừa là đường trung trực của BC , mà O thuộc trung trực của BC nên AK là đường kính của (O) .

Vì $\triangle ACK$ nội tiếp (O) có AK là đường kính nên $\triangle ACK$ vuông tại C .

Theo Py-ta-go ta tính được $CH = 18$ cm. Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông ACK ta có $HK = 27$ cm, suy ra $AK = 39$ cm nên $R = 19,5$ cm.





BÀI 2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- ✓ Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- ✓ Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. So sánh các đoạn thẳng

Sử dụng kiến thức liên hệ giữa đường kính và dây.
Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

✎ **Ví dụ 1.** Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Chứng minh

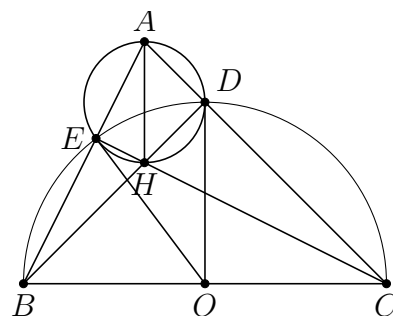
- a) Bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn;
- b) $DE < BC$;
- c) $DE < AH$.

💬 **Lời giải.**

- a) Gọi O là trung điểm của BC . Ta có $OD = OE = OB = OC = \frac{BC}{2}$.
Vậy B, E, C, D thuộc đường tròn đường kính BC .

- b) Xét (O) có DE, BC lần lượt là dây không đi qua tâm và đường kính suy ra $DE < BC$.

- c) Ta có $\widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ nên A, H, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH . Từ đó suy ra $DE < AH$.



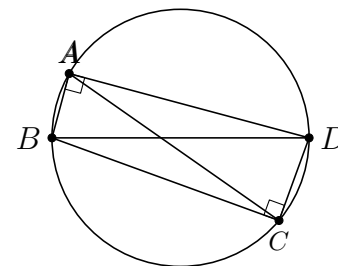
□

✎ **Ví dụ 2.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$.

- a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn;
- b) So sánh độ dài AC và BD ;
- c) Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Lời giải.

a) Vì $\triangle ABD$ vuông tại A nên trung điểm BD là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ với bán kính $\frac{BD}{2}$. Tương tự ta cũng có trung điểm BD là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle CBD$ với bán kính $\frac{BD}{2}$. Do đó bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



b) Vì BD là đường kính nên $BD > AC$.

c) Nếu $AC = BD$ thì AC cũng là đường kính của đường tròn. Suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật.

□

Dạng 2. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Áp dụng quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung, đường trung bình của tam giác, đường trung bình của hình thang,...

❖ **Ví dụ 3.** Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Dây CD cắt đường kính AB tại I . Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD . Đường thẳng đi qua O vuông góc với CD tại M cắt AK tại N . Chứng minh

a) $AN = NK$;

b) $MH = MK$;

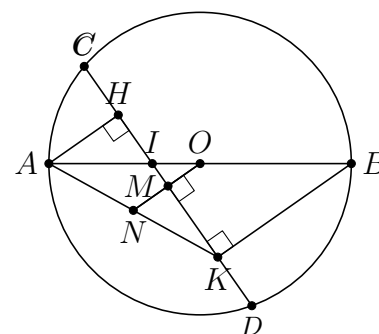
c) $CH = DK$.

Lời giải.

a) $\triangle ABK$ có O là trung điểm của AB , $ON \perp BK$ suy ra N là trung điểm của AK .

b) $\triangle AHK$ có N là trung điểm của AK , $MN \parallel AH$ suy ra M là trung điểm của HK .

c) $OM \perp CD$ suy ra M là trung điểm của CD , suy ra $MC = MD \Rightarrow CH = DK$.



□

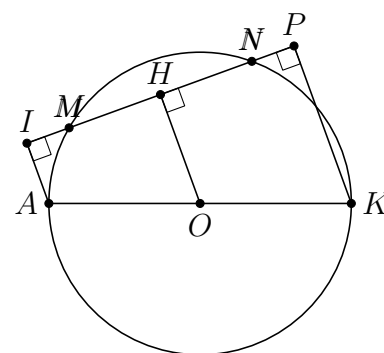
❖ **Ví dụ 4.** Cho đường tròn (O) đường kính AK , dây MN không cắt đường kính AK . Gọi I, P lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ A và K đến MN . Chứng minh $MI = NP$.

Lời giải.

Kẻ $OH \perp MN$ ($H \in MN$) suy ra H là trung điểm MN .
ta có $AI \perp MN$, $PK \perp MN$ nên $KP \parallel IA$ hay $PKAI$ là hình thang.

Mặt khác $OH \perp MN$ nên $OH \parallel IA$, $OH \parallel PK$, O là trung điểm của AK nên OH là đường trung bình của hình thang $PKAI$ hay H là trung điểm của IP .

Suy ra $HI = HP \Rightarrow IM = NP$.



□

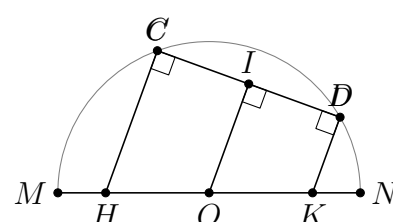
❖ **Ví dụ 5.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính MN , dây CD . Các đường vuông góc với CD tại C và D tương ứng cắt MN ở H và K . Chứng minh $MH = NK$.

💬 **Lời giải.**

Kẻ $OI \perp CD$ ($I \in CD$) suy ra I là trung điểm của CD .
 $CHKD$ là hình thang vuông có $OI \parallel CH \perp KD$ mà I là trung điểm của CD .

Suy ra O là trung điểm của HK .

$\Rightarrow OH = OK \Rightarrow MH = NK$.



□

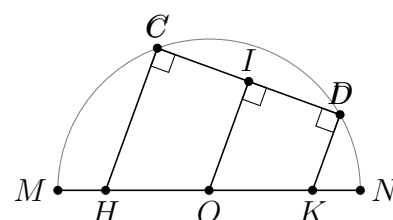
❖ **Ví dụ 6.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính MN . Trên MN lấy điểm H, K sao cho $MH = NK$. Qua H, K kẻ các đường thẳng song song với nhau, chúng cắt nửa đường tròn lần lượt tại C và D . Chứng minh HC và KD vuông góc với CD .

💬 **Lời giải.**

Kẻ $OI \perp CD$ ($I \in CD$) suy ra I là trung điểm của CD .

Ta có $OM = ON$, $MH = NK \Rightarrow OH = OK$.

Ta có $CHKD$ là hình thang mà OI là đường trung bình của hình thang $\Rightarrow OI \parallel HC \parallel KD$ mà $OI \perp CD$ nên ta có đpcm.



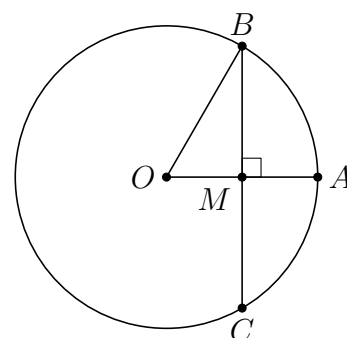
□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Cho đường tròn tâm O , có bán kính $OA = 4$ cm. Dây BC vuông góc với OA tại trung điểm của OA . Tính độ dài BC .

💬 **Lời giải.**

Áp dụng định lý Py-ta-go, tính được $MB = 2\sqrt{3}$ cm. Từ đó tính được $BC = 2MB = 4\sqrt{3}$ cm.



□

❖ **Bài 2.** Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm I nằm bên trong đường tròn.

- Hãy nêu cách dựng dây CD nhận I làm trung điểm;
- Tính độ dài dây CD khi $R = 5$ cm, $OI = 3$ cm.

💬 **Lời giải.**

- Vẽ dây $CD \perp OI$ tại I suy ra I là trung điểm của CD .
- Dùng định lý Py-ta-go tính được $CD = 8$ cm.

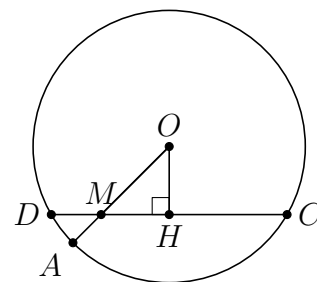
□

❖ **Bài 3.** Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = 11$ cm. Lấy M thuộc OA sao cho $OM = 7$ cm. Qua M vẽ dây $CD = 18$ cm. Kẻ $OH \perp CD$ ($H \in CD$). Tính

- OH, HM ;
- MC, MD .

💬 **Lời giải.**

- Vì $OH \perp CD$ nên H là trung điểm của CD suy ra $HC = HD = 9$ cm.
Áp dụng định lý Py-ta-go ta được $OH = 2\sqrt{10}$ cm, $HM = 3$ cm.
- $MC = CH - MH = 6$ cm, $MD = MH + HD = 12$ cm.



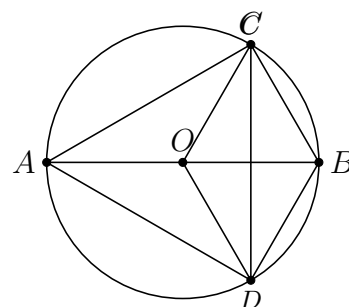
□

❖ **Bài 4.** Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ cung tròn tâm B , bán kính R , cung này cắt đường tròn (O) ở C và D .

- Tứ giác $OCBD$ là hình gì? Vì sao?
- Tính số đo các góc $\widehat{CDB}$, $\widehat{CDO}$, $\widehat{ODA}$;
- Chứng minh $\triangle ACD$ là tam giác đều.

💬 **Lời giải.**

- Ta có $OC = BC = BD = OD (= R)$ suy ra $OCBD$ là hình thoi.
- Vì $OB = OD = BD$ nên $\triangle BOD$ đều, suy ra $\widehat{ODB} = 60^\circ$ mà CD là đường chéo của hình thoi suy ra $\widehat{CDB} = \widehat{CDO} = 30^\circ$.
Ta có $\widehat{AOD} = 180^\circ - \widehat{DOB} = 120^\circ$, mà $OA = OD$ nên $\triangle AOD$ cân tại O nên $\widehat{ODA} = \frac{180^\circ - \widehat{AOD}}{2} = 30^\circ$.



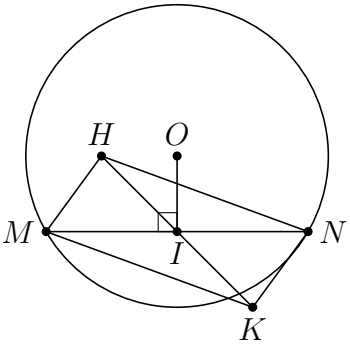
c) $\triangle ABC = \triangle ABD$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) suy ra $AC = AD \Rightarrow \triangle ACD$ cân tại A , mà $\widehat{ADC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ACD$ là tam giác đều.

□

✦ **Bài 5.** Cho đường tròn (O) , dây cung MN . Kẻ $OI \perp MN$ ($I \in MN$), lấy hai điểm H, K đối xứng với nhau qua I . Chứng minh tứ giác $MHNK$ là hình bình hành.

🗨 **Lời giải.**

Vì $OI \perp MN$ nên I là trung điểm MN , từ đó tứ giác $MHNK$ là hình bình hành.



□

BÀI 3. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong một đường tròn:

- ☑ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
- ☑ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Trong hai dây của một đường tròn:

- ☑ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
- ☑ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

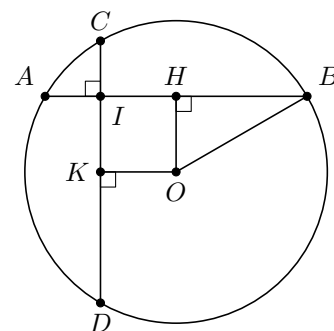
Áp dụng liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.

🔹 **Ví dụ 1.** Cho đường tròn $(O, 10 \text{ cm})$, dây $AB = 16 \text{ cm}$.

- a) Tính khoảng cách từ O đến dây AB ;
- b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 2 \text{ cm}$. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB . Chứng minh $CD = AB$.

💬 **Lời giải.**

- a) Kẻ $OH \perp AB$ ($H \in AB$) $\Rightarrow HA = HB = 8 \text{ cm}$.
Theo định lý Py-ta-go, ta có $OH^2 = OB^2 - HB^2 = 36$
 $\Rightarrow OH = 6 \text{ cm}$.
- b) Kẻ $OK \perp CD$ ($K \in CD$).
Tứ giác $OHIK$ có $\widehat{H} = \widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Mặt khác, $HI = OH = 6 \text{ cm}$ nên $OHIK$ là hình vuông
 $\Rightarrow OH = OK \Rightarrow AB = CD$.



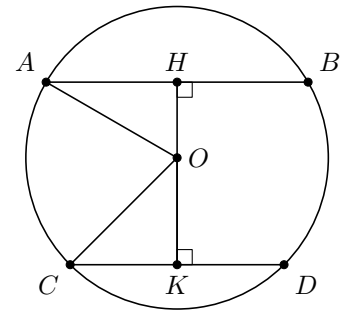
□

🔹 **Ví dụ 2.** Cho đường tròn $(O, 10 \text{ cm})$, dây $AB = 16 \text{ cm}$. Vẽ dây CD song song với AB . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD .

- a) Chứng minh ba điểm O, H, K thẳng hàng;
- b) Biết O nằm giữa H, K và khoảng cách giữa hai dây AB, CD bằng 14 cm . Tính độ dài dây CD .

 Lời giải.

- a) Vì H , K lần lượt là trung điểm của AB , CD nên $OH \perp AB$ và $OK \perp CD$. Mà $AB \parallel CD$ nên ba điểm O , H , K thẳng hàng.
- b) Theo định lý Py-ta-go, ta được $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 6$ cm.
 $\Rightarrow OK = 8$ cm.
 Theo định lý Py-ta-go, ta có $CK = \sqrt{OC^2 - OK^2} = 6$ cm.
 $\Rightarrow CD = 2CK = 12$ cm.

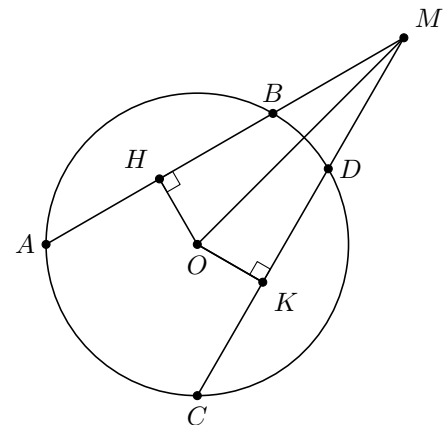
☐

❖ **Ví dụ 3.** Cho đường tròn (O) có các dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh

- a) $MH = MK$; b) $MA = MC$.

 Lời giải.

