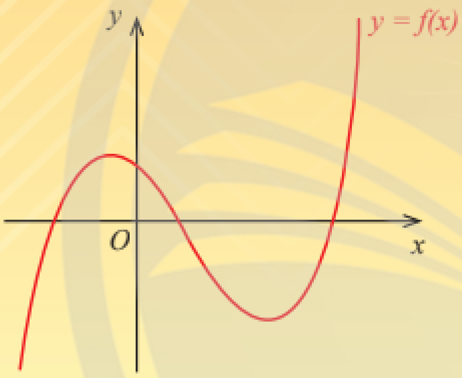
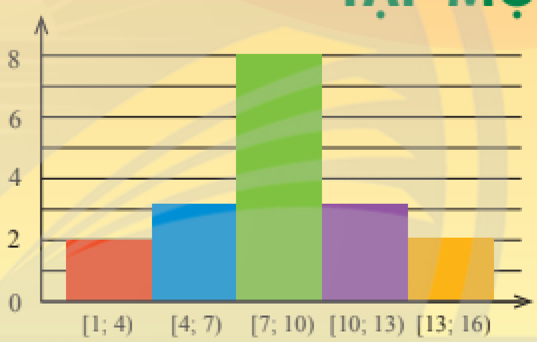
TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

12

TẬP MỘT





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢN MẪU

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn: Toán – Lớp 12

(Theo Quyết định số 1882/QĐ-BGDĐT ngày 29 tháng 6 năm 2023 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Chủ tịch: LÊ MẬU HẢI
Phó Chủ tịch: CAO THỊ HÀ
Uỷ viên, Thư kí: PHẠM ĐỨC TÀI

Các uỷ viên: NGUYỄN HẮC HẢI – NGUYỄN CHIẾN THẮNG
PHẠM ĐÌNH TÙNG – PHẠM KHẮC BAN
NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN – ĐINH CAO THƯỢNG
NGUYỄN DOÃN PHÚ – VŨ THỊ NHƯ TRANG

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN 12

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách **Toán 12** thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới.
Kiến thức trọng tâm	Nội dung kiến thức cần lĩnh hội.
Thực hành	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

Lời nói đầu

Các bạn học sinh, quý thầy, cô giáo thân mến!

Sách ***Toán 12*** thuộc bộ sách giáo khoa ***Chân trời sáng tạo*** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cấu trúc sách ***Toán 12*** được chia thành hai tập.

Tập một bao gồm ba chương:

Chương I: *Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số.*

Chương II: *Vectơ và hệ toạ độ trong không gian.*

Chương III: *Các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm.*

Đầu mỗi chương đều có nêu rõ các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chương. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: khởi động, khám phá, thực hành, vận dụng. Sách sẽ tạo nên một môi trường học tập và giảng dạy tương tác tích cực nhằm đảm bảo tính dễ dạy, dễ học đồng thời hỗ trợ các phương pháp giảng dạy hiệu quả.

Nội dung sách thể hiện tính tích hợp, gắn bó môn Toán với các môn học khác. Những hoạt động trải nghiệm được tăng cường giúp người học có thêm cơ hội vận dụng Toán học vào thực tiễn, đồng thời ứng dụng công nghệ thông tin vào việc học Toán.

Chúng tôi tin tưởng rằng với cách biên soạn này, sách giáo khoa ***Toán 12*** sẽ hỗ trợ quý thầy, cô giáo một cách tích cực và hiệu quả trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách được ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

Mục lục

Phần MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Đạo hàm là một công cụ toán học có rất nhiều ứng dụng trong khoa học, kĩ thuật và đời sống. Trong chương này, chúng ta sẽ ứng dụng đạo hàm để khảo sát một số tính chất quan trọng của hàm số (như tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất) và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số, từ đó vẽ đồ thị của hàm số hoặc giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Số lượng thành phẩm cần sản xuất là bao nhiêu để thu được lợi nhuận cao nhất?

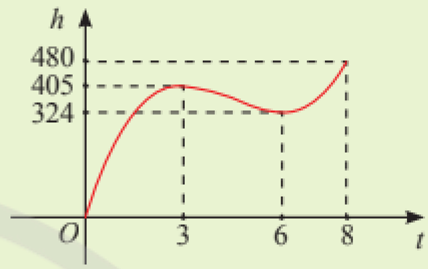
Học xong chương này, bạn có thể:

- Nhận biết được tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu của đạo hàm cấp một của nó.
- Thể hiện được tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên.
- Nhận biết được tính đơn điệu, điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.
- Nhận biết được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập xác định cho trước.
- Xác định được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.
- Khảo sát được tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$; $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$; $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a \neq 0, m \neq 0$ và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu).
- Nhận biết được tính đối xứng (trục đối xứng, tâm đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.
- Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn.

Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

Từ khoá: **Đồng biến; Nghịch biến; Cực trị; Cực đại; Cực tiểu.**

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên.



Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?

Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?

1. Tính đơn điệu của hàm số

Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

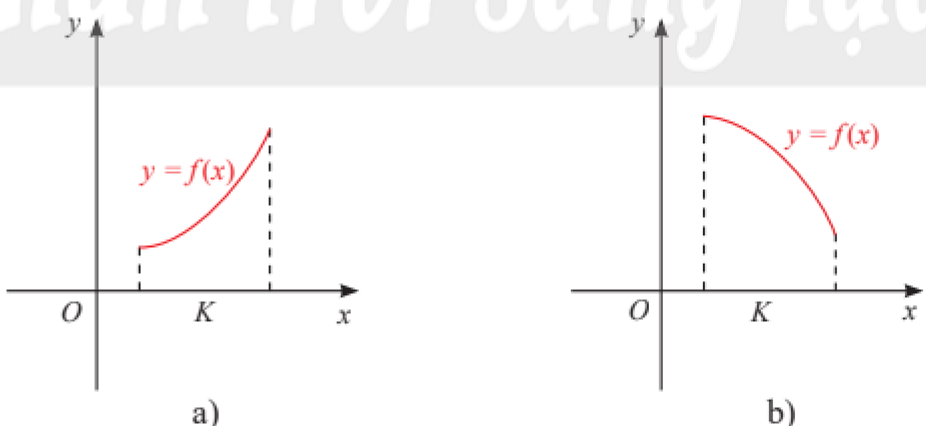
Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* (*tăng*) trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch biến* (*giảm*) trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó *đi lên* từ trái sang phải (Hình 1a).

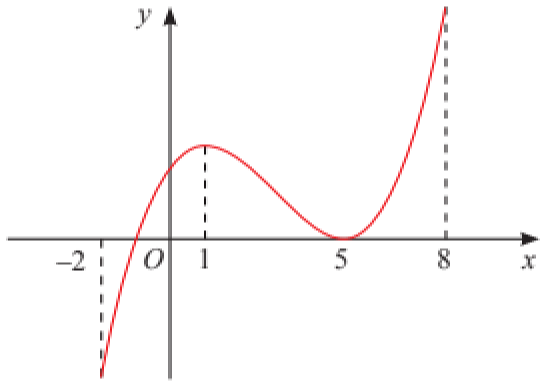
Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó *đi xuống* từ trái sang phải (Hình 1b).



Hình 1

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là *đơn điệu* trên K.

Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 2.

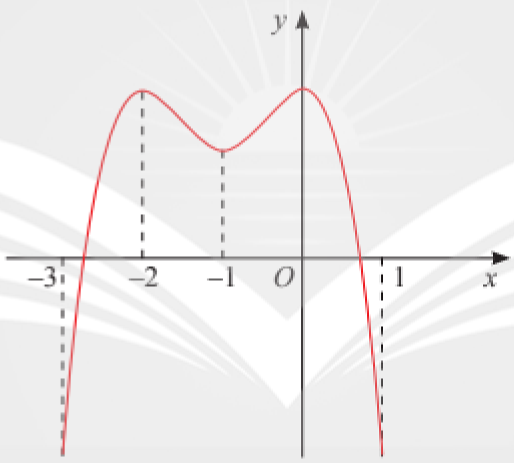


Hình 2

Giải

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(5; 8)$, nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.

1 Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 3.



Hình 3

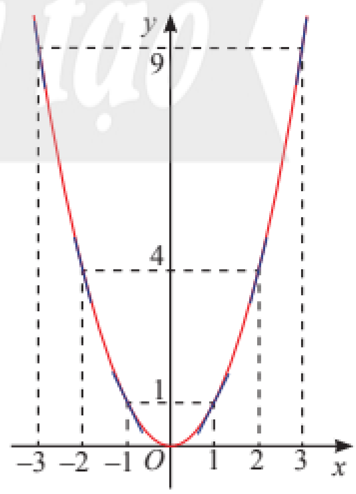
Tính đơn điệu của hàm số

1 Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (Hình 4), hãy chỉ ra các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số đã cho.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$ và xét dấu $f'(x)$.

c) Từ đó, nhận xét về mối liên hệ giữa các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số với dấu của $f'(x)$.



Hình 4

Trong 1, ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng mà $f'(x)$ dương, nghịch biến trên khoảng mà $f'(x)$ âm.

Tổng quát, ta có kết quả sau đây:

> Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.
> Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.
> Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Giải

Hàm số xác định trên $(1; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \in (1; +\infty)$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chú ý: Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa cho khoảng K, ta hiểu xét tính đơn điệu của hàm số đó trên tập xác định của nó.

Từ kết quả trên, để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm x thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$;   b) $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$;   c) $h(x) = x^3$.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

b) Xét hàm số $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

Vì $x^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $g'(x)$ cùng dấu với $x^2 - 1$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$			-2		‖ $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ ‖		2		

Vậy hàm số $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

c) Xét hàm số $h(x) = x^3$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = 3x^2$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$				$\nearrow$	$+\infty$
		$\nearrow$	0		
	$-\infty$				

Vậy hàm số $h(x) = x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chú ý:

a) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K, $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.

b) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K, $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K.

c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số không đổi trên K.

2 Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

3 Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 3x - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1 Hãy trả lời câu hỏi trong (trang 6) bằng cách xét dấu đạo hàm của hàm số $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$ với $0 \leq t \leq 8$.

2. Cực trị của hàm số

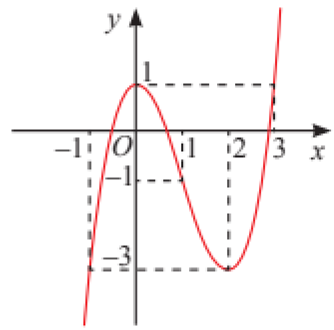
Khái niệm cực trị của hàm số

Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ trong Hình 5.

a) Tìm khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 0$ mà trên đó $f(x) < f(0)$ với mọi $x \neq 0$.

b) Tìm khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 2$ mà trên đó $f(x) > f(2)$ với mọi $x \neq 2$.

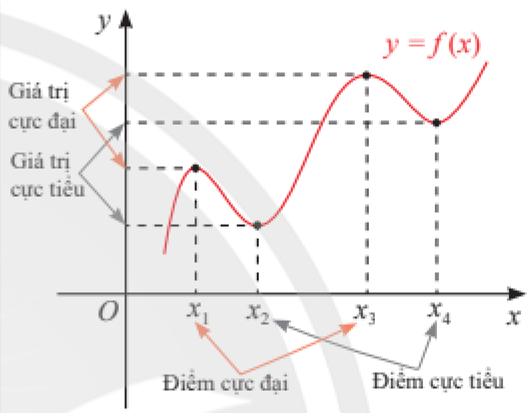
c) Tồn tại hay không khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 1$ mà trên đó $f(x) > f(1)$ với mọi $x \neq 1$ hoặc $f(x) < f(1)$ với mọi $x \neq 1$?



Hình 5

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

- Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một ***điểm cực đại***, $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực đại*** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu $y_{CĐ}$.
- Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$, thì x_0 được gọi là một ***điểm cực tiểu***, $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực tiểu*** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu y_{CT}.



Hình 6

Chú ý:

a) Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị*** của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị*** (còn gọi là ***cực trị***) của hàm số.

b) Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta cũng nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0.

c) Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên D.

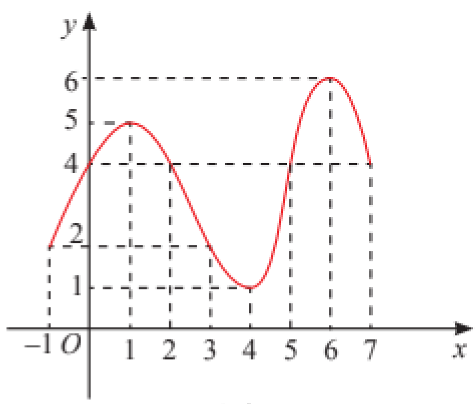
d) Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho ở Hình 7.

Giải

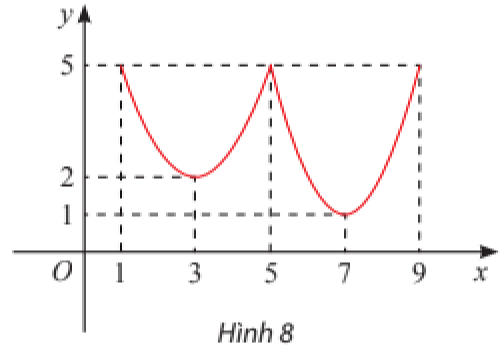
Hàm số $y = f(x)$ có:

- $x = 1$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(1)$ với mọi $x \in (0; 2) \setminus \{1\}$, $y_{CĐ} = f(1) = 5$;
- $x = 6$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(6)$ với mọi $x \in (5; 7) \setminus \{6\}$, $y_{CĐ} = f(6) = 6$;
- $x = 4$ là điểm cực tiểu vì $f(x) > f(4)$ với mọi $x \in (3; 5) \setminus \{4\}$, $y_{CT} = f(4) = 1$.



Hình 7

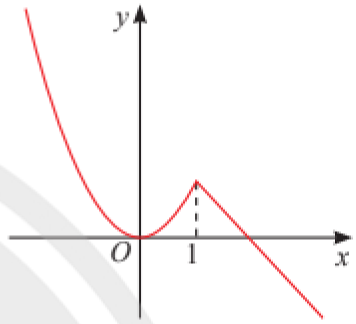
4 Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 8.



Hình 8

Tìm cực trị của hàm số

3 Đồ thị của hàm số $y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ 2 - x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ được cho ở Hình 9.



Hình 9

a) Tìm điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số.

b) Tại $x = 1$, hàm số có đạo hàm không?

c) Thay mỗi dấu ? bằng kí hiệu (+, –) thích hợp để hoàn thành bảng biến thiên dưới đây. Nhận xét về dấu của y' khi x đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		?	0	?	$\Vert$	?	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0;
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 4$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	14	↘	-111	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại là $f(-1) = 14$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$, giá trị cực tiểu là $f(4) = -111$.

Nhận xét: Từ kết quả trên, để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm x thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 4. Từ bảng biến thiên kết luận về cực trị của hàm số.

Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số không có cực trị.

Chú ý:

a) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không có cực trị tại x_0.

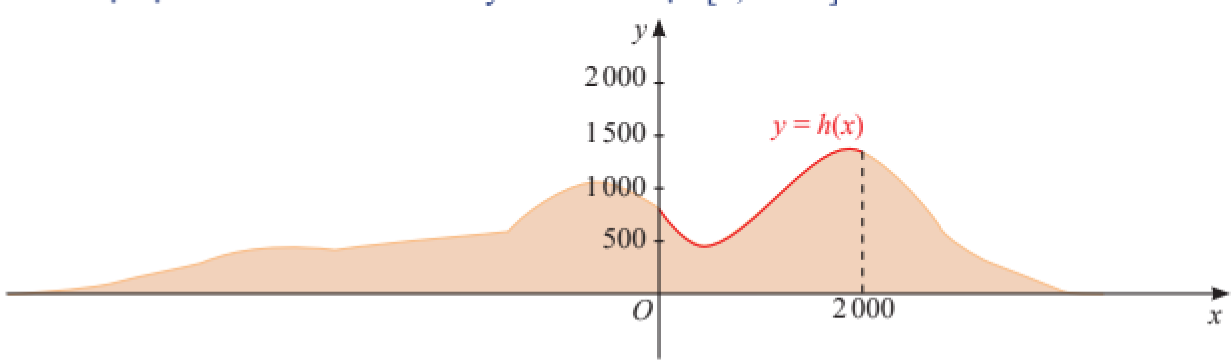
b) Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì $f(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

5 Tìm cực trị của hàm số $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$.

2 Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \text{ với } 0 \le x \le 2000.$$

Tìm toạ độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn [0; 2 000].

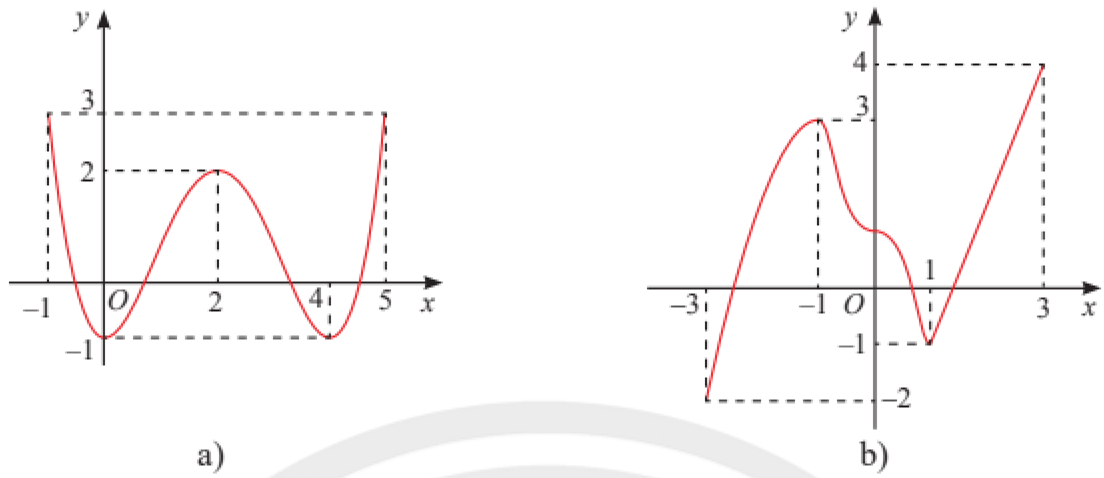


Hình 10

(*Theo:* Tập bản đồ bài tập và bài thực hành Địa lí 8, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011)

BÀI TẬP

1. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở Hình 11.



Hình 11

2. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$; b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$.

3. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$; b) $y = \dfrac{x^2 - 8x + 10}{x - 2}$; c) $y = \sqrt{-x^2 + 4}$.

4. Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

5. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}04x^2 + 0{,}25x + 0{,}44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \le x \le 7$).

(*Theo:* https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-qua-du-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna)

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

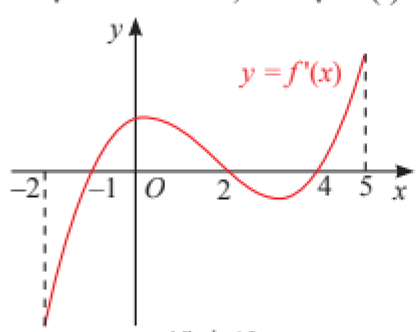
b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

6. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \ge 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

7. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 12. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

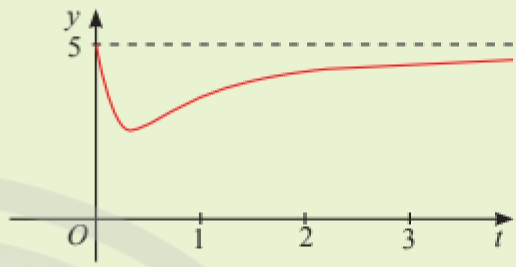


Hình 12

Bài 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Từ khoá: Giá trị lớn nhất của hàm số; Giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



$$y = y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}.$$

Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

(*Theo:* https://www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization _of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

1. Định nghĩa

Hình 1 cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày.

a) Khẳng định nào sau đây đúng? Vì sao?

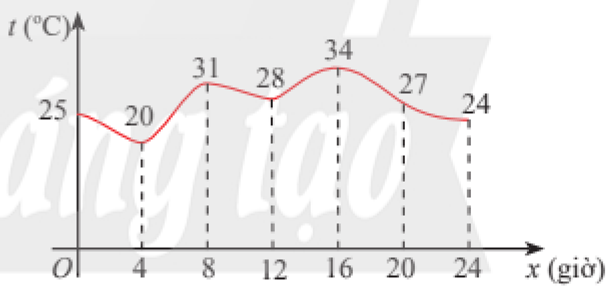
i) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28 °C.

ii) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 40 °C.

iii) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 34 °C.

b) Hãy xác định thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày.

c) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu?



Hình 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D.

Số M được gọi là ***giá trị lớn nhất của hàm số*** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu $M = \max\limits_{D} f(x)$.

Số m được gọi là ***giá trị nhỏ nhất của hàm số*** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Chú ý: Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ (mà không cho rõ tập hợp D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3; 1]$;

b) $y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3; 1]$.

Với mọi $x \in [-3; 1]$, ta có $f(x) = 2x + 3 \geq -3$. Mặt khác $f(-3) = -3$. Do đó $\min\limits_{[-3;\,1]} f(x) = -3$.

Với mọi $x \in [-3; 1]$, ta có $f(x) = 2x + 3 \leq 5$. Mặt khác $f(1) = 5$. Do đó $\max\limits_{[-3;\,1]} f(x) = 5$.

b) Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

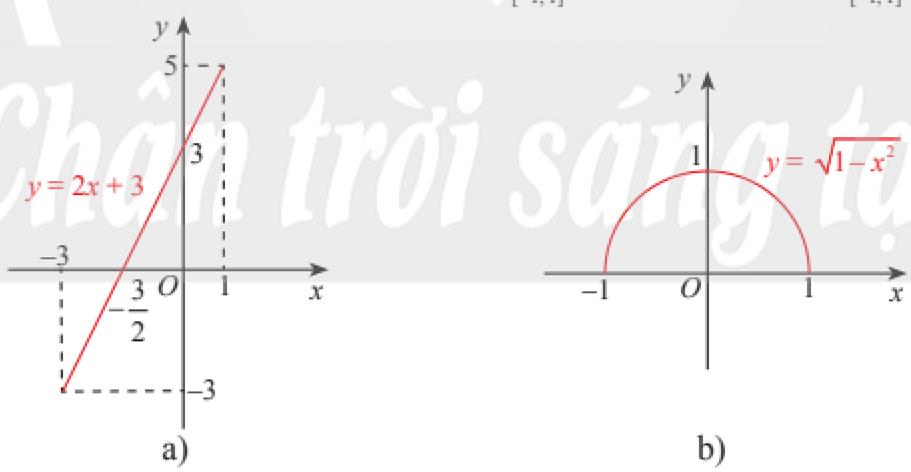
Tập xác định: $D = [-1; 1]$.

Ta có $0 \leq g(x) \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$. Mặt khác $g(0) = 1$ và $g(1) = 0$.

Do đó $\min\limits_{[-1;\,1]} g(x) = 0$ và $\max\limits_{[-1;\,1]} g(x) = 1$.

Nhận xét: Nếu biết đồ thị của hàm số trên tập hợp D, ta có thể xác định được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D. Chẳng hạn:

- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3; 1]$ (Hình 2a), ta thấy với mọi $x \in [-3; 1]$, $f(x) \geq f(-3)$ và $f(x) \leq f(1)$ nên $\min\limits_{[-3;\,1]} f(x) = f(-3) = -3$ và $\max\limits_{[-3;\,1]} f(x) = f(1) = 5$.
- Dựa vào đồ thị của hàm số $y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$ (Hình 2b), ta thấy với mọi $x \in [-1; 1]$, $g(x) \geq g(1)$ và $g(x) \leq g(0)$ nên $\min\limits_{[-1;\,1]} g(x) = g(1) = 0$ và $\max\limits_{[-1;\,1]} g(x) = g(0) = 1$.



Hình 2

Chú ý: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$:

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{[-1; +\infty)} f(x) = f(-1) = -17$ và hàm số không có giá trị lớn nhất trên $[-1; +\infty)$.

1 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$;

b) $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 5)$;

c) $h(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

Sử dụng đạo hàm và lập bảng biến thiên, trả lời câu hỏi trong (trang 14).

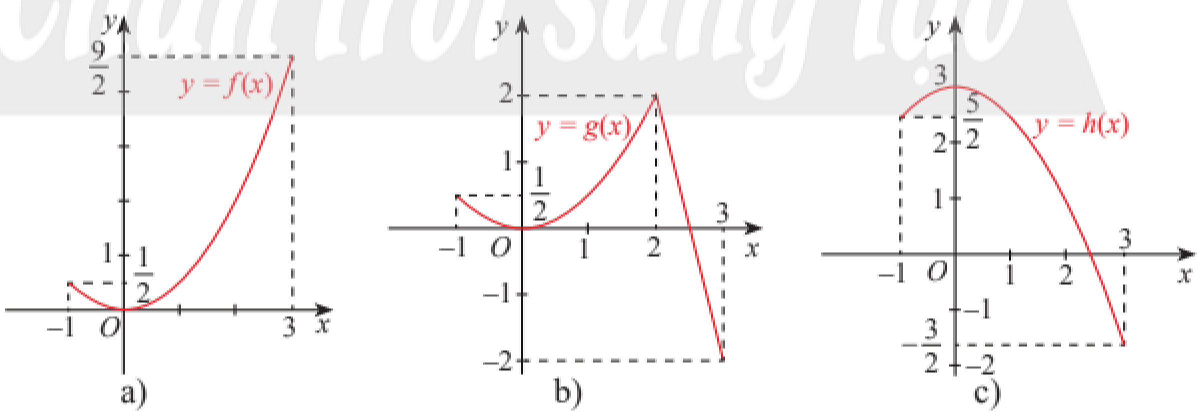
2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

2 Hình 3 cho ta đồ thị của ba hàm số

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2;\ y = g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{nếu } x \le 2 \\ -4x + 10 & \text{nếu } x \ge 2 \end{cases}$$ và $y = h(x) = 3 - \dfrac{1}{2}x^2$ trên đoạn $[-1; 3]$.

a) Hàm số nào đạt giá trị lớn nhất tại một điểm cực đại của nó?

b) Các hàm số còn lại đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào?



Hình 3

Trong 2, các hàm số đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 3]$ tại điểm đầu mút của đoạn hoặc tại điểm cực trị trong khoảng $(-1; 3)$.

Một cách tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a; b)$, ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ theo các bước như sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.

Bước 3. Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2.

Khi đó:

$$M = \max_{[a;\, b]} f(x),\ m = \min_{[a;\, b]} f(x).$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Giải

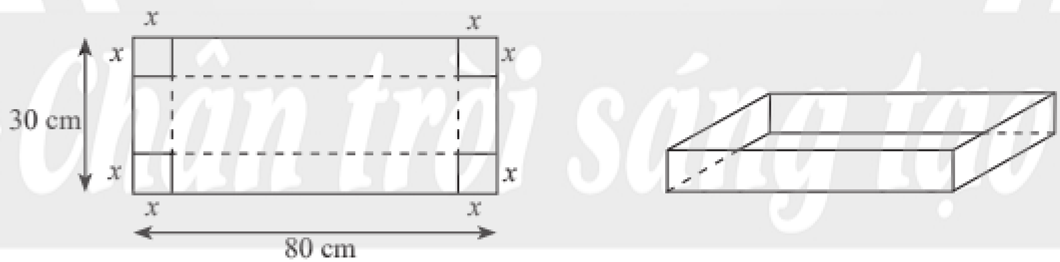
Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 16x$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = -2$ (loại vì không thuộc $[-1; 3]$);

$f(-1) = 2; f(0) = 9; f(2) = -7; f(3) = 18$.

Vậy $\max_{[-1;\, 3]} f(x) = f(3) = 18$ và $\min_{[-1;\, 3]} f(x) = f(2) = -7$.

Ví dụ 4. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình 4a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình 4b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



a) b)

Hình 4

Giải

Thể tích chiếc hộp là: $V(x) = x(30 - 2x)(80 - 2x) = 2\,400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \leq x \leq 10$.

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 440x + 2\,400$;

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{3}$ hoặc $x = 30$ (loại vì không thuộc $[5; 10]$);

$V(5) = 7\,000$; $V\left(\dfrac{20}{3}\right) = \dfrac{200\,000}{27}$; $V(10) = 6\,000$.

Do đó $\max\limits_{[5;10]} V(x) = \dfrac{200000}{27}$ khi $x = \dfrac{20}{3}$.

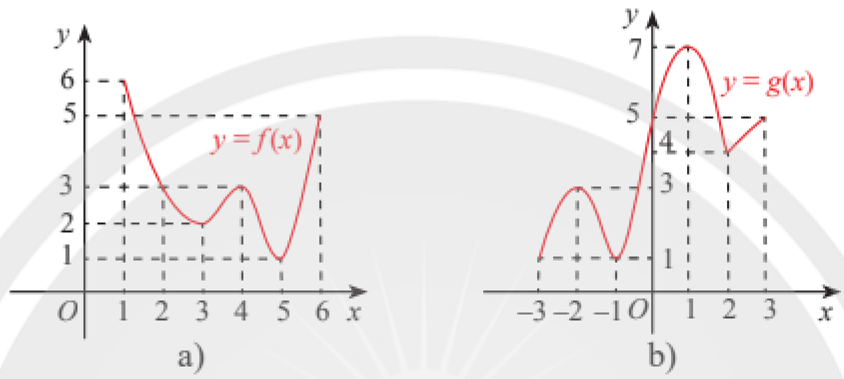
Vậy để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x = \dfrac{20}{3}$ cm.

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$ trên đoạn $[1; 4]$.

3. Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

BÀI TẬP

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở Hình 5.



Hình 5

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$;

b) $y = -x^3 + 24x^2 - 180x + 400$ trên đoạn $[3; 11]$;

c) $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3; 7]$;

d) $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{7\pi}{12}\right]$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x - 4$ trên nửa khoảng $[-3; 2)$;

b) $y = \dfrac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

4. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m (Hình 6). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

Hình 6

5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sqrt{1 - x^2} + x^2$.

6. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \dfrac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p.

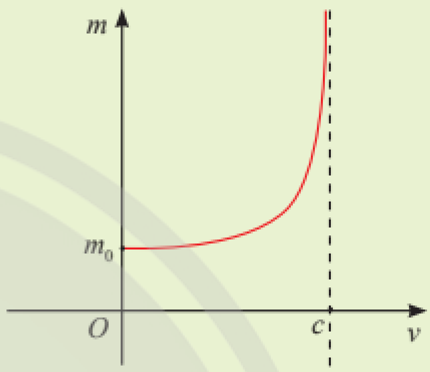
b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

7. Hộp sữa 1 l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Từ khoá: Tiệm cận đứng; Tiệm cận ngang; Tiệm cận xiên.

Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng m (kg) của một hạt phụ thuộc vào tốc độ di chuyển v (km/s) của nó trong hệ quy chiếu quán tính theo công thức $m = m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 là khối lượng nghỉ của hạt, $c = 300\,000$ km/s là tốc độ ánh sáng. Khi hạt di chuyển với tốc độ càng gần tốc độ ánh sáng thì khối lượng của hạt thay đổi thế nào? Điều này thể hiện trên đồ thị hàm số $m = m(v)$ ở hình bên như thế nào?



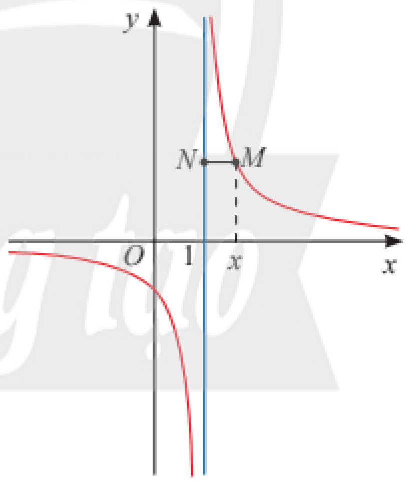
(*Theo:* https://www.britannica.com/science/relativistic-mass)

1. Đường tiệm cận đứng

1. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị như Hình 1.

a) Tìm $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$.

b) Gọi M là điểm trên đồ thị có hoành độ x. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với trục Oy cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm N. Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \to 1^+$ và $x \to 1^-$.

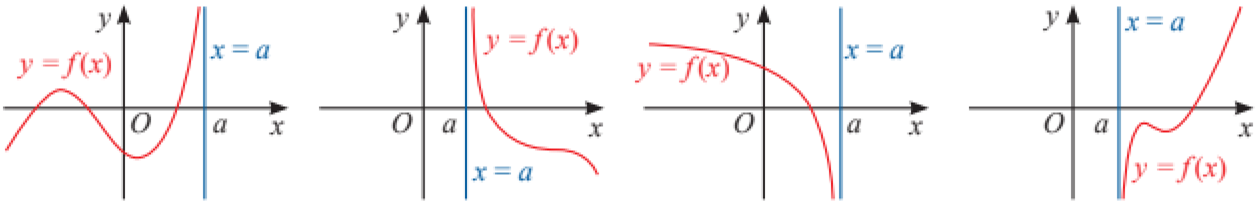


Hình 1

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một ***đường tiệm cận đứng*** (hay ***tiệm cận đứng***) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình 2.



a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Hình 2

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; b) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = -1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

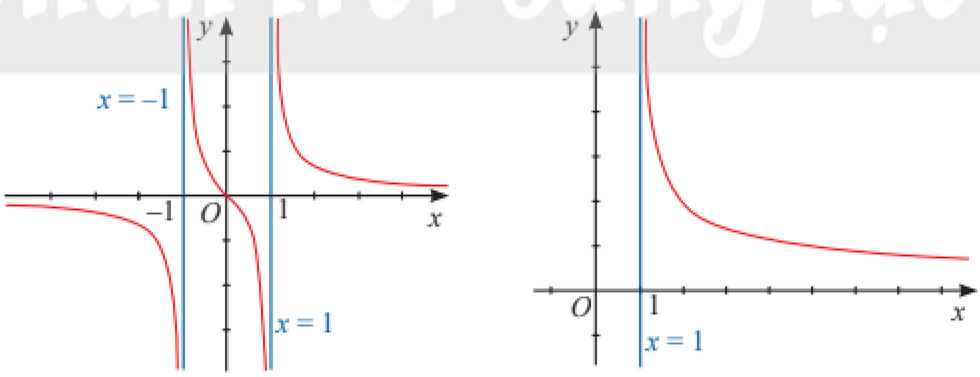
b) Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chú ý:

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = -1$ của nó được thể hiện trong Hình 3a.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ cùng với tiệm cận đứng $x = 1$ của nó được thể hiện trong Hình 3b.



a) b)

Hình 3

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

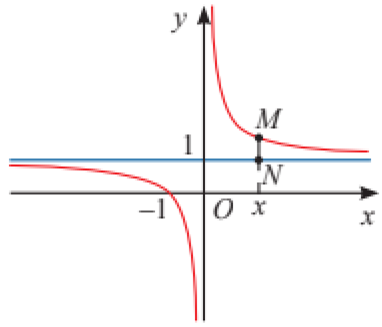
a) $y = f(x) = \dfrac{2x + 3}{-x + 5}$; b) $y = g(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

2. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x}$ có đồ thị như Hình 4.

a) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x}$.

b) Đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x cắt đồ thị hàm số tại điểm M và cắt đường thẳng $y = 1$ tại điểm N (Hình 4). Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.



Hình 4

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một ***đường tiệm cận ngang*** (hay ***tiệm cận ngang***) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m$.

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình 5.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m$

Hình 5

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$.

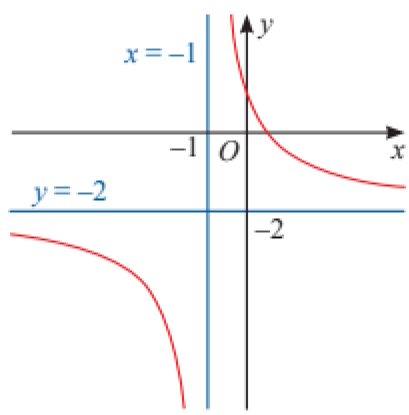
Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2$.

Vậy đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y = -2$ và tiệm cận đứng $x = -1$ của nó được thể hiện trong Hình 6.



Hình 6

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{4x+1}$; b) $y = g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

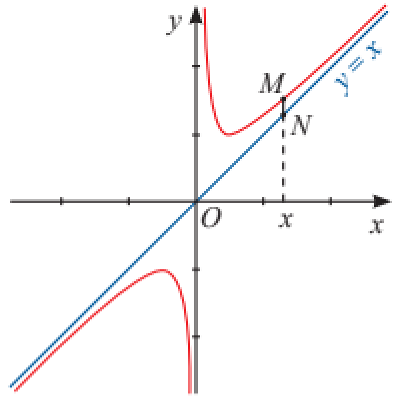
3. Đường tiệm cận xiên

Cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ và đường thẳng $y = x$.

Đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x cắt đồ thị hàm số tại điểm M và cắt đường thẳng $y = x$ tại điểm N (Hình 7).

a) Tính $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x} - x\right)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x} - x\right)$.

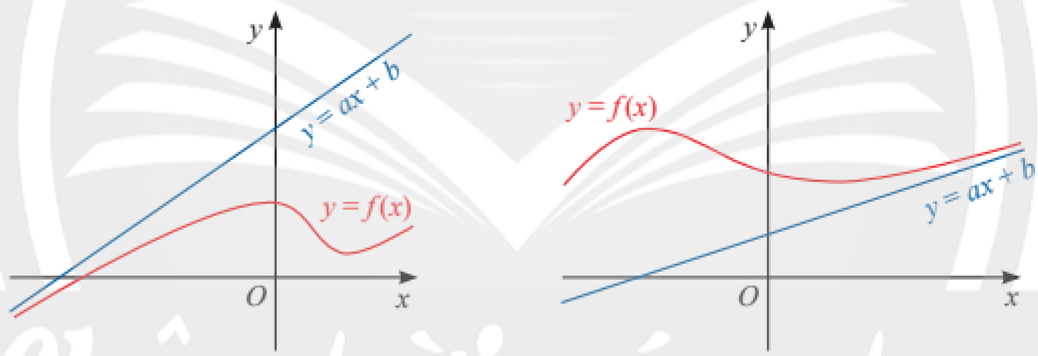
b) Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.



Hình 7

Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là ***đường tiệm cận xiên*** (hay ***tiệm cận xiên***) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$.

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình 8.



a) $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$

Hình 8

Ví dụ 3. Chứng minh rằng đường thẳng $y = x - 2$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

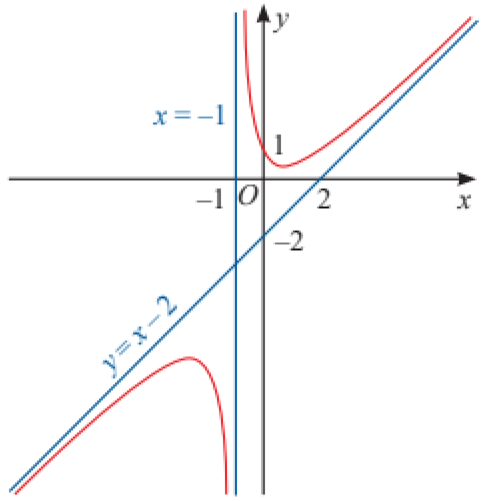
Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - (x-2)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{3}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (x-2)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{3}{x+1} = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x+1}$ cùng tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = x - 2$ của nó được thể hiện trong Hình 9.



Hình 9

Nhận xét:

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax]$.

b) Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

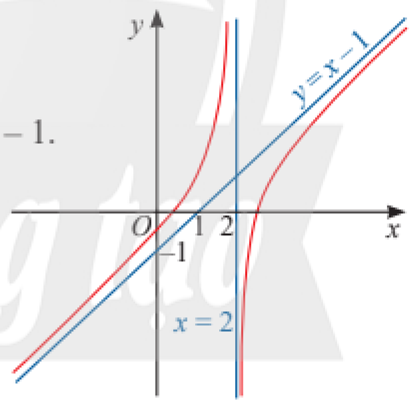
Ta có: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x} = 1;$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x + 1}{x - 2} = -1.$

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = -1$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ cùng với tiệm cận đứng $x = 2$ và tiệm cận xiên $y = x - 1$ của nó được thể hiện trong Hình 10.



Hình 10

Ví dụ 5. Trong Hình 11, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y = 55 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét. Chứng minh rằng $y = 55 - \dfrac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.

Hình 11

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)-\left(55-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2+144}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-144}{x+\sqrt{x^2+144}}\right)=0.$$

Tương tự ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)-\left(55-\frac{1}{2}x\right)\right]=0.$

Do đó $y=55-\frac{1}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}$.

3 Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x}{x+5}$.

4 Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức:

$$C(x)=\frac{50x+2\,000}{x}.$$

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = C(x)$.

BÀI TẬP

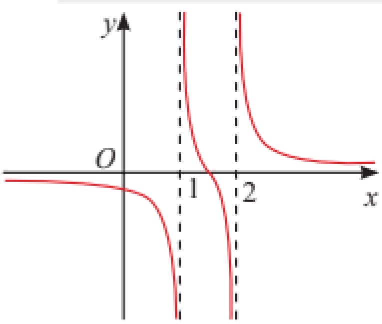
1. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{4x-5}{2x-3}$; b) $y=\dfrac{-2x+7}{4x-3}$; c) $y=\dfrac{5x}{3x-7}$.

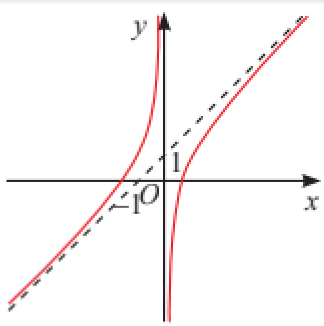
2. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2}{2x-4}$; b) $y=\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}$; c) $y=\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}$.

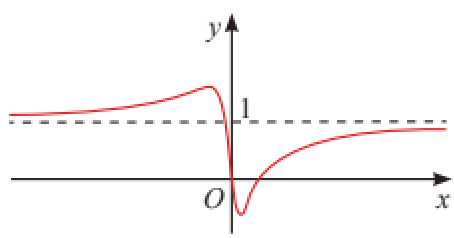
3. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:



a) $y=\dfrac{2x-3}{5x^2-15x+10}$



b) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$



c) $y=\dfrac{16x^2-8x}{16x^2+1}$

Hình 12

4. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

(*Theo:* www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

5. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt $m = m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ trong (trang 19).

Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản

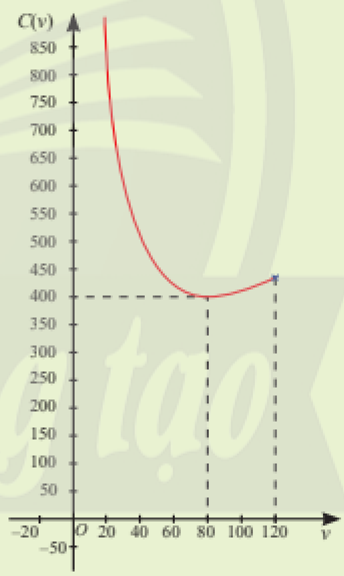
Từ khoá: Khảo sát hàm số; Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
Hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; Hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$.

Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C = C(v)$ như hình bên.

Làm thế nào để vẽ được đồ thị hàm số này?



1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Cho hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

a) Lập bảng biến thiên.

b) Vẽ đồ thị của hàm số.

Hàm số $y = f(x)$ thường cho biết sự thay đổi của một đại lượng y theo đại lượng x nào đó. Để hiểu rõ hơn về sự thay đổi này, bằng công cụ đạo hàm, người ta thường khảo sát về sự đồng biến, nghịch biến, các điểm cực trị, … của hàm số $y = f(x)$. Ngoài ra, người ta vẽ đồ thị của hàm số như một cách biểu diễn trực quan sự thay đổi của y theo x.

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

− Tìm đạo hàm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.

− Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

− Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số

− Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (nếu có và dễ tìm), ...

− Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

− Vẽ đồ thị hàm số.

Chú ý: Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Giải

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $(0; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

• Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = -2$.

• Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = -\infty; \ \lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị:

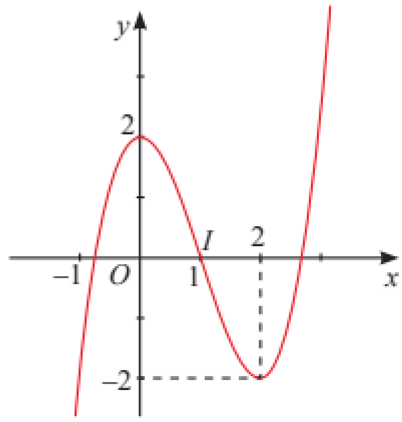
Khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên (0; 2) là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3} \text{ hoặc } x = 1 + \sqrt{3}.$$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại ba điểm (1; 0), $(1 + \sqrt{3};\ 0)$, $(1 - \sqrt{3}\ ;\ 0)$.

Điểm (0; 2) là điểm cực đại và điểm (2; −2) là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.



Hình 1

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 1. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1; 0)$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

Ví dụ 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x$.

Giải

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = -3x^2 - 3x - \dfrac{3}{2}$. Do $y' < 0$ trên $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

• Các giới hạn tại vô cực:

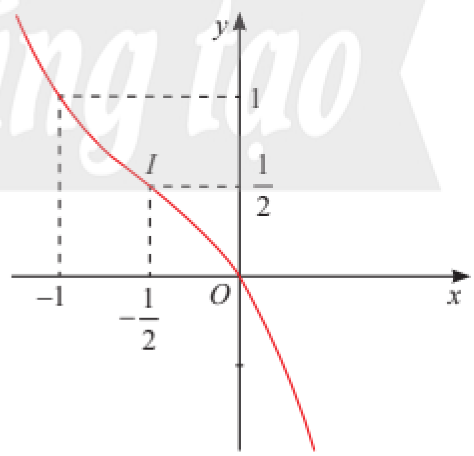
$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left[-x^3\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x^2}\right)\right] = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left[-x^3\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x^2}\right)\right] = -\infty.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số đi qua gốc toạ độ $O(0; 0)$ và điểm (−1; 1).



Hình 2

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 2. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$; b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

3. Khảo sát hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

Ví dụ 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

• Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$. Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} y = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x-1}{x+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} y = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x-1}{x+1} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

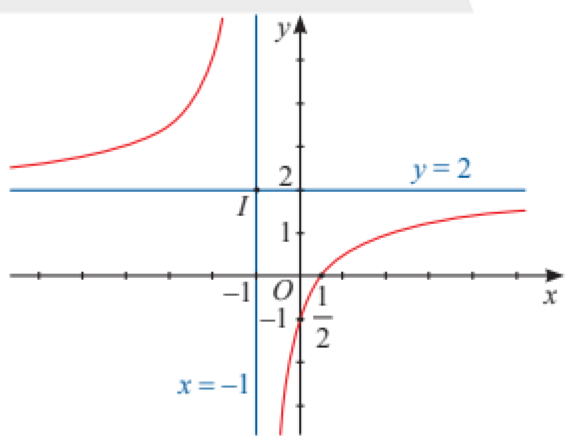
3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 3.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1; 2)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = 2$.



Hình 3

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$:

a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;

b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Ví dụ 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-x+2}{2x+3}$.

Giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

2. Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{-7}{(2x+3)^2}$. Vì $y'<0$ với mọi $x\neq-\dfrac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

• Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+2}{2x+3}=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+2}{2x+3}=-\dfrac{1}{2}$. Suy ra đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}\dfrac{-x+2}{2x+3}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{-x+2}{2x+3}=+\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

• Bảng biến thiên:

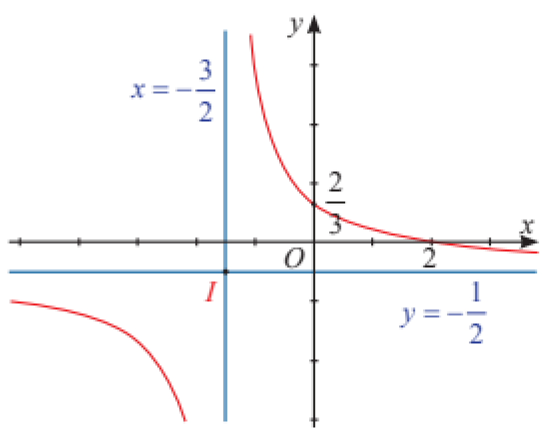
x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$

3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(2;\ 0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\ \dfrac{2}{3}\right)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 4.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.



Hình 4

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -\frac{3}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}$.

2 Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$;   b) $y = \frac{2x}{3x-1}$;   c) $y = \frac{5+x}{2-x}$.

4. Khảo sát hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

Ví dụ 5. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$.

Giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.
Trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

• Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = 2$.

• Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = +\infty$.

Ta có: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-2}{x^2-x} = 1$ và $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$. Suy ra đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

3. Đồ thị:

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1+\sqrt{3}$ hoặc $x = -1-\sqrt{3}$.

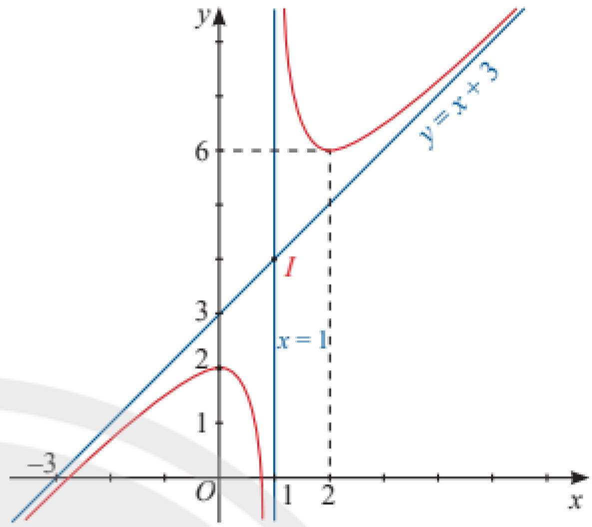
Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1+\sqrt{3};\ 0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3};\ 0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;\ 2)$.

Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình 5.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;\ 4)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = x + 3$.



Hình 5

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0$, $m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;

b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Ví dụ 6. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$.

Giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2. Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2 - 4x - 10}{(x+2)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq -2$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;\ -2)$ và $(-2;\ +\infty)$.

• Các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} = -\infty.$$

Ta có: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x} = -1$ và $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} - (-1)x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-x + 4}{x + 2}\right) = -1$.

Suy ra đường thẳng $y = -x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2^-} y = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-x^2-3x+4}{x+2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} y = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-x^2-3x+4}{x+2} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị:

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 1$.

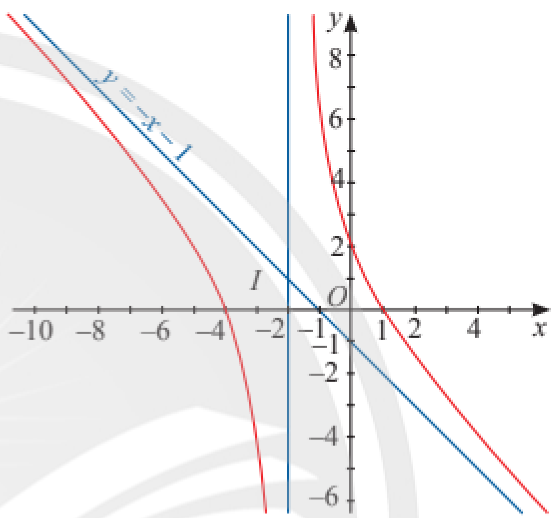
Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4; 0)$ và điểm $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 2)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 6.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-2; 1)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -2$ và $y = -x - 1$.



Hình 6

Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x - \dfrac{1}{x}$; b) $y = -x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$; c) $y = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x+1}$.

5. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

Ta có thể vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết nhiều bài toán liên quan đến thực tiễn trong những lĩnh vực khác nhau như kinh tế, khoa học, kĩ thuật, ...

Ví dụ 7. Xét tình huống ở (trang 25).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $C = C(v)$ trên $(0; 120]$.

b) Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

(*Theo:* http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/bacpro/bacpro_maintenance_auto.pdf)

Giải

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $C = C(v)$:

– Tập xác định: $D = (0; 120]$.

– Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

• Đạo hàm $C'(v) = -\dfrac{16\,000}{v^2} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{5(v-80)(v+80)}{2v^2}$; $C'(v) = 0 \Leftrightarrow v = -80$ (loại) hoặc $v = 80$.

• Trên khoảng (0; 80), $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

• Trên khoảng (80; 120), $C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 80$, $C_{CT} = C(80) = 400$.

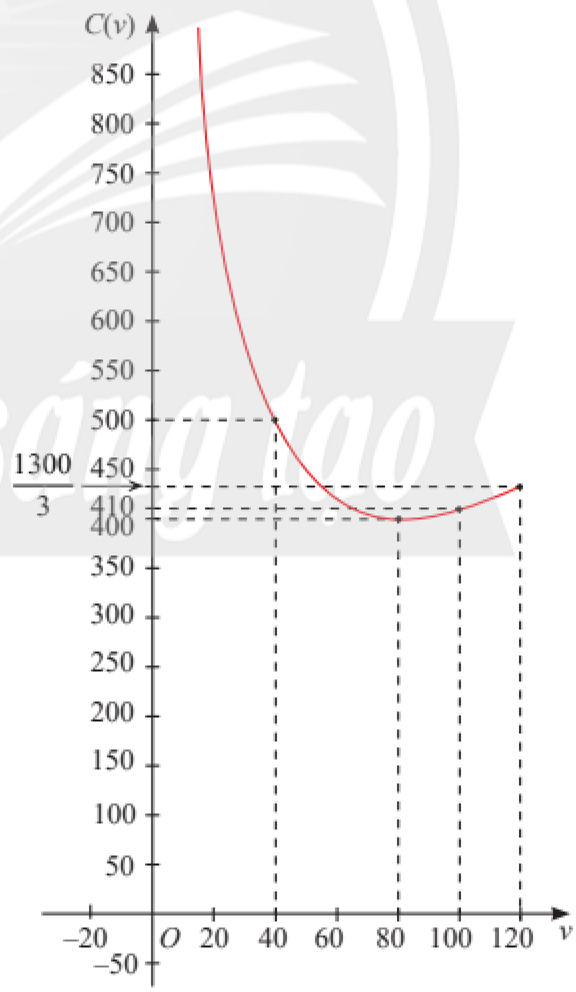
+ Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim\limits_{v \to 0^+} C(v) = \lim\limits_{v \to 0^+}\left(\dfrac{16\,000}{v} + \dfrac{5}{2}v\right) = +\infty$ nên đường thẳng $v = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

v	0		80		120
$C'(v)$	||	$-$	0	$+$	
$C(v)$	|| $+\infty$	$\searrow$	400	$\nearrow$	$\dfrac{1300}{3}$

– Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu (80; 400) và đi qua các điểm (40; 500), (100; 410), $\left(120; \dfrac{1300}{3}\right)$ như Hình 7.



Hình 7

b) Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v = 80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Ví dụ 8. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \le x \le 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Hãy viết biểu thức tính $B(x)$ và $L(x)$ theo x.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = L(x)$ trên $[1; 18]$.

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa? Tính lợi nhuận tối đa đó.

Giải

a) Khi bán x mét vải lụa:

– Số tiền thu được là: $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

– Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).

b) Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1; 18]$.

– Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$; $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -8$ (loại).
- Trên khoảng $(1; 10)$, $L'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.
- Trên khoảng $(10; 18)$, $L'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

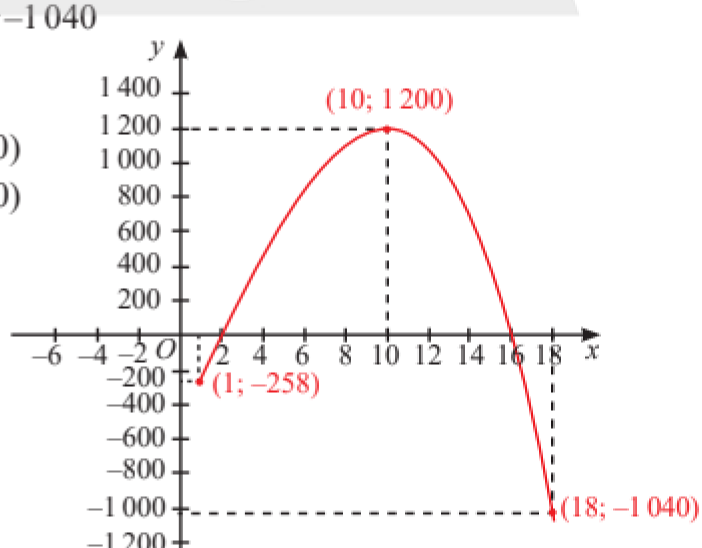
+ Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x = 10$ và $L_{CĐ} = L(10) = 1\,200$.

+ Bảng biến thiên:

x	1		10		18
$L'(x)$		+	0	–	
$L(x)$	–258	↗	1 200	↘	–1 040

– Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực đại (10; 1 200) và đi qua các điểm (1; –258), (18; –1 040) như Hình 8.



Hình 8

c) Quan sát đồ thị hàm số $y = L(x)$, ta nhận thấy khi $x = 10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1 200.

Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1 200 nghìn đồng.

4 Xét một vật thật đặt trước thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$. Gọi d là khoảng cách từ vật đến thấu kính ($d > 0$), d' là khoảng cách từ thấu kính đến ảnh (ảnh thật thì $d' > 0$, ảnh ảo thì $d' < 0$). Ta có công thức:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} \text{ hay } d' = \frac{df}{d-f}.$$

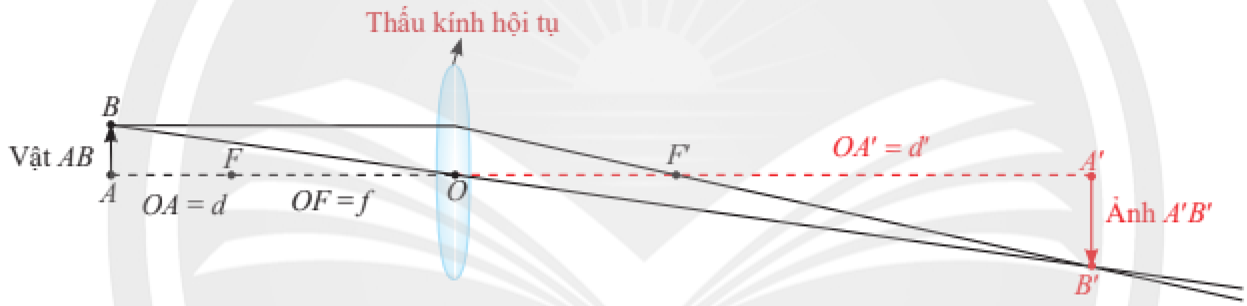
(Vật lí 11, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2012, trang 182, 187).

Xét trường hợp $f = 3$, đặt $x = d$, $y = d'$. Ta có hàm số $y = \dfrac{3x}{x-3}$ và $x \neq 3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị hàm số trên, hãy cho biết vị trí của vật để ảnh của vật là: ảnh thật, ảnh ảo.

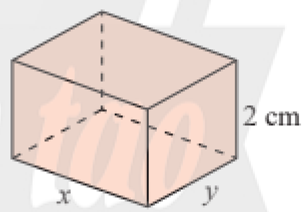
c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì ảnh thay đổi như thế nào?



Hình 9

5 Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm³ với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất.

Chiều cao hộp phải là 2 cm, các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.



Hình 10

a) Hãy biểu thị y theo x.

b) Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là:

$$S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}.$$

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

BÀI TẬP

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 + x - 2$;

b) $y = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3$.

2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Tìm điểm I thuộc đồ thị hàm số biết hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

b) Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

3. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 3 + \frac{1}{x}$;

b) $y = \frac{x-3}{1-x}$.

4. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

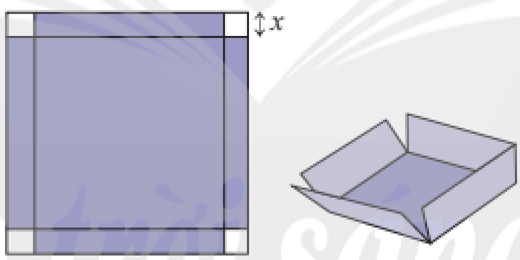
b) $y = 2x - \frac{1}{1-2x}$.

5. Cho hàm số $y = \frac{-x^2+3x+1}{x+2}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm toạ độ trung điểm đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Có nhận xét gì về điểm này?

6. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình 11).



Hình 11

Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.

Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

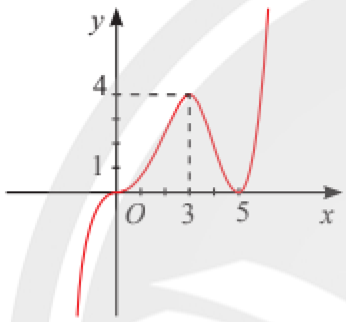
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 1. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(5; +\infty)$. B. $(3; 5)$.

C. $(0; 5)$. D. $(3; +\infty)$.



Hình 1

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 1. Hàm số đạt cực đại tại

A. $x = 0$. B. $x = 3$.

C. $x = 4$. D. $x = 5$.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là $y = 2$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.

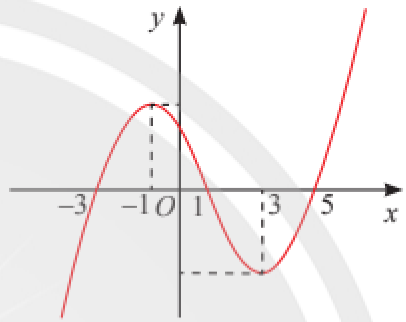
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 2$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ là hàm số có đồ thị được cho trong Hình 2. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1; 3)$. B. $(-3; 1)$.

C. $(1; 5)$. D. $(3; +\infty)$.



Hình 2

5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

trên đoạn $[-2; 3]$ là

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{30}$.

C. $\sqrt{2}$. D. 0.

6. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$$

là đường thẳng có phương trình

A. $y = 2x + 3$. B. $y = 2x + 1$.

C. $y = x + 3$. D. $y = x + 1$.

7. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{-2x + 3}{5x + 1}$$

là đường thẳng có phương trình

A. $y = -\dfrac{1}{5}$. B. $x = -\dfrac{1}{5}$.

C. $y = -\dfrac{2}{5}$. D. $x = -\dfrac{2}{5}$.

8. Cho hàm số $y=\dfrac{-2x-3}{4-x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -4)$ và nghịch biến trên $(-4; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -4)$ và $(-4; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

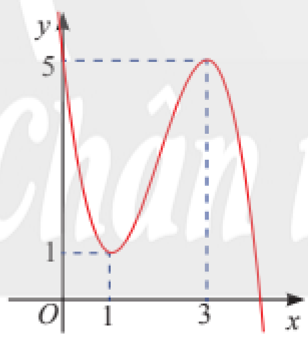
9. Tìm hai số không âm a và b có tổng bằng 10 sao cho:

a) Biểu thức ab đạt giá trị lớn nhất;

b) Tổng bình phương của chúng đạt giá trị nhỏ nhất;

c) Biểu thức ab^2 đạt giá trị lớn nhất.

10. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như Hình 3. Viết công thức của hàm số.



Hình 3

11. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+4$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

12. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

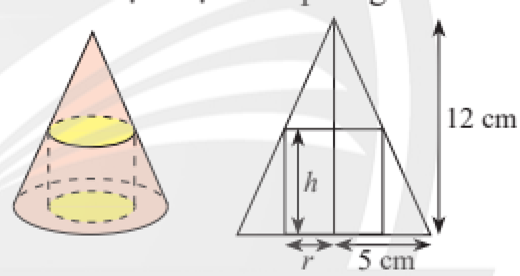
b) Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy, I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tìm điểm B đối xứng với A qua I. Chứng minh rằng điểm B cũng thuộc đồ thị hàm số này.

13. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[2; 4]$.

14. Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12 cm và bán kính đáy bằng 5 cm (Hình 4a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình 4b.



a) b)

Hình 4

a) Chứng minh rằng công thức tính bán kính r của đáy hình trụ theo chiều cao h của nó là:

$$r=\frac{5(12-h)}{12}.$$

b) Chứng minh biểu thức sau biểu thị thể tích khối trụ theo h:

$$V(h)=\frac{25\pi h(12-h)^2}{144}.$$

c) Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

15. Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức:

$$\overline{C}(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}.$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \overline{C}(x)$ trên $[30; 120]$.

b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

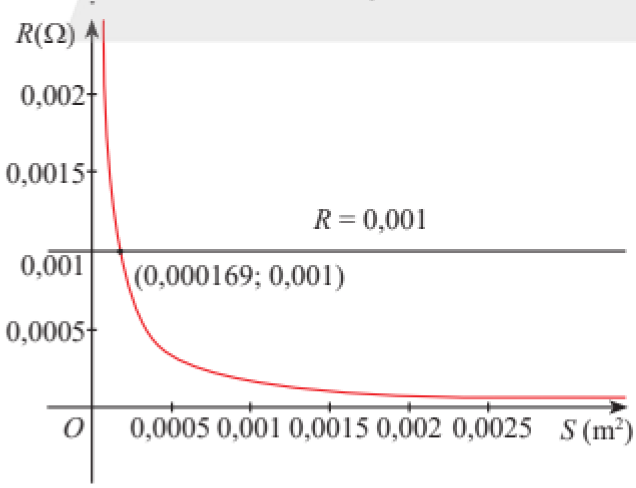
16. Điện trở R (Ω) của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất ρ (Ωm), chiều dài ℓ (m) và tiết diện S (m^2) được cho bởi công thức

$$R = \rho.\frac{\ell}{S}.$$

Hình 5

(Vật lí 11 – Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 104)

Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ 20 °C) của một sợi dây điện dài 10 m làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như Hình 6.



Hình 6

a) Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S?

b) Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$.

c) Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Kim loại	Điện trở suất ở 20 °C (Ωm)
Bạc	$1,62 . 10^{-8}$
Đồng	$1,69 . 10^{-8}$
Vàng	$2,44 . 10^{-8}$
Nhôm	$2,75 . 10^{-8}$
Sắt	$9,68 . 10^{-8}$

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương II VECTƠ VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ là công cụ hiệu quả để biểu diễn nhiều đối tượng trong không gian. Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về khái niệm vectơ và các phép toán vectơ trong không gian. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về hệ trục toạ độ, toạ độ của vectơ, biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ trong không gian và vận dụng để giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

Máy in 3D là một thiết bị có ứng dụng toạ độ vectơ trong không gian.

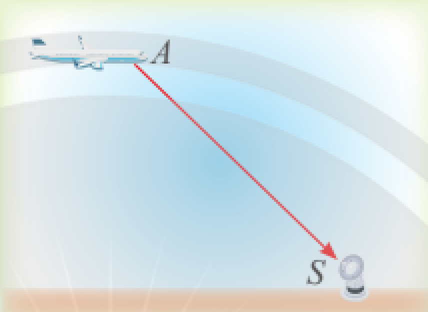
Học xong chương này, bạn có thể:

- Nhận biết được vectơ và các phép toán vectơ trong không gian (tổng và hiệu của hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ).
- Nhận biết được toạ độ của một vectơ đối với hệ trục toạ độ.
- Xác định được độ dài của một vectơ khi biết toạ độ điểm đầu và điểm cuối của nó. Xác định được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ.
- Vận dụng được toạ độ của vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Bài 1. Vectơ và các phép toán trong không gian

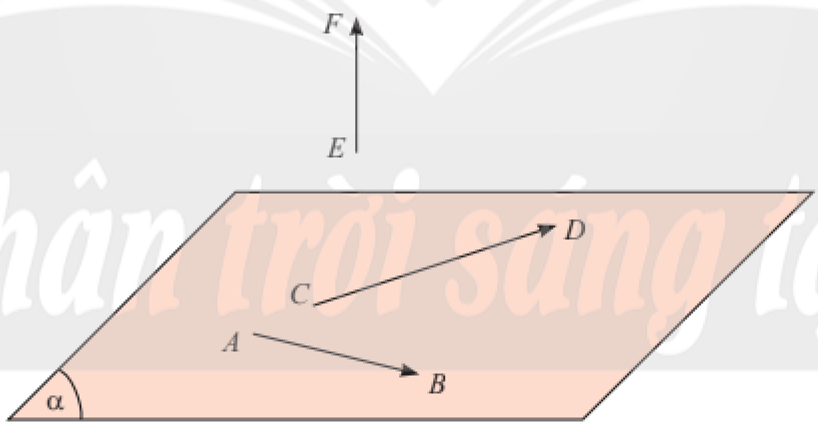
Từ khoá: Vectơ trong không gian; Tổng và hiệu của hai vectơ; Quy tắc hình hộp; Tích của một số với một vectơ; Tích vô hướng của hai vectơ.

Trong không gian, làm thế nào để biểu diễn độ dịch chuyển tín hiệu vô tuyến từ máy bay đến trạm kiểm soát trên mặt đất?



1. Vectơ trong không gian

1 Nhắc lại định nghĩa vectơ trong mặt phẳng.
Có thể định nghĩa vectơ trong không gian như đã định nghĩa vectơ trong mặt phẳng không?



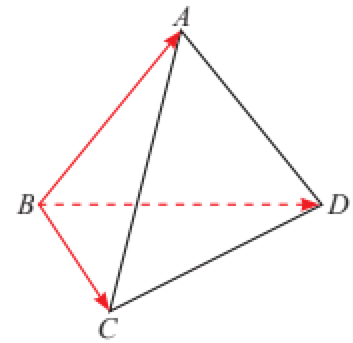
Hình 1

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý:

- Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.
- Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...

Ví dụ 1. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.



Hình 2

Giải

Ta có ba vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

1 Trong ▶, tìm vectơ biểu diễn độ dịch chuyển tín hiệu vô tuyến từ vị trí A của máy bay đến vị trí S của trạm kiểm soát.

Trong không gian, các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ; độ dài của vectơ; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng, bằng nhau, đối nhau; vectơ-không được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

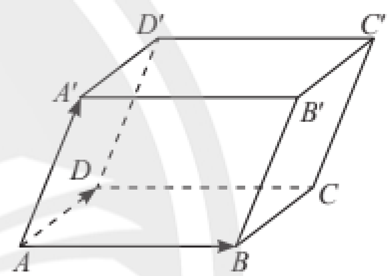
Chú ý: Trong không gian, cho điểm O và vectơ $\vec{a}$, tồn tại duy nhất điểm M để $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 3).

a) Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

b) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.



Hình 3

Giải

a) Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ lần lượt là ba đường thẳng AB, AD, AA'. Chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng vì bốn điểm A, B, D, A' không đồng phẳng.

b) Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $AB \parallel A'B'$ và $AB = A'B'$. Ta có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng và có độ dài bằng nhau, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ có độ dài bằng nhau và ngược hướng, suy ra $\overrightarrow{DA}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AD}$.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AD}$ có cùng độ dài và ngược hướng với $\overrightarrow{CB}$, suy ra $\overrightarrow{CB}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AD}$.

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{D'A'}$, $\overrightarrow{C'B'}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AD}$.

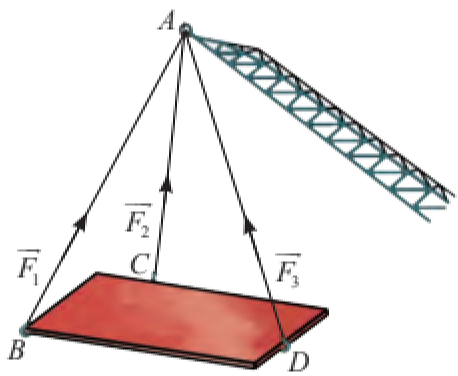
2 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

a) Chỉ ra các vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là các đỉnh của đa giác đáy.

b) Tìm các vectơ có độ dài bằng độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$.

c) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{CB}$.

Trong Hình 4, cho biết ba vectơ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ biểu diễn lực căng của các sợi dây cáp AB, AC, AD tác dụng lên vật nặng. Giá của ba vectơ này có cùng nằm trên một mặt phẳng không?



Hình 4

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Tổng của hai vectơ

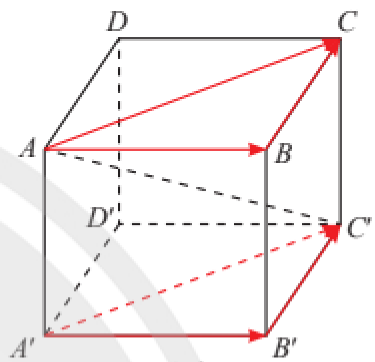
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 5).

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, tìm vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, tìm vectơ tổng $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$.

b) Tìm mối liên hệ giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

c) Giải thích tại sao $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$.

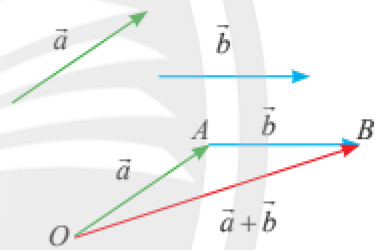


Hình 5

Một cách tổng quát, ta có

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy điểm O bất kì và hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là ***phép cộng vectơ***.



Hình 6

Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

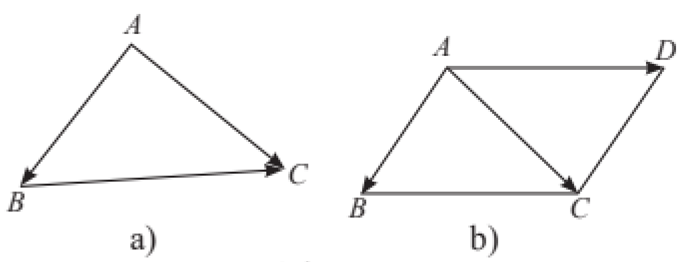
- Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

Quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành vẫn đúng với các vectơ trong không gian.

- Với ba điểm A, B, C ta có
  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì ta có
  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



Hình 7

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tìm các vectơ tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.

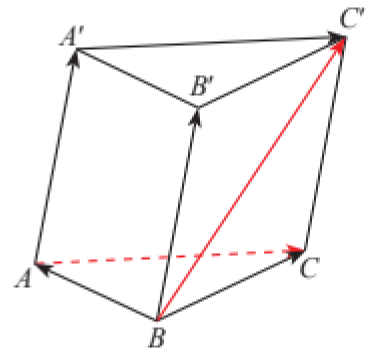
Giải

Ta có $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'C'C$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Tương tự, ta cũng có $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.



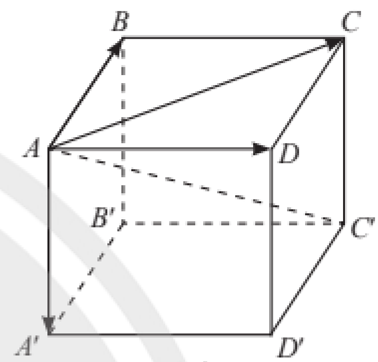
Hình 8

Quy tắc hình hộp

3 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tìm các vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.

b) Dùng kết quả của câu a và tính chất kết hợp của phép cộng vectơ để chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

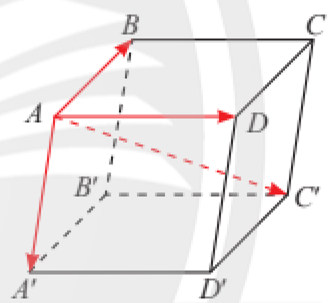


Hình 9

Từ 3, ta có ***quy tắc hình hộp***:

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}.$$



Hình 10

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Tìm các vectơ:

a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$.

Giải

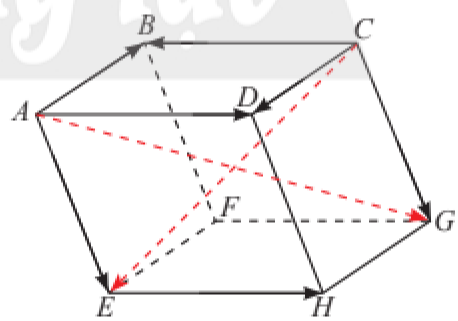
a) Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CE}$.

b) Ta có $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.

Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$.

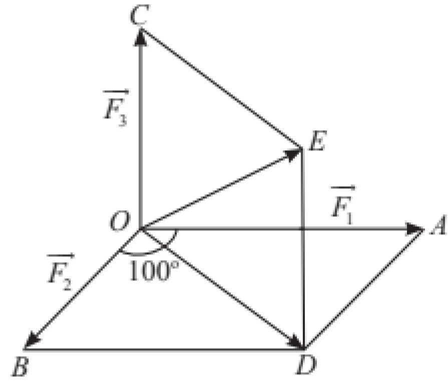
Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AG}$.



Hình 11

Ví dụ 5. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Giải



Hình 12

Gọi $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 25 N, 12 N, 4 N.

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{F_3}$.

Vẽ hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là

$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có

$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2.BD.OB.\cos\widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100^\circ$.

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D.

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100^\circ$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100^\circ}$

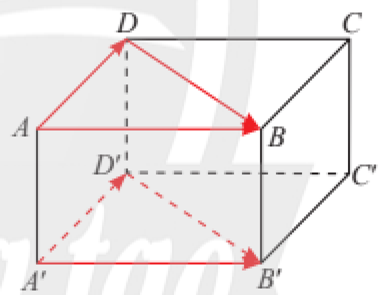
$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2.25.12.\cos 100^\circ} \approx 26$.

Vậy độ lớn của hợp lực là $F \approx 26$ N.

3 Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Tìm các vectơ:

a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$; b) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB}$.

Hiệu của hai vectơ



Hình 13

4 a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, tìm vectơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

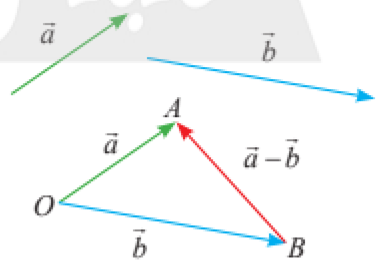
Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, tìm vectơ hiệu $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D'}$.

b) Tìm mối liên hệ giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{D'B'}$.

c) Giải thích tại sao $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D'}$.

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là ***hiệu của hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là ***phép trừ vectơ***.

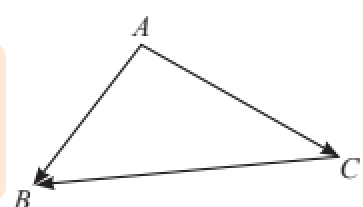


Hình 14

Quy tắc hiệu

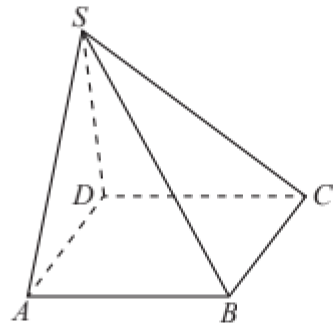
Trong không gian, với ba điểm A, B, C ta có:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$



Hình 15

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Tìm các vectơ hiệu $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{AD}$.



Hình 16

Giải

Theo quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AD}$.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, suy ra $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BC}$.

Theo quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CS}$.

Vậy $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CS}$.

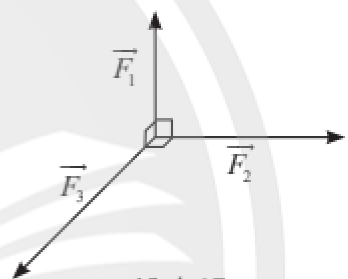
4 Cho tứ diện $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm các vectơ:

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ND}$;　　　b) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NC}$.

5 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng đơn vị. Tìm độ dài các vectơ sau đây:

a) $\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$;　　　b) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}$.

2 Ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N (Hình 17). Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



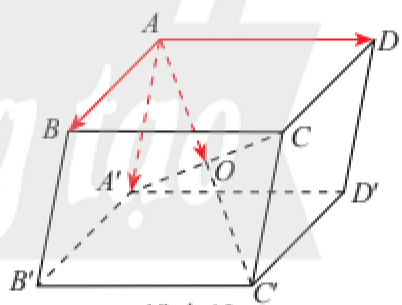
Hình 17

3. Tích của một số với một vectơ

5 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có AC' và $A'C$ cắt nhau tại O (Hình 18).

a) Tìm vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

b) Cho biết mối quan hệ giữa vectơ tìm được ở câu a) và vectơ $\overrightarrow{AO}$.



Hình 18

Trong không gian, tích của một số k với vectơ $\vec{a}$ được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

Trong không gian, cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Quy ước: $0.\vec{a}=\vec{0}$ và $k.\vec{0}=\vec{0}$.

Nhận xét:

a) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta có:

- $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$;
- $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$;
- $1.\vec{a}=\vec{a}$;
- $(-1).\vec{a}=-\vec{a}$.

b) $k\vec{a}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$ hoặc $k=0$.

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

d) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC; G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$;

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Giải

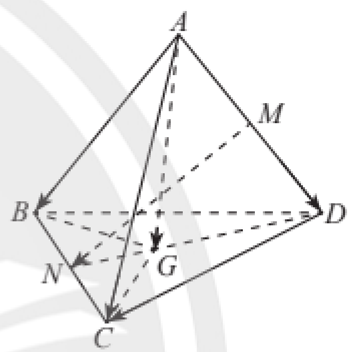
a) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$.

Do đó $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}$.

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

Vì N là trung điểm của đoạn thẳng BC nên $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.



Hình 19

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}$.

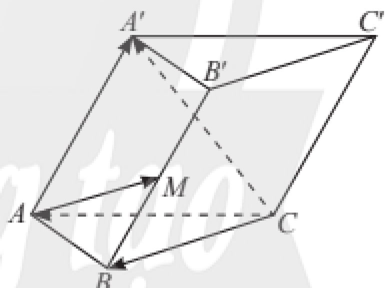
Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

6 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của BB' (Hình 20). Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CC'}=\vec{c}$.

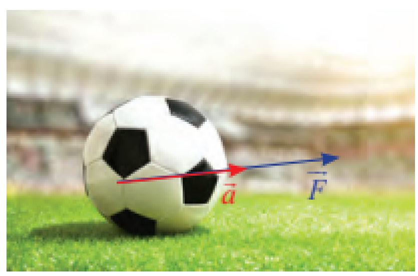
Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.



Hình 20

Ví dụ 8. Theo định luật II Newton (Vật lí 10 – Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

$$\vec{F}=m\vec{a},$$



Hình 21

trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật.

Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

Giải

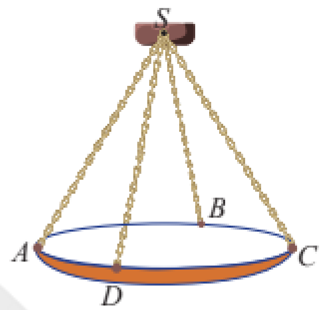
Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$, suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0,5 \,.\, 50 = 25$ (N).

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là 25 N.

3 Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$ (Hình 22).

a) Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2, tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

b) Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích.



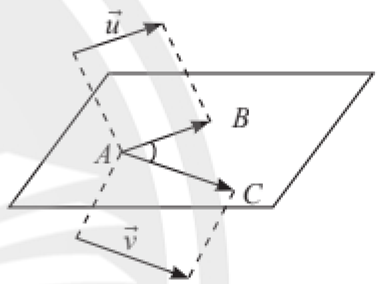
Hình 22

4. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

6 a) Nhắc lại định nghĩa góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong mặt phẳng.

b) Làm thế nào để định nghĩa góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian?



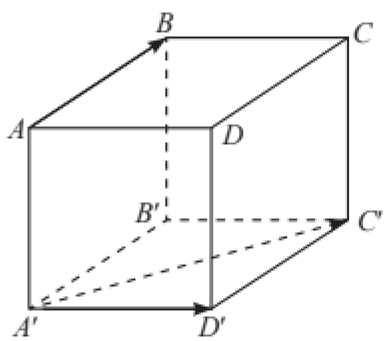
Hình 23

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

Nhận xét:

- $0^\circ \le (\vec{u}, \vec{v}) \le 180^\circ$;
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.



Hình 24

Giải

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{DAB} = 90^\circ.$$

Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{CAB} = 45^\circ$.

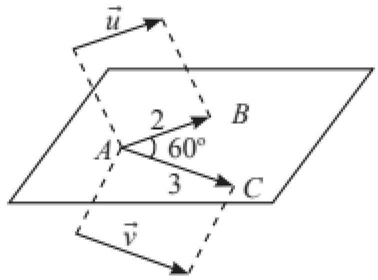
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'})$, $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'})$.

Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thoả mãn $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ (Hình 25). Giả sử $\widehat{BAC}=60^\circ$.

a) Tính góc $(\vec{u}, \vec{v})$.

b) Trong mặt phẳng (ABC), tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Hình 25

Ta gọi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$. Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

Chú ý:

a) Trong trường hợp $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}.\vec{v}=0$.

b) $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=|\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2\geq 0$, $\vec{u}^2=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

d) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$.

Nhận xét: Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất sau:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số k, ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$;
- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$;
- $(k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(k\vec{b})$.

Ví dụ 10. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$.

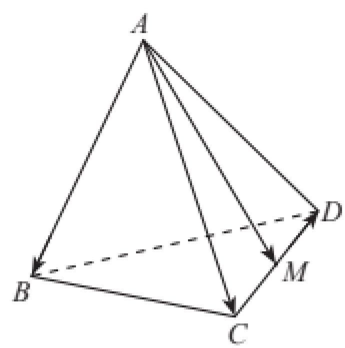
b) Tính góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a.a.\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}.$$

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\dfrac{a^2}{2}$.



Hình 26

Ta lại có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, suy ra:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}).\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}$.

Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{CD}$.
Suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.

8 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1.

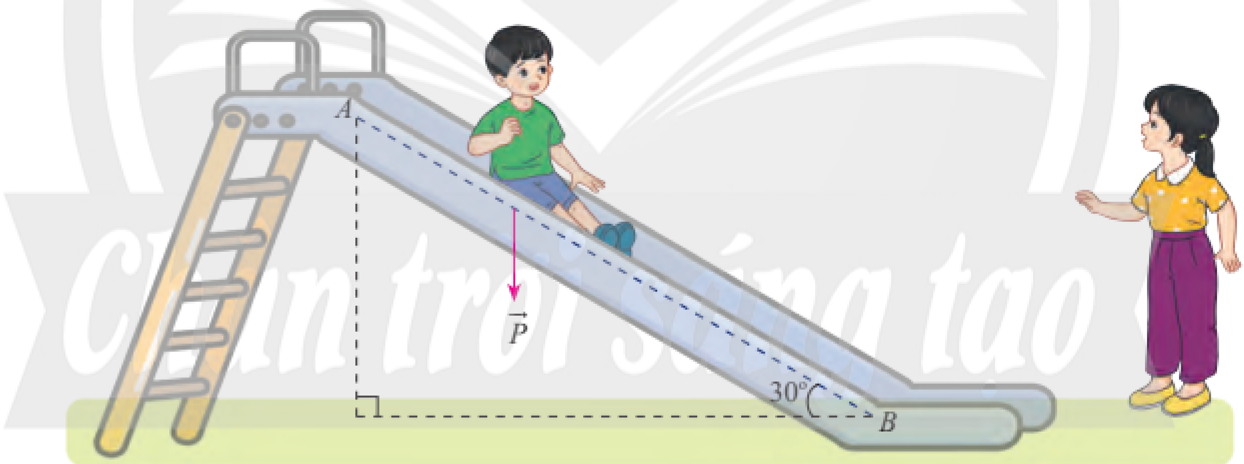
a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})$ (kết quả làm tròn đến phút).

4 Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ kg trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình 27).

a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9{,}8$ m/s^2.

b) Cho biết công A (J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F}.\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.



Hình 27

BÀI TẬP

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$;

b) $\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BB'}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.

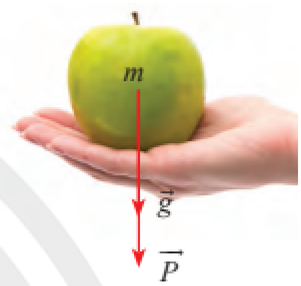
2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

3. Ba lực có điểm đặt tại một đỉnh của hình lập phương, cùng phương với ba cạnh và cùng có cường độ là 5 N. Tính cường độ của hợp lực.

4. Cho hình chóp S.$ABCD$. Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC và J là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=3(\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{SJ})$.

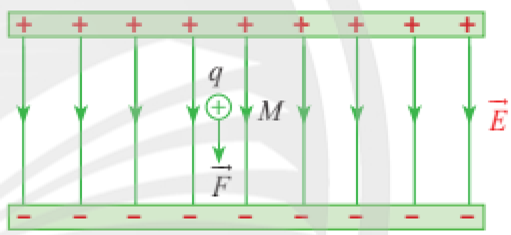
5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'C}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$ và $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

6. Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P}=m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8$ m/s^2. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 28).



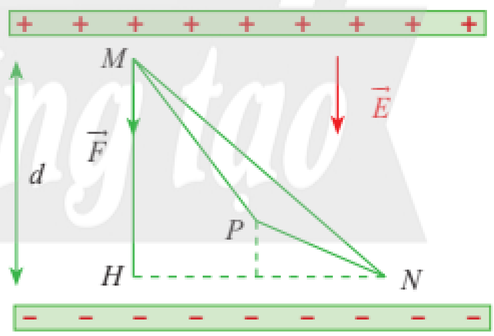
Hình 28

7. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q.\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C (Hình 29).



Hình 29

8. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN (Hình 30). Biết $q = 2\,.\,10^{-12}$ C, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1{,}8\,.\,10^5$ N/C và $d = MH = 5$ mm. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.

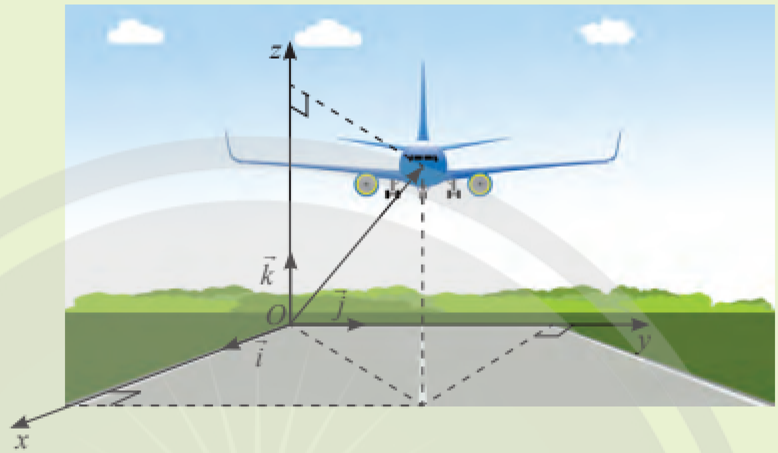


Hình 30

Bài 2. Toạ độ của vectơ trong không gian

Từ khoá: Hệ toạ độ trong không gian; Trục toạ độ; Mặt phẳng toạ độ; Toạ độ của điểm; Toạ độ của vectơ.

Trong kiểm soát không lưu, người ta dùng bộ ba số để xác định vị trí của máy bay. Người ta đã làm điều đó như thế nào?



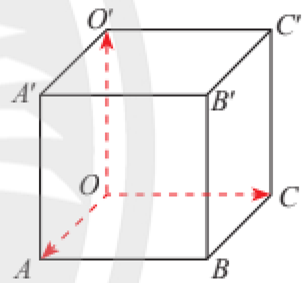
1. Hệ toạ độ trong không gian

1 Cho hình lập phương $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh bằng 1.

Đặt $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{j} = \overrightarrow{OC}$; $\vec{k} = \overrightarrow{OO'}$.

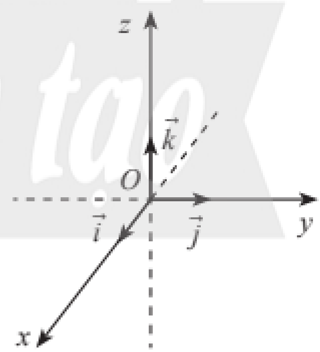
a) Nêu nhận xét về phương và độ dài của ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b) Nêu nhận xét về ba trục toạ độ $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$, $(O; \vec{k})$.



Hình 1

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy được gọi là ***hệ trục toạ độ Descartes vuông góc Oxyz*** trong không gian hay gọi đơn giản là ***hệ toạ độ Oxyz***.



Hình 2

Nhận xét:

a) Điểm O được gọi là ***gốc toạ độ***.

Các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các ***trục toạ độ***.

Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các ***mặt phẳng toạ độ***.

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là ***không gian Oxyz***.

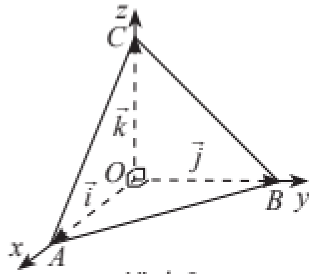
b) Vì $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên ta có

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ và } \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có độ dài bằng 1. Vẽ hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc là O, các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ.

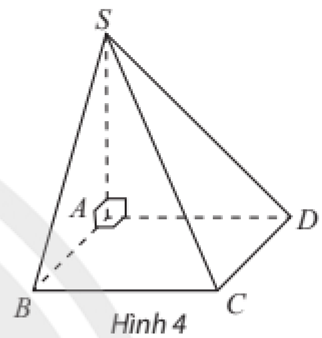
Giải

Với O là gốc toạ độ, ta vẽ được các trục Ox, Oy, Oz như Hình 3. Ba vectơ đơn vị trên ba trục lần lượt là $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$.



Hình 3

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 1 (Hình 4). Vẽ hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A, các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ.

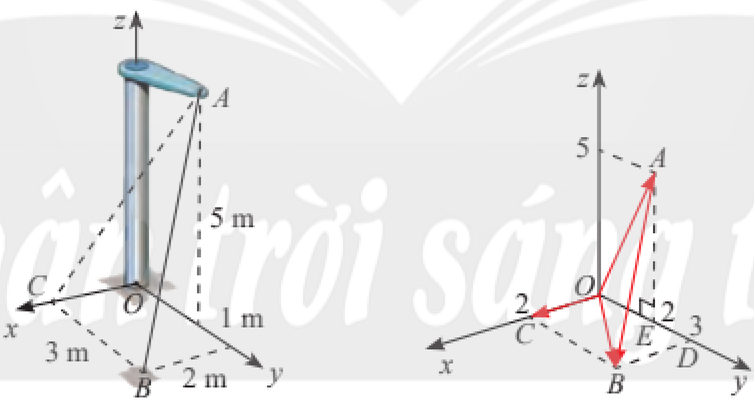


Hình 4

1 Một thiết kế cơ khí trong Hình 5a được biểu diễn trong không gian $Oxyz$ như Hình 5b.

a) Hãy vẽ ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt trên ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz (mỗi vectơ đơn vị có độ dài bằng 1 m).

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ theo $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

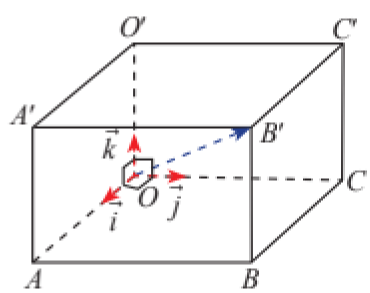


Hình 5

2. Toạ độ của điểm và vectơ

Toạ độ của điểm

2 Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 3$, $OC = 5$, $OO' = 2$. Vẽ ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt trên các cạnh OA, OC, OO'. Biểu diễn $\overrightarrow{OB'}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



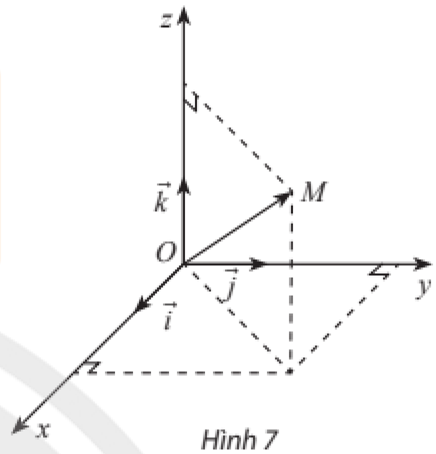
Hình 6

Người ta chứng minh được rằng:

Trong không gian $Oxyz$, ứng với một điểm M tuỳ ý, có một bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ngược lại, với bộ ba số $(x; y; z)$, ta có một điểm M duy nhất trong không gian thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ta có định nghĩa sau:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M. Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là ***toạ độ của điểm*** M đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$; x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M.



Hình 7

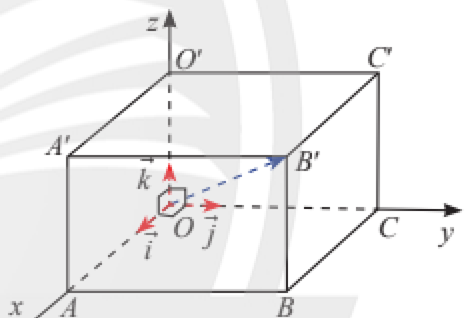
Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4$, $OC = 6$, $OO' = 3$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc toạ độ O; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định toạ độ các điểm A, B, B'.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, suy ra $A(4; 0; 0)$;

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$, suy ra $B(4; 6; 0)$;

$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$, suy ra $B'(4; 6; 3)$.

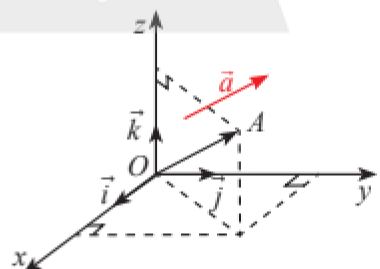


Hình 8

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc toạ độ O trùng với A; các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định toạ độ các điểm B, C, C'.

Toạ độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$. Vẽ điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Gọi $(a_1; a_2; a_3)$ là toạ độ của điểm A. Hãy biểu diễn $\vec{a}$ theo ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



Hình 9

Người ta chứng minh được rằng:

Trong không gian $Oxyz$, ứng với một vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý có một bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Ta có định nghĩa sau:

> Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là ***toạ độ của vectơ*** $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Nhận xét: Trong không gian $Oxyz$, ta có:

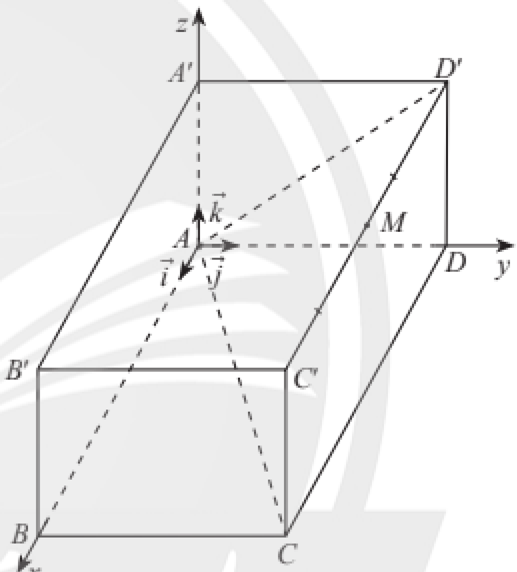
• Toạ độ của điểm M là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, tức là

$$M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z).$$

• Điều kiện để hai vectơ bằng nhau:

Cho $\vec{a} = (x; y; z)$, $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'. \end{cases}$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và có $AB = 8$, $AD = 6$, $AA' = 4$. Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.



Hình 10

Giải

Để tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta cần biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{AB}| = AB = 8 = 8|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$, $\overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$.

Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (8; 0; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (8; 6; 0)$; $\overrightarrow{AC'} = (8; 6; 4)$.

Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$

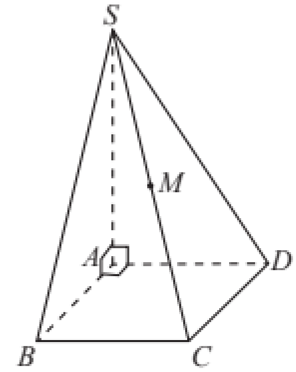
$$= \frac{1}{2}(8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} + 6\vec{j} + 4\vec{k}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

nên $\overrightarrow{AM} = (4; 6; 4)$.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 3 (Hình 11).

a) Vẽ hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A, các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ.

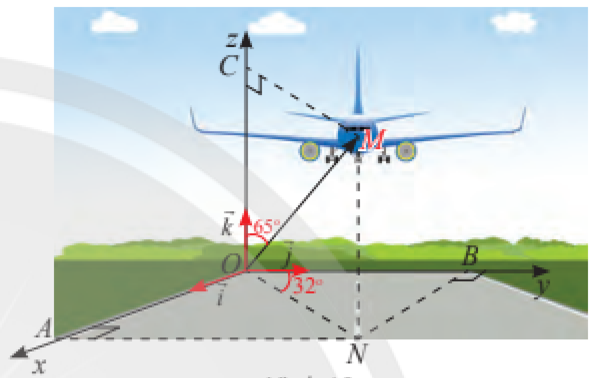
b) Trong hệ toạ độ nói trên, tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC.



Hình 11

Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình 12, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32°$, $\widehat{MOC} = 65°$.

Tìm toạ độ điểm M.



Hình 12

BÀI TẬP

1. Trong không gian $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$. Tìm toạ độ các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{ON} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Tìm toạ độ các điểm M, N.

2. Trong không gian $Oxyz$, biết:

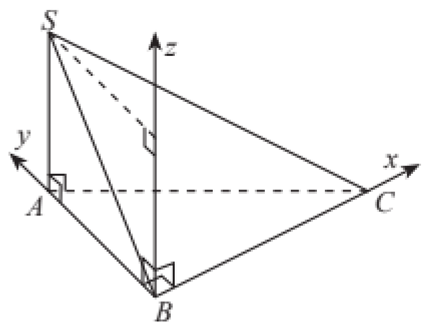
a) $\vec{a} = (-2; 5; -7)$, $\vec{b} = (4; 0; 1)$. Tính $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b) $A(7; -2; 1)$, $B(0; 5; 0)$. Tính $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2 (Hình 13).

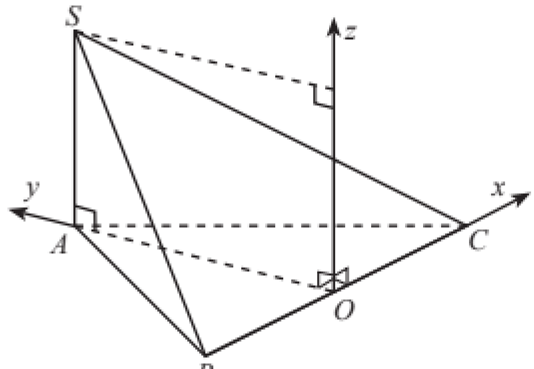
a) Xác định một hệ toạ độ dựa trên gợi ý của hình vẽ và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ.

b) Tìm toạ độ các điểm A, B, C, S.



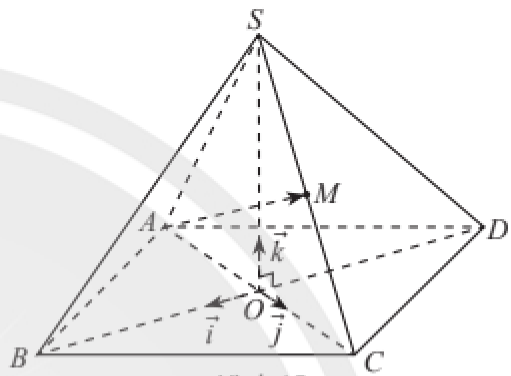
Hình 13

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1 (Hình 14). Thiết lập hệ toạ độ như hình vẽ, hãy vẽ các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và tìm toạ độ các điểm A, B, C, S.



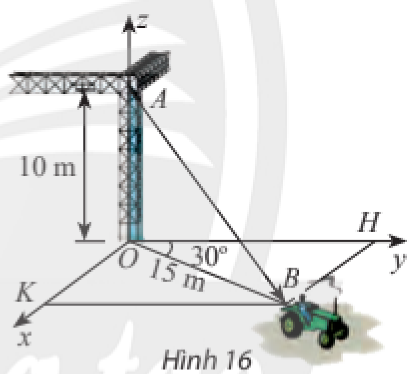
Hình 14

5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O. Các vectơ $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và $OA = OS = 4$ (Hình 15). Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC.



Hình 15

6. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như Hình 16 với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng 1 m. Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

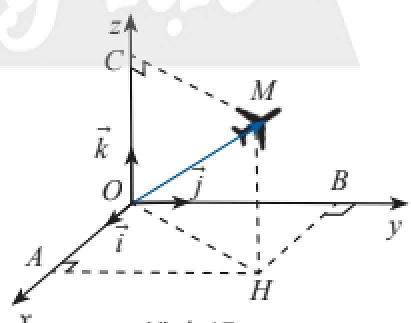


Hình 16

7. Ở một sân bay, ví trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình 17. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy).

Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$.

Tìm toạ độ của điểm M.



Hình 17

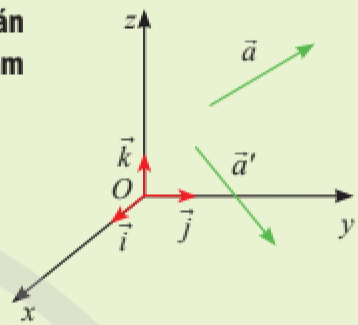
Bài 3. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Từ khoá: Biểu thức toạ độ của vectơ tổng, vectơ hiệu, vectơ là tích của một số và một vectơ; Biểu thức toạ độ của tích vô hướng.

Trong không gian *Oxyz*, có thể thực hiện các phép toán vectơ dựa trên toạ độ của chúng tương tự như đã làm trong mặt phẳng *Oxy* không?

$\vec{a} = (x;\ y;\ z),\ \vec{a}' = (x';\ y';\ z')$

$\vec{a} + \vec{a}' = ?$



1. Biểu thức toạ độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

1 Trong không gian *Oxyz*, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$ và số thực *m*.

a) Biểu diễn từng vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) Biểu diễn các vectơ $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $m\vec{a}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, từ đó suy ra toạ độ của các vectơ $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $m\vec{a}$.

Từ 1, ta có:

Trong không gian *Oxyz*, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$ và số thực *k*. Khi đó:

- $\vec{a}+\vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$;
- $\vec{a}-\vec{b} = (a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$;
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$.

Nhận xét: Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số *k* sao cho $\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian *Oxyz*, cho ba vectơ $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (6; -4; 2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

b) Tìm hai vectơ cùng phương trong các vectơ đã cho.

Giải

a) Ta có: $2\vec{p} = (6; -4; 2)$, $-3\vec{q} = (-18; 12; -6)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$.

Suy ra $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r} = (-10; 9; -7)$.

b) Ta có $2\vec{p} = (6; -4; 2) = \vec{q}$, suy ra hai vectơ $\vec{p}$, $\vec{q}$ cùng phương.

Do $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{1}$ nên $\vec{p}$, $\vec{r}$ không cùng phương. Tương tự, hai vectơ $\vec{q}$, $\vec{r}$ không cùng phương.

Chú ý: Từ nay trở đi, các bài tập liên quan đến toạ độ đều được xét trong không gian *Oxyz*.

1 Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.

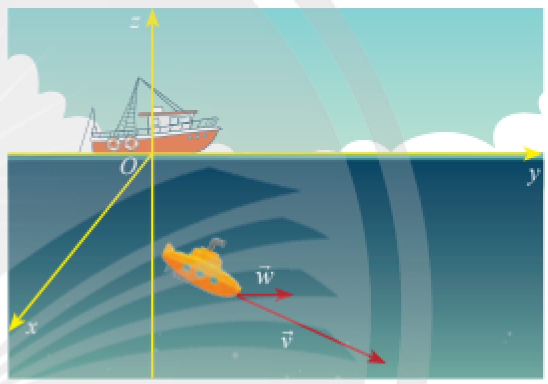
b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

c) Chứng minh $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{m} = (-6; 15; -9)$.

1 Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vận tốc $\vec{v} = (10; 8; -3)$ (Hình 1). Cho biết vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w} = (3,5; 1; 0)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ tổng hai vận tốc $\vec{v}$ và $\vec{w}$.

b) Giả sử thiết bị thăm dò lặn với vận tốc $\vec{u} = (7; 2; 0)$, hãy nêu nhận xét về vectơ vận tốc của nó so với vectơ vận tốc của dòng hải lưu.



Hình 1

2. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

2 Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

a) Biểu diễn từng vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{i}^2$, $\vec{j}^2$, $\vec{k}^2$, $\vec{i}.\vec{j}$, $\vec{j}.\vec{k}$, $\vec{k}.\vec{i}$.

c) Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ theo toạ độ của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Từ 2, ta có:

Trong không gian *Oxyz*, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Nhận xét:

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$);

b) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Ví dụ 2. Cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$.

a) Tính $\vec{a}.\vec{b}$, $\vec{b}.\vec{c}$.

b) Tính $|\vec{a}|, |\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

c) Cho $\vec{d} = (1; 7; -3)$. Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

Giải

a) Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 3.1 + 0.(-1) + 1.(-2) = 1$;

$\vec{b}.\vec{c} = 1.2 + (-1).1 + (-2).(-1) = 3$.

b) Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$; $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{10}.\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{30}.$$

c) Ta có $\vec{d}.\vec{a} = 1.3 + 7.0 + (-3).1 = 0$, suy ra $\vec{d} \perp \vec{a}$.

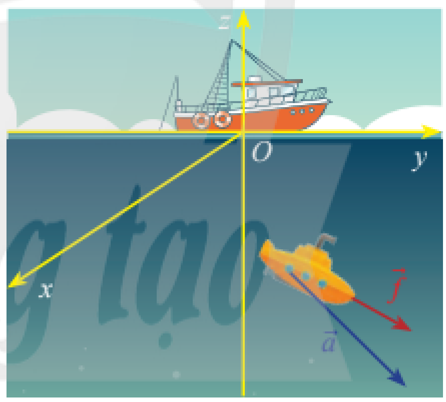
2 Cho ba vectơ $\vec{m} = (-5; 4; 9)$, $\vec{n} = (2; -7; 0)$, $\vec{p} = (6; 3; -4)$.

a) Tính $\vec{m}.\vec{n}$, $\vec{m}.\vec{p}$.

b) Tính $|\vec{m}|, |\vec{n}|$, $\cos(\vec{m}, \vec{n})$.

c) Cho $\vec{q} = (1; -2; 0)$. Vectơ $\vec{q}$ có vuông góc với $\vec{p}$ không?

2 Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình 2) được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



Hình 2

3. Vận dụng

Xác định toạ độ của vectơ khi biết toạ độ điểm đầu và điểm cuối

3 Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Từ biểu thức $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo toạ độ hai điểm A, B.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Nhận xét: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; 2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

b) Tính các độ dài AB, BC, CA.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1 - 2; 2 - 0; 3 - 2) = (-1; 2; 1)$;

$\overrightarrow{BC} = (2 - 1; 1 - 2; 2 - 3) = (1; -1; -1)$;

$\overrightarrow{CA} = (2 - 2; 0 - 1; 2 - 2) = (0; -1; 0)$.

b) Ta có: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$;

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$;

$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$.

3 Cho ba điểm $M(7; -2; 0)$, $N(-9; 0; 4)$, $P(0; -6; 5)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MP}$.

b) Tính các độ dài MN, NP, MP.

Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

4 Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB và $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Sử dụng các hệ thức vectơ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$; $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, tìm toạ độ của các điểm M và G.

Trong không gian $Oxyz$:

- Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $A(1; -1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(1; 0; 1)$. Tìm toạ độ:

a) Trung điểm M của AB;

b) Trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

a) Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$M\left(\frac{1+0}{2}; \frac{-1+1}{2}; \frac{1+2}{2}\right) \text{ hay } M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right).$$

b) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{1+0+1}{3}; \frac{-1+1+0}{3}; \frac{1+2+1}{3}\right) \text{ hay } G\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right).$$

4 Cho tam giác MNP có $M(2; 1; 3)$, $N(1; 2; 3)$, $P(-3; -1; 0)$. Tìm toạ độ:

a) Các điểm M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh NP, MP, MN;

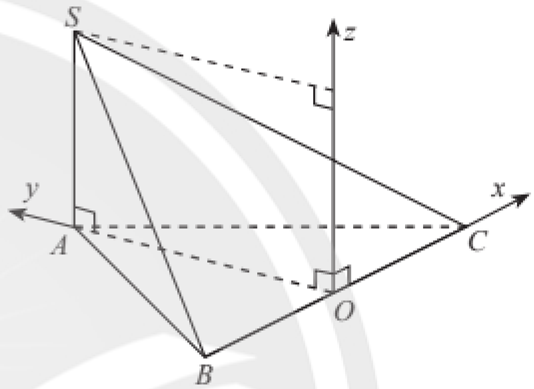
b) Trọng tâm G của tam giác $M'N'P'$.

3 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a, O là trung điểm của BC. Bằng cách thiết lập hệ toạ độ như Hình 3, hãy tìm toạ độ:

a) Các điểm A, S, B, C;

b) Trung điểm M của SB và trung điểm N của SC;

c) Trọng tâm G của tam giác SBC.



Hình 3

Ta có thể vận dụng các biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ trong giải toán hình học hoặc trong một số vấn đề thực tế.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 3; 5)$.

a) Tìm toạ độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

b) Tìm độ dài cạnh AB và AC.

c) Tính góc A.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 1; 1)$.

Hình 4

Vì H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC nên $H \in BC$ và $AH \perp BC$.

Gọi $(x; y; z)$ là toạ độ của H, ta có $\overrightarrow{BH} = (x - 1; y - 2; z - 4)$.

Vì $\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ nên tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$; do đó $x - 1 = t$; $y - 2 = t$; $z - 4 = t$, suy ra $H(1 + t; 2 + t; 4 + t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (t - 6; t - 1; t + 1)$.

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow t - 6 + t - 1 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2$.

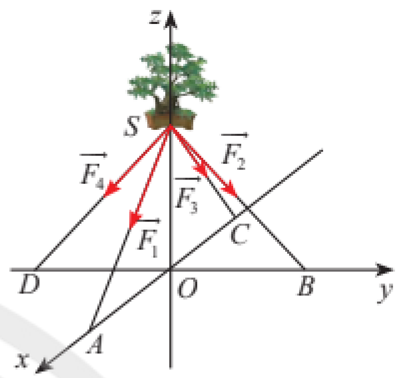
Suy ra $H(3; 4; 6)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6; -1; 1); \overrightarrow{AC} = (-5; 0; 2)$, suy ra

$$AB = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{38};\ AC = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}.$$

c) $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \dfrac{30+0+2}{\sqrt{38}.\sqrt{29}} = \dfrac{32}{\sqrt{38.29}}$, suy ra $\widehat{A} \approx 15{,}43^{\circ}$.

Ví dụ 6. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40 N và được phân bố thành bốn lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm toạ độ của các lực nói trên (mỗi centimét biểu diễn 1 N).



Hình 4

Giải

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

Ta có $\overrightarrow{SA} = (20; 0; -20)$, $\overrightarrow{SB} = (0; 20; -20)$, $\overrightarrow{SC} = (-20; 0; -20)$, $\overrightarrow{SD} = (0; -20; -20)$, suy ra $SA = SB = SC = SD = 20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

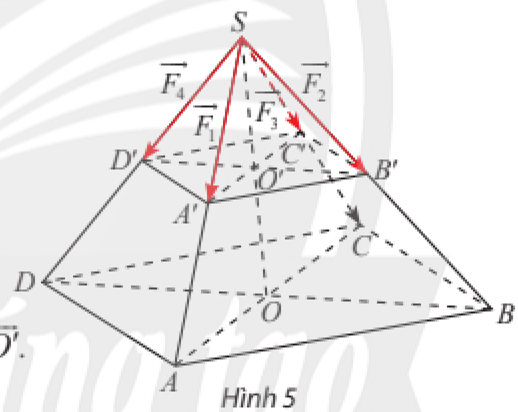
Các vectơ $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D'.

Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi $\overrightarrow{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB'} + \overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SD'} = 4\overrightarrow{SO'}.$$

Ta có $|\overrightarrow{F}| = 40$, suy ra $|\overrightarrow{SO'}| = SO' = 10 = \dfrac{1}{2}SO$.



Hình 5

Do đó O' là trung điểm của SO. Suy ra A' là trung điểm của SA.

Suy ra $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA} = (10; 0; -10)$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = (0; 10; -10),\ \overrightarrow{F_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = (-10; 0; -10),\ \overrightarrow{F_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = (0; -10; -10).$$

5 Cho tam giác MNP có $M(0; 1; 2)$, $N(5; 9; 3)$, $P(7; 8; 2)$.

a) Tìm toạ độ điểm K là chân đường cao kẻ từ M của tam giác MNP.

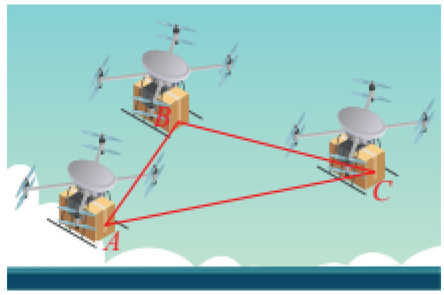
b) Tìm độ dài cạnh MN và MP.

c) Tính góc M.

4 Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có toạ độ là $A(1; 1; 1)$, $B(5; 7; 9)$, $C(9; 11; 4)$. Tính:

a) Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.

b) Góc $\widehat{BAC}$.



Hình 6

BÀI TẬP

1. Tính:

a) $\vec{a}.\vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 2; -4)$, $\vec{b} = (4; -2; 2)$.

b) $\vec{c}.\vec{d}$ với $\vec{c} = (2; -3; 4)$, $\vec{d} = (6; 5; -3)$.

2. Cho hai vectơ $\vec{a} = (0; 1; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 3; 1)$. Tìm toạ độ của vectơ $2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$.

3. Cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(3; 2; 0)$ và $C(2; -1; 3)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính chu vi tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

4. Cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hãy tìm toạ độ của các điểm:

a) M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).

b) M', M'', M''' lần lượt là các điểm thoả mãn:

- O là trung điểm của MM';
- MM'' vuông góc và cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm H sao cho H là trung điểm của MM'';
- MM''' vuông góc và cắt trục Oy tại điểm K sao cho K là trung điểm của MM'''.

5. Cho ba điểm $A(3; 3; 3)$, $B(1; 1; 2)$ và $C(5; 3; 1)$.

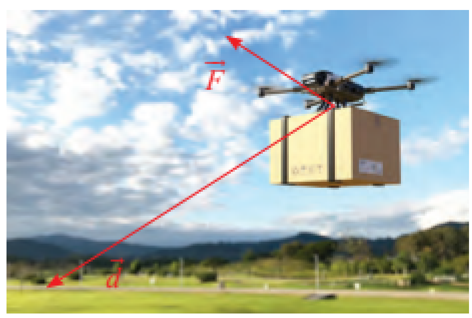
a) Tìm điểm M trên trục Oy cách đều hai điểm B, C.

b) Tìm điểm N trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C.

6. Cho các điểm $A(-1; -1; 0)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-1; 14; 0)$, $D(-3; 6; 2)$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

8. Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = (20; 30; -10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (Hình 7) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150; 200; 100)$ (đơn vị: m).



Hình 7

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho điểm M thoả mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Toạ độ của điểm M là

A. $M(0; 2; 1)$. B. $M(1; 2; 0)$.

C. $M(2; 0; 1)$. D. $M(2; 1; 0)$.

2. Cho hai điểm $A(-1; 2; -3)$ và $B(2; -1; 0)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$. B. $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -3)$.

C. $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$. D. $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 3)$.

3. Cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I(-2; 2; 1)$. B. $I(1; 0; 4)$.

C. $I(2; 0; 8)$. D. $I(2; -2; -1)$.

4. Cho ba điểm $A(1; 3; 5)$, $B(2; 0; 1)$, $C(0; 9; 0)$. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G(3; 12; 6)$. B. $G(1; 5; 2)$.

C. $G(1; 0; 5)$. D. $G(1; 4; 2)$.

5. Cho $A(1; 2; -1)$, $B(2; 1; -3)$, $C(-3; 5; 1)$. Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành có toạ độ là

A. $D(-4; 6; 3)$. B. $D(-2; 2; 5)$.

C. $D(-2; 8; -3)$. D. $D(-4; 6; -5)$.

6. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -1; 0)$ và $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1; 0)$. Giá trị của α là

A. $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. B. $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

C. $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. D. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

7. Cho $A(2; -1; 1)$, $B(-1; 3; -1)$, $C(5; -3; 4)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ có giá trị là

A. 48. B. –48.

C. 52. D. –52.

8. Cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B = (1; 0; 2)$. Toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA}$ là

A. $M\left(-2; 3; \dfrac{7}{2}\right)$. B. $M\left(-2; -3; \dfrac{7}{2}\right)$.

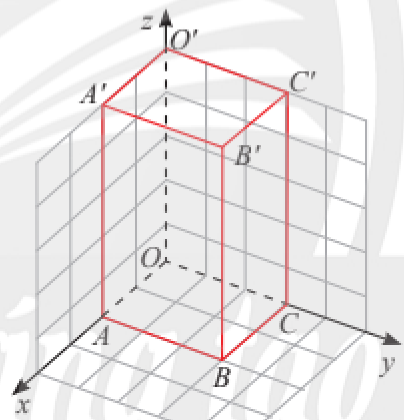
C. $M(-2; 3; 7)$. D. $M(-4; 6; 7)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ như Hình 1, biết $B'(2; 3; 5)$.

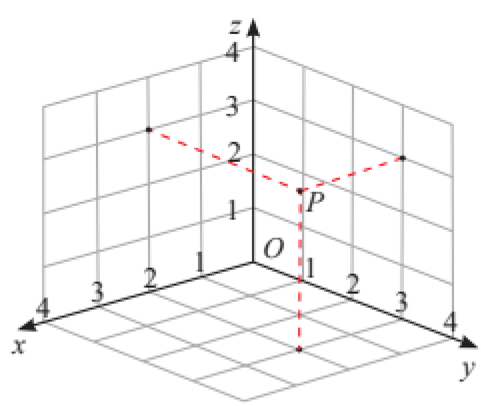
a) Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tính độ dài đường chéo OB' của hình hộp chữ nhật đó.



Hình 1

10. Tìm toạ độ của điểm P được biểu diễn trong Hình 2 và tính khoảng cách OP.



Hình 2

11. Cho $\vec{u} = (2; -5; 3)$, $\vec{v} = (0; 2; -1)$, $\vec{w} = (1; 7; 2)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{a} = \vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{w}$.

12. Cho ba điểm $A(0; 1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(1; -2; -5)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MB = 3MC$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

13. Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau góc 60°. Biết rằng $|\vec{u}| = 2$ và $|\vec{v}| = 4$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

14. Cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(0; -2; 3)$.

a) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB với O là gốc toạ độ.

b) Tính diện tích tam giác OAB.

15. Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A.

a) Tìm toạ độ vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B.

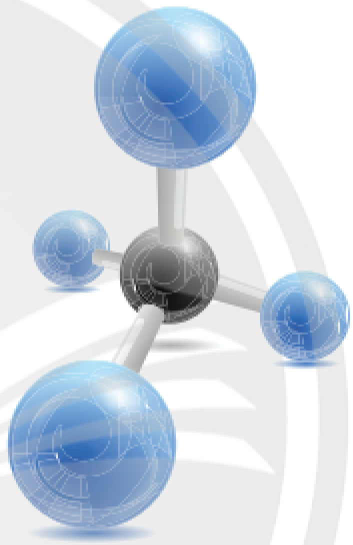
b) Tính tốc độ của máy bay B.

Hình 3

16. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là *trọng tâm của tứ diện* đó.

Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện.

Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết H–C–H là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Chứng minh rằng góc liên kết này gần bằng $109{,}5^\circ$.



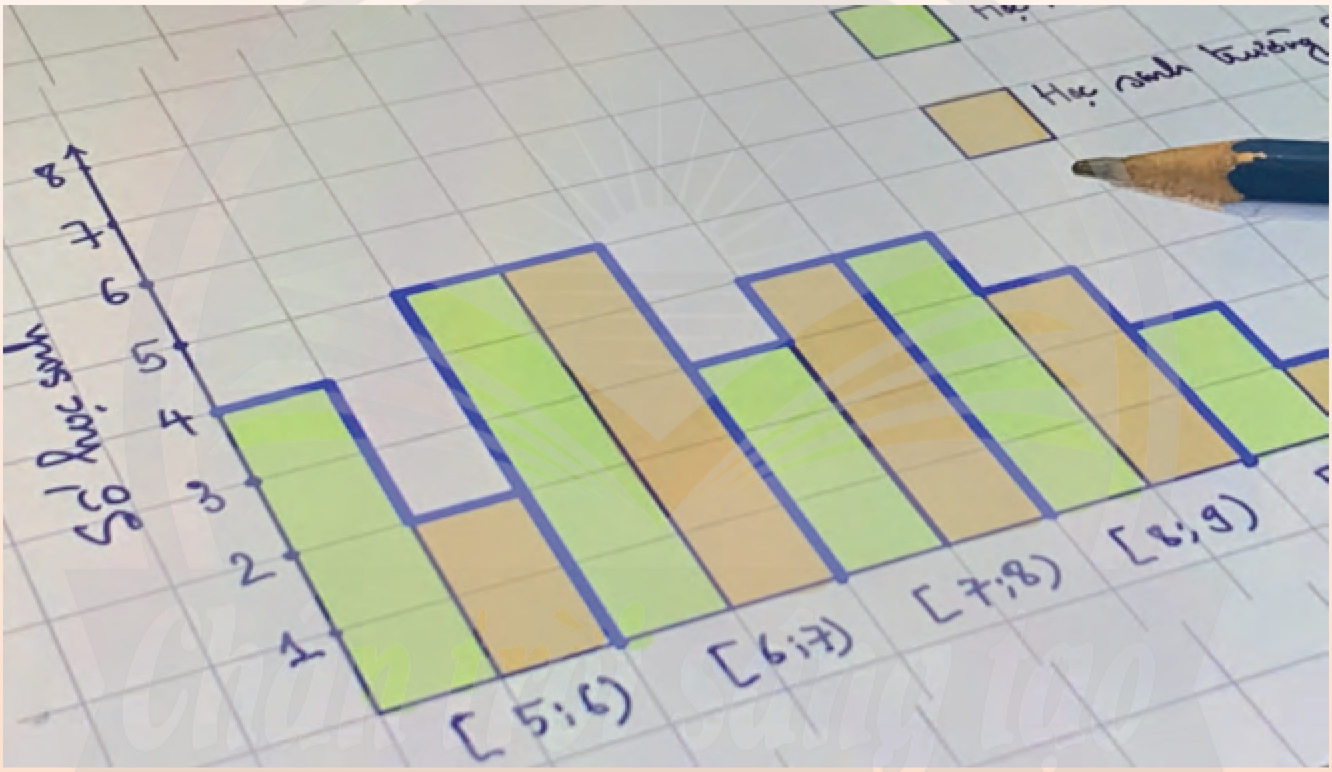
Hình 4

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương III CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Khi phân tích các dữ liệu thống kê, bên cạnh việc xác định các số đo xu thế trung tâm như số trung bình, các tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu, người ta cũng quan tâm đến các số đo mức độ phân tán. Trong thực tế, các số đo mức độ phân tán thường có liên hệ với sai số của phép đo hay mức độ rủi ro trong đầu tư tài chính.

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu cách xác định, ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.



Học xong chương này, bạn có thể:

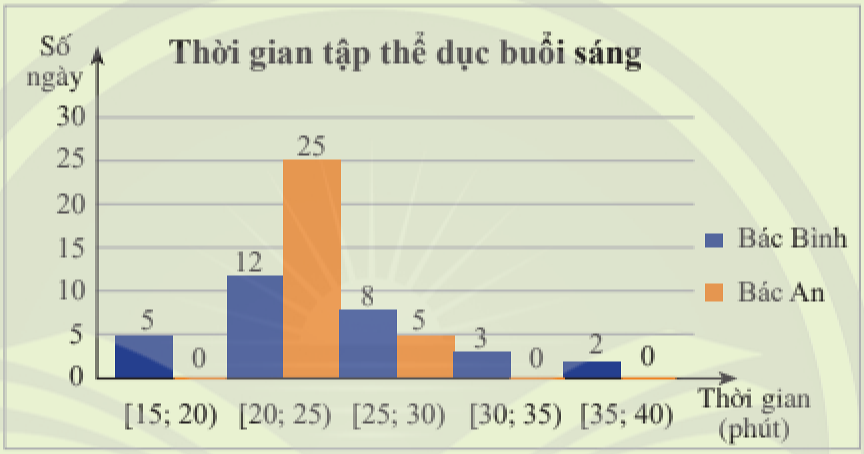
– Tính được các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn.
– Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.
– Chỉ ra được những kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.
– Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 12 và trong thực tiễn.

Bài 1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ khoá: Khoảng biến thiên; Khoảng tứ phân vị.

Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.

Ai là người có thời gian tập đều hơn?



1. Khoảng biến thiên

1 Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường.

Cân nặng (g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Có ý kiến cho rằng: "Trong 50 quả xoài trên, hiệu số cân nặng của hai quả bất kì không vượt quá 200 g". Ý kiến đó đúng hay sai? Giải thích.

Giá trị 200 ở trên chính là hiệu số giữa 450 và 250. Ta nói 200 là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Khoảng biến thiên, kí hiệu R, của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

Chú ý:

– Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Bảng 1

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Nếu n_1 và n_k cùng khác 0 thì

$$R = u_{k+1} - u_1.$$

– Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Ví dụ 1. Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

65 – 40 = 25 (cm).

Ý nghĩa của khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

– Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

– Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

Ví dụ 2. Sử dụng dữ liệu ở biểu đồ trong , chọn số thích hợp thay vào các vị trí được đánh dấu ? ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
Số ngày tập của bác Bình	?	12	8	3	2
Số ngày tập của bác An	?	?	?	?	?

a) Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An.

b) Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết bác nào có thời gian tập phân tán hơn.

Giải

a) Ta có bảng sau:

Thời gian (phút)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
Số ngày tập của bác Bình	5	12	8	3	2
Số ngày tập của bác An	0	25	5	0	0

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác Bình là 40 – 15 = 25 (phút).

Tuy nhiên, trong mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác An, khoảng đầu tiên chứa dữ liệu là [20; 25) và khoảng cuối cùng chứa dữ liệu là [25; 30).

Do đó khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác An là 30 – 20 = 10 (phút).

b) Nếu căn cứ theo khoảng biến thiên thì bác Bình có thời gian tập phân tán hơn bác An.

1 Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau.

Chiều cao (cm)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)
Số học sinh nữ lớp 12C	2	7	12	3	0	1
Số học sinh nữ lớp 12D	5	9	8	2	1	0

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết chiều cao của học sinh nữ lớp nào có độ phân tán lớn hơn.

2. Khoảng tứ phân vị

2 Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2022 của một số hộ gia đình trong một địa phương được ghi lại ở bảng sau:

Tổng thu nhập (triệu đồng)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

a) Hãy tìm các tứ phân vị Q_1 và Q_3.

b) Một doanh nghiệp địa phương muốn hướng dịch vụ của mình đến các gia đình có mức thu nhập ở tầm trung, tức là 50% các hộ gia đình có mức thu nhập ở chính giữa so với mức thu nhập của tất cả các hộ gia đình của địa phương. Hỏi doanh nghiệp cần hướng đến các gia đình có mức thu nhập trong khoảng nào?

Chú ý: Tứ phân vị thứ i, kí hiệu là Q_i, với $i = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm (Bảng 1) được xác định như sau:

$$Q_i = u_m + \frac{\frac{in}{4} - C}{n_m}(u_{m+1} - u_m),$$

trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ là cỡ mẫu;
- $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i;
- $C = n_1 + n_2 + ... + n_{m-1}$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng 1.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

Ví dụ 3. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trong 1. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Giải

Cỡ mẫu $n = 50$.

Gọi $x_1; x_2; ...; x_{50}$ là mẫu số liệu gốc gồm cân nặng của 50 quả xoài được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, x_3 \in [250; 290)$; $x_4, ..., x_{16} \in [290; 330)$; $x_{17}, ..., x_{34} \in [330; 370)$; $x_{35}, ..., x_{45} \in [370; 410)$; $x_{46}, ..., x_{50} \in [410; 450)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_{13} \in [290; 330)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 290 + \frac{\frac{50}{4} - 3}{13} \cdot (330 - 290) = \frac{4150}{13}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{38} \in [370; 410)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 370 + \frac{\frac{3 \cdot 50}{4} - (3 + 13 + 18)}{11} \cdot (410 - 370) = \frac{4210}{11}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = \frac{4210}{11} - \frac{4150}{13} = \frac{9080}{143} \approx 63,5.$$

Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

– Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).

– Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.

– Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1{,}5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1{,}5\Delta_Q$.

– Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

2 Hãy so sánh khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An trong ▶.

Ví dụ 4. Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

Thời gian (phút)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)	[30; 33)
Số lần	22	38	27	8	4	1

a) Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

b) Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết 32 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?

Giải

a) Cỡ mẫu $n = 100$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian 100 lần đi xe buýt của ông Thắng.

Ta có: $x_1, \ldots, x_{22} \in [15; 18)$; $x_{23}, \ldots, x_{60} \in [18; 21)$; $x_{61}, \ldots, x_{87} \in [21; 24)$; $x_{88}, \ldots, x_{95} \in [24; 27)$; $x_{96}, \ldots, x_{99} \in [27; 30)$; $x_{100} \in [30; 33)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26}) \in [18; 21)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 18 + \frac{\frac{100}{4} - 22}{38} \,.\, (21 - 18) = \frac{693}{38}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76}) \in [21; 24)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 21 + \frac{\frac{3\,.\,100}{4} - (22 + 38)}{27} \,.\, (24 - 21) = \frac{68}{3}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = \frac{68}{3} - \frac{693}{38} = \frac{505}{114} \approx 4{,}43.$$

b) Trong lần duy nhất ông Thắng đi hết 32 phút, thời gian đi của ông thuộc nhóm [30; 33).

Vì $Q_3 + 1{,}5\Delta_Q = \dfrac{6683}{228} \approx 29{,}31 < 30$ nên thời gian của lần ông Thắng đi hết 32 phút là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm.

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ở Ví dụ 4 sau khi đã loại bỏ các giá trị ngoại lệ. Có nhận xét gì về khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị vừa tìm được và khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị ban đầu?

b) Hãy so sánh mức độ phân tán của hai mẫu số liệu chiều cao của các học sinh nữ lớp 12C và 12D ở .

Giả sử kết quả khảo sát hai khu vực A và B về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau:

Tuổi kết hôn	[19; 22)	[22; 25)	[25; 28)	[28; 31)	[31; 34)
Số phụ nữ khu vực A	10	27	31	25	7
Số phụ nữ khu vực B	47	40	11	2	0

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của từng mẫu số liệu ghép nhóm ứng với mỗi khu vực A và B.

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực nào có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn?

BÀI TẬP

1. Bảng sau thống kê tổng lượng mưa (đơn vị: mm) đo được vào tháng 7 từ năm 2002 đến 2021 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau.

341,4	187,1	242,2	522,9	251,4	432,2	200,7	388,6	258,4	288,5
298,1	413,5	413,5	332	421	475	400	305	520	147

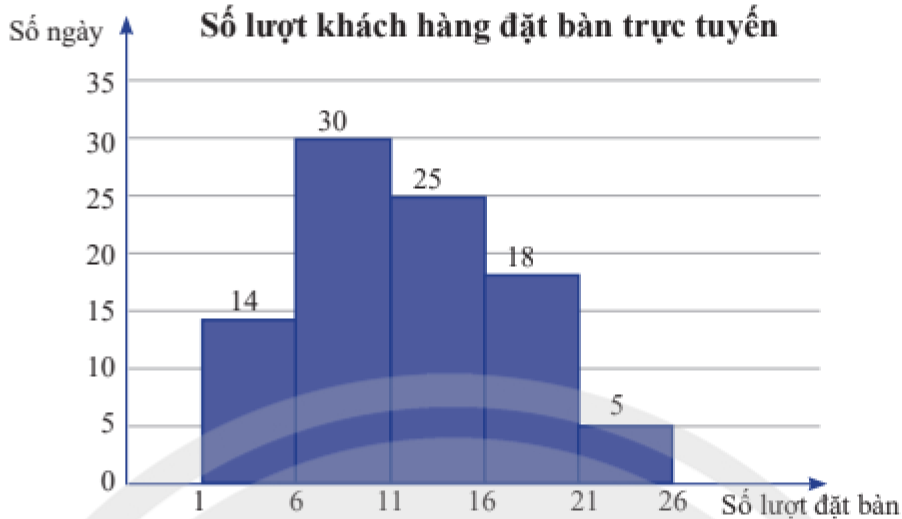
(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

a) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Hãy chia mẫu số liệu trên thành 4 nhóm với nhóm đầu tiên là [140; 240) và lập bảng tần số ghép nhóm.

c) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm và so sánh với kết quả tương ứng thu được ở câu a).

2. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn; …



Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên.

3. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)	[9,2; 9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi chiều cao của cây keo này có phải là giá trị ngoại lệ không?

4. Hai bảng tần số ghép nhóm dưới đây thống kê theo độ tuổi số lượng thành viên nam và thành viên nữ đang sinh hoạt trong một câu lạc bộ dưỡng sinh.

Khoảng tuổi	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)	[65; 70)	[70; 75)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)
Số thành viên nam	4	7	4	6	15	12	2	0

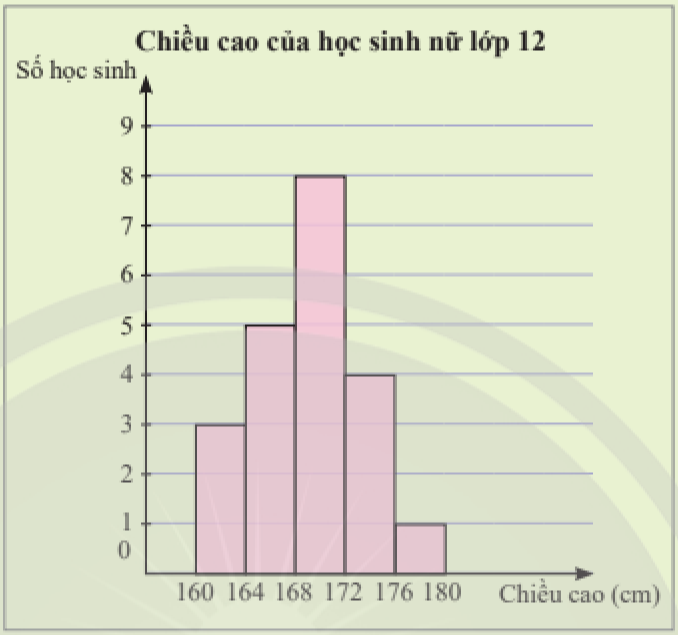
Khoảng tuổi	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)	[65; 70)	[70; 75)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)
Số thành viên nữ	3	4	5	3	7	14	13	1

a) Hãy tính các khoảng tứ phân vị của tuổi nam giới và nữ giới trong mỗi bảng số liệu ghép nhóm trên.

b) Hãy cho biết trong câu lạc bộ trên, nam giới hay nữ giới có tuổi đồng đều hơn.

Bài 2. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ khoá: **Phương sai; Độ lệch chuẩn.**



Có thể tính phương sai và độ lệch chuẩn của số liệu ở biểu đồ trên không?

a) Trong biểu đồ ở ▶, cột thứ nhất biểu diễn số lượng học sinh có chiều cao từ 160 cm đến dưới 164 cm; cột thứ hai biểu diễn số lượng học sinh có chiều cao từ 164 cm đến dưới 168 cm, … .

Hãy lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu ở ▶, xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm và tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.

b) Xét mẫu số liệu mới gồm các giá trị đại diện của các nhóm, tần số của mỗi giá trị đại diện bằng tần số của nhóm tương ứng. Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu mới.

Ở lớp 11, ta đã biết giá trị đại diện của nhóm $[a; b)$ là $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Tương tự như cách tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được xác định thông qua giá trị đại diện và tần số của mỗi nhóm.

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	…	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	…	c_k
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2, được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(c_1 - \overline{x})^2 + n_2(c_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k(c_k - \overline{x})^2\right],$$

trong đó: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ là cỡ mẫu;

$\overline{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_kc_k)$ là số trung bình.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S, là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là $S = \sqrt{S^2}$.

Chú ý:

a) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \ldots + n_kc_k^2\right) - \overline{x}^2.$$

b) Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\left[n_1(c_1 - \overline{x})^2 + n_2(c_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k(c_k - \overline{x})^2\right].$$

Ví dụ 1. Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau:

Cân nặng (kg)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số quả mít	6	12	19	9	4

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần trăm.)

Giải

Ta có bảng thống kê cân nặng của các quả mít theo giá trị đại diện:

Cân nặng đại diện (kg)	5	7	9	11	13
Tần số	6	12	19	9	4

Cỡ mẫu $n = 6 + 12 + 19 + 9 + 4 = 50$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{6.5 + 12.7 + 19.9 + 9.11 + 4.13}{50} = 8{,}72.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S^2 = \frac{1}{50}(6 \,.\, 5^2 + 12 \,.\, 7^2 + 19 \,.\, 9^2 + 9 \,.\, 11^2 + 4 \,.\, 13^2) - 8{,}72^2 \approx 4{,}80.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S \approx \sqrt{4{,}80} \approx 2{,}19.$$

Ví dụ 2. Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau:

111,6	134,9	130,3	134,2	140,9	109,3	154,4	156,3	116,1	96,7
105,2	80,8	80,8	110	109	139	145	161	126	114

(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

a) Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

b) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là [80; 98) và độ dài mỗi nhóm bằng 18. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

c) Hãy tính sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.

(Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn.)

Giải

a) Cỡ mẫu là $n = 20$.

Số trung bình của mẫu số liệu trên là

$$\overline{x}_1 = \frac{111,6 + 134,9 + ... + 114}{20} = 122,755.$$

Phương sai của mẫu số liệu trên là

$$S_1^2 = \frac{1}{20}(111,6^2 + 134,9^2 + \ldots + 114^2) - 122,755^2 \approx 515,453.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là

$$S_1 \approx \sqrt{515,453} \approx 22,704.$$

b) Ta có bảng sau:

Số giờ nắng	[80; 98)	[98; 116)	[116; 134)	[134; 152)	[152; 170)
Giá trị đại diện	89	107	125	143	161
Số năm	3	6	3	5	3

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x}_2 = \frac{3.89 + 6.107 + 3.125 + 5.143 + 3.161}{20} = 124,1.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = \frac{1}{20}(3.89^2 + 6.107^2 + 3.125^2 + 5.143^2 + 3.161^2) - 124,1^2 = 566,19.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2 = \sqrt{566,19} \approx 23,795.$$

c) Sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc là

$$\frac{|S_2 - S_1|}{S_1} = \frac{|23,795 - 22,704|}{22,704} \cdot 100\% \approx 4,805\%.$$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

– Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.

– Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Ví dụ 3. Thầy Tuấn thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A và 11B ở bảng sau:

Điểm trung bình	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Số học sinh lớp 11A	1	0	11	22	6
Số học sinh lớp 11B	0	6	8	14	12

a) Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

Giải

a) Khoảng biến thiên của điểm trung bình của học sinh lớp 11A là: 10 – 5 = 5.

Khoảng biến thiên của điểm trung bình của học sinh lớp 11B là: 10 – 6 = 4.

Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì điểm trung bình của các học sinh lớp 11B ít phân tán hơn điểm trung bình của các học sinh lớp 11A.

b) Ta có bảng thống kê điểm trung bình theo giá trị đại diện:

Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Số học sinh lớp 11A	1	0	11	22	6
Số học sinh lớp 11B	0	6	8	14	12

• Xét mẫu số liệu của lớp 11A:

Cỡ mẫu là $n_1 = 1 + 11 + 22 + 6 = 40$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x}_1 = \frac{1 \,.\, 5,5 + 11 \,.\, 7,5 + 22 \,.\, 8,5 + 6 \,.\, 9,5}{40} = 8,3.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1^2 = \frac{1}{40}(1 \,.\, 5{,}5^2 + 11 \,.\, 7{,}5^2 + 22 \,.\, 8{,}5^2 + 6 \,.\, 9{,}5^2) - 8{,}3^2 = 0{,}61.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_1 = \sqrt{0{,}61}$.

• Xét mẫu số liệu của lớp 11B:

Cỡ mẫu là $n_2 = 6 + 8 + 14 + 12 = 40$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x}_2 = \frac{6 \,.\, 6{,}5 + 8 \,.\, 7{,}5 + 14 \,.\, 8{,}5 + 12 \,.\, 9{,}5}{40} = 8{,}3.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = \frac{1}{40}(6.\, 6{,}5^2 + 8 \,.\, 7{,}5^2 + 14 \,.\, 8{,}5^2 + 12 \,.\, 9{,}5^2) - 8{,}3^2 = 1{,}06.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_2 = \sqrt{1{,}06}$.

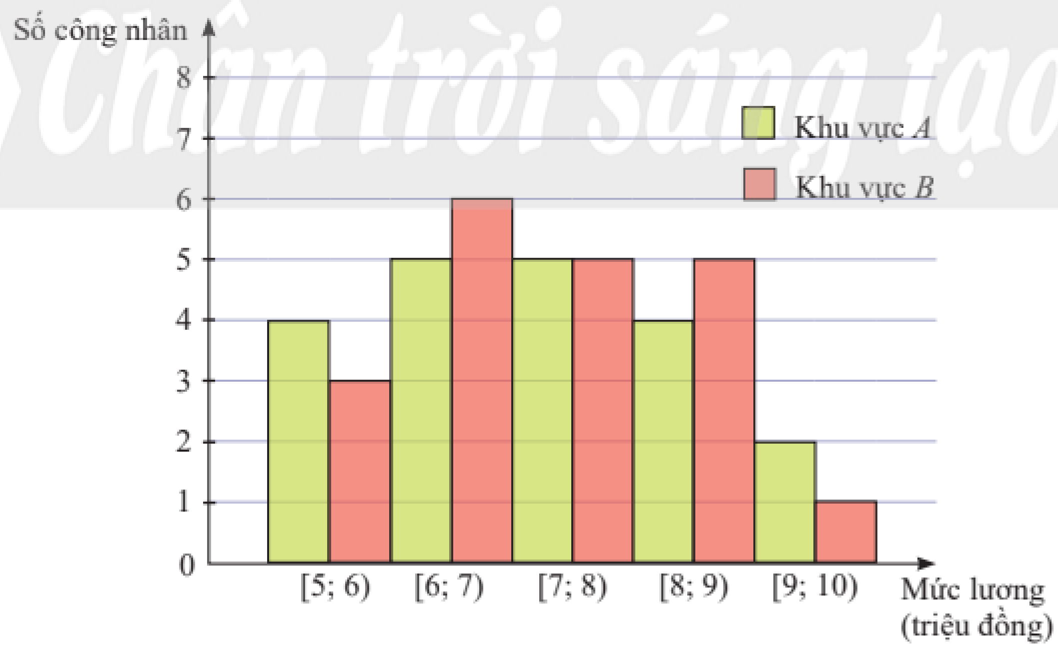
Do $S_1 < S_2$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp 11A có điểm trung bình ít phân tán hơn học sinh lớp 11B.

Ví dụ 4. Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực *A* và *B*.

a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu đó.

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì công nhân ở khu vực nào có mức lương khởi điểm đồng đều hơn?

Mức lương khởi điểm của công nhân ở hai khu vực *A* và *B*



Giải

a) Ta có bảng sau:

Mức lương	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Mức lương đại diện (triệu đồng)	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Số công nhân ở khu vực A	4	5	5	4	2
Số công nhân ở khu vực B	3	6	5	5	1

b)

• Xét mẫu số liệu của khu vực A:

Cỡ mẫu là $n_A = 4 + 5 + 5 + 4 + 2 = 20$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x}_A = \frac{4.5,5+5.6,5+5.7,5+4.8,5+2.9,5}{20} = 7,25.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_A^2 = \frac{1}{20}(4 \,.\, 5,5^2 + 5 \,.\, 6,5^2 + 5 \,.\, 7,5^2 + 4 \,.\, 8,5^2 + 2 \,.\, 9,5^2) - (7,25)^2 = 1,5875.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_A = \sqrt{1,5875}.$$

• Xét mẫu số liệu của khu vực B:

Cỡ mẫu là $n_B = 3 + 6 + 5 + 5 + 1 = 20$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x}_B = \frac{3.5,5+6.6,5+5.7,5+5.8,5+1.9,5}{20} = 7,25.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_B^2 = \frac{1}{20}(3 \,.\, 5,5^2 + 6 \,.\, 6,5^2 + 5 \,.\, 7,5^2 + 5 \,.\, 8,5^2 + 1 \,.\, 9,5^2) - (7,25)^2 = 1,2875.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_B = \sqrt{1,2875}.$$

Do $S_A > S_B$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì mức lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A.

Chú ý: Với các mẫu số liệu ghép nhóm có cùng số trung bình (hoặc xấp xỉ nhau), ta thường sử dụng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ phân tán của các mẫu số liệu đó.

Ví dụ 5. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu *A* và *B* trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Số ngày giao dịch của cổ phiếu *A*	8	9	12	10	11
Số ngày giao dịch của cổ phiếu *B*	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn.

Theo quan điểm trên, hãy so sánh độ rủi ro của cổ phiếu *A* và cổ phiếu *B*.

Giải

Ta có bảng thống kê giá đóng cửa theo giá trị đại diện:

Giá đóng cửa	121	123	125	127	129
Số ngày giao dịch của cổ phiếu *A*	8	9	12	10	11
Số ngày giao dịch của cổ phiếu *B*	16	4	3	6	21

• Xét mẫu số liệu của cổ phiếu *A*:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x_1} = \frac{8 \cdot 121 + 9 \cdot 123 + 12 \cdot 125 + 10 \cdot 127 + 11 \cdot 129}{50} = 125,28.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1^2 = \frac{1}{50}(8 \cdot 121^2 + 9 \cdot 123^2 + 12 \cdot 125^2 + 10 \cdot 127^2 + 11 \cdot 129^2) - (125,28)^2 = 7,5216.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{7,5216}$.

• Xét mẫu số liệu của cổ phiếu *B*:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x_2} = \frac{16 \cdot 121 + 4 \cdot 123 + 3 \cdot 125 + 6 \cdot 127 + 21 \cdot 129}{50} = 125,28.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = \frac{1}{50}(16 \cdot 121^2 + 4 \cdot 123^2 + 3 \cdot 125^2 + 6 \cdot 127^2 + 21 \cdot 129^2) - (125,48)^2 = 12,4096.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_2 = \sqrt{S_2^2} = \sqrt{12,4096}$.

Vậy nếu đánh giá độ rủi ro theo phương sai và độ lệch chuẩn thì cổ phiếu *A* có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu *B*.

1 Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm ở (trang 75).

2 Mai và Ngọc cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

Số bước (đơn vị: nghìn)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)
Số ngày của Mai	6	7	6	6	5
Số ngày của Ngọc	2	5	13	8	2

a) Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn nào có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn?

BÀI TẬP

Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn.

1. Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19; 19,5)	[19,5; 20)	[20; 20,5)	[20,5; 21)	[21; 21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

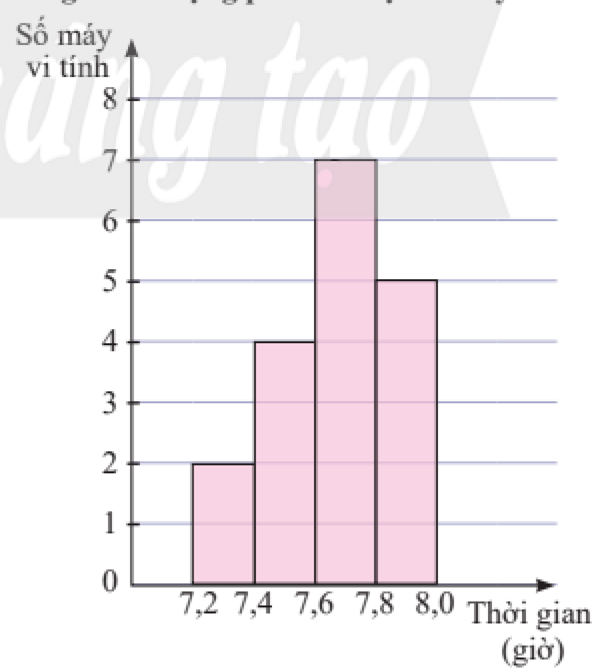
Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

2. Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục (đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết của pin một số máy vi tính cùng loại được mô tả bằng biểu đồ bên.

a) Hãy cho biết có bao nhiêu máy vi tính có thời gian sử dụng pin từ 7,2 đến dưới 7,4 giờ?

b) Hãy xác định số trung bình và độ lệch chuẩn của thời gian sử dụng pin.

Thời gian sử dụng pin của một số máy vi tính



3. Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau:

42	43,4	43,4	46,5	46,7	46,8	47,5	47,7	48,1	48,4
50,8	52,1	52,7	53,9	54,8	55,6	57,5	59,6	60,3	61,1

a) Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

b) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là [42; 46) và độ dài mỗi nhóm bằng 4.

c) Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

4. Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau:

Đường kính (cm)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	18	14

a) Hãy so sánh đường kính trung bình của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm A và địa điểm B.

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm nào có đường kính đồng đều hơn?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khoẻ. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 1,5. B. 0,9. C. 0,6. D. 0,3.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 0,9. B. 0,975. C. 0,5. D. 0,575.

c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 3,39. B. 11,62. C. 0,1314. D. 0,36.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 3,41. B. 11,62. C. 0,017. D. 0,36.

2. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 25. B. 20. C. 15. D. 30.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 23,75. B. 27,5. C. 31,88. D. 8,125.

c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 31,77. B. 32. C. 31. D. 31,44.

3. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3, bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số lần	4	6	8	4	3

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm nhận giá trị nào trong các giá trị dưới đây?

A. 6. B. 8. C. 10. D. 12.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 10,75. B. 1,75. C. 3,63. D. 14,38.

c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 5,98. B. 6. C. 2,44. D. 2,5.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

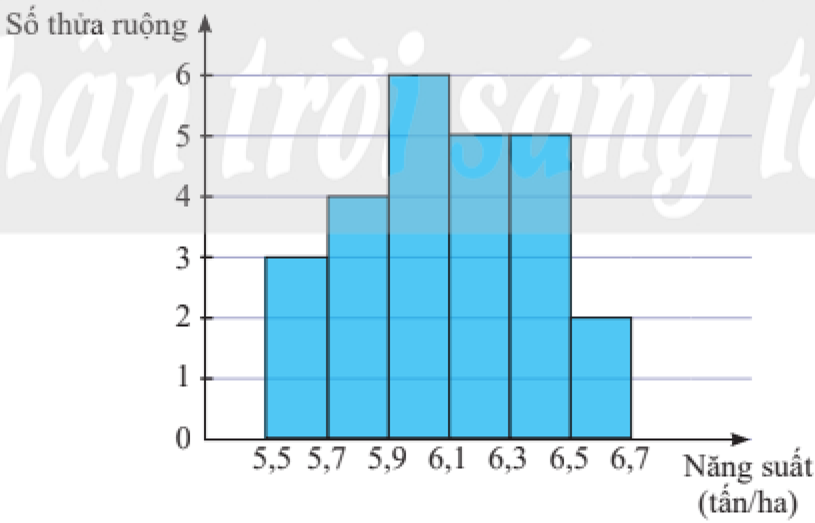
4. Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

Độ dài quãng đường (km)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	[250; 300)
Số ngày	5	10	9	4	2

Hãy xác định khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

5. Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị: tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh hoạ ở biểu đồ sau.

Năng suất lúa của một số thửa ruộng



a) Có bao nhiêu thửa ruộng đã được khảo sát?

b) Lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm tương ứng của mẫu số liệu trên.

c) Hãy xác định khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

6. Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 hai trường X và Y được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11)
Số học sinh trường X	8	10	13	10	9
Số học sinh trường Y	4	12	17	14	3

a) Nếu so sánh theo số trung bình thì học sinh trường nào viết nhanh hơn?

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì học sinh trường nào có tốc độ viết đồng đều hơn?

c) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh trường nào có tốc độ viết đồng đều hơn?

7. Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn.

Số giờ nắng	[130; 160)	[160; 190)	[190; 220)	[220; 250)	[250; 280)	[280; 310)
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	2	4	10	3

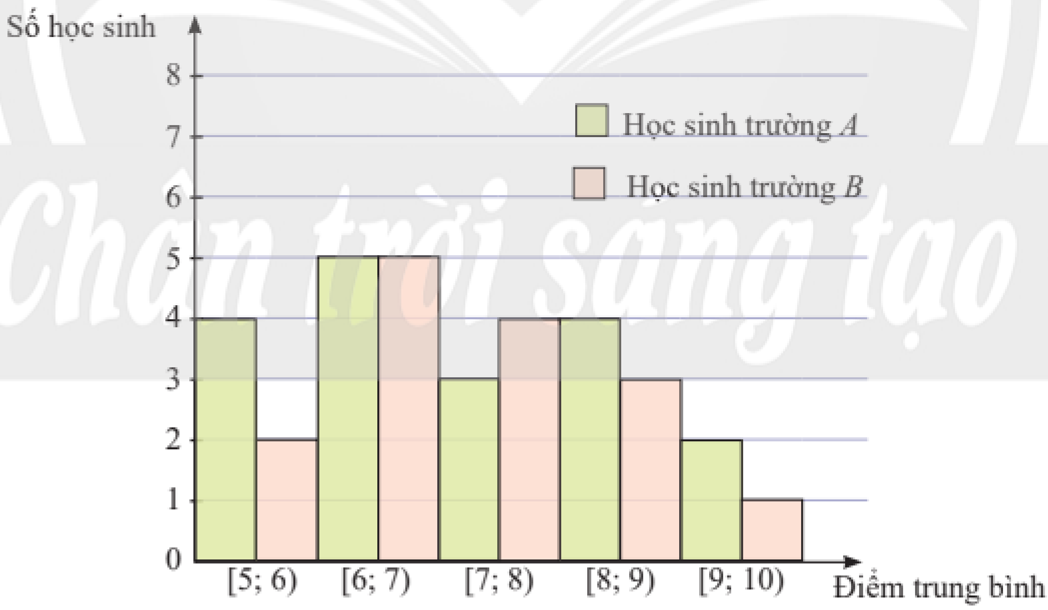
(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

a) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của địa phương nào đồng đều hơn?

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 của địa phương nào đồng đều hơn?

8. Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B.

Điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B



a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường nào có điểm trung bình đồng đều hơn?

c) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường nào có điểm trung bình đồng đều hơn?

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số bằng phần mềm GeoGebra

MỤC TIÊU

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ đồ thị của các hàm số trong chương trình lớp 12.

– Xem xét sự thay đổi hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba khi thay đổi các hệ số a, b, c, d trong công thức hàm số.

– Ôn tập và minh hoạ các tính chất đã học về hàm số bậc ba.

CHUẨN BỊ

– Máy tính xách tay có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

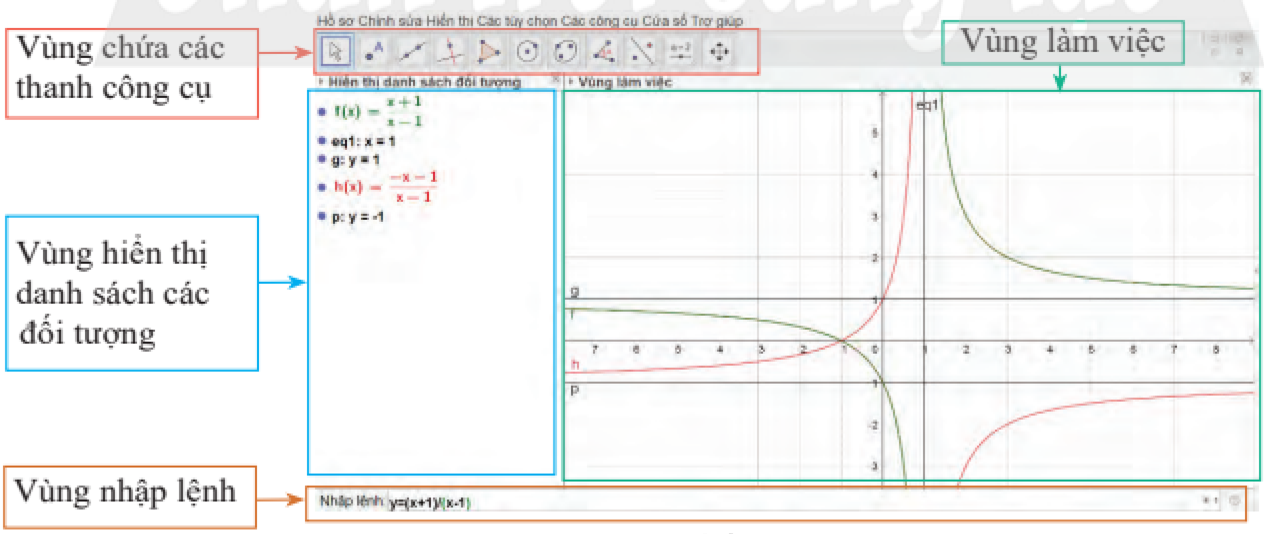
– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.

– Sách giáo khoa Toán 12, tập một – bộ sách Chân trời sáng tạo.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA GEOGEBRA

Để vẽ đồ thị trên GeoGebra ta thực hiện các thao tác trên bốn vùng sau:

1. Vùng chứa các thanh công cụ;
2. Vùng hiển thị danh sách các đối tượng;
3. Vùng làm việc: chứa đồ thị vẽ được và các thanh trượt biểu thị các hệ số a, b, c, d;
4. Vùng nhập lệnh: để nhập công thức các hàm số và biểu thức.



Hình 1

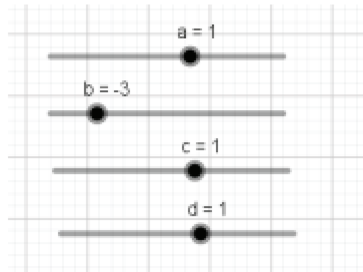
TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

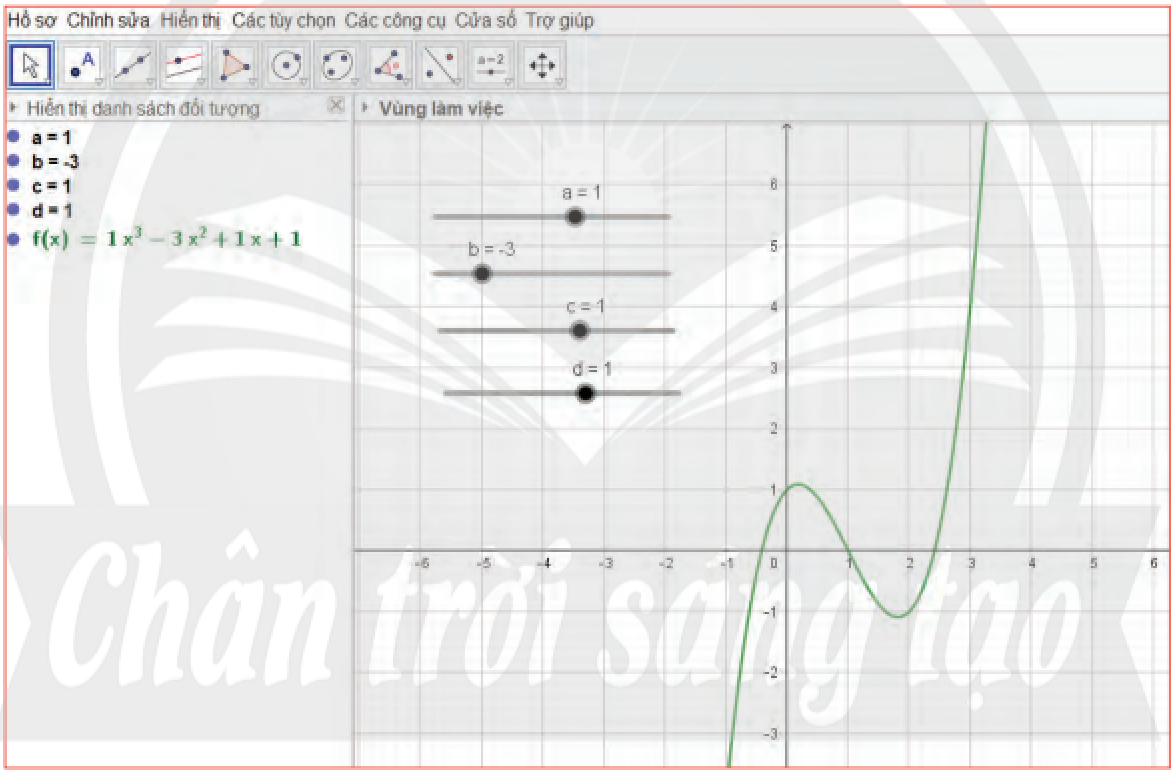
– Tạo các thanh trượt biểu thị các tham số *a*, *b*, *c*, *d* bằng cách nhấp chuột liên tiếp vào thanh công cụ và vào vị trí màn hình nơi mà ta muốn đặt thanh trượt (Hình 2).



Hình 2

– Nhập công thức hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ vào vùng nhập lệnh theo cú pháp y = ax^3 + bx^2 + cx + d.

– Quan sát đồ thị được vẽ trên vùng làm việc.



Hình 3

– Dùng chuột điều chỉnh các thanh trượt *a*, *b*, *c*, *d* để có giá trị mong muốn.

– Quan sát sự thay đổi hình dạng của đồ thị hàm bậc ba theo sự thay đổi các hệ số *a*, *b*, *c*, *d* trong công thức hàm số.

– Chụp màn hình để có kết quả làm báo cáo, thu hoạch, trình chiếu.

3. Nêu các kết luận về tính chất của đồ thị quan sát được trên hình vẽ.

4. Kéo các thanh trượt để vẽ nhiều đồ thị hàm số bậc ba trên cùng một hệ trục toạ độ.

1 Vẽ đồ thị các hàm số bậc ba sau:

a) $y = x^3$; b) $y = x^3 - 3x$;

c) $y = -x^3 + 3x$; d) $y = x^3 - 3x + 2$.

HOẠT ĐỘNG 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

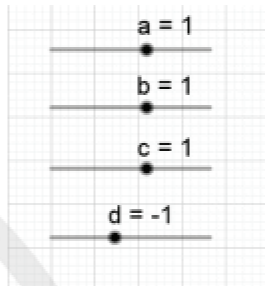
2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

– Tạo các thanh trượt biểu thị các tham số a, b, c, d (Hình 4).

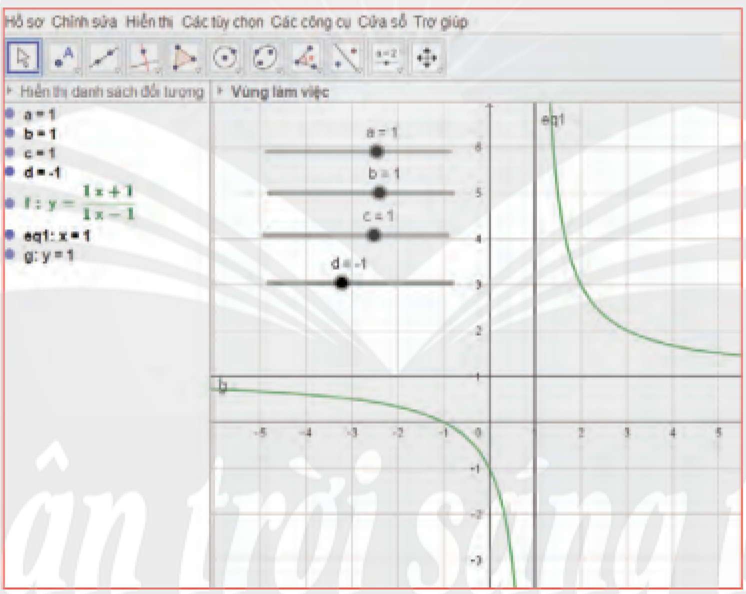
– Nhập công thức hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$ vào vùng nhập lệnh theo cú pháp y = (a*x+b)/(c*x+d).

– Nhập phương trình hai tiệm cận theo cú pháp x = –d/c; y = a/c.

– Quan sát đồ thị được vẽ trên vùng làm việc.



Hình 4



Hình 5

– Dùng chuột điều chỉnh các thanh trượt a, b, c, d để có giá trị mong muốn.

– Quan sát sự thay đổi hình dạng của đồ thị hàm số trên theo sự thay đổi các hệ số a, b, c, d trong công thức hàm số.

– Chụp màn hình để có kết quả làm báo cáo, thu hoạch, trình chiếu.

3. Nêu các kết luận về tính chất của đồ thị quan sát được trên hình vẽ.

4. Kéo các thanh trượt để vẽ nhiều đồ thị hàm số trên cùng một hệ trục toạ độ.

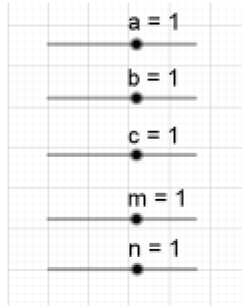
2 Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; b) $y = \dfrac{-x-1}{x-1}$.

HOẠT ĐỘNG 3. Vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a\neq 0;\ m\neq 0;$ đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web https://www.geogebra.org/ để chạy online.

2. Các bước thao tác trên GeoGebra:



Hình 6

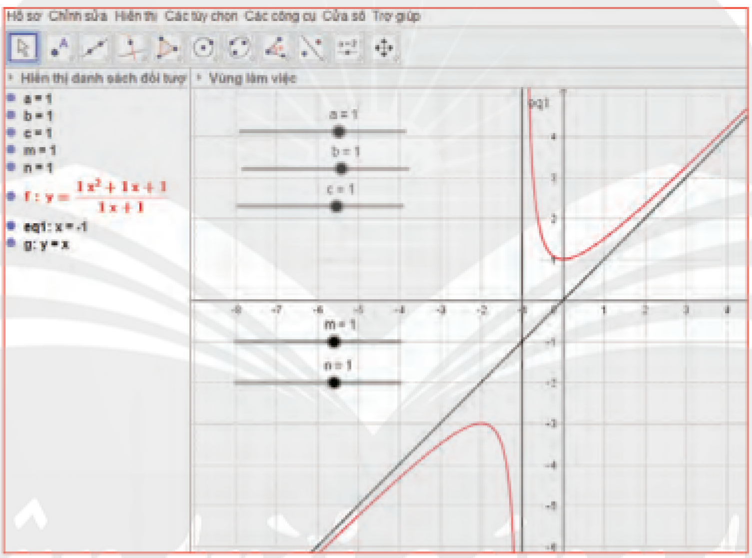
– Tạo các thanh trượt biểu thị các tham số a, b, c, m, n (Hình 6).

– Nhập công thức hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ vào vùng nhập lệnh theo cú pháp y = (a*x^2+b*x+d)/(m*x+n).

– Nhập phương trình hai tiệm cận theo cú pháp

x = –n/m; y = (a/m)*x+(–a*n+b*m)/m^2.

– Quan sát đồ thị được vẽ trên vùng làm việc.



Hình 7

– Dùng chuột điều chỉnh các thanh trượt a, b, c, m, n để có giá trị mong muốn.

– Quan sát sự thay đổi của hình dạng của đồ thị hàm số trên theo sự thay đổi các hệ số a, b, c, m, n trong công thức hàm số.

– Chụp màn hình để có kết quả làm báo cáo, thu hoạch, trình chiếu.

3. Nêu các kết luận về tính chất của đồ thị quan sát được trên hình vẽ.

4. Kéo các thanh trượt để vẽ nhiều đồ thị hàm số trên cùng một hệ trục toạ độ.

3 Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$; b) $y=\dfrac{-x^2+x-1}{x-1}$; c) $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng máy tính cầm tay

MỤC TIÊU

– Thực hành sử dụng máy tính cầm tay để tìm giá trị gần đúng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một đoạn xác định của hàm số.

– Tính được bảng giá trị của hàm số trên một đoạn xác định.

– Ôn tập và minh hoạ cụ thể về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất và bảng giá trị của hàm số.

CHUẨN BỊ

– Máy tính cầm tay.

– Sách giáo khoa Toán 12, tập một – bộ sách Chân trời sáng tạo.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA MÁY TÍNH CẦM TAY

Để tìm giá trị gần đúng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, ta thực hiện các thao tác sau:

1. Cài đặt máy để vào chế độ TABLE lập bảng giá trị và tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

2. Nhập hàm số $y = f(x)$.

3. Nhập hai giá trị a, b và khoảng cách d của mỗi bước tăng giá trị.

4. Bấm = để được bảng giá trị.

5. Quan sát bảng giá trị để rút ra giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[a; b]$.

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

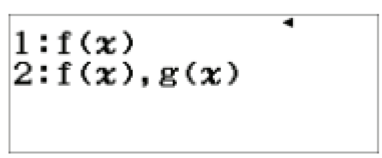
HOẠT ĐỘNG 1. Tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trên một đoạn xác định.

Ví dụ 1. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-1; 5]$.

Giải

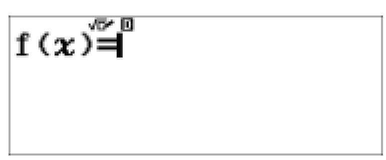
Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các phím [SHIFT] [MENU] và hai lần phím di chuyển ▼ để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.

Ấn phím [1] để chọn mục **Table** (bảng). Màn hình sẽ hiển thị bảng lựa chọn như hình bên.

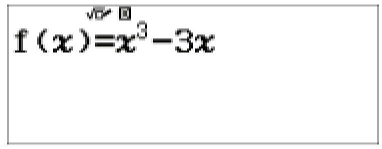


Tiếp đó, ấn phím [1] để chọn dạng bảng có một hàm số.

Ấn các phím [MENU] [8] để vào chương trình **Table**.



Tiến hành nhập hàm số đã cho bằng cách ấn liên tiếp các phím sau:



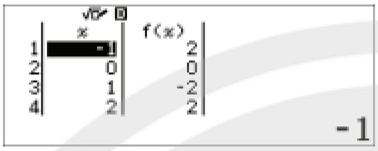
[(] [$x^{\blacksquare}$] [3] [▶] [−] [3] [ALPHA] [)]

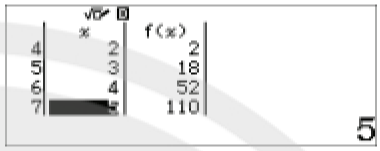
Tiếp đó, ấn phím [=] để màn hình hiển thị bảng chọn **Table Range** (phạm vi bảng), rồi ấn các phím

[(−)] [1] [=] [5] [=] [1] [=]

để nhập giá trị đầu và cuối của đoạn đang xét, khoảng cách của mỗi bước tăng giá trị.

Ấn tiếp phím [=] và nhiều lần phím [▼] để màn hình hiển thị bảng giá trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-1; 5]$ như các hình dưới đây.





Vậy trên đoạn $[-1; 5]$, hàm số đã cho có giá trị gần đúng của giá trị lớn nhất là $f(5) = 110$, giá trị nhỏ nhất là $f(1) = -2$.

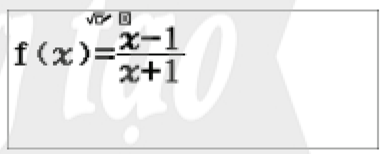
1 Sử dụng máy tính cầm tay, tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + x^2 - 5x$ trên đoạn $[0; 10]$.

HOẠT ĐỘNG 2. Tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có dạng $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$) trên một đoạn xác định.

Ví dụ 2. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 5]$.

Giải

Sau khi thực hiện các bước tương tự như Ví dụ 1 để vào chương trình **Table**, tiến hành nhập hàm số đã cho bằng cách ấn liên tiếp các phím sau:



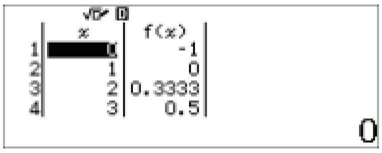
[▤] [ALPHA] [)] [−] [1] [▼] [ALPHA] [)] [+] [1]

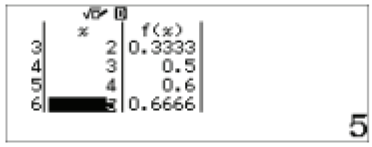
Tiếp đó, ấn phím [=] để màn hình hiển thị bảng chọn **Table Range** (phạm vi bảng), rồi ấn các phím

[0] [=] [5] [=] [1] [=]

để nhập giá trị đầu và cuối của đoạn đang xét, khoảng cách của mỗi bước tăng giá trị.

Ấn tiếp phím [=] và nhiều lần phím [▼] để màn hình hiển thị bảng giá trị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 5]$ như các hình dưới đây.





Vậy trên đoạn [0; 5], hàm số đã cho có giá trị gần đúng của giá trị lớn nhất là $f(5) \approx 0{,}67$, giá trị nhỏ nhất là $f(0) = -1$.

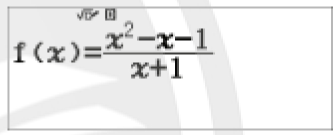
Sử dụng máy tính cầm tay, tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn [2; 8].

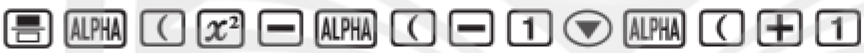
HOẠT ĐỘNG 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có dạng $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0$, $m \neq 0$ và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu) trên một đoạn xác định.

Ví dụ 3. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2-x-1}{x+1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; 4\right]$.

Giải

Sau khi thực hiện các bước tương tự như Ví dụ 1 để vào chương trình **Table**, tiến hành nhập hàm số đã cho bằng cách ấn liên tiếp các phím sau:

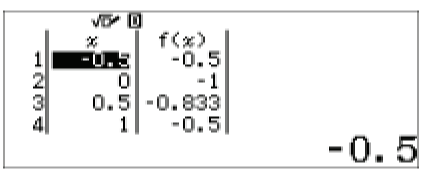


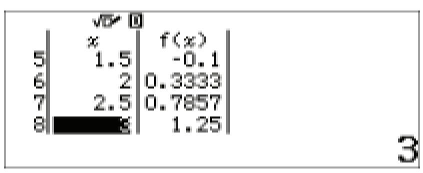


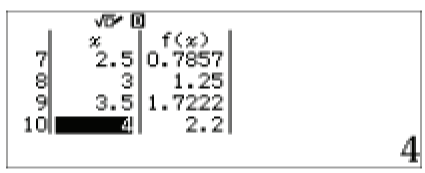
Tiếp đó, ấn phím $\boxed{=}$ để màn hình hiển thị bảng chọn **Table Range** (phạm vi bảng), rồi ấn các phím

để nhập giá trị đầu và cuối của đoạn đang xét, khoảng cách của mỗi bước tăng giá trị.

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ và nhiều lần phím $\boxed{\blacktriangledown}$ để màn hình hiển thị bảng giá trị của hàm số $y = \dfrac{x^2-x-1}{x+1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; 4\right]$ như các hình dưới đây.







Vậy trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; 4\right]$, hàm số đã cho có giá trị gần đúng của giá trị lớn nhất là $f(4) = 2{,}2$, giá trị nhỏ nhất là $f(0) = -1$.

Sử dụng máy tính cầm tay, tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x^2+x+7}{x+1}$ trên đoạn [0; 10].

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Đ

Điểm cực đại

x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Điểm cực tiểu

x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Điểm cực trị

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

Căn bậc hai số học của phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm.

G

Giá trị cực đại

Giá trị của hàm số tại điểm cực đại.

Giá trị cực tiểu

Giá trị của hàm số tại điểm cực tiểu.

Giá trị cực trị

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị.

Giá trị lớn nhất của hàm số

Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập hợp D nếu $f(x) \le M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập hợp D nếu $f(x) \ge m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$.

K

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

Là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm chứa giá trị lớn nhất và đầu mút trái của nhóm chứa giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm.

P

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm

Được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(c_1 - \overline{x})^2 + n_2(c_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k(c_k - \overline{x})^2\right].$$

T

Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = a$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = m$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = m.$$

Tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$, $a \ne 0$, là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\text{hoặc } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

V

Vectơ trong không gian

Là đoạn thẳng có hướng.

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG
Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG
Trình bày bìa: TỐNG THANH THẢO
Minh hoạ: BÙI XUÂN DƯƠNG
Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ
NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – HOÀNG THỊ THU DUNG
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Toán 12, Tập một (Chân trời sáng tạo)
Mã số:
In………bản, (QĐ in số….) Khổ 19 × 26,5 cm.
Đơn vị in:……………………..
Cơ sở in:………………………
Số ĐKXB:
Số QĐXB:......... ngày…. tháng…. năm 20….
In xong và nộp lưu chiểu tháng…. năm 20….
Mã số ISBN: Tập một:
Tập hai:

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Toán 12, Tập một
2. Toán 12, Tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 12
4. Ngữ văn 12, Tập một
5. Ngữ văn 12, Tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 12
7. Tiếng Anh 12
   Friends Global – Student Book
8. Lịch sử 12
9. Chuyên đề học tập Lịch sử 12
10. Địa lí 12
11. Chuyên đề học tập Địa lí 12
12. Giáo dục kinh tế và pháp luật 12
13. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 12
14. Vật lí 12
15. Chuyên đề học tập Vật lí 12
16. Hoá học 12
17. Chuyên đề học tập Hoá học 12
18. Sinh học 12
19. Chuyên đề học tập Sinh học 12
20. Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng
21. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng
22. Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính
23. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính
24. Âm nhạc 12
25. Chuyên đề học tập Âm nhạc 12
26. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 (1)
27. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 (2)
28. Giáo dục quốc phòng và an ninh 12

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn