

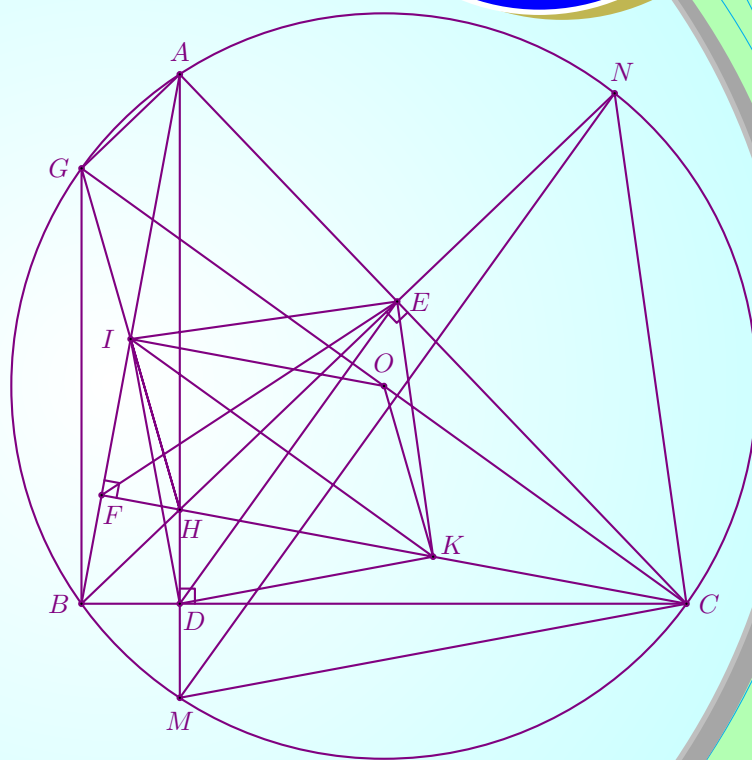
TOÁN

8

PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

(với $C \neq 0$)



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

NĂM HỌC 2021-2022

MỤC LỤC

I ĐẠI SỐ	1
CHƯƠNG 1. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC	2
§1 – NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC – NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC	2
(A) Tóm tắt lí thuyết	2
(B) Bài tập áp dụng	2
Dạng 1. Nhân đơn thức với đa thức	2
Dạng 2. Nhân đa thức với đa thức	2
Dạng 3. Chứng minh biểu thức	3
Dạng 4. Tìm x	4
§2 – NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ	5
(A) Tóm tắt lí thuyết	5
(B) Bài tập áp dụng	5
§3 – PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ	7
(A) Tóm tắt lí thuyết	7
(B) Bài tập áp dụng	7
Dạng 1. Phương pháp đặt nhân tử chung	7
Dạng 2. Phương pháp nhóm nhiều hạng tử	7
Dạng 3. Phương pháp dùng hằng đẳng thức	8
Dạng 4. Một số phương pháp khác	9
Dạng 5. Tổng hợp	10
§4 – PHÉP CHIA ĐƠN THỨC - PHÉP CHIA ĐA THỨC	11
(A) Tóm tắt lí thuyết	11
(B) Bài tập áp dụng	11
Dạng 1. Chia đơn thức cho đơn thức. Chia đa thức cho đơn thức	11
Dạng 2. Chia đa thức cho đa thức	12
Dạng 3. Tìm đa thức bằng phương pháp hệ số bất định	13
§5 – ÔN TẬP CHƯƠNG I	14
§6 – MỘT SỐ ĐỀ TỰ LUYỆN NÂNG CAO	16
Đề số 1.	16
Đáp án đề 1.	17
Đề số 2.	17

🔍 Đáp án đề 2.	18
----------------	----

CHƯƠNG 2. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ 19

§1 – PHÂN THỨC ĐẠI SỐ 19

Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	19
Ⓑ Bài tập áp dụng	19
📁 Dạng 1. Tìm điều kiện để phân thức có nghĩa	19
📁 Dạng 2. Tìm điều kiện để phân thức bằng 0	19

§2 – TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ. RÚT GỌN PHÂN THỨC 20

Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	20
Ⓑ Bài tập áp dụng	20
📁 Dạng 1. Phân thức bằng nhau	20
📁 Dạng 2. Rút gọn phân thức	21

§3 – CÁC PHÉP TOÁN VỀ PHÂN THỨC 23

Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	23
📁 Dạng 1. Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức	23
📁 Dạng 2. Cộng, trừ các phân thức	24
📁 Dạng 3. Nhân, chia các phân thức	25

§4 – BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ. GIÁ TRỊ CỦA MỘT PHÂN THỨC 26

Ⓐ Biểu thức hữu tỉ	27
--------------------	----

§5 – ÔN TẬP CHƯƠNG II 28

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN 32

§1 – MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH 32

Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	32
Ⓑ Bài tập áp dụng	32
📁 Dạng 1. Chứng minh một số là nghiệm của phương trình	32
📁 Dạng 2. Số nghiệm của một phương trình	33
📁 Dạng 3. Chứng minh hai phương trình tương đương	33

§2 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN 35

Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	35
Ⓑ Bài tập áp dụng	35

§3 – PHƯƠNG TRÌNH TÍCH 38

Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	38
---------------------	----

§4 – PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU 40

Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	40
---------------------	----

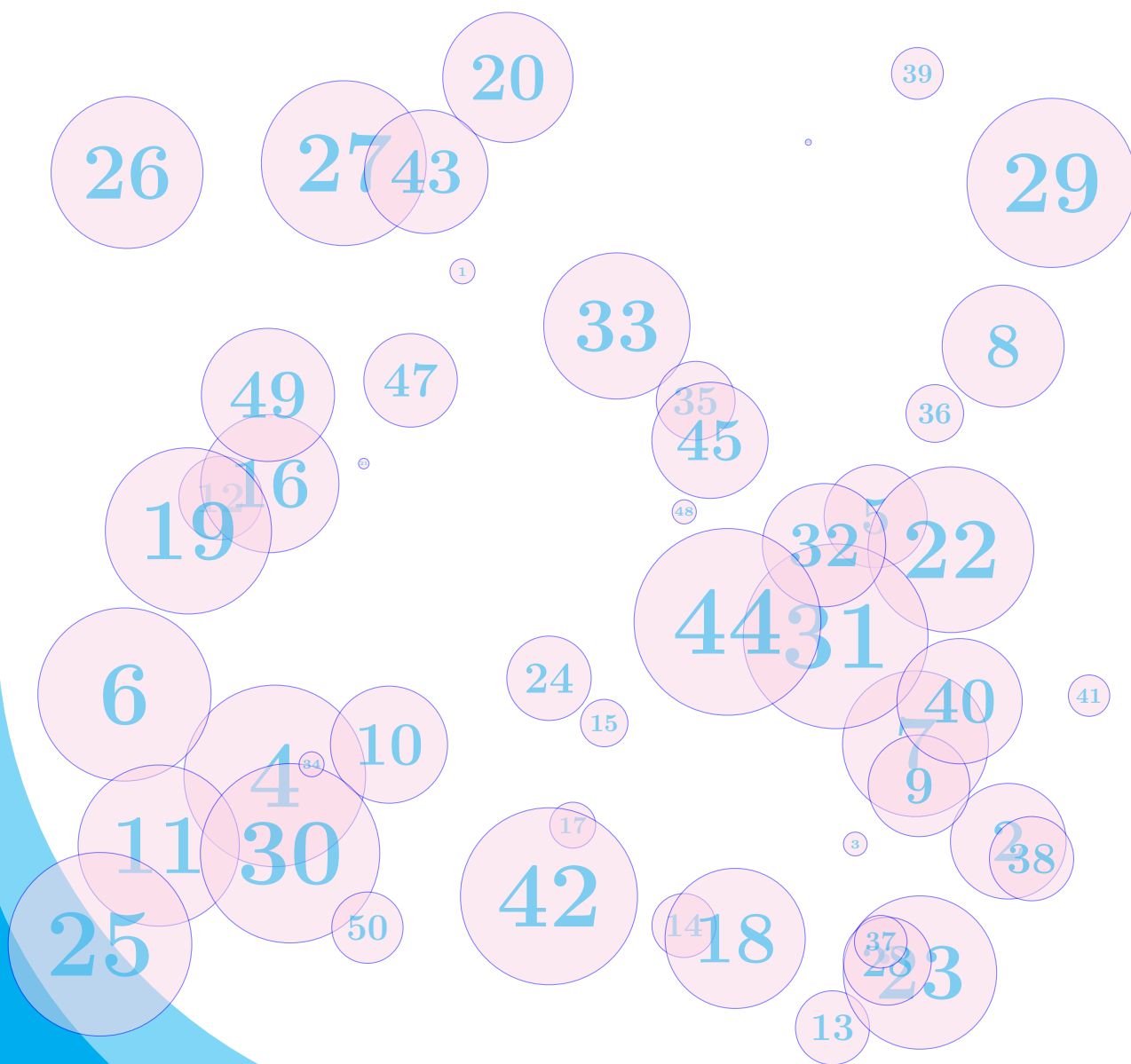
(B) Bài tập áp dụng.....	40
§5 – GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH	41
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	41
(B) Bài tập áp dụng.....	41
Dạng 1. Loại so sánh.....	41
Dạng 2. Loại tìm số gồm hai, ba chữ số.....	42
Dạng 3. Loại làm chung – làm riêng một việc.....	43
Dạng 4. Loại chuyển động đều.....	43
Dạng 5. Loại có nội dung hình học.....	44
§6 – ÔN TẬP CHƯƠNG III	45
CHƯƠNG 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN	47
§1 – BẤT ĐẲNG THỨC	47
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	47
(B) Bài tập tự luận.....	48
Dạng 1. Chứng minh BDT dựa vào định nghĩa và tính chất cơ bản.....	48
Dạng 2. Phương pháp làm trội.....	49
Dạng 3. Chứng minh BDT dựa vào BDT Cô – si.....	50
§2 – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN	52
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	52
§3 – PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI	54
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	54
§4 – ÔN TẬP CHƯƠNG IV	56
II HÌNH HỌC	57
CHƯƠNG 1. TỨ GIÁC	58
§1 – TỨ GIÁC	58
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	58
(B) Bài tập áp dụng.....	58
Dạng 1. Tính góc cơ bản.....	58
Dạng 2. Sử dụng tính chất về các góc của một tứ giác để tính góc.....	58
Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức tam giác để giải các bài toán liên hệ đến các cạnh của một tứ giác.....	59
§2 – HÌNH THANG	60
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	60
(B) Bài tập áp dụng.....	60
Dạng 1. Tính chất các góc của một hình thang.....	60

	Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang, hình thang vuông.....	61
§3 –	HÌNH THANG CÂN	62
	Tóm tắt lí thuyết.....	62
	Bài tập áp dụng.....	62
	Dạng 1. Sử dụng tính chất của hình thang cân để tính toán và chứng minh.....	62
	Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang cân.....	63
§4 –	ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG	64
	Tóm tắt lí thuyết.....	64
	Bài tập áp dụng.....	64
§5 –	ĐỐI XỨNG TRỤC	66
	Tóm tắt lí thuyết.....	66
	Bài tập áp dụng.....	66
§6 –	HÌNH BÌNH HÀNH	68
	Tóm tắt lí thuyết.....	68
	Bài tập áp dụng.....	68
	Dạng 1. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học....	68
	Dạng 2. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành..	69
§7 –	ĐỐI XỨNG TÂM	71
	Tóm tắt lí thuyết.....	71
	Bài tập áp dụng.....	71
§8 –	HÌNH CHỮ NHẬT	73
	Tóm tắt lí thuyết.....	73
	Bài tập áp dụng.....	73
	Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật.....	73
	Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình chữ nhật để giải toán.....	74
§9 –	HÌNH THOI	76
	Tóm tắt lí thuyết.....	76
	Bài tập áp dụng.....	76
	Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi.....	76
	Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình thoi để giải toán.....	77
§10 –	HÌNH VUÔNG	78
	Tóm tắt lí thuyết.....	78
	Bài tập áp dụng.....	78
	Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông.....	78
	Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình vuông để giải toán.....	79

