
MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ.....	2
Chương I. CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA	2
§1. CĂN BẬC HAI.....	2
§2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = A $	2
§3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG	10
§4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG.....	20
§6. §7. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI	26
§8. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI.....	37
§9. CĂN BẬC BA	50

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I. CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

§1. CĂN BẬC HAI

§2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Căn bậc hai số học

Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là *căn bậc hai số học* của a .

Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.

Với $a \geq 0$, ta có:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a. \end{cases}$$

Với hai số a và b không âm, ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Căn thức bậc hai

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là *căn thức bậc hai* của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.

$\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi A lấy giá trị không âm.

Ta có
$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{Nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{Nếu } A < 0. \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CĂN BẬC HAI SỐ HỌC CỦA MỘT SỐ

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa căn bậc hai số học của một số không âm:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai số học rồi tìm căn bậc hai của:

a) 121

b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$

Giải

a) Ta có $\sqrt{121} = 11$ vì $11 \geq 0$ và $11^2 = 121$.

Do đó số 121 có hai căn bậc hai là 11 và -11.

b) $\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$ vì $\frac{2}{5} \geq 0$ và $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2$.

Do đó số $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ có hai căn bậc hai là $\frac{2}{5}$ và $-\frac{2}{5}$.

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức: $\sqrt{0,09} + 7\sqrt{0,36} - 3\sqrt{2,25}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \sqrt{0,09} + 7\sqrt{0,36} - 3\sqrt{2,25} \\ &= 0,3 + 7 \cdot 0,6 - 3 \cdot 1,5 = 0,3 + 4,2 - 4,5 = 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Giá trị của biểu thức sau là số vô tỉ hay hữu tỉ: $\sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$?

Giải

$$\sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot 18} = \sqrt{9} = 3.$$

Vậy giá trị của biểu thức đã cho là một số hữu tỉ, hơn nữa còn là một số tự nhiên.

Dạng 2. SO SÁNH CÁC CĂN BẬC HAI SỐ HỌC

Phương pháp giải

Dựa vào tính chất: Nếu $a, b \geq 0$ thì $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ví dụ 1. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh 8 và $\sqrt{65}$.

Giải

Cách 1: Ta có $8 = \sqrt{64}$. Vì $\sqrt{64} < \sqrt{65}$ nên $8 < \sqrt{65}$.

Cách 2: Vì $8^2 = 64$; $(\sqrt{65})^2 = 65$

Nên $8^2 < (\sqrt{65})^2$, suy ra $8 < \sqrt{65}$.

Cách giải này dựa vào tính chất: Nếu $a, b > 0$ và $a^2 < b^2$ thì $a < b$.

Như vậy, để so sánh hai số dương ta có thể so sánh các bình phương của chúng.

Ví dụ 2. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh $\sqrt{15}-1$ và $\sqrt{10}$.

Giải

Ta có $\sqrt{15}-1 < \sqrt{16}-1 = 4-1 = 3$,

$$\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3.$$

Vậy $\sqrt{15}-1 < \sqrt{10}$.

Ví dụ 3. Với $a < 0$ thì số nào lớn hơn trong hai số $\sqrt{-a}$ và $\sqrt{-2a}$?

Giải

Ta có $-1 > -2$ nên $-a < -2a$ (vì $a < 0$).

Do đó $\sqrt{-a} < \sqrt{-2a}$.

Dạng 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

Với $a \geq 0$:

- $x^2 = a$ khi $x = \pm \sqrt{a}$.
- $\sqrt{x} = a$ khi $x = a^2$.
- $\sqrt{x} < a$ khi $0 \leq x < a^2$.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $3x^2 = 0,75$.

Giải

Ta có $3x^2 = 0,75 \Leftrightarrow x^2 = 0,25$.

Do đó $x = \pm \sqrt{0,25} = \pm 0,5$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $2\sqrt{3x} = 12$.

Giải

ĐKXD: $x \geq 0$.

Ta có : $2\sqrt{3x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = 36 \Leftrightarrow x = 12$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 3. Tìm số x không âm, biết $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10$.

Giải

Với $x \geq 0$ ta có : $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10 \Leftrightarrow \sqrt{5x} < 20$

$$\Leftrightarrow 5x < 400 \Leftrightarrow x < 80.$$

Vậy $0 \leq x < 80$.

Ví dụ 4. Tính tổng các giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{x^2 + 25} = 13$.

Giải

Ta có : $\sqrt{x^2 + 25} = 13$

$$\Leftrightarrow x^2 + 25 = 169$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 169 - 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 12.$$

Vậy tổng các giá trị của x thỏa mãn đẳng thức đã cho là $(-12) + 12 = 0$.

Dạng 4. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ $\sqrt{A}$ CÓ NGHĨA**Phương pháp giải**

- $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$;
- $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$.

Ví dụ 1. Tìm x để căn thức $\sqrt{5-2x}$ có nghĩa.

Giải

$\sqrt{5-2x}$ có nghĩa khi $5-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm x để căn thức $\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$ có nghĩa.

Giải

$\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$ có nghĩa khi $\sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}}$ có nghĩa.

Điều đó xảy ra khi $(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Ví dụ 3. Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{25-x^2}$ có nghĩa?

Giải

$\sqrt{25-x^2}$ có nghĩa khi $25-x^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 \geq -25$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5.$$

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của x để biểu thức $\sqrt{\frac{1}{x^2-100}}$ có nghĩa

Giải

$\sqrt{\frac{1}{x^2-100}}$ có nghĩa khi $x^2-100 > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 > 100$$

$$\Leftrightarrow |x| > 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x < -10 \end{cases}$$

Ví dụ 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$ có nghĩa?

Giải

M có nghĩa khi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 2 \end{cases}$ Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của x để biểu thức M có nghĩa

Dạng 5. RÚT GỌN BIỂU THỨC DẠNG $\sqrt{A^2}$

Phương pháp giải

Vận dụng hằng đẳng thức:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$.

Giải

$$A = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

$$\text{Nếu } x \geq \frac{1}{2} \text{ thì } A = x - \frac{1}{2}$$

$$\text{Nếu } x < \frac{1}{2} \text{ thì } A = \frac{1}{2} - x$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{x^4} + \sqrt{x^6}$.

Giải

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{x^4} + \sqrt{x^6} = \sqrt{(x^2)^2} + \sqrt{(x^3)^2} \\ &= |x^2| + |x^3| = x^2 + |x^3|. \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } x \geq 0 \text{ thì } B = x^2 + x^3;$$

$$\text{Nếu } x < 0 \text{ thì } B = x^2 - x^3.$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $C = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$.

Giải

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} \\ &= |\sqrt{2} - 1| - |2 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 - (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$.

Giải

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 \\ &= \sqrt{(2x - 1)^2} + 3 = |2x - 1| + 3 \geq 3 \text{ với mọi } x \end{aligned}$$

Vậy $\min D = 3$ khi $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Tìm x , biết $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7x = 13$.

Giải

Ta có $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7x = 13$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} + 7x = 13$$

$$\Leftrightarrow |x-3| + 7x = 13 \quad (1)$$

Nếu $x \geq 3$ thì $|x-3| = x-3$. Khi đó (1) trở thành

$$x-3+7x=13 \Leftrightarrow 8x=16 \Leftrightarrow x=2 \quad (\text{không thuộc khoảng đang xét})$$

Nếu $x < 3$ thì $|x-3| = 3-x$. Khi đó (1) trở thành

$$3-x+7x=13 \Leftrightarrow 6x=10 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3} \quad (\text{thuộc khoảng đang xét})$$

Vậy giá trị của x thỏa mãn đẳng thức đã cho là $x = \frac{5}{3}$.

Ví dụ 6. Cho biểu thức: $P = 3x - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$.

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tính giá trị của P khi $x = 2$.

Giải

a) $P = 3x - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$.

$$= 3x - \sqrt{(x-5)^2}$$

$$= 3x - |x-5|.$$

- Nếu $x \geq 5$ thì $P = 3x - (x-5) = 2x + 5$;

- Nếu $x < 5$ thì $P = 3x + (x-5) = 4x - 5$.

b) Khi $x = 2 < 5$ thì giá trị của biểu thức là :

$$P = 4.2 - 5 = 3.$$

Lưu ý: Nếu bạn thay $x = 2$ vào biểu thức $2x + 5$ để tính giá trị của P thì bạn sai lầm vì biểu thức $P = 2x + 5$ khi $x \geq 5$.

Ví dụ 7. Cho biểu thức: $Q = 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

a) Rút gọn biểu thức Q;

b) Tính các giá trị của x để $Q = 7$.

