

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương

trình $f(\sin x) = 1$ là

- A. 7.
B. 4.
C. 5.
D. 6.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2		0	
	$-\infty$							$+\infty$

Lời giải tham khảo

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t' = \cos x$, $t' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \xrightarrow[k \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]]{k=0;\pm 1;\pm 2..} x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\}$.

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$
t		0	1	-1	1	

- $\begin{cases} t < -1 \\ t > 1 \end{cases}$: cho 0 nghiệm x .
- $t = -1$: cho 1 nghiệm x .
- $\begin{cases} t = 1 \\ t \in (-1; 0) \end{cases}$: cho 2 nghiệm x .
- $t \in [0; 1)$: cho 3 nghiệm x .

Phương trình $f(t) = 1$ và nhìn lên bảng biến thiên để:

x	$-\infty$	a	-1	b	0	c	1	d	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		2		0		2		$+\infty$

- $x = a < -1$: 0 nghiệm x .
 - $x = b \in (-1; 0)$: 2 nghiệm x .
 - $x = c \in (0; 1)$: 3 nghiệm x .
 - $x = d > 1$: 0 nghiệm x .
- Vậy có 5 nghiệm x .
Chọn đáp án C.

Biện luận nghiệm dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm $f(x)$

1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm thực?

- A. 5.
B. 4.
C. 3.
D. 2.

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$		-2		2		2		$+\infty$

Lời giải tham khảo

Đặt $t = 2\sin x + 1$. Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq t \leq 3 \Rightarrow t \in [-1; 3]$.

Phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t) = f(m)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$.

$\Leftrightarrow \min_{[-1; 3]} f(t) \leq f(m) \leq \max_{[-1; 3]} f(t)$. Từ bảng biến thiên, suy ra $\min_{[-1; 3]} f(t) = -2$ và $\max_{[-1; 3]} f(t) = 2$.

Do đó $-2 \leq f(m) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$: có 5 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Chọn đáp án A.

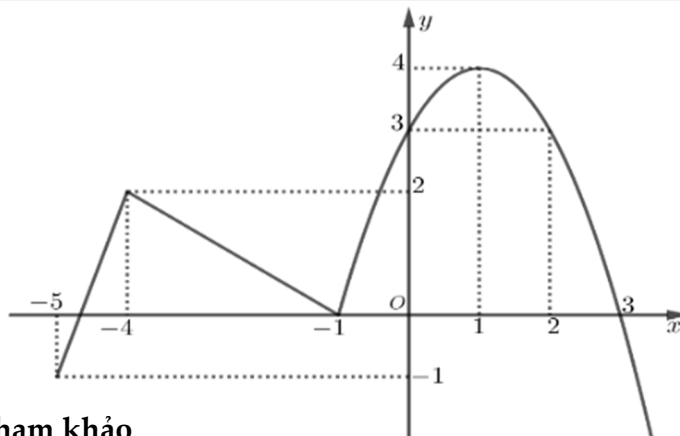
- 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f(f(x)) = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt $x \in [-4; 0]$.

A. 1.

B. 2.

C. 7.

D. 5.



Lời giải tham khảo

Đặt $t = f(x)$ và do $x \in [-4; 0]$ nên từ đồ thị, suy ra giá trị của $t = f(x) \in [0; 3]$.

- $t = f(x) \in (0; 2]$: có 2 nghiệm x .
- $t = f(x) \in (2; 3] \cup \{0\}$: có 1 nghiệm x .

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = \frac{m}{2}$ cần có 2 nghiệm $t \in (0; 2]$.

Dựa vào đồ thị, suy ra $3 < \frac{m}{2} < 4 \Leftrightarrow 6 < m < 8$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 7$. **Chọn đáp án A.**

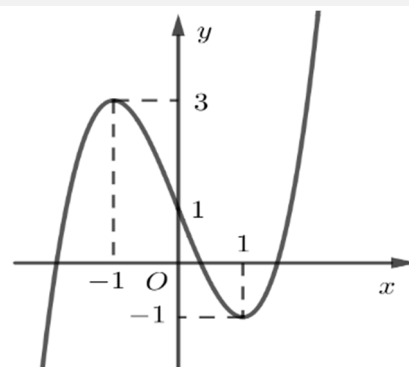
- 3) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = 3 \sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. -9.

B. -10.

C. -6.

D. -5.



Lời giải tham khảo

Đặt $t = \sin x$ và do $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$. (vẽ đường tròn lượng giác).

Khi đó phương trình trở thành $m = f(t) - 3t = g(t)$ với $t \in (0; 1]$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{(0;1]} g(t) \leq m \leq \max_{(0;1]} g(t)$.

Ta có: $g'(t) = f'(t) - 3$. Mà từ $(0; 1]$ thì đồ thị đi xuống nên $f'(t) < 0 \Leftrightarrow f'(t) - 3 < 0 \Leftrightarrow g'(t) < 0$. Do đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $(0; 1]$.

Suy ra: $\min_{(0;1]} g(t) = g(1) = f(1) - 3 = -1 - 3 = -4$ và $\max_{(0;1]} g(t) = g(0) = f(0) = 1$.

Vậy $-4 \leq m < 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$. Nên tổng giá trị của m bằng -10.

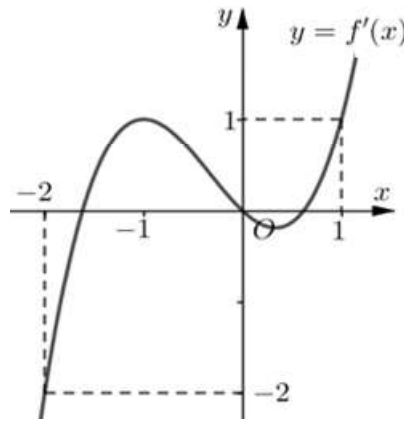
Chọn đáp án B.

Lưu ý. Tại vị trí max ($x=0$) không có dấu " $=$ " vì $t \in (0; 1]$. Nếu không để ý sẽ dễ nhầm chọn đáp án A.

Bài toán kết hợp giữa hàm số và tích phân

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m$ với $a, b, c, d, m \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(x) = m$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} g(0) < 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$.
- D. $\begin{cases} g(1) > 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$.

**Lời giải tham khảo**

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x$. Cho $g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x) = x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 1.$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		$g(-2)$	$g(0)$	$g(1)$		

$$\text{Mà } \int_{-2}^1 g'(x)dx = \int_{-2}^0 g'(x)dx + \int_0^1 g'(x)dx$$

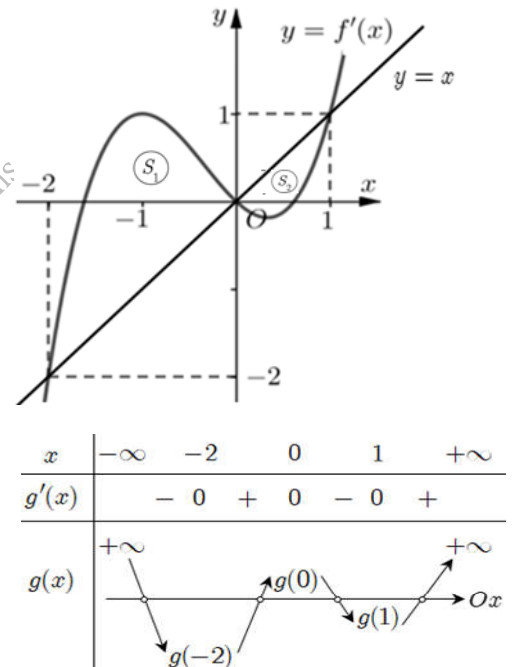
$$= \int_{-2}^0 [f'(x) - x]dx + \int_0^1 [f'(x) - x]dx = S_1 - S_2$$

$$= g(1) - g(-2) > 0 \Rightarrow g(1) > g(-2)$$

Vẽ lại bảng biến thiên bên phải.

Điều kiện cần và đủ để phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm

khi $g(0) > 0$ và $g(1) < 0$. **Chọn đáp án A.**

**Bài toán chứa tham số m trong bài toán chứa hàm cụ thể**

Có bao nhiêu giá trị nguyên m ($|m| < 10$) để phương trình $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m$ có nghiệm?

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x + 2m > 0$.

$$\text{Ta có } 2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x+2m) + 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^x + 2^x = \log_2(x+2m) + (x+2m) \Leftrightarrow f(2^x) = f(x+2m).$$

Do hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến nên $2^x = x + 2m$

$$\Leftrightarrow 2m = 2^x - x = g(x) \text{ có } g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2).$$

Phương trình có nghiệm khi $2m \geq g(-\log_2(\ln 2)) \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}g(-\log_2(\ln 2)) \approx 0,457$.

Do m nguyên và $|m| < 10$, nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Các giá trị này đều thỏa điều kiện.

x	$-\infty$	$-\log_2(\ln 2)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		$g(-\log_2(\ln 2))$	

Bài tập tương tự và mở rộng

46.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $f(\cos x) + 2 = 0$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$	

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

46.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

46.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x) + 1 = 0$ là

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		1		-2		$+\infty$

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

46.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ của phương trình $3f(2\sin x) + 1 = 0$ là

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		1		-2		$+\infty$

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 6.

46.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ của phương trình $4f(\cos x) + 5 = 0$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

46.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

- A. 7.
B. 4.
C. 5.
D. 6.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		1		2		-2	$+\infty$

46.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ của phương trình $3f(\sin x + \cos x) + 4 = 0$ là

- A. 4.
B. 5.
C. 3.
D. 8.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2	$+\infty$

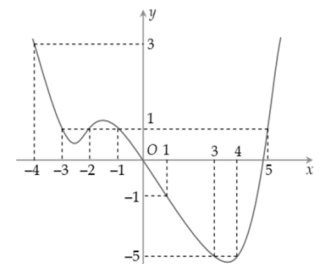
46.8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới và $f(2) = 0$. Số nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$ của phương trình $2f(\cos^2 x - \cos x + 1) + 1 = 0$ bằng

- A. 3.
B. 0.
C. 2.
D. 1.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2	$+\infty$

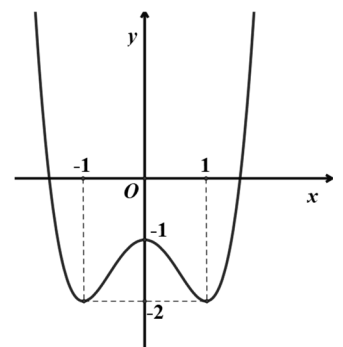
46.9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình. Số nghiệm của phương trình $f(2\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ là

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



46.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $3f(\cos x) + 5 = 0$ là

- A. 4.
B. 7.
C. 6.
D. 8.



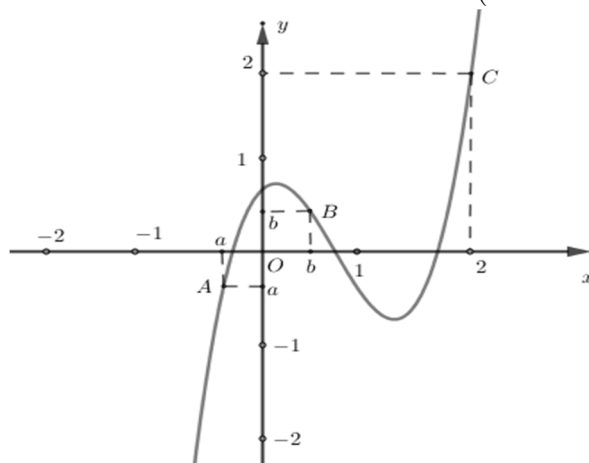
46.11. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm nằm trong $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



46.12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(|\sin x|) = 2$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$			3		$-\infty$

46.13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ của phương trình $|f(\sin x)| = 1$ là

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2		0		$+\infty$

46.14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số nghiệm của phương trình $e^{|f(x^2)|} = 4$ là

A. 3.

B. 5.

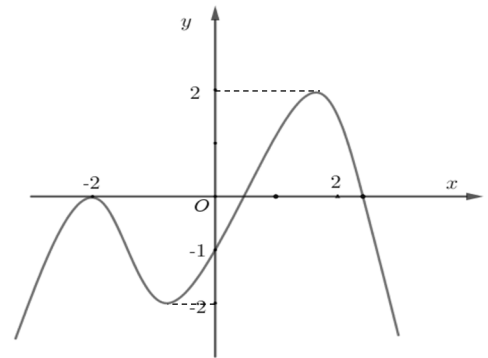
C. 4.

D. 6.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$	

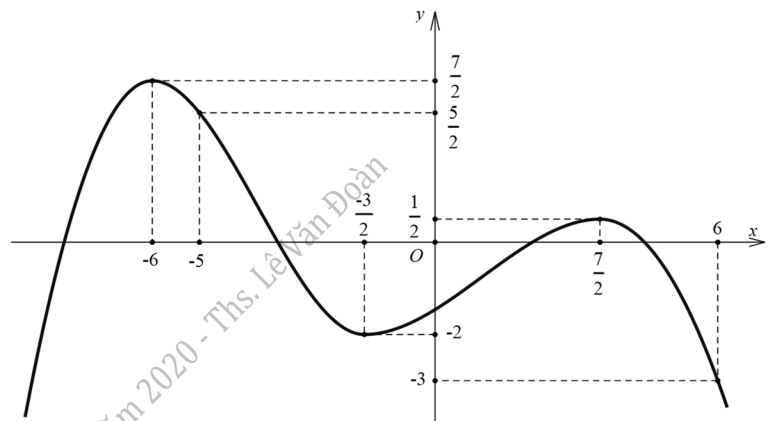
46.15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ là

- A. 4.
B. 7.
C. 6.
D. 9.



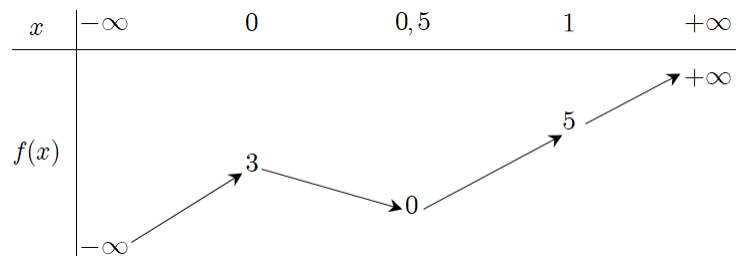
46.16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{408 - x} + \sqrt{392 + x} - 34) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



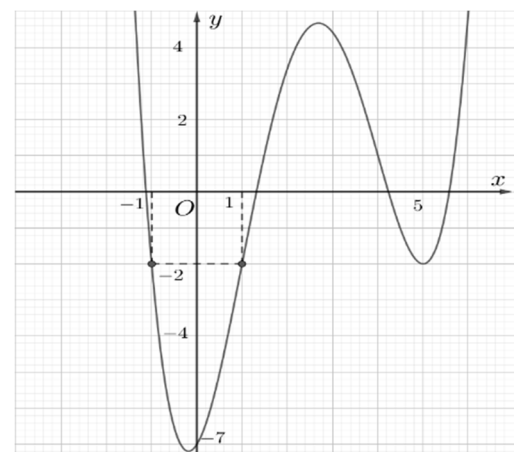
46.17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f(\sin x) = 6 - 3m$ có 8 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 3\pi]$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 1.
B. 18.
C. 6.
D. 3.



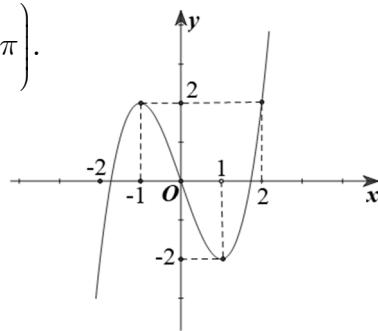
46.18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ là

- A. 7.
B. 6.
C. 4.
D. 5.



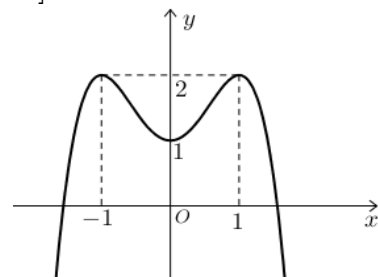
46.19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

- A. 5.
B. 3.
C. 2.
D. 4.



46.20. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$ và có đồ thị như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2f(\sin x) - 3) = m$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ bằng

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



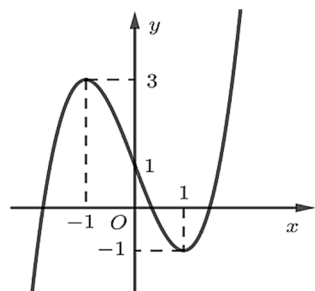
46.21. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2\sin x + m) + 2 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$?

- A. 0.
B. 2.
C. 3.
D. 1.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

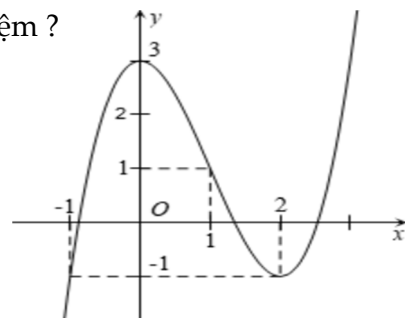
46.22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\sin x)) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



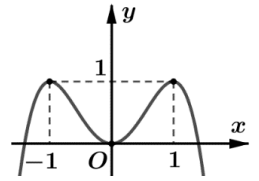
46.23. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $[f(x^2 + 1)]^2 - f(x^2 + 1) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



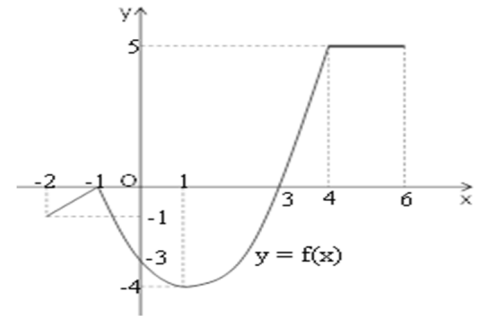
46.24. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\cos 2x)) = 0$.

- A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. Vô số.



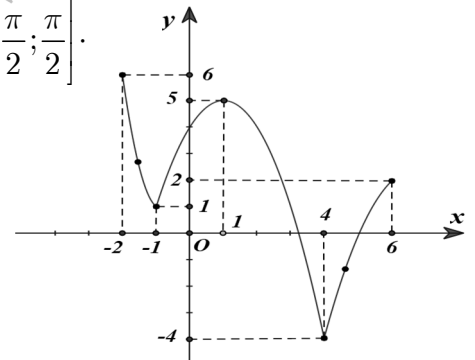
46.25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm.

- A. 10.
B. 6.
C. 9.
D. 5.



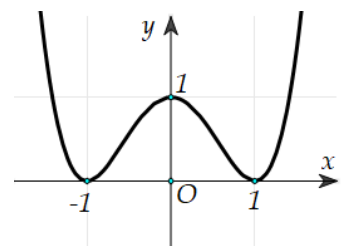
46.26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ có đồ thị như hình bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. 10.
B. 6.
C. 2.
D. 5.



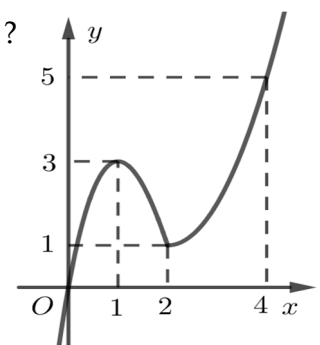
46.27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(\frac{4\sin x - 1}{3}\right) = m$ có nghiệm?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



46.28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f[4(\sin^4 x + \cos^4 x)] = m$ có nghiệm?

- A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 5.



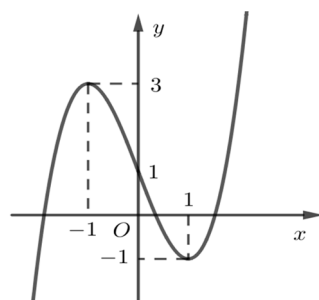
46.29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(\sin x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

A. 1.

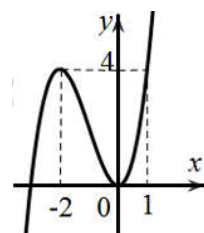
B. 2.

C. 3.

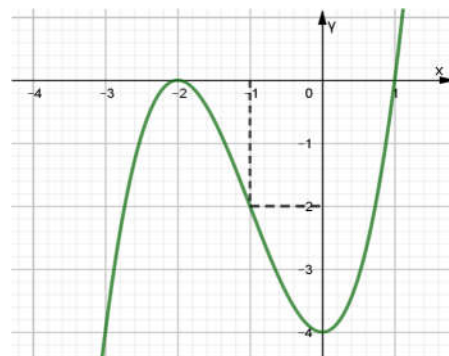
D. 4.



46.30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ là

A. $[0; 4]$.B. $[-1; 0]$.C. $[0; 1]$.D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

46.31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4x - x^2} - 1) = m$ có nghiệm là

A. $[-2; 0]$.B. $[-4; -2]$.C. $[-4; 0]$.D. $[-1; 1]$.

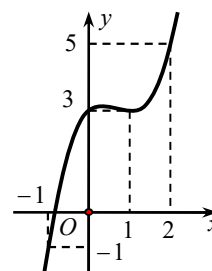
46.32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2 - \sqrt{2x - x^2}) = m$ có nghiệm.

A. 6.

B. 7.

C. 3.

D. 2.



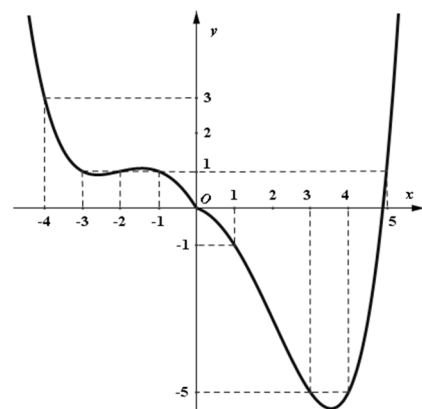
46.33. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) = m - 3$ có nghiệm ?

A. 13.

B. 12.

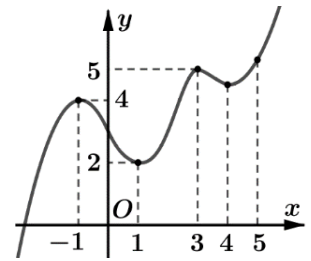
C. 8.

D. 10.



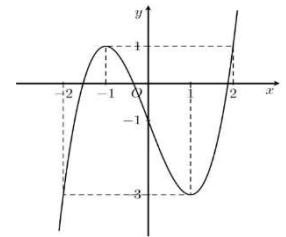
46.34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$?

- A. 1.
B. 2.
 C. 3.
 D. 4.



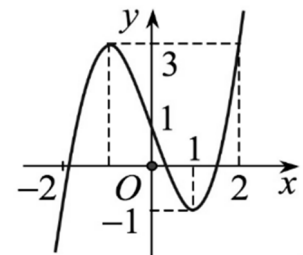
46.35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x) + m) + 1 = f(x) + m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $[-1; 1]$.

- A. 1.**
 B. 2.
 C. 3.
 D. 4.



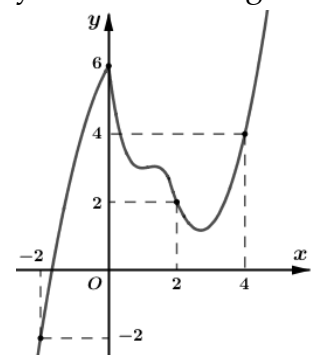
46.36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(e^x) = \frac{m^2 - 1}{8}$ có hai nghiệm thực phân biệt là

- A. 4.
B. 5.
 C. 6.
 D. 7.



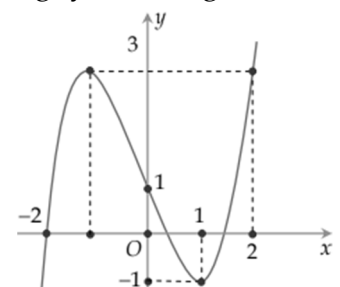
46.37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. 4.
 B. 5.
C. 6.
 D. 9.

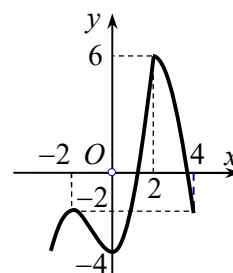


46.38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên dương $m < 100$ phương trình $f(x^2) = m^2 - 2020$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

- A. 55.**
 B. 56.
 C. 54.
 D. 99.

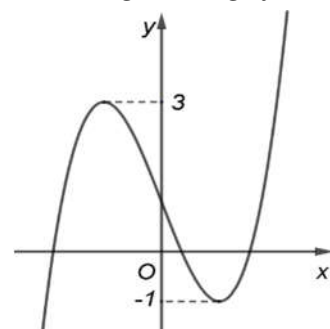


46.39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$.



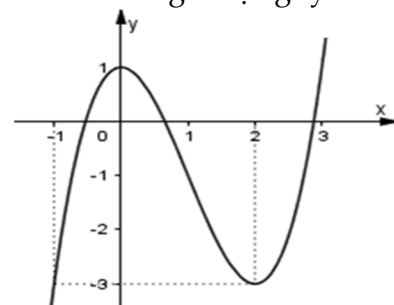
- A. 8.
- B. 9.
- C. 10.
- D. 11.

46.40. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = f(m)$ có đúng hai nghiệm phân biệt?



- A. 4.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

46.41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(1 + \sin x) = f(m)$ có nghiệm.



- A. $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.
- B. $m \in \{0; 1; 2\}$.
- C. $m \in \emptyset$.
- D. $m \in \{1; 2\}$.

46.42. Phương trình $\log_2^3(x-1) - 27y^3 = 8^y + 1 - x$ có bao nhiêu cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ với $x \in [8^{1992}; 8^{2020}]$?

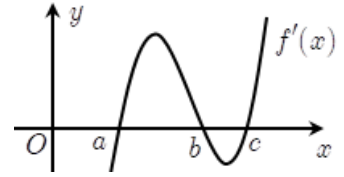
- A. 26.
- B. 28.
- C. 24.
- D. 30.

46.43. Cho phương trình $\log_3^2(3x) - (m+2)\log_3 x + m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 9]$.

- A. $(2; 4)$.
- B. $[2; 4]$.
- C. $(4; +\infty)$.
- D. $[2; 4)$.

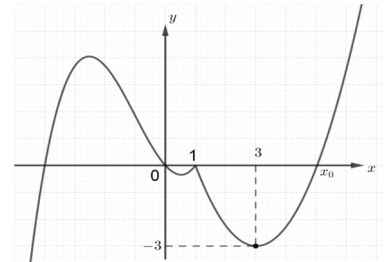
46.44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0$.

- A. 3.
B. 2.
C. 1.
D. 0.



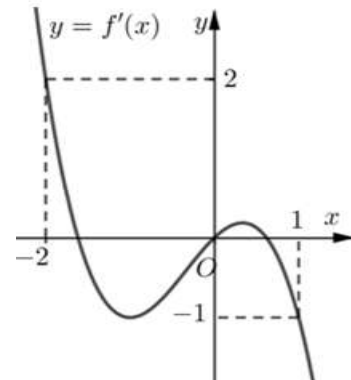
46.45. Cho $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f(x^2)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $g(0) < g(1) < g(-1)$.
B. $g(-1) < g(0) < g(1)$.
C. $g(1) < g(-1) < g(0)$.
D. $g(-1) < g(1) < g(0)$.



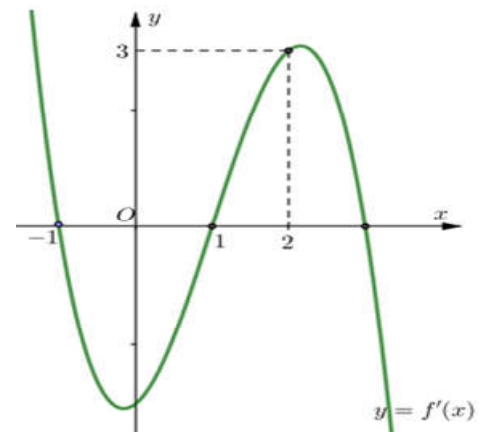
46.46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - 3$. Điều kiện để phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

- A. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$.
B. $\begin{cases} g(0) < 0 \\ g(-2) > 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} g(0) < 0 \\ g(1) > 0 \end{cases}$.
D. $\begin{cases} g(1) < 0 \\ g(-2) > 0 \end{cases}$.



46.47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x + 1$. Điều kiện để $g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

- A. $\begin{cases} g(1) > 0 \\ g(-1) < 0 \end{cases}$.
B. $\begin{cases} g(1) < 0 \\ g(-1) > 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} g(1) > 0 \\ g(2) < 0 \end{cases}$.
D. $\begin{cases} g(1) < 0 \\ g(2) > 0 \end{cases}$.



- 46.48.** Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m tham số). Tập hợp các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$.
- A. $(1;2)$.
B. $[1;2]$.
C. $[1;2)$.
D. $[2;+\infty)$.
- 46.49.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ có nghiệm
- A. 2.
B. 3.
C. $[1;2)$.
D. $[2;+\infty)$.
- 46.50.** Cho phương trình $2\log_2^2 x + (3-2m)\log_2(4x) - 8 + 5m = 0$ (với m là tham số). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[\sqrt{2};2]$ là
- A. $\left(\frac{5}{2};3\right)$.
B. $\left[\frac{5}{2};3\right]$.
C. $\left(\frac{5}{2};3\right]$.
D. $[3;+\infty)$.
- 46.51.** Giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2(2m+1).3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$ thuộc khoảng nào sau đây ?
- A. $(3;9)$.
B. $(9;+\infty)$.
C. $\left(\frac{1}{4};3\right)$.
D. $\left(-\frac{1}{2};2\right)$.
- 46.52.** Cho phương trình $3^{2x^2-3x+m} + 9 = 3^{x^2-x+2} + 3^{x^2-2x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018;2018]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt ?
- A. 2018.
B. 2019.
C. 2020.
D. 2021.

Câu 47. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(1;2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$. C. $[3;4)$. D. $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

Lời giải tham khảo

Theo đề thì $a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$ và $\log_b a > 0$.

$$\text{Ta có } a^x = b^y = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a^{2x} = b^{2y} = ab \Rightarrow \begin{cases} 2x = \log_a(ab) = 1 + \log_a b \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b \\ 2y = \log_b(ab) = \log_b a + 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } P = x + 2y = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\log_a b + \log_b a\right) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\log_a b \cdot \log_b a} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \in \left[\frac{5}{2};3\right).$$

Chọn đáp án D.

Bài toán đôn biến, rồi sử dụng bất đẳng thức Cauchy hoặc khảo sát hàm một biến

1) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $2x - y$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x + y > 0, x - y > 0$.

$$\text{Ta có: } \log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1 \Leftrightarrow \log_4(x+y)(x-y) \geq 1 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) \geq 4 \quad (*)$$

Suy luận. Đề yêu cầu tìm min của tổng $2x + (-y)$, mà từ đề có dạng tích (*), nên nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân (AM – GM : Cauchy) bằng cách sử dụng đồng nhất:

$$2x - y = a.(x+y) + b.(x-y) = (a+b).x + (a-b).y \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \text{ và có lời giải:}$$

$$\text{Ta có: } 2x - y = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2}(x-y) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \underbrace{(x+y)(x-y)}_{\geq 4}} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4} \cdot 4} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \min(2x - y) = 2\sqrt{3}.$$

2) Đặt $m = \log_a(\sqrt[3]{ab})$ với $a, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16\log_b a$. Tìm m để P đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải tham khảo

Vì $a > 1, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$ và $\log_b a > 0$.

$$\text{Ta có: } m = \log_a(\sqrt[3]{ab}) = \log_a(ab)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_a(ab) = \frac{1}{3}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{3}(1 + \log_a b).$$

$$\text{Khi đó: } P = (\log_a b)^2 + \frac{16}{\log_a b} = (\log_a b)^2 + \frac{8}{\log_a b} + \frac{8}{\log_a b} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{(\log_a b)^2 \cdot \frac{8}{\log_a b} \cdot \frac{8}{\log_a b}} = 12.$$

$$\text{Suy ra } \min P = 12 \text{ khi } (\log_a b)^2 = \frac{8}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a b = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) = 1.$$

3) Xét các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho tồn tại các số thực $a, b, c > 1$ và thỏa mãn

$$a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{16}{y} + \frac{16}{z} - x^2.$$

Lời giải tham khảo

$$\text{Từ đề bài có: } a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc} \Leftrightarrow a^{2x} = b^{2y} = c^{2z} = abc \Rightarrow \begin{cases} 2x = \log_a(abc) > 0 \\ 2y = \log_b(abc) > 0 \\ 2z = \log_c(abc) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \log_a(abc) \\ y = \frac{1}{2} \log_b(abc) \\ z = \frac{1}{2} \log_c(abc) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 2 \log_{abc} a \\ \frac{1}{y} = 2 \log_{abc} b \\ \frac{1}{z} = 2 \log_{abc} c \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{16}{y} + \frac{16}{z} = 32 - \frac{16}{x}.$$

$$\text{Khi đó } P = 32 - \frac{16}{x} - x^2 = 32 - \left(\frac{8}{x} + \frac{8}{x} + x^2 \right) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} 32 - 3\sqrt{\frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x} \cdot x^2} = 20. \text{ Suy ra } \max P = 20.$$

4) Cho $x, y > 0$ thỏa $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của $x + y$ bằng bao nhiêu?

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có: } \ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow \ln(xy) \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2 \quad (*)$$

$$\text{Vì } x > 0, y > 0 \text{ nên } (*) \text{ xảy ra khi } x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1. \text{ Với } x-1 > 0 \Rightarrow y \geq \frac{x^2}{x-1}.$$

$$\text{Khi đó: } x + y \geq x + \frac{x^2}{x-1} = 2(x-1) + \frac{1}{x-1} + 3 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{2} + 3. \text{ Suy ra } \min(x+y) = 2\sqrt{2} + 3.$$

5) Cho $x, y > 0$ thỏa $\log(x+2y) = \log x + \log y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x}$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có: } \log(x+2y) = \log x + \log y \Leftrightarrow \log(x+2y) = \log(xy)$$

$$\Leftrightarrow x+2y = xy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2y) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{(x+2y)^2}{8} \xrightarrow{x+2y > 0} x+2y \geq 8. \text{ Khi đó:}$$

$$P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{(2y)^2}{1+x} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \frac{(x+2y)^2}{(x+2y)+2} = \left[\frac{x+2y+2}{25} + \frac{4}{x+2y+2} \right] + \frac{24}{25}(x+2y+2) - 4$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} \frac{4}{5} + \frac{24}{25} \cdot 10 - 4 = \frac{32}{5}. \text{ Do đó } \min P = \frac{32}{5}.$$

6) Xét các số thực a, b thỏa $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 3$.

Lời giải tham khảo

$$\text{Ta có: } P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 3 = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} - 3.$$

$$\text{Mà } \frac{3b-1}{4} \leq b^3 \Leftrightarrow 3b-1 \leq 4b^3 \Leftrightarrow (b+1)(2b-1)^2 \geq 0 : \text{ luôn đúng với } b > \frac{1}{3} \text{ (xem lại pp S.O.S).}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{3b-1}{4} \leq b^3 \xrightarrow{\frac{1}{3} < a < 1} \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) \geq \log_a b^3.$$

$$\text{Do đó: } P \geq 3 \log_a b + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} - 3 = 3(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2}$$

$$= \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 12} = 9. \text{ Vậy } \min P = 9.$$

7) Cho $x, y > 0$ thỏa $xy \leq 4y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $xy \leq 4y - 1 \xrightarrow{\text{chia } y^2 > 0} \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{y^2} + \frac{4}{y} = 4 - \left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 \leq 4 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq 4$.

Khi đó: $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y} = 12 + 6 \cdot \frac{y}{x} + \ln \left(\frac{x}{y} + 2\right)$. Đặt $t = \frac{x}{y}$, $t \in (0; 4]$.

Suy ra $P = f(t) = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t+2)$ có $f'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \pm \sqrt{21} \notin (0; 4]$.

Lập bảng biến thiên, suy ra $\min P = \min f(t) = f(4) = \frac{27}{2} + \ln 6$.

8) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $b^2 = 3ab + 4a^2$ và $a \in [4; 2^{32}]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{b}{8}} 4a + \frac{3}{4} \log_2 \frac{b}{4}$.

Lời giải tham khảo

Ta có $b^2 = 3ab + 4a^2$ (đẳng cấp) $\xrightarrow{\text{chia } b^2 > 0} 1 = 3\left(\frac{a}{b}\right) + 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ (do $a, b > 0$) $\Leftrightarrow b = 4a$.

Do đó: $P = \log_{\frac{a}{2}} 4a + \frac{3}{4} \log_2 a = \frac{\log_2 4a}{\log_2 \frac{a}{2}} + \frac{3}{4} \log_2 a = \frac{\log_2 a + 2}{\log_2 a - 1} + \frac{3 \log_2 a}{4}$.

Đặt $\log_2 a = x$ và do $a \in [4; 2^{32}] \Rightarrow x \in [2; 32]$. Khi đó $P = \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{4}x = f(x)$, $\forall x \in [2; 32]$.

Ta có: $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [2; 32]$.

Tính $f(2) = \frac{11}{2}$, $f(3) = \frac{19}{4}$, $f(32) = \frac{778}{31}$. Suy ra $\max P = \frac{778}{32}$ và $\min P = \frac{19}{4}$.

9) Cho hai số thực dương $a > 1$, $b > 1$ và biết phương trình $a^{x^2} \cdot b^{x+1} = 1$ có nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $a > 1$, $b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$.

Lấy lôga cơ số $a > 1$ hai vế của phương trình $a^{x^2} \cdot b^{x+1} = 1 \Leftrightarrow \log_a(a^{x^2} \cdot b^{x+1}) = \log_a 1$

$\Leftrightarrow \log_a a^{x^2} + \log_a b^{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + (\log_a b)x + \log_a b = 0$.

Theo đề, phương trình có nghiệm $\Rightarrow \Delta = (\log_a b)^2 - 4 \log_a b \geq 0 \xrightarrow{\log_a b > 0} \log_a b \geq 4$.

Khi đó: $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b} = 1 + \log_a b + \frac{4}{\log_a b} = \left(\frac{\log_a b}{4} + \frac{4}{\log_a b}\right) + \frac{3}{4} \log_a b + 1$

Cauchy $\geq 2 + \frac{3}{4} \cdot 4 + 1 = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6. Dấu "=" $\Leftrightarrow \log_a b = 4 \Leftrightarrow b = a^4$.

Sử dụng $f(u) = f(v)$ hoặc $f(u) > f(v)$ hoặc $f(u) < f(v)$ khi hai gặp hai hàm khác loại

1) Xét $x > 0, y > 0$ thỏa $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x + 2y$.

Lời giải tham khảo

Ta có $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1) \Leftrightarrow (y+1) \log_3 [(x+1)(y+1)] + (x-1)(y+1) = 9$

$$\xrightarrow{:(y+1)>0} \log_3 [(x+1)(y+1)] + x - 1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x - 1 = \frac{9}{y+1} - \log_3(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = \frac{9}{y+1} + \log_3 9 - \log_3(y+1) = \frac{9}{y+1} + \log_3 \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow f(x+1) = f\left(\frac{9}{y+1}\right).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$: đồng biến.

$$\text{Nên } f(x+1) = f\left(\frac{9}{y+1}\right) \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{8-y}{y+1}.$$

$$\text{Suy ra } x + 2y = \frac{8-y}{y+1} + 2y = 2y - 1 + \frac{9}{y+1} = 2(y+1) + \frac{9}{y+1} - 3 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 6\sqrt{2} - 3.$$

$$\text{Vậy } \min(x + 2y) = 6\sqrt{2} - 3.$$

2) Cho $x, y > 0$ thỏa $2xy + \log_2(xy + x)^x = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $2xy + \log_2(xy + x)^x = 8 \Leftrightarrow 2xy + x \log_2[x(y+1)] = 8$

$$\xrightarrow{:2x} y + \frac{1}{2} [\log_2 x + \log_2(y+1)] = \frac{4}{x} \Leftrightarrow y + \frac{1}{2} \log_2(y+1) = \frac{4}{x} - \frac{1}{2} \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow (y+1) + \frac{1}{2} \log_2(y+1) = \frac{4}{x} + \frac{1}{2} \log_2 4 - \frac{1}{2} \log_2 x \Leftrightarrow (y+1) + \frac{1}{2} \log_2(y+1) = \frac{4}{x} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{x}$$

$$\Leftrightarrow f(y+1) = f\left(\frac{4}{x}\right) \xrightarrow{f} y+1 = \frac{4}{x} \Leftrightarrow y = \frac{4}{x} - 1.$$

$$\text{Do đó: } P = x^2 + y = x^2 + \frac{4}{x} - 1 = \left(x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x}\right) - 1 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x}} - 1 = 3\sqrt{4} - 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $3\sqrt{4} - 1$.

3) Cho $x, y > 0$ thỏa $2^{y^2} [\log_2(x^2 + 1) - \log_2(2 - y^2) + 2^{x^2}] \leq 2$. Tìm GTLN của $P = |2(x + y) - 1|$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $2^{y^2} [\log_2(x^2 + 1) - \log_2(2 - y^2) + 2^{x^2}] \leq 2 \xrightarrow{2^{y^2}} \log_2(x^2 + 1) - \log_2(2 - y^2) + 2^{x^2} \leq 2^{1-y^2}$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2} + \log_2(x^2 + 1) \leq 2^{1-y^2} + \log_2[(1 - y^2) + 1] \Leftrightarrow f(x^2) \leq f(1 - y^2).$$

Do hàm số $f(t) = 2^t + \log_2(t + 1)$ luôn đồng biến với $t > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^2 \leq 1 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$.

$$P = |2(x + y) - 1| = |2(1.x + 1.y) - 1| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left| 2\sqrt{(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2)} - 1 \right| \leq \left| 2\sqrt{2.1} - 1 \right| = 2\sqrt{2} - 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $2\sqrt{2} - 1$.

- 4) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(4x + 4) + x = y + 1 + 2^y$?

Lời giải tham khảo

Ta có: $\log_2(4x + 4) + x = y + 1 + 2^y \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2(x + 1) + x = y + 1 + 2^y$

$$\Leftrightarrow (x + 1) + \log_2(x + 1) = 2^y + \log_2 2^y \Leftrightarrow f(x + 1) = f(2^y) \xrightarrow{\text{}} x + 1 = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 1$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 2020} 0 \leq 2^y - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 2^0 \leq 2^y \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_2 2021 \approx 10,98$$

Mà $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ nên có 10 cặp nguyên $(x; y)$ thỏa bài toán.

- 5) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Lời giải tham khảo

Phương trình đã cho $\xleftarrow{-\log_2 2} \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 3 - m$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2(4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2)$$

$$\Leftrightarrow f(3x^2 + 3x + m + 1) = f(4x^2 - 2x + 2) \cdots \Rightarrow 3x^2 + 3x + m + 1 = 4x^2 - 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = x^2 - 5x + 1 = g(x) \text{ có } g'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5/2.$$

x	1	5/2	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	-3		$+\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi $-\frac{21}{4} < m < -3$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-5; -4\}$. Có 2 giá trị thỏa bài toán.

- 6) Cho phương trình $\log_3 \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} = x^2 + x + 4 - m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình có hai nghiệm trái dấu ?

Lời giải tham khảo

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} - \log_3 3 = x^2 + x + 3 - m \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 - x + m}{3x^2 + 3} = x^2 + x + 3 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 - x + m) + (2x^2 - x + m) = \log_3(3x^2 + 3) + (3x^2 + 3)$$

$$\Leftrightarrow f(2x^2 - x + m) = f(3x^2 + 3) \cdots \Rightarrow 2x^2 - x + m = 3x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 - m = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $a.c < 0 \Leftrightarrow 1.(3 - m) < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Do $m \in [-2018; 2018] \Rightarrow m \in \{4; 5; 6; \dots; 2018\}$ có $\frac{2018 - 4}{1} + 1 = 2015$ giá trị nguyên m .

- 7) Tính tổng S các nghiệm nguyên dương của $\log_2 \frac{2x^2 - 6x + 8}{x^2 + 4x + 6} + x^3 - 9x^2 - 8x + 2 < 0$.

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \log_2 \frac{(x + 1)(2x^2 - 6x + 8)}{(x + 1)(x^2 + 4x + 6)} + (x + 1)[(2x^2 - 6x + 8) - (x^2 + 4x + 6)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^3 - 4x^2 + 2x + 8) + (2x^3 - 4x^2 + 2x + 8) < \log_2(x^3 + 5x^2 + 10x + 6) + (x^3 + 5x^2 + 10x + 6)$$

Do hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến nên $2x^3 - 4x^2 + 2x + 8 < x^3 + 5x^2 + 10x + 6$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 - 8x + 2 < 0 \Leftrightarrow \dots$$

Bài tập tương tự và mở rộng

- 47.1 Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = a\sqrt{b}$. Giá trị nhỏ nhất của $x + 2y$ bằng
- A. 4.
- B. $2\sqrt{5}$.
- C. $2\sqrt{3}$.
- D. $3\sqrt{2}$.
- 47.2 Xét các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho tồn tại các số thực $a, b, c > 1$ và thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y + 2z^2$ bằng
- A. 6.
- B. $\frac{1}{2}$.
- C. 8.
- D. $\frac{17}{2}$.
- 47.3 Cho các số thực x, y thỏa $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của $(3x-2y)\sqrt{e}$ bằng
- A. $2e\sqrt{3}$.
- B. $2e$.
- C. $e\sqrt{5}$.
- D. $\frac{e^2\sqrt{5}}{2}$.
- 47.4 Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log y \geq \log(2+xy)$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{x} + y$ thuộc khoảng nào?
- A. $(1; 2)$.
- B. $[2; 3)$.
- C. $\left[3; \frac{9}{2}\right)$.
- D. $\left[\frac{11}{2}; 6\right)$.
- 47.5 Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{0,5} x + \log_{0,5} y \leq \log_{0,5}(x+y^2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$ bằng
- A. 9.
- B. 8.
- C. $\frac{25\sqrt{2}}{4}$.
- D. $\frac{17}{2}$.

- 47.6** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019} x + \log_{2019} y \geq \log_{2019}(x^2 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x + y$ thuộc khoảng nào sau đây ?
- A. $(7; 8)$.
- B. $(6; 7)$.
- C. $(5; 6)$.
- D. $(8; 9)$.
- 47.7** Xét các số thực x, y thỏa $0 < x < 2, y > 0$ và $\log_{\frac{1}{2}}(4 - 2x) + \log_{\frac{1}{2}} y + \log_2 9 \leq 0$. Giá trị lớn nhất của $P = 31 - \frac{32}{x} - y$ thuộc khoảng nào sau đây ?
- A. $\left(-1; -\frac{1}{8}\right)$.
- B. $\left[-\frac{1}{8}; 1\right)$.
- C. $[1; 2)$.
- D. $\left[2; \frac{4}{3}\right)$.
- 47.8** Xét $a > 1, b > 1$ và đặt $m = \log_a(\sqrt[3]{a^2 b})$. Khi biểu thức $P = \log_a^2(ab) + 54 \log_{ab} a + 2020$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m thuộc khoảng nào sau đây ?
- A. $(1; 2)$.
- B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$.
- C. $[3; 4)$.
- D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.
- 47.9** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $4y^2 + xy \leq 6y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{3(x + 2y)}{x} + \ln\left(\frac{2x + y}{y}\right)$ thuộc khoảng nào sau đây ?
- A. $(1; 3]$.
- B. $\left[\frac{11}{2}; \frac{13}{2}\right)$.
- C. $\left[\frac{13}{2}; 7\right)$.
- D. $\left(3; \frac{11}{2}\right)$.

- 47.10 Cho $x, y > 0$ thỏa $\ln(2x + y) = \ln(3x) + \ln y$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{4x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+2x}$ thuộc khoảng nào sau đây ?
- A. $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.
- B. $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$.**
- C. $(4; 5]$.
- D. $\left[5; \frac{11}{2}\right]$.
- 47.11 Xét $a, b > 0$ thỏa mãn $2a^2 = ab + 3b^2$. Biết giá trị nhỏ nhất của $P = \log_{\frac{1}{9}}(2a) + \frac{1}{2} \log_3 \frac{b}{27}$ có dạng $\min P = \frac{m}{n} + \sqrt{6}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Giá trị của $m + n$ thuộc khoảng nào ?
- A. $(1; 4]$.
- B. $(4; 8]$.
- C. $(8; 10]$.**
- D. $(10; 20)$.
- 47.12 Cho $0 < b < a < 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1$ bằng
- A. 6.
- B. $3\sqrt[3]{2}$.
- C. 8.
- D. 7.**
- 47.13 Cho a, b thỏa mãn $a > b > \frac{4}{3}$ và biểu thức $P = 16 \log_a \left(\frac{a^3}{12b-16} \right) + 3 \log_{\frac{a}{b}}^2 a$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của $a + b$ bằng
- A. $\frac{7}{2}$.
- B. 4.
- C. $\frac{11}{2}$.
- D. 6.**

- 47.14** Cho hai số thực $a > 1$, $b > 1$. Biết phương trình $a^x \cdot b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$ bằng
- A. 4.
 B. $3\sqrt[3]{2}$.
 C. $3\sqrt[3]{4}$.
 D. $\sqrt[3]{4}$.
- 47.15** Cho $a, b, c > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi $\log_b c = n$. Tính giá trị $m + n$.
- A. $m + n = 12$.
 B. $m + n = \frac{25}{2}$.
 C. $m + n = 14$.
 D. $m + n = 10$.
- 47.16** Cho $a > 1$, $b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$ bằng
- A. $\frac{4}{9}$.
 B. $\frac{9}{4}$.
 C. $\frac{9}{2}$.
 D. $\frac{1}{4}$.
- 47.17** Xét các số thực a, b thỏa $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$ bằng
- A. 19.
 B. 13.
 C. 14.
 D. 15.
- 47.18** Cho $1 > a \geq b > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a^2 b + \log_{ab} a^{36}$ bằng
- A. 19.
 B. 16.
 C. 13.
 D. 11.

47.19 Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b) = 1$. Khi $P = 4a + 6b - 5$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{8}{5}$.

B. $-\frac{13}{2}$.

C. $-\frac{13}{4}$.

D. $\frac{17}{44}$.

47.20 Cho $a > 0, b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

47.21 Cho $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi biểu thức $P = \log_{3a} b + \log_b(a^4 - 9a^2 + 81)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

A. $3 + 9^{\sqrt{2}}$.

B. $9 + 2^{\sqrt{3}}$.

C. $2 + 9\sqrt{2}$.

D. $3 + 3\sqrt{2}$.

47.22 Cho $a, b > 0$ thỏa $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4$. Giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

- 47.23 Cho $x, y > 0$ thỏa $\log\left(\frac{x+3y}{xy}\right) = xy - x - 3y$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x}$ bằng
- A. 10.
- B. $\frac{71}{7}$.
- C. $\frac{72}{7}$.
- D. $\frac{73}{7}$.
- 47.24 Cho $x, y > 0$ là thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$.
- B. -1.
- C. $-\frac{1}{2}$.
- D. 1.
- 47.25 Xét $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Giá trị nhỏ nhất của $x + y$ bằng
- A. $\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$.
- B. $\frac{4\sqrt{3}+4}{3}$.
- C. $\frac{4\sqrt{3}+4}{9}$.
- D. $\frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.
- 47.26 Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất của $2y - 3x$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$.
- B. $\frac{7}{8}$.
- C. $\frac{3}{4}$.
- D. $\frac{5}{6}$.

47.27 Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $(xy - 1).2^{2xy-1} = (x^2 + y).2^{x^2+y}$. Giá trị nhỏ nhất của y bằng

- A. $\frac{3}{7}$.
 B. 2.
 C. $\frac{9}{4}$.
 D. $\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$.

47.28 Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $3^{xy-2x-y-1} = \frac{2x+y}{xy-1}$. Giá trị nhỏ nhất của $x+4y$ bằng

- A. $4\sqrt{3} + 9$.
 B. $6 + 4\sqrt{3}$.
 C. $2\sqrt{3} - 2$.
 D. $4\sqrt{3} - 6$.

47.29 Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Giá trị nhỏ nhất của $x+y$ bằng

- A. $\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.
 B. $\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.
 C. $\frac{18\sqrt{11}-29}{21}$.
 D. $\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

47.30 Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $2^{x+y-1} \cdot (3^{x+y} + 1) = 3x + 3y + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng

- A. 0.
 B. -2.
 C. 2.
 D. 3.

47.31 Cho các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức $3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4|y| - |y-1| + (y+3)^2$ bằng

- A. $-\frac{89}{4}$.
 B. 16.
 C. $-\frac{41}{4}$.
 D. 8.

- 47.32** Cho $x, y \in [1; 2]$ và số thực m thỏa mãn $x^2 + (9 - m)y^2 = 6xy$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2 x + \log_{\frac{1}{4}} y^2 + \log_2(\sqrt{m} + 1)$ bằng
- A. 0.
B. 2.
C. $\log_2 7$.
D. $2 \log_2 3$.
- 47.33** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.
- A. 2587.
B. 2590.
C. 2593.
D. 2584.
- 47.34** Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu $u_1 \neq 1$ thỏa $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 111111$ bằng
- A. 11.
B. 8.
C. 9.
D. 10.
- 47.35** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{m + 2\sqrt{m + 2\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực?
- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.
- 47.36** Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m nhỏ hơn 10 sao cho phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ có nghiệm thực?
- A. 9.
B. 8.
C. 10.
D. 7.

- 47.37 Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $\sqrt[3]{m+3}\sqrt{m+3}\sin x = \sin x$ có nghiệm ?
- A. 7.
B. 3.
C. 5.
D. 2.
- 47.38 Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $\ln[m + \ln(m+x)] = x$ có nhiều nghiệm nhất.
- A. $m \geq 0$.
B. $m > 1$.
C. $m < e$.
D. $m \geq -1$.
- 47.39 Tìm giá trị lớn nhất của m để phương trình $\ln[m + \ln(m + \cos x)] = \cos x$ có nghiệm thực ?
- A. $\frac{e+1}{2}$.
B. $e-1$.
C. e .
D. 1.
- 47.40 Cho hàm số $f(x) = x^3 + x - 2^m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên $[1;2]$.
- A. 0.
B. 4.
C. 2.
D. 3.
- 47.41 Cho hàm số $f(x) = x^2 + 5x + \log_2 m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm không bé hơn -1 .
- A. 9.
B. 8.
C. 7.
D. 16.
- 47.42 Cho hàm số $f(x) = e^x + x - m^2 + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x) - m^2) = x + m^2$ có nghiệm trên $[0; \ln 10]$.
- A. 0.
B. 2.
C. 4.
D. Vô số.

- 47.43 Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - \ln m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.
- A. 0.
B. 5.
 C. Vô số.
 D. 3.
- 47.44 Cho hàm số $f(x) = e^x + x - m^2 + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x) - m^2) = x + m^2$ có nghiệm trên $[0; \ln 10]$.
- A. 0.
 B. 2.
C. 4.
 D. Vô số.
- 47.45 Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm $x \in [1; 2]$, biết $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$.
- A. 16.**
 B. 15.
 C. 17.
 D. 18.
- 47.46 Tìm các giá trị thực của m để phương trình $2^{x-2+\sqrt{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có một nghiệm duy nhất.
- A. $m \in (-\infty; 4]$.
 B. $m \in [8; +\infty)$.
 C. $m \in (4; 8)$.
D. $m \in (-\infty; 4) \cup (8; +\infty)$.
- 47.47 Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.
- A. 3.
 B. Vô số.
C. 2.
 D. 4.
- 47.48 Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho phương trình $\log_3(m - x) + 2m = 3^x + 3x - 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$?
- A. 9.
 B. 7.
C. 6.
 D. 5.

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

A. 6. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải tham khảo

- Khi $m = 1$ hàm số là hàm hằng $f(x) = 1$ nên $\max_{[0;1]} f(x) = \min_{[0;1]} f(x) = 1$ thỏa nên nhận $m = 1$.
- Khi $m \neq 1$ hàm số đơn điệu trên đoạn $[0;1]$ nên:

+ Khi $f(0); f(1)$ cùng dấu thì $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = |f(0)| + |f(1)| = |m| + \left| \frac{m+1}{2} \right|$.

+ Khi $f(0); f(1)$ trái dấu thì $\min_{[0;1]} |f(x)| = 0, \max_{[0;1]} |f(x)| = \max \{ |f(0)|; |f(1)| \} = \max \left\{ |m|; \left| \frac{m+1}{2} \right| \right\}$.

TH1. Cùng dấu, tức $f(0).f(1) \geq 0 \Leftrightarrow m(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$ hoặc $m \geq 0$.

Do đó $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow |m| + \left| \frac{m+1}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$ (thỏa $m \leq -1$ hoặc $m \geq 0$).

TH2. Trái dấu $f(0).f(1) < 0 \Leftrightarrow m(m+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$.

Do đó $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Rightarrow \begin{cases} |m| = 2 \\ \left| \frac{m+1}{2} \right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = -5 \end{cases}$ (không thỏa $-1 < m < 0$).

Kết luận: Có 2 giá trị m thỏa mãn bài toán. **Chọn đáp án B.**

Bài toán chứa tham số trong hàm cụ thể

1) Cho hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$. Tìm tham số m sao cho $\min_{[0;1]} y = 5$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0$. Do đó hàm số đã cho luôn đồng biến $[0;1]$.

$\Rightarrow \min_{[0;1]} y = y(0) \Leftrightarrow 5 = m + 1 \Leftrightarrow m = 4$.

☛ **Cần nhớ:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

• $y = f(x)$ đồng biến $\Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} y = y(a) \\ \max_{[a;b]} y = y(b) \end{cases}$ • $y = f(x)$ nghịch biến $\Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} y = y(b) \\ \max_{[a;b]} y = y(a) \end{cases}$

2) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$ có $\min_{[-1;2]} y = m+2$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \neq m$. Ta có: $y' = \frac{-m^2-1}{(x-m)^2} < 0, \forall x \neq m \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $[-1;2]$.

$\Rightarrow \begin{cases} \min_{[-1;2]} y = y(2) \\ x \neq m \\ x \in [-1;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = \frac{2m+1}{2-m} \\ m < -1 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2 = 2m+1 \\ m < -1 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3=0 \\ m < -1 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$.

3) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$.

- **TH 1.** Nếu $y' = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \min_{[2;4]} y = 1 \neq 3 \Rightarrow$ loại.
- **TH 2.** Nếu $y' > 0 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[2;4]$.
 $\Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(2) \Leftrightarrow 3 = m + 2 \Leftrightarrow m = 1$: không thỏa.
- **TH 3.** Nếu $y' < 0 \Rightarrow m > -1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[2;4]$.
 $\Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(4) \Leftrightarrow 3 = \frac{m+4}{3} \Leftrightarrow m = 5$: thỏa $m > -1$.

Kết luận: $m = 5$ là giá trị cần tìm.

4) Tìm tham số m sao cho $y = \frac{m^2x+4}{x+1}$ thỏa mãn $2 \max_{[1;3]} y - \min_{[1;3]} y = 12$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \neq -1$. Ta có $y' = \frac{m^2-4}{(x+1)^2}$.

- **TH 1.** Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ thì $y = 4 \Rightarrow \min_{[1;3]} y = \max_{[1;3]} y = 4$: không thỏa.

Do đó $m = \pm 2$ không thỏa mãn.

- **TH 2.** Nếu $m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$ thì hàm số đồng biến trên $[1;3]$.

$\Rightarrow \min_{[1;3]} y = y(1) = \frac{m^2+4}{2}$ và $\max_{[1;3]} y = y(3) = \frac{3m^2+4}{4}$. Khi đó theo đề, ta có:

$$2 \max_{[1;3]} y - \min_{[1;3]} y = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3m^2+4}{4} - \frac{m^2+4}{2} = 12 \Leftrightarrow m^2 = 12 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{3} : \text{nhận.}$$

- **TH 3.** Nếu $m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì hàm số nghịch biến trên $[1;3]$.

$\Rightarrow \min_{[1;3]} y = y(3) = \frac{3m^2+4}{4}$ và $\max_{[1;3]} y = y(1) = \frac{m^2+4}{2}$. Khi đó theo đề, ta có:

$$2 \max_{[1;3]} y - \min_{[1;3]} y = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{m^2+4}{2} - \frac{3m^2+4}{4} = 12 \Leftrightarrow m^2 = 36 \Leftrightarrow m = \pm 6 : \text{loại.}$$

Kết luận: $m = \pm 2\sqrt{3}$.

Bài toán max - min khi đề cho đồ thị hoặc bảng biến thiên

1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2;3]$ như hình vẽ. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x + 2)$. Tổng $M + m$ bằng bao nhiêu?

Lời giải tham khảo

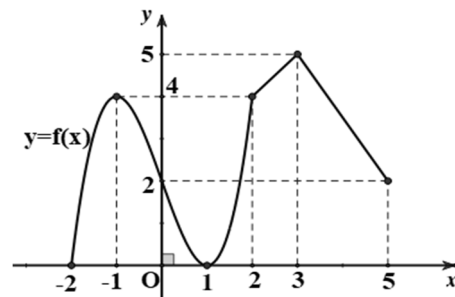
Đặt $t = 3\sin^2 x + 2$. Với $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$.

Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3\sin^2 x \leq 3$

$\Leftrightarrow 2 \leq 3\sin^2 x + 2 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 5$. Suy ra $t \in [2; 5]$.

Khi đó $y = f(3\sin^2 x + 2) = f(t)$ với $t \in [2; 5]$.

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow \begin{cases} M = \max_{[2;5]} y = 5 \text{ khi } t = 3 \\ m = \min_{[2;5]} y = 2 \text{ khi } t = 5 \end{cases}$. Suy ra: $M + m = 7$.



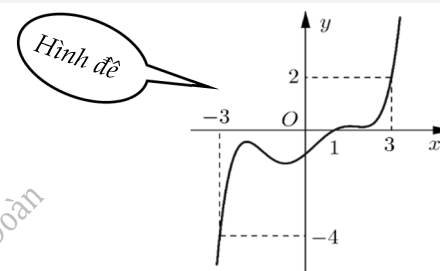
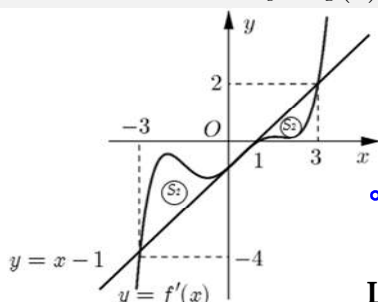
2) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. $g(0)$.

B. $g(1)$.

C. $g(-3)$.

D. $g(3)$.

**Lời giải tham khảo**

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 3(x-1) = 2[f'(x) - (x-1)]$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \min_{[-3;3]} g(x) \in \{g(-3); g(3)\}$.

	-3	1	3
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(-3)$	$g(1)$	$g(3)$

Hình vẽ, ta có: $S_1 > S_2 \Leftrightarrow 2S_1 > 2S_2 \Leftrightarrow 2 \int_{-3}^1 [f'(x) - (x-1)] dx > 2 \int_1^3 [(x-1) - f'(x)] dx$

$\Leftrightarrow \int_{-3}^1 g'(x) dx > \int_1^3 -g'(x) dx \Leftrightarrow g(1) - g(-3) > g(1) - g(3) \Leftrightarrow g(-3) < g(3) \Rightarrow \min_{[-3;3]} g(x) = g(-3)$.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm trị tuyệt đối

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16.

Lời giải tham khảo

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 3]$ hoặc $x = -1 \notin [0; 3]$.

Tính $f(0) = m$, $f(1) = m - 2$, $f(3) = m + 18$. Từ đó có bảng biến thiên như sau:

Suy ra: $\max_{[0;3]} y = \max_{[0;3]} |f(x)| = \max \{|m-2|; |m+18|\} = 16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m-2| = 16 \\ |m+18| < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 = \pm 16 \\ -16 < m+18 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow m = -14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m+18| = 16 \\ |m-2| < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+18 = \pm 16 \\ -16 < m-2 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		m	$m-2$	$m+18$	

Bài tập tương tự và mở rộng

- 48.1.** Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$ trên đoạn $[0;2]$.
- A. $m = -1$. B. $m = 1$.
C. $m = -3$. D. $m = 3$.
- 48.2.** Tìm tham số thực m để hàm số $f(x) = \frac{mx+5}{x-m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -7 .
- A. $m = 2$. B. $m = 0$.
C. $m = 1$. D. $m = 5$.
- 48.3.** Tìm các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1;1]$ bằng 0 .
- A. $m = 4$. B. $m = 2$.
C. $m = 6$. D. $m = 0$.
- 48.4.** Cho hàm số $y = x^3 + 3m^2x + 6$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ bằng 42 .
- A. $m = -1$. B. $m = 1$.
C. $m = \pm 1$. D. $m \in \{-2;1\}$.
- 48.5.** Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - (m^2 + m + 1)x$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -6 .
- A. $m = 2$. B. $m = \pm 2$.
C. $m = \pm\sqrt{6}$. D. $m = -1 \pm \sqrt{5}$.
- 48.6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2 .
- A. $m = 2$.
B. $m = \frac{31}{27}$.
C. $m > \frac{3}{2}$.
D. $m = 1$.
- 48.7.** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y = 2$. Mệnh đề nào **đúng**?
- A. $m < 1$.
B. $1 < m \leq 2$.
C. $2 < m \leq 3$.
D. $m > 3$.
- 48.8.** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $m < -1$.
- B. $3 < m \leq 4$.
- C. $1 \leq m \leq 3$.
- D. $m > 4$.

48.9. Cho hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị m thỏa mãn $\max_{[-2;0]} y = 4$. Số phần tử của S là

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. Vô số.

48.10. Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m thỏa mãn $\max_{[2;4]} y + \min_{[2;4]} y = 8$. Số phần tử của S là

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. Vô số.

48.11. Cho hàm số $y = \frac{m^2x+4}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m thỏa mãn $2 \max_{[1;3]} y - \min_{[1;3]} y = 12$. Số phần tử của S là

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 4.

48.12. Cho hàm số $y = \frac{m^2x+4}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp số nguyên m thỏa mãn $3 \max_{[1;3]} y - 2 \min_{[1;3]} y = 4$. Số phần tử của S là

- A. 0.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.

48.13. Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m thỏa mãn $2(\max_{[-1;0]} y)^2 - 3(\min_{[-1;0]} y)^2 = -3$. Số phần tử của S là

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

48.14. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3} + m}{\sqrt{x+3} - 1}$ (m là tham số thực) thỏa $\min_{[1;6]} y = -2$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $m < -3$.
B. $-3 < m < 2$.
C. $2 < m \leq 3$.
D. $m > 1$.

48.15. Cho hàm số $y = \frac{m^2 \tan x + 2}{\tan x + 1}$ với m là tham số thực. Số các giá trị m thỏa mãn $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3$ là

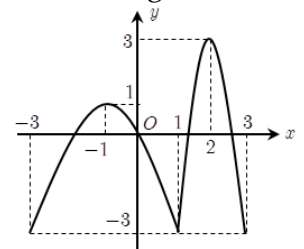
- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

48.16. Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 2m}{\ln x + 2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị m thỏa $\max_{[1;e^2]} y = 1$. Số phần tử của S là

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. Vô số.

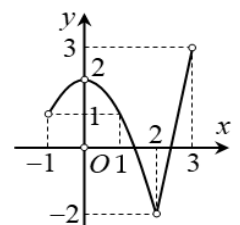
48.17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1; 0]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. 6.



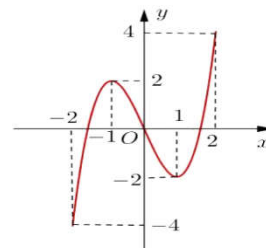
48.18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1; 0]$. Giá trị $M - m$ bằng

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



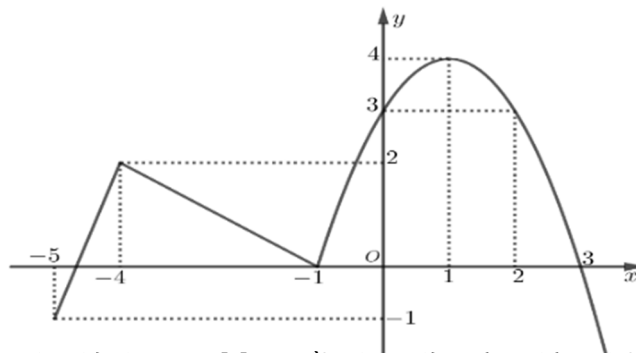
48.19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1; 1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 2.
B. 4.
C. 6.
D. 8.



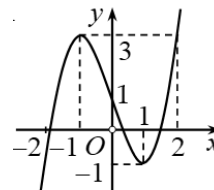
48.20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-4; 0]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 3.
B. 7.
C. 4.
D. 6.



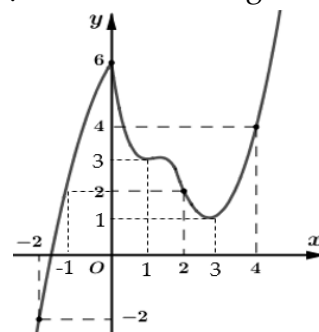
48.21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(\sin x))$ trên đoạn $[0; \pi]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. 2.



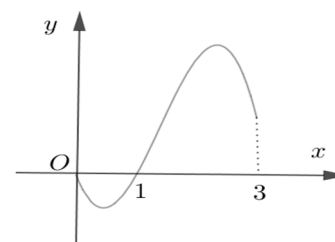
48.22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(\log_2 x))$ trên đoạn $[2; 4]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 1.
B. 3.
C. 5.
D. 8.



48.23. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ lần lượt là

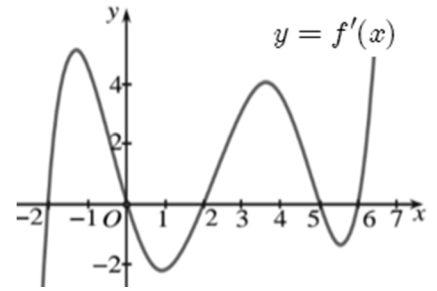
- A. $f(1), f(0)$.
B. $f(2), f(0)$.
C. $f(1), f(3)$.
D. $f(0), f(3)$.



48.24. Cho $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới. Đặt $M = \max_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min_{[-2;6]} f(x)$. Giá

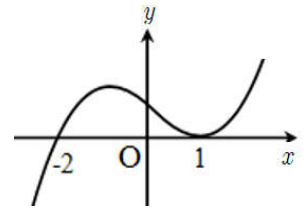
trị của biểu thức $P = M + m$ bằng

- A. $f(0) + f(2)$.
B. $f(5) + f(-2)$.
 C. $f(5) + f(6)$.
 D. $f(0) + f(-2)$.



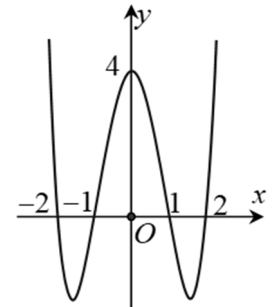
48.25. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ và diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng 27. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 27.
 B. 36.
 C. 48.
D. 75.



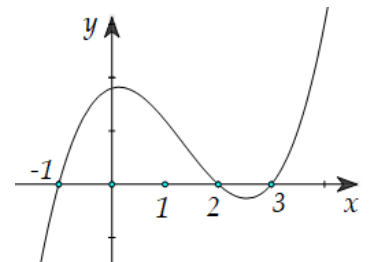
48.26. Cho hàm số $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex$ với $b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của tổng $M + m$ bằng

- A. 63.
 B. 21.
C. $\frac{196}{3}$.
 D. $\frac{272}{3}$.



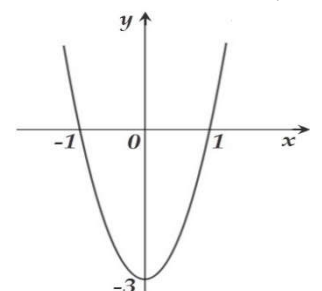
48.27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của M và m lần lượt là

- A. $M = f(-1)$, $m = f(3)$.
B. $M = |f(3)|$, $m = |f(-1)|$.
 C. $M = |f(-1)|$, $m = |f(2)|$.
 D. $M = |f(-1)|$, $m = |f(3)|$.



48.28. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[0; 3]$ bằng

- A.** 20.
 B. 60.
 C. 22.
 D. 3.



- 48.29.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(1 + 2\sin x) + 1|$. Giá trị của biểu thức $M + m$ bằng
- A. 3.
B. 1.
C. 2.
D. 4.
- 48.30.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng
- A. -3.
B. 2.
C. 4.
D. 7.
- 48.31.** Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018 ?
- A. 0.
B. 2.
C. 4.
D. 6.
- 48.32.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |\sin^2 x - 2\sin x + m|$ bằng 1. Số phần tử của S là
- A. 0.
B. 1.
C. 4.
D. 3.
- 48.33.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |\ln^2 x + \ln x + m|$ trên đoạn $[1; e]$ bằng 2. Số phần tử của S là
- A. 1.
B. 2.
C. 4.
D. 6.

48.34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right| \text{ trên đoạn } [1; 2] \text{ bằng } 2. \text{ Tổng tất cả các phần tử của } S \text{ bằng}$$

A. $-\frac{11}{3}$.

B. $\frac{13}{6}$.

C. $-\frac{11}{6}$.

D. $\frac{1}{3}$.

48.35. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{(m+1)x + m - 1}{x + 1} \right|$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng $\frac{1}{2}$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

48.36. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - m}{x + 2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 4$. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

48.37. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m}{x - 2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m nguyên thuộc $[-10; 10]$ sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| > 2$. Số phần tử của S là

A. 18.

B. 8.

C. 10.

D. 19.

- 48.38.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $\max_{[1;3]} |f(x)| = 2 \min_{[1;3]} |f(x)|$. Số phần tử của S là
- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 1.
- 48.39.** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)|$. Số phần tử của S là
- A. 5.
B. 4.
C. 6.
D. 3.
- 48.40.** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| \geq 10$. Số các giá trị nguyên của S thuộc đoạn $[-30;30]$ là
- A. 56.
B. 61.
C. 55.
D. 57.
- 48.41.** Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2(m+1)x - 2m - 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $\max_{[0;4]} |f(x)| + \min_{[0;4]} |f(x)| = 8$. Số phần tử của S là
- A. 0.
B. 2.
C. 3.
D. 1.
- 48.42.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4 + mx + m}{x + 1}$. Số giá trị nguyên của m để $\max_{[1;2]} |f(x)| - 2 \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 0$ là
- A. 15.
B. 14.
C. 13.
D. 12.

- Câu 49.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng
- A. 27. B. 30. C. 18. D. 36.

Lời giải tham khảo

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 9 \cdot 8 = 72$.

Gọi I, J, K, L là trung điểm các cạnh AA', BB', CC', DD' .

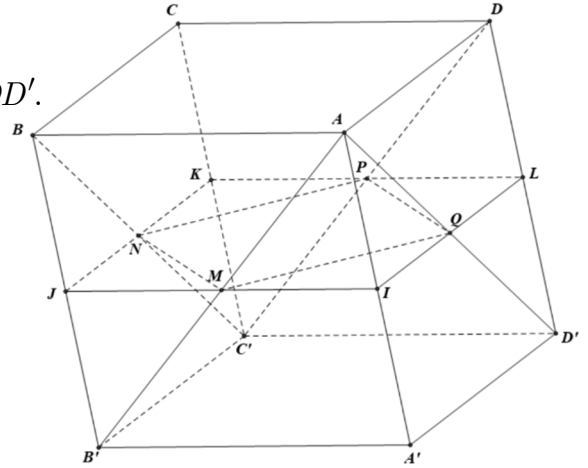
Suy ra $V_{ABCD.IJKL} = 36$.

Do hình chóp $A.MIQ$ đồng dạng với hình chóp $A.B'A'D'$

theo tỉ số $\frac{1}{2}$ nên $V_{A.MIQ} = \frac{1}{8} V_{A.B'A'D'} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$.

Do đó $V_{ABCD.MNPQ} = V_{ABCD.IJKL} - 4V_{A.MIQ} = 36 - 4 \cdot \frac{3}{2} = 30$.

Chọn đáp án D.



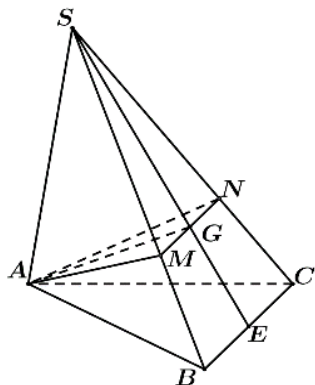
- 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng V . Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, G và song song với BC . Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại các điểm M và N . Thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng

A. $\frac{V}{9}$.

B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{4V}{9}$.

D. $\frac{V}{4}$.



Vì $MM' \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$.

Nên $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Suy ra $V_{S.AMN} = \frac{4V}{9}$.

Chọn đáp án D.

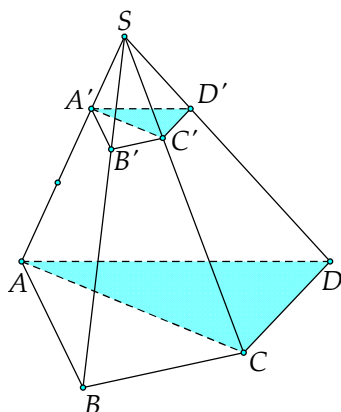
- 2.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V . Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA = 3SA'$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{V}{3}$.

B. $\frac{V}{81}$.

C. $\frac{V}{9}$.

D. $\frac{V}{27}$.



Ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Tương tự: $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{27}$.

Mà $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'}$

$= \frac{1}{27} (V_{S.ABC} + V_{S.ADC}) = \frac{1}{27} V_{S.ABCD} = \frac{V}{27}$. Chọn D.

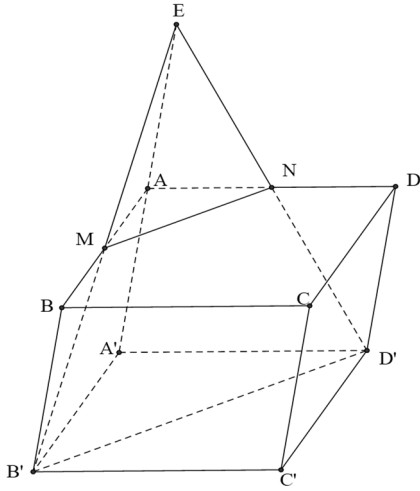
3. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng $(MB'D')$ chia khối chóp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A bằng

A. $\frac{5045}{6}$.

B. $\frac{7063}{6}$.

C. $\frac{10090}{17}$.

D. $\frac{7063}{12}$.



Gọi $BM \cap AA' = E$, $ED' \cap AD = N$.

Ta có M trung điểm $AB \Rightarrow M$ trung điểm EB' .

$\Rightarrow N$ là trung điểm của ED' và AD .

Khi đó: $\frac{V_{E.AMN}}{V_{E.A'B'D'}} = \frac{EA}{EA'} \cdot \frac{EM}{EB'} \cdot \frac{EN}{ED} = \frac{1}{8}$.

$\Rightarrow V_{AMN.A'B'D'} = \frac{7}{8} V_{E.A'B'D'} = \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{A.A'B'D'}$

$= \frac{7}{24} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{7063}{12}$. Chọn đáp án D.

Bài tập tương tự và mở rộng

- 49.1 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD , N là trung điểm của $A'D'$. Thể tích của tứ diện $MNB'C'$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

D. $\frac{2a^3}{5}$.

- 49.2 Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC . Thể tích khối chóp $BMNPQ$ bằng

A. $\frac{V}{6}$.

B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{V\sqrt{2}}{3}$.

- 49.3 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA', NB' = 2NB, PC = PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 2.$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = 1.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}.$

49.4 Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là V , khi đó thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{27V}{4}.$

B. $\left(\frac{9}{2}\right)^2 V.$

C. $\frac{9V}{4}.$

D. $\frac{81V}{8}.$

49.5 Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 12, AD = 10$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Biết rằng MN vuông góc với AB và CD đồng thời $MN = 8$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $96\sqrt{3}.$

B. $96.$

C. $96\sqrt{2}.$

D. $192.$

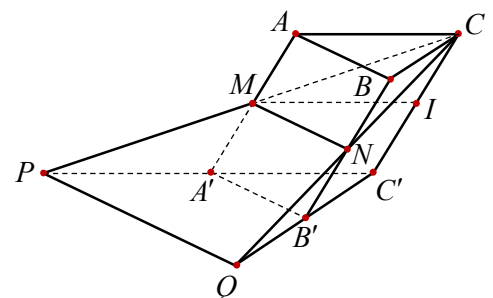
49.6 Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. $1.$

B. $\frac{1}{3}.$

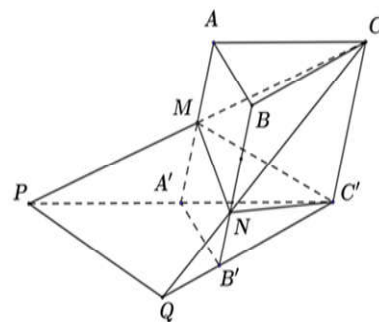
C. $\frac{1}{2}.$

D. $\frac{2}{3}.$



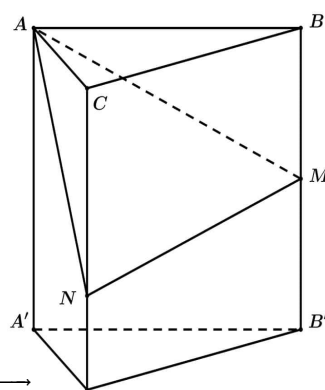
49.7 Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M là trung điểm của AA' và N là điểm nằm trên cạnh BB' sao cho $BN = 2B'N$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích của khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng

- A. $\frac{7}{9}$.
 B. $\frac{5}{9}$.
 C. $\frac{2}{3}$.
 D. $\frac{13}{9}$.



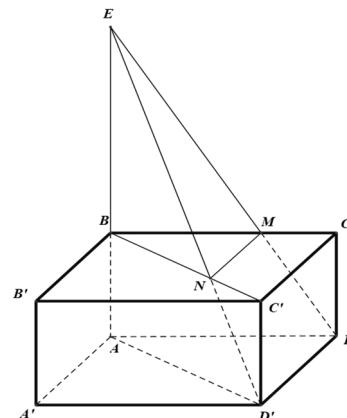
49.8 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M là trung điểm cạnh BB' , điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Thể tích khối chóp $A.BCNM$ bằng

- A. $\frac{7V}{12}$.
 B. $\frac{7V}{18}$.
 C. $\frac{5V}{18}$.
 D. $\frac{V}{3}$.



49.9 Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Điểm E thỏa $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$. Thể tích của khối đa diện gồm các điểm chung của khối hộp và khối chóp $E.ADD'$ bằng

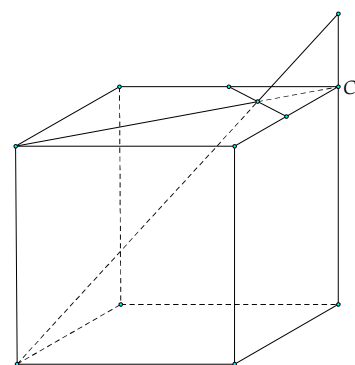
- A. $\frac{4V}{27}$.
 B. $\frac{V}{2}$.
 C. $\frac{19V}{54}$.
 D. $\frac{25V}{54}$.



49.10 Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm E, F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) cắt khối lập phương đã cho thành hai phần, gọi V_1 là thể tích khối

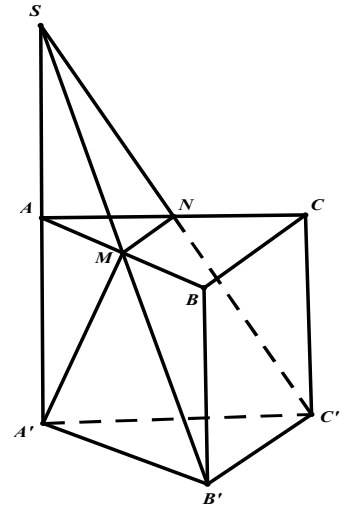
chứa điểm A' và V_2 là thể tích khối chứa điểm C' . Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{25}{47}$.
 B. 1.
 C. $\frac{8}{17}$.
 D. $\frac{17}{25}$.



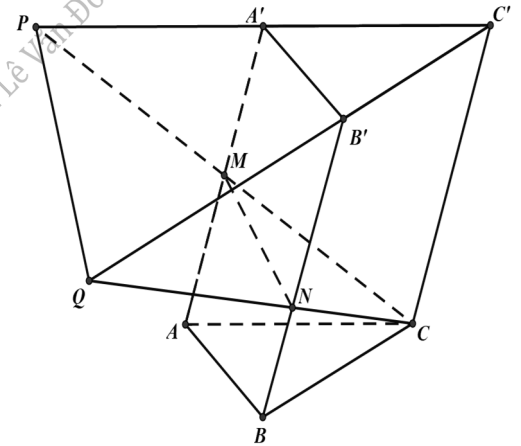
49.11 Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Gọi M, N là trung điểm của hai cạnh AB và AC . Thể tích của khối đa diện $AMNA'B'C'$ bằng

- A. $\frac{34\sqrt{3}}{12}$.
 B. $\frac{21\sqrt{3}}{5}$.
 C. $\frac{63\sqrt{3}}{16}$.
 D. $\frac{45\sqrt{3}}{16}$.



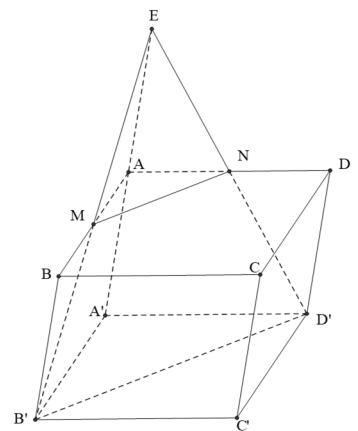
49.12 Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $3B'N = 2BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại P và đường thẳng CN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

- A. $\frac{13}{18}$.
 B. $\frac{23}{9}$.
 C. $\frac{5}{9}$.
 D. $\frac{7}{18}$.



49.13 Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng $(MB'D')$ chia khối chóp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A bằng

- A. $\frac{5045}{6}$.
 B. $\frac{7063}{6}$.
 C. $\frac{10090}{17}$.
 D. $\frac{7063}{12}$.



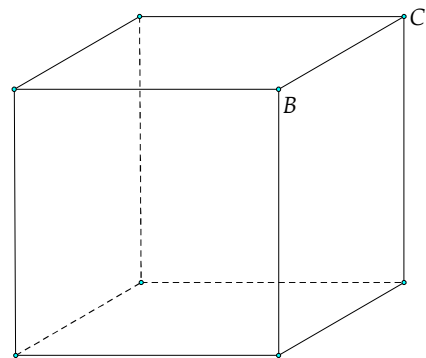
49.14 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC , N thuộc cạnh CD thỏa $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lập phương thành hai khối, gọi (H) là khối chứa đỉnh A . Thể tích của khối (H) bằng

A. $\frac{53a^3}{137}$.

B. $\frac{55a^3}{144}$.

C. $\frac{47a^3}{154}$.

D. $\frac{65a^3}{113}$.



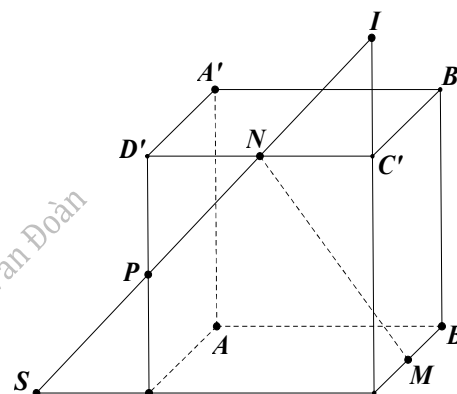
49.15 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BC, C'D', DD'$. Biết thể tích của khối hộp chữ nhật đó bằng 226, thể tích của khối đa diện $AMNP$ bằng

A. $\frac{113}{3}$.

B. $\frac{117}{4}$.

C. $\frac{113}{4}$.

D. $\frac{117}{3}$.



49.16 Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ là 60° và

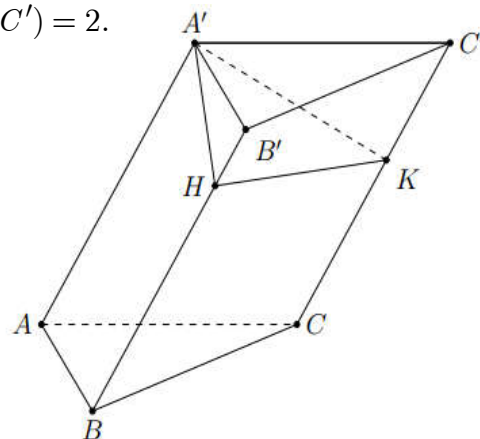
$AA' = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Tính $V_{ABC.A'B'C'}$, biết $d(A', BB') = 1$ và $d(A', CC') = 2$.

A. $\frac{\sqrt{43}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{43}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{42}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{42}}{3}$.



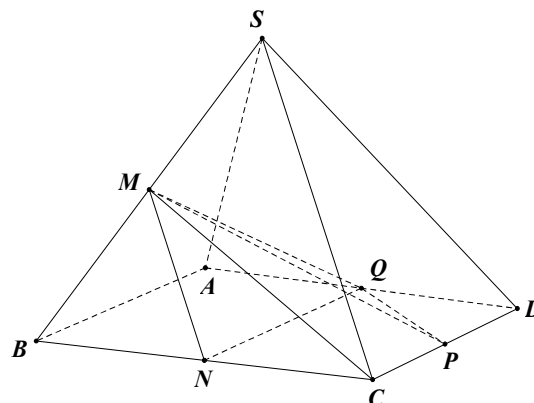
49.17 Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích V , đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD, DA . Tính thể tích khối chóp $M.CNQP$ theo V .

A. $\frac{3V}{8}$.

B. $\frac{3V}{4}$.

C. $\frac{V}{16}$.

D. $\frac{3V}{16}$.



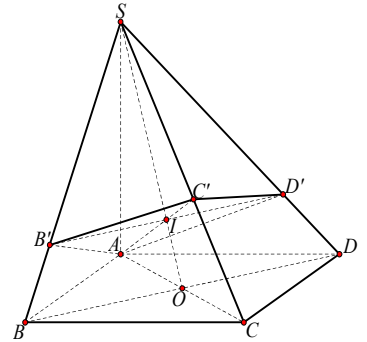
49.18 Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc SC , cắt các cạnh SB , SC , SD lần lượt tại B' , C' , D' . Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$ và khối đa diện $ABCD.D'C'B'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{8}{15}$.

B. $\frac{8}{7}$.

C. $\frac{32}{13}$.

D. $\frac{1}{2}$.



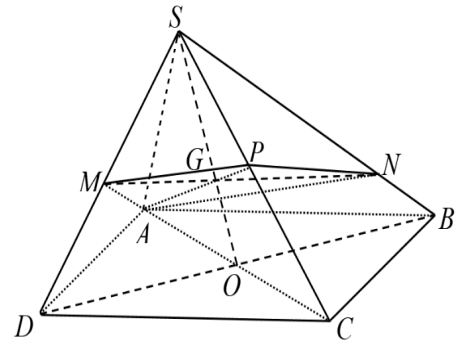
49.19 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Điểm P là trung điểm của SC , một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$ thuộc khoảng

A. $\left(0; \frac{1}{5}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.



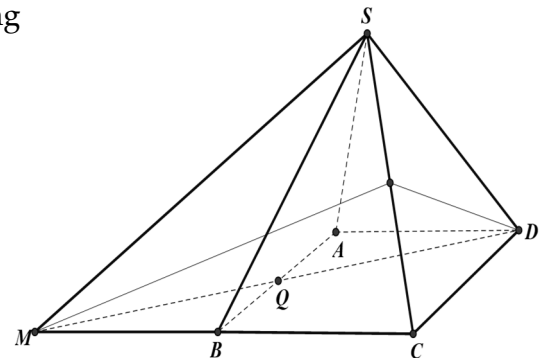
49.20 Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành thể tích bằng 1. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B , N là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng (MDN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S bằng

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{5}{8}$.

D. $\frac{12}{19}$.



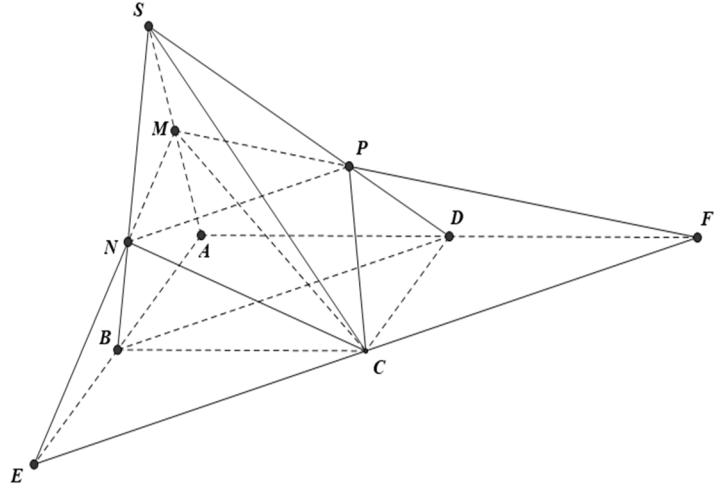
49.21 Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh SA , các điểm E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua B và D . Mặt phẳng (MEF) cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại các điểm N, P . Thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{4}$.



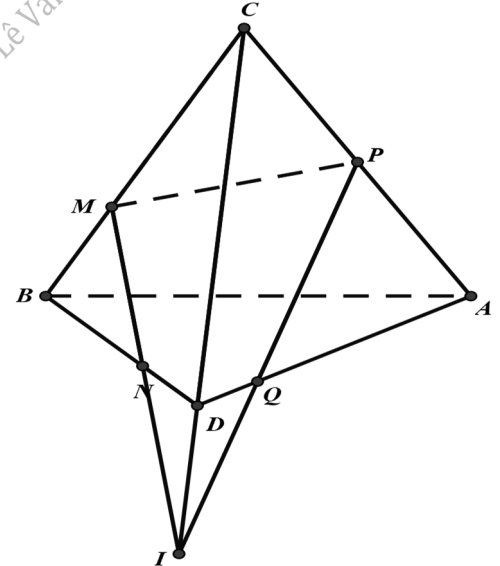
49.22 Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM, 2BD = 3BN$ và $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{26}{19}$.

B. $\frac{3}{19}$.

C. $\frac{15}{19}$.

D. $\frac{26}{13}$.



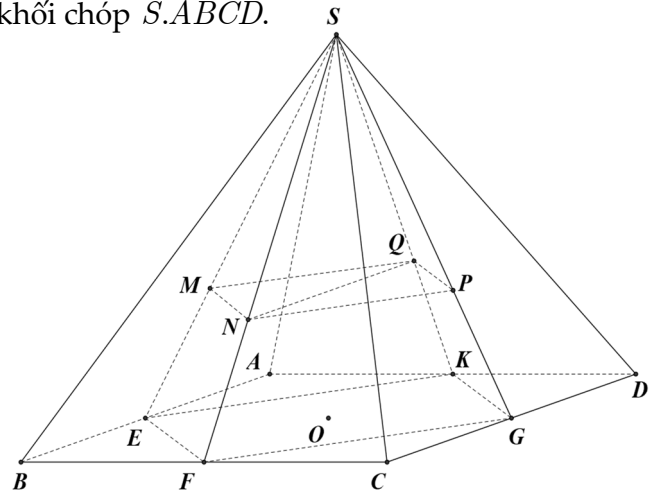
49.23 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Gọi O là điểm bất kỳ trên mặt phẳng đáy $ABCD$. Biết thể tích khối chóp $OMNPQ$ bằng V . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{27}{8}V$.

B. $\frac{27}{2}V$.

C. $\frac{9}{4}V$.

D. $\frac{27}{4}V$.



Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải tham khảo

$$\text{Đặt } \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) = t \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3^t \\ x^2+y^2 = 4^t \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz $ax+by \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$ và dấu " $=$ " khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, được:

$$3^t = 1.x + 1.y \leq \sqrt{(1^2+1^2)(x^2+y^2)} = \sqrt{2.4^t} \Rightarrow 9^t \leq 2.4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \leq 2 \Rightarrow t \leq \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 2.$$

Do đó $x^2+y^2 = 4^t \Rightarrow x^2 \leq 4^t \leq 4^{\frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 2} \approx 1,89 \Rightarrow -1,37 < x < 1,37 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-1; 0; 1\}$. Thử lại:

- Với $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ (thỏa).
- Với $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (thỏa).
- Với $x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 + 1 = 4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y = 3^t + 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 5 \text{ mâu thuẫn } x^2 + y^2 \leq 4^{\frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 2} \text{ (loại)}$

Vậy có hai giá trị $x \in \{0; 1\}$. Chọn đáp án D.

Bài tập tương tự và mở rộng

50.1 Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3(x+2y) = \log_2(x^2+y^2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

50.2 Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Biết $0 \leq x \leq 2018$, số cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn đẳng thức là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

50.3 Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn các điều kiện $0 \leq x \leq 2020, 1 \leq y \leq 2020$ và $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 16.2^y + \log_2(2x+1)$?

A. 2019.

B. 2020.

C. 1010.

D. 1011.

50.4 Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa $x \leq 2020$ và $x^3 + x + \log_2 \frac{x}{y} = 8y^3 + 2y + 1$?

A. 1010.

B. 2020.

C. 2019.

D. 1011.

50.5 Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa $x \leq 2020$ và $\log_2 \left(\frac{y}{2\sqrt{1+x}} \right) = 3(y - \sqrt{x+1}) - y^2 + x$?

A. 1010.

B. 44.

C. 2020.

D. 1011.

50.6 Cho phương trình $\log_2(2x^2 - 4x + 4) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ và $0 < x < 100$ thỏa mãn phương trình đã cho ?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

50.7 Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$?

A. 9.

B. 7.

C. 8.

D. 2019.

50.8 Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $0 < x \leq 2020$ và $(x+1).3^x = y.27^y$?

A. 2020.

B. 673.

C. 672.

D. 2019.

- 50.9** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $3(3^y + y) = x + \log_{\sqrt[3]{3}} x - 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y^2 - \log_9 x$ bằng
- A. $-\frac{7}{16}$.
- B. $\frac{7}{16}$.
- C. $\frac{9}{16}$.
- D. $-\frac{9}{16}$.
- 50.10** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2(4x + 16) + x - 3y - 8^y = -2$. Gọi $(x_0; y_0)$ là cặp $(x; y)$ khi biểu thức $P = x^2 + 3x + 1 + 8^y$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x_0^3 + 3y_0$ bằng
- A. 9.
- B. 7.
- C. -7.
- D. -9.
- 50.11** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_3^2(3x + 2y - 1) - (m + 6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$?
- A. 6.
- B. 5.
- C. 7.
- D. 8.
- 50.12** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x + 4y - 4) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 33.
- B. 24.
- C. 15.
- D. 5.
- 50.13** Biết trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(x^2 + y^2 + 2) = 2 + \log_2(x + y - 1)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x; y)$ thỏa mãn $3x + 4y - m = 0$. Tổng các giá trị của tham số m bằng
- A. 20.
- B. 46.
- C. 28.
- D. 14.