§11 – ÔN TẬP CHƯƠNG I	80
CHƯƠNG 2. ĐA GIÁC - DIỆN TÍCH ĐA GIÁC	83
§1 – ĐA GIÁC	83
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	83
(B) Bài tập tự luận.....	83
§2 – ÔN TẬP CHƯƠNG II	86
CHƯƠNG 3. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG	88
§1 – ĐỊNH LÝ TALET TRONG TAM GIÁC - TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC	88
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	88
(B) BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	89
Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng.....	89
Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song.....	90
Dạng 3. Tính chất đường phân giác của tam giác.....	91
§2 – TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG	93
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	93
(B) BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	94
Dạng 1. Sử dụng tam giác đồng dạng để tính toán.....	94
Dạng 2. Chứng minh hai tam giác đồng dạng.....	95
§3 – ÔN TẬP CHƯƠNG III	97

PHẦN ĐẠI SỐ

I



PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

BÀI 1. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC – NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân từng đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

$$A(B + C) = AB + AC$$

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D)$$

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Nhân đơn thức với đa thức

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a. $x^2 \left(5x^3 - x - \frac{1}{2} \right)$.

b. $(3xy - x^2 + y) \frac{2}{3}x^2y$.

c. $(4x^3 - 5xy + 2x) \left(-\frac{1}{2}xy \right)$.

d. $-2x^3y(2x^2 - 3y + 5yz)$.

e. $\frac{2}{5}xy(x^2y - 5x + 10y)$.

f. $\frac{2}{3}x^2y(3xy - x^2 + y)$.

Bài 2. Thực hiện phép tính, rút gọn rồi tính giá trị biểu thức:

a. $x(x - y) + y(x + y)$ tại $x = -6; y = 8$.

b. $x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ tại $x = \frac{1}{2}; y = -100$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

a. $x(x - y) + y(x - y)$.

b. $x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-1} + y^{n-1})$.

Dạng 2. Nhân đa thức với đa thức

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a. $(x^2 - 2x + 1)(x - 1).$

b. $(2x - 1)(3x + 2)(3 - x).$

c. $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x).$

d. $\left(x^2y^2 - \frac{1}{2}xy + 2y\right)(x - 2y).$

e. $(2x^3 - 3x - 1) \cdot (5x + 2).$

f. $(x^2 - 2x + 3) \cdot (x - 4).$

g. $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y).$

h. $\left(\frac{1}{2}x + y\right)\left(\frac{1}{2}x + y\right).$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

a. $(x^2 - 1)(x^2 + 2x).$

b. $(x - 2y)(x^2y^2 - xy + 2y).$

c. $(x + 3)(x^2 + 3x - 5).$

d. $(x + 1)(x^2 - x + 1).$

e. $(x - y)(x^2 + xy + y^2).$

f. $\left(\frac{1}{2}xy - 1\right) \cdot (x^3 - 2x - 6).$

Bài 6. Thực hiện các phép tính, sau đó tính giá trị biểu thức:

a. $A = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ với $x = 3.$

b. $B = (x + 1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$ với $x = 2.$

c. $C = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ với $x = 2.$

d. $D = 2x(10x^2 - 5x - 2) - 5x(4x^2 - 2x - 1)$ với $x = -5.$

Bài 7. Thực hiện các phép tính, sau đó tính giá trị biểu thức:

a. $A = (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$ với $x = 2, y = -\frac{1}{2}.$

b. $B = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ với $a = 3, b = -2.$

c. $C = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + y^2) + 2x^3y - 3x^2y^2 + 2xy^3$ với $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$

Dạng 3. Chứng minh biểu thức**Bài 8.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) = x^5 - y^5.$

b. $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = x^5 + y^5.$

c. $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4.$

d. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$

Bài 9. Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

a. $A = (3x + 7)(2x + 3) - (3x - 5)(2x + 11).$

b. $B = (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) - x(x^3 + x^2 - 3x - 2).$

c. $C = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1).$

d. $D = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3.$

e. $E = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1).$

Dạng 4. Tìm x

Bài 10. Tìm x biết:

- a. $x(x+3) - 2(-5x+1)x = x^2 - 3(4-2x)$. b. $3x(x-5) - 3x(x+2) = -2(5-4x)$.
 c. $3x(12x-4) - 9x(4x-3) = 30$. d. $x(5-2x) + 2x(x-1) = 15$.
 e. $-5x(x+1) - x(3-5x) = 3(2x-1)$. f. $4(x-1)2x - 2x(x-5) = -4(2x-1)$.

Bài 11. Tìm x biết:

- a. $(12x-5)(4x-1) + (3x-7)(1-16x) = 81$. b. $(x-1)(x+3) - (x-2)(x+4) = 5$.
 c. $(2x+1)(x-3) = 2x^2 + 12$. d. $(-3x+1)(x+2) + 3x^2 = 12 - 4x$.
 e. $(2x-2)(x-5) = (2x-3)(x+1)$. f. $(-2x-3)(x+1) = -2x^2 + 3(-2x+3)$

BÀI 2. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Một số hằng đẳng thức đáng nhớ

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.
- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.
- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

B – BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1. Thực hiện phép tính:

- | | | |
|--|---------------------------------------|---|
| a. $(2x + 3y)^2$. | b. $(5x - y)^2$. | c. $(2x + y^2)^3$. |
| d. $\left(x^2 + \frac{2}{5}y\right) \cdot \left(x^2 - \frac{2}{5}y\right)$. | e. $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$. | f. $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}y\right)^3$. |
| g. $(3x^2 - 2y)^3$. | h. $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$. | i. $(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9)$. |
| j. $(x + 2y + z)(x + 2y - z)$. | k. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$. | l. $(5 + 3x)^3$. |
| m. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. | n. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$. | |

Bài 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

- | | | |
|-------------------------|----------------------------|------------------------------|
| a. $x^2 + 4x + 4$. | b. $x^2 - 8x + 16$. | c. $x^2 + 2x + 1$. |
| d. $x^2 + 6x + 9$. | e. $16x^2 - 8x + 1$. | f. $9x^2 + 6x + 1$. |
| g. $36x^2 + 36x + 9$. | h. $x^3 + 27$. | i. $x^2 + 2x + 1$. |
| j. $9x^2 + y^2 + 6xy$. | k. $25a^2 + 4b^2 - 20ab$. | l. $x^2 - x + \frac{1}{4}$. |

Bài 3. Viết các biểu thức sau dưới dạng hiệu hai bình phương:

- | | | |
|--------------------|-----------------------|----------------------|
| a. $x^2 - 1$. | b. $4x^2 - 9$. | c. $x^2 - 25$. |
| d. $x^2 - 49$. | e. $x^2 - 81$. | f. $25x^2 - 49y^2$. |
| g. $7x^2 - 5y^2$. | h. $100x^2 - 25y^2$. | |

Bài 4. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a. $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$. | b. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. | c. $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. |
|-------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|

Bài 5. Tính giá trị biểu thức bằng cách vận dụng hằng đẳng thức:

a. $A = x^3 + 3x^2 + 3x + 6$ với $x = 19$.

b. $B = x^3 - 3x^2 + 3x$ với $x = 11$.

Bài 6. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

a. $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 1)$.

b. $(4x - 1)^3 - (4x - 3)(16x^2 + 3)$.

c. $2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2)$ với $x + y = 1$.

d. $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x + 1)(x - 1)$.

e. $\frac{(x + 5)^2 + (x - 5)^2}{x^2 + 25}$.

f. $\frac{(2x + 5)^2 + (5x - 2)^2}{x^2 + 1}$.

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a. $(x - 1)^3 + (2 - x)(4 + 2x + x^2) + 3x(x + 2) = 17$.

b. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 2) = 15$.

c. $(x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x + 1)^2 = 15$.

d. $x(x - 5)(x + 5) - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 3$.

Bài 8. So sánh hai số bằng cách vận dụng hằng đẳng thức:

a. $A = 1999.2001$ và $B = 2000^2$.

b. $A = 2^{16}$ và $B = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)$.

c. $A = 2011.2013$ và $B = 2012^2$.

d. $A = 4(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{64} + 1)$ và $B = 3^{128} - 1$.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a. $A = 5x - x^2$.

b. $B = x - x^2$.

c. $C = 4x - x^2 + 3$.

d. $D = -x^2 + 6x - 11$.

e. $E = 5 - 8x - x^2$.

f. $F = 4x - x^2 + 1$.

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a. $A = x^2 - 6x + 11$.

b. $B = x^2 - 20x + 101$.

c. $C = x^2 - 6x + 11$.

d. $D = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$.

e. $E = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 8$.

f. $F = x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$.

g. $G = x^2 - 4xy + 5y^2 + 10x - 22y + 28$.

Bài 11. Cho $a + b = S$ và $ab = P$. Hãy biểu diễn theo S và P , các biểu thức sau đây:

a. $A = a^2 + b^2$.

b. $B = a^3 + b^3$.

c. $C = a^4 + b^4$.

BÀI 3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phân tích đa thức nhân tử (hay thừa số) là biến đổi các đa thức đó thành tích các đa thức.

B – BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Dạng 1. Phương pháp đặt nhân tử chung

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $4x^2 - 6x$. b. $9x^4y^3 + 3x^2y^4$. c. $x^3 - 2x^2 + 5x$.
 f. $-3x - 6xy + 9xz$. g. $2x^2y - 4xy^2 + 6xy$. h. $4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 2x^4y$.
 i. $9x^2y^3 - 3x^4y^2 - 6x^3y^2 + 18xy^4$. k. $7x^2y^2 - 21xy^2z + 7xyz - 14xy$. l. $a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{3}{2}a^4x^2y$.

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $10x(x - y) - 8y(x - y)$. b. $\frac{2}{5}x(y - 1) - \frac{2}{5}y(y - 1)$.
 c. $x(x - 1) - y(1 - x)$ d. $3x(x - 1) + 5(x - 1)$.
 e. $2x^2(x + 1) + 4(x + 1)$.

Dạng 2. Phương pháp nhóm nhiều hạng tử

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $x^3 - 2x^2 + 2x - 13$. b. $x^2y + xy + x + 1$. c. $ax + by + ay + bx$.
 d. $x^2 - (a + b)x + ab$. e. $x^2y + xy^2 - x - y$. f. $ax^2 + ay - bx^2 - by$.

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $ax - 2x - a^2 + 2a$. b. $x^2 + x - ax - a$. c. $2x^2 + 4ax + x + 2a$.
 d. $2xy - ax + x^2 - 2ay$. e. $x^3 + ax^2 + x + a$. f. $x^2y^2 + y^3 + zx^2 + yz$.

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$. b. $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$. c. $x^3 + 2x^2y - x - 2y$.
 d. $3x^2 - 3y^2 - 2(x - y)^2$. e. $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$. f. $x^2 - y^2 - 2x - 2y$.

Bài 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $(x - 3)(x - 1) - 3(x - 3)$.
 b. $(x - 1)(2x + 1) + 3(x - 1)(x + 2)(2x + 1)$.
 c. $(6x + 3) - (2x - 5)(2x + 1)$.

d. $(x-5)^2 + (x+5)(x-5) - (5-x)(2x+1)$.

e. $(3x-2)(4x-3) - (2-3x)(x-1) - 2(3x-2)(x+1)$.

