

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình nghiệm nguyên là phương trình có nhiều ẩn số, tất cả các hệ số của phương trình đều là số nguyên. Các nghiệm cần tìm cũng là số nguyên.
2. Phương trình nghiệm nguyên không có công thức giải tổng quát, chỉ có cách giải của một số dạng. Trong chuyên đề này được giới thiệu qua một số ví dụ và bài tập cụ thể.
3. Cách giải phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng, đòi hỏi học sinh phân tích, dự đoán, đối chiếu và tư duy sáng tạo, logic để tìm nghiệm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp đưa về phương trình ước số

Phương pháp giải

Biến đổi phương trình về dạng: Vế trái là tích của các đa thức chứa ẩn, vế phải là tích của các số nguyên.

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2(x+y)+5=3xy$.

Lời giải

Ta có: $2(x+y)+5=3xy \Leftrightarrow 3xy-2x-2y=5$

$$\Leftrightarrow y(3x-2)-\frac{2}{3}(3x-2)=5+\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(3y-2)=19$$

Do x, y nguyên dương nên $3x-2 \geq 1; 3y-2 \geq 1$.

Mà $19=1.19=19.1$ nên xảy ra các trường hợp sau:

$$\begin{cases} 3x-2=1 \\ 3y-2=19 \end{cases} (I) \text{ hoặc } \begin{cases} 3x-2=19 \\ 3y-2=1 \end{cases} (II).$$

Giải các hệ phương trình (I) và (II) ta được hai nghiệm nguyên của phương trình là $(1;7), (7;1)$.

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là $S = \{(1;7), (7;1)\}$.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = y^2$.

Lời giải

Ta có: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = y^2 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4 - y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2 - y \right] \left[(x+1)^2 + y \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 - y = -1 \\ (x+1)^2 + y = -1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} (x+1)^2 - y = 1 \\ (x+1)^2 + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -1 + y = -1 - y \\ 1 + y = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Thử lại các giá trị tương ứng của x và y ta đều thấy thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình có tập nghiệm nguyên là $S = \{(0; 0), (-2; 0)\}$.

Dạng 2: Phương pháp sử dụng tính chất chia hết

Phương pháp giải

- Sử dụng tính chất chia hết để chứng minh phương trình vô nghiệm hoặc tìm nghiệm của phương trình.

+ Nếu $a:m$ và $(a \pm b):m$ thì $b:m$.

+ Nếu $a:b$, $b:c$ thì $a:c$.

+ Nếu $ab:c$ mà $\text{ƯCLN}(b, c) = 1$ thì $a:c$.

+ Nếu $a:m$, $b:n$ thì $ab:mn$.

+ Nếu $a:b$, $a:c$ với $\text{ƯCLN}(b, c) = 1$ thì $a:bc$.

+ Trong m số nguyên liên tiếp bao giờ cũng tồn tại một số là bội của m .

- Hai vế của phương trình nghiệm nguyên khi chia cho cùng một số có số dư khác nhau thì phương trình đó không có nghiệm nguyên.

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy + x - 2y = 3$.

Lời giải

Ta có: $xy + x - 2y = 3 \Leftrightarrow y(x - 2) = -x + 3$.

Vì $x = 2$ không thỏa mãn phương trình nên suy ra: $y = \frac{-x+3}{x-2} \Leftrightarrow y = -1 + \frac{1}{x-2}$.

Ta thấy y là số nguyên nên $x - 2$ là ước của 1 hay $x - 2 = 1$ hoặc $x - 2 = -1$, tức là $x = 1$ hoặc $x = 3$.

Vậ tập nghiệm nguyên của phương trình là: $S = \{(1; -2), (3; 0)\}$.

Chú ý: Bài toán này có thể dùng phương pháp đưa về phương trình ước số:

$$x(y+1) - 2(y+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(y+1) = 1.$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$.

Lời giải

Ta có: $2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2)$ (*)

Ta thấy $3(7 - y^2) : 2 \Rightarrow (7 - y^2) : 2 \Rightarrow y$ lẻ.

Ta lại có $3(7 - y^2) = 2(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 7$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$.

Khi đó phương trình (*) có dạng: $2(x+1)^2 = 18$.

Ta được: $x+1 = \pm 3$, do đó $x_1 = 2, x_2 = -4$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{(2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1)\}$.

Dạng 3: Phương pháp xét số dư từng vế

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất cơ bản: Một số chính phương khi chia cho 3 dư 0 hoặc 1; chia cho 4 dư 0 hoặc 1; chia cho 8 dư 0, 1 hoặc 4,...

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x + 2 = y^2 + y$.

Lời giải

Ta có: $9x + 2 = y(y + 1)$.

Ta thấy vế trái của phương trình là số chia cho 3 dư 2 nên $y(y + 1)$ cũng chia 3 dư 2.

Trường hợp 1: $y \div 3$ thì $y(y + 1) \div 3$ (loại).

Trường hợp 2: y chia 3 dư 2 thì $y + 1 \div 3$ nên $y(y + 1) \div 3$ (loại).

Do đó, y chia 3 dư 1.

Đặt $y = 3k + 1, y + 1 = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó: $9x + 2 = (3k + 1)(3k + 2) \Leftrightarrow 9x = 9k(k + 1) \Leftrightarrow x = k(k + 1)$.

Thử lại: $x = k(k + 1), y = 3k + 1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho tập nghiệm là $S = \{x = k(k + 1), y = 3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên: $x^2 - y^2 = 2018$.

Lời giải

• Cách 1:

Ta có phương trình đã cho tương đương $(x - y)(x + y) = 2018$.

Vì $(x - y) + (x + y) = 2x$ là một số nguyên chẵn nên $(x - y)$ và $(x + y)$ có cùng tính chẵn lẻ.

Mà $(x - y)(x + y) = 2018$ nên $(x - y)$ và $(x + y)$ đều chẵn.

Suy ra $(x - y)(x + y)$ chia hết cho 4, nhưng 2018 lại không chia hết cho 4.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

• Cách 2:

Số chính phương chia 4 có thể dư 0 hoặc 1. Do đó, x^2, y^2 chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1.

Suy ra số dư của $(x^2 - y^2)$ khi chia cho 4 thuộc tập $\{0; 1; 3\}$, mà 2018 chia 4 dư 2.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Dạng 4: Phương pháp đưa về dạng tổng

Phương pháp giải

Biến đổi phương trình về dạng: Vế trái là tổng của các bình phương, vế phải là tổng của các số chính phương.

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 - x - y = 8$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + y^2 - x - y = 8 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y = 32$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = 34$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 3^2 + 5^2$$

Bằng phương pháp thử chọn ta thấy 34 chỉ có duy nhất một dạng phân tích thành tổng hai số chính phương là 3^2 và 5^2 . Do đó ta có hai trường hợp:

$$\begin{cases} |2x - 1| = 3 \\ |2y - 1| = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} |2x - 1| = 5 \\ |2y - 1| = 3 \end{cases}.$$

Giải các hệ phương trình trên ta được tám nghiệm nguyên thỏa mãn là:

$$(2; 3), (3; 2), (-1; -2), (-2; -1), (2; -2), (-2; 2), (-1; 3) \text{ và } (3; -1).$$

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là:

$$S = \{(2; 3), (3; 2), (-1; -2), (-2; -1), (2; -2), (-2; 2), (-1; 3), (3; -1)\}.$$

Dạng 5: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

Phương pháp giải

Sử dụng 2 bất đẳng thức cơ bản sau:

- **Bất đẳng thức Cô-si:**

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (x, y \geq 0).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

- **Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki:**

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$.

- **Mở rộng:** Với mọi x, y, z ta có $(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ax + by + cz)^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ (với giả thiết nếu mẫu số bằng 0 thì tử số tương ứng cũng bằng 0).

