CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG
LÊ VĂN HIỆN –TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài tập TOÁN 11

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG
LÊ VĂN HIỆN – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

Bài tập
TOÁN 11

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Sách BÀI TẬP TOÁN 11 (Kết nối tri thức với cuộc sống) gồm hai tập, là tài liệu bổ trợ cho sách giáo khoa TOÁN 11 bộ Kết nối tri thức với cuộc sống và được viết bởi cùng một đội ngũ tác giả.

BÀI TẬP TOÁN 11 được biên soạn theo đúng cấu trúc chương, bài như trong sách giáo khoa nhằm cung cấp cho các em một hệ thống bài tập phong phú, bổ trợ cho sách giáo khoa. Mỗi bài học đều có phần tóm tắt các kiến thức cần nhớ, các kĩ năng giải toán cần thiết thông qua những ví dụ minh hoạ tiêu biểu và phần đề bài tập gồm những bài tập được chọn lọc cẩn thận, theo đúng yêu cầu của Chương trình. Cuối mỗi chương có các bài tập trắc nghiệm và bài tập tự luận tổng hợp nhằm ôn tập và hệ thống hoá kiến thức, kĩ năng của cả chương. Cuối sách là phần lời giải, hướng dẫn, đáp số cho các bài tập.

BÀI TẬP TOÁN 11 bám sát các yêu cầu cần đạt của Chương trình mới môn Toán, đồng thời bổ sung làm đa dạng thêm các loại bài tập thích hợp với mỗi nội dung trong sách giáo khoa, đặc biệt là những bài tập định hướng ứng dụng, trong thực tiễn hoặc trong các môn học liên quan, nhằm phát triển năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học. BÀI TẬP TOÁN 11 giúp các em củng cố, phát triển và nâng cao các kiến thức, kĩ năng đã học, cũng như hình thành và phát triển năng lực toán học tương ứng.

Với cấu trúc và định hướng như vậy, BÀI TẬP TOÁN 11 sẽ là một tài liệu không thể thiếu cho tất cả các em học sinh sử dụng sách giáo khoa TOÁN 11 thuộc bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống. Chắc chắn BÀI TẬP TOÁN 11 cũng rất hữu ích cho tất cả học sinh lớp 11, dù học theo bất cứ bộ sách giáo khoa nào.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và tập thể tác giả chân thành cảm ơn giáo viên, học sinh, phụ huynh học sinh đã sử dụng cuốn sách này và mong nhận được những ý kiến góp ý để sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Mọi góp ý xin gửi về Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 81 Trần Hưng Đạo, Hoàn Kiếm, Hà Nội.

Các tác giả

MỤC LỤC

CHƯƠNG I
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia *Ou*, *Ov*. Xét tia *Om* cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia *Om* quay quanh điểm *O*, theo một chiều nhất định từ *Ou* đến *Ov* thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov* và kí hiệu là (*Ou*, *Ov*). Quy ước chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.

Số đo của góc lượng giác có tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov* được kí hiệu là $sđ(Ou, Ov)$.

2. Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

Để đo góc, ta dùng đơn vị độ và đơn vị rađian.

Quan hệ giữa độ và rađian: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad; 1 rad = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì độ dài $l = R\alpha$.

Trên đường tròn lượng giác, ta biểu diễn một góc lượng giác có số đo bằng α (độ hoặc rađian) bằng cách chọn tia đầu là tia OA và tia cuối là tia OM, với điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$. Điểm M được gọi là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α.

Các giá trị $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của α. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ xác định với mọi giá trị của α; $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

a) Các công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$;

$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$; $\quad \tan\alpha.\cot\alpha = 1\left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.

b) Giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt

Góc đối nhau (α và $-\alpha$):

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$):

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$):

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

Góc hơn kém nhau π (α và $\pi + \alpha$):

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. a) Đổi từ độ sang rađian các số đo sau: 30°; $80^\circ30'$.

b) Đổi từ rađian sang độ các số đo sau: $\frac{5\pi}{8}$; $3,75$.

Giải

a) Ta có: $30^\circ = 30.\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$; $\qquad$ $80^\circ30' = \left(80 + \frac{30}{60}\right)\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{161\pi}{360}$.

b) Ta có: $\frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}.\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 112,5^\circ$;

$$3,75 = 3,75\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{675}{\pi}\right)^\circ \approx 214,9^\circ.$$

Ví dụ 2. a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{\pi}{6}$.

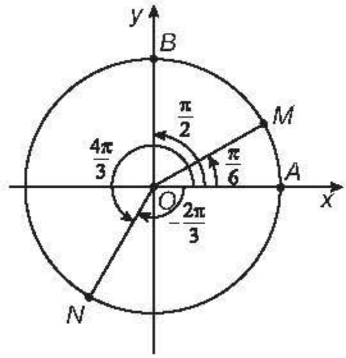
b) Xác định điểm B trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{\pi}{2}$.

c) Xác định điểm N trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\dfrac{-2\pi}{3}$.

Giải

Để xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác α, ta thực hiện như sau: Chọn điểm $A(1; 0)$ làm điểm đầu của cung tròn. Xác định điểm cuối M của cung tròn theo chiều ngược chiều kim đồng hồ nếu α dương, hay theo chiều kim đồng hồ nếu α âm, sao cho góc $\widehat{AOM} = \alpha$.

Điểm M, N và B được xác định trong Hình 1.1.



Hình 1.1

Ví dụ 3. Cho góc lượng giác có số đo bằng $\dfrac{4\pi}{3}$.

a) Xác định điểm N trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.

b) Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

Giải

a) Điểm N trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo $\dfrac{4\pi}{3}$ được xác định như trong Hình 1.1.

b) Từ đường tròn lượng giác và định nghĩa của các giá trị lượng giác, ta có

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2};\ \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3};\ \cot\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết $\sin\alpha = \dfrac{2}{7}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Giải. Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos\alpha < 0$. Mặt khác, từ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, suy ra

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{49}} = -\frac{\sqrt{45}}{7} = -\frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

Do đó, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{2}{7}}{-\frac{3\sqrt{5}}{7}} = -\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{1}{\frac{2}{3\sqrt{5}}} = -\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

Chú ý. Khi tính giá trị của một góc lượng giác thuộc một miền cho trước, cần xét dấu của giá trị lượng giác trong miền đã cho. Sau đó, sử dụng các công thức lượng giác cơ bản để tính các giá trị lượng giác còn lại.

Ví dụ 5. Bằng cách sử dụng giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt, hãy tính:

a) $\cos\frac{-15\pi}{4}$; b) $\cot(-675^\circ)$; c) $\sin\frac{11\pi}{3}$.

Giải. Ta có:

a) $\cos\frac{-15\pi}{4} = \cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cot(-675^\circ) = \cot(45^\circ - 720^\circ) = \cot 45^\circ = 1$.

c) $\sin\frac{11\pi}{3} = \sin\left(3\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. BÀI TẬP

1.1. Hoàn thành bảng sau:

Số đo độ	20°	?	150°	500°	?	?
Số đo rađian	?	$\frac{11\pi}{2}$	?	?	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{15}$

1.2. Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm Q biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{-5\pi}{7}$; c) 270°; d) -415°.

1.3. Một đường tròn có bán kính 20 m. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là:

a) $\frac{2\pi}{7}$; b) 36°.

1.4. Cho $\cos x = -\frac{5}{13}$ $(90^\circ < x < 180^\circ)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x.

1.5. Cho $\sin a + \cos a = m$. Hãy tính theo m.

a) $\sin a \cos a$; b) $\sin^3 a + \cos^3 a$; c) $\sin^4 a + \cos^4 a$.

1.6. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$;

b) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$;

c) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

1.7. Rút gọn biểu thức $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

1.8. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 860 mm.

1.9. Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

BÀI 2

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Công thức cộng	$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$ $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$ (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa).
Công thức nhân đôi	$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.
Công thức biến đổi tích thành tổng	$\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$.

Công thức biến đổi tổng thành tích	$\cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$ $\cos u-\cos v=-2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$ $\sin u+\sin v=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$ $\sin u-\sin v=2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Không dùng máy tính, hãy tính:

a) $\cos 165^\circ$; b) $\tan\frac{7\pi}{12}$.

Giải

$$\cos\left(165^\circ\right)=\cos\left(120^\circ+45^\circ\right)=\cos 120^\circ\cos 45^\circ-\sin 120^\circ\sin 45^\circ$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{1-3}=-2-\sqrt{3}.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$A=\cos 75^\circ.\cos 15^\circ$; $B=\sin\frac{11\pi}{2}\cos\frac{5\pi}{2}$.

Giải

$$A=\cos 75^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\left[\cos\left(75^\circ-15^\circ\right)+\cos\left(75^\circ+15^\circ\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ+\cos 90^\circ\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{1}{4}.$$

$$B=\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Chú ý. Khi tính giá trị của các biểu thức lượng giác có chứa các góc không đặc biệt, ta thường khai thác mối quan hệ giữa các góc trong biểu thức (tổng, hiệu) để tìm mối tương quan và sử dụng các công thức lượng giác để đưa về trường hợp các góc lượng giác đặc biệt.

Ví dụ 3. Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức sau

$$A = \frac{\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{5\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9}}.$$

Giải

$$A = \frac{\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{5\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Ví dụ 4. Biết $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc $2a$.

Giải

Do $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$. Vậy $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ta có: $\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$;

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$;

$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-4\sqrt{2}}{9} : \frac{7}{9} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$; $\cot 2a = \frac{1}{\tan 2a} = -\frac{7}{4\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

Chú ý. Để xác định giá trị lượng giác của một góc lượng giác a có điều kiện, đầu tiên ta dựa vào điều kiện để suy ra dấu của các giá trị lượng giác, sau đó áp dụng các công thức góc nhân đôi/công thức hạ bậc để tính các giá trị lượng giác của góc $2a$, $\frac{a}{2}$.

C. BÀI TẬP

1.10. Không sử dụng máy tính, tính các giá trị lượng giác của góc 105°.

1.11. Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

Tính $\sin x$, $\cos x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1.12. Chứng minh đẳng thức sau

$$\sin^4 a+\cos^4 a=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4a.$$

1.13. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=\sin\frac{\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}$; b) $B=\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ$.

1.14. Chứng minh rằng:

a) $\cos a-\sin a=\sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$; b) $\sin a+\sqrt{3}\cos a=2\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)$.

1.15. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

BÀI 3

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

– Hàm số $y = f(x)$ là *hàm số chẵn* nếu với mọi $x\in D$ ta có $-x\in D$ và $f(-x)=f(x)$.

– Hàm số $y = f(x)$ là *hàm số lẻ* nếu với mọi $x\in D$ ta có $-x\in D$ và $f(-x)=-f(x)$.

– Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng, còn đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

– Để vẽ đồ thị của hàm số chẵn (tương ứng, hàm số lẻ), ta chỉ cần vẽ phần đồ thị của nó ở bên phải trục Oy sau đó lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục Oy (tương ứng, qua gốc toạ độ O) là được đồ thị trên toàn tập xác định.

2. Hàm số tuần hoàn

– Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D gọi là *hàm số tuần hoàn* nếu tồn tại số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in D$, ta có:

- $x + T \in D$ và $x - T \in D$.
- $f(x+T) = f(x)$.

Số dương T nhỏ nhất thoả mãn điều kiện trên (nếu tồn tại) được gọi là *chu kì* của hàm số tuần hoàn đó.

– Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kì T, ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a+T]$, sau đó dịch chuyển dọc theo trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là T, $2T$, $3T$, ... ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

– Với a > 0, các hàm số $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ và $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, các hàm số $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ và $y = A\cot(\omega x + \varphi)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

3. Hàm số sin

– Hàm số sin là hàm số cho bởi công thức $y = \sin x$.

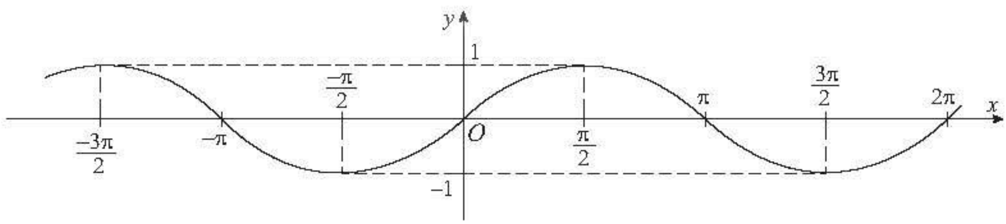
– Tập xác định của hàm sin là $\mathbb{R}$. Tập giá trị của hàm sin là $[-1; 1]$.

– Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì 2π.

– Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

– Đồ thị hàm $y = \sin x$



4. Hàm số côsin

– Hàm số côsin là hàm số cho bởi công thức $y = \cos x$.

– Tập xác định của hàm côsin là $\mathbb{R}$. Tập giá trị của hàm côsin là $[-1; 1]$.

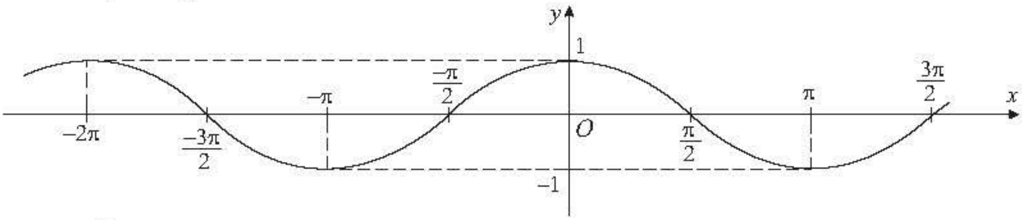
– Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì 2π.

– Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

– Đồ thị hàm $y = \cos x$



5. Hàm số tang

– Hàm số tang là hàm số cho bởi công thức $y = \tan x$.

– Tập xác định của hàm tang là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

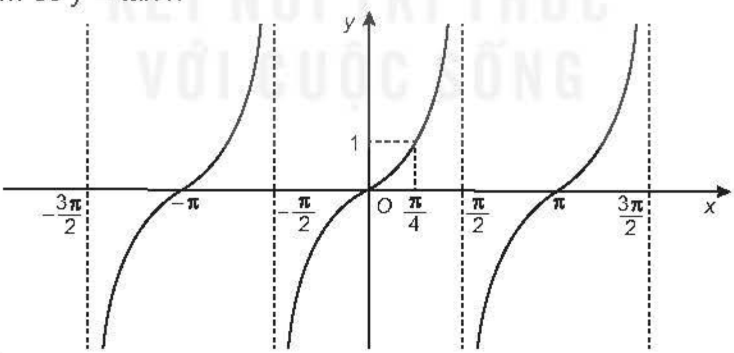
Tập giá trị của hàm tang là $\mathbb{R}$.

– Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì π.

– Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

– Đồ thị hàm số $y = \tan x$



6. Hàm số côtang

– Hàm số côtang là hàm số cho bởi công thức $y = \cot x$.

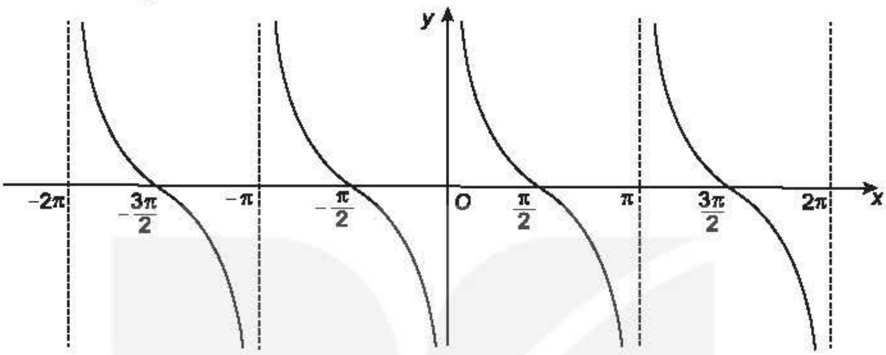
– Tập xác định của hàm côtang là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Tập giá trị của hàm côtang là $\mathbb{R}$.

– Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì π.

– Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

– Đồ thị hàm số $y = \cot x$



B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$;   b) $y = \dfrac{2x}{1 - \sin^2 x}$;

c) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$;   d) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

Giải

a) Biểu thức $\dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$ có nghĩa khi $\cos x \neq -1$ hay $x \neq \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Biểu thức $\dfrac{2x}{1 - \sin^2 x}$ có nghĩa khi $1 - \sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

c) Biểu thức $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ có nghĩa khi $\sin x \neq -1$ hay $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Biểu thức $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ có nghĩa khi $\sin x \neq 1$ hay $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chú ý. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

– Ta gọi M là *giá trị lớn nhất* của hàm số $y = f(x)$ trên tập D và kí hiệu là $M = \max\limits_{x\in D} f(x)$ nếu $f(x) \leq M, \ \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ thoả mãn $f(x_0) = M$.

– Tương tự, m là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số $y = f(x)$ trên tập D và kí hiệu là $m = \min\limits_{x\in D} f(x)$ nếu $f(x) \geq m, \ \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ thoả mãn $f(x_0) = m$.

– Khi không nói rõ tập D ta sẽ hiểu là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất được lấy trên tập xác định của nó.

Nhận xét. Nếu tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ là đoạn $[m;\ M]$ thì m và M tương ứng sẽ là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số.

Ví dụ 2. Tìm tập giá trị của các hàm số sau, từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chúng:

a) $y = 2 + 3\sin x$; b) $y = \dfrac{1+4\cos^2 x}{5}$;

c) $y = 2 - 4\sin^2 x\cos^2 x$; d) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$.

Giải

a) Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $-3 \leq 3\sin x \leq 3$, do đó $-1 \leq 2 + 3\sin x \leq 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $[-1;\ 5]$. Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là 5, đạt được khi $\sin x = 1$ hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là –1, đạt được khi $\sin x = -1$ hay $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Vì $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ nên $0 \leq 4\cos^2 x \leq 4$, do đó $\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1+4\cos^2 x}{5} \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[\dfrac{1}{5};\ 1\right]$. Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là 1, đạt được khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $x = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{1}{5}$, đạt được khi $\cos x = 0$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $y = 2 - 4\sin^2 x\cos^2 x = 2 - \sin^2 2x = 1 + \cos^2 2x$. Vì $0 \le \cos^2 2x \le 1$ nên $1 \le 1 + \cos^2 2x \le 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $[1; 2]$. Suy ra, giá trị lớn nhất của hàm số là 2, đạt được khi $\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$ hay $x = k\frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là 1, đạt được khi $\cos 2x = 0$ hay $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có $y = 2\sin^2 x - \cos 2x = 1 - 2\cos 2x$. Vì $-1 \le \cos 2x \le 1$ nên $-1 \le 1 - 2\cos 2x \le 3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $[-1; 3]$. Suy ra, giá trị lớn nhất của hàm số là 3, đạt được khi $\cos 2x = -1$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1, đạt được khi $\cos 2x = 1$ hay $x = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = x\sin 3x$;

b) $y = \frac{1 + \cos 3x}{1 - \cos 3x}$;

c) $y = x^3\cos 2x$;

d) $y = \sin x - \cos x$.

Giải

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = x\sin 3x$ thì với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$-x \in \mathbb{R} \text{ và } f(-x) = (-x)\sin 3(-x) = x\sin 3x = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{2\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Nếu kí hiệu $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{1 - \cos 3x}$ thì với mọi $x \in D$, ta có:

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = \frac{1 + \cos 3(-x)}{1 - \cos 3(-x)} = \frac{1 + \cos 3x}{1 - \cos 3x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = x^3 \cos 2x$ thì với mọi $x \in D$, ta có:

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = (-x)^3 \cos 2(-x) = -x^3 \cos 2x = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

d) Nếu kí hiệu $f(x) = \sin x - \cos x$

thì $f(-1) = \sin(-1) - \cos(-1) = -\sin 1 - \cos 1 \neq f(1)$ và $f(-1) \neq -f(1)$.

Vậy hàm số đã cho không là hàm số chẵn và cũng không là hàm số lẻ.

Nhận xét. Tổng và hiệu của hai hàm số chẵn (tương ứng, lẻ) vẫn là một hàm số chẵn (lẻ). Tích của hai hàm số chẵn (lẻ) luôn là một hàm số chẵn, tích của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ là một hàm số lẻ. Tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ, nói chung là một hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau:

a) $y = \sin 3x$;

b) $y = x^2$.

Giải

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = \sin 3x$ thì với mọi $x \in D$, ta có $x + \frac{2\pi}{3} \in D$, $x - \frac{2\pi}{3} \in D$ và

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn. Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $\frac{2\pi}{3}$.

b) Kí hiệu $f(x) = x^2$. Nếu $f(x+T) = f(x)$ với mọi x thì $(x+T)^2 = x^2$ với mọi x. Chọn $x = 0$ ta được $T^2 = 0$, hay $T = 0$. Vậy hàm số $y = x^2$ không tuần hoàn.

C. BÀI TẬP

1.16. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cot 3x$;

b) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$;

c) $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$;

d) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}}$.

1.17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2 + 3|\cos x|$;

b) $y = 2\sqrt{\sin x} + 1$;

c) $y = 3\cos^2 x + 4\cos 2x$; d) $y = \sin x + \cos x$.

1.18. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\cos 2x}{x^3}$; b) $y = x - \sin 3x$;

c) $y = \sqrt{1 + \cos x}$; d) $y = 1 + \cos x \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

1.19. Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau:

a) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ với $A > 0$; b) $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ với $A > 0$;

c) $y = 3\sin 2x + 3\cos 2x$; d) $y = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1.20. Với giá trị nào của x, mỗi đẳng thức sau đúng?

a) $\tan x \cot x = 1$; b) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

c) $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; d) $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

1.21. Từ đồ thị hàm số $y = \cos x$, hãy vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y = -\cos x$; b) $y = |\cos x|$;

c) $y = \cos x + 1$; d) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.22. Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ sao cho:

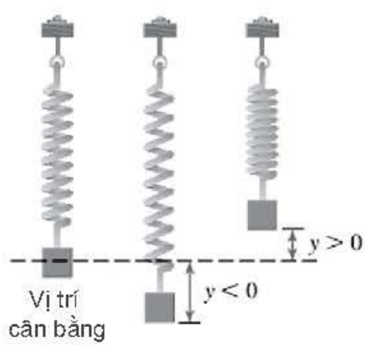
a) $\sin x = 0$; b) $\sin x > 0$.

1.23. Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.

a) Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.

b) Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.

c) Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.



1.24. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức

$$S(t) = 40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|,$$

ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

BÀI 4

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình sin x = m (1)

– Nếu $|m| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

– Nếu $|m| \le 1$ thì tồn tại duy nhất số $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\sin\alpha = m$.

Khi đó phương trình (1) tương đương với

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

1) Nếu góc α được cho bằng đơn vị độ thì công thức nghiệm trên trở thành:

$$\sin x = \sin\alpha^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - \alpha^0 + k360^0 \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Nếu u, v là các biểu thức của x thì

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Phương trình cos x = m (2)

– Nếu $|m| > 1$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

– Nếu $|m| \le 1$ thì tồn tại duy nhất số $\alpha \in [0;\pi]$ thoả mãn $\cos\alpha = m$.

Khi đó phương trình (2) tương đương với

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

1) Nếu góc α được cho bằng đơn vị độ thì công thức nghiệm trên trở thành:

$$\cos x = \cos\alpha^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^0 + k360^0 \\ x = -\alpha^0 + k360^0 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Nếu u, v là các biểu thức của x thì

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Phương trình tan *x* = *m* (3)

Phương trình (3) luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Luôn tồn tại duy nhất số $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\tan\alpha = m$.

Khi đó, phương trình (3) tương đương với

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

1) Nếu góc α được cho bằng đơn vị độ thì công thức nghiệm trên trở thành:

$$\tan x = \tan\alpha^0 \Leftrightarrow x = \alpha^0 + k180^0 \ (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Nếu u, v là các biểu thức của x thì $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

4. Phương trình cot *x* = *m* (4)

Phương trình (4) luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Luôn tồn tại duy nhất số $\alpha \in (0; \pi)$ thoả mãn $\cot\alpha = m$.

Khi đó, phương trình (4) tương đương với

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

1) Nếu góc α được cho bằng đơn vị độ thì công thức nghiệm trên trở thành:

$$\cot x = \cot\alpha^0 \Leftrightarrow x = \alpha^0 + k180^0 \ (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Nếu u, v là các biểu thức của x thì $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$;

b) $\cos\left(x - 10^\circ\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\tan 2x = \dfrac{2023}{2022}$;

d) $\cot(3x + 1) = -1$.

Giải

a) Ta có $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $\cos\left(x - 10^\circ\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - 10^\circ\right) = \cos 150^\circ$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 10^\circ = 150^\circ + k360^\circ \\ x - 10^\circ = -150^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 160^\circ + k360^\circ \\ x = -140^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Giả sử α là góc thoả mãn $\tan\alpha = \dfrac{2023}{2022}$. Khi đó ta có

$$\tan 2x = \dfrac{2023}{2022} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\alpha \Leftrightarrow 2x = \alpha + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\alpha}{2} + k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Ta có $\cot(3x + 1) = -1 \Leftrightarrow \cot(3x + 1) = \cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x - \sin 4x = 0$;

b) $\sin 2x - \cos 3x = 0$;

c) $\sin x + \cos 2x = 0$;

d) $\tan x - \cot x = 0$.

Giải

a) Ta có $\sin x - \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = x + k2\pi \\ 4x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có $\sin 2x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Ta có $\sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k2\pi \\ 2x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Ta có $\tan x - \cot x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \cot x \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + 2\cos x = 0$; b) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$;

c) $\sin\left(x + 30^\circ\right)\cos\left(2x - 150^\circ\right) = 0$; d) $\left(3\tan x - \sqrt{3}\right)\left(2\sin x - 1\right) = 0$.

Giải

a) Ta có $\sin 2x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có $\sin^3 x + \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x = \left(-\cos x\right)^3 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + k2\pi \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + k2\pi. \end{array}\right.$$

Từ đó, ta được nghiệm của phương trình là: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $\sin\left(x+30^{\circ}\right)\cos\left(2x-150^{\circ}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+30^{\circ}\right)=0\\ \cos\left(2x-150^{\circ}\right)=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+30^{\circ}=k180^{\circ}\\ 2x-150^{\circ}=90^{\circ}+k180^{\circ}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-30^{\circ}+k180^{\circ}\\ x=120^{\circ}+k90^{\circ}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

d) Điều kiện $\cos x \neq 0$.

Ta có $\left(3\tan x-\sqrt{3}\right)\left(2\sin x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\tan\dfrac{\pi}{6}\\ \sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì góc x với $\sin x=\dfrac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện $\cos x\neq 0$, nên nghiệm của phương trình là

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ và } x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình sin$x$ = cos$x$ trên đoạn $[-5\pi;10\pi]$.

Giải

Ta có $\sin x=\cos x \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ x=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in[-5\pi;10\pi]$ nên $-5\pi\leq\dfrac{\pi}{4}+k\pi\leq 10\pi \Leftrightarrow -\dfrac{21}{4}\leq k\leq\dfrac{39}{4}$.

Mặt khác, vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{-5;-4;\ldots;9\}$.

Vậy phương trình đã cho có 15 nghiệm trên đoạn $[-5\pi; 10\pi]$ là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \{-5; -4; \ldots; 9\}$.

C. BÀI TẬP

1.25. Giải các phương trình sau:

a) $2\sin\left(\frac{x}{3} + 15^\circ\right) + \sqrt{2} = 0$;

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = -1$;

c) $3\tan 2x + \sqrt{3} = 0$;

d) $\cot(2x - 3) = \cot 15^\circ$.

1.26. Giải các phương trình sau:

a) $\sin(2x + 15^\circ) + \cos(2x - 15^\circ) = 0$;

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

c) $\tan x + \cot x = 0$;

d) $\sin x + \tan x = 0$.

1.27. Giải các phương trình sau:

a) $(2 + \cos x)(3\cos 2x - 1) = 0$;

b) $2\sin 2x - \sin 4x = 0$;

c) $\cos^6 x - \sin^6 x = 0$;

d) $\tan 2x \cot x = 1$.

1.28. Tìm các giá trị của x để giá trị tương ứng của các hàm số sau bằng nhau:

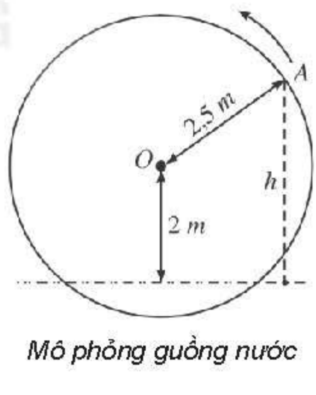
a) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ và $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.29. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó

$$y = 2 + 2{,}5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

1.30. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2{,}83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1.31. Đổi số đo góc $\alpha = 105^\circ$ sang rađian ta được

A. $\alpha = \frac{5\pi}{8}$. B. $\alpha = \frac{\pi}{8}$. C. $\alpha = \frac{7\pi}{12}$. D. $\alpha = \frac{9\pi}{12}$.

Câu 1.32. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α mà $\widehat{uOv}$ là góc tù. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Có số nguyên k để $\frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$. B. $-\pi \leq \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

C. $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Câu 1.33. Giá trị $\cot\frac{89\pi}{6}$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $-\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 1.34. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin\alpha < 0$; $\cos\alpha > 0$. B. $\sin\alpha > 0$; $\cos\alpha > 0$.

C. $\sin\alpha < 0$; $\cos\alpha < 0$. D. $\sin\alpha > 0$; $\cos\alpha < 0$.

Câu 1.35. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

C. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. D. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

Câu 1.36. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$.

B. $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$.

C. $\sin(180^\circ - a) = \sin a$.

D. $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

Câu 1.37. Biết $\sin x = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\cos^2 x$ bằng

A. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

B. $\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$.

D. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

Câu 1.38. Biết $\cot x = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $\frac{4\sin x + 5\cos x}{2\sin x - 3\cos x}$ bằng

A. $\frac{1}{17}$.

B. $\frac{5}{9}$.

C. 13.

D. $\frac{2}{9}$.

Câu 1.39. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$.

B. $\cos u - \cos v = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$.

C. $\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$.

D. $\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$.

Câu 1.40. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

B. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

C. $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

D. $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$.

Câu 1.41. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathbb{R}$.

Câu 1.42. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

B. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

C. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên các khoảng $(-\pi;0)$ và $(0;\pi)$.

D. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Câu 1.43. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

C. Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Câu 1.44. Hàm số nào dưới đây có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

A. $y = \cos x$. B. $y = \sin^3 x$. C. $y = \sin x$. D. $y = \tan x$.

Câu 1.45. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

Câu 1.46. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số tuần hoàn.

B. Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y = x \sin x$ là hàm số tuần hoàn.

D. Hàm số $y = x \sin x$ là hàm số chẵn.

Câu 1.47. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 1.48. Số nghiệm của phương trình $2\cos x = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 1.49. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình $3\cos x - 1 = 0$ bằng

A. $S = 2\pi$. B. $S = 0$. C. $S = 4\pi$. D. $S = 3\pi$.

Câu 1.50. Giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau khi và chỉ khi

A. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = k\frac{\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. TỰ LUẬN

1.51. Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau và tính các giá trị lượng giác của chúng:

a) $\frac{23\pi}{4}$; b) $\frac{31\pi}{6}$; c) -1380°.