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $(a-b)(a+2b) - (b-a)(2a-b) - (a-b)(a+3b)$. b. $5xy^3 - 2xyz - 15y^2 + 6z$.

c. $(x+y)(2x-y) + (2x-y)(3x-y) - (y-2x)$. d. $ab^3c^2 - a^2b^2c^2 + ab^2c^3 - a^2bc^3$.

e. $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$.

Dạng 3. Phương pháp dùng hằng đẳng thức**Bài 8.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $4x^2 - 12x + 9$.

b. $4x^2 + 4x + 1$.

c. $1 + 12x + 36x^2$.

d. $9x^2 - 24xy + 16y^2$.

e. $\frac{x^2}{4} + 2xy + 4y^2$.

f. $-x^2 + 10x - 25$.

g. $-16a^4b^6 - 24a^5b^5 - 9a^6b^4$.

h. $25x^2 - 20xy + 4y^2$.

i. $25x^4 - 10x^2y + y^2$.

Bài 9. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $(3x-1)^2 - 16$.

b. $(5x-4)^2 - 49x^2$.

c. $(2x+5)^2 - (x-9)^2$.

d. $(3x+1)^2 - 4(x-2)^2$.

e. $9(2x+3)^2 - 4(x+1)^2$.

f. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

g. $(ax+by)^2 - (ay+bx)^2$.

h. $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab+2)^2$.

i. $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$.

j. $9(x+y-1)^2 - 4(2x+3y+1)^2$.

k. $-4x^2 + 12xy - 9y^2 + 25$.

l. $x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2$.

Bài 10. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $8x^3 - 64$.

b. $1 + 8x^6y^3$.

c. $125x^3 + 1$.

d. $8x^3 - 27$.

e. $27x^3 + \frac{y^3}{8}$.

f. $125x^3 + 27y^3$.

Bài 11. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

b. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

c. $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$.

d. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$.

e. $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$.

Bài 12. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy$.

b. $x^6 - y^6$.

c. $25 - a^2 + 2ab - b^2$.

d. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

e. $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 4c^2$.

Bài 13. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $(x^2 - 25)^2 - (x - 5)^2$. b. $(4x^2 - 25)^2 - 9(2x - 5)^2$. c. $4(2x - 3)^2 - 9(4x^2 - 9)^2$.
 d. $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$. e. $(3x^2 + 3x + 2)^2 - (3x^2 + 3x - 2)^2$.

Bài 14. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $(xy + 1)^2 - (x + y)^2$. b. $(x + y)^3 - (x - y)^3$.
 c. $3x^4y^2 + 3x^3y^2 + 3xy^2 + 3y^2$. d. $4(x^2 - y^2) - 8(x - ay) - 4(a^2 - 1)$.
 e. $(x + y)^3 - 1 - 3xy(x + y - 1)$.

Bài 15. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a. $x^3 - 1 + 5x^2 - 5 + 3x - 3$. b. $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$.
 c. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$. d. $5x^3 - 3x^2y - 45xy^2 + 27y^3$.
 e. $3x^2(a - b + c) + 36xy(a - b + c) + 108y^2(a - b + c)$.

Dạng 4. Một số phương pháp khác

Bài 16. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- a. $x^2 - 5x + 6$. b. $3x^2 + 9x - 30$. c. $x^2 - 3x + 2$.
 d. $x^2 - 9x + 18$. e. $x^2 - 6x + 8$. f. $x^2 - 5x - 14$.
 g. $x^2 + 6x + 5$. h. $x^2 - 7x + 12$. i. $x^2 - 7x + 10$.

Bài 17. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- a. $3x^2 - 5x - 2$. b. $2x^2 + x - 6$. c. $7x^2 + 50x + 7$.
 d. $12x^2 + 7x - 12$. e. $15x^2 + 7x - 2$. f. $a^2 - 5a - 14$.
 g. $2m^2 + 10m + 8$. h. $4p^2 - 36p + 56$. i. $2x^2 + 5x + 2$.

Bài 18. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- a. $x^2 + 4xy - 21y^2$. b. $5x^2 + 6xy + y^2$. c. $x^2 + 2xy - 15y^2$.
 d. $(x - y)^2 + 4(x - y) - 12$. e. $x^2 - 7xy + 10y^2$. f. $x^2yz + 5xyz - 14yz$.

Bài 19. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- a. $a^4 + a^2 + 1$. b. $a^4 + a^2 - 2$. c. $x^4 + 4x^2 - 5$.
 d. $x^3 - 19x - 30$. e. $x^3 - 7x - 6$. f. $x^3 - 5x^2 - 14x$.

Bài 20. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (thêm bớt cùng một hạng tử)

- a. $x^4 + 4$. b. $x^4 + 64$. c. $x^8 + x^7 + 1$.
 d. $x^8 + x^4 + 1$. e. $x^5 + x + 1$. f. $x^3 + x^2 + 4$.
 g. $x^4 + 2x^2 - 24$. h. $x^3 - 2x - 4$. i. $a^4 + 4b^4$.

Bài 21. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (đặt biến phụ)

- a. $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$. b. $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$.
 c. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12$. d. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$.
 e. $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$. f. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$.

Bài 22. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (đặt biến phụ)

- a. $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$. b. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.
 c. $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$. d. $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$.

Dạng 5. Tổng hợp

Bài 23. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| a. $x^2 + 4x + 3$. | b. $16x - 5x^2 - 3$. | c. $2x^2 + 7x + 5$. |
| d. $2x^2 + 3x - 5$. | e. $x^3 - 3x^2 + 1 - 3x$. | f. $x^2 - 4x - 5$. |
| g. $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$. | h. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$. | i. $x^4 + x^3 + x + 1$. |
| j. $x^4 - x^3 - x^2 + 1$. | k. $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2$. | l. $x^4 + 4x^2 - 5$. |

Bài 24. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a. $-x - y^2 + x^2 - y$. | b. $x(x + y) - 5x - 5y$. | c. $x^2 - 5x + 5y - y^2$. |
| d. $5x^3 - 5x^2y - 10x^2 + 10xy$. | e. $27x^3 - 8y^3$. | f. $x^2 - y^2 - x - y$. |
| g. $x^2 - y^2 - 2xy + y^2$. | h. $x^2 - y^2 + 4 - 4x$. | i. $x^6 - y^6$. |
| j. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 27z^3$. | k. $4x^2 + 4x - 9y^2 + 1$. | l. $x^2 - 3x + xy - 3y$. |

Bài 25. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|--|
| a. $5x^2 - 10xy + 5y^2 - 20z^2$. | b. $x^2 - z^2 + y^2 - 2xy$. | c. $a^3 - ay - a^2x + xy$. |
| d. $x^2 - 2xy - 4z^2 + y^2$. | e. $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 12z^2$. | f. $x^2 - 6xy - 25z^2 + 9y^2$. |
| g. $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$. | h. $x^2 - 2xy + y^2 - xz + yz$. | i. $x^2 - 2xy + tx - 2ty$. |
| j. $2xy + 3z + 6y + xz$. | k. $x^2 + 2xz + 2xy + 4yz$. | l. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$. |

Bài 26. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | |
|--|--|
| a. $x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3$. | b. $bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b)$. |
| c. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$. | d. $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$. |
| e. $x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1$. | f. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$. |
| g. $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$. | h. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. |

Bài 27. Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|--|
| a. $(x - 2)^2 - (x - 3)(x + 3) = 6$. | b. $(x + 3)^2 + (4 + x)(4 - x) = 10$. |
| c. $(x + 4)^2 + (1 - x)(1 + x) = 7$. | d. $(x - 4)^2 - (x - 2)(x + 2) = 6$. |
| e. $4(x - 3)^2 - (2x - 1)(2x + 1) = 10$. | f. $25(x + 3)^2 + (1 - 5x)(1 + 5x) = 8$. |
| g. $9(x + 1)^2 - (3x - 2)(3x + 2) = 10$. | h. $-4(x - 1)^2 + (2x - 1)(2x + 1) = -3$. |

Bài 28. Chứng minh rằng:

- | |
|---|
| a. $a^2(a + 1) + 2a(a + 1)$ chia hết cho 6 với $a \in \mathbb{Z}$. |
| b. $a(2a - 3) - 2a(a + 1)$ chia hết cho 5 với $a \in \mathbb{Z}$. |
| c. $x^2 + 2x + 2 > 0$ với $x \in \mathbb{Z}$. |
| d. $-x^2 + 4x - 5 < 0$ với $x \in \mathbb{Z}$. |

BÀI 4. PHÉP CHIA ĐƠN THỨC - PHÉP CHIA ĐA THỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nhắc lại kiến thức lớp 7

Với mọi $x \neq 0, m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$ thì

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad \text{nếu } m > n$$

$$x^m : x^n = 1 \quad \text{nếu } m = n$$

2. Chia đơn thức cho đơn thức

Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B ta làm như sau

- Chia hệ số của đơn thức A cho đơn thức B .
- Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B .
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

3. Chia đa thức cho đơn thức

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B , ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

4. Chia đa thức cho đa thức

Người ta chứng minh được rằng đối với hai đa thức A, B tùy ý của cùng một biến $B \neq 0$, tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q, R sao cho $A = B.Q + R$, trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B (R được gọi là dư trong phép chia A cho B). Nếu $R = 0$ phép chia A cho B là phép chia hết.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Chia đơn thức cho đơn thức. Chia đa thức cho đơn thức

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a. $(-2)^5 : (-2)^3$.

b. $(-y)^7 : (-y)^3$.

c. $x^{12} : (-x^{10})$.

d. $(2x^6) : (2x)^3$.

e. $(-3x)^5 : (-3x)^2$.

f. $(xy^2)^4 : (xy^2)^2$.

Bài 2. Thực hiện phép tính:

a. $(x + 2)^9 : (x + 2)^6$.

b. $(x - y)^4 : (x - 2)^3$.

c. $(x^2 + 2x + 4)^5 : (x^2 + 2x + 4)$.

d. $2(x^2 + 1)^3 : \frac{1}{3}(x^2 + 1)$.

e. $5(x - y)^5 : \frac{5}{6}(x - y)^2$.