- a) $OH \perp AB$ và $OK \perp CD$ (vì H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD).
 Vì hai dây AB và CD bằng nhau nên $OH = OK$.
 Từ đó dễ thấy $\triangle MOH = \triangle MOK$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow MH = MK$ (đpcm).
- b) Ta có $AH = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = CK$. Từ kết quả câu a) suy ra $MH + HA = MK + KC$ nên $MA = MC$.

☐

❖ **Ví dụ 4.** Cho đường tròn (O) , các dây AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Chứng minh:

- a) MO là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây cung AB và CD ;
b) $MA = MC$ và $MB = MD$.

 Lời giải.

- a) Kẻ $OH \perp AB$ ($H \in AB$), $OK \perp CD$ ($K \in CD$) $\Rightarrow OH = OK$ (dây AB và CD bằng nhau).

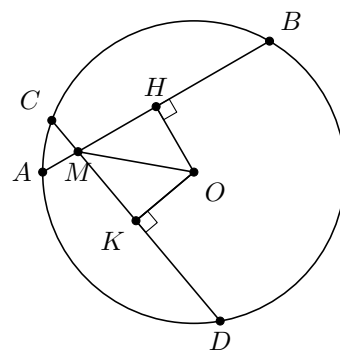
Do đó $\triangle MOH = \triangle MOK$ (ch-cgv) $\Rightarrow \widehat{HMO} = \widehat{KMO}$.

Vậy MO là tia phân giác của góc $\widehat{BMD}$.

- b) Ta có $BH = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = DK$. Mà $MH = MK$ (chứng minh trên) nên $MB = MD$.

Vì $AB = CD$ nên ta cũng suy ra $MA = MC$.

Vậy điểm M chia các đoạn thẳng AB , CD thành các đoạn thẳng đôi một bằng nhau.



□

Dạng 2. So sánh độ dài các đoạn thẳng

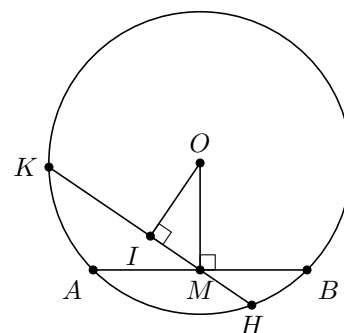
Trong một đường tròn, dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn và ngược lại, dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

❖ **Ví dụ 5.** Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây AB vuông góc với OM tại M . Vẽ dây HK bất kì qua M và không vuông góc với OM . Hãy so sánh độ dài dây AB và HK .

💬 **Lời giải.**

Kẻ $OI \perp HK$ ($I \in HK$).

Vì OI , OM lần lượt là đường vuông góc và đường xiên kẻ từ O đến $HK \Rightarrow OI < OM \Rightarrow HK > AB$.



□

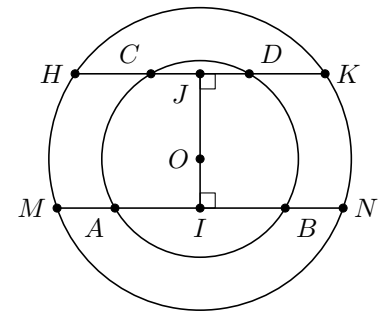
❖ **Ví dụ 6.** Cho hai đường tròn $(O; r)$ và $(O; R)$ với $R > r$. Hai dây AB , CD thuộc đường tròn $(O; r)$ sao cho $AB > CD$. Đường thẳng AB cắt $(O; R)$ tại M và N , đường thẳng CD cắt $(O; R)$ tại H và K . Kẻ $OI \perp AB$ ($I \in AB$), $OJ \perp CD$ ($J \in CD$). So sánh các độ dài:

- a) OI và OJ ;

- b) MN và HK .

💬 **Lời giải.**

- a) Vì $AB > CD \Rightarrow OI < OJ$.
b) Vì $OI < OJ \Rightarrow MN > HK$.



□

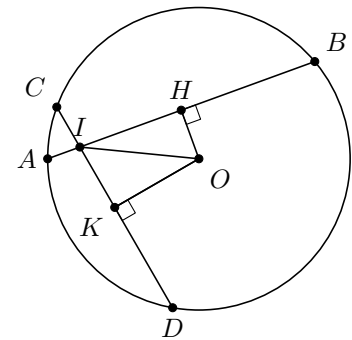
✎ **Ví dụ 7.** Cho AB và CD là hai dây của đường tròn $(O; R)$ sao cho AB và CD cắt nhau tại điểm I nằm trong đường tròn. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Biết $AB > CD$, chứng minh $IH > IK$.

💬 **Lời giải.**

Theo quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung
 $\Rightarrow OH \perp AB, OK \perp CD$.
Vì $AB > CD \Rightarrow OH < OK$. Theo định lý Py-ta-go, ta có

$$\begin{aligned} IH^2 &= OI^2 - OH^2 \\ IK^2 &= OI^2 - OK^2 \end{aligned}$$

Mà $OH < OK$ nên $IH > IK$.

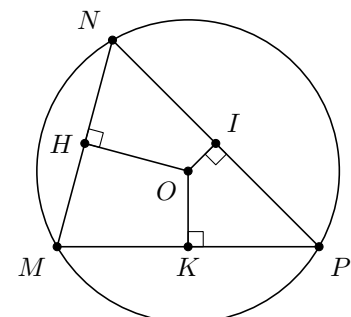


□

✎ **Ví dụ 8.** Cho $\triangle MNP$ có $\widehat{M} > \widehat{N} > \widehat{P}$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi OH, OI, OK theo thứ tự là khoảng cách từ O đến MN, NP, MP . So sánh các độ dài OH, OI và OK .

💬 **Lời giải.**

Vì $\widehat{M} > \widehat{N} > \widehat{P} \Rightarrow NP > MP > MN \Rightarrow OI < OK < OH$.



□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

✎ **Bài 1.** Cho đường tròn $(O; 25 \text{ cm})$. Hai dây AB, CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 40 cm, 48 cm. Tính khoảng cách giữa hai dây ấy.

Lời giải.

Trường hợp 1. O nằm ngoài dải song song của hai dây cung AB và CD .

Ta có $DI = \frac{CD}{2} = 24$ cm và $HB = \frac{AB}{2} = 20$ cm.

Tam giác OID vuông tại I nên

$$OI = \sqrt{OD^2 - DI^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7 \text{ cm.}$$

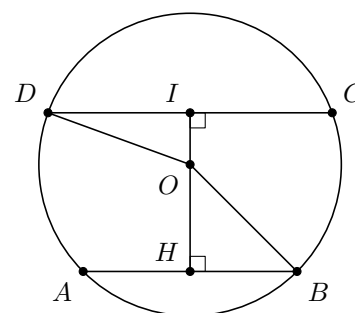
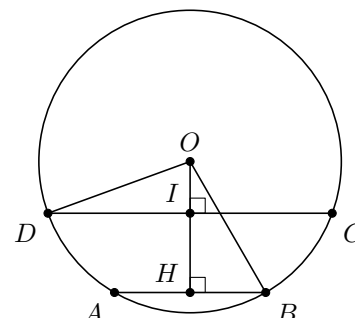
Tam giác OHB vuông tại H nên

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ cm.}$$

Do đó $IH = OH - OI = 15 - 7 = 8$ cm.

Trường hợp 2. O nằm trong dải song song của hai dây cung AB và CD .

Ta có $IH = OI + OH = 7 + 15 = 22$ cm.



□

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B bất kì nằm trên $(O; R)$. Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$ và AM, BN cắt nhau tại điểm C nằm trong đường tròn. Chứng minh:

- OC là phân giác của $\widehat{AOB}$;
- $OC \perp AB$.

Lời giải.

- Kẻ $OI \perp AM$ ($I \in AM$); $OH \perp BN$ ($H \in BN$).

Vì $AM = BN \Rightarrow OH = OI$.

Do đó $\triangle OIC = \triangle OHC$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông).

$\Rightarrow CI = CH$ (cặp cạnh tương ứng).

Do $IA = HB = \frac{AM}{2} = \frac{BN}{2}$ nên

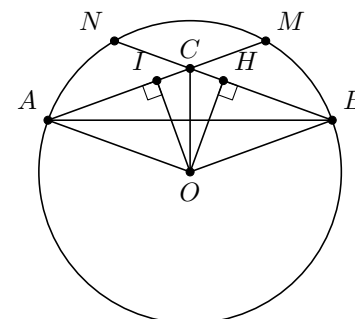
$$CI + IA = CH + HB \Rightarrow CA = CB.$$

Do đó $\triangle OAC = \triangle OBC$ (c-c-c).

Suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\widehat{AOB}$.

- Do $OA = OB$; $CA = CB \Rightarrow OC$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow OC \perp AB$.

□

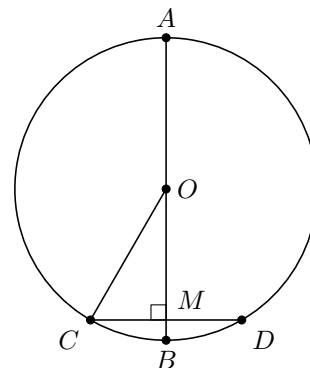


Bài 3. Cho đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$, điểm M cách O là 8 cm.

- a) Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M ;
 b) Tính độ dài dây dài nhất đi qua M .

Lời giải.

- a) Dây CD đi qua M và vuông góc với OM là dây ngắn nhất.
 $\triangle OCM$ vuông tại $M \Rightarrow CM = \sqrt{CO^2 - OM^2} = 6$ cm.
 Vậy $CD = 2CM = 12$ cm.
- b) Dây dài nhất đi qua M là đường kính $AB = 20$ cm.



□

❖ **Bài 4.** Cho đường tròn (O) , các dây $AB = 24$ cm, $AC = 20$ cm ($\widehat{BAC} < 90^\circ$ và điểm O nằm trong $\widehat{BAC}$). Gọi M là trung điểm của AC . Khoảng cách từ M đến AB bằng 8 cm.

- a) Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại C ;
 b) Tính bán kính của đường tròn.

Lời giải.

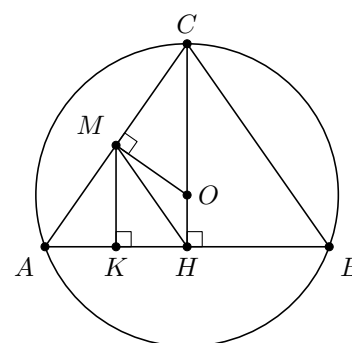
- a) Kẻ $MK \perp AB \Rightarrow MK = 8$ cm.
 Tam giác AMK vuông tại K nên
 $AK = \sqrt{AM^2 - MK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ cm.

Kẻ $CH \perp AB \Rightarrow CH = 2MK = 16$ cm. Hơn nữa,

$$AH = 2AK = 12 \text{ cm} = \frac{AB}{2}.$$

$\Rightarrow CH$ là đường cao và là đường trung tuyến của $\triangle ABC$.
 $\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại C .

- b) $\triangle OMC \sim \triangle AHC$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{MC}{HC} \Rightarrow OC = \frac{AC \cdot MC}{HC} = 12,5$ cm.



□

BÀI 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn $(O; R)$ và một đường thẳng bất kì. Gọi d là khoảng cách từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng đó. Ta có bảng vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn:

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

2. Định lý

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Cho biết d, R , xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn hoặc ngược lại

So sánh d và R dựa vào bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn đã nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết.

🔗 **Ví dụ 1.** Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng):

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5 cm	3 cm	...
6 cm	...	Tiếp xúc nhau
4 cm	8 cm	...

💬 **Lời giải.**

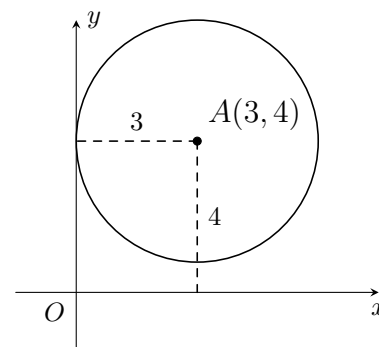
R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5 cm	3 cm	Cắt nhau
6 cm	6 cm	Tiếp xúc nhau
4 cm	8 cm	Không giao nhau

□

🔗 **Ví dụ 2.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3; 4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(A; 3)$ và các trục tọa độ.

💬 **Lời giải.**

Khoảng cách từ A đến Ox là $4 > 3 = R$ nên $(A; 3)$ không giao Ox .
Khoảng cách từ A đến Oy là $3 = R$ nên $(A; 3)$ tiếp xúc với Oy .

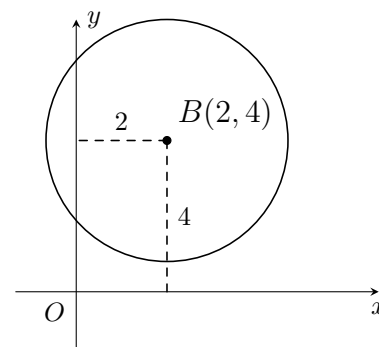


□

❖ **Ví dụ 3.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $B(2; 4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(B; 3)$ và các trục tọa độ.

💬 **Lời giải.**

Khoảng cách từ B đến Ox là $4 > 3 = R$ nên $(B; 3)$ không cắt Ox .
Khoảng cách từ B đến Oy là $2 < 3 = R$ nên $(B; 3)$ cắt Oy tại hai điểm phân biệt.



□

❖ **Ví dụ 4.** Cho điểm A cách đường thẳng Δ là 3 cm. Vẽ đường tròn tâm A , bán kính 3 cm. Chứng minh đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (A) .

💬 **Lời giải.**

Vì $d = R = 3$ cm nên đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (A) .

□

❖ **Ví dụ 5.** Cho điểm B cách đường thẳng a là 5 cm. Vẽ đường tròn tâm B , bán kính 7 cm. Chứng minh đường thẳng a cắt đường tròn (B) tại hai điểm phân biệt.

💬 **Lời giải.**

Vì $d = 5 < R = 7$ nên đường thẳng a cắt đường tròn (B) tại hai điểm phân biệt.

□

📁 Dạng 2. Bài toán liên quan đến tính độ dài

Nội tâm và tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và định lý Py-ta-go.

❖ **Ví dụ 6.** Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài (O) sao cho $MO = 2R$. Kẻ tiếp tuyến MA với (O) (A là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn thẳng MA theo R .

💬 **Lời giải.**

Xét tam giác OAM vuông tại A , theo định lý Py-ta-go ta có

$$MA^2 = OM^2 - OA^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow MA = R\sqrt{3}.$$

□

❖ **Ví dụ 7.** Cho đường tròn (O) bán kính 6 cm và điểm A cách O là 10 cm. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn thẳng AB .

