

RÚT GỌN BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A-LÝ THUYẾT

1. Kiến thức 6, 7, 8 quan trọng cần nhớ

a. Tính chất về phân số (phân thức): $\frac{A.M}{B.M} = \frac{A}{B}$ ($M \neq 0, B \neq 0$)

b. Những hằng đẳng thức đáng nhớ

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

2. Các kiến thức về căn bậc hai

- Nếu $a \geq 0, x \geq 0, \sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$
- Để $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$
- $\sqrt{A^2} = |A|$
- $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$)
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0; B > 0$)
- $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (với $B \geq 0$)

- $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$)
- $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0; B \geq 0$)
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ (với $AB \geq 0; B \neq 0$)
- $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$)
- $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$ (với $A \geq 0; A \neq B^2$)
- $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$ và $A \neq B$)

3. CÁC DẠNG BÀI TẬP VỀ RÚT GỌN BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN

Xét biểu thức A với biến số x

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

- Ngoài việc rèn kỹ năng thực hiện các phép tính trong bài toán rút gọn. Học sinh hay quên hoặc thiếu điều kiện xác định của biến x (ĐKXD gồm điều kiện để các căn thức bậc hai có nghĩa, các mẫu thức khác 0 và biểu thức chia (nếu có) khác 0)

Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức A khi x = m (với m là số hoặc biểu thức chứa x)

- Nếu m là biểu thức chứa căn $x = m$ (bằng số), trước tiên phải rút gọn; nếu m là biểu thức có dạng căn trong căn thường đưa về hằng đẳng thức để rút gọn; nếu m là biểu thức ta phải đi giải phương trình tìm x.

- Trước khi tính giá trị của biểu thức A, học sinh thường quên xét xem m có thỏa mãn ĐKXD hay không rồi mới được thay vào biểu thức đã rút gọn để tính.

Ví dụ minh họa : Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

c) Tính giá trị của biểu thức A biết x thỏa mãn phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Có $x = 9 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$

b) Có $x = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = |\sqrt{2} + 1| = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

c) Có $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$\Rightarrow x = 1$ (loại) và $x = 4$ (thỏa mãn)

Với $x = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{2-1} = 2$.

Dạng 3. Tìm giá trị của biến x để $A = k$ (với k là hằng số hoặc là biểu thức chứa x)

- Thực chất đây là việc giải phương trình.

- Học sinh thường quên khi tìm được giá trị của x không xét xem giá trị x đó có thỏa mãn ĐKXD của A hay không.

Ví dụ minh họa: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$, điều kiện xác định $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Tìm x biết $A = 2$.

b) Tìm x biết $A = \frac{4\sqrt{x}-1}{4}$.

Hướng dẫn giải

a) Có $A = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x}+4 \Rightarrow \sqrt{x} = -3$ (vô lí)

$\Rightarrow$ không tồn tại x để $A = 2$.

b) Có $A = \frac{4\sqrt{x}-1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{4\sqrt{x}-1}{4} \Leftrightarrow 4\sqrt{x}+4 = 4x+9\sqrt{x}-2$

$$\Leftrightarrow 4x-5\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(4\sqrt{x}-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{9}{16} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $x \geq 0, x \neq 4 \Rightarrow x = 4$ (loại) và $x = \frac{9}{16}$ (thỏa mãn)

Vậy $x = \frac{9}{16}$ thì $A = \frac{4\sqrt{x}-1}{4}$.

Dạng 4. Tìm giá trị của biến x để $A \geq k$ (hoặc $A \leq k$, $A > k$, $A < k$, ...) trong đó k là hằng số hoặc là biểu thức chứa x .

- Thực chất đây là việc giải bất phương trình.

- Học sinh thường mắc sai lầm khi giải bất phương trình thường dùng tích chéo hoặc sử dụng một số phép biến đổi sai.

