

PHÂN TÍCH VÀ BÌNH LUẬN MỘT SỐ ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN CỦA MỘT SỐ TRƯỜNG TRÊN CẢ NƯỚC NĂM 2017

Nhóm thực hiện

- Phạm Quốc Sang
Cựu học sinh trường THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam.
- Phạm Hữu Hiệp
Cựu học sinh trường THPT Chuyên Tiền Giang, Tiền Giang.
- Lê Minh Cường
Cựu học sinh trường THPT TT Quốc Văn Sài Gòn
- Bùi Tiến Lộc
Cựu học sinh trường phổ thông năng khiếu DHQG TPHCM
- Nguyễn Thị Tuyết Như
Cựu học sinh trường THPT Nguyễn Trãi, Đồng Nai
- Châu Ngọc Vinh
Cựu học sinh trường THPT Bình Sơn, Quảng Ngãi
- Vương Phú Quý
Cựu học sinh trường THPT Buôn Hồ, Đắk Lắk
- Nguyễn Cao Đăng
Cựu học sinh trường THPT Nguyễn Tất Thành, Đồng Nai
- Phạm Duy Nguyên
Cựu học sinh trường THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi.

Mục lục

1	Đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong, TP HCM	3
2	Đề thi Phổ thông năng khiếu đại học Quốc gia TP. HCM (vòng 1)	19
3	Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa, vòng 1-2017	31
4	Đề thi tuyển sinh trường KHTN - ĐHQG Hà Nội năm 2017-2018 (Không Chuyên)	38
5	Đề thi tuyển sinh trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội (Vòng 2)	44
6	Đề thi tuyển sinh trường THPT chuyên, Bình Dương, 2017	62
7	Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định	69
8	Đề thi tuyển sinh trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu (vòng 2)	81
9	Đề thi tuyển sinh trường THPT chuyên, tỉnh Bạc Liêu	94
10	Đề thi chuyên sở GD&ĐT Hưng Yên	103
11	Đề thi THPT chuyên Lương Thế Vinh sở GD&ĐT Đồng Nai	111
12	Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Tiền Giang	116

1 Đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong, TP HCM

Bài 1

a) Cho các số thực a, b, c sao cho $a + b + c = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 29$ và $abc = 11$.
Tính $a^5 + b^5 + c^5$.

b) Cho biểu thức $A = (m + n)^2 + 3m + n$ với m, n là các số nguyên dương.
Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì $n^3 + 1$ chia hết cho m .

Phân tích. a) Để tính $a^5 + b^5 + c^5$, ta cần biểu diễn $a^5 + b^5 + c^5$ theo các biểu thức đối xứng chứa 3 biến a, b, c . Trong đó, bậc của a, b, c trong các biểu thức đó nhỏ hơn 5. Phân tích theo bậc ta dễ thấy:

$$\text{i) } a^5 + b^5 + c^5 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) - [a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a)].$$

$$\text{ii) } a^5 + b^5 + c^5 = (a + b + c)(a^4 + b^4 + c^4) - [ab(a^3 + b^3) + bc(b^3 + c^3) + ca(c^3 + a^3)].$$

Như vậy, ta cần tính $ab + bc + ca, a^3 + b^3 + c^3, a^4 + b^4 + c^4$.

$$\bullet ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}.$$

$$\bullet \text{ Tính } a^3 + b^3 + c^3.$$

Đối với $a^3 + b^3 + c^3$ ta có rất nhiều đẳng thức biểu thị $a^3 + b^3 + c^3$ qua các biểu thức chứa 3 biến a, b, c (a, b, c đối xứng nhau) như sau:

$$\text{a) } a^3 + b^3 + c^3 = (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - [ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)].$$

$$\text{b) } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

$$\text{c) } a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

$$\bullet a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

b) **Bước 1.** Ta cần tìm mối liên hệ giữa m và n để $A = (m + n)^2 + 3m + n$ là số chính phương. Do trong A xuất hiện $(m + n)^2$ nên hiển nhiên $A > (m + n)^2$. Như vậy, nếu ta tìm được số α ($\alpha \in \mathbb{N}^*$) nhỏ nhất sao cho $A < (m + n + \alpha)^2$ sau đó ta dùng phương pháp chặn để tìm biểu thức $f(m, n)$ sao cho $A = [f(m, n)]^2$.

Ta xét $3m + n < 2\alpha(m + n) + (\alpha)^2$. (*)

Dễ thấy $\alpha = 2$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa (*).

Khi đó ta có $(m + n)^2 < (m + n)^2 + 3m + n < (m + n + 2)^2$.

Do đó $(m + n)^2 < A < (m + n + 2)^2$.

Từ đây, ta suy ra $A = (m + n + 1)^2$. Do đó $m = n + 1$.

Bước 2. Chứng minh $n^3 + 1 \vdots m$ (hiển nhiên).

Lời giải. a)

- Tính $ab + bc + ca$. Ta có

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow 3^2 &= 29 + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow ab + bc + ca &= -10.\end{aligned}$$

- Tính $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Ta có:

$$\begin{aligned}(ab + bc + ca)^2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) \\ \Leftrightarrow (-10)^2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2.11.3 \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= 34.\end{aligned}$$

- Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

Cách 1.

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 &= (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - [ab(a + b) + bc(b + c)] \\ &= 29.3 - [ab(3 - c) + bc(3 - a) + ca(3 - b)] \\ &= 87 - [3(ab + bc + ca) - 3abc] \\ &= 87 - [3.(-10) - 3.11] \\ &= 150.\end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) \\ &= 27 - 3.[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc] \\ &= 27 - 3.[ab(3 - c) + bc(3 - a) + ca(3 - b) + 2abc] \\ &= 27 - 3.[3(ab + bc + ca) - abc] \\ &= 27 - 3.[3.(-10) - 11] \\ &= 150.\end{aligned}$$

Cách 3.

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 3[29 - (-10)] + 3.11 = 150.\end{aligned}$$

- Tính $a^4 + b^4 + c^4$.

Cách 1.

$$\begin{aligned}a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= 29^2 - 2.34 = 773.\end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned}
 a^4 + b^4 + c^4 &= (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) - [ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)] \\
 &= 3.150 - [ab(29 - c^2) + bc(29 - a^2) + ca(29 - b^2)] \\
 &= 450 - [29(ab + bc + ca) - abc(a + b + c)] \\
 &= 450 - [29 \cdot (-10) - 11.3] \\
 &= 773.
 \end{aligned}$$

- Tính $a^5 + b^5 + c^5$.

Cách 1.

$$\begin{aligned}
 a^5 + b^5 + c^5 &= (a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) - [a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a)] \\
 &= 29.150 - [a^2b^2(3 - c) + b^2c^2(3 - a) + c^2a^2(3 - b)] \\
 &= 4350 - [3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - abc(ab + bc + ca)] \\
 &= 4350 - [3.34 - 11 \cdot (-10)] \\
 &= 4138.
 \end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned}
 a^5 + b^5 + c^5 &= (a + b + c)(a^4 + b^4 + c^4) - [ab(a^3 + b^3) + bc(b^3 + c^3) + ca(c^3 + a^3)] \\
 &= 3.773 - [ab(150 - c^3) + bc(150 - a^3) + ca(150 - b^3)] \\
 &= 2319 - [150(ab + bc + ca) - abc(a^2 + b^2 + c^2)] \\
 &= 2319 - [150 \cdot (-10) - 11.29] \\
 &= 4138.
 \end{aligned}$$

b) Do $m, n \in \mathbb{N}^*$ suy ra

$$\begin{aligned}
 3m + n &< 4(m + n) + 4 \\
 \Rightarrow (m + n)^2 &< A < (m + n)^2 + 4(m + n) + 4 \\
 \Rightarrow (m + n)^2 &< A < (m + n + 2)^2.
 \end{aligned}$$

Do A là số chính phương nên $A = (m + n + 1)^2$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
 (m + n)^2 + 3m + n &= (m + n + 1)^2 \\
 \Leftrightarrow (m + n)^2 + 3m + n &= (m + n)^2 + 2(m + n) + 1 \\
 \Leftrightarrow 3m + n &= 2(m + n) + 1 \\
 \Leftrightarrow m &= n + 1.
 \end{aligned}$$

Khi đó ta có: $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1) : (n + 1)$.

Hay $n^3 + 1 : m$.



Bình luận. a) Đây là dạng toán khá quen thuộc và đã từng xuất hiện nhiều trong các kì thi tuyển sinh, thi học sinh giỏi trước đây. Để giải bài toán, đòi hỏi học sinh nắm vững các kỹ năng biến đổi đại số.

Lưu ý. Ta có thể tổng quát bài toán để tính $a^n + b^n + c^n$ (n là số nguyên dương) bằng cách đưa bài toán về dãy số truy hồi (cách này tôi xin gợi ý cách giải thông qua bài tập tương tự bên dưới). Với hướng này, chúng ta có thể tính $a^3 + b^3 + c^3$ bằng cách sau:

$$\text{Do } a, b, c \text{ thỏa : } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ ab + bc + ca = -10 \\ abc = 11. \end{cases}$$

Nên theo định lí Vi-et ta có a, b, c là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 - 10x - 11 = 0$. Khi đó ta dễ thấy rằng:

$$\begin{cases} a^3 = 3a^2 + 10a + 11 \\ b^3 = 3b^2 + 10b + 11 \\ c^3 = 3c^2 + 10c + 11. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 10(a + b + c) + 33 = 3.29 + 10.3 + 33 = 150$.

b) Đây là bài toán tương đối hay khi đa số học sinh tập trung đi vào chứng minh chia hết. Do đó, vô tình học sinh đi ngược lại với mục đích thật sự của bài toán là tìm mối liên hệ giữa m, n để A là số chính phương.

Bài tập tương tự.

a) 1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 9, a^2 + b^2 + c^2 = 35, abc = 15$.
Tính $a^9 + b^9 + c^9$.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

2) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 8, a^2 + b^2 + c^2 = 30, abc = 10$.
Đặt $S_n = a^n + b^n + c^n$. Chứng minh $S_{n+3} = 8S_{n+2} - 17S_{n+1} + 10S_n$.
Áp dụng tính S_4, S_5, S_{20} .

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

b) 1) Cho biểu thức $A = 4m^2 + n^2 + 4mn + 6m + n + 2$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là số chính phương thì $m^p + 1 \vdots n$ với p là số nguyên tố lớn hơn 2.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

- 2) Cho $A = (n^2 - n + 2m)^2 + 6n^2 + 4m + 2n + 1$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là số chính phương thì $(n^k + 1) \mid (m + 2)$ (với $k \in \mathbb{N}$, k lẻ) và $n^s - 1 \mid m, \forall s \in \mathbb{N}^*$.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 2

a) Giải phương trình: $2(x + 2)\sqrt{3x - 1} = 3x^2 - 7x - 3$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} - \frac{10}{x} = -1 & (*) \\ 20y^2 - xy - y = 1. & (**) \end{cases}$$

Phân tích. a) Dễ thấy phương trình ban đầu có dạng

$$(ax + b)\sqrt{cx + d} = ex^2 + fx + g.$$

Nếu bài toán dạng này có nghiệm đẹp ta có khá nhiều phương pháp để giải nhưng nếu phương trình không có nghiệm đẹp hoặc ta không đoán được nghiệm thì ta thường sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn để giải.

Để sử dụng phương pháp này, ta cần đặt $t = \sqrt{3x - 1}$ sau đó đưa phương trình ban đầu về dạng $g(x, t) = 0$ với bậc của x và t trong $g(x, t)$ đều cùng bằng hai hoặc ít nhất một trong hai biến x, t bằng hai và biến còn lại có bậc không quá hai.

Khi phân tích vế phải của phương trình ban đầu theo t ta sẽ giữ nguyên $3x^2$ vì nếu ta phân tích $3x^2$ theo t thì khi đó bậc của t lúc này là bậc 4. Như vậy, phương trình của ta sẽ trở thành phương trình bậc 4 theo biến t (điều này đi ngược với mục đích ban đầu).

Vậy ta sẽ phân tích phương trình ban đầu thành:

$$2(x + 2)\sqrt{3x - 1} = 3x^2 + ax + b(3x - 1) + c \quad (*).$$

Trong đó:
$$\begin{cases} a + 3b = -7 \\ -b + c = -3. \end{cases} \quad (**)$$

Đặt $t = \sqrt{3x - 1}$ ($t \geq 0$) thì phương trình (*) trở thành

$$3x^2 + ax + bt^2 + c = 2(x + 2)t$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (a - 2t)x + bt^2 - 4t + c = 0$$

$$\Delta = (a - 2t)^2 - 4.3(bt^2 - 4t + c) = (4 - 12b)t^2 - 4t(a - 12) + a^2 - 12c.$$

Ta chọn a, b, c bất kì thỏa (**) và Δ là số chính phương.

Chọn $b = -1$ suy ra $a = -4$ và $c = -4$.

Ngoài ra, ta có thể giải bài toán bằng cách bình phương hai vế để đưa về phương trình bậc 4 là $9x^4 - 54x^3 - 13x^2 + 10x + 25 = 0$.

Để giải phương trình trên ta có thể sử dụng tham số hóa để tách vế trái của phương trình thành tích của hai tam thức bậc hai. Sau đó ta giải từng phương trình "con".

- b) Chỉ cần quy đồng hai vế của phương trình (*) là ta có thể nhận ra sự tương đồng về hệ số đối với phương trình (**). Hoặc chia hai vế của phương trình (**) cho y ta cũng nhận thấy sự tương đồng về hệ số đối với phương trình (*). Từ đó, ta có thể cộng vế theo vế để tìm mối liên hệ giữa x và y .

Lời giải. a) **Cách 1.** ĐKXD: $x \geq \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} 2(x+2)\sqrt{3x-1} &= 3x^2 - 7x - 3 \\ \Leftrightarrow 2(x+2)\sqrt{3x-1} &= 3x^2 - 4x - (3x-1) - 4. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{3x-1}$ ($t \geq 0$). Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x - t^2 - 4 - 2(x+2)t &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 2(t+2)x - t^2 - 4t - 4 &= 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Ta xem (*) là phương trình bậc hai theo biến x , tham số t . Ta có:

$$\Delta'_* = (t+2)^2 - 3(-t^2 - 4t - 4) = (2t+4)^2.$$

Khi đó:

$$\begin{cases} x = \frac{(t+2) - (2t+4)}{3} = \frac{-t-2}{3} \leq -\frac{2}{3} \quad (\text{mẫu thuẫn với ĐKXD do } t \geq 0) \\ x = \frac{(t+2) + (2t+4)}{3} = t+2. \end{cases}$$

Giải phương trình:

$$\begin{aligned} x = t+2 &\Leftrightarrow x-2 = \sqrt{3x-1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 3x - 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7 + \sqrt{29}}{2}. \end{aligned}$$

Thử ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{7 + \sqrt{29}}{2} \right\}$.

Cách 2. ĐKXD: $x \geq \frac{1}{3}$.

Từ phương trình ban đầu suy ra:

$$\begin{aligned} 4(x+2)^2(3x-1) &= (3x^2-7x-3)^2 \\ \Leftrightarrow 9x^4-54x^3-13x^2+10x+25 &= 0. \\ \Leftrightarrow (x^2-7x+5)(9x^2+9x+5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện xác định và thử lại ta thấy $x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{7 + \sqrt{29}}{2} \right\}$.

b) **Cách 1.** ĐKXD: $x, y \neq 0$.

Ta có hệ phương trình ban đầu tương đương với:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} - \frac{10}{x} = -1 & (1) \\ 20y - x - 1 = \frac{1}{y}. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta được: $20y - \frac{10}{x} = 0 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$.

Thay $xy = \frac{1}{2}$ vào (**) và giải ra ta được $y = \frac{3}{10} \vee y = \frac{-1}{4}$.

- Nếu $y = \frac{3}{10} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.
- Nếu $y = \frac{-1}{4} \Rightarrow x = -2$.

Thử lại ta được nghiệm của hệ là $(\frac{5}{3}; \frac{3}{10})$ và $(-2; \frac{-1}{4})$.

Cách 2. ĐKXD: $x, y \neq 0$.

Do $x, y \neq 0$ nên nhân hai vế của phương trình (*) cho xy và phương trình (**) cho x phương trình ban đầu trở thành:

$$\begin{cases} x^2y + x - 10y + xy = 0 & (1) \\ 20xy^2 - x^2y - xy - x = 0. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta được: $20xy^2 - 10y = 0 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ (do $y \neq 0$).

Tới đây giải tương tự cách 1, ta được nghiệm của hệ là $(\frac{5}{3}; \frac{3}{10})$ và $(-2; \frac{-1}{4})$. ■

Bình luận. a) Đây là bài toán khá khó nếu học sinh không tiếp cận phương pháp "đặt ẩn phụ không hoàn toàn". Đa số học sinh dự đoán nghiệm để tìm hướng giải

nhưng hướng đó rất khó khăn khi nghiệm bài toán là một biểu thức chưa căn. Do đó, đối với các bài toán được cho ở dạng $(ax + b)\sqrt{cx + d} = ex^2 + fx + g$ ta nên sử dụng phương pháp "đặt ẩn phụ không hoàn toàn" để giải quyết.

- b) Câu hệ tương đối dễ so với các năm, dễ dàng nhìn ra hướng giải khi quy đồng phương trình (*).

Bài tập tương tự.

- a) 1) Giải phương trình: $(2x + 1)\sqrt{x - 3} = 2x^2 - 3x - 7$.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

- 2) Giải phương trình: $(4x + 3)\sqrt{2x - 1} = 5x^2 + x - 1$.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

- 3) Giải phương trình: $(2x - 1)\sqrt{2x + 3} = x^2 + x + 3$.

Trích đề thi HSG lớp 10 tỉnh Đồng Nai năm 2017

- b) 1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y - \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4 \\ x^2 - 4x + 2xy = 1. \end{cases}$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

- 2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + y^2 - 4y = -1 \\ 2x^2y^2 - y^4 - 6xy^2 = 1. \end{cases}$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 3

Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AN = AB = BM$. Các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K . Gọi H là hình chiếu của K lên AB . Chứng minh rằng:

- a) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH .
b) Các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

Phân tích. a) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Để chứng minh I nằm trên KH ta cần chú ý đến giả thiết bài toán là $\triangle ABM$,

$\triangle BAN$ lần lượt cân tại đỉnh B, A nên các phân giác BI, AI của $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ cũng đồng thời là đường cao của $\triangle ABK$. Khi đó, ta dễ dàng chứng minh I thuộc KH .

b) Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AHC, \triangle BHC$.

Để chứng minh các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau ta có khá nhiều hướng để khai thác như:

- Gọi J_1, J_2 lần lượt là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với HC .
Ta chứng minh $HJ_1 = HJ_2 \Rightarrow J_1 \equiv J_2$.
- Chứng minh $I_1I_2 = r_1 + r_2$ trong đó r_1, r_2 lần lượt là bán kính $(I_1), (I_2)$.
- Chứng minh $I_1I_2 \perp HC$.

Dưới đây, tôi xin trình bày hướng đi đầu tiên.

Lời giải. a) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Do $\triangle ABM$ cân tại B nên phân giác BI của $\widehat{ABM}$ cũng đồng thời là đường cao.

Suy ra $BI \perp AM$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $AI \perp BN$.

Do đó, I là trực tâm $\triangle ABM$.

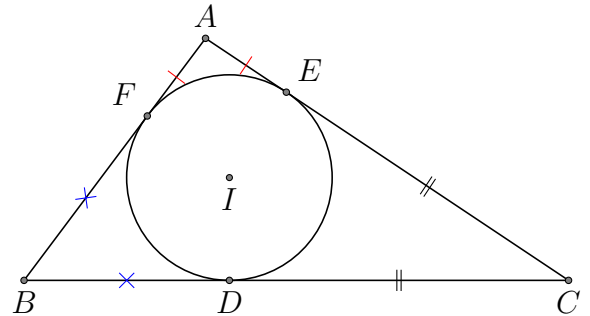
Mà $MH \perp AB$ nên M, I, H thẳng hàng.

Hay tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH .

b) Trước tiên tôi xin chứng minh bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề. Cho (I) nội tiếp tam giác ABC . (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Chứng minh rằng:

- $AE = AF = \frac{AB + AC - BC}{2}$.
- $BF = BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$.
- $CE = CF = \frac{CA + CB - AB}{2}$.



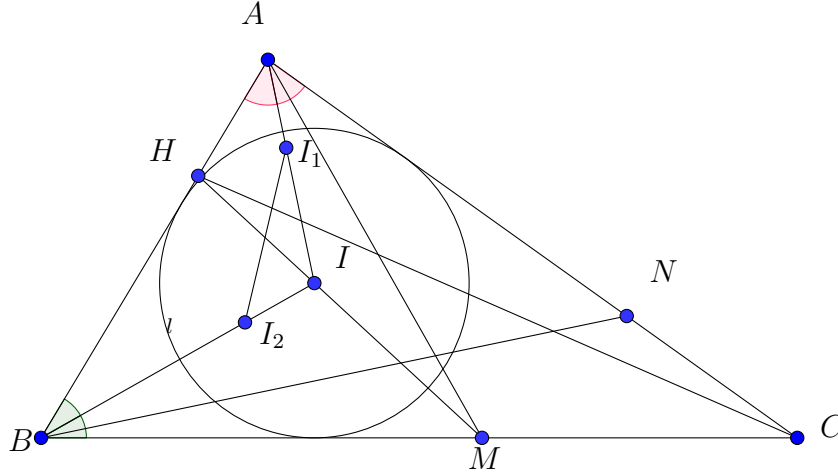
Chứng minh. Ta chứng minh (i) còn những tính chất còn lại ta chứng minh tương tự.

Do (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F nên:

$$AE = AF, BF = BD, CD = CE.$$

Khi đó, $AB + AC - BC = (AF + BF) + (AE + CE) - (BD + CD) = 2AE = 2AF$.
 Vậy $AE = AF = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

Quay trở lại bài toán :



Gọi J_1, J_2 lần lượt là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với HC . Ta chứng minh $J_1 \equiv J_2$.

Áp dụng bổ đề trên ta có:

$$\begin{aligned} HJ_1 - HJ_2 &= \frac{HA + HC - AC}{2} - \frac{HB + HC - BC}{2} \\ &= \frac{HA - HB}{2} + \frac{BC - AC}{2} \\ &= \frac{(AB + AC - BC) - (BA + BC - AC)}{4} + \frac{BC - AC}{2} = 0. \end{aligned}$$

Vậy $J_1 \equiv J_2$.

Do đó, các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

■

Bình luận. Đây là bài toán khá đơn giản thông qua các tính chất của tam giác cân và bổ đề quen thuộc.

Bài tập tương tự.

- 1) Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lấy các điểm M, N sao cho $AB = BM = AN$. Hai đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K . Gọi H là hình chiếu của K lên AB , I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHC, BHC . I_1I_2 cắt HK, HC, AB theo thứ tự tại G, J, K .

Chứng minh rằng $HK^2 = KJ.KG$.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 4

Cho x, y là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

Phân tích. Ta có P gồm $\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}$ và $\frac{x^2+y^2}{xy}$. Như vậy, trong P xuất hiện $xy, x+y, x^2+y^2$.

Để đơn giản bài toán ta cần đưa P về xy và $x+y$ như sau:

$$P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{xy} - 2.$$

Dễ thấy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 10 khi $x = y$.

Do đó, sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi tại $x = y$ ta được:

$$\frac{16\sqrt{xy}}{x+y} = 8, \frac{(x+y)^2}{xy} = 4.$$

Suy ra khi $x = y$ thì

$$\frac{8\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{8\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{xy} = 4.$$

Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số không âm ta dễ dàng tìm được giá trị nhỏ nhất của P (chú ý học sinh cần chứng minh bất đẳng thức AM-GM cho 3 số).

Ngoài ra, ta có thể sử dụng điều kiện bằng khi P đạt giá trị nhỏ nhất để thêm bớt các hằng số vào biểu thức để đánh giá như sau:

Khi $x = y$ thì $\frac{16\sqrt{xy}}{x+y} = 8, \frac{x^2+y^2}{xy} = 2$.

Khi đó, ta thêm bớt vào P các số 8, 2 để tạo ra các biểu thức phù hợp.

$$P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} - 8 + \frac{x^2+y^2}{xy} - 2 + 10 = \frac{(x-y)^2}{xy} - \frac{8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} + 10.$$

Tới đây ta có thể sử dụng phương pháp biến đổi tương đương kết hợp bất đẳng thức AM-GM để chứng minh:

$$\frac{(x-y)^2}{xy} - \frac{8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} \geq 0.$$

Lời giải. Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{xy} - 2 \\ &= \frac{8\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{8\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{xy} - 2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{xy}}{x+y} \cdot \frac{8\sqrt{xy}}{x+y} \cdot \frac{(x+y)^2}{xy}} - 2 = 10. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{8\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{xy} \Leftrightarrow x = y$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10 khi $x = y$.

Cách 2. Ta có: $P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} - 8 + \frac{x^2+y^2}{xy} - 2 + 10 = \frac{(x-y)^2}{xy} - \frac{8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} + 10$.

Ta chứng minh $\frac{(x-y)^2}{xy} - \frac{8(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} \geq 0$ (*).

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x-y)^2 - 8xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{xy(x+y)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 - 8xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 8xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2[(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 8xy] \geq 0. \quad (**) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có:

$$(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 8xy \geq 2\sqrt{xy} \cdot (2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}})^2 - 8xy = 0.$$

Vậy (**) đúng hay (*) đúng. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Do đó $P \geq 10$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10 khi $x = y$.

Cách 3. Ta có:

$$P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4(4\sqrt{xy}+x+y)}{xy(x+y)} + 10 \geq 10.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10 khi $x = y$. ■

Bình luận. Bài toán khá đơn giản. Học sinh chỉ cần nắm vững bất đẳng thức AM-GM kết hợp với kỹ thuật chọn điểm rơi là có thể giải bài toán.

Bài tập tương tự.

1) Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{8\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{a^3+b^3}{ab\sqrt{ab}}.$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

2) Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{18\sqrt{abc}}{a+b+c} + \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}.$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 5

Cho tam giác ABC có góc B tù. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, CA, BC lần lượt tại L, H, J .

- Các tia BO, CO cắt LH tại M, N . Chứng minh bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với AJ ; d cắt AJ và đường trung trực của BC lần lượt tại D và F . Chứng minh bốn điểm B, D, F, C cùng thuộc một đường tròn.

Phân tích. a) Khá dễ dàng để nhận ra B, C, M, N nằm trên đường tròn đường kính BC . Do đó, ta cần chứng minh $OM \perp MC$ hay tứ giác $OHMC$ nội tiếp.

- Để chứng minh bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn. Ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh tứ giác $BDFC$ nội tiếp. Tuy nhiên, dựa trên hình vẽ ta có thể chứng minh $DJZF, NJZM$ nội tiếp. Khi đó, nếu ta gọi P là giao điểm của DF và BC (ta chứng minh P, L, H thẳng hàng). Thì ta sẽ có có hệ thức sau:

$$PB \cdot PC = PN \cdot PM = PJ \cdot PZ = PD \cdot PF.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Lời giải. a)

Ta có: $\widehat{MHC} = \widehat{LHA} = \frac{180^\circ - \widehat{ABC}}{2}$ (do $\triangle LAH$ cân tại A). (1)

$$\begin{aligned} \widehat{MOC} &= \widehat{OBC} + \widehat{BCO} \\ &= \frac{\widehat{ABC} + \widehat{BCA}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{ABC}}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

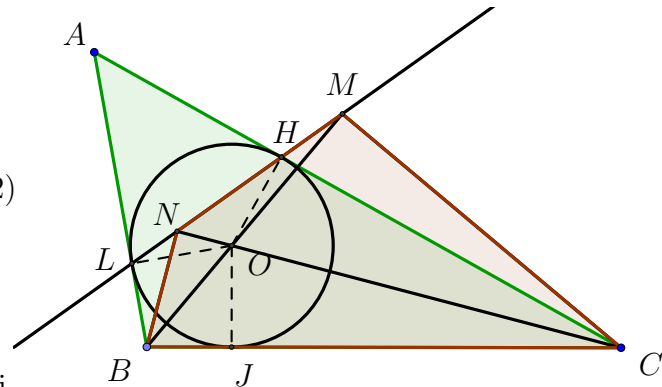
Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{MHC} = \widehat{MOC}$.

Vậy tứ giác $OHMC$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta được $ONLB$ nội tiếp.

Từ đó suy ra $BNMC$ nội tiếp hay bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

- Gọi $P = FD \cap CB$. Gọi (I) là đường tròn đường kính AO .



Bài tập tương tự.

- 1) Cho tam giác ABC có góc B tù. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, CA, BC lần lượt tại L, H, J . Các tia BO, CO cắt LH tại M, N . Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với AJ ; d cắt AJ tại D .
 - a) Gọi P là giao điểm của LH với BC . Chứng minh rằng $PJ^2 < PB \cdot PC$.
 - b) Tìm điều kiện của $\widehat{ABC}$ để tứ giác $PNDP$ nội tiếp.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 6

Trên một đường tròn có 9 điểm phân biệt, các điểm này được nối với nhau bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng mỗi tam giác tạo bởi 3 trong 9 điểm chứa ít nhất một cạnh màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm sao cho 6 đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

Lời giải. Ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Cho 6 điểm bất kì sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hai điểm bất kì được nối với nhau bằng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng trong 6 điểm ban đầu luôn tồn tại ít nhất 1 tam giác cùng màu.

Chứng minh.

Xét bộ 6 điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Nối A_1 với A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ta được 5 đoạn thẳng $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6$. Các đường thẳng này được tô bởi 2 màu xanh đỏ nên theo nguyên lí Dirichle tồn tại ít nhất 3 đoạn cùng màu.

Không mất tính tổng quát ta giả sử 3 cạnh A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 được tô màu đỏ.

Xét $\triangle A_2A_3A_4$:

- $\triangle A_2A_3A_4$ tồn tại ít nhất một cạnh màu đỏ.

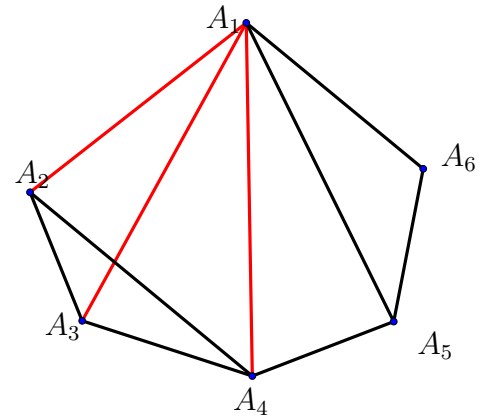
Không mất tính tổng quát ta giả sử A_2A_3 đỏ. Khi đó $\triangle A_1A_2A_3$ thỏa yêu cầu bài toán.

- $\triangle A_1A_2A_3$ có 3 cạnh màu xanh. Khi đó, $\triangle A_1A_2A_3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Quay trở lại bài toán:

Xét đỉnh A_i ($i \in \{1; 2; \dots; 9\}$).



Gọi $R(i)$ là số đoạn thẳng màu đỏ kẻ từ A_i đến A_j ($j \neq i, j \in \{1; 2; \dots; 9\}$).

Gọi $B(i)$ là số đoạn thẳng màu xanh kẻ từ A_i đến A_j ($j \neq i, j \in \{1; 2; \dots; 9\}$).

Hiển nhiên ta có: $R(i) + B(i) = 8$.

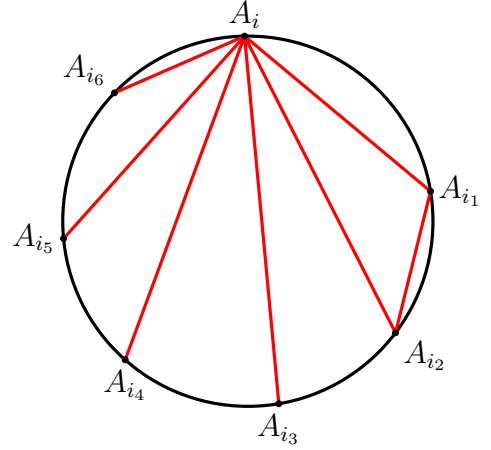
Ta giả sử trong bốn điểm bất kì có ít nhất một cạnh màu xanh (giả thiết phản chứng).

Ta chứng minh $B(i) = 3$ và $R(i) = 5$.

Xét tất cả các trường hợp của $B(i)$ ta có:

- $B(i) = 2$. Suy ra $R(i) = 6$.

Giả sử 6 điểm nối với A_i bởi các cạnh màu đỏ là $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}, A_{i_5}, A_{i_6}$. Theo bổ đề (*) trong 6 điểm $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}, A_{i_5}, A_{i_6}$ sẽ tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu. Không mất tính tổng quát ta giả sử đó là $\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$. Mặt khác theo giả thiết bài toán: "tam giác tạo bởi 3 trong 9 điểm chứa ít nhất 1 cạnh màu đỏ" nên do đó $\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ có 3 cạnh màu đỏ. Như vậy, bộ 4 điểm $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}$ không có cạnh nào màu xanh. Trái với giả thiết phản chứng.

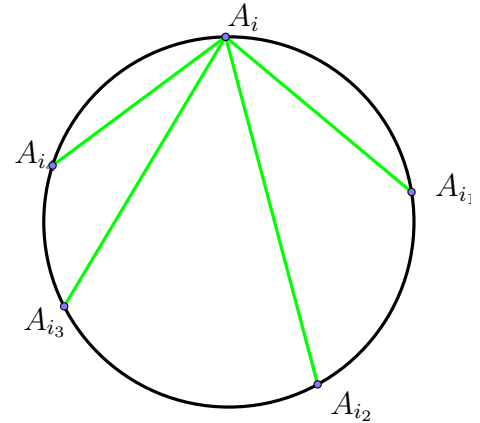


- $B(i) = 4$

Khi đó xét bộ 4 điểm nối với $A(i)$ bằng các cạnh màu xanh. Giả sử 4 điểm đó là $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}$. Mặt khác, theo giả thiết phản chứng luôn tồn tại một cạnh màu xanh nối 2 trong 4 điểm đó. Không mất tính tổng quát ta giả sử đoạn thẳng màu xanh đó là $A_{i_1}A_{i_2}$.

Khi đó, tam giác $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ có 3 cạnh màu xanh.

Vô lí với giả thiết bài toán.



Trường hợp $B(i) = 1$ ta giải tương tự trường hợp $B(i) = 2$.

Các trường hợp $B(i) = 6, B(i) = 7, B(i) = 8$ ta giải tương tự trường hợp $B(i) = 4$.

Như vậy ta chỉ nhận được $B(i) = 3$ và $R(i) = 5$.

Do đó với mỗi đỉnh A_i ta luôn có $R(i) = 5$.

Suy ra

$$\sum_{i=1}^9 R(i) = 5 \cdot 9 = 45. \quad (*)$$

Mặt khác dễ thấy $\sum_{i=1}^9 R(i)$ lại bằng hai lần số cạnh màu đỏ nên (*) không thể xảy ra. Tức giả thiết phản chứng sai.

Vậy bài toán được giải quyết. ■

Bình luận. Bài toán thực chất là bài toán nổi tiếng được nhà toán học Ramsey phát biểu. Muốn giải bài toán học sinh cần phải linh hoạt trong quá trình vận dụng nguyên lý Dirichle.

Bài tập tương tự.

- 1) Chứng minh rằng trong 9 người bất kì luôn tìm được 3 người đôi một quen nhau hoặc 4 người đôi một không quen nhau.

Trích bài toán Ramsey nổi tiếng

- 2) Giả sử mỗi điểm trên mặt phẳng có kẻ lưới ô vuông được tô bằng một trong hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Trích luận văn thạc sĩ-Trần Thị Liên

2 Đề thi Phổ thông năng khiếu đại học Quốc gia TP. HCM (vòng 1)

Bài 1

Biết a và b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left(\frac{(a+2b)^2 - (b+2a)^2}{a+b} \right) : \left(\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a-b} - 3ab \right) = 3.$$

Tính $S = \frac{1+2ab}{a^2+b^2}.$

Phân tích. Thoạt nhìn bài toán, ta không thể tính ngay S được. Việc tính S trở nên dễ dàng khi chúng ta biết được mối liên hệ giữa đại lượng a, b và mối quan hệ ấy được "ẩn giấu" trong đẳng thức bên trên. Việc còn lại bây giờ là biến đổi đẳng thức ấy để tìm mối quan hệ giữa a và b . Việc này khá đơn giản!

Sau khi biến đổi ta sẽ được đẳng thức $a - b = 1$. Đến đây, ta có hai hướng giải quyết sau

Hướng 1. Đơn giản nhất, đó là $a - b = 1 \Leftrightarrow a = 1 + b$. Suy ra

$$S = \frac{1+2(1+b)b}{(1+b)^2+b^2} = \frac{2b^2+2b+1}{2b^2+2b+1} = 1.$$

Hướng 2. Nếu tình ý ta có thể biến đổi

$$a - b = 1 \Rightarrow (a - b)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 + 2ab \Leftrightarrow \frac{1 + 2ab}{a^2 + b^2} = 1 \text{ hay } S = 1.$$

Ở bài giải này, chúng tôi sẽ giải quyết theo Hướng 2.

Lời giải. Với $a, b > 0, a \neq b$ ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(a + 2b)^2 - (b + 2a)^2}{a + b} \right) : \left(\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a - b} - 3ab \right) = 3 \\ \Leftrightarrow & \frac{(b - a)(3a + 3b)}{a + b} : \left(\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab})(a + b + \sqrt{ab})}{a - b} - 3ab \right) = 3 \\ \Leftrightarrow & 3(a - b) : [(a + b)^2 - 4ab] = 3 \Leftrightarrow 3(a - b) : (a - b)^2 = 3 \Leftrightarrow a - b = 1. \end{aligned}$$

Suy ra

$$(a - b)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 + 2ab \Leftrightarrow \frac{1 + 2ab}{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow S = 1.$$



Bình luận. Đây là một dạng toán khá quen thuộc và cũng thường xuất hiện trong các đề thi trường PTNK TP. HCM. Nó được thác triển từ bài toán rút gọn biểu thức và có lẽ đó cũng là ý đồ chính ở bài toán này. Việc tìm ra mối liên hệ giữa đại lượng a và b thông qua việc rút gọn biểu thức bên vế trái khá đơn giản. Sau đó bằng phương pháp nào đó (thay đại lượng này bằng đại lượng kia hay biến đổi trực tiếp thành S) ta sẽ tính được giá trị của S .

Bài tập tương tự.

1. Biết a và b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left(\frac{a(a - 4b) + b(b + 2a)}{a + b} \right) : \left[\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right) \right] = 2016.$$

Tính $S = a + b$.

Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

2.

Bài 2

a) Giải phương trình $(x^2 - 6x + 5)(\sqrt{x - 2} - x + 4) = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x + 2y} - 3) = 0 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6. \end{cases}$$

Phân tích. a) Ở câu này, hướng giải quá rõ ràng. Đây là phương trình tích, việc giải phương trình này thông qua việc giải từng "phương trình con"

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \sqrt{x-2} - x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \sqrt{x-2} = x - 4. \end{cases}$$

- Ở phương trình thứ nhất là dạng phương trình bậc hai. Để giải phương trình này ta có thể dùng biệt thức Δ hoặc dùng tính chất " $a + b + c = 0$ ".

- Ở phương trình thứ hai, đây là dạng $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

Và việc giải phương trình căn thức lại chuyển về việc giải phương trình bậc hai quen thuộc.

b) Ở bài toán này, hướng giải khá rõ ràng. Phương trình đầu là một phương trình tích. Như bài toán trên, việc giải phương trình thông qua việc giải hai "phương trình con"

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x+2y} - 3 = 0. \end{cases}$$

Từ đây, việc giải hệ ban đầu sẽ đưa về việc giải hai hệ nhỏ. Tuy nhiên, nếu để ý, ta có thể thấy ngay hệ

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6 \end{cases}$$

vô nghiệm. Do đó, việc tiếp theo chỉ là giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x+2y} = 3 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6. \end{cases}$$

Giải hệ này, đơn giản nhất đó là từ phương trình đầu tiên của hệ trên, ta có thể biểu diễn được $x = 9 - 2y$ và thay vào phương trình dưới để thu được phương trình bậc hai theo y . Việc còn lại bây giờ đó là giải phương trình này, quay trở lại tìm x và kiểm tra nghiệm.

Lời giải. a) Với điều kiện $x \geq 2$, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \sqrt{x-2} - x + 4 = 0. \end{cases}$$

$$\bullet \quad x^2 - 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, (\text{không thỏa } x \geq 2) \\ x = 5, (\text{thỏa } x \geq 2). \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} \sqrt{x-2} - x + 4 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 2 = (x - 4)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 7x + 18 = 0, (\text{vô lý}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 5$.

b) ĐKXD: $x \geq 0, x + 2y \geq 0$.

Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Do đó, với $x > 0, x + 2y \geq 0$, hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{x+2y} - 3 = 0 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - 2y \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 6xy - y^2 = 6 &\Leftrightarrow (x + 2y)^2 - 10y(x + 2y) + 15y^2 = 6 \Leftrightarrow 15y^2 - 90y + 75 = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 5. \end{aligned}$$

- Với $y = 1$ ta có $x = 7$, (thỏa $x \geq 0$).
- Với $y = 5$ ta có $x = -1$, (không thỏa $x \geq 0$).

Vậy hệ đã cho có duy nhất nghiệm $(x; y) = (1; 7)$.



Bình luận. Bài toán này là một dạng khá quen thuộc trong các kì thi vào trường chuyên. Nó không đơn thuần là giải phương trình bậc hai và hệ như các đề thi tuyển sinh vào trường thường mà đòi hỏi người giải có nhiều kiến thức hơn thế. Trong bài toán này, đó là việc vận dụng kiến thức về phương trình tích và phương trình căn thức dạng $\sqrt{A} = B$ để chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai quen thuộc. Tuy nhiên, bài toán không quá rắc rối đối với thí sinh.

Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình $x\sqrt{x+5} = 2x^2 - 5x$.

Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{y} + x - 3)(y + \sqrt{x}) = 0 \\ x^2 + y = 5. \end{cases}$$

Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

Bài 3

Cho phương trình

$$(x + m)^2 - 5(x + m) + 6 = 0. \quad (1)$$

- a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi tham số m . Tính $S = (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 + 5(x_1 + x_2 + 2m)$.
- b) Biết $x_1 < x_2$, tìm m sao cho $x_2 < 1$ và $x_1^2 + 2x_2 = 2(m - 1)$.

Phân tích. Đây là phương trình bậc hai với biến x . Tuy nhiên nếu tinh ý thì đây là phương trình bậc hai với biến $t = x + m$. Và bài toán trở nên vô cùng đơn giản khi ta phát hiện điều này!

- a) Với cách đặt như vậy, ta dễ dàng tìm ra hai nghiệm $t = 2 \vee t = 3$ hay $x + m = 2 \vee x + m = 3$. Do vai trò x_1, x_2 như nhau nên ta có thể giả sử $x_1 + m = 2$ và $x_2 + m = 3$. Việc còn lại là thay chúng vào S và ra kết quả cuối cùng.
- b) Ở câu này cũng khá đơn giản. Với giả thiết $x_1 < x_2$ ta có ngay $x_1 + m = 2$ và $x_2 + m = 3$. Biến đổi x theo m và thay vào đẳng thức $x_1^2 + 2x_2 = 2(m - 1)$ sẽ tìm được m .

Đến đây, còn một giả thiết chưa dùng đến, đó là $x_2 < 1$. Đây chính là giả thiết loại nghiệm. Đơn giản nhất là thay m vừa tìm được xem $x_2 < 1$ không. Hay một cách khác để tìm điều kiện m ngay từ đầu đó là $x_2 = 3 - m < 1 \Leftrightarrow m > 2$.

Lời giải. a) Đặt $t = x + m$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$t^2 - 5t + 6 = 0. \quad (2)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt. Thật vậy

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 3.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $t_1 = 2$ và $t_2 = 3$. Khi đó

$$x_1 + m = t_1 = 2 \text{ và } x_2 + m = t_2 = 3.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} S &= (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 + 5(x_1 + x_2 + 2m) \\ &= (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 + 5(x_1 + m + x_2 + m) \\ &= 2^2 + 3^2 + 5(2 + 3) = 38. \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi tham số m và

$$S = (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 + 5(x_1 + x_2 + 2m) = 38.$$

b) Với giả thiết $x_1 < x_2$ ta suy ra

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + m = 2 \\ x_2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - m \\ x_2 = 3 - m. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2 = 2(m - 1) &\Leftrightarrow (2 - m)^2 + 2(3 - m) = 2(m - 1) \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 2 \vee m = 6. \end{aligned}$$

Kiểm tra lại chỉ có $m = 6$ là thỏa $x_2 < 1$.

Vậy với $m = 6$, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_2 < 1$ và $x_1^2 + 2x_2 = 2(m - 1)$. ■

Bình luận. Ở bài toán này, không biết người ra đề có dụng ý gì khi quá lộ liễu cho phương trình ở dạng $(x + m)^2 - 5(x + m) + 6$ thay vì dạng khai triển của chúng $x^2 + (2m - 5)x + m^2 - 5m + 6$. Tuy nhiên với dạng nào đi nữa, thì đây cũng là một bài toán khá "dễ thở". Thí sinh hoàn toàn có thể ghi điểm ở bài toán này.

Bài tập tương tự.

Bài 4

- a) Nam kể với Bình rằng ông của Nam có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ được chia thành bốn phần; hai phần (gồm các hình vuông $AMIQ$ và $INCP$ với M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA) để trồng các loại rau sạch, các phần còn lại trồng hoa. Diện tích phần trồng rau sạch là 1200 m^2 và phần để trồng hoa là 1300 m^2 . Bình nói: "Chắc chắn bạn bị nhầm rồi!". Nam: "Bạn nhanh thật! Mình đã nói nhầm phần diện tích. Chính xác là phần trồng rau sạch có diện tích 1300 m^2 , còn lại 1200 m^2 trồng hoa". Hãy tính cạnh hình vuông $AMIQ$ (biết $AM < MB$) và giải thích vì sao Bình lại biết Nam bị tính nhầm?
- b) Lớp 9T có 30 bạn, mỗi bạn dự định đóng góp mỗi tháng 70000 đồng và sau 3 tháng sẽ đủ tiền mua tặng cho mỗi em ở "Mái ấm tình thương X" ba gói quà (giá tiền các món quà đều như nhau). Khi các bạn đóng đủ số tiền như dự trù thì "Mái ấm tình thương X" đã nhận chăm sóc thêm 9 em và giá tiền của mỗi món quà lại tăng thêm 5% nên chỉ tặng được mỗi em hai gói quà. Hỏi có bao nhiêu em của "Mái ấm tình thương X" được nhận quà?

Phân tích. Đây là dạng toán "Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình" và 2 bài toán bên trên khá hay thiên hướng về các dạng toán thực tế.

- a) Ở bài toán này, không khó để có thể tạo ra một hệ phương trình từ giả thiết đó. Thật vậy, với cách chia đất như thế sẽ tạo ra 4 mảnh đất (hai mảnh đất hình vuông và hai mảnh đất hình chữ nhật có diện tích như nhau). Nếu đặt x, y lần lượt là độ dài cạnh của hai hình vuông thì ta hoàn toàn có thể suy ra được độ dài các cạnh của hình chữ nhật. Từ đó, suy ra diện tích của mảnh đất trồng rau và mảnh đất trồng hoa.

Tiếp theo ta giải quyết câu hỏi "Vì sao Bình lại biết Nam bị tính nhầm?". Đây là câu hỏi hay nhưng không khó, chỉ việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ ra.

- b) Ở bài toán này, ta có thể giải quyết theo hai hướng, đó là "Lập hệ" hay "lập phương trình".

Hướng 1. Nếu ta đặt x là số tiền mỗi món quà ban đầu và y là số em trong mái ấm tình thương ban đầu. Khi đó, số tiền tiêu tốn khi mua quà cho các em sẽ là

$$3xy = 2(1 + 0,05)x(y + 9) = 3.30.70000.$$

Từ đó, ta có thể tìm ra x, y và kết luận.

Hướng 2. Nếu đặt x là số em trong mái ấm tình thương thì khi đó

- Số tiền mỗi món quà ban đầu là $\frac{3.30.70000}{3x}$ (đồng).
- Số tiền mỗi món quà lúc sau là $\frac{3.30.70000}{2(x+9)}$ (đồng).

Với giả thiết, mỗi món quà lúc sau tăng 5% so với mỗi món quà ban đầu, ta có phương trình

$$\frac{3.30.70000}{3x} \cdot (1 + 0,05) = \frac{3.30.70000}{2(x+9)}.$$

Việc tìm ra x không quá khó. Tuy nhiên đó không phải là kết quả cuối cùng, phải tính thêm 9 em học sinh mới chuyển vào.

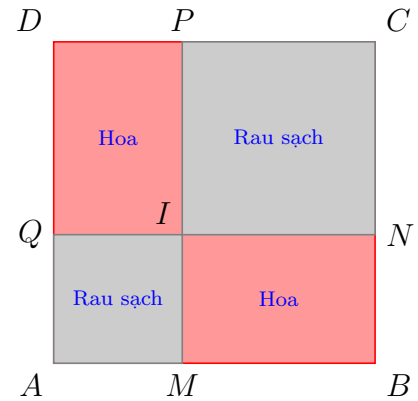
Tuy nhiên, tôi sẽ chọn cách thứ nhất để giải chi tiết!

Lời giải. a) Đặt $AM = x(\text{m})$ và $CP = y(\text{m})$. Điều kiện $x, y > 0$.

Khi đó, diện tích trồng rau sạch là $x^2 + y^2(\text{m}^2)$ và diện tích trồng hoa là $2xy(\text{m}^2)$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ 2xy = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ xy = 600. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ xy = 600. \end{cases}$$



Theo định lý Viète đảo ta được $\begin{cases} x = 20, y = 30 \\ x = 30, y = 20. \end{cases}$

Mặt khác, do $AM < MB$ hay $AM < CP$ nên $0 < x < y$. Do đó $x = 20(\text{m})$ và $y = 30(\text{m})$. Vậy cạnh hình vuông $AMIQ$ là 20 m.

Bình biết Nam tính nhầm có thể do Bình đã vận dụng bất đẳng thức Cauchy $x^2 + y^2 \geq 2xy$, tức diện tích phần trồng rau sạch lớn hơn diện tích phần trồng hoa.

b) Gọi x (đồng) là giá tiền mỗi món quà ban đầu và y (em) là số trẻ ban đầu của "Mái ấm tình thương X". Điều kiện $x, y > 0, y \in \mathbb{N}$.

- Ban đầu, để mua cho mỗi em ở "Mái ấm" ba gói quà tốn $3xy$ đồng.
- Thực tế, để mua cho mỗi em ở "Mái ấm" 2 gói quà tốn $2(1 + 0,05)x(y + 9) = \frac{21}{10} \cdot xy + \frac{189}{10} \cdot x$ đồng.
- Số tiền các bạn lớp 9T có sau ba tháng đóng góp là $3.30.70000 = 6300000$ đồng.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} 3xy = 6300000 \\ \frac{21}{10} \cdot xy + \frac{189}{10} \cdot x = 6300000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100000 \\ y = 21, \end{cases} \quad (\text{thỏa } x, y > 0, y \in \mathbb{N}).$$

Vậy "Mái ấm tình thương X" có tất cả $21 + 9 = 30$ em. ■

Bình luận. Đây là bài toán khá hay, tuy nhiên theo tôi nghĩ, nếu thay từ "đủ" ở bài toán b) thành từ "vừa đủ", bài toán sẽ hoàn chỉnh hơn. Bởi lẽ, chúng ta có dư tiền thì ta vẫn đủ tiền để mua quà, nhưng như vậy bài toán quá phức tạp đối với học sinh và có lẽ ý đồ của tác giả cũng chỉ ở mức độ như thế.

Bài tập tương tự.

- Ông An định cải tạo một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 2,5 chiều rộng. Ông thấy nếu đào một cái hồ là hình chữ nhật thì sẽ chiếm mất 3% diện tích mảnh vườn, còn nếu giảm chiều dài 5m và tăng chiều rộng 2m thì mặt hồ là hình vuông và diện tích mặt hồ giảm được $20m^2$. Hãy tính các cạnh của mảnh vườn.

Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

- Lớp 9A có 27 học sinh nam và có 18 học sinh nữ. Nhân dịp sinh nhật của bạn X (là một thành viên của lớp), các bạn trong lớp có rất nhiều món quà tặng X. Ngoài ra mỗi bạn nam của lớp làm 3 tấm thiệp và mỗi bạn nữ xếp 2 hoặc 5 con hạc để tặng bạn X. Biết số tấm thiệp và số con hạc bằng nhau, hỏi bạn X là nam hay nữ?

Trích đề thi tuyển sinh 10 PTNK TP.HCM - 2016

Bài 5

Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) tâm O , bán kính R ; $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$, H là trực tâm. AH , BH , CH lần lượt cắt BC , CA , AB tại M , N , P .

- Tính AC theo R . Tính số đo góc $\widehat{HPN}$ và $\frac{MP}{MN}$.
- Dựng đường kính AD ; HD cắt (T) tại E ($E \neq D$) và cắt BC tại F . Chứng minh các điểm A , N , H , P , E cùng thuộc một đường tròn và F là trung điểm của HD .
- Chứng minh $AD \perp NP$. Tia OF cắt (T) tại I , chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và AI qua trung điểm của MP .

Phân tích. a) Với câu a) có khá nhiều cách để tìm ra được độ dài cạnh AC , đơn giản nhất vẫn là áp dụng định lý sin. Ngoài ra, có thể xét tam giác vuông cân ACD , cũng sẽ tìm được độ dài AC .

Việc tìm ra số đo góc HPN cũng nhiều hướng đi. Chủ yếu là vận dụng các tứ giác nội tiếp và góc nội tiếp. Tôi xin nêu ra một vài hướng đi

- Dùng tứ giác nội tiếp $HPAN$ có $\widehat{HPN} = \widehat{HAN} = \widehat{MAC}$, (đối đỉnh). Việc tiếp theo là tìm số đo góc MAC . Khá là dễ dàng, tam giác ABM vuông cân tại M nên $\widehat{BAM} = 45^\circ$. Từ đó, $\widehat{MAC} = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.
- Dùng tứ giác nội tiếp $NPCB$ có $\widehat{NPB} = \widehat{NCB} = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Mục đích ta tìm số đo góc NPB là bởi $\widehat{HPA} = 90^\circ$, nghĩa là $\widehat{HPN} = 90^\circ - \widehat{NPA} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.
- Cách trong lời giải...

Việc tìm tỷ số $\frac{MP}{MN}$ ta lại tiếp tục áp dụng định lý sin trong tam giác MNP . Việc còn lại là tìm ra số đo góc MPN và MNP . Điều này khá đơn giản!

b) Để chứng minh 5 điểm A, N, H, P, E cùng thuộc đường tròn thì ta chỉ cần chứng minh thêm điểm E thuộc đường tròn ngoại tiếp 4 điểm A, N, H, P . Điều này suy ra từ tam giác AEH vuông nên nội tiếp đường tròn đường kính AH .

Để chứng minh F là trung điểm HD , ta sẽ chứng minh tứ giác $HCDB$ là hình bình hành bằng cách chứng minh $HB \parallel CD$ và $CH \parallel BD$.

c) Nhận thấy $AD \perp CO$, nên việc chứng minh $AD \perp NP$ quy về việc chứng minh $CO \parallel NP$. Để ý một chút, tứ giác $NPCB$ nội tiếp nên $\widehat{PNC} = \widehat{PBC} = 45^\circ = \widehat{ACO}$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Rõ ràng, $IB = IC$ nên để chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC ta chỉ việc chứng minh thêm $IH = IB$ hay $IH = IC$ hay IH bằng với một giá trị thay thế nào đó cũng bằng với IB, IC . Thật vậy, ta có thể chứng minh $IH = IB = IC = R$ thông qua tính chất hình bình hành $OHID$.

Để chứng minh AI đi qua trung điểm MP ta chỉ cần chứng minh được $AMIP$ là hình bình hành. Rõ ràng, đã có $AM \parallel IP$ nên chỉ cần chứng minh thêm $AM = IP$ là xong. Để chứng minh điều này, ta cần chứng minh $HM = OP$ và $AH = OI$ thông qua việc xét các hình bình hành $HMOP$ và $AHIO$.

Lời giải. a) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta được

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = 2R \Leftrightarrow AC = 2R \sin \widehat{ABC} = 2R \sin 45^\circ = R\sqrt{2}.$$

Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$ tại N và $CH \perp AB$ tại P .

Do đó, $\widehat{BNC} = \widehat{BPC} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $BNPC$ nội tiếp được.

Suy ra $\widehat{HPN} = \widehat{NBC}$, (cùng bù với $\widehat{NPC}$).

Mặt khác tam giác BNC vuông tại N nên

$$\widehat{NBC} = 90^\circ - \widehat{NCB} = 90^\circ - (180^\circ - 120^\circ - 45^\circ) = 75^\circ.$$

Vậy $\widehat{HPN} = 75^\circ$.

Lại có $\widehat{AMC} = \widehat{APC} = 90^\circ$ nên tứ giác $APCM$ nội tiếp được.

Suy ra $\widehat{APM} = \widehat{ACM}$, (cùng chắn $\widehat{AM}$).

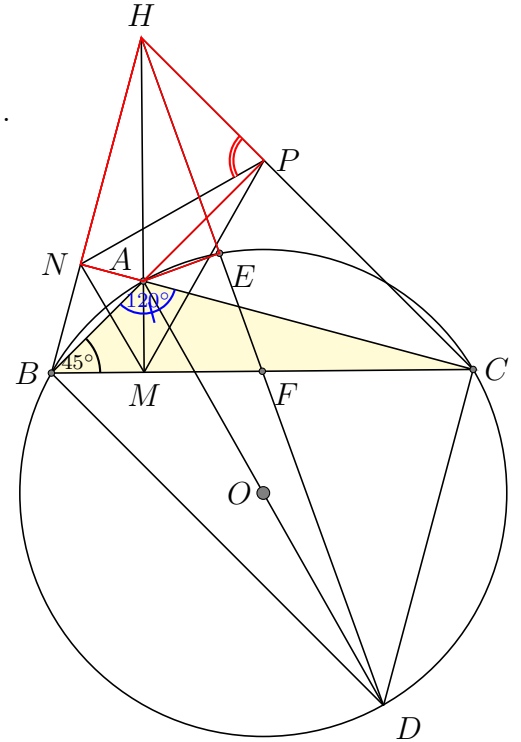
Mà $\widehat{NPA} = \widehat{ACB}$, (cùng chắn $\widehat{BN}$).

Suy ra $\widehat{APM} = \widehat{NPA} = \widehat{ACM}$.

$$\Rightarrow \widehat{NPM} = 2\widehat{ACM} = 2.15^\circ = 30^\circ.$$

Tương tự, $\widehat{PNM} = 2\widehat{ABC} = 2.45^\circ = 90^\circ$.

$$\text{Từ đó, } \frac{MP}{MN} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2.$$



b) Ta có tam giác AED nội tiếp đường tròn đường kính AD nên tam giác AED vuông tại E . Khi đó

$$\widehat{ANH} = \widehat{APH} = \widehat{AEH} = 90^\circ.$$

Suy ra năm điểm A, N, H, P, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Ta lại có tam giác ABD và tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên tam giác ABD vuông tại B và tam giác ACD vuông tại C .

Khi đó $BH \parallel CD$, (cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel BD$, (cùng vuông góc với AB).

Suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Suy ra F là trung điểm của đường chéo HD .

c) Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} = 45^\circ$, (cùng chắn $\widehat{AC}$) nên tam giác ACD vuông cân tại C .

Suy ra CO là trung tuyến cũng là đường cao, vậy $CO \perp AD$.

Mặt khác $\widehat{PNC} = \widehat{ACO} (= 45^\circ)$ nên $NP \parallel CO$.

Suy ra $AD \perp NP$, (cùng vuông với CO).

Ta có OF là trung trực của BC nên $IB = IC$.

Mặt khác, $\widehat{BIC} = 120^\circ$ nên $\widehat{BIO} = 60^\circ$, suy ra tam giác BIO đều. Do đó $IB = IC = R$.

Dễ thấy F là trung điểm của OI nên tứ giác $OHID$ là hình bình hành. Suy ra $IH = OD = R$.

Do đó, $IB = IC = IH = R$. Vậy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

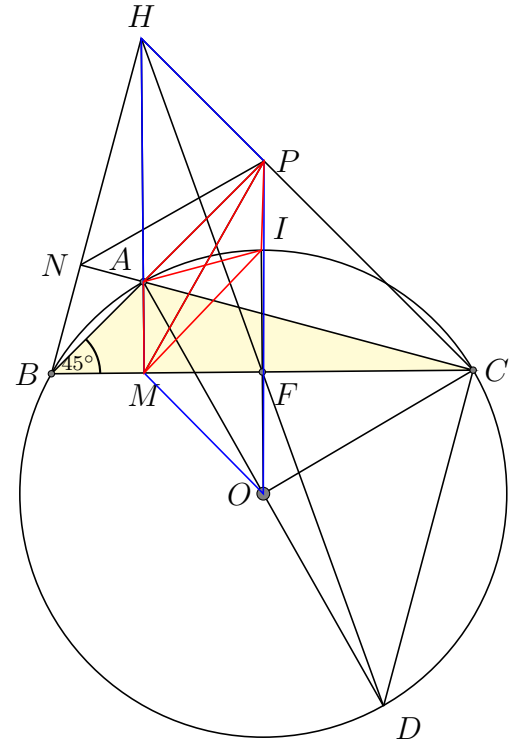
Dễ thấy, tam giác BPC vuông cân tại P có PF là trung tuyến nên là đường cao, vậy $PF \perp BC$.

Mà $OI \perp BC$ nên P, I, F, O thẳng hàng. Suy ra $OP \parallel HM$, (cùng vuông với BC).

Lại có tam giác AMB vuông cân tại M nên $MA = MB$. Mà $OA = OB$ nên MO là trung trực của AB . Suy ra $MO \perp AB \Rightarrow MO \parallel HP$, (cùng vuông với AB).

Do đó, tứ giác $MOPH$ là hình bình hành. Suy ra $HM = OP$.

Mặt khác, tứ giác $AHIO$ có $HI \parallel OA$ và $HI = OA = R$ nên tứ giác $AHIO$ là hình bình hành, suy ra $AH = OI = R$. Vậy $AM = PI$. Mà $AM \parallel PI$ nên tứ giác $AMIP$ là hình bình hành. Do đó, đường chéo AI đi qua trung điểm của đường chéo MP .



Bình luận. Bài toán này khá thú vị, ngoài kiến thức lớp 9 về tứ giác nội tiếp thì bài toán còn có thêm các kiến thức về tính chất của hình bình hành, đường trung trực, định lý sin,... Tuy nhiên, bài toán khá phức tạp ở hình vẽ, học sinh không nên vẽ vẽ hết các chi tiết trong bài chỉ để giải 1 câu mà hãy chia hình ra. Như vậy, việc nhìn hình sẽ dễ dàng hơn.

Bài tập tương tự.

3 Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa, vòng 1-2017

Bài 1

Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$,
với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Phân tích. a) Để rút gọn thì trước tiên ta thực hiện quy đồng và lưu ý là mẫu số chung của $\sqrt{x}-2$ và $\sqrt{x}-3$ là: $x-5\sqrt{x}+6$.

- b) Do A nhận giá trị nguyên nên ta sẽ rút gọn thêm để đưa A về dạng $a + \frac{b}{B}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và B là biểu thức chứa biến x , đồng thời B là ước của b (trong trường hợp này $B = \sqrt{x}+1$).

Lời giải. a) Với điều kiện xác định của biểu thức A : $x \geq 0, x \neq 0$ và $x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{(x-2)(\sqrt{x}-3)}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

- b) Ta rút gọn $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$, khi đó để A nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}+1$ phải là ước của 3 hay ta có: $\sqrt{x}+1 = 1 \vee \sqrt{x}+1 = 3$ (do $\sqrt{x}+1 > 0$ nên chỉ lấy 2 giá trị là 1 và 3)

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$



Bài tập tương tự.

Cho $B = \left(2 - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-5} - \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}-14}{x-9\sqrt{x}+20}\right)$,
với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 16$ và $x \neq 25$.

a) Rút gọn B .

b) Tìm các giá trị nguyên của x sao cho B nhận giá trị nguyên.

Đáp án: a) $B = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 1}$, b) $x = 0, x = 4, x = 36$.

Bài 2

a) Trong mặt phẳng Oxy , cho ba đường thẳng $(d_1) : y = -5(x + 1)$, $(d_2) : y = 3x - 13$ và $(d_3) : y = mx + 3$ (với m là tham số). Tìm tọa độ giao điểm I của (d_1) và (d_2) , với giá trị nào của m thì đường thẳng (d_3) đi qua I ?

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x - 1| + 2\sqrt{y + 2} = 5 \\ 3\sqrt{y + 2} - |x - 1| = 5. \end{cases}$$

Phân tích. a) Ta lưu ý là việc tìm giao điểm của hai đường thẳng quy về việc giải hệ phương trình chứa phương trình của hai đường thẳng đó.

b) Ta xem xét hệ phương trình của ta trên 2 biến mới là $|x - 1|$ và $\sqrt{y + 2}$ rồi thực hiện việc giải. Lưu ý nhớ điều kiện $y \geq -2$ để đảm bảo việc nhận nghiệm giải ra được.

Lời giải. a) Do $I = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ của I thỏa hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y = -5(x + 1) \\ y = 3x + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y = -5 \\ -3x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9}{4} \\ y = \frac{-25}{4} \end{cases}$$

Suy ra tọa độ giao điểm $I(\frac{-9}{4}; \frac{-25}{4})$ là giá trị cần tìm.

Để (d_3) đi qua I thì tọa độ của điểm I phải thỏa phương trình của (d_3) , khi đó: $\frac{25}{4} = m(\frac{-9}{4}) + 3 \Leftrightarrow m = \frac{-13}{9}$.

b) ĐK: $y \geq -2$. Ta xem $|x - 1|$ và $\sqrt{y + 2}$ là 2 biến và giải:

$$\begin{cases} |x - 1| + 2\sqrt{y + 2} = 5 \\ 3\sqrt{y + 2} - |x - 1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = 1 \\ \sqrt{y + 2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $S = \{(1; 2), (-1; 2)\}$.



Bài tập tương tự.

- a) Trong mặt phẳng Oxy , cho ba đường thẳng $(d_1) : y = x + 1$, $(d_2) : y = 4x - 6$ và $(d_3) : y = m\frac{x}{4} + 5$ (với m là tham số). Tìm tọa độ giao điểm I của (d_1) và (d_2) , với giá trị nào của m thì đường thẳng (d_3) đi qua I ?

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x - 3| - \sqrt{2y - 3} = 1 \\ 3\sqrt{2y - 3} - |x - 3| = 5. \end{cases}$$

Đáp án: a) $I(\frac{7}{3}; \frac{10}{3})$, $m = \frac{-20}{7}$; b) $S = \{(7; 6), (-1; 6)\}$.

Bài 3

- a) Tìm m để phương trình: $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn hệ thức: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0$.
- b) Giải phương trình: $x\sqrt{2x - 2} = 9 - 5x$.

Phân tích. a) Do để có 2 nghiệm phân biệt nên phương trình đã cho phải là phương trình bậc 2 tức $a \neq 0$ và $\Delta > 0$.

Hệ thức của ta chưa đưa về dạng chỉ có tổng và tích hai nghiệm nên ta phải rút gọn. Sau đó áp dụng hệ thức Vi-ét để giải ra m .

- b) Ta xác định điều kiện của căn thức, từ đó xác định điều kiện để 2 vế cùng dấu (trong trường hợp này là dấu +) để có thể bình phương làm mất căn thức. Sau khi ra được phương trình bậc 3 ta nhẩm (hoặc bấm máy) ra được một nghiệm là $x = 3$ và sử dụng sơ đồ Hoocnor để phân tích bậc 3 thành tích của đa thức bậc nhất và bậc hai.

Lời giải. a) $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (*)

$$+ \text{ Để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thì } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - (m - 1)(m + 2) > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \neq 1. \end{cases}$$

$$+ \text{ Ta có: } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1x_2}{2x_1x_2} = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 0.$$

Áp dụng định lý Vi-ét vào hệ thức trên ta được:

$$2\left(\frac{2m}{m-1}\right)^2 + \frac{m+2}{m-1} = 0 \Leftrightarrow 8m^2 + (m-1)(m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 + \sqrt{73}}{18} \vee m = \frac{-1 - \sqrt{73}}{18}.$$

Vậy sau khi so với điều kiện ta được $m = \frac{-1 + \sqrt{73}}{18} \vee m = \frac{-1 - \sqrt{73}}{18}$ là các giá trị cần tìm.

b) $x\sqrt{2x-2} = 9 - 5x$ (*), ĐKXD: $x \geq 1$.

Khi $x \geq 1$ thì $x\sqrt{2x-2} \geq 0$ nên $9 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{5}$. Tóm lại ta có $1 \leq x \leq \frac{9}{5}$.

$$(*) \Leftrightarrow x^2(2x-2) = (9-5x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 27x^2 + 90x - 81 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2 - 21x + 27) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 9 \vee x = \frac{3}{2}.$$

So với điều kiện ta được $x = \frac{3}{2}$.

Vậy $S = \{\frac{3}{2}\}$.



Bài tập tương tự.

a) Tìm m để phương trình: $mx^2 - 2mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn hệ thức: $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + 18 = 0$.

b) Giải phương trình: $x\sqrt{x+8} = x + 2$.

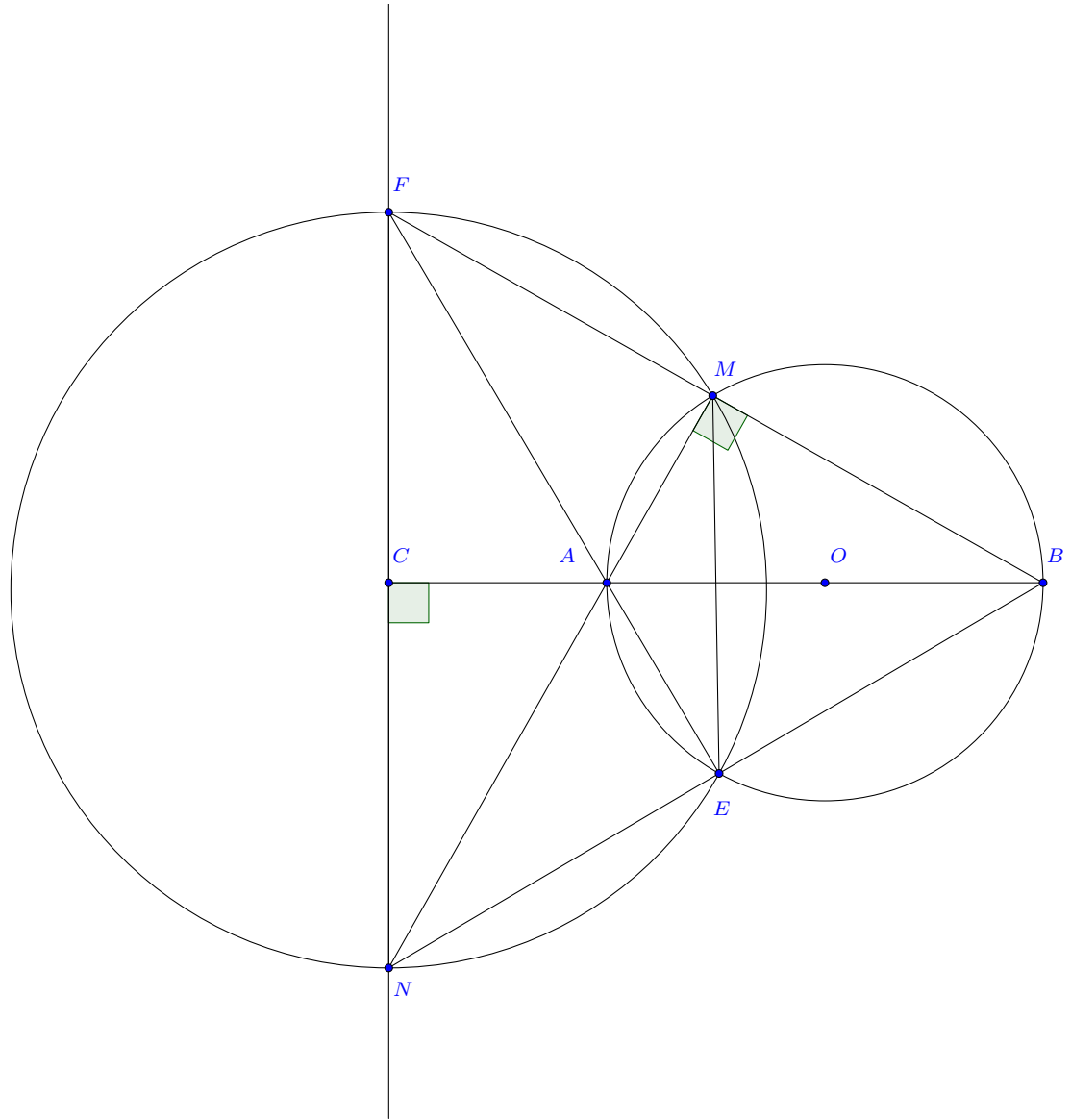
Đáp án: a) $m = \frac{3}{5}$, b) $x = 1, x = -4 - 2\sqrt{3}$.

Bài 4

Cho đường tròn (O) với tâm O , bán kính R và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (O) sao cho M không trùng với các điểm A và B . Lấy điểm C đối xứng của O qua A . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N . Đường thẳng BN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E . Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F .

- Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng và tứ giác $MENF$ nội tiếp.
- Chứng minh rằng $AM \cdot AN = 2R^2$.
- Xác định vị trí điểm M trên đường tròn (O) để tam giác BNF có diện tích nhỏ nhất.

- Phân tích.** a) Nhận thấy A là giao điểm của 2 đường vuông góc NM, BC đồng thời FE cũng là đường vuông góc nên ý tưởng ở đây sẽ là chứng minh A là trực tâm trong tam giác BNF . Sau khi đã có A, E, F thẳng hàng thì để chứng minh tứ giác nội tiếp ta sử dụng dấu hiệu 2 góc bằng nhau cùng nhìn một cạnh.
- b) Cần chứng minh $AM \cdot AN = 2R^2$ nên ý tưởng đầu tiên sẽ xuất hiện là việc chứng minh hai tam giác đồng dạng và hai tam giác đó có chứa AO, AB hay CA . Thứ hai ta nhận thấy $AM \cdot AN = AE \cdot AF$ —một phần ở đây do hai tam giác chứa AE và AF của ta chứa cả AC và AB nên dẫn đến việc xét hai tam giác CAF và tam giác EAB .
- c) Sau khi tính diện tích tam giác BFN ta nhận thấy cần tìm min $CF + CN$, từ đây ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy và cũng tất nhiên ta cần chứng minh tích $CF \cdot CN$ là một hằng số. Việc đạt giá trị nhỏ nhất cần xét trường hợp dấu bằng xảy ra $CF = CN$ dẫn đến tam giác BFN cân. Tiếp theo để xác định cụ thể điểm M ta nghĩ đến việc chứng minh $\triangle BFN$ đều để sử dụng các góc 60° có liên quan đến M .



Lời giải.

a) Ta xét tam giác BFN có BC , NM và FE lần lượt là đường cao kẻ từ đỉnh B , N và F , đồng thời $BC \cap NM = A$ nên A là trực tâm, suy ra $A \in FE$. Vậy A, E, F thẳng hàng.

Ta lại xét trong tứ giác $MENF$ có: $\widehat{NMF} = \widehat{NEF} = 90^\circ$ và cùng nhìn cạnh NF , suy ra tứ giác $MENF$ nội tiếp.

b) Theo tính chất (Toán 9-Tập 2, Bài 23/76) ta có: $AM \cdot AN = AE \cdot AF$

Đồng thời lại có $\triangle CAF \sim \triangle EAB$ suy ra: $\frac{AC}{AE} = \frac{AF}{AB} \Leftrightarrow AE \cdot AF = AC \cdot AB = AO \cdot AB = 2R^2$ Vậy ta đã chứng minh được $AM \cdot AN = 2R^2$.

c) Ta có: $\widehat{NBC} = \widehat{CFA}$ (do $\triangle CFA \sim \triangle EBA$ theo câu b) nên ta có $\triangle CFA \sim \triangle CBN \Rightarrow CF \cdot CN = CA \cdot CB = 3R^2$.

Mặt khác: $S_{\triangle BNF} = \frac{1}{2} BC \cdot FN = \frac{1}{2} 3R \cdot FN = \frac{1}{2} 3R \cdot (CF + CN)$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $CF + CN \geq 2\sqrt{CF \cdot CN} = 2\sqrt{3}R$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $CF = CN$ -tức BC là đường trung tuyến, đồng thời BC cũng là đường cao nên $\triangle BFN$ cân tại B .

Ta lại có $BA = \frac{2}{3}BC$ nên A là trọng tâm tam giác BFN và theo câu a) thì A là cũng là trực tâm vì thế tam giác BFN đều. Suy ra $CBF = 30^\circ$ hay $\widehat{ABM} = 30^\circ$.

Vậy để $S_{\Delta BFN}$ nhỏ thì M thuộc đường tròn (O) sao cho $\widehat{ABM} = 30^\circ$. ■

Bài 5

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} > 1.$$

Phân tích. Đề bài cho a, b, c là ba cạnh của tam giác nên ta sẽ lưu ý đến bất sau: $a + b - c > 0$. Bắt đầu bài toán bằng việc chuyển hết sang một vế và quy đồng, do mẫu là số dương nên ta chỉ cần xét tử dương là thỏa yêu cầu bài toán:

- i) Ta nhận thấy có xuất hiện: $a^2 + b^2, b^2 + c^2, a^2 + c^2$, khi đó ta nghĩ ngay đến việc làm xuất hiện các hằng đẳng thức bằng cách thêm bớt $2ab, 2bc, 2ac$ - cụ thể ta thêm bớt $2abc$.
- ii) Sau khi thêm bớt để được các hằng đẳng thức, ta tiếp tục sử dụng hằng đẳng thức $A^2 - B^2$, sau đó để ý ta sẽ nhận thấy có nhân tử chung $a + b - c$.
- iii) Sau khi đặt nhân tử chung, ta tiếp tục rút gọn để được $(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)$ -gợi ý cho ta về việc sử dụng bất đẳng thức trong tam giác.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} > 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{c(a^2 + b^2 - c^2) + a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) - 2abc}{2abc} > 0 \\ \Leftrightarrow & c(a^2 + b^2 - c^2) + a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) - 2abc > 0 \\ \Leftrightarrow & c(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) + a(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) + b(a^2 + c^2 - b^2 - 2ac) > 0 \\ \Leftrightarrow & c[(a+b)^2 - c^2] + a[(b-c)^2 - a^2] + b[(a-c)^2 - b^2] > 0 \\ \Leftrightarrow & c(a+b-c)(a+b+c) + a(b-c-a)(b-c+a) + b(a-c-b)(a-c+b) > 0 \\ \Leftrightarrow & (a+b-c)[c(a+b+c) + a(b-c-a) + b(a-c-b)] > 0 \\ \Leftrightarrow & (a+b-c)(c^2 - a^2 + 2ab - b^2) > 0 \\ \Leftrightarrow & (a+b-c)[c^2 - (a-b)^2] > 0 \\ \Leftrightarrow & (a+b-c)(c-a+b)(c+a-b) > 0 \end{aligned}$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta có:
$$\begin{cases} a + b - c > 0 \\ c + b - a > 0 \\ c + a - b > 0. \end{cases}$$

Suy ra $(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b) > 0$ luôn đúng.

Vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức ban đầu. ■

4 Đề thi tuyển sinh trường KHTN - ĐHQG Hà Nội năm 2017-2018 (Không Chuyên)

Bài 1

Câu 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x + x^2y = 2y^3 \end{cases}$$

Câu 2) Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})(2 - \sqrt{1-x^2})$.

Câu 1)

Phân tích. Trước hết ta biến đổi hệ phương trình đã cho thành
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + xy & (1) \\ x(1 + xy) = 2y^3 & (2) \end{cases}$$
 Từ đó một ý tưởng tự nhiên là thay phương trình (1) vào (2), ta sẽ được phương trình mới là:

$$x(x^2 + y^2) = 2y^3 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Dễ dàng nhận thấy phương trình $x^2 + xy + 2y^2 = 0$ vô nghiệm do:

$$x^2 + xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{7y^2}{4} > 0 \text{ với } x, y \neq 0$$

Từ đó thay $x = y$ vào phương trình (1) ta được phương trình $2x^2 - x - 1 = 0$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + xy & (1) \\ x(1 + xy) = 2y^3 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được

$$\begin{aligned} x(x^2 + y^2) &= 2y^3 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + 2y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + 2y^2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Thay $x = y$ vào (1) ta thu được tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1; 1), (-1; -1)\}$.



Bình luận. Đây là một câu khá dễ trong đề thi, điểm mấu chốt của bài toán này là đưa được về phương trình $(x - y)(x^2 + xy + 2y^2) = 0$

Bài tập tương tự.

1. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + x^2y = 2 \\ 2x - x^3y + 3y^3 = 0 \end{cases}.$$

2. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 3xy \\ 3x^2y = 10y^3 + x \end{cases}.$$

Tiêu Khánh Văn-SV DHSP TPHCM

Câu 2) $2(x + 1)\sqrt{x + 1} = (\sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x})(2 - \sqrt{1 - x^2})$ (1)

Phân tích. Nhìn vào phương trình đề cho, nếu chúng ta đặt $a = \sqrt{x + 1}$ và $b = \sqrt{1 - x}$ thì ta sẽ có $a^2 + b^2 = 2$.

Từ đó về phải của phương trình sẽ trở thành

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \text{ (Thay } 2 = a^2 + b^2)$$

Mặc khác VT = $2a^3$ nên phương trình trở thành $2a^3 = a^3 + b^3 \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $a = \sqrt{x + 1}$ và $b = \sqrt{1 - x}$ thì ta sẽ có $a^2 + b^2 = 2$.

Mặc khác VT = $2a^3$ nên phương trình trở thành $2a^3 = a^3 + b^3 \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$.

Khi đó $\sqrt{x + 1} = \sqrt{1 - x} \Leftrightarrow x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$.



Bình luận.

Việc đặt $a = \sqrt{x + 1}$ và $b = \sqrt{1 - x}$ giúp ta dễ biến đổi và phát hiện về phải của phương trình là một hằng đẳng thức, đây cũng chính là điểm mấu chốt giúp ta giải phương trình này.

Việc đặt ẩn phụ giúp ta trình bày lời giải một cách rõ ràng, tránh những sai lầm không đáng có, đồng thời giúp ta dễ nhìn ra hướng giải quyết của bài toán. Tuy nhiên, việc nhìn ra cách đặt ẩn phụ như thế nào, đòi hỏi người làm toán phải có kĩ năng tốt trong việc quan sát và đánh giá.

Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình: $9(1-x)\sqrt{1-x} = (\sqrt{1+4x} + 2\sqrt{1-x})(5 - 2\sqrt{1+3x-4x^2})$.
2. Giải phương trình: $7(3+2x)\sqrt{3+2x} = (\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x})(6 + \sqrt{9-4x})$.

Tiêu Khánh Văn-SV DHSP TPHCM

Bài 2

Câu 1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$12x^2 + 26xy + 15y^2 = 4617$$

Câu 2) Với a, b là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = (a+b) \left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{a+b^3} \right) - \frac{1}{ab}$$

Câu 1)

Phân tích. Nhìn vào vế trái của đẳng thức, ta có thể dễ dàng thấy rằng

$$12x^2 + 26xy + 15y^2 = (2x-y)^2 + (2y)^2$$

Mặt khác $4617 = 19 \cdot 243$ nên $(2x-y)^2 + (2y)^2 = 19 \cdot 243$, suy ra $19|(2x-y)^2 + (2y)^2$ và $243|(2x-y)^2 + (2y)^2$. Mà 19 là số nguyên tố có dạng $4k+3$ nên ta nghĩ đến bổ đề: Nếu $p|a^2 + b^2$ thì $p|a, b$ với $p = 4k+3$. Và khi phân tích tiếp, ta có thể thấy được điều mâu thuẫn.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bổ đề sau: Nếu $p|a^2 + b^2$ thì $p|a, b$ với $p = 4k+3$.

Chứng minh phản chứng.

Giả sử $p|a$ và $p|b$ sai. Khi đó có 3 trường hợp:

TH1: $p|a$ và $p \nmid b$

Khi đó $p|a^2$ và $p \nmid b^2$, suy ra $p \nmid a^2 + b^2$ (mâu thuẫn).

TH2: $p \nmid a$ và $p|b$ (tương tự như TH1)

TH3: $p \nmid a$ và $p \nmid b$ Khi đó, theo định lý Fermat nhỏ:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ và } b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

$$\text{Suy ra } a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}.$$

$$\text{Do đó } a^{4k+2} + b^{4k+2} \equiv 2 \pmod{p}.$$

$$\text{Hay } a^{2(2k+1)} + b^{2(2k+1)} \equiv 2 \pmod{p}.$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{p} \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

$$\begin{aligned} \text{Vì } 4617 &= 19 \cdot 243 \text{ nên } 19 \mid 12x^2 + 26xy + 15y^2 \Rightarrow 19 \mid 12x^2 - 12xy + 15y^2 + 38xy \\ &\Rightarrow 19 \mid 3(4x^2 - 4xy + 5y^2) \Rightarrow 19 \mid 4x^2 - 4xy + y^2 + 4y^2 \Rightarrow 19 \mid (2x - y)^2 + (2y)^2. \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng 19 là số nguyên tố có dạng $4k + 3$, áp dụng bổ đề trên ta được $19 \mid 2x - y$ và $19 \mid 2y$ do đó $19 \mid 4x$ suy ra $19 \mid x, y$ hay $19^2 \mid 12x^2 + 26xy + 15y^2$ (vô lí vì $19^2 \nmid 4617$)

Vậy không tồn tại các số nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình. ■

Bình luận. Bài toán này đòi hỏi học sinh phải có kĩ năng quan sát tốt cũng như kiến thức rộng. Bài toán sẽ khá đơn giản nếu học sinh biết được bổ đề và ngược lại sẽ khó mà có được lời giải nếu chưa biết trước bổ đề đã nêu.

Bài tập tương tự.

1. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $29x^2 + 16xy + 5y^2 = 2666$.
2. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $13x^2 + 24xy + 13y^2 = 3397$.

Vương Phú Quý-SV DHSP TPHCM

Câu 2

Phân tích. Ở bài tập này, đề bài không cho bất cứ dữ liệu gì ngoài a, b là các số thực dương, vì vậy để đánh giá được GTLN của biểu thức, ta nghĩ tới việc đánh giá từng phần của biểu thức và rút gọn với nhau.

Đầu tiên, ta thấy nếu ta nhân $a^3 + b$ với $\frac{1}{a} + b$ và sử dụng bất đẳng thức BCS ta sẽ thấy xuất hiện được $(a + b)^2$, tương tự với $b^3 + a$ ta cũng thấy xuất hiện $(a + b)^2$.

$$(a^3 + b) \left(\frac{1}{a} + b \right) \geq (a + b)^2; (b^3 + a) \left(\frac{1}{b} + a \right) \geq (a + b)^2.$$

Khi đó $\frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{b^3 + a} \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{(a + b)^2}$, khi có được điều này, ta có thể rút gọn với nhân tử $a + b$ ở phía ngoài, làm gọn được biểu thức. Tiếp tục làm gọn, ta sẽ có được kết quả.

Lời giải. Áp dụng BDT BCS ta có:

$$(a^3 + b) \left(\frac{1}{a} + b \right) \geq (a + b)^2; (b^3 + a) \left(\frac{1}{b} + a \right) \geq (a + b)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{b^3 + a} \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{(a + b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{VT} \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{a + b} - \frac{1}{ab} = 1 + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ab} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

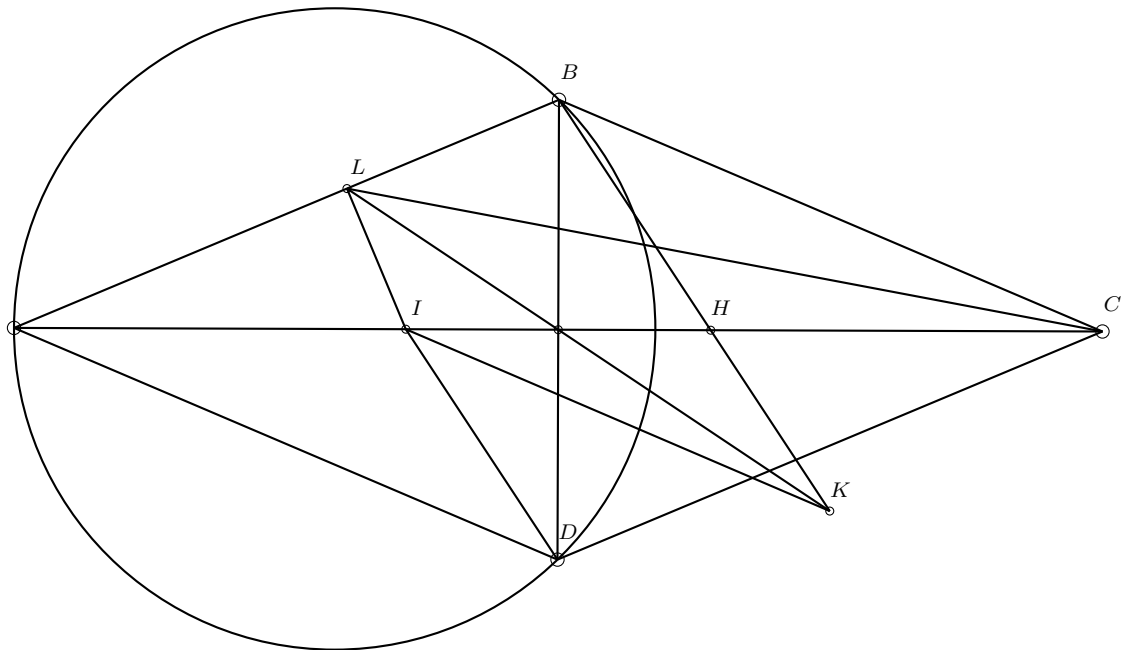
Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi $a = b = 1$. ■

Bình luận. Điểm mấu chốt ở bài tập này đó là tìm ra được nhân tử nhân thêm vào rồi dùng bất đẳng thức BSC đánh giá được một phần của biểu thức. Để tìm được nhân tử nhân thêm này, ta cần quan sát xem ta đang muốn xuất hiện đa thức gì. Và để trả lời cho câu hỏi này, ta cần quan sát tổng quát biểu thức để nhận ra rằng ta cần rút gọn đa thức nào, và trong bài này, đó là $a + b$.

Bài 3

Cho hình thoi $ABCD$ với $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD và tiếp xúc với BD, BA lần lượt tại J, L . Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song với ID .

- Chứng minh rằng: $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$.
- Chứng minh rằng: $KC \perp KB$.
- Chứng minh rằng: C, K, I, L cùng thuộc một đường tròn.



Phân tích. Ở câu a) vì $\widehat{ABJ} = \widehat{CBJ}$ nên để chứng minh $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$ ta cần chứng minh $\widehat{IBJ} = \widehat{HBJ}$, mà $BD \perp IH$ do đó ta cần chứng minh $IBHD$ là hình thoi. Để chứng minh $IBHD$ là hình thoi ta cần chứng minh $IBHD$ là hình bình hành. Vì BH song song với ID nên để chứng $IBHD$ là hình bình hành ta cần chứng minh $ID = BH$. Muốn chứng minh $ID = BH$, ta sẽ chứng minh tam giác BJH bằng tam giác DJI .
Ở câu b) Giả sử $\widehat{BKC} = 90^\circ$, khi đó tứ giác $BCKJ$ nội tiếp (vì $\widehat{BJC} = 90^\circ$). Vậy để chứng minh $\widehat{BKC} = 90^\circ$ ta cần chứng minh tứ giác $BCKJ$ nội tiếp. Để chứng minh tứ giác $BCKJ$ nội tiếp ta cần chứng minh $\widehat{CJK} = \widehat{KBC}$. Mà $\widehat{CJK} = \widehat{LJI}$ và $\widehat{KBC} = \widehat{LBI}$ nên để chứng minh $\widehat{CJK} = \widehat{KBC}$ ta cần chứng minh $\widehat{LBI} = \widehat{LJI}$, do đó, ta cần chứng minh tứ giác $LBJI$ nội tiếp.
Ở câu c) Để chứng minh L, I, K, C thuộc cùng một đường tròn nghĩa là ta cần chứng minh tứ giác $LIKC$ nội tiếp. Hay nói cách khác, ta cần chứng minh $\widehat{ILK} = \widehat{KCI}$. Điều này có thể dễ chứng minh được vì $\widehat{ICK} = \widehat{JBK} = \widehat{IBJ} = \widehat{ILJ}$.

Lời giải. a) Gọi $BK \cap AC = H$. Ta có tam giác BIH bằng tam giác DJI (c-g-c) do đó $DI = BH$ nên tứ giác $IBHD$ là hình bình hành. Mà $BD \perp IH$ nên tứ giác $IBHD$ là hình thoi, suy ra $\widehat{IBJ} = \widehat{HBJ}$. Mà $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{ABJ} = \widehat{CBJ}$ do đó $\widehat{ABI} = \widehat{CBK}$.
b) Ta có $\widehat{ILB} = \widehat{IJB} = 90^\circ$ nên tứ giác $LBII$ nội tiếp do đó $\widehat{KBC} = \widehat{ABI} = \widehat{LJI} = \widehat{KJC}$.
Suy ra tứ giác $BJKC$ nội tiếp, do đó $\widehat{BJC} = \widehat{BKC} = 90^\circ$. Vậy $BC \perp KC$.
c) Vì $BJKC$ nội tiếp nên $\widehat{JCK} = \widehat{JBK} = \widehat{IBJ} = \widehat{ILJ}$ do đó L, I, K, C nội tiếp. ■

Bình luận. Câu a) là một câu khá dễ trong phần hình học, tuy nhiên để làm được câu này, học sinh cần nắm vững các dấu hiệu nhận biết hình thoi cũng như cách chứng minh hình bình hành, hình thoi.

Câu b) cũng không quá khó để học sinh có thể nhìn ra hướng giải. Để làm được câu này, học sinh cần nắm vững kiến thức về tứ giác nội tiếp đường tròn và việc vận dụng kết quả của câu trước như là một dữ liệu để giải quyết câu sau.

Hướng giải câu c) cũng không khó để tìm ra. Cũng như câu b), học sinh cần nắm vững kiến thức về tứ giác nội tiếp đường tròn và việc vận dụng kết quả của câu trước.

Bài 4

Tìm hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại 1 cách sắp xếp $1, 2, \dots, n$ thành $a_1, a_2, \dots, a_n$ mà khi chia các số $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2a_3\dots a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau.

Phân tích. Theo đề, ta có thể suy ra được a_n phải là n vì nếu ngược lại giả sử tồn tại $n \neq n : a_i = n$ thì trong dãy $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2a_3\dots a_n$ sẽ có ít nhất 2 số chia hết cho n (trái với đề bài). Suy ra $a_1a_2a_3\dots a_{n-1} = (n-1)!$ và $a_1a_2a_3\dots a_n : n$.

Từ suy luận đó cùng với n là hợp số, ta nghĩ đến một bổ đề: Nếu n là hợp số và $n > 4$ thì $(n-1)! : n$.

Dựa vào bổ đề này ta có thể kết luận được $n = 4$ là kết quả cần tìm.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bổ đề sau: Nếu n là hợp số và $n > 4$ thì $(n-1)! : n$.

Chứng minh: Vì n là hợp số lớn hơn 4 nên tồn tại a, b thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $1 < a < b < n$ và $n = a.b$. Suy ra $(n-1)! : ab$ hay $(n-1)! : n$.

Trước hết a_n phải là n vì nếu ngược lại giả sử tồn tại $n \neq n : a_i = n$ thì trong dãy $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2a_3\dots a_n$ sẽ có ít nhất 2 số chia hết cho n (trái với đề bài).

Suy ra $a_1a_2a_3\dots a_{n-1} = (n-1)!$ và $a_1a_2a_3\dots a_n : n$.

Nếu $n > 4$ thì do n là hợp số nên $(n-1)! : n$ hay $a_1a_2a_3\dots a_{n-1} : n$ (loại).

Nếu $n = 4$ thì tồn tại một hoán vị của 1, 2, 3, 4 là 1, 3, 2, 4. Khi đó dãy số 1, 1.3, 1.3.2, 1.3.2.4 sẽ có số dư 1, 3, 2, 0 khi chia cho 4.

Vậy $n = 4$ là hợp số thỏa đề. ■

Bình luận. Bài tập này là một bài tập khó. Đầu tiên học sinh có khả năng quan sát cũng như nhận định tốt, ta có thể rút ra được nhận xét $a_n = n$. Không những vậy, bài tập này đòi hỏi học sinh phải có kiến thức rộng, biết được bổ đề mới có khả năng giải quyết được bài toán.

5 Đề thi tuyển sinh trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội (Vòng 2)

Bài 1

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = \sqrt{x + 3y} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy = 3 & (2). \end{cases}$$

2) Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

Phân tích.

- 1) Ta dễ thấy rằng hệ số trước x, y ở phương trình (1) bằng nhau và cùng bằng 1. Tương tự, hệ số trước x^2, y^2 ở phương trình (2) đều cùng bằng 1. Do đó, nếu bình phương hai vế phương trình (1) sau đó trừ phương trình (2) (trừ vế theo vế) thì ta sẽ triệt tiêu được x^2 và y^2 . Khi đó, ta dễ dàng biểu thị mối liên hệ giữa x và y bằng phép biến đổi đại số.
- 2) Với điều kiện $ab + a + b = 1$, ta nghĩ ngay tới việc thay $1 = ab + a + b$ vào $1 + a^2$. Khi đó ta được: $1 + a^2 = ab + a + b + a^2 = (a + 1)(a + b)$. Tương tự: $1 + b^2 = ab + a + b + b^2 = (b + 1)(a + b)$. Thay $1 + a^2 = (a + 1)(a + b)$ và $1 + b^2 = (b + 1)(a + b)$ vào biểu thức cần chứng minh sau đó thực hiện phép biến đổi tương đương ta sẽ có ngay điều phải chứng minh.

Lời giải.

- 1) ĐKXD: $x + y \geq 0$.

Từ (1) ta suy ra $x^2 + y^2 + 2xy = x + 3y$ (*). Thay (2) vào (*) ta được:

$$3 + xy = x + 3y \Leftrightarrow (x - 3)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

- Với $x = 3$ thì (2) trở thành: $y^2 + 3y + 6 = 0$ (vô nghiệm).
- Với $y = 1$ thì (2) trở thành:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{thỏa điều kiện } x + y \geq 0) \\ x = -2 & (\text{không thỏa điều kiện } x + y \geq 0). \end{cases}$$

Thử lại, ta thấy $(x; y) = (1; 1)$ là nghiệm của hệ.

2)

Cách 1. (Biến đổi tương đương ngay từ đầu)

$$\begin{aligned}
 & \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{a(1+b^2) + b(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{1}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} \quad (\text{do } 1+ab > 0) \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2}(a+b) = \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \\
 \Leftrightarrow & 2(a+b)^2 = (1+a^2)(1+b^2) \quad (\text{do } ab+a+b=1) \\
 \Leftrightarrow & (a+b)^2 + (a+b)^2 = (1+a^2)(1+b^2) \\
 \Leftrightarrow & (a+b)^2 + (1-ab)^2 = (1+a^2)(1+b^2) \\
 \Leftrightarrow & (a^2+2ab+b^2) + (1-2ab+a^2b^2) = 1+a^2+b^2+a^2b^2 \\
 \Leftrightarrow & 0=0 \quad (\text{luôn đúng}).
 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

Cách 2. (Biến đổi đại số sau đó biến đổi tương đương)

Ta có: $1+a^2 = ab+a+b+a^2 = (a+1)(a+b)$.

Tương tự: $1+b^2 = ab+a+b+b^2 = (b+1)(a+b)$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} &= \frac{a}{(a+1)(a+b)} + \frac{b}{(b+1)(a+b)} \\
 &= \frac{2ab+a+b}{(a+1)(b+1)(a+b)} \\
 &= \frac{1+ab}{(a+1)(b+1)(a+b)}.
 \end{aligned}$$

Mặt khác: $\frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(a+1)(b+1)(a+b)^2}} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(a+1)(b+1)(a+b)}}$.

Khi đó biểu thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1+ab}{(a+1)(b+1)(a+b)} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(a+1)(b+1)(a+b)}} \\
 \Leftrightarrow & (a+1)(b+1) = \sqrt{2(a+1)(b+1)} \\
 \Leftrightarrow & ab+a+b+1 = \sqrt{2(ab+a+b+1)} \\
 \Leftrightarrow & 2=2 \quad (\text{luôn đúng}).
 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.



Bình luận.

- 1) Đây là hệ tương đối đơn giản so với đề thi tuyển sinh vào trường trong những năm gần đây. Khá đơn giản để giải bằng toán bằng cách bình phương hai vế sau đó rút thế (hoặc trừ vế theo vế).
- 2) Bài toán không khó nhưng với cách khai thác lại khá hay với hướng đi rất rõ ràng từ việc phân tích $ab + a + b = 1$ sau đó thay vào $1 + a^2$ và $1 + b^2$. Học sinh chỉ cần cẩn thận trong các bước biến đổi tương đương là có thể dành điểm tối đa bài toán này.

Bài tập tương tự.

1) a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = \sqrt{2x + 3y + 4} \\ x^2 + 4y^2 + 2xy = 7. \end{cases}$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = \sqrt{x^2 + 12y + 12} \\ 3x^2 + 9y^2 + 10xy = 22. \end{cases}$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

- 2) a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $ab + ac + bc = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{c-b}{a^2+3} + \frac{a-c}{b^2+3} + \frac{b-a}{c^2+3} = 0.$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

- b) Cho hai số thực a, b sao cho $|a| \neq |b|$ và $ab \geq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{a^2-ab} = \frac{3a-b}{a^2-b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + 2a^2b + 3b^3}{2a^3 + ab^2 + b^3}.$$

Trích đề thi vào lớp 10 chuyên, TP Hồ Chí Minh năm 2016

Bài 2

1) Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức:

$$p(p-1) = q(q^2-1) \quad (*)$$

a) Chứng minh tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq, q^2-1 = kp$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức (*).

2) Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + ac + bc + abc = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2c+2}.$$

Phân tích.

1) a) Với yêu cầu chứng minh tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq, q^2-1 = kp$ thì ta sẽ có hai hướng giải quyết bài toán bằng cách chứng minh:

- $p \mid q^2 - 1 \Rightarrow q^2 - 1 = kp$ thay vào (*) ta được $p-1 = kq$.
- $q \mid p-1 \Rightarrow p-1 = kq$ thay vào (*) ta được $q^2-1 = kp$.

b) Hiển nhiên k là duy nhất do đó từ câu a) ta được:

$$q^2 - 1 = k(kq + 1) \Rightarrow q^2 - k^2q - k - 1 = 0.$$

Từ đó, ta quy bài toán về việc giải phương trình nghiệm nguyên theo hai biến q, k (chú ý chọn q nguyên tố).

Ngoài ra, khá đơn giản để có thể nhận ra $p = 3, q = 2$.

Mặt khác, từ (*) ta chứng minh được $p \mid (q^2 - 1)$. Do đó $p \mid q-1$ hoặc $p \mid q+1$.

So sánh $p = 3, q = 2$ thì ta sẽ nghĩ ngay tới việc chứng minh $p = q + 1$. Với hướng giải này ta cũng có rất nhiều hướng đi khác nhau để dẫn đến kết quả.

2) Gần như việc áp dụng trực tiếp giả thiết $ab + ac + bc + abc = 2$ vào bài toán là điều không thể. Do đó ta bắt đầu khai thác từ biểu thức M .

Vì vai trò của a, b, c trong M là như nhau nên ta chỉ cần xét một phân thức trong 3 phân thức sau đó thực hiện tương tự với hai phân thức còn lại.

Không mất tính tổng quát ta xét $\frac{a+1}{a^2+2a+2} = \frac{a+1}{(a+1)^2+1}$.

Tương tự với b, c ta sẽ nhận thấy rằng biểu thức M hoàn toàn có thể biểu thị qua $a+1, b+1, c+1$. Do đó, ta sẽ biến đổi giả thiết theo $a+1, b+1, c+1$.

Ta có

$$abc + ab + ac + bc = 2$$

$$\Leftrightarrow abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = a + b + c + 3$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)(b + 1)(c + 1) = (a + 1) + (b + 1) + (c + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a + 1) + (b + 1) + (c + 1)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a + 1)(b + 1)} + \frac{1}{(b + 1)(c + 1)} + \frac{1}{(c + 1)(a + 1)} = 1.$$

Để đơn giản bài toán, ta cần thay đổi biến của bài toán. Đối chiếu với giả thiết của bài toán ta nghĩ ngay tới việc đặt $a + 1 = \frac{1}{x}, b + 1 = \frac{1}{y}, c + 1 = \frac{1}{z}$.

Tuy nhiên, nếu phân tích sâu hơn ta sẽ nhận thấy điều kiện " = " của bài toán là $a = b = c = \sqrt{3} - 1$ hay $a + 1 = b + 1 = c + 1 = \sqrt{3}$ nên việc đặt $a + 1 = \frac{\sqrt{3}}{x}, b + 1 = \frac{\sqrt{3}}{y}, c + 1 = \frac{\sqrt{3}}{z}$ sẽ giúp bài toán trở nên gọn gàng hơn..

Ngoài ra, bài toán còn có hướng đi khác là đưa M về 2 biến sau đó đánh giá M .

Lời giải.

1) a) **Cách 1.**

- Với $p = q$ thì (*) trở thành: $p(p - 1) = p(p^2 - 1)$.

Giải ra ta được $p = 1$ hoặc $p = 0$ (vô lí do p là số nguyên tố).

- Với $p \neq q$.

$$p(p - 1) = q(q^2 - 1) \Rightarrow p \mid q(q^2 - 1) \Rightarrow p \mid q^2 - 1 \text{ (do } (p, q) = 1).$$

Suy ra $q^2 - 1 = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Thay vào (*) ta được $p - 1 = kq$.

Vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $p - 1 = kq, q^2 - 1 = kp$.

Cách 2.

- Với $p = q$ giải ra ta được $p = 1$ hoặc $p = 0$ (vô lí do p là số nguyên tố).

- Với $p \neq q$.

$$p(p - 1) = q(q^2 - 1) \Rightarrow q \mid p - 1 \Rightarrow p - 1 = kq.$$

Thay vào (*) ta được $q^2 - 1 = kp$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b)

Cách 1. Chứng minh k duy nhất.

Thật vậy, giả sử tồn tại k' ($k \neq k'$) thỏa (*) tức là: $p - 1 = k'q, q^2 - 1 = k'p$.

Từ đó suy ra $(p - 1) - (p - 1) = q(k - k') \Rightarrow k - k' = 0 \Rightarrow k = k'$. (vô lí)

Vậy k duy nhất.

Khi đó ta được $q^2 - 1 = kp \Leftrightarrow q^2 - 1 = k(kq + 1) \Leftrightarrow q^2 - k^2q - k - 1 = 0$. (**)

Do phương trình (**) có hai nghiệm nguyên nên $\Delta = k^4 + 4k + 4$ là bình phương của một số nguyên.

- $k = 1 \Rightarrow \Delta = 9$ giải ra ta được $p = 3, q = 2$.
- $k = 2 \Rightarrow \Delta = 12$ loại vì Δ chính phương.
- $k > 2 \Rightarrow (k^2)^2 < \Delta < (k^2 + 1)^2$ (loại do Δ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên Δ không thể là một số chính phương).

Cách 2. Ta có $p = kq + 1 > q - 1$ nên $(p, q - 1) = 1$.

Mặt khác, $p \mid (q^2 - 1)$ suy ra $p \mid (q + 1)$.

Khi đó ta có $q + 1 \geq p = kq + 1 \geq q + 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $q + 1 = p$. Thay vào (*) ta giải ra được $p = 3, q = 2$.

Cách 3. Ta có $p = kq + 1 > q - 1$ nên $(p, q - 1) = 1$.

Mặt khác, $p \mid (q^2 - 1)$ suy ra $p \mid (q + 1)$ hay $q + 1 = mp = m(kq + 1)$ (với $m \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó ta có: $q + 1 = m(kq + 1) \Leftrightarrow q(mk - 1) = 1 - m$

Do $m, k \in \mathbb{N}^*$ nên $m = k = 1$. Vậy $q + 1 = p$.

Thay $q + 1 = p$ vào (*) ta giải ra được $p = 3, q = 2$.

Cách 4. Ta có $p - 1 = kq, q^2 - 1 = kp \Rightarrow q^2 - p = k(p - q) \Rightarrow (p - q) \mid (q^2 - p)$.

Suy ra $(p - q) \mid (q^2 - q + q - p) \Rightarrow (p - q) \mid (q^2 - q)$.

Do đó $(p - q) \mid (q - 1) \Rightarrow q - 1 \geq p - q \Leftrightarrow 2q \geq p + 1 \geq kq + 2$.

- $k = 1 \Rightarrow p = 3, q = 2$.
- $k \geq 2 \Rightarrow 2q \geq 2q + 2$ (vô lí).

Vậy $p = 3, q = 2$.

Cách 5. Xét trường hợp $p \neq q$.

Ta chứng minh được $p \mid q + 1$ (theo cách 2, 3).

Ta cần chứng minh $q + 1 \mid p$.

Từ (*) ta suy ra:
$$\begin{cases} q + 1 \mid p & (1) \\ q + 1 \mid p - 1 & (2) \end{cases}$$

- TH1: $q + 1 \mid p \Rightarrow q + 1 = p \Rightarrow p = 3, q = 2$.
- TH2: $q + 1 \mid p - 1 \Rightarrow p - 1 = m(q + 1)$.

Từ (*) suy ra

$$\begin{aligned} pm(q+1) &= q(q+1)(q-1) \\ \Leftrightarrow pm &= q(q-1) \\ \Leftrightarrow p &\mid q-1 \\ \Rightarrow q-1 &\geq p \geq p-1 \geq q+1. \quad (\text{vô lí}) \end{aligned}$$

2)

Cách 1. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \forall x, y > 0 \quad (*)$

Ta có (*) tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\geq \frac{4}{x+y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} &\geq 0 \quad (\text{luôn đúng}). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Do đó bất đẳng thức (*) đã được chứng minh.

Quay trở lại bài toán ta có:

$$\begin{aligned} abc + ab + ac + bc &= 2 \\ \Leftrightarrow abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 &= a + b + c + 3 \\ \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) &= (a+1) + (b+1) + (c+1) \\ \Leftrightarrow \frac{(a+1) + (b+1) + (c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(c+1)} + \frac{1}{(c+1)(a+1)} &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } a+1 = \frac{\sqrt{3}}{x}, b+1 = \frac{\sqrt{3}}{y}; c+1 = \frac{\sqrt{3}}{z}.$$

Khi đó giả thiết bài toán trở thành $xy + yz + zx = 3$ và:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} \\
 &= \frac{a+1}{(a+1)^2+1} + \frac{b+1}{(b+1)^2+1} + \frac{c+1}{(c+1)^2+1} \\
 &= \frac{1}{a+1+\frac{1}{a+1}} + \frac{1}{b+1+\frac{1}{b+1}} + \frac{1}{c+1+\frac{1}{c+1}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{x} + \frac{x}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{y} + \frac{y}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{z} + \frac{z}{\sqrt{3}}} \\
 &= \sqrt{3} \left(\frac{x}{x^2+3} + \frac{y}{y^2+3} + \frac{z}{z^2+3} \right) \\
 &= \sqrt{3} \left(\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \right) \\
 &\leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y} \right) \quad (\text{áp dụng bất đẳng thức } (**)) \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3} - 1$.

Ngoài ra, khi đưa M về dạng $M = \sqrt{3} \left(\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \right)$ ta còn có thể giải bằng cách khác như sau:

Cách 2. Trước tiên ta chứng minh hai bất đẳng thức phụ sau:

$$i) (x+y)(x+z)(z+y) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx), \forall x, y, z > 0.$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức (i) ta được:

$$x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 0. \quad (\text{luôn đúng})$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Vậy bất đẳng thức (i) đã được chứng minh.

$$ii) (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx), \forall x, y, z > 0.$$

Biến đổi tương đương (ii) ta được:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0. \quad (\text{luôn đúng})$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Vậy bất đẳng thức (ii) đã được chứng minh.

Quay trở lại bài toán ta có:

$$\begin{aligned}
 M &= \sqrt{3} \left(\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \right) \\
 &= \sqrt{3} \left(\frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(x+z)(z+y)} \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(xy + yz + zx)}{(x+y)(x+z)(z+y)} \\
 &\leq \frac{9\sqrt{3}(xy + yz + zx)}{4(x+y+z)(xy + yz + zx)} \quad (\text{áp dụng (i)}) \\
 &= \frac{9\sqrt{3}}{4(x+y+z)} \\
 &\leq \frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{3}(xy + yz + zx)} \quad (\text{áp dụng (ii)}) \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3} - 1$.

■

Bình luận.

- 1) Bài toán khá hay khi khai thác rất sâu tính chia hết của số nguyên tố, điều kiện nguyên tố cùng nhau. Từ đó đưa ra các hướng đi thích hợp cho bài toán.
- 2) Đây là toán khá quen thuộc ở cấp độ THPT, tuy nhiên với chương trình THCS thì đây là bài toán tương đối khó trong việc khai thác giả thiết để đưa vào biểu thức M . Để giải bài toán yêu cầu học sinh cần bám sát biểu thức cần chứng minh kết hợp với kỹ năng biến đổi đại số thành thạo.

Lưu ý. Một số điều kiện hay xuất hiện trong các kì thi và hướng giải quyết:

- $abc = 1$ đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.
- $xyz = x + y + z + 2$ đặt $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$.
- $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ đặt $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$.
- $ab + bc + ca + abc = 4$ đặt $a = \frac{2x}{y+z}, b = \frac{2y}{z+x}, c = \frac{2z}{x+y}$.

Bài tập tương tự.

- 1) a) Giải phương trình $x^3 + y^3 - 3xy = p - 1$. ($x, y \in \mathbb{N}$) với p là số nguyên tố.

Trích "những bài toán hay tập 1-Bùi Tá Long"

b) Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y + 1 = z$.

Trích "chuyên đề số học - Lê Đình Huân"

2) a) Chứng minh với mọi a, b, c không âm có $ab + bc + ca + abc = 4$ thì

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

Trích đề thi học sinh giỏi quốc gia năm 1996

b) Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + abc \geq 10.$$

Trích "những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học"

Bài 3

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB . Trung trực của đoạn thẳng EF cắt BC tại D . Giả sử có điểm P nằm trong $\widehat{EAF}$ và nằm ngoài tam giác AEF sao cho $\widehat{PEC} = \widehat{DEF}$ và $\widehat{PFB} = \widehat{DFE}$. PA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P .

1) Chứng minh rằng $\widehat{EQF} = \widehat{BAC} + \widehat{EDF}$.

2) Biết tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF cắt các đường thẳng CA, AB lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng bốn điểm C, M, B, N cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này tên là đường tròn (K) .

3) Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

Phân tích. a) Biểu diễn $\widehat{EQF}$ theo các góc có liên quan tới $\widehat{BAC}$ và $\widehat{EDF}$. Chú ý, tính chất tổng ba góc trong một tam giác, tính chất góc ngoài tam giác...

b) Có khá nhiều cách để chứng minh một tứ giác nội tiếp. Tuy nhiên, với điều kiện bài toán ta có hai hướng đi rất rõ:

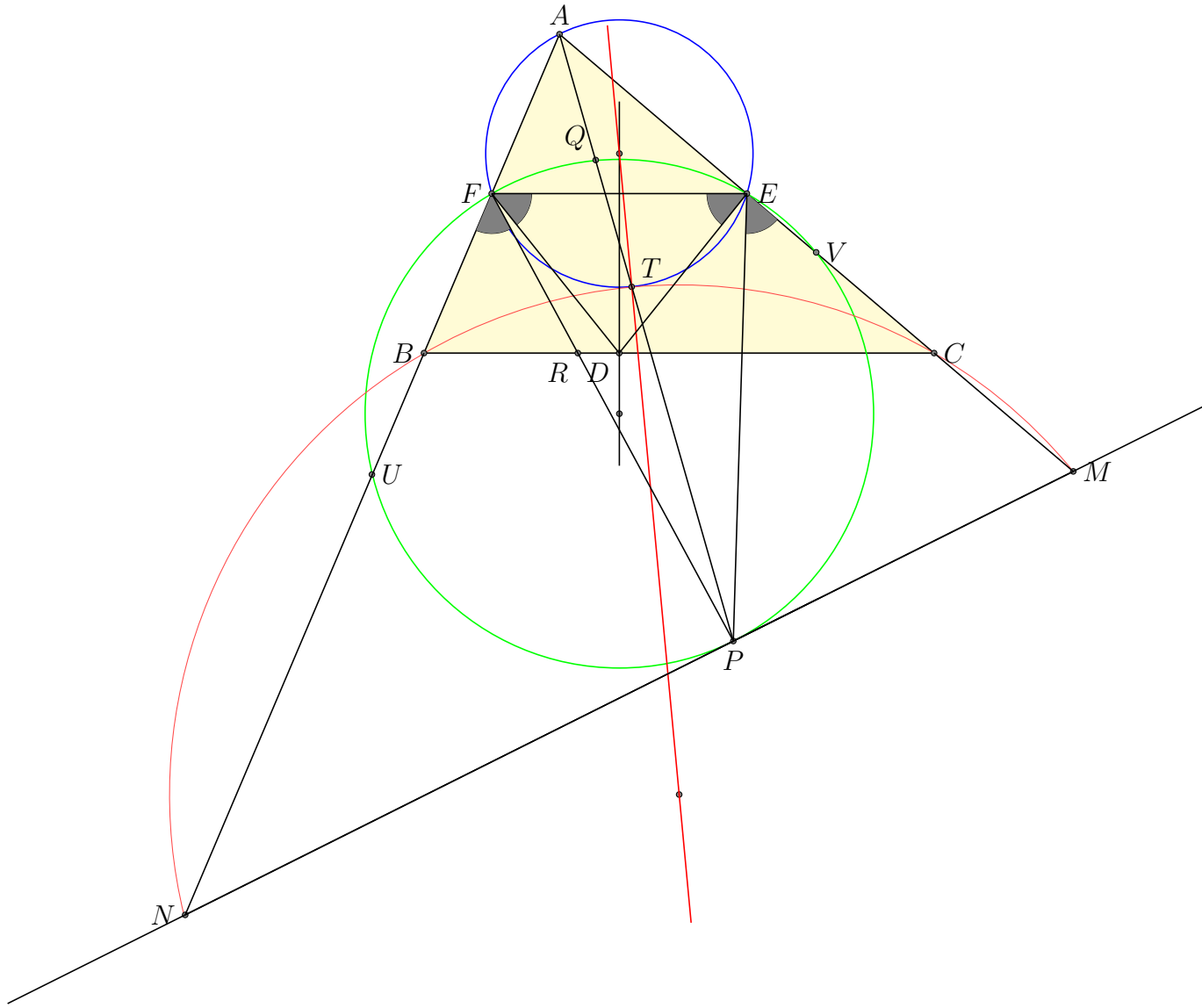
- $\widehat{ABC} = \widehat{NMC}$. Với hướng đi này, ta dễ thấy rằng $\widehat{RFB} = \widehat{PEM}$ ($R = BC \cap FB$). Do đó, ta chỉ cần chứng minh $\widehat{BRE} = \widehat{EPM}$ thì ta sẽ được điều phải chứng minh.
- $\widehat{BNM} = \widehat{BCA}$. Với hướng này, ta tập trung chứng minh $PTFN$ và PTM nội tiếp là ta có điều cần chứng minh.

- c) Để chứng minh đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .
Ta chứng minh hai đường tròn có chung tiếp tuyến tại giao điểm của hai đường tròn.

Với ý tưởng này, ta có hướng đi rất rõ ràng như sau:

- Bước 1. Tìm điểm chung của hai đường tròn (Giả sử là điểm T).
- Bước 2. Chứng minh tiếp tuyến tại T của đường tròn (K) cũng chính là tiếp tuyến tại T của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF (hoặc tiếp tuyến tại T của đường tròn AEF cũng chính là tiếp tuyến tại T của đường tròn ngoại tiếp tam giác (K)).

Hay chứng minh $\widehat{FTN} = \widehat{FET} + \widehat{TMN}$.



Lời giải. a) Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{EQF} &= 180^\circ - \widehat{EPF} = \widehat{PFE} + \widehat{PEF} \\ &= \widehat{BFD} + \widehat{CED} = (\widehat{FAD} + \widehat{FDA}) + (\widehat{EAD} + \widehat{EDA}) \\ &= \widehat{BAC} + \widehat{EDF}.\end{aligned}$$

b) **Cách 1.** Gọi R là giao điểm của PE và BC .

Ta có $\widehat{PEM} = \widehat{DEF} = \widehat{DFE} = \widehat{RFB}$ (do D thuộc đường trung trực của EF).

Mặt khác ta cũng có:

$$\begin{cases} \widehat{EPM} = \widehat{EFP} & (\text{cùng chắn cùng } PE) \\ \widehat{EFP} = \widehat{FRB} & (\text{do } EF // BC). \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\widehat{EPM} = \widehat{FRB}$.

Do đó $\triangle PEM \sim \triangle RFB$ (g-g). Suy ra $\widehat{FBR} = \widehat{EMP}$ hay $\widehat{ABC} = \widehat{NMC}$.

Vậy $NBMC$ nội tiếp (đpcm).

Cách 2. Gọi T là giao điểm thứ hai của AP với (AEF) .

Ta có $\widehat{QFT} = \widehat{QFE} + \widehat{EFT} = \widehat{EAT} + \widehat{EPQ} = \widehat{PEC} = \widehat{DEF} = \widehat{DFE} = \widehat{BFP}$.

Suy ra tứ giác $FTPN$ nội tiếp. Tương tự $TEMP$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BNM} = \widehat{FTA} = \widehat{FEA} = \widehat{BCA}$.

Do đó $BNCM$ nội tiếp (đpcm).

c) Ta có $\widehat{PFE} = \widehat{DFB}$, $\widehat{PEC} = \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{PAC}$ (Bổ đề đẳng giác).

Suy ra $\widehat{FAT} = \widehat{DAC}$. Mặt khác $\widehat{ATF} = \widehat{AEF} = \widehat{ACD}$.

Nên $\triangle FQT \sim \triangle DEC$ mà E là trùn điểm AC .

Do đó, Q là trung điểm AT .

Suy ra $FQ // BT$.

Nên $\widehat{TBC} = \widehat{QFE} = \widehat{TPE} = \widehat{TME}$.

Suy ra tứ giác $BTCM$ nội tiếp.

Ta có (AEF) tiếp xúc với (BTM) khi và chỉ khi:

$\widehat{FTN} = \widehat{FET} + \widehat{TMN} \Leftrightarrow \widehat{FPN} = \widehat{FET} + \widehat{TEP} = \widehat{FEP}$ (đúng do MN tiếp xúc với (EFP)).

Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Bình luận. Bài toán có cấu trúc từ dễ tới khó rất rõ ràng. Câu a) dễ b) tương đối và câu c) khá khó. Học sinh cần phân tích kỹ đề, vận dụng các tính chất nội tiếp, các bổ đề phụ như bổ đề đẳng giác v.v... Ngoài ra, học sinh cần vẽ thêm các yếu tố để bài toán trở nên đơn giản hơn.

Bài tập tương tự.

1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O có $AB < AC$. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H (D thuộc AC , E thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC , tia MH cắt (O) tại N .

- a) Chứng minh rằng năm điểm A, D, H, E, N cùng thuộc một đường tròn.
- b) Lấy điểm P trên cạnh BC sao cho $\widehat{BHP} = \widehat{CHM}$, Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng HP . Chứng minh rằng tứ giác $DENQ$ là hình thang cân.
- c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O) .

Trích đề thi vào lớp 10 chuyên, Hải Phòng năm 2016

2. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại điểm H . Gọi M là trung điểm BC . Tia MH cắt (O) tại điểm P .

- 1) Chứng minh $\Delta BPC' \sim \Delta CPB'$.
- 2) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}, \widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB, AC tại E, F . Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF , K là giao điểm của HM và AO' .
 - a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ nội tiếp.
 - b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

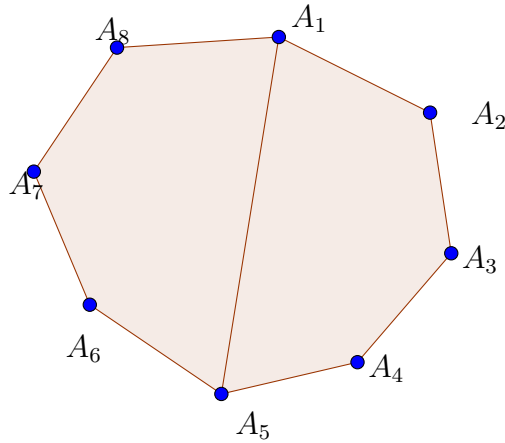
Trích đề thi vào lớp 10 chuyên, Hà Nội năm 2016

Bài 4

Cho n là số nguyên dương, $n \geq 5$. Xét một đa giác lồi n cạnh. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác mà các đường chéo này chia đa giác đã cho thành đúng k miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm trong chung).

- a) Chứng minh rằng ta có thể thực hiện được với $n = 2018, k = 672$.
- b) Với $n = 2017, k = 672$ ta có thể thực hiện được không? Hãy giải thích.

Phân tích. a) Để hiểu rõ bài toán ta xét trường hợp đơn giản hơn sau đó phát triển lên: Cho một đa giác lồi 8 cạnh. Chứng minh tồn tại cách chia đa giác đó thành 2 miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).



Từ A_1 ta kẻ A_1A_5 chia đa giác 8 cạnh thành hai ngũ giác lồi (đôi một không có điểm chung trong) là $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $A_1A_5A_6A_7A_8$.

Dễ thấy hai ngũ giác này có dạng $A_1A_{3k+2}A_{3k+3}A_{3k+4}A_{3k+5}$ ($k = 0, 1$).

Nếu tổng quát bài toán lên ta sẽ nhận thấy rằng đa giác $3k + 5$ cạnh luôn chia được thành $k + 1$ miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

- b) Dễ đoán với $n = 2017, k = 672$ ta không thể thực hiện được phép chia như yêu cầu bài toán. Ta dễ thấy $2017 = 3 \cdot 672 + 1$. Như vậy, ta có thể chứng minh quy nạp đa giác có dạng $3n + 1$ cạnh không thể chia được thành n ngũ giác lồi (hai ngũ giác lồi không có điểm chung trong).

Ngoài ra, ta có thể sử dụng tính chất về tổng các góc trong một đa giác để tìm ra điều vô lí trong cách chia.

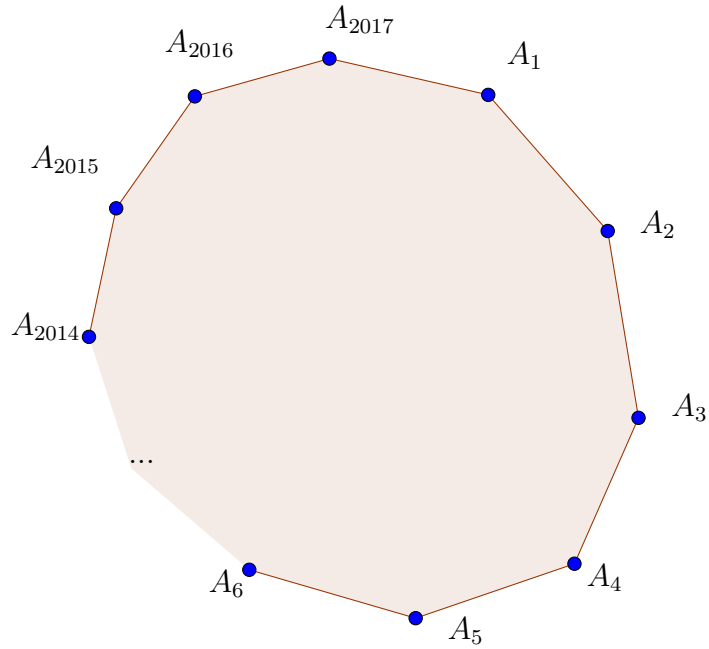
Lời giải. a) Cố định 1 điểm trong đa giác và gọi điểm đó là A_1 . Theo chiều kim đồng hồ ta gọi các điểm tiếp theo là $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{2018}$.

Nối đỉnh A_1 với đỉnh A_5 ta được ngũ giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5$. Lại nối đỉnh A_1 với đỉnh A_8 . Ta được ngũ giác lồi $A_1A_5A_6A_7A_8$.

Hay nói một cách tổng quát, ta nối đỉnh A_1 với đỉnh A_{3k+5} với $k = 0, 1, 2, \dots, 670$ (chú ý rằng với trường hợp $k = 670$ khi nối đỉnh A_1 với đỉnh A_{2015} ta sẽ nhận được 2 ngũ giác là $A_1A_{2012}A_{2013}A_{2014}A_{2015}$ và $A_1A_{2015}A_{2016}A_{2017}A_{2018}$ tạo thành các ngũ giác lồi $A_1A_{3k+2}A_{3k+3}A_{3k+4}A_{3k+5}$ với $k = 0, 1, 2, \dots, 671$ (do đa giác đã cho có 2018 đỉnh). Suy ra có 672 miền là ngũ giác lồi mà không có miền nào có điểm chung.

Vậy ta đã thực hiện được một cách chia đa giác 2018 đỉnh thành 672 miền sao cho mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

- b) **Cách 1.**

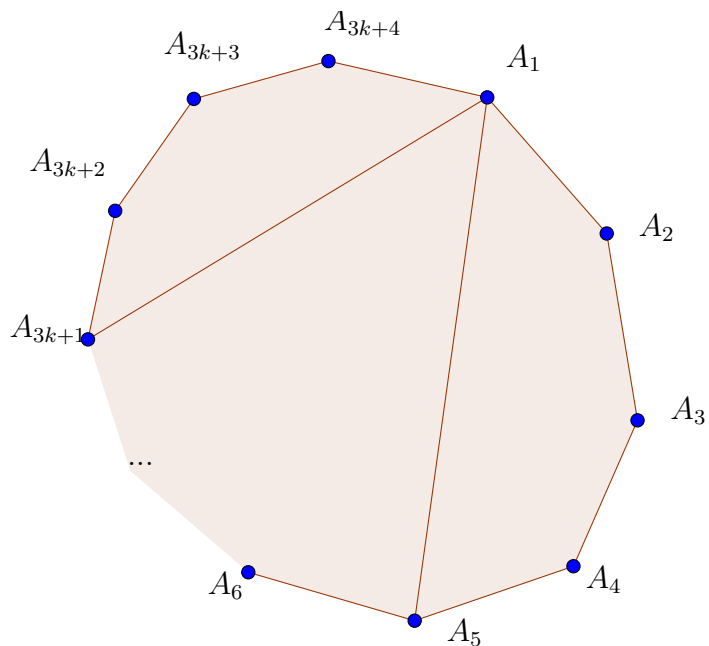


Giả sử đa giác 2017 cạnh chia thành 672 ngũ giác đôi một không có điểm trong chung. Thế thì tổng các góc trong của tất cả 672 ngũ giác là 272.540° . Mặt khác, tổng các góc của đa giác 2017 cạnh là $(2017 - 2) \cdot 180^\circ$ (sử dụng cách chia đa giác thành $(2017 - 2)$ tam giác đôi một không giao nhau để tính góc).

Từ đây ta suy ra $672 \cdot 540^\circ = (2017 - 2) \cdot 180^\circ$. (vô lí).

Vậy không tồn tại cách chia đa giác 2017 cạnh thành 672 ngũ giác đôi một không có điểm chung trong.

Cách 2.



Quy nạp một đa giác $3n + 1$ không thể chia thành n ngũ giác (*).

- $n = 1$ hiển nhiên đa giác 4 cạnh không thể chia thành 1 ngũ giác.
- Giả sử (*) đúng tới $n = k$. Tức ta không thể chia một đa giác $3k + 1$ không thể chia thành k ngũ giác.
- Với $n = k + 1$. Xét đa giác $3k + 4$ cạnh. Giả sử đa giác đó là $A_1 A_2 \dots A_{3k+4}$.
Hiển nhiên $A_1 A_2 \dots A_{3k+4}$ luôn được chia ra thành hai đa giác $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \dots A_{i_{3k+1}}$ và $A_{i_1} A_{i_{3k+1}} A_{i_{3k+2}} A_{i_{3k+3}} A_{i_{3k+4}}$ sao cho:

$$\begin{cases} A_1 A_2 \dots A_{3k+4} = A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \dots A_{i_{3k+1}} \cup A_{i_1} A_{i_{3k+1}} A_{i_{3k+2}} A_{i_{3k+3}} A_{i_{3k+4}} \\ A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \dots A_{i_{3k+1}} \cap A_{i_1} A_{i_{3k+1}} A_{i_{3k+2}} A_{i_{3k+3}} A_{i_{3k+4}} = A_{i_1} A_{i_{3k+1}} \end{cases}$$

trong đó $i_j \in \{1; 2; 3; \dots; 3k + 4\}$ và $i_m \neq i_n \quad \forall m \neq n$.

Do $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \dots A_{i_{3k+1}}$ không chia được thành các ngũ giác đôi một không có điểm chung trong (giả thiết quy nạp) và $A_{i_1} A_{i_{3k+1}} A_{i_{3k+2}} A_{i_{3k+3}} A_{i_{3k+4}}$ là ngũ giác nên $A_1 A_2 \dots A_{3k+4}$ không chia được thành các ngũ giác đôi một không có điểm chung trong.

Vậy (*) đúng với $n = k + 1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Quay trở lại bài toán, ta có $2017 = 3 \cdot 672 + 1$ có dạng $3n + 1$ nên đa giác 2017 cạnh không thể chia thành 672 miền, mỗi miền là một ngũ giác (hai miền bất kì không có điểm chung trong).



Bình luận. Đây là bài toán hay yêu cầu học sinh phải có khả năng tư duy trừu tượng kết hợp vận dụng các kiến thức về tổng các góc trong một đa giác, kiến thức về phương pháp quy nạp, tổng quát hóa một bài toán đơn giản ban đầu.

Bài tập tương tự.

- 1) Với điều kiện nào của n thì các đường chéo của đa giác lồi n cạnh chia đa giác thành k đúng miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong).

Phát triển bài toán trên

- 2) Các đường chéo của đa giác lồi $3n + 7$ cạnh có thể chia đa giác thành n miền, mỗi miền là một thất giác lồi (hai miền bất kì không có điểm chung trong) hay không? Giải thích câu trả lời và đưa ra một phương án để thực hiện phép chia đó.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

6 Đề thi tuyển sinh trường THPT chuyên, Bình Dương, 2017

Bài 1

a) Giải phương trình $x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - |x| = |yz| \\ y^2 - |y| = |zx| \\ z^2 - |z| = |xy|. \end{cases}$$

Câu a)

Phân tích. Một phương pháp hay làm trong các bài phương trình vô tỷ là bình phương hai vế làm mất căn. Tuy nhiên, phương này được coi là "may rủi" trong trường hợp này khi bậc của phương trình mới là bậc 4. Ta hãy cứ thử bình phương xem sao, liệu có "may" hay không?

Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$2x^4 - 18x^3 + 32x^2 - 18x + 2 = 0.$$

Nhận xét các hệ số của phương trình, ta dễ dàng nhận thấy đây là phương trình đối xứng bậc chẵn. Thật may!

Hãy thử phân tích để tìm ra một cách giải khác.

Lời giải. Cách 1. Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$2x^4 - 18x^3 + 32x^2 - 18x + 2 = 0.$$

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế phương trình cho x^2 ta được

$$2x^2 - 18x + 32 - \frac{18}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ (ĐK: $|t| \geq \sqrt{2}$). Khi đó, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Thế vào phương trình (1) ta được

$$t^2 - 9t + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 & (\text{nhận}) \\ t = 7 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Với $t = 2$ suy ra $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thế lại ta thấy $x = 1$ thỏa phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương

$$(x^2 - x + 1) - 2x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}.$$

Đặt $x^2 - x + 1 = a$ và $x^2 + x + 1 = b$ ($a, b > 0$). Khi đó, $b - a = 2x$ và phương trình đã cho trở thành

$$2a - b = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{ab}. \quad (2)$$

Do VP (1) ≤ 0 nên suy ra $b \geq 2a$. Khi đó, (2) tương đương với

$$\begin{aligned} (2a - b)^2 &= \frac{ab}{3} \Leftrightarrow 12a^2 - 13ab + 3b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (4a - 3b)(3a - b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3}a & (\text{loại}) \\ b = 3a. & (\text{nhận}) \end{cases} \end{aligned}$$

Với $b = 3a$ thế vào $b - a = 2x$ ta được $a = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bình luận. Đây là một bài phương trình vô tỷ tương đối đơn giản và có hướng làm rõ ràng. Phương trình có được sau khi bình phương là một dạng phương trình quen thuộc và đã có phương pháp giải cụ thể.

Ngoài ra, không khó nhằm được một nghiệm của phương trình là $x = 1$. Khi đó, phương pháp bình phương hai vế có thêm cơ sở cho tính khả thi của nó trong trường hợp này. Ta có thể giải bài toán theo một cách đơn giản hơn

$$\begin{aligned} 2x^4 - 18x^3 + 32x^2 - 18x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 - 7x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 7x + 1 = 0. \end{cases} & \quad (\text{vô nghiệm}) \end{aligned}$$

Một điều cần chú ý trong bài tập này là khi bình phương hai vế của phương trình sẽ dẫn đến phương trình hệ quả. Do đó, ta phải thử lại nghiệm (như trong cách 1) hoặc phải đặt điều kiện để hai vế của phương trình cùng dấu (như trong cách 2) để tránh nhận nghiệm ngoại lai.

Câu b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - |x| = |yz| \\ y^2 - |y| = |zx| \\ z^2 - |z| = |xy|. \end{cases}$$

Phân tích. Đây là một hệ phương trình ba ẩn xoay vòng. Hệ đã cho đương đương với
$$\begin{cases} |x|(|x| - 1) = |yz| \\ |y|(|y| - 1) = |zx| \\ |z|(|z| - 1) = |xy|. \end{cases}$$

Nhận thấy VT và VP của các phương trình đều ở dạng tích nên ta nghĩ tới cách nhân theo vế của các phương trình và đặt nhân tử chung là một cách làm thường gặp cho loại hệ này.

Lời giải. Hệ đã cho đương đương với
$$\begin{cases} |x|(|x| - 1) = |yz| \\ |y|(|y| - 1) = |zx| \\ |z|(|z| - 1) = |xy|. \end{cases}$$

Nhân vế theo vế ta được

$$|xyz|(|x|-1)(|y|-1)(|z|-1) = |yz||zx||xy| \Leftrightarrow \begin{cases} |xyz| = 0 \\ (|x| - 1)(|y| - 1)(|z| - 1) = |x||y||z|. \end{cases} \quad (*)$$

Mà $|x| - 1 < |x|$; $|y| - 1 < |y|$; $|z| - 1 < |z|$ suy ra $(|x| - 1)(|y| - 1)(|z| - 1) < |x||y||z|$.
nên (*) tương đương $|xyz| = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(0; 0; 0)$.

Bình luận. Bài hệ phương trình này cũng thuộc dạng cơ bản của hệ phương trình xoay vòng. Việc chứng minh phương trình $(|x| - 1)(|y| - 1)(|z| - 1) = |x||y||z|$ vô nghiệm cũng dễ dàng nhận thấy, chỉ cần một chút cẩn thận trong biến đổi là HS có thể lấy trọn điểm câu này.



Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình $\sqrt{2}(x^2 + x - 2) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 4}$.

Nguyễn Thị Tuyết Như, SV DHSPTPHCM

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2010^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2010^3. \end{cases}$$

Trích đề thi chọn đội tuyển HSG Ninh Bình, 2010-2011

HD. Ta có $x^3 + y^3 + z^3 \leq |x|^3 + |y|^3 + |z|^3 \leq 2010^3$ nên đẳng thức phải xảy ra.

Bài 2

Với x, y là các số thực dương thỏa mãn $x \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

Phân tích. Trong giả thiết của bài toán, ta để ý đến $x \geq 2y$, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho hai số x^2 và $4y^2$. Khi đó, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$.

Lời giải. Ta có $M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + 4y^2}{xy} - \frac{3y^2}{xy} \geq \frac{4xy}{xy} - \frac{3y}{x} \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$.

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất là $M = \frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = 2y$.

Bình luận. Đây là bài bất đẳng thức có điều kiện của biến đơn giản, chỉ cần để ý đến giả thiết của bài toán là ta có thể dễ dàng tìm ra hướng đi đúng.

Bài tập tương tự.

- Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x \geq 4y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \sqrt{xy}$.

Nguyễn Thị Tuyết Như. SV DHSP TPHCM

Bài 3

- Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn: $b + d \neq 0$ và $\frac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$ (x là ẩn) luôn có nghiệm.
- Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - y^2 = xy + 8$.

Phân tích. Câu a) Giả thiết của bài toán tương đối đơn giản, khó khai thác nên ta sẽ thử xuất phát từ yêu cầu chứng minh.

Yêu cầu chứng minh dẫn đến một tuyển phương trình. Giải một tuyển phương trình là một dạng bài tập không thường gặp. trong trường hợp này, ta sẽ sử dụng phương pháp phản chứng để chuyển từ giải tuyển phương trình về việc giải một thành hệ phương trình - dạng bài toán khá quen thuộc.

Lời giải. Câu a) Giả sử phương trình vô nghiệm, suy ra

$$\begin{cases} a^2 - 4b < 0 \\ c^2 - 4d < 0. \end{cases} \Rightarrow a^2 + c^2 - 4(b + d) < 0 \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b + d} < 4.$$

Mặt khác theo giả thiết ta có $\frac{a^2 + b^2}{b + b} \geq 2 \frac{ac}{b + d} \geq 4$. Do đó, điều giả sử là sai giả thiết. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu b) Phương trình đã cho tương đương $x^2 - xy - (y^2 + 8) = 0$. (*)

Coi (*) là phương trình bậc hai ẩn x với y là tham số, ta có

$$\Delta = 5y^2 + 32.$$

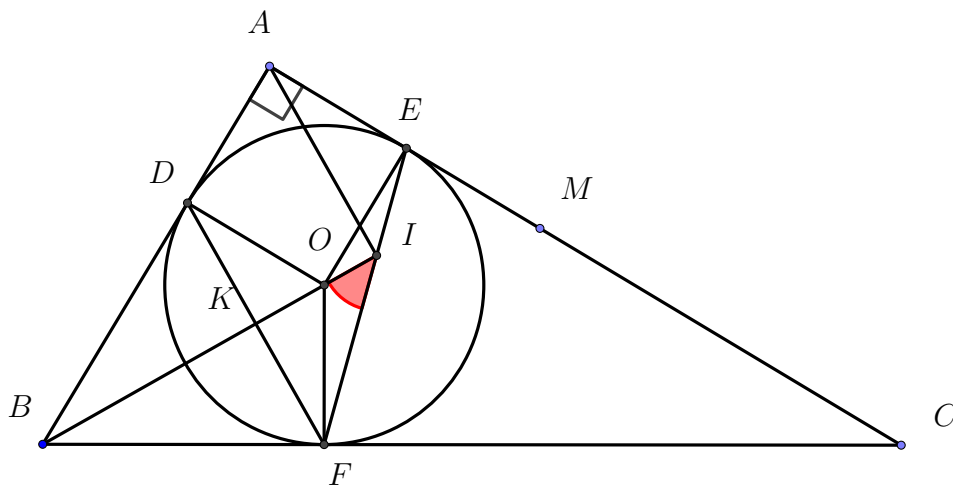
Ta có Δ chia 5 dư 2 nên có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7. Do đó, Δ không phải là số chính phương suy ra (*) không có nghiệm nguyên.

Vậy không tồn tại x, y nguyên thỏa (*). ■

Bài 4

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của O với các cạnh AB, AC, BC ; I là giao điểm của BO với EF ; M là điểm di động trên đoạn CE .

- Tính số đo góc $\widehat{BIF}$.
- Gọi H là giao điểm của BM và EF . Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác $ABHI$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O) ; P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của N lên các đường thẳng DE, DF . Xác định vị trí của điểm M để độ dài PQ lớn nhất.



Phân tích. Câu a) Với yêu cầu tính góc trong bài hình có đường tròn, ta thường tìm cách biến đổi để đưa về tổng, hiệu của các góc nội tiếp hoặc góc ở tâm để dễ phân tích và biến đổi. Dựa vào hình ta dễ thấy góc $\widehat{BIF}$ là góc $\triangle KIF$ vuông tại K và góc $\widehat{IFK}$ là góc nội tiếp, nên ta sẽ phân tích

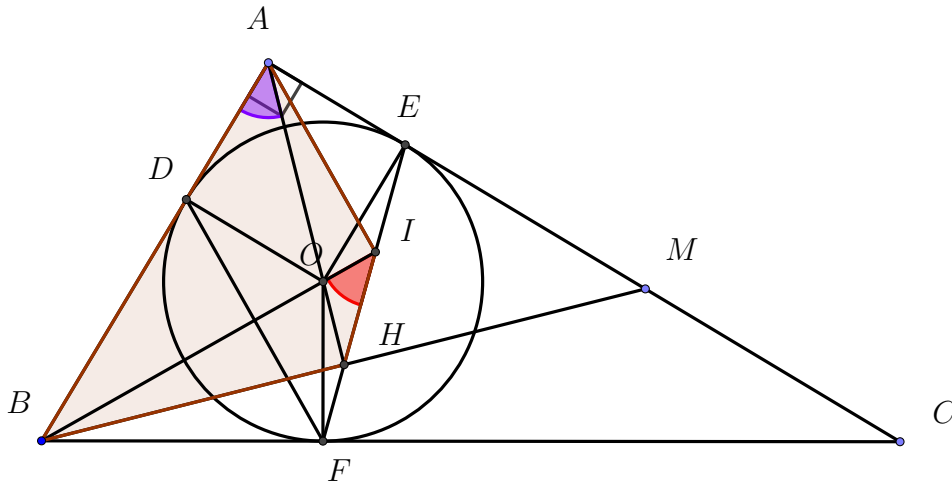
$$\widehat{BIF} = 90^\circ - \widehat{IFK}.$$

Việc tính góc $\widehat{IFK}$ tương đối đơn giản.

Lời giải. Gọi K là giao điểm của BO và DF . Suy ra $\widehat{IKF} = 90^\circ$.

Dễ thấy $DAOE$ là hình chữ nhật, suy ra $\widehat{DFI} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = 45^\circ$.

Do đó, góc $\widehat{BIF} = 45^\circ$. ■



Câu b.

Phân tích. Có nhiều cách chứng minh một tứ giác nội tiếp. Tuy nhiên, ở câu a, ta đã tính được góc $\widehat{BIF} = 45^\circ$, do đó ta sẽ chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{BIH}$ để chứng minh tứ giác $ABHI$ nội tiếp. Bài toán quy về việc tính $\widehat{BAH} = 45^\circ$.

Theo giả thiết của bài toán, ta có $\triangle ABM$ vuông cân tại A . Mặt khác quan sát hình trong trường hợp này, ta thấy A, O, H thẳng hàng, mà $AO \perp BM$ nên suy ra $AH \perp BM$ suy ra AH là đường cao trong tam giác cân. Từ đó, ta có thể tính được $\widehat{BAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 45^\circ$. Giải quyết xong bài toán.

Như vậy việc còn lại là ta cần chứng minh điều ta quan sát là đúng, tức là A, O, H thẳng hàng. Cách chứng minh hiển nhiên nhất trong trường hợp này là chứng minh $OH \perp BM$.

Lời giải. Tam giác ABM vuông cân tại A , suy ra $\widehat{ABD} = 45^\circ$.

Do đó, $\widehat{DBH} = \widehat{DFH} = 45^\circ$.

Bình luận. Đây là một bài hình học hay, khác thác vấn đề tứ giác nội tiếp đường tròn rất tốt, đòi hỏi học sinh phải có khả năng nhìn hình tốt để nhận thấy các tứ giác nội tiếp có trong hình.

Câu a tương đối dễ.

Câu b là một trường hợp cụ thể khi có thêm giả thiết $AB = AM$, nên ta cần vẽ một hình khác để có thể có dự đoán tốt hơn. Hình vẽ đúng, đẹp luôn giúp ích rất nhiều trong việc phân tích tìm hướng giải bài toán.

Câu c (cũng như các câu tìm GTLN, GTNN trong hình học) mấu chốt luôn là việc tìm ra được giá trị đó.

7 Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định

Bài 1

a) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geq 1$.

b) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a + b + c = 3$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$.
Tính giá trị biểu thức $P = (a-3)^{2017} \cdot (b-3)^{2018} \cdot (c-3)^{2019}$.

a) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geq 1$.

Phân tích. Để tìm số tự nhiên x thỏa bất phương trình thì đầu tiên ta sẽ giải bất phương trình để tìm ra tập nghiệm rồi tìm các số tự nhiên x trong tập nghiệm đó.

Để giải bất phương trình này ta chỉ cần quy đồng và rút gọn.

Lời giải. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geq 1 \quad (1)$

ĐKXD: $x > 0; x \neq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

Với điều kiện $x \in \mathbb{N}$ ta suy ra $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. ■

Bình luận. Câu này khá đơn giản nhưng cần lưu ý đọc kỹ đề bài nếu không sẽ chỉ giải bất phương trình rồi quên tìm các số tự nhiên x .

Bài tập tương tự.

Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \geq 1$$

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

- b) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a + b + c = 3$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$.
 Tính giá trị biểu thức $P = (a-3)^{2017} \cdot (b-3)^{2018} \cdot (c-3)^{2019}$

Phân tích. Với các bài cho giả thiết với vai trò a, b, c như nhau thông thường ta sẽ biến đổi để ra các đẳng thức mới rồi thế vào biểu thức cần tính.

Lời giải. Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow abc - 3ab - 3bc - 3ca = 0$

Ta tính: $(a-3)(b-3)(c-3) = abc - 3ab - 3bc - 3ca + 9a + 9b + 9c - 27 = 0$

Suy ra $P = (a-3)^{2017} \cdot (b-3)^{2018} \cdot (c-3)^{2019} = 0$. ■

Bình luận. Các bài tính giá trị biểu thức dạng này khá đơn giản. Với giả thiết là các biểu thức với vai trò của a, b, c như nhau và biểu thức cần tính với số với mũ của a, b, c không bằng nhau thì thường biểu thức cần tính sẽ có giá trị bằng 0. Do đó ta có thể dễ dàng dự đoán trước kết quả của các bài dạng này.

Bài tập tương tự.

Với a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a + b + c = 2$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$.

Tính giá trị biểu thức

$$P = (a-2)^{2018} \cdot (b-2)^{2019} \cdot (c-2)^{2020}.$$

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

Bài 2

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+6x+5} + 1) = 4$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ x^2 - 3x - 4\sqrt{y} + 10 = 0. \end{cases}$$

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+6x+5} + 1) = 4$.

Phân tích. Ta dễ dàng nhận thấy phương trình này có dạng $(a-b)(ab+1) = 4$ với $a^2 - b^2 = 4$ nên ta nghĩ ngay đến việc đặt $\sqrt{x+5} = a; \sqrt{x+1} = b$ ta sẽ được hệ phương trình.

Tuy nhiên nếu tính ý hơn ta sẽ thấy $a^2 - b^2 = 4 = VP$ nên khi ta nhân lượng liên hợp ta sẽ được phương trình tương đương có dạng $\frac{a^2 - b^2}{a+b}(a-1)(b-1) = 0$.

Lời giải. Cách 1

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+6x+5} + 1) = 4 \quad (1)$$

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2+6x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x+5} = a \\ \sqrt{x+1} = b \end{cases} \quad (a, b \geq 0)$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} (a-b)(ab+1) = 4 & \text{(i)} \\ a^2 - b^2 = 4 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Thay (ii) vào (i) ta được: $(a-b)(ab+1) = a^2 - b^2$

$$\Leftrightarrow (a-b)(ab - a - b + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-1)(b-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ (vô lý)} \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} = 1 \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ (loại)} \\ x = 0 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy $x = 0$

Cách 2

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+6x+5} + 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+1}} (\sqrt{(x+5)(x+1)} + 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{(x+5)(x+1)} + 1) = 4(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+1})$$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{(x+5)(x+1)} - \sqrt{x+5} - \sqrt{x+1} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5} - 1)(\sqrt{x+1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$



Bình luận. Bài phương trình căn thức dạng này khá đơn giản. Theo kinh nghiệm thì học sinh sẽ lựa chọn cách đặt ẩn phụ hơn là cách nhân lượng liên hợp vì khi học sinh nhìn thấy dạng quen thuộc sẽ áp dụng ngay cách được học mà ít khi nào phân tích kỹ đề bài để đi đến cách 2.

Bài tập tương tự.

1) Giải phương trình

$$(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2-1} + 1) = 2.$$

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

(Bài này nếu học sinh tinh ý sẽ thấy ngay phương trình vô nghiệm)

2) Giải phương trình

$$(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2-1} + 1) = -2.$$

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ x^2 - 3x - 4\sqrt{y} + 10 = 0. \end{cases}$$

Phân tích. Khi giải các bài hệ phương trình ta thường thử 2 cách cơ bản nhất là: "thế" hoặc là "cộng đại số". Khi dùng phương pháp "thế" ta sẽ nhận được phương trình căn thức khá là phức tạp và nếu đi giải sẽ rất mất thời gian và khả năng sai sót trong quá trình giải là rất cao.

Khi dùng phương pháp "cộng đại số" ta khó có thể triệt tiêu y ở một trong hai phương trình.

Do đó ta thử cách dùng bất đẳng thức để dẫn đến $VT \geq VP$ hoặc $VT \leq VP$ rồi dùng điều kiện đẳng thức để tìm x, y .

Lời giải. Áp dụng BDT BCS: $\sqrt{x+2} + \sqrt{3.3y} \leq \sqrt{4(x+3y+2)} = 2\sqrt{(x+3y+2)}$

Dấu "=" khi $x+2 = y$

Thế vào PT2 ta có: $x^2 - 3x - 4\sqrt{x+2} + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x + 6 - 4\sqrt{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \frac{(x+6)^2 - 16(x+2)}{x+6+4\sqrt{x+2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \frac{(x-2)^2}{x+6+4\sqrt{x+2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \left(1 + \frac{1}{x+6+4\sqrt{x+2}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$



Bình luận. Bài hệ phương trình dạng này không quá khó nhưng đòi hỏi học sinh phải vận dụng thành thạo các bất đẳng thức thông dụng.

Bài tập tương tự.

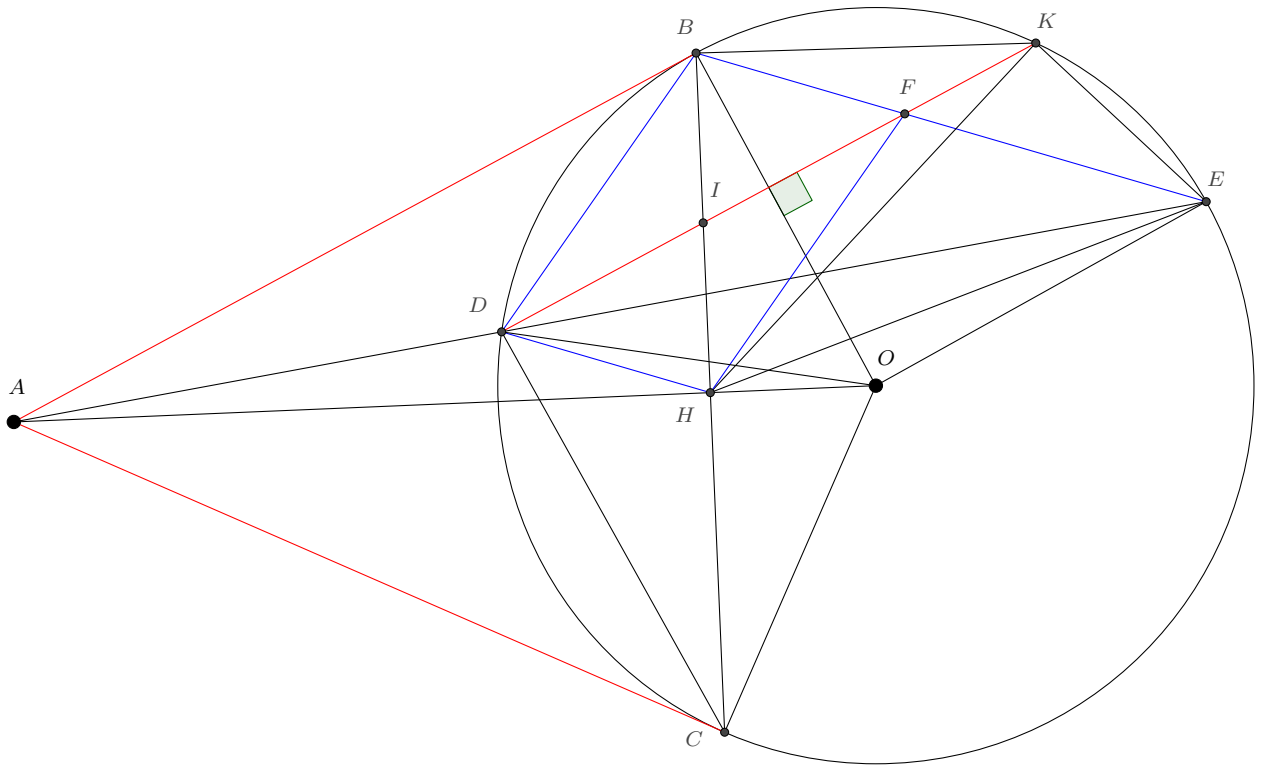
$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2\sqrt{x+2y-1} - 3\sqrt{2y+1} = 4\sqrt{x-2} \\ x^2 - 4x + 2\sqrt{x-2} + 1 = 0. \end{cases}$$

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

Bài 3

Cho đường tròn (O) , từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) (B, C là các điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC , I là trung điểm của BH . Đường thẳng qua I vuông góc với OB cắt (O) tại hai điểm D, K (D thuộc cung nhỏ BC). Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E . DK cắt BE tại F .

- Chứng minh $ICEF$ nội tiếp.
- Chứng minh $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH}$.
- Chứng minh rằng: $BD.CE = BE.CD$ và $BF.CE^2 = BE.CD^2$.



Phân tích. Ở câu a) với giả thiết $DI \perp BO$ ta dễ dàng suy ra $AB \parallel DI$ cùng với giả thiết tiếp tuyến ta cũng dễ dàng suy ra được tứ giác $ICEF$ nội tiếp.

Câu b) ta phân tích như sau: $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH} \Leftrightarrow K$ nằm trên đường tròn (B) bán kính $BD = BH \Leftrightarrow BD^2 = BH^2 = 2BI \cdot \frac{1}{2}BC = BI \cdot BC \Leftrightarrow \Delta BID \sim \Delta BDC$.

Câu c) ta phân tích như sau:

$$BD.CE = BE.CD \Leftrightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Leftrightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} \Leftrightarrow AB = AC \text{ (đúng)}$$

$$BF.CE^2 = BE.CD^2 \Leftrightarrow \frac{BF}{BE} = \frac{CD^2}{CE^2} \Leftrightarrow \frac{BF}{BD} \cdot \frac{BD}{BE} = \frac{CD^2}{CE^2} \Leftrightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{CD}{CE} = \frac{BD}{BE}$$

$$\Leftrightarrow \triangle BFD \sim \triangle BDE .$$

Lời giải. a) Chứng minh $ICEF$ nội tiếp.

Ta có: $AB \perp BO; DI \perp BO \Rightarrow AB \parallel DI \Rightarrow \widehat{DIC} = \widehat{ABC} = \widehat{DEC}$
 $\Rightarrow ICEF$ nội tiếp (đpcm).

b) Chứng minh $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH}$.

Xét $\triangle BID$ và $\triangle BDC$ ta có:

$$\begin{cases} \widehat{DBC} \text{ chung} \\ \widehat{BDI} = \widehat{ABD} = \widehat{DCB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BID \sim \triangle BDC \Rightarrow BI.BC = BD^2$$

$$\text{Mà } BI.BC = \frac{1}{2}BH.2BH = BH^2$$

$$\Rightarrow BD^2 = BH^2 \Rightarrow BD = BH \text{ Ta có: } \widehat{BDK} = \widehat{ABD} = \widehat{BKD}$$

$$\Rightarrow \triangle BDK \text{ cân tại B} \Rightarrow BD = BK$$

Suy ra $BD = BH = BK \Rightarrow K$ thuộc (B) bán kính $BD = BH = BK$

$$\Rightarrow \widehat{DBH} = 2\widehat{DKH} \text{ (đpcm) .}$$

c) Chứng minh rằng: $BD.CE = BE.CD$ và $BF.CE^2 = BE.CD^2$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ABE$ ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAD} \text{ chung} \\ \widehat{ABD} = \widehat{AEB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ABE(g.g) \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \triangle ACD \sim \triangle AEC(g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE}$$

mà $AB = AC$

$$\text{Suy ra } \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow BD.CE = BE.CD \text{ (đpcm) . Xét } \triangle BDF \text{ và } \triangle BED \text{ ta có:}$$

$$\begin{cases} \widehat{DBE} \text{ chung} \\ \widehat{BDF} = \widehat{BED} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle BED(g.g) &\Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{BF}{BD} \cdot \frac{BD}{BE} = \frac{CD^2}{CE^2} \\ \Rightarrow \frac{BF}{BE} &= \frac{CD^2}{CE^2} \Rightarrow BF \cdot CE^2 = BE \cdot CD^2 \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$



Bình luận. Câu a) là một câu cơ bản học sinh chỉ cần sử dụng hết các giả thiết sẽ dễ dàng tìm ra lời giải.

Câu b) sẽ là câu khó nếu học sinh không suy ra được K nằm trên đường tròn (B) bán kính $BD = BH$ và khéo léo biến đổi $BD^2 = BH^2 = 2BI \cdot \frac{1}{2}BC = BI \cdot BC$.

Bài 4

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^3 + 1 = 4y^2$.

b) Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $B = x^4 - x^2 - 10x - 25$ là số nguyên tố.

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^3 + 1 = 4y^2$

Phân tích. Đầu tiên ta có $x^3 + 1 = 4y^2 \Leftrightarrow (2y - 1)(2y + 1) = x^3$ và $(2y + 1; 2y - 1) = 1$ nên $2y + 1 = a^3; 2y - 1 = b^3 (a, b \in \mathbb{Z})$. Từ đó suy ra $a^3 - b^3 = 2$, sau đó ta giải phương trình tìm được a, b rồi từ đó tìm được x, y .

Lời giải. $x^3 + 1 = 4y^2 \Leftrightarrow (2y - 1)(2y + 1) = x^3$

Ta có: $(2y + 1; 2y - 1) = 1$ cho nên $2y + 1 = a^3; 2y - 1 = b^3 (a, b \in \mathbb{Z})$

Suy ra $a^3 - b^3 = 2$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ a^2 + ab + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \text{ (vô lý)} \\ b = \frac{-3 + \sqrt{33}}{6} \text{ (vô lý)} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a = \frac{3 - \sqrt{33}}{6} \text{ (vô lý)} \\ b = \frac{-3 - \sqrt{33}}{6} \text{ (vô lý)} \end{cases}$$

Suy ra $(x; y) = (-1; 0)$



Bình luận. Đây là một bài phương trình nghiệm nguyên khá đơn giản, học sinh chỉ cần nhận xét được $(2y + 1; 2y - 1) = 1$ là có thể tìm ra lời giải cho bài này.

Bài tập tương tự.

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^3 + 1 = 9y^2$.

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

- b) Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $B = x^4 - x^2 - 10x - 25$ là số nguyên tố.

Phân tích. Dựa vào định nghĩa số nguyên tố ta sẽ nghĩ đến việc phân tích biểu thức B thành nhân tử. Sau đó sử dụng định nghĩa số nguyên tố ta dễ dàng có được các phương trình.

Lời giải. Ta có: $B = x^4 - x^2 - 10x - 25 = (x^2 - x - 5)(x^2 + x + 5)$.

Mà B là số nguyên tố và $x^2 + x + 5 \neq 1, \forall x \in \mathbb{N}$.

Suy ra $x^2 - x - 5 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $x = 3$. ■

Bình luận. Bài này học sinh chỉ cần sử dụng được giả thiết x là số tự nhiên và biểu thức B là số nguyên tố thì sẽ dễ dàng tìm ra lời giải.

Bài tập tương tự.

Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $B = x^4 - 2x^3 + 6x - 9$ là số nguyên tố.

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

Bài 5

- a) Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + (a+b)(4+5c)$.
- b) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính bằng $R = 4\text{cm}$ (O nằm trong tứ giác $ABCD$). Xét 33 điểm phân biệt nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong 33 điểm đó luôn tìm được 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$.

- a) Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + (a+b)(4+5c)$.

Phân tích. Với bài này ban đầu ta thấy khi cộng mẫu của hai phân số lại ta sẽ có tích $(a+b)(1+c)$ nên nếu sau đó ta dùng BDT Cauchy ta sẽ rút gọn đi được nhân tử $(a+b)$ và cuối cùng kết hợp với điều kiện $0 \leq c \neq 1$ sẽ cho ra giá trị nhỏ nhất của P . Và điều kiện $a+b+c=1$ được dùng để giải dấu "=" xảy ra.

Lời giải. Áp dụng BDT: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad (\forall x, y \neq 0)$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + (a+b)(5c+4) \geq \frac{4}{(a+b)(c+1)} + (a+b)(5c+4) \\ &= \frac{4}{(1-c)(c+1)} + (1-c)(5c+4) \geq 4\sqrt{\frac{5c+4}{c+1}} = 4\sqrt{\frac{c}{c+1}} + 4 \geq 8 \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 8$. Dấu "=" xảy ra khi $c = 0, a = b = \frac{1}{2}$. ■

Bình luận. Ở bài này học sinh có thể sẽ gặp khó khăn trong việc giải "dấu =" xảy ra khi" nếu chưa tận dụng được giả thiết $a+b+c=1$.

Bài tập tương tự.

Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 và thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + 4$.

Bùi Tiến Lộc -SV DHSP TPHCM

- b) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính bằng $R = 4cm$ (O nằm trong tứ giác $ABCD$). Xét 33 điểm phân biệt nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong 33 điểm đó luôn tìm được 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$.

Phân tích. Đây là dạng toán khá quen thuộc đối với những bạn học hình học tổ hợp. Việc chia hữu hạn điểm vào một hình nào đó sau đó chứng minh tồn tại ba điểm có diện tích nhỏ hơn hay lớn hơn một số nào đó. Đối với dạng toán này, việc sử dụng nguyên lý Dirichle là hoàn toàn hợp lí. Tuy nhiên, ta cần xác định chia 33 điểm vào bao nhiêu miền. Ta chú ý, nguyên lý Dirichle có phát biểu đơn giản nhất như sau: "Chia $n+1$ con thỏ vào n lồng thì tồn tại một lồng có ít nhất 2 con thỏ".

Như vậy, để tồn tại một vùng có 3 điểm thì các miền còn lại phải có nhiều nhất 2 điểm. Do đó, ta nghĩ ngay tới việc chia 33 điểm vào 16 miền có diện tích bằng nhau. Khi đó, tồn tại một miền có ít nhất 3 điểm.

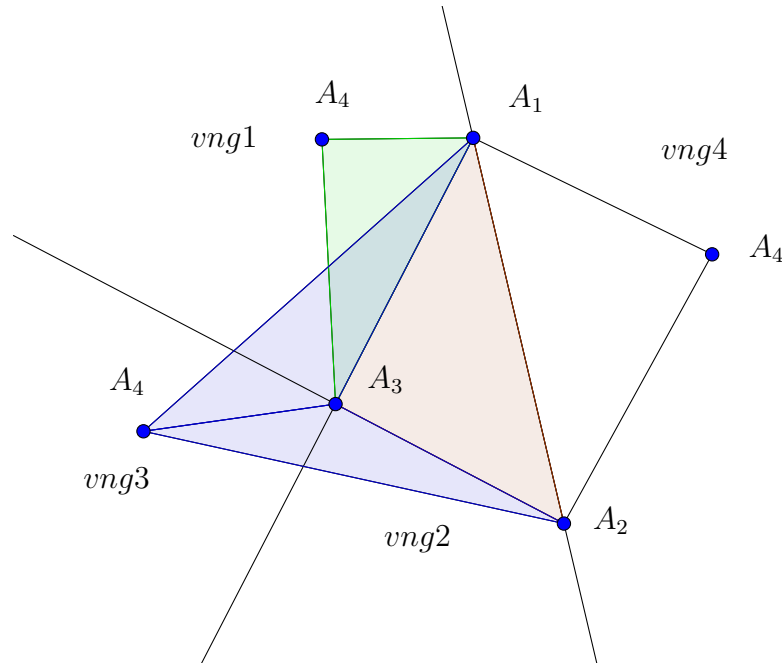
Từ đây, ta chứng minh tam giác đó có diện tích không quá $\frac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$.

Tới đây, bài toán hoàn toàn giải được bằng phương pháp phản chứng.

Lời giải. Ta chứng minh tính chất sau: "Từ n điểm ($n \geq 3$) trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, sẽ tạo thành ít nhất $n - 2$ tam giác không có điểm chung trong".

Chứng minh: Ta có n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 0$).

Từ 3 điểm A_1, A_2, A_3 sẽ tạo thành 1 tam giác $\Delta A_1 A_2 A_3$.



- TH1: Điểm A_4 nằm trong $\Delta A_1 A_2 A_3$ thì số tam giác không có điểm chung trong là 3 ($\Delta A_1 A_2 A_4, \Delta A_1 A_3 A_4, \Delta A_2 A_3 A_4$).
- TH2: Điểm A_4 nằm ngoài $\Delta A_1 A_2 A_3$.
 - i) Nếu A_4 nằm ở vùng 1, 2, 4 thì số tam giác không có điểm chung trong với tam giác $A_1 A_2 A_3$ tăng thêm một.
 - ii) Nếu A_4 nằm ở vùng 3 thì số tam giác không có điểm chung trong với tam giác $A_1 A_2 A_3$ tăng thêm hai.

Chứng minh: Ta có n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 0$).

Từ 3 điểm A_1, A_2, A_3 sẽ tạo thành 1 tam giác $\Delta A_1 A_2 A_3$.

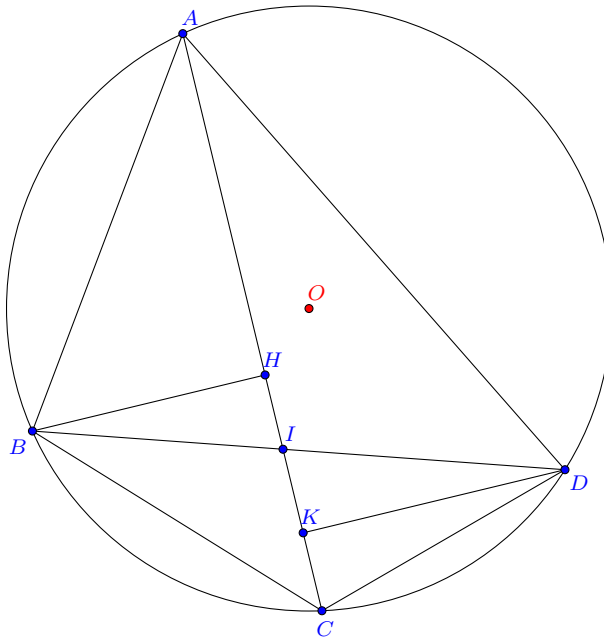
Nếu điểm A_4 nằm trong $\Delta A_1 A_2 A_3$ thì số tam giác không có điểm chung trong là 3 ($\Delta A_1 A_2 A_4, \Delta A_1 A_3 A_4, \Delta A_2 A_3 A_4$). Nếu điểm A_4 nằm ngoài $\Delta A_1 A_2 A_3$ thì số tam giác không có điểm chung trong là 2 ($\Delta A_1 A_2 A_3, \Delta A_1 A_2 A_4$) (giả sử A_3 và A_4 nằm ở 2 phía đối với $A_1 A_2$). Như vậy khi tăng thêm 1 điểm thì số tam giác sẽ tăng thêm ít nhất là 1 tam giác.

Tiếp tục lập luận tương tự khi ta thêm các điểm $A_5, A_6, \dots, A_n$ ($n - 5$ điểm) thì số tam

giác sẽ tăng thêm ít nhất là $n - 5$ tam giác.

Vậy từ n điểm ($n \geq 3$) trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, sẽ tạo thành $n - 2$ tam giác không có điểm chung trong.

Ta chứng minh: "Trong các tứ giác nội tiếp đường tròn thì hình vuông có diện tích lớn nhất".



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DK \leq \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BI + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DI \\ &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \leq \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R = 2R^2 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $AC = BD = 2R \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán bằng phản chứng.

Giả sử trong các tam giác tạo thành từ 33 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, không có tam giác nào có diện tích nhỏ hơn $\frac{3\sqrt{3}}{4} cm^2$. Theo tính chất ta vừa chứng minh thì từ 33 điểm sẽ tạo thành ít nhất 31 tam giác không có điểm chung trong. Khi đó tổng diện tích của các tam giác tạo thành từ 33 điểm sẽ không nhỏ hơn $31 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 40,27 cm^2$.

Mà diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất bằng $2R^2 = 32 cm^2$ điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Suy ra điều phải chứng minh. ■

Bình luận. Bài hình học tổ hợp ở đề này khá hay, có thể nói đây là câu ẩn tượng

nhất của đề này. Câu này có thể chứng minh bằng nhiều phương pháp và sử dụng các tính chất cũng như các bổ đề khác nhau. Ở đây tác giả đã sử dụng phương pháp phản chứng và sử dụng thêm 2 bổ đề đã được nêu ra và chứng minh trên lời giải.

8 Đề thi tuyển sinh trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu (vòng 2)

Bài 1

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-1}$ với $a > 0, a \neq 1$.

b) Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-3} = 3x-6$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 3x + 2y = 5xy. \end{cases}$

Câu a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-1}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Phân tích. Trong biểu thức, nếu thay phép chia cho $\frac{\sqrt{a}}{a-1}$ bằng phép nhân với nghịch đảo là $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$, ta thấy sẽ thấy ở mẫu có xuất hiện $\sqrt{a}-1$ và $\sqrt{a}+1$, trên tử xuất hiện $a-1$, nhận xét rằng $a-1 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)$, do đó, việc đầu tiên ta nghĩ tới sẽ là quy đồng phân số.

Lời giải. Với $a > 0, a \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{4\sqrt{a} + 4\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}} \\ &= 4a. \end{aligned}$$

Vậy với $a > 0, a \neq 1$ thì $P = 4a$. ■

Bình luận. Bài tập này tương đối đơn giản, chủ yếu kiểm tra sự tính toán, biến đổi cẩn thận của học sinh.

Ta cũng cần chú ý cách trình bày cho thật chính xác, chẳng hạn, luôn phải ghi điều kiện thích hợp, mặc dù đề bài đã nêu để đảm bảo tính chặt chẽ.

Đa phần dạng toán này, ta thường quy đồng mẫu, rồi tính toán, rút gọn. Tuy nhiên, có

một số bài, việc quy đồng phân số sẽ làm cho biểu thức còn phức tạp thêm, trước hết ta nên quan sát tổng thể biểu thức và tìm ra các mối liên hệ giữa các số hạng, biểu thức... để rút gọn, nhóm, phân tích cho thích hợp. Ví dụ trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Nam Định năm 2011 sau:

Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x khi $P = 0$.

Bài tập tương tự.

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x} - 1}{x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{1}{x + \sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $2P - x = 3$.

Trích đề thi vào lớp 10, THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định - 2011

2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1} + \frac{1 - 2\sqrt{x}}{x - 1} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

Rút gọn A và tìm các giá trị nguyên của x để A là số nguyên.

Trích đề thi HSG Toán 9, Đà Nẵng- 2011

Câu b) Giải phương trình $(x - 2)\sqrt{x - 3} = 3x - 6$.

Phân tích. Dễ dàng nhận ra mối liên hệ $3x - 6 = 3(x - 2)$, nên ta có thể giải phương trình này bằng phương pháp biến đổi đại số.

Ngoài ra, phương trình này chỉ chứa một căn thức, hơn nữa, biểu thức trong căn lại là bậc nhất, các biểu thức ngoài căn cũng chỉ có bậc nhất. Đây là dấu hiệu cho phép ta có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, vì bậc của phương trình mới sẽ chỉ là 3.

Lời giải. Cách 1. ĐKXD: $x \geq 3$.

Ta có phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & (x - 2)(\sqrt{x - 3} - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \sqrt{x - 3} - 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \quad (\text{loại}) \\ x = 12. \quad (\text{nhận}) \end{cases} \end{aligned}$$

Cách 2. Đặt $\sqrt{x-3} = t$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, $x = t^2 + 3$ và phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}(t^2 + 1)t &= 3t^2 + 3 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 3)(t^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 3 \quad (\text{nhận}) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 3 \Leftrightarrow x = 12.\end{aligned}$$

■

Bình luận. Đây cũng là một bài giải phương trình chứa căn thức cơ bản, tương đối dễ. Ở bài này, ta rất dễ nhận nghiệm ngoại lai nếu không chú ý đến điều kiện xác định của của phương trình. Nếu chú ý ĐKXD của phương trình ngay từ đầu, ta sẽ có một cách trình bày khác như sau:

Do $x \geq 3$ nên $(x-2) \neq 0$. Do đó, phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} &= \frac{3x-6}{x-2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 3 \Leftrightarrow x = 12.\end{aligned}$$

Ở cách đặt ẩn phụ, ta cần chú ý đến ĐK của ẩn phụ, ĐK của ẩn phụ càng chặt, sẽ càng làm giảm bớt việc tính toán sau này, giúp ta loại đi được một số trường hợp vô nghiệm (nếu có).

Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình $2x\sqrt{2x-3} - x = 4\sqrt{2x-3} - 2$.

Nguyễn Thị Tuyết Như - SV DHSP TPHCM

2. Giải phương trình $x\sqrt{x+2} - x^2 = 5x - 2\sqrt{x+2} + 6$.

Nguyễn Thị Tuyết Như - SV DHSP TPHCM

Câu c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 3x + 2y = 5xy. \end{cases}$$

Phân tích. Nhận thấy phương trình thứ nhất là phương trình đẳng cấp bậc hai, nếu coi phương trình thứ nhất là phương trình bậc hai theo x với y là tham số, thì $\Delta = 3y$ nên ta có thể biểu diễn x theo y và thế vào phương trình thứ hai.

Ngoài cách trên, ta còn có nhận xét rằng phương trình thứ hai chỉ chứa bậc nhất của ẩn x và bậc nhất của ẩn y , nên ta có thể rút x theo y hoặc y theo x và sử dụng phương pháp thế để giải hệ phương trình này.

Lời giải. Cách 1. Xem phương trình thứ nhất là phương trình bậc hai theo x với y là tham số, ta được

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y. \end{cases}$$

- Với $x = y$ thế vào phương trình thứ hai ta được $5y^2 - 5y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 1. \end{cases}$
- Với $x = -2y$ thế vào phương trình thứ hai ta được $10y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = \frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{4}{5}. \end{cases}$

Vậy hệ có ba nghiệm $(0; 0); (1; 1)$ và $\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Cách 2. Phương trình thứ hai tương đương

$$x(3 - 5y) + 2y = 0.$$

- Nếu $y = \frac{3}{5}$, khi đó, phương trình thứ hai tương đương $\frac{6}{5} = 0$ (vô nghiệm).
- Nếu $y \neq \frac{3}{5}$ thì từ phương trình thứ hai, ta suy ra $x = \frac{2y}{5y - 3}$ thế vào phương trình thứ nhất, quy đồng, khử mẫu ta được

$$\begin{aligned} 4y^2 + 2y^2(5y - 3) - 2y^2(5y - 3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y^2 [2 + (5y - 3) - (5y - 3)^2] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{4}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có ba nghiệm $(0; 0); (1; 1)$ và $\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$. ■

Bình luận. Đây là một hệ phương trình cơ bản, tương đối dễ và có cách làm quen thuộc với học sinh.

Ở cách thứ 2 sử dụng phương pháp thế, ta cần chú ý khi chia cho $5y - 3$ ta cần đảm bảo $5y - 3 \neq 0$ nên cần phải xét hai trường hợp để tránh mất nghiệm.

Bài tập tương tự.

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ 2y^2 - 3xy = 3x. \end{cases}$$

Nguyễn Thị Tuyết Như - SV DHSP TPHCM

Bài 2

- a) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) và $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Chứng minh rằng $\frac{5a + b + 3c}{a - b + c} > 1$.
- b) Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên n để $A = n^4 + 4n^{p-1}$ là số chính phương.

Câu a) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) và $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\frac{5a + b + 3c}{a - b + c} > 1$.

Phân tích. Ta sẽ phân tích đề từ yêu cầu chứng minh rằng $\frac{5a + b + 3c}{a - b + c} > 1$. Ta quen thuộc và có nhiều cách chứng minh đối với bài toán chứng minh một biểu thức lớn hơn 0, do đó, ta sẽ biểu đổi điều cần chứng minh về dạng $A > 0$.

Lời giải. Do đa thức $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $P(x) = 0$ vô nghiệm.

Nếu $a = 0$ thì $P(x) = 0 \Leftrightarrow bx + c = 0$ có vô số nghiệm nếu $(b; c) = (0; 0)$ hoặc có nghiệm $x = \frac{-c}{b}$ nếu $b \neq 0$.

Do đó, ta xét $a \neq 0$. Khi đó $P(x) = 0$ vô nghiệm suy ra $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, do đó

$$\begin{aligned} \frac{5a + b + 3c}{a - b + c} > 1 &\Leftrightarrow \frac{5a + b + 3c}{a - b + c} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4a - 2b + 2c}{a - b + c} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2a - b + c}{a - b + c} > 0. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (2a - b + c)(a - b + c) &= a(a - b + c) + (a - b + c)^2 \\ &> a^2 - ba + \frac{b^2}{4} + (a - b + c)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Do đó $\frac{2a - b + c}{a - b + c} > 0$ hay $\frac{5a + b + 3c}{a - b + c} > 1$.

Bình luận. Như thấy ở bài giải trên, thực tế ta chỉ cần giả thiết phương trình $P(x) = 0$ vô nghiệm. Có thể ngụ ý ra đề $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nhằm mục đích kiểm tra lý thuyết và cách xử lý giả thiết của học sinh, nhưng vô tình cũng làm cho bài toán trở nên dư giả thiết.

Trong câu này, có một chú ý cần nhắc lại rằng, đối với phép biến đổi tương đương bất đẳng thức, ta không được khử mẫu giống như biến đổi đẳng thức nếu không khẳng định

được mẫu lớn hơn 0. Nếu không cẩn thận, ta rất có thể mắc sai lầm như biến đổi yêu cầu chứng minh

$$\frac{5a + b + 3c}{a - b + c} > 1 \Leftrightarrow 5a + b + 3c > a - b + c \Leftrightarrow 2a + b + c > 0$$

hoặc biến đổi

$$\frac{2a - b + c}{a - b + c} > 0 \Leftrightarrow 2a - b + c > 0.$$

■

Bài tập tương tự.

1. Cho $P(x) = ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\frac{b - 2c}{a - b + 2c} < 1$.

Phạm Quốc Sang - SV DHSP TPHCM

Câu b) Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên n để $A = n^4 + 4n^{p-1}$ là số chính phương.

Phân tích. Ta có $A = n^4 + 4n^{p-1}$, số mũ của n lần lượt là 4 và $p - 1$, nên ta sẽ xét các trường hợp $p - 1 < 4$ và $p - 1 \geq 4$.

Lời giải. Dễ thấy với $n = 0$ thì $A = 0$ không phải là số chính phương.

Xét $n \neq 0$.

TH1. $p - 1 < 4 \Rightarrow p = 2 \vee p = 3$.

i. $p = 2 \Rightarrow A = n^4 + 4n$

- $n = -2 \Rightarrow A = 8$ (loại)
- $n = -1 \Rightarrow A = -3$ (loại)
- $n = 1 \Rightarrow A = 5$ (loại)
- $n = 2 \Rightarrow A = 24$ (loại)
- $n > 2 \Rightarrow 4n < 2n^2$.

Ta có $(n^2)^2 = n^4 < A = n^4 + 4n < (n^2 + 1)^2$. Do đó, A không phải là một số chính phương.

- $n < -2 \Rightarrow -2n^2 < 4n \Rightarrow -2n^2 + 1 \leq 4n$.

Ta có $-2n^2 + 1 = 4n \Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$ (loại).

Do đó, $-n^2 + 1 < 4n$ và $(n^2 - 1)^2 < A = n^4 + 4n < (n^2)^2$. Do đó, A không phải là một số chính phương.

ii. $p = 3 \Rightarrow A = n^4 + 4n^2$. Do đó

$$(n^2 + 1)^2 < A < (n^2 + 2)^2.$$

Do đó, A không phải là một số chính phương.

TH2. $p - 1 \geq 4 \Rightarrow p \geq 5$.

Ta có

$$A = n^4 + 4n^{p-1} = n^4 (1 + 4n^{p-5})$$

A là một số chính phương nên suy ra $1 + 4n^{p-5} = m^2$.

Suy ra m lẻ $\Rightarrow m = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^*$ (do $n \neq 0$ nên $m \neq 1$).

Khi đó $1 + 4n^{p-5} = m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^{p-5} = k(k + 1)$ (vô lý do $k.(k + 1)$ không thể biểu diễn thành lũy thừa của 1 số nguyên).

Vậy không có số nguyên n thỏa yêu cầu bài toán. ■

Bài 3

Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

Phân tích. Yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của P tức là ta cần tìm giá trị $A \in \mathbb{R}$ nào đó mà $P \geq A, \forall x, y$. Nhận xét trong P vai trò của x, y như nhau, ta cũng có thể dễ thấy điểm rơi của bài toán là $x = y$, khi đó, $P = \frac{9}{2}$.

Do x, y là hai số thực dương nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy. Ta có một vài bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}.$$

Nếu áp dụng đơn thuần các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq 4$$

thì sẽ bị ngược chiều. Do đó, ta tập trung khai thác riêng lẻ $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ và $\sqrt{2(x^2 + y^2)}$ theo một hướng khác.

Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy$ suy ra $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ là một bình phương của một tổng nên có thể đưa ra ngoài căn thức. Hơn nữa, khi kết hợp với $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ sẽ được $\frac{(x + y)^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2$

có vẻ liên quan tới hạng tử thứ nhất $\frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Hơn nữa $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ và $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ là nghịch đảo của nhau, do đó, nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số này sẽ được tổng của chúng lớn hơn một hằng số là một yêu cầu khi muốn dùng bất đẳng thức Cauchy để tìm GTLN hay GTNN.

Lời giải. Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy$ suy ra $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$. Do đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ &\geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (x + y) \\ &\geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 \\ &\geq \frac{4xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 - \frac{3xy}{x^2 + y^2} \\ &\geq 2\sqrt{4} + 2 - \frac{3(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} \\ &\geq 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ \frac{4xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{2}$ khi và chỉ khi $x = y$. ■

Bình luận. Khi chứng minh một bất đẳng thức hoặc tìm GTLN, GTNN của một biểu thức, ta thường rất hay gặp phải trường hợp "ngược chiều" như phân tích ở trên.

Việc xác định được điểm rơi của bài toán sẽ đem lại nhiều lợi ích cho việc tìm hướng giải bài toán.

Chẳng hạn, khi phân tích tới $P \geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2$, nếu không chú ý đến điểm rơi, ta dễ mắc sai lầm khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ và $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ và suy ra $P \geq 2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy} \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2}} + 2 = 4$. Tuy nhiên, dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Leftrightarrow xy = x^2 + y^2 \quad (\text{vô lý}).$$

Với điểm rơi là $x = y$, khi đó $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$ và $\frac{x^2 + y^2}{xy} = 2$ suy ra $\frac{4xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ nên ta sẽ phân tích P sao cho xuất hiện $\frac{4xy}{x^2 + y^2}$ và $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số này.

Bài tập tương tự.

1. Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

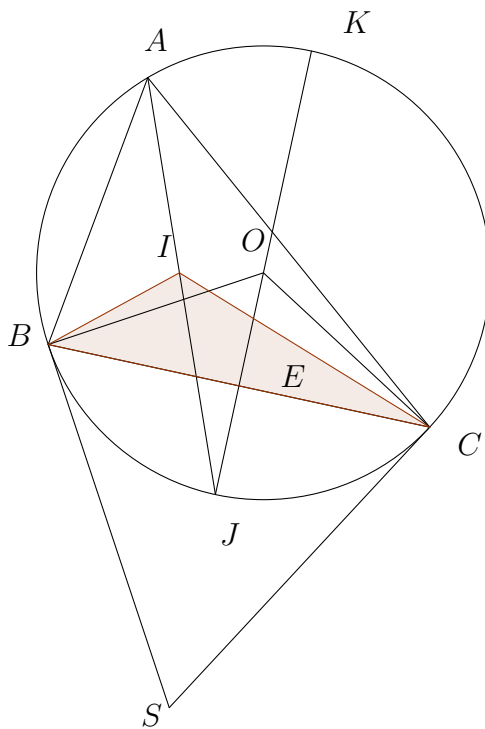
$$P = \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (x^2 + y^2) - \frac{2\sqrt{2}xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Phạm Quốc Sang - SV DHSP TPHCM

Bài 4

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tia AI cắt (O) tại J khác A . Đường thẳng JO cắt (O) tại K khác J và cắt BC tại E .

- Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC và $JE \cdot JK = JI^2$.
- Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S . Chứng minh rằng $SJ \cdot Ek = SK \cdot EJ$.
- Đường thẳng SA cắt (O) tại D khác A , đường thẳng DI cắt (O) tại M khác D . Chứng minh rằng JM đi qua trung điểm của đoạn thẳng IE .



Lời giải. Câu a) Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $\widehat{BAJ} = \widehat{JAC}$.

Do đó, số đo cung BJ bằng số đo cung JC , suy ra $BJ = JC$. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BIJ} &= \widehat{BAJ} + \widehat{ABI} \\ &= \widehat{CAJ} + \widehat{IBC} \quad (\text{do } I \text{ là tâm đường tròn nội tiếp}) \\ &= \widehat{JBC} + \widehat{IBC} \quad (\text{do } \widehat{JBC} \text{ và } \widehat{IBC} \text{ cùng chắn cung } JC) \\ &= \widehat{JBI}\end{aligned}$$

Do đó, tam giác $JB I$ cân tại J , suy ra $JB = JI$.

Vậy $JB = JI = JC$, hay J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .

Chứng minh $JE.IK = JI^2$

Ta có $BJ = JC$ (cmt) nên $OJ \perp BC$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào $\triangle JBK$ vuông tại B có BE là đường cao, ta được

$$JI^2 = BJ^2 = JE.JK$$

Câu b) Trước tiên, ta chứng minh S, J, K thẳng hàng.

Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S suy ra $SO \perp BC$. Do đó, S, O, J thẳng hàng (SO, JO cùng vuông góc với BC), suy ra S, J, K thẳng hàng.

Xét $\triangle SJB$ và $\triangle SBK$ có

$$\begin{aligned}\widehat{BSJ} &\quad \text{chung} \\ \widehat{SBJ} &= \widehat{SKB} \quad (\text{góc tạo bởi tiếp tuyến, dây cung và góc chắn cung})\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\triangle SJB &= \triangle SBK \quad (g - g) \\ \Rightarrow \frac{SB}{SJ} &= \frac{SK}{SB} \Leftrightarrow SB^2 = SJ.SK\end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có $BE^2 = JE.EK$

Ta có $BE \perp SE$ suy ra

$$\begin{aligned}SE^2 &= SB^2 - BE^2 \\ (SJ + JE)^2 &= SJ.SK - JE.EK \\ JE^2 + JE.EK + SJ.JE &= SJ.SK - SJ^2 - SJ.JE \\ JE(JE + EK + SJ) &= SJ(SK - SJ - JE) \\ JE.SK &= SJ.EK \quad (\text{đpcm})\end{aligned}$$

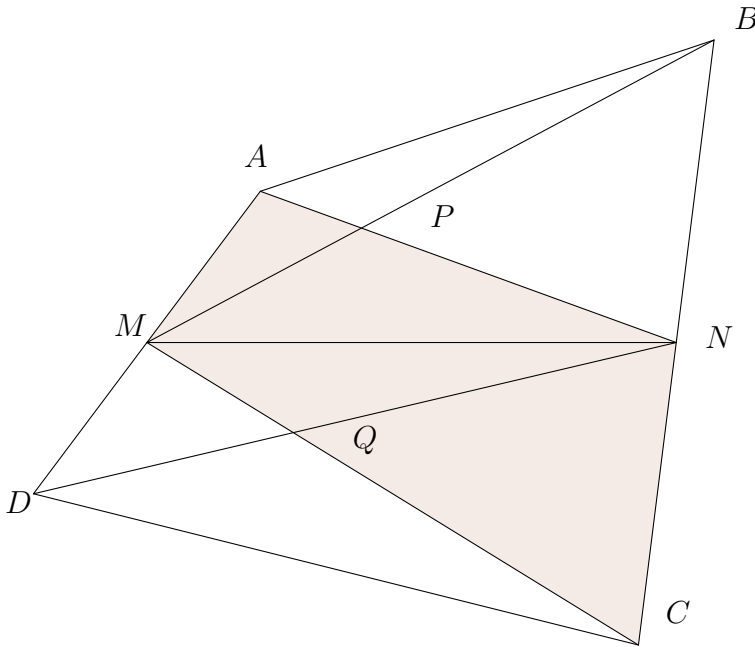
Bình luận. Mấu chốt của bài toán là điểm T .

Đây là một bài hình khó, rất hay và sáng tạo, đòi hỏi học sinh phải có khả năng nhìn, phân tích hình rất tốt, sử dụng tốt các tam giác đồng dạng. Với áp lực về thời gian, đây quả thật là một chương ngại vật lớn của các sĩ tử.

Bài 5

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC ; AN cắt BM tại P và DN cắt CM tại Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{NA}{NP} + \frac{ND}{NQ} + \frac{MB}{MP} + \frac{MC}{MQ}.$$



Phân tích. Rõ ràng biểu thức là tổng các tỷ lệ độ dài, nó làm ta lập tức nghĩ tới các tam giác đồng dạng để tìm các cạnh tỷ lệ. Tuy nhiên, theo giả thiết bài toán, ngoài $MA = MD$ và $NB = NC$, ta không tìm thêm được bất kì mối quan hệ nào khác giữa các cạnh $NA, NP, ND, NQ, \dots$, cũng không có yếu tố nào về góc để tìm và chứng minh các tam giác đồng dạng, bài toán có vẻ rơi vào bế tắc, nên ta cần biến đổi tỷ lệ độ dài thành tỷ lệ của một đại lượng khác.

Nếu ta chú ý sẽ dễ thấy rằng, ta cần tính tỷ lệ $\frac{NA}{NP}$ và N, A, P thẳng hàng, nên với một điểm bất kì không thẳng hàng với N, A, P tạo thành hai tam giác có đáy lần lượt là NA và NP thì hai tam giác này sẽ có chung đường cao. Khi đó, nếu áp dụng: *Tỷ lệ diện tích của hai tam giác có chung đường cao bằng tỷ lệ hai đáy*, ta có thể chuyển tỷ lệ độ dài hai

cạnh thành tỷ lệ diện tích của hai tam giác. Tương tự cho các tỷ lệ còn lại.

Tới đây, ta nhận thấy từ giả thiết M, N là trung điểm của AD và BC , ta có rất nhiều cặp tam giác có diện tích bằng nhau, nên hướng đi trên có vẻ khả quan.

Cũng do giả thiết bài toán nên khi biến đổi tỷ lệ độ dài thành tỷ lệ diện tích, ta cố gắng đưa về tỷ lệ diện tích của các hình có cạnh hay đỉnh liên quan tới M, N, AD, BC càng nhiều càng tốt, để có thể khai thác được triệt để giả thiết bài toán.

Lời giải. Ta có

$$\frac{NA}{NP} = \frac{S_{\Delta MNA}}{S_{\Delta MNP}} = \frac{S_{\Delta BNA}}{S_{\Delta BNP}} = \frac{S_{ABNM}}{S_{\Delta BMN}}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{ND}{NQ} = \frac{S_{CDMN}}{S_{\Delta CMN}}, \quad \frac{MB}{MP} = \frac{S_{ABNM}}{S_{\Delta AMN}}, \quad \frac{MC}{MQ} = \frac{S_{CDMN}}{S_{\Delta DMN}}.$$

Do M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC nên $S_{CMN} = S_{BMN}$ và $S_{DMN} = S_{AMN}$.

Do đó

$$\begin{aligned} S &= \frac{NA}{NP} + \frac{ND}{NQ} + \frac{MB}{MP} + \frac{MC}{MQ} \\ &= \frac{S_{ABNM}}{S_{\Delta CMN}} + \frac{S_{CDMN}}{S_{\Delta CMN}} + \frac{S_{ABNM}}{S_{\Delta AMN}} + \frac{S_{CDMN}}{S_{\Delta AMN}} \\ &= S_{ABCD} \left(\frac{1}{S_{\Delta AMN}} + \frac{1}{S_{\Delta CNM}} \right) \\ &\geq \frac{4S_{ABCD}}{S_{\Delta AMN} + S_{\Delta MN}}. \end{aligned}$$

Ta có $S_{\Delta AMN} + S_{\Delta BMN} = S_{\Delta ANC} + S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Do đó $S \geq 8 \frac{S_{ABCD}}{S_{ABCD}} = 8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta CMN} \Leftrightarrow AB \parallel MN \parallel CD \Leftrightarrow$ tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất là 8 khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$.



Bình luận. Mấu chốt của bài toán là cần biến đổi từ tỷ lệ độ dài về tỷ lệ diện tích. Đây là một bài toán hay và sáng tạo, đòi hỏi học sinh có kinh nghiệm, khả năng phân tích đề và hình vẽ để có hướng đi đúng, đồng thời là khả năng quan sát, phân tích hình vẽ tốt để tìm được các tam giác có diện tích bằng nhau.

Đề thi này có sự phân loại thí sinh tốt và nghiêng về các kĩ năng giải một bài hình học khi có phần đại số tương đối dễ và phần hình học khó.

9 Đề thi tuyển sinh trường THPT chuyên, tỉnh Bạc Liêu

Bài 1

Cho $n = 2018 \cdot 2017^{2016} - 11^{2017} - 6^{2016}$. Chứng minh n chia hết cho 17.

Phân tích. Do tính chất của đồng dư, ta sẽ tìm dư của các cơ số lớn hơn 17 khi chia cho 17 để làm đơn giản hơn trong tính toán.

Lời giải. Ta có $2018 \equiv 12 \pmod{17}$, $2017 \equiv 11 \pmod{17} \Rightarrow 2017^{2016} \equiv 11^{2016} \pmod{17}$.

Từ đó ta có: $2018 \cdot 2017^{2016} \equiv 12 \cdot 11^{2016} \pmod{17}$.

Hay $2018 \cdot 2017^{2016} \equiv (11 + 1) \cdot 11^{2016} = 11^{2017} + 11^{2016} \pmod{17}$.

Suy ra $2018 \cdot 2017^{2016} - 11^{2017} \equiv 11^{2016} \pmod{17}$.

Suy ra $n = 2018 \cdot 2017^{2016} - 11^{2017} - 6^{2016} \equiv 11^{2016} - 6^{2016} \pmod{17}$.

Ta lại có:

- $11^2 \equiv 2 \pmod{17}$, suy ra $11^{2016} = (11^2)^{1008} \equiv 2^{2008} \pmod{17}$.
- $6^2 \equiv 2 \pmod{17}$, suy ra $6^{2016} = (6^2)^{1008} \equiv 2^{2008} \pmod{17}$.

Do đó ta có $n \equiv 2^{1008} - 2^{1008} = 0 \pmod{17}$.

Vậy n chia hết cho 17. ■

Bình luận. Bài tập này cũng tương đối dễ, tuy nhiên đòi hỏi học sinh phải nắm vững các tính chất của phép đồng dư để có thể có hướng đi và phân tích bài toán tốt.

Bài tập tương tự.

- 1) Cho $n = 2019 \cdot 2017^{2019} + 2019^{2017} + 2026^{2017}$. Chứng minh n chia hết cho 19.

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 2

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

Lời giải. Cách 1.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = -5x^2y^2 + 35xy - 60 \\ &\Leftrightarrow (x - y)^2 = 5(-x^2y^2 + 7xy - 12) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } (x - y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z} \text{ nên } -x^2y^2 + 7xy - 12 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Đặt $t = xy, (t \in \mathbb{Z})$. Từ (1) ta có $-t^2 + 7t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 4$.

Mà $t \in \mathbb{Z}$ nên ta có $t = 3 \vee t = 4$ hay $xy = 3 \vee xy = 4$.

Khi đó $5(-x^2y^2 + 7xy - 12) = 0$ nên từ (*) ta cũng có $(x - y)^2 = 0$ hay $x = y$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} xy = 3 \\ x = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x = y. \end{cases} \quad (\text{không tồn tại } x \in \mathbb{N}), \\ \bullet \quad \begin{cases} xy = 4 \\ x = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình trên là: $(2; 2), (-2; -2)$.

Cách 2. Xét trường hợp $x, y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm x^2, y^2 ta có:

$$\begin{aligned} 37xy &\geq 2xy + 5x^2y^2 + 60 \\ \Leftrightarrow 35xy &\geq 5x^2y^2 + 60 \\ \Leftrightarrow 7xy &\geq x^2y^2 + 12 \\ \Rightarrow 8xy &\geq x^2y^2 + 12 \\ \Leftrightarrow 4 &\geq (xy - 4)^2 \\ \Leftrightarrow 2 &\geq xy - 4 \geq -2 \\ \Leftrightarrow 6 &\geq xy \geq 2. \end{aligned}$$

Suy ra, $xy \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Mặt khác, phương trình ban đầu tương đương với:

$$(x + y)^2 = 39xy - 5x^2y^2 - 60. \quad (*)$$

Ta xét các trường hợp:

- TH1: $xy = 2$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = -6$ (vô lí).
- TH2: $xy = 3$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = 12$ (loại vì $(x + y)^2$ là số chính phương).
- TH3: $xy = 4$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = 16$. Giải ra ta được $x = y = 2$.
- TH4: $xy = 5$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = 10$ (loại vì $(x + y)^2$ là số chính phương).
- TH5: $xy = 6$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = -6$ (vô lí).

Thử lại ta thấy $(x; y) = (2; 2)$ là nghiệm của phương trình.

Do xy và $(-x).(-y)$ có vai trò như nhau trong phương trình ban đầu nên nghiệm của phương trình là $(2; 2), (-2; -2)$. ■

Bình luận. Đây là bài toán phương trình nghiệm nguyên khá quen thuộc, việc biến đổi để thu được hằng đẳng rồi sau đánh giá về còn lại là một cách giải thường xuyên được áp dụng đối với dạng toán này.

Bài tập tương tự.

1. Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa $x^2 - xy = 7x - 2y - 15$.

Trích đề thi hsg lớp 9, Yên Bái, 2011-2012

Đáp án. $(x, y) \in \{(-3, -9), (1, -9), (3, -3), (7, 3)\}$

2. Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa $2y^2 + 2xy + x + 3y - 13 = 0$.

Trích đề thi thử vào lớp 10, lần 2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, 2016- 2017

Đáp án. $(x, y) \in \{(13; 0), (-14, -1), (-2, 3), (1, -4)\}$

Bài 3

Cho $a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}}$. Chứng minh $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

Phân tích. Thoạt nhìn bài toán có vẻ khá phức tạp khi xuất hiện của căn thức bậc 2 và bậc 3. Tuy nhiên, dễ dàng nhận thấy, trong biểu thức của a và điều cần chứng minh xuất hiện khá nhiều $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[3]{y^2}$ và lũy thừa của nó. Do đó, ta sẽ đặt ẩn phụ để bài toán được đơn giản hơn, dễ phân tích hơn.

Lời giải. Đặt $b = \sqrt[3]{x^2} \geq 0, c = \sqrt[3]{y^2} \geq 0$. Bài toán trở thành:

Cho $a = \sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2}$ với b, c là hai số thực không âm. Chứng minh: $b + c = \sqrt[3]{a^2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2} \\ &= \sqrt{b^2(b+c)} + \sqrt{c^2(b+c)} \\ &= b\sqrt{b+c} + c\sqrt{b+c} \quad (\text{do } b, c \geq 0) \\ &= (b+c)\sqrt{b+c}. \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 = (b+c)^3$ hay $b+c = \sqrt[3]{a^2}$. ■

Bình luận. Rõ ràng bài toán trên ta hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp biến đổi đại số bình thường mà không cần đặt ẩn phụ. Tuy nhiên, việc đặt ẩn phụ rõ ràng đem lại lợi ích rất nhiều, làm cho bài toán đơn giản hơn, và khá quen thuộc với học sinh. Khi đặt ẩn phụ ta cần quan tâm đến điều kiện của ẩn mới. Chẳng hạn như trong bài toán này, nếu ta quên xác định điều kiện của b và c , thì khi đưa chúng ta khỏi căn bậc 2 sẽ gặp khó khăn và có thể dẫn đến sai lầm.

Bài tập tương tự.

- 1) Cho $x = \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} + 2$. Tính giá trị biểu thức $P = x^3 - 6x^2 + 21x + 2016$.

Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, tỉnh Hưng Yên năm 2016- 2017

- 2) Cho $a = \sqrt{x^4 + x^2y\sqrt[3]{x^2y}} + \sqrt{y^4 + xy^2\sqrt[3]{xy^2}}$. Chứng minh: $x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a^2}$.

Châu Ngọc Vinh-SV DHSP TPHCM

Bài 4

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = x - 3xy \\ 2x^2 + y^2 - 17 = 3xy - x. \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình thứ nhất tương đương $(x+y-1)(x+2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+2y=0. \end{cases}$

- $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$, thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=-1 \\ x=-\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{7}{3}. \end{cases}$$

- $x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$, thay vào phương trình thứ hai, ta có:

$$15y^2 - 2y - 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{17}{15} \Rightarrow x=-\frac{34}{15} \\ y=-1 \Rightarrow x=2. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là $(2; -1), (\frac{-4}{3}; \frac{7}{3}), (\frac{-34}{15}; \frac{17}{15})$. ■

Bài tập tương tự.

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = x - 3y + 5xy \\ x^2 + y^2 + 8 = 5xy + x. \end{cases}$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 5

Cho phương trình: $x^4 + 2(m - 3)x^2 + 3m + 9 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải. Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + 2(m - 3)t + 3m + 9 = 0. \quad (*)$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt. Điều này đồng nghĩa với:

$$\begin{cases} \Delta' = (m - 3)^2 - 3m - 9 > 0 \\ S = t_1 + t_2 = -2(m - 3) > 0 \\ P = t_1 \cdot t_2 = 3m + 9 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m < 0 \\ m < 3 \\ m > -3. \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 0.$$

Vậy với $-3 < m < 0$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm dương phân biệt. ■

Bài tập tương tự.

- 1) Tìm m để phương trình $x^4 + 2mx^2 - 4m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 4$.

Châu Ngọc Vinh-SV DHSP TPHCM

Bài 6

Cho các số a, b, c thỏa mãn: $a \geq 1; b \geq 4; c \geq 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{bc\sqrt{a-1} + ac\sqrt{b-4} + ab\sqrt{c-9}}{abc}.$$

Phân tích. Dễ thấy $M = \frac{\sqrt{a-1}}{a} + \frac{\sqrt{b-4}}{b} + \frac{\sqrt{c-9}}{c}$.

Do ba biến a, b, c có vai trò không bình đẳng với nhau trong biểu thức M nên để tìm giá trị lớn nhất của M ta đi tìm giá trị lớn nhất của $\frac{\sqrt{a-1}}{a}, \frac{\sqrt{b-4}}{b}, \frac{\sqrt{c-9}}{c}$.

Xét $\frac{\sqrt{a-1}}{a}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có:

$$\frac{\sqrt{a-1}}{a} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{a-1} \cdot \alpha}{a} \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a-1 + \alpha^2}{2a}.$$

Để tìm được giá trị lớn nhất của $\frac{\sqrt{a-1}}{a}$ thì $\alpha^2 - 1 = 0$ hay $\alpha = 1$.

Khi đó, $\frac{\sqrt{a-1}}{a} \leq \frac{1}{2}$.

Tương tự, ta chứng minh được $\frac{\sqrt{b-4}}{b} \leq \frac{1}{4}$ và $\frac{\sqrt{c-9}}{c} \leq \frac{1}{6}$.

Lời giải. Ta có

$$M = \frac{\sqrt{a-1}}{a} + \frac{\sqrt{b-4}}{b} + \frac{\sqrt{c-9}}{c}$$

Do $a \geq 1; b \geq 4$ và $c \geq 9$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM với các cặp số không âm, ta có:

$$\begin{cases} a = (a-1) + 1 \geq 2\sqrt{a-1} & \Rightarrow \frac{\sqrt{a-1}}{a} \leq \frac{1}{2}. \\ b = (b-4) + 4 \geq 4\sqrt{b-4} & \Rightarrow \frac{\sqrt{b-4}}{b} \leq \frac{1}{4}. \\ c = (c-9) + 9 \geq 6\sqrt{c-9} & \Rightarrow \frac{\sqrt{c-9}}{c} \leq \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Do đó $M \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$.

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a-1=1 \\ b-4=4 \\ c-9=9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \\ c=18. \end{cases}$$

Bình luận. Đây là bài bất đẳng thức khá đơn giản, chỉ cần nắm vững bất đẳng thức AM-GM và cách tham số hóa để triệt tiêu các hằng số tự do là có thể đạt điểm tối đa bài toán.

Bài tập tương tự.

- 1) Cho các số a, b, c thỏa mãn: $a \geq 1; b \geq 2; c \geq 3$ và $bc + 2\sqrt{2}ac + 3\sqrt{3} = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{a-1}} + \frac{2}{\sqrt{b-2}} + \frac{3}{\sqrt{c-3}}.$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

- 2) Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{9}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}} + 1995.$$

Phạm Quốc Sang-SV DHSP TPHCM

Bài 7

Cho 3 điểm A, B, C cố định thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn $(O; R)$ bất kì đi qua B, C ($BC \neq 2R$). Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến $(O; R)$ (M, N là các tiếp điểm). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và MN , MN cắt BC tại D . Chứng minh:

1. $AM^2 = AB.AC$.

2. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OID . Chứng minh O' thuộc đường thẳng cố định khi đường tròn $(O; R)$ thay đổi.

Phân tích. 1. Từ điều phải chứng minh $AM^2 = AB.AC$ ta sẽ đưa về tỷ lệ độ dài các cạnh để hi vọng có thể đưa về hai tam giác đồng dạng để giải bài toán này. Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AM}$ nên ta xét $\triangle ABM$ và $\triangle AMC$.

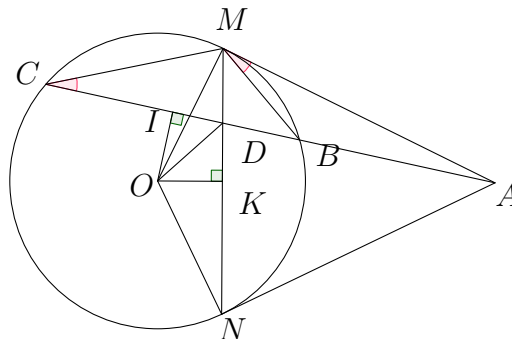
2. Dễ dàng chứng minh tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác OID là trung điểm của cạnh ID .

Một cách thủ công các bạn có thể vẽ trên cùng một hình khoảng ba điểm O , sẽ nhận được tương ứng ba điểm O' . Đến đây có thể dự đoán được ba điểm đó cùng thuộc trung trực của ID .

Vậy nhiệm vụ tiếp theo của ta là chứng minh I, D cố định. Hiển nhiên I cố định, vậy còn D . Không quá khó để chứng minh điều này, bởi vì:

$$AD.AI = AM^2 = \text{const.}$$

Lời giải.



1. Xét $\triangle ABM$ và $\triangle AMC$, ta có:

$\widehat{MAC}$ chung

$\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$ (cùng chắn cung MB)

Do đó $\triangle ABM \sim \triangle AMC$ (g-g)

Suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AM}$ hay $AM^2 = AB.AC$ (đpcm)

2. Do B, C cố định nên trung điểm I của BC cố định.

Mặt khác, do tứ giác $IDKO$ nội tiếp nên $AD.AI = AK.AO = AM^2 = \text{const}$. Do đó, D cố định.

Ta có $\triangle OID$ vuông tại I , nên tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác OID là trung điểm của cạnh huyền OD .

Khi đó, $O'I = O'D$ và I, D cố định nên tâm O' di động trên đường trung trực của đoạn thẳng ID khi O di động trên trung trực của BC .



Bình luận. Đây là một bài không quá khó để giành điểm tuyệt đối. Ngay từ câu 1 ta đã nhận thấy mức độ đơn giản của bài toán, và đó cũng là gợi ý để ta có thể giải quyết nốt câu 2.

Bài 8

Cho đường tròn (O) đường kính BC , trên đường tròn lấy điểm A ($A \neq B, C$). Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại E , AI là đường cao của tam giác ABC .

1. Xác định vị trí của điểm A trên đường tròn để tam giác AIE có diện tích lớn nhất.
2. Trên đường tròn lấy điểm M sao cho góc $\widehat{MCE}$ là góc tù; kẻ EH, CK lần lượt vuông góc với MC, ME tại H và K . Chứng minh MO vuông góc với HK .

Phân tích. 1. Đối với dạng toán cực trị hình học, ta phải tìm được giá trị cực đại hoặc cực tiểu trước. Sau đó, dựa vào điều kiện bằng của bài toán để tìm vị trí của điểm di động. Ở bài này, việc đầu tiên là ta biểu diễn diện tích của tam giác AIE theo các cạnh có trong hình sau đó sử dụng các bất đẳng thức phụ để đánh giá diện tích. Ta dễ thấy

$$\begin{aligned} S_{AIE} &= \frac{1}{2} AI.IE.\sin\widehat{AIE} = \frac{1}{2} AI.IE.\sin(90^\circ + \widehat{OIE}) \\ &= \frac{1}{2} AI.IE.\cos\widehat{OIE} = \frac{1}{2} AI.IE.\frac{OI}{IE} = \frac{1}{2} AI.OI = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2}.x \end{aligned}$$

. Từ đây, ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM để đánh giá diện tích.

2. Để chứng minh $OM \perp HK$ ta cần chứng minh $\widehat{MHK} + \widehat{OMH} = 90^\circ$. Như vậy, ta chỉ cần biểu diễn $\widehat{MHK}$ và $\widehat{OMH}$ theo các góc đã biết sau đó tính tổng của chúng.

Lời giải.

1. Đặt $IO = x$ ($x \geq 0$), gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$\text{Ta có: } AI = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Do AE là phân giác của góc BAC nên E là điểm chính giữa của cung BC , suy ra $OE \perp BC$.

$$\text{Từ đó ta có } IE = \sqrt{R^2 + x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{AIE} &= \frac{1}{2} AI \cdot IE \cdot \sin \widehat{AIE} = \frac{1}{2} AI \cdot IE \cdot \sin(90^\circ + \widehat{OIE}) = \frac{1}{2} AI \cdot IE \cdot \cos \widehat{OIE} \\ &= \frac{1}{2} AI \cdot IE \cdot \frac{OI}{IE} = \frac{1}{2} AI \cdot OI = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot x \leq \frac{1}{4} (R^2 - x^2 + x^2) = \frac{R^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{R^2 - x^2} = x \iff x = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Từ đó ta có } AI = \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy điểm A thuộc đường tròn (O) sao cho khoảng cách từ A đến BC bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

2. Ta có $\widehat{EMC} = \frac{1}{2} \widehat{EOC} = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$, suy ra $\triangle MEH$ vuông cân tại H .

Tứ giác $KCHE$ nội tiếp nên $\widehat{CHK} = \widehat{CEK}$ (cùng chắn cung KC).

$$\text{Ta lại có } \widehat{OMH} = \widehat{OME} + \widehat{EMH} = \widehat{OEI} + 45^\circ.$$

(vì $\triangle OME$ cân tại M nên $\widehat{OME} = \widehat{OEM}$).

$$\text{Suy ra } \widehat{MHK} + \widehat{OMH} = \widehat{OEM} + 45^\circ + \widehat{KEC} = \widehat{OEC} + 45^\circ = 90^\circ.$$

(vì $\triangle OEC$ vuông cân tại O nên $\widehat{OEC} = 45^\circ$).

Suy ra $OM \perp HK$.

■

Bình luận. Bài toán khai thác các tính chất, vấn đề khá quen thuộc đối với học sinh trung học cơ sở. Cách tiếp cận vấn đề cũng khá quen thuộc từ việc xác định điểm A để diện tích $\triangle AIE$ lớn nhất đến chứng minh $MO \perp HK$. Học sinh chỉ cần biểu diễn được diện tích sau đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM để đánh giá là có thể giải quyết bài toán cực trị. Đối với việc chứng minh $MO \perp HK$, ta chỉ cần tập trung chứng minh hai góc còn lại có tổng bằng 90° thì bài toán sẽ được giải quyết.

Bài tập tương tự.

- Cho đường tròn (O) , bán kính R , dây BC cố định khác đường kính. A là một điểm di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ nhọn. Các đường cao BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H .
 - Chứng minh tứ giác $BECF$ nội tiếp và $AO \perp EF$.
 - Tia EF cắt (O) tại I , tia AO cắt (O) tại G . Gọi M là trung điểm BC , D là giao điểm hai đường thẳng AH và BC . Chứng minh $AI^2 = 2AD \cdot OM$.
 - Trong trường hợp $\triangle ABC$ cân tại A , gọi x là khoảng cách từ O đến BC . Tìm x để chu vi $\triangle ABC$ lớn nhất.

Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, tỉnh Ninh Bình năm 2016- 2017

10 Đề thi chuyên sở GD&ĐT Hưng Yên**Bài 1**

Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm các giá trị x để $P = \frac{3}{4}$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P$.

Phân tích. Đối với bài tập này, học sinh chỉ cần quy đồng và rút gọn tử và mẫu là có thể hoàn tất yêu cầu ý **a)**. Đối với ý **b)** thực chất là sự lồng ghép để giải phương trình bậc 2. Ý **c)** hướng tới giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc 2. Học sinh chỉ cần phân tích tổng bình phương là có được kết quả.

Lời giải. Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$.

$$\text{a) } P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(2\sqrt{x})(\sqrt{x}+1) - (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}.$$

b) Giải phương trình:

$$P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3x - 8\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(3\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$$

$$\text{c) } \text{Biểu thức } A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P = 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) = 2(\sqrt{x}-2)^2 - 8 \geq -8.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -8 , khi chỉ khi $x = 4$.

Bình luận. Dạng trục căn thức để rút gọn biểu thức là một dạng khá phổ biến trong kỳ thi vào lớp 10. Ngoài ra, bài này còn kết hợp kiểm tra kiến thức về tam thức và phương trình bậc hai.

Bài tập tương tự. Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} - \frac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm các giá trị x để $P = 1$.
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (\sqrt{x} - 1)P$.

Đáp số. a) $P = 4\sqrt{x}$. b) $x = \frac{1}{16}$. c) $\min A = -1$.

Bài 2

Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 3x + m - 2$. Tìm tham số m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Phân tích. Dạng bài tập này học sinh cần qui về phương trình hoành độ giao điểm để từ đó tính chất nghiệm cũng chính là tính chất hoành độ giao điểm. Sử dụng điều kiện tổng tích các nghiệm để tìm ra điều kiện để có hai nghiệm phân biệt dương.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2 = 3x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - m = 0$ (1).

Yêu cầu bài toán tương đương (1) có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Mà ta có $\Delta = 9 - 4(2 - m) = 1 + 4m$ và $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 - m \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 2$.

Bài tập tương tự. Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 3x + m - 2$. Tìm tham số m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có tung độ dương.

Bài 3

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 2y - x \\ x^2 + 2x = 9 - y \end{cases}.$$

b) Giải phương trình
$$\sqrt{\frac{1-2x}{x}} = \frac{3x+x^2}{x^2+1}.$$

Phân tích. a) Để ý thấy phương trình thứ nhất của hệ có hệ số tương tự nhau, từ đó nảy sinh vấn đề phân tích nhân tử. Ta thu được $(x+1)(x-2y) = 0$. Từ đó thay vào phương trình còn lại để giải quyết tiếp.

b) Nhằm nghiệm của phương trình này ta thấy $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm. Từ đó thêm bớt lượng liên hợp cho $\sqrt{\frac{1-2x}{x}}$ là $\sqrt{\frac{1-2\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}} = 1$. Sau đó sẽ đánh giá thừa số còn lại sau khi gom nhân tử, chú ý sử dụng điều kiện để đánh giá.

Lời giải.

a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$x^2 + x - 2xy - 2y = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2y \end{cases}$$

Xét $x = -1$ thay vào phương trình còn lại ta thu được $y = 10$.

Xét $x = 2y$ thay vào phương trình còn lại ta thu được $4y^2 + 5y - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -\frac{9}{4} \Rightarrow x = -\frac{9}{2} \end{cases}.$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là $(-1; 10), (2; 1), \left(-\frac{9}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

b) Điều kiện $\frac{1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{1-2x}{x}} &= \frac{3x+x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-2x}{x}} - 1 = \frac{3x+x^2}{x^2+1} - 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\frac{1-2x}{x} - 1}{\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1} = \frac{3x-1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} = \frac{3x-1}{x^2+1} \\
 &\Leftrightarrow (1-3x) \left(\frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} + \frac{1}{1+x^2} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \forall \frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} + \frac{1}{1+x^2} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]
 \end{aligned}$$

■

Bình luận. a) Một trong những cách hay gặp nhất khi giải về hệ phương trình là việc tìm ra nhân tử ở một trong hai phương trình, từ đó rút và thế vào phương trình còn lại.
b) Sử dụng lượng liên hợp là một phương pháp sơ cấp và rất hữu hiệu để làm các bài phương trình khi chúng ta đã đoán biết được ít nhất 1 nghiệm đẹp. Bài này chúng ta cũng có thể bình phương hai vế, nhưng khá dài dòng và bậc của x là lên tới x^5 .

Bài tập tương tự.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(y-1) + 2y = x(x+1) \\ \sqrt{2x-1} + xy - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$
Đáp số. $(1; 1), (2 - \sqrt{x}; 2 - \sqrt{2})$.

Bài 4

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , kẻ đường kính AN . Lấy điểm M trên cung nhỏ BN (M khác B, N). Kẻ MD vuông góc với đường thẳng BC tại D . ME vuông góc với đường thẳng AC tại E , MF vuông góc với AB tại F .

a) Chứng minh ba điểm F, D, E thẳng hàng.

b) Chứng minh $\frac{AB}{MF} + \frac{AC}{ME} = \frac{BC}{MD}$.

c) Chứng minh $\frac{FB}{FA} + \frac{EA}{EC} + \frac{DC}{DB} \geq 3$.

Phân tích. a) Chúng ta có nhiều dữ kiện về góc, vì rất nhiều tứ giác nội tiếp được hình thành khi lấy hình chiếu của điểm M lên các đường thẳng chứa ba cạnh của tam

giác. Vậy ta sẽ chứng minh hai góc ở vị trí đối đỉnh là bằng nhau. Phân tích ngược sau:
 $\widehat{BDF} = \widehat{EDC} \Leftrightarrow \widehat{BMF} = \widehat{EMC} \Leftrightarrow \widehat{FBM} = \widehat{ECM}$. Dễ thấy $\widehat{FBM} = \widehat{ECM}$ do vị trí góc ngoài và góc đối trong của tứ giác nội tiếp $ACMB$.

b) Để chứng minh đẳng thức tỷ số này, một suy nghĩ tự nhiên nhất là ta chia $\frac{BC}{MB}$ thành hai tỷ số, khi đó sẽ chứng minh hai cặp tỷ số bằng nhau. Từ đó cộng lại, ta có điều cần chứng minh.

c) Dễ nhận thấy đây là một đánh giá bất đẳng thức. Sử dụng $AM - GM$ sẽ đưa ra kết quả cần chứng minh là $\frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} \geq 1$. Hơn thế biểu thức $\frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB}$ chính là kết quả từ định lý Menelaus hoặc Ceva.

Lời giải.

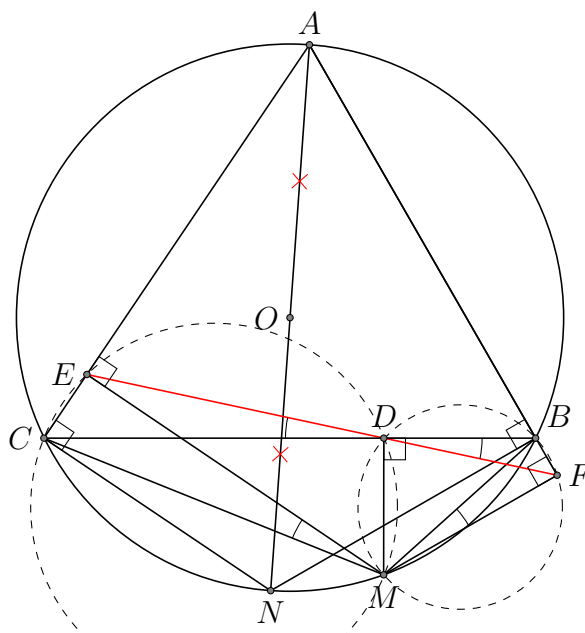
a) Ta có $MFBD, MDEC, MBAC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{BMF} = 90^\circ - \widehat{FBM}$ và $\widehat{EDC} = \widehat{EMC} = 90^\circ - \widehat{CEM}$.

Hơn nữa $\widehat{FBM} = \widehat{CEM}$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

Do đó $\widehat{BDF} = \widehat{EDC}$, hai góc ở vị trí đối đỉnh.

Vậy D, E, F thẳng hàng.



b) Gọi $P \in BC$ sao cho $\widehat{BPM} = \widehat{ACM}$.

Suy ra $\triangle BPM \sim \triangle ACM$, từ đó có $\frac{BP}{BM} = \frac{AC}{AM}$.

Hơn nữa $\triangle AME \sim \triangle BMD$ suy ra $\frac{AM}{ME} = \frac{BM}{DM}$.

Vậy $\frac{AC}{ME} = \frac{BP}{DM}$.

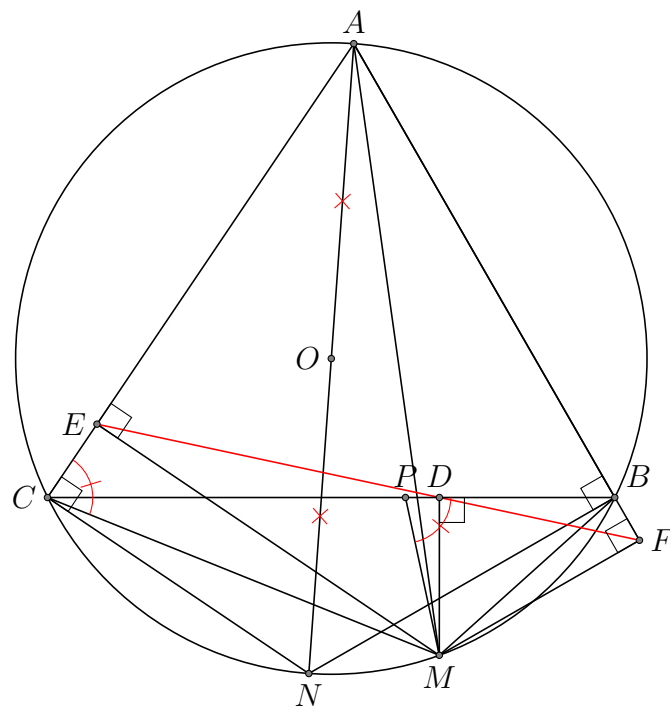
Tương tự từ $\begin{cases} \triangle CPM \sim \triangle ABM \\ \triangle AMF \sim \triangle CMD \end{cases}$ suy ra

$$\frac{AB}{MF} = \frac{CP}{MD}.$$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta có đpcm.

c) Từ câu a) áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến là D, E, F thu được $\frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} = 1$.

Áp dụng BDT $AM - GM$ ta có: $\frac{FB}{FA} + \frac{EA}{EC} + \frac{DC}{DB} \geq 3$.



Bình luận. a) Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, chúng ta nghĩ tới các cách giải quyết sau:

1. Tiên đề Euclide.
2. Góc ở vị trí đối đỉnh bằng nhau.
3. Góc bẹt.
4. Định lý Menelaus.

Bài 5

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $y^3 - 2x - 2 = x(x + 1)^2$.

Phân tích. Phương trình nghiệm nguyên có dạng lập phương của y , các biến x, y "độc lập với nhau". Chuyển x, y sang hai vế, thêm bớt từ đó tìm được miền nghiệm nguyên của x dựa trên đánh giá y^3 với x^3 và $(x + 1)^3$.

Lời giải. Ta có $y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$. Rõ ràng $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8} > 0$.
Do đó $y^3 > x^3$.

Mặt khác, xét $|x| > 1$.

Khi đó $y^3 = (x+1)^3 + 1 - x^2 \leq (x+1)^3$, mâu thuẫn vì $x^3 < y^3 < (x+1)^3$.

Vậy $|x| \leq 1$. Khi đó $x = \pm 1 \vee x = 0$.

TH1. $x = -1$. Thay vào pt được $y = 1$.

TH2. $x = 1$. Thay vào pt được $y = 2$.

TH3. $x = 0$. Thay vào pt được $y = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Z}$, loại.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $(-1; 1), (1; 2)$. ■

Bài 6

Cho a, b, c dương và $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 3a^4b^4c^4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} + \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} + \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

Phân tích. Đây là lớp các BDT có điều kiện, từ điều kiện, chúng ta qui về điều kiện đơn giản hơn bằng cách chia hai vế cho $a^4b^4c^4$. Từ đó thu được $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = 3$. Tiếp tục, để đánh giá được những phân thức của vế trái của BDT cần chứng minh, một trong các BDT quen thuộc thường gặp là $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right), \forall x, y > 0$. Từ đó thông qua các đánh giá $AM - GM$ với điểm rơi là $a = b = c = 1$ ta thu được kết quả.

Lời giải. Cách 1. Từ điều kiện đề bài ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = 3$.

Trước hết ta chứng minh BDT sau: Với $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

BDT trên tương đương với $(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4$. BDT này đúng theo $AM - GM$ như sau:

$$\begin{aligned} x+y &\geq 2\sqrt{xy} > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\geq \frac{2}{\sqrt{xy}} > 0 \end{aligned}$$

Từ đó áp dụng vào ta có:

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^3b + 1} + \frac{1}{2c^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^3b} + 1 \right) + \frac{1}{2c^2} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a^3b} + \frac{2}{c^2} + 1 \right)$$

Mà theo $AM - GM$ ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{4}{a^3b}$ và $\frac{1}{c^4} + 1 \geq \frac{2}{c^2}$.

Nên $\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4a^4} + \frac{1}{4b^4} + \frac{1}{c^4} + 2 \right)$.

Tương tự ta có
$$\begin{cases} \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4b^4} + \frac{1}{4c^4} + \frac{1}{a^4} + 2 \right) \\ \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4c^4} + \frac{1}{4a^4} + \frac{1}{b^4} + 2 \right) \end{cases}.$$

Cộng theo vế các BDT trên lại ta có $VT \leq \frac{1}{16} \left(2 \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \right) + 6 \right) = \frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2. Từ điều kiện ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = 3$. Mặt khác: $3 = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} \Rightarrow abc \geq 1$.

Ta có $a^3b + 2c^2 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^3bc^4} \geq 4\sqrt[4]{a^2c^3} = 4\sqrt{ac}\sqrt[4]{c}$. Do đó

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{4\sqrt{ac}\sqrt[4]{c}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$$

Tương tự ta có
$$\begin{cases} \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ba} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \\ \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \end{cases}.$$

Cộng theo vế các BDT trên lại ta có $VT \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$.

Mà theo BDT BCS thì

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^2 \geq \frac{1}{27} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^4 \geq \frac{1}{243} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^8$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \leq 3$. Tương tự:

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)^2$$

Suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq 3$. Từ đó ta có $VT \leq \frac{3+3}{8} = \frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $a = b = c = 1$. ■

Bình luận. Đây là một bất đẳng thức có điều kiện. Từ điều kiện chúng ta cần đưa ra một số đánh giá, nó rất quan trọng để định hướng giải cho bài BDT cần chứng minh. Trong quá trình đánh giá luôn luôn phải xác định điểm rơi cho, ở đây điểm rơi tại $a = b = c = 1$.

Bài tập tương tự. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3xyz$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^2 + 2y^2z^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 2z^2x^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 2x^2y^2 + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

11 Đề thi THPT chuyên Lương Thế Vinh sở GD&ĐT Đồng Nai

Bài 1

Cho biểu thức $P = \left(\frac{a + \sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a} + 1} + \frac{1}{a+1} \right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+1}$, với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các số tự nhiên $a \neq 1$ sao cho biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Phân tích. a) Để ý phân tích nhân tử của mẫu $a\sqrt{a} + a + \sqrt{a} + 1 = (a+1)(\sqrt{a}+1)$.

Từ đó qui đồng mẫu thức sẽ ngắn gọn và dễ dàng hơn.

b) Sau khi rút gọn thì $P = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}$. Từ đó, để P nhận giá trị nguyên thì phân số $\frac{2}{\sqrt{a}-1}$ phải nhận giá trị nguyên, khi đó $\sqrt{a}-1$ phải là ước số của 2.

Lời giải. a) Với điều kiện $a \geq 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a + \sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a} + 1} + \frac{1}{a+1} \right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(a+1)(\sqrt{a}+1)} + \frac{1}{a+1} \right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}}{a+1} + \frac{1}{a+1} \right) \cdot \frac{a+1}{\sqrt{a}-1} \\ &= \frac{\sqrt{a}+1}{a+1} \cdot \frac{a+1}{\sqrt{a}-1} \\ &= \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \end{aligned}$$

b) Ta có $P = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}$.

Từ đó $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a}-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{a}-1 \mid 2 \Leftrightarrow \sqrt{a}-1 \in \{\pm 1, \pm 2\} \Leftrightarrow a \in \{0; 4; 9\}$. ■

Bài 2

a) Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4xy + x + 4y = 2 \\ x^2 - y^2 = -3. \end{cases}$

Phân tích. a) Phương trình này nếu ta nhân đa thức vào ta sẽ thu được phương trình bậc 4. Tuy nhiên, đây là dạng của phương trình qui về bậc 2 dạng

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e, \text{ với } a+d = b+c.$$

b) Hệ phương trình có phương trình thứ nhất nhiều hệ số liên kết và phương trình thứ hai khá đơn giản. Phân tích nhân tử phương trình thứ nhất ta thu được $(x-1)(x-4y+2) = 0$.

Lời giải. a)

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) &= 24 \\ \Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) &= 24. \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$. Khi đó phương trình trở thành

$$t(t+2) = 24 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = -6.$$

Khi $t = 4$. Thay vào ta được $x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5$.

Khi $t = -6$. Thay vào ta được $x^2 + 5x + 10 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -5\}$.

b) Từ phương trình thứ nhất ta có

$$x^2 - 4xy + x + 4y = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 - 4y(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2-4y) = 0$$

TH1. $x = 1$. Thay vào pt thứ hai ta có $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$.

TH2. $x = 4y - 2$. Thay vào pt thứ hai ta có $15y^2 - 16y + 7 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1; \pm 2)$. ■

Bài 3

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 5 = 0$. Lập một phương trình bậc hai nhận $2x_1 + x_2$ và $x_1 + 2x_2$ làm nghiệm.

Phân tích. Để lập phương trình bậc hai có nghiệm cho trước thì chúng ta cần sử dụng định lý Vi-ét đảo. Nghĩa là tìm tổng và tích của hai nghiệm cho trước.

Lời giải. Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình bậc hai $x^2 - x - 5 = 0$ ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -5. \end{cases} \quad \text{Từ đó ta có: } \begin{cases} (2x_1 + x_2) + (x_1 + 2x_2) = 3(x_1 + x_2) = 3 \\ (2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

Vậy theo định lý Vi-ét đảo thì phương trình $X^2 - 3X - 3 = 0$ nhận $2x_1 + x_2$ và $x_1 + 2x_2$ làm nghiệm. ■

Bài 4

a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 8y + 7 = 0$.

b) Cho ba số thực không âm a, b, c . Chứng minh:

$$ab(b^2 + bc + ac) + bc(c^2 + ca + ab) + ac(a^2 + ab + bc) \leq (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)$$

Phân tích. a) Phương trình nghiệm nguyên được cho có dạng bậc 2 theo từng biến. Dựa vào điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ta thu được miền giá trị của biến còn lại.

b) Dễ thấy bậc của các đa thức bằng nhau và bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Biến đổi tương đương BĐT cần chứng minh ta thu được bất đẳng thức đơn giản hơn. Từ đó sử dụng các BĐT AM-GM để thu được điều cần chứng minh.

Lời giải. a) **Cách 1.** Xem phương trình là bậc hai theo biến x với tham số là y .

$$x^2 - 2x(y + 2) + 2y^2 + 8y + 7 = 0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2 - (2y^2 + 8y + 7) \leq 0 \Leftrightarrow -y^2 - 4y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-3; -1]$.

TH1. $y = -3$. Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

TH2. $y = -2$. Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

TH3. $y = -1$. Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có $(-3; -1), (-2; \pm 1), (-1; 1)$.

Cách 2. Xem là phương trình bậc hai theo biến y . (học sinh tự làm tương tự).

Cách 3. Phân tích thành tổng bình phương.

$$(x - y - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

Từ đây ta có $(y + 2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq -1$.

b) Biến đổi tương đương BDT cần chứng minh ra có:

$$\begin{aligned} & ab(b^2 + bc + ac) + bc(c^2 + ca + ab) + ac(a^2 + ab + bc) \leq (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow & ab^3 + bc^3 + ca^3 + 2abc(a + b + c) \leq ab^3 + bc^3 + ca^3 + ab(a^2 + c^2) + bc(a^2 + b^2) + ca(b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow & 2abc(a + b + c) \leq ab(a^2 + c^2) + bc(a^2 + b^2) + ca(b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Theo BDT AM-GM thì $ab(a^2 + c^2) + bc(a^2 + b^2) + ca(b^2 + c^2) \geq ab.2ac + bc.2ab + ca.2bc = 2abc(a + b + c)$. Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Bài 5

Trong mặt phẳng tọa độ cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có các đỉnh A, B, C, D, E đều là điểm nguyên (*điểm được gọi là điểm nguyên nếu như có hoành độ và tung độ đều nguyên*). Chứng minh rằng có ít nhất một điểm nguyên M nằm bên trong hoặc thuộc cạnh của ngũ giác đã cho, với M khác các đỉnh của ngũ giác đã cho.

Phân tích. Bài toán cho năm điểm của ngũ giác lồi có tọa độ nguyên bất kỳ. Bài toán cần chứng minh có ít nhất một điểm nguyên thỏa mãn điều kiện cho trước. Với yêu cầu bài toán này, kiến thức thường sử dụng nhất là nguyên lý Dirichlet.

Lời giải. Trong năm điểm A, B, C, D, E theo nguyên lý Dirichlet thì có ít nhất ba điểm có hoành độ cùng tính chất chẵn, lẻ. Xét các trường hợp sau:

TH1. Giả sử tồn tại ba điểm có hoành độ cùng là số chẵn. Khi đó trong ba điểm này có ít nhất hai điểm có tung độ cùng tính chẵn, lẻ. Khi đó trung điểm của hai điểm này có tọa độ nguyên. Do $ABCDE$ là ngũ giác lồi, do đó trung điểm của hai đỉnh bất kỳ luôn nằm trong hoặc thuộc cạnh, không trùng với đỉnh.

TH2. Giả sử tồn tại ba điểm có hoành độ cùng là số lẻ. Khi đó trong ba điểm này có ít nhất hai điểm có tung độ cùng tính chẵn, lẻ. Khi đó trung điểm của hai điểm này có tọa độ nguyên. Do $ABCDE$ là ngũ giác lồi, do đó trung điểm của hai đỉnh bất kỳ luôn nằm trong hoặc thuộc cạnh, không trùng với đỉnh.

■

Bài 6

Cho tam giác ABC có ba góc $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ đều là góc nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại hai điểm M, N ; với M khác B , N khác C . Hai tia phân giác của hai góc $\widehat{CAB}, \widehat{OMN}$ cắt nhau tại điểm P .

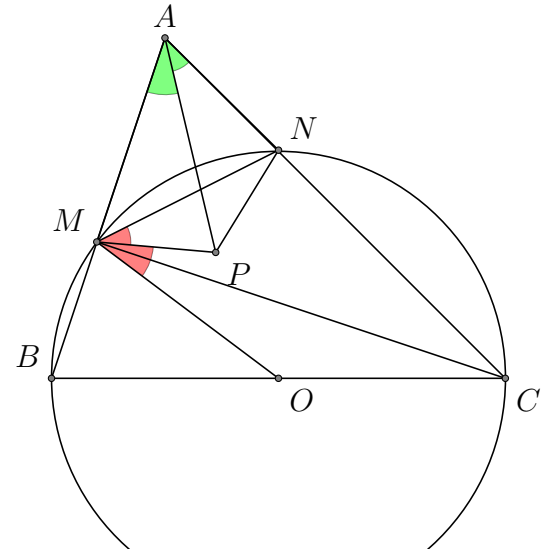
- Chứng minh $\widehat{OMN} = \widehat{CAB}$. Chứng minh tứ giác $AMPN$ nội tiếp đường tròn.
- Gọi Q là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BMP và CNP , với Q khác P . Chứng minh ba điểm B, Q, C thẳng hàng.
- Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác AMN, BMP, CNP . Chứng minh bốn điểm O, O_1, O_2, O_3 cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

a) Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{CAB} &= \frac{1}{2} \left(90^\circ - \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{MN} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sd} \widehat{BM} + \text{sd} \widehat{NC}) \\ &= \widehat{BCM} + \widehat{NMC} \\ &= \widehat{CMO} + \widehat{NMC} \\ &= \widehat{NMO}\end{aligned}$$

Cách 2. Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{BCA}$ vì $BCNM$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa $\widehat{BMO} = \widehat{ABC}$. Vậy $\widehat{OMN} = \widehat{CAB}$. Suy ra $\widehat{NAP} = \widehat{NMP}$. Vậy $AMPN$ là tứ giác nội tiếp.



b) Ta có $\widehat{BQP} = \widehat{AMP}$, vì $BMPQ$ là tứ giác nội tiếp.

Hơn nữa $\widehat{CQP} = \widehat{ANP}$, vì $CNPQ$ là tứ giác nội tiếp.

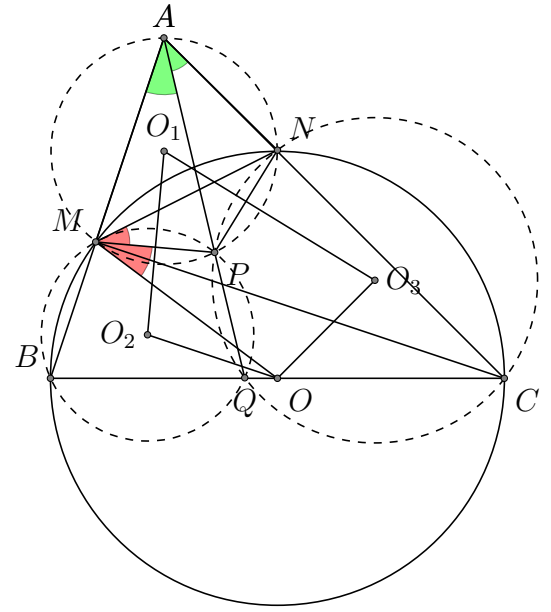
Mà $\widehat{AMP} + \widehat{ANP} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{BQP} + \widehat{CQP} = 180^\circ$, mà hai góc nằm ở vị trí góc kề. Vậy B, Q, C thẳng hàng.

c) Ta có $OO_2 \perp AB$ vì đường tròn (O) và (O_2) cắt nhau tại B, M . Tương tự $OO_3 \perp AC$. Suy ra $\widehat{O_2OO_3} = 180^\circ - \widehat{BAC}$.

Tương tự ta có $O_1O_3 \perp PN$ và $O_1O_2 \perp PM$. Suy ra $\widehat{O_2O_1O_3} = 180^\circ - \widehat{MPN}$.

Ta có $\widehat{O_2OO_3} + \widehat{O_2O_1O_3} = 360^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{MPN}) = 180^\circ$.

Vậy $O_1O_2OO_3$ là tứ giác nội tiếp. Vậy bốn điểm O, O_1, O_2, O_3 cùng thuộc một đường tròn.



12 Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Tiền Giang

Bài 1

1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + 2) \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38} - 2}$.
2. Giải phương trình $x^2 - \sqrt{x^3 + x} = 6x - 1$.
3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \\ x - 3y + xy = 0. \end{cases}$

Phân tích. 1. Tiếp cận bài toán này, ta để ý $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ nên có thể khai căn được, và tử số sau khi rút gọn là 1. Với mẫu số, không khó để đoán trong căn bậc ba chính là lập phương của một biểu thức, cụ thể hơn chính là liên hợp của $\sqrt{5} + 2$. Từ nhận xét đó, bài toán trở nên đơn giản vô cùng!

2. Tiếp cận bài toán, ta chú ý để biểu thức trong căn, bởi đây là căn bậc hai, nhưng trong căn lại là một đa thức bậc ba. Để ý $\sqrt{x^3 + x} = \sqrt{x(x^2 + 1)}$ và nếu chuyển về 1 từ vế phải qua vế trái phương trình thì ta lại có một lượng $x^2 + 1$. Từ đây, ta nghĩ đến việc đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$, sẽ đưa phương trình ban đầu về dạng phương trình đẳng

cấp

$$t^2 - \sqrt{x}t - 6x = 0.$$

3. Tiếp cận phương trình ta thấy rằng $x^2 + 9y^2$ là một phần của $(x - 3y)^2$. Hay nói cách khác, ta có thêm bớt để đưa $x^2 + 9y^2$ về $(x - 3y)^2$. Thật vậy, biến đổi phương trình thứ nhất

$$x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \Leftrightarrow (x - 3y)^2 + 14xy + 24 = 0.$$

Đến đây, chắc các bạn sẽ nhận ra việc cần làm tiếp theo, đó là thay $xy = -(x - 3y)$ vào phương trình trên ta sẽ thu được phương trình bậc hai theo ẩn $(x - 3y)$. Việc còn lại là giải chúng thôi!

Lời giải. 1. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + 2) \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38} - 2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + 2) \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^3} - 2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) - 2} = \frac{1}{-1} = -1. \end{aligned}$$

2. Với $x \geq 0$, đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$t^2 - \sqrt{x} \cdot t - 6x = 0.$$

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình trên cho $x \neq 0$ ta được

$$\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{t}{\sqrt{x}} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{\sqrt{x}} = 3, \text{ (thỏa } t, x \geq 0) \vee \frac{t}{\sqrt{x}} = -2, \text{ (không thỏa } t, x \geq 0).$$

Khi đó

$$\frac{t}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 9x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{77}}{2} \\ x = \frac{9 - \sqrt{77}}{2} \end{cases}.$$

Kiểm tra lại ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{9 + \sqrt{77}}{2}; \frac{9 - \sqrt{77}}{2}$.

$$3. \begin{cases} x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \\ x - 3y + xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y)^2 + 14xy + 24 = 0 \\ xy = -(x - 3y) \end{cases}$$

Thay phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$(x - 3y)^2 - 14(x - 3y) + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - 3y = 12. \end{cases}$$

Với $x - 3y = 2$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x \cdot (-3y) = 6. \end{cases}$$

Theo hệ thức Viète $x, -3y$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 6 = 0$, (vô nghiệm).

Với $x - 3y = 12$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y = 12 \\ xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 12 \\ x \cdot (-3y) = 36. \end{cases}$$

Theo hệ thức Viète $x, -3y$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 12z + 36 = 0 \Leftrightarrow z = 6$.

Khi đó

- Nếu $x = 6$ thì $y = -2$.
- Nếu $y = 6$ thì $x = -2$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y) = (6; -2), (-2; 6)$.



Bình luận. Theo cảm nhận riêng tôi, đây là một câu ghi điểm trong đề thi này, bởi nó không đánh đố học sinh nhiều.

1. Việc đoán $\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38} = \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^3} = \sqrt{5} - 2$ không hề khó đối với đối tượng là các bạn thí sinh thi vào khối lớp chuyên toán. Và với suy đoán này thì bài toán này không còn gì để bàn luận thêm.
2. Phương trình này khá hay và cũng không hẳn là đơn giản. Với cách đặt $\sqrt{x^2 + 1} = t$ không phải tất cả cũng đều nghĩ ra. Tuy nhiên, với một số bạn khác có thể chuyển phương trình về dạng

$$\sqrt{x^3 + x} = x^2 - 6x + 1,$$

và bình phương hai vế để đưa về phương trình bậc bốn với hệ số bậc cao nhất là

1. Đến đây, việc giải phương trình bậc bốn này không quá khó, nếu các bạn biết

rằng nó luôn tách được thành tích của hai tam thức bậc hai, nghĩa là sau khi bình phương và rút gọn, ta hoàn toàn đưa phương trình ấy về dạng

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$$

bằng phương pháp hệ số bất định. Tuy vậy, phương pháp này khá vất vả và không phải là cách giải quyết hay!

Bài tập tương tự.

1. a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + 1}{(2\sqrt{2} + 1) \cdot \sqrt[3]{-25 + 22\sqrt{2}} + \sqrt{3} - 7}.$

b) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{-55 + 63\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}}{(\sqrt{7} - 1) \cdot \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - 5}.$

Phạm Hữu Hiệp - SV khoa Toán, DHSP TP.HCM

2. Giải phương trình $x^4 - \sqrt{x^6 + x^2} = 6x^2 - 1.$

3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 49x^2 + 25y^2 - 2xy = 35 \\ 7x - 5y + 2xy = 0. \end{cases}$$

Phạm Hữu Hiệp - SV khoa Toán, DHSP TP. HCM

Bài 2

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2(m+1)x - m^2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $(x_1 - m)^2 + x_2 = 3m$.

2. Cho phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$, m là tham số. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m . Tìm tất cả các giá trị của m sao cho biểu thức $A = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 4)$ đạt giá trị lớn nhất.

Phân tích. 1. Tiếp cận bài toán này, để tìm các giá trị m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt ta sẽ lập phương trình hoành độ giao điểm. Tuy nhiên, đây chỉ là một bước "bé nhỏ" trong việc giải quyết bài toán này. Ý đồ của người ra đề có lẽ là ở ý sau "hai nghiệm thỏa mãn

$$(x_1 - m)^2 + x_2 = 3m."$$

Sau khi lập phương trình hoành độ giao điểm và biến đổi ta thấy

$$x^2 = 2(m+1)x - m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 = 2x \Leftrightarrow (x-m)^2 = 2x.$$

Rõ ràng x_1 là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm nên phải có

$$2x_1 = (x_1 - m)^2.$$

Từ đó, ta có

$$2x_1 + x_2 = 3m.$$

Đến đây, kết hợp với hệ thức Viète ta hoàn toàn tìm ra m thỏa yêu cầu bài toán.

2. Nhìn ngay phương trình ta đã biết phương trình này có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
Do vậy ta sẽ không đi phân tích ý này mà tập trung vào ý hai.

Với bài toán này, việc học sinh có gắng biến đổi A về thành tổng tích để dùng hệ thức Viète là vô vọng, bởi biểu thức này không đối xứng. Do tích x_1x_2 là một số cụ thể, nên cách giải quyết tốt nhất đó là thay vào và đánh giá A .

Lời giải. 1. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d là

$$x^2 = 2(m+1)x - m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0.$$

Đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = [-(m+1)]^2 + m^2 > 0 = (m+1)^2 + m^2 > 0, \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó theo hệ thức Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = m^2. \end{cases}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} (x_1 - m)^2 + x_2 = 3m &\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1m + m^2 + x_2 = 3m \\ &\Leftrightarrow x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m^2 + 2x_1 + x_2 = 3m \\ &\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 3m. \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp với } x_1 + x_2 = 2(m+1) \text{ ta được } \begin{cases} x_1 = m - 2 \\ x_2 = m + 4. \end{cases}$$

Thay vào $x_1x_2 = m^2$ ta được phương trình theo biến m

$$(m-2)(m+4) = m^2 \Leftrightarrow 2m-8=0 \Leftrightarrow m=4.$$

Vậy với $m=4$, đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa yêu cầu đề cho.

2. Do $ac = -2 < 0$ nên phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m .

Khi đó, theo hệ thức Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 = -\frac{2}{x_2} \end{cases}$$

Ta có

$$A = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 4) = (x_1x_2)^2 - 4x_1^2 - x_2^2 + 4 = 8 - \frac{8}{x_2^2} - x_2^2 \leq 8 - 2\sqrt{\frac{8}{x_2^2} \cdot x_2^2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{8}{x_2^2} = x_2^2 \Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt[4]{8} \Rightarrow x_1 = \mp\frac{2}{\sqrt[4]{8}}.$$

$$\text{Vậy } m = \sqrt[4]{8} - \frac{2}{\sqrt[4]{8}}; -\sqrt[4]{8} + \frac{2}{\sqrt[4]{8}}.$$

■

Bình luận. 1. Theo cảm nhận riêng tôi, bài toán này thật sự không quá khó, tuy nhiên không quá đơn giản! Sự đánh đố được thể hiện rõ ở việc học sinh có phát hiện ra $(x_1 - m)^2 = 2x_1$ hay không. Thêm nữa đó là việc tìm ra x_1, x_2 theo tham số m thông qua giải hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 + x_2 = 2(m+1). \end{cases}$$

2. Bài toán này khá đơn giản, chỉ cần tính ý đưa A về một ẩn và dùng bất đẳng thức Cauchy là được. Có khó chăng là do học sinh chưa quen với việc giải bất đẳng thức.

Bài tập tương tự.

Bài 3

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + p + 6$ là một số chính phương.

Phân tích. Với bài toán này, do $p^2 + p + 6$ là số chính phương nên ta cứ đặt chúng bằng một số chính phương k^2 . Lại để ý là hệ số p^2, p như nhau, nên ta có thể nhân hai vế cho 4 để đưa về dạng bình phương, từ đó có những đánh giá tiếp theo.

Ngoài cách trên, ta có thể kẹp $p^2 + p + 6$ giữa hai số chính phương, để hạn chế trường hợp và giải. Bởi đây là một tam thức bậc hai nên việc giải chúng là khả thi.

Lời giải. Cách 1. $p^2 + p + 6$ là số chính phương khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$p^2 + p + 6 = k^2 \Leftrightarrow 4p^2 + 4p + 24 = 4k^2 \Leftrightarrow (2p+1)^2 - 4k^2 = 23 \Leftrightarrow (2p+2k+1)(2p-2k+1) = 23.$$

Nhận xét $2p + 2k + 1 > 2p - 2k + 1$ và $2p + 2k + 1 > 0$ nên

$$\begin{cases} 2p + 2k + 1 = 23 \\ 2p - 2k + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5 \\ k = 6 \end{cases}.$$

Kiểm tra lại với $p = 5$ thì $p^2 + p + 6 = 36 = 6^2$ là một số chính phương.

Cách 2. Ta có nhận xét

$$p^2 < p^2 + p + 6 < p^2 + 6p + 9 = (p+3)^2.$$

Do đó chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau

$$\begin{cases} p^2 + p + 6 = (p+1)^2 \\ p^2 + p + 6 = (p+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5, \text{ (là số nguyên tố)} \\ p = -\frac{2}{3}, \text{ (vô lý)}. \end{cases}$$

Kiểm tra lại với $p = 5$ thì $p^2 + p + 6 = 36 = 6^2$ là một số chính phương. ■

Bình luận. Đây là bài toán thuộc lĩnh vực số học và thường xuyên xuất hiện trong đề thi tuyển sinh vào khối lớp chuyên Toán của trường. Đi cùng với nó là giải các phương trình nghiệm nguyên, hay tìm số để thỏa mãn điều kiện nào đó. Tuy nhiên, mức độ những bài toán này không quá phức tạp.

Bài tập tương tự.

Bài 4

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A, B , ($R < R'$). Kẻ tiếp tuyến chung CD của (O) và (O') , (C, D là tiếp điểm của C thuộc (O) , D thuộc (O')). Qua B kẻ cát tuyến song song với CD cắt (O) tại E , cắt (O') tại F . Gọi G, H theo thứ tự là giao điểm của DA, CA với EF . Gọi I là giao điểm của EC với FD .

- Chứng minh $\triangle BCD = \triangle ICD$.
- Gọi K là giao điểm của AB và CD . Chứng minh K là trung điểm của CD .
- Chứng minh BI là trung trực của đoạn thẳng GH .

Phân tích. a) Với câu a), ta nhận thấy CD là cạnh chung của hai tam giác $\triangle BCD$ và $\triangle ICD$, ngoài ra không còn cặp cạnh nào bằng nhau nữa. Do vậy, ta nghĩ đến việc tìm các cặp góc tương ứng bằng nhau. Dựa vào giả thiết CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn và $CD \parallel EF$, việc tìm ra các cặp góc đó khá đơn giản.

- Với bài toán này, bạn nào nắm vững về phương tích thì việc tìm ra lời giải khá đơn giản! Thật vậy, xét phương tích của điểm K đối với đường tròn (O) và (O') ta có

$$\mathcal{P}_{K/(O)} = KC^2 = KA \cdot KB = KD^2 = \mathcal{P}_{K/(O')}.$$

Suy ra $KC = KD$ tức K là trung điểm của CD .

Từ ý tưởng đó, ta sẽ chứng minh ý này dựa vào các tỷ số đồng dạng.

- Để chứng minh BI là trung trực của GH ta cần chứng minh BI vuông góc với GH tại trung điểm B của GH . Nghĩa là cần chứng minh hai điều: Một là B là trung điểm của GH , hai là $BI \perp GH$. Ý nhất được gợi ý từ câu b). Ý thứ hai, ta sẽ chứng minh thông qua CD , bởi $CD \perp GH$.

Lời giải. 1. Chứng minh $\triangle BCD = \triangle ICD$.

Do $CD \parallel GH$ nên $\widehat{ICD} = \widehat{CEB}$ và $\widehat{IDC} = \widehat{DFB}$.

Ta lại có $\widehat{CEB} = \widehat{DCB}$, (cùng chắn $\widehat{BC}$) và $\widehat{DFB} = \widehat{CDB}$, (cùng chắn $\widehat{BD}$).

Từ đó suy ra $\widehat{ICD} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{IDC} = \widehat{CDB}$.

Do hai tam giác BCD và tam giác ICD có cạnh CD chung; $\widehat{ICD} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{IDC} = \widehat{CDB}$ nên $\triangle BCD = \triangle ICD$, (g-c-g).

2. Chứng minh K là trung điểm của CD .

Xét hai tam giác KCA và tam giác KBC có

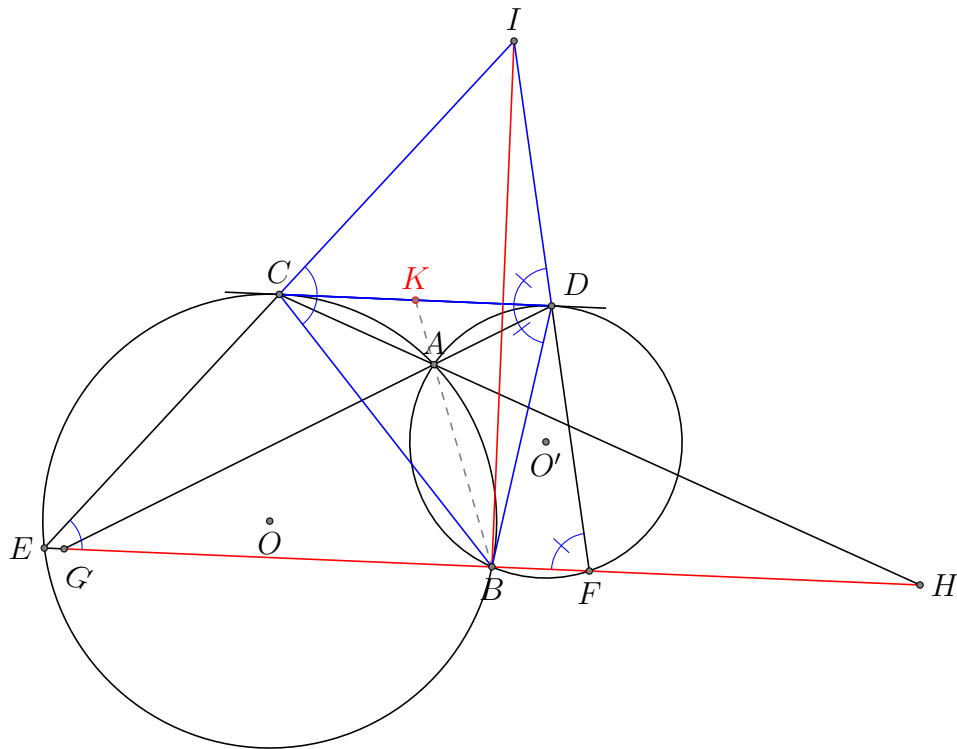
$$\begin{aligned} \widehat{CKA} &\text{ chung;} \\ \widehat{KCA} &= \widehat{KBC}, \text{ (cùng chắn } \widehat{AC}). \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle KCA \sim \triangle KBC$, (g-g).

$$\text{Suy ra } \frac{KC}{KB} = \frac{KA}{KC} \Rightarrow KC^2 = KA \cdot KB.$$

Tương tự ta cũng có $KD^2 = KA \cdot KB$. Do đó $KC = KD$.

Vậy K là trung điểm của CD .



3. Do $CD \perp GH$ nên ta có các đẳng thức sau

$$\frac{KC}{BH} = \frac{KA}{KB} = \frac{KD}{BG}.$$

Từ K là trung điểm của CD suy ra

$$B \text{ là trung điểm của } GH. \quad (1)$$

Mặt khác $CD = CB$ và $DI = DB$, (do $\triangle BCD = \triangle ICD$) nên CD là trung trực của BI , tức là $BI \perp CD$. Mà $CD \parallel GH$ nên

$$BI \perp GH. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BI là đường trung trực của GH .



Bình luận.

Bài tập tương tự.