1.52. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 m và 1,26 m. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

1.53. Huyện lị Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lị Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lị đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính 6 378 km.

1.54. Cho $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha > 0$; $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\beta \in \left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$.

Hãy tính $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\sin 2\beta$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$.

1.55. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$; b) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha}$;

c) $\dfrac{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha - \sin\alpha}$; d) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$.

1.56. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

c) $C = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$; c) $D = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$.

1.57. Hai sóng âm có phương trình lần lượt là

$$f_1(t) = C\sin\omega t \text{ và } f_2(t) = C\sin(\omega t + \alpha).$$

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo ra một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C\sin\omega t + C\sin(\omega t + \alpha).$$

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng $f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, ở đó A, B là hai hằng số phụ thuộc vào α.

b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k\sin(\omega t + \varphi)$.

1.58. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos\frac{2x}{x-1}$; b) $y = \frac{1}{\cos x - \cos 3x}$;

c) $y = \frac{1}{\cos x + \sin 2x}$; d) $y = \tan x + \cot x$.

1.59. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \sin x - \cos x$; b) $y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

c) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; d) $y = \cos 2x + 2\cos x - 1$.

1.60. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin^3 x - \cot x$; b) $y = \frac{\cos x + \tan^2 x}{\cos x}$;

c) $y = \sin 2x + \cos x$; d) $y = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

1.61. Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau:

a) $y = \sin\frac{x}{2} + \cos 3x$; b) $y = \cos 5x + \tan\frac{x}{3}$.

1.62. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\tan\left(\frac{x}{3} + 10^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

c) $\sin 3x - \cos 5x = 0$; d) $\tan 3x \tan x = 1$.

1.63. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 5x + \cos 5x = -1$;

b) $\cos 3x - \cos 5x = \sin x$;

c) $2\cos^2 x + \cos 2x = 2$;

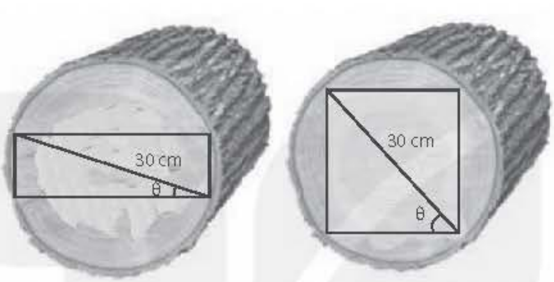
d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

1.64. Một thanh xà gỗ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính 30 cm.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ được tính bởi công thức

$$S(\theta) = 450\sin 2\theta \ (\text{cm}^2),$$

ở đó góc θ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ là lớn nhất.

1.65. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 mmHg.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 mmHg.

CHƯƠNG II

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

BÀI 5

DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u = u(n)$.

Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Số u_1 gọi là *số hạng đầu*, u_n là số hạng thứ n và gọi là *số hạng tổng quát* của dãy số.

2. Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; ...; m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, ..., u_m$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

3. Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

4. Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \leq M \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \geq m \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho

$$m \leq u_n \leq M \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. *(Xác định dãy số)*

Viết năm số hạng đầu tiên của mỗi dãy số (u_n) sau:

a) $u_n = (-1)^{n+1} n^2$;

b) $u_1 = 1, u_2 = 2, u_n = u_{n-1} \cdot u_{n-2}$ $(n \geq 3)$.

Giải

a) Thay lần lượt $n = 1, 2, 3, 4, 5$ vào công thức của u_n ta có:

$$u_1 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1;\ u_2 = (-1)^3 \cdot 2^2 = -4;\ u_3 = (-1)^4 \cdot 3^2 = 9;$$

$$u_4 = (-1)^5 \cdot 4^2 = -16;\ u_5 = (-1)^6 \cdot 5^2 = 25.$$

b) Thay lần lượt $n = 3, 4, 5$ vào công thức của u_n ta có:

$$u_1 = 1;\ u_2 = 2;\ u_3 = u_1 \cdot u_2 = 2;\ u_4 = u_2 \cdot u_3 = 4;\ u_5 = u_3 \cdot u_4 = 8.$$

Ví dụ 2. *(Xác định tính tăng, giảm, bị chặn của dãy số)*

Xét tính tăng, giảm và tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1-n}{n+1}$.

Giải

Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-(n+1)}{n+2} - \frac{1-n}{n+1} = -\frac{n}{n+2} - \frac{1-n}{n+1}$$

$$= \frac{-n(n+1)-(1-n)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = -\frac{2}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Do đó (u_n) là dãy số giảm.

Do $u_n = \dfrac{1-n}{n+1} = \dfrac{-(n+1)+2}{n+1} = -1 + \dfrac{2}{n+1} > -1, \forall n \geq 1$, nên dãy (u_n) bị chặn dưới.

Dãy (u_n) cũng bị chặn trên vì $u_n = -1 + \dfrac{2}{n+1} \leq -1 + \dfrac{2}{1+1} = 0, \forall n \geq 1$.

Do đó (u_n) là dãy số bị chặn.

Ví dụ 3. *(Vận dụng thực tiễn)*

Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3. Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n.

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Giải

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0\left(1 + 3\%\right) - 120\,000 = 1{,}03A_0 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1\left(1 + 3\%\right) - 120\,000 = 1{,}03A_1 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2\left(1 + 3\%\right) - 120\,000 = 1{,}03A_2 - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

Tương tự, vào cuối năm thứ $n\left(n \geq 1\right)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = A_{n-1}\left(1 + 3\%\right) - 120\,000 = 1{,}03A_{n-1} - 120\,000 \text{ (đồng)}.$$

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4:

$$A_1 = 10\,180\,000; \qquad A_2 = 10\,365\,400;$$

$$A_3 = 10\,556\,362; \qquad A_4 = 10\,753\,053.$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10 753 053 đồng.

C. BÀI TẬP

2.1. Viết năm số hạng đầu tiên của mỗi dãy số $\left(u_n\right)$ sau:

a) $u_n = \left(-1\right)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}$; b) $u_1 = 1, u_n = n - u_{n-1}\left(n \geq 2\right)$.

2.2. Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số sau:

a) $u_n = n^2 + n + 1$; b) $u_n = \dfrac{2n+5}{n+2}$; c) $u_n = \dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n^2+1}$.

2.3. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$; b) $u_n = n^2 + n - 1$; c) $u_n = -n^2 + 1$.

2.4. Để tính xấp xỉ giá trị $\sqrt{p}$, người ta có thể dùng dãy số cho bởi hệ thức truy hồi sau:

$$u_1 = k, u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{p}{u_{n-1}}\right) \text{ với } n \geq 2,$$

ở đó k là một giá trị dự đoán ban đầu của $\sqrt{p}$.

Sử dụng hệ thức truy hồi này, hãy tính xấp xỉ các giá trị sau bằng cách tính u_5 và tính sai số tuyệt đối khi so với giá trị tính bằng máy tính cầm tay (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ năm).

a) $\sqrt{5}$ (lấy $k = 3$); b) $\sqrt{8}$ (lấy $k = 3$).

2.5. Cho dãy số (u_n) xác định bằng hệ thức truy hồi

$$u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + (n+1).$$

a) Mỗi số hạng của dãy số này gọi là một *số tam giác*. Viết bảy số tam giác đầu.

b) Biết rằng $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Hãy chứng tỏ công thức của số hạng tổng quát là $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

c) Chứng minh rằng $u_{n+1} + u_n = (n+1)^2$, tức là tổng của hai số tam giác liên tiếp là một số chính phương.

2.6. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

2.7. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2{,}5 \cdot (1{,}035)^n \text{ (tỉ đồng).}$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

2.8. Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200\left(1 + \frac{0{,}03}{4}\right)^n, n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

2.9. Vi khuẩn E. Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E. Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E. Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể?

2.10. Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1{,}0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4{,}0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

BÀI 6

CẤP SỐ CỘNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Cấp số cộng* là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi *d*. Số *d* được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

2. Cấp số cộng (u_n) với công sai *d* được cho bởi hệ thức truy hồi

$$u_n = u_{n-1} + d \text{ với } n \geq 2.$$

3. Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

4. Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. *(Nhận biết cấp số cộng)*

Chứng tỏ rằng dãy số (u_n) với $u_n = 4 - n$ là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

Giải

Ta có $u_n - u_{n-1} = 4 - n - \left[4-(n-1)\right] = -1$, với mọi $n \geq 2$.

Do đó (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = -1$.

Ví dụ 2. *(Vận dụng tính chất của cấp số cộng)*

Tìm x sao cho $x+3, 2x+1$ và $5x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Giải

Từ $x+3$, $2x+1$ và $5x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, ta suy ra $(x+3)+(5x+2) = 2(2x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Thử lại, ta có ba số tìm được là $\frac{3}{2}, -2, -\frac{11}{2}$ thoả mãn bài toán. Vậy $x = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 3. *(Vận dụng thực tiễn)*

Một hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy. Có tất cả 27 hàng ghế. Hỏi hội trường đó có bao nhiêu ghế?

Giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n. Vì hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba, ... nên dãy số (u_n) lập thành cấp số cộng có $u_1 = 35$ và công sai $d = 2$. Suy ra tổng số ghế của hội trường với 27 hàng ghế là

$$S_{27} = \frac{(2u_1 + 26d)\cdot 27}{2} = 1\,647 \text{ (ghế)}.$$

C. BÀI TẬP

2.11. Mỗi dãy số (u_n) sau có phải là một cấp số cộng hay không? Nếu có, hãy tìm số hạng đầu và công sai của nó:

a) $u_n = 4 - 3n$;

b) $u_n = n^2 + 1$;

c) $u_n = 2n + 5$;

d) $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + n$.

2.12. Số hạng thứ tám của một cấp số cộng là 75 và số hạng thứ hai mươi là 39.

a) Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng.

b) Tìm hệ thức truy hồi cho cấp số cộng.

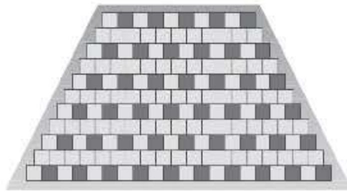
c) Tìm công thức số hạng thứ n của cấp số cộng.

2.13. Tổng 20 số hạng đầu của một cấp số cộng với công sai bằng 3 là 650. Tìm số hạng đầu của cấp số cộng này.

2.14. Tìm x để $2x$, $3x + 2$ và $5x + 3$ là các số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

2.15. Phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là 78 và công sai là -4 để được tổng là 702?

2.16. Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng 2,4 m ở đáy và rộng 1,2 m ở đỉnh (hình vẽ bên). Các viên gạch hình vuông có kích thước 10 cm $\times$ 10 cm phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?



2.17. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?

b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

2.18. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2 040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

2.19. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35 000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1 400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319 200 đô la?

2.20. Nếu p, m và q lập thành một cấp số cộng thì dễ thấy $m = \frac{p+q}{2}$. Số m gọi là *trung bình cộng* của p và q. Cho hai số p và q, nếu ta tìm được k số khác $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sao cho $p, m_1, m_2, \ldots, m_k, q$ lập thành một cấp số cộng, chúng ta nói rằng chúng ta đã "chèn k trung bình cộng vào giữa p và q".

a) Hãy chèn ba trung bình cộng vào giữa 4 và 12.

b) Tìm bốn trung bình cộng nằm giữa 16 và 91.

BÀI 7

CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Cấp số nhân* là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q. Số q được gọi là *công bội* của cấp số nhân.

2. Cấp số nhân (u_n) với công bội q được cho bởi hệ thức truy hồi

$$u_n = u_{n-1} \cdot q \text{ với } n \geq 2.$$

3. Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. *(Nhận biết cấp số nhân)*

Chứng tỏ rằng dãy số sau là cấp số nhân: $u_n = 3 \cdot 4^n$.

Tìm số hạng đầu và công bội của nó.

Giải

Với mọi $n \geq 2$, ta có $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{3 \cdot 4^n}{3 \cdot 4^{n-1}} = 4$,

tức là $u_n = 4u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 12$, công bội $q = 4$.

Ví dụ 2. *(Vận dụng tính chất của cấp số nhân)*

Tìm x để $x-1$, x và $x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Giải

Do $x-1$, x và $x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x}.$$

Do đó $x^2 = (x+2)(x-1)$, tức là $x = 2$.

Thử lại, ta có ba số tìm được là 1, 2, 4 thoả mãn bài toán. Vậy $x = 2$.

Ví dụ 3. *(Vận dụng thực tế)*

Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm (H. 2.1). Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Hình 2.1

Giải

Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Do lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm, sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0{,}98$.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1q^9 = 46 \cdot 0{,}98^9 \approx 38{,}35$ (cm).

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S_{15} = u_1\frac{1-q^{15}}{1-q} = 46 \cdot \frac{1-0{,}98^{15}}{1-0{,}98} \approx 601{,}29 \text{ (cm)}.$$

C. BÀI TẬP

2.21. Chứng minh rằng mỗi dãy số (u_n) sau là một cấp số nhân. Hãy tìm số hạng đầu và công bội của nó.

a) $u_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$; b) $u_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$.

2.22. Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân 64, –32, 16, –8, ...

2.23. Cho một cấp số nhân với tất cả các các số hạng đều dương. Số hạng thứ 4 của cấp số nhân là 125 và số hạng thứ 10 là $\frac{125}{64}$. Tìm số hạng thứ 14 của cấp số nhân này.

2.24. Tìm x sao cho x, $x + 2$, $x + 3$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

2.25. Tính các tổng sau:

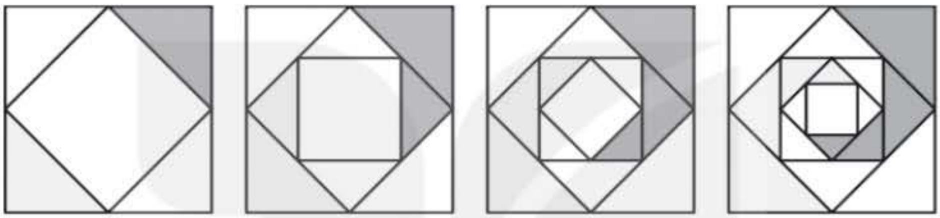
a) $1 + 4 + 16 + 64 + \ldots + 4^9$; b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \ldots + \frac{2^{12}}{3}$.

2.26. Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

2.27. Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

2.28. Để tích luỹ tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích luỹ này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích luỹ được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

2.29. Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16 cm. Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới). Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.



2.30. Nếu p, m và q lập thành một cấp số nhân thì dễ thấy $m^2 = p \cdot q$. Số m được gọi là *trung bình nhân* của p và q. Cho hai số p và q, nếu ta tìm được k số khác $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sao cho $p, m_1, m_2, \ldots, m_k, q$ lập thành một cấp số nhân, thì chúng ta nói rằng đã "chèn k trung bình nhân vào giữa p và q". Hãy:

a) Chèn hai trung bình nhân vào giữa 3 và 24;

b) Chèn ba trung bình nhân vào giữa 2,25 và 576.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A. TRẮC NGHIỆM

2.31. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + n$. Số hạng u_4 là

A. 5. B. 6. C. 7. D. 10.

2.32. Hãy chọn dãy số bị chặn trong các dãy số (u_n) sau:

A. $u_n = 1 - n^2$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = n \sin n$.

D. $u_n = \dfrac{2-n}{n+1}$.

2.33. Hãy chọn dãy số tăng trong các dãy số (u_n) sau:

A. $u_n = -2n + 1$.

B. $u_n = n^2 - n + 1$.

C. $u_n = (-1)^n 2^n$.

D. $u_n = 1 + \sin n$.

2.34. Cho dãy số $u_n = 2\,020 \sin\frac{n\pi}{2} + 2\,021 \cos\frac{n\pi}{3}$. Mệnh nào dưới đây là đúng?

A. $u_{n+6} = u_n$.

B. $u_{n+9} = u_n$.

C. $u_{n+4} = u_n$.

D. $u_{n+12} = u_n$.

2.35. Chọn cấp số cộng trong các dãy số (u_n) sau:

A. $u_n = 3^n + 2$.

B. $u_n = \frac{3}{n} + 1$.

C. $u_n = 3n$.

D. $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + n$.

2.36. Cho cấp số cộng với $u_1 = -2, u_9 = 22$. Tổng của 50 số hạng đầu của cấp số cộng này là

A. 3 570.

B. 3 575.

C. 3 576.

D. 3 580.

2.37. Chọn cấp số nhân trong các dãy số (u_n) sau:

A. $u_n = 2n$.

B. $u_n = \frac{2}{n}$.

C. $u_n = 2^n$.

D. $u_1 = 1, u_{n+1} = nu_n$.

2.38. Tổng $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ bằng

A. $2 + \frac{1}{2^n}$.

B. $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

C. $2 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

D. $2 - \frac{1}{2^n}$.

2.39. Có bao nhiêu cấp số nhân có năm số hạng mà tổng của năm số hạng đó là 31 và tích của chúng là 1 024?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

2.40. Ông Trung có 100 triệu đồng gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau 3 năm số tiền trong tài khoản tiết kiệm của ông Trung **gần nhất** với số nào sau đây?

A. 126 532 000 đồng.

B. 158 687 000 đồng.

C. 125 971 000 đồng.

D. 112 486 000 đồng.

2.41. Một du khách vào trường đua ngựa xem đua ngựa và đặt cược chọn con thắng cuộc. Nếu chọn đúng con thắng cuộc thì sẽ nhận được số tiền gấp đôi số tiền đặt cược, còn nếu chọn sai thì sẽ mất số tiền đặt cược. Người du khách đó lần đầu tiên đặt 20 000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu?

A. Thắng 20 000 đồng.

B. Hoà vốn.

C. Thua 20 000 đồng.

D. Thua 40 000 đồng.

2.42. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 210?

A. 40.

B. 30.

C. 20.

D. 10.

B. TỰ LUẬN

2.43. Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, dãy số nào là cấp số nhân? Nếu dãy số là cấp số cộng hoặc cấp số nhân, hãy xác định công sai hoặc công bội của nó.

a) $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n + n$;

b) $u_n = 6n + 3$;

c) $u_1 = 1, u_{n+1} = n \cdot u_n$;

d) $u_n = 3 \cdot 5^n$.

2.44. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ và $b_1, b_2, b_3, \ldots$ là hai cấp số cộng thì $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ cũng là cấp số cộng.

b) Nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ và $b_1, b_2, b_3, \ldots$ là hai cấp số nhân thì $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots$ cũng là cấp số nhân.

2.45. Một con chó con nặng 0,4 kg khi mới sinh và sau mỗi tuần tuổi khối lượng của nó tăng thêm 24%. Giả sử u_n (kg) là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n.

a) Viết lần lượt các công thức tính u_2, u_3. Từ đó dự đoán công thức của u_n.

b) Con chó nặng bao nhiêu kilôgam khi được sáu tuần tuổi?

2.46. Bác Hưng quyết định tham gia một chương trình bơi lội để duy trì sức khoẻ. Bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó.

a) Tìm công thức truy hồi cho số phút T_n mà bác ấy bơi vào ngày thứ n của chương trình.

b) Tìm sáu số hạng đầu của dãy số T_n.

c) Tìm công thức tổng quát của dãy số (T_n).

d) Bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ bao nhiêu của chương trình?

e) Tính tổng thời gian bác Hưng bơi sau 30 ngày đầu của chương trình.

2.47. Dãy các số chính phương sau đây không phải là cấp số cộng

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots$$

Tuy nhiên, chúng ta có thể lập một cấp số cộng liên quan bằng cách tìm hiệu của các số hạng liên tiếp của dãy số này.

a) Viết tám số hạng đầu của cấp số cộng liên quan được mô tả ở trên. Tìm công thức của số hạng thứ n của cấp số cộng này.

b) Mô tả bằng cách nào để chúng ta có thể lập được một cấp số cộng từ dãy các số lập phương sau đây:

$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, \ldots$$

c) Viết bảy số hạng đầu của cấp số cộng ở trong phần b) và tìm số hạng thứ n của nó.

2.48. Chứng minh rằng nếu ba số theo thứ tự vừa lập thành một cấp số cộng vừa lập thành một cấp số nhân thì ba số ấy bằng nhau.

2.49. Anh Nam là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Anh vừa kí hợp đồng 5 năm với một câu lạc bộ với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch câu lạc bộ đưa ra cho anh Nam ba phương án về lương như sau:

– *Phương án 1*: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.

– *Phương án 2*: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

– *Phương án 3*: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp anh Nam xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của anh Nam là lớn nhất?

2.50. Một dãy số (u_n) được gọi là một *cấp số nhân cộng* nếu nó cho bởi hệ thức truy hồi

$$u_1 = a,\ u_{n+1} = qu_n + d.$$

Nếu $q = 1$ ta có cấp số cộng với công sai d, còn nếu $d = 0$ ta có cấp số nhân với công bội q.

a) Giả sử $q \neq 1$. Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

b) Thiết lập công thức tính tổng S_n của n số hạng đầu của cấp số nhân cộng (u_n).

CHƯƠNG III

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

BÀI 8

MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khi ta không thể thu thập được số liệu chính xác hoặc do yêu cầu của bài toán ta phải biểu diễn mẫu số liệu dưới dạng ghép nhóm để thuận lợi cho việc tổ chức, đọc và phân tích số liệu. Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số của các nhóm số liệu (Bảng 1). Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 1. Mẫu số liệu ghép nhóm

2. Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước.

Bước 2: Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.

Trong các bài tập, ta không nên chia thành quá nhiều hoặc quá ít nhóm. Các nhóm không giao nhau và nên có độ dài bằng nhau, tổng độ dài các nhóm lớn hơn khoảng biến thiên.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. 100 người thực hiện bài trắc nghiệm để đo chỉ số IQ, kết quả thu được như sau:

Chỉ số IQ	Dưới 70	[70; 85)	[85; 115)	[115; 130)	[130; 145)	Từ 145 trở lên
Số người	2	15	45	20	15	3

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Người có chỉ số IQ từ 85 đến dưới 115 là ở mức trung bình. Xác định tỉ lệ người có IQ cao hơn mức trung bình.

Giải

a) Các nhóm số liệu gồm *Dưới 70; [70; 85); [85; 115); [115; 130); [130; 145); Từ 145 trở lên* với tần số tương ứng là 2, 15, 45, 20, 15, 3.

b) Số người có chỉ số IQ cao hơn mức trung bình là 20 + 15 + 3 = 38. Vậy tỉ lệ người có chỉ số IQ cao hơn mức trung bình là 38/100 = 38%.

Ví dụ 2. Theo Tổ chức Y tế Thế giới (WHO), thiếu máu là tình trạng giảm lượng huyết sắc tố (Hb) dẫn tới sự thiếu cung cấp oxygen cho các mô trong cơ thể. Đối với nam giới trên 15 tuổi, chỉ số Hb (đơn vị tính là g/l) lớn hơn hoặc bằng 130 được xem là không bị thiếu máu, từ 110 đến dưới 130 là thiếu máu mức nhẹ, từ 80 đến dưới 110 là thiếu máu mức vừa, dưới 80 là mức nặng. Đo chỉ số Hb của một số học sinh nam lớp 12 cho kết quả như sau:

132, 135, 137, 131, 129, 125, 140, 147, 138, 137, 128, 112,
127, 129, 125, 98, 139, 138, 139, 141, 140, 105, 136, 133,
137, 138, 108, 133, 136, 141, 144, 134, 136, 137, 142.

Ghép nhóm cho mẫu số liệu này theo mức độ thiếu máu.

Giải

Có 25 học sinh có chỉ số Hb từ 130 trở lên (không bị thiếu máu), 7 học sinh có chỉ số Hb từ 110 đến dưới 130 (thiếu máu mức nhẹ), 3 học sinh có chỉ số Hb từ 80 đến dưới 110 (thiếu máu mức trung bình). Ta có mẫu số liệu ghép nhóm:

Chỉ số Hb (g/l)	Từ 130 trở lên	[110; 130)	[80; 110)
Số học sinh	25	7	3

C. BÀI TẬP

3.1. Từ 1/7/2019, dựa trên thu nhập bình quân đầu người (kí hiệu là GNIPC, tính theo đô la Mĩ), Ngân hàng Thế giới xác định một nền kinh tế ở mức thu nhập thấp nếu GNIPC nhỏ hơn 1 026, ở mức thu nhập dưới trung bình nếu GNIPC từ 1 026 đến dưới 3 996, ở mức thu nhập trên trung bình nếu GNIPC từ 3 996 đến dưới 12 376 và ở mức thu nhập cao nếu GNIPC từ 12 376 trở lên

(Theo Ngân hàng Thế giới). Thu nhập bình quân đầu người của một số nền kinh tế thuộc khu vực châu Á Thái Bình Dương năm 2021 được cho như sau:

102 450, 70 700, 67 580, 55 290, 47 490, 45 440, 44 570, 28 730, 19 170, 18 530, 16 520, 13 790, 12 904, 11 090, 11 040, 10 440, 9 450, 8 150, 7 220, 6 960, 5 800, 4 430, 4 340, 4 280, 4 230, 2 100.

(Theo *statistica.com*)

a) Ghép nhóm mẫu số liệu trên theo mức thu nhập của nền kinh tế.

b) GNIPC của Việt Nam năm 2021 là 11 040. Nền kinh tế Việt Nam được xếp ở mức nào?

3.2. Thống kê chỉ số chất lượng không khí (AQI) tại một địa điểm vào các ngày trong tháng 6/2022 được cho trong bảng sau:

Chỉ số AQI	[0; 50)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	Trên 200
Số ngày	5	11	7	4	3

a) Đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm.

b) Chất lượng không khí được xem là tốt nếu AQI nhỏ hơn 50, là trung bình nếu AQI từ 50 đến dưới 100. Trong tháng 6/2022 tại địa điểm này có bao nhiêu ngày chất lượng không khí dưới mức trung bình?

3.3. Trẻ sơ sinh được xem là nhẹ cân nếu cân nặng khi sinh dưới 2 kg, là thừa cân nếu cân nặng khi sinh trên 4 kg, là có cân nặng trung bình nếu cân nặng khi sinh từ 2 kg đến 4 kg. Thống kê cân nặng (tính theo kg) của 15 trẻ sơ sinh tại một bệnh viện cho kết quả như sau:

3,4 2,7 1,9 3,5 3,3 2,8 4,2 2,6 2,8 3,0 3,7 3,9 4,1 2,7 2,5.

a) Tìm số trẻ nhẹ cân, thừa cân, có cân nặng trung bình trong 15 trẻ sơ sinh trên.

b) Xây dựng mẫu số liệu ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.

3.4. Thời gian hoàn thành bài kiểm tra Toán 45 phút của các bạn trong lớp được cho như sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45]
Số học sinh	2	7	10	25

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Có bao nhiêu học sinh hoàn thành bài kiểm tra trước khi hết giờ trên 5 phút?

BÀI 9

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Ở lớp 10, chúng ta đã biết cách tính các số đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm (còn gọi là mẫu số liệu gốc) $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp ta không có mẫu số liệu gốc mà chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm dạng

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Khi đó, các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các số đặc trưng của mẫu số liệu gốc. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm gồm số trung bình, trung vị, tứ phân vị và mốt.

2. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_kx_k}{n}$$

trong đó, $n = m_1 + \ldots + m_k$ là tổng số quan sát (còn gọi là cỡ mẫu) và $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ gọi là giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

3. Để tính trung vị M_e của mẫu số liệu ghép nhóm ta làm như sau:

Bước 1. Xác định nhóm chứa trung vị. Giả sử đó là nhóm thứ *j*: $[a_j; a_{j+1})$.

Bước 2. Trung vị là

$$M_e = a_j + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \ldots + m_{j-1})}{m_j} \cdot (a_{j+1} - a_j),$$

trong đó *n* là cỡ mẫu. *Với j* = 1 *ta quy ước* $m_1 + \ldots + m_{j-1} = 0$. Trung vị chính là tứ phân vị thứ hai Q_2. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu gốc, nó chia mẫu số liệu thành hai phần, mỗi phần chứa 50% giá trị.

4. Để tính tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm trước hết ta xác định nhóm chứa Q_1, giả sử đó là nhóm thứ *p*: $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó,

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó n là cỡ mẫu, *với* $p = 1$ *ta quy ước* $m_1 + \ldots + m_{p-1} = 0$.

Để tính tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm trước hết ta xác định nhóm chứa Q_3. Giả sử đó là nhóm thứ p: $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó,

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \ldots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó n là cỡ mẫu, *với* $p = 1$ *ta quy ước* $m_1 + \ldots + m_{p-1} = 0$.

Để xác định nhóm chứa tứ phân vị thứ r (r = 1, 2, 3) ta có thể dựa vào tính chất có khoảng $\frac{nr}{4}$ số giá trị nhỏ hơn tứ phân vị đó.

Các tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

5. Để tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm mốt), giả sử là nhóm j: $[a_j; a_{j+1})$.

Bước 2. Mốt được xác định là

$$M_0 = a_j + \frac{(m_j - m_{j-1})}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot h,$$

trong đó h là độ rộng của nhóm và ta quy ước $m_0 = m_{k+1} = 0$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho mốt của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Lưu ý. Người ta chỉ định nghĩa mốt cho mẫu ghép nhóm có độ dài các nhóm bằng nhau. Một mẫu có thể không có mốt hoặc có nhiều hơn 1 mốt. Khi tần số của các nhóm bằng nhau thì mẫu số liệu ghép nhóm không có mốt.

6. Đối với dữ liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng k_1 - k_2 trong đó $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm k_1 - k_2 được hiểu là nhóm gồm các giá trị k_1, $k_1 + 1$, ..., k_2. Khi đó, ta cần hiệu chỉnh mẫu dữ liệu ghép nhóm trước khi thực hiện tính toán các số đặc trưng bằng cách hiệu chỉnh nhóm k_1 - k_2 thành nhóm $[k_1 - 0{,}5; k_2 + 0{,}5)$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Độ bão hoà oxygen trong máu (còn được gọi là chỉ số SpO_2) biểu thị cho tỉ lệ hemoglobin có oxygen trên tổng lượng hemoglobin trong máu. Chỉ số SpO_2 (đơn vị đo là %) từ 97 - 99 là oxygen trong máu tốt, 94 - 96 là oxygen trong máu trung bình, 90 - 93 là oxygen trong máu thấp, dưới 90 là trường hợp cấp cứu trên lâm sàng (Theo: Vinmec.com). Đo chỉ số SpO_2 ở một số bệnh nhân Covid-19 người ta thu được kết quả sau:

SpO_2 (%)	90 - 93	94 - 96	97 - 99
Số bệnh nhân	12	31	7

a) Cho biết các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Tính số trung bình, trung vị và giải thích ý nghĩa của các giá trị thu được.

Giải

a) Có 3 nhóm số liệu gồm 90 - 93, 94 - 96, 97 - 99 với tần số tương ứng là 12, 31, 7.

b) Trước hết, ta hiệu chỉnh các nhóm số liệu và thu được bảng thống kê sau:

SpO_2 (%)	[89,5; 93,5)	[93,5; 96,5)	[96,5; 99,5)
Số bệnh nhân	12	31	7

Các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu tương ứng là

(89,5 + 93,5)/2 = 91,5; (93,5 + 96,5)/2 = 95 và (96,5 + 99,5)/2 = 98.

Cỡ mẫu n = 12 + 31 + 7 = 50. Do đó, số trung bình là

$$\overline{x} = \frac{1}{50}(12.91{,}5 + 31.95 + 7.98) = 94{,}58.$$

Do có $n/2$ = 25 giá trị nhỏ hơn trung vị nên trung vị thuộc nhóm [93,5; 96,5). Ta có, $a_p = 93{,}5$; $a_{p+1} = 96{,}5$; $m_1 + \ldots + m_{p-1} = 12$, $m_p = 31$. Do đó, trung vị là

$$M_e = 93{,}5 + \frac{25 - 12}{31}.3 \approx 94{,}76.$$

Như vậy, chỉ số SpO_2 trung bình của 50 bệnh nhân là 94,58; có 25 bệnh nhân có chỉ số SpO_2 nhỏ hơn 94,76 và 25 bệnh nhân có chỉ số SpO_2 lớn hơn 94,76.

Nhận xét. Nếu chỉ tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm thì ta không cần hiệu chỉnh nhóm rời rạc k_1 - k_2, chọn giá trị đại diện là $\frac{k_1 + k_2}{2}$.

Ví dụ 2. Mức thưởng tết (triệu đồng) mà các công nhân một nhà máy nhận được như sau:

Mức thưởng	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25]
Số công nhân	13	35	47	25

Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm. Cho biết ý nghĩa của giá trị thu được.

Giải

Cỡ mẫu: $n = 13 + 35 + 47 + 25 = 120$. Số công nhân có mức thưởng tết từ 15 đến dưới 20 triệu đồng là nhiều nhất nên nhóm chứa mốt là nhóm [15; 20).

Ta có, $a_j = 15$; $m_j = 47$; $m_{j-1} = 35$; $m_{j+1} = 25$; $h = 5$. Do đó, mốt của mẫu số liệu là

$$M_o = 15 + \frac{(47-35)}{(47-35)+(47-25)}.5 \approx 16,76.$$

Ý nghĩa. Số công nhân nhận được mức thưởng tết khoảng 16,76 triệu đồng là cao nhất.

C. BÀI TẬP

Quãng đường (km) các cầu thủ (không tính thủ môn) chạy trong một trận bóng đá tại giải ngoại hạng Anh được cho trong bảng thống kê sau:

Quãng đường	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số cầu thủ	2	5	6	9	3

3.5. Tính quãng đường trung bình một cầu thủ chạy trong trận đấu này.

3.6. Tìm trung vị của mẫu số liệu và giải thích ý nghĩa của giá trị thu được.

3.7. Tìm a sao cho có 25% số cầu thủ tham gia trận đấu chạy ít nhất a (km).

3.8. Tính mốt của mẫu số liệu và giải thích ý nghĩa của giá trị thu được.

Thống kê số lần đi học muộn trong học kì của các bạn trong lớp, Nam thu được kết quả sau:

Số lần đi muộn	0 - 2	3 - 5	6 - 8	9 - 11	12 - 14
Số học sinh	23	8	5	3	1

3.9. Trung bình mỗi học sinh trong lớp đi muộn bao nhiêu buổi trong học kì?

3.10. Tính các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm và cho biết ý nghĩa của các kết quả thu được.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

3.11. Nhóm số liệu rời rạc k_1 - k_2 với $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$ là nhóm gồm các giá trị

A. k_1 và k_2.

B. $k_1 + 1, \ldots, k_2$.

C. $k_1, \ldots, k_2 + 1$.

D. $k_1, k_1 + 1, \ldots, k_2$.

3.12. Giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là

A. a_i.　　B. a_{i+1}.　　C. $\frac{a_{i+1} - a_i}{2}$.　　D. $\frac{a_{i+1} + a_i}{2}$.

3.13. Số *a* thoả mãn có 25% giá trị trong mẫu số liệu nhỏ hơn *a* và 75% giá trị trong mẫu số liệu lớn hơn *a* là

A. số trung bình.　　B. trung vị.

C. tứ phân vị thứ nhất.　　D. tứ phân vị thứ ba.

3.14. Số *a* thoả mãn có 75% giá trị trong mẫu số liệu nhỏ hơn *a* và 25% giá trị trong mẫu số liệu lớn hơn *a* là

A. số trung bình.　　B. trung vị.

C. tứ phân vị thứ nhất.　　D. tứ phân vị thứ ba.

3.15. Mẫu số liệu ghép nhóm với tần số các nhóm bằng nhau có số mốt là

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau.

Tuổi thọ	[2; 3,5)	[3,5; 5)	[5; 6,5)	[6,5; 8)
Số bóng đèn	8	22	35	15

3.16. Số trung bình của mẫu số liệu là

A. 5,0.　　B. 5,32.　　C. 5,75.　　D. 6,5.

3.17. Nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu là

A. [2; 3,5).　　B. [3,5; 5).　　C. [5; 6,5).　　D. [6,5; 8).

3.18. Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là

A. [2; 3,5).　　B. [3,5; 5).　　C. [5; 6,5).　　D. [6,5; 8).

3.19. Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là

A. [2; 3,5).　　B. [3,5; 5).　　C. [5; 6,5).　　D. [6,5; 8).

3.20. Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu là

A. [2; 3,5).　　B. [3,5; 5).　　C. [5; 6,5).　　D. [6,5; 8).

3.21. Số mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

B. TỰ LUẬN

3.22. Nồng độ cồn trong hơi thở (đơn vị tính là miligam/1 lít khí thở) của 20 lái xe ô tô vi phạm được cho như sau:

0,09	0,18	0,47	1,20	0,28	0,45	0,72	0,15	0,75	0,36
0,21	0,15	0,23	0,30	0,41	0,13	0,05	0,38	0,42	0,79.

Theo quy định, mức phạt nồng độ cồn đối với lái xe ô tô như sau:

Mức 1. Nồng độ cồn trong hơi thở chưa vượt quá 0,25 phạt từ 6 đến 8 triệu đồng;

Mức 2. Nồng độ cồn trong hơi thở từ trên 0,25 đến 0,4 phạt từ 16 đến 18 triệu đồng;

Mức 3. Nồng độ cồn trong hơi thở vượt quá 0,4 phạt từ 30 đến 40 triệu đồng.

a) Lập bảng thống kê biểu diễn số lượng lái xe vi phạm theo mức tiền bị phạt.

b) Trung bình mỗi lái xe bị phạt bao nhiêu tiền? Tổng số tiền phạt của 20 lái xe khoảng bao nhiêu?

3.23. Bạn Chi vào website của một cửa hàng bán điện thoại tìm hiểu và đã thống kê số lượng một loại điện thoại theo giá bán cho kết quả như sau:

Giá tiền (triệu đồng)	< 2	[2; 4)	[4; 7)	[7; 13)	[13; 20]
Số lượng	20	5	11	18	21

a) Đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm này.

b) 50% loại điện thoại trên có giá dưới bao nhiêu?

3.24. Số nguyện vọng đăng kí vào đại học của các bạn trong lớp được thống kê trong bảng sau:

Số nguyện vọng	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12
Số học sinh	5	18	13	7

a) Trung bình một bạn trong lớp đăng kí bao nhiêu nguyện vọng.

b) Tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu.

3.25. Trong các mẫu số liệu cho trong bài tập 3.23 và 3.24, ta có thể tìm mốt cho mẫu số liệu nào? Tìm mốt của mẫu số liệu đó và giải thích ý nghĩa của giá trị tìm được.

CHƯƠNG IV
QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 10

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các tính chất thừa nhận

– Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

– Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

– Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

– Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

– Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua hai điểm chung đó. Đường thẳng này được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

– Trên mỗi mặt phẳng, tất cả các kết quả đã biết trong Hình học phẳng đều đúng.

2. Ba cách xác định một mặt phẳng

– Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

– Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

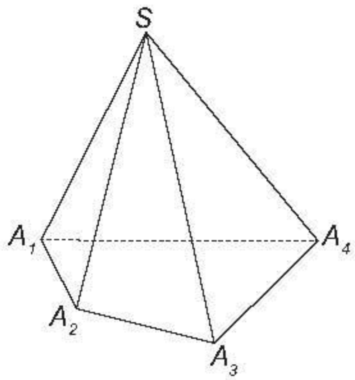
– Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

3. Hình chóp và hình tứ diện

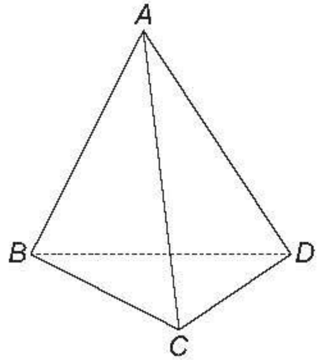
– Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n. Hình gồm n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là hình chóp và kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Hình 4.1a là ví dụ về một hình chóp tứ giác.

– Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD được gọi là hình tứ diện và kí hiệu là $ABCD$ (H.4.1b).



a) Hình chóp tứ giác



b) Hình tứ diện

Hình 4.1

B. VÍ DỤ

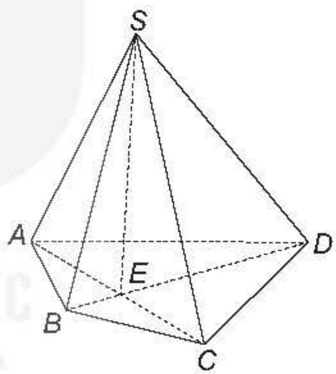
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ (H.4.2). Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Giải

Trong mặt phẳng ($ABCD$), gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD$. Vì E thuộc AC nên E thuộc mặt phẳng (SAC). Vì E thuộc BD nên E thuộc mặt phẳng (SBD). Do đó E là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Hiển nhiên S cũng là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Từ các khẳng định trên suy ra đường thẳng SE là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).



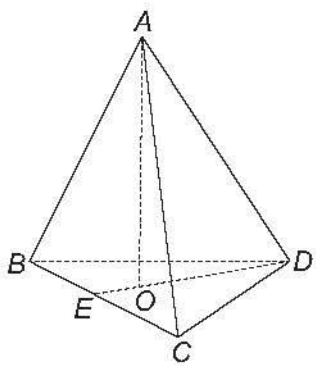
Hình 4.2

Nhận xét. Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ và O là một điểm nằm trong tam giác BCD (H.4.3). Xác định giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (AOD).

Giải

Vì điểm O nằm trong tam giác BCD nên đường thẳng OD cắt cạnh BC tại E. Vì E thuộc OD nên E thuộc mặt phẳng (AOD). Vì E cũng thuộc BC nên E là giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (AOD).



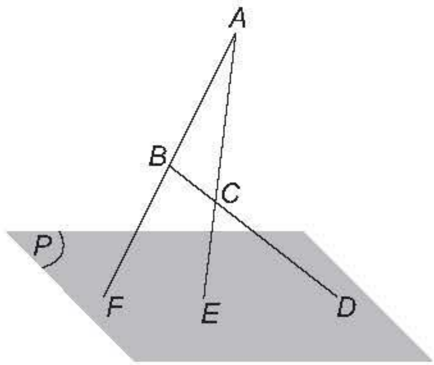
Hình 4.3

Nhận xét. Để xác định giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng, ta tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.

Ví dụ 3. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C phân biệt nằm ngoài mặt phẳng (P). Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt mặt phẳng (P) tại D, E, F (H.4.4). Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Giải

Các điểm D, E, F đều thuộc cả hai mặt phẳng (ABC) và (P), vì vậy chúng cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Từ đây suy ra ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Hình 4.4

Chú ý. Để chứng minh ba điểm trong không gian thẳng hàng, ta có thể chứng minh ba điểm đó cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

C. BÀI TẬP

4.1. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD và gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh SC.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMO) và (SCD).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (BMO) và (SCD).

4.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SCD).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBN) và (SAD).

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBN).

4.3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Gọi P là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AP = 2DP$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (BCD).

4.4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Gọi P là một điểm thuộc cạnh BC sao cho $PC = 2PB$.

a) Xác định giao điểm của đường thẳng BD và mặt phẳng (MNP).

b) Xác định giao điểm của đường thẳng AC và mặt phẳng (MNP).

c) Xác định giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP).

4.5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác SCD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBO) và (SAC).

b) Xác định giao điểm của đường thẳng BO và mặt phẳng (SAC).

4.6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AE = \frac{1}{2}BE$ và $AF = 2CF$. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OEF) và (ABD).

b) Xác định giao điểm (nếu có) của đường thẳng AD và mặt phẳng (OEF).

4.7. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, AD. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABO) và (ACD).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABO) và (MNP).

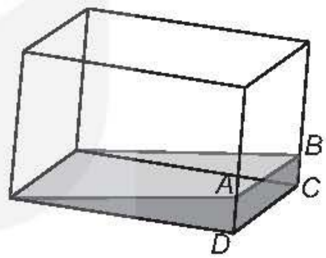
c) Xác định giao điểm của đường thẳng AO và mặt phẳng (MNP).

4.8. Cho hình tứ diện $SABC$ và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC. Giả sử hai đường thẳng $B'C'$ và BC cắt nhau tại D, hai đường thẳng $C'A'$ và CA cắt nhau tại E và hai đường thẳng $A'B'$ và AB cắt nhau tại F. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

4.9. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d và một điểm O nằm ngoài cả hai mặt phẳng đó. Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AB cắt d tại C. Gọi D, E lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng OA, OB và mặt phẳng (Q). Chứng minh rằng ba điểm C, D, E thẳng hàng.

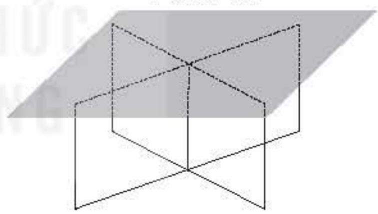
4.10. Đánh dấu một điểm trên mép của tờ giấy A4 và dùng kéo cắt một đường bất kì đi qua điểm đó (trong khi cắt không xoay kéo). Hãy giải thích vì sao đường cắt nhận được trên tờ giấy luôn là đường thẳng.

4.11. Bạn Huy đổ nước màu vào một chiếc bể cá có các mặt đều làm bằng kính phẳng. Sau một vài hôm nước bay hơi một phần và để lại trên thành bể các vệt màu như trong Hình 4.5. Huy quan sát thấy rằng, dù bể cá có hình dạng như thế nào, miễn là các mặt đều phẳng, thì vệt màu trên mỗi thành bể đều là các đường thẳng. Hãy giải thích vì sao.



Hình 4.5

4.12. Một số chiếc bàn có thiết kế khung sắt là hai hình chữ nhật có thể xoay quanh một trục, mặt bàn là một tấm gỗ phẳng được đặt lên phần khung như trong Hình 4.6. Tính chất hình học nào giải thích việc mặt bàn có thể được giữ cố định bởi khung sắt? (Giả sử khung sắt chắc chắn và được đặt cân đối).


Hình 4.6

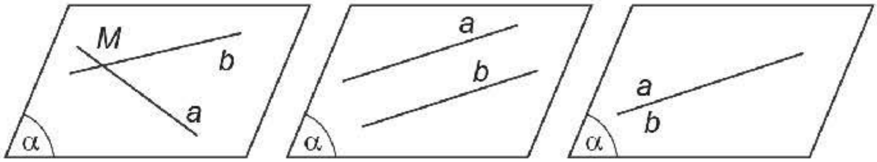
BÀI 11

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

– Nếu hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói chúng đồng phẳng. Khi đó chúng có thể song song, cắt nhau hoặc trùng nhau (H.4.7).



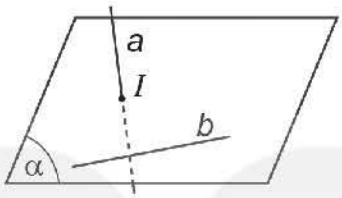
$a \cap b = \{M\}$ — a cắt b tại M

$a \,//\, b$ — a song song với b

$a \equiv b$ — a trùng với b

Hình 4.7

– Nếu hai đường thẳng không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói chúng chéo nhau (H.4.8).



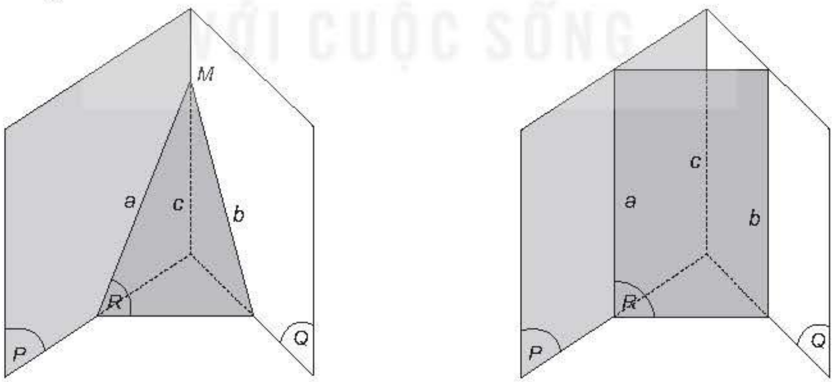
Hình 4.8

2. Các tính chất

– Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, có đúng một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

– Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

– (Định lí về ba đường giao tuyến) Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đồng quy hoặc đôi một song song với nhau (H.4.9).



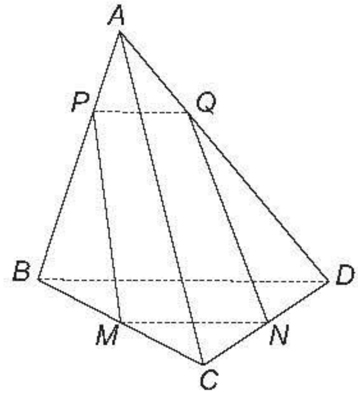
a) b)

Hình 4.9

– Nếu hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó (H.4.9b).

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm bất kì thuộc cạnh AB (H.4.10). Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và các mặt của tứ diện.



Hình 4.10

Giải

Hiển nhiên MP, MN lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và các mặt (ABC), (BCD) của tứ diện.

Vì MN là đường trung bình của tam giác BCD nên $MN \parallel BD$. Hai mặt phẳng (MNP) và (ABD) có điểm chung P và chứa hai đường thẳng song song là MN và BD, suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng đi qua P và song song với BD.

Trong mặt phẳng (ABD) vẽ $PQ \parallel BD$ với Q thuộc AD thì PQ là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD). Khi đó QN là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

Vậy các giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của tứ diện là các đường thẳng MN, MP, PQ, QN.

Chú ý. Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song a và b, ta tìm một điểm chung P của hai mặt phẳng đó và qua P vẽ đường thẳng song song với một trong hai đường thẳng a hoặc b.

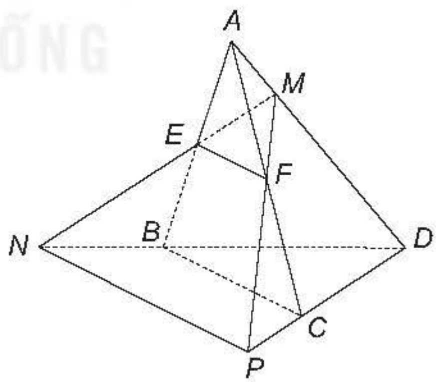
Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC và M là một điểm bất kì thuộc cạnh AD. Giả sử ME cắt BD tại N và MF cắt CD tại P (H.4.11). Chứng minh rằng $NP \parallel EF$.

Giải

Vì N là giao điểm của ME và BD nên N thuộc cả hai mặt phẳng (MEF) và (BCD).

Tương tự, P cũng thuộc cả hai mặt phẳng đó nên suy ra NP là giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (BCD).

Vì EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF \parallel BC$. Hai mặt phẳng (MEF) và (BCD) chứa hai đường thẳng song song là EF và BC nên giao tuyến NP của hai mặt phẳng đó song song với EF và BC.



Hình 4.11

Chú ý. Trong Ví dụ 2 ta cũng có thể lập luận như sau: Xét ba mặt phẳng (MEF), (BCD) và (ABC) thì giao tuyến của ba mặt phẳng đó là NP, BC và EF. Theo định lí về ba đường giao tuyến thì NP, BC và EF đồng quy hoặc đôi một song song. Tuy nhiên, vì EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF \parallel BC$, suy ra ba đường thẳng NP, BC, EF không thể đồng quy. Vì vậy NP, BC, EF đôi một song song và nói riêng ta có $NP // EF$.

Nhận xét. Để chứng minh hai đường thẳng a và b trong không gian song song với nhau, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

– Chứng minh một trong hai đường thẳng a và b, giả sử là a, là giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song, đồng thời một trong hai đường thẳng song song đó là b.

– Sử dụng định lí ba đường giao tuyến: chứng minh a và b là hai trong ba giao tuyến phân biệt của ba mặt phẳng nào đó.

– Chứng minh a và b cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

Tuy nhiên có thể nhận thấy rằng phương pháp sử dụng định lí ba đường giao tuyến thường dài hơn so với hai phương pháp còn lại.

C. BÀI TẬP

4.13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, BC, CD. Xác định giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) trong các trường hợp sau:

a) Đường thẳng NP song song với đường thẳng BD;

b) Đường thẳng NP cắt đường thẳng BD.

4.14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh SC.

a) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MAB) với các mặt của hình chóp.

b) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MAD) với các mặt của hình chóp.

4.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$). Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SD.

a) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (MCD) và (NAB).

b) Chứng minh rằng $d // AB$.

4.16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (CMQ).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (ABD).

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (CMQ) và (BCD).

d) Chứng minh rằng các giao tuyến tìm được ở trên đôi một song song với nhau.

4.17. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi G, H lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của hai hình bình hành đó. Chứng minh rằng ba đường thẳng GH, CE, DF đôi một song song.

4.18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$). Gọi E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SBC.

a) Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AD*, *BC*. Chứng minh rằng *EF // MN*, từ đó suy ra *EF // AB*.

b) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (*AEF*) với các mặt của hình chóp.

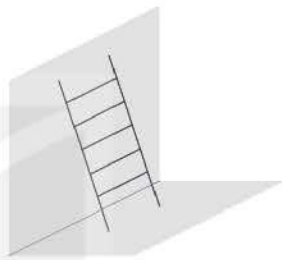
c) Trong các giao tuyến tìm được ở câu b, giao tuyến nào song song với đường thẳng *EF*?

4.19. Cho tứ diện *ABCD*. Một mặt phẳng cắt bốn cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* lần lượt tại các điểm *M*, *N*, *P*, *Q*.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng *MN*, *PQ*, *AC* đôi một song song hoặc đồng quy.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng *MQ*, *NP*, *BD* đôi một song song hoặc đồng quy.

4.20. Một chiếc thang được đặt sao cho hai đầu của chân thang dựa vào tường, hai đầu còn lại nằm trên sàn nhà (H.4.12). Biết rằng chiếc thang có dạng hình chữ nhật, hãy giải thích vì sao hai đầu của chân thang nằm trên sàn nhà lại cách đều đường chân tường.



Hình 4.12

4.21. Bạn Hà lấy một tờ giấy hình chữ nhật và gấp tờ giấy sao cho hai mép của tờ giấy song song với nhau (H.4.13). Hà thấy rằng dù gấp thế nào thì đường nếp gấp vẫn luôn song song với hai mép của tờ giấy. Hãy giải thích vì sao.

Hình 4.13

BÀI 12

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

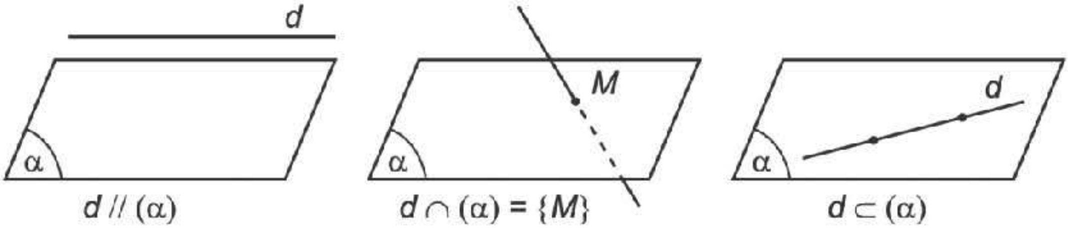
1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng *d* và mặt phẳng (α).

– Nếu d và (α) không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hoặc (α) song song với d (H.4.14a).

– Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại M (H.4.14b).

– Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) (H.4.14c).



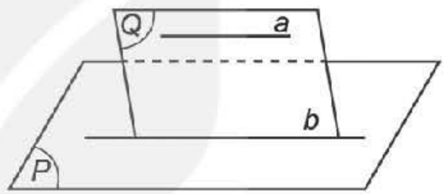
a) b) c)

Hình 4.14

2. Các tính chất

– Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) thì a song song với (P) (H.4.15).

– Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b (H.4.15).



Hình 4.15

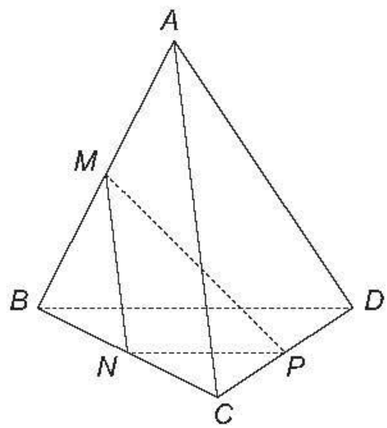
– Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD (H.4.16). Chứng minh rằng:

a) AC // (MNP);

b) BD // (MNP).



Hình 4.16

Giải

a) Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN // AC. Đường thẳng AC không nằm trong mặt phẳng (MNP) và đường thẳng AC song song với đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (MNP) nên AC // (MNP).

b) Vì NP là đường trung bình của tam giác BCD nên $NP // BD$. Đường thẳng BD không nằm trong mặt phẳng (MNP) và đường thẳng BD song song với đường thẳng NP nằm trong mặt phẳng (MNP) nên $BD // (MNP)$.

Nhận xét. Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), ta chứng minh a không nằm trong (P) và a song song với một đường thẳng nằm trong (P).

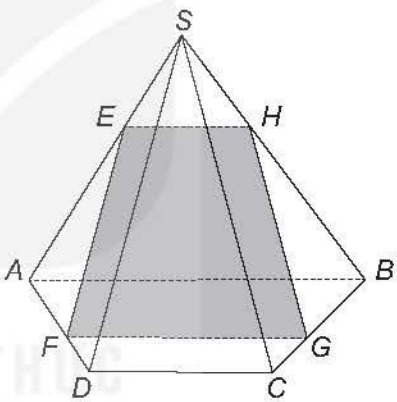
Chú ý. Trong Ví dụ 1, hai đường thẳng AC và BD cùng song song với mặt phẳng (MNP) nhưng hai đường thẳng đó chéo nhau. Vì vậy từ điều kiện hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì chưa thể suy ra hai đường thẳng đó song song với nhau.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$). Gọi E là một điểm bất kì thuộc cạnh SA. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng SD, AB. Xác định giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Giải (H.4.17)

Vì mặt phẳng (SAD) chứa đường thẳng SD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SD.

Trong mặt phẳng (SAD) vẽ $EF // SD$ ($F \in AD$) thì EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (SAD).



Hình 4.17

Vì mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB. Trong mặt phẳng (SAB) vẽ $EH // AB$ ($H \in SB$) thì EH là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (SAB).

Vì mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ vẽ $FG // AB$ ($G \in BC$ do $ABCD$ là hình thang) thì FG là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

Khi đó HG là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (SBC). Hình tạo bởi các giao tuyến là tứ giác $EFGH$ có $EH // FG$ (vì cùng song song với AB) nên nó là hình thang.

Chú ý. Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), trong đó (Q) chứa đường thẳng a song song với (P), ta tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng và qua M vẽ đường thẳng song song với a.

C. BÀI TẬP

4.22. Cho hai hình bình hành *ABCD* và *ABEF* không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng:

a) *CD* // (*ABEF*); b) *EF* // (*ABCD*); c) *CE* // (*ADF*).

(*Gợi ý*: Theo SGK Bài 11, Luyện tập 3, ta đã biết *CEFD* là hình bình hành).

4.23. Cho hai hình bình hành *ABCD* và *ABEF* không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi *K* và *L* lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của hai hình bình hành đó. Chứng minh rằng:

a) *KL* // (*ADF*); b) *KL* // (*BCE*).

4.24. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *G* và *H* lần lượt là trọng tâm của hai tam giác *ABC* và *ACD*. Chứng minh rằng *GH* // (*BCD*).

4.25. Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* và *E* là một điểm bất kì thuộc cạnh *SA*. Gọi (*P*) là mặt phẳng qua *E* và song song với hai đường thẳng *SB*, *SD*. Gọi *M*, *N* lần lượt là giao điểm của (*P*) và các cạnh *AB*, *AD*.

a) Chứng minh rằng *EM* // *SB* và *EN* // *SD*.

b) Giả sử đường thẳng *MN* cắt các đường thẳng *BC*, *CD*. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (*P*) và các mặt phẳng (*SBC*), (*SCD*).

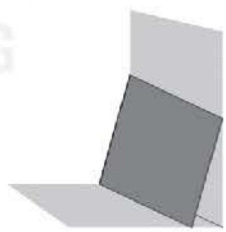
4.26. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang (*AB* // *CD*). Gọi *E* là một điểm bất kì thuộc cạnh *SA*. Gọi (*P*) là mặt phẳng qua *E* và song song với hai đường thẳng *AB* và *SC*.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (*P*) và mặt phẳng (*SAC*), từ đó tìm một điểm chung của mặt phẳng (*P*) và mặt phẳng (*ABCD*).

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (*P*) và mặt phẳng (*ABCD*).

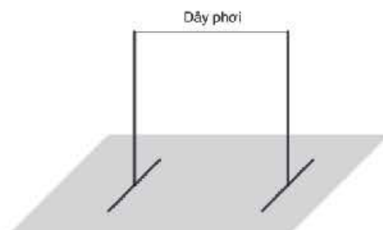
c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (*P*) và các mặt còn lại của hình chóp.

4.27. Một tấm bảng hình chữ nhật được đặt dựa vào tường như trong Hình 4.18. Hãy giải thích vì sao mép trên của tấm bảng song song với mặt đất, mép dưới của tấm bảng song song với mặt tường.



Hình 4.18

4.28. Để dựng dây phơi quần áo, bác Việt lắp hai thanh sắt thẳng đứng có chiều dài bằng nhau trên mặt đất và căng dây nối hai đầu còn lại của hai thanh sắt (H.4.19). Khi đó, dây phơi có song song với mặt đất không? Giải thích vì sao.



Hình 4.19

BÀI 13

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

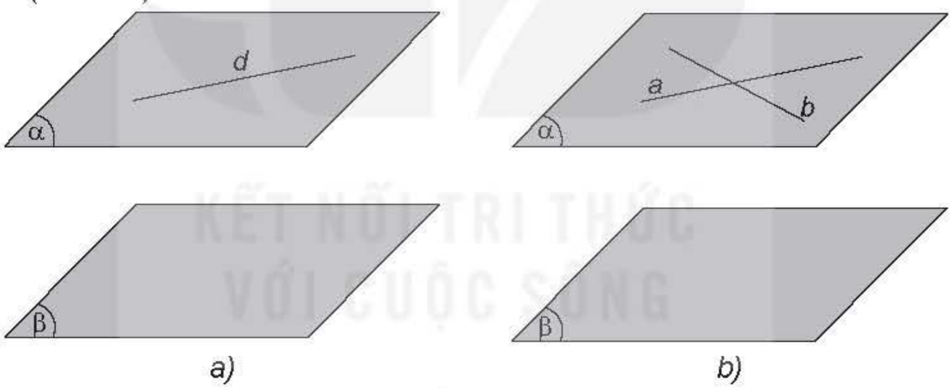
– Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì tập hợp tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó. Khi đó ta nói hai mặt phẳng đó cắt nhau.

– Nếu hai mặt phẳng không có điểm chung thì ta nói hai mặt phẳng đó song song với nhau.

2. Các tính chất

– Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì đường thẳng bất kì nằm trong mặt phẳng này song song với mặt phẳng kia (H.4.20a).

– Nếu một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với một mặt phẳng thứ hai thì hai mặt phẳng đó song song với nhau (H.4.20b).

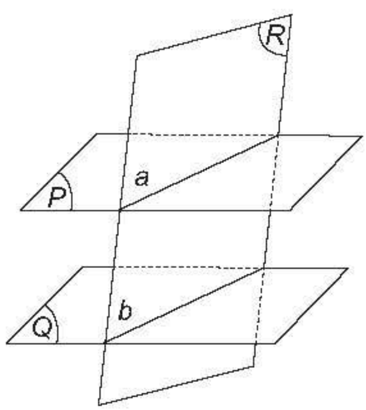


Hình 4.20

– Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

– Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại và hai giao tuyến song song với nhau (H.4.21).

– Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

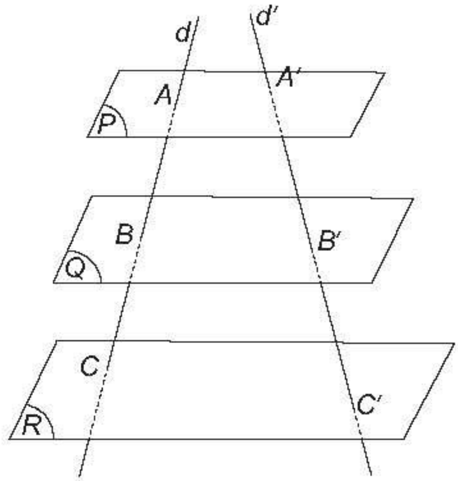


Hình 4.21

– (Định lí Thalès trong không gian) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trong Hình 4.22, ta có

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

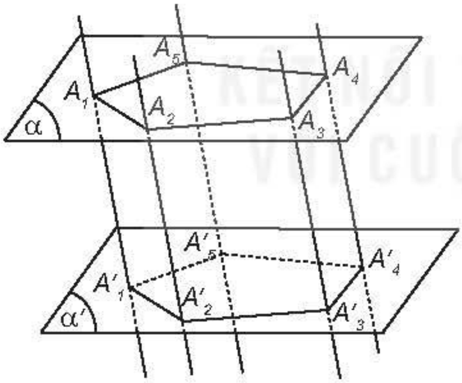


Hình 4.22

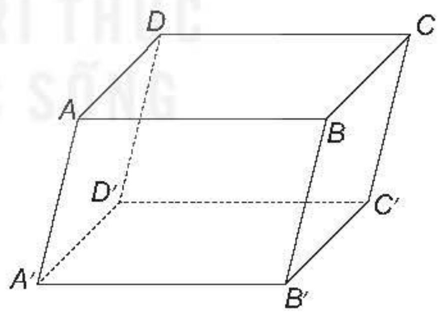
3. Hình lăng trụ và hình hộp

– Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ vẽ các đường thẳng đôi một song song và cắt mặt phẳng (α') tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ và các tứ giác $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_1A'_nA'_1A_1$ được gọi là hình lăng trụ và kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ (H.4.23a).

– Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành, có các cạnh bên đôi một song song và có độ dài bằng nhau.



a)



b)

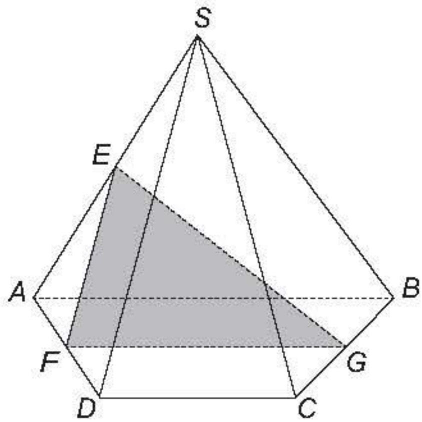
Hình 4.23

– Hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp (H.4.23b).

– Hình hộp có các mặt đối diện song song với nhau, có các đường chéo đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AB // CD). Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD, BC (H.4.24). Chứng minh rằng hai mặt phẳng (EFG) và (SCD) song song với nhau.



Hình 4.24

Giải

Vì EF là đường trung bình của tam giác SAD nên EF // SD. Vì EF không nằm trong mặt phẳng (SCD) nên EF // (SCD).

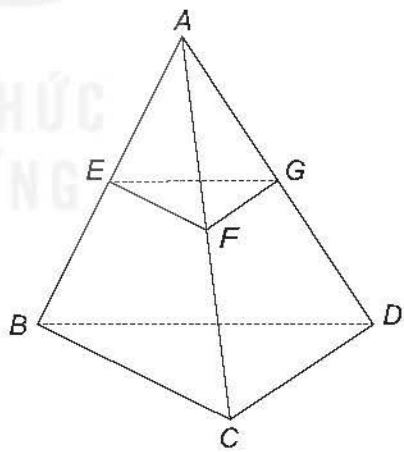
Vì FG là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên FG // CD. Vì FG không nằm trong mặt phẳng (SCD) nên FG // (SCD).

Mặt phẳng (EFG) chứa hai đường thẳng cắt nhau EF và FG cùng song song với mặt phẳng (SCD) nên mặt phẳng (EFG) song song với mặt phẳng (SCD).

Nhận xét. Để chứng minh hai mặt phẳng song song với nhau, ta có thể chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng kia. (Học sinh xem lại các cách chứng minh một đường thẳng song song với một mặt phẳng trong bài 12).

Ngoài ra để chứng minh hai mặt phẳng song song với nhau ta có thể chứng minh chúng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E là một điểm bất kì thuộc cạnh AB; (P) là mặt phẳng đi qua E và song song với mặt phẳng (BCD). Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt của hình tứ diện.



Hình 4.25

Giải.(H.4.25).

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (BCD) nên hai giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và hai mặt phẳng (P), (BCD) song song với nhau. Trong mặt phẳng (ABC) vẽ EF // BC ($F \in AC$) thì EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC).

Tương tự, trong mặt phẳng (ABD) vẽ EG // BD ($G \in AD$) thì EG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Khi đó FG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD).

Chú ý. Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P); (Q) khi biết (P) song song với (R), ta tìm một điểm chung M của (P); (Q) và qua M vẽ đường thẳng song song với giao tuyến của (Q); (R).

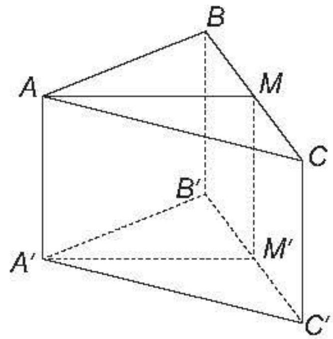
Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Gọi M' là giao điểm của đường thẳng $B'C'$ và mặt phẳng (AMA') (H.4.26).

a) Chứng minh rằng $AM \parallel A'M'$.

b) Chứng minh rằng M' là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Giải

a) Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ song song với nhau. Giao tuyến của mặt phẳng (AMA') với hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ lần lượt là AM và $A'M'$ nên $AM \parallel A'M'$.



Hình 4.26

b) Vì các cạnh bên của hình lăng trụ đôi một song song nên $AA' \parallel BB'$. Vì AA' không nằm trong mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên $AA' \parallel (BB'C'C)$. Mặt phẳng (AMA') chứa đường thẳng AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng này song song với AA', tức là $MM' \parallel AA'$.

Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành có M là trung điểm của BC và $MM' \parallel AA'$ nên M' là trung điểm của $B'C'$.

Nhận xét. Để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau, ngoài các phương pháp đã học trong bài 11, ta có thể chứng minh hai đường thẳng đó là giao tuyến của một mặt phẳng với hai mặt phẳng song song.

C. BÀI TẬP

4.29. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng mp(a, b) và mp(c, d) song song với nhau.

b) Chứng minh rằng hai mặt phẳng mp(a, d) và mp(b, c) song song với nhau.

c) Một mặt phẳng cắt bốn đường thẳng a, b, c, d lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

4.30. Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm O nằm trong tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng (ABD).

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt còn lại của tứ diện.

4.31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E là một điểm bất kì thuộc cạnh SA và (P) là mặt phẳng qua E song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt bên của hình chóp.

b) Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì? Giải thích vì sao.

4.32. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang. Chứng minh rằng đáy $A'B'C'D'$ là hình thang.

4.33. Cho hai hình bình hành *ABCD* và *ABEF* không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng sáu điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* là sáu đỉnh của một hình lăng trụ tam giác.

4.34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AD, BC, $B'C'$, $A'D'$ lần lượt tại E, F, G, H. Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

4.35. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(A'D'CB)$.

b) Chứng minh rằng $d \parallel AD$.

c) Chứng minh rằng d đi qua trung điểm của các đường chéo của hình hộp.

4.36. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $AB' \parallel C'D$; b) Hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ song song với nhau.

4.37. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một song song. Hai đường thẳng d, d' cắt ba mặt phẳng lần lượt tại A, B, C và A', B', C'. Biết rằng $AB = 2$ cm, $BC = 6$ cm và $A'B' = 3$ cm, tính $B'C'$.

4.38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của các đường chéo của hình hộp. Mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh rằng M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC', DD'.

b) Chứng minh rằng $ABCD.MNPQ$ là hình hộp.

4.39. Khi cắt một chiếc bánh ga-tô hình hộp, Thuý nhận thấy vết cắt ở mặt trên và mặt dưới của bánh gợi nên hình ảnh về hai đường thẳng song song với nhau. Hỏi nhận xét của Thuý có đúng không? Vì sao?

4.40. Một chiếc bình nước hình trụ được đặt trên bàn, lượng nước trong bình bằng đúng một nửa dung tích của bình. Hoàng đặt một chiếc ống hút vào trong bình sao cho một đầu của ống hút chạm vào đáy bình còn một đầu chạm vào miệng bình. Hoàng nói rằng độ dài của phần ống hút bị ướt bằng $\frac{1}{3}$ độ dài của toàn bộ ống hút. Hỏi Hoàng nói đúng hay sai? Vì sao?

BÀI 14

PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

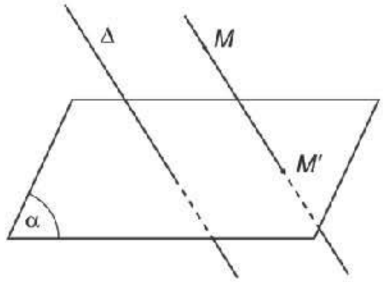
– Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian ta xác định điểm M' như sau:

- Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và Δ.
- Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song với Δ.

Điểm M' được gọi là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ (H.4.27).

– Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

– Hình chiếu của một hình $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song là tập hợp tất cả các hình chiếu của các điểm thuộc $\mathscr{H}$ qua phép chiếu đó.



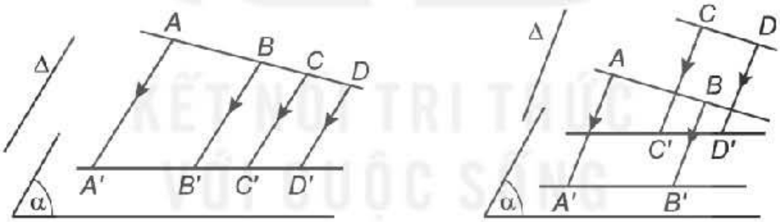
Hình 4.27

2. Các tính chất

– Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

– Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

– Phép chiếu song song giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song (H.4.28).



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \qquad \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Hình 4.28

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

– Hình biểu diễn của một hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó, hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Khi hình phẳng không nằm trong mặt phẳng song song với phương chiếu thì hình biểu diễn của hình phẳng đó có các tính chất sau:

– Hình biểu diễn của một tam giác (cân, đều, vuông) là một tam giác;

– Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành;

– Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B' \parallel C'D'$ thoả mãn $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$;

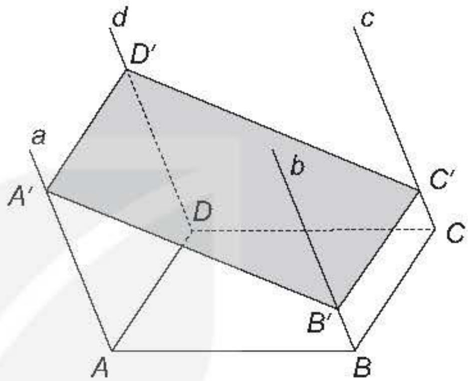
– Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D vẽ các đường thẳng a, b, c, d đôi một song song và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng cắt bốn đường thẳng a, b, c, d lần lượt tại A', B', C', D' (H.4.29). Chứng minh rằng $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Giải

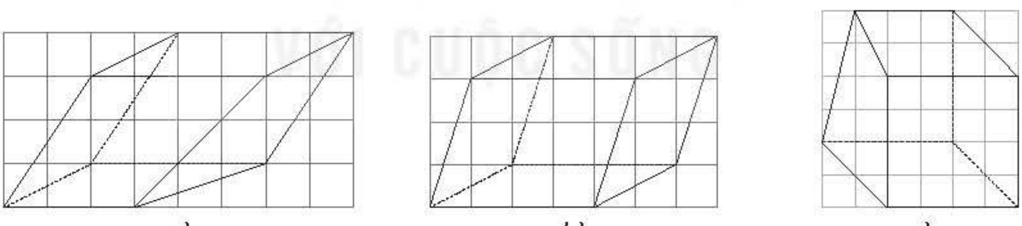
Ta thấy A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương a. Do đó $A'B'C'D'$ là hình chiếu song song của hình bình hành $ABCD$. Vì phép chiếu song song biến hình bình hành thành hình bình hành (xem SGK, Bài 14, Ví dụ 2) nên $A'B'C'D'$ là hình bình hành.



Hình 4.29

Nhận xét. Trong Ví dụ 1, để chứng minh tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành ta có thể sử dụng các tính chất của hai mặt phẳng song song (xem Bài 13, Bài tập 4.29). Tuy nhiên việc sử dụng phép chiếu song song cho ta một lời giải ngắn gọn hơn.

Ví dụ 2. Trong các hình sau, hình nào là hình biểu diễn của một hình hộp? Giải thích vì sao.



Hình 4.30

Giải

Vì các mặt của hình hộp đều là hình bình hành nên các hình biểu diễn của chúng cũng là hình bình hành. Suy ra chỉ có Hình 4.30b là hình biểu diễn của một hình hộp.

Chú ý. Để xác định/vẽ đúng hình biểu diễn của một hình ta phải tuân thủ các tính chất của phép chiếu song song, ví dụ như phép chiếu song song bảo toàn tính song song của hai đường thẳng, phép chiếu song song bảo toàn tỉ số độ dài của các đoạn thẳng...

C. BÀI TẬP

4.41. Cho hình lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'*. Gọi *M* là điểm thuộc cạnh *BC* sao cho $MB = 2MC$.

a) Xác định hình chiếu *M'* của *M* qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*A'B'C'*) theo phương *AA'*.

b) Chứng minh rằng $M'B' = 2M'C'$.

4.42. Cho hình lăng trụ tứ giác *ABCD.A'B'C'D'*. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*. Gọi *O'* là hình chiếu của *O* qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*A'B'C'D'*) theo phương *AA'*. Chứng minh rằng *O'* là giao điểm của *A'C'* và *B'D'*.

4.43. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* không là hình thang.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SCD*).

b) Xác định hình chiếu của điểm *A* qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (*SCD*) theo phương *SB*.

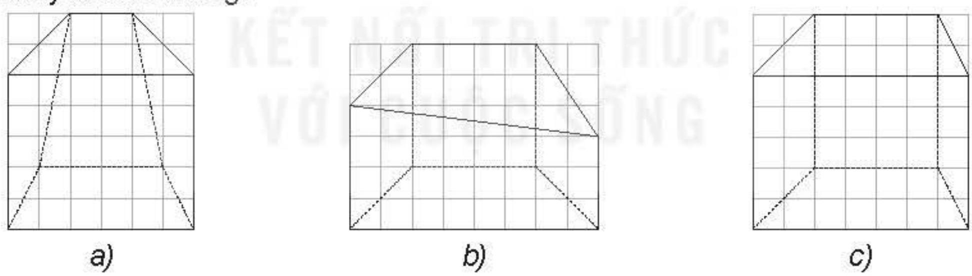
4.44. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *CD* và (*P*) là mặt phẳng cố định không song song với *MN*. Gọi *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *M'*, *N'* lần lượt là hình chiếu của *A*, *B*, *C*, *D*, *M*, *N* qua phép chiếu lên mặt phẳng (*P*) theo phương *MN*.

a) Chứng minh rằng hai điểm *M'* và *N'* trùng nhau.

b) Chứng minh rằng bốn điểm *A'*, *B'*, *C'*, *D'* là bốn đỉnh của một hình bình hành.

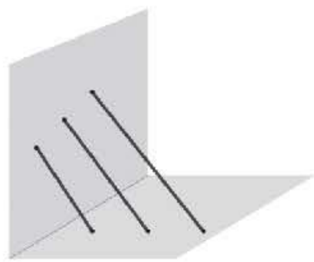
4.45. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông.

4.46. Trong các hình sau, hình nào là hình biểu diễn của hình lăng trụ tứ giác có hai đáy là hình thang?



Hình 4.31

4.47. Ba chiếc gậy thẳng được đặt dựa vào tường và đôi một song song với nhau (H.4.32). Giải thích vì sao nếu ba đầu gậy trên tường thẳng hàng thì ba đầu gậy trên mặt sàn cũng thẳng hàng.



Hình 4.32

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A. TRẮC NGHIỆM

4.48. Trong không gian cho hai đường thẳng cắt nhau *a* và *b*. Nếu *c* là một đường thẳng song song với *a* thì

A. *c* và *b* song song với nhau.
B. *c* và *b* cắt nhau.
C. *c* và *b* chéo nhau.
D. *c* và *b* không song song với nhau.

4.49. Cho tứ diện *ABCD*. Một mặt phẳng cắt các cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* của tứ diện lần lượt tại các điểm *M*, *N*, *P*, *Q*. Khi đó

A. *MN*, *AC*, *PQ* đồng quy.
B. *MN*, *AC*, *PQ* đôi một song song.
C. *MN*, *AC*, *PQ* đôi một chéo nhau.
D. *MN*, *AC*, *PQ* đôi một song song hoặc đồng quy.

4.50. Nếu mặt phẳng (*R*) cắt hai mặt phẳng song song (*P*) và (*Q*) lần lượt theo hai giao tuyến *a* và *b* thì vị trí tương đối giữa hai đường thẳng *a* và *b* là

A. song song.
B. chéo nhau.
C. trùng nhau.
D. cắt nhau.

4.51. Cho ba mặt phẳng (*P*), (*Q*), (*R*) đôi một song song với nhau. Đường thẳng *d* cắt các mặt phẳng (*P*), (*Q*), (*R*) lần lượt tại *A*, *B*, *C*. Đường thẳng *d'* cắt các mặt phẳng phẳng (*P*), (*Q*), (*R*) lần lượt tại *A'*, *B'*, *C'*. Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$, tỉ số $\frac{A'B'}{A'C'}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.
B. $\frac{2}{3}$.
C. $\frac{3}{2}$.
D. $\frac{1}{2}$.

4.52. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang (*AB // CD*). Gọi *d* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SCD*). Khi đó *d* đi qua *S* và song song với

A. *AC*.
B. *CD*.
C. *BD*.
D. *BC*.

4.53. Cho tứ diện *ABCD* có *E*, *F* lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC*, *CD*. Mặt phẳng (*P*) chứa đường thẳng *EF* và cắt mặt phẳng (*ABD*) theo giao tuyến *d*. Khi đó

A. *d* song song với *BC*.
B. *d* song song với *AB*.
C. *d* song song với *BD*.
D. *d* song song với *CD*.

4.54. Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Hình chiếu song song của điểm *A* trên mặt phẳng (*CDD'C'*) theo phương *BC'* là

A. *D'*.
B. *D*.
C. *B*.
D. *C'*.

4.55. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Khi đó

A. d là tập hợp tất cả các điểm nằm trong mặt phẳng (P) và nằm ngoài mặt phẳng (Q).

B. d là tập hợp tất cả các điểm nằm ngoài mặt phẳng (P) và nằm trong mặt phẳng (Q).

C. d là tập hợp tất cả các điểm nằm ngoài cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

D. d là tập hợp tất cả các điểm nằm trong cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

4.56. Cho mặt phẳng (P) và điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Qua A có vô số mặt phẳng song song với (P).

B. Qua A có đúng một mặt phẳng song song với (P).

C. Qua A không có mặt phẳng nào song song với (P).

D. Qua A có đúng hai mặt phẳng song song với (P).

B. TỰ LUẬN

4.57. Cho hình chóp ngũ giác $S.ABCDE$. Giả sử AB song song với DE.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBE).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SDE).

c) Giả sử giao tuyến của hai mặt phẳng (SAE) và (SBC) song song với đường thẳng AE. Chứng minh rằng $AE \parallel BC$.

4.58. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', AB, AC.

a) Chứng minh rằng $BC \parallel (MNP)$.

b) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (MNP) và $(A'B'C')$.

c) Chứng minh rằng $d \parallel NP$.

4.59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AD và cắt hai cạnh SB, SC lần lượt tại E, F.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (EAB) và (FCD).

b) Chứng minh rằng tứ giác $AEFD$ là hình thang.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ECD) và (FAB).

d) Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (ECD) và (FAB) song song với giao tuyến của hai mặt phẳng (EAB) và (FCD).

4.60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi O là một điểm nằm trong tam giác SAD.

a) Xác định giao điểm của đường thẳng AO và mặt phẳng (SCD).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBO) và (SAC).

c) Xác định giao điểm của đường thẳng BO và mặt phẳng (SAC).

4.61. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, M', N' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, $A'B'$, $C'D'$.

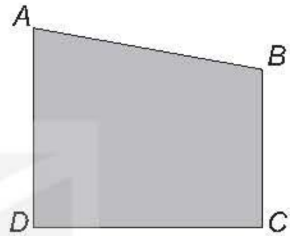
a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M', N' đồng phẳng và tứ giác $MNN'M'$ là hình bình hành.

b) Giả sử MN không song song với BC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNN'M')$ và $(BCC'B')$.

4.62. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC', DD'. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và $MNPQ$ là hình bình hành.

4.63. Một người thợ đang cố gắng đặt tấm kính $ABCD$ (mép AB không song song với CD) dựa vào tường sao cho mép kính CD song song với đường chân tường, còn mép kính AB nằm hoàn toàn trên tường. Sau một hồi loay hoay, người thợ vẫn không thể đặt được tấm kính như mong muốn. Hãy giải thích tại sao.

Có cách nào đặt tấm kính để một mép kính song song với đường chân tường, một mép kính khác nằm hoàn toàn trên tường không?



Hình 4.33

CHƯƠNG V
GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 15
GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn

a) Ta nói dãy số (u_n) *có giới hạn là 0* khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Ta có:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) Ta nói dãy số (u_n) *có giới hạn là số thực a* khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

c) Định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số

- Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$ thì

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = a + b$; $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = a - b$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$; $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \ne 0$).

- Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ thì $a \ge 0$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

2. Giới hạn vô cực của dãy số

a) Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Theo đó, ta có:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, với k là số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

b) Một số quy tắc liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) kí hiệu là

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \cdots$$

Ta có $S = \dfrac{u_1}{1-q}$ $(|q| < 1)$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) có tính chất $|u_n - 2| \le \dfrac{1}{3^n}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Giải

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - 2) = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Ví dụ 2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+1}{3n^2+n}$.

Giải

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}.$$

Ví dụ 3. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1})$.

Giải

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n-1}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-n+3\right)$.

Giải

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-n+3\right)=\lim_{n\to+\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=+\infty.$$

Ví dụ 5. Tính tổng

$$S=-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n}+\cdots$$

Giải

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1=-\frac{1}{3}$, $q=-\frac{1}{3}$.

Do đó

$$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}.$$

C. BÀI TẬP

5.1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n+2}$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+3}{1+3^n}$.

5.2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n-2\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+n^2-\sqrt{n^4+1}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}+n\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

5.3. Cho $u_n=\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ với a, b là các số thực thoả mãn $|a|<1, |b|<1$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5.4. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+2n}$.

5.5. Tính tổng $S=-1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^2}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{5^{n-1}}+\cdots$

5.6. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) $1,(03)$;

b) $3,(23)$.

5.7. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\cos n}{n^2}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5.8. Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3$, ..., $A_nB_nC_n$, ... Kí hiệu s_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

a) Tính s_n.

b) Tính tổng $s_1+s_2+\cdots+s_n+\cdots$

5.9. Cho dãy số (u_n) với $u_1=2$, $u_{n+1}=u_n+\dfrac{2}{3^n}$, $n\geq 1$. Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$.

a) Tính $v_1+v_2+\cdots+v_n$ theo n.

b) Tính u_n theo n.

c) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5.10. Cho dãy số (u_n) có tính chất $\left|u_n-\dfrac{n}{n+1}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

BÀI 16

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

a) Giới hạn của hàm số tại một điểm: Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $(a; b)$ có thể trừ điểm x_0. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a;b)$, $x_n \neq x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

b) Quy tắc tính giới hạn hữu hạn của hàm số:

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = L + M;$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x)\right] = L - M;$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = L \cdot M;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ nếu } M \neq 0.$$

- Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

c) Giới hạn một bên: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói số L là giới hạn bên phải của $f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Tương tự, với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$, ta nói số L là giới hạn bên trái của $f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

d) Các quy tắc tính giới hạn nêu trên cũng đúng cho giới hạn một bên.

2. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

a) Giới hạn tại vô cực: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

Tương tự, cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < b$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

b) Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm trên cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.

3. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

a) Giới hạn vô cực: Giả sử khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi $x \to x_0$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \left[-f(x)\right] = +\infty$.

b) Giới hạn vô cực một bên: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$, $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

Tương tự, với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$, ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to x_0$ về bên trái nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$, $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

Các giới hạn một bên $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

c) Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x)g(x)$.

Giả sử $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

Khi đó $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

Giải

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 2. Biết $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$. Tính $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Giải

Rõ ràng $(x-1)^2 > 0$, $(x-1)^2 \to 0$ khi $x \to 1$. Theo quy tắc giới hạn vô cực (của thương hai hàm số), ta có $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2} = +\infty$.

Ví dụ 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-} (x-1)\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x^2}}$.

Giải

$$\lim_{x\to1^-} (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{1-x^2}} = -\lim_{x\to1^-} \sqrt{\frac{(x+2)(1-x)^2}{1-x^2}} = -\lim_{x\to1^-} \sqrt{\frac{(x+2)(1-x)}{1+x}} = 0.$$

Ví dụ 4. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x - 1\right)$.

Giải

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1} + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}} = -1.$$

Ví dụ 5. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1)g(x)$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1)g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left[\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)g(x)\right] = +\infty$

(do $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)g(x)\right] = 1 > 0$).

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+m \text{ nếu } x < 0, \\ x^2-1 \text{ nếu } x \geq 0 \end{cases}$ với m là tham số.

Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \to 0$. Tìm m.

Giải

Do $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (x^2-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (x+m) = m$ nên $m = -1$.

C. BÀI TẬP

5.11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x \text{ nếu } x > 1 \\ 2 \text{ nếu } x = 1. \\ 1 \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$ Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 1$ không?

5.12. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1} - 3}{x - 2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{x}$.

5.13. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax \text{ nếu } x > 3 \\ 3x^2 + 1 \text{ nếu } x \leq 3 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 3$.

5.14. Tìm các số thực a và b sao cho $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - ax + 1}{x^2 - 3x + 2} = b$.

5.15. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x}$. Tính:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

5.16. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x)\left(1 - x^2\right)\left(1 - x^3\right)$.

5.17. Cho hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} - 2m$ với m là tham số.

Biết $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, tìm giá trị của m.

5.18. Cho m là một số thực. Biết $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(m - x)(mx + 1)\right] = -\infty$.

Xác định dấu của m.

5.19. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5.20. Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

BÀI 17

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số liên tục tại một điểm

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

a) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a; b]$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa theo cách tương tự.

b) Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền trên khoảng đó.

c) Tính liên tục của các hàm số sơ cấp cơ bản:

- Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

3. Một số tính chất cơ bản

a) Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x)g(x)$ liên tục tại điểm x_0;
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

b) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại $x_0 = 2$.

Giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $[1; +\infty)$. Do đó x_0 thuộc tập xác định của hàm số. Ta có

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \sqrt{x-1} = \sqrt{\lim_{x \to 2}(x-1)} = 1 = f(2).$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Giải

Ta có $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ và $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$. Do đó $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Nhưng do $f(0) = 1 \neq \lim_{x \to 0} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ mx + 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

Giải

Ta có $f(1) = 3$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$ và $\lim_{x \to 1^+} f(x) = m + 1$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $m + 1 = 3$ hay $m = 2$.

Ví dụ 4. Tìm các khoảng trên đó hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 1}$ liên tục.

Giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Trên các khoảng này hàm số $f(x)$ là thương của hai hàm liên tục, trong đó mẫu thức $x^2 - 1 \neq 0$. Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$.

Ví dụ 5. Chứng tỏ rằng phương trình $2x^5 + a(x^2 - 1) + 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi số thực a.

Giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^5 + a(x^2 - 1) + 1$. Ta có $f(1) = 3 > 0$, $f(-1) = -1 < 0$. Do $f(x)$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $[-1; 1]$. Do đó, theo tính chất của hàm liên tục, tồn tại ít nhất một điểm $c \in [-1; 1]$ sao cho $f(c) = 0$. Nói cách khác, $x = c$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

C. BÀI TẬP

5.21. Cho hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ trừ điểm $x = 0$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ tại $x = 1$.

5.22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } x \le 1 \\ ax + b & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ 5 & \text{nếu } x \ge 2 \end{cases}$. Xác định a, b để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

5.23. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x < 1 \\ mx + 1 & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

5.24. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$;   b) $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 3x - 4}$.

5.25. Chứng tỏ rằng các phương trình sau có nghiệm trong khoảng tương ứng:

a) $x^2 = \sqrt{x + 1}$, trong khoảng $(1; 2)$.

b) $\cos x = x$, trong khoảng $(0; 1)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TRẮC NGHIỆM

5.26. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) thoả mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$.

Xét các khẳng định sau:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 1 + b$; (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n} = b$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = b$; (4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{b}$.

Số khẳng định đúng là

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

5.27. Cho $L = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3 - 2n^2 + 1\right)$. Giá trị của L là

A. $L = 0$. B. $L = -\infty$. C. $L = +\infty$. D. $L = 1$.

5.28. Biết $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2 + n - 1}{an^2 + 1} = 1$ với a là tham số. Giá trị của $a^2 - 2a$ là

A. –1. B. 0.

C. 2. D. Không xác định.

5.29. Cho $u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ bằng

A. $+\infty$. B. 0. C. $\dfrac{1}{2}$. D. 1.

5.30. Tính tổng $S = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} - \dfrac{2}{27} + \cdots + (-1)^n\dfrac{2}{3^n} + \cdots$

A. $S = \dfrac{1}{2}$. B. $S = -\dfrac{1}{2}$. C. $S = -3$. D. $S = 3$.

5.31. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -3$.

Khẳng định đúng là

A. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 3$. B. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$.

C. Không tồn tại $\lim\limits_{x\to1} f(x)$. D. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -3$.

5.32. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = m + 1$.

Biết giới hạn của $f(x)$ khi $x \to 1$ tồn tại. Giá trị của m là

A. $m = 1$.
B. $m = -1$.
C. $m = 3$.
D. Không tồn tại m.

5.33. Biết hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{nếu } x \le 1 \\ 2x + b & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 1$.

Giá trị của $a - b$ bằng

A. –1.
B. 0.
C. 1.
D. 3.

5.34. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x - 1}}$ là

A. $+\infty$.
B. Không tồn tại.
C. 2.
D. 0.

5.35. Cho $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{|x|}$. Khi đó, giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ là

A. 0.
B. –1.
C. 1.
D. Không tồn tại.

5.36. Giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2} - x}{x}$ là

A. $+\infty$.
B. 0.
C. -2.
D. Không tồn tại.

5.37. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } -1 < x \le 1 \\ 1 - x & \text{nếu } x \le -1 \text{ hoặc } x > 1 \end{cases}$. Mệnh đề đúng là

A. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$.
B. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-1; 1]$.
C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1)$.
D. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

5.38. Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & \text{nếu } x \ne -1 \\ m & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$ với m là tham số. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi

A. $m = 0$.
B. $m = 3$.
C. $m = -1$.
D. $m = 1$.

5.39. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x-1}}$. Hàm số này liên tục trên

A. $(1;+\infty)$. B. $(-\infty;1)$. C. $[1;+\infty)$. D. $(-\infty;1]$.

5.40. Cho phương trình $x^7+x^5=1$. Mệnh đề đúng là

A. Phương trình có nghiệm âm.

B. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

C. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(1;2)$.

D. Phương trình vô nghiệm.

B. TỰ LUẬN

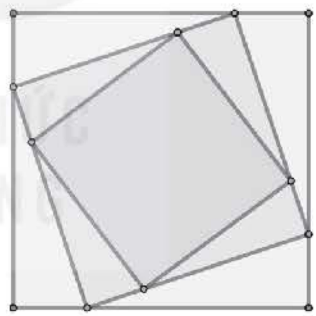
5.41. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $|u_n|\le 1$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n+1}$.

5.42. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n\sqrt{1+2+\cdots+n}}{2n^2+3}$.

5.43. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) $-0,(31)$; b) $2,(121)$.

5.44. Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a. Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2. Lặp lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3.



Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots$ Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n.

a) Tính s_n.

b) Tính tổng $T=s_1+s_2+\cdots+s_n+\cdots$

5.45. Tìm a là số thực thoả mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x+3}+a^2+3a\right)=0$.

5.46. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(x+1)(2x-1)}{5x^3+x+7}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 1\right)\left(2 - x^5\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x\right)$.

5.47. Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x)(1 - 2x)\ldots(1 - 2\,018x)$.

5.48. Biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Hãy tính:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x^2}$.

5.49. Tính $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

5.50. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1} - \sqrt{1 - x}}{x}$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$?

5.51. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

b) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.

c) Có kết luận gì về tính liên tục của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$?

5.52. Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

1.1. Hoàn thành bảng sau:

Số đo độ	20°	990°	150°	500°	-150°	84°
Số đo rađian	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{25\pi}{9}$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{15}$

1.2. *HD*. Vẽ đường tròn lượng giác và tìm điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

1.3. a) Ta có $l = R\alpha = 20\cdot\frac{2\pi}{7} = \frac{40\pi}{7}$ (m).

b) Ta có $l = R\cdot\frac{\pi a}{180} = 20\cdot\frac{\pi 36}{180} = 4\pi$ (m).

1.4. Từ đẳng thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, suy ra

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Mặt khác $90^\circ < x < 180^\circ$ nên $\sin x > 0$. Do đó

$$\sin x = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Từ đó tính được $\tan x = \frac{12}{13} : \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{5}$; $\cot x = -\frac{5}{12}$.

1.5. a) Ta có: $\sin a+\cos a=m$ nên $(\sin a+\cos a)^2=m^2$

hay $1+2\sin a\cos a=m^2$.

Từ đó suy ra $\sin a\cos a=\dfrac{m^2-1}{2}$.

b) $\sin^3 a+\cos^3 a=(\sin a+\cos a)^3-3\sin a\cos a(\sin a+\cos a)$

$$=m^3-3m\frac{m^2-1}{2}=\frac{3m-m^3}{2}.$$

c) $\sin^4 a+\cos^4 a=\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)^2-2\sin^2 a\cos^2 a$

$$=1-2\sin^2 a\cos^2 a=1-\frac{\left(m^2-1\right)^2}{2}.$$

1.6. a) $VT=\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1=VP$.

b) Ta có

$$VT=\tan^2 x-\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\frac{\sin^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\sin^2 x$$

$=\tan^2 x.\sin^2 x=VP$.

c) $VT=(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$

$=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x$

$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2=VP$.

1.7. $A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$

$=\cos^4 x-\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$

$=\cos^2 x-\sin^2 x+\cos^2 x+3\sin^2 x=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2$.

1.8. a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\dfrac{12}{6}=2$ vòng, tức là quay được một góc 4π (rad) hay 720°.

b) Trong 1 phút, quãng đường mà người đi xe đã đi được là:

$$l=430\cdot 4\pi\cdot 60=103\,200\pi\ (\text{mm}).$$

1.9. Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác 2π; kim giờ quét được một góc $\frac{\pi}{6}$. Hiệu vận tốc giữa kim phút và kim giờ là $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là

$$\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) : \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{11} \text{ (giờ)}.$$

Vậy sau $\frac{1}{11}$ (giờ) hai kim sẽ vuông góc với nhau.

Tổng quãng đường hai đầu mút kim đi được là

$$l = R \cdot \alpha = 6 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{\pi}{6} + 11 \cdot \frac{1}{11} \cdot 2\pi = \frac{23\pi}{11} \text{ (cm)}.$$

BÀI 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1.10. $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

$\tan 105^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$; $\cot 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$.

1.11. Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0$, $\cos x > 0$. Áp dụng công thức hạ bậc, ta có

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}}.$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x=-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

1.12. $\sin^4 a+\cos^4 a=\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)^2-2\sin^2 a\cos^2 a=1-2\cdot(\sin a\cos a)^2$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4a}{2}\right)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4a=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4a.$$

1.13. a) $A=\sin\frac{\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}=\left(\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{5\pi}{9}$

$$=2\sin\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{5\pi}{9}=\sin\frac{4\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}=0.$$

b) Vì $\sin 78^\circ=\cos 12^\circ$; $\sin 66^\circ=\cos 24^\circ$; $\sin 42^\circ=\cos 48^\circ$ nên

$$B=\sin 6^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ.$$

Nhân hai vế với $\cos 6^\circ$ và áp dụng công thức góc nhân đôi, ta được:

$$\cos 6^\circ\cdot B=\cos 6^\circ\sin 6^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ=\frac{1}{16}\sin 96^\circ$$

$$=\frac{1}{16}\sin(90^\circ+6^\circ)=\frac{1}{16}\cos 6^\circ.$$

Vậy $B=\frac{1}{16}$.

1.14. a) Ta có

$$\sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos a\cos\frac{\pi}{4}-\sin a\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a\right)$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos a-\sin a)=\cos a-\sin a.$$

b) Ta có $2\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\sin a\cos\frac{\pi}{3}+\cos a\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}\sin a+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a\right)$

$$=\sin a+\sqrt{3}\cos a.$$

1.15. $VT=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}.$

Mặt khác, trong tam giác ABC, ta có $A+B+C=\pi$ nên $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$.

Từ đó suy ra: $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$.

Vậy

$$VT = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = VP$$ (điều phải chứng minh).

BÀI 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1.16. a) Biểu thức $\cot 3x$ có nghĩa khi $\sin 3x \neq 0$ hay $x \neq k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Biểu thức $\sqrt{1-\cos 4x}$ có nghĩa với mọi x vì $\cos 4x \leq 1$ với mọi x. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

c) Biểu thức $\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\cos 2x}{-\cos 2x}$ có nghĩa khi

$$\cos 2x \neq 0 \text{ hay } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

d) Biểu thức $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\sin 2x}}$ có nghĩa khi $\sin 2x \neq 1$ hay $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1.17. a) Vì $0 \leq |\cos x| \leq 1$ nên $0 \leq 3|\cos x| \leq 3$, do đó $2 \leq 2 + 3|\cos x| \leq 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 5, đạt được khi

$$|\cos x| = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

và giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2, đạt được khi

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Điều kiện $\sin x \geq 0$. Vì $0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1$ nên $0 \leq 2\sqrt{\sin x} \leq 2$,

do đó $1 \leq 2\sqrt{\sin x} + 1 \leq 3$ với mọi x thoả mãn $0 \leq \sin x \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 3, đạt được khi $\sin x = 1$ hay

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 1, đạt được khi $\sin x = 0$ hay $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $y = 3\cos^2 x + 4\cos 2x = 3 \cdot \dfrac{1 + \cos 2x}{2} + 4\cos 2x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{2}\cos 2x$.

Vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ nên $-\dfrac{11}{2} \leq \dfrac{11}{2}\cos 2x \leq \dfrac{11}{2}$,

do đó $-4 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{2} \leq \dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{2}\cos 2x \leq \dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{2} = 7$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 7, đạt được khi

$$\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

và giá trị nhỏ nhất của hàm số là –4, đạt được khi

$$\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Vì $-1 \leq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$ nên $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

1.18. a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nếu kí hiệu $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{x^3}$ thì với mọi $x \in D$, ta có

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = \frac{\cos 2(-x)}{(-x)^3} = -\frac{\cos 2x}{x^3} = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = x - \sin 3x$ thì với mọi $x \in D$, ta có

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = (-x) - \sin 3(-x) = -x + \sin 3x = -(x - \sin 3x) = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ thì với mọi $x \in D$, ta có

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = \sqrt{1 + \cos(-x)} = \sqrt{1 + \cos x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu kí hiệu $f(x) = 1 + \cos x \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right) = 1 - \cos x \cos 2x$ thì với mọi $x \in D$

ta có $-x \in D$ và $f(-x) = 1 - \cos(-x)\cos 2(-x) = 1 - \cos x \cos 2x = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

1.19. a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ thì với mọi $x \in D$, ta có

$x + \dfrac{2\pi}{\omega} \in D,\ x - \dfrac{2\pi}{\omega} \in D$ và

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right)$$

$$= A\sin(\omega x + 2\pi + \varphi) = A\sin(\omega x + \varphi) = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn. Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Tương tự, hàm số $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ cũng tuần hoàn chu kì $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

b) Nếu kí hiệu D là tập xác định của hàm số $f(x) = A\tan(\omega x + \varphi)$ thì với mọi $x \in D$, ta có:

$x + \dfrac{\pi}{\omega} \in D,\ \ x - \dfrac{\pi}{\omega} \in D$ và

$$f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) = A\tan\left(\omega\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = A\tan(\omega x + \pi + \varphi) = A\tan(\omega x + \varphi) = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn. Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $\frac{\pi}{\omega}$.

Chú ý. Tương tự, hàm số $y = A\cot(\omega x + \varphi)$ cũng tuần hoàn chu kì $\frac{\pi}{\omega}$.

c) Ta có $3\sin 2x + 3\cos 2x = 3\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Theo câu a, hàm số $y = 3\sin 2x + 3\cos 2x$ tuần hoàn chu kì π.

d) Ta có

$$3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3 \cdot 2\sin\frac{\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{2}\cos\frac{\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = 3\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right).$$

Vậy theo câu a, hàm số $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là hàm số tuần hoàn chu kì π.

1.20. a) Đẳng thức $\tan x \cot x = 1$ đúng với mọi x khi $\tan x$ và $\cot x$ có nghĩa, tức là

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

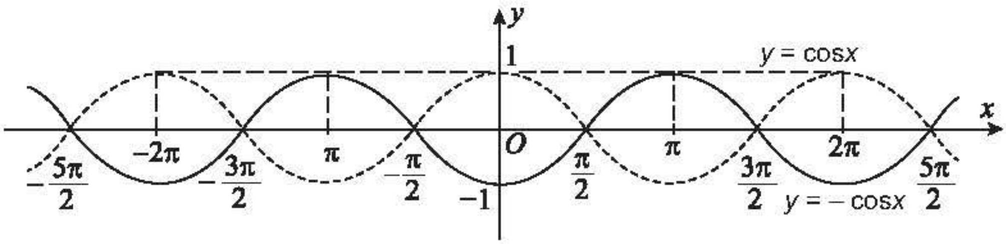
b) Đẳng thức $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ đúng với mọi x khi $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

c) Đẳng thức $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ đúng với mọi x khi $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

d) Đẳng thức $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ đúng với mọi x khi

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

1.21. a) Lấy đối xứng đồ thị hàm số y = cos$x$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = -\cos x$.

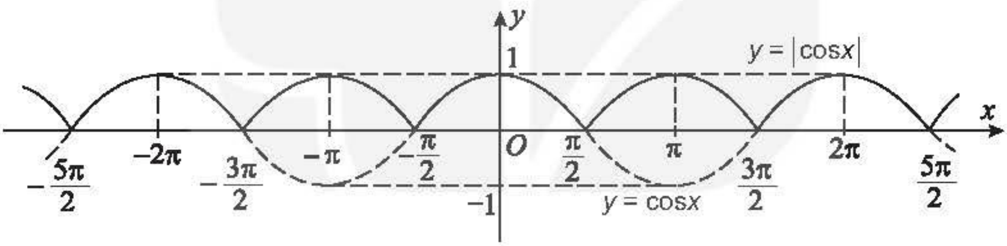


Trong hình trên, đồ thị hàm số $y = \cos x$ là đường nét đứt còn đồ thị hàm số $y = -\cos x$ là đường nét liền.

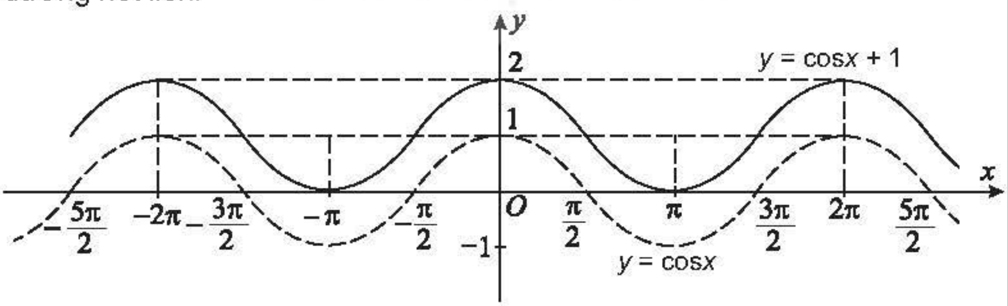
b) Ta có

$$y = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{khi } \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \text{khi } \cos x < 0. \end{cases}$$

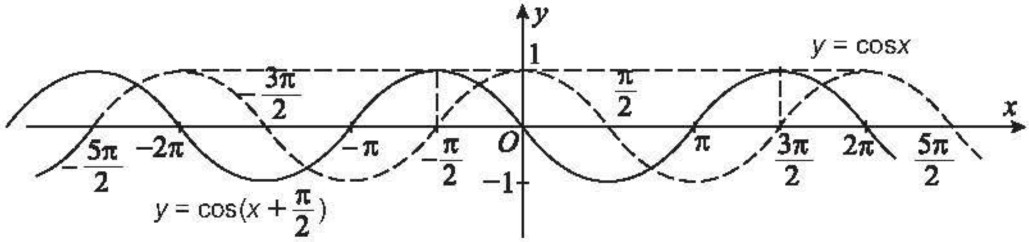
Từ đó, để vẽ đồ thị hàm số $y = |\cos x|$ đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$, sau đó giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \cos x$ ở phía trên trục Ox và lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị hàm số $y = \cos x$ ở phía dưới trục Ox. Trong hình dưới đây, đồ thị hàm số $y = |\cos x|$ là đường nét liền.



c) Để vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x + 1$, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$, sau đó dịch chuyển đồ thị này dọc theo trục Oy lên phía trên 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x + 1$. Trong hình dưới đây, đồ thị hàm số $y = \cos x + 1$ là đường nét liền.

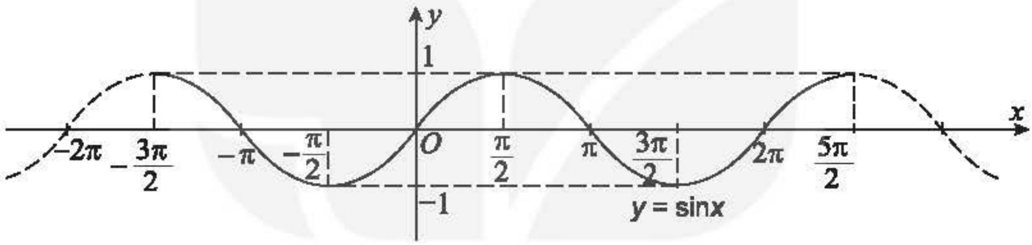


d) Để vẽ đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$, sau đó dịch chuyển đồ thị này dọc theo trục Ox sang bên trái $\frac{\pi}{2}$ đơn vị ta sẽ được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Trong hình vẽ dưới đây đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là đường nét liền.



Chú ý rằng $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ nên đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ cũng có thể có được bằng cách lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = \sin x$ qua trục Ox.

1.22.



a) Trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ đồ thị hàm số $y = \sin x$ cắt trục Ox tại bốn điểm $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$ và $x = 2\pi$. Suy ra phương trình $\sin x = 0$ có bốn nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$ và $x = 2\pi$.

b) Giải bất phương trình $\sin x > 0$ là tìm những khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y = \sin x$ nằm phía trên trục Ox. Từ đó, ta được tập nghiệm của bất phương trình $\sin x > 0$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

$$S = \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right) \cup (0; \pi) \cup \left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right).$$

1.23. a) Hàm số $y = 25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T = \frac{1}{2}$ giây.

b) Vì chu kì dao động của con lắc là $T = \frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $f = \frac{1}{T} = 2$ Hz.

c) Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25\sin 4\pi t$, nên biên độ dao động của nó là $A = 25$ cm. Từ đó, khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $2A = 50$ cm.

1.24. a) – Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t = 8 - 6 = 2$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là

$$S(2) = 40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 2\right)\right| = 40\sqrt{3}\ (\text{m}).$$

– Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t = 12 - 6 = 6$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là

$$S(6) = 40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 6\right)\right| = 0\ (\text{m}).$$

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ toà nhà được chiếu xuống móng của toà nhà.

– Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t = 14 - 6 = 8$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là

$$S(8) = 40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 8\right)\right| = \frac{40\sqrt{3}}{3}\ (\text{m}).$$

– Tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối, ta có $t = \left(17 + \frac{3}{4}\right) - 6 = \frac{39}{4}$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối là

$$S\left(\frac{39}{4}\right) = 40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot\frac{39}{4}\right)\right| \approx 59{,}86\ (\text{m}).$$

b) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao tòa nhà khi

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right| = 40 \Leftrightarrow \cot\frac{\pi}{12}t = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \le t \le 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

c) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t \to 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12}t \to \pi$, do đó $\cot\frac{\pi}{12}t \to -\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1.25. a) Ta có

$$2\sin\left(\frac{x}{3}+15^\circ\right)+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{3}+15^\circ\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{3}+15^\circ=-45^\circ+k360^\circ\\ \frac{x}{3}+15^\circ=225^\circ+k360^\circ\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-180^\circ+k1\,080^\circ\\ x=630^\circ+k1\,080^\circ\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

b) Ta có $\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=-1 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{5}=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{5}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) Ta có $3\tan 2x+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \tan 2x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan 2x=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) Ta có $\cot(2x-3)=\cot 15^\circ$

$$\Leftrightarrow \cot(2x-3)=\cot\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 2x-3=\frac{\pi}{12}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

1.26. a) Ta có

$$\sin\left(2x+15^\circ\right)+\cos\left(2x-15^\circ\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(2x+15^\circ\right)=-\cos\left(2x-15^\circ\right)$$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+15^\circ\right)=\sin\left[-90^\circ+\left(2x-15^\circ\right)\right]$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(2x+15^\circ\right)=\sin\left(2x-105^\circ\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+15^\circ=2x-105^\circ+k360^\circ\\ 2x+15^\circ=180^\circ-\left(2x-105^\circ\right)+k360^\circ\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}120^\circ=k360^\circ\\ x=67{,}5^\circ+k90^\circ\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Không xảy ra trường hợp $120^\circ=k360^\circ$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=67{,}5^\circ+k90^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) Ta có $\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left[\pi-\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}-3x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{5}=\frac{7\pi}{6}-3x+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{5}=-\left(\frac{7\pi}{6}-3x\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{29\pi}{150}+k\frac{2\pi}{5} \\ x=\frac{41\pi}{30}-k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

c) Ta có $\tan x+\cot x=0 \Leftrightarrow \tan x=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x=x-\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+k\pi=0\ (k\in\mathbb{Z})$. Vô lí.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện $\cos x\neq 0$. Ta có $\sin x+\tan x=0 \Leftrightarrow \sin x\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \cos x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x=k\pi$ thoả mãn điều kiện $\cos x\neq 0$ nên nghiệm của phương trình đã cho là $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

1.27. a) Ta có $(2+\cos x)(3\cos 2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+\cos x=0 \\ 3\cos 2x-1=0. \end{array}\right.$

– Phương trình $2+\cos x=0$ vô nghiệm.

– Gọi α là góc thoả mãn $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Vậy

$$3\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\alpha \Leftrightarrow 2x=\pm\alpha+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\alpha}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) Ta có $2\sin 2x-\sin 4x=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x-2\sin 2x\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x(1-\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x=0 \\ \cos 2x=1. \end{array}\right.$$

Vì $\cos 2x=1$ kéo theo $\sin 2x=0$, nên phương trình tương đương với

$$\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

c) Ta có $\cos^6 x-\sin^6 x=0 \Leftrightarrow \left(\cos^2 x\right)^3=\left(\sin^2 x\right)^3 \Leftrightarrow \cos^2 x=\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0.$$

Từ đó ta được $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

d) Điều kiện $\sin x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 0$.

Ta có $\tan 2x \cot x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan x \Leftrightarrow 2x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi$.

Ta thấy $x = k\pi$ không thoả mãn điều kiện $\sin x \neq 0$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

1.28. a) Giá trị tương ứng của hai hàm số $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ và $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng nhau nếu

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Giá trị tương ứng của hai hàm số $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ bằng nhau nếu

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{24} + k\pi \\ x = \frac{17\pi}{48} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

1.29. a) Vì $-1 \leq \sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 1$ nên $-2{,}5 \leq 2{,}5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 2{,}5$ và do đó ta có

$$-0{,}5 = 2 - 2{,}5 \leq 2 + 2{,}5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 2 + 2{,}5 = 4{,}5\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, gầu ở vị trí cao nhất khi

$$\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy gầu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ phút.

Tương tự, gầu ở vị trí thấp nhất khi

$$\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=k\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm $0, 1, 2, 3, \ldots$ phút.

b) Gầu cách mặt nước 2 m khi $2+2{,}5\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=2$

$$\Leftrightarrow \sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftrightarrow 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy chiếc gầu cách mặt nước 2 m lần đầu tiên tại thời điểm $x=\frac{1}{4}$ phút.

1.30. Vì $-1\le \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)\le 1$ nên $-2{,}83\le 2{,}83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)\le 2{,}83$,

do đó

$$9{,}17=12-2{,}83\le 12+2{,}83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)\le 12+2{,}83=14{,}83\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

a) Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=-1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=-\frac{45}{4}+365k\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $0<t\le 365$ nên $k=1$, suy ra $t=-\frac{45}{4}+365=353{,}75$. Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố A sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

b) Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80)=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=171{,}25+365k\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $0<t\le 365$ nên $k=0$, suy ra $t=171{,}25$. Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố A sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

c) Thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$$12+2{,}83\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=10 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=-\frac{200}{283}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2\pi}{365}(t-80)\approx -0{,}78+k2\pi\\ \frac{2\pi}{365}(t-80)\approx 3{,}93+k2\pi.\end{array}\right.$$

Từ đó ta được $\left[\begin{array}{l} t \approx 34,69 + 365k \\ t \approx 308,30 + 365k \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$ suy ra $t \approx 34,69$ hoặc $t \approx 308,30$. Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thành phố A sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.

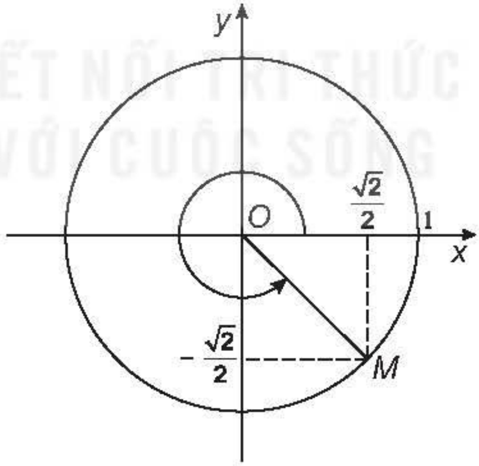
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

1.31. C	**1.32.** A	**1.33.** C	**1.34.** D	**1.35.** D	**1.36.** C	**1.37.** D
1.38. C	**1.39.** B	**1.40.** D	**1.41.** D	**1.42.** D	**1.43.** C	**1.44.** A
1.45. C	**1.46.** C	**1.47.** A	**1.48.** C	**1.49.** B	**1.50.** A	

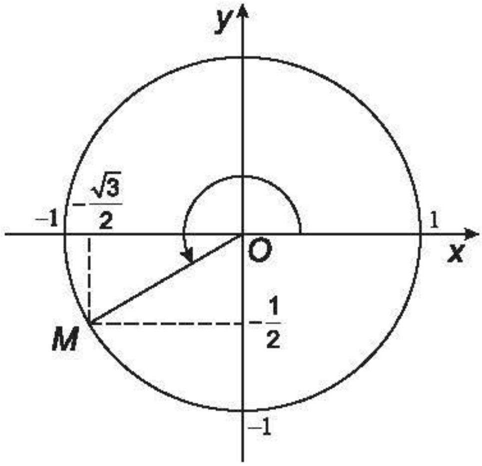
B. TỰ LUẬN

1.51. a) Ta có $\frac{23\pi}{4} = 6\pi - \frac{\pi}{4}$. Góc $\frac{23\pi}{4}$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ trên đường tròn lượng giác (hình dưới).



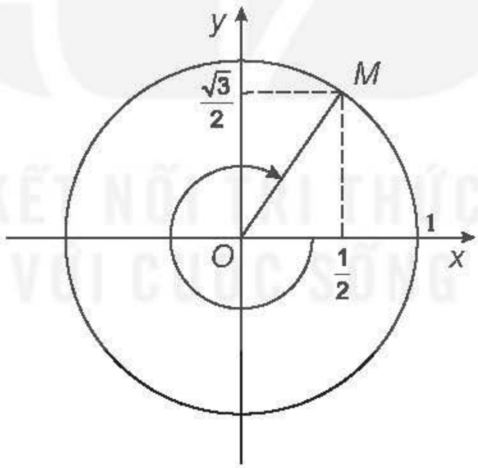
Vậy $\sin\frac{23\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{23\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\tan\frac{23\pi}{4} = \cot\frac{23\pi}{4} = -1$.

b) Ta có $\frac{31\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 4\pi$. Góc $\frac{31\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ trên đường tròn lượng giác (hình trang bên).



Vậy $\sin\frac{31\pi}{6}=-\frac{1}{2}$; $\cos\frac{31\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\frac{31\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\cot\frac{31\pi}{6}=\sqrt{3}$.

c) Ta có $-1\,380^\circ=-4\cdot360^\circ+60^\circ$. Góc $-1\,380^\circ$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ trên đường tròn lượng giác (hình dưới).



Vậy $\sin\left(-1\,380^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(-1\,380^\circ\right)=\frac{1}{2}$;

$\tan\left(-1\,380^\circ\right)=\sqrt{3}$ và $\cot\left(-1\,380^\circ\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1.52. a) Trong 15 phút thì mũi kim phút vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}$ độ dài đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$$\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot R=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1{,}75=\frac{7}{8}\pi\approx 2{,}75\ (\text{m}).$$

b) Trong 15 phút thì mũi kim giờ vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}$ đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}\cdot 2\pi\cdot R=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}\cdot 2\pi\cdot 1{,}26=\frac{21}{400}\pi\approx 0{,}16\ (\text{m}).$$

1.53. Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^\circ-9^\circ=14^\circ$. Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\frac{6\,378\cdot 14\cdot\pi}{180}\approx 1\,558$ (km).

1.54. Ta có $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$.

Ta có $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$. Lại do $\sin\alpha>0$ nên $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Suy ra

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Ta có $\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\cdot\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$.

Ta có $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$.

Lại do $\beta\in\left(\frac{9\pi}{2};5\pi\right)$ nên $\cos\beta<0$, do đó $\cos\beta=-\frac{4}{5}$. Suy ra

$$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}.$$

Ta có

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{-12-3\sqrt{7}}{20}.$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{-9-4\sqrt{7}}{20}.$$

1.55. a) Ta có

$$\frac{\sin\left(45^\circ+\alpha\right)-\cos\left(45^\circ+\alpha\right)}{\sin\left(45^\circ+\alpha\right)+\cos\left(45^\circ+\alpha\right)}$$

$$= \frac{(\sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha) - (\cos 45^\circ \cos\alpha - \sin 45^\circ \sin\alpha)}{(\sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha) + (\cos 45^\circ \cos\alpha - \sin 45^\circ \sin\alpha)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)} = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

b) Ta có

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos^2\alpha + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(2\cos\alpha + 1)}{\cos\alpha(2\cos\alpha + 1)} = \tan\alpha.$$

c) Ta có

$$\frac{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha - \sin\alpha}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)} = -\cot\frac{\alpha}{2}.$$

d) Ta có

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$$

$$= \frac{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha + \sin 3\alpha}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha(2\cos 2\alpha + 1)}{\cos 3\alpha(2\cos 2\alpha + 1)} = \tan 3\alpha.$$

1.56. a) *Cách 1.* Ta có

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 0,\ \forall x.$$

Cách 2. Ta có

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0,\ \forall x.$$

b) Ta có

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0\ \forall x.$$

c) Ta có $C=\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin^2 x+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos(-2x)\right)$

$$=\sin^2 x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos 2x\right)=\sin^2 x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\left(1-2\sin^2 x\right)\right)=\frac{1}{4}\ \forall x.$$

d) Ta có $D=\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}\cdot\cot x=\frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}\cdot\cot x$

$$=\frac{2\sin x(\sin x+\cos x)}{2\cos x(\sin x+\cos x)}\cdot\cot x=\tan x\cdot\cot x=1\ \forall x.$$

1.57. a) Ta có $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$

$$=C\sin\omega t+C\sin(\omega t+\alpha)=C\sin\omega t+C(\sin\omega t\cos\alpha+\cos\omega t\sin\alpha).$$

Vậy $f(t)=C(1+\cos\alpha)\sin\omega t+C\sin\alpha\cos\omega t=A\sin\omega t+B\cos\omega t$

với $A=C(1+\cos\alpha)$, $B=C\sin\alpha$.

b) Khi $C=10$ và $\alpha=\frac{\pi}{3}$, ta có

$$f(t)=10\sin\omega t+10\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)=10\cdot 2\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=10\sqrt{3}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k=10\sqrt{3}$ và $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

1.58. a) Biểu thức $\cos\frac{2x}{x-1}$ có nghĩa khi $x\neq 1$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Biểu thức $\frac{1}{\cos x-\cos 3x}$ có nghĩa khi

$$\cos x\neq\cos 3x\Leftrightarrow 3x\neq\pm x+k2\pi\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Biểu thức $\dfrac{1}{\cos x + \sin 2x}$ có nghĩa khi

$$\cos x + \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \dfrac{\pi}{2} \neq x + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{2} \neq -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

d) Biểu thức $\tan x + \cot x$ có nghĩa khi

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1.59. a) Ta có $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Vì $-1 \leq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$ nên $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có $y = \sin x + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 1, đạt được khi $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{6} = k2\pi$ hay

$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1, đạt được khi $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi$ hay $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Vì $-1 \le \cos 4x \le 1$ nên $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \le \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \le \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 1, đạt được khi $\cos 4x = 1$

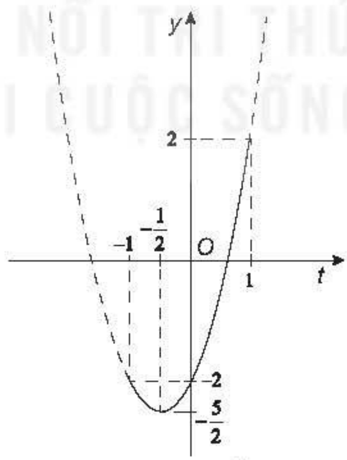
$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $\cos 4x = -1$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Ta có $y = \cos 2x + 2\cos x - 1 = 2\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 2t^2 + 2t - 2$ với $t = \cos x \in [-1;1]$.

Xét hàm số $y = 2t^2 + 2t - 2$ trên đoạn $[-1;1]$. Hàm số này có đồ thị như trong hình vẽ dưới đây.



Từ đồ thị ta dễ dàng suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là 2, đạt được khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{5}{2}$, đạt được khi $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1.60. a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Nếu kí hiệu $f(x) = \sin^3 x - \cot x$ thì với mọi $x \in D$ ta có: $-x \in D$ và

$$f(-x) = \sin^3(-x) - \cot(-x) = -\sin^3 x + \cot x = -\left(\sin^3 x - \cot x\right) = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Nếu kí hiệu $f(x) = \dfrac{\cos x + \tan^2 x}{\cos x}$ thì với mọi $x \in D$ ta có: $-x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) + \tan^2(-x)}{\cos(-x)} = \frac{\cos x + \tan^2 x}{\cos x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Nếu kí hiệu $f(x) = \sin 2x + \cos x$ thì ta có

$f(-1) = \sin 2(-1) + \cos(-1) = -\sin 2 + \cos 1 \neq \pm f(1)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số không chẵn cũng không lẻ.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
y &= 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\\
&= \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\right] + \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\right]\\
&= \sin\pi - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\cos 2x
\end{aligned}$$

là hàm số chẵn.

1.61. a) Hàm số $y = \sin\dfrac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 4\pi$, hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \dfrac{2\pi}{3}$. Ta có $4\pi = 6 \times \dfrac{2\pi}{3}$. Ta chỉ ra rằng hàm số $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \cos 3x$ tuần hoàn như sau:

$$\begin{aligned}
f(x + 4\pi) &= \sin\frac{x + 4\pi}{2} + \cos 3(x + 4\pi)\\
&= \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) + \cos(3x + 12\pi) = \sin\frac{x}{2} + \cos 3x = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $T = 4\pi$.

b) Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, hàm số $y = \tan\frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = 3\pi$.

Ta có $6\pi = 2\times 3\pi = 15\times\frac{2\pi}{5}$. Ta có thể chỉ ra hàm số $f(x) = \cos 5x + \tan\frac{x}{3}$ tuần hoàn như sau

$$f(x+6\pi) = \cos 5(x+6\pi) + \tan\frac{x+6\pi}{3}$$

$$= \cos(5x+30\pi) + \tan\left(\frac{x}{3}+2\pi\right) = \cos 5x + \tan\frac{x}{3} = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $T = 6\pi$.

1.62. a) Ta có $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có

$$\tan\left(\frac{x}{3}+10^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{3}+10^\circ\right) = \tan(-30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} + 10^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = -120^\circ + k540^\circ\ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Ta có

$$\sin 3x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - 5x + k2\pi \\ 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} - k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Điều kiện $\cos 3x \neq 0$ & $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 3x \neq 0$. Ta có

$$\tan 3x \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \cot x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta thấy $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ thoả mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$.

1.63. a) Ta có $\sin 5x + \cos 5x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi. \end{array}\right.$$

Từ đó ta được $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z}).$

b) Ta có $\cos 3x - \cos 5x = \sin x \Leftrightarrow -2\sin\frac{3x+5x}{2}\sin\frac{3x-5x}{2} = \sin x$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x\sin x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

– Với $\sin x = 0$ ta được $x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

– Với $\sin 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z}).$

c) Ta có

$$2\cos^2 x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \left(2\cos^2 x - 1\right) + \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.$$

Từ đó ta được $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x \Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

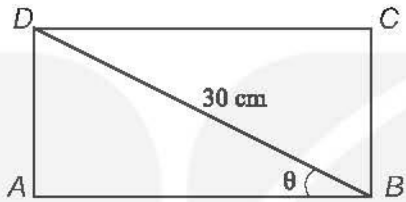
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 = \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Từ đó, ta được $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}\sin^2 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

1.64. a) Mặt cắt của thanh xà gồ (hình dưới) là hình chữ nhật có hai kích thước là

$AB = 30\cos\theta$ và $BC = 30\sin\theta$.



Vậy diện tích mặt cắt là $S = AB \cdot BC = 30 \cdot 30\sin\theta\cos\theta = 450\sin 2\theta$.

b) Ta có $S = 450\sin 2\theta \le 450$. Vậy diện tích mặt cắt của thanh xà gồ lớn nhất khi $\sin 2\theta = 1$ hay góc $\theta = 45^\circ$.

1.65. a) Huyết áp là 100 mmHg khi

$$P(t) = 100 \Leftrightarrow 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3k}{7}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3k}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in \{1;2\}$ vì $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 mmHg.

b) Huyết áp là 120 mmHg khi

$$P(t) = 120 \Leftrightarrow 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 120$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{14} + \frac{6k}{7}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0$ vì $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 mmHg.

CHƯƠNG II. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

BÀI 5. DÃY SỐ

2.1. a) $u_1 = (-1)^0 . \frac{1}{2.1-1} = 1$; $u_2 = (-1)^1 . \frac{2}{2.2-1} = -\frac{2}{3}$; $u_3 = (-1)^2 . \frac{3}{2.3-1} = \frac{3}{5}$;

$u_4 = (-1)^3 . \frac{4}{2.4-1} = -\frac{4}{7}$; $u_5 = (-1)^4 . \frac{5}{2.5-1} = \frac{5}{9}$.

b) $u_1 = 1$; $u_2 = 2 - u_1 = 1$; $u_3 = 3 - u_2 = 2$; $u_4 = 4 - u_3 = 2$; $u_5 = 5 - u_4 = 3$.

2.2. a) Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + n + 1 + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 3 > 0$, $\forall n \geq 1$, nên (u_n) là dãy số tăng.

b) Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+5}{n+3} - \frac{2n+5}{n+2} = \frac{2n+7}{n+3} - \frac{2n+5}{n+2}$$

$$= \frac{(2n+7)(n+2) - (2n+5)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{-1}{(n+2)(n+3)} < 0, \forall n \geq 1$$

nên (u_n) là dãy số giảm.

c) Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1} + \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

$$= (-1)^n \left(\frac{1}{(n+1)^2+1} + \frac{1}{n^2+1} \right).$$

Rõ ràng hiệu này dương hay âm phụ thuộc vào n, cụ thể là dương khi n chẵn và âm khi n lẻ.

Do đó dãy số (u_n) không tăng cũng không giảm.

2.3. a) Ta có $u_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$.

Suy ra $\frac{1}{3} \le u_n \le \frac{1}{2}$, với mọi $n \ge 1$.

Do đó (u_n) là dãy số bị chặn.

b) Ta có dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi 1 với mọi $n \ge 1$.

c) Ta có dãy số (u_n) bị chặn trên bởi 1 với mọi $n \ge 1$.

2.4. a) Với $p = 5 \Rightarrow \sqrt{5} \approx 2,23607$. Nếu ta chọn $u_1 = 3$ thì ta có bảng giá trị sau:

$u_1 = 3$ $\quad u_2 = 2,3333$ $\quad u_3 = 2,2381$ $\quad u_4 = 2,2361$ $\quad u_5 = 2,2361$.

Sai số tuyệt đối khoảng 0,00003.

b) Với $p = 8$ thì $\sqrt{8} \approx 2,82843$.

Nếu ta chọn $u_1 = 3$ thì ta có bảng giá trị sau

$u_1 = 3$ $\quad u_2 = 2,8333$ $\quad u_3 = 2,8284$ $\quad u_4 = 2,8284$ $\quad u_5 = 2,8284$.

Sai số tuyệt đối khoảng 0,00003.

2.5. a) Bảy số tam giác đầu là

$u_1 = 1$ $\quad u_2 = 3$ $\quad u_3 = 6$ $\quad u_4 = 10$ $\quad u_5 = 15$ $\quad u_6 = 21$ $\quad u_7 = 28$.

Ta nhận thấy $u_2 = 1 + 2, u_3 = 1 + 2 + 3, u_4 = 1 + 2 + 3 + 4, \ldots$

b) Ta có: $u_{n+1} = 1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

c) Theo công thức ở câu b) ta có:

$$u_{n+1} + u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2+n)}{2} = (n+1)^2.$$

Vậy tổng của hai số tam giác liên tiếp là một số chính phương.

2.6. Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là

$$T_1 = 50 \cdot 75\% = 37,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là

$$T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là

$$T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là

$$T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là

$$T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652 \text{ (triệu đồng)}.$$

Chú ý. Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là

$$T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1} \text{ (triệu đồng).}$$

2.7. Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$$A_5 = 2,5 \cdot (1,035)^5 = 2,9692 \text{ (tỉ đồng).}$$

2.8. a) Ba số hạng đầu của dãy số là $A_1 = 201,5$; $A_2 = 203,0113$; $A_3 = 204,5338$.

b) Chú ý rằng 2 năm bằng 8 quý, tức là $n = 8$. Do đó, sau 2 năm số tiền bác An nhận được là $A_8 = 212,3198$ triệu đồng.

2.9. Giả sử ban đầu có 1 vi khuẩn E. Coli.

Sau 20 phút lần một, số vi khuẩn là $1 \cdot 2 = 2$.

Sau 20 phút lần hai, số vi khuẩn là $2 \cdot 2 = 2^2$.

Sau 20 phút lần ba, số vi khuẩn là $2^2 \cdot 2 = 2^3$.

Sau 20 phút lần bốn, số vi khuẩn là $2^3 \cdot 2 = 2^4$.

....

Tương tự như vậy sau 12 giờ (bằng $3 \cdot 12$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{3 \cdot 12} = 2^{36} \approx 6,87 \cdot 10^{10} \text{ (con).}$$

Sau 48 giờ (bằng $3 \cdot 48 = 144$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{144} \approx 2,23 \cdot 10^{43} \text{ (con).}$$

2.10. a) Gọi $u_0 = 1,0 \cdot 10^9$ là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và u_n là số vi khuẩn trước lần dùng thuốc thứ n.

Do mỗi liều thuốc được sử dụng sau bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \cdot 10^8$ vi khuẩn và giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25% nên ta có

$$u_{n+1} = \left(u_n - 4,0 \cdot 10^8\right) + 25\% \cdot u_n = 1,25u_n - 4,0 \cdot 10^8.$$

b) Ta tính u_5 như sau:

$u_1 = 1,0 \cdot 10^9$;

$u_2 = 1,25u_1 - 4,0 \cdot 10^8 = 8,5 \cdot 10^8$;

$u_3 = 1,25u_2 - 4,0 \cdot 10^8 = 6,625 \cdot 10^8$;

$u_4 = 1,25u_3 - 4,0 \cdot 10^8 = 4,28125 \cdot 10^8$;

$u_5 = 1,25u_4 - 4,0 \cdot 10^8 = 1,3515625 \cdot 10^8$.

Vậy số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm là 135 156 250 con.

BÀI 6. CẤP SỐ CỘNG

2.11. a) Từ $u_n = 4 - 3n$ suy ra $u_{n+1} = 4 - 3(n+1) = 1 - 3n$.

Như vậy $u_{n+1} - u_n = (1-3n) - (4-3n) = -3 \forall n$. Vậy dãy số là cấp số cộng.

b) Từ $u_n = n^2 + 1$ suy ra $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$.

Như vậy $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$, phụ thuộc vào n. Vậy dãy số không là cấp số cộng.

c) Từ $u_n = 2n + 5$ suy ra $u_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 7$.

Như vậy $u_{n+1} - u_n = 2 \ \forall n$. Vậy dãy số là cấp số cộng.

d) Từ hệ thức truy hồi ta có $u_{n+1} - u_n = n$, phụ thuộc vào n. Vậy dãy số không là cấp số cộng.

2.12. a) Do số hạng thứ tám của một cấp số cộng là 75 và số hạng thứ hai mươi là 39 nên ta có

$$\begin{cases} u_8 = 75 \\ u_{20} = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 7d = 75 \\ u_1 + 19d = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 96 \\ d = -3. \end{cases}$$

b) Hệ thức truy hồi của cấp số cộng này là $\begin{cases} u_1 = 96 \\ u_{n+1} = u_n - 3. \end{cases}$

c) Công thức tổng quát của cấp số cộng này là $u_n = 96 - (n-1)3 = 99 - 3n$.

2.13. Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với $n = 20$ và $d = 3$ ta có

$$650 = S_{20} = \frac{20}{2}\left[2u_1 + (20-1)3\right].$$

Suy ra $u_1 = 4$.

2.14. Từ $2x, 3x + 2, 5x + 3$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng ta suy ra

$$2x + (5x + 3) = 2(3x + 2) \Leftrightarrow x = 1.$$

Thử lại, ta có ba số tìm được là $2, 5, 8$ thoả mãn bài toán. Vậy $x = 1$.

2.15. Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng ta có

$$702 = S_n = \frac{n}{2}\left[2 \cdot 78 + (n-1)(-4)\right].$$

Suy ra $n = 13$, tức là ta cần lấy 13 số hạng đầu.

2.16. Đổi $2,4m = 240\text{cm}$; $1,2\ m = 120\text{cm}$.

Số viên gạch ở hàng đầu tiên (ứng với đáy lớn) là $u_1 = 240 : 10 = 24$.

Số viên gạch ở hàng trên cùng (ứng với đáy nhỏ) là

$$u_n = 120 : 10 = 12.$$

Vì mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó nên ta thu được cấp số cộng có công sai $d = -1$.

Như vậy $u_n = 12 = u_1 + (n-1)(-1) \Rightarrow n = 13$.

Vậy số viên gạch hình vuông cần thiết để ốp hết bức tường đó là

$$S_{13} = \frac{(u_1 + u_{13})13}{2} = 234 \text{ (viên gạch)}.$$

2.17. Công thức của cấp số cộng biểu thị số viên gạch cho mỗi bậc cầu thang như sau:

$$u_1 = 100,\ u_{n+1} = u_n + (-2) \text{ với } n \geq 2.$$

a) Ta tính $u_{30} = u_1 + (30-1)(-2) = 42$.

b) Ta tính $S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30} = \frac{30}{2}\left[2 \cdot 100 + (30-1)(-2)\right] = 2\ 130$.

Như vậy, ta cần 2 130 viên gạch để xây cầu thang.

2.18. Áp dụng công thức tính tổng *n* số hạng đầu của cấp số cộng với $S_n = 2\ 040$, $u_1 = 10, d = 4$ để tìm *n*, ta được

$$2\ 040 = S_n = \frac{n}{2}\left[2 \cdot 10 + (n-1)4\right].$$

Suy ra $n = 30$, tức là góc khán đài đó có 30 hàng ghế.

2.19. Áp dụng công thức tính tổng *n* số hạng đầu của cấp số cộng với

$S_n = 319\ 200$, $u_1 = 35\,000$, $d = 1\ 400$, ta có

$$319\ 200 = S_n = \frac{n}{2}\left[2 \cdot 35\,000 + (n-1) \cdot 1\ 400\right].$$

Suy ra $n = 8$.

Vậy sau 8 năm làm việc thì tổng lương mà anh Nam nhận được là 319 200 đô la.

2.20. a) Theo định nghĩa, chèn ba trung bình cộng vào giữa 4 và 12 ta được cấp số cộng có $u_1 = 4$ và $u_{2+3} = u_5 = 12$. Do tính chất của cấp số cộng nên $u_5 = u_1 + 4d \Rightarrow d = 2$.

Vậy chèn ba trung bình cộng vào giữa 4 và 12 ta được cấp số cộng là: 4, 6, 8, 10, 12.

b) Theo định nghĩa, chèn bốn trung bình cộng vào giữa 16 và 91 ta được cấp số cộng có $u_1 = 6$ và $u_{2+4} = u_6 = 91$. Do tính chất của cấp số cộng nên $u_6 = u_1 + 5d \Rightarrow d = 15$.

Vậy chèn bốn trung bình cộng vào giữa 16 và 91 ta được cấp số cộng là: 16, 31, 46, 61, 76, 91.

BÀI 7. CẤP SỐ NHÂN

2.21. a) Từ $u_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ suy ra $u_{n+1} = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Như vậy $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}\ \forall n$.

Vậy dãy số là cấp số nhân có $u_1 = -\frac{3}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

b) Từ $u_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$ suy ra $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$. Như vậy $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{2^n}{3^{n-1}}} = \frac{2}{3}\ \forall n$.

Vậy dãy số là cấp số nhân có $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{2}{3}$.

2.22. Do cấp số nhân có $u_1 = 64$ và công bội $q = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$

nên số hạng thứ 10 của cấp số nhân là $u_{10} = u_1 q^9 = -\frac{1}{8}$.

2.23. Giả sử rằng các số hạng của cấp số nhân đều là số dương.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} u_4 = 125 \\ u_{10} = \frac{125}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 = 125 \\ u_1 q^9 = \frac{125}{64} \end{cases}$.

Chia vế theo vế của hai phương trình ta có $q^6 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow q = \pm\frac{1}{2}$.

Với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 1\,000 \Rightarrow u_{14} = u_1 q^{13} = \frac{125}{1\,024}$.

Với $q = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = -1\,000$ (loại).

Vậy $u_{14} = \frac{125}{1\,024}$.

2.24. Từ $x, x+2$ và $x+3$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân ta suy ra

$$x(x+3) = (x+2)^2 \Leftrightarrow x = -4.$$

Thử lại, ta có ba số là $-4; -2; -1$ thoả mãn bài toán. Vậy $x = -4$.

2.25. a) Ta nhận thấy các số hạng của tổng là cấp số nhân có $u_1 = 1$, công bội $q = 4$ và có 10 số hạng. Vậy $1 + 4 + 16 + ... + 4^9 = 1 \cdot \dfrac{1-4^{10}}{1-4} = 349\,525$.

b) Ta nhận thấy các số hạng của tổng là cấp số nhân có $u_1 = \dfrac{1}{3}$, công bội $q = 2$ và có 13 số hạng.

Vậy $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2^2}{3} + ... + \dfrac{2^{12}}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = \dfrac{8\,191}{3}$.

2.26. Gọi u_n là số người bị bệnh ở cuối tuần thứ n. Vì có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 5$ và công bội $q = 4$. Suy ra số người bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh ở cuối tuần 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 5 \cdot 4^9 = 1\,310\,720$ (người).

2.27. Gọi u_n là số triệu đồng mà người kĩ sư đó nhận được ở năm thứ n. Vì người kĩ sư được công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5% nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 180$ và công bội $q = 1 + 5\% = 1{,}05$. Khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty thì mức lương năm của người kĩ sư đó là

$$u_6 = u_1 q^5 = 229{,}73 \text{ (triệu đồng).}$$

2.28. Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Hoa có trong chương trình tích luỹ ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n). Kí hiệu $a = 0{,}5$ triệu đồng, $r = 0{,}5\%$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 1 là $u_1 = a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 2 là $u_2 = u_1(1+r) + a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 3 là

$$u_3 = u_2(1+r) + a = a(1+r)^2 + a(1+r) + a.$$

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng n là

$$u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + ... + a(1+r) + a = a\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)-1} = a\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180, cô ấy sẽ tích luỹ được $u_{180} = a\dfrac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 145,41$ (triệu đồng). Khi đó, tuổi của con gái cô Hoa là $3 + 180 : 12 = 18$ tuổi.

2.29. Gọi u_n là diện tích hai tam giác được tô màu ở lần thực hiện thứ n. Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ban đầu.

Ở lần 1 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\dfrac{a}{2}$ nên $u_1 = 2.\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2}\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{2^2}$ và độ dài cạnh hình vuông sau đó là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ở lần 2 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_2 = \dfrac{a^2}{2^3}$.

Ở lần 3 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_3 = \dfrac{a^2}{2^4}$.

Như vậy, dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = \dfrac{a^2}{4}$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích sau năm lần thực hiện là $S_5 = u_1\dfrac{1-q^5}{1-q} = 124$ (cm^2).

Chú ý. Diện tích cần tính bằng diện tích hình vuông ngoài cùng trừ đi diện tích hình vuông trong cùng rồi chia 2.

2.30. a) Theo định nghĩa, chèn hai trung bình nhân vào giữa 3 và 24 ta được cấp số nhân có

$$u_1 = 3 \text{ và } u_{2+2} = u_4 = 24.$$

Do tính chất của cấp số nhân nên $u_4 = u_1q^3 \Rightarrow q = 2$.

Vậy chèn hai trung bình nhân vào giữa 3 và 24 ta được cấp số nhân là: 3, 6, 12, 24.

b) Theo định nghĩa, chèn ba trung bình nhân vào giữa 2,25 và 576 ta được cấp số nhân có

$$u_1 = 2{,}25 \text{ và } u_{2+3} = u_5 = 576.$$

Do tính chất của cấp số nhân nên $u_5 = u_1q^4 \Rightarrow q = \pm 4$.

Với $q = 4$, chèn ba trung bình nhân vào giữa 2,25 và 576 ta được cấp số nhân:

$$2{,}25;\ 9;\ 36;\ 144;\ 576.$$

Với $q = -4$, chèn ba trung bình nhân vào giữa 2,25 và 576 ta được cấp số nhân: $2{,}25; -9; 36; -144; 576$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A. TRẮC NGHIỆM

2.31. C.	**2.32.** D.	**2.33.** B.	**2.34.** D.	**2.35.** C.	**2.36.** C.
2.37. C.	**2.38.** D.	**2.39.** C.	**2.40.** A.	**2.41.** A.	**2.42.** D.

B. TỰ LUẬN

2.43. a) Từ hệ thức truy hồi ta có $u_1 = 2; u_2 = 3; u_3 = 5$. Vì $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ và $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên dãy số đã cho không là cấp số cộng và cũng không là cấp số nhân.

b) Từ $u_n = 6n + 3$, suy ra $u_{n+1} = 6n + 9$. Ta có $u_{n+1} - u_n = 6 \ \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số đã cho là cấp số cộng với công sai $d = 6$.

c) Từ hệ thức truy hồi ta có $u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = 2; u_4 = 6$.

Vì $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ và $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên dãy số đã cho không là cấp số cộng và cũng không là cấp số nhân.

d) Từ $u_n = 3 \cdot 5^n$, suy ra $u_{n+1} = 3 \cdot 5^{n+1}$. Ta có $u_{n+1} : u_n = 5 \ \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số đã cho là cấp số nhân với công bội $q = 5$.

2.44. a) Theo giả thiết, dãy số a_n là cấp số cộng với công sai d_1 nên $a_{n+1} = a_n + d_1 \ \forall n \geq 1$ và dãy số b_n là cấp số cộng với công sai d_2 nên $b_{n+1} = b_n + d_2 \ \forall n \geq 1$.

Khi đó $\left(a_{n+1} + b_{n+1}\right) = \left(a_n + b_n\right) + d_1 + d_2 \ \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số $\left(a_n + b_n\right)$ là cấp số cộng với công sai $d_1 + d_2$.

b) Theo giả thiết, dãy số a_n là cấp số nhân với công bội q_1 nên $a_{n+1} = a_n q_1 \ \forall n \geq 1$ và dãy số b_n là cấp số nhân với công bội q_2 nên $b_{n+1} = b_n q_2 \ \forall n \geq 1$.

Khi đó $\left(a_{n+1} b_{n+1}\right) = \left(a_n b_n\right) q_1 q_2 \ \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số $\left(a_n b_n\right)$ là cấp số nhân với công bội $q_1 q_2$.

2.45. a) Giả sử u_n (kg) là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n.

Ta có $u_1 = 0,4; u_2 = u_1 + u_1 24\% = u_1(1 + 24\%); u_3 = u_2 + u_2 24\% = u_1(1 + 24\%)^2$.

Tương tự, ta có $u_n = u_1(1 + 24\%)^{n-1} \ \forall n \geq 1$.

b) Sau sáu tuần tuổi thì con chó nặng là

$$u_6 = 0,4 \cdot (1 + 24\%)^5 = 1,17 \text{ (kg)}.$$

2.46. Gọi T_n là số phút mà bác Hưng bơi vào ngày thứ n của chương trình.

a) Do bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó nên ta có hệ thức truy hồi sau $T_1 = 10, T_{n+1} = T_n + 2 \,\forall n \geq 1$.

b) Sáu số hạng đầu của dãy số là

$$T_1 = 10;\ T_2 = 12;\ T_3 = 14;\ T_4 = 16;\ T_5 = 18;\ T_6 = 20.$$

c) Theo định nghĩa dãy số T_n là cấp số cộng có $T_1 = 10$ và công sai $d = 2$. Suy ra, công thức tổng quát của dãy số là $T_n = T_1 + (n-1)d = 8 + 2n \ \forall n \geq 1$.

d) Ta có $T_n \geq 60 \Leftrightarrow 8 + 2n \geq 60 \Leftrightarrow n \geq 26$.

Vậy bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ 26 của chương trình.

e) Tổng thời gian bác Hưng bơi trong 30 ngày đầu của chương trình là

$$S_{30} = \frac{\left[2T_1 + (30-1)d\right]30}{2} = 1\,170 \text{ (phút)}.$$

2.47. a) Công thức số hạng thứ n của dãy các số chính phương đã cho là $n^2 \ \forall n \geq 1$.

Tám số hạng đầu của cấp số cộng được mô tả là 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17.

Theo giả thiết chúng ta xét hiệu của hai số hạng liên tiếp là

$$u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \ \forall n \geq 1.$$

Ta chứng minh được (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$.

b) Xét dãy các số lập phương, với ba số hạng liên tiếp ta lấy số đầu cộng với số thứ ba trừ đi 2 lần số thứ hai ta thu được một cấp số cộng.

c) Bảy số hạng đầu của cấp số cộng ở trong câu b là 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48.

Công thức tổng quát là $u_n = n^3 + (n+2)^3 - 2(n+1)^3 = 6n + 6 \ \forall n \geq 1$.

2.48. Gọi x, y lần lượt là số thứ nhất và số thứ ba trong ba số đó.

Vì ba số theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng nên số thứ hai là $\frac{x+y}{2}$. Khi đó, ba số cần tìm có dạng: $x, \frac{x+y}{2}, y$.

Vì ba số này lập thành một cấp số nhân nên ta có

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \text{ hay } (x-y)^2 = 0, \text{ tức là } x = y.$$

Suy ra ba số đó bằng nhau.

2.49. Ta tính tổng tiền lương của anh Nam theo từng phương án:

– *Phương án 1*: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$5 \cdot 300 + 5 \cdot 50 = 1\,750 \text{ (triệu đồng).}$$

– *Phương án 2*: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$300 + 300 \cdot (1 + 10\%) + 300 \cdot (1 + 10\%)^2 + 300 \cdot (1 + 10\%)^3 + 300(1 + 10\%)^4$$

$= 1\,831{,}53$ (triệu đồng).

– *Phương án 3*: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$300 + 330 + 360 + 390 + 420 = 1\,800 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy anh Nam nên sử dụng Phương án 2 để nhận được tổng lương sau 5 năm là cao nhất.

2.50. a) Ta viết lần lượt các số hạng của dãy:

$u_2 = qu_1 + d;$

$u_3 = qu_2 + d = q(qu_1 + d) + d = q^2u_1 + qd + d = q^2u_1 + d(q + 1);$

$u_4 = qu_3 + d = q\left(q^2u_1 + qd + d\right) + d$

$$= q^3u_1 + q^2d + qd + d = q^3u_1 + d\left(q^2 + q + 1\right) = q^3u_1 + d\frac{1 - q^3}{1 - q}.$$

Làm tương tự ta được công thức số hạng tổng quát u_n:

$$u_n = q^{n-1}u_1 + d\left(q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + 1\right) = q^{n-1}u_1 + d\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}.$$

b) Ta viết tổng n số hạng đầu như sau

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 + (qu_1 + d) + (qu_2 + d) + \ldots + (qu_{n-1} + d)$

$= u_1 + qS_{n-1} + (n-1)d = qS_{n-1} + a + (n-1)d.$

Như vậy, ta được (S_n) cũng là một cấp số nhân cộng với $S_1 = u_1 = a.$

Áp dụng công thức số hạng tổng quát vừa tìm được để tính S_n ta có

$$S_n = q^{n-1}S_1 + \left[a + (n-1)d\right]\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} = q^{n-1}a + \left[a + (n-1)d\right]\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}.$$

CHƯƠNG III
CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

BÀI 8. MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

3.1. a) Mẫu số liệu ghép nhóm:

GNIPC	[1026; 3996)	[3996; 12376)	Từ 12376 trở lên
Số nền kinh tế	1	12	13

b) Nền kinh tế Việt Nam được xếp ở mức thu nhập trên trung bình.

3.2. a) Trong tháng 6/2022 có 5 ngày chỉ số AQI dưới 50; 11 ngày chỉ số AQI từ 50 đến dưới 100; 7 ngày chỉ số AQI từ 100 đến dưới 150; 4 ngày chỉ số AQI từ 150 đến dưới 200; 3 ngày chỉ số AQI trên 200.

b) Số ngày chất lượng không khí dưới mức trung bình là: 7 + 4 + 3 = 14.

3.3. a) Số trẻ nhẹ cân, cân nặng trung bình, thừa cân tương ứng là 1, 12, 2.

b) Mẫu số liệu ghép nhóm:

Cân nặng (kg)	Dưới 2	[2; 4]	Trên 4
Số trẻ	1	12	2

3.4. a) Các nhóm số liệu [25; 30), [30; 35), [35; 40), [40; 45] với tần số tương ứng là

2, 7, 10, 25.

b) Số học sinh hoàn thành bài kiểm tra trước khi hết giờ ít nhất 5 phút là

2 + 7 + 10 = 19.

BÀI 9. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

3.5. ĐS. 7,48 km.

3.6. Cỡ mẫu n = 2 + 5 + 6 + 9 + 3 = 25. Nhóm chứa trung vị là [6; 8). Trung vị là

$$M_e = 6 + \frac{\frac{25}{2} - (2+5)}{6} \cdot (8-6) \approx 7,83.$$

Có 50% số cầu thủ chạy nhiều hơn 7,83 km và có 50% số cầu thủ chạy ít hơn 7,83 km.

3.7. *HD.* Số *a* chính là tứ phân vị thứ ba.

3.8. Nhóm chứa mốt là [8; 10). Mốt là $M_o = 8 + \frac{(9-6)}{(9-6)+(9-3)} \cdot 2 \approx 8,67$.

Số cầu thủ chạy khoảng 8,67 km là nhiều nhất.

3.9. *ĐS*. Trung bình trong học kì mỗi học sinh đi muộn 3,325 buổi.

3.10. *HD*. Hiệu chỉnh mẫu số liệu ghép nhóm và tính các tứ phân vị theo định nghĩa.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

3.11. D. **3.12.** D. **3.13.** C. **3.14.** D. **3.15.** A. **3.16.** B.

3.17. C. **3.18.** B. **3.19.** C. **3.20.** C. **3.21.** B.

B. TỰ LUẬN

3.22. a) Bảng thống kê:

Số tiền phạt (triệu đồng)	6-8	16-18	30-40
Số người vi phạm	8	4	8

b) Cỡ mẫu n = 20. Số tiền trung bình một người bị phạt là

$$\overline{x} = \frac{8 \cdot 7 + 4 \cdot 17 + 8 \cdot 35}{20} = 20,2 \text{ (triệu đồng).}$$

Tổng số tiền 20 lái xe bị phạt là 20,2 · 20 = 404 (triệu đồng).

3.23. a) Có 20 loại điện thoại mức giá dưới 2 triệu đồng, ..., 21 loại điện thoại mức giá từ 13 đến 20 triệu đồng.

b) *HD*. Tìm trung vị của mẫu số liệu.

3.24. a) Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\overline{x} = \frac{5.2 + 18.5 + 13.8 + 7.11}{43} \approx 6,53.$$

b) *HD*. Hiệu chỉnh mẫu số liệu ta được bảng thống kê sau:

Số nguyện vọng	[0,5; 3,5)	[3,5; 6,5)	[6,5; 9,5)	[9,5; 12,5)
Số học sinh	5	18	13	7

Tính các tứ phân vị theo định nghĩa.

3.25. Các nhóm số liệu trong bài tập 3.23 không có độ dài bằng nhau nên người ta không định nghĩa mốt. Hiệu chỉnh mẫu số liệu trong bài 3.24 như trên ta thấy nhóm chứa mốt là nhóm [3,5; 6,5), do đó mốt là

$$M_0 = 3,5 + \frac{(18-5)}{(18-5)+(18-13)} \cdot 3 \approx 5,67.$$

Số học sinh đăng kí khoảng 5,67 nguyện vọng là nhiều nhất.

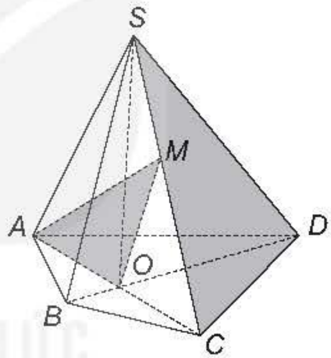
CHƯƠNG IV – QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 10. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

4.1. (H.4.34)

a) Giao tuyến là đường thẳng *SC*.

b) Giao tuyến là đường thẳng *DM*.



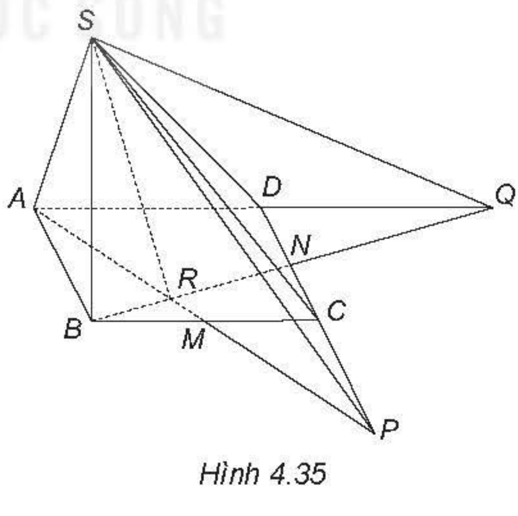
Hình 4.34

4.2. (H.4.35)

a) Trong mặt phẳng (*ABCD*), gọi *P* là giao điểm của *AM* và *CD* thì *SP* là giao tuyến cần tìm.

b) Trong mặt phẳng (*ABCD*), gọi *Q* là giao điểm của *BN* và *AD* thì *SQ* là giao tuyến cần tìm.

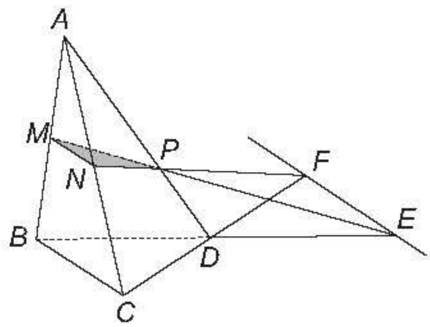
c) Trong mặt phẳng (*ABCD*), gọi *R* là giao điểm của *AM* và *BN* thì *SR* là giao tuyến cần tìm.



Hình 4.35

4.3. (H.4.36)

Trong mặt phẳng (ABD) gọi E là giao điểm của MP và BD, trong mặt phẳng (ACD) gọi F là giao điểm của NP và CD. Khi đó đường thẳng EF là giao tuyến cần tìm.



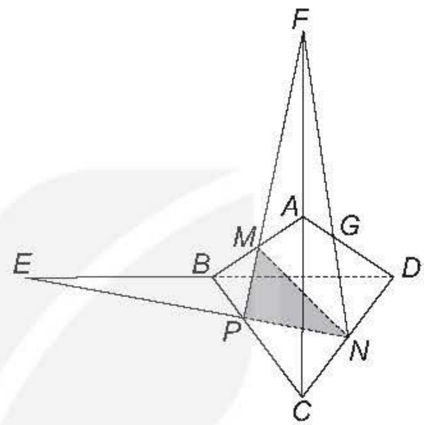
Hình 4.36

4.4. (H.4.37)

a) Trong mặt phẳng (BCD), gọi E là giao điểm của NP và BD thì E là giao điểm của đường thẳng BD và mặt phẳng (MNP).

b) Trong mặt phẳng (ABC), gọi F là giao điểm của MP và AC thì F là giao điểm của đường thẳng AC và mặt phẳng (MNP).

c) Trong mặt phẳng (ACD), gọi G là giao điểm của NF và AD thì G là giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP).

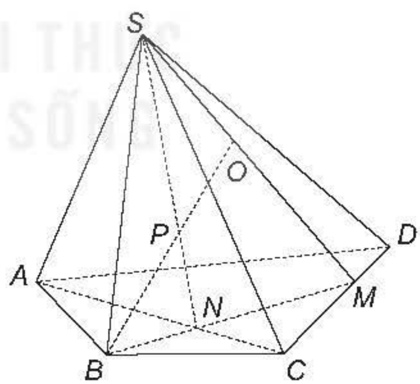


Hình 4.37

4.5. (H.4.38)

a) Trong mặt phẳng (SCD), gọi M là giao điểm của SO và CD. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi N là giao điểm của BM và AC. Khi đó N là điểm chung của hai mặt phẳng (SBO) và (SAC), suy ra SN là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

b) Trong mặt phẳng (SBO) (hay (SBM)), gọi P là giao điểm của SN và BO thì P là giao điểm của BO và (SAC).



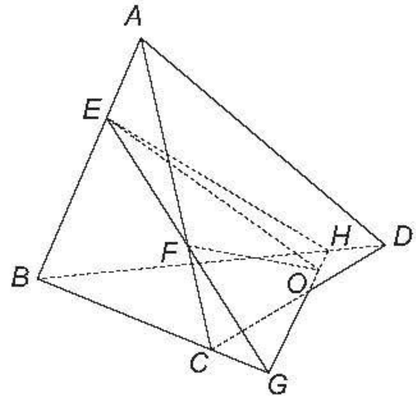
Hình 4.38

4.6. (H.4.39)

a) Trong mặt phẳng (ABC), gọi G là giao điểm của EF và BC.

Trong mặt phẳng (BCD), gọi H là giao điểm của OG và BD. Khi đó H là một điểm chung của hai mặt phẳng (OEF) và (ABD), suy ra EH là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

b) Trong mặt phẳng (ABD), gọi I là giao điểm (nếu có) của EH và AD. Khi đó I là giao điểm của AD và (OEF).



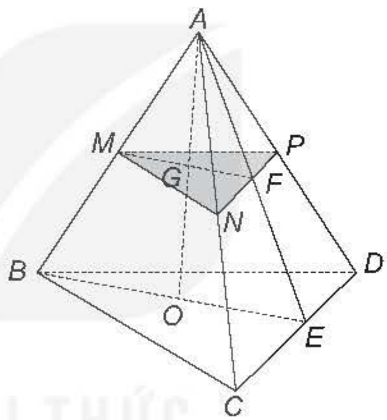
Hình 4.39

4.7. (H.4.40)

a) Trong mặt phẳng (BCD), gọi E là giao điểm của BO và CD thì AE là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABO) và (ACD).

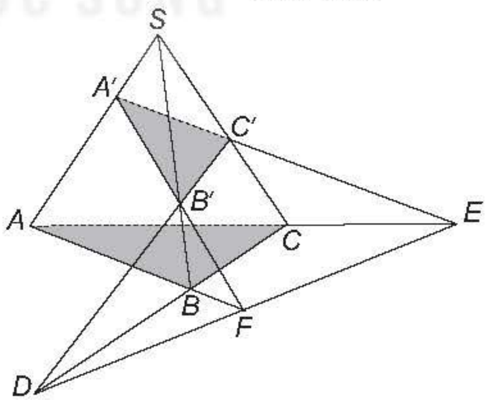
b) Trong mặt phẳng (ACD), gọi F là giao điểm của AE và NP thì F là một điểm chung của hai mặt phẳng (ABO) và (MNP), suy ra MF là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

c) Trong mặt phẳng (ABE), gọi G là giao điểm của AO và MF thì G là giao điểm của AO và (MNP).



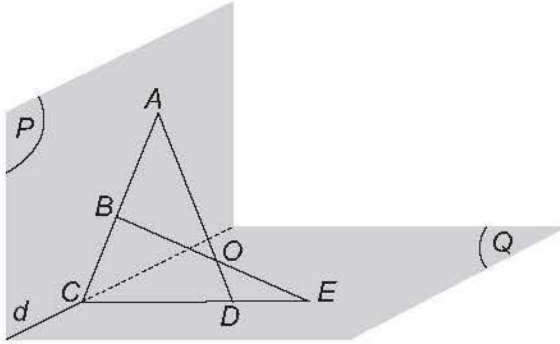
Hình 4.40

4.8. Ba điểm D, E, F cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và ($A'B'C'$) nên ba điểm đó thẳng hàng (H.4.41).



Hình 4.41

4.9. Ba điểm C, D, E đều thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (OAB) và (Q) nên ba điểm đó thẳng hàng (H.4.42).



Hình 4.42

4.10. Đường cắt là giao tuyến của hai mặt phẳng: mặt phẳng chứa tờ giấy và mặt phẳng tạo bởi hai lưỡi kéo. Do đó đường cắt luôn là đường thẳng.

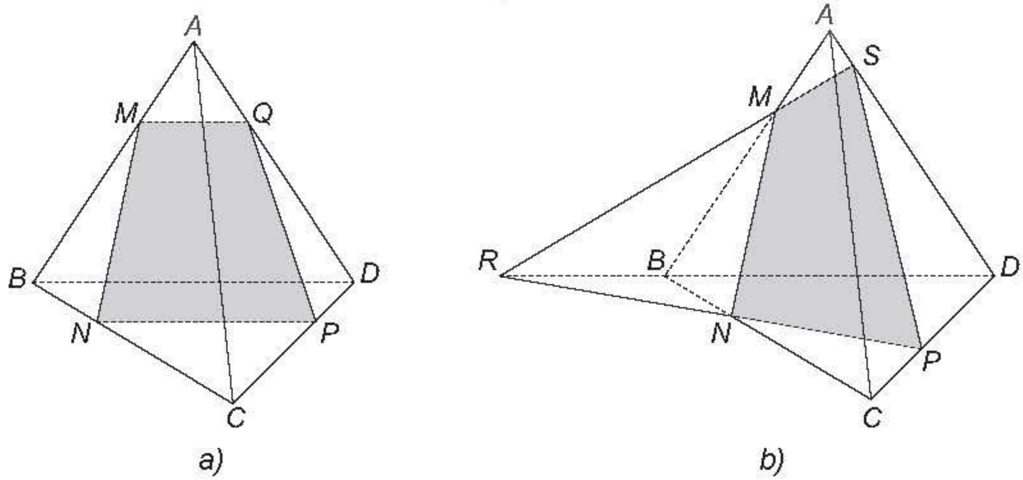
4.11. Vệt màu trên mỗi thành bể là giao tuyến của hai mặt phẳng: mặt phẳng tạo bởi thành bể và mặt nước. Do đó vệt màu luôn là đường thẳng.

4.12. Mặt bàn có thể được đỡ cố định bằng khung sắt dựa theo tính chất: một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

BÀI 11. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

4.13. a) Trong mặt phẳng (ABD) vẽ đường thẳng $MQ \parallel BD$ ($Q \in AD$) thì Q là giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) (H.4.43a).

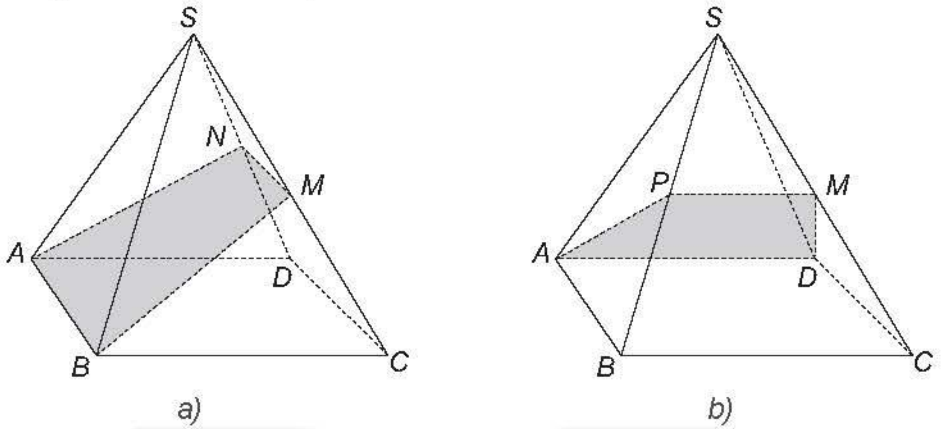
b) Trong mặt phẳng (BCD), gọi R là giao điểm của NP và BD. Trong mặt phẳng (ABD), gọi S là giao điểm của MR và AD. Khi đó R là giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) (H.4.43b).



Hình 4.43

4.14. a) Trong mặt phẳng (SCD), vẽ $MN // CD$ ($N \in SD$). Giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và các mặt của hình chóp là các đường thẳng AB, BM, MN, NA (H.4.44a).

b) Tương tự câu a (H.4.44b).



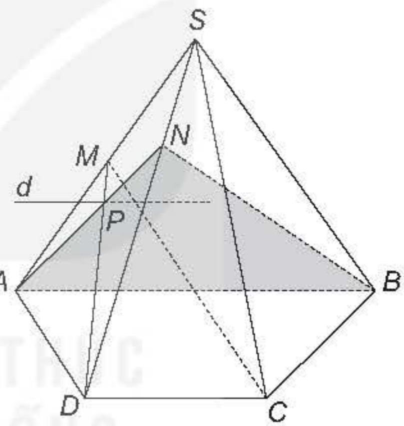
Hình 4.44

4.15. (H.4.45)

a) Trong mặt phẳng (SAD), gọi P là giao điểm của AN và DM.

Trong mặt phẳng (NAB), vẽ đường thẳng d đi qua P và song song với AB thì d là giao tuyến cần tìm.

b) Theo cách dựng thì d song song với AB.



Hình 4.45

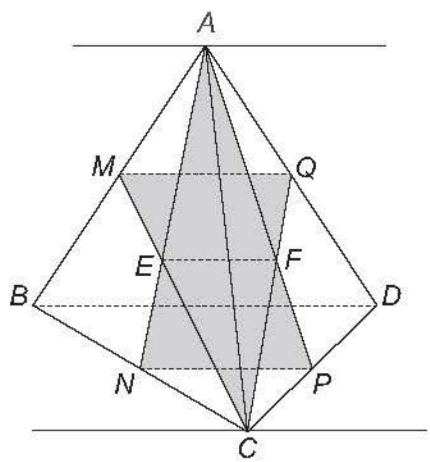
4.16. (H.4.46) a) Trong mặt phẳng (ABC), gọi E là giao điểm của AN và CM. Trong mặt phẳng (ACD), gọi F là giao điểm của AP và CQ. Đường thẳng EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (CMQ).

Vì MQ và NP lần lượt là đường trung bình của các tam giác ABD và CBD nên $MQ // BD // NP$, suy ra $EF // MQ // NP // BD$.

b) Giao tuyến là đường thẳng qua A và song song với BD.

c) Giao tuyến là đường thẳng qua C và song song với BD.

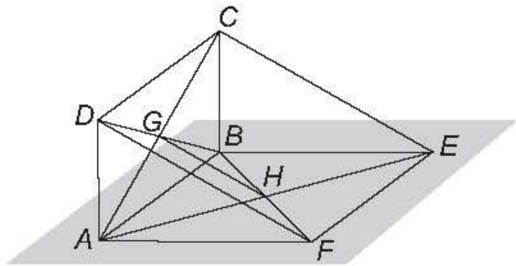
d) Các giao tuyến đều song song với BD nên chúng đôi một song song với nhau.



Hình 4.46

4.17. (H.4.47)

Vì GH là đường trung bình của hai tam giác ACE và BDF nên $GH \parallel CE$ và $GH \parallel DF$.



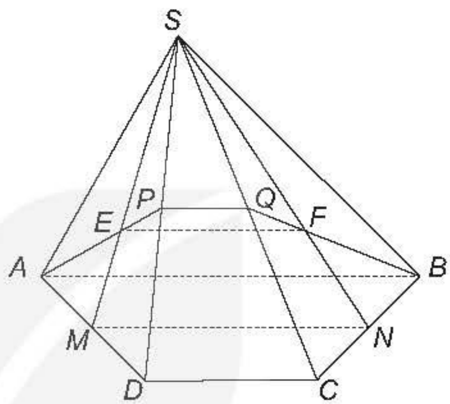
Hình 4.47

4.18. (H.4.48)

a) Vì E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SBC nên $\frac{SE}{SM} = \frac{SF}{SN} = \frac{2}{3}$.

Theo định lí Thalès suy ra trong tam giác SMN có $EF \parallel MN$. Vì MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $MN \parallel AB$. Từ đó suy ra $EF \parallel AB$.

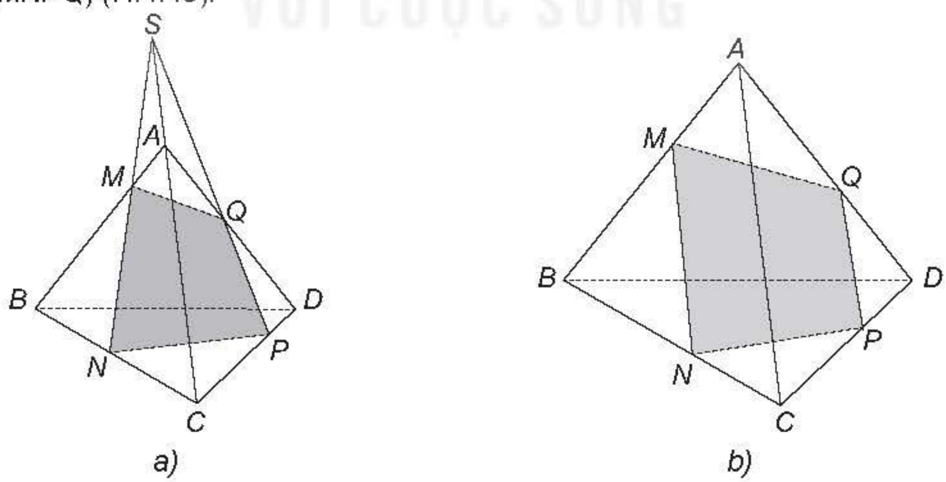
b) Trong mặt phẳng (SAD), gọi P là giao điểm của AE và SD. Trong mặt phẳng (SBC), gọi Q là giao điểm của BF và SC. Các giao tuyến của mặt phẳng (AEF) và các mặt của hình chóp là các đường thẳng AP, PQ, QB, AB.



Hình 4.48

c) Hai mặt phẳng (AEF) và (SCD) chứa hai đường thẳng song song là EF và CD (cùng song song với AB) nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó song song với EF, tức là PQ song song với EF. Vậy có hai giao tuyến song song với đường thẳng EF là AB và PQ.

4.19. a) Áp dụng định lí về ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng (ABC), (ACD) và ($MNPQ$) (H.4.49).



Hình 4.49

b) Tương tự câu a.

4.20. Áp dụng định lí về ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng: mặt sàn nhà, mặt chân tường và mặt phẳng tạo bởi bốn đầu của chân thang. Từ đó suy ra đường thẳng đi qua hai đầu của chân thang trên sàn nhà song song với đường chân tường.

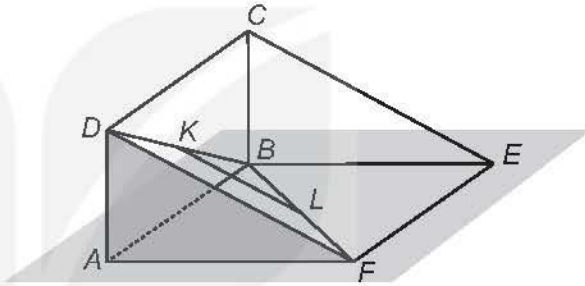
4.21. Hai nửa của tờ giấy có thể coi như hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song là hai mép giấy. Đường nếp gấp chính là giao tuyến của hai mặt phẳng này nên nó song song với hai mép giấy.

BÀI 12. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

4.22. (H.4.50) a) Vì *ABCD* là hình bình hành nên *CD // AB*, suy ra *CD //* (*ABEF*).

b) Vì *ABEF* là hình bình hành nên *EF // AB*, suy ra *EF //* (*ABCD*).

c) Vì *CEFD* là hình bình hành nên *CE // DF*, suy ra *CE //* (*ADF*).



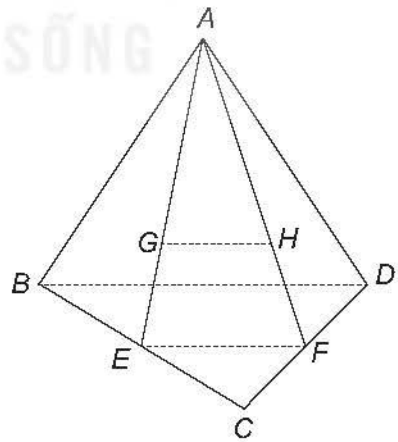
Hình 4.50

4.23. (H.4.50) a) Vì *KL* là đường trung bình của tam giác *BDF* nên *KL // DF*, suy ra *KL //* (*ADF*).

b) Tương tự câu a.

4.24. (H.4.51) Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC, CD*. Vì *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*, nên *A, G, E* thẳng hàng và $\frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$.

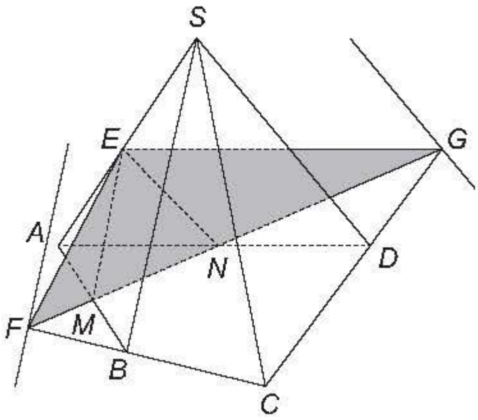
Tương tự có *A, H, F* thẳng hàng và $\frac{AH}{AF} = \frac{2}{3}$. Do đó $\frac{AG}{AE} = \frac{AH}{AF}$. Theo định lí Thalès đảo, suy ra tam giác *AEF* có *GH // EF*, vì vậy *GH //* (*BCD*).



Hình 4.51

4.25. (H.4.52) a) Mặt phẳng (*SAB*) chứa đường thẳng *SB* song song với (*P*) nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó song song với *SB*, suy ra *EM // SB*. Tương tự có *EN // SD*.

b) Gọi *F*, *G* lần lượt là giao điểm của đường thẳng *MN* và hai đường thẳng *BC*, *CD*. Trong mặt phẳng (*SBC*), vẽ đường thẳng qua *F* và song song với *SB* thì đường thẳng đó là giao tuyến của mặt phẳng (*P*) và mặt phẳng (*SBC*). Trong mặt phẳng (*SCD*), vẽ đường thẳng qua *G* và song song với *SD* thì đường thẳng đó là giao tuyến của mặt phẳng (*P*) và mặt phẳng (*SCD*).

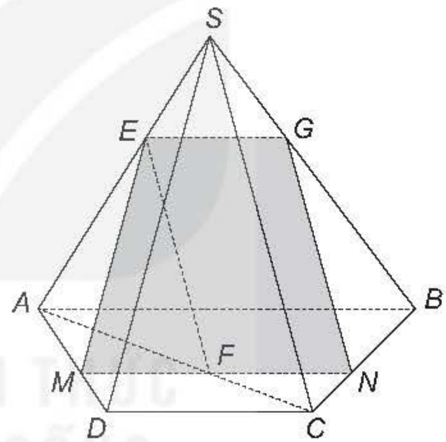


Hình 4.52

4.26. (H.4.53) a) Mặt phẳng (*SAC*) chứa đường thẳng *SC* song song với mặt phẳng (*P*) nên giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAC*) và (*P*) song song với *SC*. Do đó, trong mặt phẳng (*SAC*), vẽ đường thẳng *EF // SC* ($F \in AC$) thì *EF* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*) và (*SAC*). Điểm *F* là điểm chung của mặt phẳng (*P*) và mặt phẳng (*ABCD*).

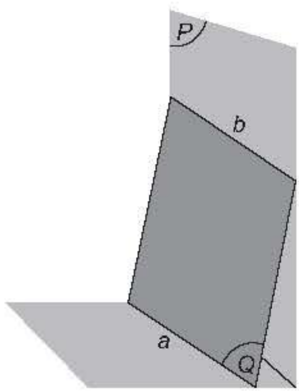
b) Trong mặt phẳng (*ABCD*), vẽ đường thẳng *MN* qua *F* và song song với *AB* ($M \in AD$, $N \in BC$) thì *MN* là giao tuyến của (*P*) và mặt phẳng (*ABCD*).

c) Trong mặt phẳng (*SAB*), vẽ đường thẳng *EG // AB* ($G \in SB$) thì *EG* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*) và (*SAB*). Các giao tuyến của (*P*) và các mặt của hình chóp là *EG*, *MN*, *EM*, *GN*.



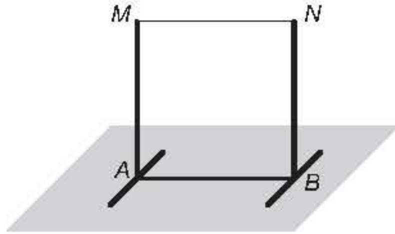
Hình 4.53

4.27. (H.4.54) Gọi (*P*) là mặt tường và (*Q*) là mặt bảng. Gọi *a* là mép dưới của bảng và *b* là mép trên thì *b* nằm trong (*P*). Vì bảng có dạng hình chữ nhật nên *a // b*, do đó *a // (P)*, tức là mép dưới của bảng song song với mặt tường. Giải thích tương tự suy ra mép trên của bảng song song với mặt đất.



Hình 4.54

4.28. (H.4.55) Gọi hai đầu của hai thanh sắt trên mặt đất là A, B và hai đầu tương ứng còn lại là M, N thì $AM \parallel BN$ và $AM = BN$, suy ra $ABNM$ là hình bình hành. Vì vậy $MN \parallel AB$ và do đó dây phơi (nối hai điểm M, N) song song với mặt đất (chứa đường thẳng AB).



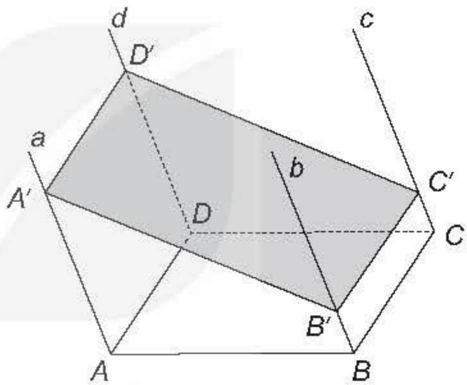
Hình 4.55

BÀI 13. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

4.29. (H.4.56) a) Vì $a \parallel d$ nên $a \parallel$ mp(c, d). Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$, suy ra $AB \parallel$ mp(c, d). Mặt phẳng mp(a, b) chứa hai đường thẳng cắt nhau là a và AB cùng song song với mp(c, d) nên mặt phẳng mp(a, b) song song với mặt phẳng mp(c, d).

b) Chứng minh tương tự câu a.

c) Vì mặt phẳng mp(a, b) song song với mặt phẳng mp(c, d) nên giao tuyến của mặt phẳng $(A'B'C'D')$ với hai mặt phẳng đó song song với nhau, tức là $A'B' \parallel C'D'$. Lập luận tương tự có $A'D' \parallel B'C'$, suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

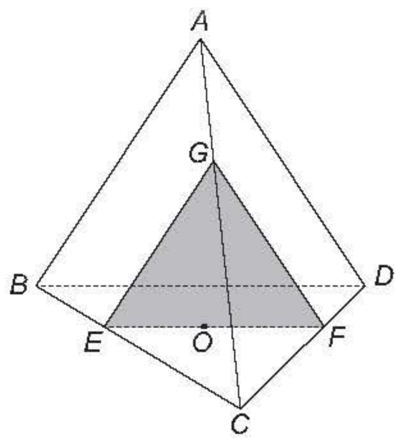


Hình 4.56

4.30. (H.4.57)

a) Trong mặt phẳng (BCD), vẽ đường thẳng qua O và song song với BD cắt các cạnh BC, CD lần lượt tại E, F. Khi đó EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

b) Trong mặt phẳng (ABC), vẽ $EG \parallel AB$ $(G \in AC)$ thì EG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC). Khi đó FG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD).



Hình 4.57

4.31. (H.4.58)

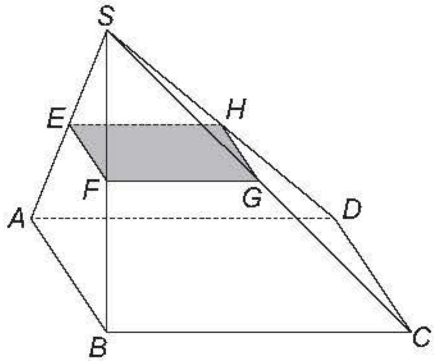
a) Trong mặt phẳng (SAB), vẽ $EF // AB$ $(F \in SB)$.

Trong mặt phẳng (SBC), vẽ $FG // BC$ $(G \in SC)$.

Trong mặt phẳng (SCD), vẽ $GH // CD$ $(H \in SD)$.

Các giao tuyến cần tìm là các đường thẳng EF, FG, GH, HE.

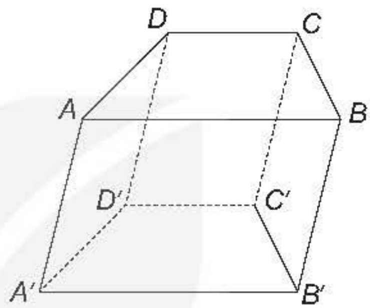
b) Hình tạo bởi các giao tuyến là hình bình hành $EFGH$.



Hình 4.58

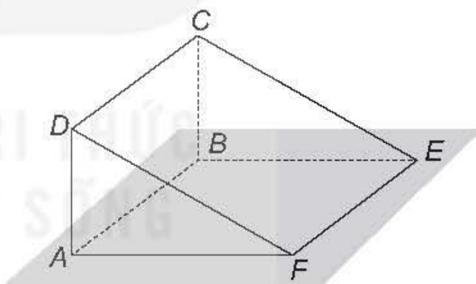
4.32. (H.4.59) Giả sử $AB // CD$.

Các mặt $ABB'A'$ và $CDD'C'$ của hình lăng trụ là hình bình hành nên $AB // A'B'$ và $CD // C'D'$. Vì vậy ta có $A'B' // C'D'$, tức là tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang.



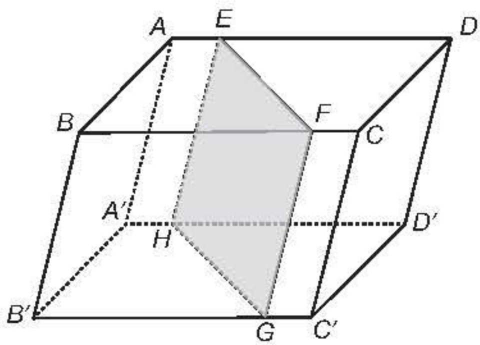
Hình 4.59

4.33. (H.4.60) Các đường thẳng AB, CD, EF đôi một song song với nhau. Hai mặt phẳng (ADF) và (BCE) song song với nhau (xem SGK, Bài 14, Ví dụ 1). Do đó $ADF.BCE$ là hình lăng trụ tam giác.



Hình 4.60

4.34. (H.4.61) Vì hai mặt $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ của hình hộp song song với nhau nên giao tuyến của mặt phẳng $(EFGH)$ và hai mặt phẳng đó song song với nhau, tức là $EF // HG$. Tương tự có $EH // FG$ nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

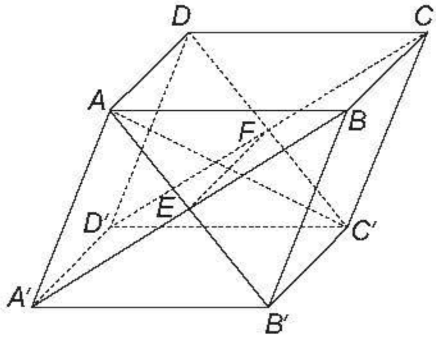


Hình 4.61

4.35. (H.4.62) a) Gọi E là giao điểm của AB' và $A'B$; F là giao điểm của CD' và $C'D$. Đường thẳng EF là giao tuyến của hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(A'D'CB)$.

b) Hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(A'D'CB)$ chứa hai đường thẳng song song là AD và BC nên giao tuyến EF của hai mặt phẳng đó song song với AD.

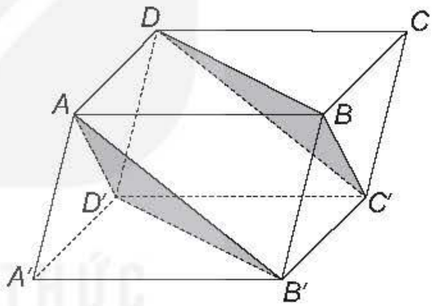
c) Tứ giác $ABCD$ và $BCC'B'$ là hình bình hành nên AD // BC, $AD = BC$ và BC // $B'C'$, $BC = B'C'$. Do đó AD // $B'C'$ và $AD = B'C'$, suy ra $ADC'B'$ là hình bình hành. Vì E và F lần lượt là trung điểm của AB' và $C'D$ nên EF đi qua trung điểm của AC'. Vì các đường chéo của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường nên đường thẳng EF đi qua trung điểm của các đường chéo đó.



Hình 4.62

4.36. (H.4.63) a) Theo bài tập 4.35c thì tứ giác $ADC'B'$ là hình bình hành, do đó AB' // $C'D$.

b) Từ câu a suy ra AB' // $(C'BD)$. Chứng minh tương tự có AD' // BC' nên AD' // $(C'BD)$. Mặt phẳng $(AB'D')$ có hai đường thẳng cắt nhau AB' và AD' cùng song song với mặt phẳng $(C'BD)$ nên hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ song song với nhau.



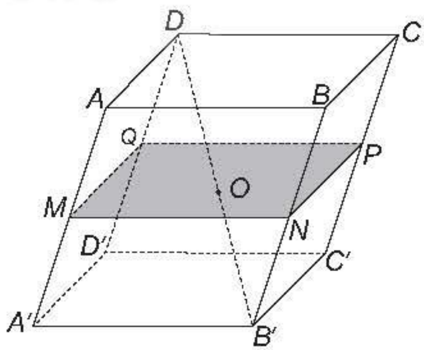
Hình 4.63

4.37. Áp dụng định lí Thalès tính được $B'C' = 9$.

4.38. (H.4.64) a) Áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng $(ABCD)$, $(MNPQ)$, $(A'B'C'D')$ và hai cát tuyến AA' và DB' suy ra $\dfrac{AM}{MA'} = \dfrac{DO}{OB'}$. Vì O là trung điểm của DB' nên M là trung điểm của AA'. Chứng minh tương tự với các điểm N, P, Q.

b) Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB' nên MN // AB và $MN = AB$.

Tương tự PQ // CD và $PQ = CD$.



Hình 4.64

Vì AB // CD và $AB = CD$ nên MN // PQ và $MN = PQ$, suy ra $MNPQ$ là hình bình hành. Vì các đường thẳng AM, BN, CP, DQ đôi một song song nên suy ra $ABCD.MNPQ$ là hình hộp.

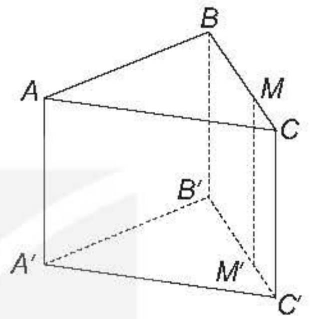
4.39. Khi Thuý cắt bánh thì lưỡi dao di chuyển tạo thành một mặt phẳng cắt hai mặt trên và dưới của chiếc bánh. Vì mặt trên và mặt dưới của chiếc bánh song song với nhau nên các vết cắt (chính là giao tuyến của mặt phẳng cắt và hai mặt bánh) song song với nhau.

4.40. Hoàng nói sai. Theo định lí Thalès trong không gian thì độ dài của phần ống bị ướt bằng $\frac{1}{2}$ độ dài của toàn bộ ống hút. (Xem thêm Bài 13, Vận dụng 2).

BÀI 14. PHÉP CHIẾU SONG SONG

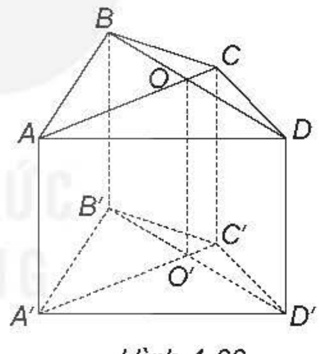
4.41. (H.4.65) a) Trong mặt phẳng $(BCC'B')$ vẽ $MM' \parallel BB'$ ($M' \in B'C'$) thì M' là hình chiếu của M qua phép chiếu đã cho.

b) Vì $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ nên B', C' lần lượt là hình chiếu của B, C lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu AA'. Theo tính chất của phép chiếu song song suy ra $\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC} = 2$.



Hình 4.65

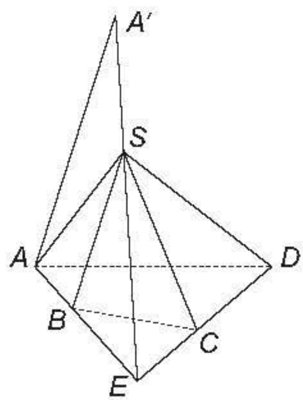
4.42. (H.4.66) Qua phép chiếu lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương AA', các điểm A, B, C, D, O lần lượt có hình chiếu là A', B', C', D', O'. Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng của các điểm và O nằm giữa A và C nên O' nằm giữa A' và C'. Tương tự suy ra O' nằm giữa B' và D'. Vậy O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.



Hình 4.66

4.43. (H.4.67) a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của AB và CD. Khi đó SE là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

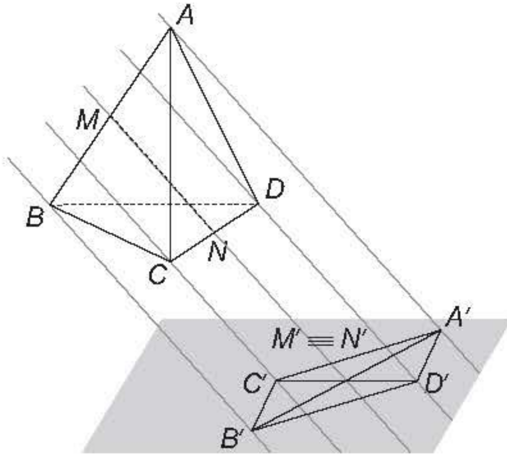
b) Trong mặt phẳng (SAB), vẽ đường thẳng qua A và song song với SB cắt SE tại A'. Khi đó A' là hình chiếu của điểm A qua phép chiếu đã cho.



Hình 4.67

4.44. (H.4.68) a) Vì đường thẳng *MN* là phương chiếu nên hình chiếu *M'* của *M* trùng với hình chiếu *N'* của *N*.

b) Vì *M* là trung điểm của *AB* nên theo tính chất của phép chiếu song song suy ra *M'* là trung điểm của *A'B'*. Tương tự có *N'* là trung điểm của *C'D'*. Vì *M'* trùng *N'* nên tứ giác tạo bởi bốn điểm *A'*, *B'*, *C'*, *D'* có các đường chéo đi qua trung điểm của mỗi đường, suy ra tứ giác đó là hình bình hành.



Hình 4.68

4.45. Học sinh tự thực hiện. Đáy của hình chóp cần có hình biểu diễn là hình bình hành.

4.46. Hình 4.31c.

4.47. Gọi *d* là đường thẳng song song với ba chiếc gậy và (*P*) là mặt sàn. Khi đó ba đầu gậy trên sàn chính là hình chiếu của ba đầu gậy trên tường qua phép chiếu lên mặt phẳng (*P*) theo phương *d*. Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng của các điểm nên nếu ba đầu gậy trên tường thẳng hàng thì ba đầu gậy trên sàn cũng thẳng hàng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A. TRẮC NGHIỆM

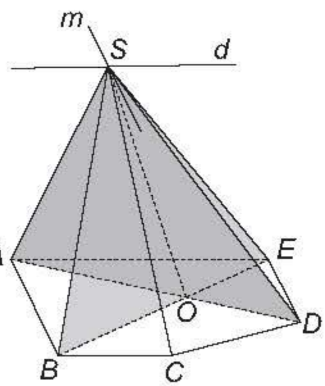
4.48. D.	**4.49.** D.	**4.50.** A.	**4.51.** B.	**4.52.** B.
4.53. C.	**4.54.** A.	**4.55.** D.	**4.56.** B.	

B. TỰ LUẬN

4.57. (H.4.69) a) Gọi *O* là giao điểm của hai đường thẳng *AD* và *BE* thì *SO* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAD*) và (*SBE*).

b) Vì *AB // DE* nên giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SDE*) là đường thẳng *m* đi qua *S* và song song với *AB*.

c) Gọi *d* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAE*) và (*SBC*) thì *d // AE*. Vì *d* nằm trong mặt phẳng (*SBC*) nên *AE // (SBC)*. Mặt phẳng (*SBC*) song song với đường thẳng *AE* nằm trong mặt phẳng (*ABCDE*) nên giao tuyến *BC* của hai mặt phẳng đó song song với *AE*.

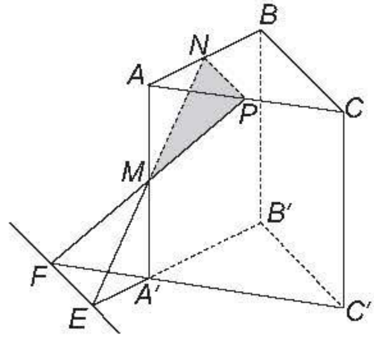


Hình 4.69

4.58. (H.4.70) a) Vì *NP* là đường trung bình của tam giác *ABC* nên *BC // NP*, suy ra *BC // (MNP)*.

b) Trong mặt phẳng (*ABB'A'*) gọi *E* là giao điểm của *MN* và *A'B'*. Trong mặt phẳng (*ACC'A'*) gọi *F* là giao điểm của *MP* và *A'C'*. Khi đó *EF* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*MNP*) và (*A'B'C'*).

c) Vì *NP // BC* và *BC // B'C'* nên *NP // B'C'*, suy ra *NP* // (*A'B'C'*). Mặt phẳng (*MNP*) chứa đường thẳng *NP* song song với mặt phẳng (*A'B'C'*) nên giao tuyến *d* của hai mặt phẳng đó song song với *B'C'*, suy ra *d // NP*.



Hình 4.70

4.59. (H.4.71) a) Giao tuyến là đường thẳng *m* qua *S* và song song với *AB*.

b) Mặt phẳng (*P*) chứa đường thẳng *AD* song song với mặt phẳng (*SBC*) nên giao tuyến *EF* của hai mặt phẳng đó song song với *AD*.

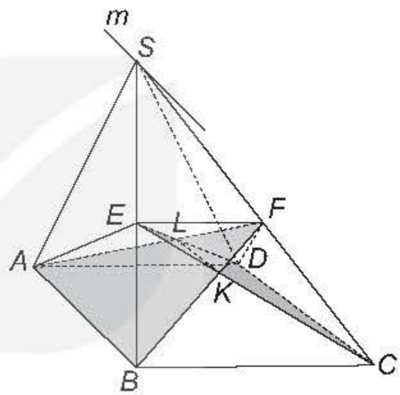
Vậy tứ giác *AEFD* là hình thang.

c) Trong mặt phẳng (*AEFD*) gọi *L* là giao điểm của hai đường thẳng *AF* và *DE*.

Trong mặt phẳng (*SBC*) gọi *K* là giao điểm của hai đường thẳng *BF* và *CE*.

Giao tuyến của hai mặt phẳng (*ECD*) và (*FAB*) là đường thẳng *KL*.

d) Hai mặt phẳng (*ECD*) và (*FAB*) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là *CD* và *AB* nên giao tuyến *KL* của hai mặt phẳng đó song song với *AB*. Do đó *KL* song song với *m*.

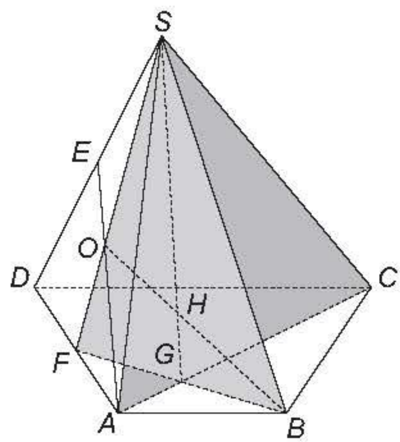


Hình 4.71

4.60. (H.4.72) a) Trong mặt phẳng (*SAD*) gọi *E* là giao điểm của *AO* và *SD* thì *E* là giao điểm của *AO* và mặt phẳng (*SCD*).

b) Trong mặt phẳng (*SAD*) gọi *F* là giao điểm của *SO* và *AD*. Trong hình thang *ABCD*, đường thẳng *AC* cắt *BF* tại *G*. Khi đó *SG* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*SBO*) và (*SAC*).

c) Trong mặt phẳng (*SBO*) gọi *H* là giao điểm của *BO* và *SG* thì *H* là giao điểm của đường thẳng *BO* và mặt phẳng (*SAC*).



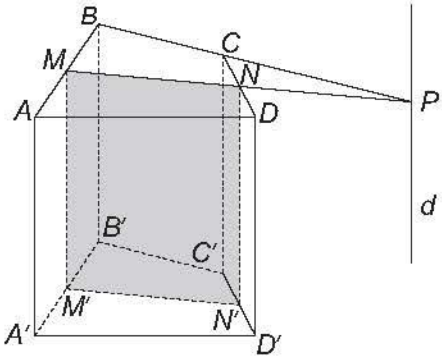
Hình 4.72

4.61. (H.4.73) a) Vì M, M' lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, $A'B'$ của hình bình hành $ABB'A'$ nên $MM' // AA'$ và $MM' = AA'$.

Tương tự $NN' // DD'$ và $NN' = DD'$.

Tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $AA' // DD'$ và $AA' = DD'$. Vì vậy $MM' // NN'$ và $MM' = NN'$, suy ra bốn điểm M, N, M', N' đồng phẳng và tứ giác $MNN'M'$ là hình bình hành.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNN'M')$ và $(BCC'B')$ là đường thẳng d đi qua P và song song với BB'.



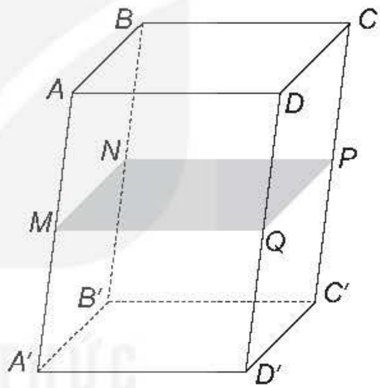
Hình 4.73

4.62. (H.4.74) Vì M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA', BB' của hình bình hành $ABB'A'$ nên $MN // AB$, suy ra $MN // (ABCD)$.

Tương tự $NP // (ABCD)$, do đó $(MNP) // (ABCD)$.

Lập luận tương tự suy ra $(NPQ) // (ABCD)$.

Qua N có hai mặt phẳng (MNP) và (NPQ) cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ nên hai mặt phẳng (MNP) và (NPQ) trùng nhau, tức là bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.



Hình 4.74

4.63. Áp dụng định lí ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng gồm: mặt đất, mặt tường và mặt kính. Khi đó ba giao tuyến là mép chân tường và hai mép kính AB, CD. Vì AB không song song với CD nên ba giao tuyến đồng quy, vì vậy không thể đặt tấm kính sao cho mép CD song song với đường chân tường.

Có thể đặt tấm kính sao cho mép kính BC nằm trên tường và mép kính AD nằm trên mặt đất. Khi đó cả hai mép kính đều song song với đường chân tường.

CHƯƠNG V. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

5.1. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2+n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+3}{1+3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1}=0.$

5.2. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n-2\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2n-4}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n+2\right)}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2-\dfrac{4}{n}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1+\dfrac{2}{n}\right)}=-1.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+n^2-\sqrt{n^4+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2+3}{2+n^2+\sqrt{n^4+1}}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2}+1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}}=2.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}+n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}+1\right)=+\infty.$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n-\sqrt{4n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(3-\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}\right)=+\infty.$

5.3. Ta có $u_n = \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} = \dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \dfrac{1-b}{1-a}\cdot\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1-b}{1-a}$.

5.4. Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+2n} = 1$.

5.5. Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1 = -1$ và $q = -\dfrac{1}{5}$.

Do đó

$$S = \frac{-1}{1+\frac{1}{5}} = -\frac{5}{6}.$$

5.6. a) $1,(03) = 1 + \dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{100^2} + \cdots + \dfrac{3}{100^n} + \cdots = 1 + \dfrac{\dfrac{3}{100}}{1-\dfrac{1}{100}} = 1\dfrac{3}{99} = \dfrac{102}{99}$.

b) $3,(23) = 3 + \dfrac{23}{100} + \dfrac{23}{100^2} + \cdots + \dfrac{23}{100^n} + \cdots = 3 + \dfrac{\dfrac{23}{100}}{1-\dfrac{1}{100}} = 3\dfrac{23}{99} = \dfrac{320}{99}$.

5.7. Ta có $|u_n| = \dfrac{|\cos n|}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$. Do $\dfrac{1}{n^2} \to 0$ khi $n \to +\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5.8. Theo cách xác định tam giác $A_2B_2C_2$, ta có $s_2 = \dfrac{1}{4}s_1$. Tương tự, $s_3 = \dfrac{1}{4}s_2, \ldots,$ $s_n = \dfrac{1}{4}s_{n-1}$. Vậy $s_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} s_1 = 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Từ đó $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots = \dfrac{3}{1-\dfrac{1}{4}} = 4$.

5.9. Ta có $v_n = \dfrac{2}{3^n}$. Do vậy $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 2\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{3}}\right) = 3\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$.

Mặt khác

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_1 = u_{n+1} - 2.$$

Vậy $u_n = 3\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) + 2$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

5.10. Ta có $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(u_n - \dfrac{n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty}(u_n - 1) = 0$. Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

BÀI 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

5.11. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 1$.

5.12. a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1} - 3}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x - 8}{(x-2)\left(\sqrt{4x+1} + 3\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4}{\sqrt{4x+1} + 3} = \dfrac{2}{3}$.

b) $$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^3 - 1) + (x^2 - 1) + (x - 1)}{x^3 - 1}$$
$$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + x + 1) + (x + 1) + 1}{x^2 + x + 1} = 2.$$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 3}{x - 2} = -\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{x} = +\infty$.

5.13. Theo cách xác định hàm số $f(x)$, ta có $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 9 + 3a$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 28$. Hàm số này có giới hạn khi $x \to 3$ nếu $9 + 3a = 28$, hay $a = \dfrac{19}{3}$.

5.14. Do $x = 1$ là nghiệm của mẫu số nên ta phải có $2x^2 - ax + 1 = 0$ với $x = 1$. Tức là $a = 3$. Khi đó $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 1}{x - 2} = -1$. Vậy $b = -1$.

5.15. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = -1.$

5.16. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^6\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{x^3}-1\right) = -\infty.$

5.17. Ta có $g(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}} - 2m = \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} - 2m.$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1-2m = 0$. Vậy $m = \dfrac{1}{2}$.

5.18. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(m-x)(mx+1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\dfrac{m}{x}-1\right)\left(m+\dfrac{1}{x}\right) = -\infty.$

Do $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{m}{x}-1\right)\left(m+\dfrac{1}{x}\right) = -m$ nên ta phải có $m > 0$.

5.19. Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \to +\infty$. Khi đó

$$\left|f(x_n)\right| = \frac{\sin^2 x_n}{x_n^2} \le \frac{1}{x_n^2} \to 0 \text{ khi } n \to +\infty.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$. Từ đó $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5.20. a) $f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{2x+55}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Khi số lượng sản phẩm sản xuất được càng lớn thì chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm càng gần với 2 (triệu đồng).

BÀI 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC

5.21. Do hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên hàm số $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ cũng liên tục tại $x = 1$.

5.22. Theo cách xác định hàm số $f(x)$, ta có $f(1) = 3 = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ và $f(2) = 5 = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. Hơn nữa, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = a + b$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2a + b$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và $x = 2$ khi và chỉ khi $a + b = 3$, $2a + b = 5$. Từ đó, $a = 2$, $b = 1$.

5.23. Ta có $f(1) = m + 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $m = 1$.

5.24. a) Hàm số $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ liên tục trên $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

b) Hàm số $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 3x - 4}$ liên tục trên $(-\infty; -4) \cup (-4; 1) \cup (1; +\infty)$.

5.25. a) Hàm số $f(x) = x^2 - \sqrt{x + 1}$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Hơn nữa $f(1) = 1 - \sqrt{2} < 0$, $f(2) = 4 - \sqrt{2} > 0$. Do đó, theo tính chất của hàm liên tục, tồn tại điểm $c \in (1; 2)$ sao cho $f(c) = 0$.

b) Hàm số $g(x) = \cos x - x$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, $g(0) = 1 > 0$, $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Do vậy tồn tại điểm $d \in (0; 1)$ sao cho $g(d) = 0$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TRẮC NGHIỆM

5.26. C.	**5.27.** C.	**5.28.** B.	**5.29.** C.	**5.30.** B.
5.31. C.	**5.32.** A.	**5.33.** C.	**5.34.** D.	**5.35.** D.
5.36. C.	**5.37.** C.	**5.38.** D.	**5.39.** A.	**5.40.** B.

B. TỰ LUẬN

5.41. Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{n + 1}$, ta có $|v_n| \le \dfrac{1}{n + 1}$. Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

5.42. $u_n = \dfrac{n\sqrt{1+2+\cdots+n}}{2n^2+3} = \dfrac{n\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{2}\left(2n^2+3\right)}$.

Từ đó, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

5.43. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số

a) $-0,(31) = -\left[\dfrac{31}{100} + \dfrac{31}{100^2} + \cdots + \dfrac{31}{100^n} + \cdots\right] = -\dfrac{31}{99}$.

b) $2,(121) = 2 + \dfrac{121}{1000} + \dfrac{121}{1000^2} + \cdots + \dfrac{121}{1000^n} + \cdots = 2\dfrac{121}{999} = \dfrac{2119}{999}$.

5.44. Cạnh của hình vuông H_2 là $a_2 = \sqrt{\left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3a}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{8}}a$.

Khi đó $s_2 = \dfrac{5}{8}a^2 = \dfrac{5}{8}s_1$.

Lí luận tương tự, ta có $s_3 = \dfrac{5}{8}s_2, \ldots,\ s_n = \dfrac{5}{8}s_{n-1} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}a^2$. Từ đó

$T = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots = a^2\left[1 + \dfrac{5}{8} + \left(\dfrac{5}{8}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1} + \cdots\right] = \dfrac{8a^2}{3}$.

5.45. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x+3} + a^2 + 3a\right) = 2 + a^2 + 3a = 0$.

Do đó $a = -1$ hoặc $a = -2$.

5.46. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(x+1)(2x-1)}{5x^3+x+7} = \dfrac{2}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-1\right)\left(2-x^5\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^8\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)\left(\dfrac{2}{x^5}-1\right) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2+1} + x^2} = \dfrac{1}{3}$.

5.47. Ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)(1-2x)\ldots(1-2018x)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2018}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{x}-2\right)\ldots\left(\dfrac{1}{x}-2018\right) = +\infty$.

5.48. Đặt $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=-\infty$.

5.49. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

Thật vậy, đặt $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. Lấy dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_n\to 0$.

Khi đó $\left|f(x_n)\right|=|x_n|\left|\sin\frac{1}{x_n}\right|\le |x_n|\to 0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$.

5.50. Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$. Vậy $f(0)=2$.

5.51. a) $f(-1)\cdot f(1)=-1<0$.

b) Vì $f(0)=2\neq 0$ và $f(x)=\frac{1}{x}\neq 0$ với mọi $x\in(-1;1)\setminus\{0\}$ nên phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

c) Từ kết quả câu b, suy ra hàm số $f(x)$ không liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

5.52. a) $f(x)=\begin{cases}30 & \text{nếu } 0<x\le 1\\ 10+20x & \text{nếu } x>1.\end{cases}$

b) Hàm số này liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn
các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG VIỆT – VŨ THỊ VÂN
Thiết kế sách: PHẠM NGỌC THÀNH
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Sửa bản in: PHAN THỊ THANH BÌNH – PHẠM THỊ TÌNH – TRẦN THU HÀ
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BÀI TẬP TOÁN 11 – Tập một

Mã số: G1BHYT001H23

In .... cuốn (QĐ .... SLK), khổ 17 × 24cm.
In tại Công ty cổ phần in ....
Số ĐKXB: 8-2023/CXBIPH/29-2097/GD
Số QĐXB: .... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm 2023
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 2023
Mã số ISBN: Tập một 978-604-0-34973-6
Tập hai 978-604-0-34974-3

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH BÀI TẬP LỚP 11 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Bài tập Ngữ văn 11, tập một
2. Bài tập Ngữ văn 11, tập hai
3. Bài tập Toán 11, tập một
4. Bài tập Toán 11, tập hai
5. Bài tập Lịch sử 11
6. Bài tập Địa lí 11
7. Bài tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11
8. Bài tập Vật lí 11
9. Bài tập Hoá học 11
10. Bài tập Sinh học 11
11. Bài tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
12. Bài tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
13. Bài tập Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11
14. Bài tập Giáo dục quốc phòng và an ninh 11
15. Tiếng Anh 11 – Global Success – Sách bài tập

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http//hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-34973-6

9 786040 349736

Giá: ... đ