Giải:

$$a) Q = 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2x - \sqrt{(x+1)^2} = 2x - |x+1|$$

$$* \text{ Nếu } x \geq -1 \text{ thì } Q = 2x - (x+1) = x-1$$

$$* \text{ Nếu } x < -1 \text{ thì } Q = 2x + (x+1) = 3x+1$$

b) Ta phải xét hai trường hợp:

$$* Q = 7 \Leftrightarrow x-1 = 7 \Leftrightarrow x = 8 \text{ (Không thỏa mãn } x \geq -1)$$

$$* Q = 7 \Leftrightarrow 3x+1 = 7 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (Không thỏa mãn } x < -1).$$

Vậy $Q = 7$ khi $x = 8$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh:

a) $\sqrt{26} + 3$ và $\sqrt{63}$;

b) $\frac{1}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

2. Tìm x, biết:

a) $5x^2 = 80$

b) $2\sqrt{x} = 1$

3. Tìm x để các căn thức bậc hai sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{2}{9-x}}$

b) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$

c*) $\sqrt{x^2 - 4x}$

4. Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{9-x^2}$

b) $\sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$

5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$

b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

c) $3x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

6. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2$

b) $\sqrt{x^2} = 3x - 2$

c) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = x + 7$

7*. Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x} > x$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $\sqrt{26} + 3 > \sqrt{63}$

b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{1}{2}$

2. a) $x = \pm 4$

b) $x = \frac{1}{4}$

c) $0 \leq x \leq 12$

3. a) $x < 9$

b) $x \in \mathbb{R}$

c) $x \geq 4$ hoặc $x \leq 0$

4. a) $-3 \leq x \leq 3$

b) $x > 2$ hoặc $x < -2$

c) $x \geq 0$ và $x \neq 9$

5. a) $\sqrt{10} - 3$

b) $\sqrt{5} - 2$

c) $\begin{cases} 2x+1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 4x-1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

6. a) $x = 3$ hoặc $x = 7$

b) $x = 1$

c) $x \in \left\{10; -\frac{4}{3}\right\}$

7. $\sqrt{x} > x$ (1). Điều kiện $x > 0$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow x > x^2$ (do hai vế của (1) đều dương)

$\Leftrightarrow x - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow x(1 - x) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$

§3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lý:

Với hai số a và b không âm, ta có:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

2. Áp dụng

Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn rồi khai phương kết quả đó.

3. Chú ý:

Với hai biểu thức A và B không âm, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ và ngược lại $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$. Đặc biệt khi $A \geq 0$, ta có: $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: KHAI PHƯƠNG MỘT TÍCH

Phương pháp giải:

Dựa vào quy tắc khai phương một tích:

$$\text{Với } a, b \geq 0 \text{ thì } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Ví dụ 1: Tính:

a) $\sqrt{12,1 \cdot 160}$

b) $\sqrt{2500 \cdot 4,9 \cdot 0,9}$

Giải:

a) $\sqrt{12,1 \cdot 160} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{16} = 11 \cdot 4 = 44$

b) $\sqrt{2500 \cdot 4,9 \cdot 0,9} = \sqrt{25 \cdot 49 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 7 \cdot 3 = 105$

Ví dụ 2: Tính:

a) $\sqrt{41^2 - 40^2}$

b) $\sqrt{81 \cdot 6,25 - 2 \cdot 25 \cdot 81}$

Giải:

a) $\sqrt{41^2 - 40^2} = \sqrt{(41 - 40)(41 + 40)} = \sqrt{1 \cdot 81} = 1 \cdot 9 = 9$

$$\sqrt{81.6,25 - 2,25.81} = \sqrt{81.(6,25 - 2,25)} = \sqrt{81}.\sqrt{4} = 9.2 = 18$$

Ví dụ 3: Đẳng thức $\sqrt{x(1-y)} = \sqrt{x}.\sqrt{1-y}$ đúng với những giá trị nào của x và y.

Giải:

Theo định lí khai phương một tích thì

$$\sqrt{x(1-y)} = \sqrt{x}.\sqrt{1-y} \text{ khi } x \geq 0 \text{ và } 1-y \geq 0 \text{ hay } x \geq 0 \text{ và } y \leq 1.$$

Ví dụ 4: Cho các biểu thức $M = \sqrt{(x-1)(x+3)}$ và $N = \sqrt{x-1}.\sqrt{x+3}$

a) Tìm các giá trị của x để M có nghĩa; N có nghĩa.

b) Với giá trị nào của x thì M=N?

Giải:

M có nghĩa khi $(x-1)(x+3) \geq 0$.

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3$$

Vậy M có nghĩa khi $x \geq 1$ hoặc $x \leq -3$.

$$N \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

b) Để M và N đồng thời có nghĩa thì $x \geq 1$

Khi đó ta có M = N theo định lí khai phương một tích.

Dạng 2: NHÂN CÁC CĂN BẬC HAI

Phương pháp giải:

Dựa vào quy tắc nhân các căn bậc hai :

Với $a, b \geq 0$ thì $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$

Ví dụ 1: Tính:

$$a) \sqrt{72}.\sqrt{50}$$

$$b) \sqrt{12,8}.\sqrt{0,2}$$

Giải:

$$a) \sqrt{72}.\sqrt{50} = \sqrt{72.50} = \sqrt{36.100} = 6.10 = 60$$

$$b) \sqrt{12,8}.\sqrt{0,2} = \sqrt{12,8.0,2} = \sqrt{128.0,02} = \sqrt{64.0,04} = 8.0,2 = 1,6$$

Ví dụ 2: Tính:

$$a) \sqrt{40}.\sqrt{20}.\sqrt{4,5}$$

$$b) \sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{\frac{12}{25}}.\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Giải:

$$a) \sqrt{40}.\sqrt{20}.\sqrt{4,5} = \sqrt{40.20.4,5} = \sqrt{400.9} = 20.3 = 60$$

$$b) \sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{\frac{12}{25}}.\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}.\frac{12}{25}.\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

Ví dụ 3: Thực hiện các phép tính:

$$a) (\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}).\sqrt{5}$$

$$b) (\sqrt{12} + \sqrt{3})(\sqrt{27} - \sqrt{3})$$

$$c) (\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} - 1)$$

Giải:

a) $(\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100} + \sqrt{225} - \sqrt{25} = 10 + 15 - 5 = 20$

b) $(\sqrt{12} + \sqrt{3})(\sqrt{27} - \sqrt{3}) = \sqrt{324} - \sqrt{36} + \sqrt{81} - \sqrt{9} = 18 - 6 + 9 - 3 = 18$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} - 1) = 5 - \sqrt{5} - \sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - 1 = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{3}.$

Ví dụ 4: Tính:

a) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$

b) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$

c) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7})$

Giải:

a) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 7 + 2\sqrt{21} + 3 = 10 + 2\sqrt{21}$

b) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{8})^2 - 2\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{16} + 2 = 2$

c) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}) = (5\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{7})^2 = 25 \cdot 3 - 4 \cdot 7 = 47$

Dạng 3: RÚT GỌN, TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC:

Phương pháp giải:

* Trước hết tìm điều kiện của biến để biểu thức có nghĩa (nếu cần)

* Áp dụng quy tắc khai phương một tích, quy tắc nhân các căn bậc hai, các hằng đẳng thức để rút gọn.

* Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}}$ với $x > 0$

b) $\sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2}$ với $x > 2$

Giải:

a) $\sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}} = \sqrt{\frac{3x}{5} \cdot \frac{5x}{27}} = \sqrt{\frac{x^2}{9}} = \frac{|x|}{3} = \frac{x}{3} \quad (\forall x > 0)$

b) $\sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2} = \sqrt{x^6} \cdot \sqrt{(x-2)^2} = |x^3| \cdot |x-2| = x^3(x-2) \quad (\text{vì } x > 2).$

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}}$

b) $\sqrt{16(x^2 - 6x + 9)}$

Giải:

a) ĐK: $x \neq 0$.

$$\sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}} = \sqrt{900x^2} = 30|x| = \begin{cases} 30x & \text{nếu } x > 0 \\ -30x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

b) $\sqrt{16(x^2 - 6x + 9)} = \sqrt{16(x-3)^2} = 4|x-3| = \begin{cases} 4(x-3) & \text{nếu } x \geq 3 \\ -4(x-3) & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $M = \sqrt{25x^2(x - 2\sqrt{x} + 1)}$ với $0 < x < 1$.

Giải:

Ta có $M = \sqrt{25x^2(x - 2\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{25(\sqrt{x} - 1)^2} = 5|\sqrt{x} - 1|.$

Vì $x > 0$ nên $|x| = x$.

Vì $0 < x < 1$ nên $\sqrt{x} < 1$. Do đó $|\sqrt{x} - 1| = 1 - \sqrt{x}$

Vậy $M = 5x(1 - \sqrt{x})$

Ví dụ 4: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

c) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

Giải:

a) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$

b) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 3} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

c) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 4} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - 2$

Nhận xét: Phương pháp giải trong ví dụ này là biến đổi biểu thức lấy căn thành bình phương của tổng hay hiệu hai số rồi áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Ví dụ 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$

b) $\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}}$

Giải:

a) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1 + 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1$ (ĐK: $x \geq 1$)

b) $\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x+1} - 1)^2} = |\sqrt{x+1} - 1|$ (ĐK $x \geq -1$)

Nếu $x \geq 0$ thì $|\sqrt{x+1} - 1| = \sqrt{x+1} - 1$

Nếu $x < 0$ thì $|\sqrt{x+1} - 1| = 1 - \sqrt{x+1}$

Dạng 4: BIẾN ĐỔI MỘT BIỂU THỨC VỀ DẠNG TÍCH

Phương pháp giải:

Dùng cách đặt nhân tử chung, nhóm các hạng tử, dùng các hằng đẳng thức,...

Ví dụ 1: Phân tích thành nhân tử:

a) $3 - \sqrt{3}$

b) $x + 3\sqrt{xy}$

c) $x\sqrt{y} - y\sqrt{x}$

d) $x - \sqrt{x} - \sqrt{xy} + \sqrt{y}$

Giải:

a) $3 - \sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$

b) $x + 3\sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})$ (ĐK $x \geq 0; y \geq 0$)

c) $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ (ĐK $x \geq 0; y \geq 0$)

d) $x - \sqrt{x} - \sqrt{xy} + \sqrt{y} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{y}(\sqrt{y} - 1)$
 $= (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ (ĐK $x \geq 0; y \geq 0$)

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử:

a) $\sqrt{x^3} - 25\sqrt{x}$

b) $9x + 6\sqrt{xy} + y$

c) $\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$

d) $\sqrt{x^2 - 9} - 2\sqrt{x - 3}$

Giải:

a) $\sqrt{x^3} - 25\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x^2 - 25}) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5) \quad \text{ĐK: } x \geq 0$

b) $9x + 6\sqrt{xy} + y = (3\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \quad (\text{ĐK: } x, y \geq 0).$

c) $\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) \quad (\text{ĐK: } x, y \geq 0).$

d) $\sqrt{x^2 - 9} - 2\sqrt{x - 3} = \sqrt{x - 3}(\sqrt{x + 3} - 2) \quad (\text{ĐK: } x \geq 3).$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: $(\sqrt{14} + \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}}$.

Giải

$$\begin{aligned}(\sqrt{14} + \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}} &= \sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{5 - \sqrt{21}} \\&= (\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{10 - 2\sqrt{7 \cdot 3}} = (\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2} \\&= (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 4.\end{aligned}$$

Dạng 5: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải:

- Trước tiên tìm điều kiện để căn thức có nghĩa.
- Áp dụng quy tắc khai phương một tích, áp dụng các hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$;
 $(\sqrt{A})^2 = A$ (với $A \geq 0$) đưa phương trình đã cho về phương trình đơn giản hơn.
- Có thể đưa về phương trình tích.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sqrt{25 \cdot (x + 5)^2} = 15$.

Giải

Ta có $\sqrt{25 \cdot (x + 5)^2} = 15$

$$\Leftrightarrow 5|x + 5| = 15 \Leftrightarrow |x + 5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 3 \\ x + 5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -8. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2 - 90x + 225} = 6$.

Giải

Ta có: $\sqrt{9x^2 - 90x + 225} = 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9(x^2 - 10x + 25)} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{9(x-5)^2} = 6 \Leftrightarrow 3|x-5| = 6$$

$$\Leftrightarrow |x-5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=2 \\ x-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=3. \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 25} = 2\sqrt{x-5}$.

Giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x^2 - 25 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 25 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Khi đó $\sqrt{x^2 - 25} = 2\sqrt{x-5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+5)(x-5)} - 2\sqrt{x-5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5}(\sqrt{x+5} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} = 0 \\ \sqrt{x+5} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} = 0 \\ \sqrt{x+5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+5=4 \end{cases} \begin{cases} x=5(TM) \\ x=-1(L). \end{cases}$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = \frac{1}{5}\sqrt{25x-125} + 6$.

Giải

ĐK: $x \geq 5$.

Ta có $\sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = \frac{1}{5}\sqrt{25x-125} + 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9 \cdot (x-5)} = \frac{1}{5}\sqrt{25(x-5)} + 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} = \sqrt{x-5} + 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 6$$

$$\Leftrightarrow x-5 = 36$$

$$\Leftrightarrow x = 41 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

Giải

ĐK: $x > 0$.

Ta có: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Dạng 6: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

Có thể dùng các phương pháp sau:

- Với $a \geq 0$; $b \geq 0$ thì $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$;
- Biến đổi tương đương.

Ví dụ 1: Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh rằng:

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}.$$

Giải

Ta có $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 \text{ (vì hai vế đều dương)}$$

$$\Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{40} + 8 < 6 + 2\sqrt{42} + 7 \Leftrightarrow 13 + 2\sqrt{40} < 13 + 2\sqrt{42}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{40} < \sqrt{42} \Leftrightarrow 40 < 42.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 2: Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh rằng:

$$\sqrt{3} + 2 < \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1).$$

Giải

Ta có $(\sqrt{3} + 2)^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3}$;

$$\left[\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\right]^2 = 2(\sqrt{3}+1)^2 = 2(3+2\sqrt{3}+1) = 8+4\sqrt{3}.$$

Vì $7+4\sqrt{3} < 8+4\sqrt{3}$ nên $(\sqrt{3}+2)^2 < \left[\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\right]^2$.

Do đó $\sqrt{3}+2 < \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

Ví dụ 3: Cho $a > 0$, chứng minh rằng: $\sqrt{a+9} < \sqrt{a}+3$.

Giải

Ta có $(\sqrt{a+9})^2 = a+9$;

$$(\sqrt{a}+3)^2 = a+6\sqrt{a}+9.$$

Do $a > 0$ nên $a+9 < a+9+6\sqrt{a}$, do đó $(\sqrt{a+9})^2 < (\sqrt{a}+3)^2$.

Vậy $\sqrt{a+9} < \sqrt{a}+3$.

Chú ý: Căn bậc hai của một tổng không bằng tổng các căn bậc hai.

Ví dụ 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

a) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$;

b) $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Giải

a) Ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a=b \text{)}.$$

Bất đẳng thức cuối này đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

Lưu ý : Bất đẳng thức $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ với $a, b \geq 0$ gọi là bất đẳng thức Cô – si.

b) Ta có $a, b, c \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – si đối với hai số ta được:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c+a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Suy ra $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$).

Ví dụ 5: Cho $a \geq \frac{1}{2}$, chứng minh rằng: $\sqrt{2a-1} \leq a$.

Giải

Từ bất đẳng thức Cô – si $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ suy ra $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức này cho các số không âm $2a-1$ và 1 ta được:

$$\sqrt{2a-1} = \sqrt{(2a-1).1} \leq \frac{(2a-1)+1}{2} = a.$$

Vậy $\sqrt{2a-1} \leq a$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính

a) $\sqrt{400.0,81}$;

b) $\sqrt{\frac{5}{27} \cdot \frac{3}{20}}$;

c) $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3^2}$;

d) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2 \cdot (2+\sqrt{5})^2}$.

2. Tính

a) $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)$;

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$;

c) $\left(\sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{\frac{49}{3}} + \sqrt{3}\right)\sqrt{3}$;

d) $(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{3} + \sqrt{8-2\sqrt{15}}$;

b) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$.

4. Phân tích thành nhân tử

a) $a - 5\sqrt{a}$;

b) $a - 7$ với $a > 0$;

c) $a + 4\sqrt{a} + 4$;

d) $\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 12$.

5. Giải phương trình

a) $\sqrt{49(1-2x+x^2)} - 35 = 0$;

b) $\sqrt{x^2-9} - 5\sqrt{x+3} = 0$;

$$c) \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}.$$

6*. Tìm x và y , biết $x+y+13=2(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})$.

7*. Chứng minh rằng: $\sqrt{7}-\sqrt{3} < \sqrt{6}-\sqrt{2}$.

8. Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ với $a, b \geq 0$.

9*. Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) 18; b) $\frac{1}{6}$; c) 15; d) 1.
2. a) $x-\sqrt{x}-6$; b) $x-y$; c) 1; d) $2\sqrt{3}-1$.
3. a) $\sqrt{5}$; b) $\begin{cases} \sqrt{x-2}-1 & \text{ khi } x \geq 3 \\ 1-\sqrt{x-2} & \text{ khi } x < 3. \end{cases}$
4. a) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-5)$; b) $(\sqrt{a}-\sqrt{7})(\sqrt{a}+\sqrt{7})$; c) $(\sqrt{a}+2)^2$; d) $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{y}-4)$.
5. a) $x_1=6$; $x_2=-4$; b) $x_1=-3$; $x_2=28$; c) $x=25$.

6*. $x+y+13=4\sqrt{x}+6\sqrt{y}$ (ĐK: $x, y \geq 0$)

$$\Leftrightarrow (x-4\sqrt{x}+4) + (y-6\sqrt{y}+9) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + (\sqrt{y}-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 = 0 \text{ và } (\sqrt{y}-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x=4 \text{ và } y=9.$$

7*. $\sqrt{7}-\sqrt{3} < \sqrt{6}-\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7}+\sqrt{2} < \sqrt{6}+\sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{7}+\sqrt{2})^2 < (\sqrt{6}+\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{14} < 9+2\sqrt{18} \Leftrightarrow 2\sqrt{14} < 2\sqrt{18}.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

8. Bình phương hai vế.

9*. Tính A^2 được $A^2 = 2$, suy ra $A = \sqrt{2}$.

§4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lý

Với số a không âm và số b dương, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

2. Áp dụng

Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b , rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho căn bậc hai của số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

3. Chú ý

Với các biểu thức $A \geq 0$ và $B > 0$, ta có

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: KHAI PHƯƠNG MỘT THƯƠNG

Phương pháp giải

Dựa vào quy tắc khai phương một thương:

Với $a \geq 0$; $b > 0$ thì $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Ví dụ 1. Tính

a) $\sqrt{\frac{4}{25} \cdot \frac{49}{121}}$;

b) $\sqrt{\frac{-36a}{49}}$ với $a < 0$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{4}{25} \cdot \frac{49}{121}} = \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{22}{35}.$

$$b) \sqrt{\frac{-36a}{49}} = \frac{\sqrt{-36a}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{-a}}{\sqrt{49}} = \frac{6\sqrt{-a}}{7}.$$

Lưu ý: Vì $a < 0$ nên $\sqrt{-a}$ có nghĩa.

Ví dụ 2. Tính

$$a) \sqrt{\frac{65^2 - 52^2}{225}};$$

$$b) \sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44}.$$

Giải

$$a) \sqrt{\frac{65^2 - 52^2}{225}} = \sqrt{\frac{(65 - 52)(65 + 52)}{225}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 117}{225}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 13 \cdot 9}{15^2}} = \frac{13 \cdot 3}{15} = \frac{39}{15}.$$

$$b) \sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44} = \sqrt{\left(\frac{11}{9} - \frac{7}{9}\right) : \frac{144}{100}} \\ = \sqrt{\frac{4}{9} : \frac{144}{100}} = \sqrt{\frac{4}{9} : \frac{144}{100}} = \frac{2}{3} : \frac{12}{10} = \frac{5}{9}.$$

Ví dụ 3. Đẳng thức $\sqrt{\frac{x-5}{y+2}} = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{y+2}}$ đúng với những giá trị nào của x và y ?

Giải

Theo định lí khai phương một thương thì

$$\sqrt{\frac{x-5}{y+2}} = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{y+2}}$$

khi $x-5 \geq 0$ và $y+2 > 0$ hay $x \geq 5$ và $y > -2$.

Dạng 2. CHIA CÁC CĂN BẬC HAI

Phương pháp giải

Dựa vào quy tắc chia các căn bậc hai:

Với $a \geq 0$; $b > 0$ thì $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$

Ví dụ 1. Tính

$$a) \sqrt{45} : \sqrt{80};$$

$$b) \sqrt{(2.3)^5} : \sqrt{2^3.3^5}.$$

Giải

$$\text{a) } \sqrt{45} : \sqrt{80} = \sqrt{\frac{45}{80}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{b) } \sqrt{(2.3)^5} : \sqrt{2^3.3^5} = \sqrt{\frac{2^5.3^5}{2^3.3^5}} = \sqrt{2^2} = 2.$$

Ví dụ 2. Tính

$$\text{a) } \sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3} ;$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}.$$

Giải

$$\text{a) } \sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{54 : 2} : \sqrt{3} = \sqrt{27 : 3} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} = \sqrt{\frac{3}{75}} : \sqrt{\frac{52}{117}} = \sqrt{\frac{1}{25}} : \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{10}.$$

Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính

$$\text{a) } (\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5} ;$$

$$\text{b) } (2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2}.$$

Giải

$$\text{a) } (\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5} = \sqrt{9} - \sqrt{25} + \sqrt{4} = 3 - 5 + 2 = 0.$$

$$\text{b) } (2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 2\sqrt{9} + 3\sqrt{4} - 6 = 2.3 + 3.2 - 6 = 6.$$

Dạng 3. RÚT GỌN, TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

- Tìm điều kiện của biến để căn thức có nghĩa.
- Áp dụng quy tắc khai phương một thương hoặc quy tắc chia các căn bậc hai để rút gọn.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}}.$

Giải

$$\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}} = \sqrt{\frac{3^{12}(3^4 - 1)}{3^8(3^4 - 1)}} = \sqrt{3^4} = 9.$$

Ví dụ 2. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau với $x = 6$:

$$A = \frac{\sqrt{(165^2 - 124^2)}}{\sqrt{369}} \cdot x.$$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{(165^2 - 124^2)}}{\sqrt{369}} \cdot x = \frac{\sqrt{(165+124)(165-124)}}{\sqrt{369}} \cdot x \\ &= \sqrt{\frac{289 \cdot 41}{369}} \cdot x = \sqrt{\frac{289}{9}} \cdot x = \frac{17}{3} \cdot x. \end{aligned}$$

Với $x = 6$ thì $A = \frac{17}{3} \cdot 6 = 34$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}}$.

Rút gọn rồi tính giá trị của B với $x = 5$; $y = 10$.

Giải

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}}. \text{ ĐK: } x > 1; y > 1.$$

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}} = \sqrt{\frac{x-1}{y-1}}.$$

Với $x = 5$; $y = 10$ thì $B = \sqrt{\frac{5-1}{10-1}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 4. Cho biểu thức $C = \sqrt{\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x+6\sqrt{xy}+9y}}$ với $x > 0$, $y > 0$.

Rút gọn rồi tính giá trị của C với $x = 25$; $y = 81$.

Giải

$$C = \sqrt{\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x+6\sqrt{xy}+9y}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+3\sqrt{y})^2}} = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}.$$

Với $x = 25$; $y = 81$ thì

$$C = \frac{|\sqrt{25} - \sqrt{81}|}{\sqrt{25} + 3\sqrt{81}} = \frac{|5 - 9|}{5 + 3 \cdot 9} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Dạng 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

- Tìm điều kiện để căn thức có nghĩa.
- Nếu hai vế không âm thì có thể bình phương hai vế để khử dấu căn.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{\frac{3x-1}{x+2}} = 2$.

Giải

ĐKXĐ: $3x-1$ và $x+2$ cùng dấu hoặc $x = \frac{1}{3}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} 3x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 3x-1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$

Vậy ĐKXĐ là $x \geq \frac{1}{3}$ hoặc $x < -2$.

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$\frac{3x-1}{x+2} = 4$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = 4(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = 4x+8$$

$$x = -9 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{\sqrt{5x-7}}{\sqrt{2x-1}} = 1$.

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 5x-7 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{5} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{5}.$$

Bình phương hai vế ta được:

$$\frac{5x-7}{2x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 5x-7 = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow 3x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính

$$\text{a) } \sqrt{72} : \sqrt{8} ;$$

$$\text{b) } (\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{112}) : \sqrt{7}.$$

2. Tính

$$\text{a) } \sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}} ;$$

$$\text{b) } \sqrt{54x} : \sqrt{6x} ;$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{1}{125}} \cdot \sqrt{\frac{32}{35}} : \sqrt{\frac{56}{225}}.$$

3. Làm phép chia

$$\sqrt{\frac{a-1}{a+2}} : \sqrt{\frac{a+2}{a^3-3a^2+3a-1}} \text{ với } a > 1.$$

4. Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } \frac{x^2}{y^2} : \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} \text{ với } x, y \neq 0;$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{27(x-1)^2}{12}} + \frac{3}{2} - (x-2) \sqrt{\frac{50x^2}{8(x-2)^2}} \text{ với } 1 < x < 2.$$

$$\text{5. Cho } x = \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ tính giá trị của biểu thức } M = \sqrt{6x+5}.$$

6*. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) 3; b) 5.
2. a) $\frac{7}{5}$; b) 3; c) $\frac{6}{35}$.
3. $\frac{(a-1)^2}{a+2}$.
4. a) $\begin{cases} x^2 & \text{ khi } x > 0 \\ -x^2 & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$; b) $4x$.
5. $x = \frac{2}{3}$; $M = 3$.
- 6*. Mỗi vé đều bằng 1.

§6. §7. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có:

$$\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{ khi } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{ khi } A < 0 \end{cases}$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$|A| \sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$, tức là:

- Nếu $A \geq 0$; $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$;
- Nếu $A < 0$; $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$.

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn.

Với các biểu thức A, B mà $A.B \geq 0$ và $B \neq 0$, ta có

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}.$$

4. Trục căn thức ở mẫu

Trường hợp 1: Với các biểu thức B, C mà $B > 0$ thì

$$\frac{C}{\sqrt{B}} = \frac{C\sqrt{B}}{B}.$$

Trường hợp 2: Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$; $A \neq B^2$ thì

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \pm B})}{A - B^2}.$$

Trường hợp 3: Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$ thì

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \pm \sqrt{B}})}{A - B}.$$

Hai biểu thức $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ và $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ gọi là hai biểu thức liên hợp với nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN

Phương pháp giải

- Biến đổi biểu thức lấy căn thành dạng tích trong đó có thừa số là bình phương của một số hoặc một biểu thức.
- Khai phương thừa số này và viết kết quả ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{45}$; b) $\sqrt{2400}$; c) $\sqrt{147}$; d) $\sqrt{1,25}$.

Giải

a) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{2400} = \sqrt{400 \cdot 6} = 20\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = 7\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{1,25} = \sqrt{0,25 \cdot 5} = 0,5\sqrt{5}$.

Ví dụ 2: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{50.6}$; b) $\sqrt{14.21}$; c) $\sqrt{32.45}$; d) $\sqrt{125.27}$.