💬 **Lời giải.**

Xét tam giác ABO vuông tại B , áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow AB = 8 \text{ cm.}$$

Vậy $AB = 8 \text{ cm.}$ □

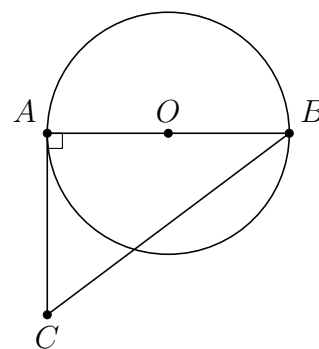
❖ **Ví dụ 8.** Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Từ A kẻ tiếp tuyến xy . Trên xy lấy điểm C sao cho $AC = R$. Tính độ dài đoạn thẳng BC theo R .

💬 **Lời giải.**

Tam giác ABC vuông tại A nên theo định lý Py-ta-go, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4R^2 + R^2 = 5R^2 \Rightarrow BC = R\sqrt{5}.$$

Vậy $BC = R\sqrt{5}.$



□

❖ **Ví dụ 9.** Cho đường tròn tâm O bán kính 3 cm và điểm M nằm trên đường tròn đó. Từ M vẽ tiếp tuyến xy . Trên xy lấy điểm P sao cho $MP = 4 \text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng PO .

💬 **Lời giải.**

Xét tam giác OMP vuông tại M , áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$OP^2 = OM^2 + MP^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow OP = 5 \text{ cm.}$$

Vậy $OP = 5 \text{ cm.}$ □

C-BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(a; b)$. Xác định điều kiện của a, b để đường tròn $(A; 5)$ thỏa mãn:

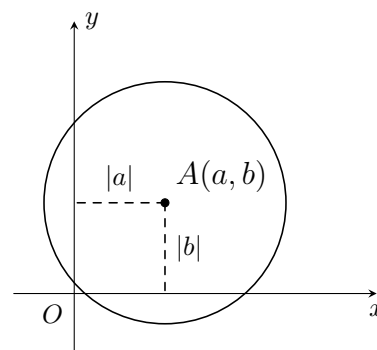
- a) Cắt trục Oy ; b) Cắt trục Ox ; c) Tiếp xúc với Ox .

💬 **Lời giải.**

a) $(A, 5 \text{ cm})$ cắt $Oy \Leftrightarrow |a| < 5.$

b) $(A, 5 \text{ cm})$ cắt $Ox \Leftrightarrow |b| < 5.$

c) $(A, 5 \text{ cm})$ tiếp xúc $Ox \Leftrightarrow |b| = 5.$



□

❖ **Bài 2.** Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$). Biết $AB = 4$ cm, $BC = 13$ cm và $CD = 9$ cm. Vẽ đường tròn tâm O , đường kính BC . Chứng minh AD tiếp xúc với (O) .

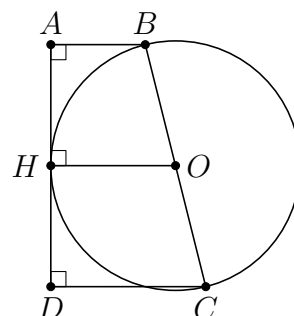
💬 **Lời giải.**

Kẻ $OH \perp AD$ ($H \in AD$).

Ta có OH là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên

$$OH = \frac{AB + CD}{2} = \frac{13}{2} = \frac{BC}{2}.$$

$\Rightarrow AD$ tiếp xúc với (O) .



□

❖ **Bài 3.** Cho đường tròn $(O; 15$ cm) có dây $AB = 24$ cm. Gọi H là trung điểm của AB , tia OH cắt (O) tại C , tiếp tuyến của (O) tại C cắt OA, OB lần lượt tại E, F . Tính độ dài OH và EF .

🔗 $OH = 9$ cm; $EF = 10$ cm

💬 **Lời giải.**

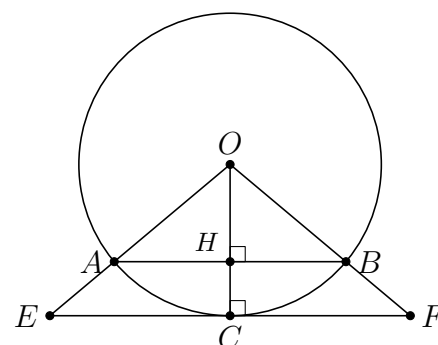
H là trung điểm $AB \Rightarrow OH \perp AB$ (quan hệ giữa đường kính và dây cung).

$BH = 12$ cm. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có

$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = 81 \Rightarrow OH = 9 \text{ cm}.$$

Vì $AB \parallel EF$ nên theo định lý Ta-lét, ta có

$$\frac{AB}{EF} = \frac{OH}{OC} \Leftrightarrow \frac{24}{EF} = \frac{9}{15} \Rightarrow EF = 10 \text{ cm}.$$



□

❖ **Bài 4.** Cho điểm O cách đường thẳng xy là 5 cm.

- Chứng minh $(O; 13$ cm) cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt;
- Gọi hai giao điểm của (O) với xy là B, C . Tính độ dài đoạn thẳng BC .

🔗 24 cm

💬 **Lời giải.**

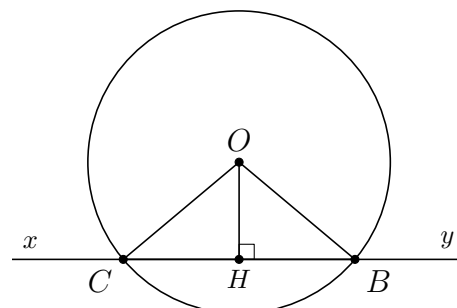
- $d = 5 < 13 = R$ nên (O) cắt xy tại hai điểm phân biệt.

- Kẻ $OH \perp BC$.

Tam giác OBH vuông tại H nên theo định lý Py-ta-go, ta có

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow HB = 12 \text{ cm}.$$

Do đó $BC = 24$ cm.



□

✦ **Bài 5.** Cho đường tròn tâm O bán kính 6 cm. Điểm A nằm ngoài đường tròn và $OA = 10$ cm. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) trong đó B là tiếp điểm. Tính chu vi tam giác ABO .

 24 cm

 **Lời giải.**



BÀI 5. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dấu hiệu 1

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm thuộc đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

2. Dấu hiệu 2

Nếu khoảng cách từ tâm của một đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn

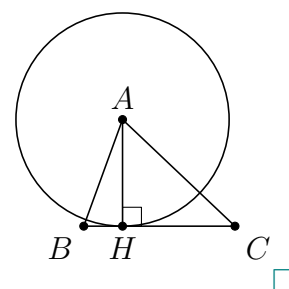
Để chứng minh đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại tiếp điểm C , ta có thể làm theo một trong hai cách sau

- ☑ Cách 1. Chứng minh C nằm trên (O) và OC vuông góc với a tại C .
- ☑ Cách 2. Kẻ OH vuông góc với a tại H và chứng minh $OH = OC = R$.

🔗 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, kẻ đường cao AH , vẽ đường tròn $(A; AH)$. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn (A) .

💬 **Lời giải.**

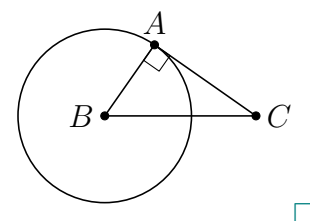
Do $H \in (A)$ và $AH \perp BC$ tại H nên BC là tiếp tuyến của đường tròn (A) .



🔗 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A , vẽ đường tròn $(B; BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B) .

💬 **Lời giải.**

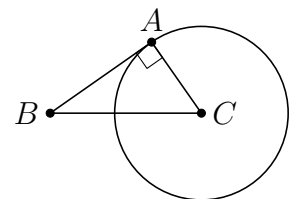
Do $A \in (B)$ và $AC \perp BA$ tại A nên CA là tiếp tuyến của đường tròn (B) .



❖ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC có $BC = 5$ cm, $CA = 4$ cm, $AB = 3$ cm. Vẽ đường tròn $(C; CA)$. Chứng minh BA là tiếp tuyến của đường tròn (C) .

💬 **Lời giải.**

Do $BC^2 = CA^2 + AB^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A (theo định lí Pi-ta-go đảo).
Suy ra $BA \perp CA$ mà $A \in (C)$ nên BA là tiếp tuyến của đường tròn (C) .



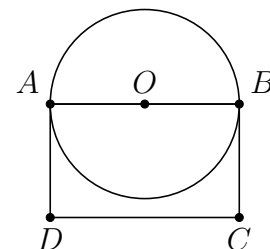
□

❖ **Ví dụ 4.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ đường tròn tâm O , đường kính AB . Chứng minh DA , BC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) .

💬 **Lời giải.**

Do $A \in \left(O; \frac{AB}{2}\right)$ và $AD \perp OA$ tại A nên AD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Tương tự, do $B \in \left(O; \frac{AB}{2}\right)$ và $BC \perp OB$ tại B nên BC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



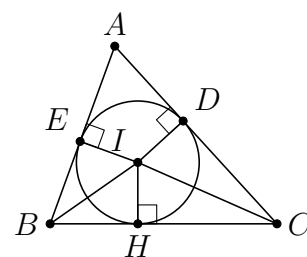
□

❖ **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC , các đường phân giác trong $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ cắt nhau tại I . Gọi H là hình chiếu của I trên BC , vẽ đường tròn tâm I , bán kính IH . Chứng minh AB , AC tiếp xúc với (I) .

💬 **Lời giải.**

Kẻ $ID \perp AC$ tại D , $IE \perp AB$ tại E thì $IE = ID = IH$.

Suy ra $E, D \in (I)$ mà ID, IE lần lượt vuông góc với AC, AB nên AC, AB là tiếp tuyến của (I) .



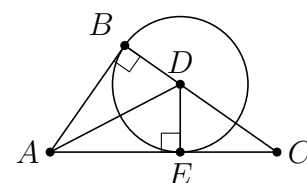
□

❖ **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC vuông tại B , tia phân giác góc A cắt BC tại D . Vẽ đường tròn tâm D , bán kính DB . Chứng minh AC tiếp xúc với đường tròn (D) .

💬 **Lời giải.**

Kẻ $DE \perp AC$ tại E , khi đó $DE = DB$.

Suy ra $E \in (D)$ mà DE vuông góc với AC nên AC là tiếp tuyến của (D) .



□

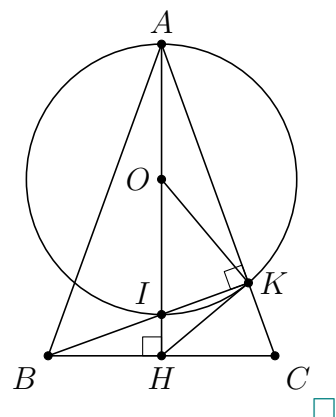
❖ **Ví dụ 7.** Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh

a) Đường tròn tâm O đường kính AI đi qua K ;

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải.

- a) Do BK là đường cao của $\triangle ABC$ nên $\triangle AKI$ vuông tại K .
Mà O là trung điểm của AI nên $AO = IO = KO$ kéo theo $K \in (O)$.
- b) $\triangle KBC$ vuông tại K có H là trung điểm $BC \Rightarrow HK = HB = HC$.
Suy ra $\triangle HKC$ cân tại H .
Do đó $\widehat{OKA} + \widehat{HKC} = \widehat{OAK} + \widehat{HCK} = 90^\circ$.
Dẫn tới $\widehat{HKO} = 90^\circ \Rightarrow HK \perp OK$.
Suy ra HK là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AD . Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh

- a) Đường tròn tâm O đường kính AC đi qua D ;
b) MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

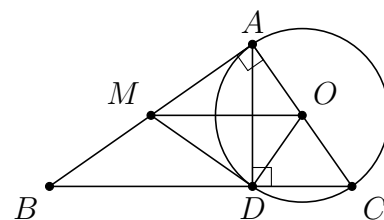
Lời giải.

- a) Xét $\triangle ADC$ vuông tại D có O là trung điểm $AC \Rightarrow OD = OA = OC \Rightarrow D \in (O)$.
- b) Xét $\triangle ADB$ vuông tại D có M là trung điểm $AB \Rightarrow MD = MA = MB$.

Xét $\triangle OAM$ và $\triangle ODM$ có $\begin{cases} OA = OD \\ AM = DM \\ OM \text{ là cạnh chung.} \end{cases}$

Suy ra $\triangle OAM = \triangle ODM$ (c.c.c)

Kéo theo $\widehat{OAM} = \widehat{ODM} = 90^\circ$ dẫn tới MD là tiếp tuyến của (O) .



Dạng 2. Bài toán liên quan đến tính độ dài

Nổi tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và sử dụng các công thức về hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài đoạn thẳng.

Ví dụ 9. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh

- a) MC là tiếp tuyến của (O) ; b) $MC = R\sqrt{3}$.

Lời giải.

a) Do $C \in \left(O; \frac{AB}{2}\right)$ nên $\triangle ABC$ vuông tại C

Suy ra $\widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{CAB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ có $\begin{cases} AB = BC = R \\ \widehat{CAB} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC$ đều tại A .

Suy ra $BC = OB = R$.

Xét $\triangle OMC$ có $BC = BO = BM \Rightarrow \triangle OMC$ vuông tại $C \Rightarrow MC \perp OC$ tại C .

Suy ra MC là tiếp tuyến của (O) .

b) Do $B \in OM$ nên $OM = BM + OB = 2R$.

Xét $\triangle MCO$ vuông tại O có $MC^2 + CO^2 = OM^2$.

Suy ra $MC^2 = OM^2 - CO^2 \Rightarrow MC^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow MC = R\sqrt{3}$.

□

❖ **Ví dụ 10.** Cho đường tròn (O, R) có dây AB không là đường kính. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB , cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C .

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của (O) ;

b) Cho bán kính của (O) bằng 15 cm và dây $AB = 24$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OC .

💬 **Lời giải.**

a) Do $OA = OB$ nên $\triangle OAB$ cân tại O . Mà OC là đường cao (do $OC \perp AB$) $\Rightarrow OC$ là đường trung trực của AB .

Suy ra $CA = CB$.

Xét $\triangle AOC$ và $\triangle BOC$ có $\begin{cases} OA = OB \\ CA = CB \\ OC \text{ là cạnh chung.} \end{cases}$

Suy ra $\triangle AOC = \triangle BOC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{CBO} = \widehat{CAO} = 90^\circ \Rightarrow CB \perp OB$ tại B
Kéo theo CB là tiếp tuyến của O .

b) Gọi H là giao điểm của OC và AB .

Khi đó, do OC là đường trung trực của AB nên H là trung điểm của AB .

Suy ra $AH = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12$ cm.

Mà $\triangle OAH$ vuông tại H nên $AH^2 + HO^2 = OA^2$, suy ra $HO = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 9$ cm.

$\triangle OAC$ vuông tại A có AH là đường cao nên $OC \cdot OH = AO^2$.

Do đó $OC = \frac{AO^2}{CH} = \frac{15^2}{9} = 25$ cm.

□

❖ **Ví dụ 11.** Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA .

a) Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , cắt đường thẳng OA tại E . Tính độ dài BE theo R .