Bài 3. Thực hiện phép tính:

a. $6xy^2 : 3y$.

b. $6x^2y^3 : 2xy^2$.

c. $8x^2y : 2xy$.

d. $5x^2y^5 : xy^3$.

e. $(-4x^4y^3) : 2x^2y$.

f. $xy^3z^4 : (-2xz^3)$.

g. $\frac{3}{4}x^3y^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right).$

h. $9x^2y^4z : 12xy^3.$

i. $(2x^3y)(3xy^2) : 2x^3y^2.$

j. $\frac{(3a^2b)^3(ab^3)^2}{(a^2b^2)^4}.$

k. $\frac{(2xy^2)^3(3x^2y)^2}{(2x^3y^2)^2}.$

Bài 4. Thực hiện phép tính:

a. $(2x^3 - x^2 + 5x) : x.$

b. $(3x^4 - 2x^3 + x^2) : (-2x).$

c. $(-2x^5 + 3x^2 - 4x^3) : 2x^2.$

d. $(x^3 - 2x^2y + 3xy^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right).$

e. $[3(x - y)^5 - 2(x - y)^4 + 3(x - y)^2] : 5(x - y)^2.$

Bài 5. Thực hiện phép tính:

a. $(3x^5y^2 + 4x^3y^3 - 5x^2y^4) : 2x^2y^2.$

b. $\left(\frac{3}{5}a^6x^3 + \frac{3}{7}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3.$

c. $(9x^2y^3 - 15x^4y^4) : 3x^2y - (2 - 3x^2y)y^2.$

d. $(6x^2 - xy) : x + (2x^3y + 3xy^2) : xy - (2x - 1)x.$

e. $(x^2 - xy) : x + (6x^2y^5 - 9x^3y^4 + 15x^4y^2) : \frac{3}{2}x^2y^3.$

Dạng 2. Chia đa thức cho đa thức**Bài 6.** Thực hiện phép tính:

a. $(x^3 - 3x^2) : (x - 3).$

b. $(2x^2 + 2x - 4) : (x + 2).$

c. $(x^4 - x - 14) : (x - 2).$

d. $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3).$

e. $(x^3 + x^2 - 12) : (x - 2).$

f. $(2x^3 - 5x^2 + 6x - 15) : (2x - 5).$

g. $(-3x^3 + 5x^2 - 9x + 15) : (5 - 3x).$

h. $(-x^2 + 6x^3 - 26x + 21) : (2x - 3).$

Bài 7. Thực hiện phép tính:

a. $(2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3 - 3x) : (x^2 - 3).$

b. $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1).$

c. $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 3) : (2x^2 - x + 1).$

d. $(8x - 8x^3 - 10x^2 + 3x^4 - 5) : (3x^2 - 2x + 1).$

e. $(-x^3 + 2x^4 - 4 - x^2 + 7x) : (x^2 + x - 1).$

Bài 8. Thực hiện phép tính:

a. $(5x^2 + 9xy - 2y^2) : (x + 2y).$

b. $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3) : (x^2 + y^2).$

c. $(4x^5 + 3xy^4 - y^5 + 2x^4y - 6x^3y^2) : (2x^3 + y^3 - 2xy^2).$

d. $(2a^3 + 7ab^2 - 7a^2b - 2b^3) : (2a - b).$

Bài 9. Thực hiện phép tính:

a. $(2x + 4y)^2 : (x + 2y) - (9x^3 - 12x^2 - 3x) : (-3x) - 3(x^2 + 3).$

b. $(13x^2y^2 - 5x^4 + 6y^4 - 13x^3y - 13xy^3) : (2y^2 - x^2 - 3xy).$

Bài 10. Tìm a, b để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$, với:

a. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b, g(x) = x^2 - x - 2.$

b. $f(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a, g(x) = x^2 - x + 5.$

c. $f(x) = 3x^3 + 10x^2 - 5 + a, g(x) = 3x + 1.$

d. $f(x) = x^3 - 3x + a, g(x) = (x - 1)^2.$

Bài 11. Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ để tìm thương và dư:

a. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1, g(x) = x^2 + 2x - 1.$

b. $f(x) = 2 - 4x + 3x^4 + 7x^2 - 5x^3, g(x) = 1 + x^2 - x.$

c. $f(x) = 19x^2 - 11x^3 + 9 - 20x + 2x^4, g(x) = 1 + x^2 - 4x.$

d. $f(x) = 3x^4y - x^5 - 3x^3y^2 + x^2y^3 - x^2y^2 + 2xy^3 - y^4, g(x) = x^3 - x^2y + y^2.$

Dạng 3. Tìm đa thức bằng phương pháp hệ số bất định

Bài 12. Cho biết đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$. Tìm đa thức thương:

a. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 10, g(x) = x - 2.$

b. $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 4, g(x) = x - 2.$

Bài 13. Phân tích đa thức $P(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$ thành nhân tử, biết rằng một nhân tử có dạng: $x^2 + dx + 2.$

Bài 14. Với giá trị nào của a và b thì đa thức $x^3 + ax^2 + 2x + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$?

Bài 15. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^3 - x^2 - 14x + 24.$

b. $x^3 + 4x^2 + 4x + 3.$

c. $x^3 - 7x - 6.$

d. $x^3 - 19x - 30.$

e. $a^3 - 6a^2 + 11a - 6.$

Bài 16. Tìm các giá trị a, b, k để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$:

a. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k, g(x) = x^2 - x - 2.$

b. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b, g(x) = x^2 - 3x + 4.$

Bài 17. Tìm tất cả các số tự nhiên k để cho đa thức $f(k) = k^3 + 2k^2 + 15$ chia hết cho nhị thức $g(k) = k + 3.$

BÀI 5. ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a. $(3x^3 - 2x^2 + x + 2) \cdot (5x^2)$.

b. $(a^2x^3 - 5x + 3a) \cdot (-2a^3x)$.

c. $(3x^2 + 5x - 2)(2x^2 - 4x + 3)$.

d. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $(a^2 + a - 1)(a^2 - a + 1)$.

b. $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4)$.

c. $(2 + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 - 12xy$.

d. $(x+1)^3 - (x-1)^3 - (x^3 - 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$.

Bài 3. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào không phụ thuộc vào x :

a. $(x - 1)^3 - (x + 1)^3 + 6(x + 1)(x - 1)$.

b. $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

c. $(x - 2)^2 - (x - 3)(x - 1)$.

d. $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

e. $(x - 1)^3 - (x + 1)^3 + 6(x + 1)(x - 1)$.

f. $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 - 12x$.

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = a^3 - 3a^2 + 3a + 4$ với $a = 11$.

b. $B = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2)$ với $x + y = 1$.

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $1 + 2xy - x^2 - y^2$.

b. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab + 2cd$.

c. $a^3b^3 - 1$.

d. $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$.

e. $x^2 - 15x + 36$.

f. $x^{12} - 3x^6y^6 + 2y^{12}$.

g. $x^8 - 64x^2$.

h. $(x^2 - 8)^2 - 784$.

Bài 6. Thực hiện phép chia các đa thức sau: (đặt phép chia vào bài)

a. $(35x^3 + 41x^2 + 13x - 5) : (5x - 2)$.

b. $(x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 22x + 15) : (x^2 - 2x + 3)$.

c. $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3) : (x^2 + y^2)$.

d. $(4x^4 - 14x^3y - 24x^2y^2 - 54y^4) : (x^2 - 3xy - 9y^2)$.

Bài 7. Thực hiện phép chia các đa thức sau:

a. $(3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 8x - 5) : (3x^2 - 2x + 1)$.

b. $(2x^3 - 9x^2 + 19x - 15) : (x^2 - 3x + 5)$.

c. $(15x^4 - x^3 - x^2 + 41x - 70) : (3x^2 - 2x + 7)$.

d. $(6x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 5xy^4 + 2y^5) : (3x^3 - 2xy^2 + y^3)$.

Bài 8. Tìm x biết:

a. $x^3 - 16x = 0$.

b. $2x^3 - 50x = 0$.

c. $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$.

d. $5x^2 - 4(x^2 - 2x + 1) - 5 = 0$.

e. $(x^2 - 9)^2 - (x - 3)^2 = 0$.

f. $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Bài 9. Chứng minh rằng:

a. $a^2 + 2a + b^2 + 1 \geq 0$ với mọi giá trị của a và b .

b. $x^2 + y^2 + 2xy + 4 > 0$ với mọi giá trị của x và y .

c. $(x - 3)(x - 5) + 2 > 0$ với mọi giá trị của x .

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a. $x^2 + x + 1$.

b. $2 + x - x^2$.

c. $x^2 - 4x + 1$.

d. $4x^2 + 4x + 11$.

e. $3x^2 - 6x + 1$.

f. $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.

g. $h(h + 1)(h + 2)(h + 3)$.

BÀI 6. MỘT SỐ ĐỀ TỰ LUYỆN NÂNG CAO

Đề số 1

Phần I. Trắc nghiệm

Câu 1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào sai

☐ A $a + b = (a + b)^2$.

☐ B $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

☐ C $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

☐ D $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Câu 2. Phân tích đa thức $x^2 - 2x$ thành nhân tử ta được

☐ A $x(x + 2)$.

☐ B $x(x - 2)$.

☐ C $x(x^2 - 2)$.

☐ D Cả A, B, C đều sai.

Câu 3. Trong chương trình sách giáo khoa Toán lớp 8 học kì I, có bao nhiêu hằng đẳng thức đáng nhớ?

☐ A 4.

☐ B 5.

☐ C 6.

☐ D 7.

Câu 4. Khai triển hằng đẳng thức $(x + 2)^2$, ta được

☐ A $x^2 + 2x + 4$.

☐ B $x^2 + 4x + 4$.

☐ C $x^2 + 2x + 2$.

☐ D $x^2 + 4x + 2$.

Câu 5. Chọn khẳng định đúng

☐ A $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

☐ B $(a + b)^2 = (a + b)(a - b)$.

☐ C $(a - b)(a + b) = a^2 + b^2$.

☐ D $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Câu 6. Phân tích đa thức $x^2 - 5x + 6$ thành nhân tử, ta được

☐ A $(x + 2)(x + 3)$.

☐ B $(x - 2)(x + 3)$.

☐ C $(x - 2)(x - 3)$.

☐ D $(x + 2)(x - 3)$.

Câu 7. Chọn khẳng định đúng

☐ A $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.

☐ B $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 4xy$.

☐ C $x^2 + y^2 = (x - y)(x + y)$.

☐ D $x^2 + y^2 = (x - y)^2$.

Câu 8. $(x + 1)^2$ được khai triển thành

☐ A $x^2 + x$.

☐ B $x^2 + 2x + 2$.

☐ C $x^2 + 2x + 1$.

☐ D $x^2 + 1$.

Câu 9. Chọn khẳng định đúng

☐ A $x^2 - 7 = (x + 7)(x - 7)$.

☐ B $x^2 - 7 = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$.

☐ C $x^2 - 25 = (x - 25)(x + 25)$.

☐ D $x^2 - 5 = (x - 5)(x + 5)$.

Câu 10. Chọn khẳng định đúng

☐ A $x + y = (x + y)^2$.

☐ B $(x - y)^2 = x^2 + y^2$.

☐ C $(x + y)^2 = x^2 + y^2$.

☐ D $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$.

Câu 11. Tìm x biết $x(x + 1) = 0$.

☐ A $x = 0; x = 1$.

☐ B $x = 0; x = -1$.

☐ C $x = 0; x = 2$.

☐ D $x = 0; x = -2$.

Câu 12. Phân tích đa thức $x(y - 1) - 2z(y - 1)$ ta được

☐ A $(y + 1)(1 - 2z)$.

☐ B $(y - 1)(-1 + 2z)$.

☐ C $(y - 1)(1 + 2z)$.

☐ D $(y - 1)(1 - 2z)$.

Câu 13. Tìm x biết $(2x - 1)(x + 3) = 0$.

☐ A $x = \frac{1}{2}; x = -3$.

☐ B $x = \frac{1}{2}; x = 3$.

☐ C $x = -\frac{1}{2}; x = 3$.

☐ D $x = -\frac{1}{2}; x = -3$.

Câu 14. Phân tích đa thức $2x^3 - 8x$ ta được

☐ A $2x(x - 4)(x + 4)$.

☐ B $2x(x^2 + 4)$.

☐ C $2x(x - 2)(x + 2)$.

☐ D $2x(x^3 - 4)$.

Câu 15. Cho $x + y = 9; xy = 14$. Tính $x^2 + y^2$

☐ A 52.

☐ B 53.

☐ C 54.

☐ D 55.

Câu 16. Cho x, y là hai số khác nhau, thỏa mãn điều kiện $9x(x - y) - 10(y - x)^2 = 0$. Khi đó

- (A) $x = 10y$. (B) $x = -10y$. (C) $y = 10x$. (D) $y = -10x$.

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x + 3y - 5)^2 - 6xy + 26$ là

- (A) -2 . (B) -1 . (C) 0 . (D) 1 .