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình: $(x^2 + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2y$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$x^2 + 1 \geq 2x.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Vì x, y là các số nguyên dương nên ta nhân vế với vế của hai bất đẳng thức trên ta được:

$$(x^2 + 1)(x^2 + y^2) \geq 4x^2y.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Vậy $x = y = 1$ là nghiệm nguyên dương duy nhất của phương trình.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x+y+1)^2 = 3(x^2+y^2+1)$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$(x+y+1)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+1^2) = 3(x^2+y^2+1).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = y = 1$.

Dạng 6: Phương pháp đánh giá

Phương pháp giải

Đánh giá phương trình cơ bản dựa theo 2 nhận xét sau:

- Không tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^2 < n^2 < (a+1)^2$ ($a \in \mathbb{Z}$).
- Nếu $a^2 < n^2 < (a+2)^2$ ($a, n \in \mathbb{Z}$) thì $n = a+1$ hoặc $n = -(a+1)$.

Bài tập mẫu

Ví dụ: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^4 + x^2 + 1 = y^2$.

Lời giải

$$\text{Xét hiệu } (x^2+1)^2 - y^2 = x^2 \geq 0 \Rightarrow (x^2+1)^2 \geq y^2$$

$$\text{Xét hiệu } y^2 - x^4 = x^2 + 1 > 0 \Rightarrow y^2 > x^4$$

$$\text{Suy ra } (x^2)^2 < y^2 \leq (x^2+1)^2 \Rightarrow y^2 = (x^2+1)^2$$

$$\text{Thế vào phương trình ban đầu ta có: } x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là } S = \{(0;1), (0;-1)\}.$$

Dạng 7: Phương pháp giải lùi vô hạn, nguyên tắc cực hạn

Phương pháp giải

Phương pháp này nhằm chứng minh một phương trình $f(x; y; z; \dots)$ ngoài nghiệm tầm thường thì không còn nghiệm nào khác được giải theo các bước như sau:

- Giả sử $(x_0; y_0; z_0; \dots)$ là nghiệm của $f(x; y; z; \dots)$ với điều kiện ràng buộc của bộ $(x_0; y_0; z_0; \dots)$. Ví dụ như x_0 nhỏ nhất hoặc $x_0 + y_0 + z_0 + \dots$ nhỏ nhất...
- Biến đổi số học để tìm ra một bộ nghiệm khác $(x_1; y_1; z_1; \dots)$ trái với điều kiện ràng buộc trên. Ví dụ khi chọn bộ $(x_1; y_1; z_1; \dots)$ với x_0 nhỏ nhất ta lại tìm được bộ $(x_1; y_1; z_1; \dots)$ thỏa mãn $x_1 < x_0$, từ đó dẫn đến phương trình đã cho có nghiệm $(x_0; y_0; z_0; \dots)$.

Bài tập mẫu

Ví dụ: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 5y^2 = 0$

Lời giải

Cách 1:

Giả sử $(x_0; y_0)$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $x_0^2 - 5y_0^2 = 0$, suy ra x_0 chia hết cho 5.

Đặt $x_0 = 5x_1$ ($x_1 \in \mathbb{Z}$), ta có $25x_1^2 - 5y_0^2 = 0 \Leftrightarrow 5x_1^2 - y_0^2 = 0$.

Suy ra y_0 chia hết cho 5.

Đặt $y_0 = 5y_1$ ($y_1 \in \mathbb{Z}$), ta có $5x_1^2 - 25y_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 5y_1^2 = 0$.

Vậy nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình đã cho thì $\left(\frac{x_0}{5}; \frac{y_0}{5}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của phương trình đó.

Tiếp tục lập luận tương tự ta có $\left(\frac{x_k}{5}; \frac{y_k}{5}\right)$ với k là số nguyên dương tùy ý cũng là nghiệm nguyên của phương trình đã cho hay x_0 và y_0 đều chia hết cho 5^k với mọi k là số nguyên dương k tùy ý. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = y_0 = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = y = 0$.

Cách 2:

Nhận thấy $(0;0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Giả sử ngoài nghiệm này phương trình còn nghiệm khác $(x;y) \neq (0;0)$.

Trong các nghiệm như vậy, chọn ra được nghiệm $(x_0;y_0)$ có tổng $|x_0|+|y_0|$ nhỏ nhất (*).

Vì $(x_0;y_0)$ là nghiệm của phương trình nên $x_0^2 = 5y_0^2 : 5$, suy ra $x_0 : 5$.

Đặt $x_0 = 5x_1 (x_1 \in \mathbb{Z})$, ta có $25x_1^2 - 5y_0^2 = 0 \Leftrightarrow y_0^2 = 5x_1^2 : 5$, suy ra $y_0 : 5$.

Đặt $y_0 = 5y_1 (y_1 \in \mathbb{Z})$, ta có $5x_1^2 - 25y_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 5y_1^2 = 0$.

Do đó $(x_1;y_1)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Lại có $|x_1|+|y_1| = \left|\frac{x_0}{5}\right| + \left|\frac{y_0}{5}\right| < |x_0|+|y_0|$ (do $(x;y) \neq (0;0)$).

Điều này mâu thuẫn với (*).

Do vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $8x - y = 15$;

b) $5x + 12y = 33$;

c) $14x - 9y = 21$;

d) $29x + 15y = 20$.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu ước chung lớn nhất của a và b không chia hết c (tức là $c \nmid (a, b)$) thì phương trình $ax + by = c$ ($a, b \neq 0$) không có nghiệm nguyên.

Bài 3. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $4x + 5y = 19$;

b) $3(x + y + 1) = 4(12 - y)$;

c) $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = \frac{5}{2}$;

d) $(5 - x)(5 + x) = y(2x + y)$.

Bài 4. Giải phương trình trên tập số nguyên: $-4x + 3y + 8z = 9$

Bài 5. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $3x^2 - 14x = 5$;

b) $x(2x^2 + 9x + 7) = 6$;

c) $x^4 + 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60 = 0$;

d) $(x^4 - 13x^2 + 36)(x^2 + 2x) = 65x^2 - 5x^4 - 180$.

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $\frac{1}{(x+1)(x+3)} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{12}$

b) $\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2 + 1} + \frac{(x+2)^2 + 1}{(x+2)^2 + 2} = \frac{1}{2}$

c) $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 = (x+5)^3 - (x+4)^3$.

Bài 7. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6(x+y) = xy + 33$;

b) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $3(x+y) = 2xy$.

Bài 8. a) Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng bằng tích;

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $5(x + y + z + t) + 4 = 6xyzt$.

Bài 9. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2(y^2 - 3) - 2y^2(x - 1) + 6x = 7$;

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2 + 2xy - 27y + x = 0$.

Bài 10. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $x^2 + 5y^2 + 1 = 2y(2x - 1)$;

b) $x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$;

c) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x + 9 = 2y(x + z)$;

d) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy - 4yz - 12y + 36 = 0$.

Bài 11. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x + x^2 + x^3 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$

Bài 12. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x + 1)(x + 2)(x + 8)(x + 9) = y^2$.

Bài 13. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

Bài 14. Tìm số có hai chữ số mà số ấy là bội của tích hai chữ số đó.

Bài 15. Tìm tất cả các hình chữ nhật với độ dài các cạnh là số nguyên dương có thể cắt thành 11 hình vuông bằng nhau sao cho mỗi cạnh hình vuông là một số nguyên dương không lớn hơn 3.

Bài 16. a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{xy}{3z} + \frac{yz}{3x} + \frac{zx}{3y} = 1$;

b) Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng các nghịch đảo của chúng bằng $\frac{11}{12}$.

Bài 17. Chứng minh phương trình $2x^2 - 9y^2 = 11$ không có nghiệm nguyên.