💬 **Lời giải.**

a) Do $OB = OC$ nên $\triangle OBC$ cân tại O .

Mà OA là đường cao (do $OC \perp AB$), suy ra OA là đường trung trực của BC .

Tứ giác $OCAB$ có $\begin{cases} OA \text{ là đường trung trực của } BC \\ M \text{ là trung điểm của } OA. \end{cases}$

Suy ra $OCAB$ là hình thoi.

b) Ta có M là trung điểm của OA suy ra $OM = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$.

Mà BE là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow \widehat{OBE} = 90^\circ$.

Do $\triangle OBE$ vuông tại B có BM là đường cao nên

$$OE \cdot OM = OB^2 \Rightarrow OE = \frac{OB^2}{OM} = \frac{R^2}{\frac{R}{2}} = 2R.$$

Mà $BE^2 + BO^2 = EO^2$, suy ra $BE^2 = EO^2 - BO^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$.

Kéo theo $BE = R\sqrt{3}$.

□

❖ **Ví dụ 12.** Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, vẽ dây AB sao cho $AB = R$. Gọi K là điểm đối xứng với O qua A .

a) Chứng minh KB là tiếp tuyến của (O) ;

b) Tính độ dài đoạn thẳng KB theo R .

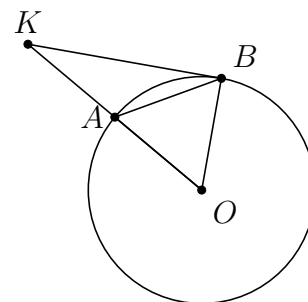
💬 **Lời giải.**

a) Do $KA = BA = OA = R$ nên $\triangle KBO$ vuông tại B .

Suy ra $KB \perp BO$ tại B hay KB là tiếp tuyến của (O) .

b) Áp dụng Định lí Pi-ta-go cho $\triangle KBO$ vuông tại B , ta có

$$KB^2 = KO^2 - OB^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow KB = R\sqrt{3}.$$



□

C – BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Cho hình vuông $ABCD$. Vẽ đường tròn tâm A , bán kính AB . Chứng minh

a) CB là tiếp tuyến của đường tròn (A) ;

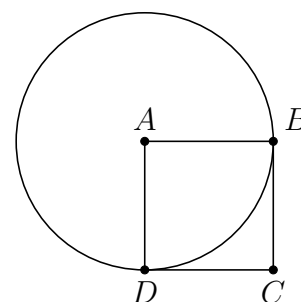
b) CD là tiếp tuyến của đường tròn (A) .

💬 **Lời giải.**

a) Do BA là bán kính của (A) và $\widehat{CBA} = 90^\circ$ nên CB là tiếp tuyến của đường tròn (A) .

b) Ta có $AD = BA = R \Rightarrow D \in (A)$ mà $\widehat{CDA} = 90^\circ$.

Suy ra CD là tiếp tuyến của đường tròn (A) .



□

❖ **Bài 2.** Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của M trên AB . Vẽ đường tròn $(M; MH)$. Chứng minh AC tiếp xúc với (M) .

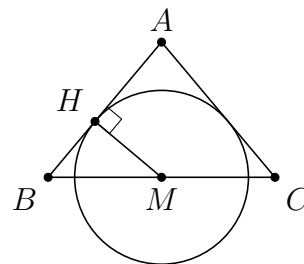
💬 **Lời giải.**

Kẻ $MK \perp AC$ tại K .

Do $\triangle MKC$ vuông tại K và $\triangle MHB$ vuông tại H nên $\begin{cases} MC = MB \\ \widehat{KCM} = \widehat{HBM} \end{cases}$.

$\Rightarrow \triangle MKC = \triangle MHB$ (ch.gn) $\Rightarrow MK = MH$ mà $MK \perp AC$ tại K .

Kéo theo AC tiếp xúc với $(M; MH)$ tại K .



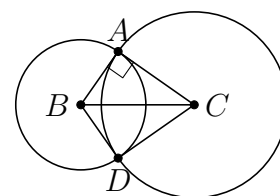
□

❖ **Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường tròn $(B; BA)$ và đường tròn $(C; CA)$, chúng cắt nhau tại điểm D (D khác A). Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (B) .

💬 **Lời giải.**

Ta có $\triangle ABC = \triangle DBC$ (c.c.c) suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$.

Kéo theo $D \in (B) \Rightarrow CD$ là tiếp tuyến của (B) .



□

❖ **Bài 4.** Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O) . Kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với OA , cắt (O) tại C . Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

💬 **Lời giải.**

Do $\triangle OBC$ cân tại O và $OA \perp BC$ nên AO là đường trung trực của $BC \Rightarrow AB = AC$.

Suy ra $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.c.c).

$\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^\circ$ ($\widehat{ABO} = 90^\circ$ do AB là tiếp tuyến của (O)).

Kéo theo AC là tiếp tuyến của (O) .

□

❖ **Bài 5.** Cho đường tròn tâm (O) , đường kính $AB = 2R$ và d là tiếp tuyến tại B của (O) . Trên (O) lấy điểm C sao cho $BC = R$, tia AC cắt d tại E .

- Tính số đo các góc của tam giác ABC ;
- Tính độ dài BE theo R ;
- Gọi M là trung điểm của BE . Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O) .

💬 **Lời giải.**

- Do $OC = OB = BC = R$ nên $\triangle OBC$ đều.

Từ đó, ta tính được $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

- Xét $\triangle ABE$ vuông tại B có $BE = BA \cdot \tan 30^\circ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

- c) Ta có $\triangle CBE$ vuông tại C có M là trung điểm BE .
 Suy ra $CM = BM = BE$.
 Kéo theo $\triangle OCM = \triangle OBM$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OCM} = 90^\circ$.
 Dẫn tới MC là tiếp tuyến của (O) .

□

✦ **Bài 6.** Cho đường tròn (O, R) và điểm A nằm ngoài (O) . Kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm) và đường kính BOD của (O) . Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt AC tại E . Chứng minh

- a) $\triangle ABO = \triangle ACO$; b) OE là tia phân giác của $\widehat{COD}$; c) ED là tiếp tuyến của (O) .

💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $\triangle CAO = \triangle BAO$ (ch.cgv).
 b) $\triangle CAO = \triangle BAO \Rightarrow \widehat{BOA} = \widehat{COA}$ nên OA là tia phân giác của $\widehat{BOC}$, mà $OE \perp OA$
 Suy ra OE là tia phân giác của $\widehat{COD}$.
 c) Từ phần b ta chứng minh được $\triangle OCE = \triangle ODE$ (c.g.c).
 $\Rightarrow \widehat{ODE} = 90^\circ$, suy ra ED là tiếp tuyến của (O) .

□

BÀI 6. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

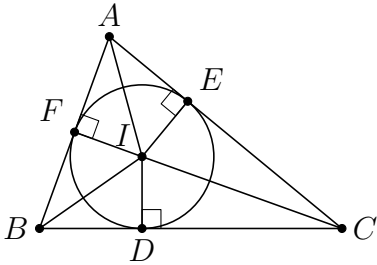
1. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

- ✔ Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- ✔ Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- ✔ Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua tiếp điểm.

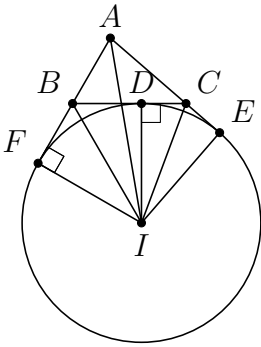
2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- ✔ Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
- ✔ Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác.
- ✔ Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua tiếp điểm.



3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- ✔ Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
- ✔ Với mỗi tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
- ✔ Tâm của đường tròn bàng tiếp góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).



B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc

Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

⇒ **Ví dụ 1.** Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O) . Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm).

- a) Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC ;
- b) Vẽ đường kính CD của (O) . Chứng minh $BD \parallel OA$.

 Lời giải.

- a) Do AB, AC lần lượt là các tiếp tuyến tại B và C của (O) nên $AB = AC$ và $OB = OC$.
Suy ra AO là trung trực của đoạn thẳng BC .
- b) Xét đường tròn (O) có đường kính CD .
Suy ra $\widehat{CBD} = 90^\circ \Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow BD \parallel BC$ (do $OA \perp BC$ theo phần a).

□

❖ **Ví dụ 2.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax . Điểm M nằm trên (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax tại C .

- a) Chứng minh OC là trung trực của đoạn thẳng AM ;
b) Chứng minh $BM \parallel OC$.

 Lời giải.

- a) Do CA, CM lần lượt là các tiếp tuyến tại A và M của (O) nên $CA = CM$ và $OA = OM$.
Suy ra OC là trung trực của đoạn thẳng AM .
- b) Xét nửa đường tròn (O) có đường kính AB .
Suy ra $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow BM \perp AM \Rightarrow BM \parallel OC$ (do $OC \perp AM$ theo a).

□

❖ **Ví dụ 3.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax và By . Điểm M thuộc (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D .

- a) Chứng minh $CD = AC + BD$;
b) Chứng minh $OC \perp AM$;
c) Gọi E là giao điểm của AM và OC , F là giao điểm của BM và OD . Tứ giác $MEOF$ là hình gì? Tại sao?

 Lời giải.

- a) Do CA, CM, DB, DM lần lượt là các tiếp tuyến tại A, M, B và M của (O) nên $CA = CM$ và $DB = DM$.
Suy ra $CD = CM + DM = AC + BD$.
- b) Ta có $CA = CM$ và $OA = OM$, suy ra OC là trung trực của đoạn thẳng AM kéo theo $OC \perp AM$.
- c) Tương tự phần b ta chứng minh được $OD \perp BM$.
Xét nửa đường tròn (O) có đường kính AB , suy ra $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
Xét tứ giác $MEOF$ có $\widehat{OEM} = \widehat{EMF} = \widehat{MFO} = 90^\circ$ nên $MEOF$ là hình chữ nhật.

□

❖ **Ví dụ 4.** Cho đường tròn (O) , các điểm B, C thuộc (O) sao cho $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Hai tiếp tuyến tại B và C thuộc (O) cắt nhau ở A .

- Tứ giác $ABOC$ là hình gì? Tại sao?
- Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của (O) . Tiếp tuyến tại M của (O) cắt AB, AC lần lượt tại D, E . Chứng minh $DE = BD + CE$;
- Biết bán kính đường tròn (O) bằng 5 cm. Tính chu vi của tam giác ADE .

💬 **Lời giải.**

- Do AB, AC lần lượt là các tiếp tuyến tại B và C của (O) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = \widehat{BOC} = 90^\circ$ kéo theo $ABOC$ là hình vuông.
- Do DB, DM, EC, EM lần lượt là các tiếp tuyến tại B, M, C và M của (O) nên $DB = DM$ và $EC = EM$, suy ra $DE = DM + EM = BD + CE$.
- Chu vi của $\triangle ADE$ là

$$AD + DE + AE = AD + BD + AE + CE = AB + AC = 2R = 10 \text{ cm.}$$

□

Dạng 2. Tính độ dài, tính số đo góc

Vận dụng các kiến thức sau

- ✔ Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.
- ✔ Khái niệm đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp.
- ✔ Hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

❖ **Ví dụ 5.** Cho đường tròn (O, R) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) sao cho $OA = 2R$. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm).

- Chứng minh tam giác ABC đều;
- Tính chu vi và diện tích tam giác ABC theo R .

💬 **Lời giải.**

Do đó, chu vi của $\triangle ABC$ là $3R\sqrt{3}$, diện tích của $\triangle ABC$ là $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

□

❖ **Ví dụ 6.** Cho đường tròn (O) . Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến ME, MF (E, F là các tiếp điểm). Biết $OE = 3 \text{ cm}$, $OM = 5 \text{ cm}$.

- Tính độ dài EF ;
- Tính chu vi và diện tích tam giác MEF .

💬 **Lời giải.**

- a) Giả sử MO cắt EF tại H . Do ME, MF lần lượt là các tiếp tuyến tại E và F của (O) nên $ME \perp OE$ và MO là trung trực của đoạn thẳng EF , suy ra $HE = HF$.
Mà $\triangle MEO$ vuông tại M nên $ME^2 = OM^2 - OE^2 = 16$
 $\Rightarrow ME = 4$ cm.

Xét $\triangle MEO$ vuông tại E đường cao EH có
 $HE \cdot OM = EM \cdot OE \Rightarrow HE = \frac{EM \cdot OE}{OM} = 2,4 \Rightarrow EF = HE + HF = 2HE = 4,8$ cm.

- b) Ta có $AB = \frac{OB}{\tan BAO} = R\sqrt{3}$.

Do đó, chu vi của $\triangle MEF$ là 12,8 cm.

Xét $\triangle MEO$ vuông tại E đường cao EH có $ME^2 = MH \cdot MO \Rightarrow ME = \frac{ME^2}{MO} = 3,2$ cm.
Suy ra diện tích của $\triangle MEF$ là 7,68 cm².

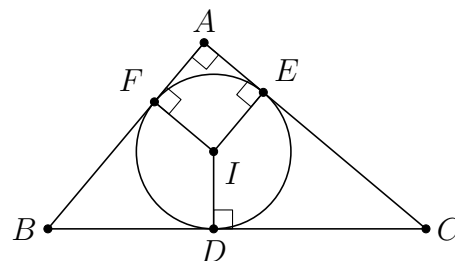
□

❖ **Ví dụ 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F .

- a) Tứ giác $AEIF$ là hình gì? Vì sao? b) Chứng minh $BC = BF + CE$;
c) Chứng minh $r = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

💬 **Lời giải.**

- a) Do AE, AF lần lượt là các tiếp tuyến tại E và F của (O) nên $AE = AF$ và $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^\circ$.
Xét tứ giác $AEIF$ có $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = \widehat{EAF} = 90^\circ$ và $AE = AF$ nên $AEIF$ là hình vuông.



- b) Do BD, BF, CD, CE lần lượt là các tiếp tuyến tại D, F, D và E của (I) nên $BD = BF$ và $CD = CE$, suy ra $BC = BD + CD = BF + CE$.
c) Theo a và b ta có

$$AB + AC = AE + AF + BF + CE = 2r + BC \Rightarrow r = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

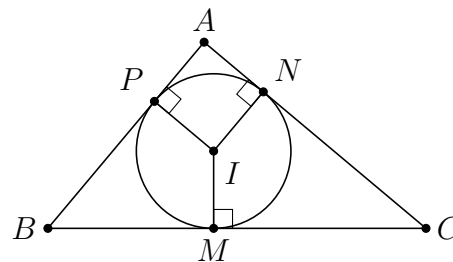
□

❖ **Ví dụ 8.** Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P .

- a) Chứng minh $BC = BP + CN$;
b) Chứng minh $AN = \frac{AB + AC - BC}{2}$;
c) Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Tính độ dài CM .

 Lời giải.

- a) Do BM, BP, CM, CN lần lượt là các tiếp tuyến tại M, P, M và N của (O) nên $BM = BP$ và $CM = CN$, suy ra $BC = BM + CM = BP + CN$.



- b) Do AP và AN lần lượt là các tiếp tuyến tại P và N của (O) nên $AP = AN$.
 Kết hợp với kết quả phần a, ta có $AB + AC = AP + AN + BP + CN = 2AN + BC$
 $\Rightarrow AN = \frac{AB + AC - BC}{2}$.
- c) Ta có $AN = \frac{AB + AC - BC}{2} = 1 \Rightarrow CM = CN = AC - AN = 3 \text{ cm}$.

□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

✧ **Bài 1.** Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm M . Qua O kẻ đường thẳng song song với AM cắt BM tại C .

- a) Chứng minh $CM = CO$;
 b) Kẻ $OD \parallel BM$ với D thuộc AM . Tứ giác $OCMD$ là hình gì? Vì sao?

 Lời giải.

- b) Ta có $OC \parallel MD$ và $OD \parallel MC$.
 Suy ra $OCMD$ là hình bình hành, mà $CM = CO$ nên ta có $OCMD$ là hình thoi.

□

✧ **Bài 2.** Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O) . Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm.

- a) Chứng minh OA là trung trực của đoạn thẳng BC ;
 b) OA cắt BC ở H . Biết $OB = 4 \text{ cm}$, $OH = 2 \text{ cm}$. Tính
 i) Chu vi và diện tích tam giác ABC .
 ii) Diện tích tứ giác $ABOC$.

 Lời giải.

- a) Do AB, AC lần lượt là các tiếp tuyến tại B và C của (O) nên $AB = AC$ và $OB = OC$.
 Suy ra AO là trung trực của đoạn thẳng BC .

b) Xét $\triangle AOB$ vuông tại B đường cao BH có

$$OB^2 = OH \cdot OA \Rightarrow OA = \frac{OB^2}{OH} = 8$$

$$\Rightarrow AH = OA - OH = 8 - 2 = 6 \text{ cm.}$$

Mà $\triangle AOB$ vuông tại B nên $AB^2 = OA^2 - OB^2 = 48 \Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$

Mặt khác $\triangle BOH$ vuông tại H nên $BH^2 = OB^2 - OH^2 = 12 \Rightarrow BH = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$

Ta có AO là trung trực của đoạn thẳng BC .

Suy ra H là trung điểm của BC , kéo theo $BC = 2BH = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$

i) Chu vi của $\triangle ABC$ là $12\sqrt{3}$, diện tích của $\triangle ABC$ là $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

ii) Ta có $S_{ABOC} = 2S_{AOB} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

□

❖ **Bài 3.** Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm D thuộc cung nhỏ BC kẻ tiếp tuyến với (O) , tiếp tuyến này cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Chứng minh chu vi tam giác AMN bằng $2AB$.

💬 **Lời giải.**

Do MB, MD, NC, ND lần lượt là các tiếp tuyến tại B, D, C và D của (O) nên $MB = MD$ và $NC = ND$, suy ra $MN = MD + ND = MB + MC$.

Chu vi của $\triangle AMN$ là

$$AM + MN + AN = AM + MB + AN + NC = AB + AC = 2AB$$

(do AB, AC là các tiếp tuyến tại B và C của (O)).

□

❖ **Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn $(A; AH)$. Từ B và C kẻ các tiếp tuyến BM, CN với (A) (M, N là các tiếp điểm khác H). Chứng minh

a) $BC = BM + CN$.

b) $\widehat{MBC} + \widehat{NCB} = 180^\circ$, từ đó suy ra $BM \parallel CN$.

c) M, A, N thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**

a) Do BM, BH, CN, CH lần lượt là các tiếp tuyến tại M, H, N và H của (O) nên $BM = BH$ và $CN = CH$.

$$\text{Suy ra } BC = BH + CH = BM + CN.$$

b) Do BM, BH lần lượt là các tiếp tuyến tại M và H của (O)

$$\text{nên } \widehat{ABM} = \widehat{ABH}, \text{ suy ra } \widehat{MBC} = 2\widehat{ABC}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \widehat{NCB} = 2\widehat{ACB}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{MBC} + \widehat{NCB} = 2(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 180^\circ \Rightarrow BM \parallel CN.$$

c) Do BM, BH lần lượt là các tiếp tuyến tại M và H của (O) nên $\widehat{BAM} = \widehat{BAH}$.

$$\text{Suy ra } \widehat{MAH} = 2\widehat{BAH}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \widehat{NAH} = 2\widehat{CAH}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{MAN} = \widehat{MAH} + \widehat{NAH} = 2(\widehat{BAH} + \widehat{CAH}) = 2\widehat{BAC} = 180^\circ.$$

Suy ra M, A, N thẳng hàng.

□

BÀI 7. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN 1)

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

- ☑ Hai đường tròn có hai điểm chung được gọi là hai đường tròn *cắt nhau*.
- ☑ Hai đường tròn chỉ có một điểm chung được gọi là hai đường tròn *tiếp xúc nhau*. Điểm chung đó gọi là *tiếp điểm*.
- ☑ Hai đường tròn không có điểm chung được gọi là hai đường tròn *không giao nhau*.

2. Tính chất đường nối tâm

- ☑ Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là đường trung trực của dây cung.
- ☑ Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

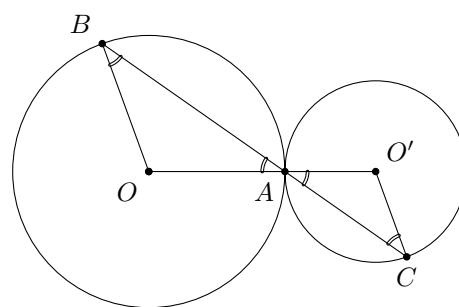
Dạng 1. Chứng minh song song, vuông góc, tính độ dài đoạn thẳng ...

Vận dụng tính chất đường nối tâm, các dấu hiệu chứng minh song song, định lý Py-ta-go, tính chất của hình thang, tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau...

🔗 **Ví dụ 1.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc nhau tại A (A nằm giữa O và O'). Một đường thẳng đi qua A cắt $(O; R)$ tại B và cắt $(O'; r)$ tại C . Chứng minh $OB \parallel O'C$.

💬 **Lời giải.**

Theo tính chất đường nối tâm thì O, A, O' thẳng hàng.
 $\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = \widehat{O'CA}$.
 $\Rightarrow OB \parallel O'C$.



□

🔗 **Ví dụ 2.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A (A nằm giữa O và O'). Một đường thẳng đi qua A cắt (O) tại B , cắt (O') tại C . Vẽ tiếp tuyến Bx tại B của (O) , vẽ tiếp tuyến Cy tại C của (O') . Chứng minh $Bx \parallel Cy$.

💬 **Lời giải.**

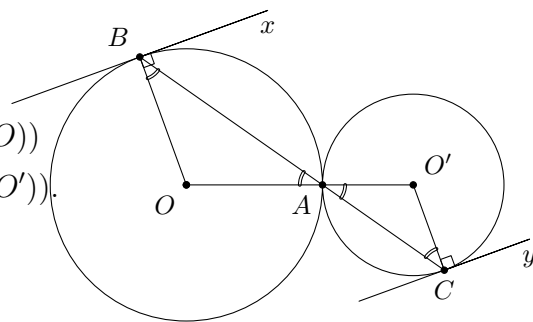
Theo tính chất đường nối tâm thì O, A, O' thẳng hàng.

$$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = \widehat{O'CA}.$$

$$\Rightarrow OB \parallel O'C.$$

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} OB \perp Bx & (Bx \text{ là tiếp tuyến của đường tròn } (O)) \\ O'C \perp Cy & (Cy \text{ là tiếp tuyến của đường tròn } (O')). \end{cases}$$

Nên ta suy ra $Bx \parallel Cy$.



□

❖ **Ví dụ 3.** Cho hai đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$ và $(O'; 8 \text{ cm})$ cắt nhau tại hai điểm A, B . Biết $AB = 12 \text{ cm}$, tính đoạn nối tâm OO' .

💬 **Lời giải.**

Trường hợp 1: O và O' nằm khác phía đối với AB .

Gọi $\{I\} = OO' \cap AB$. Theo tính chất đường nối tâm

$$\Rightarrow OO' \text{ là đường trung trực của } AB \Rightarrow IA = IB = \frac{AB}{2} = 6 \text{ cm}.$$

Khi đó ta có

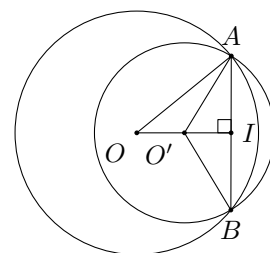
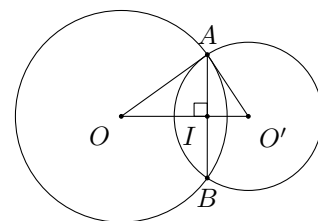
$$OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}.$$

$$O'I = \sqrt{O'A^2 - IA^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7} \text{ cm}.$$

$$\Rightarrow OO' = OI + O'I = 8 + 2\sqrt{7} \text{ cm}.$$

Trường hợp 2: O và O' nằm cùng về một phía đối với AB .

$$\Rightarrow OO' = OI - O'I = 8 - 2\sqrt{7} \text{ cm}.$$



□

❖ **Ví dụ 4.** Cho hai đường tròn $(O; 15 \text{ cm})$ và $(O'; 13 \text{ cm})$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho O và O' nằm khác phía đối với AB . Biết $AB = 24 \text{ cm}$. Tính độ dài OO' .

💬 **Lời giải.**

Gọi $\{I\} = OO' \cap AB$. Theo tính chất đường nối tâm

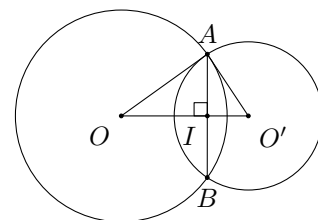
$$\Rightarrow OO' \text{ là đường trung trực của } AB \Rightarrow IA = IB = \frac{AB}{2} = 12 \text{ cm}.$$

Khi đó ta có

$$OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ cm}.$$

$$O'I = \sqrt{O'A^2 - IA^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ cm}.$$

$$\Rightarrow OO' = OI + O'I = 9 + 5 = 14 \text{ cm}.$$



□

❖ **Ví dụ 5.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Gọi I là trung điểm của OO' . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AI , cắt đường tròn (O) và (O') tại C và D ($C, D \neq A$). Chứng minh $AC = AD$.

💬 **Lời giải.**

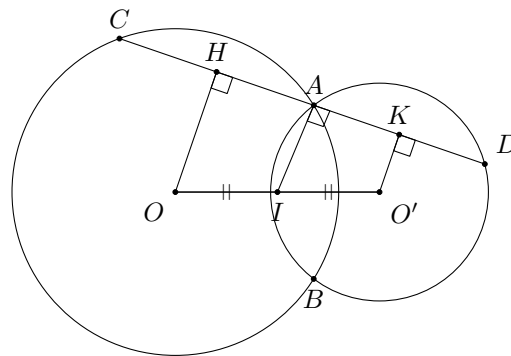
Kẻ $OH \perp AC$, $O'K \perp AD$.

Khi đó tứ giác $OHKO'$ là hình thang vuông có I là trung điểm của OO' và $IA \parallel OH \parallel O'K$.

$\Rightarrow AH = AK$.

Mà H, K lần lượt là trung điểm của AC và AD (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

Do đó $AC = AD$.



□

❖ **Ví dụ 6.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Kẻ các đường kính AOC , $A'O'D$. Chứng minh:

a) $AB \perp BC$.

b) C, B, D thẳng hàng.

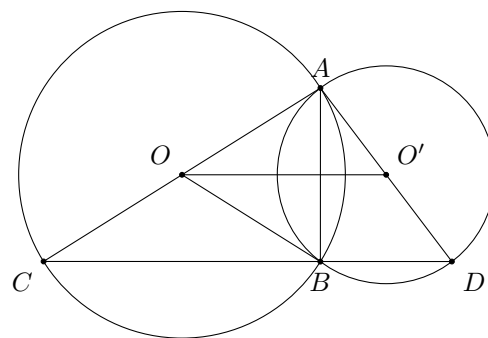
c) $OO' \parallel CD$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC
 $\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BC$.

b) Ta có $\triangle ABD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD
 $\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BD$.
 Do đó $\widehat{CBD} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
 $\Rightarrow B, C, D$ thẳng hàng.

c) Ta có $\begin{cases} OO' \perp AB \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel CD$.



□

C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại điểm A sao cho O' nằm giữa O và A . Gọi M là một điểm bất kì nằm trên (O) ($M \neq A$), AM cắt (O') tại B . Chứng minh rằng $O'B \parallel OM$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\triangle OMA$ cân tại O . Do đó

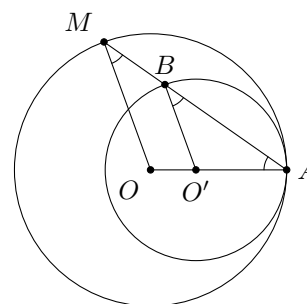
$$\widehat{OMA} = \widehat{OAM} \quad (1)$$

Lại có $\triangle O'BA$ cân tại O' . Do đó

$$\widehat{O'BA} = \widehat{O'AB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OMA} = \widehat{O'AB}$.

Mà $\widehat{OMA}$ và $\widehat{O'AB}$ đồng vị nên $OM \parallel O'B$.



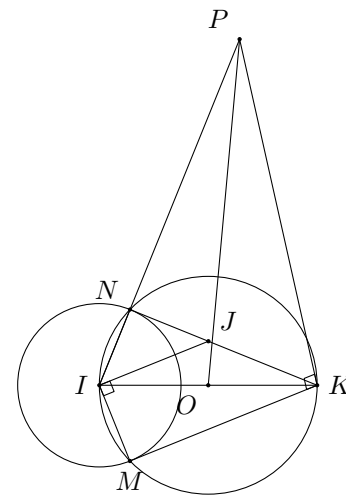
□

❖ **Bài 2.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; r)$ cắt nhau tại M và N , trong đó I thuộc đường tròn (O) và $R > r$. Kẻ đường kính IOK của đường tròn (O) .

- a) Chứng minh KM , KN là các tiếp tuyến của (I) .
- b) Đường vuông góc với MI tại I cắt KN tại J . Chứng minh $JI = JK$.
- c) Đường vuông góc với KM tại K cắt IN tại P . Chứng minh ba điểm O , J , P thẳng hàng.

Lời giải.

