2020

Bồi dưỡng HSG THCS và ôn thi vào 10 chuyên

=== NGUYỄN TÀI CHUNG ===

Sử dụng nguyên lí Dirichle chứng minh bất đẳng thức

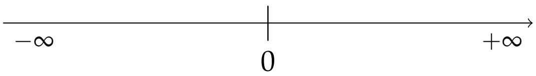
Pleiku 24/05/2020

MỤC LỤC

SỬ DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLE TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ GIẢI TOÁN

Nếu nhốt 3 con chim Bồ Câu vào trong 2 cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất 2 con chim Bồ Câu. Khẳng định gần như hiển nhiên này được gọi là Nguyên lý Dirichle. Bây giờ ta hình dung trên trục số, điểm 0 chia trục số thành 2 phần, hay 2 cái chuồng mà vách ngăn là số 0.



Như thế với ba số a, b, c mà ta xem như là 3 con chim Bồ Câu thì sẽ có một cái chuồng chứa ít nhất hai con chim Bồ Câu, nghĩa là sẽ có hai số cùng không âm (tức là có hai con chim Bồ Câu cùng thuộc chuồng $[0;+\infty)$) hoặc cùng không dương (tức là có hai con chim Bồ Câu cùng thuộc chuồng $(-\infty;0]$). Do đó ta có thể giả sử có hai số, mà ta gọi là a và b, sao cho $ab \geq 0$. Như vậy, trong bài toán bất đẳng thức, khi ta đã chọn được "điểm rơi" (tức là đẳng thức của bài toán), ví dụ như đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = k$ thì ta có thể giả sử 2 số $(a-k)$, $(b-k)$ cùng không âm hoặc cùng không dương, tức là có thể giả sử $(a-k)(b-k) \geq 0$.

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2\left(ab + bc + ca\right).$$

Lời giải

Cách 1. Ta có sự tương đương

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2\left(ab + bc + ca\right)\\
\Leftrightarrow &\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(c^2 - 2c + 1\right) + 2abc - 2ac - 2bc + 2c \geq 0\\
\Leftrightarrow &(a-b)^2 + (c-1)^2 + 2c\left(a-1\right)\left(b-1\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1$; $b-1$; $c-1$ luôn tồn tại hai số không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\left(a-1\right)\left(b-1\right) \geq 0$. Khi đó $2c\left(a-1\right)\left(b-1\right) \geq 0$. Vậy ta được điều phải chứng minh.

Cách 2. không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$ thì

$$ab \geq a + b - 1 \Rightarrow 2abc \geq 2ac + 2bc - 2c.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc - 2c + 1\\
&\geq 2ab + (c-1)^2 + 2ac + 2bc \geq 2(ab + bc + ca).
\end{aligned}$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý. Bạn đọc cần lưu ý bài toán 1 này, kết quả của nó còn được sử dụng trong một số bài toán khác, chẳng hạn như bài toán 5 ở trang 5, bài toán 7 ở trang 5.

Bài 2 (APMO 2005)**.** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số a^2-1; b^2-1; c^2-1 luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right) \geq 0.$$

Ta có

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right) = \left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)+3\left(a^2+b^2+1\right).$$

Do đó $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right) \geq 3\left(a^2+b^2+1\right)$. Như vậy

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 3\left(a^2+b^2+1\right)\left(c^2+2\right).$$

Ta cần chứng minh

$$3\left(a^2+b^2+1\right)\left(c^2+2\right) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$(a+b+c)^2 = (a.1+b.1+1.c)^2 \leq \left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)^2 = \left(a^2+b^2+1\right)\left(2+c^2\right).$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý.

① Theo dõi lời giải ta thấy rằng, bất đẳng thức

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 3(a+b+c)^2$$

đúng với mọi số thực a, b, c (không cần điều kiện a, b, c dương).

② Ngoài cách giải như trên, ta còn có thể đưa ra một lời giải rất "điệu nghệ" như sau: Ta có

$$\begin{aligned}\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right) &= 2\left(a^2+b^2\right)+a^2b^2+4\\ &= 2\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2b^2+1\right)+3\\ &\geq 2\left(a^2+b^2\right)+2ab+3\\ &\geq \frac{3(a+b)^2}{2}+3.\end{aligned}$$

Vậy để giải bài toán, ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{(a+b)^2}{2}+1\right)\left(2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2.$$

Tuy nhiên điều này được kiểm chứng dễ dàng nhờ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như sau:

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}+1\cdot c\right)^2 \leq \left(\frac{(a+b)^2}{2}+1\right)\left(2+c^2\right).$$

③ Ta có thể làm bài tập 2 mạnh hơn bởi bài tập 3 ở ngay phía sau.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2.$$

Lời giải

Ta có sự tương đương

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2 \\
\Leftrightarrow & a^2+b^2+c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+7+2abc \geq 6\left(ab+bc+ca\right).
\end{aligned}$$

Ta có: $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2\left(ab+bc+ca\right)$ (do ví dụ 1 ở trang 2). Lại có

$$\begin{aligned}
a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3 &= \left(a^2b^2+1\right)+\left(b^2c^2+1\right)+\left(c^2a^2+1\right) \\
&\geq 2ab+2bc+2ca.
\end{aligned}$$

Do đó $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2+6 \geq 4ab+4bc+4ca$. Như vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 6. Chứng minh rằng

$$3\left(ab+bc+ca\right)-abc \leq 28.$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a-2; b-2; c-2$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$\left(a-2\right)\left(b-2\right) \geq 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
& ab+4 \geq 2a+2b \Leftrightarrow abc+4c \geq 2ac+2bc \\
\Leftrightarrow & 4c-2ac-2bc \geq -abc.
\end{aligned}$$

Do đó

$$3\left(ab+bc+ca\right)-abc \leq 3\left(ab+bc+ca\right)+4c-2ac-2bc.$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
& 3ab+bc+ca+4c \leq 28 \\
\Leftrightarrow & 3ab+c\left(a+b\right)+4c \leq 28 \\
\Leftrightarrow & 3ab+c\left(6-c\right)+4c \leq 28.
\end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
3ab+c\left(6-c\right)+4c &\leq \frac{3}{4}(a+b)^2+6c-c^2+4c \\
&\leq \frac{3}{4}(6-c)^2+10c-c^2.
\end{aligned}$$

Do đó

$$3ab+c\left(6-c\right)+4c \leq -\frac{1}{4}c^2+c+27 = -\left(\frac{1}{2}c-1\right)^2+28 \leq 28.$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

B. BÀI TẬP

1. Đề bài

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương có $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2\left(a + b + c\right).$$

Bài 6 (Rumania Mathematical Olympiad 2006).
Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq \left(a + 1\right)\left(b + 1\right)\left(c + 1\right).$$

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4.$$

Bài 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2\left(ab + bc + ca\right).$$

Bài 10 (HSG Toán 9, Gia Lai 2018-2019).
Xét x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - 2xyz$.

