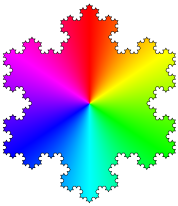
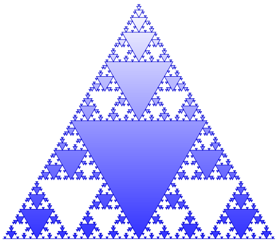
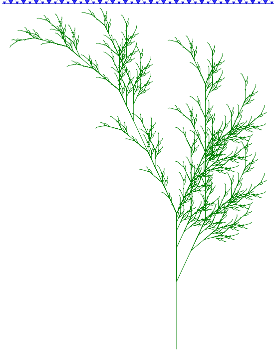
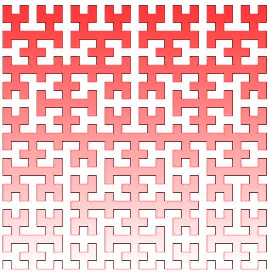
NGUYỄN THANH TRIỀU

⋆⋆⋆⋆⋆

SỔ TAY HÌNH HỌC
10 - 11 - 12

Tháng 06 - 2014

Mục lục

Chương 1

Vec tơ

1.1 Khái niệm vec tơ

1.1.1 Vec tơ

1. Vec tơ là đoạn thẳng có phân biệt điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

2. Xét vec tơ $\overrightarrow{AB}$ như hình vẽ 1.1

$$A \longrightarrow B$$

Hình 1.1: Vec tơ.

trong đó

(a) A là điểm đầu (hay điểm gốc).

(b) B là điểm cuối (hay điểm ngọn).

(c) Nếu $A \equiv B$ thì $\overrightarrow{AA}$ gọi là vec tơ không, ký hiệu $\overrightarrow{0}$.

(d) Độ dài đoạn thẳng AB gọi là độ dài của vec tơ $\overrightarrow{AB}$, ký hiệu $AB = BA = |\overrightarrow{AB}|$. Độ dài của vec tơ không là $|\overrightarrow{0}| = 0$.

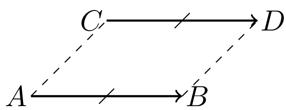
(e) Giá của $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng đi qua A và B.

(f) Hướng (hay chiều) của $\overrightarrow{AB}$ là hướng từ A đến B. $\overrightarrow{0}$ cùng phương cùng hướng với mọi vec tơ.

3. Hai vec tơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

1.1.2 Vec tơ bằng nhau

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases} \qquad \text{(Xem hình 1.2).}$$



Hình 1.2: Hai vec tơ bằng nhau.

► Chú ý: "Cùng phương" chưa chắc "cùng hướng", nhưng "cùng hướng" tất nhiên phải "cùng phương".

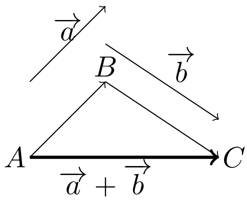
1.2 Các phép toán với vec tơ

1.2.1 Phép cộng hai vec tơ

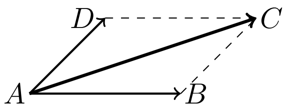
Định nghĩa 1.2.1 *Cho hai vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, từ điểm A bất kỳ vẽ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$, khi đó $\overrightarrow{AC}$ là tổng của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ (Hình 1.3).*

1. **Quy tắc 3 điểm:** Với 3 điểm A, B, C thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
2. **Quy tắc hình bình hành:** $ABCD$ là hình bình hành $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (Hình 1.4).
3. **Các tính chất:**

    (a) Tính giao hoán: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.



Hình 1.3: Tổng của 2 vec tơ.



Hình 1.4: Quy tắc hình bình hành.

(b) Tính kết hợp: $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.

(c) Tính chất với $\overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.

4. **Chú ý:** Trong một tam giác, tổng 2 cạnh lớn hơn cạnh thứ ba và hiệu 2 cạnh nhỏ hơn cạnh thứ ba nên với 2 vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ thì

$$\left| |\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}| \right| \leqq \left| \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \right| \tag{1.1}$$

$$\left| \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \right| \leqq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \tag{1.2}$$

Dấu "=" xảy ra ở bất đẳng thức (1.1) khi và chỉ khi $\overrightarrow{a}$ cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{b}$. Dấu "=" xảy ra ở bất đẳng thức (1.2) khi và chỉ khi $\overrightarrow{a}$ cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{b}$.

1.2.2 Phép trừ hai vec tơ

1. Vec tơ đối của $\overrightarrow{a}$ là một vec tơ, ký hiệu là $-\overrightarrow{a}$, sao cho $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$. Vec tơ $-\overrightarrow{a}$ cùng phương, cùng độ dài nhưng ngược hướng với $\overrightarrow{a}$.

2. Hiệu của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là tổng của $\overrightarrow{a}$ và vec tơ đối của $\overrightarrow{b}$, tức là $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$.

3. Quy tắc hiệu: Với 2 điểm A, B và một điểm O thì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

1.2.3 Phép nhân vec tơ với một số thực

Định nghĩa 1.2.2 *Cho $\overrightarrow{a}$ và một số thực k, khi đó tích của $\overrightarrow{a}$ và số k là một vec tơ, ký hiệu là $k\overrightarrow{a}$, sao cho*

- *Nếu $k > 0$ thì $k\overrightarrow{a}$ cùng hướng với $\overrightarrow{a}$.*
- *Nếu $k < 0$ thì $k\overrightarrow{a}$ ngược hướng với $\overrightarrow{a}$.*
- $|k\overrightarrow{a}| = |k|.|\overrightarrow{a}|$.

1. **Các tính chất:** Với 2 vec tơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ tùy ý và với mọi số thực k, h thì

   (a) $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$;

   (b) $(h+k)\overrightarrow{a} = h\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$;

   (c) $h(k\overrightarrow{a}) = (hk)\overrightarrow{a}$;

   (d) $1.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$; $(-1).\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$; $0.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$; $k.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

2. **Điều kiện để 2 vec tơ cùng phương:** Hai vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ duy nhất $: \overrightarrow{a} = k.\overrightarrow{b}$.

3. **Phân tích 1 vec tơ theo hai vec tơ không cùng phương:** Cho 2 vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương, với $\overrightarrow{x}$ tùy ý thì luôn tồn tại duy nhất 2 số thực h, k sao cho $\overrightarrow{x} = h\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$.

4. **Áp dụng:**

   (a) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \in \mathbb{R}$.

   (b) I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, \forall M$.

(c) G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M$.

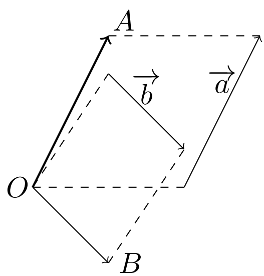
Chương 2

Hệ thức lượng trong tam giác

2.1 Tích vô hướng của 2 vec tơ

2.1.1 Góc giữa hai vec tơ

Định nghĩa 2.1.1 *Cho 2 vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ đều khác $\overrightarrow{0}$. Từ một điểm O bất kỳ vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Khi đó góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, ký hiệu là $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.*



Hình 2.1: Góc giữa 2 vec tơ.

2.1.2 Tích vô hướng của 2 vec tơ

Định nghĩa 2.1.2 *Cho 2 vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ đều khác $\overrightarrow{0}$, tích vô hướng của 2 vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là một số thực, ký hiệu là $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$, xác định bởi*

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|.\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$

▶ Chú ý:

1. Với $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ đều khác $\overrightarrow{0}$ ta có $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$.
2. $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{a}|.\cos 0^\circ = |\overrightarrow{a}|^2$.

2.1.3 Các tính chất

Với 3 vec tơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ bất kỳ và mọi số thực k, ta có

1. Tính giao hoán: $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}.\overrightarrow{a}$.
2. Tính phân phối: $\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}$.
3. Tính kết hợp: $(k\overrightarrow{a}).\overrightarrow{b} = k(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}.(k\overrightarrow{b})$.
4. $(\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2 \pm 2\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}^2$.
5. $\overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{b}^2 = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\ldots$

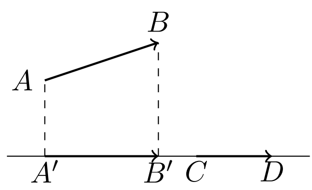
2.1.4 Tích vô hướng và công thức chiếu

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD} = \overline{A'B'}.\overline{CD}$$

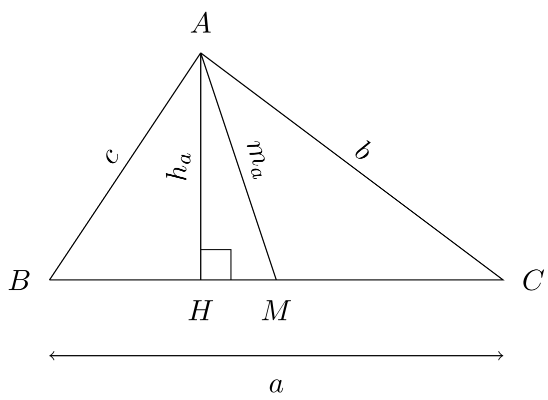
với $\overrightarrow{A'B'}$ là hình chiếu vuông góc của $\overrightarrow{AB}$ trên giá của $\overrightarrow{CD}$ (Hình 2.2).

2.2 Hệ thức lượng trong tam giác

Cho $\triangle ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$, đường cao $AH = h_a$ và các đường trung tuyến $AM = m_a, BN = m_b, CP = m_c$ (Hình 2.3).



Hình 2.2: Công thức chiếu.



Hình 2.3: Các ký hiệu cho tam giác ABC.

2.2.1 Định lý cos

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

2.2.2 Định lý sin

Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$ thì

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2.2.3 Độ dài đường trung tuyến của tam giác

1. $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.

2. $m_b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$.

3. $m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$.

2.2.4 Các công thức về diện tích tam giác

1. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$ với h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài 3 đường cao kẻ từ A, B, C.

2. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B$;

3. $S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R}$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC;

4. $S_{ABC} = pr$, với $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$ là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$;

5. Công thức Heron[1]

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

[1] Heron sống vào thế kỷ I - II sau công nguyên ở vùng Alexandria, Hy Lạp. Công thức nổi tiếng về tính diện tích tam giác theo 3 cạnh được ông giới thiệu trong tác phẩm "Metrica" về hình học gồm ba quyển và được tìm thấy ở Constantinple bởi R. Schone vào năm 1896.

với $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$ là nửa chu vi.

Chứng minh. Từ hệ quả định lý cos ta có $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Từ đó $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab}$ và do đó

$$\begin{aligned}
S_{ABC} &= \frac{1}{2}ab\sin C \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\left[2ab-(a^2+b^2-c^2)\right]\left[2ab+(a^2+b^2-c^2)\right]} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\left[c^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right]} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b+c)(a+b-c)} \\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}$$

6. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = \ldots$

2.2.5 Một số công thức khác cho $\triangle ABC$

1. $a = b\cos C + c\cos B, \ldots$
2. $\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{bc}, \ldots$
3. $\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)}}{bc}, \ldots$
4. $AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC}.\overline{MH}$.

2.3 Hệ thức lượng trong đường tròn

1. MAB là cát tuyến của đường tròn (O,R) khi

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$$

2. Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O, R) là

$$\mathcal{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$$

3. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

4. MT là tiếp tuyến của (O, R) với T là tiếp điểm $\Leftrightarrow MT^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \mathcal{P}_{M/(O)}$.

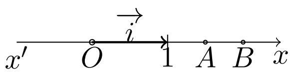
Chương 3

Tọa độ trong không gian 2 chiều

3.1 Tọa độ của điểm trên trục

3.1.1 Độ dài đại số của vec tơ trên trục

Trục tọa độ $x'Ox$ gồm O là gốc tọa độ và $\overrightarrow{i}$ là vec tơ đơn vị trên trục, $|\overrightarrow{i}| = 1$.



Hình 3.1: Trục tọa độ.

Với 2 điểm A, B trên trục $x'Ox$ thì tồn tại duy nhất một số thực k sao cho $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{i}$, số k đó gọi là độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$, ký hiệu là $\overline{AB}$, như vậy $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\overrightarrow{i}$.

1. Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{i}$ thì $\overline{AB} > 0$.

2. Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng $\overrightarrow{i}$ thì $\overline{AB} < 0$.

3.1.2 Hệ thức Chasles

Hệ thức Chasles [1] phát biểu như sau: Với 3 điểm A, B, C trên trục $x'Ox$ thì

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

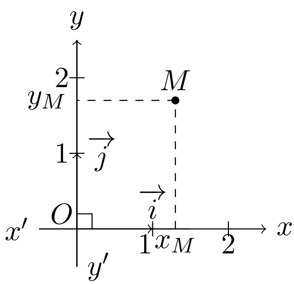
.

3.1.3 Tọa độ của điểm trên trục

Cho điểm M trên trục, khi đó tọa độ của điểm M là $x_M = \overline{OM}$. Với 2 điểm A, B thì $\overline{AB} = x_B - x_A$.

3.2 Phương pháp tọa độ trong không gian 2 chiều

Hệ trục tọa độ Descartes [2] vuông góc Oxy gồm hai trục vuông góc nhau $x'Ox$ và $y'Oy$ với hai vec tơ đơn vị $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$ trên hai trục, trong đó trục $x'Ox$ là trục hoành, trục $y'Oy$ là trục tung, O là gốc tọa độ như hình vẽ 3.2.



Hình 3.2: Hệ trục tọa độ.

[1]Michel Chasles (1793 - 1880) là một nhà toán học người Pháp.

[2]René Descartes (1596 - 1650) là triết gia, nhà khoa học, nhà toán học người Pháp. Đóng góp quan trọng nhất của Descartes với toán học là việc hệ thống hóa hình học giải tích, hệ các trục tọa độ vuông góc được mang tên ông.

3.2.1 Tọa độ của vec tơ

Định nghĩa 3.2.1 *Khi $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j}$ thì $\overrightarrow{u}$ có tọa độ $(u_1; u_2)$, viết gọn là $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2)$ hoặc $\overrightarrow{u}(u_1; u_2)$*

Các tính chất: Cho $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2)$ và $\overrightarrow{v} = (v_1; v_2)$, khi đó

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$

2. $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v} = (u_1 \pm v_1; u_2 \pm v_2)$.

3. $k\overrightarrow{u} = (ku_1; ku_2)$ với $k \in \mathbb{R}$.

4. $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$.

5. Độ dài của vec tơ : $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}; |\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

6. Tích vô hướng:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

7. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = 0$.

3.2.2 Tọa độ của điểm

Định nghĩa 3.2.2 *Cho hệ trục Oxy và điểm M tùy ý, tọa độ (x_M, y_M) của vec tơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M, ký hiệu là $M(x_M, y_M)$ hoặc $M = (x_M, y_M)$, trong đó x_M là hoành độ, y_M là tung độ.*

1. Cho $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$, khi đó

   (a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ (điều này do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$).

   (b) $AB = BA = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

3. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

3.3 Đường thẳng trong không gian 2 chiều

3.3.1 Phương trình của đường thẳng

1. **Vec tơ chỉ phương, vec tơ pháp tuyến của đường thẳng**

   (a) Một vec tơ $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ được gọi là vec tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) nếu giá của $\overrightarrow{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng (Δ).

   (b) Một vec tơ $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ được gọi là vec tơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ) nếu giá của $\overrightarrow{n}$ vuông góc với đường thẳng (Δ).

   (c) $\overrightarrow{u} = (p, q)$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi $\overrightarrow{n} = (-q, p)$ là vec tơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ).

2. **Các dạng phương trình đường thẳng**

   (a) Phương trình tham số $(\Delta) : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, trong đó $M(x_0, y_0) \in (\Delta)$ và $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ).

   (b) Phương trình chính tắc $(\Delta) : \dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$ $(u_1.u_2 \neq 0$, mẫu bằng 0 thì tử bằng 0), trong đó $M(x_0, y_0) \in (\Delta)$ và $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ).

(c) Phương trình tổng quát $(\Delta): Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$, trong đó $\overrightarrow{n} = (A, B)$ là vec tơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ).

(d) Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0, y_0)$ và có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A, B)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

(e) Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0, y_0)$ và có hệ số góc k là

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

(f) Phương trình đoạn chắn: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a.b \neq 0$ với $A(a, 0)$ và $B(0, b)$ là hai điểm thuộc đường thẳng đó.

(g) Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

3. **Lưu ý**

(a) Đường thẳng (D) có một vec tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (A, B)$, khi đó

i. Nếu $(D) \parallel (\Delta)$ thì $\overrightarrow{n} = (A, B)$ cũng là một vec tơ pháp tuyến của (Δ).

ii. Nếu $(D) \perp (\Delta)$ thì $\overrightarrow{m} = (-B, A)$ là một vec tơ pháp tuyến của (Δ).

(b) Nếu đường thẳng (Δ) có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2), u_1 \neq 0$ thì hệ số góc của (Δ) là $k = \frac{u_2}{u_1}$.

(c) Nếu đường thẳng (Δ) cắt trục hoành tại điểm M và α là góc tạo bởi tia Mx với phần đường thẳng (Δ) nằm phía trên trục hoành thì hệ số góc của (Δ) là $k = \tan\alpha$.

3.3.2 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

1. Trường hợp tổng quát: Cho 2 đường thẳng $(\Delta_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $(\Delta_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$, đặt các định thức cấp

hai như sau $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1, \quad D_y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = c_1a_2 - c_2a_1$, khi đó

(a) (Δ_1) cắt (Δ_2) khi và chỉ khi $D \neq 0$, tọa độ giao điểm là $(x = \dfrac{D_x}{D}; y = \dfrac{D_y}{D})$.

(b) $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$ khi và chỉ khi $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hay $D_y \neq 0$.

(c) $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$ khi và chỉ khi $D = D_x = D_y = 0$

2. Trường hợp đặc biệt: Nếu $a_2.b_2.c_2 \neq 0$ thì

(a) (Δ_1) cắt (Δ_2) khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

(b) $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$ khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

(c) $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$ khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

3.3.3 Góc giữa hai đường thẳng

Gọi φ là góc tạo bởi 2 đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) với $0^\circ \leqq \varphi \leqq 90^\circ$, nếu (Δ_1) và (Δ_2) lần lượt có các vec tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ thì

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

3.3.4 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_M; y_M)$ và đường thẳng $(\Delta) : ax+by+c = 0, \quad$ với $a^2+b^2 \neq 0$, khi đó khoảng cách từ M đến (Δ) là

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

► Chú ý: Cho 2 điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ và đường thẳng (Δ) : $ax + by + c = 0, \quad$ với $a^2 + b^2 \neq 0$, khi đó

1. M và N nằm cùng phía đối với (Δ) khi và chỉ khi $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

2. M và N nằm khác phía đối với (Δ) khi và chỉ khi $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

3.3.5 Đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng

Cho 2 đường thẳng cắt nhau như sau

$$\begin{cases} (\Delta_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ (\Delta_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Gọi d_1 và d_2 là 2 đường thẳng chứa đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2). Khi đó

$$\begin{aligned} M(x; y) \in d_1 \cap d_2 &\Leftrightarrow d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2) \\ &\Leftrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \end{aligned}$$

Vậy phương trình của 2 đường phân giác của các góc hợp bởi (Δ_1) và (Δ_2) là

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

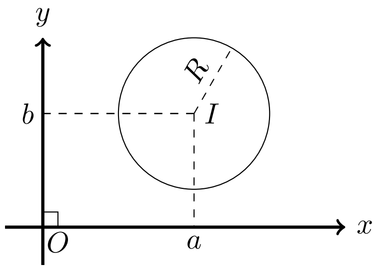
3.4 Đường tròn trong không gian 2 chiều

3.4.1 Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn tâm $I(a, b)$ bàn kính R là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a, b)$ bàn kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.



Hình 3.3: Đường tròn.