Ví dụ minh họa: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$, điều kiện xác định $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Tìm x để $A < 1$.

b) Tìm x để $A \leq 2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Để } A < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\text{Mà } 5 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Rightarrow x < 9.$$

$$\text{Kết hợp điều kiện } x \geq 0, x \neq 9 \Rightarrow 0 \leq x < 9$$

$$\text{Vậy } 0 \leq x < 9 \text{ thì } A < 1.$$

$$\text{b) Để } A \leq 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-3} \leq 0$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 8-\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq 8 \\ \sqrt{x} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 64 \\ x > 9 \end{cases} \Rightarrow 9 < x \leq 64.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 8-\sqrt{x} \leq 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 8 \\ \sqrt{x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 64 \\ x < 9 \end{cases} \text{ (vô lí)} \Rightarrow \text{loại}$$

$$\text{Vậy } 9 < x \leq 64 \text{ thì } A \leq 2.$$

Dạng 5. So sánh biểu thức A với một số hoặc một biểu thức.

- Thực chất đây là việc đi xét hiệu của biểu thức A với một số hoặc một biểu thức rồi so sánh hiệu đó với số 0.

Ví dụ minh họa: Cho $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$, điều kiện xác định $x \geq 0$.

a) So sánh A với 2.

b) So sánh A với 1.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Xét hiệu } A-2 = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - 2 = \frac{2\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Có } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0 \text{ và } -1 < 0 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}+1} < 0 \Rightarrow A-2 < 0 \Leftrightarrow A < 2.$$

b) Xét hiệu $A-1 = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{2\sqrt{x}+1-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

Có $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$ và $\sqrt{x}+1 > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \Rightarrow A-1 \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 1$.

Dạng 6. Chứng minh biểu thức $A \geq k$ (hoặc $A \leq k$, $A > k$, $A < k$) với k là một số.

- Thực chất đây là việc đưa về chứng minh đẳng thức hoặc bất đẳng thức. Ta xét hiệu $A-k$ rồi xét dấu biểu thức.

Ví dụ minh họa: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$, điều kiện $x \geq 0$. Chứng minh $A > 1$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Có $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$.

Có $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2} > 1$ hay $A > 1$.

Cách 2: Xét hiệu $A-1 = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$. Có $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} > 0$ với mọi $x \geq 0$.

$\Rightarrow A-1 > 0$ hay $A > 1$.

Dạng 7. Tìm giá trị của biến x là số nguyên, số tự nhiên để biểu thức A có giá trị nguyên

- Cách làm: chia tử thức cho mẫu thức, rồi tìm giá trị của biến x để mẫu thức là ước của phần dư (một số)

- Học sinh thường quên kết hợp với điều kiện xác định của biểu thức.

Ví dụ minh họa: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$, điều kiện xác định $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$. Tìm x nguyên để A

có giá trị nguyên

Hướng dẫn giải

Có $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$. Để A nhận giá trị nguyên $\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-2}$ là số nguyên $\Rightarrow$

$(\sqrt{x}-2)$ là ước của 5 $\Rightarrow (\sqrt{x}-2) \in \{1; -1; 5; -5\}$

$\sqrt{x}-2$	1	-1	5	-5
$\sqrt{x}$	3	1	7	-3
x	9 (loại)	1 (thỏa mãn)	49 (thỏa mãn)	loại

Vậy $x \in \{1; 49\}$ thì A có giá trị nguyên

Dạng 8. Tìm giá trị của biến x là số thực, số bất kì để biểu thức A có giá trị nguyên

- Học sinh thường nhầm lẫn cách làm của dạng này với dạng tìm giá trị của biến x là số nguyên, số tự nhiên để biểu thức A có giá trị nguyên.

- Cách làm: sử dụng ĐKXĐ để xét xem biểu thức A nằm trong khoảng giá trị nào, rồi tính giá trị của biểu thức A và từ đó tìm giá trị của biến x .

Ví dụ minh họa : Cho $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$, điều kiện xác định $x \geq 0$. Tìm x để A có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Có $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}$

Có $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 > 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow 2 - \frac{5}{\sqrt{x}+2} < 2 \Rightarrow A < 2$

Lại có $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 2 - \frac{5}{\sqrt{x}+2} \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$

Vậy $-\frac{1}{2} \leq A < 2$ mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{0; 1\}$

$$+) \text{ Với } A=0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$+) \text{ Với } A=1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=1 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$$

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4}; 9\right\}$ thì A có giá trị nguyên.

$$\text{Cách 2: } A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow A(\sqrt{x}+2) = 2\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow (A-2)\sqrt{x} = -1-2A$$

$$\text{Để thấy } A=2 \text{ không là nghiệm của phương trình} \Rightarrow A \neq 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-2A-1}{A-2}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2A-1}{A-2} \geq 0$$

$$\text{Th1: } \begin{cases} -2A-1 \geq 0 \\ A-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \leq \frac{-1}{2} \\ A > 2 \end{cases} \text{ (vô lí)} \Rightarrow \text{Loại}$$

$$\text{Th2: } \begin{cases} -2A-1 \leq 0 \\ A-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \geq \frac{-1}{2} \\ A < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq A < 2$$

$$\text{Vậy } -\frac{1}{2} \leq A < 2 \text{ mà } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{0; 1\}$$

$$+) \text{ Với } A=0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$+) \text{ Với } A=1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=1 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$$

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4}; 9\right\}$ thì A có giá trị nguyên.

Dạng 9. Tìm giá trị của tham số để phương trình hoặc bất phương trình có nghiệm

- Học sinh cần biết cách tìm điều kiện để phương trình hoặc bất phương trình có nghiệm.
- + Học sinh đưa biểu thức chưa căn về dạng bậc hai sử dụng điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm
- + Cô lập tham số m , tìm miền giá trị của vế chứa biến x rồi suy ra điều kiện để phương trình có nghiệm thì biểu thức chứa tham số m nằm trong miền giá trị của vế chứa biến x

Ví dụ minh họa 1: Cho $A = x + \sqrt{x}$, điều kiện xác định $x \geq 0; x \neq 1$. Tìm m để phương trình $A = m$ có nghiệm x .

Hướng dẫn giải

$$\text{Có } A = m \Leftrightarrow x + \sqrt{x} = m \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = m \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = m.$$

$$\text{Do } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$$

$$\text{Vì } x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} \neq 2 \Rightarrow m \neq 2$$

Vậy $m \geq 0; m \neq 2$ thì phương trình $A = m$ có nghiệm x .

Ví dụ minh họa 2: Cho $A = \frac{x + \sqrt{x}}{3\sqrt{x} - 1}$, điều kiện xác định $x \geq 0; x \neq \frac{1}{9}$. Tìm m để phương trình $A = m$ có nghiệm x .

Hướng dẫn giải

$$\text{Có } A = m \Rightarrow \frac{x + \sqrt{x}}{3\sqrt{x} - 1} = m \Leftrightarrow x + (1 - 3m)\sqrt{x} + m = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x}, \text{ có } x \geq 0; x \neq \frac{1}{9} \Rightarrow t \geq 0; t \neq \frac{1}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + (1 - 3m)t + m = 0 \quad (2)$$

Vì $a = 1$ khác 0 $\Rightarrow$ (2) luôn là phương trình bậc hai

$$\text{Ta có: } \Delta = (1 - 3m)^2 - 4m = 9m^2 - 10m + 1$$

(1) Có nghiệm khi (2) có ít nhất một nghiệm $t \geq 0$ và $t \neq \frac{1}{3}$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm khi $t = 0 \Rightarrow m = 0$

TH2: Phương trình (2) có nghiệm kép $t \geq 0; t \neq \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{9} \\ m = 1 \end{cases}$$

Với $m = 1 \Rightarrow t = 1$ (thỏa mãn)

Với $m = \frac{1}{9} \Rightarrow t = \frac{-4}{3}$ (không thỏa mãn)

TH3: Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu và $t \neq \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (1-3m) \cdot \frac{1}{3} + m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{4}{9} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0$$

TH4: Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt cùng dương

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)(9m-1) > 0 \\ 1-3m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{9}$$

Kết hợp điều kiện lại $0 \leq m < \frac{1}{9}$ hoặc $m = 1$

Ví dụ minh họa 3: Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, điều kiện xác định $x \geq 0$. Tìm m để phương trình

$A = m$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = m$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = m$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \sqrt{x} + m = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (1-m)\sqrt{x} = m \quad (1)$$

+) TH1: Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) có $0 \cdot \sqrt{x} = 1$ (vô lý)

+) TH2: Nếu $m \neq 1$ thì phương trình (1) có $\sqrt{x} = \frac{m}{1-m} \quad (2)$

$$\forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Để phương trình } A = m \text{ có nghiệm thì phương trình (2) cần có } \frac{m}{1-m} \geq 0 \quad (3)$$

$$\forall \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$$

$$\text{Từ (3) suy ra } 1-m > 0 \Rightarrow m < 1$$

Vậy với $0 \leq m < 1$ thì phương trình $A = m$ có nghiệm.

Dạng 10. Tìm giá trị của biến x để $A = |A|$ (hoặc $A < |A|$; $A \geq |A|$; ...)

$$\text{- Nếu } |A| > A \Rightarrow A < 0$$

$$\text{- Nếu } |A| = A \Rightarrow A \geq 0$$

Ví dụ minh họa: Cho $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$, điều kiện xác định $x > 0$. Tìm x biết

$$\text{a) } |A| > A$$

$$\text{b) } |A| = A$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Có } |A| > A \Rightarrow A < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} < 0$$

$$\text{Mà } x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Rightarrow x < 1.$$

Kết hợp điều kiện ta có $0 < x < 1$ thì $|A| > A$

$$\text{b) Có } |A| = A \Rightarrow A \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\text{Mà } x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1.$$

Vậy $x \geq 1$ thì $|A| = A$

Dạng 11. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

- Học sinh cần biết cách tìm cực trị của phân thức ở một số dạng tổng quát.
- Học sinh cần đưa biểu thức rút gọn A về một trong những dạng sau để tìm cực trị:
 - + Tử thức và mẫu thức là một số hoặc là một biểu thức có dấu xác định trong tập ĐKXD
 - + Biến đổi biểu thức A thành một hằng đẳng thức có chứa biến x.
 - + Biến đổi biểu thức A thành một tổng của hai (hoặc nhiều) số dương rồi áp dụng bất đẳng thức Cô – si hoặc một vài bất đẳng thức phụ.
- Học sinh thường mắc sai lầm khi chỉ chứng minh biểu thức $A \geq k$ (hoặc $A \leq k$) chưa chỉ ra dấu bằng nhưng đã kết luận cực trị của biểu thức A.

Ví dụ minh họa: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$, điều kiện xác định $x \geq 0$.

- a) Tìm giá trị lớn nhất của A.
- b) Đặt $B = (x - 3\sqrt{x} - 4).A$. Tìm giá trị nhỏ nhất của B.
- c) Đặt $C = \sqrt{x} + 1 + A$. Tìm giá trị nhỏ nhất của C.

Hướng dẫn giải

a) Có $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 2 \Rightarrow A \leq 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 2. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

b) Có $B = (x - 3\sqrt{x} - 4) \cdot A = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4) \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} = (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 2) = x - 2\sqrt{x} - 8$

$$x - 2\sqrt{x} + 1 - 9 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 9.$$

$$\text{Có } (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 - 9 \geq -9 \Rightarrow B \geq -9.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là -9 . Dấu “=” xảy ra $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$.

c) Có $C = \sqrt{x} + 1 + A = \sqrt{x} + 2 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + 1$

$$\text{Có } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 > 0 \text{ và } \frac{1}{\sqrt{x} + 1} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si với 2 số dương $\sqrt{x} + 1$ và $\frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ ta có:

$$\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + 1 \geq 3 \Rightarrow C \geq 3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng 3.

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Dạng 12: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của A khi $x \in N$.

+ Học sinh chú ý bài toán thường cho dưới dạng điều kiện xác định $x \geq a, x \neq b$ trong đó $a < b$. Ta phải tính giá trị với x là các số tự nhiên thuộc $[a; b)$ và trường hợp x là số tự nhiên lớn hơn b .

Ví dụ minh họa: Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, điều kiện xác định $x \geq 0; x \neq 1$. Với $x \in \mathbb{N}$ và $x \neq 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A .

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Với $x \in \mathbb{N}$ và $x \neq 1$, ta xét các trường hợp:

TH1. $x=0$ thì $A=0$.

TH2. Nếu $x \geq 2$ thì $\sqrt{x}-1 \geq \sqrt{2}-1$

Do đó: $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2 + \sqrt{2}$

Dấu “=” xảy ra khi $x=2$.

So sánh các trường hợp của P , ta thấy: $\max P = 2 + \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x=2$.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho các biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

1. Tính giá trị của biểu thức B khi $x=9$
2. Đặt $C = A:B$, rút gọn biểu thức C
3. Tìm giá trị của x để $C=3$
4. So sánh C với $\frac{1}{4}$
5. Chứng minh $C > 2$
6. Tìm x nguyên để biểu thức C có giá trị nguyên
7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức C
8. Tìm các giá trị của m để nghiệm x thỏa mãn bất phương trình: $-\sqrt{x}.C > \sqrt{x} + m - 3$

Hướng dẫn giải

1. Với $x = 9$ (thỏa mãn ĐKXD) thay vào biểu thức B, ta được : $B = \frac{1}{\sqrt{9}-1} = \frac{1}{8}$

Vậy khi $x = 9$ thì giá trị của biểu thức $B = \frac{1}{8}$

2. Đặt $C = A : B$, rút gọn biểu thức C

$$C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$C = \frac{(\sqrt{x})^2 + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1}$$

$$C = \frac{(x+2)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$C = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

3. ĐKXD: $x > 0; x \neq 1$

Để $C = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\Rightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \quad (*)$$

Giải phương trình (*) ta suy ra được : $x = 1$ (loại) và $x = 4$ (thỏa mãn ĐKXD)

Vậy để $C = 3$ thì $x = 4$

4. Xét hiệu $C - \frac{1}{4} = \frac{x+2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4} = \frac{4x - \sqrt{x} + 8}{4\sqrt{x}} = \frac{\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{127}{16}}{4\sqrt{x}}$

Vì $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ với mọi x nên $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{127}{16} > 0$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$ suy ra $4\sqrt{x} > 0$

Suy ra $\frac{\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{127}{16}}{4\sqrt{x}} > 0$. Do đó $C > \frac{1}{4}$

5. Xét hiệu $C - 2 = \frac{x+2}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 + 1}{\sqrt{x}}$

Vì $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$ với mọi x nên $(\sqrt{x} - 1)^2 + 1 > 0$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$, suy ra $\frac{(\sqrt{x} - 1)^2 + 1}{\sqrt{x}} > 0$. Do đó $C > 2$

6. ĐKXD: $x > 0; x \neq 1$

Ta có : $C = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Để giá trị của biểu thức C nguyên thì $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ nguyên

Suy ra $\frac{2}{\sqrt{x}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}$ là ước của 2

Từ đó $\sqrt{x}$ nhận các giá trị 1 ; 2 nên x nhận các giá trị $x = 1$ (loại) và $x = 4$ (TMDK)

Khi đó với $x = 4$ thì C có giá trị là 3

Vậy với $x = 4$ thì biểu thức C có giá trị nguyên

7. Ta có : $C = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si với hai số dương $\sqrt{x}$ và $\frac{2}{\sqrt{x}}$, ta được :

$$\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A_{\min} = 2\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn ĐKXD)

Vậy giá trị nhỏ nhất $A_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$

8. Ta có : $-\sqrt{x}.C > \sqrt{x} + m - 3$

Suy ra : $-x - \sqrt{x} + 1 - m > 0$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 + m < 0$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} + m - \frac{5}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 + m - \frac{5}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{5}{4} - m$$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$, suy ra $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 > \frac{1}{4}$

Suy ra $\frac{1}{4} < \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{5}{4} - m \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{5}{4} - m \Rightarrow m < 1$

Vậy với $m < 1$ thì x thỏa mãn bất phương trình : $-\sqrt{x}.C > \sqrt{x} + m - 3$

Bài 2. Cho các biểu thức :

$$M = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1 \right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \right) \text{ và } N = \frac{4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+3}$$

(với $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$)

1. Rút gọn biểu thức M

2. Tìm x để $|M| > M$

3. Đặt $Q = M.N$, tìm các giá trị của x để biểu thức Q có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

1. Rút gọn biểu thức M

$$M = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1 \right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \right)$$

$$M = \frac{-3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{9-x+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)-(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}$$

$$M = \frac{-3}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{-(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$M = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$$

2. ĐKXĐ : $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$

$$\text{Để } |M| > M \Leftrightarrow M < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} < 2$$

$$\Rightarrow x < 4$$

Kết hợp với ĐKXĐ: $x \geq 0$, suy ra $0 \leq x < 4$

Vậy với $0 \leq x < 4$ thì $|M| > M$

3. ĐKXD : $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$

$$Q = M.N = \frac{3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+3} = \frac{12}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} \geq 0$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} \leq 4$$

Do đó: $0 < Q \leq 4$

Mà $Q \in \mathbb{Z}$, suy ra $Q \in \{1; 2; 3; 4\}$

$$\text{TH1: } Q=1 \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} = 1 \Rightarrow \sqrt{x}+3=12 \Leftrightarrow \sqrt{x}=9 \Rightarrow x=81 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{TH2: } Q=2 \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} = 2 \Rightarrow \sqrt{x}+3=6 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9 \text{ (loại)}$$

$$\text{TH3: } Q=3 \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} = 3 \Rightarrow \sqrt{x}+3=4 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{TH4: } Q=4 \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} = 4 \Rightarrow \sqrt{x}+3=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Vậy để biểu thức Q có giá trị nguyên thì $x \in \{0; 1; 81\}$

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của A khi $x=9$.

3) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{2}$.

4) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

5) Tìm m để phương trình $mA = \sqrt{x} - 2$ có hai nghiệm phân biệt.

6) Tính các giá trị của x để $A < 1$.

7) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Hướng dẫn giải

$$1) A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 - 3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$2) \text{ Thay } x=9 \text{ (TMĐK) vào } A \text{ ta được: } A = \frac{2\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}+1} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Vậy với } x=9 \text{ thì } A = \frac{5}{4}$$

3) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$

$$A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-2 = \sqrt{x}+1$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (Không thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy không có giá trị của } x \text{ để } A = \frac{1}{2}$$

$$4) \text{ ĐKXĐ: } x \geq 0, x \neq 1$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}+1)-3}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Để } A \text{ nhận giá trị nguyên thì } \frac{3}{\sqrt{x}+1} \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow 3 : \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U_{(3)}$$

$$U_{(3)} = \{-3; -1; 3; 1\}$$

Ta có bảng sau:

$\sqrt{x}+1$	-3	-1	1	3
$\sqrt{x}$	-4	-2	0	2
x	$\emptyset$	$\emptyset$	0	4
ĐK	-	-	TM	TM

Vậy $x \in \{0; 4\}$ thì A nhận giá trị nguyên

$$5) \text{ ĐKXĐ: } x \geq 0, x \neq 1$$

$$\text{Để } m.A = \sqrt{x} - 2$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 2$$

$$\Leftrightarrow 2m\sqrt{x} - m = x - \sqrt{x} - 2$$

$$\Leftrightarrow x - (2m+1)\sqrt{x} + m - 2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$; $t \neq 1$) ta có phương trình:

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - (2m+1)t + m - 2 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 và $t_2 > t_1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \geq 0 \\ S > 0 \\ a+b+c \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [-(2m+1)]^2 - 4(m-2) > 0 \\ m-2 \geq 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 1-(2m+1)+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2+9 > 0 \quad \forall m \\ m \geq 2 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$$

Vậy với $m \geq 2$ thì pt (1) có 2 nghiệm phân biệt

6) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$

$$\text{Để } A < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} < 0$$

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in \text{ĐKXD}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \quad \forall x \in \text{ĐKXD}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp với điều kiện ta có $0 \leq x < 4; x \neq 1$

Vậy với $0 \leq x < 4; x \neq 1$ thì $A < 1$

7) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$

$$A = 2 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 2-3 \Leftrightarrow A \geq -1$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (TMĐK)

Vậy GTNN của A là -1 khi $x=0$

Bài 4. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- 1) Rút gọn B
- 2) Tính giá trị của B khi $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
- 3) Tìm x để $B = \sqrt{x}$
- 4) Với $x > 1$, hãy so sánh B với $\sqrt{B}$

Hướng dẫn giải

$$1) B = \left(\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$2) x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2$$

Thay $x = 2$ (TMĐK) vào B ta được

$$B = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1} = 3+2\sqrt{2}.$$

Vậy khi $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ thì $B = 3+2\sqrt{2}$

3) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$

$$B = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = x - \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1+\sqrt{2})(\sqrt{x}-1-\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2} \quad (L) \\ \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = (1 + \sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}$$

4) Xét hiệu $B - \sqrt{B} = \sqrt{B}(\sqrt{B} - 1)$

CÁCH 1

+) Ta có : $x > 1 \Rightarrow B > 0 \Rightarrow \sqrt{B}$ có nghĩa

+) Xét $1 - B = 1 - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{-2}{\sqrt{x} - 1} < 0$

$$\Rightarrow B > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{B} > 1$$

+) Ta có : $B - \sqrt{B} = \sqrt{B}(\sqrt{B} - 1) > 0$

$$\Rightarrow B > \sqrt{B}$$

CÁCH 2

+) Ta có: $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 > 0$

Mà $\sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} > 0 \Leftrightarrow B > 0 \Leftrightarrow \sqrt{B} > 0 \quad (1)$

+) Lại có: $B = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$

$$B - 1 = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - 1 = \frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$$

Mà $\sqrt{x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 1} > 0$

$$\Rightarrow B - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{B} + 1)(\sqrt{B} - 1) > 0$$

Mà $\sqrt{B} > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{B} + 1 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{B} - 1 > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt{B}(\sqrt{B} - 1) > 0$

$$\Leftrightarrow B - \sqrt{B} > 0$$

$$\Leftrightarrow B > \sqrt{B}$$

Bài 5. Cho biểu thức $C = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

- 1) Rút gọn biểu thức C
- 2) Tính giá trị của x để C đạt giá trị lớn nhất
- 3) So sánh $\frac{1}{C}$ với 1

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
 1) \quad C &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\
 C &= \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
 C &= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
 C &= \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
 C &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}
 \end{aligned}$$

2) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

$$\text{Để } C_{\max} \Rightarrow \frac{1}{C} \min$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{C} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-4}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{-4}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in \text{ĐKXD}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{\sqrt{x}+1} \geq -4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{-4}{\sqrt{x}+1} \geq -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{C} \geq -3$$

$$\Rightarrow C \leq \frac{-1}{3} \quad \forall x \in \text{ĐKXD}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (TMĐK)

Vậy GTLN của C là $\frac{-1}{3}$ khi $x = 0$

3) Xét hiệu $\frac{1}{C} - 1 = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} - 1 = \frac{-4}{\sqrt{x} + 1}$

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in DKXD$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{\sqrt{x} + 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{C} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{C} < 1 \quad \forall x \in DKXD$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

A. Đề bài

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{x-4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

1) Tìm giá trị của x để $A = 4$.

2) Rút gọn biểu thức B

3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{18}{A.B}$.

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ và $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right) (x \geq 0; x \neq 1)$

1) Tính giá trị của biểu thức A với $x = 16$

2) Rút gọn biểu thức P .

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{A}{P}$.

Bài 3. Cho hai biểu thức

$$A = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} (x \geq 0; x \neq 9) \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3} (x \geq 0; x \neq 9)$$

1) Tính giá trị của biểu thức B với $x = 11 - 6\sqrt{2}$

2) Rút gọn biểu thức $P = \frac{A}{B}$.

3) Tìm x để $P < \frac{1}{9}$.

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{5}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

1) Tính A khi $x = \frac{1}{4}$.

2) Rút gọn B.

3) Biết $P = \frac{A}{B}$. Hãy Chứng tỏ $P > \sqrt{P}$ với ($\forall x > 1$).

Bài 5. Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-3\sqrt{x}+2} \text{ và } B = \frac{4\sqrt{x}-13}{\sqrt{x}-1} \quad (x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4)$$

1) Tính giá trị của biểu thức B với $x = 36$

2) Rút gọn biểu thức A.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$

Bài 6. Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{3}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$, $x \geq 0, x \neq 25$.

1) Khi $x = 9\sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, Tính giá trị của A.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm x để $P = A+B$ nhận giá trị nguyên.

Bài 7. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$; $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ ($x > 0; x \neq 2$)

1) Rút gọn B và tính $P = \frac{A}{B}$

2) Tìm x để $B = |B|$

3) Tìm x thỏa mãn: $xP \leq 10\sqrt{x} - 29 - \sqrt{x-25}$

Bài 8. Cho biểu thức: $A = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-2}{3} + 1 \right)$

(với $x \geq 0, x \neq 9$)

1) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}$

2) Rút gọn B

3) Gọi $M = A.B$. So sánh M và $\sqrt{M}$

Bài 9. Cho biểu thức $P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm giá trị của biểu thức P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

3) Chứng minh rằng với mọi giá trị của x đề biểu thức P có nghĩa thì biểu thức $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên.

Bài 10. Cho hai biểu thức $U = \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \div \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$.

1) Rút gọn biểu thức U.

2) Tìm giá trị của U tại $x = 14 + 6\sqrt{5}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $K = 8U$ có giá trị là số nguyên

Bài 11. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-10}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq \frac{9}{16}$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm giá trị của x để $B = 2A$.

Bài 12. : Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{6}{x+\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$

với $x \geq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$.

- 1) Rút gọn P .
- 2) Tính P biết $x = 3 - 2\sqrt{2}$.
- 3) Tìm x để $P < -\frac{1}{2}$.

Bài 13. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}}$, $B = \frac{x+3}{x-9} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \frac{4}{9}$.
- 2) Rút gọn B .
- 3) Cho $P = \frac{B}{A}$, tìm x để $P < 3$.

Bài 14. Cho biểu thức :

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \text{ và } B = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \text{ (với } x > 0; x \neq 1 \text{)}$$

- 1) Rút gọn và tính giá trị biểu thức A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$
- 2) Rút gọn biểu thức B

- 3) Đặt $M = B : A$, tìm x để $\frac{1}{M} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$

Bài 15. Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0; x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của Q khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức $A = P.Q$.
- 3) Tìm các giá trị của x để $A.\sqrt{x} < 8$.

Bài 16. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right)$; $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$

1) Tính giá trị của B khi $x = 36$

2) Chứng minh rằng $A.B = \frac{2}{x-1}$

3) Tìm x để $|A.B+1| > A.B+1$

Bài 17. Cho hai biểu thức $A = \frac{x+12}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{A}{B}$.

Bài 18. Cho hai biểu thức $A = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

2) Tìm giá trị của x để $B = A+1$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = B - A$.

Bài 19. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Tìm giá trị nguyên của x để $A < 1$.

3) Tìm m để phương trình $mA = \sqrt{x} - 2$ có hai nghiệm phân biệt

Bài 20. Cho 2 biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$.

1) Tính giá trị biểu thức B khi $x = 16$.

2) Rút gọn biểu thức $M = A : B$.

3) Tìm các giá trị thực của x để $M < 1$.

Bài 21. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của A khi $x = \frac{9}{4}$
- 2) Rút gọn B .
- 3) Với $x \in \mathbb{N}$ và $x \neq 1$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$

Bài 22. Cho hai biểu thức $A = \frac{x-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{6-2\sqrt{x}}{x-3\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{1-\sqrt{x}}$
với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{4}$
- 2) Rút gọn biểu thức $M = A.B$
- 3) Tìm m để phương trình $M = \frac{m}{2}$ (m là tham số) có nghiệm.

Bài 23. Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}$; $B = \left(\frac{4\sqrt{x}+4x}{8x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{2\sqrt{x}-1} \right)$ ($x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}$)

- 1) Tính giá trị của A khi $x=1$
- 2) Chứng minh biểu thức $T = \frac{B}{A} = \frac{1}{2\sqrt{x}+1}$.
- 3) Với $x \geq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của $L = \frac{1}{T} + 4T$.
- 4) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = T \cdot \frac{2x-1}{2\sqrt{x}-1}$ nhận giá trị nguyên

dương.

Bài 24. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Cho biểu thức $P = \frac{1}{AB}$. Với $x \in \mathbb{Z}$, tìm giá trị lớn nhất của P .

Bài 25. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{20-2\sqrt{x}}{x-25} + \frac{3}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- 1) Khi $x=16$, tính giá trị của biểu thức A
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{B}{A} = \frac{m}{6}$ có nghiệm

Bài 26. Cho hai biểu thức $P = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

1. Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 64$
2. Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$
3. Với $x \in \mathbb{Z}$, tìm GTLN của biểu thức $K = Q.(P-1)$