Câu 18. Cho đa thức $P(x) = (x + 5)(ax^2 + bx + 25)$ và $Q(x) = x^3 + 125$. $P(x) = Q(x)$ khi và chỉ khi

- (A) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$. (C) $\begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$.

Câu 19. Xác định các hệ số a, b sao cho đa thức $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$

- (A) $a = 0; b = 1$. (B) $a = 1; b = 0$. (C) $a = 0; b = -1$. (D) $a = -1; b = 0$.

Câu 20. Xác định các hệ số a, b, c sao cho $(2x - 5)(3x + b) = ax^2 + x + c$ với mọi x .

- (A) $a = 6; b = 8; c = -40$. (B) $a = 6; b = -8; c = -40$.
(C) $a = -6; b = 8; c = -40$. (D) $a = 6; b = 8; c = 40$.

Phần II. Tự luận

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

Bài 3. Tìm GTLN và GTNN của các biểu thức sau

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. B	5. D	6. C	7. A	8. C	9. B	10. D
11. B	12. D	13. A	14. C	15. B	16. A	17. B	18. A	19. C	20. A

Đề số 2

Câu 1. Chọn khẳng định đúng

- (A) $x - y = (x + y)(x - y)$. (B) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
(C) $5x^2 + 3y^2 = (\sqrt{5}x + \sqrt{3}y)(\sqrt{5}x - \sqrt{3}y)$. (D) Cả ba câu A, B, C đều sai.

Câu 2. Trong các phương án sau, phương án nào sai?

- (A) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. (B) $x^2 - 4x = x(x - 4)$.
(C) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. (D) $x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Câu 3. Khai triển hằng đẳng thức $(x + 2y)^2$ ta được

- (A) $x^2 + 4xy + 2y^2$. (B) $x^2 + 2xy + 4y^2$. (C) $x^2 + 4xy + 4y^2$. (D) $x + 2xy + y^2$.

Câu 4. Phân tích đa thức $x^2(x - y) - (x - y)$ ta được

- (A) $(x - y)(x^2 + 1)$. (B) $(x - y)(x - 1)(x + 1)$.
(C) $(x + 1)(x - y)$. (D) $(x + y)(x - y)$.

Câu 5. Phân tích đa thức $x^3 - 8$ thành nhân tử, ta được

- (A) $(x + 2)(x - 2x + 4)$. (B) $(x + 2)(x + 4x + 4)$.
(C) $(x - 2)(x - 4x + 4)$. (D) $(x - 2)(x + 2x + 4)$.

Câu 6. Cho $x + y = 9; xy = 14$. Khi đó giá trị của $x^3 + y^3$ là

- (A) 350. (B) 351. (C) 352. (D) 349.

Câu 7. Phân tích đa thức $x^2 - x$ ta được

- (A) $x(x - 1)$. (B) $x(x^2 - 1)$. (C) $x(x + 1)$. (D) $x(1 - x)$.

Câu 8. Cho $x, y > 0$ và $x - y = 7$; $xy = 60$ thì giá trị của biểu thức $x^2 - y^2$ là

- (A) 120. (B) 121. (C) 118. (D) 119.

Câu 9. Cho $b + c = 10$. Đẳng thức nào đúng?

- (A) $(10a + b)(10a + c) = 10a(a + 1) - bc$. (B) $(10a + b)(10a + c) = 10a(a + 1) - 2bc$.
(C) $(10a + b)(10a + c) = 10a(a + 1) + 2bc$. (D) $(10a + b)(10a + c) = 10a(a + 1) + bc$.

Câu 10. Cho $x + y + z = 0$. Chọn đẳng thức đúng.

- (A) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. (B) $x^3 + y^3 + z^3 = 9xyz$.
(C) $x^3 + y^3 + z^3 = 27xyz$. (D) $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$.

Câu 11. Phân tích đa thức $P = 12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$ thành nhân tử ta được

- (A) $(2x + 3)^2(3x - 1)$. (B) $(2x - 3)^2(3x + 1)$.
(C) $(2x - 3)^2(3x - 1)$. (D) $(2x + 3)(2x - 3)(3x + 1)$.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x - 3)^2 + (x - 11)^2$ là

- (A) 30. (B) 31. (C) 32. (D) 29.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 19 - 6x - 9x^2$ là

- (A) 20. (B) 10. (C) 30. (D) 40.

Câu 14. Cho $x > y > 0$ và $x - y = 7$; $xy = 60$ thì giá trị của biểu thức $x^4 + y^4$ là

- (A) 21360. (B) 21361. (C) 21362. (D) 21359.

Câu 15. Nếu $x - y = 2$ thì giá trị của biểu thức $P = 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2$ là

- (A) 21360. (B) 21361. (C) 21362. (D) 21359.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. B	5. D	6. B	7. A	8. D	9. D	10. A
11. D	12. C	13. A	14. B	15. B					

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

BÀI 1. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là các đa thức và B khác đa thức 0. A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

2. Hai phân thức bằng nhau

Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ (trong đó các đa thức C, D khác đa thức 0) được gọi là bằng nhau nếu $A.D = B.C$

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Tìm điều kiện để phân thức có nghĩa

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của phân thức:

a. $\frac{x^2 - 4}{9x^2 - 16}$

b. $\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$

c. $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

d. $\frac{5x - 3}{2x^2 - x}$

e. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}$

f. $\frac{2}{(x + 1)(x - 3)}$

g. $\frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

h. $\frac{1}{x^2 + y^2}$

i. $\frac{x^2y + 2x}{x^2 - 2x + 1}$

j. $\frac{5x + y}{x^2 + 6x + 10}$

k. $\frac{x + y}{(x + 3)^2 + (y - 2)^2}$

l. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

Dạng 2. Tìm điều kiện để phân thức bằng 0

Bài 2. Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau bằng không:

a. $\frac{2x - 1}{5x - 10}$

b. $\frac{x^2 - x}{2x}$

c. $\frac{2x + 3}{4x - 5}$

d. $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x^2 - 4x + 3}$

e. $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x^2 - 4x + 3}$

f. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 3. Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau bằng không:

a. $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$

b. $\frac{x^3 - 16x}{x^3 - 3x^2 - 4x}$

c. $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x - 3}$

BÀI 2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ. RÚT GỌN PHÂN THỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất cơ bản của phân thức

Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \quad M \text{ là một đa thức khác đa thức } 0$$

Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A : N}{B : N} \quad N \text{ là một nhân tử chung}$$

2. Quy tắc đổi dấu

Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

3. Rút gọn phân thức

Muốn rút gọn một phân thức ta có thể:

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.
- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Phân thức bằng nhau

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\frac{3y}{4} = \frac{6xy}{8x} \quad (x \neq 0).$

b. $\frac{-3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{-2y} \quad (y \neq 0).$

c. $\frac{2(x-y)}{3(y-x)} = \frac{-2}{3} \quad (x \neq y).$

d. $\frac{2xy}{3a} = \frac{8xy^2}{12ay} \quad (a \neq 0, y \neq 0).$

e. $\frac{1-x}{2-y} = \frac{x-1}{y-2} \quad (y \neq 2).$

f. $\frac{2a}{-5b} = \frac{-2a}{5b} \quad (b \neq 0).$

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\frac{x-2}{-x} = \frac{2^3-x^3}{x(x^2+2x+4)} \quad (x \neq 0).$

b. $\frac{3x}{x+y} = \frac{-3x(x-y)}{y^2-x^2} \quad (x \neq \pm y).$

c. $\frac{x+y}{3a} = \frac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)} \quad (a \neq 0, x \neq -y).$

Bài 3. Với những giá trị nào của x thì hai phân thức sau $\frac{x-2}{x^2-5x+6}$ và $\frac{1}{x-3}$ bằng nhau?

Bài 4. Cho hai phân thức $A = \frac{(2x+1)(x-2)}{3(2x+1)}$ và $B = \frac{x-2}{3}$. Hãy xét sự bằng nhau của chúng trong các trường hợp sau:

i. $x \in \mathbb{N}$.

ii. $x \in \mathbb{Z}$.

iii. $x \in \mathbb{Q}$.

Bài 5. Cho ba phân thức $A = \frac{x+1}{5}$, $B = \frac{(x+1)(x+2)}{5(x+2)}$ và $C = \frac{(x+1)(3x-2)}{5(3x-2)}$. Hãy xét sự bằng nhau của chúng trong các trường hợp sau:

i. $x \in \mathbb{N}$.

ii. $x \in \mathbb{Z}$.

iii. $x \in \mathbb{Q}$.

Dạng 2. Rút gọn phân thức

Bài 6. Rút gọn các phân thức sau:

a. $\frac{5x}{10}$.

b. $\frac{4xy}{2y} (y \neq 0)$.

c. $\frac{21x^2y^3}{6xy} (xy \neq 0)$.

d. $\frac{2x+2y}{4}$.

e. $\frac{5x-5y}{3x-3y} (x \neq y)$.

f. $\frac{-15x(x-y)}{3(y-x)} (x \neq y)$.

g. $\frac{36(x-2)^3}{32-16x}$.

h. $\frac{x^2-xy}{5y^2-5xy}$.

i. $\frac{3x^2-12x+12}{x^4-8x}$.

k. $\frac{7x^2+14x+7}{3x^2+3x}$.

l. $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3}$.

m. $\frac{y^2-x^2}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$.

Bài 7. Rút gọn các phân thức sau:

a. $\frac{x^2-16}{4x-x^2} (x \neq 0, x \neq 4)$.

b. $\frac{x^2+4x+3}{2x+6} (x \neq -3)$.

c. $\frac{15x(x+y)^3}{5y(x+y)^2} (y + (x+y) \neq 0)$.

d. $\frac{5(x-y)-3(y-x)}{10(x-y)} (x \neq y)$.

e. $\frac{2x+2y+5x+5y}{2x+2y-5x-5y} (x \neq -y)$.

f. $\frac{x^2-xy}{3xy-3y^2} (x \neq y, y \neq 0)$.

g. $\frac{4x^2-4xy}{5x^3-5x^2y} (x \neq 0, x \neq y)$.

i. $\frac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z} (x+y+z \neq 0)$.

j. $\frac{x^6+2x^3y^3+y^6}{x^7-xy^6} (x \neq 0, x \neq \pm y)$.

Bài 8. Rút gọn, rồi tính giá trị các phân thức sau:

a. $A = \frac{(2x^2+2x)(x-2)^2}{(x^3-4x)(x+1)}$ với $x = \frac{1}{2}$.

b. $B = \frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^3+y^3}$ với $x = -5, y = 10$.

Bài 9. Rút gọn các phân thức sau:

a. $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$.

b. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$.

c. $\frac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$.

Bài 10. Rút gọn các phân thức sau:

$$\text{a. } \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}.$$

$$\text{c. } \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}.$$

$$\text{e. } \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2}.$$

$$\text{b. } \frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z-x)^2}.$$

$$\text{d. } \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)}.$$

$$\text{f. } \frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{x^{26} + x^{24} + x^{22} + \dots + x^2 + 1}.$$

Bài 11. Tìm giá trị của biến x để:

$$\text{a. } P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

$$\text{b. } Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Bài 12. Chứng minh rằng phân thức sau đây không phụ thuộc vào x và y :

$$\text{a. } \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}.$$

$$\text{b. } \frac{3xy - 3x + 2y - 2}{y - 1} - \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} \left(x \neq \frac{1}{3}, y \neq 1 \right).$$

$$\text{c. } \frac{ax^2 - a}{x + 1} - \frac{axy + ax - ay - a}{y + 1}.$$

$$\text{d. } \frac{(x + a)^2 - x^2}{2x + a}.$$

$$\text{e. } \frac{x^2 - y^2}{(x + y)(ay - ax)}.$$

$$\text{f. } \frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay}.$$

BÀI 3. CÁC PHÉP TOÁN VỀ PHÂN THỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức

Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta có thể làm như sau:

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung.
- Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức.
- Nhân cả tử và mẫu của mỗi mẫu thức với nhân tử phụ tương ứng.

