

Ôn thi tốt nghiệp THPT đợt 2

Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các câu VD – VDE mã đề 102

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 1 NĂM 2021

Buổi thi môn Toán kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 1 năm 2021 diễn ra vào chiều ngày 7/8/2021. Bài thi môn Toán gồm 24 mã đề, được lấy từ 4 mã đề gốc là: Mã đề 101, 102, 103, 104. Nội dung đề thi nằm trong chương trình THPT, chủ yếu chương trình lớp 12, trong đó 38 câu đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu được ra trong các mã đề nhằm kiểm tra kiến thức cơ bản của lớp 11, lớp 12; trong các mã đề từ câu 39 đến câu 45 kiểm tra kiến thức học sinh ở mức độ vận dụng, từ câu 46 đến câu 50 ở mức độ vận dụng cao đã thể hiện rõ tính phân hoá bằng cách sử dụng tổng hợp các kiến thức trong chương trình THPT.

Kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021 sẽ diễn ra trong 2 ngày 6/7/8/2021, để tạo điều kiện cho quý thầy cô cùng các em có tài liệu ôn tập trong thời gian gấp rút này Nhóm Giáo viên Toán Việt Nam xin gửi tới quý thầy cô và các em bài viết “Phân tích, định hướng tìm lời giải, xây dựng các bài tương tự các câu VD – VDE đề thi tốt nghiệp THPT đợt 1 Năm 2021”

Hวัง vọng bài viết sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm môn Toán.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Câu 39. Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60° ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng :

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$.

B. $4\sqrt{13}\pi a^2$.

C. $8\sqrt{13}\pi a^2$.

D. $4\sqrt{7}\pi a^2$.

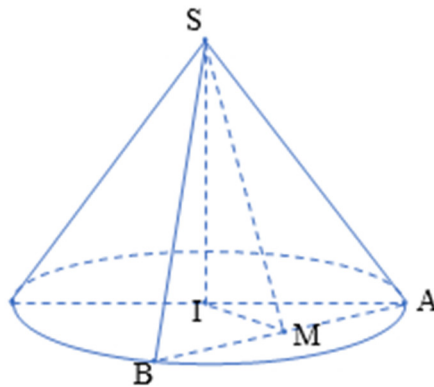
FB: Trương Quốc Toàn – Tạ Minh Đức

Phân tích định hướng tìm Lời giải:

- Đây là bài toán tính diện tích xung quanh của hình nón;
- Để tính diện tích xung quanh của hình nón ta áp dụng công thức $S_{xq} = \pi rl$;
- Trong bài toán này đường sinh $l = 4a$, nên chúng ta chỉ cần xác định bán kính đáy r của hình nón (N) thông qua giả thiết bài toán;

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm của đường tròn đáy của hình nón.

Ta có thiết diện qua đỉnh là tam giác SBA .

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ta chứng minh được $AB \perp (SIM)$, suy ra góc giữa mặt phẳng đi qua đỉnh và mặt phẳng chứa đáy của hình nón là $\widehat{SMI} = 60^\circ$.

Do tam giác SAB đều cạnh $4a$, suy ra $SM = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SIM vuông tại I ta có $SI = 3a$; $IM = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle IMA$ vuông tại M ta có $IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{3a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi a\sqrt{7} \cdot 4a = 4\sqrt{7}\pi a^2$.

Bình luận:

- Đây là bài toán tính diện tích xung quanh của hình nón, để làm được bài này yêu cầu các em học sinh phải nhớ công thức tính diện tích xung quanh của hình nón; cách xác định thiết diện của mặt phẳng với hình nón và xác định được góc giữa hai mặt phẳng. Tuy dạng toán này không mới, nhưng để giải quyết được bài toán này thì các em học sinh phải có học lực khá trở lên.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay đổi giả thiết cho chiều cao và diện tích thiết diện. Yêu cầu tính thể tích của khối nón

Hướng phát triển 2: Thay giả thiết góc bằng bán kính đáy của hình nón. Tính khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng

Hướng phát triển 3: Giữ nguyên giả thiết, mặt cắt chia khối nón thành hai phần tính thể tích một phần của khối nón

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Hướng phát triển 4: Thay đổi giả thiết cho bán kính đáy hình nón; mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc. Tính diện tích thiết diện.

Hướng phát triển 5: Thay đổi giả thiết bài toán cho bán kính, chiều cao của hình nón. Mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón cắt mặt phẳng chứa đáy là tam giác cân có cạnh đáy cho trước. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng.

Hướng phát triển 6: Xây dựng các bài toán tương tự trên hình trụ

Các ví dụ minh họa

Câu 1. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$.

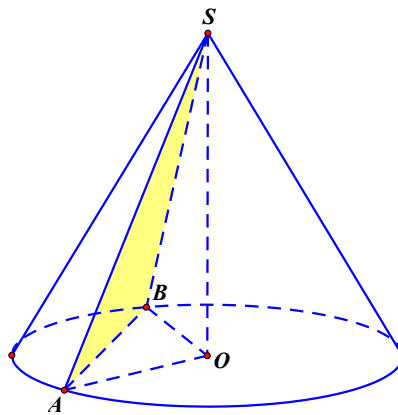
B. 32π .

C. $32\sqrt{5}\pi$.

D. 96π .

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } S_{SAB} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = 36 \Rightarrow SA^2 = 36.$$

$$R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{36 - 20} = 4$$

$$\text{Thể tích của khối nón là } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{32\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 2. Cho hình nón có đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O sao cho $SO = 6\sqrt{5}$, một mặt phẳng (α) cắt mặt nón theo hai đường sinh SA, SB . Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{5}$ và diện tích tam giác SAB bằng 360. Thể tích khối nón bằng

A. $1325\pi\sqrt{5}$.

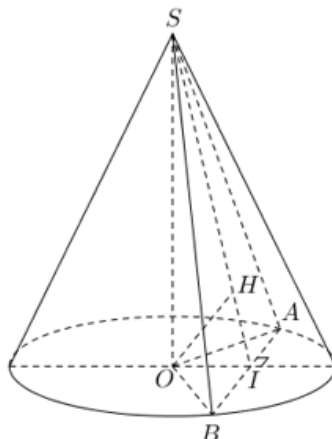
B. $265\pi\sqrt{5}$.

C. $1325\sqrt{5}$.

D. $265\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

$$\text{Kẻ } OI \perp AB, OH \perp SI \Rightarrow OH = d(O, (\alpha)) = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{(2\sqrt{5})^2} - \frac{1}{(6\sqrt{5})^2} = \frac{2}{45} \Rightarrow OI = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = SI \cdot IA \Rightarrow IA = \frac{S_{SAB}}{SI} = \frac{360}{\left(\frac{9\sqrt{10}}{2}\right)} = 8\sqrt{10}$$

$$r = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 + (8\sqrt{10})^2} = \frac{5\sqrt{106}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{106}}{2}\right)^2 \cdot 6\sqrt{5} = 1325\pi\sqrt{5}$$

Câu 3. Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn $(O; 3)$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA = AB = 5$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{33}}{5}$.

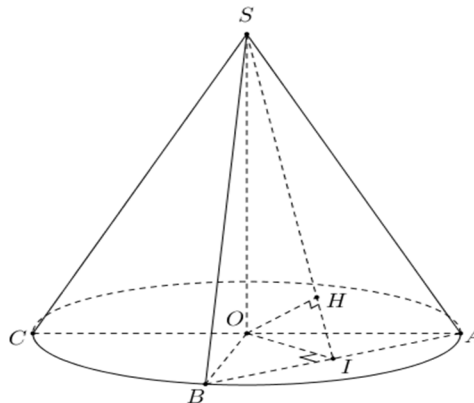
B. $\frac{4\sqrt{33}}{15}$.

C. $\frac{\sqrt{33}}{15}$.

D. $\frac{2\sqrt{33}}{15}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi I là trung điểm AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SAB) \perp (SOI).$$

Trong (SOI) , kẻ $OH \perp SI$, $H \in SI$ thì $OH \perp (SAB)$.

$$\Rightarrow d(O; (SAB)) = OH.$$

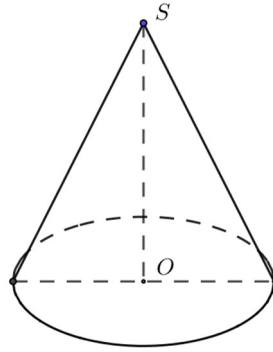
$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$\text{Ta có: } OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Tam giác vuông } SOI \text{ có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{16} + \frac{4}{11} \Rightarrow OH = \frac{4\sqrt{33}}{15}.$$

Vậy $d(O; (SAB)) = OH = \frac{4\sqrt{33}}{15}$.

Câu 4. Một khối nón có bán kính đáy bằng $2a$, đường sinh bằng $a\sqrt{7}$ (tham khảo hình dưới đây).



Một mặt phẳng qua đỉnh và tạo với đáy của hình nón một góc 60° chia khối nón thành hai phần, gọi V là thể tích phần nhỏ hơn. Giá trị của V bằng

A. $\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} - 1\right)a^3$.

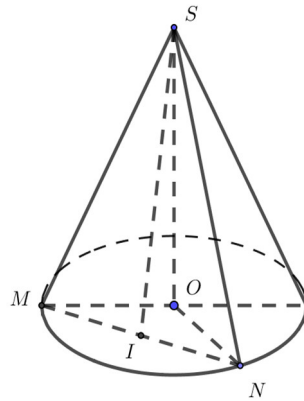
B. $\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{3} - 1\right)a^3$.

C. $\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{3} - 3\right)a^3$.

D. $\left(-\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} + 3\right)a^3$.

Lời giải

Chọn A.



Giả sử mặt phẳng qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60° cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SMN như hình vẽ.

Gọi I là trung điểm của MN . Khi đó $OI \perp MN, SI \perp MN$ từ giả thiết ta có góc $SIO = 60^\circ$.

Xét tam giác SOM ta có $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{3}a$.

Xét tam giác SIO ta có $OI = \frac{SO}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} = a$, từ đó xét trong tam giác OIM ta được

$$\widehat{IOM} = 60^\circ, \text{ suy ra } \widehat{NOM} = 120^\circ, S_{OMN} = \frac{1}{2} \cdot OM^2 \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{3}a^2.$$

Gọi S_0 là diện tích hình viên phân tạo bởi dây MN và cung nhỏ MN . Ta có

$$S_0 = \frac{1}{3} \pi \cdot OM^2 - S_{OMN} = \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)a^2.$$

$$\text{Thể tích cần tính bằng } V = \frac{1}{3} SO \cdot S_0 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)a^2 = \left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} - 1\right)a^3.$$

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Câu 5. Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục của hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$, BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60° . Tính theo a diện tích S của tam giác IBC .

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

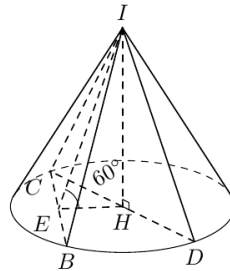
B. $S = \frac{a^2}{3}$.

C. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

D. $S = \frac{2a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác IDC vuông cân có $DC = a\sqrt{2} \Rightarrow IH = HC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $IC = a$.

Gọi E là trung điểm cạnh BC , góc giữa mặt phẳng (IBC) và (BCD) là $\widehat{IEH} = 60^\circ$.

Trong tam giác IHE có $IE = \frac{IH}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác IEC có $CE = \sqrt{IC^2 - IE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S = EI \cdot EC = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R = \sqrt{3}$, chiều cao $h = 2\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) qua đỉnh S cắt đáy của hình nón theo dây cung có độ dài $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (α) và mặt phẳng chứa đáy của hình nón.

A. 30°

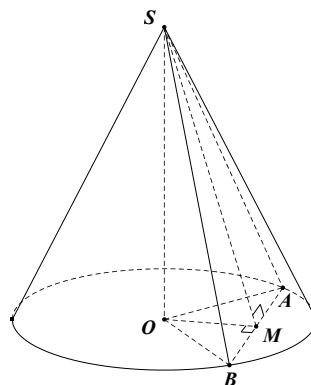
B. 45°

C. 60°

D. 75°

Lời giải

Chọn C



Gọi A, B là hai giao điểm của (α) với đường tròn đáy, ta có $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Gọi M là trung điểm AB , ta có $OM \perp AB, SM \perp AB \Rightarrow$ góc tạo bởi (α) và mặt đáy

là $\widehat{SMO}$, $OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ$.

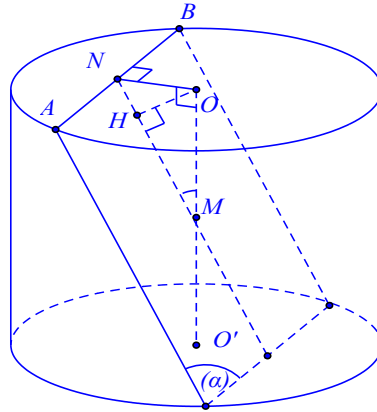
NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Câu 7. Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và tâm O' , bán kính đáy $r = a\sqrt{3}$, chiều cao hình trụ $h = a$. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 60° và (α) cắt đường tròn đáy tâm O theo dây cung AB . Độ dài đoạn AB là:

- A. $2a$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D. $3a$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OO' và AB . Ta có $AB \perp ON, AB \perp OO' \Rightarrow AB \perp (OMN)$. Gọi H là hình chiếu của O trên MN thì $OH \perp (\alpha)$

Ta có $(OO'; (ABM)) = (\widehat{OO'; MH}) = (\widehat{OO'; MN}) = \widehat{OMN} = 60^\circ$.

Tam giác OMN vuông tại O có $ON = OM \cdot \tan \widehat{OMN} \Leftrightarrow ON = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

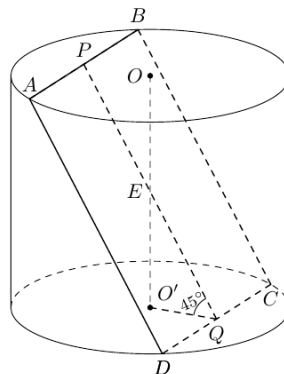
$$AB = 2NB = 2\sqrt{OB^2 - ON^2} = 2\sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{4}} = 3a.$$

Câu 8. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $ABCD$ tạo với mặt phẳng chứa đáy hình trụ một góc 45° . Tính diện tích xung quanh hình trụ?

- A. $S_{xq} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{5}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4}$. **D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi P, Q, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, OO' . Góc giữa $(ABCD)$ và mặt đáy là

$\widehat{O'QE} = 45^\circ$. Ta có $EQ = \frac{a}{2}$, do đó $O'Q = EO' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra $h = OO' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $r = O'C = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Câu 9. Cho khối trụ có thiết diện qua trục OO' là một hình vuông cạnh bằng 2. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của OO' và tạo với mặt phẳng chứa đáy của khối trụ một góc bằng 30° . Diện tích của thiết diện do (P) cắt khối trụ gần số nào sau đây nhất?

A. 3,6.

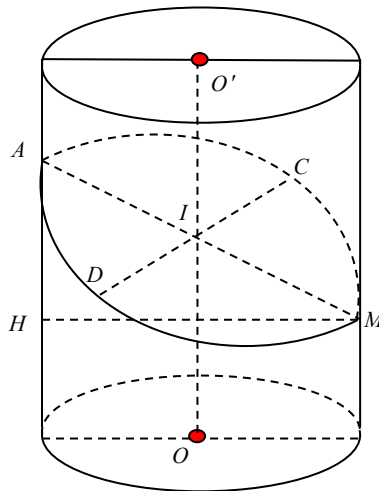
B. 3,8.

C. 3,5.

D. 3,7.

Lời giải

Chọn A



Do thiết diện qua trục OO' là một hình vuông cạnh bằng 2 nên chiều cao của hình trụ là $h = 2$ và bán kính đáy là $R = 1$.

Giả sử giao tuyến của mặt phẳng (P) và đáy chứa tâm O là đường thẳng d . Gọi E là hình chiếu của O trên d . Khi đó góc giữa (P) và mặt phẳng chứa đáy là góc $\widehat{OEI} = 30^\circ$.

Trong tam giác vuông IOE có $\tan \widehat{OEI} = \frac{OI}{OE} \Rightarrow OE = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} > 1$. Do đó điểm E

nằm ngoài đường tròn đáy nên thiết diện là Elip.

Trong tam giác vuông AHM có $\cos \widehat{AMH} = \frac{HM}{AM} \Rightarrow AM = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Hay $2a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Mà $CD = 2b = 2 \Rightarrow b = 1$.

Thiết diện là hình elip nên diện tích bằng $\pi ab = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3,62$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27.

B. 29.

C. 12.

D. 33.

Phân tích định hướng tìm lời giải

Dạng toán: Cho hàm số F là nguyên hàm của f với f là hàm cho bởi nhiều biểu thức. Bài toán yêu cầu tính giá trị của biểu thức F tại một số điểm. Dạng toán này ta có 2 cách làm chính sau

* **Cách 1:** Tìm hàm số F (là tìm các hằng số $C_1, C_2, \dots$) dựa vào các giả thuyết đã cho (như liên tục, có đạo hàm, $F(x_0), \dots$). Tùy theo yêu cầu bài toán mà sử dụng hàm số F đã tìm được một cách phù hợp. Cụ thể hơn ta có:

Bước 1: $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Bước 2: Tìm các hằng số C_1, C_2 dựa vào $F(0) = 2$ và tính liên tục của hàm số.

Bước 3: Tính giá trị của biểu thức $F(-1) + 2F(2)$.

* **Cách 2:** Sử dụng công thức $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ phù hợp. Cụ thể ở bài trên ta làm như sau

Bước 1: $F(1) = \int_0^1 f(x) dx + F(0)$.

Bước 2: Đề ý $F(-1) + 2F(2) = [F(-1) - F(1)] + 2[F(2) - F(1)] + 3F(1)$, các biểu thức trong dấu ngoặc vuông có dạng $\int_a^b f(x) dx$

Fb-Nam Phương

Lời giải

* **Cách 1**

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số liên tục trên } \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Leftrightarrow 1+5+C_1 = 1+4+2 \Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}. \text{ Vậy } F(-1) + 2F(2) = -3 + 2.15 = 27.$$

* **Cách 2**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$F(0) - F(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (3x^2+4) dx = 5 \Rightarrow F(-1) = F(0) - 5 = -3.$$

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2+4) dx = 5 \Rightarrow F(1) = F(0) + 5 = 7.$$

$$F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (2x+5) dx = 8 \Rightarrow F(2) = F(1) + 8 = 15.$$

$$\text{Do đó } F(-1) + 2F(2) = -3 + 2.15 = 27.$$

Bình luận:

- Đây là dạng toán thuộc mức độ vận dụng, việc nhận ra hướng giải đòi hỏi học sinh phải nắm chắc các khái niệm và tính chất của nguyên hàm cũng như các phương pháp tìm nguyên hàm.

Hướng phát triển:

- Không cho điều kiện $F(a) = m$. Yêu cầu tính $F(b) - F(c)$.
- Thêm điều kiện như: có đạo hàm, liên tục, ...
- Thay đổi điều kiện của đề bài bằng cách cho $F(a) + F(b) = k$. Yêu cầu tính $F(n) + F(m)$.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Bài tập tương tự

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 9.

B. 15.

C. 11.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Mà ta có } F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2.$$

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Khi đó ta có: } F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(-1) + 2F(2) = 9.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 23.

B. 11.

C. 10.

D. 21.

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 2) dx = 3 \Rightarrow F(1) = 5.$$

$$F(-1) + 2F(2) = \int_1^{-1} f(x) dx + 2 \int_1^2 f(x) dx + 3f(1) = -6 + 12 + 15 = 21.$$

Câu 3: Biết rằng $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x^3-18 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Giá trị của biểu thức $F(-1) - F(3)$ bằng

A. 7.

B. 18.

C. 8.

D. 32.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } F(-1) - F(3) = \int_2^{-1} f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 18.$$

Câu 4: Biết rằng $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} & \text{khi } x \geq 0 \\ (2x+1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ và

$$F(4) + F(-1) = 8. \text{ Giá trị của biểu thức } P = F(-2) + 2F(12) \text{ bằng}$$

A. 20.

B. 27.

C. $\frac{281}{16}$.

D. $\frac{121}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 8 - 2F(0) = F(4) - F(0) + F(-1) - F(0) = \int_0^4 f(x) dx + \int_0^{-1} f(x) dx = 2 \Rightarrow F(0) = 3.$$

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

$$P = F(-2) + 2F(12) = \int_0^{-2} f(x)dx + 2\int_0^{12} f(x)dx + 3F(0) = 27.$$

Câu 5: Biết rằng $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ (2x+1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ và

$$F(3) + F(-1) = \frac{19}{3}. \text{ Giá trị của biểu thức } P = F(-2) + F(8) \text{ bằng}$$

A. 20.

B. 27.

C. 58.

D. 29.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \begin{cases} F_1(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C_1, & x \geq 0 \\ F_2(x) = \frac{(2x+1)^4}{8} + C_2, & x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do } F(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \Leftrightarrow C_1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{8} + C_2 \Leftrightarrow C_1 - C_2 = -\frac{13}{24}.$$

$$\text{Và } F(3) + F(-1) = 8 \Leftrightarrow \frac{16}{3} + C_1 + \frac{1}{8} + C_2 = \frac{19}{3} \Leftrightarrow C_1 + C_2 = \frac{7}{8}. \text{ Suy ra } C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = \frac{17}{24}.$$

$$\text{Tính } F(8) + F(-2) = 18 + \frac{1}{6} + \frac{81}{8} + \frac{17}{24} = 29.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2+b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ với a, b là các tham số thực. Biết rằng $f(x)$ liên tục và có

đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{19}{3}$.

C. $\frac{26}{3}$.

D. $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên sẽ liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+b) = f(1) \Leftrightarrow a+1 = 1+b \Leftrightarrow a = b.$$

Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên có đạo hàm tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (a) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) \Leftrightarrow a = 2. \text{ Suy ra } a = b = 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } I = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x^2+2)dx + \int_1^2 (2x+1)dx = \frac{26}{3}.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax-b-1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tích phân

$$I = \int_{-3}^{-1} f(x)dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{82}{3}$.

B. $-\frac{22}{3}$.

C. -14.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

$\Rightarrow f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

$$f(x) \text{ liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = f(0) \Leftrightarrow -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

+) $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(ax^2 - 2x + 1) - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[ax - (-2) - 1] - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a.$$

$$f(x) \text{ có đạo hàm tại } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow a = -2.$$

$$\text{Do đó, } f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-3}^{-1} f(x) dx = \int_{-3}^{-1} (-2x + 1) dx = 10.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \geq 1 \\ 5 - x, & x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

$$\text{Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \sin x dx + \int_1^2 F(x) dx$$

A. $\frac{142}{12}$.

B. $\frac{112}{13}$

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{13}{12}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 3x + C_1, & x \geq 1 \\ 5x - \frac{x^2}{2} + C_2, & x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } F(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Vì } f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ nên } F(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1)$$

$$\Leftrightarrow 5 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{3} + 3 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{13}{6}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{13}{6}, & x \geq 1 \\ 5x - \frac{x^2}{2} + 1, & x < 1 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \sin x dx + \int_1^2 F(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) d(\cos x) + \int_1^2 F(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 F(x) dx \\ &= \int_0^1 (5 - x) dx + \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + 3x + \frac{13}{6} \right) dx = \frac{142}{12}. \end{aligned}$$

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x + 25) - 3] \leq 0$

A. 27.

B. Vô số.

C. 26.

D. 25.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán giải bất phương trình mũ, lôgarit dạng $f(x).g(x) \leq 0$.
- Để giải bất phương trình chúng ta cần đặt điều kiện sau đó tìm nghiệm của từng phương trình $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$. Tiếp theo lập bảng xét dấu $f(x).g(x)$ và tìm tập nghiệm từ đó kết luận số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình.

Fb-Lê Thanh Bình

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện xác định của bất phương trình là $x > -25$.

Đặt $A(x) = (3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x+25) - 3], x > -25$.

$$3^{x^2} - 9^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

$$\log_3(x+25) - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25	0	2	$+\infty$		
$A(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$\text{Từ đó, } A(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -25 < x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-24; -23; \dots; 0; 2\} \text{ (do } x \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Bình luận:

- Đây là bài toán giải bất phương trình mũ và lôgarit trong đó việc tìm nghiệm của từng phương trình mũ và lôgarit khá đơn giản. Tuy nhiên qua thực tế thì học sinh thường mắc các sai sót sau:

❖ Quên không đặt hay để ý điều kiện của lôgarit. Từ đó dẫn đến tập nghiệm là $(-\infty; 0] \cup \{2\}$ nên kết luận là vô số.

❖ Thiếu nghiệm $x = 2$ nên kết luận là có 25 số nguyên x .

Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ vận dụng.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay đổi hàm số, hoặc có thể cho thêm 1 hàm số nữa dạng $f(x).g(x).h(x) \leq 0$.

Hướng phát triển 2: Thay đổi thành dạng $f(x).g(x) \geq 0$, $f(x).g(x) > 0$ hay $f(x).g(x) < 0$

...

Bài tập tương tự

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x} - 9)\left(3^x - \frac{1}{27}\right)\sqrt{3^{x+1} - 1} \leq 0$ chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $3^{x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$.

+ Ta có $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình.

+ Với $x > -1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x} - 9)\left(3^x - \frac{1}{27}\right) \leq 0$.

Đặt $t = 3^x > 0$, ta có $(t^2 - 9)\left(t - \frac{1}{27}\right) \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+3)\left(t - \frac{1}{27}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ \frac{1}{27} \leq t \leq 3 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện $t = 3^x > 0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27} \leq t \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{27} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

Kết hợp điều kiện $x > -1$ ta được $-1 < x \leq 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x \cdot x^2 + 54x + 5 \cdot 3^x > 9x^2 + 6x \cdot 3^x + 45$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

B. $(-\infty; 1) \cup (2; 5)$

C. $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$

D. $(1; 2) \cup (5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $3^x \cdot x^2 + 54x + 5 \cdot 3^x > 9x^2 + 6x \cdot 3^x + 45$ tương đương với:

$$(3^x \cdot x^2 - 9x^2) + (-6x \cdot 3^x + 54x) + (5 \cdot 3^x - 45) > 0 \Leftrightarrow x^2(3^x - 9) - 6x(3^x - 9) + 5(3^x - 9) > 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 9)(x^2 - 6x + 5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 9 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1; 2) \cup (5; +\infty)$.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x+32) - 5] < 0$?

A. 31.

B. Vô số.

C. 32.

D. 33.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = (3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x+32) - 5]$, với $x > -32$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} - 9^x = 0 \\ \log_2(x+32) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 3^{2x} \\ x+32 = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-32	0	2	$+\infty$
$f(x)$			-	0	+

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là $S = (-32; 0) \cup (0; 2)$

Mặt khác $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-31; -30; -27; \dots; -2; -1; 1\}$.

Vậy có 32 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{\log_5 x - 1} \cdot (2^x - 1024) < 0$?

A. 6.

B. Vô số.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\log_5 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{\log_5 x - 1} \cdot (2^x - 1024)$, với $x \geq 5$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_5 x - 1} = 0 \\ 2^x - 1024 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 10 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	5	10	$+\infty$	
$f(x)$		0	-	0	+

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là $S = (5; 10)$

Mặt khác $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 4 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên x thuộc khoảng $(-2020; 2021)$ thỏa mãn $2^{x^2-7x+6} \cdot \log_7 x \geq \log_7 x$?

A. 2017.

B. Vô số.

C. 2016.

D. 2015.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$.

Với $x > 0$ bất phương trình đã cho tương đương với $2^{x^2-7x+6} \cdot \log_7 x - \log_7 x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2^{x^2-7x+6} - 1) \cdot \log_7 x \geq 0$$

Xét hàm số $f(x) = (2^{x^2-7x+6} - 1) \cdot \log_7 x$, với $x > 0$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2-7x+6} - 1 = 0 \\ \log_7 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện}$$

$x > 0$)

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	0	1	6	$+\infty$	
$f(x)$		-	0	-	0	+

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $S = [6; +\infty) \cup \{1\}$.

Mặt khác x là số nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2021)$ nên $x \in \{1; 6; 7; 8; 9; \dots; 2020\}$.

Vậy có 2016 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y + z - 4 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$.

B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

D. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

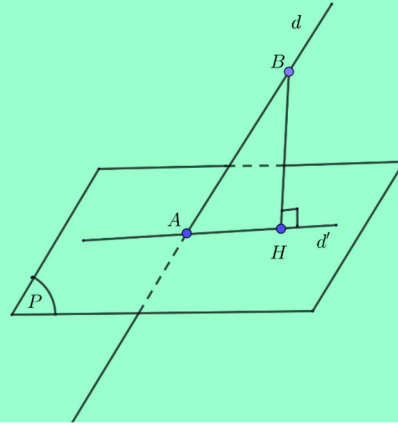
- Đây là bài toán lập phương trình đường thẳng là hình chiếu vuông góc của một đường thẳng lên một mặt phẳng.

- Để lập phương trình đường thẳng ta cần biết hai điểm hoặc biết một điểm và một véc tơ chỉ phương của nó

- Trong lời giải sau đây ta sẽ đi theo hướng lập phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d trên (P) khi biết hai điểm bằng cách.

+ Tìm $A = d \cap (P)$

+ Tìm hình chiếu của H của $B \in d, B \neq A$ lên (P) . Khi đó d' là đường thẳng AH



Fb-Lê Tài Thắng

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm A của d và (P) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(0;1;2).$$

Lấy điểm $B(1;2;1) \in d$. Gọi H là hình chiếu của B trên (P) .

$$\Rightarrow \text{Phương trình } BH: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \end{cases}$$

Do $H = BH \cap (P)$ nên tọa độ điểm H thỏa mãn hệ phương trình: $A(0;1;2)$

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(P) \Rightarrow d'$ đi qua A và H

$\Rightarrow d'$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-4)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

Nhận xét: Đây là cách làm theo chuẩn tự luận dựa trên tư duy hình học đơn giản.

Cách này hơi dài nhưng học sinh trung bình thì dễ làm.

Bình luận:

- Đây là bài toán lập phương trình đường thẳng, để xác định các yếu tố lập được phương trình của đường thẳng nói trên học sinh phải có kiến thức tổng hợp liên quan đến tìm tọa độ giao điểm, tìm hình chiếu của điểm lên mặt. Đặc biệt, học sinh phải nhận ra mấu chốt của bài toán là khi tìm hình chiếu của đường thẳng ta cần tìm hình chiếu của hai điểm phân biệt của đường thẳng đó lên mặt phẳng. Trong trường hợp đường và mặt cắt nhau thì điểm cắt chính là một điểm trên đường thẳng là hình chiếu đó.

- Ở bài toán này ta có thể dễ thấy $d' = (P) \cap (ABH)$ với (ABH) là mặt phẳng chứa d và vuông góc (P) . Vì vậy ta có thêm các hướng giải như sau:

- + **Hướng 1:** Ta lập mặt phẳng (Q) chứa d vuông góc với (P) , khi đó ta tìm $d' = (P) \cap (Q)$.
- + **Hướng 2:** Tìm véc tơ chỉ phương của d' là $\vec{u} = \left[\left[\vec{n}_P, \vec{u}_d \right], \vec{n}_P \right]$ và lập phương trình d' có VTCP $\vec{u}$ đi qua A .

Trong các hướng thì ta chọn hướng 2 là nhanh nhất với bài toán trắc nghiệm.

Lời giải (theo hướng 2)

Chọn C

Tọa độ giao điểm A của d và (P) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(0;1;2).$$

Ta có $\vec{n}_P = (1, 2, 1)$; $\vec{u}_d = (1, 1, -1)$ nên $\vec{u} = \left[\left[\vec{n}_P, \vec{u}_d \right], \vec{n}_P \right] = (4, 2, -8)$ hay chọn $\vec{u} = (2, 1, -4)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

Cách này nhanh nhưng đòi hỏi sự tưởng tượng cao, tính toán nhanh, với học sinh khá trở lên sẽ thích cách này hơn. Nó rất phù hợp cho bài toán trắc nghiệm.

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3 = 0$. Đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4}$.

B. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{4}$.

C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-2}{5}$.

D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ giao điểm A của d và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;3).$$

Lấy $B(-1;2;2) \in d$, gọi H là hình chiếu của B xuống mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng $(BH): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{1}{5}; \frac{13}{5}; 2\right).$$

Hình chiếu Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A, H .

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Ta có $\overrightarrow{AH} \left(\frac{-4}{5}; \frac{8}{5}; -1 \right)$. Đường thẳng Δ đi qua A có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = -5\overrightarrow{AH} = (4; -8; 5)$.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-3}{5}$.

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{1}$

Lời giải

Chọn C

Gọi M là giao điểm của d với (P) .

$$\text{Tọa độ của } M \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(1; 1; 1)$$

Lấy điểm $N(0; -1; 2) \in d$.

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và nhận $\vec{n} = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Gọi N' là giao điểm của Δ với (P) .

$$\text{Tọa độ của } N' \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 1 \\ x - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$N' \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{MN'} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{3} \right) = -\frac{1}{3}\vec{u}(1; 4; -5)$$

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và nhận $\vec{u} = (1; 4; -5)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

Câu 3. Cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 2 = 0$. Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (P) là

A.
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-2+3t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1-2t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; -3; 2)$.

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; -1)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P) ;

Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) , $d' = (P) \cap (Q)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_p] = (5; 4; 1)$

Véc tơ chỉ phương của d' là $\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_p, \vec{n}_Q] = (3; -6; 9) = -3(-1; 2; -3)$

Ta thấy đường thẳng d' thuộc (P) nên điểm $M_0 \in d' \Rightarrow M_0 \in (P)$. Thay tọa độ điểm $M_0(1; 1; -2)$ ở đáp án A thấy thỏa mãn phương trình (P) .

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d' . Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d' ?

A. $M(2; 5; -4)$.

B. $P(1; 3; -1)$.

C. $N(1; -1; 3)$.

D. $Q(2; 7; -6)$.

Lời giải

Gọi $A = d \cap (P)$. Vì $A \in d: \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \end{cases} \Rightarrow A(t; -1+2t; 2-t)$.

Mặt khác $A \in (P) \Rightarrow t - 1 + 2t + 2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $A(1; 1; 1)$.

Lấy $B(0; -1; 2) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc (P) .

Thì $\Delta: \begin{cases} x=t' \\ y=-1+t' \\ z=2+t' \end{cases}$. Gọi C là hình chiếu của B lên (P) .

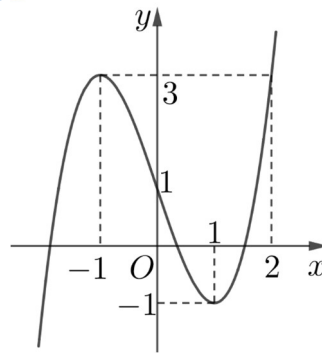
Suy ra $C \in \Delta \Rightarrow C(t'; -1+t'; 2+t')$.

Mặt khác $C \in (P) \Rightarrow t' - 1 + t' + 2 + t' - 3 = 0 \Leftrightarrow t' = \frac{2}{3}$. Vậy $C(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{8}{3})$.

Lúc này d' qua $A(1; 1; 1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{AC} = (\frac{-1}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{5}{3})$. Hay d' nhận $\vec{u} = (1; 4; -5)$ làm một vectơ chỉ phương.

Suy ra $d': \begin{cases} x=1+s \\ y=1+4s \\ z=1-5s \end{cases}$. Vậy điểm thuộc đường thẳng d' là $M(2; 5; -4)$.

Câu 43: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2020-2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



A. 9.

B. 3.

C. 6.

D. 7.

Phân tích định hướng

o – Bài toán có mức độ VD thuộc dạng “Tương giao đồ thị”, đã xuất hiện nhiều trong đề thi các năm trước.

O– Ý tưởng: Cho đồ thị, bảng biến thiên,... của hàm số $y = f(x)$. Hỏi số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = \alpha$ với α là hằng số.

B1: Vẽ đường thẳng $y = \alpha$, dựa vào đồ thị, bảng biến thiên đã cho đưa phương trình về dạng $g(x) = \alpha_i$.

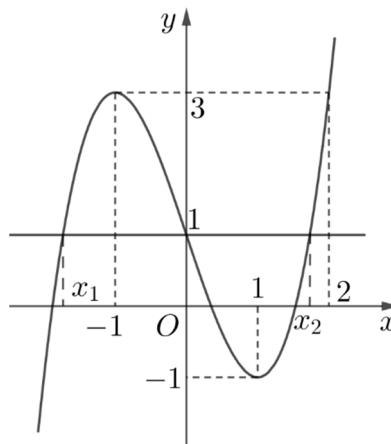
B2: Tìm nghiệm của phương trình $g(x) = \alpha_i$.

FB-[Ngonguyen Quocman](#)

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có



$$f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 & \text{và } x_1 < -1 & (1) \\ f(x) = 0 & & (2) \\ f(x) = x_2 & \text{và } 1 < x_2 < 2 & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, (1) có đúng 1 nghiệm, (2) và (3) mỗi phương trình có 3 nghiệm phân biệt và 7 nghiệm trên phân biệt nhau.

Bình luận:

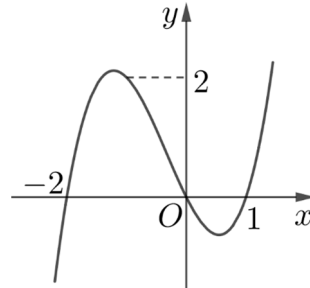
- Việc “hợp” các f vào nhau sẽ gây khó hiểu hoặc nhầm lẫn cho các học sinh chưa gặp dạng này hoặc học chưa kỹ. Chưa kể, đường thẳng $y = \alpha$ có thể cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ ban đầu tại những điểm “không đẹp” là cách làm bài toán “khó gần” thêm. Đôi khi, để học sinh có thể dễ tiếp cận hơn, quen thuộc hơn, ta có thể “án chừng” các con số x_1, x_2 như bài trên bởi các giá trị gần đúng, ví dụ như $x_1 \approx -1,7; x_2 \approx 1,7$.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

- Có rất nhiều hướng để có thể mở rộng bài toán, như thêm vào trị tuyệt đối, tham số, thay α bởi hàm số,... hoặc thay vì cho đồ thị, bảng biến thiên của $f(x)$ thì có thể cho đồ thị hoặc bảng biến thiên của $f'(x)$.

Các ví dụ tương tự:

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 0$ là



A. 3.

B. 9.

C. 4.

D. 7.

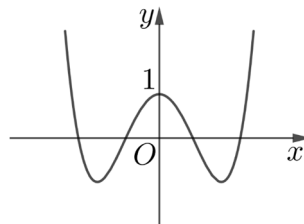
Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có: $f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -2 & (1) \\ f(x) = 0 & (2) \\ f(x) = 1 & (3) \end{cases}$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất, phương trình (2) và (3) mỗi phương trình có 3 nghiệm phân biệt. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nhau nên phương trình ban đầu có tổng cộng 7 nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $\frac{4-f(x)}{f(x)+3} = 1$ là



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

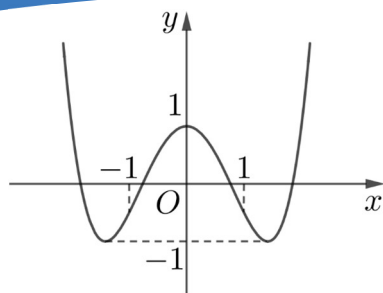
Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $f(x) \neq -3$

Khi đó ta có: $\frac{4-f(x)}{f(x)+3} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$. Dựa vào đồ thị, phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $\frac{5-f(f(x))}{f(f(x))+3} = 1$ là



A. 7.

B. 8.

C. 5.

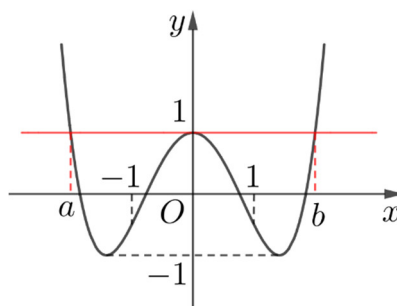
D. 6.

Lời giải

Chọn D

Để ý rằng $f(f(x)) + 3 \geq -1 + 3 = 2 > 0, \forall x$

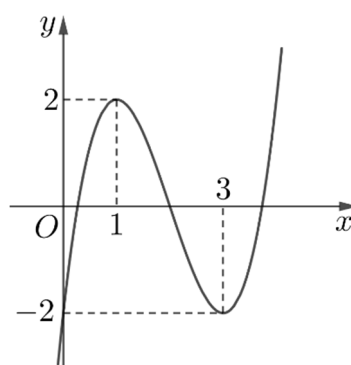
Ta có: $\frac{5 - f(f(x))}{f(f(x)) + 3} = 1 \Leftrightarrow f(f(x)) = 1 \quad (*)$.



Vẽ đường thẳng $y = 1$, ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = a < -1 & (2) \\ f(x) = b > 1 & (3) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm, phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt khác với 4 nghiệm trên. Vậy phương trình đã cho có tổng cộng 6 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(f(|x|)) = 0$ là

A. 10.

B. 12.

C. 14.

D. 8.

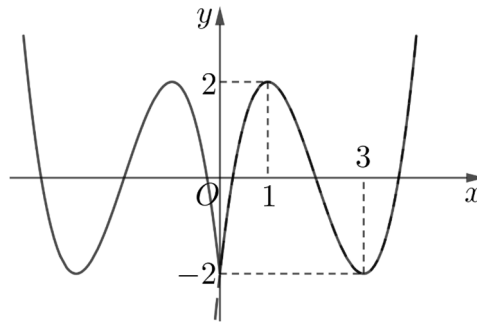
Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số ta có: $f(f(|x|)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = x_1 \in (0; 1) & (1) \\ f(|x|) = 2 & (2) \\ f(|x|) = x_2 \in (3; +\infty) & (3) \end{cases}$

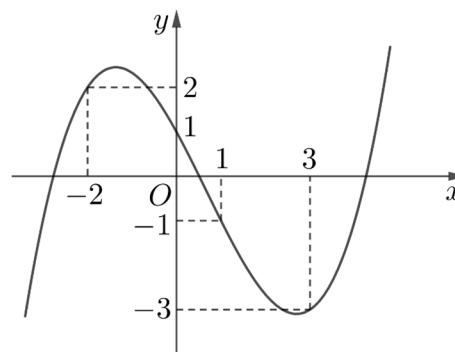
NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Từ đồ thị $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $y = f(|x|)$ như hình vẽ



Từ đó dễ thấy phương trình (1) có 6 nghiệm, phương trình (2) có 4 nghiệm và phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nhau nên phương trình ban đầu có tổng cộng 12 nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(f(x) + x) = 1$ là

A. 5.

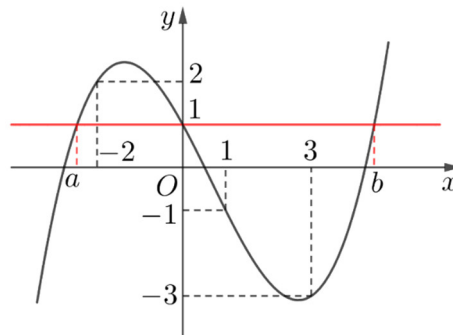
B. 7.

C. 9.

D. 3.

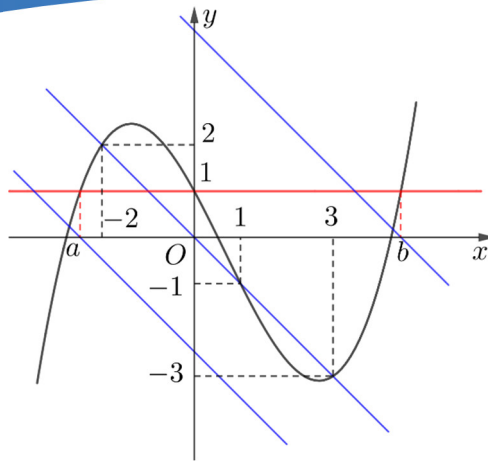
Lời giải

Chọn A



$$f(f(x) + x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + x = a \in (-3; -2) \\ f(x) + x = 0 \\ f(x) + x = b \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -x + a \\ f(x) = -x \\ f(x) = -x + b \end{cases}.$$

Ta có các đường thẳng $y = -x + a$; $y = x$; $y = -x + b$ như hình vẽ (2 đường không qua gốc tọa độ đều tạo với 2 trục các tam giác vuông cân).



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

- Câu 6.** (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa – Lần 3) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 4$. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $\sqrt{f(f(x)-2)} - 2 = 3 - f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $m = 7$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 9$.

Lời giải

Chọn C

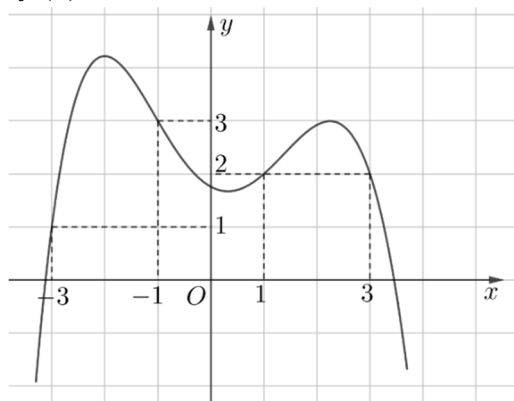
Đặt $t = f(x) - 2$. Khi đó phương trình thành $\sqrt{f(t) - 2} = 1 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ f(t) - 2 = (1 - t)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t^3 - 3t^2 - 4t + 2 = (1 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t^3 - 4t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 3x + 4 - 2 = 1 \\ x^3 - 3x^2 - 3x + 4 - 2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ Mỗi phương trình đều có 3 nghiệm phân biệt lẫn}$$

nhau nên phương trình ban đầu có tổng cộng 6 nghiệm.

- Câu 7.** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $\frac{2f(x) + 3}{f(f(x)) - 2} = -f(x)$ là

- A. 5. B. 6. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

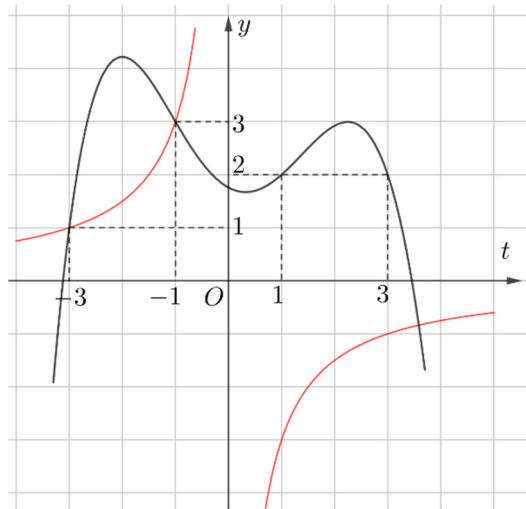
Điều kiện:

$$f(f(x)) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq a \in (-3; -1) \\ f(x) \neq b \in (-1; 0) \\ f(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 3 \end{cases}.$$

Đặt $t = f(x), t \notin \{a; 0; 1; 3\}$.

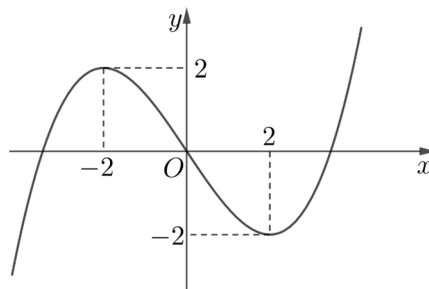
Khi đó ta có: $\frac{2t+3}{f(t)-2} = -t \Leftrightarrow \frac{2t+3}{-t} = f(t) - 2 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{t} \quad (*)$.

Vẽ đồ thị $y = -\frac{3}{t}$ ta được



Dựa vào đồ thị, $(*) \Leftrightarrow t \in \{-3; -1; c\}, c \in (3; 4)$. So điều kiện nhận $t = c \Rightarrow f(x) = c$, phương trình này có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(xf(x)) = 2$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

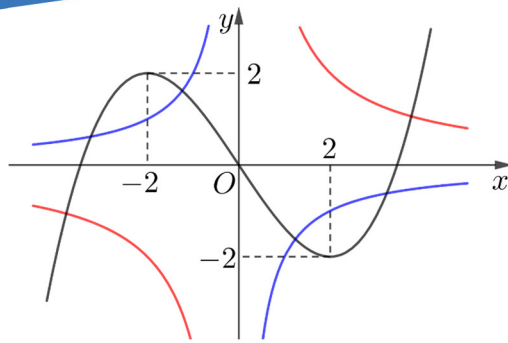
D. 6.

Lời giải

Chọn D

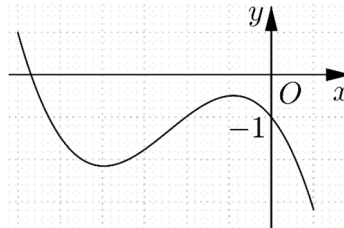
Ta có: $f(xf(x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} xf(x) = -2 \\ xf(x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -\frac{2}{x} \\ f(x) = \frac{4}{x} \end{cases} \text{ (do } x = 0 \text{ không là nghiệm)}$

Ta vẽ thêm các đồ thị $y = -\frac{2}{x}$ và $y = \frac{4}{x}$



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho tổng cộng có 6 nghiệm.

Câu 9. (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là

A. 6

B. 4

C. 5

D. 8

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x^3 f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 f(x) = a \in (-6; -5) & (1) \\ x^3 f(x) = b \in (-3; -2) & (2) \\ x^3 f(x) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$+ \text{ Phương trình (3) tương đương } \begin{cases} x = 0 \\ x = x_1, (-6 < x_1 < a < -5) \end{cases}$$

+ Các hàm số $g(x) = \frac{a}{x^3}$ và $h(x) = \frac{b}{x^3}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, và nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) và (2) nên ta có:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = h(x) \end{cases}$$

$$+ \text{ Trên khoảng } (-\infty; 0), \text{ ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty \end{cases} \text{ nên các phương trình}$$

$f(x) = g(x)$ và $f(x) = h(x)$ có nghiệm duy nhất.

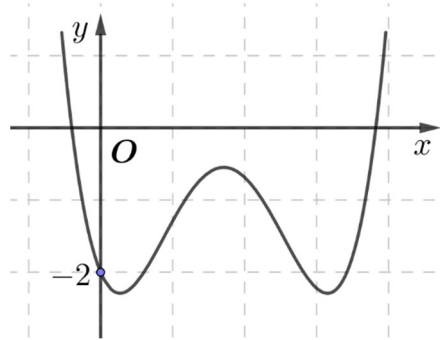
$$+ \text{ Trên khoảng } (0; +\infty), \text{ ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \end{cases} \text{ nên các phương trình}$$

$f(x) = g(x)$ và $f(x) = h(x)$ có nghiệm duy nhất.

Do đó, phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Câu 10. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^2 f(x)) + 2 = 0$ là

A. 8.

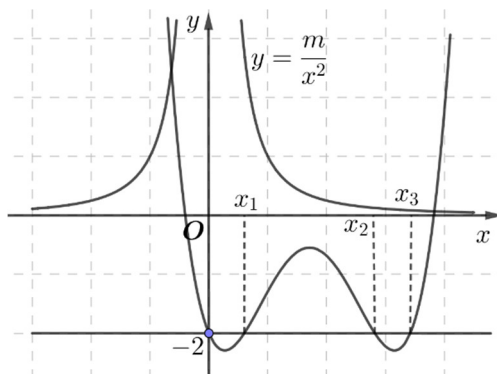
B. 12.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn D



$$f(x^2 f(x)) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = a(1) \\ x^2 f(x) = b(2) \\ x^2 f(x) = c(3) \end{cases} \text{ với } 0 < a < b < c.$$

Xét phương trình $f(x) = \frac{m}{x^2} (1) \quad (m > 0).$

Gọi α, β là hoành độ giao điểm của $(C): y = f(x)$ và Ox ; $\alpha < 0 < \beta$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x) - \frac{m}{x^2} = 0. \text{ Đặt } g(x) = f(x) - \frac{m}{x^2}$$

$$\text{Đạo hàm } g'(x) = f'(x) + \frac{2m}{x^3}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x < \alpha; f'(x) < 0; \frac{2m}{x^3} < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, g(\alpha) = -\frac{m}{\alpha^2} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty; \alpha)$.

Trường hợp 2: $\alpha < x < \beta$

$$f(x) < 0, \frac{m}{x^2} > 0 \text{ suy ra } g(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

$$\text{Trường hợp 3: } x > \beta; f'(x) > 0; \frac{2m}{x^3} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, g(\beta) = -\frac{m}{\beta^2} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm thuộc $(\beta; +\infty)$.

Vậy phương trình $f(x) = \frac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m > 0$.

Ta có: $x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee f(x) = 0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

A. $2 \ln 3$.

B. $\ln 3$.

C. $\ln 18$.

D. $2 \ln 2$.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số trong trường hợp một đồ thị hàm số là đồ thị của hàm ẩn với giả thiết về cực trị;
- Để giải bài toán đầu tiên cần xác định hai yếu tố: tính chất của hàm ẩn từ giả thiết và nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hai hàm số;
- Trong bài toán này, hai yếu tố trên chỉ xác định được vì hàm ẩn là hàm bậc ba có hai điểm cực trị với hai giá trị cực trị cho trước và nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm chính là hai điểm cực trị của hàm ẩn.
- Từ đó, áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng với lưu ý nếu hàm $f(x)$ không đổi dấu trên $(a; b)$ thì $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

FB-Phạm Tuấn

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; f''(x) = 6x + 2a; f'''(x) = 6;$$

$$\text{Khi đó } g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + 6.$$

Vì $g(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 mà $g(x)$ là hàm bậc ba có hệ số của x^3 dương nên $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x_1 < x_2$ và $g(x_1) = 6, g(x_2) = -3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là

$$\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x)}{g(x)+6} - 1 \right| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x) - g(x) - 6}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-f'(x) - f''(x) - 6}{g(x)+6} \right) dx \right|$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{g'(x)}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \ln |g(x)+6| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = |\ln 12 - \ln 3| = 2 \ln 2.$$

Bình luận:

- Đây là bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số trong trường hợp một đồ thị hàm số là đồ thị của hàm ẩn với giả thiết về cực trị, để xác định các yếu tố lập được công thức tính diện tích hình phẳng học sinh phải có kiến thức tổng hợp liên quan đến cực trị, giá trị cực trị của hàm số, tích phân hàm trị tuyệt đối và tích phân hàm ẩn. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ VDC.

- Đây là bài toán sử dụng tính chất điểm cực trị của hàm bậc 3 đã gặp trong đề minh họa. Có thể xây dựng các hướng phát triển đối với tính chất điểm cực trị của hàm số bậc 3.

- **Lưu ý:** Với hướng giải dựng hàm của bài toán sẽ gặp khó khăn khi xây dựng lại hàm

$$y = \frac{f(x)}{g(x)+6}.$$

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Giữ nguyên giả thiết và cho diện tích hình phẳng hỏi giá trị cực trị còn lại.

Hướng phát triển 2: Thay cho giá trị cực trị của hàm số $g(x)$ cho đồ thị của hàm số $g(x)$ không thay đổi kết luận.

Hướng phát triển 3: Hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có mối liên hệ bằng biến thiên giữ nguyên giả thiết về giá trị cực trị của một hàm số có mối liên hệ giữa hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ với cách dựng lại hàm số.

Hướng phát triển 4: Thay đổi giả thiết về giá trị cực trị của hàm $f(x)$ và cho hai hàm số có mối liên hệ giữa nghiệm và cực trị với các dựng lại hàm số.

Hướng phát triển 5: Sử dụng tính chất hai điểm cực trị và điểm uốn của hàm bậc 3 để xây dựng lại hàm số và trả lời yêu cầu bài toán về diện tích hình phẳng.

Hướng phát triển 6: Thay đổi giả thiết về cực trị của hàm số $f(x)$ và giữ nguyên hàm $g(x)$ cho thêm điều kiện giá trị tại điểm cực trị của hàm $f(x)$.

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai điểm cực trị với giá trị cực tiểu là -3 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng $2 \ln 2$. Giá trị cực đại của hàm $g(x)$

bằng

A. 6.

B. 3.

C. 18.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b;$$

$$f''(x) = 6x + 2a;$$

$$f'''(x) = 6;$$

$$\text{Khi đó } g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + 6.$$

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Vì $g(x)$ có hai điểm cực trị với giá trị cực tiểu là -3 mà $g(x)$ là hàm bậc ba có hệ số của x^3 dương nên $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x_1 < x_2$ và $g(x_2) = -3$ nên $g(x) + 6 > 0, \forall x \in [x_1; x_2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là

$$\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + 6$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0$$

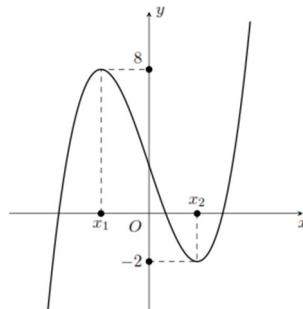
$$\Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x)}{g(x)+6} - 1 \right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x) - g(x) - 6}{g(x)+6} \right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{-f'(x) - f''(x) - 6}{g(x)+6} \right| dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{-g'(x)}{g(x)+6} \right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{g'(x)}{g(x)+6} \right| dx = \left| \ln |g(x)+6| \right|_{x_1}^{x_2} = |\ln(g(x_1)+6) - \ln 3| = 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Do $g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow \ln(g(x_1)+6) = \ln 3 + 2 \ln 2 = \ln 12 \Rightarrow g(x_1) = 6$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+4}$ và $y = 1$ bằng

A. $2 \ln 3 - \ln 2$.

B. $\ln 3$.

C. $\ln 12$.

D. $2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x) = 2x^2 + 2ax + b;$$

$$f''(x) = 4x + 2a;$$

$$f'''(x) = 4;$$

Khi đó $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) + f''(x) + 4$.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Từ đồ thị của hàm số $g(x)$ thì $g(x)$ có hai điểm cực trị $x_1 < x_2$ và $g(x_1) = 8; g(x_2) = -2; g(x) + 4 > 0, \forall x \in [x_1; x_2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+4}$ và $y = 1$ là

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)+4} &= 1 \\ \Leftrightarrow f(x) &= g(x) + 4 \\ \Leftrightarrow f(x) &= f(x) + f'(x) + f''(x) + 4 \\ \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow g'(x) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+4}$ và $y = 1$ là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x)}{g(x)+4} - 1 \right| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x)}{g(x)+4} - 1 \right) dx \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x) - g(x) - 4}{g(x)+4} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-f'(x) - f''(x) - 4}{g(x)+4} \right) dx \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-g'(x)}{g(x)+4} \right) dx \right| = \left| \ln |g(x)+4| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = |\ln 12 - \ln 2| = 2 \ln 3 - \ln 2. \end{aligned}$$

Câu 3. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1; g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	1	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$			$-\infty$

Biết rằng hàm số $y = f'(x) - g'(x)$ có giá trị cực trị là 2. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = 1; x = 2$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x) = cx^2 + 4x + d$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\frac{2}{c}$ và giá trị lớn nhất bằng

$$g\left(-\frac{2}{c}\right) = 1 \text{ nên } c\left(-\frac{2}{c}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{c}\right) + d = 1 \Leftrightarrow -\frac{4}{c} + d = 1, (1).$$

Hàm số $g(x)$ có hai nghiệm là α và β nên $g(x) = c(x - \alpha)(x - \beta)$.

Hơn nữa $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = \alpha$ và $x = \beta$ nên

$$f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\text{Do đó } f'(x) = \frac{3a}{c} g(x) = 3ax^2 + \frac{12a}{c}x + \frac{3ad}{c} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12a}{c} = 4 \Rightarrow c = 3a \\ \frac{3ad}{c} = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = g(x).$$

Khi đó $y = f'(x) - g'(x) = g(x) - g'(x) = cx^2 + (4-2c)x + d - 4$ đạt cực trị tại điểm

$$x = -\frac{4-2c}{2c} = 1 - \frac{2}{c} \text{ và giá trị cực trị } y\left(1 - \frac{2}{c}\right) = 2.$$

$$\text{Suy ra } y\left(1 - \frac{2}{c}\right) = c\left(1 - \frac{2}{c}\right)^2 + (4-2c)\left(1 - \frac{2}{c}\right) + d - 4 = -\frac{4}{c} - c + d = 2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $c = -1$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} d = -3 \\ a = -\frac{1}{3} \\ b = -3 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \int_1^2 \left| -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 4 \right| dx = \frac{3}{4}.$$

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$; $g(x) = cx^2 + 4x + d$ với a, b, c và d là các số thực thỏa mãn $ac \neq 0$. Biết phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt là hai điểm cực trị của hàm số $f(x)$ với hai giá trị cực trị là -1 và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)+g(x)}{f(x)}$; $y = 1$ bằng

A. $\ln 2$.

B. $2 \ln 2$.

C. $\ln 6$.

D. $2 \ln 3$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x)$ có hai nghiệm là α và β nên $g(x) = c(x-\alpha)(x-\beta)$.

Hơn nữa $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = \alpha$ và $x = \beta$ nên, $f'(\alpha) = -1$; $f'(\beta) = 3$

$$f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\text{Do đó } f'(x) = \frac{3a}{c} g(x) = 3ax^2 + \frac{12a}{c}x + \frac{3ad}{c} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12a}{c} = 4 \Rightarrow c = 3a \\ \frac{3ad}{c} = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) = g(x).$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là

$$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases}.$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{f(x)+g(x)}{f(x)} - 1 \right| dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(x)}{f(x)} dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(f(x))}{f(x)} \right|$$

$$= \left| \ln |f(x)| \right|_{\alpha}^{\beta} = |\ln 4 - \ln 2| = \ln 2.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ với a, b là các số thực khác 0. Biết hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = -2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)-1}{x}$; $y = 4$ bằng

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{21}{2}$.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ và $f''(x) = 6x + 2a$.

Do hàm số $f(x)$ có hai cực trị là x_1 và x_2 , nên x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của

$$\text{phương trình } 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2a}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Hơn nữa } f(x_1) + f(x_2) = -2 \Rightarrow f\left(-\frac{a}{3}\right) = -1.$$

Mà $x_2 - x_1 = 2$ suy ra $a = 6; b = 9$.

$$\text{Hàm số } f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1 \text{ nên } \frac{f(x) - 1}{x} = x^2 + 6x + 9.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường là

$$x^2 + 6x + 9 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-5}^{-1} \left| \frac{f(x) - 1}{x} \right| dx = \int_{-5}^{-1} |x^2 + 6x + 9| dx = \frac{32}{3}.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có $g(x_1) = -6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = g(x); x = x_1$ và $x = x_2$ bằng

A. 8.

B. 4.

C. 2.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $f(x)$ có hai cực trị là x_1 và x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$, nên

$$f'(x) = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - x_1)^2 - 3(x_2 - x_1)(x - x_1) = 3(x - x_1)^2 - 6(x - x_1).$$

$$\text{Khi đó } f(x) = (x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + C \text{ và } f''(x) = 6(x - x_1) - 6.$$

$$\text{Mà } g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) = (x - x_1)^3 + C - 6 \text{ suy ra } g(x_1) = C - 6 = -6 \Rightarrow C = 0.$$

Vậy

$$S = \int_{x_1}^{x_2} |g(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} |(x - x_1)^3 - 6| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} [(x - x_1)^3 - 6] dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}(x - x_1)^4 - 6x \right]_{x_1}^{x_2} \right| = 8.$$

Câu 45. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$.

C. $2\sqrt{3}a^3$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán tính thể tích của khối hộp chữ nhật;

- Để tính khối hộp chữ nhật ta áp dụng công thức $V = B.h$;

+ Trong bài toán này $B = S_{ABCD}$ dễ dàng tính thông qua giả thiết

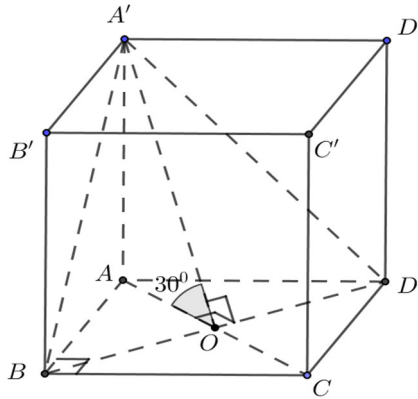
NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

+ Xác định đường cao $h = AA'$, việc tính AA' được quy về việc xác lập mối liên hệ giữa góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ với đường chéo của đáy.

Fb-Ngô Dung

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì $BD \perp OA$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (A'OA) \Rightarrow BD \perp OA'$

Lại có $(A'BD) \cap (ABCD) = BD$. Do đó $((A'BD), (ABCD)) = \widehat{A'OA} = 30^\circ$ (Hình vẽ trên).

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có $BD = 2a$ nên $OA = a$ và $AB = AD = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có $OA = a$ và $\widehat{A'OA} = 30^\circ$ nên

$$AA' = OA \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối hộp chữ nhật } V = AB \cdot AD \cdot AA' = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$$

Bình luận:

- Đây là bài toán tính thể tích của khối hộp chữ nhật, để giải quyết được bài toán này yêu cầu học sinh phải nắm vững công thức tính thể tích khối hộp; cách xác định góc giữa hai mặt phẳng; thiết lập mối liên hệ giữa đường cao với giả thiết đã cho của bài toán để tính chiều cao của khối hộp. Đây là câu hỏi kiểm tra kiến thức ở mức độ VD.

Hướng phát triển 1: Một bài toán tương tự, tuy nhiên ta thay đổi một chút về giả thiết đáy. (câu 1)

Hướng phát triển 2: Về cách xác định đường cao, từ đó xác định được góc. (câu 2,3)

Hướng phát triển 3: Thay đổi góc giữa mặt bên và mặt đáy thành góc giữa mặt bên và mặt bên (câu 4)

Hướng phát triển 4: Ta cho 2 giả thiết về góc, khi đó, giả thiết đường cao được ẩn trong giả thiết về góc, sử dụng mối quan hệ đó đi xác định đường cao. (câu 5)

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ có $AB = 2AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(B'AD)$ và $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}a^3$.

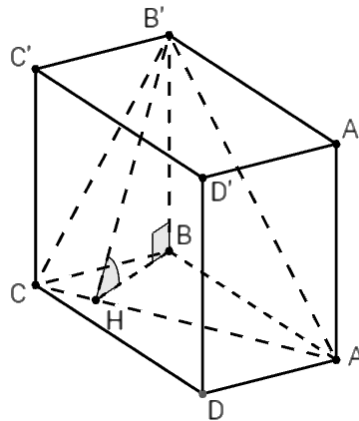
B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a^3$.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$.

D. $\frac{8\sqrt{5}}{15}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Bài toán hoàn toàn tương tự với đề bài gốc. Vậy nên ta sẽ giải rút gọn như sau:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên cạnh AC .

Khi đó ta sẽ có $((B'AC), (ABCD)) = \widehat{B'HB} = 45^\circ$

Dẫn đến $\triangle B'HB$ vuông cân tại $B \Rightarrow BB' = BH$.

Xét tam giác $\triangle BAC$ vuông tại B , $BA = 2a$, $BC = a$ khi đó đường cao

$$BH = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = BA \cdot BC \cdot BB' = \frac{4\sqrt{5}}{5} a^3.$$

Câu 2. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 3a$. Gọi M là trung điểm AA' . Góc giữa hai mặt phẳng (MBC) và $(A'B'C')$ bằng 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đã cho bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{8} a^3$.

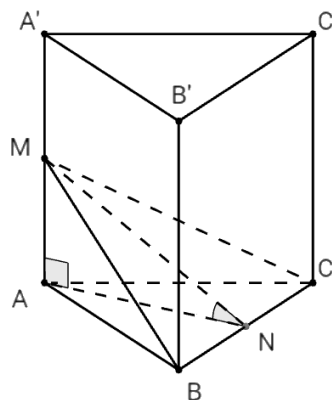
B. $\frac{9\sqrt{3}}{4} a^3$.

C. $\frac{27\sqrt{3}}{8} a^3$.

D. $\frac{27\sqrt{3}}{4} a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm BC . Khi đó $((MBC), (A'B'C')) = (MN; AN) = \widehat{MNA} = 30^\circ$

Xét $\triangle MAN$ có $AN = \frac{3\sqrt{3}}{2} a$, $\widehat{MNA} = 30^\circ \Rightarrow MA = \frac{3a}{2} \Rightarrow AA' = 3a$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{27\sqrt{3}}{4} a^3$$

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Câu 3. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC , chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng đáy chính là trung điểm H của đoạn AM . Biết góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (ABC)$ bằng 60° . Thể tích của hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$.

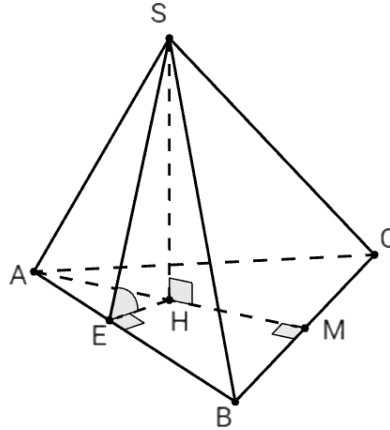
B. $\frac{3\sqrt{3}}{16}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{32}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Dựng $HE \perp AB$ tại E .

Khi đó $((SAB), (ABC)) = (SE, EH) = \widehat{SEH} = 60^\circ$.

Ta có $EH = \frac{1}{2}d(M, AB) = \frac{1}{4}d(C, AB) = \frac{a\sqrt{3}}{8}$, suy ra $SH = EH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{8}$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A cạnh $AB = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{24}$.

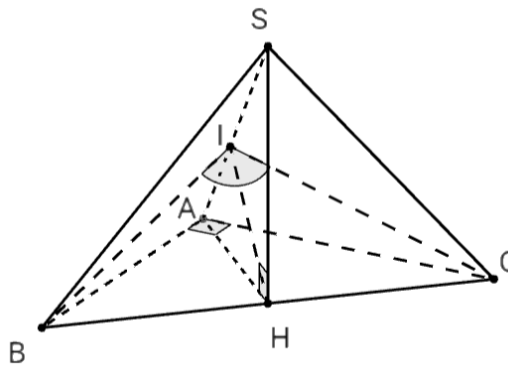
B. $\frac{a^3}{12}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại $A, AB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$ và $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta dựng $HI \perp SA$, khi đó ta có $SA \perp (IBC)$.

Mà $SA = (SAB) \cap (SAC) \Rightarrow$ góc $((SAB); (SAC)) = (IB; IC) = 60^\circ$

Khi đó có 2TH: $\widehat{BIC} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{BIC} = 120^\circ$.

TH: $\widehat{BIC} = 60^\circ$. Khi đó $BI = BC = a\sqrt{2} > a = BA \Rightarrow$ vô lý.

TH: $\widehat{BIC} = 120^\circ$. Khi đó $BI = CI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Ta xét $\triangle HSA$ vuông tại H , $HA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường cao $HI = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SH \cdot AB \cdot AC = \frac{a^3}{12}$

Câu 5. Cho chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Hai mặt bên (SAB) , (SAC) cùng tạo với đáy một góc bằng 60° . Biết hình chiếu vuông góc H của S xuống mặt đáy nằm trên cạnh BC . Thể tích của hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{12}a^3$.

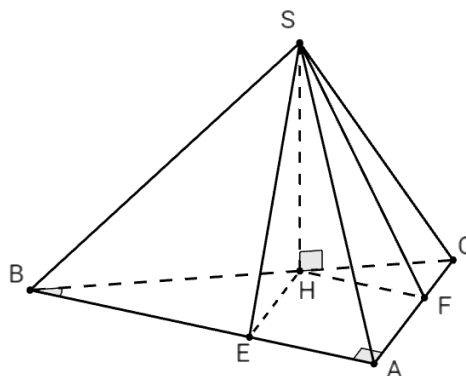
B. $\frac{\sqrt{3}+1}{6}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}a^3$.

D. $\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Từ H dựng $HE \perp AB$ tại E và $HF \perp AC$ tại F .

$$\Rightarrow \begin{cases} ((SAB), (ABC)) = \widehat{SEH} = 60^\circ \\ ((SAC), (ABC)) = \widehat{SFH} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{đặt } HE = HF = x$$

Ta có $\tan C = \tan 60^\circ = \frac{HF}{FC} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

Suy ra $SH = HF \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{\sqrt{3}+1}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SH \cdot AB \cdot AC = \frac{3+\sqrt{3}}{4}a^3$.

Câu 46: [TNTHPTQG -MĐ122-Năm 2021] Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 6$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

+ Khai thác $|z_0| = 6$. Nếu z_0 là số thực thì $|z_0| = 6 \Leftrightarrow z_0 = \pm 6$; Nếu

$z_0 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 0$) thì $|z_0| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

+ Trong từng trường hợp z_0 là nghiệm thực, z_0 là nghiệm phức không suy biến của phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ ta phải chú ý tới điều kiện tương ứng của m để kiểm tra kết quả.

Ý tưởng: Kiểm tra việc một số em học sinh quên không xét trường hợp z_0 là số thực.

Fb-Khải Nguyễn

Lời giải

Phương trình đã cho có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

• Nếu $\Delta' = 2m+1 \geq 0$ thì phương trình có nghiệm thực $\Rightarrow z_0 \in \mathbb{R}$ mà $|z_0| = 6$

$$\Leftrightarrow z_0 = \pm 6$$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} 6^2 - 2(m+1) \cdot 6 + m^2 = 0 \\ (-6)^2 - 2(m+1) \cdot (-6) + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 12m + 48 = 0 \\ m^2 - 12m + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6 \pm 2\sqrt{3}$$

(thỏa mãn điều kiện $\Delta' \geq 0$).

• Nếu $\Delta' = 2m+1 < 0$ thì phương trình có phức không thực $z = m+1 \pm i\sqrt{-2m-1}$

$$\text{Khi đó } |z_0| = 6 \Leftrightarrow |m+1 \pm i\sqrt{-2m-1}| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + (\sqrt{-2m-1})^2} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -6 \end{cases}$$

Thấy $m = -6$ thỏa mãn $\Delta' < 0$ và $m = 6$ không thỏa mãn $\Delta' < 0$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Bài tập tương tự

Câu 1: [Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Trên tập số phức cho phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+2$ và $2w-5+3i$ với w là một số phức. Giá trị của tổng $T = a+b$ bằng

- A. 81. B. 82. C. 100. D. 64.

Định hướng

+ Khai thác giả thiết thấy phương trình có hai nghiệm phức không thực. Đây là cơ sở để áp dụng tính chất về nghiệm phức không thực của phương trình bậc hai.

+ Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $az^2 + bz + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.

Khi đó nếu z_1, z_2 là các nghiệm phức không thực của phương trình thì:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \text{ và } z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}. \text{ Nhận thấy } z_1 = \overline{z_2}; z_1 + z_2 = -\frac{b}{a},$$

$$z_1 z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{c}{a}; |z_1 - z_2| = \left| \frac{\sqrt{|\Delta|}}{a} \right|.$$

Lời giải

+ Vì $w+2$ và $2w-5+3i$ với w là một số phức là các nghiệm của phương trình đã cho nên chúng là các nghiệm phức không thực.

+ Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức không thực của phương trình đã cho $\Rightarrow z_1 = \overline{z_2}$. Đặt

$$z_1 = w+2 = x+yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow w = (x-2) + yi \Rightarrow 2w-5+3i = (2x-9) + (2y+3)i = z_2.$$

$$\text{+ Vì } z_1 = \overline{z_2} \text{ nên } \begin{cases} x = 2x-9 \\ y = -(2y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Như vậy } z_1 = 9-i; z_2 = 9+i.$$

$$\text{+ } \begin{cases} a = -(z_1 + z_2) = -18 \\ b = z_1 z_2 = 82 \end{cases} \Rightarrow a+b = 64 \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 2: [Sưu Tầm Trên Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Cho các số thực a và b sao cho phương trình $z^2 + az + b = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 không thực. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

A và B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 . Biết rằng ΔOAB có một góc bằng 120° . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $(2 + \sqrt{3})b = a^2$. B. $3b = a^2$. C. $2b = a^2$. D. $b = a^2$.

Định hướng

Dùng tính chất về nghiệm phức không thực của phương trình bậc hai hệ số thực.

Lời giải

+ Vì Phương trình $z^2 + az + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm phức z_1, z_2 không phải là

số thực nên $\Delta = a^2 - 4b < 0$ và $z_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

+ Ta có $OA = |z_1| = \sqrt{b}$; $OB = |z_2| = \sqrt{b}$; $AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{4b - a^2}$. Thấy $OA = OB$
 $\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại đỉnh O . Vì ΔOAB cân tại O và có một góc bằng 120° nên $\widehat{AOB} = 120^\circ$

$$\Rightarrow (\sqrt{4b - a^2})^2 = (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{b}\sqrt{b}\cos 120^\circ \Leftrightarrow b = a^2 \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 3: [Chuyên Đại Học Vinh-L2/N2021] Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $5b + c = 4$. B. $5b + c = -12$. C. $5b + c = 12$. D. $5b + c = -4$.

Lời giải

+ Nếu z_1, z_2 là các nghiệm thực của phương trình đã cho thì từ $|z_1 - 4 + 3i| = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{(z_1 - 4)^2 + 9} = 1 \Rightarrow (z_1 - 4)^2 = -8. \text{ Điều này vô lý.}$$

+ Nếu z_1, z_2 là các nghiệm phức không thực thì $z_2 = \overline{z_1}$. Đặt $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow z_2 = x - yi.$$

$$\begin{cases} |z_1 - 4 + 3i| = 1 \\ |z_2 - 8 - 6i| = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} = 1 \\ \sqrt{(x-8)^2 + (-y-6)^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2) - 2(4x - 3y) = -24 \\ (x^2 + y^2) - 4(4x - 3y) = -84 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 4x - 3y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \end{cases}. \text{ Suy ra } \begin{cases} z_1 = \frac{24}{5} - \frac{18}{5}i \\ z_2 = \frac{24}{5} + \frac{18}{5}i \end{cases}.$$

$$+ \begin{cases} b = -(z_1 + z_2) = -\frac{48}{5} \\ c = z_1 z_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow 5b + c = -12 \Rightarrow \text{Chọn B}$$

Câu 47: [TNTHPT QG-MĐ122-Năm 2021] Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i(\overline{w}) + 6 + 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

- A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

+ Khai thác kết luận, thấy cần áp dụng BĐT mô đun

$$\left| z + i(\overline{w}) + 6 + 8i \right| \geq |6 + 8i| - \left| z + i(\overline{w}) \right| = 10 - \left| z + i(\overline{w}) \right| \quad (1). \text{ Kết hợp giả thiết, nghĩ đến}$$

$$\left| z + i(\overline{w}) \right| \leq |z| + |i(\overline{w})| = 3 \quad (2). \text{ Từ đây suy ra } \left| z + i(\overline{w}) + 6 + 8i \right| \geq 7.$$

+ Tìm z, w để đẳng thức ở (1) và (2) xảy ra.

Fb-Khải Nguyễn

Lời giải

$$+ \text{Ta có } \begin{cases} \left| z + i(\overline{w}) + 6 + 8i \right| \geq |6 + 8i| - \left| z + i(\overline{w}) \right| = 10 - \left| z + i(\overline{w}) \right| \quad (1) \\ \left| z + i(\overline{w}) \right| \leq |z| + |i(\overline{w})| = 3 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| z + i(\overline{w}) + 6 + 8i \right| \geq 7 \quad (3).$$

+ Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $z + i(\overline{w}) = k(6 + 8i)$ với $k \in \mathbb{R}$ và $k \leq 0$. Đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $z = t \cdot i(\overline{w})$ với $t \in \mathbb{R}$ và $t \geq 0$. Như thế, đẳng thức ở

$$(1), (2) \text{ đồng thời xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ w = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases} \text{ hay đẳng thức ở (3) xảy ra khi}$$

$$\text{và chỉ khi } \begin{cases} z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ w = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases}.$$

$$+ \text{Vậy } \min \left| z + i(\overline{w}) + 6 + 8i \right| = 7, \text{ khi đó } |z - w| = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow \text{Chọn C}$$

Bình luận

Đây là bài thi trắc nghiệm về GTNN, GTLN của biểu thức chứa mô đun số phức. Để giải bài toán này chỉ cần áp dụng trực tiếp các BĐT mô đun, nhưng yêu cầu phải chỉ được khi nào đẳng thức xảy ra. Điều này gây khó khăn cho học sinh vì các em khó nhớ nếu không tự chứng minh được BĐT mô đun.

Các câu tương tự

Câu 1: [Nhóm Giáo Viên Toán Việt Nam] Xét số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - i| = 2$. Biết biểu thức $T = |z + 3i| + 2|z - 4 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Hiệu $x - y$ bằng

A. $\frac{3 - 6\sqrt{13}}{17}$. B. $\frac{6\sqrt{13} - 3}{17}$. C. $\frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$. D. $-\frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$.

Định hướng

Khai thác kết luận: Biểu thức $T = |z + 3i| + 2|z - 4 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta phải “cân bằng hệ số” (làm xuất hiện thừa số 2 ở biểu thức $|z + 3i|$) trước khi áp dụng bất đẳng

thức mô đun bằng đẳng thức sau: $|z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right|$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}; z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$).

Lời giải

$$+ \text{Ta có } |z+3i| = |(z-i)+4i| = \left| \frac{|4i|}{|z-i|} (z-i) + \frac{|z-i|}{|4i|} (4i) \right| = 2|z|; \quad T = 2(|z| + |4+i-z|) \\ \geq 2|z+4+i-z| = 2\sqrt{17} \quad (1).$$

$$+ \text{Đẳng thức ở (1) xảy ra khi } \begin{cases} z = k(4+i), (k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1) \\ |z-i| = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{4+8\sqrt{13}}{17} + \frac{1+2\sqrt{13}}{17}i.$$

$$+ \text{Vậy } x-y = \frac{3+6\sqrt{13}}{17} \Rightarrow \text{Chọn C}$$

Câu 2: [Sở Nam Định-Năm 2021] Xét các số phức $z; w$ thỏa mãn $|z-2|^2 + |z-2i|^2 = 6$ và $|w-3-2i| = |w+3+6i|$. Khi $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính $|z|$.

A. $1 + \sqrt{2}$. B. $\sqrt{2} - 1$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Định hướng

$$+ \text{Khai thác giả thiết, thấy } |z-2|^2 + |z-2i|^2 = 6 \Leftrightarrow |z-1-i|=1; \quad |w-3-2i| = |w+3+6i| \\ \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 2 \quad (w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})).$$

$$+ \text{Khai thác kết luận, viết } |z-w| = |(1+i-w) + (z-1-i)| \geq |1+i-w| - |z-1-i| \\ = \sqrt{(1-x)^2 + \left(\frac{3}{4}x+3\right)^2} - 1 \quad (*).$$

Lời giải

$$+ |z-2|^2 + |z-2i|^2 = 6 \Leftrightarrow |(z-1-i) + (i-1)|^2 + |(z-1-i) - (i-1)|^2 = 6 \\ \Leftrightarrow 2[|z-1-i|^2 + |i-1|^2] = 6 \Leftrightarrow |z-1-i| = 1.$$

$$+ \text{Đặt } w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó } |w-3-2i| = |w+3+6i| \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 2.$$

$$+ |z-w| = |(1+i-w) + (z-1-i)| \geq |1+i-w| - |z-1-i| = \sqrt{(1-x)^2 + \left(\frac{3}{4}x+3\right)^2} - 1 \quad (*).$$

$$+ \text{Khi } x = -\frac{4}{5} \text{ thì } y = -\frac{7}{5} \text{ và } w = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i. \text{ Đẳng thức ở } (*) \text{ xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$z-1-i = k(1+i-w) \text{ với } k \in \mathbb{R} \text{ và } k \leq 0. \text{ Từ } z-1-i = k(1+i-w)$$

$$\Rightarrow |z-1-i| = |k(1+i-w)| \Rightarrow k = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 3: [Đề tham khảo-2018] Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-4-3i| = \sqrt{5}$. Khi biểu thức $P = |z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $x+y$ bằng

A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Định hướng

$$+ \text{Nhận thấy } |z+1-3i| = |(z-4-3i) + 5|, \quad |z-1+i| = |(z-4-3i) + (3+2i)| \text{ do đó không tính được } \alpha|z+1-3i|^2 + \beta|z-1+i|^2 \text{ theo } |z-4-3i| \quad (\alpha, \beta \text{ là các số thực}).$$

$$+ \text{Tuy nhiên ta lại có } |z+1-3i|^2 + |z-1+i|^2 = 2[|z-i|^2 + |1-2i|^2].$$

Lời giải

$$+ P \leq \sqrt{2 \left[|z+1-3i|^2 + |z-1+i|^2 \right]} = \sqrt{4 \left[|z-i|^2 + |1-2i|^2 \right]} = 2\sqrt{5+|z-i|^2} \quad (1).$$

$$+ |z-i| = |(z-4-3i) + (4+2i)| \leq |z-4-3i| + |4+2i| = 3\sqrt{5} \quad (2). \text{ Đẳng thức ở (2) xảy ra}$$

$$\text{khi } \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 \\ z-4-3i = k(4+2i) \Rightarrow z = 6+4i. \\ |z-4-3i| = \sqrt{5} \end{cases}$$

+ Từ (1) và (2) suy ra $P \leq 10\sqrt{2} \quad (3)$. Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi đẳng

$$\text{thức ở (1) và (2) đồng thời xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6+4i \\ |z+1-3i| = |z-1+i| \end{cases} \Leftrightarrow z = 6+4i \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 4: [Chuyên Hùng Vương Bình Dương-L5N2018] Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$$|z-1+3i| = |z+3-i|. \text{ Khi } \|z-1-2i\| - \|z+1-i\| \text{ đạt giá trị lớn nhất, } x^3 + y^3 \text{ bằng}$$

- A. 0. B. 16. C. 54. D. 27.

Lời giải

$$+ \text{Ta có } |z-1+3i| = |z+3-i| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x - y = 0.$$

+ Trong mặt phẳng phức, gọi $M(z)$, $A(1+2i)$ và $B(-1+i)$. Khi đó, M thuộc đường thẳng (d) có phương trình $x - y = 0$. Nhận thấy A, B nằm cùng một phía đối với (d) .

$$+ AB \text{ có phương trình: } x - 2y + 3 = 0; \text{ Xét hệ } \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$$

+ $\|z-1-2i\| - \|z+1-i\| = |MA-MB| \leq AB = \sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba điểm M, A, B thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng (d) hay $M(3;3) \Rightarrow \text{Chọn C}$

Câu 5: [Sưu Tầm Và Biên Tập] Xét các số phức z, w thay đổi thỏa mãn $|z|=2, |w-3+2i|=1$. Khi

$$|z^2 - 2zw - 4| \text{ đạt giá trị lớn nhất, } |z-w| \text{ bằng}$$

- A. 6. B. $\frac{2\sqrt{85}}{5}$. C. 2. D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

$$+ \text{Đặt } z = x + yi \text{ với } x, y \in \mathbb{R} \text{ thì } \frac{z-\bar{z}}{2} = yi; \text{ Vì } |z|=2 \text{ nên } x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq y+2 \leq 4 \Rightarrow (y+2)^2 \leq 16.$$

$$+ |z^2 - 2zw - 4| = |2z| \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4|iy-w| = 4|(iy-3+2i) + (3-2i-w)|$$

$$\leq 4[|iy-3+2i| + |3-2i-w|] = 4|-3+(y+2)i| + 4 = 4+4\sqrt{9+(y+2)^2} \leq 24. \text{ Từ đây suy ra } |z^2 - 2zw - 4| \leq 24 \quad (1).$$

$$+ \text{Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z = 2i \\ w = \frac{18}{5} - \frac{14}{5}i \end{cases}. \text{ Vậy } \max |z^2 - 2zw - 4| = 24, \text{ khi}$$

$$\text{đó } |z-w| = 6 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Câu 6: [Chuyên Đại Học Vinh-L2/N2021] Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $5b + c = 4$. B. $5b + c = -12$. C. $5b + c = 12$. D. $5b + c = -4$.

Lời giải

+ Nếu z_1, z_2 là các nghiệm thực của phương trình đã cho thì từ $|z_1 - 4 + 3i| = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{(z_1 - 4)^2 + 9} = 1 \Rightarrow (z_1 - 4)^2 = -8. \text{ Điều này vô lý.}$$

+ Nếu z_1, z_2 là các nghiệm phức không thực thì $z_2 = \bar{z}_1 \Rightarrow |\bar{z}_1 - 8 - 6i| = 4$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 = |z_1 - 4 + 3i| \geq |z_1| - |-4 + 3i| & (1) \\ 4 = |\bar{z}_1 - 8 - 6i| \geq |-8 - 6i| - |z_1| & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| \leq 6 \\ |z_1| \geq 6 \end{cases} \Rightarrow |z_1| = 6. \text{ Đẳng thức ở (1) xảy ra}$$

khi và

chỉ khi $z_1 = k(-4 + 3i)$ với $k \in \mathbb{R}$ và $k \leq 0$. Từ đây tính được $z_1 = \frac{24}{5} - \frac{18}{5}i$ (thỏa mãn

$$(2)) \text{ và } z_2 = \frac{24}{5} + \frac{18}{5}i.$$

$$+ \begin{cases} b = -(z_1 + z_2) = -\frac{48}{5} \\ c = z_1 z_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow 5b + c = -12 \Rightarrow \text{Chọn B}$$

Câu 7: [Chuyên Vinh -L2/N2018] Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó mô đun của số phức $w = z_1 + z_2$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $1 + \sqrt{2}$.

Định hướng

$$+ \text{ Khai thác giả thiết: } |z^2 + 1| = 2|z| \Leftrightarrow |z^2|^2 + 1 + z^2 + \bar{z}^2 = 4|z|^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + (\bar{z})^2 = 4|z|^2 - |z|^4 - 1.$$

$$+ z^2 + (\bar{z})^2 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 \geq -2|z|^2.$$

Lời giải

$$+ \text{ Ta có: } |z^2 + 1| = 2|z| \Leftrightarrow |z^2|^2 + 1 + z^2 + \bar{z}^2 = 4|z|^2 \Leftrightarrow z^2 + (\bar{z})^2 = 4|z|^2 - |z|^4 - 1.$$

$$+ \text{ Mặt khác: } z^2 + (\bar{z})^2 = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 \geq -2|z|^2 \text{ (1). Suy ra } 4|z|^2 - |z|^4 - 1 \geq -2|z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^4 - 6|z|^2 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 + \sqrt{2} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{2}. \text{ Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z \text{ là số thuần ảo.}$$

$$+ \text{ Dễ dàng có } z_1 = (\sqrt{2} - 1)i \text{ và } z_2 = (\sqrt{2} + 1)i. \text{ Từ đó } w = z_1 + z_2 = 2\sqrt{2}i \text{ và } |w| = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{Chọn A}$$

Câu 8: [Sở GD&ĐT Hà Nam-L1/N2018] Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn

$$4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1). \text{ Khi } \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất, } -a + 4b \text{ bằng}$$

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Lời giải

$$+ \text{Ta có } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi; 4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2 \Rightarrow b = \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 2$$

$$\Rightarrow z = a + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 2 \right) i.$$

$$+ \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \left| \left(a - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 5 \right) i \right| = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 5 \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{39}{8} \right]^2} \geq \frac{39}{8}. \text{ Khi } a = \frac{1}{2} \text{ thì } \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \frac{39}{8}$$

$$+ \text{Vậy } \min \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \frac{39}{8}; \text{ Khi đó } -a + 4b = 7 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Phân tích định hướng tìm lời giải:

- Đây là bài toán cực trị hàm hợp có tham số: Tìm tham số m để hàm số $y = f(u(x, m))$ có đúng (ít nhất, nhiều nhất) k điểm cực trị (1).

- Cách giải bài toán (1):

+ Một số bài mà $y = f(u(x, m))$ là hàm số chẵn thì đồ thị hàm số $y = f(u(x, m))$ nhận Oy là trục đối xứng. Khi đó, việc xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(u(x, m))$ trên $\mathbb{R}$ quy về xét số điểm cực trị của hàm số này trên $(0; +\infty)$. Hàm số $y = f(u(x, m))$ có $2k+1$ điểm cực trị khi và chỉ khi $y = f(u(x, m))$ có k điểm cực trị trên $(0; +\infty)$.

+ **Tổng quát:** Trong nhiều bài toán, ta sử dụng **tính chất (*)** sau

Cho hàm số $f(x)$ và $u(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, khác hàm hằng trên mọi khoảng. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các điểm cực trị của $f(x)$.

Khi đó:

1) Nếu x_0 là nghiệm của phương trình $u(x) = x_i, (i = \overline{1, n})$ thì x_0 cũng là điểm cực trị của hàm số $f(u(x))$. Hơn nữa, nếu x_i là điểm cực đại (cực tiểu) của $f(x)$ thì x_0 cũng là điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số $f(u(x))$.

Thật vậy, theo định nghĩa cực trị, x_i là điểm cực trị của $f(x) \Leftrightarrow$ tồn tại khoảng $(a_i; b_i)$ chứa x_i sao cho $f(x) < f(x_i)$ hay $f(x) > f(x_i)$ với mọi $x \in (a_i; b_i) \setminus \{x_i\}$.

Mà $u(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại khoảng $(c_i; d_i)$ chứa x_0 sao cho $u(x) \in (a_i; b_i) \setminus \{x_i\}, \forall x \in (c_i; d_i) \setminus \{x_0\}$.

Do vậy: $f(u(x)) < f(u(x_0))$ hay $f(u(x)) > f(u(x_0))$ với $\forall x \in (c_i; d_i) \setminus \{x_0\}$.

Suy ra, x_0 cũng là điểm cực trị của hàm số $f(u(x))$. Hơn nữa, nếu x_i là điểm cực đại (cực tiểu) của $f(x)$ thì x_0 cũng là điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số $f(u(x))$.

2) Ta có $[f(u(x))]' = u'(x) \cdot f'(u(x))$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó:

+ Qua điểm x_0 mà $u'(x)$ đổi dấu thì $[f(u(x))]'$ đổi dấu.

+ Nếu x_0 là điểm cực trị của $u(x)$ thì x_0 cũng là điểm cực trị của $f(u(x))$.

Từ đó, ta có kết quả sau:

Số điểm cực trị của hàm số $f(u(x))$ bao gồm số điểm cực trị của $u(x)$ và số nghiệm của các phương trình $u(x) = x_i$, với $i = \overline{1, n}$. Đồng thời các nghiệm này phải khác điểm cực trị của $u(x)$.

FB-Chu Thom

Lời giải

Chọn A

Để ý rằng: $u(x) = |x^3 + 5x| + m$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y = h(x) = |x^3 + 5x|$.

Ta có BBT của hàm $y = h(x) = |x^3 + 5x|$ như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Suy ra $u(x) = |x^3 + 5x| + m$ có đúng 1 điểm cực trị.

Ta có $g'(x) = |x^3 + 5x|' \cdot f'(|x^3 + 5x| + m)$.

Từ giả thiết $f'(x) = (x-7)(x^2-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-3 \\ x=3 \end{cases}$.

Ta có: $f'(|x^3 + 5x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = |x^3 + 5x| + m = 7 \\ u(x) = |x^3 + 5x| + m = 3 \\ u(x) = |x^3 + 5x| + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 5x| = 7 - m \\ |x^3 + 5x| = 3 - m \\ |x^3 + 5x| = -3 - m \end{cases} \quad (2).$

Hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow (2)$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Từ bảng biến thiên của hàm số $|h(x)|$, ta có $7 - m > 0 \Leftrightarrow m < 7$.

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận:

- Trong cách giải trên, mấu chốt là tìm được số điểm cực trị của $u(x) = |x^3 + 5x| + m$ và tìm được m để hệ (2) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0. Cả 2 yêu cầu cùng được giải quyết dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = |h(x)| = |x^3 + 5x|$.

- Ngoài cách giải trên, ta có thể thấy $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ là hàm số chẵn. Vì vậy, $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x)$ có ít nhất 1 điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay giả thiết cho công thức $f'(x)$ thành cho đồ thị hay bảng xét dấu của $f'(x)$, đồ thị hay bảng biến thiên của $f(x)$.

Hướng phát triển 2: Thay đổi hàm số $u(x, m)$.

Hướng phát triển 3: Thay đổi vị trí của trị tuyệt đối, hoặc bỏ trị tuyệt đối, vị trí tham số m (m không phải hệ số tự do).

Hướng phát triển 4: Thay đổi câu hỏi: Có ít nhất k cực trị, có nhiều nhất k cực trị, có đúng k cực trị.

Bài tập tương tự

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	4		5		6		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^4 - 2x^2 - 3| + m)$ có ít nhất 7 điểm cực trị?

A. 2.

B. 4.

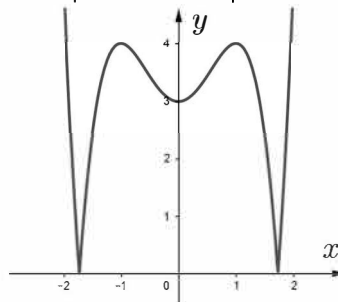
C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u(x) = |x^4 - 2x^2 - 3| + m$. Ta có $u(x)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $h(x) = |x^4 - 2x^2 - 3|$. Đồ thị $h(x) = |x^4 - 2x^2 - 3|$ như sau:



Từ đó suy ra hàm số $u(x) = |x^4 - 2x^2 - 3| + m$ có 5 điểm cực trị.

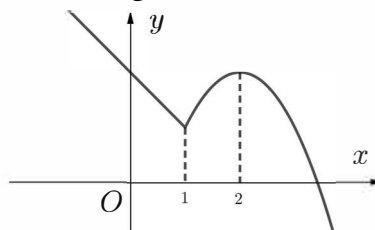
Từ giả thiết suy ra hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x = 4$; $x = 5$.

$$g'(x) = [|x^4 - 2x^2 - 3| + m]' f'(|x^4 - 2x^2 - 3| + m).$$

$$\text{Ta có } f'(|x^4 - 2x^2 - 3| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^4 - 2x^2 - 3| + m = 4 \\ |x^4 - 2x^2 - 3| + m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^4 - 2x^2 - 3| = 4 - m \\ |x^4 - 2x^2 - 3| = 5 - m \end{cases} \quad (3).$$

Hàm số $g(x) = f(|x^4 - 2x^2 - 3| + m)$ có ít nhất 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow (3)$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $u(x) \Leftrightarrow 5 - m > 0 \Leftrightarrow m < 5$ mà $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đúng 2 điểm cực trị và có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2|x-3| + m)$ có nhiều nhất 7 điểm cực trị?

A. 21.

B. 20.

C. 22.

D. 19.

Lời giải

Chọn A

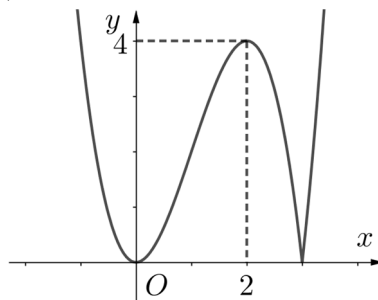
Đặt $u(x) = x^2|x-3| + m \Rightarrow g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Xét hàm số $u(x) = x^2|x-3| + m$ có cùng điểm cực trị với hàm số $h(x) = x^2|x-3| = |x^2(x-3)| = |x^3 - 3x^2|$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			0			$+\infty$
	$-\infty$				-4	

Suy ra, đồ thị hàm số $y = h(x)$ như sau



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Rightarrow u(x)$ có 3 điểm cực trị.

Hàm số $g(x)$ có quá 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} u(x) = x^2|x-3| + m = 1 \\ u(x) = x^2|x-3| + m = 2 \end{cases}$ có quá 4 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$. Ta có $\begin{cases} x^2|x-3| = 1-m \\ x^2|x-3| = 2-m \end{cases}$.

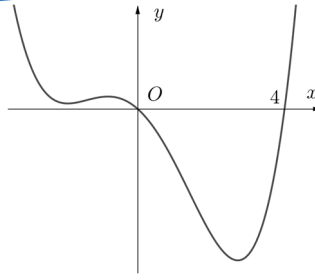
Do vậy, hệ $\begin{cases} u(x) = x^2|x-3| + m = 1 \\ u(x) = x^2|x-3| + m = 2 \end{cases}$ có quá 4 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ 1-m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$ mà m nguyên thuộc $[-20; 20] \Rightarrow \begin{cases} m \in [-20; 0] \\ m \neq -3 \end{cases} \Rightarrow$ có 20 giá trị

của m để $g(x)$ có quá 7 điểm cực trị. Vậy số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2|x-3| + m)$ có nhiều nhất 7 điểm cực trị là $41 - 20 = 21$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm đa thức bậc 4. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình

vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3mx^2 + 2)$ có đúng 6 điểm cực trị?



A. 8.

B. 10.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (3x^2 - 6mx)f'(x^3 - 3mx^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \\ u(x) = x^3 - 3mx^2 + 2 = 0 \\ u(x) = x^3 - 3mx^2 + 2 = 4 \end{cases} \quad (4).$$

Nếu $m = 0$ thì (4) có 3 nghiệm phân biệt là $x = 0; x = \pm\sqrt[3]{2} \Rightarrow g(x)$ không thể có 6 điểm cực trị.

Nếu $m < 0$ thì ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$2m$	0	$+\infty$	
$u'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$u(x)$	$-\infty$	$2 - 4m^3$	2	$+\infty$	

$g(x)$ có đúng 6 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (4) có đúng 6 nghiệm $\Leftrightarrow 4 < 2 - 4m^3 \Leftrightarrow m < -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Nếu $m > 0$ thì ta có bảng biến thiên

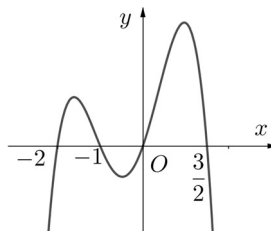
x	$-\infty$	0	$2m$	$+\infty$	
$u'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$u(x)$	$-\infty$	2	$2-4m^3$	$+\infty$	

$g(x)$ có đúng 6 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (4) có đúng 6 nghiệm $\Leftrightarrow 2 - 4m^3 < 0 \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Vậy, $g(x)$ có đúng 6 điểm cực trị thì $m < -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ hoặc $m > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Mà m nguyên thuộc $[-10; 10]$ nên có 20 giá trị của m .

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$. Biết rằng $f'(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn có đồ thị như sau



NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(e^{2x} - 2me^x)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. $m < -\sqrt{2}$.

B. $m > 1$.

C. $m < -1$.

D. $m > \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u(x) = e^{2x} - 2me^x \Rightarrow g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 2e^x(e^x - m) = 0 \\ u(x) = -2 \\ u(x) = -1 \\ u(x) = 0 \\ u(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (5).$

Hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất $\Leftrightarrow (5)$ có nhiều nghiệm nhất

$\Leftrightarrow m > 0$ và $\begin{cases} u(x) = -2 \\ u(x) = -1 \\ u(x) = 0 \\ u(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (6)$ có nhiều nghiệm nhất.

Khi $m > 0$, ta có $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln m$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\ln m$			$+\infty$
$u'(x)$		-	0	+	
$u(x)$	0	$-m^2$			$+\infty$

(6) có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m^2 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	1	-3	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|e^x - x - 5| + m)$ có đúng 9 cực trị?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

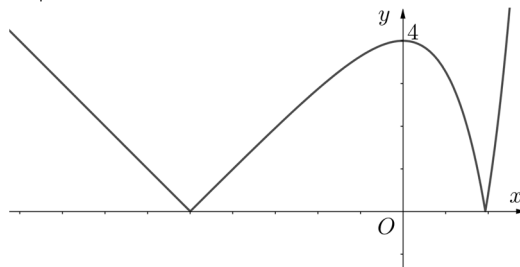
Đặt $u(x) = |e^x - x - 5| + m \Rightarrow g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Hàm số $u(x) = |e^x - x - 5| + m$ có cùng điểm cực trị với hàm số $|h(x)| = |e^x - x - 5|$, với $h(x) = e^x - x - 5$.

Xét hàm số $h(x) = e^x - x - 5 \Rightarrow h'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $|h(x)|$ có dạng



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $|h(x)|$ có 3 điểm cực trị $\Rightarrow u(x) = |e^x - x - 5| + m$ có 3 điểm cực trị.

$$\text{Ta có } f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |e^x - x - 5| + m = -1 \\ |e^x - x - 5| + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |e^x - x - 5| = -1 - m \\ |e^x - x - 5| = 2 - m \end{cases} \quad (7).$$

Hàm số $g(x)$ có đúng 9 điểm cực trị $\Leftrightarrow (7)$ có đúng 6 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $u(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < -1 - m < 4 \\ 2 - m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m + 1 < 0 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < m < -1 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m \leq -2$,
mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của m .

Câu 49: [Câu 49 THPT QG 2021- Mã 103] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$ và $B(-2; 1; -4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{61}$.

D. $\sqrt{85}$.

Fb-Võ Trọng Trí & Khải Nguyễn

Phân tích định hướng tìm lời giải:

1. Các bài toán quen thuộc:

+ Cho hai điểm A, B cố định nằm khác phía đối với mặt phẳng (α) . Xét điểm M thay đổi thuộc (α) , khi đó:

$MA + MB \geq AB$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M'$, trong đó M' là giao điểm của đoạn thẳng AB với (α) .

$|MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB'$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M'$, trong đó B' là điểm đối xứng với B qua (α) và M' là giao điểm của đoạn thẳng AB' với (α) .

+ Cho hai điểm A, B cố định nằm cùng phía đối với mặt phẳng (α) . Xét điểm M thay đổi thuộc (α) , khi đó:

$MA + MB = MA + MB' \geq AB'$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M'$, trong đó B' là điểm đối xứng với B qua (α) và M' là giao điểm của đoạn thẳng AB' với (α) .

$|MA - MB| \leq AB$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M'$, trong đó M' là giao điểm của đoạn thẳng AB với (α) .

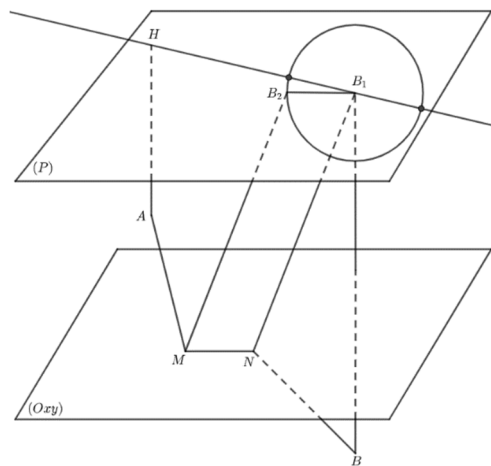
2. Trở lại bài toán.

Bài toán gần gũi với một bài toán quen thuộc là tìm giá trị lớn nhất của $|AM - BM|$ với M thuộc mặt phẳng (Oxy) . Việc đề cho xuất hiện điểm N với ràng buộc $MN = 4$ nên ta có thể dùng phép tịnh tiến để biến $|AM - BN| = |AM - B'M|$ quen thuộc bằng cách lấy điểm B' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{NM}$.

Lời giải 1

Chọn D

Thấy hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy) . Gọi B_1 là điểm đối xứng của B qua (Oxy) thì $B_1(-2; 1; 4)$ và $BN = B_1N$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B_1 và song song với (Oxy) thì (P) có phương trình $z = 4$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên (P) thì $H(1; -3; 4)$. Gọi B_2 là điểm sao cho $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{NM}$ thì $B_2 \in (P)$.



Ta có: $AH = 2$, $B_1H = 5$, $B_1B_2 = MN = 4$ (vì $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{NM}$), $B_1N = B_2M$ (vì $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{B_1N} = \overrightarrow{B_2M}$). Trong (P) , điểm B_2 thay đổi thuộc đường tròn (C) có tâm B_1 và bán kính $R = B_1B_2 = 4$.

$|AM - BN| = |AM - B_1N| = |AM - B_2M| \leq AB_2 = \sqrt{AH^2 + (HB_2)^2} \leq \sqrt{AH^2 + (HB_1 + B_1B_2)^2} = \sqrt{85} \Rightarrow |AM - BN| \leq \sqrt{85}$ (1). Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi điểm B_1 nằm giữa hai điểm B_2, H và $M = AB_2 \cap (Oxy)$.

Vậy $\max |AM - BN| = \sqrt{85}$.

Lời giải 2

Để thấy hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy) . Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) thì $A_1(1; -3; -2)$ và $AM = A_1M$. Gọi $M(a; b; 0)$ và $N(c; d; 0)$, ta có: $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = 4$ hay $(a-c)^2 + (b-d)^2 = 16$; $\overrightarrow{A_1M} = (a-1; b+3; 2)$; $\overrightarrow{BN} = (c+2; d-1; 4)$; $\overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{BN} = (a-c-3; b-d+4; -2)$.

$$|AM - BN| = |A_1M - BN| = \left| \overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{BN} \right| \leq \left| \overrightarrow{A_1M} - \overrightarrow{BN} \right| = \sqrt{(a-c-3)^2 + (b-d+4)^2 + 4}$$

$$= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2 + 29 + 2[4(b-d) - 3(a-c)]}$$

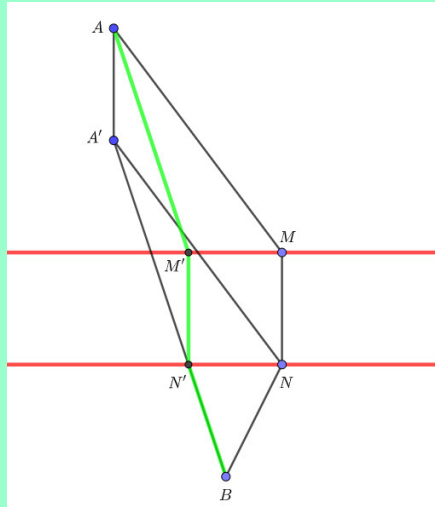
$$\leq \sqrt{45 + 2\sqrt{(4^2 + 3^2)((b-d)^2 + (a-c)^2)}} = \sqrt{85} \Rightarrow |AM - BN| \leq \sqrt{85}. \text{ Khi } M\left(\frac{32}{5}; -\frac{51}{5}; 0\right)$$

và $N\left(\frac{44}{5}; -\frac{67}{5}; 0\right)$ thì $|AM - BN| = \sqrt{85}$. Vậy $\max |AM - BN| = \sqrt{85}$.

Bình luận:

Đây là bài toán được phát triển từ 'bài toán 2' trang số 7 trong SGK Hình Học Nâng Cao lớp 11.

Hai thôn nằm ở hai vị trí A và B cách nhau một con sông (xem rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song). Người ta dự định xây một chiếc cầu bắc qua sông (cổ nhiên cầu phải vuông góc với hai bờ sông và làm hai đoạn đường thẳng từ A đến M và từ B đến N . Hãy xác định vị trí chiếc cầu MN sao cho $AM + BN$ ngắn nhất.



Lấy điểm A' sao cho $\overline{AA'} = \overline{MN}$ khi đó $AM = A'N$ và $AM + BN = A'N + BN \geq A'B$.

Hướng phát triển

Hướng 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$.

Hướng 2: Bỏ bớt ràng buộc điểm $N \in (Oxy)$, khi đó A_2 thuộc mặt cầu tâm A_1 bán kính bằng A_1A_2 .

Các bài tập tương tự

Câu 1: [Trần Quốc Luật-THTT tháng 12 năm 2017] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; 2)$ và $B(3; 4; 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AX + BY$ với X, Y là các điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $XY = 1$.

A. 3.

B. 5.

C. $2 + \sqrt{17}$.

D. $1 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải 1

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Thấy $A(0;0;2)$, $B(3;4;1)$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxy) . Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua (Oxy) , khi đó $A'(0;0;-2)$ và $AX = A'X$.

Vì $X, Y \in (Oxy)$ nên gọi $X(a;b;0)$, $Y(c;d;0)$. Vì $XY=1$ nên $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = 1$ hay $(a-c)^2 + (b-d)^2 = 1$.

$$\overrightarrow{A'X} = (a;b;2), \overrightarrow{YB} = (3-c;4-d;1), \overrightarrow{A'X} + \overrightarrow{YB} = (a-c+3;b-d+4;3).$$

$$\begin{aligned} AX + BY &= A'X + YB = |\overrightarrow{A'X}| + |\overrightarrow{YB}| \geq |\overrightarrow{A'X} + \overrightarrow{YB}| = \sqrt{(a-c+3)^2 + (b-d+4)^2 + 9} \\ &= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2 + 34 + 2[3(a-c) + 4(b-d)]} = \sqrt{35 + 2[3(a-c) + 4(b-d)]} \end{aligned}$$

$$\geq \sqrt{35 - 2|3(a-c) + 4(b-d)|} \geq \sqrt{35 - 2\sqrt{(3^2 + 4^2)((a-c)^2 + (b-d)^2)}} = 5 \Rightarrow AX + BY \geq 5. \text{ Khi}$$

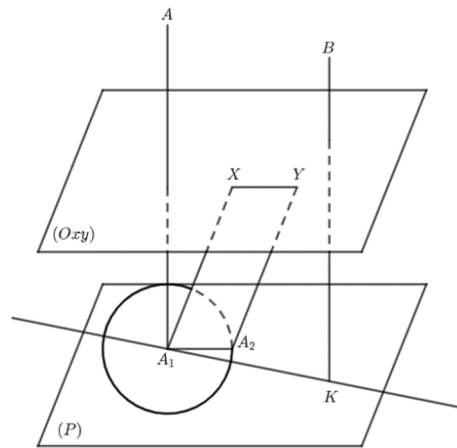
$X\left(\frac{8}{5}; \frac{32}{15}; 0\right)$ và $Y\left(\frac{11}{5}; \frac{44}{15}; 0\right)$ thì $AX + BY = 5$. Vậy $\min(AX + BY) = 5$.

Lời giải 2

Thấy $A(0;0;2)$, $B(3;4;1)$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxy) . Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua (Oxy) , khi đó $A_1(0;0;-2)$ và $AX = A_1X$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa A_1 và song song mặt phẳng (Oxy) suy ra (P) có phương trình là $z = -2$. Gọi K là hình chiếu của B lên (P) thì $K(3;4;-2)$, khi đó $BK = 3$, $KA_1 = 5$.

Lấy điểm A_2 sao cho $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{XY}$, khi đó $A_1X = A_2Y$ (vì $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{XY} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1X} = \overrightarrow{A_2Y}$), $A_2 \in (P)$ và trong (P) , A_2 thuộc đường tròn (C) tâm A_1 bán kính $R = A_1A_2 = 1$ (vì $A_1A_2 = XY$).



$$AX + BY = A_1X + BY = A_2Y + BY \geq A_2B = \sqrt{BK^2 + (KA_2)^2} \geq \sqrt{BK^2 + (KA_1 - R)^2} = 5$$

$\Rightarrow AX + BY \geq 5$ (1). Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi A_2 là giao điểm thứ nhất của đường thẳng A_1K với (C) (A_2 thuộc đoạn thẳng A_1K) đồng thời $Y = A_2B \cap (Oxy)$.

Vậy $\min(AX + BY) = 5$.

Câu 2: [Câu 49 THPT QG 2021– Mã 103] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2)$ và $B(-2;1;-4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi, trong đó M thuộc mặt phẳng (Oxy) và N tùy ý sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{61}$.

D. $\sqrt{85}$.

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$?

A. 19.

B. 21.

C. 20.

D. 18.

Phân tích định hướng lời giải

- Đây là bài toán có mức độ VDC (có thể là câu khó nhất của đề thi THPT QG năm 2021).

- Sử dụng phương pháp “Logarit hóa hai vế” để xét phương trình mũ dạng:

$$a^{f(x;m)} = u(x;m) \cdot b^{g(x;m)}, \quad (0 < a; b \neq 1) \quad (\text{với } m \text{ là tham số})$$

Định hướng tìm lời giải:

B1: Dựa vào phương trình đã cho tìm điều kiện cho phương trình.

B2: Coi y như tham số, lấy logarit cơ số 27 hai vế, sau đó đưa phương trình về dạng $f(x) = 0$.

B3: Sử dụng kỹ thuật chia miền giá trị của tham số và xét hàm số $f(x)$. Mục đích để đánh giá được tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ và sử dụng được định lý giá trị trung bình.

Sử dụng các đơn vị kiến thức:

- Nếu f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

Sử dụng kiến thức này đã làm cho việc giải toán trở thành việc thử sai trong việc chọn cặp a, b . Thay vào đó dùng kết quả sau (không thể giải quyết trọn vẹn việc thử sai nhưng đã giảm thiểu một phần):

Cho f liên tục và đơn điệu trên đoạn $[a; b]$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi và $f(a) \cdot f(b) < 0$.

- Nếu $a \geq e$ thì hàm số $f(x) = \log_a(1+x) - x$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Lưu ý: $\log_a(1+x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$ và $a \geq e$.

Fb: Nguyễn Sỹ - Nguyễn Thanh Hải

Lời giải

Giả sử tồn tại $y \in \mathbb{Z}$ để phương trình trên có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Suy ra $1+xy > 0$

Lấy logarit cơ số 27 hai vế, PT đã cho tương đương

$$3x^2 + (y-18)x - \log_{27}(1+xy) = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + (y-18)x - \log_{27}(1+xy)$, với $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

- Với $y < 0$, do $\begin{cases} 1+xy > 0 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y > -\frac{1}{x}$, Suy ra $-3 < y < 0$ hay $y \in \{-1; -2\}$.

+) Với $y = -1$, ta có $f(x) = 3x^2 - 19x - \log_{27}(1-x)$ là hàm số liên tục trên $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Do $f\left(\frac{2}{3}\right) = -11$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ suy ra phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

+) Với $y = -2$, ta có $f(x) = 3x^2 - 20x - \log_{27}(1-2x)$ là hàm số liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Do $f\left(\frac{1}{3}\right) = -6$ và $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$ suy ra phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

- Với $y = 0$, phương trình trở thành $3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$, không thỏa mãn.

- Với $y \geq 19$, ta có

$$f'(x) = 6x + (y - 18) - \frac{y}{3(1+xy)\ln 3},$$

$$f''(x) = 6 + \frac{y^2}{3(1+xy)^2 \ln 3} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right).$$

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Do đó

$$f'(x) > f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + (y - 18) - \frac{y}{(3+y)\ln 3} > 0 \text{ vì } (3+y)\ln 3 > y \Rightarrow -\frac{y}{(3+y)\ln 3} > -1$$

Suy ra $f(x)$ là đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Suy ra

$$f(x) > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3}.$$

Xét hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, $t > 0$. Dễ thấy $g'(t) = 1 - \frac{1}{3(3+t)\ln 3} > 0, \forall t > 0$, suy ra $g(t)$

là hàm đồng biến, do đó

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3} \geq g\left(\frac{19}{3}\right) - \frac{17}{3} > 0. \text{ Suy ra } f(x) > 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right).$$

Do đó PT trên không có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

- Với $1 \leq y \leq 18$. Do hàm số $f(x) = 3x^2 + (y-18)x - \log_{27}(1+xy)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$.

Ta lại có hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Mà } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3} \leq g(6) - \frac{17}{3} < 0, \forall y \in [1; 18],$$

$$\text{Mặt khác } f(6) = 6y - \log_{27}(1+6y) = g(6y) \geq g(6) > 0, \forall y \in [1; 18].$$

Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(6) < 0$. Do đó phương trình trên có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

Vậy có tất cả 20 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu.

Bình luận:

- Việc sử dụng BĐT Bernoulli để đánh giá như lời giải sau đây là sai:

Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$?

A. 19.

B. 21.

C. 20

D. 18.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 27^{3x^2+xy} = (1+xy) \cdot 27^{18x} \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-18x} = 1+xy \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy = 0.$$

$$\text{Mặt khác: } 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy = (1+26)^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy \geq 1 + 26(3x^2 + xy - 18x) - 1 - xy$$

$$= 78x^2 + 25xy - 468x.$$

+ Với $y \geq 19 \Rightarrow 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy \geq 78x^2 + 25xy - 468x \geq 84x^2 + 7x > 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ (loại).

+ Với $y \leq -3 \Rightarrow 27^{3x^2+xy-18x} = 1 + xy \leq 1 - 3x < 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ (loại).

+ Với $y = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

+ Với $y = -1 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

+ Với $y = 0 \Rightarrow 27^{3x^2-18x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$ (loại).

+ Với $1 \leq y \leq 18$. Xét hàm số $f(x) = 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy$.

Do $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{y-17} - 1 - \frac{y}{3} < 0 \forall y \in \{1; 2; \dots; 18\}$ và

$f(6) = 27^{6y} - 6y - 1 > 0 \forall y \in \{1; 2; \dots; 18\}$ nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

Tóm lại $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 18\}$. Vậy có 20 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lưu ý:

- Nếu $a > -1$ thì $(1+a)^x \geq ax+1$ với $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$.
- Nếu $a > -1$ thì $(1+a)^x \leq ax+1$ với $0 \leq x \leq 1$.

- Khi giảng dạy cho HS chúng ta nên phát biểu bài toán dưới dạng. “Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $27^{3x^2+xm} = (1+xm)27^{18x}$ có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$?”

Hướng phát triển:

Hướng phát triển 1: Thay biến y bởi tham số m quy về bài toán tìm tham số m nguyên để phương trình có nghiệm.

Hướng phát triển 2: Sử dụng phương pháp đánh giá hai vế của phương trình hoặc sử dụng các bất đẳng thức cơ bản.

Hướng phát triển 3: Sử dụng phương pháp hàm số.

Các ví dụ tương tự:

Hướng phát triển 1: Thay biến y bởi tham số m quy về bài toán tìm tham số m nguyên để phương trình có nghiệm

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $27^{3x^2+xm} = (1+xm)27^{15x}$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$?

A. 16 .

B. 18 .

C. 15 .

D. 17 .

Lời giải

Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình trên có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

Từ phương trình, suy ra $xm > -1$. Do $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$, nên ta có $m > -\frac{1}{x} > -3$ hay $m \geq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với $27^{3x^2-15x+xm} - (1+xm) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 27^{3x^2-15x+xm} - (1+xm)$ trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$

Ta có $f(5) = 27^{5m} - 1 - 5m > 0 \forall m \in \mathbb{Z}^*$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{-14+m} - 1 - \frac{1}{3}m$,

Xét hàm số: $g(m) = 3^{m-14} - 1 - \frac{m}{3}$, ta có $g'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 14 - \log_3(3 \ln 3) = m_0 \approx 12,9$.

BBT:

m	-3	m_0	16	$+\infty$
$g'(m)$	-	0	+	
$g(m)$	$g(-3)$			$+\infty$

Do $\begin{cases} g(-3) > 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} g(16) > 0 \\ g(15) < 0 \end{cases}$, kết hợp với BBT suy ra với m nguyên lớn hơn -3 và $g(m) < 0 \Leftrightarrow m \in \{-2; -1; \dots; 15\}$.

+ Với $m \in \{-2; -1; 1; \dots; 15\}$ ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(5) < 0$, nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

+ Với $m = 0$, ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 5$ không thỏa mãn.

+ Với $m \geq 16$; Ta có phương trình

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 27^{3x^2-15x+xm} = (1+xm) \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + xm - \log_{27}(1+mx) = 0$$

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 - 15x + xm - \log_{27}(1+mx)$ trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$. Ta có

$$h'(x) = 6x - 15 + m - \frac{m}{(1+mx) \ln 27} \Rightarrow h''(x) = 6 + \frac{m^2}{3(1+mx)^2 \ln 3} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right).$$

Vì $h'(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$ nên hàm số $h'(x)$ đồng biến trên khoảng $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$. Do đó

$$h'(x) > h'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + (m-15) - \frac{m}{(3+m) \ln 3} > 0 \text{ vì } (3+m) \ln 3 > m \text{ nên } -\frac{m}{(3+m) \ln 3} > -1.$$

Suy ra $h(x)$ là đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 5\right]$. Do đó, $h(x) > h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{m}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{m}{3}\right) - \frac{14}{3}$.

Xét hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, $t > 0$. Dễ thấy $g'(t) = 1 - \frac{1}{3(3+t) \ln 3} > 0, \forall t > 0$, suy ra

$g(t)$ là hàm đồng biến, do đó $h\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{m}{3}\right) - \frac{14}{3} \geq g(8) - \frac{14}{3} > 0$. Suy ra $h(x) > 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

Do đó phương trình trên không có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

Vậy $m \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 15\}$, hay có 17 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 2. (Mã đề 101, 2021) Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}?$$

A. 27.

B. 9.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

Giả sử tồn tại $y \in \mathbb{Z}$ để phương trình trên có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$. Suy ra $1+xy > 0$

Lấy logarit cơ số 27 hai vế, phương trình đã cho tương đương

$$3x^2 + (y-9)x - \log_{27}(1+xy) = 0.$$

Đặt $f(x) = 3x^2 + (y-9)x - \log_{27}(1+xy)$, $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $y < 0$ thì $-y < \frac{1}{x} < 3$, suy ra $y > -3$ hay $y \in \{-1; -2\}$.

+) Với $y = -1$ thì ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ suy ra phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \subset \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

+) Tương tự, với $y = -2$, phương trình cũng có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

- Nếu $y = 0$ thì phương trình trở thành $3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ không thỏa mãn.
- Nếu $y \geq 10$, ta có

$$f'(x) = 6x + (y-9) - \frac{y}{3(1+xy)\ln 3},$$

$$f''(x) = 6 + \frac{y^2}{3(1+xy)^2 \ln 3} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right).$$

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Do đó

$$f'(x) > f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + (y-9) - \frac{y}{(3+y)\ln 3} > 0.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Do đó

$$f(x) > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{y}{3}\right) - \frac{8}{3}.$$

Xét hàm số $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$, $t > 0$. Dễ thấy $g'(t) = 1 - \frac{1}{3(3+t)\ln 3} > 0$ $g(t)$ là hàm đồng biến, suy ra

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{8}{3} \geq g\left(\frac{10}{3}\right) - \frac{8}{3} > 0.$$

Nên phương trình không có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ trong trường hợp này.

- Nếu $1 \leq y \leq 9$ thì từ tính đồng biến của $g(t)$, ta suy ra

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{y}{3}\right) - \frac{8}{3} < 0, \forall 1 \leq y \leq 9,$$

$$f(3) = g(3y) > 0, \forall 1 \leq y \leq 9.$$

Điều này dẫn đến phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Vậy có 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu.

Hướng phát triển 2. Sử dụng phương pháp đánh giá hai vế của phương trình hoặc sử dụng các bất đẳng thức cơ bản.

Câu 3. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $|x| \leq 2020$ và $2^{x+2y} + 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) = 4$?

A. 1. B. 2020. C. 2021. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Nếu $x+2y-2 > 0 \Rightarrow 2^{x+2y} > 2^2, 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) > 0 \Rightarrow 2^{x+2y} + 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) > 4$.

Nếu $x+2y-2 < 0 \Rightarrow 2^{x+2y} < 2^2, 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) < 0 \Rightarrow 2^{x+2y} + 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) < 4$.

Nếu $x+2y-2 = 0 \Rightarrow 2^{x+2y} = 2^2, 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) = 0 \Rightarrow 2^{x+2y} + 2021^{x^2-3y-2}(x+2y-2) = 4$.

Vậy $x+2y-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2-2y$, do $-2020 \leq x \leq 2020 \Rightarrow -1009 \leq y \leq 1011$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên có 2021 giá trị, nên có 2021 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ với $1 \leq y \leq 2020$ thỏa mãn biểu thức sau:

$$\log_3(4^x + 2^x y + y^2) - \log_3(2^x y) = \frac{2^x(2y-2^x)}{y^2}.$$

A. 11. B. 15. C. 10. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $a = 2^x > 0$, suy ra $\log_3(a^2 + ay + y^2) - \log_3(ay) = \frac{2ay - a^2}{y^2}$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{a^2 + ay + y^2}{ay} = 2 \cdot \frac{a}{y} - \frac{a^2}{y^2} \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{a}{y} + 1 + \frac{y}{a} \right) = 1 - \left(1 - \frac{a}{y} \right)^2 \quad (*)$$

Nhận thấy $VP(*) \leq 1, VT(*) = \log_3 \left(\frac{a}{y} + \frac{y}{a} + 1 \right) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} \log_3 3 = 1$ dẫn đến $\frac{a}{y} = 1 \Rightarrow y = 2^x$.

Do $1 \leq y \leq 2020 \Rightarrow 1 \leq 2^x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 2020 \approx 10,98$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên x có 11 giá trị, mỗi giá trị của x tương ứng một giá trị y .

Vậy nên có 11 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Hướng phát triển 3. Sử dụng phương pháp hàm số.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ với $2 \leq x < y \leq 99$ thỏa mãn $x^y > y^x$?

A. 4751. B. 4750. C. 4656. D. 4657.

Lời giải

Chọn A

Từ $x^y > y^x \Leftrightarrow y \ln x > x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y}$, xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t}, t \in [2; 99]$.

Có $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = e \approx 2,71$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[2; e]$ và nghịch biến trên đoạn $[e; 99]$.

- **TH1.** $x \geq 3$ ($x \in [e; 99]$) thì $\frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y} \Rightarrow y > x \geq 3$, suy ra có $C_{97}^2 = 4656$ cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

- **TH2.** $x = 2$ thì $\frac{\ln 2}{2} > \frac{\ln y}{y} \Leftrightarrow \frac{\ln 4}{4} > \frac{\ln y}{y} \Rightarrow y > 4 \Rightarrow y \geq 5$, $x = 2$ có 95 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy nên có $4656 + 95 = 4751$ cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.