Bài 11 (IMO 1984). Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}.$$

Bài 12 (T3/476-Toán học & Tuổi trẻ, tháng 2 năm 2017).
Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2(ab + bc + ca) - abc.$$

Bài 13. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2 + 2\right)\left(b^2 + 2\right)\left(c^2 + 2\right) \geq 9\left(ab + bc + ca\right).$$

Bài 14. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$9abc + 1 \geq 4\left(ab + bc + ca\right).$$

Bài 15. Cho a, b, c là các số dương sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh:

① $ab + bc + ca - abc \leq 2$. **(USA 2001)**

② $a + b + c \leq 3$. **(Iran 2002)**

Bài 16 (P131, Tạp chí Pi, tháng 1 năm 2018).
Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) \leq 3 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx.$$

Bài 17. Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

Bài 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2 = abc$. Chứng minh rằng:

$$2\left(a + b + c\right) \leq ab + bc + ca.$$

Bài 19 (Mathematical Reflections 3/2020).
Xét a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{1+a} + \frac{3}{1+b} + \frac{3}{1+c} - \frac{4}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 4.$$

Bài 20. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2 + 1\right)\left(b^2 + 1\right)\left(c^2 + 1\right) \geq \frac{5}{16}(a + b + c + 1)^2.$$

Bài 21. Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\left(a^2 - a + 1\right)\left(b^2 - b + 1\right)\left(c^2 - c + 1\right) \geq 1.$$

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$abc + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right] \geq a + b + c.$$

Bài 23. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8 \geq 5\left(a+b+c\right).$$

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$5\left(a^3+b^3+c^3\right)+3abc+9 \geq 9\left(ab+bc+ca\right).$$

Bài 25. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right) \geq 3.$$

Bài 26. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1} \geq 1.$$

Bài 27. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq 1.$$

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3.$$

Bài 29 (Đề thi HSG 9, tỉnh Bắc Ninh, năm 2018).
Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx \neq 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{x+1}{y+1}+\dfrac{y+1}{z+1}+\dfrac{z+1}{x+1} \leq \dfrac{25}{3\sqrt[3]{4(xy+yz+zx)}}$.

Bài 30 (Chọn đội tuyển Toán vòng 1 THPT Chuyên Hùng - Gia Lai 2020-2021).
Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3+16}+\frac{b}{c^3+16}+\frac{c}{a^3+16} \geq \frac{1}{6}.$$

Bài 31 (P43, Tạp chí Pi, tháng 7 năm 2017).
Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(2-a)(2-b)(2-c) \geq abc.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 32 (P47, Tạp chí Pi, tháng 4 năm 2017).
Tìm số thực k bé nhất sao cho với mọi bộ ba số thực không âm a, b, c, ta luôn có

$$abc + k\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) + 2 \geq a + b + c.$$

Bài 33 (Chọn đội tuyển HSG Toán 12, Tỉnh Đồng Tháp năm học 2019-2020).
Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca)^2 + 9 \geq 18abc.$$

Bài 34 (Chọn đội tuyển HSG Toán 12, Tỉnh Bến Tre năm học 2019-2020).
Tìm số nguyên nhỏ nhất n sao cho với n số thực phân biệt $a_1, a_2 \ldots, a_n$ lấy từ đoạn $[1; 1000]$ luôn tồn tại a_i, a_j thỏa $0 < a_i - a_j < 1 + 3\sqrt[3]{a_i a_j}$ với $i, j \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

2. Lời giải

Bài 5. Xét $a-1, b-1, c-1$; theo nguyên lí Đi-rich-lê, có thể giả sử

$$\begin{cases} a-1 \geq 0 \\ b-1 \geq 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a-1 \leq 0 \\ b-1 \leq 0. \end{cases}$$

Do $abc = 1$ nên $2c = \dfrac{2}{ab}, \dfrac{1}{c^2} = a^2b^2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + a^2b^2 + 3 \geq 2\left(a + b + \frac{1}{ab}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{ab}\right) + a^2b^2 - 2a - 2b + 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + 2(a-1)(b-1) + (ab-1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.
Lưu ý. Áp dụng bài toán 1, ta cũng nhanh chóng đưa ra được lời giải của bài toán 5 này. Thật vậy, theo bài toán 1 thì

$$\begin{aligned} & (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2(abc)^2 + 1 \geq 2(abbc + abca + bcca) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c). \end{aligned}$$

Bài 6. Xét bất đẳng thức $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$. (1)
Cách 1. Do $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 9 - 2(ab+bc+ca)$ nên bất đẳng thức (1) tương đương

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c} + 3 + 2(ab + bc + ca) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a^2}+\frac{(b-1)^2}{b^2}+\frac{(c-1)^2}{c^2}+2(ab+bc+ca)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 12.$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6. \tag{2}$$

Thật vậy, theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a-1$, $b-1$, $c-1$ ta luôn chọn được hai số có tích không âm, không mất tính tổng quát ta giả sử

$$(a-1)(b-1)\geq 0 \Leftrightarrow ab\geq a+b-1.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{VT}(2)&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{c}+ab+c(a+b)\\ &\geq \frac{4}{a+b}+\frac{1}{c}+(a+b-1)+c(3-c)\\ &=\frac{4}{3-c}+\frac{1}{c}+(2-c)+c(3-c)\\ &=\frac{4}{3-c}+\frac{1}{c}+2+2c-c^2\ \ (0<c<3).\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\dfrac{4}{3-c}+\dfrac{1}{c}+2+2c-c^2\geq 6.$ (3)

Ta có

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow \frac{4}{3-c}+\frac{1}{c}\geq c^2-2c+4\\ &\Leftrightarrow 3c+3\geq (3c-c^2)(c^2-2c+4)\\ &\Leftrightarrow 3c+3\geq -c^4+5c^3-10c^2+12c\\ &\Leftrightarrow c^4-5c^3+10c^2-9c+3\geq 0\\ &\Leftrightarrow (c-1)^2\left(c^2-3c+3\right)\geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng và ta có điều phải chứng minh.