Giải

a) $\sqrt{50.6} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{14.21} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7\sqrt{6}$;

$$c) \sqrt{32.45} = \sqrt{16.2.9.5} = \sqrt{16.9.10} = 4.3.\sqrt{10} = 12\sqrt{10} ;$$

$$d) \sqrt{125.27} = \sqrt{25.5.9.3} = \sqrt{25.9.15} = 5.3\sqrt{15} = 15\sqrt{15} .$$

Ví dụ 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$a) \sqrt{18x} ; \quad b) \sqrt{75x^2y} ; \quad c) \sqrt{605x^3y^2} .$$

Giải

$$a) \sqrt{18x} = \sqrt{9.2x} = 3\sqrt{2x} \text{ (với } x \geq 0 \text{)}.$$

$$b) \sqrt{75x^2y} = \sqrt{25x^2.3y} = 5|x|\sqrt{3y} \quad (y \geq 0)$$

$$\begin{cases} 5x\sqrt{3y} & \text{khi } x \geq 0 \\ -5x\sqrt{3y} & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

$$c) \sqrt{605x^3y^2} = \sqrt{121x^2.y^2.5x} = 11x|y|\sqrt{5x} \quad (x \geq 0)$$

$$= \begin{cases} 11xy\sqrt{5x} & \text{khi } y \geq 0 \\ -11xy\sqrt{5x} & \text{khi } y < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$a) \sqrt{128(x-y)^2} ; \quad b) \sqrt{150(4x^2-4x+1)} ; \quad c) \sqrt{x^3-6x^2+12x-8} .$$

Giải

$$a) \sqrt{128(x-y)^2} = \sqrt{64(x-y)^2.2} = 8|x-y|\sqrt{2}$$

$$= \begin{cases} 8(x-y)\sqrt{2} & \text{khi } x \geq y \\ 8(y-x)\sqrt{2} & \text{khi } x < y. \end{cases}$$

$$b) \sqrt{150(4x^2-4x+1)} = \sqrt{25.6(2x-1)^2}$$

$$= 5|2x-1|\sqrt{6} = \begin{cases} 5(2x-1)\sqrt{6} & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ 5(1-2x)\sqrt{6} & \text{khi } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$c) \sqrt{x^3-6x^2+12x-8} = \sqrt{(x-2)^3} = \sqrt{(x-2)^2.(x-2)}$$

$$= (x-2)\sqrt{x-2} \quad (\text{với } x \geq 2).$$

Dạng 2: ĐƯA THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN

Phương pháp giải

- Nếu $A \geq 0$ thì ta nâng A lên lũy thừa bậc hai rồi viết kết quả vào trong dấu căn:
 $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ (với $A \geq 0$; $B \geq 0$).
- Nếu $A < 0$ thì ta coi A như là $-(-A)$. Ta nâng $(-A)$ lên lũy thừa bậc hai rồi viết kết quả vào trong dấu căn. Còn dấu "-" vẫn để đằng trước dấu căn:
 $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$ (với $A < 0$; $B \geq 0$).

Ví dụ 1. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- a) $3\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{6}$; c) $\frac{2}{7}\sqrt{35}$.

Giải

- a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$;
b) $5\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 6} = \sqrt{150}$;
c) $\frac{2}{7}\sqrt{35} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 35} = \sqrt{\frac{20}{7}}$.

Ví dụ 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- a) $-4\sqrt{\frac{1}{8}}$; b) $-0,06\sqrt{250}$.

- a) $-4\sqrt{\frac{1}{8}} = -\sqrt{4^2 \cdot \frac{1}{8}} = -\sqrt{2}$
b) $-0,06\sqrt{250} = -\sqrt{(0,06)^2 \cdot 250} = -\sqrt{0,9}$

Ví dụ 3. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- a) $x\sqrt{x}$ b) $y\sqrt{\frac{x}{y}}$ c) $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Giải

- a) $x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}$ ($x \geq 0$)
b) ĐK: $x, y \geq 0$; $y \neq 0$

Xét trường hợp $x \geq 0, y > 0$, ta có $y\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2 \cdot \frac{x}{y}} = \sqrt{xy}$

Xét trường hợp $x < 0; y < 0$, ta có $y\sqrt{\frac{x}{y}} = -\sqrt{y^2 \frac{x}{y}} = -\sqrt{xy}$

c) ĐK: $xy > 0$, ta có $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} \frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

Ví dụ 4. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $-x\sqrt{\frac{3}{x}}$ với $x > 0$ b) $-x\sqrt{\frac{-1}{x}}$ với $x < 0$

Giải

a) Ta có $-x\sqrt{\frac{3}{x}} = -\sqrt{x^2 \frac{3}{x}} = -\sqrt{3x}$ với $x > 0$

b) Ta có $-x\sqrt{\frac{-1}{x}} = -\sqrt{(-x)^2 \left(\frac{-1}{x}\right)} = \sqrt{-x}$ với $x < 0$

Ví dụ 5. Chỉ ra chỗ sai trong các biến đổi sau:

a) $x\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3x^2}{7}}$ b) $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = y\sqrt{xy}$

Giải

a) Biến đổi $x\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3x^2}{7}}$ chỉ đúng khi $x \geq 0$

Nếu $x < 0$ thì $x\sqrt{\frac{3}{7}} = -\sqrt{\frac{3x^2}{7}}$

b) Biến đổi $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = y\sqrt{xy}$ chỉ đúng khi $x > 0$

Nếu $x < 0$ thì $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = -y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = -y\sqrt{xy}$

Dạng 3. KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC LẤY CĂN

Phương pháp giải

Vận dụng công thức $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{B}$ ($A, B \geq 0; B \neq 0$). Cụ thể gồm các bước sau :

- Biến đổi mẫu thành bình phương của một số hoặc một biểu thức (nếu cần);
- Khai phương mẫu và đưa ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn $\sqrt{\frac{5}{72}}$

Giải

Ta có $\sqrt{\frac{5}{72}} = \sqrt{\frac{5.2}{72.2}} = \sqrt{\frac{10}{144}} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{10}$

Nhận xét : Nếu bạn nhân cả tử và mẫu của phân số $\frac{5}{72}$ với 72 thì vẫn ra kết quả nhưng biến đổi

phức tạp hơn : $\sqrt{\frac{5}{72}} = \sqrt{\frac{5.72}{72.72}} = \sqrt{\frac{360}{72^2}} = \frac{6}{72} \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{10}$

Vậy tìm thừa số phụ như nào cho hợp lý ?

Trước hết bạn phân tích mẫu số ra thừa số nguyên tố: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Bạn thấy ngay thừa số phụ là 2, lúc đó số mũ của các thừa số nguyên tố đều chẵn.

Ví dụ 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{11}{27x}}$

b) $\sqrt{\frac{3x}{5y^3}}$

Giải

a) $\sqrt{\frac{11}{27x}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 3x}{27x \cdot 3x}} = \sqrt{\frac{33x}{81x^2}} = \frac{1}{9x} \sqrt{33x}$ (ĐK: $x > 0$)

b) $\sqrt{\frac{3x}{5y^3}} = \sqrt{\frac{3x \cdot 5y}{5y^3 \cdot 5y}} = \sqrt{\frac{15xy}{25y^4}} = \frac{1}{5y^2} \sqrt{15xy}$ (ĐK: $xy \geq 0; y \neq 0$)

Ví dụ 3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$

Giải

a) $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}} = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^4}} = \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{x+1}$ (ĐK: $x > -1$)

b) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x \cdot (x-1)}{x^4}} = \frac{1}{x^2} \sqrt{x \cdot (x-1)}$ (ĐK: $x \geq 1$ hoặc $x < 0$)

Dạng 4. TRỰC CĂN THỨC Ở MẪU

Phương pháp giải

Cách 1: Rút gọn biểu thức (nếu có thể):

+ Phân tích tử số thành tích có thừa số là căn thức ở mẫu.

+ Chia cả tử và mẫu cho thừa số chung.

Cách 2: Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu để làm mất dấu căn ở mẫu.

Ví dụ 1. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$ b) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

Giải

a) Ta có $\frac{3+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+1)}{5\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{5}$

b) Ta có $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$

Ví dụ 2. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ c) $\frac{3}{\sqrt{15}+4}$

Giải

a) $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$

c) $\frac{3}{\sqrt{15}+4} = \frac{3 \cdot (\sqrt{15}-4)}{(\sqrt{15}-4) \cdot (\sqrt{15}+4)} = \frac{3 \cdot (\sqrt{15}-4)}{15-16} = 3 \cdot (4-\sqrt{15})$

Ví dụ 3. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Giải

a) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2}{(5\sqrt{3}+3\sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{3}-3\sqrt{5})} = \frac{75+45-30\sqrt{15}}{75-45}$
 $= \frac{30 \cdot (4-\sqrt{15})}{30} = 4-\sqrt{15}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2-3} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1-2\sqrt{2}+2-3}$
 $= \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}$

Ví dụ 4. Trục căn thức ở mẫu.

a) $\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ với $a \geq 0; a \neq 1$ b) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}$ với $a > 0; b > 0; ab = \frac{1}{4}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} &= \frac{(1-\sqrt{a})^2}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} = \frac{1-2\sqrt{a}+a}{1-a} \\ \text{b)} \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)}{a+b+2\sqrt{ab}-1} \\ &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+1}{a+b+2\sqrt{\frac{1}{4}}-1} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+1}{a+b} \end{aligned}$$

Dạng 5. SO SÁNH HAI SỐ

Phương pháp giải

Thực hiện các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai rồi so sánh hai kết quả.

Chẳng hạn:

- Đưa thừa số vào trong dấu căn rồi dùng tính chất:
Nếu $A > B > 0$ thì $\sqrt{A} > \sqrt{B}$
- Đưa thừa số ra ngoài dấu căn rồi dùng tính chất:
Nếu $A, B, C > 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A\sqrt{C} > B\sqrt{C}$

Ví dụ 1. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh :

$$\text{a)} \quad 5\sqrt{6} \text{ và } 7\sqrt{3} \qquad \text{b)} \quad 3\sqrt{2\frac{2}{3}} \text{ và } 5\sqrt{1\frac{1}{5}}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \text{Ta có } 5\sqrt{6} &= \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{150}; \\ 7\sqrt{3} &= \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{147} \\ \text{Vì } \sqrt{150} &> \sqrt{147} \text{ nên } 5\sqrt{6} > 7\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \text{Ta có } 3\sqrt{2\frac{2}{3}} &= \sqrt{9 \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{24} \\ 5\sqrt{1\frac{1}{5}} &= \sqrt{25 \cdot \frac{6}{5}} = \sqrt{30} \\ \text{Vì } \sqrt{24} &< \sqrt{30} \text{ nên } 3\sqrt{2\frac{2}{3}} < 5\sqrt{1\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh :

$$\text{a)} \quad \frac{5}{4}\sqrt{2} \text{ và } \frac{2}{3}\sqrt{7} \qquad \text{b)} \quad -3\sqrt{11} \text{ và } -2\sqrt{23}$$

Giải

$$\text{a) Ta có } \frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}} = \sqrt{3\frac{1}{8}}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 7} = \sqrt{\frac{28}{9}} = \sqrt{3\frac{1}{9}}$$

$$\text{Vì } \sqrt{3\frac{1}{8}} > \sqrt{3\frac{1}{9}} \text{ nên } \frac{5}{4}\sqrt{2} > \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

$$\text{b) Ta có } -3\sqrt{11} = -\sqrt{9 \cdot 11} = -\sqrt{99}$$

$$-2\sqrt{23} = -\sqrt{4 \cdot 23} = -\sqrt{92}$$

$$\text{Vì } -\sqrt{99} < -\sqrt{92} \text{ nên } -3\sqrt{11} < -2\sqrt{23}$$

Ví dụ 3. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

$$\text{a) } 6\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 15\sqrt{\frac{2}{5}}, 9\sqrt{1\frac{2}{9}}$$

$$\text{b) } -\sqrt{71}, \frac{2}{3}\sqrt{12}, \frac{1}{2}\sqrt{21}, -5\sqrt{3}$$

Giải

$$\text{a) Ta có } 6\sqrt{3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}; 7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98};$$

$$15\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{225 \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{90}; 9\sqrt{1\frac{2}{9}} = \sqrt{81 \cdot \frac{11}{9}} = \sqrt{99}$$

$$\text{Vì } \sqrt{90} < \sqrt{98} < \sqrt{99} < \sqrt{108} \text{ nên } 15\sqrt{\frac{2}{5}} < 7\sqrt{2} < 9\sqrt{1\frac{2}{9}} < 6\sqrt{3}$$

$$\text{b) Ta có } \frac{2}{3}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 12} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \sqrt{5\frac{1}{3}};$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{21} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 21} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \sqrt{5\frac{1}{4}};$$

$$-5\sqrt{3} = -\sqrt{25 \cdot 3} = -\sqrt{75}.$$

$$\text{Vì } -\sqrt{75} < -\sqrt{71} < \sqrt{5\frac{1}{4}} < \sqrt{5\frac{1}{3}} \text{ nên } -5\sqrt{3} < \sqrt{71} < \frac{1}{2}\sqrt{21} < \frac{2}{3}\sqrt{12}.$$

Dạng 6. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Phương pháp giải

Thực hiện các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai rồi thu gọn các căn thức đồng dạng hoặc rút gọn các thừa số chung ở tử và mẫu.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a) } \sqrt{200} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\text{b) } \sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5})$$

Giải

$$\text{a) } \sqrt{200} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{8}} = 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}) &= \sqrt{216} + \sqrt{13,5} + \sqrt{37,5} \\ &= 6\sqrt{6} + \sqrt{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{75}{2}} = 6\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{5}{2}\sqrt{6} = 5\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a) } 12\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right); \quad \text{b) } 4\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}}$$

Giải

$$\text{a) } 12\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = 4\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = -2\sqrt{6}$$

$$\text{b) } 4\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

$$P = \sqrt{9ab} + 7\sqrt{\frac{a}{b}} - 5\sqrt{\frac{b}{a}} - 3ab\sqrt{\frac{1}{ab}} \text{ với } a, b > 0$$

Giải

$$P = \sqrt{9ab} + 7\sqrt{\frac{a}{b}} - 5\sqrt{\frac{b}{a}} - 3ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

$$P = 3\sqrt{ab} + \frac{7}{b}\sqrt{ab} - \frac{5}{a}\sqrt{ab} - 3ab \cdot \frac{1}{ab}\sqrt{ab} = \left(\frac{7}{b} - \frac{5}{a}\right)\sqrt{ab}$$

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức

$$B = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$$

Giải

$$B = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} + \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} + \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{6 - 5}$$

$$B = (\sqrt{5} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \sqrt{6} - \sqrt{5} = 2\sqrt{6}$$

Nhận xét: Phương pháp giải này ví dụ này là trục căn thức ở mẫu rồi làm các phép cộng, trừ. Nếu quy đồng mẫu thì rất phức tạp.

Ví dụ 5. Cho $a > b > 0$, chứng minh rằng $\frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a^2 - 2ab + b^2)}{75a^4b}} = \frac{2}{15}\sqrt{6b}$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a^2-2ab+b^2)}{75a^4b}} &= \frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a-b)^2 \cdot b}{75a^4b \cdot b}} \\ &= \frac{a^2b}{a-b} \cdot \frac{2(a-b)}{5a^2b} \cdot \sqrt{\frac{2b}{3}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{2b \cdot 3}{9}} = \frac{2}{15} \sqrt{6b}. \end{aligned}$$

Ta thấy vế trái đúng bằng vế phải.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

a) $\sqrt{75a^3}$; b) $\sqrt{98a^5(b^2-6b+9)}$.

2. Rút gọn biểu thức :

a) $2\sqrt{125} - 5\sqrt{45} + 6\sqrt{20}$; b) $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt{12}$.

3. So sánh các số sau:

a) $3\sqrt{7}$ và $2\sqrt{15}$; b) $-4\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$

4. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{3}{80}}$ b) $\sqrt{\frac{2}{75}}$

5. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{a-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}$ b) $\frac{13}{2\sqrt{3}-5}$ c) $\frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

6. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{8}{\sqrt{5}-3}$ b) $\frac{1}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

7. Tính

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)^2$

b) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

8. Cho $x = \frac{\sqrt{75} + \sqrt{12}}{\sqrt{147} - \sqrt{48}}$. chứng minh rằng $3x$ là một số nguyên.

9. Biến đổi $\frac{26}{10+4\sqrt{3}}$ về dạng $a+b\sqrt{3}$. tính tích $a.b$

10. Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ trong đó $x < y$ sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{539}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $5a\sqrt{3a} (a \geq 0)$; b) $\begin{cases} 7a^2(b-3)\sqrt{2a} & \text{nếu } b \geq 3 \\ 7a^2(3-b)\sqrt{2a} & \text{nếu } b < 3 \end{cases}$
2. a) $7\sqrt{5}$; b) 0
3. a) $3\sqrt{7} > 2\sqrt{15}$; b) $-4\sqrt{5} < -5\sqrt{3}$
4. a) $\frac{1}{20}\sqrt{15}$ b) $\frac{1}{15}\sqrt{6}$
5. a) $\sqrt{a}$ b) $-(2\sqrt{3}+5)$ c) $\sqrt{35}-6$
6. a) $-2(\sqrt{5}+3)$ b) $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{30}$ c) $\sqrt{35}-6$
7. a) $5+2\sqrt{6}$
b) trục căn thức pử mẫu của mỗi số hạng rồi tính tổng được $\sqrt{100}-\sqrt{1}=9$
8. tính x được $x = \frac{7}{3}$, do đó $3x = 7 \in \mathbb{Z}$

9*. $\frac{26}{10+4\sqrt{3}} = \frac{13}{5+2\sqrt{3}} = 5-2\sqrt{3}$

Vậy $a=5; b=-2$. do đó $a.b = 5.(-2) = -10$

10*. $\sqrt{539} = \sqrt{49.11} = 7.\sqrt{11}$

$$7.\sqrt{11} = \sqrt{11} + 6.\sqrt{11} = 2.\sqrt{11} + 5.\sqrt{11} = 3.\sqrt{11} + 4.\sqrt{11}$$

$$7.\sqrt{11} = 7.\sqrt{11} + \sqrt{36.11} = \sqrt{4.11} + \sqrt{25.11} = \sqrt{9.11} + \sqrt{16.11}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{11} + \sqrt{396} = \sqrt{44} + \sqrt{275} = \sqrt{99} + \sqrt{176}$$

Bài toán có ba đáp số: $(11; 396)$; $(44; 275)$; $(99 ; 176)$

§8. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta có thể:

- Thực hiện các phép biến đổi đơn giản các căn thức bậc hai nhằm làm xuất hiện các căn thức đồng dạng.
- Phối hợp thực hiện các phép tính với các biểu thức có dạng phân thức mà tử và mẫu có chứa căn thức bậc hai theo quy tắc thực hiện các phép tính về phân thức đại số.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

DẠNG 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỈ CÓ CỘNG, TRỪ ĂN THỨC

Phương pháp giải

Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn rồi dùng công thức:

$$m\sqrt{A} - n\sqrt{A} + p\sqrt{A} + q = (m - n + p)\sqrt{A} + q$$

trong đó $A \geq 0$

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45}$; b) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98}$

Giải

a) Ta có $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \sqrt{5}$

b) Ta có $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{4,5} - \frac{1}{2}\sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}}$ b) $42\sqrt{\frac{25}{6}} - 10\sqrt{\frac{3}{2}} - 12\sqrt{\frac{98}{3}}$

Giải

a)
$$\begin{aligned} \sqrt{4,5} - \frac{1}{2}\sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2}} - \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$42\sqrt{\frac{25}{6}} - 10\sqrt{\frac{3}{2}} - 12\sqrt{\frac{98}{3}}$$

b)
$$\begin{aligned} &= 42 \cdot \frac{5}{6}\sqrt{6} - 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} - 12 \cdot \frac{7}{3}\sqrt{6} \\ &= 35\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 28\sqrt{6} = 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức

$$M = 2x\sqrt{16xy^3} + 7\sqrt{25x^3y^3} - 3y\sqrt{36x^3y} \quad \text{với } x \geq 0; y \geq 0$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= 2x\sqrt{16xy^3} + 7\sqrt{25x^3y^3} - 3y\sqrt{36x^3y} \\ &= 8xy\sqrt{xy} + 35xy\sqrt{xy} - 18xy\sqrt{xy} = 25xy\sqrt{xy} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $N = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } N &= \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} \\
&= \frac{1}{2} [(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1)] = 1
\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Biến đổi biểu thức $5\sqrt{\frac{a}{b}} - 4\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{1}{ab}}$ về dạng $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\sqrt{ab}$, trong đó

$a, b > 0; x, y, z \in \mathbb{Z}$

Tính tổng $x + y + z$

Giải

$$\text{Ta có } 5\sqrt{\frac{a}{b}} - 4\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{5}{a}\sqrt{ab} - \frac{4}{b}\sqrt{ab} - \frac{1}{ab}\sqrt{ab} = \left(\frac{5}{a} - \frac{4}{b} - \frac{1}{ab}\right)\sqrt{ab}$$

Vậy $x = 5; y = -4; z = -1$. do đó $x + y + z = 0$

Dạng 2 : RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CÁC PHÉP CỘNG, TRỪ , NHÂN, CHIA CĂN THỨC DƯỚI DẠNG PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Phương pháp giải

- Xác định điều kiện để biểu thức có nghĩa gồm: điều kiện để biểu thức lấy căn không âm và điều kiện để mẫu thức khác 0.
- Vận dụng các quy tắc của phép tính về phân thức đại số, kết hợp với các phép tính về căn thức để đưa biểu thức đã cho về dạng đơn giản nhất.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x} - \frac{\sqrt{x}}{y - \sqrt{xy}}$

Giải

Điều kiện: $x > 0; y > 0; x \neq y$. khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} = \frac{y - x}{\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} \\
&= \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy}}
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 3\right) : \frac{\sqrt{xy}}{x + 3\sqrt{xy}}$

Giải

Điều kiện: $x > 0; y > 0$. khi đó ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 3 \right) : \frac{\sqrt{xy}}{x + 3\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = \frac{x - 9y}{y}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) : (x - y)$

Giải

$$P = \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) : (x - y)$$

$$P = (x + 2\sqrt{xy} + y) \cdot \frac{1}{x - y}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

Ví dụ 4: rút gọn biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1$. Khi đó ta có:

$$P = \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1}$$

$$P = x - 1$$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{3\sqrt{x} - 1}{1 - x} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right)$

Giải

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$. Khi đó ta có

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}-2}{x}$$

$$P = \frac{x-2\sqrt{x}+1+2x+2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x} = \frac{6}{\sqrt{x}}$$

Dạng 3. RÚT GỌN RỒI TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC HOẶC RÚT GỌN RỒI TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐỂ BIỂU THỨC CÓ MỘT GIÁ TRỊ NÀO ĐÓ

Phương pháp giải

Trước hết tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa rồi rút gọn biểu thức. sau đó thay giá trị của biến vào biểu thức đã được rút gọn rồi thực hiện các phép tính

Hoặc có thể phải sử dụng kết quả rút gọn, lập phương trình hoặc bất phương trình rồi giải ra để tìm giá trị của biến

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{4-x}$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$

Giải

a) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 4$. Khi đó ta có:

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) - (2-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{x-3\sqrt{x}+2-2x-4\sqrt{x}-2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{-x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$$

b) Ta có $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}} = 2(2+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}+1$

$$\text{Do đó } P = \frac{\sqrt{3}+1}{2-(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{-2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -(2+\sqrt{3})$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4x}{(x-1)^2}$

- a) Rút gọn P
b) Tính giá trị của P, biết $|x-5|=4$

Giải

a) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$. Khi đó ta có:

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)^2} \right] \cdot \frac{(x-1)^2}{4x}$$
$$P = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x}$$

$$P = \frac{(x+\sqrt{x}-2) - (x-\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{4x}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

b) Ta có $|x-5|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=4 \\ x-5=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=1 \end{cases}$

Với $x=9$, ta có $P = \frac{\sqrt{9}+1}{2\sqrt{9}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Với $x=1$, không thỏa mãn điều kiện đã nêu nên biểu thức P không có giá trị.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

- a) Rút gọn P
b) Tính giá trị của P, biết $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$

Giải

a) Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$. Khi đó ta có:

$$P = \left[\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$P = \frac{4\sqrt{xy} - (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$P = \frac{4\sqrt{xy} - x - 2\sqrt{xy} - y}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$P = \frac{-(x-2\sqrt{xy}+y)}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$P = \frac{-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

b) Ta có $\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{9x}{4}$

$$\text{Do đó } P = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{9}{4}x}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{\frac{5}{2}\sqrt{x}} = \frac{-2}{5}$$

Ví dụ 4. Cho $P = \left[\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{x+4\sqrt{x}+4} \right] : \left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P = -\frac{1}{2}$

Giải

a) Điều kiện: $x \geq 0 ; x \neq 4$. Khi đó ta có:

$$P = \left[\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{(\sqrt{x}+2)^2} \right] : \left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+2-2}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{2-(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{-\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

b) Ta có $P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-4 = \sqrt{x}+2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Ví dụ 5. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{x\sqrt{x}-9\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}-3}{x+3\sqrt{x}} \right)$$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P > 1$

Giải

a) Điều kiện: $x \geq 0 ; x \neq 9$. Khi đó ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{x-3\sqrt{x}+3}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$$

$$b) \text{ Để } P > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-4 > 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sqrt{x}-4 < 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < x < 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Dạng 4. RÚT GỌN BIỂU THỨC RỒI CHỨNG MINH BIỂU THỨC CÓ MỘT TÍNH CHẤT NÀO ĐÓ HOẶC TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

Phương pháp giải

Trước tiên tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa.

Sau đó rút gọn biểu thức, biến đổi kết quả (nếu cần) rồi lập luận đi đến điều kiện phải chứng minh hoặc đến điều phải tìm.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau là hằng số với mọi giá trị thích hợp của x và y :

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-y} + \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}-x} \right) \cdot \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$$

Giải

a) Điều kiện: $x \geq 0 ; y \geq 0 ; x \neq y$. Khi đó ta có:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})} \right) \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$$

$$A = \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$$

$$A = 1$$

Vậy giá trị của biểu thức A luôn là hằng số với mọi giá trị thích hợp x và y.

Ví dụ 2. Cho biểu thức

$$B = \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

a) Rút gọn B.

b) Chứng minh rằng B luôn luôn có giá trị không âm với mọi giá trị thích hợp của x.

Giải

a) Điều kiện $x \geq 0$. Khi đó ta có:

$$B = \frac{x+2+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x+2+x-1-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$

$$x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > x \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Do đó } B = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0.$$

$$\textbf{Ví dụ 3.} \text{ Cho biểu thức } C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - 1 \right)$$

a) Rút gọn C.

b) Chứng minh rằng C luôn luôn có giá trị âm với mọi giá trị thích hợp của x.

Giải

a) Điều kiện $x > 0$; $x \neq 1$. Khi đó ta có:

$$C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}-x-1}{x+1}$$

$$C = \frac{x+1-2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$C = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$C = \frac{-(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có $x \geq 0$; $x \neq 1$ nên $-(\sqrt{x}+1) < 0$:

$$x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Do đó $C = \frac{-(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} < 0$ với mọi giá trị thích hợp của x .

Ví dụ 4. Cho biểu thức $D = \left(2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3} \right) : \left[\frac{6\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right]$.

a) Rút gọn D .

b) Chứng minh rằng $D < \frac{3}{2}$

Giải

a) Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq \frac{9}{4}$. Khi đó ta có:

$$D = \frac{2(2\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-3} : \frac{6\sqrt{x}+1 + \sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$D = \frac{4\sqrt{x}-6-\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-3} : \frac{6\sqrt{x}+1+2x-3\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$D = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{2x+3\sqrt{x}+1}$$

$$D = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$D = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1}$$

$$b) \text{ Xét hiệu } D - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} = \frac{6\sqrt{x}-10-6\sqrt{x}-3}{2(2\sqrt{x}+1)} = \frac{-13}{2(2\sqrt{x}+1)} < 0$$

Vậy $D < \frac{3}{2}$

Nhận xét: Về mặt phương pháp, muốn chứng minh $D < \frac{3}{2}$ ta chứng minh

$$D - \frac{3}{2} < 0$$

Ví dụ 5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1} \right)$.

- a) Rút gọn P.
b) Tìm giá trị lớn nhất của P

Giải

- a) Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 1$. Khi đó ta có:

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{2(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-4)}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

- b) Ta có $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{1}{1} = 1$ vì $\sqrt{x} \geq 0$

Do đó $\max P = 1$ đạt được khi $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ví dụ 6. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{14}{x-9} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$

- a) Rút gọn Q.
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của Q

Giải

- a) Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 9$. Khi đó ta có:

$$Q = \frac{(\sqrt{x}-3)^2 + \sqrt{x}+3)^2 + 14}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

$$Q = \frac{x-6\sqrt{x}+9+x+6\sqrt{x}+9+14}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

$$Q = \frac{2x+32}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

$$Q = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$$

- b) Ta có $Q = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3}$
 $= \sqrt{x}+3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6$
 $\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6$ (bất đẳng thức cô si)
 $\geq 10 - 6 = 4$

Dấu “ = “ xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x} + 3}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = 5$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Vậy $\min Q = 4$ khi $x = 4$

Dạng 5. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

Biến đổi vế này thành vế kia hoặc biến đổi cả hai vế cùng bằng một biểu thức thứ ba.

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức sau với $x \geq 0$; $y \geq 0$ và $x \neq y$:

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{xy}}{x - y} \right) : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Giải

Xét vế trái T :

$$T = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{xy}}{x - y} \right) : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$T = \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$T = \left(\frac{x + 2\sqrt{xy} + y - 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$T = \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$T = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Ta thấy vế trái đúng bằng vế phải nên đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức sau với $x \geq 0$; $y \geq 0$ và $x \neq y$:

$$\left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x - y) = 1 - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Giải

Xét vế trái T :

$$T = \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x - y)$$

$$T = \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \cdot \frac{1}{x - y}$$

$$T = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

a) $\sqrt{6} + 3\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}$;

2. Biến đổi biểu thức $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ về dạng $\frac{m}{x^2-1}\sqrt{x^2-1}$, trong đó $x > 1$.

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3}{3-\sqrt{x}} - \frac{6\sqrt{x}}{x-9}.$$
$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \frac{\sqrt{y} - 1}{y - \sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{x - y}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

b) Với giá trị nào của x thì P có giá trị lớn nhất? Giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu?

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

1. a) $2\sqrt{6}$

b) $3(5a - 4b)$

2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn ta được $\frac{2}{x^2-1}\sqrt{x^2-1}$, suy ra $m = 2$.
3. $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x \geq 0$; $x \neq 9$. Khi đó $x = 0,36$, ta có $P = -\frac{2}{3}$.
4. Rút gọn về trái được $\frac{4\sqrt{xy}}{x-y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{x-y}$.
5. a) $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} (x > 0)$; b) $x \in [1; 4]$.
6. a) $\frac{6}{x-2\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x > 0$; $x \neq 9$; $x \neq 6$
- b) $P = \frac{6}{(\sqrt{x}-1)^2+2} \leq \frac{6}{2} = 3$ (vì $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$).

Suy ra $\max P = 3$ đạt được khi $x = 1$.

7. a) $P = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} (x \geq 0; x \neq 1)$.
- b) $P = \frac{5\sqrt{x}+15-17}{\sqrt{x}+3} = 5 - \frac{17}{\sqrt{x}+3}$
- $P \geq 5 - \frac{17}{3}$ (vì $\sqrt{x} \geq 0$).
- $P \geq -\frac{2}{3}$ (dấu bằng xảy ra khi $x = 0$).

Vậy $\min P = -\frac{2}{3}$, đạt được khi $x = 0$.

§9. CĂN BẬC BA

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khái niệm căn bậc ba.

Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

$$\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = a.$$

Như vậy, $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$

Nhận xét :

- Căn bậc ba của một số dương là số dương ;
- Căn bậc ba của một số âm là một số âm ;
- Căn bậc ba của số 0 là số 0 ;

2. Tính chất

- $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$;

- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ (với $b \neq 0$).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa căn bậc ba của một số :
 $\sqrt[3]{a} = a$.

Ví dụ 1. Hãy tìm :

- a) $\sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{729}$ c) $\sqrt[3]{331}$.

Giải

- a) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$ b) $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$ c) $\sqrt[3]{331} = \sqrt[3]{11^3} = 11$

Ví dụ 2. Hãy tìm :

- a) $\sqrt[3]{-343}$ b) $\sqrt[3]{-1000}$ c) $\sqrt[3]{-1728} \cdot 2\sqrt[3]{6} < 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$

Giải

- a) $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{-7^3} = -7$
b) $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{-10^3} = -10$
c) $\sqrt[3]{-1728} = \sqrt[3]{-12^3} = -12$

Ví dụ 2. Hãy tìm :

- a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ b) $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}}$ c) $\sqrt[3]{-0,064}$

Giải

- a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$
b) $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}} = 3\sqrt[3]{27 \cdot 12} - 1 = \sqrt[3]{324} - 1 < \sqrt[3]{343} - 1 = 7 - 1 = 6$
c) $\sqrt[3]{-0,064} = \sqrt[3]{(-0,4)^3} = -0,4$.

Dạng 2. SO SÁNH

Phương pháp giải

- Đưa các thừa số vào trong dấu căn : $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$.
- So sánh hai số trong dấu căn : $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Ví dụ 1. So sánh

a) 7 và $\sqrt[3]{345}$

b) $2\sqrt[3]{6}$ và $3\sqrt[3]{2}$

Giải

a) $7 = \sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{345}$;

b) $2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$

$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

$48 < 54$ nên $2\sqrt[3]{6} < 3\sqrt[3]{2}$

Ví dụ 2. So sánh

a) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18}$ và $\frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$

b) $\sqrt[3]{130} + 1$ và $3\sqrt[3]{12} - 1$

Giải

a) Ta có $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 18} = \sqrt[3]{\frac{16}{3}} = \sqrt[3]{5\frac{1}{3}}$

$\frac{3}{4}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 12} = \sqrt[3]{\frac{81}{16}} = \sqrt[3]{5\frac{1}{16}}$

Vì $5\frac{1}{3} > 5\frac{1}{16}$ nên $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18} > \frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$

b) Ta có $\sqrt[3]{130} + 1 > \sqrt[3]{125} + 1 = 5 + 1 = 6$;

$3\sqrt[3]{12} - 1 = \sqrt[3]{27 \cdot 12} - 1 = \sqrt[3]{324} - 1 < \sqrt[3]{343} - 1 = 7 - 1 = 6$;

Vậy $\sqrt[3]{130} + 1 > 3\sqrt[3]{12} - 1$.

Ví dụ 3. Cho $a < 0$, hỏi số nào lớn hơn trong hai số $\sqrt[3]{2a}$ và $\sqrt[3]{3a}$ **Giải**Ta có $2 < 3$ nên $2a > 3a$ (vì $a < 0$).Do đó $\sqrt[3]{2a} > \sqrt[3]{3a}$.**Dạng 3. THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH****Phương pháp giải**

Vận dụng định nghĩa căn bậc hai của một số, các tính chất nhân các căn bậc ba, chia các căn bậc ba.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64}$;

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128}$

Giải

a) Ta có $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64} = 2 + (-3) + (-4) = -5$

b) Ta có $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13.5} - \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15}$;

b) $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$.

Giải

a) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13.5} - \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15}$

$= \sqrt[3]{16 \cdot 13.5} + \sqrt[3]{120 : 15}$

$$= \sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{8}$$

$$= 6 - 2 = 4 = 6 - 2 = 4$$

$$\text{b) } (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1).$$

$$= \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$$

$$= 2 + 1 = 3$$

Nhận xét: Để tính tích trên có thể sử dụng hằng đẳng thức :

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$\text{Ta có } (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{2})^3 + 1^3 = 2 + 1 = 3.$$

Ví dụ 3. Tính

$$\text{a) } (\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1); \quad \text{b) } (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})^3 + 6\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1)$$

Giải

$$\text{a) Ta có } (\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1) = 5 + 3\sqrt[3]{25} + 3\sqrt[3]{5} + 1 - 3\sqrt[3]{25} - 3\sqrt[3]{5} = 6.$$

$$\text{b) Ta có } (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})^3 + 6\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1) = 4 - 3\sqrt[3]{32} + 3\sqrt[3]{16} - 2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2}$$

$$= 6 - 6\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} - 2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} = 2.$$

Ví dụ 4. Tính $A = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

Giải

Để tính giá trị của A, ta tính A^3 sau đó suy ra A.

Bạn nên nhớ hằng đẳng thức $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

$$\text{Ta có } A^3 = (\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2})^3$$

$$A^3 = (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)$$

$$\Rightarrow A^3 = 4 - 3A$$

$$\Rightarrow A^3 + 3A - 4 = 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow A - 1 = 0 \text{ (vì } A^2 + A + 4 > 0 \text{)}$$

$$\text{Vậy } A = 1$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức.

$$\text{a) } \sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x + 1)}; \quad \text{b) } \frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}$$

Giải

$$\text{a) Ta có } \sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x + 1)} = \sqrt[3]{(x + 1)^3} = x + 1.$$

$$\text{b) } \frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \sqrt[3]{x} + 1.$$

Dạng 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

- Nếu $x^3 = a$ thì $x = \sqrt[3]{a}$
- Nếu $x^3 = b$ thì $x = b^3$

Ví dụ 1. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1$;

b) $\sqrt[3]{1-x^2} + 2 = 0$.

Giải

a) Ta có $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} = 4 \Leftrightarrow x+7 = 64 \Leftrightarrow x = 57$.

b) Ta có $\sqrt[3]{1-x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x^2} = -2 \Leftrightarrow 1-x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Ví dụ 1. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$;

b) $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x$.

Giải

a) Ta có $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$
 $\Leftrightarrow 10\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 15$
 $\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} = 15$
 $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5$
 $\Leftrightarrow x = 125$.