Bài 18. Chứng minh phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2016}$ có một số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

Bài 19. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$

Bài 20. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số đó cho 2005 thì được dư là 23 còn khi chia số đó cho 2007 thì được dư 32.

Bài 21. Một đoàn học sinh đi cắm trại bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 người thì thừa 1 người. Nếu bớt đi 1 ô tô thì có thể phân phối đều tất cả các học sinh lên các ô tô còn lại. Hỏi có bao nhiêu học sinh đi cắm trại và có bao nhiêu ô tô? Biết rằng mỗi ô tô chỉ chở không quá 30 người.

Bài 22. Tìm cặp số tự nhiên $(m; n)$ thỏa mãn hệ thức $m^2 + n^2 = m + n + 8$.

Bài 23. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $5x^2 + 8y^2 = 20412$.

Bài 24. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Bài 25. Tìm các số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(x + y)^5 = 120y + 3$.

Bài 26. Tìm tất cả các số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $3^x - 2^y = 1$.

Bài 27. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y + xy - 2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Bài 28. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $8x - y = 15$;

b) $5x + 12y = 33$;

c) $14x - 9y = 21$;

d) $29x + 15y = 20$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a/ Hệ số của ẩn y là -1. Đáp số $\begin{cases} x = t \\ y = 8t - 15 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$

b/ Về giá trị tuyệt đối thì hệ số của x nhỏ hơn hệ số của y. Do đó ta tính x theo y. Sau đó tách phần

nguyên. Đáp số: $\begin{cases} x = 12u + 9 \\ y = 5u + 1 \end{cases}, u \in \mathbb{Z}$

c/ Ta có: $(14; 21) = 7$ nên $y : 7$. Đặt $y = 7t$ ta có phương trình $2x - 9t = 3$. Tiếp tục làm như câu b) ta

tìm được $\begin{cases} x = 9u - 3 \\ y = 14u - 7 \end{cases}, u \in \mathbb{Z}$

d) Cách 1: Phương trình đã cho (viết tắt là PT):

$$29x + 15y = 20 \Leftrightarrow y = \frac{20 - 29x}{15} = \frac{15 - 30x + 5 + x}{15} = 1 - 2x + \frac{5 + x}{15}$$

Đặt $\frac{5 + x}{15} = u, (u \in \mathbb{Z})$ ta có $x = 15u - 5$

Nghiệm nguyên tổng quát của PT là $\begin{cases} x = 15u - 5 \\ y = 11 - 29u \end{cases}$

Cách 2: Ta có $(15; 20) = 5$ nên $x : 5$

Đặt $x = 5t$ ta có phương trình $29t + 3y = 4$

Tiếp tục làm như b) ta tìm được $\begin{cases} x = 15u - 5 \\ y = 11 - 29u \end{cases}; u \in \mathbb{Z}$

Bài 2. Chứng minh rằng nếu ước chung lớn nhất của a và b không chia hết c (tức là $c \nmid (a, b)$) thì phương trình $ax + by = c$ ($a, b \neq 0$) không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử phương trình $ax + by = c$ ($a; b \neq 0$) có nghiệm nguyên là $(x_0; y_0)$ tức là $ax_0 + by_0 = c$. Gọi $(a; b) = d$ thì $a = dm; b = dn$ ($m, n \in \mathbb{Z}$).

$$\text{Ta có: } dm x_0 + dn y_0 = c \Rightarrow m x_0 + n y_0 = \frac{c}{d}$$

Do $c \not\vdots d$ nên $\frac{c}{d} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow m x_0 + n y_0 \notin \mathbb{Z}$ điều này vô lý vì $m; n; x_0; y_0 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 3. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $4x + 5y = 19$;

b) $3(x + y + 1) = 4(12 - y)$;

c) $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = \frac{5}{2}$;

d) $(5 - x)(5 + x) = y(2x + y)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a/ Nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 3 - 4t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}$. Nghiệm nguyên dương là $(x; y) = (1; 3)$

b/ Biến đổi phương trình thành $3x + 7y = 45$. Do $(3; 45) = 3$ nên $y \vdots 3$

Phương trình có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases} x = 15 - 7t \\ y = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$

Để $x > 0$ và $y > 0$ ta phải có $0 < t < \frac{15}{7}$ Vậy $t = 1; 2$. Phương trình có 2 nghiệm nguyên dương là

$$(x; y) = (8; 3); (1; 6)$$

c) Biến đổi phương trình thành $8x - 9y = 30$

Nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x = 9t + 6 \\ y = 8t + 2 \end{cases}; t \in \mathbb{Z}$ và $t = 0; 1; 2; 3; \dots$

Phương trình có vô số nghiệm nguyên dương $(x; y) = (6; 2); (15; 10); (24; 18); \dots$

d) Biến đổi phương trình thành $x^2 + 2xy + y^2 = 25 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 5^2$

hay $|x+y| = 5$.

Do $x > 0$ và $y > 0$ nên $x+y = 5$ và phương trình có 4 nghiệm $(x; y) = (1; 4); (2; 3); (3; 2); (4; 1)$.

Bài 4. Giải phương trình trên tập số nguyên: $-4x + 3y + 8z = 9$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $-4x + 3y + 8z = 9 \Leftrightarrow x + 8(y+z) - 5(x+y) = 9$

Đặt $u = y+z; v = x+y$

Nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là
$$\begin{cases} x = 9 - 8u + 5v \\ y = -9 + 8u - 4v \\ z = 9 - 7u + 4v \end{cases} (u \in \mathbb{Z}; v \in \mathbb{Z})$$

Bài 5. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $3x^2 - 14x = 5$;

b) $x(2x^2 + 9x + 7) = 6$;

c) $x^4 + 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60 = 0$;

d) $(x^4 - 13x^2 + 36)(x^2 + 2x) = 65x^2 - 5x^4 - 180$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta chuyển về đưa về dạng $A(x) = 0$ sau đó phân tích $A(x)$ thành nhân tử bằng tách và thêm bớt các hạng tử.

a) $3x^2 - 14x = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 15x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(3x+1) = 0$

Nghiệm nguyên của phương trình là $x = 5$

b) $x(2x^2 + 9x + 7) = 6 \Leftrightarrow 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(2x-1) = 0$

Tập nghiệm là $S = \{-3; -2\}$

$$c) x^4 + 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+3)(x-5) = 0$$

Tập nghiệm $S = \{-3; -2; 2; 5\}$

$$d) (x^4 - 13x^2 + 36)(x^2 + 2x) = 65x^2 - 5x^4 - 180$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 13x^2 + 36)(x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 9)(x^2 + 2x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+3)(x-3)(x^2 + 2x + 5) = 0$$

Do $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0, \forall x$ nên nghiệm nguyên của phương trình là $x = \pm 2; x = \pm 3$

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$a) \frac{1}{(x+1)(x+3)} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{12}$$

$$b) \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2 + 1} + \frac{(x+2)^2 + 1}{(x+2)^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$c) (x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 = (x+5)^3 - (x+4)^3.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{ĐKXĐ: } x \neq -1; x \neq -2; x \neq -3$$

$$\text{Phương trình biến đổi thành } \frac{1}{x^2 + 4x + 3} - \frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Đặt } x^2 + 4x + 3 = y \text{ phương trình trở thành } \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{12} \text{ suy ra}$$

$$y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+4) = 0$$

$$* x^2 + 4x + 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4$$

$$* x^2 + 4x + 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + 3 = 0 \text{ vô nghiệm vì vế trái } > 0 \forall x$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là 0 và -4.

b) Các mẫu đều dương nên ĐKXĐ là $x \in \mathbb{R}$. Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 5} + \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 6} = \frac{1}{2}.$$

Đặt $x^2 + 4x + 5 = y$ ta có $\frac{y-1}{y} + \frac{y}{y+1} = \frac{1}{2}$ suy ra $3y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(3y+2) = 0$

Từ đây tìm được nghiệm của phương trình là $x = -2$

c) Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ta có $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 - (x+5)^3 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 + 15x^2 + 15x = 25$

Vế trái chia hết cho 3; vế phải không chia hết cho 3. Phương trình không có nghiệm nguyên.