Cách 2. Đặt $T=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-(a^2+b^2+c^2)$.

Với $x>0$ ta có $x+\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{(x-1)^2}{x}\geq 0\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}\geq 2$. Do đó

$$\begin{aligned}T&=\left(\frac{1}{a^2}-a^2\right)+\left(\frac{1}{b^2}-b^2\right)+\left(\frac{1}{c^2}-c^2\right)\\ &=\left(\frac{1}{a}-a\right)\left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}-b\right)\left(\frac{1}{b}+b\right)+\left(\frac{1}{c}-c\right)\left(\frac{1}{c}+c\right)\\ &\geq 2\left[\left(\frac{1}{a}-a\right)+\left(\frac{1}{b}-b\right)+\left(\frac{1}{c}-c\right)\right]\\ &=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-(a+b+c)\right)\end{aligned}$$

$$\geq 2\left(\frac{9}{a+b+c}-(a+b+c)\right)$$
$$=0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 7. Ta có sự tương đương:

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geq (a+1)(b+1)(c+1)\\
\Leftrightarrow &a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geq abc+ab+bc+ca+a+b+c+1\\
\Leftrightarrow &2a^2+2b^2+2c^2+4abc+4 \geq 2abc+2ab+2bc+2ca+2a+2b+2c.
\end{aligned}$$

Theo ví dụ 1 ở trang 2, ta được

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca). \tag{1}$$

Mặt khác, do $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0$ nên

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2a+2b+2c. \tag{2}$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được điều phải chứng minh.

Bài 8. Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1; b-1; c-1$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Do đó, không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0.$$

Khi đó

$$c(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow abc \geq c(a+b-1) = c(2-c).$$

Mặt khác

$$a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{(3-c)^2}{2}.$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{(3-c)^2}{2}+c^2+c(2-c) \geq 4\\
\Leftrightarrow &9-6c+c^2+4c-8 \geq 0 \Leftrightarrow (c-1)^2 \geq 0 \ \text{(đúng)}.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 9. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a-1; b-1; c-1$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Do đó, không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0.$$

Khi đó

$$c(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow abc \geq ac+bc-c.$$

Ta có $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Theo ví dụ 1 ở trang 2, ta có

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2+a+b+c+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)+3$. Mà $abc=1$ nên

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c \geq 2(ab+bc+ca).$$

Bài 10. Nếu chia trục số thành hai phần bởi số 0, thì trong 3 số $(2x-1)$, $(2y-1)$, $(2z-1)$ luôn tồn tại hai số nằm về cùng phía, không mất tính tổng quát giả sử

$$(2x-1)(2y-1) \geq 0 \Rightarrow 2(x+y) - 4xy \leq 1 \Rightarrow z(x+y) - 2xyz \leq \frac{z}{2}.$$

Từ $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$ suy ra

$$1 - z^2 = 2xyz + x^2 + y^2 \geq 2xy + 2xyz = 2xy(z+1) \Rightarrow xy \leq \frac{1-z}{2}.$$

Vì vậy $P = xy + yz + zx - 2xyz \leq \dfrac{1-z}{2} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Với $x = y = z = \dfrac{1}{2}$ thì P bằng $\dfrac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{1}{2}$.

Bài 11. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a - \dfrac{1}{3}; b - \dfrac{1}{3}; c - \dfrac{1}{3}$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) \geq 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & ab + \frac{1}{9} \geq \frac{1}{3}(a+b) \\ \Leftrightarrow & abc + \frac{c}{9} \geq \frac{1}{3}c(a+b) \Leftrightarrow -2abc \leq \frac{2c}{9} - \frac{2}{3}c(a+b). \end{aligned}$$

Đặt $T = ab + bc + ca - 2abc - \dfrac{7}{27}$. Ta có

$$\begin{aligned} T &= ab + bc + ca - 2abc - \frac{7}{27} \leq ab + bc + ca + \frac{2c}{9} - \frac{2}{3}c(a+b) - \frac{7}{27} \\ &= \frac{2}{9}c + \frac{1}{3}c(a+b) + ab - \frac{7}{27} \leq \frac{2}{9}c + \frac{1}{3}c(1-c) + \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{7}{27} \\ &= \frac{2}{9}c + \frac{1}{3}c(1-c) + \frac{(1-c)^2}{4} - \frac{7}{27} = \frac{5c-3c^2}{9} + \frac{1-2c+c^2}{4} - \frac{7}{27} \\ &= \frac{20c - 12c^2 + 9 - 18c + 9c^2}{36} - \frac{7}{27} = \frac{9+2c-3c^2}{36} - \frac{7}{27} \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{9+2c-3c^2}{4} - \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{27+6c-9c^2-28}{12} \\ &= \frac{-9c^2+6c-1}{9 \cdot 12} = -\frac{(3c-1)^2}{9 \cdot 12} \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 12.
Cách 1. Theo nguyên lý Dirichlet, trong 3 số $a-1$, $b-1$, $c-1$ luôn có hai số có tích không âm. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$. (1)
Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1 \Leftrightarrow abc \geq ac + bc - c.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và sử dụng giả thiết $a+b+c=3$, ta có:

$$\begin{aligned}
P &= 2(ab+bc+ca)-abc \le 2(ab+bc+ca)-ac-bc+c = 2ab+c(a+b)+c\\
&\le 2\cdot\frac{(a+b)^2}{4}+c(a+b)+c = \frac{(3-c)^2}{2}+c(3-c)+c\\
&= \frac{c^2}{2}-3c+\frac{9}{2}+3c-c^2+c = 5-\frac{(c-1)^2}{2}\le 5.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy $\max P=5$.
Cách 2. Vì P là đa thức đối xứng theo ba biến a, b, c nên ta có thể giả thiết $a\ge b\ge c$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&3a\ge a+b+c\ge 3c \Leftrightarrow 3a\ge 3\ge 3c \Leftrightarrow a\ge 1\ge c\\
\Rightarrow &(a-1)(c-1)\le 0.\\
\Rightarrow &0<ac\le a+c-1=3-b-1=2-b.
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= 2(ab+bc+ca)-abc = 2b(a+c)+2ac-abc = 2b(3-b)+ac(2-b)\\
&\le 2b(3-b)+(2-b)^2 = -b^2+2b+4 = 5-(b-1)^2\le 5.
\end{aligned}$$

Từ đây thấy ngay rằng $P=5$ khi $a=b=c=1$. Vậy $\max P=5$.

Bài 13. Theo bài toán 2 ở trang 3, ta có

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3(a+b+c)^2.$$

Mặt khác $(a+b+c)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$. Như vậy, ta được điều phải chứng minh.

Bài 14. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a-\frac{1}{3}; b-\frac{1}{3}; c-\frac{1}{3}$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)\ge 0.$$

Khi đó

$$9ab+1\ge 3a+3b \Leftrightarrow 9abc+c\ge 3ac+3bc.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
9abc+1-4\left(ab+bc+ca\right) &\ge 3ac+3bc-c+1-4ab-4ac-4bc\\
&= 1-ac-bc-c-4ab.
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&1-ac-bc-c-4ab\ge 0 \Leftrightarrow 4ab+ac+bc+c\le 1\\
\Leftrightarrow &4ab+ac+bc+c\le (a+b+c)^2\\
\Leftrightarrow &4ab+ac+bc+c\le a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\\
\Leftrightarrow &a^2+b^2+c^2-2ab+ac+bc-c\ge 0\\
\Leftrightarrow &(a-b)^2+c\left(a+b+c\right)-c\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 15. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a-1; b-1; c-1$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0.$$

① Khi đó

$$\begin{aligned} & ab+1 \geq a+b \\ \Leftrightarrow & abc+c \geq ac+bc \Leftrightarrow -abc \leq c-ac-bc. \end{aligned}$$

Do đó $ab+bc+ca-abc \leq ab+bc+ca+c-ac-bc = ab+c$.
Ta cần chứng minh $ab+c \leq 2$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & 4 = a^2+b^2+c^2+abc \geq 2ab+c^2+abc \\ \Rightarrow & 4-c^2 \geq ab(c+2) \\ \Leftrightarrow & 2-c \geq ab \Leftrightarrow 2 \geq c+ab. \end{aligned}$$

② Theo ví dụ 1 ở trang 2, ta có

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow & 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc+1 \geq (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow & 2\left(a^2+b^2+c^2+abc\right)+1 \geq (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow & (a+b+c)^2 \leq 9 \Leftrightarrow a+b+c \leq 3. \end{aligned}$$

Bài 16. **Cách 1:** Ta chứng minh hai bất đẳng thức sau:

☑ Chứng minh bất đẳng thức

$$2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \leq 3. \tag{1}$$

Áp dụng giả thiết bài toán vào (1) ta viết lại là

$$2(xy+yz+zx) \leq 1+4xyz. \tag{2}$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số x, y, z tồn tại hai số hoặc cùng không lớn hơn $\frac{1}{2}$ hoặc cùng không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$. Do vai trò của x, y, z là như nhau nên ta có thể giả sử hai số có tính chất vừa nêu là x và y. Khi đó

$$(2x-1)(2y-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2(y+x) \leq 4xy+1. \tag{3}$$

Do đó, từ (3) cho ta

$$2(yz+zx) \leq 4xyz+z. \tag{4}$$

Từ giả thiết bài toán, kết hợp với $x^2+y^2 \geq 2xy$ ta được

$$\begin{aligned} (1-z)(1+z) &= 1-z^2 \\ &= x^2+y^2+2xyz \\ &\geq 2xy(1+z). \end{aligned}$$

Từ đó, vì $1+z>0$ nên $2xy \leq 1-z$. (5)
Cộng (4) và (5) theo vế ta được (2) và do đó, (1) được chứng minh.

☑ Chứng minh bất đẳng thức

$$3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx \geq 3. \qquad (6)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số dương, từ giả thiết bài toán cho ta

$$1 = x^2+y^2+z^2+2xyz \geq 4\sqrt[4]{2x^3y^3z^3}$$

Do đó $xyz \leq \dfrac{1}{8}$. Vì thế, theo bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 6.$$

Suy ra

$$xy+yz+zx \geq 6xyz.$$

Vì vậy với giả thiết của bài toán, ta có

$$3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx \geq 3(x^2+y^2+z^2)+6xyz = 3.$$

Vậy bất đẳng thức (6) được chứng minh.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2: Để chứng minh bất đẳng thức đề bài cho, ta sẽ chứng minh hai bất đẳng thức sau:

☑ Chứng minh bất đẳng thức

$$2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \leq 3$$

Trước hết, ta chứng minh

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy} = 2. \qquad (7)$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}-2 = \frac{xyz(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)} = 0.$$

Từ (7) ta có

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{x^2}{x^2+xyz}+\frac{y^2}{y^2+xyz}+\frac{z^2}{z^2+xyz} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3xyz} \\ &= \frac{2(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+6xyz} \\ &= \frac{2(x+y+z)^2}{3-x^2-y^2-z^2}. \end{aligned}$$

Suy ra $3-x^2-y^2-z^2 \geq (x+y+z)^2$ hay $2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \leq 3$.

- Chứng minh bất đẳng thức

$$3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx \geq 3$$

tương tự như cách 1.

Nhận xét 1. Nếu đặt $a=2x, b=2y, c=2z$ thì giả thiết bài toán được viết dưới dạng

$$a^2+b^2+c^2+abc=4$$

và bất đẳng thức (2) trong lời giải cách 1 được viết dưới dạng

$$ab+bc+ca \leq 2+abc.$$

Bất đẳng thức trên đã xuất hiện trong kỳ thi Olympic Toán học của Mỹ (USAMO) năm 2001 và cũng đã được trình bày trong chuyên đề này (ý 1 của bài toán 15).

Bài 17. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a-1; b-1; c-1$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0.$$

Khi đó

$$c(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq ac+bc-abc.$$

Như vậy $a+b+c \geq a+b+ac+bc-abc$.
Ta cần chứng minh $a+b \geq ab+abc$. Ta có

$$ab+bc+ca+abc=4 \Leftrightarrow c=\frac{4-ab}{a+b+ab}.$$

Khi đó, ta có sự tương đương

$$\begin{aligned}
&a+b \geq ab+abc \Leftrightarrow\ a+b \geq ab\left(1+\frac{4-ab}{a+b+ab}\right)\\
&\Leftrightarrow (a+b)(a+b+ab) \geq ab(4+a+b)\\
&\Leftrightarrow (a+b)^2+(a+b)ab \geq 4ab+ab(a+b)\\
&\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 18. Ta có $abc=a+b+c+2 \underset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{abc}+2$. Do đó

$$\begin{aligned}
&abc-3\sqrt[3]{abc}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{abc}-2\right)\left(\sqrt[3]{abc}^2+2\sqrt[3]{abc}+1\right) \geq 0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{abc}-2\right)\left(\sqrt[3]{abc}+1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \geq 2 \Leftrightarrow abc \geq 8.
\end{aligned}$$

Khi đó $a+b+c+2 \geq 8 \Leftrightarrow a+b+c \geq 6$. Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $a-2$, $b-2$, $c-2$ cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-2)(b-2) \geq 0 \Rightarrow 2(a+b) \leq 4+ab \Rightarrow 2c+ab+4 \geq 2(a+b+c).$$

Ta cần chứng minh $ab + bc + ca \geq 2c + ab + 4$. Hay cần chứng minh $bc + ca \geq 2c + 4$. Ta có:

$$\begin{aligned}
&a + b + c + 2 = abc \leq \frac{(a+b)^2}{4}.c \\
\Rightarrow &a + b + 2 \leq c\left(\frac{(a+b)^2}{4} - 1\right) = \frac{c}{4}(a+b-2)(a+b+2) \\
\Rightarrow &1 \leq \frac{c}{4}(a+b-2) \Rightarrow bc + ca \geq 2c + 4.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 19. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&3\left[(1+a)(1+b) + (1+b)(1+c) + (1+c)(1+a)\right] \geq 4 + 4(1+a)(1+b)(1+c) \\
\Leftrightarrow &3\left[3 + 2(a+b+c) + ab + b + ca\right] \geq 4 + 4(1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc) \\
\Leftrightarrow &9 + 9(a+b+c) \geq 8 + 8(a+b+c) + 4abc \\
\Leftrightarrow &a + b + c + 1 \geq 4abc. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương, không mất tính tổng quát giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$. Khi đó

$$1 + bc \geq b + c \Rightarrow 1 + a + bc \geq a + b + c. \qquad (2)$$

Mà $a + b + c = ab + bc + ca$ cho nên từ (2) ta có

$$1 + a + bc \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 1 + a \geq a(b+c). \qquad (3)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
a + b + c + 1 - 4abc &\geq a(b+c) + (b+c) - 4abc \\
&= (b+c)(a+1) - 4abc \\
&\overset{(3)}{\geq} a(b+c)^2 - 4abc \\
&\geq 4abc - 4abc \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Như vậy (1) được chứng minh và bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 20. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a^2 - \frac{1}{4}; b^2 - \frac{1}{4}; c^2 - \frac{1}{4}$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$\left(a^2 - \frac{1}{4}\right)\left(b^2 - \frac{1}{4}\right) \geq 0.$$

Ta có:

$$\left(a^2 + 1\right)\left(b^2 + 1\right) = \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)\left(b^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}\left(a^2 + b^2 + \frac{3}{4}\right).$$

Nên $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) \geq \frac{5}{4}\left(a^2+b^2+\frac{3}{4}\right)$. Khi đó

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geq \frac{5}{4}\left(a^2+b^2+\frac{3}{4}\right)\left(c^2+1\right).$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{4}\left(a^2+b^2+\frac{3}{4}\right)\left(c^2+1\right) \geq \frac{5}{16}(a+b+c+1)^2\\
\Leftrightarrow\ &\left(4a^2+4b^2+3\right)\left(c^2+1\right) \geq (a+b+c+1)^2.
\end{aligned}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức B.C.S, ta được

$$\begin{aligned}
&\left(4a^2+4b^2+1+1+1\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+c^2+\frac{1}{4}\right) \geq \left(2a.\frac{1}{2}+2b.\frac{1}{2}+1.\frac{1}{2}+1.c+1.\frac{1}{2}\right)^2\\
\Leftrightarrow\ &\left(4a^2+4b^2+3\right)\left(c^2+1\right) \geq (a+b+c+1)^2.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi

$$a=b=c=\frac{1}{2}.$$

Bài 21. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a-1; b-1; c-1$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right) &= a^2b^2-a^2b+a^2-ab^2+ab-a+b^2-b+1\\
&= a^2b^2-a^2b-ab^2+ab+a^2+b^2-a-b+1\\
&= ab\left(ab-a-b+1\right)+a^2+b^2-a-b+1\\
&= ab\left(a-1\right)\left(b-1\right)+a^2+b^2-a-b+1\\
&\geq a^2+b^2-a-b-1.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right) &\geq \frac{1}{2}(a+b)^2-(a+b)+1\\
&= \frac{1}{2}(3-c)^2-(3-c)+1 = \frac{1}{2}\left(c^2-4c+5\right).
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(c^2-4c+5\right)\left(c^2-c+1\right) \geq 1\\
\Leftrightarrow\ &\left(c^2-4c+5\right)\left(c^2-c+1\right) \geq 2\\
\Leftrightarrow\ &\left[(c-1)^2-2c+4\right]\left[(c-1)^2+c\right]-2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (c-1)^4 + c(c-1)^2 - (2c-4)(c-1)^2 - 2c^2 + 4c - 2 \geq 0\\
&\Leftrightarrow (c-1)^2\left(c^2 - 2c + 1 + c - 2c + 4\right) - 2(c-1)^2 \geq 0\\
&\Leftrightarrow (c-1)^2\left(c^2 - 3c + 3\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 22. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 3 số $(a-1), (b-1), (c-1)$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a + b - 1.$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&c(a+b-1) + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right] \geq a + b + c\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right] \geq a + b - 2 + 2c - c(a+b)\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right] \geq (a+b-2)(1-c).
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\begin{aligned}
(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 &\geq \frac{(a+b-2)^2}{2} + (c-1)^2\\
&\geq \sqrt{2}\,|(a+b-2)(1-c)|\\
&\geq \sqrt{2}\,(a+b-2)(1-c).
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 23. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $(a-1),\ (b-1),\ (c-1)$ luôn có hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow abc \geq ac + bc - c.$$

Suy ra

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + abc + 8 \geq 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ac + bc - c + 8.$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ac + bc - c + 8 \geq 5(a+b+c)\\
\Leftrightarrow &4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2ac + 2bc - 2c + 16 \geq 10(a+b+c)\\
\Leftrightarrow &(b+c-2)^2 + (c+a-2)^2 + 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 2(c-1)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên ta được điều phải chứng minh.

Bài 24. Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab + 1 \geq a + b \Rightarrow 3abc \geq 3ac + 3bc - 3c.$$

Suy ra
$$5\left(a^3+b^3+c^3\right)+3abc+9 \geq 5\left(a^3+b^3+c^3\right)+3ac+3bc-3c+9.$$
Ta cần chứng minh
$$\begin{aligned}&5\left(a^3+b^3+c^3\right)+3ac+3bc-3c+9 \geq 9\left(ab+bc+ca\right)\\ \Leftrightarrow &5\left(a^3+b^3+c^3\right)+9 \geq 9ab+6bc+6ca+3c.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có
$$\begin{aligned}&3c = 3\sqrt[3]{c^3.1.1} \leq c^3+1+1;\\ &6ca = 6\sqrt[3]{c^3a^3.1} \leq 2c^3+2a^3+2;\\ &6bc = 6\sqrt[3]{b^3.c^3.1} \leq 2b^3+2c^3+2;\\ &9ab = 9\sqrt[3]{a^3.b^3.1} \leq 3a^3+3b^3+3.\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được
$$5\left(a^3+b^3+c^3\right)+9 \geq 9ab+6bc+6ca+3c.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.
Lưu ý. Ta nhắc lại bất đẳng thức AM-GM (hay còn gọi là bất đẳng thức Cô-si).

1. Với các số không âm a_1, a_2, ta có
$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2},$$
dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2$.

2. Với các số không âm a_1, a_2, a_3 ta có
$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3},$$
dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3$.

3. Với các số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta có
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$
dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Bài 25. Đặt $x = a+\frac{1}{b}$; $y = b+\frac{1}{c}$; $z = c+\frac{1}{a}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành
$$\begin{aligned}&(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1) \geq 3\\ \Leftrightarrow &xy+yz+zx \geq 2(x+y+z).\end{aligned}$$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(x-2)$, $(y-2)$, $(z-2)$ cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$(x-2)(y-2) \geq 0.$$

Khi đó

$$xy + 4 \geq 2x + 2y \Rightarrow 2(x+y+z) \leq 2z + xy + 4. \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}xyz &= \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) = \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(bc+\frac{b}{a}+1+\frac{1}{ca}\right)\\ &= abc + b + a + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{abc}\\ &= abc + \frac{1}{abc} + x + y + z \geq 2 + x + y + z\\ &\geq 2 + 2\sqrt{xy} + z.\end{aligned}$$

Suy ra

$$z(xy-1) = xyz - z \geq 2\left(\sqrt{xy}+1\right) \Rightarrow z\left(\sqrt{xy}-1\right) \geq 2. \quad (2)$$

Từ hai bất đẳng thức (1) và (2), ta được

$$\begin{aligned}2(x+y+z) &\leq 2z + xy + 4 \leq 2z + xy + 2z\left(\sqrt{xy}-1\right)\\ &= xy + z.2\sqrt{xy} \leq xy + z(x+y)\\ &\leq xy + yz + zx.\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 26. Trước tiên, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$$

bằng biến đổi tương đương. Thật vậy, ta có sự tương đương

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}\\ &\Leftrightarrow (ab+1)\left((a+1)^2 + (b+1)^2\right) \geq (a+1)^2(b+1)^2\\ &\Leftrightarrow (ab+1)\left(a^2+b^2+2a+2b+2\right) \geq ((ab+1)+(a+b))^2\\ &\Leftrightarrow (ab+1)\left(a^2+b^2+2a+2b+2\right) \geq ((ab+1)+(a+b))^2\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+2a+2b+2+a^3b+ab^3+2a^2b+2ab^2+2ab\\ &\geq a^2b^2+2ab+1+a^2+b^2+2ab+2\left(a^2b+ab^2+a+b\right)\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+2+a^3b+ab^3+2ab \geq a^2b^2+2ab+1+a^2+b^2+2ab\\ &\Leftrightarrow 1+a^3b+ab^3 \geq a^2b^2+2ab\\ &\Leftrightarrow \left(a^3b+ab^3-2a^2b^2\right) + \left(1-2ab+a^2b^2\right) \geq 0\\ &\Leftrightarrow ab(a-b)^2 + (ab-1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq\frac{1}{1+ab}=\frac{1}{1+\frac{1}{c}}=\frac{c}{1+c}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\geq\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}.$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\geq 1.$$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-1)(b-1)\geq 0\Rightarrow a+b\leq 1+ab=1+\frac{1}{c}=\frac{c+1}{c}.$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned}\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}&\geq\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}\\&=\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}\\&=\frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2}=1.\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 27. Trước tiên, ta có bất đẳng thức $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq\frac{1}{1+ab}$ (bất đẳng thức này đã được chứng minh ở lời giải của bài toán 26 ở trang 7). Áp dụng bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq\frac{1}{1+ab}=\frac{1}{1+\frac{1}{c}}=\frac{c}{1+c}.$$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-1)(b-1)\geq 0\Rightarrow a+b\leq 1+ab=\frac{c+1}{c}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)(c+1)&=[(1+ab)+(a+b)](c+1)\\&\leq[(1+ab)+1+ab](c+1)\end{aligned}$$

$$= 2\left(1+ab\right)\left(1+c\right) \le \frac{2(c+1)^2}{c}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \ge \frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}=1.$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 28. Theo bài toán 26 ở trang 7, ta có