3.4.2 Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Xét đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ và điểm $M(x_M; y_M) \in (\mathcal{C})$, khi đó phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(\mathcal{C})$ tại M là

$$x_M x + y_M y - a(x + x_M) - b(y + y_M) + c = 0.$$

3.4.3 Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với đường tròn

Xét đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(a, b)$, bán kính R và đường thẳng $(\Delta) : Ax + By + C = 0$. Khi đó

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc } (\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

3.4.4 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng (Δ) và đường tròn $(\mathcal{C})$ tâm I, bán kính R. Gọi $d(I, \Delta)$ là khoảng cách từ I đến (Δ). Khi đó

1. $d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow (\Delta)$ cắt $(\mathcal{C})$ tại 2 điểm phân biệt.

2. $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow (\Delta)$ tiếp xúc $(\mathcal{C})$.

3. $d(I, \Delta) > R \Leftrightarrow (\Delta)$ không cắt $(\mathcal{C})$.

3.4.5 Vị trí tương đối của 2 đường tròn

Cho 2 đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ có tâm và bán kính lần lượt là I_1, R_1 và I_2, R_2, khi đó

1. $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ cắt nhau.
2. $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ tiếp xúc ngoài.
3. $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ tiếp xúc trong.
4. $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ ở ngoài nhau.
5. $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ ở trong nhau.

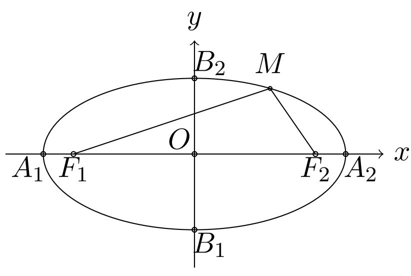
3.5 Elip trong không gian 2 chiều

3.5.1 Định nghĩa Elip

Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm cố định $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ và độ dài không đổi $2a$ với $a > c > 0$. Elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $F_1M + F_2M = 2a$. Như vậy

$$(E) = \{M | F_1M + F_2M = 2a\}$$

trong đó $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu tự, F_1 và F_2 gọi là 2 tiêu điểm.



Hình 3.4: Elip.

3.5.2 Phương trình chính tắc của Elip

Xét $(E) = \{M|F_1M + F_2M = 2a\}$ trong đó $F_1F_2 = 2c, F_1(-c;0), F_2(c;0)$. Khi đó phương trình chính tắc của Elip là

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a^2 = b^2 + c^2$$

Nếu $M(x_M, y_M) \in (E)$ thì bán kính qua tiêu của M là

$$MF_1 = a + \frac{cx_M}{a} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx_M}{a}$$

3.5.3 Hình dạng của Elip

Xét Elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 = b^2 + c^2, a > b > 0$, khi đó

1. Elip (E) có tâm đối xứng là O và có 2 trục đối xứng là $x'Ox$ và $y'Oy$.

2. Elip (E) cắt trục $x'Ox$ tại 2 điểm $A_1(-a, 0)$ và $A_2(a, 0)$; cắt trục $y'Oy$ tại 2 điểm $B_1(-b, 0)$ và $B_2(b, 0)$; 4 điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là 4 đỉnh của Elip. Độ dài $A_1A_2 = 2a$ gọi là độ dài trục lớn; độ dài $B_1B_2 = 2a$ gọi là độ dài trục bé.

3.5.4 Tâm sai của Elip

Tâm sai của Elip là tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn, ký hiệu là e, như vậy $e = \dfrac{c}{a} < 1$.

3.5.5 Phương trình tiếp tuyến của Elip

1. Cho Elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a^2 = b^2 + c^2$ và $M(x_M; y_M) \in (E)$, khi đó phương trình tiếp tuyến của Elip tại M là

$$\frac{x_M.x}{a^2} + \frac{y_M.y}{b^2} = 1$$

2. Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với Elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$$

3.5.6 Đường chuẩn của Elip

Định nghĩa 3.5.1 *Xét Elip* $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *với* $a^2 = b^2 + c^2, a > b > 0$ *và 2 đường thẳng* $(\Delta_1) : x = -\frac{a}{e}$ *và* $(\Delta_2) : x = \frac{a}{e}$*. Khi đó* (Δ_1) *gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm* F_1 *và* (Δ_2) *gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm* F_2*.*

▶ Chú ý: Đường chuẩn luôn vuông góc với trục lớn và không cắt Elip.

Định lý 3.5.1 *Tỉ số khoảng cách từ một điểm trên Elip đến một tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng bằng tâm sai e của Elip.*

▶ Chú ý: Elip (E') có trục lớn trên Oy và trục nhỏ trên Ox có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 + c^2, b > a > 0$.

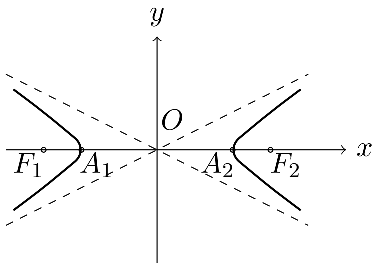
3.6 Hyperbol trong không gian 2 chiều

3.6.1 Định nghĩa Hyperbol

Trong mặt phẳng cho 2 điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho hằng số a với $0 < 2a < 2c$. Khi đó Hyperbol

$$(H) = \{M : |F_1M - F_2M| = 2a\}$$

trong đó F_1 và F_2 gọi là các tiêu điểm, $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự. Nếu $M \in (H)$ thì MF_1 và MF_2 gọi là bán kính qua tiêu điểm của M.



Hình 3.5: Hyperbol.

3.6.2 Phương trình chính tắc của Hyperbol

Xét Hyperbol $(H) = \{M : |F_1M - F_2M| = 2a\}$ với $F_1F_2 = 2c > 0$, chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$, khi đó phương trình chính tắc của (H) là

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = c^2 - a^2.$$

▶ Chú ý: Nếu $M(x_M; y_M) \in (H)$ thì các bán kính qua tiêu của M là

1. $x > 0$ thì $MF_1 = a + \dfrac{cx_M}{a}$ và $MF_2 = -a + \dfrac{cx_M}{a}$.
2. $x < 0$ thì $MF_1 = -a - \dfrac{cx_M}{a}$ và $MF_2 = a - \dfrac{cx_M}{a}$.

3.6.3 Hình dạng của Hyperbol

Xét Hyperbol $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$, khi đó

1. Hyperbol (H) có tâm đối xứng là O và trục đối xứng là Ox và Oy.
2. Hyperbol (H) cắt Ox tại 2 điểm $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$ gọi là 2 đỉnh của Hyperbol, Ox gọi là trục thực của Hyperbol. Trục Oy gọi là trục ảo và không cắt Hyperbol. Ta gọi $2a$ là độ dài trục thực và $2b$ là độ dài trục ảo.

3. Hyperbol gồm 2 nhánh, nhánh phải gồm những điểm nằm bên phải đường thẳng $x = a$, nhánh trái gồm những điểm nằm bên trái đường thẳng $x = -a$.

3.6.4 Đường tiệm cận của Hyperbol

Xét Hyperbol $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$, khi đó Hyperbol có 2 đường tiệm cận là $y = \pm\frac{b}{a}x$

▶ Chú ý: Từ 2 đỉnh của Hyperbol (H) ta vẽ 2 đường thẳng song song với Oy, chúng cắt 2 tiệm cận tại 4 điểm tạo thành hình chữ nhật cơ sở của Hyperbol có các cạnh là $2a$ và $2b$ và đường chéo là $2c$.

3.6.5 Tâm sai của Hyperbol

Tâm sai của Hyperbol là tỷ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực của Hyperbol, ký hiệu là e, như vậy $e = \frac{c}{a} > 1$.

3.6.6 Đường chuẩn của Hyperbol

Xét Hyperbol $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$, khi đó 2 đường thẳng $(\Delta_1) : x = -\frac{a}{e}$ và $(\Delta_2) : x = \frac{a}{e}$ gọi là các đường chuẩn lần lượt ứng với 2 tiêu điểm F_1 và F_2.

Định lý 3.6.1 *Tỷ số khoảng cách từ một điểm bất kỳ của Hyperbol đến một tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng bằng tâm sai e của Hyperbol.*

3.7 Parabol trong không gian 2 chiều

3.7.1 Định nghĩa Parabol

Cho đường thẳng (Δ) cố định và điểm F cố định, $F \notin (\Delta)$, khi đó

$$\text{Parabol } (P) : \{M | MF = d(M, (\Delta))\}$$

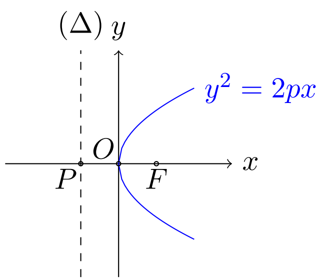
trong đó

1. F gọi là tiêu điểm.
2. (Δ) gọi là đường chuẩn.
3. $d(F, (\Delta)) = p$ gọi là tham số tiêu.
4. MF gọi là bán kính qua tiêu của điểm M.
5. Tâm sai của Parabol luôn bằng 1.

3.7.2 Phương trình chính tắc của Parabol

Xét Parabol $(P) : \{M|MF = d(M, (\Delta))\}$. Chọn hệ trục Oxy sao cho trục $Ox \perp (\Delta)$ tại P hướng từ P đến F, O là trung điểm PF. Khi đó $P(-p/2; 0), F(p/2; 0)$, phương trình đường chuẩn $(\Delta) : x = -\dfrac{p}{2}$ và phương trình chính tắc của Parabol là

$$y^2 = 2px$$



Hình 3.6: Parabol.

3.7.3 Hình dạng của Parabol

Xét Parabol $(P) : y^2 = 2px$, khi đó

1. Parabol (P) có trục đối xứng là Ox.
2. O gọi là đỉnh của Parabol.
3. Các điểm trên Parabol đều nằm bên phải trục Oy.

► Chú ý: Parabol còn có các dạng chính tắc khác là $y^2 = -2px, x^2 = 2py, x^2 = -2py$ với $p > 0$.

3.8 Giới thiệu về 3 đường Cô nic

Trong toán học, một đường cô-níc (hoặc gọi tắt là cô-níc) là một đường cong tạo nên bằng cách cắt một mặt nón tròn xoay bằng một mặt phẳng. Đường cô-nic được nhắc đến và nghiên cứu 200 năm TCN, khi Apollonius của Pergaeus tiến hành một nghiên cứu có hệ thống về tính chất của các đường cô-níc.

Đường cô-níc rất quan trọng trong thiên văn học: quĩ đạo của hai vật thể tương tác với nhau được ghi lại trong định luật vạn vật hấp dẫn Newton là những đường cô-nic nếu trọng tâm của chúng trong trạng thái tự do. Nếu chúng cùng di chuyển về một hướng, chúng sẽ để lại dấu vết hình ellipse; nếu chúng di chuyển tách biệt, chúng sẽ di chuyển theo hình parabol hay hyperbol. Trong hình học xạ ảnh, đường cô-nic trong mặt phẳng phản xạ tương đương với các đường khác trong các phép biến đổi trong hình học xạ ảnh.

Chương 4

Hình học không gian cổ điển

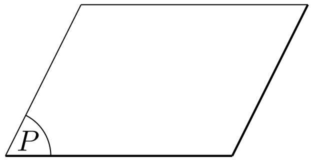
4.1 Đại cương

Hình học không gian được sinh ra từ những mong muốn nghiên cứu các tính chất của không gian chúng ta đang sống. Các đối tượng của hình học không gian là những điểm, đường thẳng và mặt phẳng. Chúng ta qui ước những khái niệm này như là các tiên đề, nghĩa là những khái niệm đủ quen thuộc để không định nghĩa chúng. Để nghiên cứu các khái niệm này cần thiết phải thừa nhận một số tính chất cơ bản.

Điểm được định vị trên một đường thẳng. Nó được đại diện bởi một chấm (.) hoặc một dấu chéo ($\times$), và được đặt một tên. Nhưng ta chỉ nên hiểu rằng đó chỉ là một đại diện của một điểm. Trên bình diện lý thuyết, "điểm" không có độ rộng.

Đường thẳng là một tập các điểm, nó được đại diện bởi một "đoạn thẳng" và được đặt một tên. Trên bình diện lý thuyết ta hiểu rằng đường thẳng không có chiều rộng, và không có giới hạn theo cả hai hướng.

Mặt phẳng là một tập hợp điểm. Tờ giấy là hình ảnh của một mặt phẳng. Khi ta muốn biểu diễn nhiều mặt phẳng trong không gian, ta vẽ mỗi mặt phẳng bằng một hình bình hành để đại diện cho một hình chữ nhật "phối cảnh". Trên bình diện lý thuyết mặt phẳng không có độ dày và không giới hạn theo tất cả các hướng.



Hình 4.1: Mặt phẳng (P).

▶ Tính chất: Tất cả tính chất của hình học phẳng đều có thể áp dụng trong mỗi mặt phẳng của hình học không gian.

4.2 Các tiên đề liên thuộc

1. Các tiên đề liên thuộc trong hình học không gian là các tiên đề nêu lên mối quan hệ giữa các điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong hình học này.

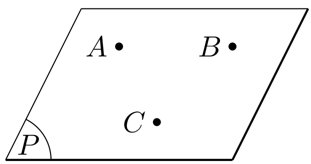
   (a) Qua hai điểm phân biệt A và B trong không gian có một và chỉ một đường thẳng. Đường thẳng này được ký hiệu là (AB).

   (b) Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng A, B và C có một mặt phẳng và chỉ một mà thôi. Mặt phẳng này được ký hiệu là (ABC).

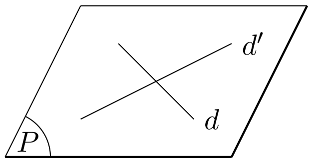
   (c) Nếu A và B là hai điểm của một mặt phẳng P thì tất cả các điểm của đường thẳng (AB) thuộc mặt phẳng này.

2. Một mặt phẳng được xác định bởi một trong ba điều kiện sau đây:

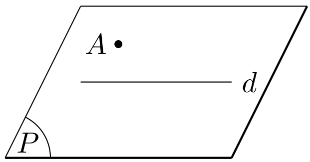
   - 3 điểm không thẳng hàng



- 2 đường thẳng cắt nhau



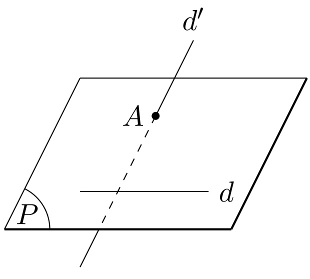
- 1 đường thẳng và 1 điểm nằm ngoài đường thẳng đó



4.3 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

1. Cho d và d' là hai đường thẳng trong không gian. Ta xét các khả năng sau đây:

   (a) không tồn tại một mặt phẳng nào chứa hai đường thẳng này, ta nói hai đường thẳng chéo nhau



Hình 4.2: d và d' chéo nhau.

   (b) tồn tại một mặt phẳng chứa hai đường thẳng này, ta nói hai đường thẳng đồng phẳng (cắt nhau hoặc song song).

2. d là một đường thẳng và P là một mặt phẳng trong không gian. Ta xét ba khả năng sau đây:

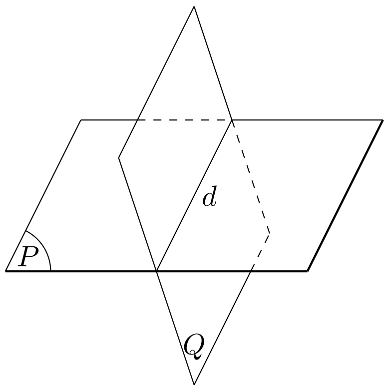
   (a) đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung, ta nói đường thẳng và mặt phẳng song song.

   (b) đường thẳng nằm trên mặt phẳng,

   (c) đường thẳng và mặt phẳng có một điểm chung, ta nói đường thẳng và mặt phẳng cắt nhau.

3. P và Q là hai mặt phẳng trong không gian. Ta xét ba khả năng sau đây:

   (a) Hai mặt phẳng nói trên phân biệt và có một điểm chung. Khi đó chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm chung này, ta gọi đường thẳng đó là giao tuyến (cũng vậy nếu hai mặt phẳng phân biệt có hai điểm chung thì giao tuyến của chúng được xác định bởi hai điểm chung đó).



   (b) Hai mặt phẳng có vô số điểm chung, ta nói hai mặt phẳng trùng nhau,

   (c) Hai mặt phẳng không có điểm chung nào. Ta nói hai mặt phẳng song song.

4.4 Sự song song trong không gian

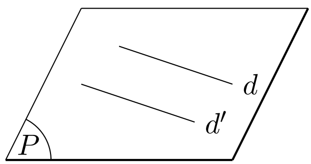
4.4.1 Định nghĩa

Định nghĩa 4.4.1 *Hai đường thẳng được gọi là song song khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.*

Định nghĩa 4.4.2 *Một đường thẳng và một mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.*

▶ Nhận xét:

- Việc hai đường thẳng không có điểm chung chưa đủ để kết luận hai đường thẳng này song song.
- Hai đường thẳng song song xác định một mặt phẳng.

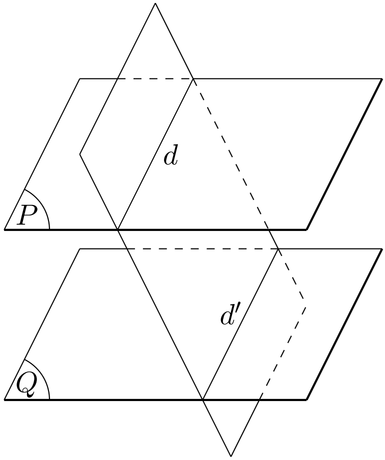


4.4.2 Đường thẳng song song

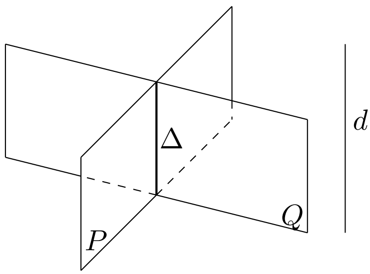
Định lý 4.4.1 *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Định lý 4.4.2 *Nếu P và Q là hai mặt phẳng song song, thì tất cả các mặt phẳng mà cắt P đều cắt Q và các giao tuyến tạo thành song song với nhau.*

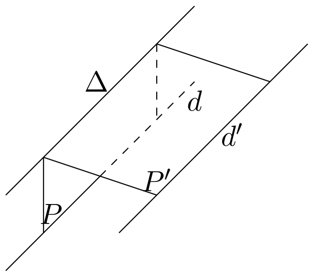
Định lý 4.4.3 *Nếu một đường thẳng song song với hai mặt phẳng cắt nhau thì nó song song với giao tuyến của hai mặt phẳng đó.*



Hình 4.3: d song song với d'.



Định lý 4.4.4 *"Định lý mái ngói" Cho d và d' là hai đường thẳng song song. P là một mặt phẳng chứa d và P' là một mặt phẳng chứa d'. Nếu các mặt phẳng P và P' cắt nhau thì giao tuyến Δ của hai mặt phẳng này song song với d và d'.*



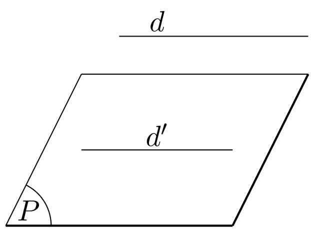
4.4.3 Mặt phẳng song song

Định lý 4.4.5 *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Định lý 4.4.6 *Nếu hai đường thẳng cắt nhau nằm trong một mặt phẳng P tương ứng song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong một mặt phẳng Q thì các mặt phẳng P và Q song song với nhau.*

4.4.4 Đường thẳng và mặt phẳng song song

Định lý 4.4.7 *Nếu một đường thẳng d song song với một đường thẳng d' thì đường thẳng d sẽ song song với mọi mặt phẳng P chứa đường thẳng d'.*



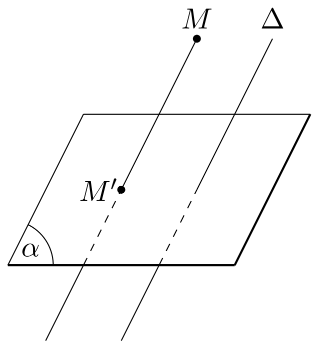
4.4.5 Phép chiếu song song

1. Phép chiếu song song
   Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt nhau. Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ cắt (α) tại điểm M' xác định.

   (a) Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.

   (b) Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng chiếu, phương của đường thẳng Δ được gọi là phương chiếu.

   (c) Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.



2. Các tính chất

   (a) Phép chiếu song song biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó.

   (b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

   (c) Phép chiếu song song biến 2 đường thẳng song song thành 2 đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

   (d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỷ số độ dài của 2 đoạn thẳng nằm trên 2 đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng

   (a) Một tam giác bất kỳ bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông,...).

   (b) Một hình bình hành bất kỳ bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi,...).

   (c) Một hình thang bất kỳ bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỷ số độ dài 2 đáy của hình biểu diễn phải bằng tỷ số độ dài 2 đáy của hình đã cho.

   (d) Người ta thường dùng hình Elip để biểu diễn hình tròn.

4.5 Sự trực giao trong không gian

4.5.1 Định nghĩa

Định nghĩa 4.5.1 *Hai đường thẳng d và Δ (không nhất thiết đồng phẳng) được gọi là trực giao nếu chúng lần lượt song song với hai đường thẳng cùng đi qua một điểm I nào đó và vuông góc với nhau.*

Ví dụ: Cho $ABCDEFGH$ là hình lập phương thì $(AD) \perp (HG)$.

▶ Nhận xét:

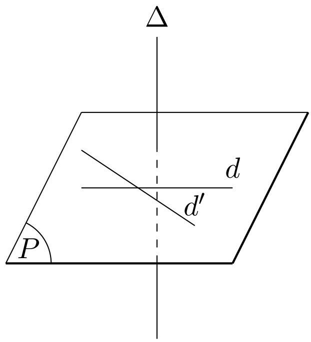
- Hai đường thẳng trực giao không nhất thiết là vuông góc (có tính đến cắt nhau). Tuy nhiên nếu chúng đồng phẳng và trực giao thì chúng là hai đường thẳng vuông góc.

- Hai đường thẳng cùng trực giao với một đường thẳng thứ ba thì không nhất thiết là hai đường thẳng song song.

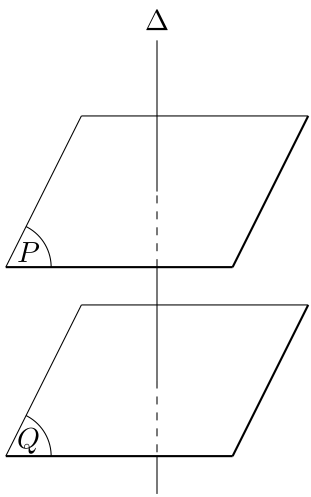
Định nghĩa 4.5.2 *Một đường thẳng d được gọi là trực giao với một mặt phẳng nếu nó trực giao với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng.*

4.5.2 Sự trực giao của đường thẳng và mặt phẳng

Định lý 4.5.1 *Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ trực giao với mặt phẳng P là Δ trực giao với hai đường thẳng đồng qui trong P.*

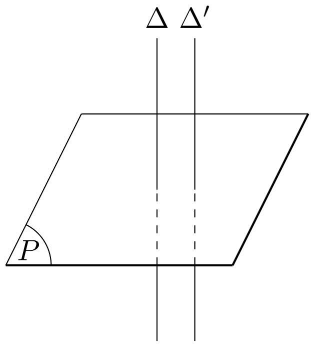


Định lý 4.5.2 *Hai mặt phẳng cùng trực giao với một đường thẳng thì song song với nhau.*



Định lý 4.5.3 *Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng trực giao với mặt phẳng này sẽ trực giao với mặt phẳng kia.*

Định lý 4.5.4 *Nếu hai đường thẳng song song thì tất cả mặt phẳng trực giao với đường thẳng này sẽ trực giao với đường thẳng kia.*



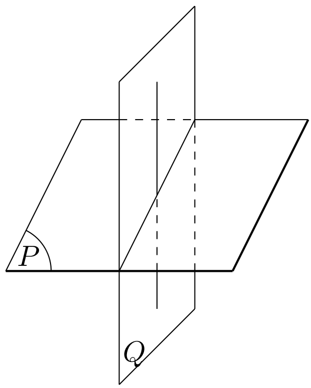
Định lý 4.5.5 *Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng trực giao với một mặt phẳng thì song song với nhau.*

4.5.3 Sự trực giao của hai đường thẳng trong không gian

Định lý 4.5.6 *Nếu hai đường thẳng song song thì tất cả đường thẳng trực giao với với đường thẳng này sẽ trực giao với đường thẳng kia.*

4.5.4 Mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa 4.5.3 *Mặt phẳng Q vuông góc với mặt phẳng P (ký hiệu $Q \perp P$) nếu tồn tại một đường thẳng trong Q trực giao với P. (Trong trường hợp này ta cũng ký hiệu $P \perp Q$).*



▶ Nhận xét:

- Nếu $P \perp Q$ không có nghĩa là **mọi** đường thẳng trong mặt phẳng này trực giao với mặt phẳng kia. Ví dụ trong hình lập phương $ABCDEFGH$ các mặt bên $ABFE$ và $ABCD$ vuông góc nhưng đường thẳng (AF) không trực giao với mặt bên $ABCD$ vì nó không trực giao với (AB).

- Nếu $P \perp Q$ và $P' \perp Q$ thì P và P' không nhất thiết song song với nhau.

Định lý 4.5.7 *Nếu P và P' là hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng Q thì giao tuyến của chúng sẽ trực giao với Q.*

Định lý 4.5.8 *Nếu $P \perp Q$ thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và trực giao với giao tuyến thì sẽ trực giao với mặt phẳng kia.*

4.5.5 Phép chiếu vuông góc

Cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α).

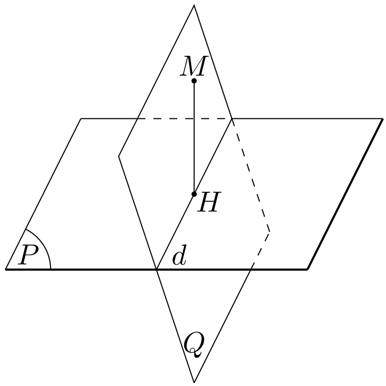
4.6 Một số cách tìm khoảng cách

4.6.1 Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng độ dài đoạn vuông góc kẻ từ M đến (P).

1. Cách tính

   (a) Ta tìm mặt phẳng (Q) chứa điểm M và vuông góc với (P) theo giao tuyến d.

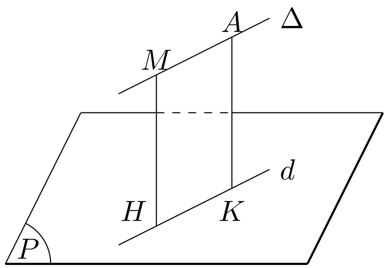


   (b) Vẽ $MH \perp d$ thì $MH \perp (P)$.

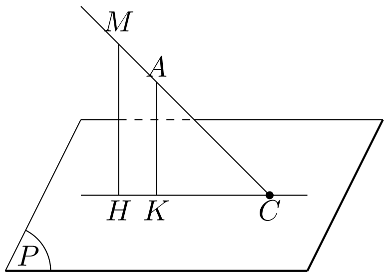
   (c) Khoảng cách từ M đến (P) bằng MH.

2. Đặc biệt:
   Khi tính khoảng cách từ M đến (P) bằng cách tính đoạn MH mà quá khó thì ta đổi khoảng cách như sau

   (a) Đổi điểm song song: Ta cũng tìm mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) theo giao tuyến d ((Q) không cần phải chứa M), từ M vẽ đường thẳng (Δ) song song với (P), (Δ) cắt (Q) tại A. Do đó $MA//(P)$ nên $d(M,(P)) = d(A,(P))$.



(b) Nếu MA cắt mặt phẳng (P) tại C thì $\dfrac{d(M,(P))}{d(A,(P))} = \dfrac{MH}{AK} = \dfrac{CM}{CA}$.



4.6.2 Khoảng cách giữa đường thẳng đến mặt phẳng song song

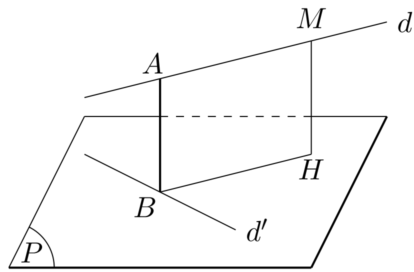
Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P), khi đó khoảng cách giữa d và (P) bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên d đến (P).

4.6.3 Cách dựng đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau d và d'

1. Cách 1 (dựng song song)

   (a) Xác định mặt phẳng (P) chứa d' và song song với d.

   (b) Lấy 1 điểm M trên d, vẽ $MH \perp (P)$ tại H, qua H vẽ đường thẳng song song với d và cắt d' tại B.

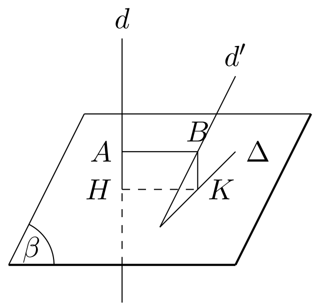


(c) Qua B kẻ đường song song với MH cắt d tại A. Khi đó AB là đoạn vuông góc chung.

2. Cách 2 (dựng vuông góc)

(a) Dựng mặt phẳng $(\beta) \perp d$ tại H.

(b) Dựng đường thẳng (Δ) là hình chiếu vuông góc của d' lên mặt phẳng (β).



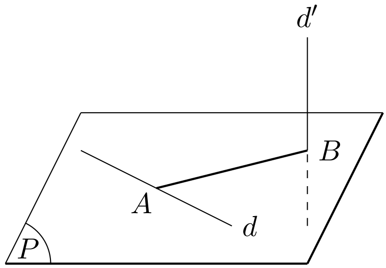
(c) Trong mặt phẳng (β), kẻ $HK \perp (\Delta)$.

(d) Từ K vẽ đường thẳng song song với d và cắt d' tại B.

(e) Từ B vẽ đường thẳng song song với HK và cắt d tại A. Khi đó AB là đoạn vuông góc chung của d và d'.

3. Chú ý: Khi $d \perp d'$

(a) Xác định mặt phẳng (P) chứa d và vuông góc với d' tại B. Từ B vẽ $BA \perp d$.



(b) Khi đó BA là đoạn vuông góc chung của d và d'.

4.6.4 Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

1. Bằng độ dài đoạn vuông góc chung.

2. Bằng khoảng cách giữa đường thẳng thứ nhất đến mặt phẳng chứa đường thẳng thứ hai sao cho mặt phẳng này song song với đường thẳng thứ nhất.

3. Bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa 2 đường thẳng đó.

4.7 Các bài toán xác định góc

4.7.1 Góc giữa 2 đường thẳng

Bằng với góc giữa 2 đường thẳng khác mà cùng phương với chúng.

1. Tìm trong bài toán các đường thẳng khác mà song song với 2 đường thẳng cần tính góc để đổi đường.

2. Để tính giá trị của góc dùng hệ thức lượng trong tam giác (xem mục 2.2 trang 14)

4.7.2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu vuông góc của d trên (P). Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) thì $0° \leqq \alpha \leqq 90°$.

(a) Đầu tiên ta tìm giao điểm của d và mặt phẳng (P) là A chẳng hạn.

(b) Trên d chọn điểm B khác A, xác định BH vuông góc với (P), suy ra AH là hình chiếu của d trên (P).

(c) Như vậy $(\widehat{d,(P)}) = \widehat{BAH}$.

2. Khi xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) quá khó (khó chọn điểm B để dựng BH vuông góc với (P)) thì ta sử dụng công thức sau đây:
Gọi $\alpha = (\widehat{d,(P)})$ thì

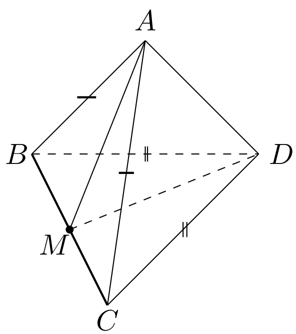
$$\sin\alpha = \frac{d(M,(P))}{MA}$$

trong đó $M \in d$ bất kỳ, A là giao điểm của d và (P), ta chuyển bài toán tính góc về bài toán tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

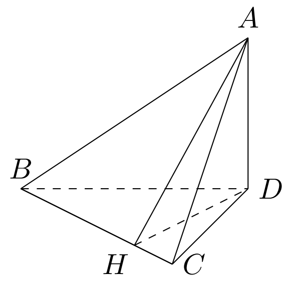
4.7.3 Góc giữa hai mặt phẳng

1. Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm.

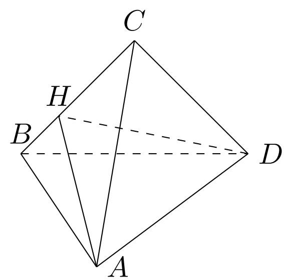
(a) Trường hợp 1: Hai tam giác cân ABC và DBC chung đáy BC, gọi M là trung điểm BC thì góc giữa mặt phẳng (ABC) và (DBC) là $\widehat{AMD}$.



(b) Trường hợp 2: Hai tam giác ABC và DBC có $AD \perp (DBC)$, vẽ $DH \perp BC$ thì $AH \perp BC$ nên góc giữa mặt phẳng (ABC) và (DBC) là $\widehat{AHD}$.



(c) Trường hợp 3: Hai tam giác ABC và DBC có các cạnh tương ứng bằng nhau, vẽ $AH \perp BC$ thì $DH \perp BC$, do đó góc giữa mặt phẳng (ABC) và (DBC) là $\widehat{AHD}$.



2. Chú ý: Khi xác định góc của 2 mặt phẳng quá khó thì ta có thể sử dụng công thức sau
Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (P) và (Q)

(a) Khi đó
$$\sin\varphi = \frac{d(A,(Q))}{d(A,u)}$$
trong đó $A \in (P)$, u là giao tuyến của mặt phẳng (P) và (Q).

(b) $S_{A'B'C'} = S_{ABC}\cos\varphi$ trong đó $\triangle ABC$ nằm trong (Q) và $\triangle A'B'C'$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle ABC$ lên mặt phẳng (P).

4.8 Các vấn đề về tính thể tích và diện tích

4.8.1 Thể tích hình hộp chữ nhật

$$V_{\text{hình hộp chữ nhật}} = a.b.c$$

trong đó a, b, c là 3 kích thước của hình hộp chữ nhật.

4.8.2 Thể tích hình lập phương

$$V_{\text{hình lập phương}} = a^3$$

trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

4.8.3 Thể tích khối hình chóp

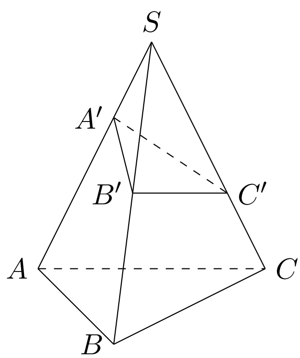
1. Thể tích khối chóp được tính theo công thức sau

$$V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3}B.h$$

   trong đó B là diện tích mặt đáy và h là chiều cao của khối chóp.

2. Chú ý: Cho khối chóp $S.ABC$, trên các cạnh SA, SB, SC lấy lần lượt các điểm A', B', C' khác S (nhưng có thể trùng với A, B, C), khi đó

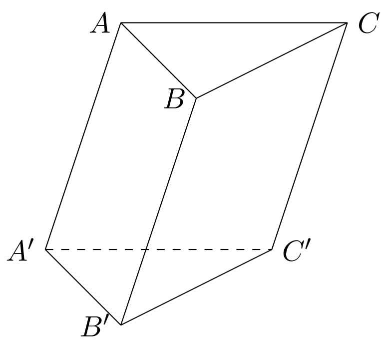
$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA.SB.SC}{SA'.SB'.SC'}$$



3. **Khối chóp đều** là một khối chóp có các tính chất sau
   (a) Đáy là một đa giác đều: tức là tam giác đều, tứ giác đều (còn gọi là hình vuông), ngũ giác đều, ...
   (b) Các cạnh bên bằng nhau.
   (c) Tâm của đáy vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy vừa là chân đường vuông góc hạ từ đỉnh xuống đáy.

4.8.4 Thể tích khối lăng trụ

1. Lăng trụ là hình gồm 2 mặt đáy bằng nhau và nằm trên 2 mặt phẳng song song, lăng trụ cũng có các cạnh bên song song và bằng nhau. Nếu mặt đáy là tam giác, tứ giác, ... thì lăng trụ tương ứng gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, ... Lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy gọi là lăng trụ đứng.



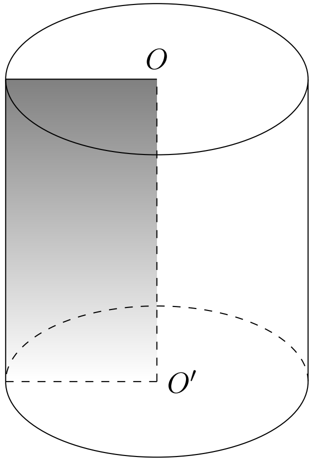
2. Thể tích khối lăng trụ được tính theo công thức sau

$$V_{\text{lăng trụ}} = B.h$$

trong đó B là diện tích mặt đáy và h là chiều cao của khối lăng trụ.

4.8.5 Hình trụ

1. Hình trụ là hình sinh bởi một hình chữ nhật quay một vòng quanh chiều dài hoặc chiều rộng. Các thiết diện qua trục là các hình chữ nhật bằng nhau.



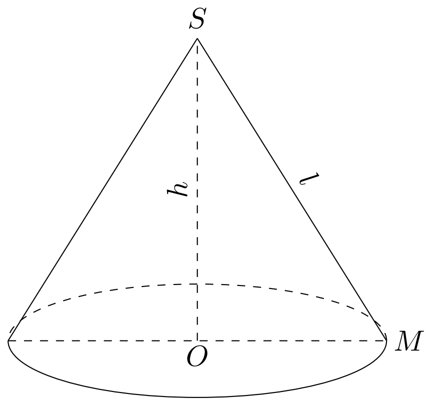
2. Thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ được tính theo các công thức sau

$$
\begin{aligned}
V_{\text{hình trụ}} &= B.h = \pi R^2.h \\
S_{\text{xung quanh}} &= 2\pi Rh
\end{aligned}
$$

trong đó B là diện tích đáy, h là chiều cao và R là bán kính đáy của hình trụ.

4.8.6 Hình nón

1. Hình nón là hình sinh bởi một tam giác vuông quay một vòng quanh một cạnh góc vuông. Các thiết diện qua trục là các tam giác cân bằng nhau.



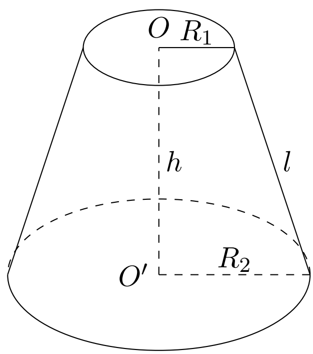
2. Thể tích và diện tích xung quanh của hình nón được tính theo các công thức sau

$$V_{\text{hình nón}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$
$$S_{\text{xung quanh}} = \pi h l$$

trong đó l là đường sinh, h là chiều cao và R là bán kính đáy của hình nón.

4.8.7 Hình nón cụt

1. Hình nón cụt là một phần của hình nón giới hạn bởi mặt đáy và một thiết diện vuông góc với đáy.



2. Thể tích, diện tích xung quanh và đường sinh của hình nón cụt được tính theo các công thức sau

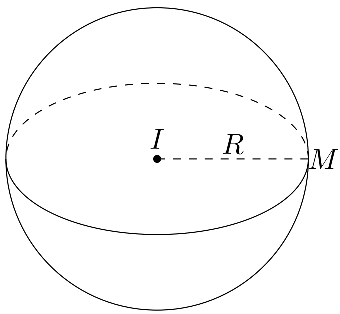
$$\begin{aligned} V_{\text{hình nón cụt}} &= \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) \\ S_{\text{xung quanh}} &= \pi(R_1 + R_2)l \\ l &= h^2 + (R_1 - R_2)^2 \end{aligned}$$

trong đó l là đường sinh, h là chiều cao, R_1, R_2 là 2 bán kính đáy của hình nón cụt.

4.8.8 Hình cầu

1. Mặt cầu tâm I bán kính R ký hiệu là $S(I, R)$ là tập hợp các điểm trong không gian xác định như sau

$$S(I, R) = \{M | IM = R\}$$



2. Hình cầu tâm I bán kính R ký hiệu là $B(I, R)$ là tập hợp các điểm trong không gian xác định như sau

$$B(I, R) = \{M | IM \leqq R\}$$

3. Thể tích hình cầu $B(I, R)$ là

$$V_{\text{hình cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

4. Diện tích mặt cầu $S(I,R)$ là

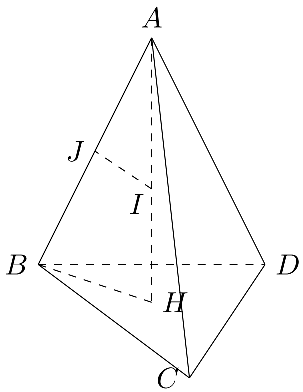
$$S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2$$

5. Phương pháp xác định mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

   (a) Trường hợp 1: Nếu $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$ thì 2 điểm B và D cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC.

   (b) Trường hợp 2: Nếu $AB = AC = AD$ thì ta làm như sau

      i. Vẽ $AH \perp (BCD)$ thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

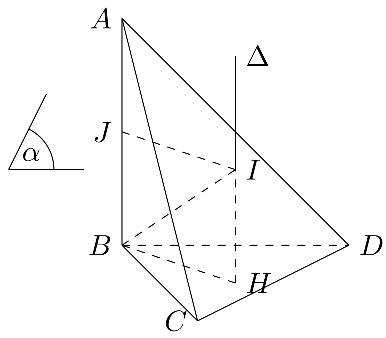


      ii. Trong mặt phẳng (ABH) chẳng hạn, vẽ đường trung trực của đoạn AB, đường này cắt AH tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

      iii. Do hệ thức lượng trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IJBH$ ta có $AJ.AB = AI.AH$ nên $R = IA = \dfrac{AB^2}{2AH}$.

   (c) Trường hợp 3: Nếu $AB \perp (BCD)$ thì ta làm như sau

      i. Vẽ Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.



ii. Vẽ (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, Δ cắt (α) tại I thì I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

iii. $R = IB = \sqrt{IH^2 + HB^2}$.

Chương 5

Tọa độ trong không gian 3 chiều

5.1 Vec tơ trong không gian 3 chiều

1. Vec tơ là đoạn thẳng có phân biệt điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

2. Hai vec tơ bằng nhau khi cùng hướng và cùng độ dài.

3. Hai vec tơ đối nhau khi ngược hướng và cùng độ dài.

4. Phép cộng vec tơ:

   (a) Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

   (b) Quy tắc hình bình hành: $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

   (c) Các tính chất:

      i. Tính giao hoán: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.

      ii. Tính kết hợp: $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.

      iii. Tính chất với $\overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.

5. Phép trừ vec tơ: Với 2 điểm A, B và một điểm O thì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

6. Phép nhân vec tơ với một số thực:

   (a) Cho $\overrightarrow{a}$ và một số thực k, khi đó tích của $\overrightarrow{a}$ và số k là một vec tơ, ký hiệu là $k\overrightarrow{a}$, sao cho

      i. Nếu $k > 0$ thì $k\overrightarrow{a}$ cùng hướng với $\overrightarrow{a}$.
      ii. Nếu $k < 0$ thì $k\overrightarrow{a}$ ngược hướng với $\overrightarrow{a}$.
      iii. $|k\overrightarrow{a}| = |k|.|\overrightarrow{a}|$.

   (b) Các tính chất: Với 2 vec tơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ tùy ý và với mọi số thực k, h thì

      i. $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$;
      ii. $(h + k)\overrightarrow{a} = h\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$;
      iii. $h(k\overrightarrow{a}) = (hk)\overrightarrow{a}$;
      iv. $1.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$; $(-1).\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$; $0.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$; $k.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$.

7. Điều kiện để 2 vec tơ cùng phương: Hai vec tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ duy nhất : $\overrightarrow{a} = k.\overrightarrow{b}$.

8. 3 vec tơ đồng phẳng: $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

   (a) 3 vec tơ đồng phẳng có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng.
   (b) $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R} : \overrightarrow{a} = m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}$.

9. Phân tích 1 vec tơ theo 3 vec tơ không đồng phẳng: Cho 3 vec tơ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ không đồng phẳng, khi đó với vec tơ $\overrightarrow{a}$ tùy ý thì có duy nhất 3 số thực a_1, a_2, a_3 sao cho

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

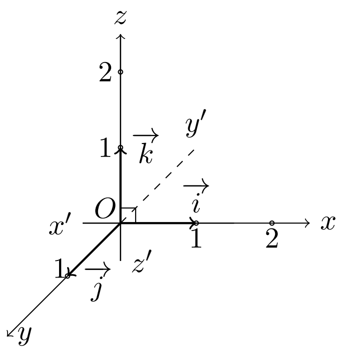
   .

10. G là trọng tâm của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.

5.2 Hệ trục tọa độ trong không gian 3 chiều

5.2.1 Hệ trục tọa độ $Oxyz$

Hệ trục $Oxyz$ trong không gian gồm 3 trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ lần lượt là các vec tơ đơn vị trên các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$. Điểm O gọi là gốc tọa độ. Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc nhau. Không gian gắn với hệ trục $Oxyz$ gọi là không gian 3 chiều.



Hình 5.1: Hệ trục $Oxyz$.

5.2.2 Tọa độ của một điểm

Định nghĩa 5.2.1 *Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M tùy ý. Khi đó tồn tại duy nhất 3 số thực x_M, y_M, z_M sao cho $\overrightarrow{OM} = x_M\overrightarrow{i} + y_M\overrightarrow{j} + z_M\overrightarrow{k}$, ta gọi bộ 3 số (x_M, y_M, z_M) là tọa độ của điểm M, ta viết gọn là $M(x_M, y_M, z_M)$ hay $M = (x_M, y_M, z_M)$.*

5.2.3 Tọa độ của một vec tơ

Định nghĩa 5.2.2 *Trong không gian $Oxyz$ cho $\overrightarrow{a}$ tùy ý. Khi đó tồn tại duy nhất 3 số thực a_1, a_2, a_3 sao cho $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, ta gọi bộ 3 số a_1, a_2, a_3 là tọa độ của $\overrightarrow{a}$, ta viết gọn là $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ hay $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$.*

5.2.4 Biểu thức tọa độ của các phép toán vec tơ

Trong không gian $Oxyz$ cho $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ và số thực k. Khi đó

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
2. $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.
3. $k\overrightarrow{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$.
4. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
5. $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}(\neq \overrightarrow{0})$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$.
6. $\overrightarrow{0} = (0; 0; 0)$ cùng phương cùng hướng với mọi vec tơ.
7. Nếu $A(x_A, y_A, z_A)$ và $B(x_B, y_B, z_B)$ thì tọa độ của vec tơ
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A, z_B - z_A)$$
(Điều này do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$).

5.2.5 Tích vô hướng và các ứng dụng

1. Trong không gian $Oxyz$ cho $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, khi đó tích vô hướng của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là **một số thực** xác định bởi
$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$
$$\text{hoặc}\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|.\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$
2. Độ dài của một vec tơ: Cho $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, khi đó độ dài của $\overrightarrow{a}$ là
$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
.

3. Khoảng cách giữa 2 điểm $A(x_A, y_A, z_A)$ và $B(x_B, y_B, z_B)$ là

$$AB = BA = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

4. Gọi φ là góc giữa 2 vec tơ $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, khi đó

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

và $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

5. M là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

6. Điểm M chia AB theo tỷ số k thì $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \dfrac{\overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB}}{1-k}$ (với $k \neq 1, I$ tùy ý). Khi đó, tọa độ của điểm M là $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$

5.3 Tích có hướng của 2 vec tơ và ứng dụng

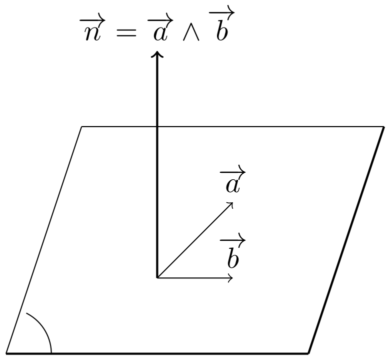
5.3.1 Tích có hướng của 2 vec tơ

Định nghĩa 5.3.1 *Trong không gian Oxyz cho* $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, *khi đó tích có hướng của* $\overrightarrow{a}$ *và* $\overrightarrow{b}$ *là một vec tơ, ký hiệu là* $[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}]$ *hoặc* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ *hoặc* $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, *có tọa độ xác định bởi*

$$[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

▶ Các tính chất:

1. $[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}] = -[\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}]$.
2. $\overrightarrow{a}$ cùng phương $\overrightarrow{b} \Leftrightarrow [\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}] = \overrightarrow{0}$.
3. $[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}] \perp \overrightarrow{a}$ và $[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}] \perp \overrightarrow{b}$.
4. $\left|[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}]\right| = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|.\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.



5.3.2 Ứng dụng của tích có hướng

1. Diện tích tam giác xác định bởi

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB.AC \sin \widehat{BAC} \\ &= \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| \\ &= \cdots \end{aligned}$$

2. Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right| = \cdots$$

3. Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \cdots$

4. $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}].\overrightarrow{c} = 0 \Leftrightarrow \cdots$

5. A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow \cdots$

5.4 Mặt phẳng trong không gian 3 chiều

5.4.1 Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa 5.4.1 *Vec tơ $\overrightarrow{n}$ khác $\overrightarrow{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là vec tơ pháp tuyến hay pháp vec tơ của mặt phẳng (α).*

5.4.2 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

1. Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vec tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.

2. Phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và nhận vec tơ $\overrightarrow{n} = (A, B, C) \neq \overrightarrow{0}$ làm vec tơ pháp tuyến là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. Nếu mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ thì (α) có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

4. Nếu mặt phẳng (α) song song hoặc chứa giá của hai vec tơ khác phương là $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ thì mặt phẳng (α) có một vec tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ (ký hiệu $\wedge$ đọc là tích có hướng) xác định bởi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}] &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1)\end{aligned}$$

5.4.3 Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α_1) có phương trình tổng quát $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ với vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$
và mặt phẳng (α_2) có phương trình tổng quát $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ với vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Khi đó

1. $(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}: & \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2} \\ & D_1 \neq kD_2 \end{cases}$
2. $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$.
3. (α_1) cắt $(\alpha_2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{n_1} \neq k\overrightarrow{n_2}, \forall k \in \mathbb{R}$.
4. $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}: & \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2} \\ & D_1 = kD_2 \end{cases}$

5.4.4 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ xác định bởi:

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5.4.5 Chùm mặt phẳng

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng (Δ). Khi đó, mỗi mặt phẳng qua giao tuyến (Δ) sẽ có phương trình phụ thuộc 2 tham số dạng:

$$m(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+n(A_2x+B_2y+C_2z+D_2) = 0 \quad \text{với } m^2+n^2 \neq 0$$

5.5 Mặt cầu

5.5.1 Phương trình mặt cầu

1. Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a, b, c)$ bán kính R là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Ngược lại, phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a,b,c)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

2. Đặc biệt, phương trình mặt cầu $S(O;R)$ là $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3. Phương trình $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2-D>0$ sau khi biến đổi bằng cách nhóm hằng đẳng thức sẽ trở thành $(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2=R^2$ với $R^2=A^2+B^2+C^2-D$. Do đó phương trình đó là phương trình của mặt cầu tâm $I(-A,-B,-C)$ bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

5.5.2 Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu (S) tâm $I(a,b,c)$ bán kính R có phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Gọi H là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (α) thì

$$IH=\mathrm{d}(I,(\alpha))=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

khi đó

1. Mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))>R$.

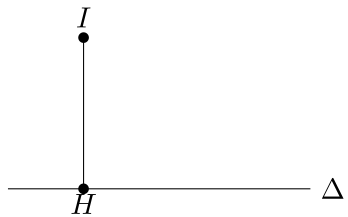
2. Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))=R$. Khi đó H gọi là tiếp điểm và mặt phẳng (α) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S).

3. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))<R$. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn $C(H,r)$ với $r=\sqrt{R^2-IH^2}$ có phương trình

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

5.5.3 Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ (H là giao điểm của mặt phẳng (P) và Δ, trong đó (P) là mặt phẳng qua tâm I và vuông góc với Δ).



Khi đó:

1. Đường thẳng (Δ) không cắt mặt cầu $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\Delta)) > R$.

2. Đường thẳng (Δ) tiếp xúc mặt cầu $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\Delta)) = R$. Khi đó H gọi là tiếp điểm và đường thẳng (Δ) gọi là tiếp tuyến của mặt cầu (S).

3. Đường thẳng (Δ) cắt mặt cầu $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\Delta)) < R$. Khi đó (Δ) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B sao cho H là trung điểm của AB.

5.6 Đường thẳng trong không gian 3 chiều

5.6.1 Các dạng phương trình của đường thẳng

1. **Phương trình tham số:** Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và nhận vec tơ $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \overrightarrow{0}$ làm vec tơ chỉ phương, (Δ) có phương trình tham số là

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t.a_1 \\ y = y_0 + t.a_2 \\ z = z_0 + t.a_3 \end{cases}}$$

2. **Phương trình chính tắc:** Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và nhận vec tơ $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ sao cho $a_1.a_2.a_3 \neq 0$ làm vec tơ chỉ phương, (Δ) có phương trình chính tắc là
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

3. **Phương trình tổng quát:** Xem đường thẳng như là giao tuyến của 2 mặt phẳng, xét đường thẳng (Δ) có dạng
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
với $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$, khi đó vec tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là
$$\overrightarrow{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

5.6.2 Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

Cho 2 đường thẳng d_1 qua điểm $M_1(x_{M_1}, y_{M_1}, z_{M_1})$ và có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}$, d_2 qua điểm $M_2(x_{M_2}, y_{M_2}, z_{M_2})$ và có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}$, đặt $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2}$, khi đó

1. $d_1 \parallel d_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n} = \overrightarrow{0} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$

2. $d_1 \equiv d_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n} = \overrightarrow{0} \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$

3. d_1 cắt $d_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$

4. d_1 và d_2 chéo nhau $\Longleftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

5. $d_1 \perp d_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} = 0$.

5.6.3 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và nhận $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ làm vec tơ pháp tuyến. Khi đó

1. $d \parallel (\alpha) \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a}.\overrightarrow{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$
2. $d \subset (\alpha) \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a}.\overrightarrow{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$
3. d cắt $(\alpha) \Longleftrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{n} \neq 0$
4. $d \perp (\alpha) \Longleftrightarrow \overrightarrow{n} = k\overrightarrow{a}$

5.6.4 Một số cách tính khoảng cách

1. **Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng:**
   Trong không gian $Oxyz$, để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) ta thực hiện các bước:
   (a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa M và vuông góc với (Δ);
   (b) Tìm giao điểm H của (Δ) với mặt phẳng (α);
   (c) $d(M, \Delta) = MH$.
2. **Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song:**
   Trong không gian $Oxyz$, để tính khoảng cách giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) song song với (Δ) ta thực hiện các bước:
   (a) Lấy tùy ý điểm $M(x_M; y_M; z_M) \in (\Delta)$;
   (b) $d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha))$.
3. **Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau:**
   Trong không gian $Oxyz$, để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (Δ) và (Δ') ta thực hiện các bước:

(a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (Δ) và song song với (Δ');

(b) Lấy một điểm tùy ý $M(x_M; y_M; z_M) \in (\Delta')$;

(c) $d(\Delta, \Delta') = d(M, (\alpha))$.

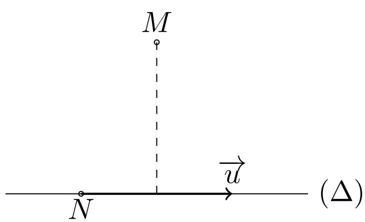
5.6.5 Một số công thức tính khoảng cách

1. Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$\boxed{d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

2. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ) đi qua N và có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$ là

$$\boxed{d(M, \Delta) = \frac{\left|\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{u}\right|}{|\overrightarrow{u}|}}$$

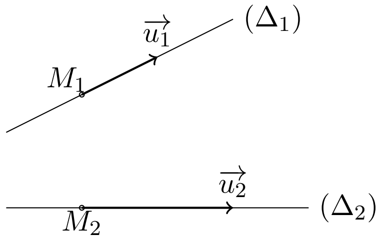


3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

$(\Delta_1) : \begin{cases} \text{đi qua } M_1 \\ \text{có vec tơ chỉ phương } \overrightarrow{u_1} \end{cases}$

và $(\Delta_2) : \begin{cases} \text{đi qua } M_2 \\ \text{có vec tơ chỉ phương } \overrightarrow{u_2} \end{cases}$ là

$$\boxed{d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|[\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|[\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}]\right|}}$$



5.6.6 Một số công thức tính góc

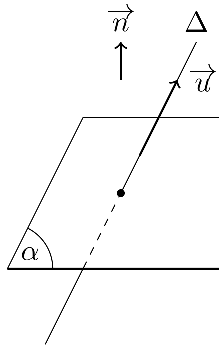
1. **Góc giữa hai đường thẳng:**
Cho $\begin{cases}\text{đường thẳng } (\Delta_1) \text{ có vec tơ chỉ phương } \overrightarrow{u_1}=(a_1;b_1;c_1)\\ \text{đường thẳng } (\Delta_2) \text{ có vec tơ chỉ phương } \overrightarrow{u_2}=(a_2;b_2;c_2)\end{cases}$
khi đó góc φ giữa (Δ_1) và (Δ_2) xác định bởi

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

► Đặc biệt $(\Delta_1)\perp(\Delta_1)\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

2. **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**
Cho $\begin{cases}\text{đường thẳng } (\Delta) \text{ có vec tơ chỉ phương } \overrightarrow{u}=(a;b;c)\\ \text{mặt phẳng } (\alpha) \text{ có vec tơ pháp tuyến } \overrightarrow{n}=(A;B;C)\end{cases}$
khi đó góc ψ giữa (Δ) và (α) xác định bởi

$$\sin\psi=|\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})|=\frac{|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{n}|}=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



▶ Đặc biệt $(\Delta) \parallel (\alpha)$ hoặc $(\Delta) \equiv (\alpha)$ thì $Aa + Bb + Cc = 0$.

3. **Góc giữa 2 mặt phẳng:**

Cho $\begin{cases} \text{mặt phẳng } (\alpha_1) \text{ có vec tơ pháp tuyến } \overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1) \\ \text{mặt phẳng } (\alpha_2) \text{ có vec tơ pháp tuyến } \overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2) \end{cases}$

khi đó góc β giữa (α_1) và (α_2) xác định bởi

$$\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

▶ Đặc biệt $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thái Sơn, *Trang web: http://osshcmup.wordpress.com*, 2013.

[2] Nguyễn Mộng Hy, Khu Quốc Anh, Trần Đức Huyên, *Bài tập Hình học 12*, Nhà xuất bản Giáo Dục 2008.

[3] Phan Thanh Quang, *Sổ tay toán 10 - 11 - 12*, Nhà xuất bản Đại Học Sư Phạm 2010.