Chú ý: Câu c) có thể đặt $x+3 = y (\in \mathbb{Z})$ Phương trình trở thành

$$(y-2)^3 + (y-1)^3 + y^3 + (y+1)^3 - (y+2)^3 = 0 \text{ rút gọn thành } 3y^3 - 12y^2 + 6y = 16$$

Bài 7. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6(x+y) = xy + 33$;

b) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $3(x+y) = 2xy$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $6(x+y) = xy + 33 \Leftrightarrow (x-6)(y-6) = 3$

Vì $3 = 1.3 = 3.1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$

Giải các cặp ta tìm được các nghiệm nguyên sau: $(x; y) = (7; 9); (9; 7); (5; 3); (3; 5)$.

b) $3(x+y) = 2xy \Leftrightarrow 4xy - 6x - 6y = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(2y-3) = 9$

Ta biết $9 = 1.9 = 9.1 = (-1)(-9) = (-9)(-1) = 3.3 = (-3)(-3)$

Giải từng cặp ta có nghiệm tự nhiên của phương trình trên là: $(x; y) = (2; 6); (6; 2); (3; 3); (0; 0)$

Bài 8. a) Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng bằng tích;

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $5(x + y + z + t) + 4 = 6xyz$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Gọi ba số nguyên dương là $x; y; z$. Theo đầu bài $x + y + z = xyz$. Do vai trò x, y, z như nhau nên giả sử

$$1 \leq x \leq y \leq z . \text{ Chia 2 vế của phương trình cho } xyz \text{ ta có } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} \leq \frac{3}{x^2} \text{ hay } x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào phương trình ta có $1 + y + z = yz \Leftrightarrow yz - y - z = 1 \Leftrightarrow (y - 1)(z - 1) = 2 = 1.2$ Từ đó tìm được $y = 2; z = 3$

Nghiệm nguyên dương của phương trình là:

$$(x; y; z) = (1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 3; 1); (2; 1; 3); (3; 2; 1); (3; 1; 2)$$

b) Giả sử $x \geq y \geq z \geq t \geq 1$, chia 2 vế của phương trình cho $xyzt$ ta có

$$6 = \frac{5}{xyz} + \frac{5}{xzt} + \frac{5}{xyt} + \frac{5}{yzt} + \frac{4}{xyzt} \leq \frac{24}{t^3} \Rightarrow t^3 \leq 4 \Rightarrow t = 1$$

Thay $t = 1$ vào phương trình ta có $5(x + y + z) + 9 = 6xyz$

$$\text{Ta cũng có } 6 = \frac{5}{yz} + \frac{5}{xz} + \frac{5}{xy} + \frac{9}{xyz} \leq \frac{24}{z^2} \Rightarrow z^2 \leq 4 \Rightarrow z = 1; 2$$

$$+ \text{ Với } z = 1 \text{ thì } 5(x + y) + 14 = 6xy \Leftrightarrow 6xy - 5x - 5y = 14$$

$$\Leftrightarrow 36xy - 30x - 30y + 25 = 109 \Leftrightarrow (6x - 5)(6y - 5) = 109.1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 5 = 109 \\ 6x - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 19 \\ y = 1 \end{cases}$$

+ Với $z = 2$ giải tương tự, không có nghiệm nguyên dương.

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x; y; z; t) = (19; 1; 1; 1)$ và các hoán vị

$$(1; 1; 1; 19); (1; 1; 19; 1); (1; 19; 1; 1)$$

Bài 9. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2(y^2 - 3) - 2y^2(x - 1) + 6x = 7$;

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2 + 2xy - 27y + x = 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) PT \Leftrightarrow x^2(y^2 - 3) - 2y^2x + 2y^2 + 6x = 7$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2 - 3) - 2x(y^2 - 3) + 2(y^2 - 3) = 1 \Leftrightarrow (y^2 - 3)(x^2 - 2x + 2) = 1$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y^2 - 3 \in \mathbb{Z}; x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{Z}$ Vì thế

$$\begin{cases} y^2 - 3 = 1 \\ x^2 - 2x + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Và } \begin{cases} y^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 2x + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 \\ (x - 1)^2 + 2 = 0 \end{cases} \text{ (không có nghiệm nguyên)}$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) = (1; -2); (1; 2)$

$$b) xy^2 + 2xy - 27y + x = 0 \Leftrightarrow x(y^2 + 2y + 1) = 27y$$

$$\Leftrightarrow x(y + 1)^2 = 27y \Rightarrow x = \frac{27y}{(y + 1)^2}$$

Ta biết hai số nguyên dương y và $y + 1$ nguyên tố cùng nhau nên $y \nmid (y + 1)^2$ vì thế

$$27 : (y + 1)^2 \Rightarrow (y + 1)^2 = 1 \text{ hoặc } (y + 1)^2 = 9$$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $(x; y) = (6; 2)$

Bài 10. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

$$a) x^2 + 5y^2 + 1 = 2y(2x - 1) ;$$

$$b) x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0 ;$$

$$c) 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x + 9 = 2y(x + z) ;$$

$$d) x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy - 4yz - 12y + 36 = 0 .$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Chú ý nếu $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ thì $A = 0; B = 0$ và $C = 0$

a) Biến đổi PT thành $(x - 2y)^2 + (y + 1)^2 = 0$. Nghiệm $(x; y) = (-2; -1)$

b) Biến đổi PT thành $(x + y + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$. Nghiệm $(x; y) = (-3; 2)$

c) Biến đổi PT thành $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - 3)^2 = 0$. Nghiệm $(x; y; z) = (3; 3; 3)$

d) Biến đổi PT thành $(x + y)^2 + (y - 2z)^2 + (y - 6)^2 = 0$. Nghiệm $(x; y; z) = (-6; 6; 3)$

Bài 11. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x + x^2 + x^3 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi về dạng $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$. Ta xét các trường hợp:

1) $x = 0$ thì $y = 1$

2) $x = -1$ thì $y = 0$

3) $x = 1$ thì $y \notin \mathbb{Z}$

4) Với $x > 0$ $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 > 1 + x + x^2 + x^3 = y^3 > x^3$

Vậy $(1 + x)^3 > y^3 > x^3$ hay $1 + x > y > x$ điều này không thể xảy ra đối với số nguyên dương

5) Với $x < -1$. Đặt $t = -1 - x$ thì $t > 0$ và $x = -1 - t$. Thay vào phương trình ta có

$$1 + (-1 - t) + (t^2 + 2t + 1) - (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = y^3$$

$$\text{Hay } -(t^3 + 2t^2 + 2t) = y^3 \Rightarrow y < 0 \text{ hay } t^3 + 2t^2 + 2t = (-y)^3$$

Đặt $-y = z$ ta có $t^3 + 2t^2 + 2t = z^3$ với $z > 0$

$$\text{Ta có } (t + 1)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 > t^3 + 2t^2 + 2t = z^3 > t^3$$

$$\text{Hay } (t + 1)^3 > z^3 > t^3 \Rightarrow t + 1 > z > t \text{ điều này vô lý}$$

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm $(x; y) = (0; 1); (-1; 0)$

Bài 12. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x + 1)(x + 2)(x + 8)(x + 9) = y^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

* Với $y = 0$ thì $x = -1; -2; -8; -9$

* Với $y \neq 0$ ta có $(x^2 + 10x + 9)(x^2 + 10x + 16) = y^2$

Đặt $x^2 + 10x + 9 = z \in \mathbb{Z}$ do $x \in \mathbb{Z}$. Ta có $z(z+7) = y^2$ hay $z^2 + 7z = y^2$

Nếu $z > 9$ thì $z^2 + 6z + 9 < z^2 + 7z = y^2 < z^2 + 8z + 16$

Hay $(z+3)^2 < z^2 + 7z = y^2 < (z+4)^2$ vô lý. Vậy $z \leq 9$

$x^2 + 10x + 9 \leq 9 \Leftrightarrow x(x+10) \leq 0 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 0$. Lần lượt thay các giá trị của x ta có nghiệm:

$$(x; y) = (-1; 0); (-2; 0); (-8; 0); (-9; 0); (-5; -12); (-5; 12); (-10; -12); (-10; 12)$$

Bài 13. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta sử dụng tính chất chia hết và phương pháp xuống thang để giải.