2. Phép cộng, trừ các phân thức đại số

Muốn cộng hai phân thức đại số, ta có thể làm như sau

- Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.
- Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

Phép trừ cũng tương tự như phép cộng

3. Phép nhân các phân thức đại số

Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

4. Phép chia các phân thức đại số

Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

với $\frac{C}{D} \neq 0$.

Dạng 1. Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức

Bài 1. Tìm điều kiện để các phân thức sau có nghĩa và tìm mẫu thức chung của chúng:

a. $\frac{x}{16}, \frac{xy}{20}.$

b. $\frac{1}{4x}, \frac{3}{6y}.$

c. $\frac{xy}{8}, \frac{y}{15}.$

d. $\frac{x}{2y}, \frac{y}{2x}.$

e. $\frac{xy}{8}, \frac{yz}{12}, \frac{xz}{24}.$

f. $\frac{xy}{2z}, \frac{yz}{3x}, \frac{zx}{4y}.$

Bài 2. Tìm điều kiện để các phân thức sau có nghĩa và tìm mẫu thức chung của chúng:

a. $\frac{5}{2x-4}, \frac{4}{3x-9}, \frac{7}{50-25x}.$

b. $\frac{x}{4+2a}, \frac{y}{4-2a}, \frac{z}{4-a^2}.$

$$\text{c. } \frac{2a}{b^2}, \frac{x}{2a+2b}, \frac{y}{a^2-b^2}.$$

$$\text{d. } \frac{3}{2x+6}, \frac{x-2}{x^2+6x+9}.$$

$$\text{e. } \frac{1}{x^2-2x+1}, \frac{2}{x^2+2x}.$$

$$\text{f. } \frac{x^4+1}{x^2-1}, x^2+1.$$

Bài 3. Qui đồng mẫu thức các phân thức sau:

$$\text{a. } \frac{x}{2x^2+7x-15}, \frac{x+2}{x^2+3x-10}, \frac{1}{x+5}.$$

$$\text{b. } \frac{1}{-x^2+3x-2}, \frac{1}{x^2+5x-6}, \frac{1}{-x^2+4x-3}.$$

$$\text{c. } \frac{3}{x^3-1}, \frac{2x}{x^2+x+1}, \frac{x}{x-1}.$$

$$\text{d. } \frac{x^3}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}, \frac{x}{y^2-xy}.$$

$$\text{e. } \frac{x}{x^2-2xy+y^2-z^2}, \frac{y}{x^2+2yz-y^2-z^2}, \frac{z}{x^2-2xz-y^2+z^2}.$$

Dạng 2. Cộng, trừ các phân thức

Bài 4. Thực hiện phép tính:

$$\text{a. } \frac{x-5}{5} + \frac{1-x}{5}.$$

$$\text{b. } \frac{x-y}{8} + \frac{2y}{8}.$$

$$\text{c. } \frac{x^2-x}{xy} + \frac{1-4x}{xy}.$$

$$\text{d. } \frac{5xy^2-x^2y}{3xy} + \frac{4xy^2+x^2y}{3xy}.$$

$$\text{e. } \frac{x+1}{a-b} + \frac{x-1}{a-b} + \frac{x+3}{a-b}.$$

$$\text{f. } \frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3}.$$

$$\text{g. } \frac{2x^2-xy}{x-y} + \frac{xy+y^2}{y-x} + \frac{2y^2-x^2}{x-y}.$$

Bài 5. Thực hiện phép tính:

$$\text{a. } \frac{2x+4}{10} + \frac{2-x}{15}.$$

$$\text{b. } \frac{3x}{10} + \frac{2x-1}{15} + \frac{2-x}{20}.$$

$$\text{c. } \frac{x+1}{2x-2} + \frac{x^2+3}{2-2x^2}.$$

$$\text{d. } \frac{1-2x}{2x} + \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2x-4x^2}.$$

$$\text{e. } \frac{x}{xy-y^2} + \frac{2x-y}{xy-x^2}.$$

$$\text{f. } \frac{x^2}{x^2-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2}.$$

$$\text{g. } \frac{2x^2-10xy}{2xy} + \frac{5y-x}{y} + \frac{x+2y}{x}.$$

$$\text{h. } \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{-3x}{x^2-y^2}.$$

$$\text{i. } x+y + \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Bài 6. Thực hiện phép tính:

$$\text{a. } \frac{2x}{x^2+2xy} + \frac{y}{xy-2y^2} + \frac{4}{x^2-4y^2}.$$

$$\text{b. } \frac{1}{x-y} + \frac{3xy}{y^3-x^3} + \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}.$$

$$\text{c. } \frac{2x+y}{2x^2-xy} + \frac{16x}{y^2-4x^2} + \frac{2x-y}{2x^2+xy}.$$

$$\text{d. } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}.$$

Bài 7. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{1-3x}{2} - \frac{x+3}{2}$.

c. $\frac{3x+1}{x+y} - \frac{2x-3}{x+y}$.

e. $\frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y}$.

b. $\frac{2(x+y)(x-y)}{x} - \frac{-2y^2}{x}$.

d. $\frac{xy}{2x-y} - \frac{x^2-1}{y-2x}$.

Bài 8. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{4x+1}{2} - \frac{3x+2}{3}$.

c. $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x}$.

e. $\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$.

g. $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{6}{a-1}$.

i. $\frac{x+9y}{x^2-9y^2} - \frac{3y}{x^2+3xy}$.

k. $\frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x}$.

m. $\frac{5}{a+1} - \frac{10}{a-(a^2+1)} - \frac{15}{a^3+1}$.

b. $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-3} + \frac{9}{x^2-3x}$.

d. $\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{-10x+8}{9x^2-4}$.

f. $\frac{3x}{5x+5y} - \frac{x}{10x-10y}$.

h. $\frac{5x^2-y^2}{xy} - \frac{3x-2y}{y}$.

j. $\frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1}$.

l. $x^2+1 - \frac{x^4+1}{x^2+1}$.

Dạng 3. Nhân, chia các phân thức

Bài 9. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{1}{x} \cdot \frac{6x}{y}$.

d. $\frac{2x^2}{x-y} \cdot \frac{y}{5x^3}$.

g. $\frac{x^2-9y^2}{x^2y^2} \cdot \frac{3xy}{2x-6y}$.

b. $\frac{2x^2}{y} \cdot 3xy^2$.

e. $\frac{5x+10}{4x-8} \cdot \frac{4-2x}{x+2}$.

h. $\frac{3x^2-3y^2}{5xy} \cdot \frac{15x^2y}{2y-2x}$.

c. $\frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2}$.

f. $\frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{3}{6-x}$.

i. $\frac{2a^3-2b^3}{3a+3b} \cdot \frac{6a+6b}{a^2-2ab+b^2}$.

Bài 10. Thực hiện phép tính:

a. $\frac{2x}{3} : \frac{5}{6x^2}$.

d. $\frac{x^2-y^2}{6x^2y} : \frac{x+y}{3xy}$.

g. $\frac{1-4x^2}{x^2+4x} : \frac{2-4x}{3x}$.

j. $\frac{4x-24}{5x+5} : \frac{x^2-36}{x^2+2x+1}$.

b. $16x^2y^2 : \left(-\frac{18x^2y^5}{5}\right)$.

e. $\frac{a^2+ab}{b-a} : \frac{a+b}{2a^2-2b^2}$.

h. $\frac{5x-15}{4x+4} : \frac{x^2-9}{x^2+2x+1}$.

k. $\frac{3x+21}{5x+5} : \frac{x^2-49}{x^2+2x+1}$.

c. $\frac{25x^3y^5}{3} : 15xy^2$.

f. $\frac{x+y}{y-x} : \frac{x^2+xy}{3x^2-3y^2}$.

i. $\frac{6x+48}{7x-7} : \frac{x^2-64}{x^2-2x+1}$.

l. $\frac{3-3x}{(1+x)^2} : \frac{6x^2-6}{x+1}$.

Bài 11. Tìm các giá trị nguyên của biến số x để biểu thức đã cho cũng có giá trị nguyên:

a. $\frac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1}$.

b. $\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x - 2}$.

c. $\frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{2x + 1}$.

d. $\frac{3x^3 - 7x^2 + 11x - 1}{3x - 1}$.

e. $\frac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}$.

Bài 12. Phân tích các phân thức sau thành tổng các phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

a. $\frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

b. $\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}$.

c. $\frac{3x^2 + 3x + 12}{(x - 1)(x + 2)x}$.

Bài 13. Tìm các số A, B, C để có:

a. $\frac{x^2 - x + 2}{(x - 1)^3} = \frac{A}{(x - 1)^3} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1}$.

b. $\frac{x^2 + 2x - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$.

Bài 14. Tính các tổng:

a. $A = \frac{a}{(a - b)(a - c)} + \frac{b}{(b - a)(b - c)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)}$.

b. $B = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)}$.

Bài 15. Tính các tổng:

a. $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)}$.

b. $B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)}$.

Bài 16. Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{N}$, ta có:

a. $\frac{4}{4m + 2} = \frac{1}{m + 1} + \frac{1}{(m + 1)(2m + 1)}$.

b. $\frac{4}{4m + 3} = \frac{1}{m + 2} + \frac{1}{(m + 1)(m + 2)} + \frac{1}{(m + 1)(4m + 3)}$.

c. $\frac{4}{8m + 5} = \frac{1}{2(m + 1)} + \frac{1}{2(m + 1)(3m + 2)} + \frac{1}{2(3m + 2)(8m + 5)}$.

d. $\frac{4}{3m + 2} = \frac{1}{m + 1} + \frac{1}{3m + 2} + \frac{1}{(m + 1)(3m + 2)}$.

BÀI 4. BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ. GIÁ TRỊ CỦA MỘT PHÂN THỨC

A – BIỂU THỨC HỮU TỈ

Biểu thức hữu tỉ là những biểu thức biểu diễn một phân thức hoặc biểu thị một dãy các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức.

1. Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức

Nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

2. Giá trị của phân thức

Khi làm các bài toán liên quan đến giá trị của phân thức thì trước hết phải tìm điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu khác 0. Đó chính là **điều kiện để giá trị của một phân thức xác định**.