- a) $\triangle IMK$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính IK .
 $\Rightarrow \widehat{IMK} = 90^\circ \Rightarrow KM \perp IM$.
 $\Rightarrow KM$ là tiếp tuyến của (I) .
 Tương tự: KN là tiếp tuyến của (I) .
- b) Ta có $\widehat{KMI} = 90^\circ \Rightarrow KM \perp IM$.
 Mà $JJ \perp IM$. Do đó $IJ \parallel KM \Rightarrow \widehat{JIK} = \widehat{IKM}$.
 Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có
 $\widehat{IKM} = \widehat{JKI} \Rightarrow \widehat{JIK} = \widehat{JKI}$
 $\Rightarrow \triangle IJK$ cân tại $J \Rightarrow JI = JK$.
- c) Ta có $\widehat{PKO} + \widehat{IKM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PKO} + \widehat{JKI} = 90^\circ$ (1).
 Ta lại có $\widehat{PIK} + \widehat{NKI} = 90^\circ$ (2).
 Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PIK} = \widehat{PKI}$.
 $\Rightarrow \triangle PIK$ cân tại $P \Rightarrow PI = PK$.
 Do đó suy ra ba điểm O , P , J cùng thuộc đường trung trực của IK nên O , J , P thẳng hàng.

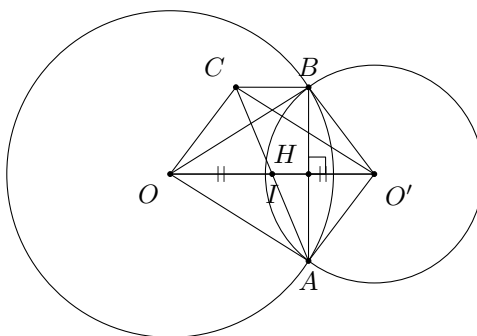


□

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Gọi I là trung điểm của OO' , gọi C là điểm đối xứng với A qua I . Chứng minh:

- a) $BC \perp AB$. b) $AOCO'$ là hình bình hành. c) $OO'BC$ là hình thang cân.

Lời giải.



- a) Gọi $\{H\} = OO' \cap AB$. Theo tính chất đường nối tâm
 $\Rightarrow OO'$ là đường trung trực của AB . Do đó $OO' \perp AB$ và H là trung điểm của AB .
 $\Rightarrow IH$ là đường trung bình của $\triangle ABC$.
 $\Rightarrow IH \parallel BC$ mà $IH \perp AB \Rightarrow BC \perp AB$.
- b) Tứ giác $AOCO'$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $AOCO'$ là hình bình hành.

- c) Ta có $OA = O'C$ do $AOCO'$ là hình bình hành.
Mà $OA = OB \Rightarrow OB = O'C$.
Tứ giác $OO'BC$ có $OO' \parallel BC$ và $OB = O'C$ nên $OO'BC$ là hình thang cân.



BÀI 8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN 2)

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ ($R > r$)	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và r	Số tiếp tuyến chung
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$	2
Hai đường tròn tiếp xúc nhau ☑ Tiếp xúc ngoài. ☑ Tiếp xúc trong.	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r$	1
Hai đường tròn không giao nhau ☑ Ngoài nhau ☑ Đụng nhau ☑ Đồng tâm	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$ $OO' = 0$	4 0 0

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Áp dụng phần lý thuyết về vị trí tương đối của hai đường tròn.

🔗 **Ví dụ 1.** Điền vào ô trống trong bảng, biết rằng hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ có $OO' = d, R > r$.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d, R, r	Số tiếp tuyến chung
Đụng nhau			
		$d = R + r$	

💬 **Lời giải.**

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d, R, r	Số tiếp tuyến chung
Đụng nhau	0	$d < R - r$	0
Tiếp xúc ngoài	1	$d = R + r$	3
Tiếp xúc trong	1	$d = R - r$	1
Ngoài nhau	0	$d > R + r$	4
Cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$	2

□

❖ **Ví dụ 2.** Điền các từ thích hợp vào chỗ trống (...):

- Tâm của đường tròn có bán kính bằng 2 cm tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ nằm trên ...
- Tâm của đường tròn có bán kính bằng 5 cm tiếp xúc trong với đường tròn $(O; 8 \text{ cm})$ nằm trên ...

💬 **Lời giải.**

- Tâm của đường tròn có bán kính bằng 2 cm tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ nằm trên **đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$** .
- Tâm của đường tròn có bán kính bằng 5 cm tiếp xúc trong với đường tròn $(O; 8 \text{ cm})$ nằm trên **đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$** .

□

📁 Dạng 2. Các bài toán liên qua đến hai đường tròn tiếp xúc nhau.

Dựa trên tính chất đường nối tâm, tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, hệ thức lượng trong tam giác vuông ...

❖ **Ví dụ 3.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn với $M \in (O)$ và $N \in (O')$.

- Tính số đo $\widehat{MAN}$.
- Tính độ dài MN biết $OA = 9 \text{ cm}$; $O'A = 4 \text{ cm}$.

💬 **Lời giải.**

- Từ A kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn cắt MN tại I . Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau $IM = IA = IN$.

Từ đó suy ra $\triangle MAN$ vuông tại A
 $\Rightarrow \widehat{MAN} = 90^\circ$.

- Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có

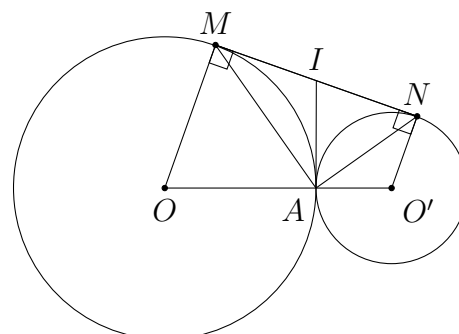
$$\begin{cases} IO \text{ là phân giác } \widehat{AIM} \\ IO' \text{ là phân giác } \widehat{AIN}. \end{cases}$$

Mà $\widehat{AIM}$ kề bù $\widehat{AIN}$

$$\Rightarrow IO \perp IO'$$

$$\Rightarrow IA = \sqrt{OA \cdot O'A} = 6 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow MN = 2IA = 12 \text{ cm}.$$



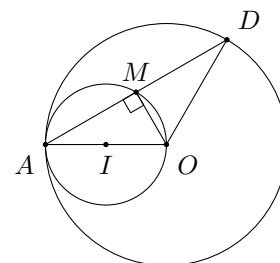
□

❖ **Ví dụ 4.** Cho đường tròn $(O; OA)$ và đường tròn tâm I có đường kính OA .

- Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.
- Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở M . Chứng minh $AM = MD$.

💬 **Lời giải.**

- $OI = OA - IA$ nên hai đường tròn tiếp xúc trong.
- Ta có $\triangle AMO$ có AO là đường kính của đường tròn (I)
nên $\widehat{AMO} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AMO} = 90^\circ \Rightarrow OM \perp AD$.
Mà $\triangle AOD$ cân tại O nên OM là đường trung tuyến.



□

❖ **Ví dụ 5.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB , $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE .

- Tính số đo của $\widehat{DAE}$.
- Tứ giác $ADME$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

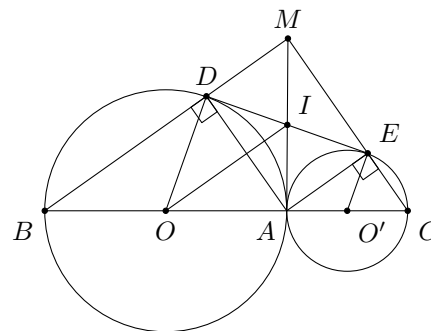
💬 **Lời giải.**

- Từ A kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn cắt DE tại I . Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau $IE = IA = ID$.
Từ đó suy ra $\triangle DAE$ vuông tại A
 $\Rightarrow \widehat{DAE} = 90^\circ$.

- Ta có $\begin{cases} \widehat{BDA} = 90^\circ \text{ (} AB \text{ là đường kính)} \\ \widehat{CEA} = 90^\circ \text{ (} AC \text{ là đường kính)} \end{cases}$

Do đó tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông.

- Ta có tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật nên ba điểm M, I, A thẳng hàng, suy ra AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.



□

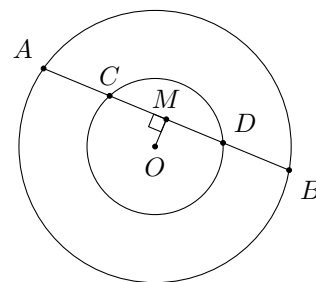
C-BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 1.** Cho hai đường tròn đồng tâm O . Dây AB của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C và D . Chứng minh $AC = BD$.

💬 **Lời giải.**

Kẻ $OM \perp AB$. Theo quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung ta có

$$\begin{cases} MA = MB \\ MC = MD \end{cases} \Rightarrow AC = BD.$$



□

❖ **Bài 2.** Cho đường tròn $(O; 9 \text{ cm})$ và $(O'; 3 \text{ cm})$ tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ hai bán kính OB và $O'C$ song song với nhau và thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ OO' .

- Tính số đo của $\widehat{BAC}$.
- Gọi I là giao điểm của BC và OO' . Tính độ dài OI .

💬 **Lời giải.**

- Ta có $OB \parallel O'C \Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{AO'C} = 180^\circ$.
Ta lại có

$$\begin{aligned} \widehat{BAO} + \widehat{CAO'} &= \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{AO'C}}{2} \\ &= \frac{360^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{AO'C})}{2} \\ &= 90^\circ. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

- Áp dụng định lí Ta-lét ta có

$$\frac{IO'}{IO} = \frac{O'C}{OB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IO'}{IO' + 12} = \frac{1}{3} \Rightarrow IO' = 6 \text{ cm}.$$

$$\Rightarrow IO = IO' + O'O = 6 + 12 = 18 \text{ cm}.$$

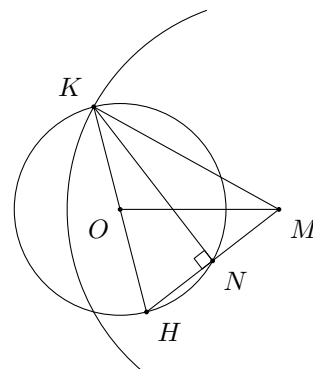
□

❖ **Bài 3.** Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(R < OM < 3R)$. Vẽ đường tròn $(M; 2R)$.

- Hai đường tròn (O) và (M) có vị trí tương đối như thế nào với nhau?
- Gọi K là một giao điểm của hai đường tròn trên. Vẽ đường kính KOH của đường tròn (O) . Chứng minh $NH = NM$.

💬 **Lời giải.**

- a) Ta có $R < OM < 3R$ nên (O) và (M) cắt nhau.
 b) Vì $MK = HK = 2R \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại K .
 Mà $\widehat{KNH} = 90^\circ$ (KH là đường kính).
 $\Rightarrow KN \perp MN$
 $\Rightarrow KN$ là đường trung tuyến của $\triangle MKH \Rightarrow NH = NM$.

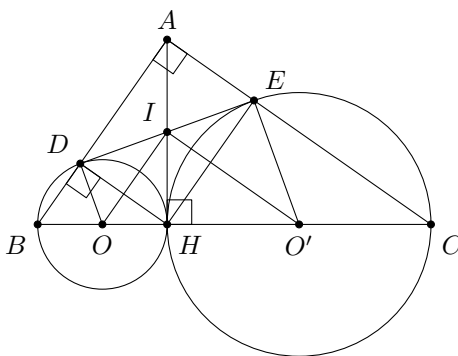


□

✦ **Bài 4.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi D là hình chiếu của H trên AB , E là hình chiếu của H trên AC . Gọi (O) là tâm đường tròn kính BH , (O') là tâm đường tròn đường kính HC . Chứng minh:

- a) Điểm D thuộc đường tròn (O) , điểm E thuộc đường tròn (O') ;
 b) Hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài;
 c) AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó;
 d) $AH = DE$;
 e) DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') ;
 f) Diện tích của tứ giác $DEO'O$ bằng nửa diện tích của tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**



- a) $\widehat{BDH} = 90^\circ$ nên D thuộc đường tròn đường kính BH .
 Tương tự, E thuộc đường tròn đường kính HC .
 b) $OO' = OH + O'H$ nên (O) và (O') tiếp xúc ngoài.
 c) $AH \perp OO'$ nên AH là tiếp tuyến chung của (O) và (O') .
 d) $ADHE$ là hình chữ nhật nên $AH = DE$.
 e) Ta có $OH = OD$ do đó $\triangle ODH$ cân tại O .
 $\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OHD}$.
 Ta lại có $ADHE$ là hình chữ nhật nên $\widehat{IDH} = \widehat{IHD}$.
 Mà $\widehat{IHD} + \widehat{DHO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IDH} + \widehat{ODH} = 90^\circ \Rightarrow OD \perp DE$ tại D .
 Từ đó ta có DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
 Chứng minh tương tự ta cũng có DE là tiếp tuyến của đường tròn (O') .
 Vậy DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') .

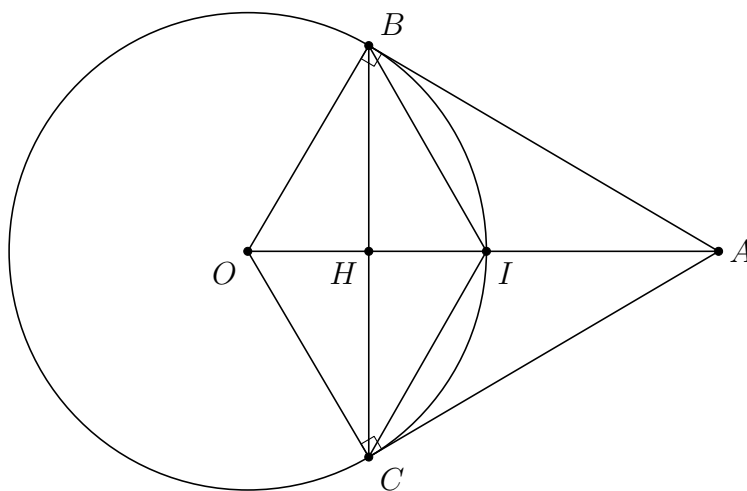
f) $S_{DEO'O} = \frac{1}{2}(OD + O'E) \cdot DE = \frac{1}{2}\left(\frac{BH}{2} + \frac{CH}{2}\right) \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$

□

 Lưu Thi Thu Hà

- a) Chứng minh A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.
 b) Chứng minh OA là đường trung trực của đoạn thẳng BC .
 c) Biết $OA = 10$ cm, $OB = 6$ cm. Tính độ dài đoạn BC .
 d) Đường tròn (O) cắt đoạn OA tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

 **Lời giải.**



- a) $\triangle BOA$ vuông tại $B \Rightarrow \triangle BOA$ nội tiếp trong đường tròn đường kính OA .
 $\triangle COA$ vuông tại $C \Rightarrow \triangle COA$ nội tiếp trong đường tròn đường kính OA .
 Vậy A, B, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính OA .
- b) Ta có $\triangle BOA = \triangle COA$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)
 $\Rightarrow AB = AC$ và $OB = OC$ (hai cạnh tương ứng)
 $\Rightarrow A$ nằm trên đường trung trực của đoạn BC và O nằm trên đường trung trực của đoạn BC
 $\Rightarrow OA$ là đường trung trực của đoạn BC .
- c) Gọi H là giao điểm của OA và $BC \Rightarrow BH \perp OA$.
 $\triangle BOA$ vuông tại B có đường cao BH
 $\Rightarrow OB^2 = OA \cdot OH \Rightarrow OH = \frac{OB^2}{OA} = 3,6$ cm.
 $\triangle OHB$ vuông tại $H \Rightarrow HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = 4,8$ cm.
 $OH \perp BC \Rightarrow H$ là trung điểm của $BC \Rightarrow BC = 2HB = 9,6$ cm.
- d) Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$ (do $\triangle BOA = \triangle COA$)
 $\Rightarrow AI$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (1).
 Mặt khác $\begin{cases} \widehat{BAI} + \widehat{IBO} = 90^\circ \\ \widehat{IBH} + \widehat{BIH} = 90^\circ \\ \widehat{IBO} = \widehat{BIH} \text{ (do } \triangle BOI \text{ cân tại } O) \end{cases}$
 $\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBH} \Rightarrow BI$ là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ (2).
 Từ (1), (2) $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

□

✧ **Bài 3.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O), C \in (O')$) với hai đường tròn. Tiếp tuyến chung tại A của (O) và (O') cắt BC tại M .

- a) Chứng minh $MA = MB = MC$ và $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
- b) Tính số đo của $\widehat{OMO'}$.
- c) Chứng minh OO' tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .
- d) Biết $R = 9$ cm, $R' = 4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng BC .

 Lời giải.

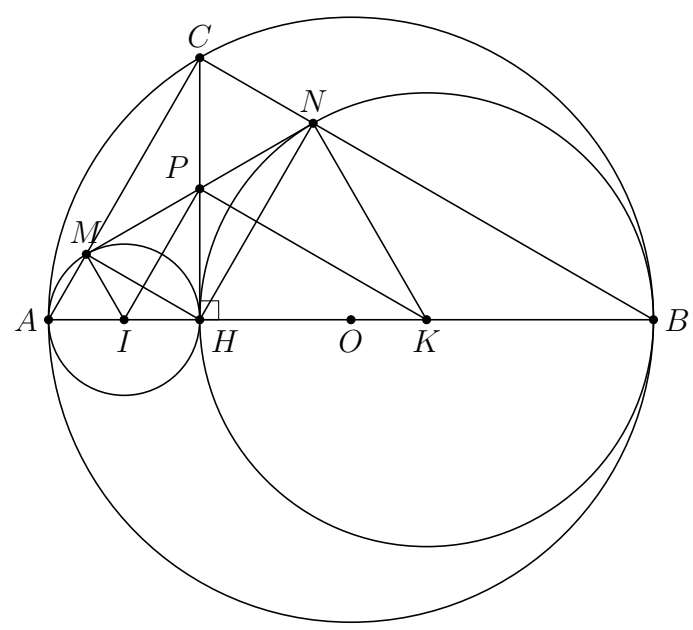
- a) Ta có tiếp tuyến MA và MB cắt nhau tại M ; tiếp tuyến MA và MC cắt nhau tại M
 $\Rightarrow MA = MB$ và $MA = MC \Rightarrow MA = MB = MC$.
 Khi đó ta có $\triangle MAB$ cân tại M và $\triangle MAC$ cân tại M
 $\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAB}$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$.
 $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} + \widehat{MBA} + \widehat{MCA} = 180^\circ \Rightarrow 2(\widehat{MAB} + \widehat{MAC}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$.
- b) Ta có MO là tia phân giác của $\widehat{BMA}$ và MO' là tia phân giác của $\widehat{CMA}$
 $\Rightarrow \widehat{OMO'} = \widehat{OMA} + \widehat{O'MA} = \frac{\widehat{BMA}}{2} + \frac{\widehat{CMA}}{2} = \frac{\widehat{BMA} + \widehat{CMA}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.
- c) Ta có $MA = MB = MC$
 $\Rightarrow M$ là tâm đường tròn đường kính BC và A cũng thuộc đường tròn (M).
 Mà $MA \perp OO'$ nên OO' tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .
- d) $\triangle MOO'$ vuông tại M có đường cao MA
 $\Rightarrow MA^2 = AO \cdot AO' = 36 \Rightarrow MA = 6$ cm
 $\Rightarrow MB = MC = 6$ cm $\Rightarrow BC = MA + MB = 12$ cm.

□

❖ Bài 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Điểm C nằm trên đường tròn (C khác A, B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB . Vẽ đường tròn tâm I đường kính HA và đường tròn tâm K đường kính HB . CA cắt (I) tại M (khác A), CB cắt (K) tại N (khác B).

- a) Tứ giác $CMHN$ là hình gì? Vì sao?
- b) Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của (I) và (K).
- c) Chứng minh AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .
- d) Biết $HA = \frac{R}{2}$. Tính diện tích tứ giác $IMNK$ theo R .

 Lời giải.



a) $\triangle ABC$ có đường trung tuyến $CO = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .

$\triangle AMH$ có đường trung tuyến $MI = \frac{1}{2}AH \Rightarrow \triangle AMH$ vuông tại M .

$\triangle NHB$ có đường trung tuyến $NK = \frac{1}{2}HB \Rightarrow \triangle NHB$ vuông tại N .

Vậy $CMHN$ là hình chữ nhật.

b) Gọi P là giao điểm của CH và $MN \Rightarrow PM = PH = PN$ (tính chất hình chữ nhật).
Từ đó suy ra $\triangle PMI = \triangle PHI$ (cạnh - cạnh - cạnh) và $\triangle PHK = \triangle PNK$ (cạnh - cạnh - cạnh)
 $\Rightarrow \widehat{PMH} = \widehat{PHI} = 90^\circ$ và $\widehat{PNK} = \widehat{PHK} = 90^\circ$.
Do đó MN là đường tiếp tuyến của đường tròn (I) và (K) .
Hay MN là tiếp tuyến chung của (I) và (K) .

c) $CMHN$ là hình chữ nhật nên $\widehat{MHN} = 90^\circ$.
Khi đó tâm đường tròn đường kính MN là P .
Ta có đường tròn này ngoại tiếp $\triangle MHN$ và $PH \perp AB$.
Do đó AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .

d) Ta có $HA = \frac{R}{2} \Rightarrow HB = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} \Rightarrow HI = \frac{R}{4}$ và $HK = \frac{3R}{4}$.

Ta có PI là tia phân giác của $\widehat{MPH}$ và PK là tia phân giác của $\widehat{NPH}$
 $\Rightarrow \widehat{MPI} = \widehat{HPI}$ và $\widehat{HPK} = \widehat{NPK}$. Khi đó ta có

$$\widehat{IPK} = \widehat{IPH} + \widehat{HPK} = \frac{\widehat{MPH} + \widehat{HPN}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

$\triangle PIK$ vuông tại P có PH là đường cao $\Rightarrow PH = \sqrt{IH \cdot HK} = \frac{R\sqrt{3}}{4} = PM = PN$

$$\Rightarrow MN = 2PM = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

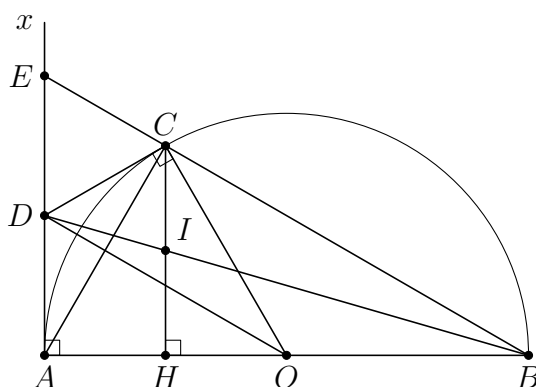
$$S_{IMNK} = \frac{1}{2}MN(MI + NK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \left(\frac{R}{4} + \frac{3R}{4} \right) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

□

❖ **Bài 5.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến Ax . Điểm C nằm trên nửa đường tròn sao cho $AC = R$.

- Tính số đo các góc của tam giác ABC .
- Tiếp tuyến tại C của (O) cắt Ax tại D . Chứng minh OD song song với BC .
- Tia BC cắt Ax tại E . Chứng minh $DE = DA$.
- Kẻ $CH \perp AB$ với H thuộc AB , BD cắt CH tại I . Chứng minh I là trung điểm của CH .

💬 **Lời giải.**

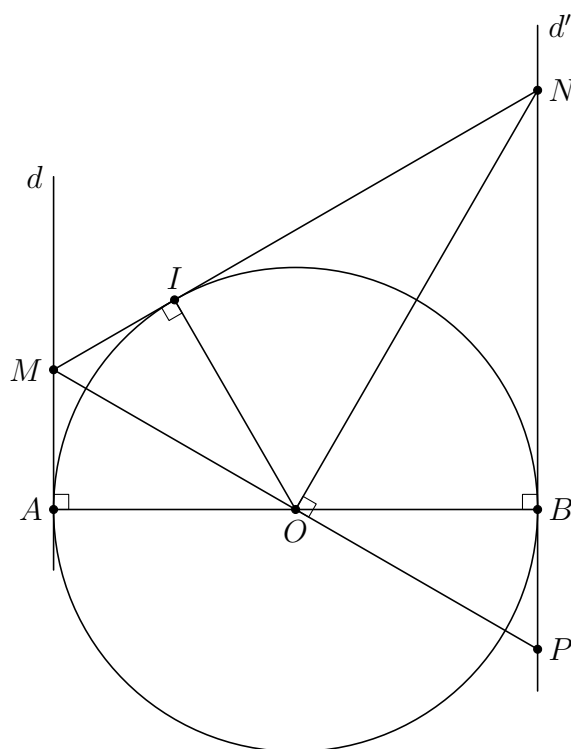


- $\triangle ABC$ có trung tuyến $CO = \frac{AB}{2} \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.
Lại có $AC = R$ do đó $\triangle OAC$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{CAO} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 30^\circ$.
- Do D là giao điểm của hai đường tiếp tuyến Ax và CD nên $OD \perp AC$.
Mà $BC \perp AC$ nên $OD \parallel BC$.
- $OD \parallel BE \Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{CDO}$ (so le trong).
 $OD \parallel BE \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{ODA}$ (đồng vị).
Mà $\widehat{CDO} = \widehat{ODA}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).
Nên $\widehat{ECD} = \widehat{CED} \Rightarrow \triangle ECD$ cân tại $D \Rightarrow DE = DC$.
Mà $DA = DC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) nên $DE = DA$.
- Áp dụng định lý Thales vào $\triangle BAD$ có $IH \parallel AD \Rightarrow \frac{IH}{AD} = \frac{BI}{BD}$.
Áp dụng định lý Thales vào $\triangle BED$ có $IC \parallel ED \Rightarrow \frac{IC}{ED} = \frac{BI}{BD}$.
Do đó $\frac{IH}{AD} = \frac{IC}{ED}$.
Mà $DA = DE$ (chứng minh ở câu c).
Nên $IH = IC$ hay I là trung điểm của CH .

□

❖ **Bài 6.** Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến d và d' với (O) . Đường thẳng Δ thay đổi qua O cắt d tại M và cắt d' tại P . Từ O vẽ một tia vuông góc với MP cắt d' tại N .

-  **Lời giải.**



-  Lưu Thị Thu Hà

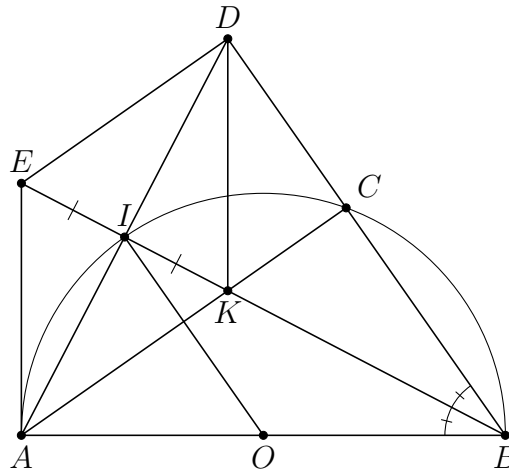
d) Ta có $AM \cdot BN = MI \cdot IN = OI^2 = R^2$ (không đổi).

□

✧ **Bài 7.** Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB và điểm C là một điểm nằm trên (O) (C khác A, B). Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại K và cắt (O) tại I (I khác B). Gọi D là giao điểm của AI và BC .

- Chứng minh tam giác ABD cân.
- Chứng minh DK vuông góc với AB .
- Gọi E là điểm đối xứng của K qua I . Tứ giác $AEDK$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh EA là tiếp tuyến của (O) .

🗨 **Lời giải.**



- $\triangle ABI$ có trung tuyến $OI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle AIB$ vuông tại I .
 Khi đó ta có BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác trong tam giác ABD
 $\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B .
- Chứng minh tương tự ta suy ra $AC \perp BD$.
 Mà BI và AC cắt nhau tại K nên K là trực tâm của $\triangle ABD \Rightarrow DK \perp AB$.
- $\triangle ABD$ cân tại B có BI là đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến nên $IA = ID$.
 Tứ giác $AEDK$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và hai đường chéo này vuông góc với nhau nên tứ giác $AEDK$ là hình thoi.
- $AEDK$ là hình thoi $\Rightarrow EA \parallel DK$.
 Mà $DK \perp AB$ nên $EA \perp AB \Rightarrow EA$ là tiếp tuyến của (O) .

□

✧ **Bài 8.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O), C \in (O')$) với hai đường tròn. Tiếp tuyến chung ngoài tại A của (O) và (O') cắt BC tại D .

- Chứng minh $\triangle ODO'$ là tam giác vuông.
- Gọi E là giao điểm của OD và AB , gọi F là giao điểm của $O'D$ và AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao?

- c) Chứng minh BC tiếp xúc với đường tròn đường kính OO' .
 d) Chứng minh $BC = 2\sqrt{R \cdot R'}$.

Lời giải.

- a) Ta có OD là tia phân giác của $\widehat{BDA}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $O'D$ là tia phân giác của $\widehat{ADC}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

$$\widehat{ODO'} = \widehat{ODA} + \widehat{ADO'} = \frac{1}{2}\widehat{BDA} + \frac{1}{2}\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{BDA} = 90^\circ.$$
 Do đó $\triangle ODO'$ vuông tại D .
 b) Ta có $OD \perp AB$ tại E và $O'D \perp AC$ tại F (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).
 Do đó $AEDF$ là hình chữ nhật.
 c) Gọi K là trung điểm của OO' , ta có KD là đường trung bình của hình thang $OO'CB$
 $\Rightarrow KD \perp OB$. Mà $OB \perp BC$ nên $KD \perp BC$ tại D và $KD = \frac{1}{2}(R + R')$ nên $D \in (K)$.
 Vậy BC tiếp xúc với đường tròn đường kính OO' .
 d) $\triangle DOO'$ vuông tại D có đường cao $AD \Rightarrow AD = \sqrt{AO \cdot AO'} = \sqrt{R \cdot R'}$.
 Vậy $BC = 2AD = 2\sqrt{R \cdot R'}$.

□

BÀI 10. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 2

A – ĐỀ SỐ 1

1. Trắc nghiệm (3 điểm)

❖ **Câu 1.** Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của

- (A) Ba đường trung trực của tam giác. (B) Ba đường cao của tam giác.
 (C) Ba đường phân giác trong của tam giác. (D) Ba đường trung tuyến của tam giác.

Lời giải.

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác.
 Chọn đáp án (A)

□

❖ **Câu 2.** Cho hai đường tròn $(O; 13 \text{ cm})$, $(O'; 5 \text{ cm})$ và $OO' = 8 \text{ cm}$. Vị trí tương đối của hai đường tròn đó là

- (A) Tiếp xúc trong. (B) Tiếp xúc ngoài. (C) Đồng tâm. (D) Ngoài nhau.

Lời giải.

Ta có $OO' = 13 - 5$ nên (O) đựng (O') hay hai đường tròn tiếp xúc trong.
 Chọn đáp án (A)

□

❖ **Câu 3.** Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ có dây AB không đi qua tâm O . Gọi H là trung điểm của AB . Biết $OH = 4 \text{ cm}$, khi đó độ dài của dây AB bằng

- (A) 4 cm. (B) 5 cm. (C) 6 cm. (D) 8 cm.

Lời giải.

Ta có $AB = 2AH = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$ cm.

Chọn đáp án **C** □

❖ **Câu 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 10$ cm. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A 3 cm.

B 5 cm.

C 7 cm.

D 9 cm.

💬 **Lời giải.**

$\triangle ABC$ vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là trung điểm của BC .

Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ bằng $\frac{BC}{2} = 5$ cm.

Chọn đáp án **B** □

❖ **Câu 5.** Đường tròn là hình

A Không có trục đối xứng.

B Có một trục đối xứng.

C Có hai trục đối xứng.

D Có vô số trục đối xứng.

💬 **Lời giải.**

Đường tròn là hình có vô số trục đối xứng là các đường thẳng đi qua tâm của đường tròn đó.

Chọn đáp án **D** □

❖ **Câu 6.** Cho đường tròn $(O; 3$ cm) và điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 6$ cm. Kẻ tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Khi đó số đo của $\widehat{AMB}$ bằng

A 50° .

B 60° .

C 70° .

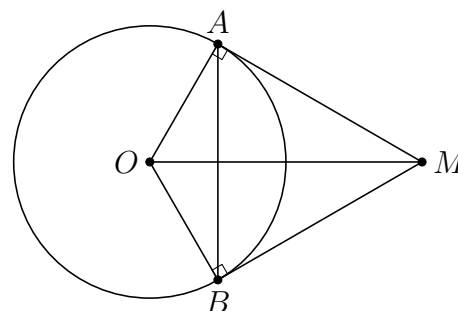
D 90° .

💬 **Lời giải.**

$\triangle OAM$ vuông tại $A \Rightarrow \sin \widehat{AMO} = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AMO} = 30^\circ$.

Mà $\widehat{AMO} = \widehat{OMB}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

Nên $\widehat{AMB} = 2\widehat{AMO} = 60^\circ$.



Chọn đáp án **B** □

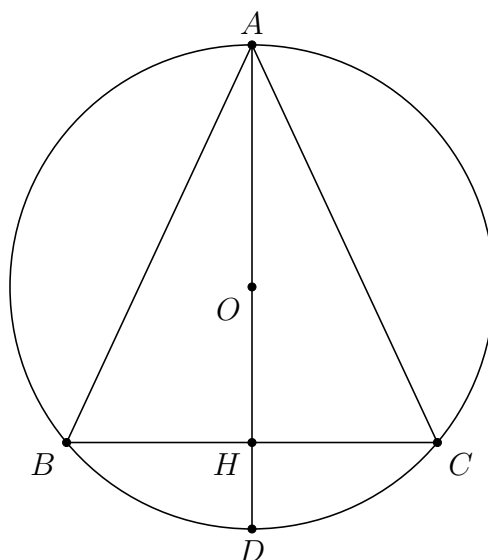
2. Phần tự luận (7 điểm)

❖ **Bài 1.** (3 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ đường cao AH , gọi D là giao điểm của AH với (O) (D khác A).

a) Chứng minh AD là đường kính của (O) .

b) Biết $BC = 6$ cm, $AH = 9$ cm. Tính bán kính của (O) .

💬 **Lời giải.**



- a) $\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến. Do đó H là trung điểm của BC .

Từ đó suy ra $OH \perp BC$ tại H .

Mà $AD \perp BC$ tại H .

Nên 3 điểm A, O, D thẳng hàng. Hay AD là đường kính của (O) .

- b) Đặt $OA = OB = OC = R$.

Ta có $BH = \frac{1}{2}BC = 3$ cm và $OH = AH - OA = 9 - R$.

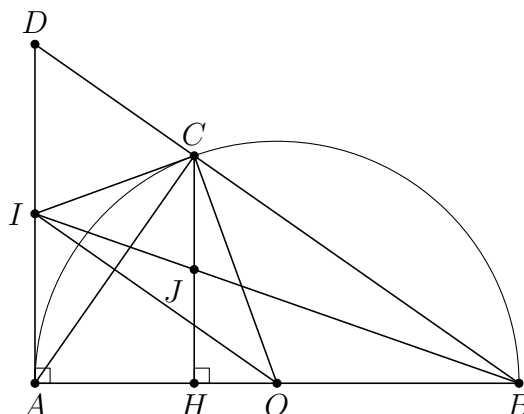
$\triangle OHB$ vuông tại $H \Rightarrow OB^2 = OH^2 + BH^2 \Leftrightarrow R^2 = R^2 - 18R + 81 + 9 \Leftrightarrow R = 5$ cm.

□

❖ **Bài 2.** (4 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C thuộc nửa đường tròn (O) (C khác A, B). Tia BC cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại D .

- a) Tính số đo của $\widehat{ACB}$.
- b) Chứng minh $BC \cdot BD = 4R^2$.
- c) Gọi I là trung điểm của AD . Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O) .
- d) Gọi H là hình chiếu của C trên AB và J là trung điểm của CH . Chứng minh ba điểm B, J, I thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**



- a) $\triangle ACB$ có đường trung tuyến $CO = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ACB$ vuông tại $C \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.
- b) $\triangle ABD$ vuông tại A có đường cao $AC \Rightarrow BC \cdot BD = AB^2 = 4R^2$.
- c) $\triangle ACD$ vuông tại C có CI là đường trung tuyến $\Rightarrow CI = IA$.
 Xét $\triangle IAO$ và $\triangle ICO$ có
 $IA = IC$ (chứng minh trên).
 IO là cạnh chung.
 $OA = OC = R$.
 Do đó $\triangle IAO = \triangle ICO$ (cạnh - cạnh - cạnh).
 $\Rightarrow \widehat{IAO} = \widehat{ICO} = 90^\circ$ (2 góc tương ứng).
 Vậy IC là tiếp tuyến của (O) .
- d) Ta có $CH \perp AB$ và $AD \perp AB \Rightarrow CH \parallel AD$.
 Giả sử BI cắt CH tại J' .
 Áp dụng định lí Thales vào $\triangle BAI$ có $HJ' \parallel IA \Rightarrow \frac{HJ'}{IA} = \frac{BJ'}{BI}$ (1).
 Áp dụng định lí Thales vào $\triangle BID$ có $J'C \parallel ID \Rightarrow \frac{J'C}{ID} = \frac{BJ'}{BI}$ (2).
 Mà $IA = ID$ (3).
 Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow J'H = J'C$ hay J' là trung điểm của CH .
 Mà J là trung điểm của CH nên $J \equiv J'$.
 Vậy 3 điểm B, J, I thẳng hàng.

□

B – ĐỀ SỐ 2

1. Phần trắc nghiệm (3 điểm)

❖ **Câu 1.** Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của

- (A) Ba đường trung trực của tam giác. (B) Ba đường cao của tam giác.
 (C) Ba đường phân giác trong của tam giác. (D) Ba đường trung tuyến của tam giác.

💬 **Lời giải.**

Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác.
 Chọn đáp án (C)

□

❖ **Câu 2.** Cho hai đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$, $(O'; 5 \text{ cm})$ và $OO' = 6 \text{ cm}$. Vị trí tương đối của hai đường tròn đó là

- (A) Cắt nhau. (B) Đụng nhau. (C) Tiếp xúc nhau. (D) Ngoài nhau.

💬 **Lời giải.**

Ta có $5 - 4 < OO' < 5 + 4 \Rightarrow (O)$ và (O') cắt nhau.

Chọn đáp án (A)

□

❖ **Câu 3.** Cho đường tròn $(O; 11 \text{ cm})$. Khi đó độ dài dây dài nhất của đường tròn là

- (A) 20 cm. (B) 22 cm. (C) 24 cm. (D) 25 cm.

💬 **Lời giải.**

Dây dài nhất của đường tròn là đường kính.

Vậy độ dài dây dài nhất của đường tròn là 22 cm.

Chọn đáp án (B)

□

❖ **Câu 4.** Cho đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$, dây CD có độ dài 12 cm. Khoảng cách từ tâm đường tròn đến dây CD là

- (A) 6 cm. (B) 8 cm. (C) 10 cm. (D) 12 cm.

💬 **Lời giải.**

Khoảng cách từ O đến dây CD bằng $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}$.

Chọn đáp án (B)

□

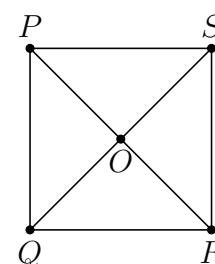
❖ **Câu 5.** Cho hình vuông $PQRS$ có độ dài cạnh bằng 24 cm. Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó bằng

- (A) 12 cm. (B) 13 cm. (C) $12\sqrt{2} \text{ cm}$. (D) $13\sqrt{2} \text{ cm}$.

💬 **Lời giải.**

Gọi O là giao điểm của PR và QS . Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông.

Ta có $OP = \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$.



Chọn đáp án (C)

□

❖ **Câu 6.** Cho tam giác ABC có $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng

- (A) 1 cm. (B) 2 cm. (C) 2,5 cm. (D) 3 cm.

💬 **Lời giải.**

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ (tham khảo hình vẽ).

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Khi đó r bằng khoảng cách từ I đến AB , BC , CA . Ta có

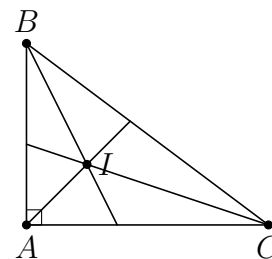
$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle IAB} + S_{\triangle IAC} + S_{\triangle IBC} \\ &= \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r \\ &= \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \cdot r = 6r. \end{aligned}$$

Mà $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 6 \text{ cm}^2$.

Do đó $r = 1 \text{ cm}$.

Chọn đáp án (A)

□

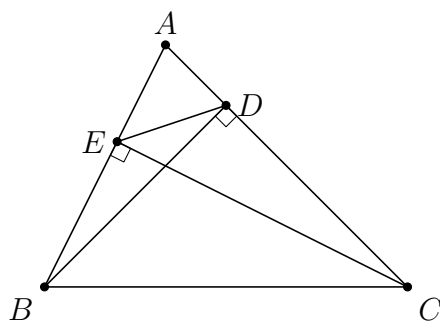


2. Tự luận (7 điểm)

❖ **Bài 1.** (3 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD , CE .

- Chứng minh bốn điểm B , C , D , E cùng thuộc một đường tròn.
- So sánh độ dài DE và BC .

💬 **Lời giải.**



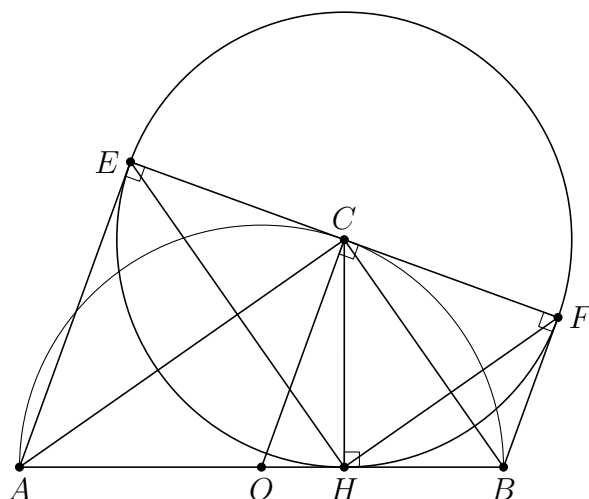
- a) $\triangle BEC$ vuông tại $E \Rightarrow \triangle BEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .
 $\triangle BDC$ vuông tại $D \Rightarrow \triangle BDC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .
 Vậy B, C, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính BC .
- b) Ta có $DE < BC$ vì trong một đường tròn đường kính là dây dài nhất.

□

❖ **Bài 2.** (4 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B). Qua C vẽ tiếp tuyến d với nửa đường tròn. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên d và H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống AB . Chứng minh

- a) AC là tia phân giác của $\widehat{EAH}$.
 b) HE song song với BC .
 c) $AE + BF = 2R$.
 d) Đường tròn đường kính EF luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định khi C thay đổi.

💬 **Lời giải.**



- a) $\triangle OAC$ cân tại O (vì $OA = OC = R$) nên $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$.
 Lại có $\widehat{OCA} = \widehat{EAC}$ (cùng phụ với $\widehat{ECA}$).
 Do đó $\widehat{EAC} = \widehat{OAC} \Rightarrow AC$ là tia phân giác của $\widehat{EAH}$.

- b) Xét hai tam giác vuông $\triangle AEC$ và $\triangle AHC$ có
 AC là cạnh huyền chung.
 $\widehat{EAC} = \widehat{HAC}$ (chứng minh trên).
 Do đó $\triangle AEC = \triangle AHC$ (cạnh huyền - góc nhọn).
 $\Rightarrow AE = AH$ (2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle AEH$ cân tại A
 $\Rightarrow AC$ là đường phân giác đồng thời cũng là đường cao $\Rightarrow EH \perp AC$.
 Mà $BC \perp AC$ nên $EH \parallel BC$.
- c) Ta có $OC \parallel AE \parallel BF$ (cùng vuông góc với EF) mà O là trung điểm của AB nên C cũng là trung điểm của EF .
 Do đó OC là đường trung bình của hình thang $AEFB \Rightarrow AE + BF = 2OC = 2R$.
- d) Ta có $AB \perp CH$ và $CH = CE$ (do $\triangle AEC = \triangle AHC$) nên AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EF .
 Do đó đường tròn đường kính EF luôn tiếp xúc với đường thẳng AB cố định khi C thay đổi.

□