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình tức là $x_0^3 - 2y_0^3 - 4z_0^3 = 0$ (2) khi đó $x_0 \vdots 2$. Đặt

$x_0 = 2x_1$ ta lại có $4x_1^3 - y_0^3 - 2z_0^3 = 0$; Đặt $y_0 = 2y_1$ ta lại có $2x_1^3 - 4y_1^3 - z_0^3 = 0$; Đặt $z_0 = 2z_1$ ta lại có

$x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0$; như vậy $(x_1; y_1; z_1) = \left(\frac{x_0}{2}; \frac{y_0}{2}; \frac{z_0}{2}\right)$ cũng là nghiệm của phương trình. Cứ tiếp tục

mãi ta có $\left(\frac{x_0}{2^k}; \frac{y_0}{2^k}; \frac{z_0}{2^k}\right) \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$ do đó $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên duy nhất là $(0; 0; 0)$

Bài 14. Tìm số có hai chữ số mà số ấy là bội của tích hai chữ số đó.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số có hai chữ số đó là $\overline{xy} (x, y \in \mathbb{N}; 0 < x, y \leq 9)$

Ta có $\overline{xy} = 10x + y = kxy (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow y = x(ky - 10); x$ do đó $y = mx$

$$\Rightarrow mx = x(kmx - 10) \Rightarrow m = kmx - 10 \Rightarrow 10 = m(kx - 1) \Rightarrow m = 1; 2; 5$$

Với $m = 1$ thì $kx = 11 \Rightarrow x = y = 1$

Với $m = 2$ thì $kx = 6 \Rightarrow x = 1; 2; 3$ tương ứng với $y = 2; 4; 6$

Với $m = 5$ thì $kx = 3 \Rightarrow x = 1$ tương ứng có $y = 5$

Số cần tìm là $\overline{xy} = 11; 12; 24; 36; 15$

Bài 15. Tìm tất cả các hình chữ nhật với độ dài các cạnh là số nguyên dương có thể cắt thành 11 hình vuông bằng nhau sao cho mỗi cạnh hình vuông là một số nguyên dương không lớn hơn 3.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là x và y . Cạnh hình vuông cần cắt ra là z .

Ta có $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ $x \geq y; z \leq y$ và $z \leq 3$

Ta có $xy = 11z^2$ (1). Từ (1) $\Rightarrow x$ hoặc y chia hết cho 11. Vai trò của x và y trong phương trình như nhau nên ta giả sử $x : 11$ tức là $x = 11d$

$$\Rightarrow 11dy = 11z^2 \Rightarrow dy = z^2. \text{ Ta xét các trường hợp có thể của } z:$$

Với $z = 1$ chỉ có thể $d = 1; y = 1 \Rightarrow x = 11$

Với $z = 2$ chỉ có thể $d = 1; y = 4 \Rightarrow x = 11$

$$d = 2; y = 2 \Rightarrow x = 22$$

$$d = 4; y = 1 \Rightarrow x = 44$$

Với $z = 3$ chỉ có thể $d = 1; y = 9 \Rightarrow x = 11$

$$d = 3; y = 3 \Rightarrow x = 33$$

$$d = 9; y = 1 \Rightarrow x = 99$$

Trong 7 nghiệm của phương trình vừa tìm chỉ có 3 nghiệm thỏa mãn bài toán đó là

$$(x; y) = (11; 1); (22; 2); (33; 3)$$

Bài 16. a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{xy}{3z} + \frac{yz}{3x} + \frac{zx}{3y} = 1$;

b) Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng các nghịch đảo của chúng bằng $\frac{11}{12}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Vai trò x; y; z như nhau. Ta giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$

$$\text{Ta có: } \frac{xy}{3z} + \frac{yz}{3x} + \frac{zx}{3y} = 1 \Leftrightarrow \frac{xy}{3z} + \frac{z}{3} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) = 1$$

$$\text{Với } x, y > 0 \text{ thì } (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

$$\text{Do đó } 1 = \frac{xy}{3z} + \frac{z}{3} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \geq \frac{z}{3} + \frac{2z}{3} = z \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = x = 1$$

$$\text{Vậy } (x; y; z) = (1; 1; 1)$$

b) Gọi ba số nguyên dương cần tìm là x; y; z. Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{12}$

Vai trò x; y; z như nhau. Ta giả sử $x \geq y \geq z > 1$. Ta có $\frac{3}{z} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{12} \Rightarrow z \leq \frac{36}{11} \Rightarrow z = 2; 3$

Với $z = 2$ thay vào và lý luận tương tự ta tìm được $(y = 3; x = 12); (y = 4; x = 6)$

Với $z = 3$ ta tìm được $(y = 3; x = 4)$

Nghiệm thỏa mãn bài toán là $(x; y; z) = (12; 3; 2); (6; 4; 2); (4; 3; 3)$ cùng các hoán vị của chúng.

Bài 17. Chứng minh phương trình $2x^2 - 9y^2 = 11$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên là $(x_0; y_0)$ ta có

$$2x_0^2 - 9y_0^2 = 11 \Rightarrow y_0 \text{ lẻ tức là } y_0 = 2k + 1 (k \in \mathbb{N}^*) .$$

Ta có $2x_0^2 - 9(2k+1)^2 = 11 \Rightarrow x_0^2 - 18k(k+1) = 10 \Rightarrow x_0$ chẵn tức là $x_0 = 2m (m \in \mathbb{N}^*)$. Tức là

$4m^2 - 18k(k+1) = 10 \Rightarrow 2m^2 - 9k(k+1) = 5$ vô lý vì $k(k+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên chẵn.

Vế trái chẵn, vế phải lẻ

Do đó phương trình $2x^2 - 9y^2 = 11$ không có nghiệm nguyên.

Bài 18. Chứng minh phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2016}$ có một số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Vai trò x; y; z như nhau ta giả sử $0 < x \leq y \leq z$. Ta có $\frac{1}{x} < \frac{1}{2016} \Rightarrow x > 2016$

Ta có $\frac{1}{2016} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow 2016 < x \leq 3.2016$

Vậy có hữu hạn số nguyên dương x. Ứng với mỗi giá trị của x ta có:

$$\frac{1}{2016} - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq \frac{2.2016x}{x-2016} \leq \frac{2.2016x}{1} \leq 2.2016^2$$

Vậy y hữu hạn $\Rightarrow$ z hữu hạn. Do đó phương trình có một số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

Bài 19. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy \Leftrightarrow 8xy(xy-1) + (x-y)^2 = 0$ (*)

Do $(x-y)^2 \geq 0$ nên nếu x, y là nghiệm nguyên của phương trình thì $xy(xy-1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq xy \leq 1$

Do x, y nguyên nên chỉ có hai khả năng:

- Nếu $xy = 0$ thì từ (*) ta có $x = y = 0$

- Nếu $xy = 1$ thì từ (*) ta có $x = y = \pm 1$.

Phương trình có 3 nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 0); (1; 1); (-1; -1)$

Bài 20. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số đó cho 2005 thì được dư là 23 còn khi chia số đó cho 2007 thì được dư 32.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số tự nhiên cần tìm là n . Ta có

$$n = 2005x + 23 = 2007y + 32 = 2005y + 2y + 32 \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 2y + 9 = 2005(x - y) = 2005k \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow y = \frac{2005k - 9}{2}$$

n nhỏ nhất khi y nhỏ nhất, y nhỏ nhất là 998 khi $k = 1$.

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là $n = 2007 \cdot 998 + 32 = 2003018$

Bài 21. Một đoàn học sinh đi cắm trại bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 người thì thừa 1 người. Nếu bớt đi 1 ô tô thì có thể phân phối đều tất cả các học sinh lên các ô tô còn lại. Hỏi có bao nhiêu học sinh đi cắm trại và có bao nhiêu ô tô? Biết rằng mỗi ô tô chỉ chở không quá 30 người.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số ô tô lúc đầu là x ($x \in \mathbb{N}$ và $x \geq 2$), số học sinh đi cắm trại sẽ là $22x + 1$.

Theo giả thiết nếu số xe là $x - 1$ thì số học sinh phân phối đều cho tất cả các xe.

Khi đó mỗi xe chở y học sinh ($y \in \mathbb{N}$ và $30 \geq y > 0$), ta có

$$(x - 1)y = 22x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{22x + 1}{x - 1} = 22 + \frac{23}{x - 1}$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x - 1$ phải là ước số của 23, 23 nguyên tố nên:

$$* \quad x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ suy ra } y = 22 + 23 = 45 \text{ (trái giả thiết)}$$

$$* \quad x - 1 = 23 \Leftrightarrow x = 24 \text{ suy ra } y = 22 + 1 = 23 < 30.$$

Vậy ô tô là 24 và số học sinh là $22 \cdot 24 + 1 = 529$.

Bài 22. Tìm cặp số tự nhiên ($m; n$) thỏa mãn hệ thức $m^2 + n^2 = m + n + 8$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Do } m, n \in \mathbb{N} \text{ nên } m^2 + n^2 = m + n + 8 \Leftrightarrow 4(m^2 + n^2) = 4(m + 11 + 8)$$

$$\Leftrightarrow (4m^2 - 4m + 1) + (4n^2 - 4n + 1) = 34 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 + (2n - 1)^2 = 3^2 + 5^2 (*)$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 3 \\ 2n - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2n - 1 = 3 \\ 2m - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

Có hai cặp số $(m; n)$ là $(2; 3)$ và $(3; 2)$

Bài 23. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $5x^2 + 8y^2 = 20412$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét: Với a, b là các số nguyên thỏa mãn $a^2 + b^2 \vdots 3$ thì $a \vdots 3$ và $b \vdots 3$.

Ta có $5x^2 + 8y^2 = 20412 \Leftrightarrow (6x^2 + 9y^2) - (x^2 + y^2) = 28 \cdot 9^3$

Suy ra $x^2 + y^2 \vdots 3 \Leftrightarrow x \vdots 3$ và $y \vdots 3$. Đặt $x = 3x_1; y = 3y_1$ ($x_1; y_1 \in \mathbb{Z}$)

Thay vào phương trình ta được $5x_1^2 + 8y_1^2 = 28 \cdot 9^2$

Tương tự ta có $x_1 = 3x_2; y_1 = 3y_2$ ($x_2; y_2 \in \mathbb{Z}$) ta được $5x_2^2 + 8y_2^2 = 28 \cdot 9$

Tương tự ta có $x_2 = 3x_3; y_2 = 3y_3$ ($x_3; y_3 \in \mathbb{Z}$) ta được $5x_3^2 + 8y_3^2 = 28$

Suy ra $y_3^2 \leq \frac{28}{8} < 2^2$ nên $y_3^2 = 0$ hoặc $y_3^2 = 1$

* Với $y_3^2 = 0$ thì $x_3^2 = \frac{28}{5}$ (loại)

* Với $y_3^2 = 1$ thì $x_3^2 = 2^2 \Rightarrow x_2^2 = 9 \cdot 2^2; y_2^2 = 9 \Rightarrow x_1^2 = 9^2 \cdot 2^2; y_1^2 = 9^2 \Rightarrow x^2 = 9^3 \cdot 2^2; y^2 = 9^3$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(54; 27); (54; -27); (-54; 27); (-54; -27)$

Bài 24. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ điều kiện đã cho $6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y$ chẵn và $x \neq 0; y \neq 0$

Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ là một cặp số nguyên thỏa mãn điều kiện thì các cặp số

$(x_0; -y_0); (-x_0; y_0); (-x_0; -y_0)$ cũng thỏa mãn điều kiện, do đó chỉ cần xét $x > 0, y > 0$. Từ điều kiện suy

ra $5y^2 < 74 \Rightarrow y^2 < 15 \Rightarrow 0 < y < 4 \Rightarrow y = 2$ (vì y chẵn) $\Rightarrow x = 3$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là $(3; 2); (3; -2); (-3; 2); (-3; -2)$.

Bài 25. Tìm các số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(x+y)^5 = 120y + 3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $x; y \in \mathbb{N}^*$ nên ta có $(x+y)^5 = 120y + 3 < 120(x+y) \Rightarrow (x+y)^4 < 120 < 4^4 \Rightarrow x+y < 4$

Cũng do $x; y \in \mathbb{N}^*$ nên $2 \leq x+y < 4$ mà $120y + 3$ là số lẻ $\Rightarrow x+y$ là số lẻ

Do đó $x+y = 3$. Vì vậy $3^5 = 120y + 3 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$

Nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x; y) = (1; 2)$

Bài 26. Tìm tất cả các số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $3^x - 2^y = 1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $3^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 2^y$ (1)

* Nếu x chẵn tức là $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Từ (1) ta có $(3^k + 1)(3^k - 1) = 2^y$

Do đó $\begin{cases} 3^k + 1 = 2^a \\ 3^k - 1 = 2^b \end{cases}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và $a > b$

Xét $2^a - 2^b = (3^k + 1) - (3^k - 1) = 2 \Rightarrow 2^b(2^{a-b} - 1) = 2$ nên

$$\begin{cases} 2^{a-b} - 1 = 1 \\ 2^b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-b} = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Do đó $\begin{cases} 3^k + 1 = 2^2 \\ 3^k - 1 = 2^1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \cdot 3^k = 6 \Leftrightarrow 3^k = 3 \Leftrightarrow k = 1$ khi đó $x = 2$

Từ (1) có $2^y = 3^2 - 1 = 8 = 2^3 \Rightarrow y = 3$

* Nếu x lẻ tức là $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

Xét $3^{2k+1} - 1 = 3(3^{2k} - 1) + 2 = 3(9^k - 1) + 2$ chia cho 8 dư 2

Vì $(9^k - 1) : (9 - 1) \Rightarrow 2^y$ chia cho 8 dư 2 $\Rightarrow 2^y = 2 \Rightarrow y = 1$

Ta có $3^x - 1 = 2^1 \Rightarrow x = 1$

Vậy tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ là $(2; 3)$ và $(1; 1)$

Bài 27. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y + xy - 2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$4 = x(2x + 3 - y - xy) \Rightarrow 4 : x \Rightarrow x \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\} (*)$$

$$\text{Từ phương trình} \Rightarrow xy(x + 1) = 2x^2 + 3x - 4 = (x + 1)(2x + 1) - 5$$

$$\Rightarrow (x + 1)(-xy + 2x + 1) = 5 \Rightarrow 5 : (x + 1) \Rightarrow x \in \{-6; -2; 0; 4\} (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow x \in \{-2; 4\}$$

$$\text{Với } x = -2 \text{ thì } y = -1$$

$$\text{Với } x = 4 \text{ thì } y = 2$$

Vậy có hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(-2; -1)$ và $(4; 2)$

Bài 28. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6xy + xy - 2y^2 + x - 2y = 7$$

$$\Leftrightarrow 3x(x - 2y) + y(x - 2y) + (x - 2y) = 7 \Leftrightarrow (x - 2y)(3x + y + 1) = 7$$

$$\text{Ta có } 7 = 7.1 = 1.7 = (-7).(-1) = (-1).(-7)$$

$$\text{Do đó ta xét trường hợp sau: } x - 2y = 7 (*) \text{ và } 3x + y + 1 = 1 (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ } x - 2y = 7 \Leftrightarrow x = 7 + 2y \text{ thay vào } (**) \text{ ta có } 3(7 + 2y) + y + 1 &= 1 \Leftrightarrow 21 + 7y = 0 \Leftrightarrow y = -3 \text{ thay } y = -3 \\ \text{vào } (*) \text{ ta có } x + 6 &= 7 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Tương tự với các trường hợp khác ta không tìm được $x; y$ nguyên.

$$\text{Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là } (x; y) = (1; -3)$$

C.BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI HSG VÀ CHUYÊN THƯỜNG GẶP

Câu 1: Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $xy - 2x - 3y + 1 = 0$.

Câu 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0$.

Câu 3: Tìm cặp số nguyên tố $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 2y^2 = 1$.

Câu 4: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình: $(y + 2)x^2 + 1 = y^2$.

Câu 5: Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn: $16(x^3 - y^3) = 15xy + 371$.

Câu 6: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2(y + 3) = y(x^2 - 3)^2$.

Câu 7: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = y^2$.

Câu 8: Chứng minh không tồn tại x, y nguyên thỏa mãn: $12x^2 + 26xy + 15y^2 = 4617$.

Câu 9: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $5x^2 + 8y^2 = 20412$.

Câu 10: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + 5y^2 = 41 + 2xy$.

Câu 11: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 4y + 3 = 0$.

Câu 12: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^3 - y^3 = 6xy + 3$.

Câu 13: Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $7x^2 + 3y^2 = 714$.

Câu 14: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^{2019} = y^{2019} - y^{1346} - y^{673} + 2$.

Câu 15: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - xy + 2 = x + y$.

Câu 16: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1:

Ta có: $xy - 2x - 3y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x(y-2) - 3(y-2) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(y-2) = 5$$

Vì x, y là số nguyên dương nên $x-3, y-2 \in \mathbb{Z}$.

Phân tích 5 thành tích của hai số nguyên ta có: $5 = 1.5 = (-1).(-5)$.

Ta có hệ sau: $\begin{cases} x-3=1 \\ y-2=5 \end{cases}; \begin{cases} x-3=5 \\ y-2=1 \end{cases}; \begin{cases} x-3=-5 \\ y-2=-1 \end{cases}; \begin{cases} x-3=-1 \\ y-2=-5 \end{cases}$.

Giải các hệ ta có các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình là $(4; 7), (8; 3)$.

Câu 2:

Ta có: $x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} - \left(y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} \right) + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = -10$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} \right) \left(x^2 + \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} \right) = -10$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y + 1)(x^2 + y) = -10.$$

Xét $x^2 - y + 1 + x^2 + y = 2x^2 + 1$.

Mà $x^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow 2x^2 + 1 > 0$.

Phân tích -10 thành tích hai số mà tổng của chúng lớn hơn 0 ta có: $10 = (-1).10 = (-2).5$

Xét hai trường hợp ta tìm ra các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn phương trình là $(\pm 2; -5), (\pm 2; 6), (\pm 1; -3), (\pm 1; 4)$

Câu 3:

Áp dụng tính chất: Một số chính phương chỉ có thể chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 1.

+ Nếu $x^2 \div 3$ thì $x \div 3$, mà x là số nguyên tố nên $x = 3$, suy ra $y = 2$.

+ Nếu x^2 chia 3 dư 1 thì $(x^2 - 1) \div 3$ hay $2y^2 \div 3$.

Mà y là số nguyên tố nên $y = 3$, không tồn tại x thỏa mãn.

Vậy $x = 3, y = 2$ là cặp số duy nhất thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 4:

Ta có: $(y+2)x^2 + 1 = y^2 \Leftrightarrow (y+1)x^2 + x^2 = y^2 - 1$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y+1-x^2) - 2(y+1) - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y+1-x^2) + (y+1-x^2) - 3(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(y-x^2-2) = -3.$$

Phân tích -3 thành tích hai số nguyên ta có: $-3 = 1 \cdot (-3) = (-1) \cdot 3$.

Thay các giá trị trên vào các cặp số, lần lượt giải các hệ phương trình ta được tập nghiệm nguyên dương của phương trình là $S = \{(0;1), (0;-1)\}$.

Câu 5:

Vì x, y nguyên dương nên $16(x^3 - y^3) = 15xy + 371 > 0 \Rightarrow x^3 > y^3 \Rightarrow x > y$.

Mặt khác, $15xy = 16(x^3 - y^3) - 371$ là số lẻ, suy ra x, y là số lẻ.

Suy ra $y \geq 1, x > y \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$.

Xét hai trường hợp:

+) Nếu $x = 3 \Rightarrow y < 3 \Rightarrow y = 1$. Thử lại ta thấy $(x; y) = (3; 1)$ thỏa mãn phương trình.

+) Nếu $x \geq 5$. Ta có: $x - 2 \geq y$, suy ra:

$$16(x^3 - y^3) \geq 16[x^3 - (x-2)^3] \Leftrightarrow 16(x^3 - y^3) \geq 16(6x^2 - 12x + 8).$$

Mặt khác: $15xy + 371 \leq 15x(x-2) + 371 \Leftrightarrow 15xy + 371 \leq 15x^2 - 30x + 371$.

Ta chứng minh rằng: $16(6x^2 - 12x + 8) > 15x^2 - 30x + 371$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \text{ (đúng với mọi } x \geq 5).$$

Suy ra $16(x^3 - y^3) > 15xy + 371$ với mọi $x \geq 5$.

Vậy phương trình có cặp nghiệm duy nhất là $(3;1)$.

Câu 6:

$$\text{Ta có: } x^2(y+3) = y(x^2-3)^2 \Leftrightarrow \frac{y+3}{y} = \left(\frac{x^2-3}{x}\right)^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{y} = x^2 + \frac{9}{x^2} - 6$$

Xét trường hợp $x=1$ thì $y=1$, $x=2$ thì không thỏa mãn.

Nếu $x \geq 3$ thì $\frac{3}{y} = x^2 + \frac{9}{x^2} - 7 > x^2 - 7 \geq 2$ suy ra $2y < 3$ nên $y=1$. Khi đó $x=3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương $(x; y) \in \{(1;1), (3;1)\}$.

Câu 7:

Phương trình đã cho tương đương $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = y^2+1$

$$\Leftrightarrow [x(x+3)+1]^2 = y^2+1$$

$$\Leftrightarrow [x(x+3)+1]^2 - y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x(x+3)+1-y)(x(x+3)+1+y) = 1.$$

Phân tích 1 thành tích hai số nguyên ta có: $1 = 1.1 = (-1).(-1)$

$$\text{+) Nếu } x(x+3)+1-y = x(x+3)+1+y = 1 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}.$$

$$\text{+) Nếu } x(x+3)+1-y = x(x+3)+1+y = -1 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có các cặp nghiệm thỏa mãn là: $(0;0), (-3;0), (-2;0), (-1;0)$.

Câu 8:

Giả sử tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $12x^2 + 26xy + 15y^2 = 4617$.

Khi đó: $12x^2 + 26xy + 15y^2 : 19 \Rightarrow 12x^2 - 12xy + 15y^2 + 38xy : 19$

$$\Leftrightarrow 3(4x^2 - 4xy + 5y^2) : 19$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + 4y^2 : 19$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + (2y)^2 : 19.$$

Nhận thấy rằng 19 là số nguyên tố có dạng $4k + 3$, áp dụng bổ đề “Nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 3$ và $p | a^2 + b^2$ thì $p | a, b$ ” suy ra $19 | 2x - y, 19 | 2y$.

Từ đó, 19 là ước của x, y hay $12x^2 + 26xy + 15y^2 : 19^2$.

Điều này vô lí vì 4617 không chia hết cho 19^2 .

Vậy không tồn tại các số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình.

Câu 9:

Ta có: 20412 chia hết cho 2 và $8y^2$ chia hết cho 2 nên x phải chia hết 2.

Đặt $x = 2x_1$ ($x_1 \in \mathbb{Z}$). Khi đó phương trình trở thành: $5x_1^2 + 2y^2 = 5103$.

Vì $5103 : 3$ nên $5x_1^2 + 2y^2 : 3$. Suy ra $x_1^2 + y^2 : 3$ hay x, y chia hết cho 3.

(ở đây ta sử dụng bổ đề “Nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 3$ và $p | a^2 + b^2$ thì $p | a, b$ ”).

Đặt $x_1 = 3x_2, y = 3y_1$ ($x_2, y_1 \in \mathbb{Z}$) thì phương trình trở thành: $5x_2^2 + 2y_1^2 = 567$.

Lập luận tương tự ta cũng có $x_2, y_1 : 3$.

Đặt $x_2 = 3x_3, y_1 = 3y_2$ ($x_3, y_2 \in \mathbb{Z}$), ta được $5x_3^2 + 2y_2^2 = 63$.

Lập luận tương tự ta cũng có $x_3, y_2 : 3$.

Đặt $x_3 = 3x_4, y_2 = 3y_3$ ($x_4, y_3 \in \mathbb{Z}$), ta được $5x_4^2 + 2y_3^2 = 7$.

Nếu $x_4 = 0$ hoặc $y_3 = 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $x_4 y_3 \neq 0$ thì $x_4 = \pm 1$ và $y_3 = \pm 1$, suy ra $x = \pm 54, y = \pm 27$.

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(54; 27), (54; -27), (-54; 27), (-54; -27)$.

Câu 10:

Ta có: $2x^2 + 5y^2 = 41 + 2xy$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 41$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-2y)^2 = 16 + 25$$

Do x, y là số nguyên nên ta có các trường hợp sau:

$$+ \begin{cases} x+y=4 \\ x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+ \begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{14}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+ \begin{cases} x+y=-4 \\ x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \text{ (chọn)}$$

$$+ \begin{cases} x+y=-5 \\ x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \text{ (chọn)}$$

$$+ \begin{cases} x+y=-4 \\ x-2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{13}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+ \begin{cases} x+y=-5 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{14}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+ \begin{cases} x+y=4 \\ x-2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ (chọn)}$$

$$+ \begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ (chọn)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 3), (-1; -3), (2; 3), (-2; -3)$.

Câu 11:

Ta có: $x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2y+2)^2 + (y+2)^2 = 5 = 2^2 + 1^2$

Bởi x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

$x-2y+2$	2	1	2	-1	-2	1	-2	-1
$y+2$	1	2	-1	2	1	-2	-1	-2

x	-2	-1	-6	-3	-6	-9	-10	-11
y	-1	0	-3	0	-1	-4	-3	-4

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm nguyên:

$$(-2; -1), (-6; -3), (-6; -1), (-10; -3), (-1; 0), (-3; 0), (-9; -4), (-11; -4).$$

Câu 12:

Phương trình tương đương với $(x - y)^3 + 3xy(x - y) = 6xy + 3$

Đặt $x - y = a, xy = b$ (a, b là các số nguyên).

$$\text{Ta có: } a^3 + 3ab = 6b + 3 \Leftrightarrow a^3 - 3 = -3b(a - 2) \Leftrightarrow \frac{a^3 - 3}{a - 2} = -3b \Leftrightarrow \frac{a^3 - 8 + 5}{a - 2} = -3b.$$

Để a, b nguyên thì $(a - 2)$ phải là ước của 5.

$a - 2$	1	-1	5	-5
a	3	1	7	-3
b	-8	$-\frac{2}{3}$ (loại)	$-\frac{68}{3}$ (loại)	-2
$(x; y)$	Vô nghiệm			$(-2; 1)$ hoặc $(-1; 2)$

Vậy phương trình có tập nghiệm $(x; y) = (-2; 1), (-1; 2)$.

Câu 13:

$$\text{Từ } 7x^2 + 3y^2 = 714 \Rightarrow \begin{cases} 3y^2 : 7 \\ 3y^2 \leq 714 \end{cases} \Rightarrow y^2 \in \{49; 196\}.$$

Do y nguyên dương nên ta có hai trường hợp $y = 7$ hoặc $y = 14$.

- $y = 7$ thay vào ta tìm được $x = 9$.
- $y = 14$ thay vào ta tìm được $x^2 = 18$, không có nghiệm nguyên x .

Do vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm nguyên dương $(x; y) = (9; 7)$.

Câu 14:

Đặt $\begin{cases} x^{673} = a \\ y^{673} = b \end{cases}$.

Phương trình trở thành $a^3 = b^3 - b^2 - b + 2 \Rightarrow (b-1)^3 < a^3 < (b+3)^3$.

Vì x, y nguyên nên a, b nguyên $\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = b+1 \\ a = b+2 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $a = b \Rightarrow -b^2 - b + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \Rightarrow x = y = 1$.

Trường hợp 2: $a = b+1 \Rightarrow -b^2 - b + 2 = 3b^2 + 3b + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \\ b = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ (loại).

Trường hợp 3: $a = b+2 \Rightarrow -b^2 - b + 2 = 6b^2 + 12b + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = \frac{-6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy hệ có 2 nghiệm nguyên $(x; y) = (1; 1), (1; -1)$.

Câu 15:

Biến đổi phương trình thành: $(x+1)(x^2 - x - y) = -2$

Suy ra các trường hợp sau:

$$+ \begin{cases} x+1 = -1 \\ x^2 - x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \quad + \begin{cases} x+1 = 1 \\ x^2 - x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x+1 = 2 \\ x^2 - x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad + \begin{cases} x+1 = -2 \\ x^2 - x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 11 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y) = (-3; 11), (1; 1), (0; 2), (-2; 4)$.

Câu 16:

Phương trình $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ (1).

Từ (1) suy ra $x \div 2$. Đặt $x = 2x_1$ ($x_1 \in \mathbb{Z}$). Thay vào (1) rồi chia hai vế cho 2 ta được $4x_1^3 + y^3 = 2z^3$ (2).

Từ (2) suy ra $y \div 2$. Đặt $y = 2y_1$ ($y_1 \in \mathbb{Z}$). Thay vào (2) rồi chia hai vế cho 2 ta được $2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3$ (3).

Từ (3) suy ra $z \div 2$. Đặt $z = 2z_1$ ($z_1 \in \mathbb{Z}$). Thay vào (3) rồi chia hai vế cho 2 ta được $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$.

Như vậy nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của (1) thì $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của (1).

Lập luận tương tự ta cũng có $(x_2; y_2; z_2)$ cũng là nghiệm của (1) với $x_2 = \frac{x_1}{2}; y_2 = \frac{y_1}{2}; z_2 = \frac{z_1}{2}$.

Cứ tiếp tục như vậy ta có x, y, z chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên duy nhất $x = y = z = 0$.

----- **HẾT** -----