Bài 1. Thực hiện phép tính:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{2 - x}{x + 1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right). & \text{b. } \left(\frac{3x}{1 - 3x} + \frac{2x}{3x + 1} \right) : \frac{6x^2 + 10x}{1 - 6x + 9x^2}. \\ \text{c. } \left(\frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x + 3} \right) : \left(\frac{x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{3x + 9} \right). & \text{d. } \frac{x + 1}{x + 2} : \left(\frac{x + 2}{x + 3} : \frac{x + 3}{x + 1} \right). \\ \text{e. } \left(\frac{x}{x + 1} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1 - x^2} \right). & \text{f. } (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} - 1 \right). \end{array}$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}. & \text{b. } \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}{\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1}}. & \text{c. } 1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}}. \\ \text{d. } \frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}}. & \text{e. } \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}}. & \text{f. } \frac{\frac{a-x}{a} + \frac{x}{a-x}}{\frac{a+x}{a} - \frac{x}{a+x}}. \end{array}$$

BÀI 5. ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Thực hiện phép tính:

$$\text{a. } \frac{8}{(x^2+3)(x^2-1)} + \frac{2}{x^2+3} + \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{c. } \frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^3-x^2} + \frac{3}{x^3-2x^2+x}.$$

$$\text{e. } \frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{g. } \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1 \right) \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

$$\text{i. } \frac{[a^2 - (b+c)^2](a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)}.$$

$$\text{b. } \frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

$$\text{d. } \frac{xy}{ab} + \frac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} - \frac{(x-b)(y-b)}{b(a-b)}.$$

$$\text{f. } \frac{x^3+x^2-2x-20}{x^2-4} - \frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-2}.$$

$$\text{h. } \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}.$$

$$\text{j. } \left[\frac{x^2-y^2}{xy} - \frac{1}{x+y} \left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} \right) \right] : \frac{x-y}{x}.$$

Bài 2. Rút gọn các phân thức:

$$\text{a. } \frac{25x^2-20x+4}{25x^2-4}.$$

$$\text{c. } \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}.$$

$$\text{e. } \frac{4x^4-20x^3+13x^2+30x+9}{(4x^2-1)^2}.$$

$$\text{b. } \frac{5x^2+10xy+5y^2}{3x^3+3y^3}.$$

$$\text{d. } \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^4-16}.$$

Bài 3. Rút gọn rồi tính giá trị các biểu thức:

$$\text{a. } \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac} \text{ với } a=4, b=-5, c=6.$$

$$\text{b. } \frac{16x^2-40xy}{8x^2-24xy} \text{ với } \frac{x}{y} = \frac{10}{3}.$$

$$\text{c. } \frac{\frac{x^2+xy+y^2}{x+y} - \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}}{x-y - \frac{x^2}{x+y}} \text{ với } x=9, y=10.$$

Bài 4. Biểu diễn các phân thức sau dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức với bậc của tử thức nhỏ hơn bậc của mẫu thức:

$$\text{a. } \frac{x^2+3}{x^2-1}.$$

$$\text{b. } \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$$\text{c. } \frac{x^4-x^3+4x^2-x+5}{x^2+1}.$$

$$\text{d. } \frac{x^5-2x^4-x-3}{x+1}.$$

Bài 5. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức sau cũng có giá trị nguyên:

$$\text{a. } \frac{1}{x+2}.$$

$$\text{b. } \frac{-1}{2x+3}.$$

$$\text{c. } \frac{x^3-x^2+2}{x-1}.$$

$$\text{d. } \frac{x^3-2x^2+4}{x-2}.$$

Bài 6. Cho biểu thức: $P = \frac{3x^2 + 3x}{(x+1)(2x-6)}$.

- Tìm điều kiện xác định của P .
- Tìm giá trị của x để $P = 1$.

Bài 7. Cho biểu thức: $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$

- Tìm điều kiện xác định của P .
- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm x để $P = \frac{-3}{4}$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P cũng có giá trị nguyên.
- Tính giá trị của biểu thức P khi $x^2 - 9 = 0$.

Bài 8. Cho biểu thức: $P = \frac{(a+3)^2}{2a^2+6a} \cdot \left(1 - \frac{6a-18}{a^2-9}\right)$.

- Tìm điều kiện xác định của P .
- Rút gọn biểu thức P .
- Với giá trị nào của a thì $P = 0$; $P = 1$?

Bài 9. Cho biểu thức: $P = \frac{x}{2x-2} + \frac{x^2+1}{2-2x^2}$.

- Tìm điều kiện xác định của P .
- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm giá trị của x để $P = -\frac{1}{2}$.

Bài 10. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$.

- Tìm điều kiện xác định của P . Tìm điều kiện xác định của P .
- Tìm giá trị của x để $P = 1$; $P = -3$.

Bài 11. Cho biểu thức: $P = \frac{2}{2x+3} + \frac{3}{2x+1} - \frac{6x+5}{(2x+3)(2x-3)}$.

- Tìm điều kiện xác định của P .
- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm giá trị của x để $P = -1$.

Bài 12. Cho biểu thức: $P = \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-5} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)}$.

- Tìm điều kiện xác định của P .
- Rút gọn biểu thức P .

c. Cho $P = -3$. Tính giá trị của biểu thức $Q = 9x^2 - 42x + 49$.

Bài 13. Cho biểu thức: $P = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} - \frac{18}{9-x^2}$.

a. Tìm điều kiện xác định của P .

b. Rút gọn biểu thức P .

c. Tìm giá trị của x để $P = 4$.

Bài 14. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2}{5x+25} + \frac{2x-10}{x} + \frac{50+5x}{x^2+5x}$.

a. Tìm điều kiện xác định của P .

b. Rút gọn biểu thức P .

c. Tìm giá trị của x để $P = -4$.

Bài 15. Cho biểu thức: $P = \frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8}$.

a. Tìm điều kiện xác định của P .

b. Rút gọn biểu thức P .

c. Tính giá trị của P với $x = \frac{4001}{2000}$.

Bài 16. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{1-x^3} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1} \right) : \frac{2x+1}{x^2+2x+1}$.

a. Tìm điều kiện xác định của P .

b. Rút gọn biểu thức P .

c. Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài 17. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$.

a. Tìm điều kiện xác định của P .

b. Rút gọn biểu thức P .

c. Tìm giá trị của x để $P = 0$; $P = \frac{1}{4}$.

d. Tìm giá trị của x để $P > 0$; $P < 0$.

Bài 18. Cho biểu thức: $P = \left[\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} \right] \cdot \frac{4x^2-4}{5}$.

a. Tìm điều kiện xác định của P .

b. CMR: khi giá trị của biểu thức được xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x ?

Bài 19. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{5x+2}{x^2-10} + \frac{5x-2}{x^2+10} \right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4}$.

- a. Tìm điều kiện xác định của P .
- b. Rút gọn biểu thức P .
- c. Tính giá trị của P khi $x = 20040$.

Bài 20. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 5x}$

- a. Tìm điều kiện xác định của P .
- b. Tìm giá trị của x để $P = 0$; $P = \frac{5}{2}$.
- c. Tìm giá trị nguyên của x để P cũng có giá trị nguyên.

BÀI 1. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình một ẩn

Một phương trình với ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x .



- Hệ thức $x = m$ (với m là một số nào đó) cũng là một phương trình. Phương trình này chỉ rõ rằng m là nghiệm duy nhất của nó.
- Một phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ba nghiệm,...,những cũng có thể không có nghiệm nào hoặc có vô số nghiệm. Phương trình không có nghiệm nào được gọi là phương trình vô nghiệm.

2. Giải phương trình

Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó và thường kí hiệu là S .

3. Phương trình tương đương

Ta gọi hai phương trình có cùng tập nghiệm là *hai phương trình tương đương*. Để chỉ hai phương trình tương đương với nhau, ta dùng kí hiệu “ $\Leftrightarrow$ ”.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Chứng minh một số là nghiệm của phương trình

Phương pháp: Dùng mệnh đề sau:

- x_0 là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x_0) = B(x_0)$.
- x_0 không là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x_0) \neq B(x_0)$.

Bài 1. Xét xem x_0 có là nghiệm của phương trình hay không?

- | | |
|--|---|
| a. $3(2 - x) + 1 = 4 - 2x; x_0 = -2$. | b. $5x - 2 = 3x + 1; x_0 = \frac{3}{2}$. |
| c. $3x - 5 = 5x - 1; x_0 = -2$. | d. $2(x + 4) = 3 - x; x_0 = -2$. |
| e. $7 - 3x = x - 5; x_0 = 4$. | f. $2(x - 1) + 3x = 8; x_0 = 2$. |

g. $5x - (x - 1) = 7; x_0 = -1.$

h. $3x - 2 = 2x + 1; x_0 = 3.$

Bài 2. Xét xem x_0 có là nghiệm của phương trình hay không?

a. $x^2 - 3x + 7 = 1 + 2x; x_0 = 2.$

b. $x^2 - 3x - 10 = 0; x_0 = -2.$

c. $x^2 - 3x + 4 = 2(x - 1); x_0 = 2.$

d. $(x + 1)(x - 2)(x - 5) = 0; x_0 = -1.$

e. $2x^2 + 3x + 1 = 0; x_0 = -1$

f. $4x^2 - 3x = 2x - 1; x_0 = 5.$

Bài 3. Tìm giá trị k sao cho phương trình có nghiệm x_0 được chỉ ra:

a. $2x + k = x - 1; x_0 = -2.$

b. $(2x + 1)(9x + 2k) - 5(x + 2) = 40; x_0 = 2.$

c. $2(2x + 1) + 18 = 3(x + 2)(2x + k); x_0 = 1.$

d. $5(k + 3x)(x + 1) - 4(1 + 2x) = 80; x_0 = 2.$

Dạng 2. Số nghiệm của một phương trình

Phương pháp: Dùng mệnh đề sau:

- Phương trình $A(x) = B(x)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow A(x) \neq B(x), \forall x.$
- Phương trình $A(x) = B(x)$ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x.$

Bài 4. Chứng tỏ các phương trình sau vô nghiệm:

a. $2x + 5 = 4(x - 1) - 2(x - 3).$

b. $2x - 3 = 2(x - 3).$

c. $|x - 2| = -1.$

d. $x^2 - 4x + 6 = 0.$

Bài 5. Chứng tỏ rằng các phương trình sau có vô số nghiệm:

a. $4(x - 2) - 3x = x - 8.$

b. $4(x - 3) + 16 = 4(1 + 4x).$

c. $2(x - 1) = 2x - 2.$

d. $|x| = x.$

e. $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4.$

f. $(3 - x)^2 = x^2 - 6x + 9.$

Bài 6. Chứng tỏ rằng các phương trình sau có nhiều hơn một nghiệm:

a. $x^2 - 4 = 0.$

b. $(x - 1)(x - 2) = 0.$

c. $(x - 1)(2 - x)(x + 3) = 0.$

d. $x^2 - 3x = 0.$

e. $|x - 1| = 3.$

f. $|2x - 1| = 1.$

Dạng 3. Chứng minh hai phương trình tương đương

Để chứng minh hai phương trình tương đương, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- Chứng minh hai phương trình có cùng tập nghiệm.
- Sử dụng các phép biến đổi tương đương để biến đổi phương trình này thành phương trình kia.
- Hai qui tắc biến đổi phương trình:
 - Qui tắc chuyển vế: Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

– Qui tắc nhân: Trong một phương trình, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số khác 0.

Bài 7. Xét xem các phương trình sau có tương đương hay không?

a. $3x = 3$ và $x - 1 = 0$.

b. $x + 3 = 0$ và $3x + 9 = 0$.

c. $x - 2 = 0$ và $(x - 2)(x + 3) = 0$.

d. $2x - 6 = 0$ và $x(x - 3) = 0$.

Bài 8. Xét xem các phương trình sau có tương đương hay không?

a. $x^2 + 2 = 0$ và $x(x^2 + 2) = 0$.

b. $x + 1 = x$ và $x^2 + 1 = 0$.

c. $x + 2 = 0$ và $\frac{x}{x+2} = 0$.

d. $x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$ và $x^2 + x = 0$.

e. $|x - 1| = 2$ và $(x + 1)(x - 3) = 0$.

f. $x + 5 = 0$ và $(x + 5)(x^2 + 1) = 0$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa phương trình bậc nhất một ẩn

Phương trình dạng $ax + b = 0$ với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

2. Hai quy tắc biến đổi phương trình

a. Quy tắc chuyển vế

Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

b. Quy tắc nhân với một số

- Trong một phương trình, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số khác 0.
- Trong một phương trình, ta có thể chia cả hai vế với cùng một số khác 0.

3. Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn

Từ một phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.



- Khi giải một phương trình, người ta thường biến đổi để đưa về dạng đã biết cách giải (đơn giản nhất là dạng $ax + b = 0$ hay $ax = -b$). Việc bỏ dấu ngoặc hay quy đồng mẫu chỉ là những cách thường dùng để nhằm mục đích đó. Trong vài trường hợp, ta còn những cách biến đổi khác đơn giản hơn.
- Quá trình giải có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0. Khi đó, phương trình có thể vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x .

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- a. $4x - 10 = 0$. b. $7 - 3x = 9 - x$. c. $2x - (3 - 5x) = 4(x + 3)$.
d. $5 - (6 - x) = 4(3 - 2x)$. e. $4(x + 3) = -7x + 17$. f. $5(x - 3) - 4 = 2(x - 1) + 7$.
g. $5(x - 3) - 4 = 2(x - 1) + 7$. h. $4(3x - 2) - 3(x - 4) = 7x + 20$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

- a. $(3x - 1)(x + 3) = (2 - x)(5 - 3x)$. b. $(x + 5)(2x - 1) = (2x - 3)(x + 1)$.
c. $(x + 1)(x + 9) = (x + 3)(x + 5)$. d. $(3x + 5)(2x + 1) = (6x - 2)(x - 3)$.
e. $(x + 2)^2 + 2(x - 4) = (x - 4)(x - 2)$. f. $(x + 1)(2x - 3) - 3(x - 2) = 2(x - 1)^2$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

- a. $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2 = 5x + 38$. b. $3(x - 2)^2 + 9(x - 1) = 3(x^2 + x - 3)$.
c. $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 6x + 18$. d. $(x - 1)^3 - x(x + 1)^2 = 5x(2 - x) - 11(x + 2)$.
e. $(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2x = x(x - 1)(x + 1)$. f. $(x - 2)^3 + (3x - 1)(3x + 1) = (x + 1)^3$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{x}{3} - \frac{5x}{6} - \frac{15x}{12} = \frac{x}{4} - 5.$

b. $\frac{8x-3}{4} - \frac{3x-2}{2} = \frac{2x-1}{2} + \frac{x+3}{4}.$

c. $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{15} - \frac{2x-13}{6} = 0.$

d. $\frac{3(3-x)}{8} + \frac{2(5-x)}{3} = \frac{1-x}{2} - 2.$

e. $\frac{3(5x-2)}{4} - 2 = \frac{7x}{3} - 5(x-7).$

f. $\frac{x+5}{2} + \frac{3-2x}{4} = x - \frac{7+x}{6}.$

g. $\frac{x-3}{11} + \frac{x+1}{3} = \frac{x+7}{9} - 1.$

h. $\frac{3x-0,4}{2} + \frac{1,5-2x}{3} = \frac{x+0,5}{5}.$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{3} = \frac{x+7}{15}.$

b. $\frac{x+3}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x+5}{6} + 1.$

c. $\frac{2(x+5)}{3} + \frac{x+12}{2} - \frac{5(x-2)}{6} = \frac{x}{3} + 11.$

d. $\frac{x-4}{5} + \frac{3x-2}{10} - x = \frac{2x-5}{3} - \frac{7x+2}{6}.$

e. $\frac{2(x-3)}{7} + \frac{x-5}{3} = \frac{13x+4}{21}.$

f. $\frac{3x-1}{2} - \left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{4x-9}{8}.$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{(x-2)(x+10)}{3} - \frac{(x+4)(x+10)}{12} = \frac{(x-2)(x+4)}{4}.$

b. $\frac{(x+2)^2}{8} - 2(2x+1) = 25 + \frac{(x-2)^2}{8}.$

c. $\frac{(2x-3)(2x+3)}{8} = \frac{(x-4)^2}{6} + \frac{(x-2)^2}{3}.$

d. $\frac{7x^2-14x-5}{15} = \frac{(2x+1)^2}{5} - \frac{(x-1)^2}{3}.$

e. $\frac{(7x+1)(x-2)}{10} + \frac{2}{5} = \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(x-1)(x-3)}{2}.$

Bài 7. Giải các phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

a. $\frac{x+1}{35} + \frac{x+3}{33} = \frac{x+5}{31} + \frac{x+7}{29}.$

b. $\frac{x-10}{1994} + \frac{x-8}{1996} + \frac{x-6}{1998} + \frac{x-4}{2000} + \frac{x-2}{2002} = \frac{x-2002}{2} + \frac{x-2000}{4} + \frac{x-1998}{6} + \frac{x-1996}{8} + \frac{x-1994}{10}.$

c. $\frac{x-1991}{9} + \frac{x-1993}{7} + \frac{x-1995}{5} + \frac{x-1997}{3} + \frac{x-1999}{1} = \frac{x-9}{1991} + \frac{x-7}{1993} + \frac{x-5}{1995} + \frac{x-3}{1997} + \frac{x-1}{1999}.$

d. $\frac{x-85}{15} + \frac{x-74}{13} + \frac{x-67}{11} + \frac{x-64}{9} = 10.$

e. $\frac{x-1}{13} - \frac{2x-13}{15} = \frac{3x-15}{27} - \frac{4x-27}{29}.$

Bài 8. Giải các phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

a. $\frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} = \frac{x+5}{61} + \frac{x+7}{59}.$

$$\text{b. } \frac{x+29}{31} - \frac{x+27}{33} = \frac{x+17}{43} - \frac{x+15}{45}.$$

$$\text{c. } \frac{x+6}{1999} + \frac{x+8}{1997} = \frac{x+10}{1995} + \frac{x+12}{1993}.$$

$$\text{d. } \frac{1909-x}{91} + \frac{1907-x}{93} + \frac{1905-x}{95} + \frac{1903-x}{91} + 4 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{e. } & \frac{x-29}{1970} + \frac{x-27}{1972} + \frac{x-25}{1974} + \frac{x-23}{1976} + \frac{x-21}{1978} + \frac{x-19}{1980} = \\ & = \frac{x-1970}{29} + \frac{x-1972}{27} + \frac{x-1974}{25} + \frac{x-1976}{23} + \frac{x-1978}{21} + \frac{x-1980}{19}. \end{aligned}$$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình tích

Trong một tích, nếu có một thừa số bằng 0 thì tích bằng 0; ngược lại, nếu tích bằng 0 thì ít nhất một trong các thừa số bằng 0.

Phương trình tích là phương trình có dạng $A(x).B(x) = 0$.

2. Cách giải

Để giải phương trình tích, ta áp dụng công thức:

$$A(x).B(x) \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ hoặc } B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases}.$$

Ta giải hai phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$, rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $(5x - 4)(4x + 6) = 0$.

b. $(3, 5x - 7)(2, 1x - 6, 3) = 0$.

c. $(4x - 10)(24 + 5x) = 0$.

d. $(x - 3)(2x + 1) = 0$.

e. $(5x - 10)(8 - 2x) = 0$.

f. $(9 - 3x)(15 + 3x) = 0$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $(2x + 1)(x^2 + 2) = 0$.

b. $(x^2 + 4)(7x - 3) = 0$.

c. $(x^2 + x + 1)(6 - 2x) = 0$.

d. $(8x - 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a. $(x - 5)(3 - 2x)(3x + 4) = 0$.

b. $(2x - 1)(3x + 2)(5 - x) = 0$.

c. $(2x - 1)(x - 3)(x + 7) = 0$.

d. $(3 - 2x)(6x + 4)(5 - 8x) = 0$.

e. $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x - 6) = 0$.

f. $(2x + 1)(3x - 2)(5x - 8)(2x - 1) = 0$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. $(x - 2)(3x + 5) = (2x - 4)(x + 1)$.

b. $(2x + 5)(x - 4) = (x - 5)(4 - x)$.

c. $9x^2 - 1 = (3x + 1)(2x - 3)$.

d. $2(9x^2 + 6x + 1) = (3x + 1)(x - 2)$.

e. $27x^2(x + 3) - 12(x^2 + 3x) = 0$.

f. $16x^2 - 8x + 1 = 4(x + 3)(4x - 1)$.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a. $(2x - 1)^2 = 49$.

b. $(5x - 3)^2 - (4x - 7)^2 = 0$.

c. $(2x + 7)^2 = 9(x + 2)^2$.

d. $(x + 2)^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$.

e. $4(2x + 7)^2 - 9(x + 3)^2 = 0$.

f. $(5x^2 - 2x + 10)^2 = (3x^2 + 10x - 8)^2$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a. $(9x^2 - 4)(x + 1) = (3x + 2)(x^2 - 1)$.

b. $(x - 1)^2 - 1 + x^2 = (1 - x)(x + 3)$.

c. $(x^2 - 1)(x + 2)(x - 3) = (x - 1)(x^2 - 4)(x + 5)$.

d. $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$.

e. $x^3 - 7x + 6 = 0$.

f. $x^4 - 4x^3 + 12x - 9 = 0$.

g. $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$.

h. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$.

Bài 7. Giải các phương trình sau: (Đặt ẩn phụ)

a. $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$.

b. $(x^2 + 2x + 3)^2 - 9(x^2 + 2x + 3) + 18 = 0$.

c. $(x - 2)(x + 2)(x^2 - 10) = 72$.

d. $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$.

e. $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) - 297 = 0$.

f. $x^4 - 2x^2 - 144x - 1295 = 0$.

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

- Tìm điều kiện xác định của phương trình.
- Qui đồng mẫu hai vế của phương trình, rồi khử mẫu.
- Giải phương trình vừa nhân được.
- (Kết luận) Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{4x-3}{x-5} = \frac{29}{3}$.

b. $\frac{2x-1}{5-3x} = 2$.

c. $\frac{4x-5}{x-1} = 2 + \frac{x}{x-1}$.

d. $\frac{7}{x+2} = \frac{3}{x-5}$.

e. $\frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$.

f. $\frac{12x+1}{11x-4} + \frac{10x-4}{9} = \frac{20x+17}{18}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{11}{x} = \frac{9}{x+1} + \frac{2}{x-4}$.

b. $\frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6}$.

c. $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} - \frac{1+3x}{1-3x}$.

d. $\frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x+25}{2x^2-50} = \frac{x-5}{2x^2+10x}$.

e. $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1}$.

f. $\left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)(x+2) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{6x+1}{x^2-7x+10} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$.

b. $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$.

c. $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x-3} - \frac{(x-1)^2}{x^2-2x-3}$.

d. $\frac{1}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{5}{6-x^2-x}$.

e. $\frac{2}{x+2} - \frac{2x^2+16}{x^3+8} = \frac{5}{x^2-2x+4}$.

f. $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{2(x+2)^2}{x^6-1}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{8}{x-8} + \frac{11}{x-11} = \frac{9}{x-9} + \frac{10}{x-10}$.

b. $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-5} = \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-6}$.

c. $\frac{4}{x^2-3x+2} - \frac{3}{2x^2-6x+1} + 1 = 0$.

d. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x-6}$.

BÀI 5. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Các bước giải toán bằng cách lập phương trình:

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Bước 1: Lập phương trình.

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Trả lời.

Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Loại so sánh

Trong đầu bài thường có các từ:

- nhiều hơn, thêm, đắt hơn, chậm hơn,: tương ứng với phép toán cộng.
- ít hơn, bớt, rẻ hơn, nhanh hơn,: tương ứng với phép toán trừ.
- gấp nhiều lần: tương ứng với phép toán nhân.
- kém nhiều lần: tương ứng với phép toán chia.

Bài 1. Tìm hai số nguyên liên tiếp, biết rằng 2 lần số nhỏ cộng 3 lần số lớn bằng -87 .

Bài 2. Một phân số có tử số nhỏ hơn mẫu số là 8. Nếu thêm 2 đơn vị vào tử số và bớt mẫu số đi 3 đơn vị thì ta được phân số bằng $\frac{3}{4}$. