Chuyên đề 1 ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN $\mathbb{R}$

PHƯƠNG PHÁP THẾ VÀ PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ÁNH XẠ TRONG VIỆC GIẢI BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN $\mathbb{R}$

Trong chương trình chuyên toán ở các trường THPT chuyên *Phương trình hàm* là một chuyên đề quan trọng. Hiện nay tài liệu về phương trình khá phong phú. Tuy vậy, việc giải được phương trình hàm vẫn là vấn đề khó đối với nhiều học sinh. Trong chuyên đề nhỏ này, chúng tôi sẽ trình bày hai phương pháp thông dụng và quan trọng để giải phương trình hàm trên tập $\mathbb{R}$. Đó là *Phương pháp thế* và *Phương pháp sử dụng tính chất ánh xạ*.

I. Phương pháp thế trong giải phương trình hàm

1. Một số lưu ý khi sử dụng phương pháp thế

Quan sát cấu trúc của phương trình xem giữa các biến có tính đối xứng không? Nếu trong phương trình có tính đối xứng giữa x và y thì ta thường hoán vị các biến này cho nhau.

Thay các biến bởi các giá trị thích hợp thoả mãn các điều kiện bài toán. Điều cần chú ý là các giá trị của biến phải thuộc tập xác định của hàm số. Ta thường chọn giá trị cho biến sao cho sau khi thay ta thu được một phương trình hàm đơn giản hơn hoặc có thể nhận được dạng của hàm số (tuyến tính, bậc hai, mũ, logarit,…). Trong trường hợp f cộng tính ta có thể thay x bởi $x+1$ và quy giá trị hàm số về $f(1)$.

Một vài phép thế đặc biệt: $x=y=0, x=y=\pm1; x=0, y=0, x=1, y=1, x=\pm y, x=\pm f(y),...$

Tính các giá trị đặc biệt của hàm số $f(x)$, chẳng hạn: $f(0), f(\pm1)...$

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho hàm số f thoả mãn điều kiện: $f(0)=2$ và $f(x+y)=f(y)+x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Tính $f(1998)$.

Lời giải:

Giả sử tồn tại hàm f thoả mãn điều kiện đề bài. Cho $y=0$, ta có $f(x)=f(0)+x=2+x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Thử lại thấy thoả mãn. Do đó: $f(1998)=2+1998=2000$

Ví dụ 2: (Australia 1995) Tìm tất cả các hàm $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện $f(1)=\frac{1}{2}$ và

$$f(xy)=f(x)f\left(\frac{3}{y}\right)+f(y)f\left(\frac{3}{x}\right),\ \forall x,y>0. \qquad (1)$$

Lời giải:

Cho $x=1, y=3$ thay vào (1) ta được:

$$f(3)=\frac{1}{4}+f^2(3)\leftrightarrow\left(f(3)-\frac{1}{2}\right)^2=0\leftrightarrow f(3)=\frac{1}{2}\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f(y)=\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{y}\right)+\frac{1}{2}f(y)\to f\left(\frac{3}{y}\right)=f(y)\quad\forall y\in\mathbb{R}^+$

Khi đó (1) trở thành: $f(xy)=2f(x)f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+$ (2)

Thay y bởi $\frac{3}{x}$ vào (2) ta có: $f(3)=2f(x)f\left(\frac{3}{x}\right)\to\frac{1}{2}=2f^2(x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=\frac{1}{2}\\ f(x)=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Thay $y=x$ vào (2) có: $f(x^2)=2f^2(x)=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\to f(x)=\frac{1}{2},\forall x>0$

Thử lại thấy thoả mãn.

Ví dụ 3: (Nhật Bản 2012)Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(f(x+y)f(x-y))=x^2-yf(y)\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}\quad(1)$$

Lời giải:

Từ (1) cho $x=y=0$ ta thu được $f(f^2(0))=0$. Từ (1) cho $x=0, y=f^2(0)$, kết hợp với kết quả $f\left(f^2(0)\right)=0$ ta thu được $f(0)=0$.

Từ (1) cho $x=y$ có: $x^2-xf(x)=0\Rightarrow f(x)=x$, $\forall x\neq 0$.

Hơn nữa $f(0)=0$, suy ra: $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy thoả mãn.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn: $f(xf(y)+x)=xy+f(x)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

Trong (1) thay $x=1$, ta được $f(f(y)+1)=y+f(1)$, $y\in\mathbb{R}$ (2)

Trong (2) thay y bởi: $-1-f(1)$ ta có: $f(f(-1-f(1))+1)=-1$

Đặt: $1+f(-1-f(1))=a;\ f(0)=b$

Ta có: $f(xf(a)+x)=f(0)=b$. Hay: $b=f(xf(a)+x)=ax+f(x)\longrightarrow f(x)=-ax+b$

Thay biểu thức của $f(x)$ vào (1) ta được: $-a(xf(y)+x)+b=xy-ax+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$\leftrightarrow -a\left[x(-ay+b)+x\right]+b=xy-ax+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$\leftrightarrow a^2xy-abx-ax+b=xy-ax+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

Bằng cách đồng nhất các hệ số ta được: $\begin{cases}a^2=1\\ ab+a=a\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thoả mãn.

Ví dụ 5: (Serbia 2014, Đồng Nai 2018) Xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(xf\left(y\right)-yf\left(x\right)\right)=f\left(xy\right)-xy \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.(1)$$

Lời giải:

Cho $y=0$ được $f\left(xf\left(0\right)\right)=f\left(0\right)$. Nếu $f\left(0\right)\neq 0\to f\left(x\right)$ là hàm hằng. Thử lại thấy không thỏa mãn. Do đó $f\left(0\right)=0.$

Cho $x=y$ được $f\left(x^2\right)-x^2=f\left(0\right)=0\to f\left(x\right)=x,\ \forall x\geq 0$

Giả sử $\exists a: f\left(a\right)=0$. Cho $x=a,\ y=1$ được $f\left(af\left(1\right)\right)=f\left(a\right)-a=-a\to f\left(a\right)=-a\to 0=-a\to a=0$

Với $x,y<0$ ta có

$$f\left(xf\left(y\right)-yf\left(x\right)\right)=f\left(xy\right)-xy\leftrightarrow f\left(xf\left(y\right)-yf\left(x\right)\right)=xy-xy=0$$
$$\leftrightarrow xf\left(y\right)-yf\left(x\right)=0\to f\left(x\right)=cx,\forall x<0.$$

Xét $x<0<y$ thay vào (1) có: $f\left(\left(1-c\right)xy\right)=f\left(xy\right)-xy=\left(c-1\right)xy.\ \ (2)$

Nếu $c=1\longrightarrow f\left(x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Nếu $c\neq 1$, do $f\left(\left(1-c\right)xy\right)\in\left\{\left(1-c\right)xy,\mathrm{c}\left(1-c\right)xy\right\}$ nên từ (2) suy ra $c=-1\longrightarrow f\left(x\right)=\left|x\right|,\ \forall x\in\mathbb{R}.$
Vậy có 2 hàm thỏa mãn bài toán $f\left(x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ hoặc $f\left(x\right)=\left|x\right|,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Ví dụ 6: Tìm hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$(x-y)f\left(x+y\right)-\left(x+y\right)f\left(x-y\right)=4xy\left(x^2+y^2\right)\forall x,y\in\mathbb{R}\left(1\right).$$

Lời giải:

Ta có:

$$\left(1\right)\leftrightarrow\left(x-y\right)f\left(x+y\right)-\left(x+y\right)f\left(x-y\right)=$$
$$=\left[\left(x+y\right)-\left(x-y\right)\right]+\left[\left(x+y\right)+\left(x-y\right)\right]\left[\frac{1}{4}\left[\left(x+y\right)+\left(x-y\right)\right]^2-\frac{1}{4}\left[\left(x+y\right)-\left(x-y\right)\right]^2\right]$$

Đặt $\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}$ ta được:

$$vf\left(u\right)-uf\left(v\right)=\frac{1}{4}\left(u+v\right)\left(u-v\right)\left(\left(u+v\right)^2-\left(u-v\right)^2\right)$$
$$\to vf\left(u\right)-uf\left(v\right)=u^3v-v^3u\leftrightarrow v\left(f\left(u\right)-u^3\right)=u\left(f\left(u\right)-v^3\right)$$

+ Với $uv\neq 0$ ta có:

$$\frac{f\left(u\right)-u^3}{u}=\frac{f\left(v\right)-v^3}{v}\forall u,v\in\mathbb{R}^*\to\frac{f\left(u\right)-u^3}{u}=a\to f\left(u\right)=au+u^3,\ \forall u\neq 0$$

+ Với $u=0; v\neq 0$ suy ra: $f(u)-u^3=0 \leftrightarrow f(u)=u^3 \to f(0)=0.$

Hàm $f(u)=au+u^3$ thỏa mãn $f(0)=0$. Vậy $f(u)=au+u^3,\ \forall u\in\mathbb{R}$

Hàm số cần tìm là: $f(u)=ax+x^3\,(a\in\mathbb{R})$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 7: (Áo 1996) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4,\forall x\in\mathbb{R}$$

Lời giải:

Thay x bởi $1-x$ ta được

$$(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$$

Như vậy ta có hệ

$$\begin{cases} x^2f(x)+f(1-x)=2x-2^4 \\ (1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4 \end{cases}$$

Ta có $D=(x^2-x-1)(x^2-x+1)$ và $D_x=(1-x^2)(x^2-x-1)(x^2-x+1)$. Vậy $D.f(x)=D_x,\forall x\in\mathbb{R}$. Từ đó ta có nghiệm của bài toán là

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2: x\neq a, x\neq b \\ c\in\mathbb{R}: x=a \\ 2a-a^4-a^2:2=b \end{cases}\quad (c \text{ là hằng số tùy ý}),$$

Với a, b là nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$

Nhận xét: bài toán trên được dùng một lần nữa trong kì thi **VMO 2000, bảng B.**

Ví dụ 8: (VMO 2005) Hãy xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x-y))=f(x)f(y)-f(x)+f(y)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}\qquad (8)$$

Lời giải:

Thế $x=y=0$ vào (8) ta được

$$f(f(0))=(f(0))^2$$

Thế $x=y$ vào (8) và sử dụng kết quả trên thì

$$(f(x))^2=(f(0))^2+x^2,\forall x\in\mathbb{R}$$

Suy ra $(f(x))^2=(f(-x))^2\to|f(x)|=|f(-x)|,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thế $y=0$ vào (8) được

$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(0\right)f\left(x\right)-f\left(x\right)+f\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Thế $x=0,y=-x$ vào (8) được

$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(0\right)f\left(-x\right)+f\left(-x\right)-a,\forall x\in\mathbb{R}$.

Từ hai đẳng thức trên ta có

$f\left(0\right)\left(f\left(-x\right)-f\left(x\right)\right)+f\left(-x\right)+f\left(x\right)=2f\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}$. (9)

Giả sử tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $f\left(x_0\right)=f\left(-x_0\right)$, thì thế $x=x_0$ vào (9) ta có

$$\begin{aligned}
&f\left(x_0\right)=f\left(0\right)\\
&\to\left(f\left(x_0\right)\right)^2=\left(f\left(0\right)\right)^2\\
&\to\left(f\left(0\right)\right)^2+x_0^{\ 2}=\left(f\left(0\right)\right)^2+0^2\\
&\to x_0=0
\end{aligned}$$

Suy ra mâu thuẫn

Vậy $f\left(x\right)=-f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$, từ điều này kiết hợp với (9) ta có

$f\left(0\right)\left(f\left(x\right)-1\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$

Từ đây suy ra $f\left(0\right)=0$, vì nếu ngược lại thì $f\left(x\right)=1,\forall x\neq 0$, trái với điều kiện f là hàm lẻ. Từ đây ta nhận được quan hệ quen thuộc

$x_0=f\left(x_0\right)=-f\left(f\left(x_0\right)\right)=-f\left(x_0\right)=x_0$

Vô lý. Vậy chứng tỏ $f\left(x\right)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm này thỏa mãn bài toán.

Nhận xét: Bài toán trên cho kết quả là hàm chẵn $f\left(x\right)=-x$. Nếu vẫn giữa nguyên vế phải và để nhận được hàm lẻ $f\left(x\right)=x$, ta sửa lại dữ kiện trong vế trái như trong ví dụ sau

Ví dụ 9: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(f\left(x\right)-y\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)+f\left(x\right)f\left(y\right)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Lời giải:

Thế $y=0$ ta được

$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)-f\left(0\right)+f\left(0\right)f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (10)

Thế $y=f\left(x\right)$ và sử dụng kết quả trên, ta được

$f(0)=f(x)-f(f(x))+f(x).(f(x))-xf(x) \quad (*)$

$\quad = f(0)-xf(0)f(x)+(f(x))^2+f(0).(f(x))^2-xf(x),$

Hay $\quad -2f(0).f(x)+(f(x))^2+f(0).(f(x))^2-xf(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thế $x=0$ vào đẳng thức trên ta được
$(f(0))^2-(f(0))^2=0\to f(0)=0$ hoặc $f(0)=1$.

Nếu $f(0)=0$ thì thay vào (10) ta có $f(f(x))=f(x),\neg x\in\mathbb{R}$, thay kết quả này vào trong (*) ta có $f(x)=x$.

Nếu $f(0)=1$thay vào (10) ta có $f(f(x))=2f(x)-1$, thay vào trong (*) ta có $f(x)=\frac{1}{2}x+1$.

Kết luận: thay vào ta thấy chỉ có hàm số $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ là thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 10: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left((x-y)^2\right)=(f(x))^2-2xf(y)+y^2,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Thay $x=y=0$ thì $(f(0))=(f(0))^2\to f(0)=0$ hoặc $f(0)=1$

Trường hợp 1: Nếu $f(0)=0$, thì thay $x=y$ vào điều kiện ban đầu ta được
$f(0)=(f(x))^2-2xf(x)+x^2=(f(x)-x)^2\to f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận thấy hàm số này thỏa mãn.

Trường hợp 2: Nếu $f(0)=1$ thì lại vẫn thay $x=y=0$ ta nhận được, với mỗi $x\in\mathbb{R}$ thì hoặc là $f(x)=x+1$ hoặc là $f(x)=x-1$. Giả sử tồn tại giá trị a sao cho $f(a)=a-1$. Khi đó thay $x=a,y=0$ ta được $f(a^2)=a^2-4a+1$

Nhưng ta lại có hoặc là $f(a^2)=a^2+1$ hoặc $f(a^2)=a^2-1$. Do đó ta phải có hoặc là $a^2-4a+1=a^2+1$hoặc $a^2-4a+1=a^2-1$, tức $a=0$ hoặc $a=\frac{1}{2}$. Tuy nhiên kiểm tra đều không thỏa.

Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc là $f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 11: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^3-y)+2y\left(3(f(x))^2+y^3\right)=f(x+f(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Thay $y=x^3$ ta có

$$f(0)+2x^3\left(3(f(x))^2+x^6\right)=f\left(x^3+f(x)\right),\forall x\in\mathbb{R}$$

Thay $y=-f(x)$ ta được

$$f\left(x^3+f(x)\right)-2f(x)\left(3(f(x))^2+(f(x))^2\right)=f(0),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ hai đẳng thức trên ta được

$$2x^3\left(3(f(x))^2+x^6\right)=8(f(x))^3,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}0&=4(f(x))^2-x^3\left(3(f(x))^2+x^6\right)\\&=\left(4(f(x))^3-4(f(x))^2.x^3\right)+\left((f(x))^2.x^3-x^9\right)\\&=\left(f(x)-x^3\right)\left(4(f(x))^2+x^3\left(f(x)+x^3\right)\right)=\left(f(x)-x^3\right)\left(\left(2f(x)+\frac{x^3}{4}\right)+\frac{15}{16}x^6\right).\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\left(2f(x)+\frac{x^3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}x^6=0$ thì $x=0, f(0)=0$. Bởi vậy trong mọi trường hợp ta đều có $f(x)=x^3$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn bài toán.

3. Bài tập vận dụng

Bài tập 1: (Slovenia 1999) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x-f(y)\right)=1-x-y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Thay x bởi $f(y)$ trong (1) được $f(0)=1-f(y)-y\to f(y)=-y-f(0)+1\,(2)$

Cho $y=0$ thay vào (2) được $f(0)=\frac{1}{2}$. Suy ra $f(y)=-y+\frac{1}{2}\ \forall y\in\mathbb{R}$

Bài 2: (Khánh Hòa 2017) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Đặt $g(x)+x=f(x)$ thì phương trình hàm đã cho trở thành:

$$g(xy)+g(x-y)+g(x+y+1)=0\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Trong (1) lần lượt cho $x=0,y=0; x=0,y=1; x=0,y=2; x=1,y=1;\to g(0)=0.$

Trong (1) cho $y=0\to g(x)+g(x+1)=0\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (2)$

Trong (1) cho $y=-1 \to g(-x)+g(x+1)+g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $g(-x)=0\ \forall x\in\mathbb{R} \to g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R} \to f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 3: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, biết rằng f là hàm số chẵn và thỏa mãn:

$$f(xy)-f(x)f(y)=2014\big(f(x+y)-2xy-1\big) \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}..$$

Lời giải:

Từ (1) cho $y=0$, ta có:

$$f(0)-f(x).f(0)=2014\big(f(x)-1\big) \leftrightarrow \big(f(x)-1\big)\big(f(0)+2014\big)=0 \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Nếu $f(0)\neq -2014$ thì $f(x)=1$ với mọi $x\in R$. Khi đó f không thỏa mãn (1)

Do đó $f(0)=-2014.$

Từ (1) thay x bởi x và y bởi x, ta được:

$$f(x^2)-\big(f(x)\big)^2=2014\big(f(2x)-2x^2-1\big).\ (2)$$

Từ (1) thay x bởi x và y bởi $-x$, ta được:

$$f(-x^2)-f(x)f(-x)=2014\big(f(0)+2x^2-1\big).\ (3)$$

Vì f là hàm số chẵn nên viết (3) lại như sau:

$$f(x^2)-\big(f(x)\big)^2=2014\big(f(0)+2x^2-1\big).\ (4)$$

Lấy (4) trừ (2) vế theo vế ta được:

$$f(2x)=4x^2+f(0) \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra: $f(x)=x^2+f(0)=x^2-2014$ với mọi $x\in\mathbb{R}..$

Bài 4: (Thanh Hóa 2017) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\big(f(x)+f(y)\big)=f(x^2)+2x^2f(y)+\big(f(y)\big)^2\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) lần lượt cho:

- $x=1, y=0 \to f\big(f(1)+f(0)\big)=f(1)+2f(0)+f^2(0).\ (2)$
- $x=0, y=1 \to f\big(f(0)+f(1)\big)=f(0)+f^2(1).\ (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $f(1)=-f(0)$ hoặc $f(1)=f(0)+1.$

- Nếu $f(1)=-f(0)$ ta có $f(0)=f(1)+2f(0)+f^2(0)\rightarrow f(0)=f(1)=0.$

Trong (1) cho $x=0$ có: $f(f(y))=f^2(y)\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Trong (1) cho $x=1$ có: $f(f(y))=2f(y)+f^2(y)\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Từ đó suy ra $f(y)=y\ \forall y\in\mathbb{R}.$

- Nếu $f(1)=f(0)+1$, trong (1) thay x bởi y , y bởi x được

$f(x^2)+2x^2f(y)+(f(y))^2=f(y^2)+2y^2f(x)+(f(x))^2\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (4)$

Trong (4) lần lượt cho $x=0, x=1$ ta được:

$f(0)+(f(y))^2=f(y^2)+2y^2f(0)+(f(0))^2\ \forall y\in\mathbb{R}$

$f(1)+2f(y)+(f(y))^2=f(y^2)+2y^2f(1)+(f(1))^2\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Từ hai phương trình trên kết hợp $f(1)=f(0)+1$ ta được $f(x)=x^2+f(0)\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Thử lại thấy $f(0)=0.$ Hàm $f(x)=x^2\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn. Vậy có hai hàm thỏa mãn $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=x^2\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 5: (Chuyên ĐH Vinh 2017) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn:

1. $f(1)>0$
2. $f(xy-1)+2f(x)f(y)=3xy-1\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$

Lời giải:

Trong (1) cho $y=1$ có: $f(-1)+2f(0)f(x)=-1\forall x\in\mathbb{R}.$ Từ đây suy ra $f(0)=0$ vì nếu ngược lại ta có $f(x)=c\ \forall x\in\mathbb{R}$ (c là hằng số), không thỏa mãn đề bài.

Trong (1) cho $x=1, y=1$ ta có $f(0)+2f^2(1)=2\rightarrow f(1)=1$ (do $f(1)>0$)

Trong (1) thay x bởi $x+1$, cho $y=1$ có $f(x)+2f(x+1)=3x+2\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (2)$

Trong (2) cho $x=-1\ \rightarrow f(-1)=-1.$

Trong (1) thay x bởi $-x-1$, cho $y=-1$ có $f(x)-2f(-x-1)=3x+2\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (3)$

Từ (2),(3) suy ra $f(x)=-f(-x)\forall x\in\mathbb{R}.$

Trong (1) cho $y=-1$ có $f(-x-1)+2f(-x)=-3x-1\rightarrow f(x+1)+2f(x)=3x+1\forall x\in\mathbb{R}.\ (4)$

Từ (3),(4) suy ra $f(x)=x\,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 6: (Chuyên Sư phạm HN 2018) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left((x-y)f(x)-f(y)\right)+(x+1)f(y-x)+x=0\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) cho $x=y=0$ ta có: $f^2(0)=f(0)\to\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\f(0)=1\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $f(0)=0$.

Trong (1) cho $x=0$ ta có: $f(y)=0\ \forall y\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $f(0)=1$.

Trong (1) cho $y=-2x$ ta có: $f(x)f(-x)=1-xf(-x)+x\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Trong (1) thay x bởi $-x$,thay y bởi $-2x$ ta có: $f(x)f(-x)=1+xf(x)-x\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (2)$

Từ đây suy ra $f(-x)=2-f(x)\ \ \forall x\neq 0$. Mà $f(0)=1\to f(-0)=2-f(0)$ nên $f(-x)=2-f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}.\ (3)$

Từ (2) và (3) được $\left(f(x)-1\right)\left(f(x)+x-1\right)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Gỉa sử tồn tại $a,b\neq 0$ thỏa $f(a)=1$ và $f(b)=1-b$. Mặt khác trong (1) cho $x=b, y=a-b$ có $f(a+b)=1-b\to\left[\begin{array}{l}1=1-b\\1-(a+b)=1-b\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}b=0\\a=0\end{array}\right.$, vô lý.

Do đó $f(x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=-x+1\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 7: (Bắc Ninh 2018) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$xf(x+xy)=xf(x)+f\left(x^2\right)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) cho $x=y=0$ ta có: $f(0)=0$

Trong (1) cho $x=y=-1$ ta có: $\left[\begin{array}{l}f(1)=1\\f(-1)=0\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $f(-1)=0$.

Trong (1) cho $y=-1$ ta có: $xf(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Kết hợp $f(0)=0$ được $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Trường hợp 2: $f(1)=1$.

Trong (1) cho $x=1, y=-1$ ta có: $f(-1)=-1$

Trong (1) cho $y=-1$ ta có: $f(x^2)=xf(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Kết hợp $f(0)=0$ được $f(x)=-f(-x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Trong (1) cho $x=1$ ta có: $f(y+1)=f(y)+1\ \forall y\in\mathbb{R}$.

Do $f(x^2)=xf(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. nên (1) trở thành

$$f(x+xy)=f(x)+f(x)f(y)=f(x)(f(y)+1)=f(x)f(y+1)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\to f(x)f(y)=f(xy)\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (2)$$

Suy ra $f(x+xy)=f(x)+f(xy)\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (3)$

Với $x\neq 0$ trong (3) thay y bởi $\frac{y}{x}$ được $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x\neq 0, y\in\mathbb{R}$.

Kết hợp $f(0)=0$ được $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (4)$

Từ (2) và (4) kết hợp $f(1)=1$ được $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy bài toán có 2 nghiệm hàm $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 8: (VMO 2002). Hãy tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(y-f(x))=f(x^{2002}-y)-2001.y.f(x), \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Lời giải:

Thế $y=f(x)$ vào (1) ta được

$$f(0)=f(x^{2002}-f(x))-202.(f(x))^2, \forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Lại thay $y=x^{2002}$ vào (1) thì

$$f(x^{2002}-f(x))=f(0)-2001.x^{2002}.f(x), \forall x\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Lấy (2) cộng với (3) ta được

$$f(x)(f(x)+x^{2002})=0, \forall x\in\mathbb{R}$$

Từ đây suy ra với mỗi giá trị $x\in\mathbb{R}$ thì ta có hoặc là $f(x)=0$ hoặc là $f(x)=-x^{2002}$. Ta sẽ chỉ ra rằng để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì bắt buộc phải có đồng nhất

$f(x)\equiv 0,\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)\equiv -x^{2002},\forall x\in\mathbb{R}$.

Thật vậy, vì $f(0)=0$ trong cả hai hàm số trên, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử tồn tại $a\neq 0$ sao cho $f(a)=0$ và tồn tại $b>0$ sao cho $f(b)=-b^{2002}$ (vì chỉ cần thay $x=0$ vào quan hệ (1) ta nhận được hàm f là hàm chẵn). Khi đó thế $x=a$ và $y=-b$ vào (1) ta được

$$f(-b)=f\left(a^{2002}+b\right)$$

Vậy ta nhận được dãy quan hệ sau

$$\begin{aligned} 0 &\neq -b^{2002}\\ &= f(b)\\ &= f(-b)\\ &= f\left(a^{2002}+b\right)\\ &= \left[\begin{array}{ll} 0 & (0\neq 0)\\ -\left(a^{2002}+b\right)^{2002} & \left(-\left(a^{2002}+b\right)^{2002}<-b^{2002}\right)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Bằng cách thử lại quan hệ hàm ban đầu ta kết luận chỉ có hàm số $f(x)\equiv 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 9: (Iran 1999, Trường hè toán học Mỹ 2002) Xác định các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4yf(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Lời giải:

Thế $y=x^2$ ta được

$$f\left(f(x)+x^2\right)=f(0)+4x^2f(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

Thế $y=-f(x)$ ta được

$$f(0)=f\left(f(x)+x^2\right)-4\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}$$

Cộng hai phương trình trên ta được

$$4f(x)\left(f(x)-x^2\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đây ta thấy với mỗi $x\in\mathbb{R}$ thì hoặc là $f(x)\equiv 0$ hoặc là $f(x)=x^2$. Ta chứng minh nếu f thỏa mãn yêu cầu bài toán thì f phải đồng nhất với hai hàm số trên. Nhận thấy $f(0)=0$, từ đó thay $x=0$ ta được $f(y)=f(-y),\forall y\in\mathbb{R}$, hay f là hàm chẵn. Giả sử tồn tại $a\neq 0,b\neq 0$ sao cho $f(a)=0, f(b)=-b^2$, khi đó thay $x=a,y=-b$ ta được

$$f(-b)=f\left(a^2+b\right)\to f(b)=f\left(a^2+b\right).$$

Từ đó ta có quan hệ sau

$$\begin{aligned}0 \neq -b^2 &= f(b) \\ &= f(-b) \\ &= f(a^2+b) \\ &= \left[\begin{array}{ll} 0 & (0\neq 0) \\ -(a^2+b)^2 & \left(-a(a^2+b)^2 < -b^2\right) \end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó xảy ra điều mâu thuẫn. Thử lại thấy hàm số $f(x) \equiv 0$, $f(x) = x^2$ thỏa mãn yêu cầu.

Nhận xét:

1. Rõ ràng bài toán **VMO 2002** có ý tưởng giống bài toán này.
2. Ngoài phép thế như trên thì bài toán này ta cũng có thể thực hiện những phép thế khác nhau như:

a. Thế $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - f(x)\right)$.

b. Thế $y = 0$ để $f(f(x)) = f(x^2)$, sau đó thế $y = x^2 - f(x)$.

c. Thế $y = x - f(x)$ và sau đó là $y = x^2 - x$.

Bài 10: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi x, y khác 0 và $x \neq y$ ta có

$$f(y) - f(x) = f(y).f\left(\frac{x}{x-y}\right).$$

Lời giải:

Đặt $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ta được: $g(y) - g(x) = g(y)g\left(1 - \frac{x}{y}\right)$ (1)

+ Cho $y = 1$: $g(1) - g(x) = g(1)g(1-x)$. Suy ra $g(1) - g\left(\frac{x}{y}\right) = g(1)g\left(1 - \frac{x}{y}\right)$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra $g(y) - g(x) = g(y).\dfrac{g(1) - g\left(\frac{x}{y}\right)}{g(1)} \Rightarrow g(y)g\left(\frac{x}{y}\right) = g(x).g(1)$ (3), với mọi $x, y \neq 0; x \neq y$.

+ Trong (3) thay x bởi $y - x$, ta được: $g(y)g\left(1 - \frac{x}{y}\right) = g(y-x).g(1)$ (4).

+ Từ (1), (4) suy ra $g(y) - g(x) = g(y-x).g(1)$. Từ đây suy ra $g(u+v) = g(u) + g(v).g(1)$ (5), với mọi $u, v \neq 0; u + v \neq 0$.

+ Từ (3) suy ra $g(xy)g(1) = g(x).g(y)$ với mọi $x, y \neq 0$ (6).

+ Hoán đổi vai trò của *u*,*v* trong (5) suy ra nếu $g(1) \neq 1$ thì $g(x) \equiv 0$ (mâu thuẫn). Do đó $g(1) = 1$ và ta được: $g(u+v) = g(u) + g(v); g(uv) = g(u).g(v)$ với mọi $u, v \neq 0$.

Theo kết quả cơ bản ta được $g(x)=x$. Vậy $f(x)=\dfrac{1}{x}$ là hàm duy nhất cần tìm.

4. Bài tập củng cố

Bài tập 1: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn: $f\left(f\left(x+y\right)\right)=x+f\left(y\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Lời giải:

Giả sử hàm số f thoả mãn đề bài. Trong (1) thay x bởi y và thay y bởi x ta được:

$$f\left(f\left(x+y\right)\right)=y+f\left(x\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x+f\left(y\right)=y+f\left(x\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (3)

Từ (3) cho $y=0$ ta được $f(x)=x+c,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left(c=f\left(0\right)\right)$

Thay (1) vào ta được $c=0$. Vậy hàm số cần tìm là: $f\left(x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Bài tập 2: Tìm tất cả các hàm số $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ thoả mãn:

$$f(x)f\left(y\right)=xf\left(\frac{y}{2}\right)+yf\left(\frac{x}{2}\right),\ \forall x,y\in\left(0,+\infty\right) \qquad (1)$$

Lời giải:

Giả sử f là hàm số thoả mãn yêu cầu của đề bài.

Trong (1) cho $x=y$, ta được: $f^2(x)=2xf\left(\dfrac{x}{2}\right),\ \forall x\in\left(0,+\infty\right)$

Suy ra: $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{f^2(x)}{2x},\ \forall x\in(0,+\infty)$.

Thay vào (1) ta có: $f\left(x\right)f\left(y\right)=x\dfrac{f^2\left(y\right)}{2y}+y\dfrac{f^2\left(x\right)}{2x},\ \forall x,y\in\left(0,+\infty\right)$

$\leftrightarrow\left[\dfrac{\sqrt{x}f\left(y\right)}{\sqrt{2y}}-\dfrac{\sqrt{y}f\left(x\right)}{\sqrt{2x}}\right]^2=0,\ \forall x,y\in\left(0,+\infty\right)\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x}f\left(y\right)}{\sqrt{2y}}=\dfrac{\sqrt{y}f\left(x\right)}{\sqrt{2x}},\ \forall x,y\in\left(0,+\infty\right)$

$\to\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\dfrac{f\left(y\right)}{y};\ \forall x,y\in\left(0,+\infty\right)\to\dfrac{f\left(x\right)}{x}=a\ \forall x\in\left(0,+\infty\right)$ (a là hằng số) thay $f\left(x\right)=ax,$ $\forall x\in\left(0,+\infty\right)$.

Thay vào (1), đồng nhất ta được: $a=0$ hoặc $a=1$.

Vậy có 2 hàm số thoả mãn đề bài: $f\left(x\right)=0,\ \forall x\in\left(0,+\infty\right)$ và $f\left(x\right)=x,\ \forall x\in\left(0,+\infty\right)$.

Bài tập 3: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(x+y\right)-f\left(x-y\right)=2y(x^2+y^2),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn:

Đặt $u=x+y,v=x-y$. Đáp số: $f\left(x\right)=x^3+c,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài tập 4: Tìm hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\left(x\right)+xf\left(-x\right)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}\left(1\right)$.

Lời giải:

Đặt $t=-x$, ta được: $f\left(-t\right)-tf\left(-t\right)=-t+1,\forall t\in\mathbb{R}\left(1\right)$. Ta có hệ:

$\begin{cases} f\left(x\right)+xf\left(-x\right)=x+1 \\ -xf\left(x\right)+f\left(-x\right)=-x+1 \end{cases}\to f\left(x\right)=1$. Thử lại hàm số cần tìm là: $f\left(x\right)=1$.

Bài tập 5: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ Thỏa mãn: $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x,\forall x\in\mathbb{R}^*\left(2\right)$.

Lời giải:

Đặt $x_1=\dfrac{x-1}{x},\left(2\right)\leftrightarrow f\left(x\right)+f\left(x_1\right)=1+x.$

Đặt $x_2=\dfrac{x_1-1}{x_1}=\dfrac{1}{x-1},\left(2\right)\leftrightarrow f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=1+x_1.$

Đặt $x_3=\dfrac{x_2-1}{x_2}=x,\left(2\right)\leftrightarrow f\left(x_2\right)+f\left(x\right)=1+x_2.$

Ta có hệ $\begin{cases} f\left(x_1\right)+f\left(x\right)=1+x \\ f\left(x_2\right)+f\left(x_1\right)=1+x_1 \\ f\left(x_3\right)+f\left(x_2\right)=1+x_2 \end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1+x-x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$. Thử lại thấy đúng. Vậy hàm số cần tìm có dạng: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$.

Bài tập 6: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $xf\left(x\right)+xf\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1,\forall x\neq-1\left(3\right)$.

Lời giải:

Đặt $x_1=\dfrac{x-1}{x+1},\left(3\right)\to xf\left(x\right)+2f\left(x_1\right)=1.$

Đặt $x_2=\dfrac{x_1-1}{x_1+1}=-\dfrac{1}{x},\left(3\right)\to x_1f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)=1.$

Đặt $x_3=\dfrac{x_2-1}{x_2+1}=\dfrac{x+1}{x-1},\left(3\right)\to x_2f\left(x_2\right)+2f\left(x_3\right)=1.$

Đặt $x_4=\dfrac{x_3-1}{x_3+1}=x,\left(3\right)\to x_3f\left(x_3\right)+2f\left(x\right)=1.$

Ta có hệ $\begin{cases} xf(x)+2f(x_1)=1 \\ x_1f(x_1)+2f(x_2)=1 \\ x_2f(x_2)+2f(x_3)=1 \\ x_3f(x_3)+2f(x)=1 \end{cases} \rightarrow f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}$. Thử lại thấy đúng.

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}$.

Bài tập 7: Tìm tất các các hàm số $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y, \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Hướng dẫn:

1. Thế $y\rightarrow\dfrac{\pi}{2}$
2. Thế $y\rightarrow y+\dfrac{\pi}{2}$
3. Thế $x\rightarrow 0$

Đáp số: $f(x)=a\cos x+b\sin x\,(a,b\in\mathbb{R}), \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài tập 8: Cho hàm số $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y), x,y\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Hướng dẫn:

1. Tính $f(0)$
2. Thế $y=-1$. Chứng minh f là hàm số
3. Thế $y=1\rightarrow f(2x+1)=2f(x)+1$
4. Tính $f(2(u+v+uv)+1)$ theo (3) và theo giả thiết để suy ra $f(2uv+u)=2f(uv)+f(u)$
5. Cho $v=-\dfrac{1}{2},\dfrac{y}{2}\rightarrow x$ và $u\rightarrow y, 2uv\rightarrow x$ để suy ra điều phải chứng minh

Bài tập 9: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f(x)=xf(1)x, \forall x\neq 0$$
$$f(x)+f(y)=1+f(x+y), \forall x,y\in\mathbb{R},(x,y)\neq(0,0); x+y\neq 0$$

Hướng dẫn:

1. Tính $f(0), f(-1)$

2. Tính $a+1$ với $a=f(1)=f\left(\frac{x+1}{x+1}\right)=f\left(x+1\frac{1}{x+1}\right)$ theo cả hai điều kiện.

Đáp số: $f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài tập 10: Tìm tất các các hàm số $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(z)+2f\left(\frac{1}{y}\right)=3x,\forall x\in\mathbb{R}^*$$

Hướng dẫn:

Thế $x\to\frac{1}{x}$

Đáp số: $f(x)=\frac{2}{x}-x,\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Bài tập 11: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

Hướng dẫn:

Thế $x\to\frac{x-1}{x},x\to\frac{-1}{x-1}$

Đáp số: $f(x)=x+\frac{1}{1-x}-\frac{x-1}{x},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

Bài tập 12: (Belarus 1995) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)$$

Lời giải:

Rõ ràng f khác hằng số.

$y=0$ vào điều kiện bài toán ta được
$f(f(x))=(1+f(0))f(x),\forall x\in\mathbb{R}$

Trong đẳng thức trên thay x bởi $x+y$ thì
$(1+f(0))f(x+y)=f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy,$

Đơn giản ta được

$f(0).f(x+y)=f(x)f(y)-xy$ (7)

Thay $y=1$ vào (7) thì

$f(0)(x+1)=f(x)f(1)-x$.

Lại thay $y=-1$ vào x bởi $x+1$ vào (7) ta có

$f(0).f(x)=f(x+1).f(-1)+x+1$.

Kết hợp hai đẳng thức trên ta được

$\left(f(0)\right)^2-f(1)f(-1)f(x)-=f\left(f(0)-f(-1)\right)x+f(0)$.

Nếu $\left(f(0)\right)^2-f(1)f(-1)=0$, thì thay $x=0$ vào phương trình cuối cùng ta được $f(0)=0$, nên theo (7) thì $f(x)f(y)=xy$. Khi đó $f(x)f(1)=x,\forall x\in\mathbb{R}$, điều này dẫn đến $\left(f(0)\right)^2-f(1)f(-1)=-1$, mâu thuẫn. Vậy $\left(f(0)\right)^2-f(1)f(-1)\neq 0$, suy ra $f(x)$ là một đa thức bậc nhất nên có dạng $f(x)=ax+b$. Thay vào quan hệ hàm ban đầu suy ra $a=1,b=0$. Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét: Nếu chịu khó tính ta sẽ tính được $f(0)=0$ bằng cách thế các biến x,y bởi hai số 0 và 1.

Bài tập 13: Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=xy(x^2-y^2)$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

i) Tính $f(0)$ và chứng minh f là hàm số lẻ.

ii) Tìm tất cả các hàm số f.

Lời giải:

i) Tính $f(0)$ và chứng minh f là hàm số lẻ.

Với $x=y=1$ thì $-2f(0)=0$ hay $f(0)=0$. (1)

$\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow -y\in\mathbb{R}$

Với $y=0$ thì $f(0)=f(-0)=0$ (do (1))

Với $\begin{cases}x=0\\y\neq 0\end{cases}$ thì $-yf(y)-yf(-y)=0$ hay $f(-y)=-f(y)$

Vậy f là hàm số lẻ.

ii) Tìm tất cả các hàm số f.

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}$ ta suy ra $\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}$

Khi đó $v\,f(u)-u\,f(v)=uv\dfrac{u^2-v^2}{4}$ (2)

Với $\begin{cases} u \neq 0 \\ v \neq 0 \end{cases}$

Từ (2) ta được $\dfrac{f(u)}{u} - \dfrac{f(v)}{v} = \dfrac{u^2 - v^2}{4}$ hay $\dfrac{f(u)}{u} - \dfrac{u^2}{4} = \dfrac{f(v)}{v} - \dfrac{v^2}{4}$.

Chọn $v = 1$, ta có $\dfrac{f(u)}{u} - \dfrac{u^2}{4} = f(1) - \dfrac{1}{4}$.

Đặt $a = f(1) - \dfrac{1}{4}$

Ta có $\dfrac{f(u)}{u} - \dfrac{u^2}{4} = a, \forall u \neq 0$. (3)

Suy ra $f(x) = \dfrac{x^3}{4} + ax, \forall x \neq 0$

Từ (1), (3) ta được $f(x) = \dfrac{x^3}{4} + ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại

Với $f(x) = \dfrac{x^3}{4} + ax$, ta có: $f(0) = 0$; $f(1) = \dfrac{1}{4} + a \leftrightarrow a = f(1) - \dfrac{1}{4}$

và $(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = xy(x^2 - y^2)$

Vậy $f(x) = \dfrac{x^3}{4} + ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 14: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$\frac{1}{3} f(xy) + \frac{1}{3} f(xz) - f(x) f(yz) \geq \frac{1}{9}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Cho $x = y = z = 0$ thì $\dfrac{1}{3} f(0) + \dfrac{1}{3} f(0) - f^2(0) \geq \dfrac{1}{9} \leftrightarrow \left(f(0) - \dfrac{1}{3} \right)^2 \leq 0 \leftrightarrow f(0) = \dfrac{1}{3}$

Cho $x = y = z = 1$ thì $\dfrac{1}{3} f(1) + \dfrac{1}{3} f(1) - f^2(1) \geq \dfrac{1}{9} \leftrightarrow \left(f(1) - \dfrac{1}{3} \right)^2 \leq 0 \leftrightarrow f(1) = \dfrac{1}{3}$

Cho $y = z = 0$ thì $\dfrac{2}{3} f(0) - f(x) f(0) \geq \dfrac{1}{9}$.

Do $f(0) = \dfrac{1}{3}$ nên $f(x) \leq \dfrac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Cho $y=z=1$, ta có $\frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}f(x)-f(x)f(1)\ge\frac{1}{9}$.

Do $f(1)=\frac{1}{3}$ nên $f(x)\ge\frac{1}{3},\forall x\in\mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $f(x)=\frac{1}{3},\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài tập 15: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x^2+y^2\right)=xf(x)+yf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}\quad (1).$$

Lời giải:

Cho $x=0$, từ (1) suy ra $f\left(y^2\right)=yf(y),\forall y\in\mathbb{R}$

Cho $y=0$, từ (1) suy ra $f\left(x^2\right)=xf(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó (1) trở thành:

$$f\left(x^2+y^2\right)=f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\to f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\ge 0\quad (*)$$

thay y bởi $-y$ từ (1) ta được:

$$f\left(x^2+y^2\right)=xf(x)-yf(-y)\to -yf(-y)=yf(y),\forall y\in\mathbb{R}\to f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

$-yf(-y)=yf(y),\forall y\in\mathbb{R}\to f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, chứng tỏ f là hàm số lẻ.

Do đó với mọi $x\ge 0, y\le 0$ ta có

$$f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)+f(-y)=f(x)-f(y)$$
$$\to f(x)=f(x-y)+f(y)$$
$$\to f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)$$
$$\to f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x\ge 0,\forall y\le 0\quad (**)$$

Với mọi $x\le 0, y\le 0$ ta có

$$f(x+y)=-f(-x-y)=-\left(f(-x)+f(-y)\right)=-\left(-f(x)-f(y)\right)=f(x)+f(y)\quad (***)$$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ và ta được $f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

tính $f\left((x+1)^2\right)$ theo hai cách. Ta có

$f\left((x+1)^2\right)=f\left(x^2+2x+1\right)$

$\leftrightarrow (x+1)f(x+1)=f\left(x^2\right)+f(2x)+f(1)$

$\leftrightarrow (x+1)\left(f(x)+f(1)\right)=xf(x)+2f(x)+f(1)$

$\leftrightarrow f(x)=xf(1),\forall x\in\mathbb{R}$

$\leftrightarrow f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{R},a\in\mathbb{R}$

Bài tập 16: (Đồng Nai 2015) Tìm tất cả các hàm $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$g\left[g(x)-x^2+yz\right]=g(x)\left[g(x)-2x^2+2yz\right]+z^2\left[y^2-g(y)\right]+y^2\left[z^2-g(z)\right]$$
$$-2x^2yz+x+g(y)g(z)+x^4,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Đặt $f(x)=g(x)-x^2$ ta được:

$f\left(f(x)+yz\right)=x+f(y)f(z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.\ (1)$

Trong (1) cho $x=y=0$ được: $f\left(f(0)\right)=f(0)f(z),\ \forall z\in\mathbb{R}.$ Từ đây ta có $f(0)=0$ vì nếu ngược lại $f(0)\neq 0$ thì f là hàm hằng không thỏa mãn.

Trong (1) cho $y=0$ ta được $f\left(f(x)\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.(2)$ Suy ra f là toàn ánh.

Trong (1) cho $x=0$ ta được $f(yz)=f(y)f(z),\ \forall y,z\in\mathbb{R}.(3)$

Từ (2) và (3) phương trình đã cho đươc viết lại $f\left(f(x)+yz\right)=f\left(f(x)\right)+f(yz),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.\ (4)$

Do f toàn ánh nên từ (4) suy ra $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

Vì f vừa cộng tính vừa nhân tính nên $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Thử lại (1) có $a=1\longrightarrow f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow g(x)=x^2+x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài tập 17: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+xy+f(y))=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Dễ thấy hàm f hằng không thỏa mãn. Ta xét f không hằng.

$f(x+xy+f(y))=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(y)+\frac{1}{2}\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$

Trong (1) cho $y=-1$ ta được: $f(f(-1))=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(f(-1)+\frac{1}{2}\right),\forall x\in\mathbb{R}\ (2)$

Rõ ràng nếu $f(-1)+\frac{1}{2}\neq 0$ thì f là hàm hằng. Do đó: $f(-1)+\frac{1}{2}=0\Rightarrow f(-1)=-\frac{1}{2}$

Ta sẽ chứng minh: $f\left(x\right)+\frac{1}{2}=0\leftrightarrow x=-1$.

Thật vậy, giả sử tồn tại $a\neq -1$ sao cho $f(a)=\frac{-1}{2}$.

Trong (1) chọn $y=a$ ta có: $f\left(ax+x-\frac{1}{2}\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mâu thuẫn vì f không là hàm hằng. Do đó ta có: $a=-1$.

Chú ý là $f\left(-1\right)=-\frac{1}{2}$ nên từ (2) ta có : $f\left(\frac{-1}{2}\right)=0$.

Trong (1) chọn $x=\dfrac{-\frac{1}{2}-f(y)}{1+y}$, $(y\neq -1)$ ta được:

$$f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}+\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}.y+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f\left(y\right)+\frac{1}{2}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f\left(y\right)+\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\forall y\neq -1$$

$$\rightarrow f\left(\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}\right)=-\frac{1}{2},\ \forall y\neq -1\leftrightarrow\frac{-\frac{1}{2}-f\left(y\right)}{1+y}=-1,\forall y\neq -1$$

Suy ra $f\left(y\right)=y+\frac{1}{2},\forall y\neq -1$

Do $f\left(-1\right)=-\frac{1}{2}$ nên $f\left(x\right)=x+\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

Thử lại ta có hàm số cần tìm là $f\left(x\right)=x+\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài tập 18: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2013xy\ \ (1).$$

Lời giải:

Thay $x=1, y=\frac{1}{2013}$ vào (1) ta được: $f(a)=1$

Trong đó $a=f\left(\frac{1}{2013}\right)+\frac{1}{2013}$

Tiếp tục thay $y=a$ vào (1), ta thu được:

$f(x+a)+f(xa+x)=f(x+a)+2013ax, \forall x\in\mathbb{R}.$

hay $f(ax+x)=2013ax, \forall x\in\mathbb{R}.$ (2)

Từ (2) suy ra $a\neq -1$. Thay $x=\frac{t}{a+1}$ vào (2), ta được

$f(t)=\frac{2013at}{a+1}, \forall t\in\mathbb{R}.$ hay $f(t)=ct, (c\in R)$

Tiếp theo, thay biểu thức của $f(t)$ vào (1), ta thu được đẳng thức

$c^2xy+cy+cxy+cx=cx+cy+2013xy; \forall x,y\in\mathbb{R}.$

$\leftrightarrow (c^2+c-2013)xy=0, \forall x,y\in R$

$$\leftrightarrow c^2+c-2013=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=\frac{-1-\sqrt{8053}}{2} \\ c=\frac{-1+\sqrt{8053}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy ta nhận được hai hàm số thoả mãn đề bài là $f(x)=\frac{-1+\sqrt{8053}}{2}x$ và $f(x)=\frac{-1-\sqrt{8053}}{2}x$

Bài tập 19: Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\left[xf(y)+2015x\right]=2015xy+f(x)$ với mọi *x, y*.

Lời giải:

Cho $x=1$ thì $f\left[f(y)+2015\right]=2015y+f(1)$

Chọn y thỏa mãn $2015y+f(1)=-2015$, và đặt $t=f(\text{y})+2015$ thì $f(\text{t})=-2015$.

Chọn $y=t$, và thay vào giả thiết thì: $f\left[xf(\text{t})+2015\text{x}\right]=2015xt+f(x)$

Hay: $f(0)=2015xt+f(x)\leftrightarrow f(x)=-2015tx+f(0), \ \forall x\in\mathbb{R}.$

Vậy $f(x)$ là hàm bậc nhất.

Giả sử $f(x)=mx+n$. Thay vào giả thiết ta có:

$m\left[xf(y)+2015x\right]+n=2015xy+mx+n \leftrightarrow mx(my+n)+2015mx+n=2015xy+mx+n$

$\leftrightarrow m^2xy+\left(mn+2015m\right)x=2015xy+mx$

Đẳng thức trên đúng với mọi x, y nên:

$$\begin{cases} m^2 = 2015 \\ mn + 2015m = m \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{2015} \\ n = -2014 \end{cases}$$

Vậy có 2 hàm thỏa mãn yêu cầu, là $f(x) = \pm\sqrt{2015}x - 2014$.

Bài tập 20: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left((x-y)^2\right) = x^2 - 2yf(x) + \left(f(y)\right)^2; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải:

Cho $x = y = 0 \to f(0) = \left(f(0)\right)^2 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$

+) Nếu $f(0) = 0$. Cho $y = 0, x \in \mathbb{R}$ ta được: $f\left(x^2\right) = x^2 \to f(t) = t, \forall t > 0$

Cho $x = y \in \mathbb{R}$ ta được $f(0) = x^2 - 2xf(x) + \left(f(x)\right)^2 \left(f(x) - x\right)^2 = 0 \leftrightarrow f(x) = x$. Thử lại thấy đúng

+) Nếu $f(0) = 1$ cho $y = 0, x \in \mathbb{R}$ ta được $f\left(x^2\right) = x^2 + 1 \to f(t) = t + 1, \forall t > 0$.

Cho $x = 0, y \in \mathbb{R}$ ta được

$$f\left(y^2\right) = -2y + \left(f\left(y^2\right)\right) \to \left(f(y)\right)^2 = f\left(y^2\right) + 2y = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(y) = y + 1 \\ f(y) = -y - 1 \end{array}\right.$$

Giả sử tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f\left(y_0\right) = -y_0 - 1$

Chọn $x = y = y_0$ ta được:

$$1 = y_0^2 - 2y_0 f\left(y_0\right) + \left(f\left(y_0\right)\right)^2 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(y_0\right) = y_0 + 1 \\ f\left(y_0\right) = -y_0 - 1 \end{array}\right.$$

Nếu $f\left(y_0\right) = -y_0 - 1 \to -y_0 - 1 = y_0 - 1 \to \begin{cases} y_0 = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$ (loại)

Nếu $f\left(y_0\right) = y_0 + 1 \to -y_0 - 1 = y_0 + 1 \to y_0 = -1 \to f(-1) = 0$

Vậy $f(y) = y + 1, \forall y \in \mathbb{R}$..

Bài tập 21: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn:

$$f(x + f(x) + 2y) = 2x + f(2f(y)),\ \forall x; y \in \mathbb{R}_+.$$

Lời giải:

Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Đặt $f(0) = a$ với $a \in \mathbb{R}_+$

Chọn $x = 0$; $y = x$, thay vào (14) ta được

$$f(f(0) + 2x) = f(2f(x))\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \leftrightarrow f(2x + a) = f(2f(x))\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

Nên $f(x + f(x) + 2y) = 2x + f(2y + a)$, $\forall x; y \in \mathbb{R}_+$ (i)

Thay $2y$ bởi y ta được

$f(x+f(x)+y)=2x+f(y+a)$, $\forall x;y\in\mathbb{R}_+$ (ii)

Với $x;y\geq a$ thỏa mãn $f(x)=f(y)=t$

Thay y bởi $y-a$ vào (ii) ta được: $f(x+t+y-a)=2x+t$, $\forall x;y\in\mathbb{R}_+$

Thay x bởi y, y bởi $x-a$ vào (ii) ta được: $f(y+t+x-a)=2y+t$, $\forall x;y\in\mathbb{R}_+$

Do đó $x=y$

Chọn $x=0; y=0$ thay vào (i) ta có: $f(a)=f(2a)$

Theo kết quả phần trên suy ra $a=2a$

Suy ra $a=0$

Chọn $x=0; y=x$, thay vào (i) ta được $f(2x)=f(2f(x))$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$

Suy ra: $2f(x)=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}_+ \longrightarrow f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$

Thử lại thấy hàm số vừa tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$ là hàm số cần tìm.

Bài tập 22: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2)=f(x+y).f(x-y)+y^2, \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Cho $x=y=0$ ta được $f(0)=[f(0)]^2 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(0)=1 \end{array}\right.$

Cho $x=y=2$ ta được $f(4)=f(4).f(0)+4\to f(0)\neq 1$

Vậy $f(0)=0$. Cho $x=y$ ta được $f(x^2)=f(2x).f(0)+x^2=x^2\to f(t)=t,\forall t\geq 0.$

Cho $x=0, y=t>0$, ta được $f(0)=f(t)f(-t)+t^2\leftrightarrow 0=tf(-t)+t^2\leftrightarrow f(-t)=-t,\forall t>0$

Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ thỏa mãn bài toán.

Bài tập 23: Tìm $f(x)$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0)=2013; \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2014 \\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \ (1) \end{cases}$$

Lời giải:

Trong (1) cho

$$x=0; y=\frac{-\pi}{2}\to f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0\leftrightarrow f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2014$$

Trong (1) cho

$$y=\frac{\pi}{2}\to f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0\leftrightarrow f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

Trong (1) cho

$$x=\frac{-\pi}{2}\to f\left(y-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{-\pi}{2}-y\right)=2f\left(\frac{-\pi}{2}\right)\cos y=-4028\cos y$$

Trong (1) cho $y=x\to f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=-4028\cos x.\ (2)$

Trong (1) cho $x=0\to f(y)+f(-y)=2f(0)\cos y=4026\cos y$

Trong (1) cho

$$y=x+\frac{\pi}{2}\to f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)=4026\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=4026\sin x.\ (3)$$

Trừ từng vế hai phương trình (2) và (3) được:

$$2f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-4028\cos x-4026\sin x\leftrightarrow f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-2014\cos x-2013\sin x$$

Trong (1) thay x bởi $x+\frac{\pi}{2}$ có:

$$f(x)=-2014\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2013\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2014\sin x-2013\cos x$$

Bài tập 24: Tìm các hàm số $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f(x)-f(y)=(y-x)f(xy) \text{ với mọi } x,y>1$$

Lời giải:

Với mọi $t>1$, thay $(x;y)=(t;2),(t;4)$ và $(2t;2)$ vào (1) ta được:

$$f(t)-f(2)=(2-t)f(2t)$$
$$f(t)-f(4)=(4-t)f(4t)$$
$$f(2t)-f(2)=(2-2t)f(4t)$$

$\rightarrow f(4)+(t-3)f(2)=t(2t-5)f(4t)$ (2), với mọi $t>1$.

Lấy $t=\frac{5}{2}\rightarrow f(4)=\frac{1}{2}f(2)$

Thay vào (2) ta được: $\left(t-\frac{5}{2}\right)f(2)=t(2t-5)f(4t)$

Do đó với mọi $t>1, t\neq\frac{5}{2}\rightarrow f(4t)=\frac{f(2)}{2t}$

Từ (1) ta có: $f(t)=f(4)+(4-t)f(4t)=\frac{2f(2)}{t}$ với $t>1, t\neq\frac{5}{2}$.

Với $t=\frac{5}{2}$, từ (1) thay $x=\frac{5}{2}, y=2$ ta có:

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=f(2)-\frac{1}{2}f(5)=\frac{4f(2)}{5}=\frac{2f(2)}{\frac{5}{2}}\longrightarrow f(t)=\frac{2f(2)}{t},\ \forall t>1.$$

Đặt $c=2f(2)\rightarrow f(x)=\frac{c}{x}$ với $x>1$.

Thử lại thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=\frac{c}{x}, \forall x>1$..

Bài tập 25: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x^2+y^2\right)=xf(x)+yf(y), \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (1).$$

Lời giải:

Cho $x=0$, từ (1) suy ra $f\left(y^2\right)=yf(y), \forall y\in\mathbb{R}$

Cho $y=0$, từ (1) suy ra $f\left(x^2\right)=xf(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó (1) trở thành:

$$f\left(x^2+y^2\right)=f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right), \forall x,y\in\mathbb{R}\rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\geq 0\quad (*)$$

thay y bởi $-y$ từ (1) ta được:

$$f\left(x^2+y^2\right)=xf(x)-yf(-y)\rightarrow -yf(-y)=yf(y), \forall y\in\mathbb{R}\rightarrow f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$$

$-yf(-y)=yf(y), \forall y\in\mathbb{R}\rightarrow f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$, chứng tỏ f là hàm số lẻ.

Do đó với mọi $x\geq 0, y\leq 0$ ta có

$$f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)+f(-y)=f(x)-f(y)$$
$$\to f(x)=f(x-y)+f(y)$$
$$\to f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)$$
$$\to f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x\ge 0, \forall y\le 0 \quad (**)$$

Với mọi $x\le 0, y\le 0$ ta có

$$f(x+y)=-f(-x-y)=-(f(-x)+f(-y))=-(-f(x)-f(y))=f(x)+f(y) \quad (***)$$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ và ta được $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x, y\in\mathbb{R}$.

tính $f\left((x+1)^2\right)$ theo hai cách. Ta có

$$f\left((x+1)^2\right)=f\left(x^2+2x+1\right)$$
$$\leftrightarrow (x+1)f(x+1)=f\left(x^2\right)+f(2x)+f(1)$$
$$\leftrightarrow (x+1)(f(x)+f(1))=xf(x)+2f(x)+f(1)$$
$$\leftrightarrow f(x)=xf(1), \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\leftrightarrow f(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$$

Bài tập 26: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall x, y\in\mathbb{R},\ f(x^{2015}+2014y)=f(2x+y)+f(3x+2013y)+x^{2015}-5x-2015.$$

Lời giải:

Đặt $f(x)-x=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ .Thay vào giả thiết ta có

$g(x^{2015}+2014y)=g(2x+y)+g(3x+2013y)+2015\ \forall x, y\in\mathbb{R}$ (1).

Thay $y=3x-x^{2015}$ vào (1) ta có $g(4x-x^{2015}), \forall x\in\mathbb{R}$ (2).

Xét hàm số $h(x)=3x-x^{2015}\ \forall x\in\mathbb{R}$ ta có $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$, suy ra tập giá trị của $h(x)$ là $\mathbb{R}$. Từ (2) suy ra $g(x)=-2015\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(x)=x-2015,\ \forall x\in\mathbb{R}$..

Thay vào thử lại ta thấy $f(x)=x-2015\ \forall x\in\mathbb{R}$. thỏa mãn.

Vậy $f(x)=x-2015\ \forall x\in\mathbb{R}$..

Bài tập 27: Xác định hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện:

1. $f(-x)=-f(x)$;

2. $f(x+1)=1+f(x), \forall x\in\mathbb{R}$

3. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x^2}, \forall x\ne 0$.

Lời giải:

Với mọi x ta có: $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1+\dfrac{f(x)}{x^2}$ $\quad(1)$

Mặt khác, với mọi x khác $0;-1$ ta có:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\right)=\frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}=f\left(\frac{x}{x+1}\right).\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 f\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left[1-\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\frac{(x+1)^2-f(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[(x+1)^2-1-f(x)\right]=\frac{1}{x^2}\left[x^2+2x-f(x)\right] \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $1+\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\left[x^2+2x-f(x)\right]\longrightarrow f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Từ (1) có $f(0)=-f(0)$ suy ra $f(0)=0$

Ta có $f(-1)=-f(1)=-\left[1+f(0)\right]=-1$. Vậy $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$..

Bài tập 28: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1).$$

Lời giải:

Trong (1) lấy $x=y=0$ được $f(0)=0$.

Trong (1) lấy $y=-1$ ta có

$xf(x)+f(x^2)f(-1)=xf(0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad(2)$

Trong (2) lấy $x=-1$ ta được:

$$f(1)f(-1)-f(-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(-1)=0\\ f(1)=1\end{array}\right.$$

+ Nếu $f(-1)=0$ thì từ (2) suy ra f đồng nhất 0 và hàm này thỏa mãn bài toán.

+ Nếu $f(1)=1$ thì trong (2) lại lấy $x=1$ ta thu được $f(-1)=-1$.

Từ đó (2) trở thành: $f(x^2)=xf(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad(3)$

Trong (1) ta cho $y=1$:

$xf(2x)=xf(x)+f(x^2)f(1),\ \forall x\in\mathbb{R}\leftrightarrow f(2x)=2f(x),\ \forall x\neq 0$

Kết hợp (1) và (3) ta được:

$f(x+xy)=f(x)+f(x)f(y),\ \forall y\in\mathbb{R},x\neq 0$ $\quad(4)$

Từ (4) lần lượt lấy $x=1,x=-1$ ta có:

$f(1+y)=1+f(y),\ \forall y\in\mathbb{R}$

$f(-1-y)=-1-f(y),\ \forall y\in\mathbb{R}$

Như vậy hàm f là một hàm số lẻ.
Trong (4) thay y bởi $-y$ và sử dụng tính lẻ của hàm f:

$$f(x-xy)=f(x)+f(x)f(-y)=f(x)-f(x)f(y),\ \forall y\in\mathbb{R},x\neq 0 \qquad (5)$$

Cộng vế theo vế (4) và (5) :

$$f(x+xy)+f(x-xy)=2f(x)=f(2x),\ \forall y\in\mathbb{R},x\neq 0$$

Mà $f(0)=0$ nên ta có $f(x+xy)+f(x-xy)=2f(x)=f(2x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Và bây giờ ta sẽ tính biểu thức $f\left((x+1)^2\right)$ theo hai cách:

$$f\left((x+1)^2\right)=f\left(x^2+2x+1\right)=f\left(x^2\right)+f(2x)+f(1)=xf(x)+2f(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$f\left((x+1)^2\right)=(x+1)f(x+1)=(x+1)\left(f(x)+1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Từ hai điều trên thu được:

$$xf(x)+2f(x)+1=(x+1)\left(f(x)+1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Thử lại thỏa. Kết luận của bài toán là: $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

II. Sử dụng tính chất ánh xạ để giải phương trình hàm

1. Nhắc lại một số khái niệm và tính chất của ánh xạ

1.1. Ánh xạ

Định nghĩa 1. Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử của Y. Phần tử này được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f và được ký hiệu là $f(x)$.

- Tập X gọi là tập xác định của f. Tập Y gọi là tập giá trị của f
- Ánh xạ từ X đến Y được ký hiệu

  $$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\mapsto y=f(x)\end{aligned}$$

- Khi X và Y là các tập số thực, ánh xạ f được gọi là một hàm số xác định trên X
- Cho $a\in X, y\in Y$. Nếu $f(a)=y$ thì ta nói y là ảnh của a và a là nghịch ảnh của y qua ánh xạ f.
- Tập hợp $Y=\left\{y\in Y \middle| \exists x\in X, y=f(x)\right\}$ gọi là tập ảnh của f. Nói cách khác, tập ảnh $f(X)$ là tập hợp tất cả các phần tử của Y mà có nghịch ảnh.

1.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Định nghĩa 2. Ánh xạ : $f: X\to Y$ được gọi là đơn ánh nếu với, $a\in X, b\in Y$ mà $a\neq b$ thì $f(a)\neq f(b)$, tức là hai phần tử phân biệt sẽ có hai ảnh phân biệt.

Từ định nghĩa ta suy ra ánh xạ f là đơn ánh khi và chỉ khi với , $a \in X, b \in Y$ mà $f(a) = f(b)$, ta phải có $a = b$.

Định nghĩa 3. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu với mỗi phần tử $y \in Y$ đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy f là toàn ánh nếu và chỉ nếu $Y = f(X)$.

Định nghĩa 4. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Như vậy ánh xạ $f : X \to Y$ là song ánh nếu và chỉ nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại và duy nhất một phần tử $x \in X$ để $y = f(x)$.

1.3. Ánh xạ ngược của một song ánh

Định nghĩa 4. Ánh xạ ngược của f , được kí hiệu bởi f^{-1}, là ánh xạ từ Y đến X gán cho mỗi phần tử $y \in Y$ phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy $f^{-1}(x) = y \leftrightarrow f(x) = y$

Chú ý. Nếu f không phải là song ánh thì ta không thể định nghĩa được ánh xạ ngược của f . Do đó chỉ nói đến ánh xạ ngược khi f là song ánh.

1.4. Ánh xạ hợp

Định nghĩa 5. Nếu $g : A \to B$ và $f : B \to C$ và $g(A) \subset B$ thì ánh xạ hợp $f \circ g : A \to C$ được xác định bởi $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

Kí hiệu $p^n = \underbrace{p \circ p \circ ... \circ p}_{n}$

Để có thể khai thác tính chất của ánh xạ cần nắm vững các khái niệm về đơn ánh, toàn ánh, song ánh.

2. Các ví dụ:

2.1. Sử dụng tính đơn ánh giải phương trình hàm

- Trong phương trình một vế có chứa $f(x)$, vế còn lại chứa biến x bên ngoài thông thường f là đơn ánh.
- Nếu trong phương trình chứa $f(f(x) + \varphi(x; y))$ hoặc $f(f(y) + \varphi(x; y))$, trong đó $\varphi(x; y)$ là một biểu thức đối xứng của x và y thì ta thường chứng minh f là đơn ánh.
- f đơn ánh trên D và $a, b \in D$ sao cho $f(a) = f(b)$ thì $a = b$.
- Nếu hàm f đơn điệu thực sự trên D thì f đơn ánh trên D.

Ví dụ 1: Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn: $f(f(x) + 2y) = 4x + 4y + 3, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Nhận xét $f(x)$ là đơn ánh.

Thật vậy, giả sử $f(x_1) = f(x_2)$ thì: $f(f(x_1) + 2y) = f(f(x_2) + 2y)$

$\to 4x_1 + 4y + 3 = 4x_2 + 4y + 3 \leftrightarrow x_1 = x_2$. Vậy f là đơn ánh.

Ta có: $f(f(x) + 2y) = 4x + 4y + 3 = f(f(y) + 2x)$.

Vì f là đơn ánh nên: $f(x)+2x=f(y)+2x$ hay $f(x)-2x=f(y)-2y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Do đó: $f(x)-2x=c$, $c\in\mathbb{R}$. Thay $f(x)=2x+c$ vào điều kiện ta có $c=1$.

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=2x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(3x+4f\left(y\right)\right)=\frac{2y}{9xy+8},\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+ \qquad (1)$$

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Giả sử: $f\left(x\right)=f\left(y\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+$, khi đó:

$$\frac{2y}{9xy+8}=f\left(3x+4f\left(y\right)\right)=f\left(3x+4f\left(x\right)\right)=\frac{2x}{9x^2+8}$$

Vậy f là đơn ánh. $\forall x,y\in\left(5a,+\infty\right)$

Với $a>0$ xét $\frac{2y}{9xy+8}=a\leftrightarrow x=\frac{2y-8a}{9ay}$. Do đó, từ (1) suy ra:

$$f\left(\frac{2y-8a}{3ay}+4f\left(y\right)\right)=a=f\left(\frac{2x-8a}{3ax}+4f\left(x\right)\right),\ \forall x,y\in\left(5a,+\infty\right) \qquad (2)$$

Do f đơn ánh nên từ (2) ta có: $\frac{2y-8a}{3ay}+4f\left(y\right)=\frac{2x-8a}{3ax}+4f\left(x\right)$,

$$\leftrightarrow f\left(x\right)-\frac{2}{3x}=f\left(y\right)-\frac{2}{3y},\ \forall x,y\in\left(5a,+\infty\right)$$

$$\to f\left(x\right)=\frac{2}{3x}+c,\ \forall x,y\in\left(5a,+\infty\right)\ (c \text{ là hằng số}) \qquad (3)$$

Với $\forall x>0$, luôn tồn tại $a>0$ sao cho $x>5a$ theo (3) ta có: $f\left(x\right)=\frac{2}{3x}+c$.

Vậy $f\left(x\right)=\frac{2}{3x}+c;\ \forall x\in(0,+\infty)$. Thử lại vào (1) dễ dàng suy ra: $c=0$ hoặc $c=-\frac{265}{204}$.

Dễ thấy: $f\left(x\right)=\frac{2}{3x}$ thoả mãn yêu cầu đề bài. Còn $f\left(x\right)=\frac{2}{3x}-\frac{265}{204}$ không thể lớn hơn 0 với mọi $x>0$.

Vậy có duy nhất 1 hàm số cần tìm $f\left(x\right)=\frac{2}{3x},\forall x>0$.

Ví dụ 3: (Sóc Trăng 2018) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(2x+2y+f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+8x\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Ta chứng minh f là đơn ánh. Từ (1) hoán vị x,y được

$f\left(2x+2y+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+8y\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (2)$

Gỉa sử tồn tại $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$. Khi đó từ (1) và (2) được $8x_1=8x_2\to x_1=x_2$ nên f đơn ánh. Trong (2) cho $y=0$ được $f\left(2x+f\left(0\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vì f đơn ánh nên $f\left(x\right)=2x+f\left(0\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f\left(x\right)=2x+a\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Ví dụ 4: (Italy TST 2007) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(xy+f\left(x\right)\right)=xf\left(y\right)+f\left(x\right)\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Nhận thấy $f\equiv 0$ là một nghiệm hàm. Xét $f\not\equiv 0$. Ta chứng minh f là "tựa đơn ánh", tức là nếu tồn tại a,b thỏa $f\left(a\right)=f\left(b\right)\neq 0$ thì $a=b.$ Trong (1) lần lượt cho $x=a,y=b;x=b,y=a$ được:

$$f\left(ab+f\left(a\right)\right)=af\left(b\right)+f\left(a\right)$$
$$f\left(ab+f\left(b\right)\right)=bf\left(a\right)+f\left(b\right)$$

Từ 2 điều trên, do $f\left(a\right)=f\left(b\right)\neq 0$ suy ra $a=b\longrightarrow f$ "tựa đơn ánh".

Trong (1) cho $x=y=0$ được: $f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(0\right)\longrightarrow f\left(0\right)=0$ (vì nếu ngược lại, $f\left(0\right)\neq 0$ do f "tựa đơn ánh" nên $f\left(0\right)\neq 0$, mâu thuẫn).

Trong (1) cho $y=0$ có: $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (2)$. Do f "tựa đơn ánh" nên từ (2) suy ra $f\left(x\right)\in\left\{0;x\right\},\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (3)$

Dễ thấy các hàm: $f\left(x\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn (1). Ta sẽ chứng minh ngoài 2 hàm này không còn hàm nào khác. Gỉa sử tồn tại hàm f thỏa (1) và

$$\exists a:f\left(a\right)\neq 0,\exists b:f\left(b\right)\neq b\xrightarrow{(3)}\begin{cases}f\left(a\right)=a\\ f\left(b\right)=0\end{cases}$$

Trong (1) cho $x=a,y=b$ được: $f\left(ab+a\right)=f\left(a\right)$. Vì $f\left(a\right)\neq 0$ và f "tựa đơn ánh" nên $ab+a=a\to ab=0$, mâu thuẫn. Vậy có 2 hàm thỏa mãn bài toán là $f\left(x\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

2.2. Sử dụng tính toàn ánh giải phương trình hàm

- Nếu f là toàn ánh thì ta hay dùng tồn tại một số b sao cho $f\left(b\right)=0\ \left(f\left(b\right)=-1,f\left(b\right)=1,...\right)$ sau đó tìm $b.$
- Nếu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là toàn ánh thì với mọi $y\in\mathbb{R}$ luôn tồn tại $x\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(x\right)=y.$
- Khi giải phương trình hàm dựa vào giá trị của đối số và giá trị của hàm số ta cũng có thể vận dụng tính toàn ánh của f.
- Mọi đa thức bậc lẻ có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Tức là các hàm đa thức bậc lẻ đều là toàn ánh trên $\mathbb{R}$. Do đó ta thường biến đổi để xuất hiện một đa thức bậc lẻ để có thể sử dụng tính toàn ánh.
- Đối với phương trình hàm có chứa $f\left(x\pm f\left(y\right)\right),f\left(x\right),f\left(y\right),...$ thì thường lấy $x=0$ và thường thay x bởi $\pm f\left(x\right),\pm f\left(y\right),...$

Ví dụ 1: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=x+f(y)+xf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa yêu cầu bài ra.

Ta có thể viết lại quan hệ hàm dưới dạng :

$$f(x+f(y))=x(f(y)+1)+f(y)\ \ (2)$$

Trường hợp 1: $f(y)=-1,\forall y\in\mathbb{R}$, thử lại thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $f(y)$ không đồng nhất với -1, khi đó vế phải của (2) là hàm số bậc nhất theo x nên tập giải trị của $f(x+f(y))$ là $\mathbb{R}$. Suy ra f là toàn ánh.

Thay x bởi 0 vào (1) ta được: $f(f(y))=f(y)$ (3)

Vì f là toàn ánh nên $\forall x\in R,\exists y\in\mathbb{R}$ thỏa $f(y)=x$ nên từ (3) ta được, thử lại ta thấy $f(x)=x$ không thỏa mãn. Vậy $f(x)=-1$là hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét:

Trong các bài toán này từ điều kiện

$f(f(y))=f(y)$ giúp ta tìm ra nghiệm của bài toán nhưng với điều kiện f phải là toán ánh.

Như vậy, tính toán ánh của f trong bài toán này tỏ ra khá hiệu quả giúp bài toán trở nên dễ dàng hơn trong quá trình tìm bời giải.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x^3+y+f(y)\right)=2y+x^2f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Lời giải:

Cho $x=1$ ta có $f\left(1+y+f(y)\right)=2y+f(1),\ \forall y\in\mathbb{R}\longrightarrow f$ là toàn ánh. Đặt $f(0)=a$. Trong (1) cho $x=y=0$ được $f(a)=0$. Trong (1) cho $x=0,y=a$ được $f(a)=2a$. Do đó $a=0\longrightarrow f(0)=0.$

Trong (1) cho $x=0$ được $f\left(y+f(y)\right)=2y,\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Trong (1) cho $y=0$ được $f\left(x^3\right)=x^2f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Từ đó ta viết (1) dưới dạng $f\left(x^3+y+f(y)\right)=f\left(y+f(y)\right)+f\left(x^3\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

Vì f toàn ánh nên từ đây có $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\longrightarrow f(nx)=nf(x),\forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z}.$

Lại có:

$$f\left((x+1)^3+(x-1)^3\right)=f\left(2x^2+6x\right)=2f\left(x^3\right)+6f(x)=2x^2f(x)+6f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.(2)$$

$$f\left((x+1)^3+(x-1)^3\right)=f\left((x+1)^3\right)+f\left((x-1)^3\right)=(x+1)^2 f\left((x+1)\right)+(x-1)^2 f\left((x-1)\right)$$
$$=\left(x^2+2x+1\right)\left(f(x)+f(1)\right)+\left(x^2-2x+1\right)\left(f(x)-f(1)\right)$$
$$=\left(2x^2+2\right)f(x)+4xf(1),\ \forall x\in\mathbb{R}.(3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(x)=xf(1),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Thử lại thấy $f(1)=1\longrightarrow f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Ví dụ 3: (Chuyên KHTN 2018) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left((x-y)f(x)-f(y)\right)+(x+1)f(y-x)+x=0\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) cho $x=y$ ta có: $f\left(-f(x)\right)=-\left(f(0)+1\right)x-f(0)\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (2)$

Trường hợp 1: $f(0)=-1$

Trong (2) cho $x=0$ ta có: $f\left(-f(0)\right)=-f(0)=1\to f(1)=1$

Từ đó trong (1) cho $x=y=1$ ta có: $f(-1)=1$, cho $x=-1,y=0$ được $f(0)=1$, mâu thuẫn.

Trường hợp 2: $f(0)\neq-1$. Từ (2) suy ra f là toàn ánh trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $c\in\mathbb{R}$ sao cho $f(c)=0$.

Trong (1) cho $x=0,y=c$ ta có: $f\left(cf(0)\right)=0$

Trong (1) cho $x=y=c$ ta có: $f(0)+(c+1)f(0)+c=0$

Trong (1) cho $x=y=-cf(0)$ ta có: $f(0)+\left(-cf(0)+1\right)f(0)-cf(0)=0$

Từ đó $\left(f(0)+1\right)^2c=0\to c=0$ hay $f(0)=0$. Do đó từ (2) suy ra $f\left(-f(x)\right)=-x\,\forall x\in\mathbb{R}.\ (3)$

Trong (1) cho $x=0$ ta có: $f\left(-f(y)\right)=-f(y)\ \forall y\in\mathbb{R}\to f\left(-f(x)\right)=-f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Thử lại thấy thỏa mãn.

Ví dụ 4: (Shortlist IMO 2012) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(f(x)+y\right)=2x+f\left(f(y)-x\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) thay y bởi $-f(x)$ ta có $f(0)=2x+f\left(f\left(-f(x)\right)-x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.\longrightarrow f$ là toàn ánh.

Suy ra $\exists a\in\mathbb{R}$ sao cho $f(a)=0$.

Trong (1) thay $x=a$ được $f(y)=2a+f\left(f(y)-a\right)\leftrightarrow f\left(f(y)-a\right)=f(y)-a-a.\ (2)$

Do f toàn ánh nên với mỗi $x \in \mathbb{R}$ đều tồn tại $y \in \mathbb{R}$ sao cho $x = f(y) - a$. Từ (2) suy ra $f(x) = x - a,\ \forall x \in \mathbb{R}.$ Thử lại thấy thỏa mãn.

Ví dụ 5: Tìm tất cả $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa mãn

$$f(x - f(y)) = f(x) - 2xf(y) + f(f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải:

Xét $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ thỏa mãn.

Giả sử tồn tại a sao cho $f(a) \neq 0$

Thay y bởi a vào (1) ta có $2x.f(a) - f(f(a) = f(x) - f(x - f(a))$

Khi đó ta có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại a,b sao cho $x = f(a) - f(b)$

Do đó $f(x) - f(y)$ toàn ánh trên $\mathbb{R}$

Thay x bởi $f(y)$ vào (1) ta được $f(0) = 2f(f(y)) - 2f^2(y)$

Thay x bởi $f(x)$ vào (1) :

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - 2f(x).f(y) + f(f(y)) = f^2(x) - 2f(x).f(y) + f^2(y) + \frac{f(0)}{2}$$

$$= (f(x) - f(y))^2 + \frac{f(0)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = x^2 + b \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy $b = 0$

Vậy có 2 hàm thỏa mãn là $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

2.3. Sử dụng tính song ánh giải phương trình hàm

Khi f là một song ánh ta có thể chú ý đến tính chất đơn ánh và toán ánh mà ta đã vận dụng trong phần 1 và phần 2. Ngoài ra ta có thể chú ý thêm.

Nếu $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn: $f(f(x)) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}, (a \neq 0)$ thì f là song ánh.

f song ánh liên tục (đơn điệu) và cộng tính trên tập $\mathbb{R}$ khi đó $f(x) = ax$

(f song ánh và cộng tính trên tập rời rạc khi đó $f(x) = ax$ **)**

Ví dụ 1: (Olympic 30.4.2011)

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f((1 + f(x))f(y)) = y + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Lời giải:

Từ (1) cho $x=0$ ta được $f\left(\left(1+f(0)\right)f\left(y\right)\right)=y$, $\forall y\in\mathbb{R}$ (1)

Giả sử $f\left(y_1\right)=f\left(y_2\right)$, từ (2) dễ dàng suy ra $y_1=y_2$. Do vậy f là đơn ánh. Với $\forall y\in\mathbb{R}$ khi đó tồn tại $x=\left(1+f\left(0\right)\right)f\left(y\right)$ sao cho $f\left(x\right)=y,$ suy ra f là toàn ánh, dẫn tới f là song ánh.

Vì thế tồn tại $c\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(c\right)=0.$ Từ (1) cho $y=c$ được $f\left(c\right)=0.$

Từ (1) cho $x=y=0$ ta được $f\left((1+c)c\right)=0.$

Vậy $f\left((1+c)c\right)=f\left(c\right)$, mà f là đơn ánh nên: $(1+c)c=c\Leftrightarrow c=0\Rightarrow f\left(0\right)=0.$

Từ (1) cho $x=0$ ta được $f\left(f\left(y\right)\right)=y$, $\forall y\in\mathbb{R}$ (3)

Từ (1) thay x bởi $f\left(x\right)$, thay y bởi $f\left(y\right)$ và sử dụng (3) ta có:

$$f\left(y(1+x)\right)=f\left(y\right)+yf\left(x\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

Từ (4), cho $x=-1$, sử dụng $f\left(0\right)=0$ và đặt $a=-f\left(-1\right)$ ta được: $f\left(y\right)=ay$, $\forall y\in\mathbb{R}$

Thay vào (3) đồng nhất được $a\in\{-1:1\}$

Vậy: $f\left(x\right)\equiv x,\ f\left(x\right)\equiv -x.$ Thử lại ta thấy cả 2 hàm đều thoả mãn.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x^2+2f(y))=2y+f^2(x);\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

Lời giải:

Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x^2+2f(y))=2y+f^2(x);\forall x,y\in\mathbb{R} \ (1)$$

Trong (1), thay $x=0$ suy ra $f(2f(y))=2y+f^2(0)$ (2)

Suy ra f là song ánh

Cho $y=0$, thay vào (1) ta được $f(x^2+2f(0))=f^2(x);\forall x,y\in\mathbb{R}$ (3)

Thay x bởi $-x$ vào (3) ta được $f(x^2+2f(0))=f^2(-x)$

Suy ra $f^2(-x)=f^2(x);\forall x\in\mathbb{R}$

Nếu $f(x)=f(-x)\leftrightarrow x=-x\leftrightarrow x=0$

Do đó $f(-x)=-f(x),\forall x\neq 0$

Vì f là song ánh nên tồn tại duy nhất $b\in\mathbb{R}:f(b)=0.$

Nếu $b\neq 0$ thì $f\left(-b\right)=-f\left(b\right)=0$, hay $f\left(-b\right)=f\left(b\right)$ hay $-b=b$ ta được $b=0.$ Suy ra $f\left(0\right)=0$ hay $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ hay f là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$

$f(x)=0\leftrightarrow x=0$

Khi đó (2) thành $f\left(2f\left(y\right)\right)=2y,\;\; y\in\mathbb{R}$

(3) thành $f(x^2)=f^2(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, hay $f(x)\geq 0,\forall x\geq 0$

Khi đó (1) thành $f(x^2+2f(y))=f(2f(y))+f(x^2)$ (4)

Hay $f(x)+f(y)=f(x+y)\,\forall x\geq 0, y\in\mathbb{R}$

Mặt khác nếu $x\leq 0, y\in\mathbb{R}:\; f(x)+f(y)=-(f(-x)+f(-y))=-f(-x-y)=f(x+y)$

Hay $f(x)+f(y)=f(x+y)\;\forall x,y\in\mathbb{R}$

Với $x>y$ ta có: $f\left(x\right)=f\left(x-y+y\right)=f\left(x-y\right)+f\left(y\right)>f\left(y\right)$

hay f đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta đi chứng minh $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$

Thật vậy nếu $\exists x_o\in\mathbb{R}:\; f(x_o)>x_o$ hay $2f(x_o)>2x_o\rightarrow f(f(x_o))>f(2x_o)$

hay $2x_o>2f(x_o)\leftrightarrow x_o>f(x_o)$ (vô lý)

Tương tự nếu $\exists x_o\in\mathbb{R}:\; f(x_0)<x_o$, ta cũng dẫn tới vô lý.

hay $f(x)=x\;\;\forall x\in\mathbb{R}$

Thử lại ta thấy $f(x)=x\;\;\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình (1)

Vậy $f(x)=x\;\;\forall x\in\mathbb{R}$

Ví dụ 3: (VMO 2017) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(xf\left(y\right)-f\left(x\right)\right)=2f\left(x\right)+xy\;\forall x,y\in\mathbb{R}\;(1)$$

Lời giải:

Trong (1) cho $x=1$ đươc: $f\left(f\left(y\right)-f\left(1\right)\right)=2f\left(1\right)+y\;\forall y\in\mathbb{R}\;(2)$

Từ đây dễ thấy f là song ánh. Do đó tồn tại duy nhất số thực a để $f\left(a\right)=0$. Trong (1) cho $x=a$ được $f\left(af\left(y\right)\right)=ay\;\forall y\in\mathbb{R}.\;\;(3)$

Trong (3) cho $y=0$ được $f\left(af\left(0\right)\right)=0=f\left(a\right)$.Từ đó vì f đơn ánh nên $a=0$ hoặc $f\left(0\right)=1$.

Nếu $a=0\rightarrow f\left(0\right)=0$. Thay $y=0$ vào (1) được $f\left(-f\left(x\right)\right)=2f\left(x\right)$. Do f là toàn ánh nên $f\left(x\right)=-2x,\;\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy không thỏa mãn. Vậy $a\neq 0\rightarrow f\left(0\right)=1$.

Trong (1) thay $x=0$ ta được $f\left(-1\right)=2$. Thay $y=a$ vào (3) được $a^2=f\left(0\right)=1\rightarrow a=1\left(do\; f\left(-1\right)=2\right)$ tức $f\left(1\right)=0.$

Do $f(1)=1\xrightarrow{(2)} f\left(f(y)\right)=y\ \forall y\in\mathbb{R}.\ (2')$

Thay y bởi $f(y)$ vào (1) và sử dụng (2') được $f\left(xy-f(x)\right)=2f(x)+xf(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (4)$

Trong (4), xét $x\neq 0$ và thay $y=\dfrac{f(x)}{x}$ được

$1=2f(x)+xf\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)\longrightarrow f\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\dfrac{1-2f(x)}{x},\ \forall x\neq 0.$

Thay $y=\dfrac{f(x)}{x}$ vào (1) và sử dụng kết quả trên được $f\left(1-3f(x)\right)=3f(x),\ \forall x\neq 0.$

Do f là song ánh và $f(0)=1$ nên với $\forall x\neq 0$ thì $1-3f(x)$ có thể nhận mọi giá trị thực khác -2. Do đó từ kết quả trên suy ra $f(x)=-x+1,\ \forall x\neq -2.$

Nói riêng $f(3)=-2$. Thay $y=3$ vào (2') ta được $f(-2)=3$. Vậy $f(x)=-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Thử lại thỏa mãn.

3. Bài tập vận dụng

Bài 1: (Olympic 30.4.2006)

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(x+f(y)+xf(y)\right)=x+xy+y,\ \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Giả sử $f(y_1)=f(y_2)$

$\to f(x+f(y_1)+xf(y_1))=f\left(x+f(y_2)+xf(y_2)\right)$

$\to x+xy_1+y_1=x+xy_2+y_2\leftrightarrow y_1=y_2\longrightarrow f$ là đơn ánh.

Cho $x=0$, thay vào (1) ta có: $f(f(y))=y,\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Cho $y=0$, thay vào (1) ta có: $f\left(x+f(0)+xf(0)\right)=x=f\left(f(x)\right)\to x+f(0)+xf(0)=f(x).$

Đặt $f(0)=a,$ từ đó ta có: $f(x)=(a+1)x+a,\ \forall x\in\mathbb{R}\qquad(2)$

Thay (2) vào (1), dễ dàng suy ra $a=0$ hoặc $a=-2.$

Khi $a=0,\ f(x)=x.$

Khi $a=-2,\ \ f(x)=-x-2.$ Thử lại ta thấy thoả mãn.

Vậy có 2 hàm số toả mãn đề bài: $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=-x-2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Bài 2: Tìm tất cả các hàm số f xác định và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{1}{4}f(y)+2x\right)=4x+y+1,\forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Lời giải:

Thay $x=-\frac{1}{4}y$ vào (1) được: $f\left(\frac{1}{4}f(y)-\frac{1}{2}y\right)=1, \forall y\in\mathbb{R}.$ (2)

Trong (1) cho $x=y=0$ được $f\left(\frac{1}{4}f(0)\right)=1.$ Kết hợp (2) suy ra

$$f\left(\frac{1}{4}f(y)-\frac{1}{2}y\right)=f\left(\frac{1}{4}f(0)\right)\forall y\in\mathbb{R}.\ (3)$$

Do f đồng biến nên f là đơn ánh trên $\mathbb{R}$, từ (3) suy ra

$\frac{1}{4}f(y)-\frac{1}{2}y=\frac{1}{4}f(0), \forall y\in\mathbb{R}\longrightarrow f(x)=2x+a, \forall x\in\mathbb{R}.$

Thay vào (1) được $a=\frac{2}{3}\longrightarrow f(x)=2x+\frac{2}{3}, \forall x\in\mathbb{R}.$

Bài 3: (VMO 2016) Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

i) $f(1)=2016$

ii) $f(x+y+f(y))=f(x)+ay,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

Lời giải:

Với $a=0$ có thể tìm được 1 hàm thỏa mãn bài toán là $f(x)=2016.$ Do đó chỉ xét trường hợp $a\neq 0$ là đủ. Thay $x=-f(y)$ vào ii) ta được: $f(y)=f(-f(y))+ay,\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Từ đó dễ thấy f là đơn ánh.

Thay $y=0$ vào ii) được $f(x+f(0))=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow f(0)=0.$

Thay $y=-\frac{f(x)}{a}$ vào ii) và kết hợp tính đơn ánh của f được $-\frac{f(x)}{a}+f\left(-\frac{f(x)}{a}\right)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Thay y bởi $-\frac{f(y)}{a}$ vào ii) và sử dụng kết quả trên được $f(x-y)=f(x)-f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$ Suy ra f cộng tính. Từ đó dễ tính được $f(2016)=2016f(1)=2016^2.$

Do f cộng tính nên từ ii) rút ra $f(y)+f(f(y))=ay\quad \forall y\in\mathbb{R}.$ Cho $y=1\longrightarrow a=2016.2017.$

Thử lại với giá trị trên của a ta tìm được $f(x)=2016x$ thỏa mãn bài toán.

Vậy có 2 giá trị cần tìm của a là $a=0$ hoặc $a=2016.2017.$

Bài 4: (Bà Rịa – Vũng Tàu 2014) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xy+f(x))+f(x-yf(x))=2x\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) cho $y=0$ được $f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow f$ là đơn ánh.

Trong (1) lần lượt cho $y=-1, y=1$ được

$f\left(x+f\left(x\right)\right)+f\left(x-f\left(x\right)\right)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (2)$

$f\left(-x+f\left(x\right)\right)+f\left(x+f\left(x\right)\right)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $f\left(x-f\left(x\right)\right)=f\left(-x+f\left(x\right)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (4)$. Vì f đơn ánh nên từ $(4)\longrightarrow x-f\left(x\right)=-x+f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow f\left(x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 5: (Quãng Ninh 2018) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x^2-\left(f\left(y\right)\right)^2\right)=xf\left(x\right)+y^2\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Đặt $a=-f^2\left(0\right)$. Trong (1) cho:

- $x=y=0$ được $f\left(a\right)=0$
- $x=0, y=a$ được $f\left(0\right)=-a^2$

Do đó $a=-a^4\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-1\end{array}\right.$

Nếu $a=-1\to f\left(0\right)=-1$. Trong (1) cho $x=-1, y=0\to -1=-f\left(-1\right)\to 1=f\left(-1\right)=f\left(a\right)=0$, vô lý.

Suy ra $a=0\to f\left(0\right)=0$. Trong (1) cho $y=0\to f\left(x^2\right)=xf\left(x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Nếu $f\left(y\right)=0\xrightarrow{(1)}f\left(x^2\right)=xf\left(x\right)-y^2\to y=0.$

Trong (1) cho thay $x=0, y=x$ được $f\left(-f^2\left(x\right)\right)=-x^2\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (2)$

Trong (1) cho thay x bởi $-x$, $y=0$ được $f\left(x^2\right)=-xf\left(-x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $xf\left(x\right)=-xf\left(-x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}\to f\left(-x\right)=-f\left(x\right)\ \forall x\neq 0$.Kết hợp $f\left(0\right)=0\to f\left(-x\right)=-f\left(x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (3)$

Ta sẽ chứng minh f là toàn ánh trên $\mathbb{R}$. Từ (2) ta có với mỗi $y\le 0$ luôn tồn tại x sao cho $f\left(x\right)=y.$ Còn với $y>0$ theo (2), (3) thì tồn tại x sao cho $y=x^2=-f\left(-f^2\left(x\right)\right)=f\left(f^2\left(x\right)\right)$.

Vậy f là toàn ánh. Tiếp theo chứng minh $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Từ (1) sử dụng các kết quả trên ta có $f\left(x^2-f^2(y)\right)=f\left(x^2\right)+f\left(-f^2(y)\right)\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (4)$

Từ (4) do f toàn ánh nên $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x\geq 0,\forall y\leq 0.$

Kết hợp (3) suy ra $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x\leq 0,\forall y\geq 0.$

Mặt khác $f(x)=f(x+y-y)=f(x+y)+f(-y)=f(x+y)-f(y),\ \forall x\geq 0,\forall y\geq 0.$

Kết hợp (3) suy ra $f(x)=f(x+y)-f(y),\ \forall x\leq 0,\forall y\leq 0.$

Vậy $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (5)$

Sử dụng $f\left(x^2\right)=xf(x)\ \forall x\in\mathbb{R}.$ và (5) ta được:

$$f\left((x+1)^2\right)=(x+1)\left(f(x)+f(1)\right)$$
$$f\left((x+1)^2\right)=f\left(x^2+2x+1\right)=xf(x)+2f(x)+f(1)$$
$$\to f(x)=xf(1)=cx\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay vào (1) được $c=1\to f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Thử lại thỏa mãn

Bài 6: (Hà Nam 2018) Cho số thực a khác 0 và khác -1. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(f(x)+ay\right)=\left(a^2+a\right)x+f\left(f(y)-x\right)\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) thay y bởi $\dfrac{-f(x)}{a}$ ta có: $f\left(f\left(\dfrac{-f(x)}{a}\right)-x\right)=-\left(a^2+a\right)x+f(0)\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra f là toàn ánh trên $\mathbb{R}$.

Bây giờ giả sử tồn tại $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_1)=f(x_2)$, do f là toàn ánh nên tồn tại t sao cho $f(t)=x_1+x_2$. Khi đó, trong (1) cho $x=x_1,y=t$ có: $f\left(f(x_1)+at\right)=\left(a^2+a\right)x_1+f(x_2)$

Trong (1) cho $x=x_2,y=t$ có: $f\left(f(x_2)+at\right)=\left(a^2+a\right)x_2+f(x_1)$

Do đó $x_1=x_2$, tức f là đơn ánh trên $\mathbb{R}.$ Mặt khác trong (1) cho $x=0$ có: $f\left(ay+f(0)\right)=f(y)\ \forall y\in\mathbb{R}\to f(y)=y+f(0)\ \forall y\in\mathbb{R}.$ Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 7: (Bà Rịa – Vũng Tàu 2017) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x+yf(x)\right)=xf(y)+f(x)\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) cho $y=0$ có: $f(x)=xf(0)+f(x)\forall x\in\mathbb{R}\to f(0)=0.$

- Ta nhận thấy $f(x)\equiv 0$ là một nghiệm hàm.
- Xét $f(x)\not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $a\neq 0$ sao cho $f(a)\neq 0$

Trong (1) cho $x=a$ ta có $af(y)=0\to f(y)=0\ \forall y\in\mathbb{R}$ vô lý.Vậy $f(x)=0\leftrightarrow x=0.$

Trong (1) cho $x=-1, y=-1\to f(-1)=-1.$

Trong (1) cho $x=1, y=-1\to f(1-f(1))=f(1)-1.$

Trong (1) cho $x=1-f(1), y=1\to (f(1)-1)^2=0\to f(1)=1.$

Trong (1) cho $x=1\to f(y+1)=f(y)+1\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Trong (1) thay y bởi $y+1\to f(x+yf(x)+f(x))=xf(y)+f(x)+x=f(x+yf(x))+x\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

Mặt khác do $x+yf(x)$ toàn ánh nên thay $x+yf(x)$ bởi y được $f(y+f(x))=f(y)+x\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$ (2)

Trong (2) cho $y=0$ được $f(f(x))=x\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Trong (2) thay x bởi $f(x)$ được $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (3)

Trong (1) thay x bởi $f(x)$ và kết hợp (3) được $f(xy)=f(x)f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$ (4)

Từ (3), (4) ta có nghiệm hàm là $f(x)\equiv x$ hoặc $f(x)\equiv 0.$

Bài 8: (Chọn đổi tuyển Indonesia 2010)

Xác định tất cả các số thực a sao cho có một hàm số thoả mãn:

$$x+f(y)=af(y+f(x)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (1)$$

Lời giải:

Dễ thấy $a=0$ không thoả mãn. Giả sử: $a\neq 0.$

Thay $y=0$ vào (1) ta được: $f(f(x))=\dfrac{x+f(0)}{a};\ \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Từ (2) suy ra f là toàn ánh nên tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho f(α) = 0.

Khi đó từ (1) lấy $x=\alpha$ ta được: $\alpha+f(y)=af(y),\ \forall y\in\mathbb{R}$ hay: $\alpha=(a-1)f(y),\ \forall y\in\mathbb{R}$ (3)

Từ (3) thì sẽ xảy ra hoặc $a=1$ hoặc f là hàm hằng.

+) Nếu f là hàm hằng thì không thoả mãn (1).

+) Nếu $a=1$ chọn $f(x)=x$ thoả mãn (1).

Vậy $a=1$.

4. Bài tập củng cố

Bài tập 1: Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x+f\left(x\right)+2f\left(y\right)\right)=x+f\left(x\right)+y+f\left(y\right)\ \ (1) \text{ với } \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Giả sử tồn tại hàm $f\left(x\right)$ thỏa mãn.

Ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại y_1,y_2 thỏa mãn $f\left(y_1\right)=f\left(y_2\right)$. Cố định x, lần lượt cho $y=y_1,y=y_2$ từ (1) ta có:

$$f\left(x+f\left(x\right)+2f\left(y_1\right)\right)=f\left(x+f\left(x\right)+2f\left(y_1\right)\right)\leftrightarrow x+f\left(x\right)+y_1+f\left(y_1\right)=x+f\left(x\right)+y_2+f\left(y_2\right)$$

Suy ra $y_1=y_2$. Vậy f là đơn ánh.

Bài tập 2: (Thụy Sĩ 2010) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=2y+f\left(x-y\right)\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Lời giải:

Trong (1) cho $x=y$ được: $f\left(2f\left(x\right)\right)=2x+f\left(0\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Từ đây dễ dàng suy f đơn ánh.

Trong (1) cho $x=y=0$ được: $f\left(2f\left(0\right)\right)=f\left(0\right)\longrightarrow f\left(0\right)=0.$

Trong (1) cho $y=0$ được:

$$f\left(f\left(x\right)+f\left(0\right)\right)=f\left(x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow f\left(x\right)+f\left(0\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow f\left(x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài tập 3: (Tây Ban Nha 2012) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\left(x-2\right)f\left(y\right)+f\left(y+2f\left(x\right)\right)=f\left(x+yf\left(x\right)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Lời giải:

Nếu $f\left(0\right)=0$ trong (1) cho $x=0$ được $f\left(y\right)=0,\ \forall y\in\mathbb{R}.$

Nếu $f\left(0\right)\neq 0$. Ta chứng minh f đơn ánh. Thật vậy trong (1) cho $y=0$ được:

$\left(x-2\right)f\left(0\right)+f\left(2f\left(x\right)\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Từ đây dễ dàng suy ra f đơn ánh.

Trong (1) cho $x=2,y=1$ được: $f\left(1+2f\left(2\right)\right)=f\left(2+f\left(2\right)\right)\longrightarrow 1+2f\left(2\right)=2+f\left(2\right)\longrightarrow f\left(2\right)=1$

Do f đơn ánh nên $f\left(x\right)\neq 1,\ \forall x\neq 2.$

Trong (1) thay $y=\dfrac{2f(x)-x}{f(x)-1}$ ta có:

$$(x-2)f\left(\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}\right)+f\left(\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}+2f(x)\right)=f\left(x+\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}f(x)\right),\ \forall x\neq 2$$

$$\leftrightarrow (x-2)f\left(\frac{2f(x)-x}{f(x)-1}\right)=0,\ \forall x\neq 2$$

$$\leftrightarrow f(a)=0, a=\frac{2f(x)-x}{f(x)-1},\ \forall x\neq 2$$

Trong (1) thay $x=a, y=2$ ta có:

$$(a-2)f(2)+f(2+2f(a))=f(a+2f(a))=0\leftrightarrow a=f(2)=1$$

$$\longrightarrow \frac{2f(x)-x}{f(x)-1}=1,\ \forall x\neq 2 \longrightarrow f(x)=x-1,\ \forall x\neq 1.$$

Ta thấy với $x=2$ cũng thỏa mãn hàm trên. Vậy bài toán có 2 nghiệm hàm $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Bài tập 4: (Thổ Nhĩ Kỳ 2012) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

i) $f\left(f(x^2)+y+f(y)\right)=x^2+2f(y).$

ii) $x\le y$ thì $f(x)\le f(y).$

Lời giải:

- Ta chứng minh f đơn ánh.

Cho $y=0$ thay vào i) được

$$f\left(f(x^2)+f(0)\right)=x^2+2f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow f\left(f(x)+f(0)\right)=x+2f(0),\ \forall x\ge 0.\ (1)$$

Do đó f đơn ánh trên $[0;+\infty)$

Giả sử tồn tại y_1, y_2 thỏa mãn $f(y_1)=f(y_2)\xrightarrow{i)} f\left(f(x^2)+y_1+f(y_1)\right)=f\left(f(x^2)+y_2+f(y_2)\right)$. Vì f không bị chặn nên cho x đủ lớn thì $f(x^2)+y_1+f(y_1), f(x^2)+y_2+f(y_2)$ đều dương nên từ (1) kết hợp f đơn ánh trên $[0;+\infty)$ ta có $y_1=y_2\longrightarrow f$ đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

- Ta chứng minh $f(0)=0.$

+ Nếu $f(0)\le 0$ cho $x=-2f(0)$ thay vào (1) được $f\left(f(-2f(0))+f(0)\right)=0$ hay tồn tại $c\in\mathbb{R}$ thỏa $f(c)=0.$

Cho $x=0, y=c$ thay vào i) được $f\left(f(0)+c\right)=0.$ Vì f đơn ánh nên $f(0)+c=c\to f(0)=0.$

Nếu $f(x) \ge 0$ cho $x = y = 0$ thay vào i) được $f(2f(0)) = 2f(0)$.

Trong (1) cho $x = x_0 = 3f(0) = f(0) + f(2f(0))$ có:

$f(x_0) = f(f(0) + f(2f(0))) = 2f(0) + 2f(0) = 4f(0)$.

Ta có $f(f(x_0) + f(0)) = f(5f(0)) = 3f(0) + 2f(0) = 5f(0)$. (2)

Cho $x = 0, y = 2f(0)$ thay vào (1) được $f(5f(0)) = 4f(0)$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $f(0) = 0$.

- Khi đó (1) viết lại $f(f(x)) = x, \forall x \ge 0$. (2)

Thay $x = 0$ vào i) ta được $f(y + f(y)) = 2f(y), \forall y \in \mathbb{R}$.

Cho $y = f(x)$ ta được $f(f(x) + x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ (2) và (3) suy ra $f(x) = x, \forall x \ge 0$. (3)

- Với mỗi $y_0 \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại x_0 sao cho $x_0^2 + y_0 + f(y_0) > 0$. Do đó từ i) và (3) ta có

$f(x_0^2 + y_0 + f(y_0)) = x_0^2 + y_0 + f(y_0) = x_0^2 + 2f(y_0) \longrightarrow f(y_0) = y_0 \longrightarrow f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài tập 5: (Olympic Duyên hải Bắc bộ 2016) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải:

Cho $x = 0$ vào (1) ta có $f(0) = f(yf(0)), \forall y \in \mathbb{R}$, suy ra $f(0) = 0$ vì nếu ngược

lại cho $y = \dfrac{t}{f(0)}$ thì $f(0) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$ ta thu được f là hàm hằng, thay vào (1) thấy vô lý.

Cho $y = 0$ và $y = -x$ vào (1) thì có $f(xf(x)) = x^2$ và

$0 = f(xf(x-x)) = f(-xf(x)) + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \to -x^2 = f(-xf(x))$.

Nếu tồn tại $t_0 \ne 0$ sao cho $f(t_0) = 0$ thì $0 = f(t_0 f(t_0)) = (t_0)^2$ vô lý.

Chứng minh hàm số cần tìm là đơn ánh.

Giả sử $f(x) = f(y)$ ta có:

$$x^2 = f\left(xf\left(x\right)\right) = f\left(xf\left(y\right)\right) = f\left(\left(y-x\right)f\left(x\right)\right) + x^2 \to f\left(\left(y-x\right)f\left(x\right)\right) = 0$$

$$\to \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=0 \\ x-y=0 \end{array}\right. \to x=y$$

Ta chứng minh $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta xét $x \neq 0$ vì nếu $x=0$ là hiển nhiên.

Giả sử $f\left(x\right) > 0 \longrightarrow \exists z > 0$ sao cho $f\left(x\right) = z^2$. Vì f đơn ánh và

$$f\left(zf\left(z\right)\right) = z^2 \text{ nên } x = zf\left(z\right) \text{ do đó}$$

$$f\left(-x\right) = f\left(-zf\left(z\right)\right) = -z^2 = -f\left(x\right).$$

Trong trường hợp $f\left(x\right) < 0$ chứng minh tương tự.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} & f\left(yf\left(x\right)\right) = -x^2 + f\left(xf\left(x+y\right)\right) \\ & = -x^2 + \left(x+y\right)^2 - \left[\left(x+y\right)^2 + f\left(-xf\left(x+y\right)\right)\right] \\ & = y^2 + 2xy - f\left(\left(x+y\right)f\left(y\right)\right) \\ & = 2xy + \left[\left(-y\right)^2 + f\left(\left(x+y\right)f\left(-y\right)\right)\right] = 2xy + f\left(-yf\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

Suy ra $f\left(yf\left(x\right)\right) = xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Tương tự $f\left(xf\left(y\right)\right) = xy$ vì thế $xf\left(y\right) = yf\left(x\right) \to f\left(x\right) = cx,\ \forall x \in \mathbb{R}$ thay vào (1) suy ra $c \in \{-1;1\}$.

Thử lại hai hàm số $f\left(x\right) = \pm x$ thỏa mãn yêu cầu.

Bài tập 6: (Argentia TST 2008) Tìm tất cả các hàm $f:\left(0;+\infty\right) \to \left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn

$$x^2\left(f\left(x\right) + f\left(y\right)\right) = \left(x+y\right)f\left(yf\left(x\right)\right),\ \forall x, y > 0.\ (1)$$

Lời giải:

Ta chứng minh f là đơn ánh. Gỉa sử tồn tại $x_1, x_2 > 0$ thỏa mãn $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) > 0$.

Lần lượt cho $x = x_1, x = x_2$ thay vào (1) ta được:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^2\left(f\left(x_1\right) + f\left(y\right)\right) = \left(x_1+y\right)f\left(yf\left(x_1\right)\right) \\ x_2^2\left(f\left(x_2\right) + f\left(y\right)\right) = \left(x_2+y\right)f\left(yf\left(x_2\right)\right) \end{array}\right. \to x_1^2\left(x_2+y\right) = x_2^2\left(x_1+y\right)$$

$$\leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)\left(x_1x_2 + y\left(x_1+x_2\right)\right) = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2$$

Vậy f đơn ánh trên $\left(0;+\infty\right)$. Cho $x=y$ thay vào (1) có:

$$2x^2f\left(x\right) = 2xf\left(xf\left(x\right)\right) \to xf\left(x\right) = f\left(xf\left(x\right)\right), \forall x > 0\ (2)$$

Trong (2) cho $x=1$ ta thu được $f(1)=f(f(1))\to f(1)=1$.

Trong (1) cho $x=1$ ta thu được $1+f(y)=(y+1)f(y)\to f(y)=\dfrac{1}{y},\ \forall y>0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài tập 7: Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn :

$$xf(x^2)f(f(y))+f(yf(x))=f(xy)\left(f(f(x^2))+f(f(y^2))\right),\ \text{với mọi } x,y\in(0;+\infty).$$

Lời giải:

Thay $(x;y)=(1;1)$ ta được:

$f(1)f(f(1))+f(f(1))=f(1)\left(f(f(1))+f(f(1))\right)\to f(f(1))=f(1)f(f(1))$

Vì $f(f(1))\in(0;+\infty)$ nên $f(1)=1$.

Thay $(x;y)=(1;x)$ và sử dụng $f(1)=1$. ta được: $f(f(x))=f(x)f(f(x^2)),\ \forall x>0.\ (2)$

Thay $(x;y)=(x;1)$ và sử dụng $f(1)=1$. ta được $xf(x^2)=f(x);x^2f(x^2)=xf(x),\ \forall x>0.\ (3)$

Từ (2) và (3) suy ra: $f(f(x^2))=\dfrac{f(f(x))}{f(x)}=f(f(x^2)),\ \forall x>0.\ (4)$

Ta chứng minh f là một đơn ánh, thật vậy giả sử $\alpha,\beta\in(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(\alpha)=f(\beta)$. Khi đó $f(f(\alpha^2))=\dfrac{f(f(\alpha))}{f(\alpha)}=\dfrac{f(f(\beta))}{f(\beta)}=f(f(\beta^2)),\ \forall x>0.\ (5)$

Trong (1) thay y bởi x ta được:

$$xf(x^2)f(f(x))+f(xf(x))=2f(x^2)f(f(x^2))=2\frac{f(x)}{x}f(x^2)=2\frac{f(f(x))}{x},\ \forall x>0$$

$$\to xf(x)f(f(x))+xf(xf(x))=2f(f(x)),\ \forall x>0.\ (6)$$

$$\to xf(xf(x))=f(f(x))(2-xf(x)),\ \forall x>0.\ (7)$$

Trong (6) thay x bởi x^2 ta được:

$$x^2f(x^2)f(f(x^2))+x^2f(x^2f(x^2))=2f(f(x^2)),\ \forall x>0\to x^2f(xf(x))=f(f(x^2))(2-xf(x)),\ \forall x>0.\ (8)$$

Từ (6) và (8) suy ra: $x=\dfrac{f(f(x^2))}{f(f(x))},\ \forall x>0.\ (9)$

Từ (5) và (8) suy ra $\alpha=\dfrac{f(f(\alpha^2))}{f(f(\alpha))}=\dfrac{f(f(\beta^2))}{f(f(\beta))}=\beta$. Do đó f là đơn ánh. Kết hợp (4) suy ra

$f\left(x^2\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2,\ \forall x>0 \to \dfrac{f\left(x\right)}{x}=\left[f\left(x\right)\right]^2,\ \forall x>0 \longrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{x},\ \forall x>0.$

Thử lại thấy $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x},\ \forall x>0$ thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Bài tập 8: Tìm hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn một trong hai điều kiện

i) $f\left(x^2+f\left(y\right)\right)=y+xf\left(x\right)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$,

ii) $f\left(\left(f\left(x\right)\right)^2+f\left(y\right)\right)=y+xf\left(x\right)\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

Hướng dẫn giải:

Ta tìm hàm f thỏa mãn ii) Đối với i) ta làm tương tự. Ngoài ra có thể thấy hai điều kiện này có thể biến đổi về nhau.

Ta cũng dễ thấy f là đơn ánh và $f\left(0\right)=0,\ f\left(f\left(y\right)\right)=y\ \ \forall y\in\mathbb{R}.$

Trong ii) thay x bởi $f\left(x\right)$ ta có

$$f\left(\left[f\left(f\left(x\right)\right)\right]^2+f\left(y\right)\right)=y+f\left(x\right)f\left(f\left(x\right)\right).$$

Mặt khác $f\left(f\left(y\right)\right)=y,\forall y\in\mathbb{R}$ nên $f\left(x^2+\left(y\right)\right)=y+xf\left(x\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$

Kết hợp ii) thì $f\left(x^2+f\left(y\right)\right)=f\left(\left(f\left(x\right)\right)^2+f\left(y\right)\right)$ mà f đơn ánh nên $x^2+f\left(y\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+f\left(y\right)$. Suy ra $\left(f\left(x\right)\right)^2=x^2,\forall x\in\mathbb{R}.$

Ta chỉ ra không tồn tại đồng thời $a\neq 0,b\neq 0$ thỏa mãn $f\left(a\right)=a,\ \ f\left(b\right)=-b$. Thật vậy, giả sử tồn tại a,b như trên. Trong ii) lấy $x=a,y=b$ ta có $f\left(a^2-b\right)=a^2+b.$

Do $\left(f\left(x\right)\right)^2=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\left(a^2-b\right)^2=\left(a^2+b\right)^2\to a^2b=0$, mâu thuẫn.

Vậy $f\left(x\right)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f\left(x\right)=-x\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$

Thử lại thấy hai hàm này thỏa mãn.

Bài tập 9: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x+y+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+2y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn:

Chứng minh f là đơn ánh

Thật vậy, với mọi x, y thỏa mãn $f\left(x\right)=f\left(y\right)$ ta có

$$\begin{cases} f\left(x+y+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+2y \\ f\left(x+y+f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+2x \end{cases} \to x=y$$

Chọn $y=0$ ta được $f\left(x+f\left(0\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right) \longrightarrow f\left(x\right)=x+f\left(0\right), \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy $f\left(x\right)=x+c, \forall x\in\mathbb{R}$ với c là hằng số.

Thay vào điều kiện bài toán ta được

$x+y+f\left(y\right)+c=f\left(x\right)+c+2y \leftrightarrow x+y+y+2c=x+2c+2y$ (luôn đúng).

Bài tập 10: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$f\left(f\left(x\right)+2y\right)=3x+f\left(f\left(f\left(y\right)\right)-x\right) \quad \forall x,y\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải:

Đặt $a=f\left(0\right)$. Trong (1), cho $y=\dfrac{-f\left(x\right)}{2}$ ta có $a=3x+f\left(f\left(f\left(\dfrac{-f\left(x\right)}{2}\right)\right)-x\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

suy ra f là toàn ánh.

Ta đi chứng minh f là đơn ánh. Thật vây giả sử $f\left(u\right)=f\left(v\right)$

Từ (1) lần lượt cho y bởi u,v ta có

$f\left(f\left(x\right)+2u\right)=3x+f\left(f\left(f\left(u\right)\right)-x\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

$f\left(f\left(x\right)+2v\right)=3x+f\left(f\left(f\left(v\right)\right)-x\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (3)

Lấy (2) trừ (3) ta có $f\left(f\left(x\right)+2u\right)=f\left(f\left(x\right)+2v\right) \ \forall x\in\mathbb{R}$. Do f là toàn ánh nên suy ra được

$f\left(x+2\left(u-v\right)\right)=f\left(x\right) \ \forall x\in\mathbb{R}$ (4).

Từ (4), sử dụng phương pháp quy nạp ta có $f\left(x+2n\left(u-v\right)\right)=f\left(x\right) \ \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}$. (5)

Từ (1), cho x bởi $x+2\left(u-v\right)$ ta thu được:

$f\left(f\left(x+2\left(u-v\right)\right)+2y\right)=3x+6\left(u-v\right)+f\left(f\left(f\left(y\right)\right)-x-2\left(u-v\right)\right) \ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$\to f\left(f\left(x\right)+2y\right)=3x+6\left(u-v\right)+f\left(f\left(f\left(y\right)\right)-x\right) \ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (6)

Từ (1) và (6) ta suy ra $u-v=0$. Vậy f đơn ánh.

Trong (1) cho $x=0$ ta có $f\left(z+2y\right)=f\left(f\left(f\left(y\right)\right)\right)\to f\left(f\left(y\right)\right)=2y+a \quad \forall y\in\mathbb{R}$

Từ đó (1) trở thành $f\left(f\left(x\right)+2y\right)=3x+f\left(y+a-x\right) \ \forall x,y\in\mathbb{R}$

Lại cho tiếp $y=0$ ta có :

$$f\left(f\left(x\right)\right)=3x+f\left(a-x\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\to 2x+a=3x+f\left(a-x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\to f\left(a-x\right)=a-x\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\to f\left(x\right)=x\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Thử lại ta có $f\left(x\right)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình (1).

Bài tập 11: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+y^2+z)=f(f(x))+yf(x)+f(z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}\ (1)$$

Lời giải:

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa đề bài ra.

- Nhận thấy $f(x)\equiv 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa (1)
- Giả sử $f(x)\neq 0$ tức tồn tại $\exists u\in\mathbb{R}$ sao cho $f(u)\neq 0$.

Kí hiệu $P\left(u,v\right)$ thay x bởi u,y bởi v vào (1). Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có:

$$p\left(u;\frac{x-f(f(u))-f(0)}{f(u)};0\right)\to f\left(u;\left(\frac{x-f(f(u))-f(0)}{f(u)}\right)^2\right)=x\longrightarrow f \text{ là toàn ánh.}$$

$$p(x;0;0)\to f(x)=f(f(x))+f(0)\to f(x)=x+f(0)$$

(Vì f là toàn ánh nên $f(f(x))=x$) (2)

Thay (2) vào (1) ta được:

$$x+y^2+z+f(0)=f(x+f(0))+y(x+f(0))+z+f(0)\to x+y^2=f(x+f(0))+y(x+f(0))$$
$$\to x+y^2=x+f(0)+f(0)+y(x+xf(0))\to y^2=2f(0)+y(x+xf(0))\ \left(3\right)$$

Thay y bởi vào (3) ta được: $f(0)=0$ khi đó từ (2) ta được: $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$

Thử lại, thấy hàm số này không thỏa mãn(1). Do đó có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $f(x)\equiv 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Nhận xét:

Ngoài cách nhận biết tính chất toàn ánh của f dựa vào một vế của đẳng thức là hàm bậc nhất ta còn có thể chứng minh f là toàn ánh bằng cách $\forall y\in R,\exists x\in R$ thỏa mãn $f(x)=y$

Sở dĩ ta có thể nhận biết được cách thay y bởi $\dfrac{x-f(f(u))-f(0)}{y}$ vào (1) là do

$$p(u,y,0)\to f(u+y^2)=f(f(u))+yf(u)+f(0),\forall y\in R$$

Với $\forall x\in R$ xét

$$x=f(f(u))+yf(u)+f(0)\to y=\frac{x-f(f(u))-f(0)}{f(u)}$$

Vì vậy ta thực hiện

$$p\left(u,\frac{x-f(f(u))-f(0)}{f(u)}\right)$$

Để suy ra f là toàn ánh.

Đối với một bài toán phương trình hàm nếu ta có thể vận dụng tính chất toàn ánh của f điều dó giúp ta tính được một số giá trị đặc biệt của hàm như $f(0); f(1)$ làm cơ sở để tìm ra đáp án của bài toán.

Bài tập 12: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(y+f(x))=f^4(x)+4y^3f(x)+6y^2f^2(x)+4yf^3(x)+f(-y),\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ (1).$$

Hướng dẫn:

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn (1).

Trường hợp 1: $f(x)=0$. Thử lại ta thấy $f(x)=0$ thỏa mãn (1).

Trường hợp 2: $f(x)\neq 0\to\exists x_0\in\mathbb{R}, f(x_0)\neq 0$.

Ta có: $(1)\leftrightarrow f(y+f(x))-f(-y)=[y+f(x)]^4-y^4,\forall x,y\in\mathbb{R}(*)$

Thay $x=x_0$ vào (*), ta được

$(y+f(x_0))-f(-y)=[y+f(x_0)]^4-y^4,\forall x,y\in\mathbb{R}(2)$

Ta thấy vế phải của (2) là một hàm số bậc 3 nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Do đó hàm số f có tập giá trị là $\mathbb{R}$ $\to\forall y\in\mathbb{R}$ đều $\exists u,v\in\mathbb{R}$ sao cho $f(u)-f(v)=y$.

Thay $y=0$ vào (*), ta được $f(f(x))=[f(x)]^4+a,\forall x\in\mathbb{R}(a=f(0))$ (3).

Thay $y=-f(y)$ vào (*), ta được

$f(f(x)-f(y))-f(f(y))=[f(x)-f(y)]^4-[f(y)]^4,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $f(f(x)-f(y))=[f(x)-f(y)]^4+a,\forall x,y\in\mathbb{R}$ hay

$f(f(u)-f(v))=[f(u)-f(v)]^4+a,\forall u,v\in\mathbb{R}\to f(y)=y^4+a,\forall y\in\mathbb{R}\longrightarrow f(x)=x^4+a,\forall x\in\mathbb{R}$

Thử lại ta thấy $f(x)=x^4+a$ thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy $f(x)=0$ và $f(x)=x^4+a$ (a là hằng số) là các hàm số cần tìm.

Bài tập 13: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x-f(y))=f(x)+f(f(y))-2xf(y)+f(y)+2012\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải:

Cho $x = f(y)$ ta thu được $f(0) = 2f(f(y)) - f^2(y) + f(y) + 2012$

Hay $f(f(y)) = \frac{1}{2}f^2(y) - \frac{1}{2}f(y) - 1006 + \frac{1}{2}f(0)$ (2)

Và ta đoán $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$ (*)

Nhưng để có điều này ta cần chỉ ra f toàn ánh. Công việc này có vẻ khó. Ta thử thêm chút:

Thay x bởi $f(x)$ ta có $f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) + f(f(y)) - 2f(x)f(y) + f(y) + 2012$

Và sử dụng (2) ta được $f(f(x) - f(y)) = \frac{1}{2}(f(x) - f(y))^2 - \frac{1}{2}(f(x) - f(y)) + f(0)$

Và để thực hiện được dự đoán (*), ta cần chỉ ra với mọi t, tồn tại x_0, y_0 để $t = f(x_0) - f(y_0)$?

Hiển nhiên là f không thể đồng nhất 0. Do đó tồn tại a mà $f(a) \neq 0$. Trong (1), cho $y = a$ ta được

$f(x - f(a)) = f(x) + f(f(a)) - 2xf(a) + f(a) + 2012$

Hay $f(y - f(a)) - f(y) = f(f(a)) - 2yf(a) + f(a) + 2012$

Với mỗi số thực t, ta cần chọn $x_0; y_0$ để thay vào đẳng thức này sao cho vế phải là t hay

$y_0 = \dfrac{f(f(a)) + f(a) + 2012 - t}{2f(a)}$ và vế trái là $f(x_0) - f(y_0)$ hay $x_0 = y_0 - f(a)$

Khi đó ta có $f(x_0) - f(y_0) = f(y_0 - f(a)) - f(y_0) = f(f(a)) - 2y_0 f(a) + f(a) + 2012 = t$

Vậy $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + f(0)$. Thay t bởi $f(y)$ và sử dụng (2) ta được

$-1006 + \frac{1}{2}f(0) = f(0) \to f(0) = 2012 \to f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2012,, \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thỏa.

Bài tập 14: (Hàn Quốc 2003) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x - f\left(y\right)\right) = f\left(x\right) + xf\left(y\right) + f\left(f\left(y\right)\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

Lời giải:

Nhận thấy hàm $f\left(x\right) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét trường hợp $f\left(x\right) \neq 0$

Thế $x = f\left(y\right)$ vào (4) ta được

$f\left(0\right) = 2f\left(z\right) + z^2 \to f\left(x\right) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{f\left(0\right)}{2}$.

Hay

$f\left(f\left(x\right)\right) = -\dfrac{f^2\left(x\right)}{1} + \dfrac{f\left(0\right)}{2}$.

Thế $x = f\left(z\right)$, với z là một số thuộc $\mathbb{R}$ thì ta được

$f\left(f\left(z\right) - f\left(y\right)\right) = f\left(f\left(z\right)\right) + f\left(z\right)f\left(y\right) + f\left(f\left(y\right)\right)$.

Với lưu ý là

$$f\left(f\left(y\right)\right)=-\frac{f^2\left(y\right)}{2}+\frac{f\left(0\right)}{2} \text{ và } f\left(f\left(z\right)\right)=-\frac{f^2\left(z\right)}{2}+\frac{f\left(0\right)}{2}$$

Thay vào quan hệ hàm ở trên ta được

$$f\left(f\left(z\right)-f\left(y\right)\right)=-\frac{\left(f\left(z\right)-f\left(y\right)\right)^2}{2}+f\left(0\right). \qquad (5)$$

Tiếp theo ta chứng tỏ tập $\left\{f\left(x\right)-f\left(y\right) | x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$. Do $f\left(x\right)\neq 0$ nên tồn tại một giá trị y_0 sao cho $f\left(y_0\right)=a\neq 0$. Khi đó từ quan hệ (4) ta có

$$f\left(x-a\right)=f\left(x\right)+xa+f\left(a\right)\to f\left(x-a\right)-f\left(x\right)=ax+f\left(a\right).$$

Vì vế phải là hàm bậc nhấ cả X nên $xa+f\left(a\right)$ có tập giá trị là toàn bộ $\mathbb{R}$. Do đó hiệu $f\left(x-a\right)-f\left(x\right)$ cũng có tập giá trị là toàn bộ $\mathbb{R}$, khi $x\in\mathbb{R}$. Mà

$$\left\{f\left(x\right)-f\left(y\right) | x,y\in\mathbb{R}\right\}\supset\left\{f\left(x-a\right)-f\left(x\right) | x\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R},$$

Do đó $\left\{f\left(x\right)-f\left(y\right) | x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$. Vậy từ quan hệ (5) ta thu được

$$f\left(x\right)=-\frac{x^2}{2}+f\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}$$

Mặt khác ta lại có

$$f\left(x\right)=-\frac{x^2}{2}+f\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Nên $f\left(0\right)=0$. Thử lại thấy hàm số $f\left(x\right)=-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn hệ hàm.

Kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn là $f\left(x\right)=-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f\left(x\right)\equiv 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$.

Nhận xét: Bài toán trên lấy ý tưởng từ bài thi **IMO 1996**: Tìm tất cá các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+xf\left(y\right)+f\left(x\right)-1,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Đáp số là $f\left(x\right)=-\frac{x^2}{2}+1,\forall x\in\mathbb{R}$

Bài tập 15: (Việt Nam TST 2004) Tìm tất các giá trị của a sao cho tồn tại duy nhất một hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x^2+y+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+ay,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \ (1)$$

Lời giải:

Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa yêu cầu bài ra.

Khi $a=0$, từ (1) ta được $f(x^2+y+f(y))=(f(x))^2, \forall x, y\in\mathbb{R}.$ khi đó ta có hai hàm số thỏa mã là $f(x)\equiv 0$ và $f(x)\equiv 1\rightarrow a=0$ (loại).

Khi $a\neq 0$. Vì vế phải là hàm bậc nhất nên y có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Do đó f là toàn ánh $\longrightarrow \exists b\in\mathbb{R}: f(b)=0$.

Tìm b . Thay y bởi b vào (1) ta được : $f(x^2+b)=(f(x))^2+ab, \forall x\in\mathbb{R}.$ (2)

Thay x bởi $-x$ vào (2) ta được : $f(x^2+b)=(f(-x))^2+ab, \forall x\in\mathbb{R}.$

Từ (2) và (3) ta được : $(f(x))^2=(f(-x))^2\rightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=f(-x)\\ f(x)=-f(-x)\end{array}\right.\longrightarrow f(-b)=0$

Thay y bởi $-b$ vào (1) ta được : $f(x^2-b)=(f(x))^2-ab, \forall x\in\mathbb{R}$ (4)

Từ (3), (4) $\longrightarrow f(x^2+b)-f(x^2-b)=2ab$ (5)

Thay x bởi 0 vào (5) ta được: $f(b)-f(-b)=2ab\rightarrow 2ab=0\Rightarrow b=0$ $(a\neq 0)$

Vậy $f(b)=0\leftrightarrow b=0.$

Thay x bởi 0 vào (1) ta được : $f(y+f(y))=ay$ (6)

Thay y bởi 1 vào (6) ta được: $f(1+f(1))=a$ (8)

Thay y bởi 0 vào (1) ta được : $f(x^2)=(f(x))^2$ (7)

Thay x bởi 1 vào (7) ta được : $f(1)=(f(1))^2\rightarrow\left[\begin{array}{l} f(1)=1\\ f(1)=0\end{array}\right.$

Vì $f(x)=0\rightarrow x=0$ nên ta nhận $f(1)=1$

Thay $f(1)=1$ vào (8) ta được $f(2)=a$

Ta có : $a^2=(f(2))^2=f(2^2)=f(4)=f((\sqrt{2})^2+2)=f((\sqrt{2})^2)+a=f(2)+a=2a\rightarrow\left[\begin{array}{l} a=2\\ a=0\end{array}\right.$

Vì $a\neq 0$ nên ta nhận $a=2.$ Vậy $a=2.$

Khi đó (1) trở thành: $f(x^2+y+f(y))=(f(x))^2+2y, \forall x, y\in\mathbb{R}$ (9)

Thay y bởi $-\frac{(f(x))^2}{2}$ vào (9) ta được:

$$f\left(x^2-\frac{(f(x))^2}{2}+f\left(-\frac{(f(x))^2}{2}\right)\right)=(f(x))^2-(f(x))^2\rightarrow f\left(x^2-\frac{(f(x))^2}{2}+f\left(-\frac{(f(x))^2}{2}\right)\right)=0$$

$$\rightarrow x^2-\frac{(f(x))^2}{2}+f\left(-\frac{(f(x))^2}{2}\right)=0, \forall x\in\mathbb{R}$$

Vì ($f(x)=0\leftrightarrow x=0$)

$\rightarrow f\left(-\frac{(f(x))^2}{2}\right)=-x^2-\frac{(f(x))^2}{2}$ (10)

Hay $f(y)=-x^2-y \leftrightarrow f(y)+y=-x^2, \forall x\in\mathbb{R}$ (11)

Thay y bởi $-\frac{(f(x))^2}{2}$ và $f(y)+y$ bởi $-y^2$ do (11), kết hợp với (7) khi đó từ (9) ta được:

$$f(x^2-y^2)=(f(x))^2-(f(y))^2=f(x^2)-f(y^2), \forall x,y\in\mathbb{R} \ (12)$$

Từ (12) thay x bởi 0 ta được: $f(-y^2)=-f(y^2)\longrightarrow f$ là hàm số lẻ.

Khi đó từ (1) ta có:

$$f(x+y)=f(x-(-y))=f(x)-f(-y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\longrightarrow f \text{ cộng tính.}$$

Ta lại có: $(f(x))^2=f(x^2)$ nên

$(f(x+y))^2=f(x+y)^2 \leftrightarrow (f(x)+f(y))^2=f(x^2+2xy+y^2)$
$\leftrightarrow (f(x))^2+2f(x)f(y)+(f(y))^2=f(x)^2+f(y^2)+f(2xy)$
$\rightarrow f(x).f(y)=f(xy)$

$\rightarrow f$ nhân tính.

Hàm f vừa cộng tính vừa nhân tính nên $f(x)\equiv x$ thử lại ta thấy hàm $f(x)\equiv x$ thỏa yêu cầu bài toán.

Nhận xét:

Đây là một bài toán khó, tính chất toàn ánh của f sử dụng khá hiệu quả; dấu hiệu nhận biết tính chất toàn ánh ở đây chính là vế phải đẳng thức là hàm bậc nhất, khi khẳng định f là toán ánh ta luôn $\exists b\in R: f(b)=0$, từ đó ta đi tìm b.

Từ điều kiện $f(0)=0$ ta nhận xét được một loạt tính chất đặc biệt của f như $f(0)=0$, $f(x^2)=(f(x))^2$, tính chất f là hàm số lẻ; tính nhân tính; cộng tính của hàm f làm cơ sở để tìm ra kết quả của bài toán.

Nếu ban đầu ta không tìm cách vận dụng tính chất toàn ánh của f thì bài này khó có thể giải quyết được.

Vì vậy khi giải một bài toán phương trình hàm thì việc nhận biết và vận dụng các tính chất của hàm f là rất quan trọng nó sẽ giúp việc giải quyết bài toán một cách dễ dàng hơn.

Bài tập 16: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=2f\left(x\right)+x+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad (6)$$

Lời giải:

Nhận thấy hàm $f\left(x\right)\equiv 0$ không thỏa mãn yêu cầu. Xét $f\left(x\right)\neq 0$.

Thay x bởi $f\left(y\right)$ vào (6) ta được

$f\left(f\left(y\right)\right)=-f\left(y\right)+\frac{f\left(0\right)}{2}$

Lại thay x bởi $f\left(x\right)$ ta được

$$f\left(f\left(x\right)\right)-f\left(y\right)=2f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)+f\left(y\right)$$
$$=2\left(-f\left(x\right)+\frac{f\left(0\right)}{2}\right)+f\left(x\right)+f\left(y\right)$$
$$=-\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)+f\left(0\right)$$

Tuy nhiên việc chứng minh tập $\left\{f\left(x\right)-f\left(y\right)|\,x,y\in\mathbb{R}\right\}$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ chưa thực hiện được.

Từ đây ta có

$$f\left(f\left(x\right)-2f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)-f\left(y\right)\right)$$
$$=2f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)+f\left(x\right)-f\left(y\right)+f\left(y\right)$$
$$=-2\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)+2f\left(0\right)+f\left(x\right)$$
$$=-\left(f\left(x\right)-2f\left(y\right)\right)+2f\left(0\right).$$

Ta sẽ chứng minh tập $\left\{f\left(x\right)-2f\left(y\right)|\,x,y\in\mathbb{R}\right\}$ bằng $\mathbb{R}$. Thật vạy tồn tại giá trị $y_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(y_0\right)=a\neq 0$. Khi đó thay $y=y_0$ vào (6) ta có

$$f\left(x-a\right)-2f\left(x\right)=x+a,\forall x\in\mathbb{R}$$

Mà khi $x\in\mathbb{R}$ thif $x+a$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Chứng tỏ tập $\left\{f\left(x\right)-2f\left(y\right)|\,x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$. Mà $\left\{f\left(x\right)-2f\left(y\right)|\,x,y\in\mathbb{R}\right\}\supset\left\{f\left(x-a\right)-f\left(x\right)|\,x\in\mathbb{R}\right\}$ nên $\left\{f\left(x\right)-2f\left(y\right)|\,x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$. Do đó từ (c) ta kết luận $f\left(x\right)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (6) ta được $f\left(0\right)=0$

Kết luận: Hàm số $f\left(x\right)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 17: Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x+f\left(y\right)\right)-f\left(x\right)=\left(x+f\left(y\right)\right)^4-x^4,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (1)$$

Lời giải:

Nhận thấy $f\equiv 0$ là một nghiệm hàm. Xét $f\not\equiv 0$, khi đó tồn tại $a\in\mathbb{R}$ để $f\left(a\right)\neq 0$. Trong (1) cho $y=a$ ta được: $f\left(x+f\left(a\right)\right)-f\left(x\right)=\left(x+f\left(a\right)\right)^4-x^4,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ (2)$

Chú ý VT(2) là đa thức bậc 3 đối với x nên tập giá trị của $f\left(x+f\left(a\right)\right)-f\left(x\right)$ là $\mathbb{R}$. Suy ra $f\left(x+f\left(a\right)\right)-f\left(x\right)$ là toàn ánh. Do đó với mỗi $t\in\mathbb{R}$ đều tồn tại $u,v\in\mathbb{R}$ thỏa $t=f\left(u\right)-f\left(v\right)$.

Trong (1) thay x bởi $-f\left(y\right)$ ta được

$$f\left(0\right)-f\left(-f\left(y\right)\right)=-f^4\left(y\right),\ \forall y\in\mathbb{R}\leftrightarrow f\left(-f\left(y\right)\right)=f^4\left(y\right)+f\left(0\right),\ \forall y\in\mathbb{R}.\ (3)$$

Trong (1) thay x bởi $-f\left(x\right)$ và sử dụng (3) ta được

$$f\left(-f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)-f\left(-f\left(x\right)\right)=\left(-f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)^{4}-f^{4}\left(x\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\leftrightarrow f\left(-f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=\left(-f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)^{4}+f\left(0\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\ \left(4\right)$$

Trong (4) cho $x=u, y=v$ được

$$f\left(-f\left(u\right)+f\left(v\right)\right)=\left(-f\left(u\right)+f\left(v\right)\right)^{4}+f\left(0\right)\leftrightarrow f\left(t\right)=t^{4}+f\left(0\right),\ \forall t\in\mathbb{R}$$
$$\longrightarrow f\left(x\right)=x^{4}+f\left(0\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Thay vào (1) được $f\left(0\right)=0.$ Vậy bài toán có 2 nghiệm hàm $f\left(x\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f\left(x\right)=x^{4}+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Trọng Tuấn, *Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olympic*. NXBGD, 2005.

[2] Nguyễn Tài Chung, *Chuyên khảo phương trình hàm*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2013.

[3] Trần Nam Dũng (CB), *Các kỳ thi toán VMO – Lời giải và bình luận*. NXB Thế giới, 2017.

[4] Titu Andreescu, Iurie Boreico, Oleg Mushkarov, Nikolai Nikolov, *Topics in Functional Equations*. XYZ Press 2014.

[5] *Đề thi chọn ĐT học sinh giỏi của một số tỉnh.*

[6] *Một số tài liệu trên mạng internet.*