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1} \ge 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2} \\ &= \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+2\left(\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Hay $A \ge \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+2-\frac{2}{a+b+c+1}$. Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+2-\frac{2}{a+b+c+1} \ge 3 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \ge \frac{2}{1+a+b+c}+1 \\ \Leftrightarrow &\frac{3+ab+bc+ca+2\left(a+b+c\right)}{1+ab+bc+ca+a+b+c+abc} \ge \frac{3+a+b+c}{1+a+b+c} \\ \Leftrightarrow &\frac{3+ab+bc+ca+2\left(a+b+c\right)}{2+ab+bc+ca+a+b+c} \ge \frac{3+a+b+c}{1+a+b+c} \\ \Leftrightarrow &1+\frac{1+a+b+c}{2+ab+bc+ca+a+b+c} \ge 1+\frac{2}{1+a+b+c} \\ \Leftrightarrow &\frac{1+a+b+c}{2+ab+bc+ca+a+b+c} \ge \frac{2}{1+a+b+c} \\ \Leftrightarrow &(1+a+b+c)^2 \ge 4+2ab+2bc+2ca+2a+2b+2c \\ \Leftrightarrow &1+a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)+2\left(a+b+c\right) \\ = &4+2\left(ab+bc+ca+a+b+c\right) \\ \Leftrightarrow &1+a^2+b^2+c^2 \ge 4 \\ \Leftrightarrow &a^2+b^2+c^2 \ge 3. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì theo bất đẳng thức AM – GM thì

$$a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 29. Không mất tính tổng quát, giả sử y là số ở giữa hai số x và z. Khi đó

$$x(x-y)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow x(xy - xz - y^2 + yz) \geq 0 \Leftrightarrow x^2y + xyz \geq xy^2 + x^2z. \quad (1)$$

Do đó

$$\begin{aligned} x^2z + y^2x + z^2y &\leq x^2y + xyz + z^2y = y(x^2 + xz + z^2) \\ &\leq y(x+z)^2 = \frac{1}{2}(2y)(x+z)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2y+x+z+x+z}{3}\right)^3 = \frac{8}{2} = 4. \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \\ =&\frac{(x+1)^2(z+1) + (y+1)^2(x+1) + z+1)^2(y+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)} \\ =&\frac{(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz) + (x^2z+y^2x+z^2y) + 3(x+y+z) + 3}{xyz + (x+y+z) + (xy+yz+xz) + 1} \\ =&\frac{(x+y+z)^2 + 3(x+y+z) + 3 + (x^2y+y^2x+z^2y)}{xyz+xy+yz+xz+4} \\ =&\frac{21 + (x^2z+y^2x+z^2y)}{xyz+xy+yz+xz+4} \leq \frac{21+4}{2+2+(xy+yz+xz)} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4(xy+yz+xz)}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z) = (0;1;2)$ và các hoán vị.
Lưu ý. Việc thiết lập những bất đẳng thức hoán vị như (1), (2) tuy khó nhưng cũng thường gặp. Chúng ta sẽ gặp lại kỹ thuật tương tự ở bài toán 30 (ở trang 7).

Bài 30. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^3+16} &= \frac{1}{16}(a - \frac{ab^3}{b^3+16}) = \frac{1}{16}(a - \frac{ab^3}{b^3+2^3+2^3}) \\ &\geq \frac{1}{16}\left(a - \frac{ab^3}{12b}\right) = \frac{1}{16}\left(a - \frac{ab^2}{12}\right). \end{aligned}$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} &\frac{1}{16}\left(3 - \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{12}\right) \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow 3 - \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{12} \geq \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow &\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{12} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Chứng minh BĐT mạnh hơn:

$$ab^2+bc^2+ca^2+abc \leq 4.$$

Giả sử b nằm giữa a và c. Khi đó $a(b-c)(b-a) \leq 0$. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$ab^2+bc^2+ca^2+abc = b\left(c^2+a^2+2ca\right) + ab^2 + ca^2 - ba^2 - abc$$

$$
\begin{aligned}
&= b(a+c)^2 + ab(b-a) + ca(a-b)\\
&= b(a+c)^2 + a(b-a)(b-c)\\
&\le b(a+c)^2 = b(3-b)^2\\
&= 4b\cdot\frac{3-b}{2}\cdot\frac{3-b}{2}\\
&\le 4\left(\frac{b+\frac{3-b}{2}+\frac{3-b}{2}}{3}\right)^3\\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Từ đó ta có được điều phải chứng minh.
Lưu ý. Bạn đọc hãy liên hệ lời giải của bài toán 30 này với lời giải của bài toán 29 (ở trang 7) để củng cố, khắc sâu phương pháp.

Bài 31. Nhận thấy, nếu (a,b,c) là bộ số thỏa mãn điều kiện đề bài thì $(|a|,|b|,|c|)$ cũng là bộ số thỏa mãn điều kiện đề bài. Hơn nữa ở bất đẳng thức cần chứng minh, khi thay a, b, c tương ứng bởi $|a|$, $|b|$, $|c|$, giá trị của vế trái không tăng và giá trị của vế phải không giảm. Vì thế để giải bài đã ra, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ở đề bài với điều kiện $a,b,c\ge 0$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Theo nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0$. Khi đó $1+ab\ge a+b$.
Do đó

$$(2-a)(2-b) = 4-2(a+b)+ab \ge 4-2(1+ab)+ab = 2-ab. \qquad (1)$$

Từ ràng buộc đối với a,b,c theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$4 = \left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+1\right) \ge 2ab+2c.$$

Suy ra $2\ge ab+c$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(2-a)(2-b)\ge c\ge 0$. (3)
Từ (2) ta có $2-c\ge ab\ge 0$. (4)
Nhân (3) và (4) vế với vế ta được bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu bài toán.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu $a=b=c=1$.
Nhận xét 2. Mấu chốt của bài toán này là khi phát hiện ra nếu (a,b,c) là bộ số thỏa mãn điều kiện đề bài thì $(|a|,|b|,|c|)$ cũng là bộ số thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 32. Xét bất đẳng thức

$$abc + k\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)+2 \ge a+b+c. \qquad (1)$$

Trong (1), thay $a=0$, $b=c=2$, ta được $2+8k\ge 4$. Suy ra $k\ge\frac{1}{4}$. Ta sẽ chứng minh $k=\frac{1}{4}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm, tức chứng minh với mọi bộ ba số thực không âm a,b,c, ta luôn có

$$abc+2+\frac{1}{4}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \ge a+b+c.$$

hay

$$a^2+b^2+c^2+2abc+4 \ge ab+bc+ca+2(a+b+c). \qquad (2)$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương, không mất tính tổng quát giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$. Khi đó

$$bc \geq b+c-1 \Rightarrow abc \geq a(b+c-1).$$

Do vậy, bất đẳng thức (2) sẽ được chứng minh nếu chúng ta chứng minh được

$$a^2+b^2+c^2+2a(b+c-1)+4 \geq ab+bc+ca+2(a+b+c).$$

Hay

$$a^2-(4-b-c)a+b^2+c^2-bc-2(b+c)+4 \geq 0, \tag{3}$$

với mọi $a, b, c \geq 0$. Dễ thấy, vế trái của (3) được biến đổi thành

$$\left(a-2+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2.$$

Vậy $k=\dfrac{1}{4}$ là giá trị cần tìm theo yêu cầu của đề bài.

Nhận xét 3.

1. Để chứng minh $abc \geq a(b+c-1)$, ngoài cách đã nêu trong lời giải trên, còn có thể lập luận như sau: Xét 3 số $a(b-1)(c-1)$, $b(c-1)(a-1)$, $c(a-1)(b-1)$, ta có

$$\begin{aligned}&a(b-1)(c-1)\cdot b(c-1)(a-1)\cdot c(a-1)(b-1)\\ =&abc(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

   suy ra có ít nhất một trong 3 số nêu trên không âm, do đó không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a(b-1)(c-1)$, khi đó $abc \geq a(b+c-1)$.

2. Để chứng minh (3), ngoài cách gom bình phương đúng như trong lời giải trên, ta còn có thể chứng minh bằng cách coi biểu thức ở vế trái của (3) như một tam thức bậc hai đối với a và xét dấu biệt thức của tam thức đó. Thật vậy, ta xem

$$a^2-(4-b-c)a+b^2+c^2-bc-2(b+c)+4$$

   là một tam thức bậc hai theo biến a, khi đó

$$\begin{aligned}\Delta &= (4-b-c)^2-4\left(b^2+c^2-bc-2(b+c)+4\right)\\ &= 16+b^2+c^2-8b-8c+2bc-4b^2-4c^2+4bc+8b+8c-16\\ &= 6bc-3b^2-3c^2\\ &= -3(b-c)^2\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

   Do đó $a^2-(4-b-c)a+b^2+c^2-bc-2(b+c)+4 \geq 0$ và ta có điều phải chứng minh. Hơn nữa, khi $\Delta=0$ (tức là $b-c=0$) thì tam thức có nghiệm kép

$$a=\frac{4-b-c}{2}=2-\frac{b+c}{2} \Rightarrow a-2+\frac{b+c}{2}=0.$$

   Như vậy, phương pháp tam thức bậc hai này còn cho ta một lời giải thích cho việc vì sao ta lại nghĩ ra cách gom bình phương đúng:

$$a^2-(4-b-c)a+b^2+c^2-bc-2(b+c)+4=\left(a-2+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2.$$

3. Bất đẳng thức (2) còn có thể được chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3. Bất đẳng thức Schur bậc 3 được phát biểu như sau: "Với mọi bộ 3 số thực $a, b, c \geq 0$, ta luôn có

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 3 biến nhận các giá trị bằng nhau hoặc một biến bằng 0, hai biến còn lại nhận giá trị bằng nhau." Trong các bất đẳng thức bậc 3 của 3 biến không âm, bất đẳng thức Schur là một bất đẳng thức mạnh, có nhiều ứng dụng. Ngoài cách viết nêu trên, bất đẳng thức Schur bậc 3 còn có một số cách viết thông dụng khác dưới đây:

i) $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$.

ii) $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$.

iii) $(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(ab+bc+ca)(a+b+c)$.

Bất đẳng thức i) có thể được chứng minh một cách đơn giản như sau:
Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a - b = x$, $b - c = y$, ta có $x, y \geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$ax(x+y) - bxy + cy(x+y) \geq 0. \qquad (*)$$

Dễ thấy (*) $\Leftrightarrow ax^2 + (a-b+c)xy + cy^2 \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng và do đó (*) được chứng minh.

Bài 33. Đặt $x = a - 1$, $b = y - 1$, $z = c - 1$. Khi đó $x + y + z = 0$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$P = (xy + yz + zx)^2 - 12(xy + yz + zx) - 18xzy \geq 0.$$

Vì ba số x, y, z luôn có hai số có tích không âm nên không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là x, y. Thay $z = -(x+y)$, ta được

$$P = \left(x^2 + xy + y^2\right)^2 + 12\left(x^2 + xy + y^2\right) + 18xy(x+y).$$

Lại có $x^2 + xy + y^2 \geq 3xy \geq 0$ nên

$$P \geq (3xy)^2 + 12\left(x^2 + xy + y^2\right) + 18xy(x+y).$$

Mặt khác $x^2 + xy + y^2 \geq \dfrac{3}{4}(x+y)^2$ nên

$$\begin{aligned} P &\geq (3xy)^2 + 12 \cdot \frac{3}{4}(x+y)^2 + 18xy(x+y) \\ &= 9(xy + x + y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = -1$, $c = 5$ và các hoán vị của nó.

Bài 34. Ta phân ra hai trường hợp như sau:

- Với $n \leq 10$, ta chọn $a_i = i^3\ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Khi đó bất đẳng thức không đúng. Thật vậy, vì $0 < i^3 - j^3$ suy ra $i - j \geq 1$, và do đó

$$a_i - a_j = i^3 - j^3 = (i-j)^3 + 3ij(i-j) \geq 1 + 3ij.$$

- Với $n = 11$, ta chia đoạn $[1; 1000]$ thành 10 đoạn

$$[k^3 + 1, (k+1)^3], \text{ với } k = 0, 1, 2, \ldots, 9.$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong số 11 số phân biệt $a_1, \ldots, a_{11}$ được chọn từ $[1; 1000]$ sẽ tồn tại hai số a_i, a_j với $(a_i > a_j)$ nằm trong cùng một đoạn, giả sử là đoạn $[k^3 + 1, (k+1)^3]$. Đặt $x = \sqrt[3]{a_i}, y = \sqrt[3]{a_j}$. Ta có

$$k^3 + 1 \leq a_j < a_i \leq (k+1)^3 \Rightarrow k < \sqrt[3]{a_j} < \sqrt[3]{a_i} \leq k + 1.$$

Suy ra $0 < \sqrt[3]{a_i} - \sqrt[3]{a_j} < 1$ hay $0 < x - y < 1$ và

$$0 < a_i - a_j = x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) < 1 + 3xy = 1 + 3\sqrt[3]{a_i a_j}.$$

Vậy số nguyên n nhỏ nhất cần tìm là $n = 11$.