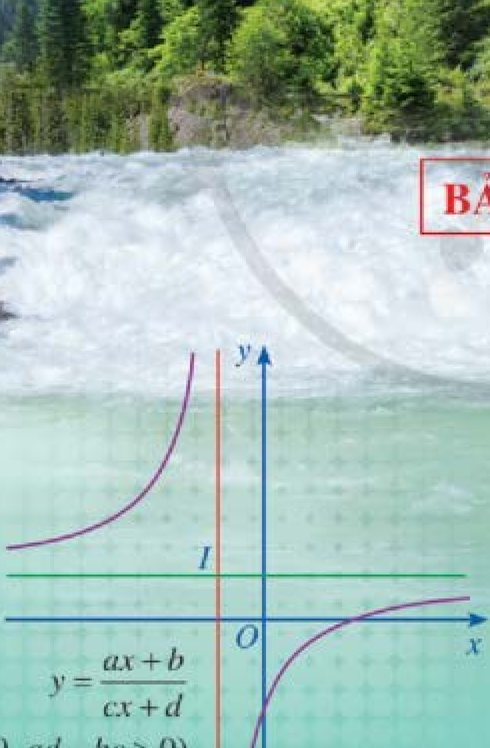
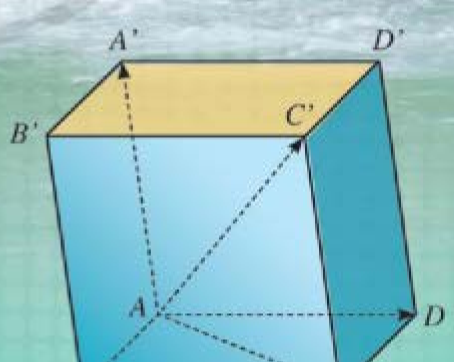
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

Toán 12

TẬP MỘT

BẢN MẪU





CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN - THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA
Môn Toán - Lớp 12
(Theo Quyết định số 1882/QĐ-BGDĐT ngày 29 tháng 6 năm 2023 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Lê Mậu Hải (Chủ tịch), Cao Thị Hà (Phó Chủ tịch), Phạm Đức Tài (Ủy viên, Thư kí).
Các Ủy viên: Phạm Khắc Ban, Nguyễn Hắc Hải, Nguyễn Doãn Phú, Nguyễn Chiến Thắng, Nguyễn Thị Vĩnh Thuyên, Đinh Cao Thượng, Phạm Đình Tùng, Vũ Thị Như Trang.

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

Toán 12

TẬP MỘT

BẢN MẪU

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG
Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học

HOẠT ĐỘNG
Giúp học sinh phân tích, kiến tạo kiến thức mới với sự hướng dẫn của giáo viên

KHÁM PHÁ KIẾN THỨC
Phát hiện kiến thức mới từ hoạt động

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM
Nội dung kiến thức trọng tâm

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG
- Sử dụng những kiến thức vừa học để làm những bài tập cơ bản
- Vận dụng kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề, đặc biệt những vấn đề thực tiễn

LƯU Ý
Những kiến thức, kĩ năng cần lưu ý thêm

TÌM HIỂU THÊM
Giúp học sinh tìm hiểu thêm những kiến thức mới góp phần mở rộng nội dung bài học

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Các em học sinh lớp 12 yêu quý!

Năm học này, chúng ta lại vui mừng gặp nhau qua cuốn sách Toán 12. Sách Toán 12 tiếp tục giúp các em có thêm nhiều hiểu biết về một số yếu tố giải tích (như: ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số; nguyên hàm; tích phân), phương pháp toạ độ trong không gian (như: toạ độ của vectơ trong không gian; phương trình đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu trong không gian). Các em cũng được tiếp tục làm quen với thống kê và xác suất; tiến hành những hoạt động thực hành và trải nghiệm; đặc biệt về những hoạt động tài chính đơn giản; sử dụng phần mềm toán học trong thực hành tính toán và vẽ hình hình học. Qua đó giúp các em hiểu biết thêm những công cụ quan trọng của toán học trong việc giải quyết các vấn đề thực tiễn.

Năm học này cũng là năm học cuối cùng của các em ở cấp trung học phổ thông, sách Toán 12 sẽ giúp các em nhìn nhận lại những học vấn toán học cốt lõi ở những lớp trước, chuẩn bị tốt nhất cho các em ở những kì thi cuối cấp, cũng như bước vào những bậc học cao hơn.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những câu chuyện lí thú về khoa học tự nhiên, về văn hoá và nghệ thuật, kiến trúc, thể thao và du lịch. Từ đó, các em được tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là được "làm giàu" về vốn văn hoá chung và có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học – Đưa bài học vào cuộc sống".

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với các thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học toán và có thêm nhiều niềm vui.

Các tác giả

MỤC LỤC

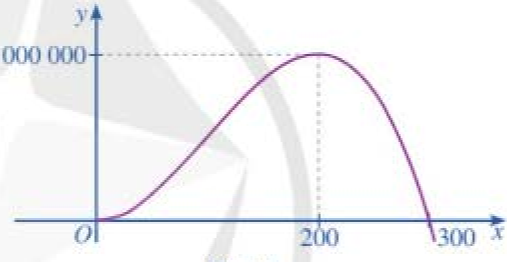
CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: tính đơn điệu của hàm số; giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số; đường tiệm cận của đồ thị hàm số; khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

§1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm $(0 \le x \le 300)$ được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng) và được minh hoạ bằng đồ thị ở *Hình 1*.



Hình 1

Sự thay đổi lợi nhuận theo số sản phẩm sản xuất ra và dấu của đạo hàm y' có mối liên hệ với nhau như thế nào?

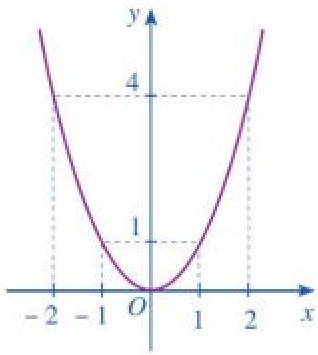
I. NHẬN BIẾT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ BẰNG DẤU CỦA ĐẠO HÀM

1

a) Nêu định nghĩa hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

b) Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị như *Hình 2*.

- Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số đó.
- Xét dấu của đạo hàm $f'(x) = 2x$.



Hình 2

• Nêu mối liên hệ giữa sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2$ và dấu của đạo hàm $f'(x) = 2x$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$, $(0 ; +\infty)$.

• Hoàn thành bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{?}$	$\nearrow$	$+\infty$

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

• Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

• Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y = f(x)$ còn được gọi là *đơn điệu* trên tập $K \subset \mathbb{R}$.

Ví dụ 1 Xét dấu y' rồi tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$y = -2x^2 + 4x + 3.$$

Giải

• Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

• Ta có: $y' = -4x + 4$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$; nghịch biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

1 Xét dấu y' rồi tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Ví dụ 2 Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$$

Giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$;

  $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			6				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-26		

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(3 ; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1 ; 3)$.

2 Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

$$y = x^4 + 2x^2 - 3.$$

2

a) Xác định tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^3$.

b) Xét dấu của đạo hàm $f'(x) = 3x^2$.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

> Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K.

Ví dụ 3 Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 5$.

Giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$;

  $y' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

3 Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty ; 0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$				$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 4 Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$.

Giải

• Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• Ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ với $x \neq 0$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		-4		$-\infty$ ‖ $+\infty$		4		$+\infty$

4 Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

$$y = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(2 ; +\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2 ; 0)$ và $(0 ; 2)$.

Nhận xét

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

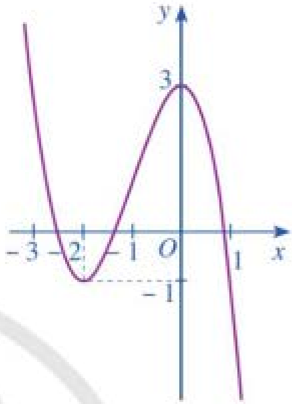
Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

II. ĐIỂM CỰC TRỊ, GIÁ TRỊ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

3 Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$ ở *Hình 3*, hãy so sánh:

a) $f(-2)$ với mỗi giá trị $f(x)$, ở đó $x \in (-3 ; -1)$ và $x \neq -2$;

b) $f(0)$ với mỗi giá trị $f(x)$, ở đó $x \in (-1 ; 1)$ và $x \neq 0$.



Hình 3

Nhận xét

Đối với hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$, ta thấy:

- Tồn tại khoảng $(-3 ; -1)$ chứa điểm -2 sao cho $f(x) > f(-2)$ với mọi $x \in (-3 ; -1)$ và $x \neq -2$.

  Ta nói $x = -2$ là *điểm cực tiểu* của hàm số; $f(-2)$ là *giá trị cực tiểu* của hàm số.

- Tồn tại khoảng $(-1 ; 1)$ chứa điểm 0 sao cho $f(x) < f(0)$ với mọi $x \in (-1 ; 1)$ và $x \neq 0$.

  Ta nói $x = 0$ là *điểm cực đại* của hàm số; $f(0)$ là *giá trị cực đại* của hàm số.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in K, x_1 \in K$.

- x_0 được gọi là một *điểm cực đại* của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a ; b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a ; b)$ và $x \neq x_0$.

  Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số đã cho, kí hiệu là $f_{CĐ}$.

- x_1 được gọi là một *điểm cực tiểu* của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c ; d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c ; d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c ; d)$ và $x \neq x_1$.

  Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT}.

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị*. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là *giá trị cực trị* (hay *cực trị*).

Chú ý

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì người ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 5 Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở *Hình 4*, hãy chỉ ra các điểm cực trị của hàm số đó.

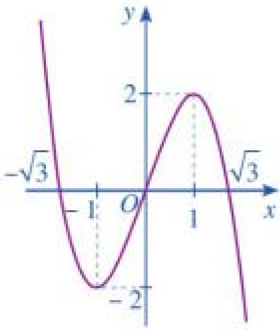
Giải

- Xét khoảng $(-\sqrt{3}\,; 0)$ chứa điểm $x = -1$. Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở *Hình 4*, ta thấy: $f(x) > f(-1)$ với mọi $x \in (-\sqrt{3}\,; 0)$ và $x \neq -1$.

  Vậy $x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

- Xét khoảng $(0\,; \sqrt{3})$ chứa điểm $x = 1$. Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở *Hình 4*, ta thấy: $f(x) < f(1)$ với mọi $x \in (0\,; \sqrt{3})$ và $x \neq 1$.

  Vậy $x = 1$ là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.



Hình 4

4 Quan sát các bảng biến thiên dưới đây và cho biết:

a) x_0 có là điểm cực đại của hàm số $f(x)$ hay không;

b) x_1 có là điểm cực tiểu của hàm số $h(x)$ hay không.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

x	a		x_1		b
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(x_1)$	$\nearrow$	

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a\,; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a\,; x_0)$ và $(x_0\,; b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a\,; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0\,; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a\,; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0\,; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Ví dụ 6 Tìm điểm cực trị của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11.$$

Giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$;

  $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Ví dụ 7 Tìm điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$ với $x \neq -1$;

  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

> **5** Tìm điểm cực trị của mỗi hàm số sau:
>
> a) $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$;
>
> b) $y = \dfrac{3x + 5}{x - 1}$.

Nhận xét: Để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

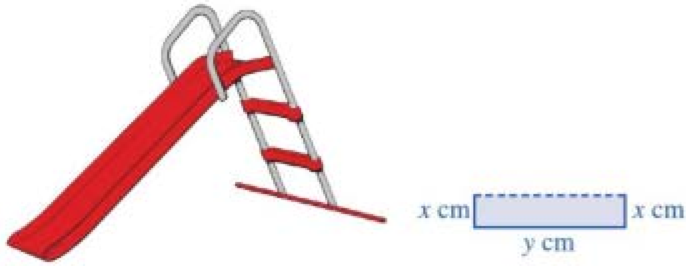
Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, ..., n$) mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

Ví dụ 8 Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (*Hình 5a*) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở *Hình 5b*. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



a) *b)*

Hình 5

a) Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x.

b) Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Giải

a) Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.

Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$.

Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

b) Ta có: $S(x) = -2x^2 + 80x$ với $x \in (0\ ;\ 40)$;

$S'(x) = -4x + 80$;

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20$.

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0		20		40
$S'(x)$		+	0	–	
$S(x)$	0	↗	800	↘	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CĐ} = 800$.

Vậy để cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì $x = 20$ (cm).

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	2	↘		↗	2	↘	
	$-\infty$				1				$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1 ; +\infty)$. B. $(-1 ; 0)$. C. $(-1 ; 1)$. D. $(0 ; 1)$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	2	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				-4		

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng:

A. 2. B. 3. C. -4. D. 0.

3. Tìm các khoảng đơn điệu của mỗi hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 2x^2 - 3$;

b) $y = x^4 - 2x^2 + 5$;

c) $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$;

d) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+1}$.

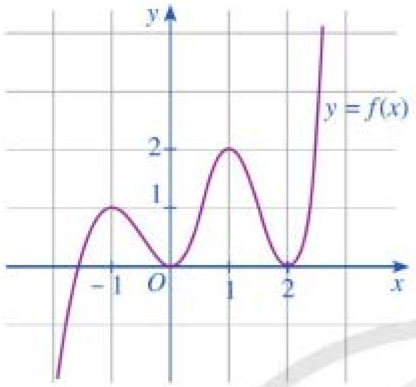
4. Tìm cực trị của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$;

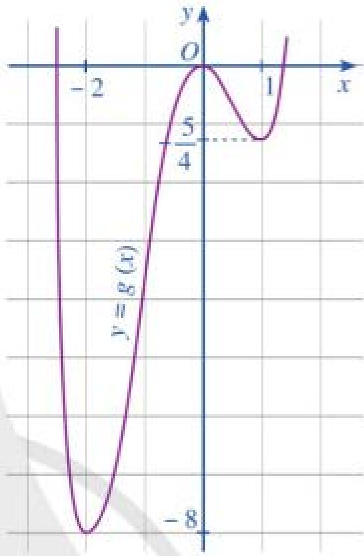
b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;

c) $y = x - \dfrac{1}{x}$.

5. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt được cho ở *Hình 6a*, *Hình 6b*. Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của mỗi hàm số đó.



a)



b)

Hình 6

6. Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0\ ^{o}C \le T \le 30\ ^{o}C$) được tính bởi công thức sau:

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

(Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012)

Hỏi thể tích $V(T)$, $0\ ^{o}C \le T \le 30\ ^{o}C$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

7. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ (s), cho bởi hàm số sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,$$

(v được tính bằng ft/s, 1 feet = 0,3048 m)

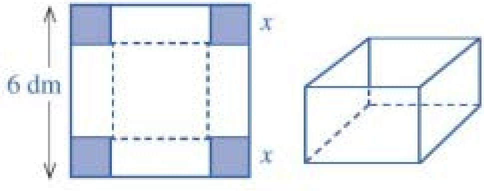
(Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012).

(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble_Space_Telescope)

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

§2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 6 dm. Bác Ánh cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài bằng x (dm), rồi gập tấm nhôm lại như *Hình 7* để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x.



Hình 7

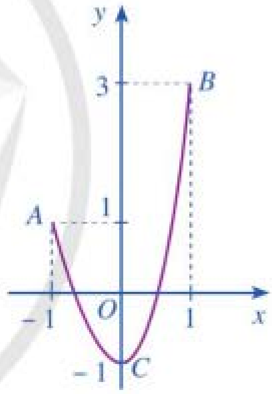
V được tính theo x bởi công thức nào? Có thể tìm giá trị lớn nhất của V bằng cách nào?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1 ; 1]$ và có đồ thị là đường cong ở *Hình 8*. Quan sát đồ thị và cho biết:

a) Điểm nào thuộc đồ thị hàm số có tung độ lớn nhất;

b) Điểm nào thuộc đồ thị hàm số có tung độ nhỏ nhất.



Hình 8

Ta nói: Trên đoạn $[-1 ; 1]$, hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 1$, đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 tại $x = 0$.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

- Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số $y = f(x)$ trên D, kí hiệu $M = \max\limits_{D} f(x)$, nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.
- Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số $y = f(x)$ trên D, kí hiệu $m = \min\limits_{D} f(x)$, nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_1 \in D$ sao cho $f(x_1) = m$.

Chú ý: Khi tìm giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số mà không chỉ rõ tập D thì ta tìm giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

Ví dụ 1 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 1 + x^2$ trên đoạn $[0 ; 2]$.

Giải

Do $0 \leq x^2 \leq 4$ với mọi $x \in [0 ; 2]$ nên $1 \leq 1 + x^2 \leq 5$ với mọi $x \in [0 ; 2]$, tức là $1 \leq f(x) \leq 5$ với mọi $x \in [0 ; 2]$. Ta có: $f(2) = 5$ nên $\max\limits_{[0\,;\,2]} f(x) = 5$; $f(0) = 1$ nên $\min\limits_{[0\,;\,2]} f(x) = 1$.

1 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ trên đoạn $[-3 ; 3]$.

II. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ BẰNG ĐẠO HÀM

2 Cho hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x - 1}$ với $x > 1$.

a) Tính $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng, ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

Ví dụ 2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Giải

- Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$ với $x \in (0 ; +\infty)$.
- Ta có: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$. Khi đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (do $x > 0$).

Ngoài ra $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$		6		$+\infty$

2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = \dfrac{2x - 5}{x - 1}$ trên nửa khoảng $(1 ; 3]$.

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{(0\,;\,+\infty)} f(x) = 6$ tại $x = 3$ và hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất.

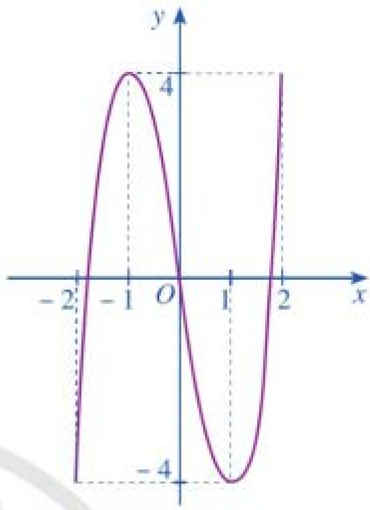
3 Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 6x, x \in [-2\,;\,2]$ có đồ thị là đường cong ở *Hình 9*.

a) Dựa vào đồ thị ở *Hình 9*, hãy cho biết các giá trị $M = \max\limits_{[-2\,;\,2]} f(x)$; $m = \min\limits_{[-2\,;\,2]} f(x)$ bằng bao nhiêu.

b) Giải phương trình $f'(x) = 0$ với $x \in (-2\,;\,2)$.

c) Tính các giá trị của hàm số $f(x)$ tại hai đầu mút -2; 2 và tại các điểm $x \in (-2\,;\,2)$ mà ở đó $f'(x) = 0$.

d) So sánh M (hoặc m) với số lớn nhất (hoặc số bé nhất) trong các giá trị tính được ở câu c.



Hình 9

Nhận xét: Người ta chứng minh được rằng: Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a\,;\,b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a\,;\,b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$ như sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a\,;\,b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.

Bước 3. So sánh các giá trị tìm được ở *Bước 2*.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$.

Ví dụ 3 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3\,;\,2]$;

b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1\,;\,4]$.

Giải

a) • Ta có: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$. Khi đó, trên khoảng $(-3 ; 2)$, $f'(x) = 0$ khi $x = 1$.

• $f(1) = \frac{7}{3}$, $f(-3) = -35$, $f(2) = \frac{5}{3}$.

Vậy $\max\limits_{[-3;2]} f(x) = \frac{7}{3}$ tại $x = 1$,

$\min\limits_{[-3;2]} f(x) = -35$ tại $x = -3$.

b) • Ta có: $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Khi đó, trên khoảng $(1 ; 4)$, $g'(x) = 0$ khi $x = e$.

• $g(1) = 0$, $g(e) = \frac{1}{e}$, $g(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[1;4]} g(x) = \frac{1}{e}$ tại $x = e$, $\min\limits_{[1;4]} g(x) = 0$ tại $x = 1$.

3 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sin 2x - 2x$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ví dụ 4 Với bài toán mở đầu, tìm x (dm) để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.

Giải

Ta thấy độ dài x (dm) của cạnh hình vuông bị cắt phải thoả mãn điều kiện $0 < x < 3$.

Thể tích của khối hộp là $V(x) = x(6 - 2x)^2$ với $0 < x < 3$.

Ta phải tìm $x_0 \in (0 ; 3)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Ta có: $V'(x) = (6 - 2x)^2 - 4x(6 - 2x)$

$= (6 - 2x)(6 - 6x) = 12(3 - x)(1 - x)$.

Trên khoảng $(0 ; 3)$, $V'(x) = 0$ khi $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$ như sau:

x	0		1		3
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0 ; 3)$, hàm số $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16 tại $x = 1$.

Vậy để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất thì $x = 1$ (dm).

Ví dụ 5 Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1 000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2} \text{ (con)},$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*). Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Giải

Xét hàm số $N(t) = 1\,000 + \dfrac{100t}{100 + t^2}$ $(t > 0)$.

Ta có: $N'(t) = \dfrac{100\,.\,(100 + t^2) - 100t\,.\,2t}{(100 + t^2)^2} = \dfrac{100\,.\,(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$.

Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$		$\nearrow$	$1\,005$	$\searrow$	
	$1\,000$				$1\,000$

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0\,;+\infty)$, hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1 005 tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1 005 con.

BÀI TẬP

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x) = \sin x - 2\,023$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1\,;2]$ bằng:

A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(1{,}5)$. D. $f(2)$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$;   b) $f(x)=x-\dfrac{3}{x}$ trên nửa khoảng $(0\,;3]$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$;   b) $f(x)=x^3-12x+1$ trên khoảng $(1\,;+\infty)$.

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2$ trên đoạn $[-1\,;2]$;

b) $f(x)=x^4-2x^3+x^2+1$ trên đoạn $[-1\,;1]$;

c) $f(x)=e^x(x^2-5x+7)$ trên đoạn $[0\,;3]$;

d) $f(x)=\cos 2x+2x+1$ trên đoạn $\left[\dfrac{-\pi}{2};\pi\right]$.

5. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t)=-t^3+6t^2+t+5,$$

trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

6. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t)=300(t^2-t^3)+4 \text{ với } 0\le t\le 0,5.$$

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson)

a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

7. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$$V=k(R-r)r^2 \text{ với } 0\le r<R,$$

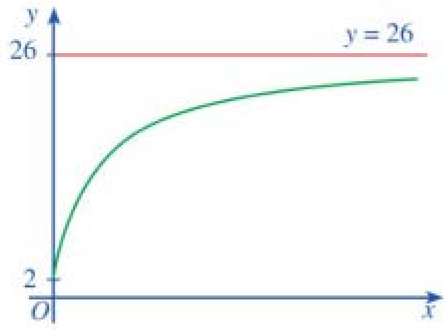
trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*). Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

§3 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Số dân của một thị trấn sau x năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$y = f(x) = \frac{26x+10}{x+5}$$

($f(x)$ được tính bằng nghìn người) (*Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020*). Xem $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0\ ;+\infty)$, đồ thị của hàm số đó là đường cong màu xanh ở *Hình 10*.



Hình 10

Khi $x \to +\infty$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ ngày càng "tiến gần" tới đường thẳng nào?

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

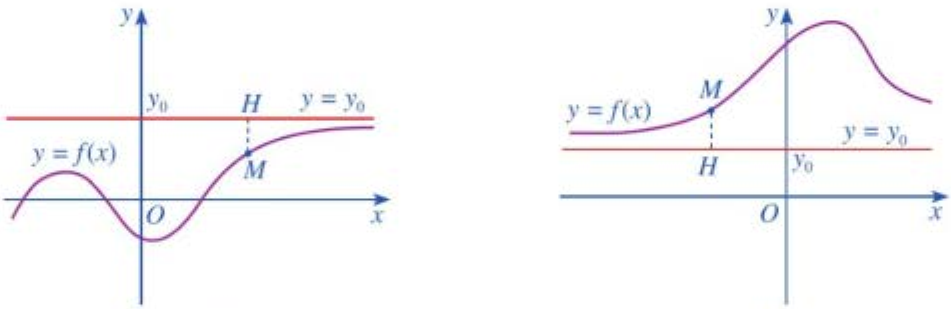
1 Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{26x+10}{x+5}$, với $x \in [0\ ;+\infty)$ có đồ thị là đường cong ở *Hình 10* trong bài toán mở đầu. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Đường thẳng $y = 26$ gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{26x+10}{x+5}$ với $x \in [0\ ;+\infty)$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là *đường tiệm cận ngang* (hay *tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x\,;\,y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = y_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \to +\infty$ (*Hình 11a*) hay $x \to -\infty$ (*Hình 11b*).



a) *b)*

Hình 11

Ví dụ 1 Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2,$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2.$

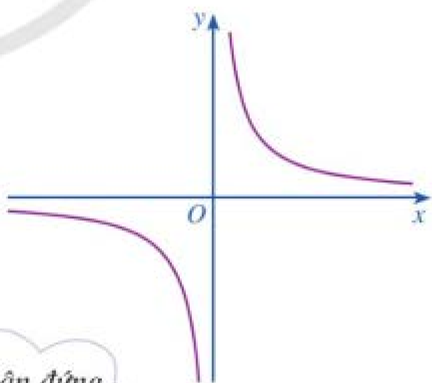
Vậy đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

1 Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$.

II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

2 Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ có đồ thị là đường cong như *Hình 12*.

Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.



Hình 12

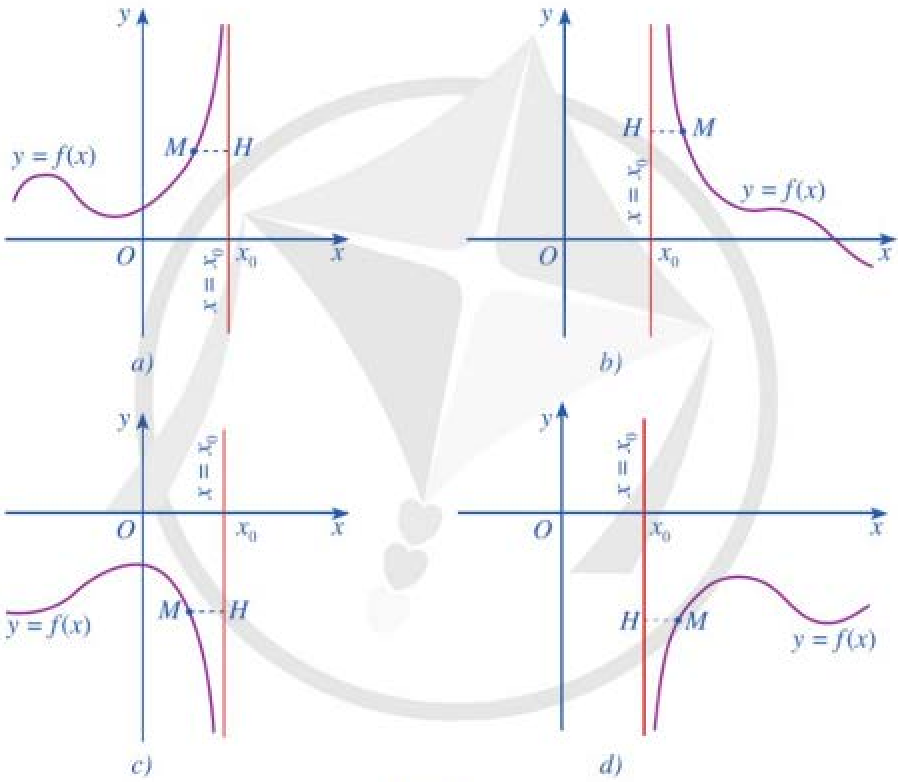
Đường thẳng $x = 0$ gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là *đường tiệm cận đứng* (hay *tiệm cận đứng*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty; \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty; \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty; \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x ; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $x = x_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \to x_0^+$ (*Hình 13b, d*) hay $x \to x_0^-$ (*Hình 13a, c*).



Hình 13

Ví dụ 2 Giải thích vì sao đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$?

Giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

2 Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+3x}{x-5}$.

Ví dụ 3 Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Giải

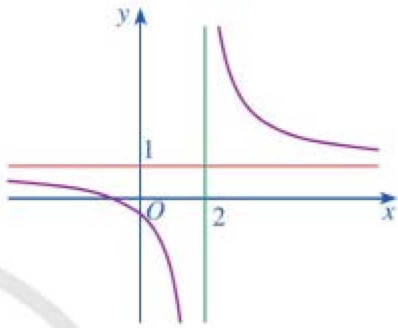
Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$,

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$.

  Vậy đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.



Hình 14

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(1 + \dfrac{3}{x-2}\right) = -\infty$,

  $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(1 + \dfrac{3}{x-2}\right) = +\infty$.

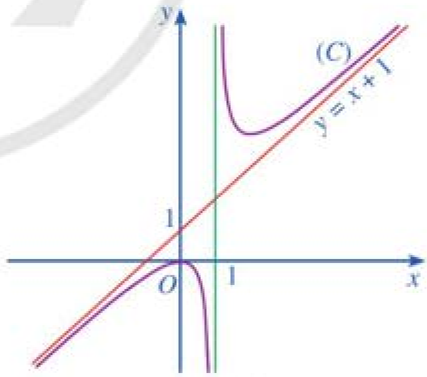
  Vậy đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ và hai đường tiệm cận được cho ở *Hình 14*.

III. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

3 Cho hàm số $y = f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y = x + 1$ (*Hình 15*).

Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)]$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$.



Hình 15

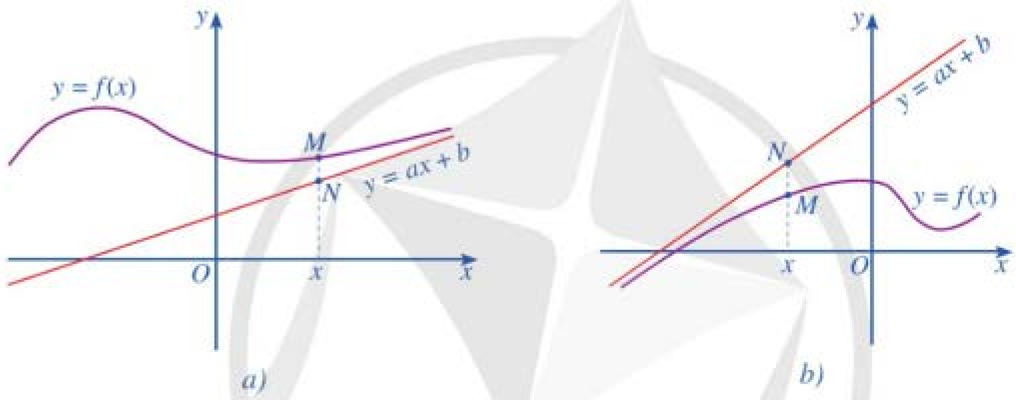
Đường thẳng $y = x + 1$ gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ được gọi là *đường tiệm cận xiên* (hay *tiệm cận xiên*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ và điểm N thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có cùng hoành độ x. Khi đó, độ dài MN tiến tới 0 khi $x \to +\infty$ (*Hình 16a*) hay $x \to -\infty$ (*Hình 16b*).



Hình 16

Ví dụ 4 Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Giải

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2 + 1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

3 Chứng minh rằng đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$y = f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x + 2}.$$

Chú ý: Để xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có thể áp dụng công thức sau:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc } a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

(Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang $y = b$).

Ví dụ 5 Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-2}$.

Giải

Ta có: $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x}{x(x-2)} = 1$

và $b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x-2} = 5$.

Vậy đường thẳng $y = x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$).

Tương tự, do $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = 5$ nên đường thẳng $y = x + 5$ cũng là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to -\infty$).

> **4** Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số
> $$y = f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+3}.$$

Ví dụ 6 Một bể chứa 5 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \dfrac{30t}{200+t}$.

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0\,;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Giải

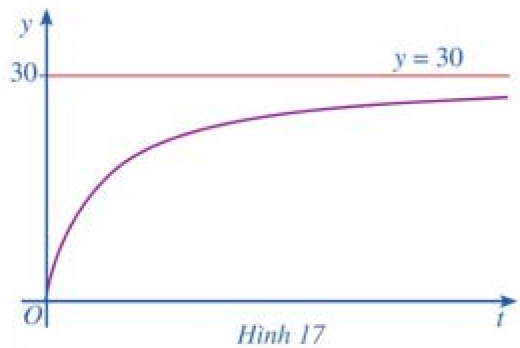
a) Sau t phút, ta có: khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 30 \cdot t = 750t$ (gam); thể tích của lượng nước trong bể là $5\,000 + 25t$ (lít). Vậy nồng độ muối sau t phút là

$$f(t) = \frac{750t}{5\,000+25t} = \frac{30t}{200+t} \text{ (gam/lít)}.$$

b) Ta có:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{30t}{200+t} = \lim_{t\to+\infty}\left(30 - \frac{6\,000}{200+t}\right) = 30.$$

Vậy đường thẳng $y = 30$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ (*Hình 17*).



Hình 17

c) Ta có đồ thị hàm số $y = f(t)$ nhận đường thẳng $y = 30$ làm tiệm cận ngang, tức là khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít). Lúc đó, nồng độ muối trong bể sẽ gần như bằng nồng độ muối trong nước muối được bơm vào bể.

BÀI TẬP

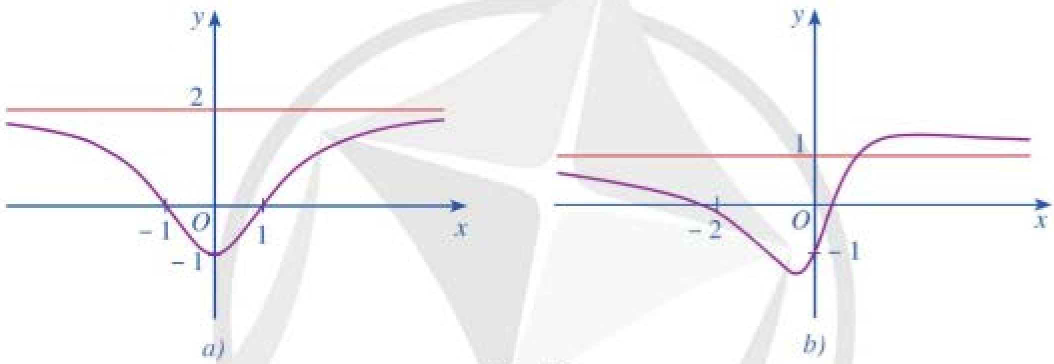
1. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ là:

A. $x = -1$.　　B. $x = -2$.　　C. $x = 1$.　　D. $x = 2$.

2. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+3x+5}{x+2}$ là:

A. $y = x$.　　B. $y = x + 1$.　　C. $y = x + 2$.　　D. $y = x + 3$.

3. Đồ thị hàm số ở *Hình 18a*, *Hình 18b* đều có đường tiệm cận ngang là đường thẳng màu đỏ. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



Hình 18

a) $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1}$;　　b) $y = \dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$;　　c) $y = \dfrac{2x^2-2}{x^2+2}$.

4. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x}{2-x}$;　　b) $y = \dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$;　　c) $y = x - 3 + \dfrac{1}{x^2}$;

5. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200\left(5 - \dfrac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x \geq 1$ (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1\,;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

§4 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Trong 20 phút theo dõi, lưu lượng nước của một con sông được tính theo công thức

$$Q(t) = -\frac{1}{5}t^3 + 5t^2 + 100,$$

trong đó Q tính theo m^3/phút, t tính theo phút, $0 \le t \le 20$ (*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*). Khi lưu lượng nước của con sông lên đến 550 m^3/phút thì cảnh báo lũ được đưa ra.

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Trong thời gian theo dõi, lưu lượng nước của con sông lớn nhất là bao nhiêu? Cảnh báo lũ được đưa ra vào thời điểm nào?

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$.

Trong trường hợp tổng quát, để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
- Tính đạo hàm y' và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên, cực trị của hàm số (nếu có).

Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đơn giản), ...
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ giao với trục hoành tại những điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, giao với trục tung tại điểm có tung độ là $f(0)$ nếu 0 thuộc tập xác định của hàm số đó.

Ví dụ 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

• $y' = 3x^2 - 6x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0 ; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 4$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = 0$.

3) Đồ thị

• Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0 ; 4)$.

• Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

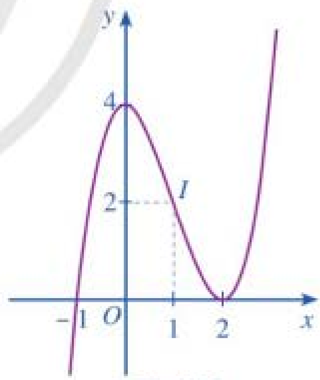
Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại hai điểm $(-1 ; 0)$ và $(2 ; 0)$.

• Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1 ; 0)$, $(2 ; 0)$, $(0 ; 4)$ và $(1 ; 2)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ được cho ở *Hình 19*.



Hình 19

1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

Quan sát đồ thị ở *Hình 19*, ta thấy đồ thị đó có tâm đối xứng là điểm $I(1 ; 2)$.

II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC BA

Sử dụng sơ đồ khảo sát hàm số, ta có thể khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc ba. Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 2 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

Giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

• $y' = -3x^2 + 6x - 4$;

$y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

2 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x - 2$;

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

3) Đồ thị

• Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0\ ;2)$.

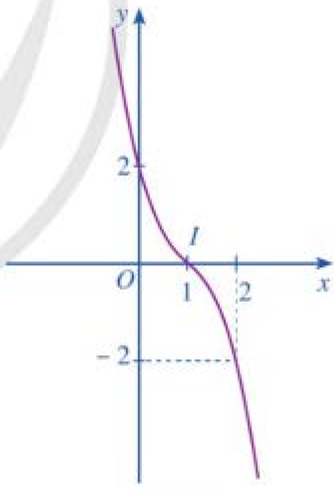
• Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

Giải phương trình $-x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$ ta được $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại điểm $(1\ ;0)$.

• Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1\ ;0)$, $(0\ ;2)$, $(2\ ;-2)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ được cho ở *Hình 20*.



Hình 20

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đó là điểm $I(1\ ;0)$.

Nhận xét: Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\dfrac{b}{3a}\ ;f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$. Hoành độ $-\dfrac{b}{3a}$ của tâm đối xứng đó là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

III. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

Sử dụng sơ đồ khảo sát hàm số, ta có thể khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$. Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 3 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$. Do đó, đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

• $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq 1$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

> **3** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
> $$y = \frac{2x+6}{-x+2}.$$

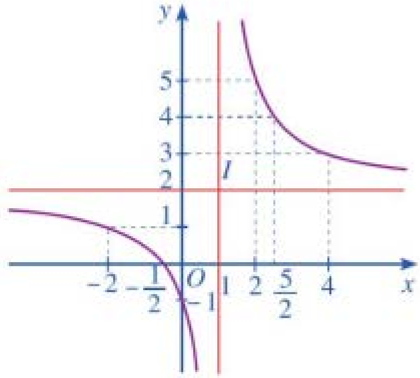
3) Đồ thị

• Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0 ; -1)$.

• Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $\left(-\dfrac{1}{2} ; 0\right)$.

• Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0 ; -1)$, $\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$, $(-2 ; 1)$, $(2 ; 5)$, $\left(\frac{5}{2} ; 4\right)$ và $(4 ; 3)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ được cho ở *Hình 21*.



Hình 21

Quan sát đồ thị ở *Hình 21*, đồ thị đó nhận giao điểm $I(1 ; 2)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Ví dụ 4 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} y = -\infty$. Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$. Do đó, đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

• $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

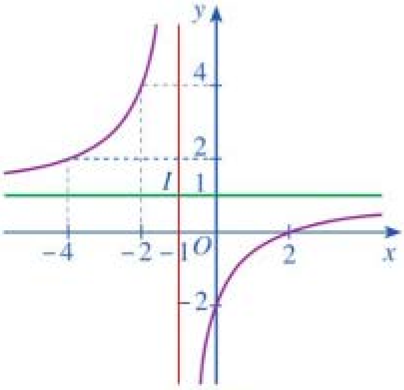
Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

4 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
$$y = \frac{x-3}{-x+2}.$$

3) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: (0 ; – 2).
- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: (2 ; 0).
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm (0 ; – 2), (2 ; 0), (– 2 ; 4) và (– 4 ; 2).
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1\ ;\ 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.



Hình 22

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ được cho ở *Hình 22*.

Nhận xét: Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$ nhận giao điểm $I\left(-\dfrac{d}{c}\ ;\ \dfrac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a \neq 0,\ m \neq 0)$$

Sử dụng sơ đồ khảo sát hàm số, ta có thể khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a \neq 0,\ m \neq 0,\ -\dfrac{n}{m}$ không là nghiệm của đa thức $ax^2+bx+c)$. Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 5 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

Giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

  Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

  $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty}(y - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty}(y - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$. Do đó, đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

• $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(0 ; 1)$ và $(1 ; 2)$.

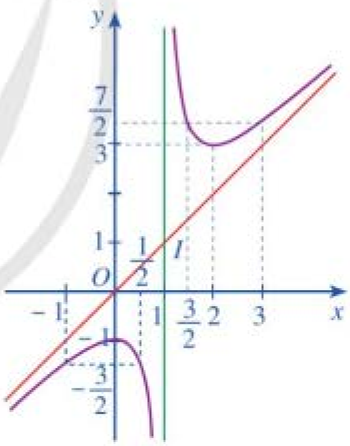
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = -1$; đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = 3$.

3) Đồ thị

• Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0 ; -1)$.

• Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

• Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0 ; -1)$, $\left(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-1 ; -\dfrac{3}{2}\right)$, $(2 ; 3)$, $\left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{7}{2}\right)$ và $\left(3 ; \dfrac{7}{2}\right)$.



Hình 23

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ được cho ở *Hình 23*.

Quan sát đồ thị ở *Hình 23*, đồ thị đó nhận giao điểm $I(1 ; 1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

> **5** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2}{x+1}$.

Ví dụ 6 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 1}{x}$.

Giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y = -x + \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (y + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (y + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Do đó, đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

• $y' = -\dfrac{x^2 + 1}{x^2}$,

$y' < 0$ với mọi $x \neq 0$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$		$-\infty$ ‖ $+\infty$		$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$.

6 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
$$y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}.$$

3) Đồ thị

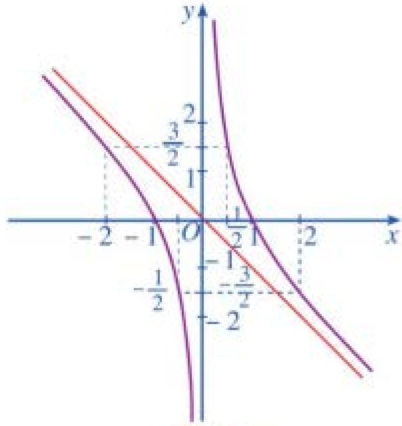
• Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm $(-1 ; 0)$, $(1 ; 0)$.

• Đồ thị hàm số không cắt trục tung.

• Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1 ; 0)$, $(1 ; 0)$, $\left(-2 ; \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(2 ; -\dfrac{3}{2}\right)$.

• Đồ thị hàm số nhận giao điểm $O(0 ; 0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 1}{x}$ được cho ở *Hình 24*.



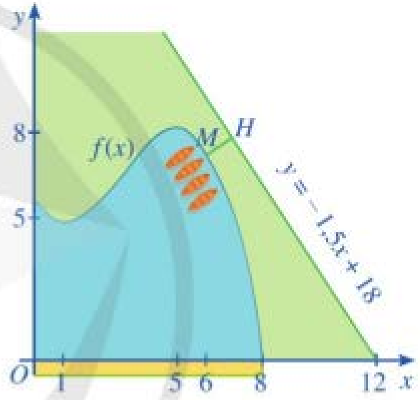
Hình 24

Nhận xét: Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0, \dfrac{-n}{m}$ không là nghiệm của đa thức $ax^2 + bx + c$) nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

IV. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Đạo hàm là một khái niệm toán học xuất phát từ nhiều vấn đề trong khoa học, kĩ thuật và công nghệ. Vì thế, đạo hàm và khảo sát hàm số là một công cụ quan trọng để giải quyết một số bài toán trong thực tiễn. Ta xét một số bài toán cụ thể sau đây.

Ví dụ 7 Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh hoạ (*Hình 25*), nó được giới hạn bởi các trục toạ độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục toạ độ là 100 m (*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).



Hình 25

a) Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài bao nhiêu mét?

b) Tại những điểm nào trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) thì khoảng cách theo phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất? Tìm khoảng cách lớn nhất đó.

c) Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tìm toạ độ của điểm để xây bến thuyền này.

Giải

a) Trong *Hình 25*, đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ cắt tia Ox tại điểm có hoành độ $x = 8$. Vậy đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài 800 m.

b) Ta khảo sát hàm số: $f(x) = \dfrac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \leq x \leq 8$.

$$f'(x) = \frac{1}{10}(-3x^2 + 18x - 15);$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 5.$$

Bảng biến thiên:

x	0		1		5		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5,6 ↘		4,9 ↗		8,1 ↘		0

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{[0\,;\,8]} f(x) = f(5) = 8,1$ tại $x = 5$.

Vậy khoảng cách lớn nhất theo phương thẳng đứng từ một điểm trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) đến bờ hồ đối diện là:

$$100.\left(\max_{[0\,;\,8]} f(x)\right) = 100.f(5) = 100.8,1 = 810 \text{ (m)}$$

và đạt được tại điểm trên đường đi dạo ven hồ cách gốc O một khoảng cách là 500 m.

c) Xét điểm $M(x\,;f(x))$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \le x \le 8$.

Khoảng cách từ điểm $M(x\,;\,f(x))$ đến đường thẳng $y = -1,5x + 18 \Leftrightarrow -1,5x - y + 18 = 0$ là:

$$MH = \frac{\left|-1,5x - \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56) + 18\right|}{\sqrt{(-1,5)^2 + 1}} = \frac{\left|x^3 - 9x^2 + 124\right|}{10\sqrt{3,25}}.$$

Ta khảo sát hàm số: $h(x) = x^3 - 9x^2 + 124$ với $0 \le x \le 8$.

$$h'(x) = 3x^2 - 18x;$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 6.$$

Bảng biến thiên:

x	0		6		8
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	124 ↘		16 ↗		60

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $h(x) > 0$ với $0 \le x \le 8$;

$$\min_{[0\,;\,8]} h(x) = h(6) = 16 \text{ tại } x = 6.$$

Do đó, $\min MH = \min_{[0\,;\,8]} \dfrac{\left|x^3 - 9x^2 + 124\right|}{10\sqrt{3,25}} = \dfrac{1}{10\sqrt{3,25}} \cdot \min_{[0\,;\,8]} h(x) = \dfrac{16}{10\sqrt{3,25}} \approx 0,8875$

và đạt được tại $x = 6$. Khi đó, $f(6) = 7,4$.

Vậy trong mặt phẳng toạ độ Oxy ở *Hình 25*, điểm để xây bến thuyền có toạ độ là $M(6\,;\,7,4)$.

Ví dụ 8 Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t + 10}{t + 5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người) (*Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020*).

a) Tính số dân của thị trấn vào năm 2022 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0\,;\,+\infty)$. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $f(t)$.

c) Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

• Tính tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn đó.

• Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm?

Giải

a) Ta có: $f(52) = \dfrac{26\,.\,52 + 10}{52 + 5} = \dfrac{1\,362}{57} \approx 23,895$ (nghìn người).

Vậy số dân của thị trấn vào năm 2022 khoảng 23 895 người.

b) 1) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực và đường tiệm cận ngang:

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 26$. Do đó, đường thẳng $y = 26$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

• $f'(t) = \dfrac{120}{(t+5)^2} > 0$ với mọi $t \ge 0$.

• Bảng biến thiên:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	2	26

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.

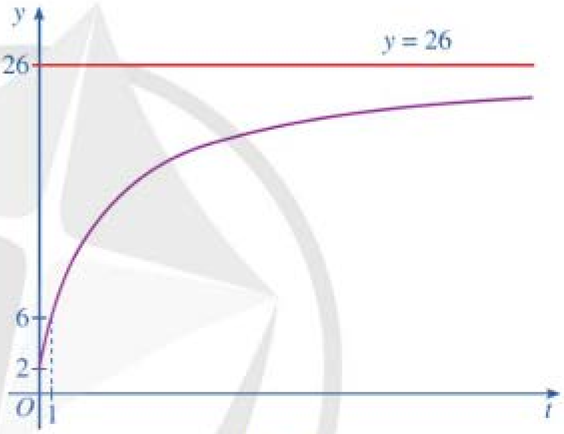
Hàm số không có cực trị.

2) Đồ thị

• Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0 ; 2)$.

• Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1 ; 6)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(t) = \dfrac{26t+10}{t+5}$, $t \geq 0$ được cho ở *Hình 26*.



Hình 26

c) • Tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn là:

$$f'(52) = \frac{120}{(52+5)^2} = \frac{40}{1\,083}.$$

• Ta có:

$$f'(t) = 0{,}192 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0{,}192 \Leftrightarrow (t+5)^2 = 625 \Leftrightarrow t = 20 \text{ (do } t \geq 0).$$

Vậy vào năm 1990, thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm.

Để vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số vào giải quyết một số bài toán trong thực tiễn, trước hết ta cần xây dựng mô hình toán học cho bài toán, trong đó khâu then chốt là đưa ra một hàm số mô phỏng được mối liên hệ giữa các đối tượng, hiện tượng trong bài toán đó.

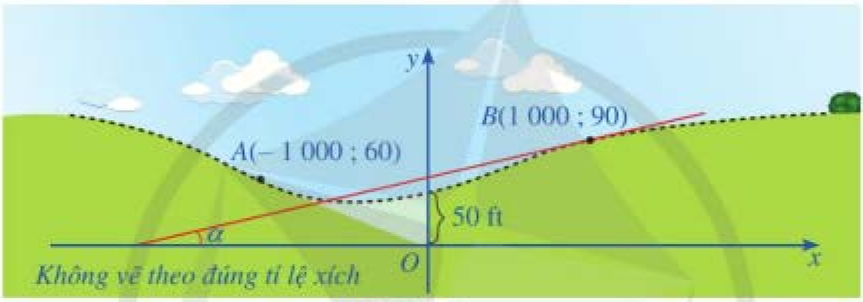
Ở các ví dụ trên, những hàm số như vậy được cho sẵn. Trong các ví dụ dưới đây, ta sẽ tìm hiểu một vài cách xây dựng đơn giản cho những hàm số như thế.

Ví dụ 9 (*Bài toán thiết kế mô hình đường giao thông*) Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet (*Hình 27*), người ta có thể làm như sau:

• Chọn hệ trục toạ độ Oxy với gốc O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox, đơn vị trên mỗi trục toạ độ là feet (1 feet = 0,3048 m).

• Chọn hai vị trí A, B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác định được toạ độ của hai điểm A, B và góc dốc α (đơn vị: độ) tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1\,000\,;\,60)$, $B(1\,000\,;\,90)$ và $\tan\alpha = 0{,}04$ (*Hình 27*) (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

• Trong hệ trục toạ độ Oxy, quan sát đường cong (vẽ bằng nét đứt) mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gợi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ sao cho trong hệ trục toạ độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên đoạn $[-1\,000\,;\,1\,000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: Hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04.



Hình 27

Hãy xác định hàm số bậc ba đó.

Giải

Do đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ đi qua điểm $(0\,;\,50)$ nên $d = 50$, suy ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 50$. Do đồ thị đi qua các điểm $A(-1\,000\,;\,60)$, $B(1\,000\,;\,90)$ nên ta có: $\begin{cases} -1\,000\,000\,000a + 1\,000\,000b - 1\,000c = 10 \\ 1\,000\,000\,000a + 1\,000\,000b + 1\,000c = 40, \end{cases}$

hay $\begin{cases} -100\,000\,000a + 100\,000b - 100c = 1 \\ 100\,000\,000a + 100\,000b + 100c = 4 \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} b = \dfrac{1}{40\,000} \\ 100\,000\,000a + 100c = 1{,}5. \end{cases}$

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3ax^2 + \dfrac{1}{20000}x + c.$

Do hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04 nên

$f'(1\,000) = 3\,000\,000a + \dfrac{1}{20} + c = 0{,}04$, tức là $3\,000\,000a + c = -0{,}01.$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}100\,000\,000a+100c=1{,}5\\3\,000\,000a+c=-0{,}01,\end{cases}\text{ suy ra }\begin{cases}a=-\dfrac{1}{80\,000\,000}\\c=\dfrac{11}{400}.\end{cases}$$

Vậy hàm số bậc ba cần tìm là

$$f(x)=-\frac{1}{80\,000\,000}x^3+\frac{1}{40\,000}x^2+\frac{11}{400}x+50.$$

7 Trong *Ví dụ 9*, góc dốc của con đường trên đoạn [– 1 000 ; 1 000] lớn nhất tại điểm nào?

Ví dụ 10 (*Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kĩ năng*) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kĩ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

- Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau t tuần học ($5 \le t \le 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong *Bảng 1* (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

Bảng 1

- Ta cần chọn hàm số $y=f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở *Bảng 1*, tức là ở hệ trục toạ độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0 ; +\infty)$ "gần" với các điểm $A(5 ; 38)$, $B(10 ; 56)$, $C(15 ; 79)$, $D(20 ; 90)$, $E(25 ; 93)$, $G(30 ; 94)$. Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y=f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=M\in\mathbb{R}$, $M>94$.

  Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở *Bảng 1*. Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t)=\dfrac{at+b}{ct+d}$ $(ac\neq 0)$ cho mục đích đó. Dựa vào *Bảng 1*, ta chọn hàm số

  $$f(t)=\frac{110t-280}{t+2}\ (t>0).$$

a) Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).

b) Xem $y=f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0 ; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

Giải

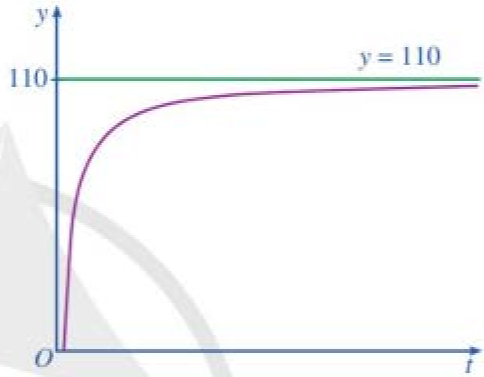
a) Ta có: $f(40) = \dfrac{110 \,.\, 40 - 280}{40 + 2} \approx 98$. Vậy tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần là khoảng 98 từ/phút.

b) Ta có: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{110t - 280}{t + 2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(110 - \dfrac{500}{t+2}\right) = 110$.

Vậy đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$.

c) Do đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$ nên khi t càng lớn thì tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sẽ tiến gần đến mức 110 từ/phút.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = f(t) = \dfrac{110t - 280}{t + 2}$ $(t > 0)$ được cho ở *Hình 28*. Đồ thị đó giao với trục tung tại điểm có toạ độ là $(0 ; -140)$.

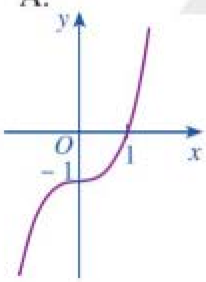


Hình 28

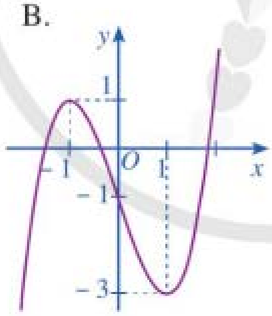
BÀI TẬP

1. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ là đường cong nào trong các đường cong sau?

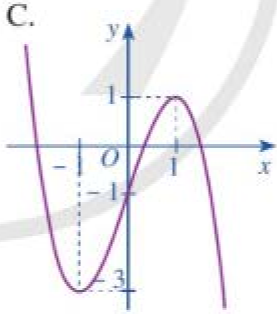
A.



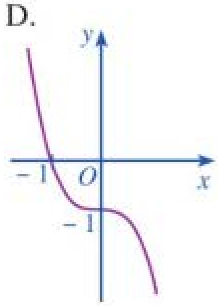
B.



C.



D.



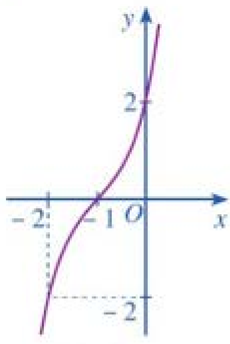
2. Đường cong ở *Hình 29* là đồ thị của hàm số:

A. $y = x^3 + x^2 + 2x + 2$.

B. $y = -x^3 - 4x^2 - x + 2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

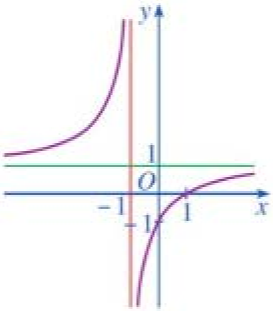
D. $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.



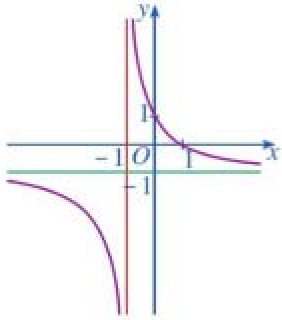
Hình 29

3. Đường cong nào sau đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1-x}{x+1}$?

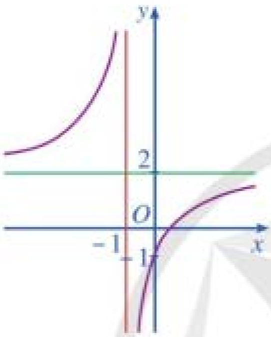
A.



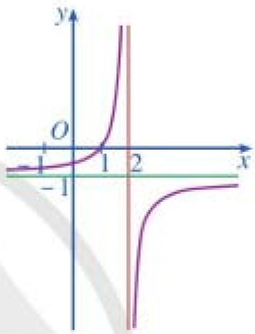
B.



C.



D.



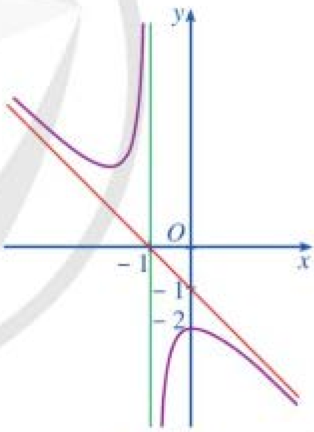
4. Đường cong ở *Hình 30* là đồ thị của hàm số:

A. $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$.

B. $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

D. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.



Hình 30

5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=2x^3-3x^2+1$;

b) $y=-x^3+3x^2-1$;

c) $y=(x-2)^3+4$;

d) $y=-x^3+3x^2-3x+2$;

e) $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+2x+1$;

g) $y=-x^3-3x$.

6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$;

b) $y=\dfrac{-2x}{x+1}$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$;　　　　d) $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{x - 2}$;

e) $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 2}$;　　　　g) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{-x + 2}$.

7. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm

$$h(t) = -0{,}01t^3 + 1{,}1t^2 - 30t + 250,$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét (*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \le t \le 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).

b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \le t \le 50$. Xác định hàm số $v(t)$.

c) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

e) Tìm thời điểm t ($0 \le t \le 50$) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

8. Xét phản ứng hoá học tạo ra chất C từ hai chất A và B:

$$A + B \to C.$$

Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \dfrac{a^2Kt}{aKt + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương (*Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả, Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến, NXB Đại học Sư phạm, 2023*).

a) Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.

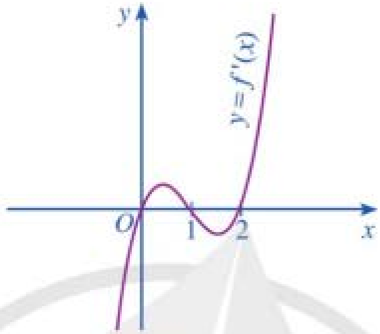
b) Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.

c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \to +\infty$.

d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \to +\infty$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như *Hình 31*.



Hình 31

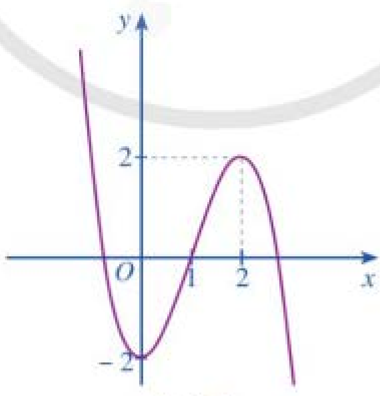
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng:

A. $(-\infty ; 0)$.   B. $(0 ; 1)$.   C. $(0 ; 2)$.   D. $(1 ; 2)$.

2. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+1}$ là:

A. 0.   B. 1.   C. 2.   D. 3.

3. Hàm số nào có đồ thị như *Hình 32*?



Hình 32

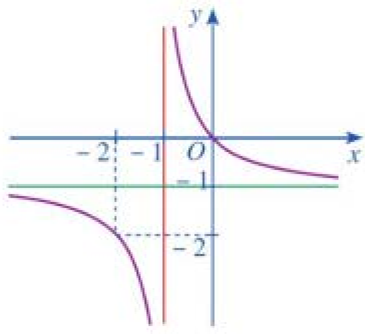
A. $y = -x^3 + 3x - 2$.   B. $y = -x^3 - 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.   D. $y = x^3 - 3x - 2$.

4. Đường cong ở *Hình 33* là đồ thị của hàm số nào sau đây?

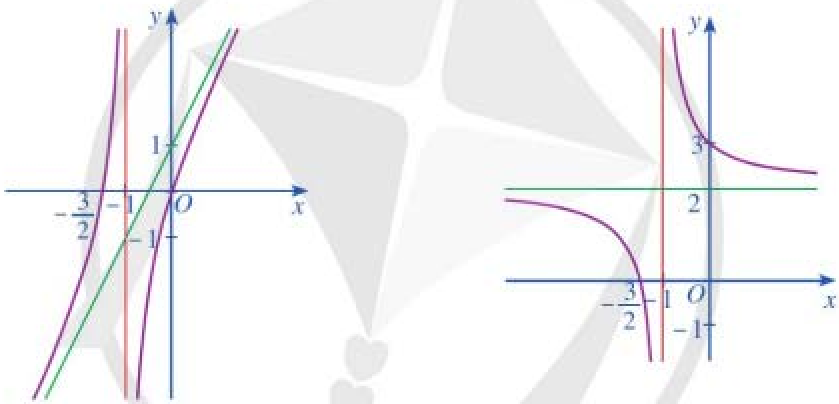
A. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.　　B. $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

C. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.　　D. $y = \dfrac{-x}{x+1}$.



Hình 33

5. Các đồ thị hàm số ở *Hình 34a*, *Hình 34b* đều có đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang (hoặc tiệm cận xiên). Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



a)　　b)

Hình 34

a) $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$;　　b) $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$;　　c) $y = \dfrac{2x^2+3x}{x+1}$.

6. Tìm các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{5x+1}{3x-2}$;　　b) $y = \dfrac{2x^3-3x}{x^3+1}$;　　c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

7. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = x - 3 + \dfrac{1}{x^2}$;　　b) $y = \dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$;　　c) $y = \dfrac{2x^2-x+3}{2x+1}$.

8. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x)=2x^3-6x$ trên đoạn $[-1\ ;\ 3]$;

b) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ trên đoạn $[1\ ;\ 5]$;

c) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ trên đoạn $[0\ ;\ 3]$;

d) $f(x)=2\sin 3x+7x+1$ trên đoạn $\left[\dfrac{-\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

9. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+2$;

b) $y=-x^3+3x^2-6x$;

c) $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$;

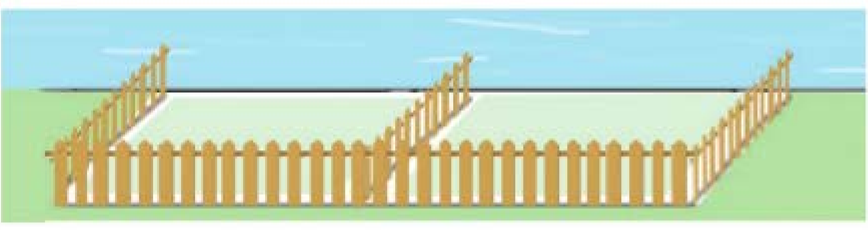
d) $y=\dfrac{x}{2x+3}$;

e) $y=\dfrac{x^2+2x+4}{x}$;

g) $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$.

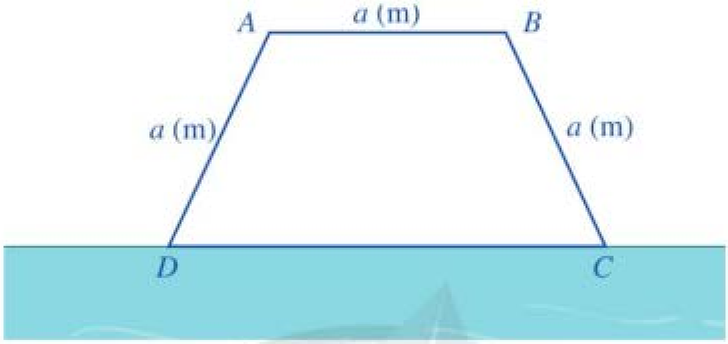
10. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2. Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

11. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (*Hình 35*). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



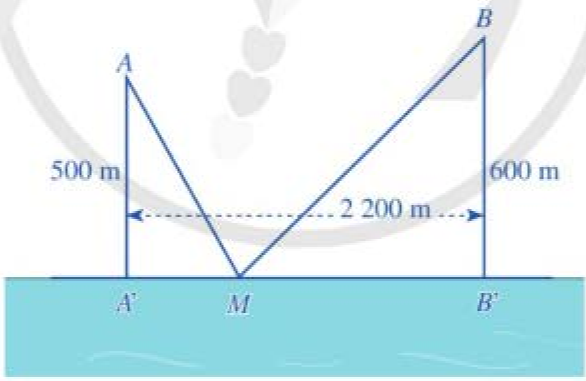
Hình 35

12. Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như *Hình 36* (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Hình 36

13. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2\ 200$ m (*Hình 37*). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hình 37

14. Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

CHỦ ĐỀ 1. MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ THUẾ

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Một số khái niệm cơ bản về thuế

(*Nguồn tham khảo: Hiến pháp năm 2013; Luật số 14/2008/QH12 và Luật số 32/2013/QH13 về thuế thu nhập doanh nghiệp; Luật số 38/2019/QH14 và Luật số 106/2016/QH13*)

a) Thuế là những khoản tài chính mà nhà nước quy định các tổ chức, cá nhân khi có đủ điều kiện phải có nghĩa vụ nộp cho nhà nước, góp phần đảm bảo ngân sách nhà nước, đáp ứng nhu cầu chi tiêu và thực hiện chức năng quản lí kinh tế – xã hội của nhà nước. Như vậy, thuế là khoản thu nộp mang tính bắt buộc mà các tổ chức hoặc cá nhân phải nộp cho nhà nước khi có đủ những điều kiện nhất định.

b) Do thuế là một khoản thu quan trọng bậc nhất của ngân sách nhà nước nên thuế có vai trò đặc biệt quan trọng đối với mỗi quốc gia và nhà nước. Vì vậy, khi tham gia giao thông, chúng ta thường gặp các biểu ngữ như: *"Nộp thuế là quyền lợi và nghĩa vụ của mọi công dân"*. Đối với nước ta, vai trò của thuế được thể hiện ở những khía cạnh sau:

• Thuế đảm bảo phúc lợi xã hội cho các đối tượng chính sách và đồng thời là nguồn lực quan trọng để triển khai xây dựng hạ tầng xã hội như điện, đường, trường, trạm, ... trên cả nước phục vụ nhu cầu thiết yếu của người dân.

• Thuế phân bổ, cân bằng lại thu nhập, làm giảm, hạn chế khoảng cách giàu nghèo trong xã hội hiện nay. Bởi lẽ, thuế đánh chủ yếu vào những đối tượng có thu nhập, thu nhập cao và ngược lại nhà nước luôn có chính sách miễn, giảm thuế cho các đối tượng có thu nhập thấp, đối tượng chính sách, ...

• Thuế tăng cường phát triển kinh tế – xã hội và cuộc sống của người dân. Đồng thời thuế cũng đảm bảo sự cạnh tranh công bằng, bình đẳng trong xã hội nói chung.

c) Căn cứ vào đối tượng đánh thuế, ta có thể phân loại thuế thành các nhóm thuế phổ biến như sau:

• Các loại thuế được đánh thuế trên tài sản, điển hình như thuế sử dụng đất, thuế xuất khẩu, thuế nhập khẩu, thuế tiêu thụ đặc biệt, thuế giá trị gia tăng, thuế bảo vệ môi trường, …

• Các loại thuế đánh vào thu nhập, thực hiện đối với những đối tượng có giá trị thặng dư phát sinh từ tài sản, điển hình như thuế thu nhập doanh nghiệp và thuế thu nhập cá nhân.

Ví dụ 1 Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \le 2\,000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2\,000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1\,440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Tìm mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó *(Nguồn: Nguyễn Huy Hoàng (Chủ biên), Hướng dẫn giải bài tập Toán Cao cấp cho các nhà kinh tế, phần 2: Giải tích toán học, Nhà xuất bản Thống kê 2007)*.

Giải

Khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \le 2\,000$), lợi nhuận doanh nghiệp thu được là $h(x) = (2\,000x - x^2) - (x^2 + 1\,440x + 50) - tx$

$$= -2x^2 + (560 - t)x - 50, \text{ với } 0 < x \le 2\,000.$$

Xét hàm $h(x) = -2x^2 + (560 - t)x - 50$, với $0 < x \le 2\,000$.

Ta có: $h'(x) = -4x + (560 - t)$,

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{560 - t}{4} \in (0\,;\,2\,000).$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0		$\frac{560-t}{4}$		$2\,000$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$h\left(\frac{560-t}{4}\right)$	$\searrow$	

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{[1\,;\,2000]} h(x) = h\left(\dfrac{560-t}{4}\right)$ tại $x = \dfrac{560-t}{4}$. Khi đó, số tiền thuế thu được từ doanh nghiệp là $k(t) = \left(\dfrac{560-t}{4}\right).t = \dfrac{(560-t)t}{4}$.

Ta có: $k(t) = \left(\dfrac{560-t}{4}\right).t = -\dfrac{1}{4}(t-280)^2 + 19\,600 \le 19\,600,\ \forall t \in (0\,;\,300)$.

Vì vậy, ta có: $\max\limits_{(1\,;\,300)} k(t) = 19\,600$ tại $t = 280$. Khi đó, $x = 70$ (sản phẩm).

Vậy mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất là $t = 280$. Khi đó, mức thuế phụ thu là 2 800 000 đồng/ sản phẩm, doanh nghiệp sản xuất và bán hết 70 sản phẩm.

Sau đây, chúng ta sẽ tìm hiểu sâu hơn hai loại thuế là: thuế thu nhập cá nhân, thuế giá trị gia tăng.

2. Một số khái niệm cơ bản về thuế thu nhập cá nhân

(*Nguồn tham khảo: Luật số 04/2007/QH12 và Luật số 26/2012/QH13 về thuế thu nhập cá nhân*)

a) *Thuế thu nhập cá nhân* (gọi tắt là thuế TNCN) là khoản tiền mà người có thu nhập cá nhân phải nộp vào ngân sách nhà nước. Khoản tiền thuế này được tính trên thu nhập của người nộp thuế sau khi đã trừ các khoản thu nhập được miễn thuế và các khoản được giảm trừ theo quy định của pháp luật. Thông thường, các khoản được giảm trừ bao gồm:

- Giảm trừ bản thân;
- Giảm trừ người phụ thuộc.

b) Thuế thu nhập cá nhân có những đặc điểm sau:

- Thuế TNCN là thuế trực thu, tức là nhà nước sẽ trực tiếp thu một phần thu nhập của người nộp thuế và đưa vào ngân sách. Vì vậy, người nộp thuế *không thể chuyển giao* các khoản thuế của mình sang cho người khác.

- Việc đánh thuế TNCN thường áp dụng theo nguyên tắc thuế suất luỹ tiến từng phần, có nghĩa là áp dụng các thuế suất tăng dần đối với các nhóm đối tượng chịu thuế hoặc toàn bộ các đối tượng chịu thuế. Điều này nghĩa là thu nhập càng cao thì thuế suất sẽ càng cao.

c) Để tính thuế thu nhập cá nhân, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Xác định các khoản *thu nhập chịu thuế*, chẳng hạn các khoản thu nhập sau: từ kinh doanh; từ tiền lương, tiền công; từ đầu tư vốn, chuyển nhượng vốn; từ chuyển nhượng bất động sản; từ trúng thưởng; từ bản quyền; từ nhận thừa kế; từ nhận quà tặng.

Chú ý

Pháp luật cũng quy định các khoản *thu nhập miễn thuế*, chẳng hạn: Khoản tiền lương làm thêm giờ, làm việc ban đêm được trả cao hơn so với tiền lương làm việc trong thời gian hành chính.

Bước 2. Xác định các khoản *giảm trừ*. Các khoản giảm trừ bao gồm:

+ Giảm trừ gia cảnh đối với bản thân người nộp thuế.

Chẳng hạn: Mức giảm trừ gia cảnh năm 2023 được thực hiện theo Nghị quyết 954/2020/UBTVQH14 là 11 triệu đồng/tháng (hay 132 triệu đồng/năm) đối với người nộp thuế; 4,4 triệu đồng/tháng đối với mỗi người phụ thuộc.

+ Giảm trừ các khoản đóng bảo hiểm, đóng góp từ thiện, khuyến học, nhân đạo và quỹ hưu trí tự nguyện.

Bước 3. Xác định thu nhập tính thuế theo công thức sau:

Thu nhập tính thuế = Thu nhập chịu thuế – Các khoản giảm trừ (1)

Như chúng ta đã biết, *thuế suất* thuế thu nhập cá nhân là tỉ lệ phần trăm dùng để tính số thuế phải nộp căn cứ vào phần thu nhập tính thuế của mỗi người. Chẳng hạn, theo Nghị quyết 954/2020/UBTVQH14, biểu thuế luỹ tiến từng phần năm 2023 được quy định như sau:

Bậc thuế	Phần thu nhập tính thuế/năm (triệu đồng)	Phần thu nhập tính thuế/tháng (triệu đồng)	Thuế suất (%)
1	Đến 60	Đến 5	5
2	Trên 60 đến 120	Trên 5 đến 10	10
3	Trên 120 đến 216	Trên 10 đến 18	15
4	Trên 216 đến 384	Trên 18 đến 32	20
5	Trên 384 đến 624	Trên 32 đến 52	25
6	Trên 624 đến 960	Trên 52 đến 80	30
7	Trên 960	Trên 80	35

Bảng 1

Bước 4. Căn cứ vào công thức (1) và *Bảng 1*, xác định mức thuế suất mà thu nhập tính thuế phải chịu.

Bước 5. Xác định thuế thu nhập cá nhân cần nộp theo công thức sau:

Thuế thu nhập cá nhân cần nộp = Thu nhập tính thuế × *Thuế suất* (2)

Ví dụ 2 Năm 2022, anh Chung làm việc cho một công ty công nghệ với mức thu nhập chịu thuế đều đặn là 25 triệu/tháng và có hai con nhỏ dưới 10 tuổi. Vào tháng 10/2022, anh Chung có thêm khoản thu nhập cá nhân là 100 triệu đồng từ bản quyền sáng chế. Tính số thuế thu nhập cá nhân mà anh Chung phải nộp trong năm 2022.

Giải

Trong năm 2022, ta thấy:

+ Thu nhập chịu thuế của anh Chung là:

$$25 \cdot 12 + 100 = 400 \text{ (triệu đồng)}.$$

+ Do anh Chung được giảm trừ cho bản thân là 11 triệu đồng/tháng và được giảm trừ cho mỗi con nhỏ là 4,4 triệu đồng/tháng nên các khoản giảm trừ của anh Chung là:

$$(11 + 2 \cdot 4{,}4) \cdot 12 = 237{,}6 \text{ (triệu đồng)}.$$

Suy ra thu nhập tính thuế của anh Chung trong năm 2022 là:

$$400 - 237{,}6 = 162{,}4 \text{ (triệu đồng)}.$$

Với mức thu nhập tính thuế như trên, anh Chung phải chịu thuế suất là 15%.

Vậy số thuế thu nhập cá nhân mà anh Chung phải nộp trong năm 2022 là:

$$162{,}4 \cdot 15\% = 24{,}36 \text{ (triệu đồng)}.$$

3. Một số khái niệm cơ bản về thuế giá trị gia tăng

(Nguồn tham khảo: Luật số 13/2008/QH12 và Luật số 31/2013/QH13 về thuế giá trị gia tăng)

a) *Thuế giá trị gia tăng* (tiếng Anh: value-added tax, gọi tắt là VAT) là thuế tính trên giá trị tăng thêm của hàng hoá, dịch vụ phát sinh trong quá trình từ sản xuất, lưu thông đến tiêu dùng (Theo Điều 2, Luật Thuế giá trị gia tăng 2008, sửa đổi năm 2013, 2016).

Như vậy, bản chất của thuế giá trị gia tăng là một loại thuế thu gián tiếp. Các nhà sản xuất, kinh doanh và cung cấp dịch vụ là người nộp thuế nhưng người tiêu dùng mới là người chịu thuế thông qua giá cả hàng hoá dịch vụ.

Chẳng hạn: Hoá đơn thanh toán cho một người mua một chiếc áo sơ mi ở một cửa hàng có dạng:

Giá sản phẩm:	200 000 đồng
Thuế VAT:	20 000 đồng
Tổng cộng:	220 000 đồng

Như vậy, người mua đã chịu thuế giá trị gia tăng (20 000 đồng) thông qua giá cả hàng hoá, dịch vụ (200 000 đồng).

b) Ở Việt Nam, thuế giá trị gia tăng được quy định ở mức thuế suất 10% đối với hầu hết các hàng hoá, dịch vụ.

Ví dụ 3 (Tính giá bán bao gồm thuế giá trị gia tăng – VAT):

Bác An muốn mua một thiết bị nội thất có giá là 15 triệu đồng (trước thuế). Giả sử thuế VAT là 10%. Tính số tiền bác An phải trả để mua thiết bị nội thất này.

Giải

Ta có: thuế VAT = $\frac{10}{100} \times 15\,000\,000 = 1\,500\,000$ (đồng).

Vậy số tiền bác An phải trả để mua thiết bị nội thất đó là:

$$15\,000\,000 + 1\,500\,000 = 16\,500\,000 \text{ (đồng).}$$

Như ta đã biết, trong nhiều trường hợp khi thanh toán cho một hàng hoá, cửa hàng giảm giá cho khách hàng. Phần giảm giá này còn được gọi là *chiết khấu* và thường cho ở dạng một số phần trăm nhất định của giá niêm yết. Do đó,

Giá bán của một hàng hoá = Giá niêm yết – Phần được chiết khấu.

Ví dụ 4 (Bài toán có chứa chiết khấu, phí dịch vụ và thuế VAT):

Một nhóm khách hàng dùng bữa tối tại một nhà hàng với giá niêm yết 2,3 triệu đồng. Biết rằng bữa tối đó có mức chiết khấu là 10%, phí dịch vụ là 7% và thuế VAT là 10%. Tính tổng tiền mà nhóm khách hàng đó phải thanh toán cho nhà hàng (làm tròn kết quả đến hàng trăm đồng).

Giải

Ta có: Chiết khấu $= \dfrac{10}{100} \times 2\,300\,000 = 230\,000$ (đồng).

Phí dịch vụ $= \dfrac{7}{100} \times$ (Giá niêm yết – Chiết khấu)

$= \dfrac{7}{100} \times (2\,300\,000 - 230\,000) = 144\,900$ (đồng).

Thuế VAT $= \dfrac{10}{100} \times$ (Giá niêm yết – Chiết khấu + Phí dịch vụ)

$= \dfrac{10}{100} \times (2\,300\,000 - 230\,000 + 144\,900) = 221\,490$ (đồng).

Do đó:

Tổng tiền thanh toán = Giá niêm yết – Chiết khấu + Phí dịch vụ + Thuế VAT

$= 2\,300\,000 - 230\,000 + 144\,900 + 221\,490 = 2\,436\,390 \approx 2\,436\,400$ (đồng).

Vậy tổng tiền mà nhóm khách hàng đó phải thanh toán cho nhà hàng là 2 436 400 (đồng).

Chú ý: Ta có các quy tắc sau:

Phí dịch vụ = (% phí dịch vụ) × (Giá niêm yết – Chiết khấu);
Thuế VAT = (% thuế VAT) × (Giá niêm yết – Chiết khấu + Phí dịch vụ);
Tổng tiền thanh toán = Giá niêm yết – Chiết khấu + Phí dịch vụ + Thuế VAT.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

Thực hành tính toán thuế thu nhập cá nhân và thuế giá trị gia tăng.

Tiến trình tổ chức các hoạt động bao gồm: phần chuẩn bị; phần thực hiện; phần tổng kết.

1. Phần chuẩn bị

1 Giáo viên thực hiện nhiệm vụ sau: Chia lớp thành những nhóm học sinh và giao nhiệm vụ các nhóm tìm hiểu thông tin về thuế thu nhập cá nhân và thuế giá trị gia tăng ở nước ta, đặc biệt là cách tính thuế thu nhập cá nhân và thuế giá trị gia tăng.

2 Mỗi nhóm học sinh trao đổi, thảo luận để xác định rõ nhiệm vụ của nhóm và thực hành tính toán thuế thu nhập cá nhân và thuế giá trị gia tăng.

a) Nhiệm vụ 1: Tính thuế thu nhập cá nhân

Thống nhất các công việc cần làm sau đây:

• Đưa ra tình huống giả định về mức thu nhập chịu thuế đều đặn hàng tháng và giảm trừ gia cảnh hàng tháng của một người nào đó, đồng thời đưa ra tình huống giả định về thu nhập chịu thuế đột xuất trong năm của người đó.

• Tính thuế thu nhập cá nhân cho người đó ở năm nói trên.

b) Nhiệm vụ 2: Tính thuế giá trị gia tăng

Thống nhất các công việc cần làm sau đây:

• Chọn một cửa hàng (hoặc siêu thị) và xác định giá của năm loại hàng hoá ở cửa hàng đó.

• Tính thuế giá trị gia tăng cho mỗi loại hàng hoá đã chọn.

• Tính tổng số tiền phải thanh toán khi mua mỗi loại hàng hoá đó.

2. Phần thực hiện

• Báo cáo về tính thuế thu nhập cá nhân.

• Báo cáo về tính thuế giá trị gia tăng.

3. Phần tổng kết

3 Làm việc chung cả lớp để thực hiện các nhiệm vụ sau:

• Các nhóm báo cáo về tính thuế thu nhập cá nhân và tính thuế giá trị gia tăng của nhóm. Từ đó, cả lớp góp ý cho hai báo cáo của mỗi nhóm.

• Tổng kết và rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

• Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

• Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

• Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

• Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

CHƯƠNG II TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: vectơ và các phép toán vectơ trong không gian; toạ độ của vectơ trong không gian; biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ.

§1 VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Các mũi tên chỉ đường trong khu tham quan vườn thú (*Hình 1*) gợi nên hình ảnh các vectơ trong không gian.

Vectơ trong không gian là gì?
Các phép toán về vectơ trong không gian được thực hiện như thế nào?

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)
Hình 1

I. KHÁI NIỆM VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1 Trong mặt phẳng, hãy nêu định nghĩa:

a) Vectơ, giá và độ dài của vectơ, hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng;

b) Vectơ-không;

c) Hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau.

Tương tự như trong mặt phẳng, ta có khái niệm vectơ trong không gian:

> Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý

• Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

• Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Các khái niệm có liên quan đến vectơ trong không gian như: giá của vectơ, độ dài của vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ-không, hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau, ... được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

Ví dụ 1 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$;

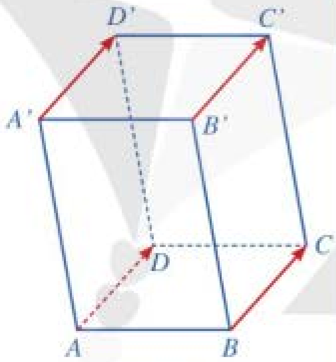
b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Giải. (*Hình 2*)

a) Do các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{A'D'}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $AD = BC = B'C' = A'D'$ (tính chất hình hộp) nên

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'D'}$.

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{A'D'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$.



Hình 2

1 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$;

b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

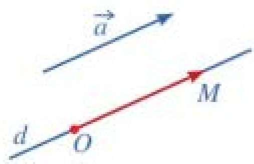
b) Do các vectơ $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{C'B'}$, $\overrightarrow{D'A'}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $AD = CB = C'B' = D'A'$ (tính chất hình hộp) nên ba vectơ $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{C'B'}$, $\overrightarrow{D'A'}$ là ba vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Chú ý: Cho điểm O và vectơ $\vec{a}$. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm M trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Để xác định điểm M, ta làm như sau (*Hình 3*):

• Qua O kẻ đường thẳng d song song hoặc trùng với giá của vectơ $\vec{a}$.

• Lấy điểm M trên đường thẳng d sao cho hai vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}$ là cùng hướng và độ dài đoạn thẳng OM bằng độ dài vectơ $\vec{a}$.



Hình 3

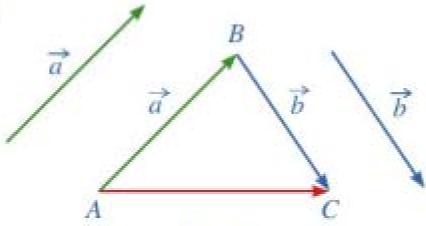
II. CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

2 Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý.

a) Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

b) Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ nào trong *Hình 4*?



Hình 4

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là *tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Chú ý

- Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ*.
- Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, chẳng hạn: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, cộng với vectơ-không.
- Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian, ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vectơ trong mặt phẳng.

Đối với vectơ trong không gian, ta cũng có các quy tắc sau:

- Với ba điểm A, B, C trong không gian, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc ba điểm*);
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc hình bình hành*).

Ví dụ 2 Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

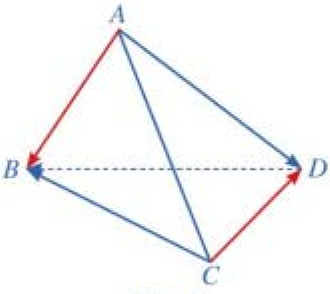
Giải. (*Hình 5*)

Theo quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$



Hình 5

2 Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

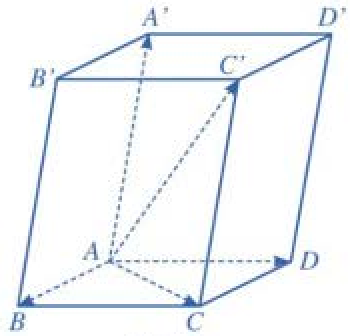
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.$$

3 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (*Hình 6*).

Tìm liên hệ giữa: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC'}$.

Từ đó, hãy suy ra rằng

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}.$$



Hình 6

> Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì
> $$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'} \text{ (Quy tắc hình hộp).}$$

Ví dụ 3 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (*Hình 6*). Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AA'}$.

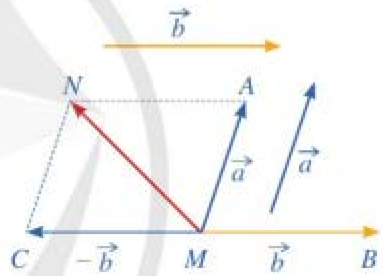
Do đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

> **3** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:
> $$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'D}.$$

4 Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm M tuỳ ý.

a) Vẽ $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=-\vec{b}$.

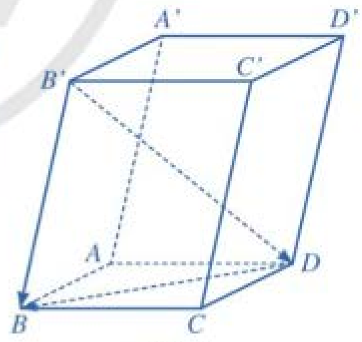
b) Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{b}$ bằng vectơ nào trong *Hình 7*?



Hình 7

> Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.



Hình 8

Ví dụ 4 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (*Hình 8*). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$.

Giải

$$\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'B}+(-\overrightarrow{DB})$$
$$=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D}.$$

> **4** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
> Chứng minh rằng:
> $$\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{C'B'}-\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{BD'}.$$

Đối với vectơ trong không gian, ta có quy tắc sau:

Với ba điểm O, A, B trong không gian, ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (*Quy tắc hiệu*).

2. Tích của một số với một vectơ trong không gian

5 Nêu định nghĩa tích của một số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ trong mặt phẳng.

Tương tự như trong mặt phẳng, trong không gian ta cũng có định nghĩa sau:

Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| . |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$. Do đó, $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Chú ý

- Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là *phép nhân một số với một vectơ.*
- Phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

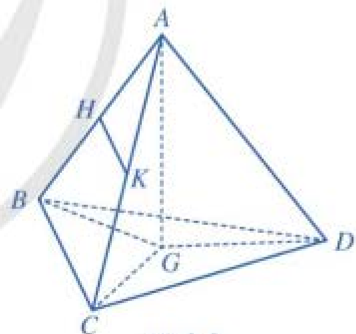
Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực h, k ta có:

+ $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;

+ $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;

+ $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;

+ $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.



Hình 9

Ví dụ 5 Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC (*Hình 9*). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Giải

a) Do HK là đường trung bình của tam giác ABC nên BC // HK và $BC = 2HK$. Suy ra $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{HK}$ và $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{HK}|$. Vậy $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$.

5 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$;

b) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

b) Ta có:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}.$

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

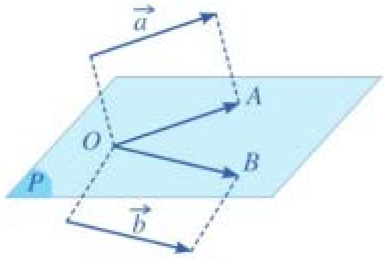
Do đó, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}.$

3. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

6 Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O tuỳ ý.

a) Vẽ hai vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

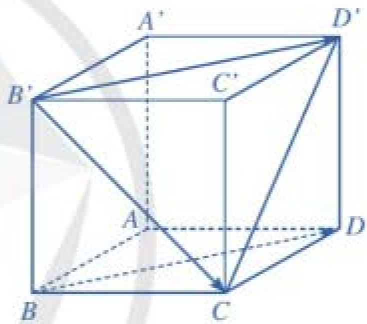
b) Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ có giá nằm trong cùng mặt phẳng (P) (*Hình 10*). Nêu định nghĩa góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ trong mặt phẳng (P).



Hình 10

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O tuỳ ý và vẽ hai vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong không gian, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

Chú ý: $0^{o}\le(\vec{a}, \vec{b})\le 180^{o}$.



Hình 11

Ví dụ 6 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{B'C}$.

Giải. (*Hình 11*)

Ta có: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}$. Do đó,

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C})=(\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{B'C})=\widehat{D'B'C}.$$

Vì $B'C=CD'=D'B'$ nên tam giác $B'CD'$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{D'B'C}=60^{o}$.

Vậy $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C})=60^{o}$.

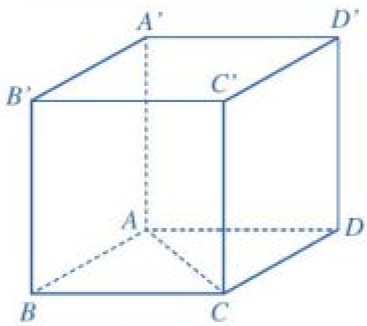
6 Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC.

Hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{BD}$.

7 Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 3 cm (*Hình 12*).

a) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'D'}$.

b) Tính $|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{A'D'}|.\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'})$.



Hình 12

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}\,.\,\vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|\,.\cos(\vec{a}, \vec{b})$, ở đó $(\vec{a}, \vec{b})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ bằng 0.

Chú ý

• Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Với các vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k tuỳ ý, ta có:

+ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$ (tính chất giao hoán);

+ $\vec{a}\,.\,(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c}$ (tính chất phân phối);

+ $(k\vec{a})\,.\,\vec{b} = k(\vec{a}\,.\,\vec{b}) = \vec{a}\,.\,(k\vec{b})$;

+ $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

• Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|}$.

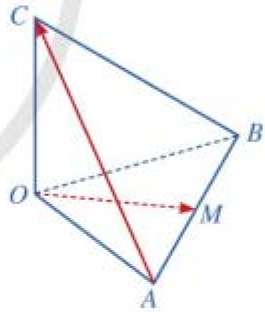
Ví dụ 7 Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Giải. (*Hình 13*)

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Khi đó, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ và $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{a}\,.\,\vec{c} = \vec{b}\,.\,\vec{c} = 0$.

Ta có: $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}|\,.\,|\overrightarrow{AC}|}$.



Hình 13

Mặt khác, do $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

và $\qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$

nên $\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\,.\,(\vec{c} - \vec{a})$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}\,.\,\vec{c} - \vec{a}^2 + \vec{b}\,.\,\vec{c} - \vec{b}\,.\,\vec{a}) = -\frac{1}{2}.$$

Ta lại có: $|\overrightarrow{OM}| = OM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}$.

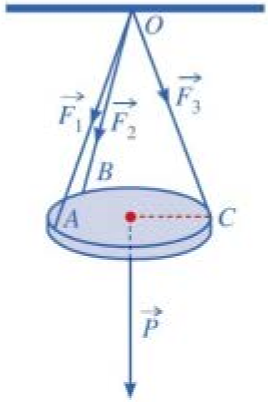
Do đó, $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}|\,.\,|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2}$.

Vậy $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = 120^\circ$.

7 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{A'B}\,.\,\overrightarrow{D'C'}$; $\overrightarrow{D'A}\,.\,\overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 8 Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 15$ (N) (*Hình 14*).

Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



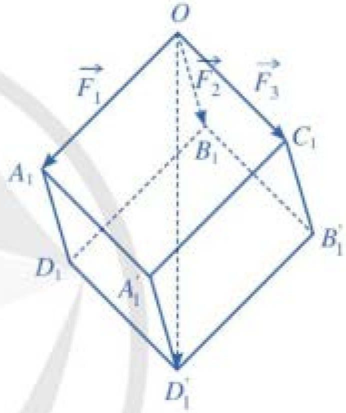
Hình 14

Giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1', sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp (*Hình 15*). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp, ta có:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}.$$

Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 15$ (N) nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.



Hình 15

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}$, ở đó $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là: $\left|\overrightarrow{P}\right| = \left|\overrightarrow{OD_1'}\right| = 15\sqrt{3}$ (N).

BÀI TẬP

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$ bằng vectơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{A'C}$.   B. $\overrightarrow{CA'}$.   C. $\overrightarrow{AC'}$.   D. $\overrightarrow{C'A}$.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;   b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

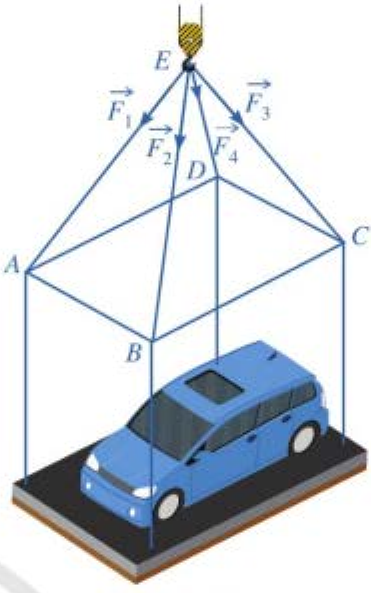
3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính:

a) $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{D'C'}$; $\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{BC}$;   b) Các góc $\left(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{B'C'}\right)$; $\left(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}\right)$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.

5. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60^o (*Hình 16*). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.

Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4 700 N và trọng lượng của khung sắt là 3 000 N.



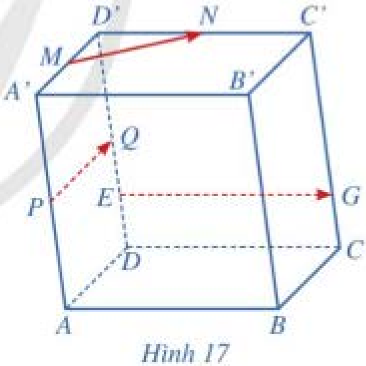
Hình 16

TÌM HIỂU THÊM

Ba vectơ đồng phẳng

Trước hết, ta có định nghĩa sau: Trong không gian, ba vectơ được gọi là *đồng phẳng* nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Ví dụ Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$, $D'C'$, AA', DD'. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng DQ, G là điểm nằm trên cạnh CC' sao cho $CC' = 4CG$ (*Hình 17*). Do các đường thẳng MN, PQ, EG cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ nên giá của ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{EG}$ cũng cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Vì vậy, ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{EG}$ là *đồng phẳng*.



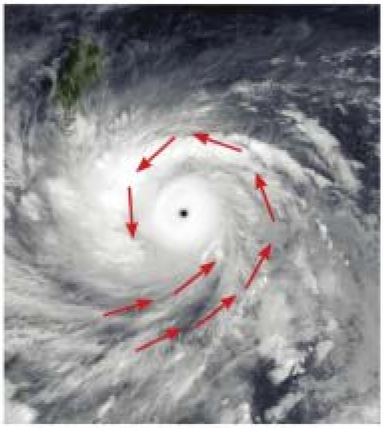
Hình 17

Nhận xét: Người ta cũng chứng minh được một số điều kiện sau đây để ba vectơ trong không gian là đồng phẳng:

1. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$. Khi đó, ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra, cặp số m, n là duy nhất.

2. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ-không. Từ điểm O trong không gian, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó, ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi bốn điểm O, A, B, C cùng thuộc một mặt phẳng.

§2 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ



Ảnh chụp bão Haiyan ngày 07/11/2013
(*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*)
Hình 18

Bão Haiyan (Hải Yến) là một cơn bão mạnh đã đổ bộ vào nước ta những ngày đầu tháng 11 năm 2013.

Để theo dõi đường đi của bão và vận tốc gió, người ta sử dụng toạ độ của các vectơ chỉ vận tốc của những luồng gió xoáy vào tâm bão (*Hình 18*).

Toạ độ của vectơ trong không gian là gì? Làm thế nào để xác định được toạ độ của vectơ trong không gian?

I. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

1. Hệ trục toạ độ trong không gian

1 Trong không gian, hãy vẽ:

a) Ba trục số Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và cắt nhau tại gốc O của mỗi trục.

b) • Vectơ $\vec{i}$ xuất phát từ điểm gốc O, theo chiều dương của trục Ox và có độ dài bằng 1.

• Vectơ $\vec{j}$ xuất phát từ điểm gốc O, theo chiều dương của trục Oy và có độ dài bằng 1.

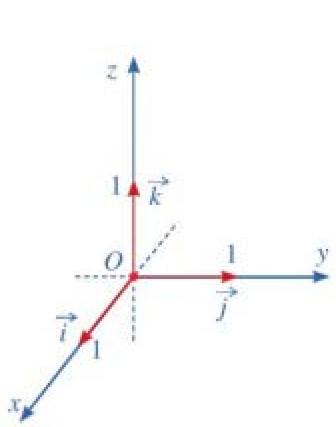
• Vectơ $\vec{k}$ xuất phát từ điểm gốc O, theo chiều dương của trục Oz và có độ dài bằng 1.

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là *hệ trục toạ độ vuông góc Oxyz* trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ toạ độ $Oxyz$.

Chú ý: Ta gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các *vectơ đơn vị* trên các trục Ox, Oy, Oz.

Trong hệ toạ độ $Oxyz$ (*Hình 19*), ta gọi: điểm O là gốc toạ độ; Ox là trục hoành, Oy là trục tung, Oz là trục cao; các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) là các mặt phẳng toạ độ.

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là *không gian Oxyz*.



Hình 19

Nhận xét: Các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau.

Ví dụ 1 Một sân tennis với hệ toạ độ $Oxyz$ được chọn như ở *Hình 20*.

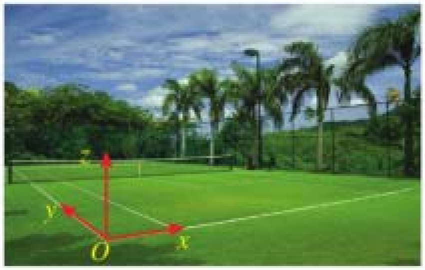
a) Hỏi mặt sân nằm trong mặt phẳng toạ độ nào?

b) Trục Oz có vuông góc với mặt sân hay không?

Giải

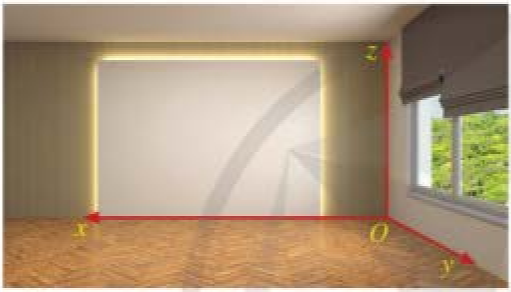
a) Mặt sân nằm trong mặt phẳng toạ độ (Oxy).

b) Trục Oz vuông góc với mặt phẳng toạ độ (Oxy) nên trục Oz vuông góc với mặt sân.



Hình 20

1 Một căn phòng với hệ toạ độ $Oxyz$ được chọn như ở *Hình 21*. Cho biết bức tường phía sau của căn phòng nằm trong mặt phẳng toạ độ nào.



Hình 21

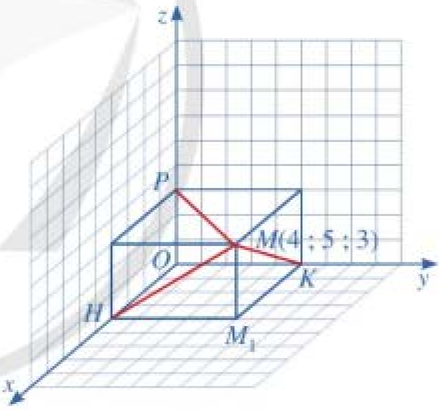
2. Toạ độ của một điểm

2 Cho điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Gọi M_1 là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng Oxy (*Hình 22*).

a) Trong mặt phẳng Oxy hãy cho biết:

- Hình chiếu H của điểm M trên trục hoành Ox ứng với số nào trên trục Ox?
- Hình chiếu K của điểm M trên trục tung Oy ứng với số nào trên trục Oy?

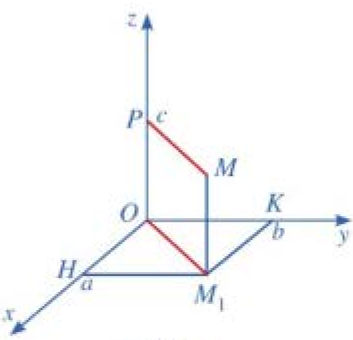
b) Hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz ứng với số nào trên trục Oz?



Hình 22

Nhận xét: Bộ số $(4 ; 5 ; 3)$ gọi là *toạ độ* của điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$.

Ta có định nghĩa sau (*Hình 23*):



Hình 23

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm M.

• Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm hoành độ a, tung độ b của điểm M_1.

• Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.

Bộ số $(a ; b ; c)$ là *toạ độ* của điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a ; b ; c)$.

Chú ý

• Toạ độ của một điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ luôn tồn tại và duy nhất.

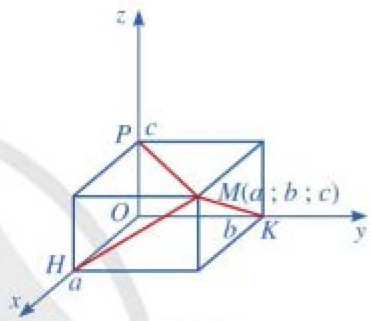
• Người ta còn có thể xác định toạ độ điểm M theo cách sau (*Hình 24*):

+ Xác định hình chiếu H của điểm M trên trục hoành Ox, điểm H ứng với số a trên trục Ox. Số a là hoành độ của điểm M.

+ Xác định hình chiếu K của điểm M trên trục tung Oy, điểm K ứng với số b trên trục Oy. Số b là tung độ của điểm M.

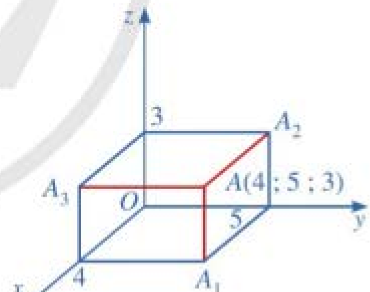
+ Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.

Khi đó, bộ số $(a ; b ; c)$ là toạ độ của điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$.



Hình 24

Ví dụ 2 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(4 ; 5 ; 3)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Ozx) (*Hình 25*). Tìm toạ độ của các điểm A_1, A_2, A_3.



Hình 25

Giải

Gọi $A_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$, $A_2(x_2 ; y_2 ; z_2)$, $A_3(x_3 ; y_3 ; z_3)$.

Với $A(4 ; 5 ; 3)$, đặt $x_A = 4$, $y_A = 5$, $z_A = 3$. Ta có:

+ $x_1 = x_A = 4$; $y_1 = y_A = 5$ và $z_1 = 0$ (vì A_1 nằm trên mặt phẳng (Oxy)). Do đó $A_1(4 ; 5 ; 0)$.

+ $y_2 = y_A = 5$; $z_2 = z_A = 3$ và $x_2 = 0$ (vì A_2 nằm trên mặt phẳng (Oyz)). Do đó $A_2(0 ; 5 ; 3)$.

+ $x_3 = x_A = 4$; $z_3 = z_A = 3$ và $y_3 = 0$ (vì A_3 nằm trên mặt phẳng (Ozx)). Do đó $A_3(4 ; 0 ; 3)$.

2 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(3 ; 2 ; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz. Tìm toạ độ của các điểm H, K, P.

II. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ

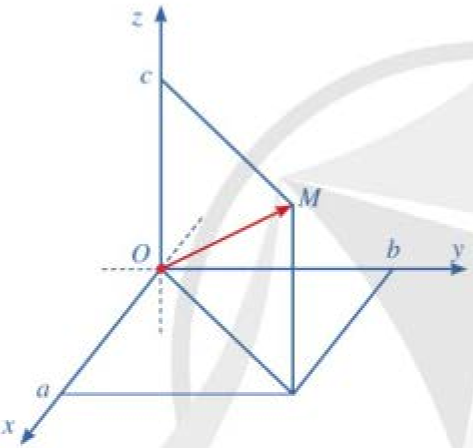
3 Cho điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$.

a) Vẽ vectơ $\overrightarrow{OM}$.

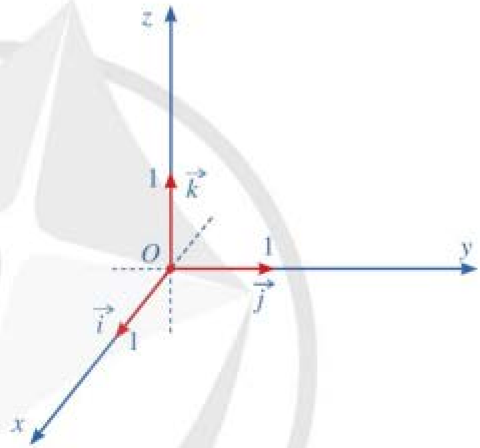
b) Nêu cách xác định toạ độ của điểm M.

Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a ; b ; c)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM} = (a ; b ; c)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, b gọi là tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và c gọi là cao độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ (*Hình 26*).



Hình 26



Hình 27

Chú ý: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, ta có:

- $\overrightarrow{OM} = (a ; b ; c) \Leftrightarrow M(a ; b ; c)$;
- Vectơ đơn vị $\vec{i}$ trên trục Ox có toạ độ là $\vec{i} = (1 ; 0 ; 0)$;
  Vectơ đơn vị $\vec{j}$ trên trục Oy có toạ độ là $\vec{j} = (0 ; 1 ; 0)$;
  Vectơ đơn vị $\vec{k}$ trên trục Oz có toạ độ là $\vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$ (*Hình 27*).

Ví dụ 3 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4 ; 3 ; -1)$ và $N(2 ; -1 ; -3)$. Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$.

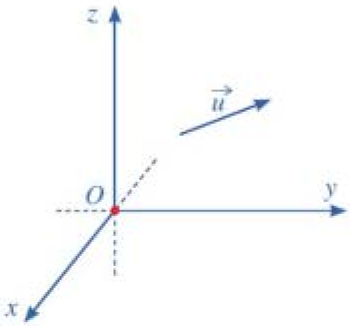
Giải

Ta có: $M(-4 ; 3 ; -1)$ và $N(2 ; -1 ; -3)$.

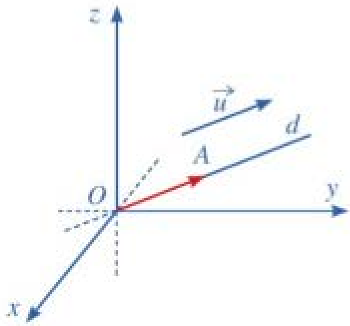
Do đó, $\overrightarrow{OM} = (-4 ; 3 ; -1)$, $\overrightarrow{ON} = (2 ; -1 ; -3)$.

3 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = (3 ; 1 ; -2)$. Tìm toạ độ điểm A.

4 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}$ (*Hình 28*). Hãy xác định điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ (*Hình 29*).



Hình 28

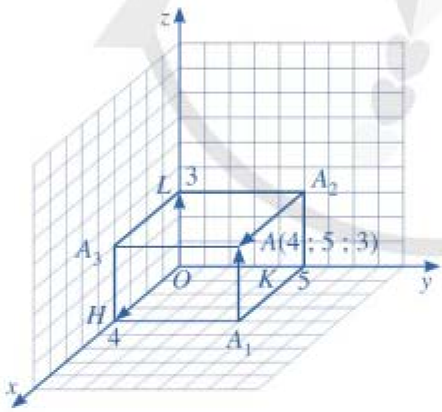


Hình 29

> Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ của một vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a ; b ; c)$ thì ta viết $\vec{u} = (a ; b ; c)$, trong đó a gọi là hoành độ, b gọi là tung độ và c gọi là cao độ của vectơ $\vec{u}$.

Ví dụ 4 Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_2A}$ ở *Hình 30*.



Hình 30

> **4** Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{A_3A}$ ở *Hình 30*.

Giải

Trong *Hình 30*, ta có: $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{OH}$ mà $L(0 ; 0 ; 3)$ và $H(4 ; 0 ; 0)$.

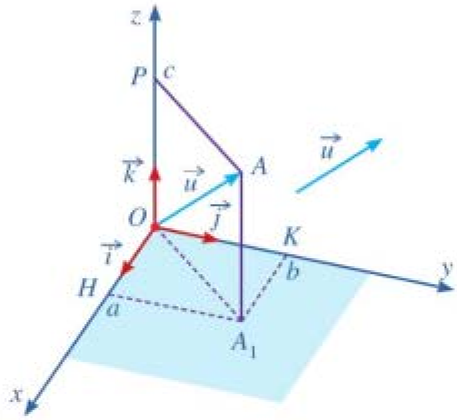
Do đó, $\overrightarrow{A_1A} = (0 ; 0 ; 3)$ và $\overrightarrow{A_2A} = (4 ; 0 ; 0)$.

5 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (a ; b ; c)$ (*Hình 31*). Lấy điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

a) Tìm hoành độ, tung độ và cao độ của điểm A.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OH}$ qua vectơ $\vec{i}$; vectơ $\overrightarrow{OK}$ qua vectơ $\vec{j}$; vectơ $\overrightarrow{OP}$ qua vectơ $\vec{k}$.

c) Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



Hình 31

Ta có định lí sau:

> Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, nếu $\vec{u} = (a ; b ; c)$ thì
> $$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$
> Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ thì
> $$\vec{u} = (a ; b ; c).$$

Chú ý: Với $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$, ta có: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2. \end{cases}$

Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết toạ độ của nó.

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1 ; 2 ; -3)$ và vectơ $\vec{u} = (3 ; -4 ; 2)$. Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi vectơ sau:

a) $\overrightarrow{OA}$;

b) $\vec{u}$.

Giải

a) Vì điểm A có toạ độ là $(1 ; 2 ; -3)$ nên

$$\overrightarrow{OA} = (1 ; 2 ; -3).$$

Do đó, $\overrightarrow{OA} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + (-3)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

b) Vì $\vec{u} = (3 ; -4 ; 2)$ nên

$$\vec{u} = 3\vec{i} + (-4)\vec{j} + 2\vec{k} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

> **5** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ và vectơ $\vec{v} = -7\vec{j} + \vec{k}$. Hãy tìm toạ độ của:
>
> a) Điểm B; b) Vectơ $\vec{v}$.

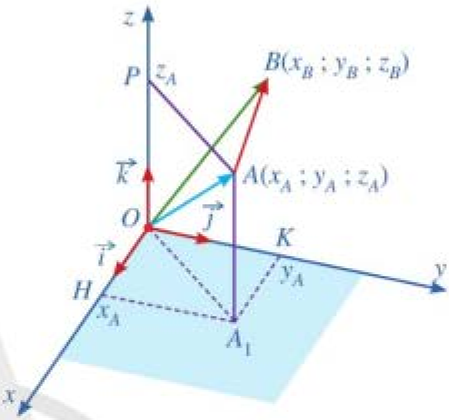
6 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$ (*Hình 32*).

a) Biểu diễn mỗi vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$.

b) Tìm liên hệ giữa

$\overrightarrow{AB}$ và $(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$.

c) Từ đó, tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Hình 32

Ta có định lí sau:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$ và $B(x_B ; y_B ; z_B)$. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.

Ví dụ 6 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình bình hành có ba đỉnh $A(1 ; 1 ; -2)$, $B(4 ; 3 ; 1)$ và $C(-1 ; -2 ; 2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm D.

Giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1 ; 3 - 1 ; 1 - (-2)) = (3 ; 2 ; 3).$$

b) Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D ; y_D ; z_D)$, ta có:

$$\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D ; -2 - y_D ; 2 - z_D).$$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 3 \\ -2 - y_D = 2 \\ 2 - z_D = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4 \\ z_D = -1. \end{cases}$$

Vậy $D(-4 ; -4 ; -1)$.

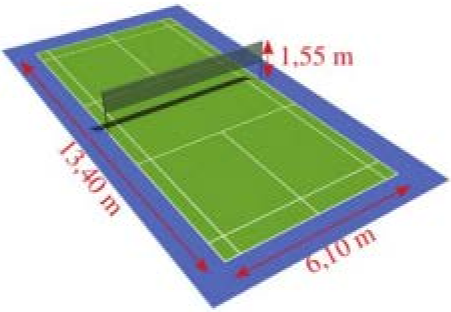
6 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có

$A'(1 ; 0 ; 1)$, $B'(2 ; 1 ; 2)$,

$D'(1 ; -1 ; 1)$, $C(4 ; 5 ; -5)$.

Tìm toạ độ đỉnh A của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Ví dụ 7 *Hình 33a* mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như ở *Hình 33b* (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



a)

b)

Hình 33

Giải

• Gọi toạ độ điểm A là $(x_A ; y_A ; z_A)$. Vì chiều rộng của sân là 6,1 m nên $x_A = 6,1$. Do một nửa chiều dài của sân là 6,7 m nên $y_A = 6,7$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A = 0$. Vì vậy, điểm A có toạ độ là $(6,1 ; 6,7 ; 0)$.

• Độ dài đoạn thẳng AB là 1,55 m nên điểm B có toạ độ là $(6,1 ; 6,7 ; 1,55)$.
Vậy ta có: $\overrightarrow{AB} = (6,1 - 6,1 ; 6,7 - 6,7 ; 1,55 - 0)$, tức là $\overrightarrow{AB} = (0 ; 0 ; 1,55)$.

BÀI TẬP

1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1 ; 2 ; 3)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là:
A. $(1 ; 2 ; 3)$. B. $(1 ; 0 ; 3)$. C. $(0 ; 2 ; 3)$. D. $(1 ; 2 ; 0)$.

2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (-1 ; 4 ; 2)$ và điểm A. Biết $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Toạ độ của điểm A là:
A. $(1 ; 4 ; 2)$. B. $(-1 ; 4 ; 2)$. C. $(1 ; -4 ; -2)$. D. $(-1 ; -4 ; -2)$.

3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là:
A. $(-2 ; -1 ; 3)$. B. $(2 ; 1 ; 3)$. C. $(-2 ; 0 ; 3)$. D. $(-2 ; -1 ; -3)$.

4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1 ; -1 ; 2)$ và $B(4 ; -3 ; 1)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:
A. $(-3 ; 2 ; 1)$. B. $(3 ; -2 ; -1)$. C. $(5 ; -4 ; 3)$. D. $(3 ; -4 ; -1)$.

5. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (4 ; 2 ; 3)$ và điểm $A(1 ; 1 ; 1)$. Toạ độ điểm C thoả mãn $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ là:

A. $(4 ; 2 ; 3)$. B. $(1 ; 1 ; 1)$. C. $(5 ; 3 ; 4)$. D. $(3 ; 1 ; 2)$.

6. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(3 ; -2 ; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Ozx). Tìm toạ độ của các điểm A_1, A_2, A_3.

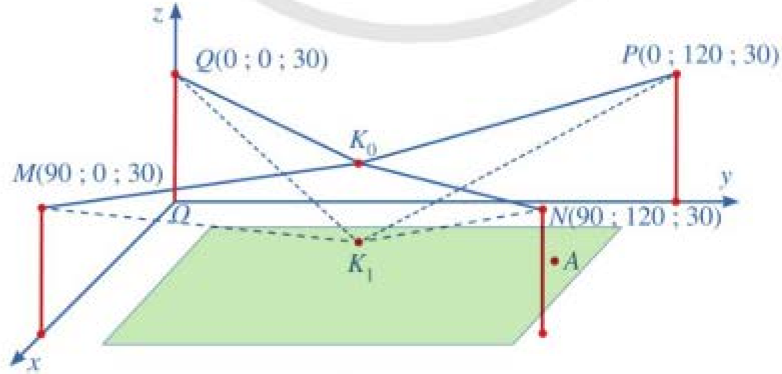
7. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(-2 ; 3 ; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz. Tìm toạ độ của các điểm H, K, P.

8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(4 ; 6 ; -5)$, $B(5 ; 7 ; -4)$, $C(5 ; 6 ; -4)$, $D'(2 ; 0 ; 2)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

9. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90 ; 0 ; 30)$, $N(90 ; 120 ; 30)$, $P(0 ; 120 ; 30)$, $Q(0 ; 0 ; 30)$ (*Hình 34*).

Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19 (*Nguồn: https://www.abiturloesung.de; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI*).

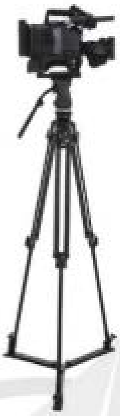


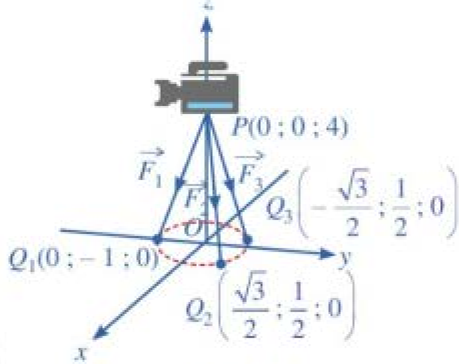
Hình 34

Tìm toạ độ của các điểm K_0, K_1 và của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.

§3 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $P(0 ; 0 ; 4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $Q_1(0 ; -1 ; 0)$, $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$, $Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$ (*Hình 35*). Biết rằng trọng lượng của máy quay là 360 N.





Hình 35

Làm thế nào để tìm được toạ độ của các lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ tác dụng lên giá đỡ?

I. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

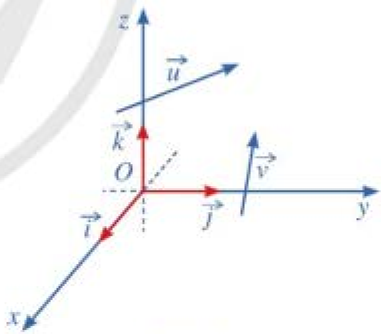
1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (*Hình 36*), cho hai vectơ

$$\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1) \text{ và } \vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2).$$

a) Biểu diễn các vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) Biểu diễn các vectơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, m\vec{u}$ $(m \in \mathbb{R})$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

c) Tìm toạ độ các vectơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, m\vec{u}$ $(m \in \mathbb{R})$.



Hình 36

Nếu $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2 ; z_1 + z_2);$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2 ; y_1 - y_2 ; z_1 - z_2);$$

$$m\vec{u} = (mx_1 ; my_1 ; mz_1) \text{ với } m \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực m sao cho $\begin{cases} x_1 = mx_2 \\ y_1 = my_2 \\ z_1 = mz_2 \end{cases}$.

Ví dụ 1 Cho $\vec{a} = (-2 ; 3 ; 2)$, $\vec{b} = (2 ; 1 ; -1)$, $\vec{c} = (1 ; 2 ; 3)$. Tính toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $3\vec{a}$; b) $2\vec{a} - \vec{b}$; c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Giải

Ta có:

a) $3\vec{a} = (3 . (-2) ; 3 . 3 ; 3 . 2)$. Vậy $3\vec{a} = (-6 ; 9 ; 6)$.

b) Ta có $2\vec{a} = (-4 ; 6 ; 4)$ và $\vec{b} = (2 ; 1 ; -1)$. Do đó, $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2 ; 6 - 1 ; 4 - (-1))$.

Vậy $2\vec{a} - \vec{b} = (-6 ; 5 ; 5)$.

c) Do $\vec{a} = (-2 ; 3 ; 2)$ và $2\vec{b} = (4 ; 2 ; -2)$ nên $\vec{a} + 2\vec{b} = (2 ; 5 ; 0)$. Ngoài ra, vì $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2} ; -3 ; -\frac{9}{2}\right)$ nên $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2} ; 2 ; -\frac{9}{2}\right)$.

1 a) Cho
$\vec{u} = (-2 ; 0 ; 1)$,
$\vec{v} = (0 ; 6 ; -2)$,
$\vec{w} = (-2 ; 3 ; 2)$.
Tìm toạ độ của vectơ
$\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Cho ba điểm
$A(-1 ; -3 ; -2)$,
$B(2 ; 3 ; 4)$,
$C(3 ; 5 ; 6)$.
Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

II. TOẠ ĐỘ TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG. TOẠ ĐỘ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

2

a) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$ và $B(x_B ; y_B ; z_B)$. Gọi $M(x_M ; y_M ; z_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

- Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$.
- Tính toạ độ của điểm M theo toạ độ của các điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$ và $B(x_B ; y_B ; z_B)$.

b) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có trọng tâm G.

- Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.
- Tính toạ độ của điểm G theo toạ độ của các điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$, $C(x_C ; y_C ; z_C)$.

• Cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$ và $B(x_B ; y_B ; z_B)$. Nếu $M(x_M ; y_M ; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

• Cho tam giác ABC có $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$, $C(x_C ; y_C ; z_C)$. Nếu $G(x_G ; y_G ; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3};\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $A(-2 ; 1 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 5)$, $C(5 ; 0 ; 2)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Do $M(x_M ; y_M ; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$$x_M = \frac{-2+0}{2} = -1;\ y_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2};\ z_M = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Vậy $M\left(-1 ; \frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$.

Do $G(x_G ; y_G ; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên

$$x_G = \frac{-2+0+5}{3} = 1;$$

$$y_G = \frac{1+2+0}{3} = 1;$$

$$z_G = \frac{0+5+2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Vậy $G\left(1 ; 1 ; \frac{7}{3}\right)$.

2 Cho ba điểm
$A(0 ; -1 ; 1)$,
$B(1 ; 0 ; 5)$,
$G(1 ; 2 ; 0)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, G không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC.

III. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

3 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$.

Hãy biểu diễn các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Nếu $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Nhận xét

a) Nếu $\vec{a} = (x\ ;\ y\ ;\ z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\ .\ \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

b) Nếu $A(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ và $B(x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$ thì

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

c) Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ và $\vec{v} = (x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$ khác vectơ $\vec{0}$, ta có:

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\ .\ \vec{v}}{|\vec{u}|\ .\ |\vec{v}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ .\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

Ví dụ 3 Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ và $C(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi của tam giác ABC.

c) Tính $\cos\widehat{ABC}$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{BC} = (2\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Suy ra $\overrightarrow{BA} = (1\ ;\ 0\ ;\ -1) \neq k\overrightarrow{BC} = (2k\ ;\ k\ ;\ 0)$ với mọi $k \in \mathbb{R}$. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta thấy:

$$BA = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Vậy chu vi của tam giác ABC bằng $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

3 Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho tam giác ABC có $A(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ và $C(3\ ;\ 0\ ;\ 2)$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

c) Ta có:

$$\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\ .\ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\ .\ |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1\ .\ 2 + 0\ .\ 1 + (-1)\ .\ 0}{\sqrt{2}\ .\ \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ví dụ 4 *Hình 37* minh hoạ sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục toạ độ *Oxyz*, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

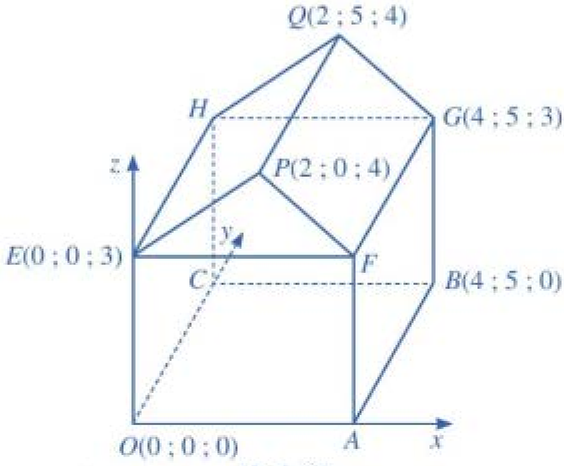
a) Tìm toạ độ của các điểm A, H và F.

b) Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

Giải

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4$, $y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên toạ độ điểm A là $(4 ; 0 ; 0)$. Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5$, $z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên toạ độ điểm H là $(0 ; 5 ; 3)$.

Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4$; $z_F = z_E = 3$. Do F nằm trên mặt phẳng (Ozx) nên toạ độ điểm F là $(4 ; 0 ; 3)$.



Hình 37

b) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó. Ta có: $\overrightarrow{FP} = (-2 ; 0 ; 1)$, $\overrightarrow{FE} = (-4 ; 0 ; 0)$.

Suy ra $\cos\widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \dfrac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|}$

$$= \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26{,}6^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26{,}6^\circ$.

Ví dụ 5 Hãy giải bài toán trong phần mở đầu.

Giải

Theo giả thiết, ta có các điểm $P(0 ; 0 ; 4)$, $Q_1(0 ; -1 ; 0)$, $Q_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2} ; 0\right)$, $Q_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2} ; 0\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{PQ_1} = (0 - 0 ; -1 - 0 ; 0 - 4)$ hay $\overrightarrow{PQ_1} = (0 ; -1 ; -4)$;

$$\overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 ; \frac{1}{2} - 0 ; 0 - 4\right) \text{ hay } \overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} ; -4\right);$$

$$\overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 ; \frac{1}{2} - 0 ; 0 - 4\right) \text{ hay } \overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} ; -4\right).$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{PQ_1}\right| = \left|\overrightarrow{PQ_2}\right| = \left|\overrightarrow{PQ_3}\right| = \sqrt{17}$. Do đó $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right|$.

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho:

$$\overrightarrow{F_1} = c\overrightarrow{PQ_1} = (0\,;-c\,;-4c);$$

$$\overrightarrow{F_2} = c\overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\,;\frac{1}{2}c\,;-4c\right);$$

$$\overrightarrow{F_3} = c\overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c\,;\frac{1}{2}c\,;-4c\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = (0\,;0\,;-12c)$.

Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F}$, trong đó $\overrightarrow{F} = (0\,;0\,;-360)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay. Suy ra $-12c = -360$, tức là $c = 30$.

Vậy $\overrightarrow{F_1} = (0\,;-30\,;-120)$; $\overrightarrow{F_2} = (15\sqrt{3}\,;15\,;-120)$; $\overrightarrow{F_3} = (-15\sqrt{3}\,;15\,;-120)$.

IV. CÁCH TÌM TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ VUÔNG GÓC VỚI HAI VECTƠ CHO TRƯỚC

4

a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $C'(1\,;1\,;1)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ vuông góc với cả hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1\,;y_1\,;z_1)$ và $\vec{v} = (x_2\,;y_2\,;z_2)$ không cùng phương.

Xét vectơ $\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1\,;z_1x_2 - z_2x_1\,;x_1y_2 - x_2y_1)$.

- Tính $\vec{w}\,.\,\vec{u}$, $\vec{w}\,.\,\vec{v}$.
- Vectơ $\vec{w}$ có vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay không?

Ta có định lí sau:

> Cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1\,;y_1\,;z_1)$ và $\vec{v} = (x_2\,;y_2\,;z_2)$ không cùng phương.
>
> Khi đó, vectơ $\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1\,;z_1x_2 - z_2x_1\,;x_1y_2 - x_2y_1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Nhận xét

- Vectơ $\vec{w}$ trong định lí trên còn được gọi là *tích có hướng* của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $\vec{w} = \left[\vec{u}, \vec{v}\right]$.
- Để thuận tiện trong cách viết, ta quy ước: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, với a, b, c, d là các số thực.

Khi đó, với hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2 ; z_2)$, ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1z_2 - y_2z_1 ; z_1x_2 - z_2x_1 ; x_1y_2 - x_2y_1).$$

• Hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương khi và chỉ khi vectơ $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}] \neq \vec{0}$.

Ví dụ 6 Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai vectơ $\vec{u} = (1 ; -2 ; 3)$ và $\vec{v} = (2 ; 0 ; -3)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Giải

Ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6 ; 9 ; 4).$$

Chọn $\vec{w} = (6 ; 9 ; 4)$. Theo định lí trên, vectơ $\vec{w}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

4 Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai vectơ

$\vec{u} = (1 ; 0 ; -3)$

và $\vec{v} = (0 ; 0 ; 3)$.

Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

BÀI TẬP

1. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $\vec{a} = (2 ; 3 ; -2)$ và $\vec{b} = (3 ; 1 ; -1)$. Toạ độ của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ là:

A. $(1 ; -2 ; 1)$. B. $(5 ; 4 ; -3)$. C. $(-1 ; 2 ; -1)$. D. $(-1 ; 2 ; -3)$.

2. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $\vec{a} = (0 ; 1 ; 1)$ và $\vec{b} = (-1 ; 1 ; 0)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng:

A. 60^o. B. 120^o. C. 150^o. D. 30^o.

3. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $\vec{a} = (-1 ; 2 ; 3)$, $\vec{b} = (3 ; 1 ; -2)$, $\vec{c} = (4 ; 2 ; -3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

4. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $\vec{a} = (2 ; -2 ; 1)$, $\vec{b} = (2 ; 1 ; 3)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ $\vec{c}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

5. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3 ; 2 ; -1)$, $\vec{b} = (-2 ; 1 ; 2)$. Tính côsin của góc $(\vec{a}, \vec{b})$.

6. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(-2 ; 3 ; 0)$, $B(4 ; 0 ; 5)$, $C(0 ; 2 ; -3)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

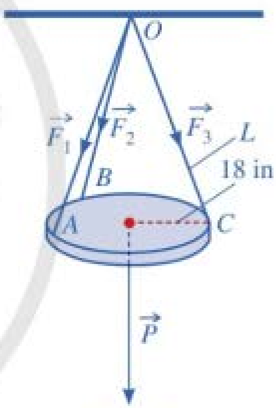
d) Tính $\cos \widehat{BAC}$.

7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; 1 ; 2)$, $D(1 ; -1 ; 1)$, $C'(4 ; 5 ; -5)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$;

b) $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

8. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (*Hình 38*). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in (1 inch = 2,54 cm). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L.



Hình 38

a) Xác định công thức tính hàm số $F = F(L)$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$.

c) Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

Các bài toán dưới đây, nếu không có chú ý gì thêm thì ta hiểu xét trong không gian với hệ toạ độ Oxyz.

1. Cho điểm M thoả mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Toạ độ của điểm M là:

A. $(2 ; 3 ; 4)$. B. $(3 ; 4 ; 2)$. C. $(4 ; 2 ; 3)$. D. $(3 ; 2 ; 4)$.

2. Cho hai điểm $M(1 ; -2 ; 3)$ và $N(3 ; 4 ; -5)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{NM}$ là:

A. $(-2 ; 6 ; 8)$. B. $(2 ; 6 ; -8)$. C. $(-2 ; 6 ; -8)$. D. $(-2 ; -6 ; 8)$.

3. Cho hai vectơ $\vec{u} = (3 ; -4 ; 5)$, $\vec{v} = (5 ; 7 ; -1)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là:

A. $(8 ; 3 ; 4)$. B. $(-2 ; -11 ; 6)$. C. $(2 ; 11 ; -6)$. D. $(-8 ; -3 ; -4)$.

4. Cho hai vectơ $\vec{u} = (1 ; -2 ; 3)$, $\vec{v} = (5 ; 4 ; -1)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là:

A. $(4 ; 6 ; 4)$. B. $(-4 ; -6 ; 4)$. C. $(4 ; 6 ; -4)$. D. $(-4 ; -6 ; -4)$.

5. Cho vectơ $\vec{u} = (1 ; -1 ; 3)$. Toạ độ của vectơ $-3\vec{u}$ là:

A. $(3 ; -3 ; 9)$. B. $(3 ; -3 ; -9)$. C. $(-3 ; 3 ; -9)$. D. $(3 ; 3 ; 9)$.

6. Độ dài của vectơ $\vec{u} = (2 ; -2 ; 1)$ là:

A. 9. B. 3. C. 2. D. 4.

7. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (1 ; -2 ; 3)$ và $\vec{v} = (3 ; 4 ; -5)$ là:

A. $\sqrt{14} . \sqrt{50}$. B. $-\sqrt{14} . \sqrt{50}$. C. 20. D. -20.

8. Khoảng cách giữa hai điểm $I(1 ; 4 ; -7)$ và $K(6 ; 4 ; 5)$ là:

A. 169. B. 13. C. 26. D. 6,5.

9. Cho hai điểm $M(1 ; -2 ; 3)$ và $N(3 ; 4 ; -5)$. Trung điểm của đoạn thẳng MN có toạ độ là:

A. $(-2 ; 1 ; 1)$. B. $(2 ; 1 ; 1)$. C. $(-2 ; 1 ; -1)$. D. $(2 ; 1 ; -1)$.

10. Cho tam giác MNP có $M(0 ; 2 ; 1)$, $N(-1 ; -2 ; 3)$ và $P(1 ; 3 ; 2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có toạ độ là:

A. $(0 ; 1 ; 2)$. B. $(0 ; 3 ; 6)$. C. $(0 ; -3 ; -6)$. D. $(0 ; -1 ; -2)$.

11. Cho hai vectơ $\vec{u} = (1 ; -2 ; 3)$ và $\vec{v} = (3 ; 4 ; -5)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

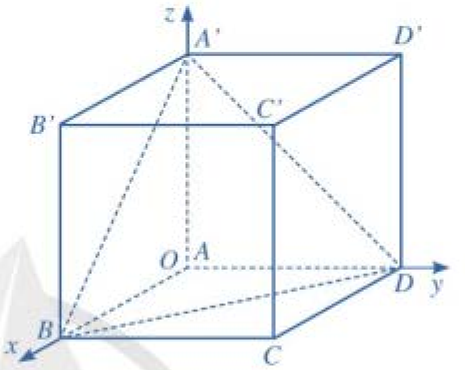
12. Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* có cạnh bằng *a*. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AA'* và *CC'*. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD'}$.

13. Xét hệ toạ độ *Oxyz* gắn với hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* như *Hình 39*, đơn vị của mỗi trục bằng độ dài cạnh hình lập phương. Biết $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $A'(0 ; 0 ; 1)$.

a) Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'*.

b) Xác định toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *A'BD*.

c) Xác định toạ độ các vectơ $\overrightarrow{OG}$ và $\overrightarrow{OC'}$. Chứng minh rằng ba điểm *O*, *G*, *C'* thẳng hàng và $OG = \frac{1}{3}OC'$.



Hình 39

14. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho $A(2 ; 0 ; -3)$, $B(0 ; -4 ; 5)$ và $C(-1 ; 2 ; 0)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm *A*, *B*, *C* không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ của điểm *D* sao cho tứ giác *ABCD* là hình bình hành.

c) Tìm toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

d) Tính chu vi của tam giác *ABC*.

e) Tính $\cos\widehat{BAC}$.

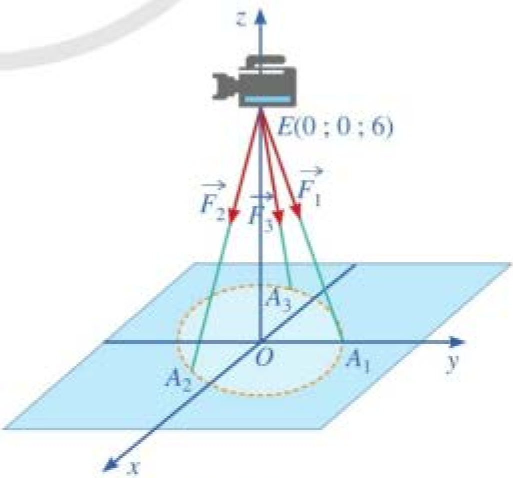
15. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0 ; 0 ; 6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là

$A_1(0 ; 1 ; 0)$,

$A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} ; 0\right)$,

$A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} ; 0\right)$

(*Hình 40*). Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N. Tìm toạ độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$.



Hình 40

CHƯƠNG III CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

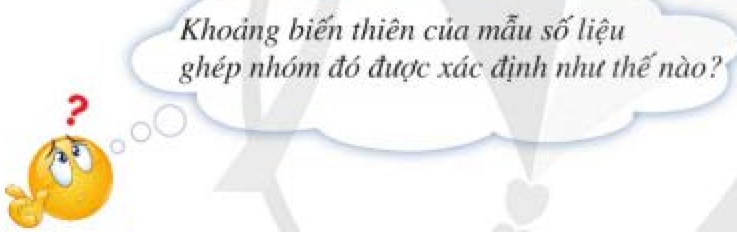
Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm; phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

§1 KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bảng 1 là bảng tần số ghép nhóm biểu diễn mẫu số liệu ghi lại năng suất lúa (đơn vị: tạ/ha) của 60 địa phương.

Nhóm	Tần số
[40 ; 47)	1
[47 ; 54)	6
[54 ; 61)	21
[61 ; 68)	21
[68 ; 75)	11
	$n = 60$

Bảng 1



I. KHOẢNG BIẾN THIÊN

1. Định nghĩa

1 Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 2*.

a) Tìm a_1, a_6 lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm 5.

b) Tính hiệu $R = a_6 - a_1$.

Nhóm	Tần số
[40 ; 45)	4
[45 ; 50)	11
[50 ; 55)	9
[55 ; 60)	8
[60 ; 65)	8
	$n = 40$

Bảng 2

Nhận xét: Trong mẫu số liệu ghép nhóm trên, hiệu $R = a_6 - a_1$ được gọi là *khoảng biến thiên* của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 3*.

Gọi a_1, a_{m+1} lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm m.

Hiệu $R = a_{m+1} - a_1$ được gọi là *khoảng biến thiên* của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
$[a_1 ; a_2)$	n_1
$[a_2 ; a_3)$	n_2
...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	n_m
	n

Bảng 3

Ví dụ 1 *Bảng 4* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao (đơn vị: centimét) của 36 học sinh nam lớp 12 ở một trường trung học phổ thông. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
[160 ; 163)	6
[163 ; 166)	11
[166 ; 169)	9
[169 ; 172)	7
[172 ; 175)	3
	$n = 36$

Bảng 4

Giải

Trong mẫu số liệu ghép nhóm đó, ta có: đầu mút trái của nhóm 1 là $a_1 = 160$, đầu mút phải của nhóm 5 là $a_6 = 175$.

Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

$$R = a_6 - a_1 = 175 - 160 = 15 \text{ (cm)}.$$

Chú ý

Đối với mẫu số liệu ghép nhóm mà ta biết mẫu số liệu không ghép nhóm sinh ra nó thì ta cũng có thể chọn khoảng biến thiên của mẫu số liệu không ghép nhóm chính là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.

1 Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 1* trong phần mở đầu.

2. Ý nghĩa

• Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán của mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

• Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị a_1 và a_{m+1} của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các *giá trị bất thường*.

• Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

II. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

1. Định nghĩa

2 Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 5*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[160 ; 163)	6	6
[163 ; 166)	11	17
[166 ; 169)	9	26
[169 ; 172)	7	33
[172 ; 175)	3	36
	$n = 36$	

Bảng 5

a) • Nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4} = \frac{36}{4} = 9$ có đúng không?

• Tìm đầu mút trái s, độ dài h, tần số n_2 của nhóm 2; tần số tích luỹ cf_1 của nhóm 1. Sau đó, hãy tính tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu đã cho theo công thức sau:

$$Q_1 = s + \left(\frac{9 - cf_1}{n_2}\right).h.$$

b) • Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2} = \frac{36}{2} = 18$ có đúng không?

• Tìm đầu mút trái r, độ dài d, tần số n_3 của nhóm 3; tần số tích luỹ cf_2 của nhóm 2. Sau đó, hãy tính tứ phân vị thứ hai Q_2 của mẫu số liệu đã cho theo công thức sau:

$$Q_2 = r + \left(\frac{18 - cf_2}{n_3}\right).d.$$

c) • Nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4} = \frac{3.36}{4} = 27$ có đúng không?

• Tìm đầu mút trái t, độ dài l, tần số n_4 của nhóm 4; tần số tích luỹ cf_3 của nhóm 3. Sau đó, hãy tính tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu đã cho theo công thức sau:

$$Q_3 = t + \left(\frac{27 - cf_3}{n_4}\right).l.$$

d) Tìm hiệu $Q_3 - Q_1$.

Nhận xét: Trong mẫu số liệu ghép nhóm trên, hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ được gọi là *khoảng tứ phân vị* của mẫu đó.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 6*.

Gọi Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là *khoảng tứ phân vị* của mẫu số liệu đó.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
$[a_1 ; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2 ; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
...	...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + ... + n_m$
	n	

Bảng 6

Ví dụ 2 *Bảng 7* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 42 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười nếu cần).

Giải

Số phần tử của mẫu là $n = 42$.

• Ta có: $\frac{n}{4} = \frac{42}{4} = 10,5$ mà $5 < 10,5 < 15$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 10,5. Xét nhóm 2 là nhóm [45 ; 50) có $s = 45$; $h = 5$; $n_2 = 10$ và nhóm 1 là nhóm [40 ; 45) có $cf_1 = 5$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 45 + \left(\frac{10,5 - 5}{10}\right).5 = 47,75 \text{ (cm)}.$$

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[40 ; 45)	5	5
[45 ; 50)	10	15
[50 ; 55)	7	22
[55 ; 60)	9	31
[60 ; 65)	7	38
[65 ; 70)	4	42
	$n = 42$	

Bảng 7

• Ta có: $\frac{3n}{4} = \frac{3.42}{4} = 31,5$ mà $31 < 31,5 < 38$. Suy ra nhóm 5 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 31,5. Xét nhóm 5 là nhóm [60 ; 65) có $t = 60$; $l = 5$; $n_5 = 7$ và nhóm 4 là nhóm [55 ; 60) có $cf_4 = 31$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ ba là:

$$Q_3 = 60 + \left(\frac{31,5 - 31}{7}\right).5 \approx 60,4 \text{ (cm)}.$$

2 Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm được cho bởi *Bảng 1* trong phần mở đầu.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 60,4 - 47,75 = 12,65 \text{ (cm)}.$$

2. Ý nghĩa

• Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của nửa giữa mẫu số liệu.

• Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu và nó không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường đó.

BÀI TẬP

1. *Bảng 8* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày.

Nhóm	Tần số
[40 ; 50)	3
[50 ; 60)	6
[60 ; 70)	19
[70 ; 80)	23
[80 ; 90)	9
	$n = 60$

Bảng 8

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

A. 50. B. 30. C. 6. D. 69,8.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

A. 50. B. 40. C. 14,23. D. 70,87.

2. *Bảng 9* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng).

a) Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
[10 ; 15)	15
[15 ; 20)	18
[20 ; 25)	10
[25 ; 30)	10
[30 ; 35)	5
[35 ; 40)	2
	$n = 60$

Bảng 9

Nhóm	Tần số
[20 ; 30)	25
[30 ; 40)	20
[40 ; 50)	20
[50 ; 60)	15
[60 ; 70)	14
[70 ; 80)	6
	$n = 100$

Bảng 10

3. *Bảng 10* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố.

a) Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

§2 PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên nam Dũng và Huy được lần lượt thống kê trong *Bảng 11* và *Bảng 12* (đơn vị: mét):

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Nhóm	Tần số
[6,22 ; 6,46)	3
[6,46 ; 6,70)	7
[6,70 ; 6,94)	5
[6,94 ; 7,18)	20
[7,18 ; 7,42)	5
	$n = 40$

Bảng 11

Nhóm	Tần số
[6,22 ; 6,46)	2
[6,46 ; 6,70)	5
[6,70 ; 6,94)	8
[6,94 ; 7,18)	19
[7,18 ; 7,42)	6
	$n = 40$

Bảng 12

Kết quả nhảy xa của vận động viên nào đồng đều hơn?

I. ĐỊNH NGHĨA

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 13*.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 45)	x_1	3
[45 ; 50)	x_2	12
[50 ; 55)	x_3	9
[55 ; 60)	x_4	7
[60 ; 65)	x_5	9
		$n = 40$

Bảng 13

a) Tìm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 lần lượt là giá trị đại diện của nhóm 1, nhóm 2, nhóm 3, nhóm 4, nhóm 5.

b) Tính số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

c) Tính $s^2 = \dfrac{3 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + 12 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + 9 \cdot (x_3 - \overline{x})^2 + 7 \cdot (x_4 - \overline{x})^2 + 9 \cdot (x_5 - \overline{x})^2}{40}$.

d) Tính $s = \sqrt{s^2}$.

Nhận xét: Trong mẫu số liệu ghép nhóm trên, các số s^2, s lần lượt được gọi là *phương sai*, *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu đó.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 14*.

• Gọi $\overline{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó. Số

$$s^2 = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_m(x_m - \overline{x})^2}{n}$$

được gọi là *phương sai* của mẫu số liệu đó.

• Căn bậc hai (số học) của phương sai gọi là *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s, nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1 ; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2 ; a_3)$	x_2	n_2
...	...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$

Bảng 14

Ví dụ

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi *Bảng 11* (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi *Bảng 12* (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

c) Trong hai vận động viên đó, kết quả nhảy xa của vận động viên nào đồng đều hơn?

Giải

Ta có các bảng thống kê sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[6,22 ; 6,46)	6,34	3
[6,46 ; 6,70)	6,58	7
[6,70 ; 6,94)	6,82	5
[6,94 ; 7,18)	7,06	20
[7,18 ; 7,42)	7,30	5
		$n = 40$

Bảng 15

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[6,22 ; 6,46)	6,34	2
[6,46 ; 6,70)	6,58	5
[6,70 ; 6,94)	6,82	8
[6,94 ; 7,18)	7,06	19
[7,18 ; 7,42)	7,30	6
		$n = 40$

Bảng 16

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi *Bảng 15* là:

$$\overline{x}_D = \frac{3\,.\,6{,}34 + 7\,.\,6{,}58 + 5\,.\,6{,}82 + 20\,.\,7{,}06 + 5\,.\,7{,}30}{40} = \frac{276{,}88}{40} \approx 6{,}92 \text{ (m)}.$$

Vậy phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi *Bảng 15* (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là:

$$s_D^2 = \frac{1}{40}\Big[3\,.\,(6{,}34-6{,}92)^2 + 7\,.\,(6{,}58-6{,}92)^2 + 5\,.\,(6{,}82-6{,}92)^2 + 20\,.\,(7{,}06-6{,}92)^2 + 5\,.\,(7{,}30-6{,}92)^2\Big] = \frac{2{,}9824}{40} \approx 0{,}07.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $s_D \approx \sqrt{0{,}07} \approx 0{,}26$ (m).

b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi *Bảng 16* là:

$$\overline{x}_H = \frac{2\,.\,6{,}34 + 5\,.\,6{,}58 + 8\,.\,6{,}82 + 19\,.\,7{,}06 + 6\,.\,7{,}30}{40} = \frac{278{,}08}{40} \approx 6{,}95 \text{ (m)}.$$

Vậy phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi *Bảng 16* (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là:

$$s_H^2 = \frac{1}{40}\Big[2\,.\,(6{,}34-6{,}95)^2 + 5\,.\,(6{,}58-6{,}95)^2 + 8\,.\,(6{,}82-6{,}95)^2 + 19\,.\,(7{,}06-6{,}95)^2 + 6\,.\,(7{,}30-6{,}95)^2\Big] = \frac{2{,}5288}{40} \approx 0{,}06.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

$$s_H \approx \sqrt{0{,}06} \approx 0{,}24 \text{ (m)}.$$

c) Do $s_H \approx 0{,}24 < s_D \approx 0{,}26$ nên kết quả nhảy xa của vận động viên Huy đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng.

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở *Bảng 17* (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Nhóm	Tần số
[50 ; 60)	6
[60 ; 70)	12
[70 ; 80)	7
[80 ; 90)	8
[90 ; 100)	7
	$n = 40$

Bảng 17

II. Ý NGHĨA

• Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc và được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

• Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

• Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

BÀI TẬP

1. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong *Bảng 18*.

a) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

A. 53,2. B. 46,1. C. 30. D. 11.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là:

A. 6,8. B. 7,3. C. 3,3. D. 46,1.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 45)	42,5	4
[45 ; 50)	47,5	14
[50 ; 55)	52,5	8
[55 ; 60)	57,5	10
[60 ; 75)	62,5	6
[65 ; 70)	67,5	2
		$n = 44$

Bảng 18

2. *Bảng 19*, *Bảng 20* lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị: triệu đồng).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[10 ; 15)	12,5	15
[15 ; 20)	17,5	18
[20 ; 25)	22,5	10
[25 ; 30)	27,5	10
[30 ; 35)	32,5	5
[35 ; 40)	37,5	2
		$n = 60$

Bảng 19

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[10 ; 15)	12,5	25
[15 ; 20)	17,5	15
[20 ; 25)	22,5	7
[25 ; 30)	27,5	5
[30 ; 35)	32,5	5
[35 ; 40)	37,5	3
		$n = 60$

Bảng 20

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm lần lượt biểu diễn mức lương của hai công ty A, B.

b) Công ty nào có mức lương đồng đều hơn?

3. *Bảng 21* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[20 ; 30)	25	25
[30 ; 40)	35	20
[40 ; 50)	45	20
[50 ; 60)	55	15
[60 ; 70)	65	14
[70 ; 80)	75	6
		$n = 100$

Bảng 21

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là Q_1, Q_2, Q_3. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng:

A. $2Q_2$. B. $Q_1 - Q_3$. C. $Q_3 - Q_1$. D. $Q_3 + Q_1 - Q_2$.

2. *Bảng 22*, *Bảng 23* lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội và Huế (đơn vị: độ C).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[16,8 ; 19,8)	18,3	2
[19,8 ; 22,8)	21,3	3
[22,8 ; 25,8)	24,3	2
[25,8 ; 28,8)	27,3	1
[28,8 ; 31,8)	30,3	4
		$n = 12$

Bảng 22

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[16,8 ; 19,8)	18,3	1
[19,8 ; 22,8)	21,3	2
[22,8 ; 25,8)	24,3	3
[25,8 ; 28,8)	27,3	2
[28,8 ; 31,8)	30,3	4
		$n = 12$

Bảng 23

(*Nguồn: Niên giám Thống kê 2021, NXB Thống kê, 2022*)

a) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của Hà Nội và Huế.

b) Trong hai thành phố Hà Nội và Huế, thành phố nào có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn?

3. *Bảng 24* thống kê độ ẩm không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Đà Lạt và Vũng Tàu (đơn vị: %).

Tháng / Độ ẩm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đà Lạt	83	79	79	87	87	87	88	89	90	91	88	86
Vũng Tàu	75	77	78	77	79	79	81	79	81	83	80	77

Bảng 24

(*Nguồn: Niên giám Thống kê 2021, NXB Thống kê, 2022*)

a) Hãy lần lượt ghép các số liệu của Đà Lạt, Vũng Tàu thành năm nhóm sau:

[75 ; 78,3), [78,3 ; 81,6), [81,6 ; 84,9), [84,9 ; 88,2), [88,2 ; 91,5).

b) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của Đà Lạt và Vũng Tàu.

c) Trong hai thành phố Đà Lạt và Vũng Tàu, thành phố nào có độ ẩm không khí trung bình tháng đồng đều hơn?

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
điểm cực đại	hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in K$. Khi đó, x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a\ ;\ b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a\ ;\ b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ và $x \neq x_0$.	9
điểm cực tiểu	hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, $x_1 \in K$. Khi đó, x_1 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c\ ;\ d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c\ ;\ d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c\ ;\ d)$ và $x \neq x_1$.	9
độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm	căn bậc hai số học của phương sai	90
đường tiệm cận đứng	đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.	23
đường tiệm cận ngang	đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.	21
đường tiệm cận xiên	đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ được gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.	25
phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm	số $s^2 = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_m(x_m - \overline{x})^2}{n}$ gọi là phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm	90
thuế giá trị gia tăng	thuế tính trên giá trị tăng thêm của hàng hoá, dịch vụ phát sinh trong quá trình từ sản xuất, lưu thông đến tiêu dùng	53
thuế suất thuế thu nhập cá nhân	tỉ lệ phần trăm dùng để tính số thuế phải nộp căn cứ vào phần thu nhập tính thuế của mỗi người	52
thuế thu nhập cá nhân	khoản tiền mà người có thu nhập cá nhân phải nộp vào ngân sách nhà nước	51
tích có hướng của hai vectơ trong không gian	hai vectơ $\vec{u} = (x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ và $\vec{v} = (x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$ vectơ $\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1\ ;\ z_1x_2 - z_2x_1\ ;\ x_1y_2 - x_2y_1)$ gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.	79
tích vô hướng của hai vectơ trong không gian	là một số thực được xác định bởi công thức $\vec{a}.\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert.\lvert\vec{b}\rvert.\cos(\vec{a}, \vec{b})$, ở đó $(\vec{a}, \vec{b})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.	61

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:

LÊ HUY ĐẠN

Thiết kế sách:

PHAN THỊ LƯƠNG – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YẾN

Trình bày bìa:

NGUYỄN MẠNH HÙNG

Sửa bản in:

LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

TOÁN 12 - TẬP MỘT

Mã số:

ISBN: ....

In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ......

Địa chỉ: ....

Số xác nhận đăng kí xuất bản: ...-.../... /...-.../...

Quyết định xuất bản số: .... /....-... ngày ... /... /....

In xong và nộp lưu chiểu

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 12 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 12, thuộc bộ sách giáo khoa "Cánh Diều", thực hiện theo "Chương trình Giáo dục phổ thông 2018".

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.