

SH6.CHUYÊN ĐỀ 6-PHÂN SỐ

CHỦ ĐỀ 6.1 SO SÁNH PHÂN SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. So sánh hai phân số cùng mẫu.

- Trong hai phân số cùng mẫu dương:

- + Phân số nào có tử số lớn hơn thì lớn hơn.
- + Phân số nào có tử số bé hơn thì bé hơn.
- + Nếu tử số của hai phân số bằng nhau thì hai phân số đó bằng nhau.

2. So sánh hai phân số khác mẫu.

Muốn so sánh hai phân số khác mẫu ta quy đồng mẫu hai phân số đó, rồi thực hiện so sánh hai phân số cùng mẫu.

Lưu ý: Để thực hiện so sánh nhanh hơn nên rút gọn các phân số đã cho về dạng tối giản trước khi quy đồng.

3. Trong hai phân số có cùng tử số:

- Trong hai phân số cùng tử số dương:

- + Phân số nào có mẫu số lớn hơn thì bé hơn.
- + Phân số nào có mẫu số bé hơn thì lớn hơn.
- + Nếu mẫu số của hai phân số bằng nhau thì hai phân số đó bằng nhau.

4. Các tính chất

+ Phân số có tử và mẫu cùng dấu là phân số dương. Mọi phân số dương đều lớn hơn 0.

+ Phân số có tử và mẫu trái dấu là phân số âm. Mọi phân số âm đều nhỏ hơn 0.

+ Nếu cộng cả tử và mẫu của một phân số nhỏ hơn 1, tử và mẫu đều dương, với cùng một số nguyên dương thì giá trị của phân số đó tăng thêm. $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} (a, b, c > 0)$

+ Với hai phân số có cả tử và mẫu dương $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} (a, b, c, d > 0)$

+ Tính chất bắc cầu

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ \frac{c}{d} < \frac{e}{f} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f} (b, e, f \neq 0)$$

+ Với mọi $m \neq 0$:

$$* \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$$

$$* \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+m}.$$

$$* \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. So sánh hai phân số cùng mẫu dương

I. Phương pháp giải.

- Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn: $a < c \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{b} (b > 0)$

II. Bài toán.

Bài 1. So sánh các phân số sau

a) $\frac{3}{4}$ và $\frac{1}{4}$

b) $\frac{-3}{5}$ và $\frac{-4}{5}$

c) $\frac{5}{7}$ và $\frac{6}{7}$

d) $\frac{15}{37}$ và $\frac{25}{37}$

Lời giải

a) Ta có: $3 > 1$ và $4 > 0$ nên $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$.

b) Ta có: $-3 > -4$ và $5 > 0$ nên $\frac{-3}{5} > \frac{-4}{5}$.

c) Ta có: $6 > 5$ và $7 > 0$ nên $\frac{5}{7} < \frac{6}{7}$.

d) Ta có: $25 > 15$ và $27 > 0$ nên $\frac{15}{37} < \frac{25}{37}$.

Bài 2. So sánh các phân số sau đây

a) $\frac{-3}{4}$ và $\frac{1}{-4}$

b) $\frac{-3}{8}$ và $\frac{7}{-8}$

c) $\frac{-7}{-17}$ và $\frac{6}{17}$

d) $\frac{25}{-47}$ và $\frac{-17}{47}$

Lời giải

Các phân số ở bài này chưa có mẫu dương, trước hết ta sẽ đưa chúng về các phân số có mẫu dương trước khi so sánh.

a) Vì $\frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}$; Ta có: $-3 < -1$ và $4 > 0$ nên $\frac{-3}{4} < \frac{-1}{4} \Rightarrow \frac{-3}{4} < \frac{1}{-4}$.

b) Vì $\frac{7}{-8} = \frac{-7}{8}$; Ta có: $-7 < -3$ và $8 > 0$ nên $\frac{-7}{8} < \frac{-3}{8} \Rightarrow \frac{7}{-8} < \frac{-3}{8}$.

c) Vì $\frac{-7}{-17} = \frac{7}{17}$; Ta có: $6 < 7$ và $17 > 0$ nên $\frac{6}{17} < \frac{7}{17} \Rightarrow \frac{6}{17} < \frac{-7}{-17}$.

d) Vì $\frac{25}{-47} = \frac{-25}{47}$; Ta có: $-25 < -17$ và $47 > 0$ nên $\frac{-25}{47} < \frac{-17}{47} \Rightarrow \frac{25}{-47} < \frac{-17}{47}$.

Bài 3: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần

a) $\frac{-5}{17}; \frac{5}{17}; \frac{2}{17}; \frac{-4}{17}; \frac{0}{17}; \frac{-11}{17}; \frac{7}{17}$.

b) $\frac{-15}{57}; \frac{5}{57}; \frac{12}{57}; \frac{14}{57}; \frac{10}{57}; \frac{-14}{57}; \frac{27}{57}$.

c) $\frac{-15}{37}; \frac{-16}{37}; \frac{32}{37}; \frac{13}{37}; \frac{10}{37}; \frac{-18}{37}; \frac{23}{37}$.

Lời giải

Nhận xét: Các phân số trong bài có cùng mẫu số dương, nên để sắp xếp các phân số theo thứ tự tăng dần ta so sánh các tử số.

a) $\frac{-5}{17}; \frac{5}{17}; \frac{2}{17}; \frac{-4}{17}; \frac{0}{17}; \frac{-11}{17}; \frac{7}{17}$.

Ta có: $-11 < -5 < -4 < 0 < 2 < 5 < 7$ và $17 > 0$ nên $\frac{-11}{17} < \frac{-5}{17} < \frac{-4}{17} < \frac{0}{17} < \frac{2}{17} < \frac{5}{17} < \frac{7}{17}$.

b) $\frac{-15}{57}; \frac{5}{57}; \frac{12}{57}; \frac{14}{57}; \frac{10}{57}; \frac{-14}{57}; \frac{27}{57}$.

Ta có: $-15 < -14 < 5 < 10 < 12 < 14 < 27$ và $57 > 0$ nên $\frac{-15}{57} < \frac{-14}{57} < \frac{5}{57} < \frac{10}{57} < \frac{12}{57} < \frac{14}{57} < \frac{27}{57}$.

$$c) \frac{-15}{37}; \frac{-16}{37}; \frac{32}{37}; \frac{13}{37}; \frac{10}{37}; \frac{-18}{37}; \frac{23}{37}.$$

Ta có: $-18 < -16 < -15 < 10 < 13 < 23 < 32$ và $37 > 0$ nên $\frac{-18}{37} < \frac{-16}{37} < \frac{-15}{37} < \frac{10}{37} < \frac{13}{37} < \frac{23}{37} < \frac{32}{37}$.

Bài 4: Điền số thích hợp vào các chỗ trống sau

$$a) \frac{10}{15} < \frac{\dots}{15} < \frac{\dots}{15} < \frac{\dots}{15} < \frac{\dots}{15} < \frac{15}{15}.$$

$$b) \frac{-11}{17} < \frac{\dots}{17} < \frac{\dots}{17} < \frac{\dots}{17} < \frac{\dots}{17} < \frac{-6}{17}.$$

$$c) \frac{-8}{37} < \frac{\dots}{-37} < \frac{\dots}{37} < \frac{\dots}{-37} < \frac{-4}{37}.$$

Lời giải

$$a) \frac{10}{15} < \frac{11}{15} < \frac{12}{15} < \frac{13}{15} < \frac{14}{15} < \frac{15}{15}.$$

$$b) \frac{-11}{17} < \frac{-10}{17} < \frac{-9}{17} < \frac{-8}{17} < \frac{-7}{17} < \frac{-6}{17}.$$

$$c) \frac{-8}{37} < \frac{7}{-37} < \frac{-6}{37} < \frac{5}{-37} < \frac{-4}{37}.$$

Dạng 2. So sánh hai phân số khác mẫu

I. Phương pháp giải.

Cách 1. Quy đồng mẫu số hai phân số rồi so sánh các tử số của chúng.

- *Bước 1:* Quy đồng mẫu số của hai phân số (đưa các phân số về cùng mẫu số)

- *Bước 2:* So sánh tử số của hai phân số cùng mẫu số đã quy đồng.

Trong hai phân số có cùng mẫu số:

+ Phân số nào có tử số nhỏ hơn thì nhỏ hơn.

+ Phân số nào có tử số lớn hơn thì lớn hơn.

Cách 2. Quy đồng tử số hai phân số rồi so sánh các mẫu số của chúng.

- *Bước 1:* Quy đồng tử số (đưa về cùng tử số)

+ Lấy tử số và mẫu số của phân số thứ nhất nhân tử số của phân số thứ hai.

+ Lấy tử số và mẫu số của phân số thứ hai nhân tử số của phân số thứ nhất.

- *Bước 2:* So sánh mẫu số của hai phân số đã quy đồng tử số.

Trong hai phân số có cùng tử số:

+ Phân số nào có mẫu số nhỏ hơn thì lớn hơn

+ Phân số nào có mẫu số lớn hơn thì nhỏ hơn.

Lưu ý: Để thực hiện so sánh nhanh hơn nên rút gọn các phân số đã cho về dạng tối giản trước khi quy đồng.

II. Bài toán.

Bài 1: So sánh $\frac{2}{5}$ và $\frac{4}{7}$

Lời giải

Cách 1: Quy đồng mẫu số 2PS rồi so sánh tử số của chúng với nhau.

+ Ta có: mẫu chung là 35

+ So sánh 2PS đã quy đồng, ta có: $\frac{14}{35} < \frac{20}{35}$ (vì 2 PS có cùng mẫu số, tử số có $14 < 20$) nên $\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$.

Cách 2: Chọn tử số chung là 4 (vì $4 : 2 = 2$), ta có: $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$; giữ nguyên $\frac{4}{7}$

Ta có : $\frac{4}{10} < \frac{4}{7}$ (TS = 4, mẫu số có $10 > 7$) nên $\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$.

Bài 2: So sánh $-\frac{3}{4}$ và $\frac{4}{-5}$

Lời giải

Có MC: $4.5 = 20$

$$\frac{-3}{4} = \frac{(-3).5}{4.5} = \frac{-15}{20};$$

$$\frac{-4}{5} = \frac{(-4).4}{5.4} = \frac{-16}{20}$$

Vì: $-15 > -16$ nên $\frac{-15}{20} > \frac{-16}{20}$ hay: $\frac{-3}{4} > \frac{-4}{5}$. Vậy: $\frac{-3}{4} > \frac{-4}{5}$

Bài 3: So sánh các phân số:

a) $\frac{-11}{12}$ và $\frac{17}{-18}$

b) $\frac{-14}{21}$ và $\frac{-60}{-72}$

Lời giải

a) $\frac{-11}{12}$ và $\frac{17}{-18} \Rightarrow \frac{-11}{12}$ và $\frac{-17}{18}$

b, $\frac{-14}{21}$ và $\frac{-60}{-72} \Rightarrow \frac{-2}{3}$ và $\frac{5}{6}$

Có MC: $2^2.3^2 = 36$

$$\frac{-11}{12} = \frac{(-11).3}{12.3} = \frac{-33}{36};$$

$$\frac{-17}{18} = \frac{(-17).2}{18.2} = \frac{-34}{36}$$

Vì $\frac{-33}{36} > \frac{-34}{36}$ nên $\frac{-11}{12} > \frac{-17}{18}$. Vậy: $\frac{-11}{12} > \frac{17}{-18}$

Có MC: 6

$$\frac{-2}{3} = \frac{(-2).2}{3.2} = \frac{-4}{6}$$

Vì $\frac{-4}{6} < \frac{5}{6}$ nên $\frac{-2}{3} < \frac{5}{6}$. Vậy $\frac{-14}{21} < \frac{-60}{-72}$

Bài 4: So sánh các đại lượng sau:

a) Thời gian nào dài hơn: $\frac{2}{3}h$ hay $\frac{3}{4}h$?

b) Đoạn thẳng nào ngắn hơn $\frac{7}{10}m$ hay $\frac{3}{4}m$?

c) Khối lượng nào lớn hơn: $\frac{7}{10}kg$ hay $\frac{9}{10}kg$

d) Vận tốc nào nhỏ hơn $\frac{5}{6}kg/h$ hay $\frac{7}{9}kg/h$?

Lời giải

a, $\frac{2}{3}h$ và $\frac{3}{4}h$ có MC: 12

b, $\frac{7}{10}$ và $\frac{3}{4}$ có MC: $2^2.5 = 20$

$$\frac{2}{3} = \frac{2.4}{3.4} = \frac{8}{12}; \quad \frac{3}{4} = \frac{3.3}{4.3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7.2}{10.2} = \frac{14}{20}; \quad \frac{3}{4} = \frac{3.5}{4.5} = \frac{15}{20}$$

Vì $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ nên $\frac{3}{4}h$ dài hơn $\frac{2}{3}h$

Vì $\frac{14}{20} < \frac{15}{20}$ nên $\frac{7}{10}m$ ngắn hơn $\frac{3}{4}m$.

c) Ta có $\frac{9}{10} > \frac{7}{10}$ (vì $9 > 7$)

d) Ta có $\frac{7}{9} = \frac{42}{54}; \quad \frac{5}{6} = \frac{45}{54}$

nên $\frac{9}{10} \text{ kg}$ lớn hơn $\frac{7}{10} \text{ kg}$

mà $42 < 45 \Rightarrow \frac{42}{54} < \frac{45}{54}$

vậy $\frac{7}{9} \text{ km/h}$ nhỏ hơn $\frac{5}{6} \text{ km/h}$

Bài 5: So sánh hai phân số $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$

Lời giải

Cách 1: QĐMS (chọn MSC = 12)

Ta có :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}; \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

$$\text{Vì } \frac{8}{12} < \frac{9}{12} \text{ nên } \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

Cách 2: QĐTS (chọn TSC = 6)

Ta có :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}; \frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

$$\text{Vì } \frac{6}{9} < \frac{6}{8} \text{ nên } \frac{2}{3} < \frac{3}{4}.$$

Bài 6: Viết các phân số sau theo thứ tự từ bé đến lớn :

a) $\frac{8}{9}; \frac{5}{6}; \frac{17}{18}$

b) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}$

Lời giải

Để sắp xếp các PS theo thứ tự từ bé đến lớn, trước tiên ta QĐMS các PS này. Rồi so sánh tử số.

Chọn MSC = 18 (vì 18 chia hết cho 6; 9; 18)

a) $\frac{8}{9} = \frac{8 \times 2}{9 \times 2} = \frac{16}{18}; \frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$; giữ nguyên $\frac{17}{18}$

Ta so sánh các PS đã quy đồng mẫu số Vì $\frac{15}{18} < \frac{16}{18} < \frac{17}{18}$ nên $\frac{5}{6} < \frac{8}{9} < \frac{17}{18}$

Vậy các phân số được viết theo thứ tự từ bé đến lớn là: $\frac{5}{6}; \frac{8}{9}; \frac{17}{18}$

b) Chọn MSC = 8 (vì 8 chia hết cho 2 ; 4; 8)

Ta có: Vì $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}; \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ nên $\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$, giữ nguyên $\frac{5}{8}$

Vì $\frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8}$ nên $\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$

Vậy các phân số được viết theo thứ tự từ bé đến lớn là: $\frac{1}{2}; \frac{5}{8}; \frac{3}{4}$

Bài 8. Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự giảm dần: $-\frac{2}{9}; \frac{3}{4}; -\frac{1}{12}; \frac{5}{6}; -\frac{5}{8}$

Lời giải

Do các số âm luôn nhỏ hơn các số dương nên $\frac{3}{4}; \frac{5}{6}; -\frac{2}{9}; -\frac{1}{12}; -\frac{5}{8}$

Trong các số dương thì $\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$

$$\text{Vì } \frac{2}{9} < \frac{5}{12} < \frac{5}{8} \text{ nên } -\frac{2}{9} > -\frac{5}{8}$$

$$\text{Vì } \frac{2}{9} > \frac{2}{12} > \frac{1}{12} \text{ nên } -\frac{2}{9} < -\frac{1}{12}$$

Vậy chúng ta có thể sắp xếp theo yêu cầu đề bài $\frac{5}{6}; \frac{3}{4}; -\frac{1}{12}; -\frac{2}{9}; -\frac{5}{8};$

Dạng 3. So sánh qua số trung gian

I. Phương pháp giải.

- Khi so sánh hai hay nhiều phân số, việc quy đồng đưa về cùng một mẫu số dương để so sánh từ số nhiều khi khá khó khăn, do đó, ta có thể chọn một phân số trung gian, dựa vào phân số trung gian này, ta sẽ so sánh được hai phân số ban đầu.

* Dạng 3.1: So sánh qua số 0

- Việc so sánh qua số 0 được sử dụng khi ta thấy một phân số nhỏ hơn 0 (tử và mẫu trái dấu) và một phân số lớn hơn không (tử và mẫu cùng dấu).

$$\left. \begin{array}{l} a.c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < 0 \\ b.d > 0 \Rightarrow \frac{b}{d} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d} (c.d \neq 0)$$

* Dạng 3.2: So sánh qua số 1

- Với hai phân số cùng dương mà ta nhận thấy một phân số lớn hơn 1 (tử số lớn hơn mẫu số) và một phân số nhỏ hơn 1 (tử số nhỏ hơn mẫu số) thì ta sẽ chọn 1 là số trung gian để so sánh.

$$\left. \begin{array}{l} a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \\ c > d \Rightarrow \frac{c}{d} > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 < \frac{c}{d} (a, b, c, d > 0)$$

* Dạng 3.3: So sánh qua một phân số trung gian phù hợp

Ta cũng có thể chọn một phân số trung gian phù hợp để so sánh hai phân số

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ \frac{c}{d} < \frac{e}{f} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f} (b.e.f \neq 0)$$

Chú ý một vài tính chất sau đây:

+ Trong hai phân số có cùng tử, tử và mẫu đều dương, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì lớn hơn
 $c < b \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{a}{b} (a, b, c > 0)$

+ Nếu cộng cả tử và mẫu của một phân số nhỏ hơn 1, tử và mẫu đều dương, với cùng một số nguyên dương thì giá trị của phân số đó tăng thêm. $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} (a, b, c > 0)$

+ Với hai phân số có cả tử và mẫu dương $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} (a, b, c, d > 0)$

II. Bài toán.

Bài 1. So sánh hai phân số sau

a) $\frac{3}{5}$ và $\frac{7}{6}$

b) $\frac{7}{15}$ và $\frac{4}{3}$

c) $\frac{13}{14}$ và $\frac{16}{15}$

d) $\frac{23}{25}$ và $\frac{21}{19}$

Lời giải

a) $\frac{3}{5}$ và $\frac{7}{6}$.

Ta có
$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} < \frac{5}{5} = 1 \\ \frac{7}{6} > \frac{6}{6} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{5} < 1 < \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{7}{6}.$$

b) $\frac{7}{15}$ và $\frac{4}{3}$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7}{15} < \frac{15}{15} = 1 \\ \frac{4}{3} > \frac{3}{3} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7}{15} < 1 < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{7}{15} < \frac{4}{3}.$$

c) $\frac{13}{14}$ và $\frac{16}{15}$.

Ta có
$$\left. \begin{array}{l} \frac{13}{14} < \frac{14}{14} = 1 \\ \frac{16}{15} > \frac{15}{15} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{13}{14} < 1 < \frac{16}{15} \Rightarrow \frac{13}{14} < \frac{16}{15}.$$

d) $\frac{23}{25}$ và $\frac{21}{19}$.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{23}{25} < \frac{25}{25} = 1 \\ \frac{21}{19} > \frac{19}{19} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{23}{25} < 1 < \frac{21}{19} \Rightarrow \frac{23}{25} < \frac{21}{19}.$$

Bài 2. So sánh hai phân số sau

a) $\frac{13}{5}$ và $\frac{-7}{9}$

b) $\frac{8}{-13}$ và $\frac{1}{33}$

c) $\frac{-13}{-17}$ và $\frac{-3}{11}$

d) $\frac{3}{-25}$ và $\frac{-1}{-19}$

Lời giải

a) $\frac{13}{5}$ và $\frac{-7}{9}$.

Ta có

$$\begin{aligned} 13.5 > 0 &\Rightarrow \frac{13}{5} > 0 \\ -7.9 < 0 &\Rightarrow \frac{-7}{9} < 0 \\ \Rightarrow \frac{-7}{9} < 0 < \frac{13}{5} &\Rightarrow \frac{-7}{9} < \frac{13}{5}. \end{aligned}$$

c) $\frac{-13}{-17}$ và $\frac{-3}{11}$

Ta có

$$\begin{aligned} (-13).(-17) > 0 &\Rightarrow \frac{-13}{-17} > 0 \\ (-3).11 < 0 &\Rightarrow \frac{-3}{11} < 0 \\ \Rightarrow \frac{-3}{11} < 0 < \frac{-13}{-17} &\Rightarrow \frac{-3}{11} < \frac{-13}{-17}. \end{aligned}$$

b) $\frac{8}{-13}$ và $\frac{1}{33}$

Ta có

$$\begin{aligned} 1.33 > 0 &\Rightarrow \frac{1}{33} > 0 \\ 8.(-13) < 0 &\Rightarrow \frac{8}{-13} < 0 \\ \Rightarrow \frac{8}{-13} < 0 < \frac{1}{33} &\Rightarrow \frac{8}{-13} < \frac{1}{33}. \end{aligned}$$

d) $\frac{3}{-25}$ và $\frac{-1}{-19}$

Ta có:

$$\begin{aligned} (-1).(-19) > 0 &\Rightarrow \frac{-1}{-19} > 0 \\ 3.(-25) < 0 &\Rightarrow \frac{3}{-25} < 0 \\ \Rightarrow \frac{3}{-25} < 0 < \frac{-1}{-19} &\Rightarrow \frac{3}{-25} < \frac{-1}{-19}. \end{aligned}$$

Bài 3. So sánh hai phân số sau

a) $\frac{4}{17}$ và $\frac{16}{63}$.

b) $\frac{5}{29}$ và $\frac{7}{33}$

c) $\frac{44}{57}$ và $\frac{89}{99}$

d) $\frac{19}{53}$ và $\frac{30}{73}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{4}{17} < \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{16}{64} < \frac{16}{63}$.

b) Ta có: $\frac{5}{29} < \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \frac{7}{35} < \frac{7}{33}$

c) Ta có: $\frac{44}{57} < \frac{44}{52} = \frac{22}{25} = \frac{88}{100} < \frac{88}{99} < \frac{89}{99}$.

d) Ta có: $\frac{19}{53} < \frac{20}{53} < \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = \frac{30}{75} < \frac{30}{73}$

Bài 4: So sánh hai phân số sau

a) $\frac{22}{107}$ và $\frac{18}{79}$.

b) $\frac{25}{67}$ và $\frac{35}{89}$.

c) $\frac{18}{67}$ và $\frac{31}{106}$.

d) $\frac{41}{119}$ và $\frac{24}{67}$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{22}{107} < \frac{22}{99} = \frac{2}{9} = \frac{18}{81} < \frac{18}{79}$

b) Ta có: $\frac{25}{67} < \frac{25}{65} = \frac{5}{13} = \frac{35}{91} < \frac{35}{89}$.

c) Ta có: $\frac{18}{67} < \frac{18}{63} = \frac{2}{7} = \frac{30}{75} < \frac{30}{73}$.

d) Ta có: $\frac{41}{119} < \frac{42}{119} = \frac{6}{17} = \frac{24}{68} < \frac{24}{67}$.

Bài 5: So sánh hai phân số sau

a) $\frac{65}{129}$ và $\frac{91}{174}$.

b) $\frac{21}{53}$ và $\frac{50}{119}$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{65}{129} < \frac{65}{125} = \frac{13}{25} = \frac{91}{175} < \frac{91}{174}$.

b) Ta có: $\frac{21}{53} < \frac{21}{51} = \frac{7}{17} = \frac{49}{119} < \frac{50}{119}$.

Dạng 4. So sánh qua phần bù (hay phần thiếu).**I. Phương pháp giải.**

So sánh qua phần bù áp dụng để so sánh hai phân số nhỏ hơn 1.

Với phân số $\frac{a}{b} < 1$ thì $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ được gọi là *phần bù đến đơn vị* của phân số $\frac{a}{b}$. Trong hai phân số có phần bù tới đơn vị khác nhau, phân số nào có phần bù nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn.

II. Bài toán.**Bài 1.** So sánh hai phân số sau

a) $\frac{2009}{2010}$ và $\frac{2008}{2009}$

b) $\frac{1007}{1009}$ và $\frac{1005}{1007}$

c) $\frac{2021}{2023}$ và $\frac{2017}{2019}$

d) $\frac{2005}{2007}$ và $\frac{2009}{2011}$

Lời giải

a) Ta có:

+) $1 - \frac{2009}{2010} = \frac{2010}{2010} - \frac{2009}{2010} = \frac{1}{2010}$

+) $1 - \frac{2008}{2009} = \frac{2009}{2009} - \frac{2008}{2009} = \frac{1}{2009}$

b) Ta có:

+) $1 - \frac{1007}{1009} = \frac{1009}{1009} - \frac{1007}{1009} = \frac{2}{1009}$

+) $1 - \frac{1005}{1007} = \frac{1007}{1007} - \frac{1005}{1007} = \frac{2}{1007}$

$$+) \frac{1}{2009} > \frac{1}{2010} \Rightarrow \frac{2009}{2010} > \frac{2008}{2009}.$$

$$+) \frac{2}{1007} > \frac{2}{1009} \Rightarrow \frac{1005}{1007} < \frac{1007}{1009}.$$

c) Ta có:

$$+) 1 - \frac{2021}{2023} = \frac{2023}{2023} - \frac{2021}{2023} = \frac{2}{2023}$$

$$+) 1 - \frac{2017}{2019} = \frac{2019}{2019} - \frac{2017}{2019} = \frac{2}{2019}$$

$$+) \frac{2}{2019} > \frac{2}{2023} \Rightarrow \frac{2017}{2019} < \frac{2021}{2023}$$

d) Ta có:

$$+) 1 - \frac{2005}{2007} = \frac{2007}{2007} - \frac{2005}{2007} = \frac{2}{2007}$$

$$+) 1 - \frac{2009}{2011} = \frac{2011}{2011} - \frac{2009}{2011} = \frac{2}{2011}$$

$$+) \frac{2}{2011} < \frac{2}{2007} \Rightarrow \frac{2005}{2007} < \frac{2009}{2011}$$

Bài 2. So sánh hai phân số sau

a) $\frac{2005}{2009}$ và $\frac{2007}{2010}$.

b) $\frac{1997}{1999}$ và $\frac{1995}{1998}$.

c) $\frac{2004}{2005}$ và $\frac{2001}{2004}$.

d) $\frac{1775}{1777}$ và $\frac{1768}{1771}$

Lời giải

a) Ta có:

$$+) 1 - \frac{2005}{2009} = \frac{2009}{2009} - \frac{2005}{2009} = \frac{4}{2009}$$

$$+) 1 - \frac{2007}{2010} = \frac{2010}{2010} - \frac{2007}{2010} = \frac{3}{2010}$$

$$+) \frac{3}{2010} < \frac{3}{2009} < \frac{4}{2009} \Rightarrow \frac{2007}{2010} > \frac{2005}{2009}$$

b) Ta có:

$$+) 1 - \frac{1997}{1999} = \frac{1999}{1999} - \frac{1997}{1999} = \frac{2}{1999}$$

$$+) 1 - \frac{1995}{1998} = \frac{1998}{1998} - \frac{1995}{1998} = \frac{3}{1998}$$

$$+) \frac{2}{1999} < \frac{2}{1998} < \frac{3}{1998} \Rightarrow \frac{1997}{1999} > \frac{1995}{1998}$$

c) Ta có:

$$+) 1 - \frac{2004}{2005} = \frac{2005}{2005} - \frac{2004}{2005} = \frac{1}{2005}$$

$$+) 1 - \frac{2001}{2004} = \frac{2004}{2004} - \frac{2001}{2004} = \frac{3}{2004}$$

$$+) \frac{1}{2005} < \frac{1}{2004} < \frac{3}{2004} \Rightarrow \frac{2004}{2005} > \frac{2001}{2004}$$

d) Ta có:

$$+) 1 - \frac{1775}{1777} = \frac{1777}{1777} - \frac{1775}{1777} = \frac{2}{1777}$$

$$+) 1 - \frac{1768}{1771} = \frac{1771}{1771} - \frac{1768}{1771} = \frac{3}{1771}$$

$$+) \frac{2}{1777} < \frac{2}{1771} < \frac{3}{1771} \Rightarrow \frac{1775}{1777} > \frac{1768}{1771}.$$

Bài 3. So sánh hai phân số sau $A = \frac{10^9 + 1}{10^{10} + 1}; B = \frac{10^8 + 1}{10^9 + 1}$

Lời giải

Ta có:

$$+) 1 - A = 1 - \frac{10^9 + 1}{10^{10} + 1} = \frac{10^{10} + 1}{10^{10} + 1} - \frac{10^9 + 1}{10^{10} + 1} = \frac{10^{10} - 10^9}{10^{10} + 1} = \frac{10^9 \cdot 9}{10^{10} + 1}$$

$$+) 1 - B = 1 - \frac{10^8 + 1}{10^9 + 1} = \frac{10^9 + 1}{10^9 + 1} - \frac{10^8 + 1}{10^9 + 1} = \frac{10^9 - 10^8}{10^9 + 1} = \frac{10^8 \cdot 9}{10^9 + 1}$$

$$+) \text{ Để so sánh } 1 - A \text{ và } 1 - B, \text{ ta so sánh } \frac{10}{10^{10} + 1} \text{ và } \frac{1}{10^9 + 1}$$

$$\frac{1}{10^9+1} = \frac{10}{10^{10}+10} < \frac{10}{10^{10}+1}$$

$$\Rightarrow 1-B < 1-A \Rightarrow A < B$$

Bài 4. So sánh hai phân số sau $A = \frac{7^{99}+2}{7^{100}+2}$; $B = \frac{7^{98}+2}{7^{99}+2}$

Lời giải

Ta có:

$$+) A < 1 \Rightarrow \frac{7^{99}+2}{7^{100}+2} < \frac{5}{5} \Rightarrow \frac{7^{99}+1}{7^{100}+1} < \frac{7^{99}+2+5}{7^{100}+2+5} = \frac{7^{99}+7}{7^{100}+7} = \frac{7^{98}+1}{7^{99}+1}$$

$$+) \frac{7^{98}+1}{7^{99}+1} < 1 \Rightarrow \frac{7^{98}+1}{7^{99}+1} < \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{7^{98}+1}{7^{99}+1} < \frac{7^{98}+1+1}{7^{99}+1+1} = \frac{7^{98}+2}{7^{99}+2}$$

+ Vậy $A < B$.

Bài 5. So sánh hai phân số sau $A = \frac{11^{89}+1}{11^{90}+1}$ và $B = \frac{10^{87}+1}{10^{88}+1}$.

Lời giải

Ta có:

$$A < 1 \Rightarrow \frac{11^{89}+1}{11^{90}+1} < \frac{10}{10} \Rightarrow \frac{11^{89}+1}{11^{90}+1} < \frac{11^{89}+1+10}{11^{90}+1+10} = \frac{11^{88}+1}{11^{89}+1}$$

$$\frac{11^{88}+1}{11^{89}+1} < 1 \Rightarrow \frac{11^{88}+1}{11^{89}+1} < \frac{10}{10} \Rightarrow \frac{11^{88}+1}{11^{89}+1} < \frac{11^{88}+1+10}{11^{89}+1+10} = \frac{11^{87}+1}{11^{88}+1}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{11^{88}+1}{11^{89}+1} < B.$$

Bài 6. So sánh hai phân số sau $\frac{43}{49}$ và $\frac{31}{35}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{43}{49} = \frac{43.4}{49.4} = \frac{172}{196}$$

$$\frac{31}{35} = \frac{31.6}{35.6} = \frac{186}{210}$$

$$1 - \frac{43}{49} = 1 - \frac{172}{196} = \frac{196}{196} - \frac{172}{196} = \frac{24}{196}$$

$$1 - \frac{31}{35} = 1 - \frac{186}{210} = \frac{210}{210} - \frac{186}{210} = \frac{24}{210}$$

$$\frac{24}{196} > \frac{24}{210} \Rightarrow \frac{43}{49} < \frac{31}{35}.$$

Bài 7. So sánh hai phân số sau

a) $\frac{12}{17}$ và $\frac{7}{15}$

b) $\frac{1999}{2001}$ và $\frac{12}{11}$

c) $\frac{13}{27}$ và $\frac{27}{41}$

$$d) \frac{1998}{1999} \text{ và } \frac{1999}{2000}$$

$$e) \frac{23}{47} \text{ và } \frac{24}{45}$$

$$g) \frac{17}{33} \text{ và } \frac{13}{27}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{7}{15} < 1 \Rightarrow \frac{7}{15} < \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{7}{15} < \frac{7+2}{15+2} = \frac{9}{17} < \frac{12}{17}.$$

$$\text{Vậy } \frac{12}{17} > \frac{7}{15}.$$

c) Ta có:

$$\frac{13}{27} < \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{27}{41} > \frac{27}{54} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{13}{27} < \frac{1}{2} < \frac{27}{41} \Rightarrow \frac{13}{27} < \frac{27}{41}.$$

e) Ta có

$$\frac{23}{47} < \frac{23}{46} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{24}{45} > \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{23}{47} < \frac{1}{2} < \frac{24}{45} \Rightarrow \frac{23}{47} < \frac{24}{45}.$$

Bài 8. So sánh hai phân số sau

$$a) \frac{15}{25} \text{ và } \frac{5}{7}$$

$$b) \frac{13}{60} \text{ và } \frac{27}{100}$$

$$c) \frac{1993}{1995} \text{ và } \frac{997}{998}$$

$$d) \frac{47}{15} \text{ và } \frac{29}{35}$$

$$e) \frac{3}{8} \text{ và } \frac{17}{49}$$

$$g) \frac{43}{47} \text{ và } \frac{29}{35}$$

$$i) \frac{16}{27} \text{ và } \frac{15}{29}$$

$$k) \frac{15}{59} \text{ và } \frac{24}{47}.$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{5}{7} = \frac{5.3}{7.3} = \frac{15}{21}.$$

$$\frac{15}{25} < \frac{15}{21} \Rightarrow \frac{15}{25} < \frac{5}{7}.$$

c) Ta có:

b) Ta có:

$$1999 < 2001 \Rightarrow \frac{1999}{2001} < 1.$$

$$12 > 11 \Rightarrow \frac{12}{11} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1999}{2001} < 1 < \frac{12}{11} \Rightarrow \frac{1999}{2001} < \frac{12}{11}.$$

d) Ta có:

$$1 - \frac{1998}{1999} = \frac{1999}{1999} - \frac{1998}{1999} = \frac{1}{1999}$$

$$1 - \frac{1999}{2000} = \frac{2000}{2000} - \frac{1999}{2000} = \frac{1}{2000}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{1999} > \frac{1}{2000} \Rightarrow \frac{1998}{1999} < \frac{1999}{2000}$$

g) Ta có:

$$\frac{13}{27} < \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{17}{33} > \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{13}{27} < \frac{1}{2} < \frac{17}{33} \Rightarrow \frac{13}{27} < \frac{17}{33}.$$

b) Ta có

$$\frac{13}{60} < \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{27}{100} > \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{13}{60} < \frac{1}{4} < \frac{27}{100} \Rightarrow \frac{13}{60} < \frac{27}{100}$$

d) Ta có:

$$1 - \frac{1993}{1995} = \frac{1995}{1995} - \frac{1993}{1995} = \frac{2}{1995}.$$

$$1 - \frac{997}{998} = \frac{998}{998} - \frac{997}{998} = \frac{1}{998}$$

$$\frac{1}{998} = \frac{2}{1996} < \frac{2}{1995} \Rightarrow \frac{1993}{1995} < \frac{997}{998}$$

e) Ta có:

$$\frac{3}{8} = \frac{3.6}{8.6} = \frac{18}{48}$$

$$\frac{17}{49} < \frac{17}{48} < \frac{18}{48} \Rightarrow \frac{17}{49} < \frac{3}{8}$$

i) Ta có:

$$\frac{15}{29} < \frac{16}{29} < \frac{16}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{29} < \frac{16}{27}.$$

Bài 9. So sánh hai phân số:

a) $\frac{13}{15}$ và $\frac{1333}{1555}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{13}{15} = \frac{13.111}{15.111} = \frac{1443}{1665}.$

$$1 - \frac{1443}{1665} = \frac{1665}{1665} - \frac{1443}{1665} = \frac{222}{1665}$$

$$1 - \frac{1333}{1555} = \frac{1555}{1555} - \frac{1333}{1555} = \frac{222}{1555}$$

$$\frac{222}{1665} < \frac{222}{1555} \Rightarrow \frac{13}{15} > \frac{1333}{1555}$$

Bài 10. So sánh hai phân số sau

a) $\frac{13}{15}$ và $\frac{23}{25}$

$$47 > 15 \Rightarrow \frac{47}{15} > 1$$

$$29 < 35 \Rightarrow \frac{29}{35} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{29}{35} < 1 < \frac{47}{15}. \text{ Vậy: } \frac{29}{35} < \frac{47}{15}$$

g) Ta có:

$$\frac{43}{47} = \frac{43.6}{47.6} = \frac{258}{282}$$

$$\frac{29}{35} = \frac{29.4}{35.4} = \frac{116}{140}$$

$$1 - \frac{43}{47} = 1 - \frac{258}{282} = \frac{282}{282} - \frac{258}{282} = \frac{24}{282}$$

$$1 - \frac{29}{35} = 1 - \frac{116}{140} = \frac{140}{140} - \frac{116}{140} = \frac{24}{140}$$

$$\frac{24}{282} < \frac{24}{116} \Rightarrow \frac{43}{47} > \frac{29}{35}$$

k) Ta có:

$$\frac{24}{47} > \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{59} < \frac{15}{50} = \frac{3}{10} < \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{15}{59} < \frac{1}{2} < \frac{24}{47} \Rightarrow \frac{15}{59} < \frac{24}{47}.$$

b) $\frac{42}{43}$ và $\frac{58}{59}.$

b) Ta có: $1 - \frac{42}{43} = \frac{1}{43}; 1 - \frac{58}{59} = \frac{1}{59}.$

$$\text{Vi } \frac{1}{43} > \frac{1}{59} \text{ nên } \frac{42}{43} < \frac{58}{59}.$$

b) $\frac{13}{38}$ và $\frac{16}{49}$

c) $\frac{23}{28}$ và $\frac{25}{49}$

d) $\frac{13}{15}$ và $\frac{133}{153}$

e) $\frac{15}{21}$ và $\frac{153}{213}$

Lời giải

a) Ta có:

$$1 - \frac{13}{15} = \frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$$

$$1 - \frac{23}{25} = \frac{25}{25} - \frac{23}{25} = \frac{2}{25}$$

$$\text{Mà } \frac{2}{15} > \frac{2}{25} \Rightarrow \frac{13}{15} < \frac{23}{25}.$$

c) Ta có:

$$\frac{25}{49} < \frac{28}{49} = \frac{4}{7} = \frac{16}{28} < \frac{23}{28}.$$

$$\text{Vậy } \frac{25}{49} < \frac{23}{28}.$$

e) Ta có:

$$\frac{15}{21} = \frac{150}{210} < \frac{3}{3} = \frac{150+3}{210+3} = \frac{153}{213}.$$

$$\text{Vậy } \frac{15}{21} < \frac{153}{213}$$

b) Ta có:

$$\frac{13}{38} > \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{16}{49} < \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{16}{49} < \frac{1}{3} < \frac{13}{38}.$$

d) Ta có:

$$\frac{13}{15} = \frac{130}{150} < 1 = \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{13}{15} < \frac{130+3}{150+3} = \frac{133}{153}.$$

$$\text{Vậy } \frac{13}{15} < \frac{133}{153}.$$

Bài 11. So sánh các phân số sau với 1

a) $\frac{34.34}{33.35}$

b) $\frac{1999.1999}{1995.1995}$

c) $\frac{198519851985.198719871987}{198619861986.198619861986}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{34.34}{33.35} = \frac{34^2}{(34-1)(34+1)} = \frac{34^2}{34^2-1} < 1.$

b) Ta có: $\frac{1999.1999}{1995.1995} = \frac{1999^2}{1995^2} > 1$

c) Ta có
$$\begin{aligned} \frac{198519851985.198719871987}{198619861986.198619861986} &= \frac{1985.100010001.1987.100010001}{1986.100010001.1986.100010001} = \frac{1985.1987}{1986^2} \\ &= \frac{(1986-1)(1986+1)}{1986^2} \\ &= \frac{1986^2-1}{1986^2} < 1 \end{aligned}$$

Bài 12: Không quy đồng mẫu hãy so sánh phân số sau bằng cách nhanh nhất:

a) $\frac{2012}{2013}$ và $\frac{2013}{2014}$

b) $\frac{1006}{1007}$ và $\frac{2013}{2015}$

c) $\frac{64}{73}$ và $\frac{45}{51}$

d) $\frac{2323}{2424}$ và $\frac{20132013}{20142014}$

Lời giải

a) Ta có: $1 - \frac{2012}{2013} = \frac{1}{2013}$;

$$1 - \frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013} > \frac{1}{2014} \text{ nên } \frac{2012}{2013} < \frac{2013}{2014}.$$

b) Ta thấy: $\frac{1006}{1007} = \frac{1006 \times 2}{1007 \times 2} = \frac{2012}{2014}$.

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{2012}{2014} = \frac{2}{2014}; \quad 1 - \frac{2013}{2015} = \frac{2}{2015}.$$

$$\text{Vì } \frac{2}{2014} > \frac{2}{2015} \text{ nên } \frac{2012}{2014} < \frac{2013}{2015} \text{ hay } \frac{1006}{1007} < \frac{2013}{2015}$$

c) Ta thấy: $\frac{64}{73} = \frac{64 \times 2}{73 \times 2} = \frac{128}{146}$; $\frac{45}{51} = \frac{45 \times 3}{51 \times 3} = \frac{135}{153}$.

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{128}{146} = \frac{18}{146}; \quad 1 - \frac{135}{153} = \frac{18}{153}.$$

$$\text{Vì } \frac{18}{143} > \frac{18}{153} \text{ nên } \frac{128}{146} < \frac{135}{153} \text{ hay } \frac{64}{73} < \frac{45}{51}.$$

d) Ta thấy: $\frac{2323}{2424} = \frac{23 \times 101}{24 \times 101} = \frac{23}{24}$;

$$\frac{20132013}{20142014} = \frac{2013 \times 10001}{2014 \times 10001} = \frac{2013}{2014}.$$

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{23}{24} = \frac{1}{24};$$

$$1 - \frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{24} > \frac{1}{2014} \text{ nên } \frac{23}{24} < \frac{2013}{2014}$$

$$\text{Vậy } \frac{2323}{2424} < \frac{20132013}{20142014}.$$

Dạng 5: So sánh phần hơn (phần thừa) với đơn vị của các phân số.

I. Phương pháp giải.

* Phần hơn với đơn vị của phân số là hiệu giữa phân số đó với 1

Ví dụ: Tìm phần hơn với đơn vị của phân số $\frac{8}{5}$ Ta lấy : $\frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$

Vậy phần hơn với đơn vị của phân số $\frac{8}{5}$ là $\frac{3}{5}$

* Sử dụng cách so sánh bằng phần hơn khi:

- Nhận thấy tất cả các phân số đều có tử số lớn hơn mẫu số (phân số lớn hơn 1) và hiệu của tử số với mẫu số đều bằng nhau hoặc nhỏ thì ta tìm phân hơn với 1.

- Nhận thấy cả hai phân số đều có tử số lớn hơn mẫu số và nếu lấy tử số chia cho mẫu số ở cả hai phân số thì có thương bằng nhau. (ví dụ 5)

- Nhận thấy cả hai phân số đều có tử số bé hơn mẫu số và nếu lấy mẫu số chia cho tử số ở cả hai phân số thì có thương bằng nhau. (ví dụ 6)

- Lưu ý:

+ Trong hai phân số, phân số nào có phần hơn lớn hơn thì phân số đó lớn hơn và ngược lại phân số nào có phần hơn nhỏ hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

* Các bước tiến hành:

+ Bước 1: Tìm phần hơn của hai phân số

+ Bước 2: So sánh hai phần hơn với nhau

+ Bước 3: Kết luận.

II. Bài toán.

Bài 1. So sánh hai phân số $\frac{8}{5}$ và $\frac{14}{11}$

Hướng dẫn

Hai phân số $\frac{8}{5}$ và $\frac{14}{11}$ có đặc điểm:

+ Đều lớn hơn 1 vì có tử số lớn hơn mẫu số.

+ Tử số - mẫu số = 3

Vậy ta sẽ chọn cách So sánh phần hơn với đơn vị của hai phân số.

Lời giải

Ta có : $\frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$; $\frac{14}{11} - 1 = \frac{3}{11}$.

Vì $\frac{3}{5} > \frac{3}{11}$ (hai phân số có cùng tử số, mẫu số có $5 < 11$).

Vậy $\frac{8}{5} > \frac{14}{11}$.

Bài 2. So sánh: $\frac{2016}{2012}$ và $\frac{2018}{2014}$

Hướng dẫn:

Hai phân số $\frac{2016}{2012}$ và $\frac{2018}{2014}$ có đặc điểm:

+ Đều lớn hơn 1 vì có tử số lớn hơn mẫu số.

+ Tử số - mẫu số = 4

Vậy ta sẽ chọn cách so sánh phần hơn với đơn vị của hai phân số.

Lời giải

Ta có : $\frac{2016}{2012} - 1 = \frac{4}{2012}$; $\frac{2018}{2014} - 1 = \frac{4}{2014}$.

Vì $\frac{4}{2012} > \frac{4}{2014}$ (hai phân số có cùng tử số, mẫu số có $2012 < 2014$)

Vậy $\frac{2016}{2012} > \frac{2018}{2104}$

Bài 3. So sánh hai phân số $\frac{43}{14}$ và $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Ta làm như sau:

Lấy tử số chia cho mẫu số: $43:14=3$ (dư 1)

$$10:3=3 \text{ (dư 1) .}$$

Chọn phần nguyên của thương làm số chung (có 3).

Thực hiện phép trừ: $\frac{43}{14}-3=\frac{1}{14}$; $\frac{10}{3}-3=\frac{1}{3}$.

Vậy ta có: $\frac{43}{14}=3+\frac{1}{14}$; $\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$.

Vì $\frac{1}{3} > \frac{1}{14}$ nên $\frac{43}{14} < \frac{10}{3}$.

Bài 4: So sánh hai phân số $\frac{77}{76}$ và $\frac{84}{83}$.

Lời giải

Ta có $\frac{77}{76}=1+\frac{1}{76}$; $\frac{84}{83}=1+\frac{1}{83}$

Vì $\frac{1}{76} > \frac{1}{83}$ nên $\frac{77}{76} > \frac{84}{83}$

Bài 5. So sánh hai phân số $\frac{13}{41}$ và $\frac{19}{71}$.

Lời giải

Ta làm như sau:

Lấy mẫu số chia cho tử số: $41:13=3$ (dư 2);

$$71:19=3 \text{ (dư 14).}$$

Chọn mẫu số của phân số chung bằng cách lấy phần nguyên của thương cộng $1:3+1=4$

Thực hiện phép trừ: $\frac{13}{41}-\frac{1}{4}=\frac{11}{164}$; $\frac{19}{71}-\frac{1}{4}=\frac{5}{284}$.

Vậy ta có: $\frac{13}{41}=\frac{1}{4}+\frac{11}{164}$; $\frac{19}{71}=\frac{1}{4}+\frac{5}{284}$.

Vì: $\frac{5}{284} < \frac{11}{284} < \frac{11}{164}$ nên $\frac{19}{71} < \frac{13}{41}$.

Bài 6. So sánh hai phân số $\frac{21}{89}$ và $\frac{2003}{8017}$.

Lời giải

Ta nhận thấy hai phân số đã cho nếu lấy mẫu số chia cho tử số thì đều được thương là 4 và số dư là 5 .

$$\text{Ta có: } 1: \frac{21}{89} = \frac{89}{21}; 1: \frac{2003}{8017} = \frac{8017}{2003}.$$

$$\text{Mà } \frac{89}{21} = 4 + \frac{5}{21}; \frac{8017}{2003} = 4 + \frac{5}{2003}.$$

$$\text{Vì } \frac{5}{21} > \frac{5}{2003} \text{ nên } \frac{89}{21} > \frac{8017}{2003}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{21}{89} < \frac{2003}{8017}.$$

Bài 7. Cho $A = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$ **và** $B = \frac{10^{2003} + 1}{10^{2004} + 1}$. **So sánh A và B.**

Lời giải

$$10A = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1}$$

$$10.B = \frac{10^{2004} + 10}{10^{2004} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2004} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{9}{10^{2003} + 1} > \frac{9}{10^{2004} + 1} \text{ (cùng tử số, mẫu số càng lớn thì phân số càng nhỏ)}$$

$$\text{Nên } 10.A > 10.B$$

$$\text{Hay: } A > B$$

Bài 8. So sánh các phân số sau $A = \frac{3535.232323}{353535.2323}$; $B = \frac{3535}{3534}$; $C = \frac{2323}{2322}$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{3535.232323}{353535.2323} = \frac{35.101.23.10101}{35.10101.23.101} = 1$$

$$B = \frac{3535}{3534} = 1 + \frac{1}{3534}$$

$$C = \frac{2323}{2322} = 1 + \frac{1}{2322}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{3534} < \frac{1}{2322} \text{ (cùng tử số, mẫu số càng lớn thì phân số càng nhỏ) nên } A < B < C.$$

Bài 9. So sánh các phân số sau $A = \frac{5.(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52}$; $B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548}$;

Lời giải

$$A = \frac{5.(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52} = \frac{5.11.13.(1.1 - 2.2)}{22.26.(1.1 - 2.2)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548} = \frac{138.(138 - 5)}{137.(137 - 4)} = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$$

Vì $\frac{1}{4} > \frac{1}{137}$ (cùng tử số, mẫu số càng lớn thì phân số càng nhỏ) nên $A > B$

Ta có: $A = \frac{5.(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52}$

Dạng 6: So sánh một tổng hoặc một tích nhiều phân số với một phân số.

I. Phương pháp giải.

Bước 1: Tìm số chữ số của tổng.

Bước 2: Tách số cố định thành tổng các chữ số.

Bước 3: So sánh từng số của tổng với các chữ số vừa tách.

Bước 4: Kết luận

II. Bài toán.

Bài 1. So sánh:

a) $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$ với 1 ;

b) $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{149} + \frac{1}{150}$ với $\frac{1}{3}$;

c) $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$ với $\frac{7}{12}$

Lời giải

a) Từ $\frac{1}{101}$ tới $\frac{1}{200}$ có tất cả 100 chữ số.

Mà $1 = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}$ (có 100 chữ số $\frac{1}{100}$)

Vì $\frac{1}{101} < \frac{1}{100}; \frac{1}{102} < \frac{1}{100}; \dots; \frac{1}{200} < \frac{1}{100}$ Nên:

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} < \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}$$

$$\rightarrow \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} < 1$$

Kết luận: Vậy nếu gặp dạng so sánh như trên (dấu hiệu so sánh 1 số với tổng dãy số), các em thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm số chữ số của tổng (ví dụ bài toán trên là 100 chữ số)

Bước 2: Tách số cố định thành tổng các chữ số (ví dụ trên là tách 1 thành tổng 100 chữ số)

Bước 3: So sánh từng số của tổng $\left(\frac{1}{101}; \frac{1}{102}; \dots\right)$ với các chữ số vừa tách $\left(\frac{1}{100}\right)$

Bước 4: Kết luận

b) $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{149} + \frac{1}{150}$ với $\frac{1}{3}$;

Bước 1: Từ $\frac{1}{101}$ tới $\frac{1}{150}$ có tất cả 50 chữ số.

Bước 2: Tách $\frac{1}{3} = \frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150}$ (có tất cả 50 chữ số $\frac{1}{150}$)

Bước 3: Vì $\frac{1}{101} > \frac{1}{150}; \frac{1}{102} > \frac{1}{150} \dots; \frac{1}{149} > \frac{1}{150}$

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150} > \frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150}$$

$$\rightarrow \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150} > \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{101} > \frac{1}{150}; \frac{1}{102} > \frac{1}{150} \dots; \frac{1}{149} > \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150} > \frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150}$$

$$\rightarrow \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150} > \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

Bước 4: Kết luận: $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150} > \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$ với $\frac{7}{12}$

Phần này khó hơn 2 phần a và b một chút, chúng ta sẽ phải kết hợp:

Chúng ta có $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150} > \frac{1}{3}$ (1)

Lại có: $\frac{1}{4} = \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200}$ (50 chữ số $\frac{1}{200}$)

Mà: $\frac{1}{151} > \frac{1}{200}; \frac{1}{152} > \frac{1}{200}; \dots; \frac{1}{199} > \frac{1}{200}$ Nên:

$$\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \dots + \frac{1}{200} > \frac{1}{4}$$

Cộng (1) và (2) chúng ta được:

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

Kết luận: $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200} > \frac{7}{12}$

Bài 2: Cho tổng : $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

Lời giải

$$S = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60} \right)$$

$$\Rightarrow S < \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50} \right)$$

hay $S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50}$

$$\text{suy ra } S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}$$

$$\text{Vậy } S < \frac{4}{5} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} \right)$$

$$\Rightarrow S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60}$$

$$S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60}$$

$$S > \frac{3}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

$$\text{Bài 3. So sánh } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{9999}{10000} \text{ với } B = \frac{1}{100}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } C = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{10000}{10001}$$

$$\text{So sánh từng số của } A \text{ với của } C \text{ ta thấy: } \frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \dots \text{ và } \frac{9999}{10000} < \frac{10000}{10001}$$

Vậy $A < C$

$$\rightarrow A \cdot A < A \cdot C = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{9999}{10000} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{10000}{10001} \right)$$

$$\rightarrow A^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{9999}{10000} \cdot \frac{10000}{10001} \right) \quad (\text{Rút gọn tử và mẫu lần lượt}).$$

$$\rightarrow A^2 < \frac{1}{10001} \text{ mà } \frac{1}{10001} < \frac{1}{10000} \quad (\text{mẫu càng lớn phân số càng nhỏ})$$

$$\rightarrow A^2 < \frac{1}{10000} = \left(\frac{1}{100} \right)^2$$

$$\rightarrow A < \frac{1}{100} = B$$

Kết luận: $A < B$

$$\text{Bài 4: Chứng minh rằng: } \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Lời giải

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

$$\text{Vậy } \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80}$$

$$= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } &= \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Bài 5: So sánh $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ và 1

Lời giải

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

...

...

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

Bài 6. So sánh $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$ với $\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3A = 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}}\right) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}\right)$$

$$\text{Suy ra } 3A - A = 1 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$2A = 1 - \frac{1}{3^{99}} \Rightarrow A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} < \frac{1}{2}$$

Bài 13: Cho $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100}$ và $N = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{100}{101}$

a) Chứng minh: $M < N$

b) Tìm tích $M.N$

c) Chứng minh: $M < \frac{1}{10}$

Lời giải

Nhận xét M và N đều có 45 thừa số:

a) Và $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$ nên $M < N$

b) Tích $M.N = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{100}{101} \right) = \frac{1}{101}$

c) Vì $M.N = \frac{1}{101}$ mà $M < N$ nên ta suy ra được: $M.M < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$

Tức là $M.M < \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \Rightarrow M < \frac{1}{10}$

Dạng 7: Dạng bài tập phối hợp nhiều phương pháp

I. Phương pháp giải.

* Phương pháp so sánh hai phân số bằng cách "nhân thêm cùng một số vào hai phân số"

- Ta sử dụng phương pháp nhân thêm cùng một số vào hai phân số khi nhận thấy tử số của hai phân số đều bé hơn mẫu số và nếu lấy mẫu số chia cho tử số thì có thương và số dư bằng nhau. Khi đó ta nhân cả hai phân số với cùng một số tự nhiên (là phần nguyên của thương) để đưa về dạng so sánh "phần bù"

Bài 1: So sánh hai phân số $\frac{11}{52}$ và $\frac{17}{76}$.

Lời giải

Ta nhận thấy hai phân số đã cho nếu lấy mẫu số chia cho tử số thì đều được thương là 4 và số dư là 8 nên ta nhân cả hai phân số với 4.

$$\text{Ta có: } \frac{11}{52} \times 4 = \frac{44}{52};$$

$$\frac{17}{76} \times 4 = \frac{68}{76} \cdot 1 - \frac{44}{52} = \frac{8}{52};$$

$$1 - \frac{68}{76} = \frac{8}{76}$$

$$\text{Vì } \frac{8}{52} > \frac{8}{76} \text{ nên } \frac{44}{52} < \frac{68}{76} \text{ hay } \frac{11}{52} < \frac{17}{76}.$$

* Phương pháp so sánh hai phân số bằng cách "phép chia hai phân số"

- Phương pháp này được sử dụng dựa vào nhận xét: "Trong phép chia, nếu số bị chia lớn hơn số chia thì được thương lớn hơn 1, nếu số bị chia bé hơn số chia thì được thương nhỏ hơn 1".

- Ta sử dụng phương pháp "chia hai phân số" khi nhận thấy tử số và mẫu số của hai phân số là những số có giá trị không quá lớn, không mất nhiều thời gian khi thực hiện phép nhân ở tử số và mẫu số.

Bài 2. So sánh hai phân số $\frac{2}{23}$ và $\frac{9}{41}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2}{23} : \frac{9}{41} = \frac{2}{23} \times \frac{41}{9} = \frac{82}{207}$.

Vì $\frac{82}{207} < 1$ nên $\frac{2}{23} < \frac{9}{41}$.

Bài 3: So sánh hai phân số $A = \frac{10^8 + 1}{10^9 + 1}$ và $B = \frac{10^9 + 1}{10^{10} + 1}$.

Lời giải

Cách 1: B là phân số nhỏ hơn 1. Nếu cộng cùng một số nguyên dương vào tử và mẫu của B thì giá trị của B tăng thêm. Do đó

$$B = \frac{10^9 + 1}{10^{10} + 1} < \frac{10^9 + 1 + 9}{10^{10} + 1 + 9} = \frac{10^9 + 10}{10^{10} + 10} = \frac{10(10^8 + 1)}{10(10^9 + 1)} = \frac{10^8 + 1}{10^9 + 1} = A$$

Vậy $B < A$.

Cách 2. (sau khi học phép nhân phân số)

$$10A = \frac{10(10^8 + 1)}{10^9 + 1} = \frac{10^9 + 10}{10^9 + 1} = 1 + \frac{9}{10^9 + 1}$$

$$10B = \frac{10(10^9 + 1)}{10^{10} + 1} = \frac{10^{10} + 10}{10^{10} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{10} + 1}$$

Ta thấy $\frac{9}{10^9 + 1} > \frac{9}{10^{10} + 1}$ (so sánh hai phân số cùng tử) nên $10A > 10B$.

Do đó $A > B$.

Bài 4. So sánh $A = \frac{2003^{2003} + 1}{2003^{2004} + 1}$ và $B = \frac{2003^{2002} + 1}{2003^{2003} + 1}$

Nhận thấy tử và mẫu có số mũ lớn và đều cách nhau là 2003, nên:

$$2003 \cdot A = \frac{2003 \cdot (2003^{2003} + 1)}{2003^{2004} + 1} = \frac{2003^{2004} + 2003}{2003^{2004} + 1} = 1 + \frac{2002}{2003^{2004} + 1}$$

$$2003 \cdot B = \frac{2003 \cdot (2003^{2002} + 1)}{2003^{2003} + 1} = \frac{2003^{2003} + 2003}{2003^{2003} + 1} = 1 + \frac{2002}{2003^{2003} + 1}$$

Vì $\frac{2002}{2003^{2004} + 1} < \frac{2002}{2003^{2003} + 1}$ (do cùng tử mà mẫu càng lớn phân số càng bé)

Nên $A < B$.

Bài 5. a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{490}$

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2 ($n \in N^*$)

Lời giải

a) $\frac{15}{301} < \frac{15}{300} = \frac{1}{20} = \frac{25}{500} < \frac{25}{499}$.

Vậy $\frac{15}{301} < \frac{25}{499}$

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2 ($n \in N^*$)

Với $\forall n \geq 2$ ta có: $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n}$.

Từ đó ta có:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^2} \right) + \left(\frac{4}{2^2} - \frac{5}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{2008}{2^{2006}} - \frac{2009}{2^{2007}} \right) = 2 - \frac{2009}{2^{2007}} < 2.$$

Vậy $S < 2$

Bài 6. Cho $A = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$ và $B = \frac{10^{2003} + 1}{10^{2004} + 1}$. So sánh A và B.

Lời giải

$$10.A = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1}$$

$$10.B = \frac{10^{2004} + 10}{10^{2004} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2004} + 1}$$

Vì $\frac{9}{10^{2003} + 1} > \frac{9}{10^{2004} + 1}$ (cùng tử số, mẫu số càng lớn thì phân số càng nhỏ)

Nên $10.A > 10.B$

Hay: $A > B$

Bài 7. So sánh hai phân số $\frac{13}{41}$ và $\frac{19}{71}$.

Lời giải

Lấy mẫu số chia cho tử số: $41:13 = 3$ (dư 2)

$$71:19 = 3 \text{ dư } 14).$$

Chọn mẫu số của phân số chung bằng cách lấy phần nguyên của thương cộng $1:3+1=4$ (có $\frac{1}{4}$)

Thực hiện phép trừ: $\frac{13}{41} - \frac{1}{4} = \frac{11}{164}$; $\frac{19}{71} - \frac{1}{4} = \frac{5}{284}$.

Vậy ta có:

$$\frac{13}{41} = \frac{1}{4} + \frac{11}{164}$$

$$\frac{19}{71} = \frac{1}{4} + \frac{5}{284}$$

Vì $\frac{5}{284} < \frac{11}{284} < \frac{11}{164}$ nên $\frac{19}{71} < \frac{13}{41}$.

Bài 8: Cho $A = \frac{199919991999}{20002002000}$ và $B = \frac{1999}{2000}$. Hãy so sánh A và B .

Lời giải

$$A = \frac{199919991999}{20002002000} = \frac{1999000000 + 19990000 + 1999}{2000000000 + 20000000 + 2000}$$

$$= \frac{1999(100000000 + 10000 + 1)}{2000(100000000 + 10000 + 1)}$$

$$= \frac{1999.100010001}{2000.100010001}$$

$$= \frac{1999}{2000} = B$$

Vậy $A = B$

Bài 9:

a) Chứng minh rằng các phân số sau bằng nhau: $\frac{25}{53}$; $\frac{2525}{5353}$; $\frac{252525}{535353}$

b) Không quy đồng mẫu hãy so sánh phân số sau $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{2525}{5353} = \frac{25.101}{53.101} = \frac{25}{53}$$

$$\frac{252525}{535353} = \frac{25.10101}{53.10101} = \frac{25}{53}$$

Vậy $\frac{25}{53} = \frac{2525}{5353} = \frac{252525}{535353}$

b) $\frac{300}{670} > \frac{300}{677}$ mà $\frac{300}{670} = \frac{30}{67} \Rightarrow \frac{30}{67} > \frac{300}{677}$ (1)

Ta có: $\frac{377}{677} > \frac{37}{67}$ $1 - \frac{37}{67} = \frac{30}{67}$ và $1 - \frac{377}{677} = \frac{300}{677}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{377}{677} > \frac{37}{67}$

Bài 10: So sánh $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1}$ và $B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$

Lời giải

Ta có : $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu)

$$\Rightarrow A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < \frac{(10^{11}-1)+11}{(10^{12}-1)+11} = \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10} = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 11: So sánh $M = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $N = \frac{2004+2005}{2005+2006}$

Lời giải

Ta có $\frac{2004}{2005} > \frac{2004}{2005+2006}$

$$\frac{2005}{2006} > \frac{2005}{2005+2006}$$

Cộng vế với vế ta được $M > N$

Bài 12: So sánh $\frac{37}{39}$ và $\frac{3737}{3939}$

Lời giải

$$\frac{37}{39} = \frac{3700}{3900} = \frac{3700+37}{3900+39} = \frac{3737}{3939} \text{ (áp dụng tính chất } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \text{.)}$$

Bài 13: Cho $a, b, m \in \mathbb{N}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+m}{b+m}$ và $\frac{a}{b}$

Lời giải

Xét các trường hợp $\frac{a}{b} = 1$; $\frac{a}{b} < 1$; $\frac{a}{b} > 1$

a) Trường hợp $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$ thì $\frac{a+m}{b+m} = \frac{a}{b} = 1$

b) Trường hợp $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a+m < b+m$

$$\frac{a+m}{b+m} \text{ có "phần bù" tới 1 là } \frac{b-a}{b+m}$$

$$\frac{a}{b} \text{ có "phần bù" tới 1 là } \frac{b-a}{b}, \text{ vì } \frac{b-a}{b+m} < \frac{b-a}{b} \text{ nên } \frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}.$$

c) Trường hợp $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow a+m > b+m$

$$\frac{a+m}{b+m} \text{ có "phần thừa" tới 1 là } \frac{b-a}{b+m}$$

$$\frac{a}{b} \text{ có "phần thừa" tới 1 là } \frac{a-b}{b}, \text{ vì } \frac{a-b}{b+m} < \frac{a-b}{b} \text{ nên } \frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}.$$

Bài 14: Cho tổng : $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng minh: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

Lời giải

Tổng S có 30 số hạng, cứ nhóm 10 số hạng thành một nhóm. Giữ nguyên tử, nếu thay mẫu bằng một mẫu khác lớn hơn thì giá trị của phân số sẽ giảm đi. Ngược lại, nếu thay mẫu bằng một mẫu khác nhỏ hơn thì giá trị của phân số sẽ tăng lên.

$$\text{Ta có } S = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$\Rightarrow S < \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right) \text{ hay } S < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50}$$

$$\text{Tức là: } S < \frac{47}{60} < \frac{48}{60} \text{ Vậy } S < \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } S > \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}\right)$$

$$\Rightarrow S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60}$$

$$\text{Tức là: } S > \frac{37}{60} > \frac{36}{60} \text{ vậy } S > \frac{3}{5} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$$

Bài 15: So sánh

$$\text{a) } A = \left(\frac{1}{80}\right)^7 \text{ và } B = \left(\frac{1}{243}\right)^6;$$

$$\text{b) } C = \left(\frac{3}{8}\right)^5 \text{ và } D = \left(\frac{5}{243}\right)^3$$

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức } \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \& \left(x^m\right)^n = x^{m.n}$$

$$\text{a) } A = \left(\frac{1}{80}\right)^7 > \left(\frac{1}{81}\right)^7 = \left(\frac{1}{3^4}\right)^7 = \frac{1}{3^{28}}$$

$$B = \left(\frac{1}{243}\right)^6 = \left(\frac{1}{3^5}\right)^6 = \frac{1}{3^{30}};$$

$$\text{Vì } \frac{1}{3^{28}} > \frac{1}{3^{30}} \text{ nên } A > B$$

$$\text{b) } C = \left(\frac{3}{8}\right)^5 = \left(\frac{3}{2^3}\right)^5 = \frac{243}{2^{15}}$$

$$D = \left(\frac{5}{243}\right)^3 = \left(\frac{5}{3^5}\right)^3 = \frac{125}{3^{15}}.$$

$$\text{Chọn } \frac{125}{2^{15}} \text{ làm phân số trung gian, so sánh } \frac{125}{2^{15}} > \frac{125}{3^{15}}$$

$$\text{Vậy } C > D.$$

Bài 16: Cho $a, m, n \in \mathbb{N}^*$. Hãy so sánh: $A = \frac{10}{a^m} + \frac{10}{a^n}$ và $B = \frac{11}{a^m} + \frac{9}{a^n}$

Lời giải

$$A = \left(\frac{10}{a^m} + \frac{9}{a^n} \right) + \frac{1}{a^n}$$

$$B = \left(\frac{10}{a^m} + \frac{9}{a^n} \right) + \frac{1}{a^m}$$

Muốn so sánh A và B, ta so sánh $\frac{1}{a^n}$ và $\frac{1}{a^m}$ bằng cách so sánh các trường hợp sau:

a) Với $a = 1$ thì $a^m = a^n \Rightarrow A = B$

b) Với $a \neq 0$:

- Nếu $m = n$ thì $a^m = a^n \Rightarrow A = B$
- Nếu $m < n$ thì $a^m < a^n \Rightarrow \frac{1}{a^m} > \frac{1}{a^n} \Rightarrow A < B$
- Nếu $m > n$ thì $a^m > a^n \Rightarrow \frac{1}{a^m} < \frac{1}{a^n} \Rightarrow A > B$

Bài 17: So sánh P và Q, biết rằng $P = \frac{31}{2} \cdot \frac{32}{2} \cdot \frac{33}{2} \dots \frac{60}{2}$ và $Q = 1.3.5.7 \dots 59$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{31}{2} \cdot \frac{32}{2} \cdot \frac{33}{2} \dots \frac{60}{2} = \frac{31.32.33 \dots 60}{2^{30}} = \frac{(31.32.33.60).(1.2.3 \dots 30)}{2^{30} \cdot (1.2.3 \dots 30)} \\ &= \frac{(1.3.5 \dots 59).(2.4.6 \dots 60)}{2.4.6 \dots 60} = 1.3.5 \dots 59 = Q \end{aligned}$$

Vậy $P = Q$

Bài 18: Sắp xếp các phân số $\frac{47}{223}, \frac{17}{98}, \frac{27}{148}, \frac{37}{183}$ theo thứ tự tăng dần

Lời giải

Xét các phân số nghịch đảo $\frac{223}{47}, \frac{98}{17}, \frac{148}{27}, \frac{183}{37}$,

Nếu đổi ra hỗn số là $4\frac{35}{47}, 5\frac{13}{17}, 5\frac{13}{27}, 4\frac{35}{37}$

Ta thấy: $5\frac{13}{17} > 5\frac{13}{27} > 4\frac{35}{37} > 4\frac{35}{47}$

Suy ra $\frac{17}{98} < \frac{27}{148} < \frac{37}{183} < \frac{47}{223}$ (vì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{d}{c}$)

Bài 19: So sánh P và Q, biết rằng: $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Lời giải

$$Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$$

$$= \frac{2010}{2011+2012+2013} + \frac{2011}{2011+2012+2013} + \frac{2012}{2011+2012+2013}$$

$$\text{Vi } \frac{2010}{2011+2012+2013} < \frac{2010}{2011}$$

$$\frac{2011}{2011+2012+2013} < \frac{2011}{2012}$$

$$\frac{2012}{2011+2012+2013} < \frac{2012}{2013}$$

Cộng vế với vế ta có:

$$\frac{2010}{2011+2012+2013} + \frac{2011}{2011+2012+2013} + \frac{2012}{2011+2012+2013} < \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$$

Vậy: $Q < P$

Bài 20: So sánh A và B , biết rằng: $A = \frac{2005^{2005} + 1}{2005^{2006} + 1}$ và $B = \frac{2005^{2004} + 1}{2005^{2005} + 1}$

Lời giải

$$A = \frac{2005^{2005} + 1}{2005^{2006} + 1} < \frac{2005^{2005} + 1 + 2004}{2005^{2006} + 1 + 2004} = \frac{2005 \cdot (2005^{2004} + 1)}{2005 \cdot (2005^{2005} + 1)} = \frac{2005^{2004} + 1}{2005^{2005} + 1} = B.$$

Vậy $A < B$,

Bài 21: Hãy so sánh hai phân số $\frac{1999}{2000}$ và $\frac{19992000}{20002000}$ bằng tất cả các cách có thể được

Lời giải

Cách 1: Quy đồng mẫu số rồi so sánh tử.

Mẫu chung là 20002000

$$\text{Ta có: } \frac{1999}{2000} = \frac{19991999}{20002000}; \text{ giữ nguyên } \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{Vi } \frac{19991999}{20002000} < \frac{19992000}{20002000} \text{ Nên } \frac{1999}{2000} < \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{Cách 2: } \frac{1999}{2000} = \frac{19991999}{20002000} < \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{Vậy } \frac{1999}{2000} < \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{Cách 3: } \frac{1999}{2000} + \frac{1}{2000} = \frac{19992000}{20002000} + \frac{10000}{20002000} = 1$$

$$\text{Vậy } \frac{1999}{2000} < \frac{19992000}{20002000}$$

❧ HẾT ❧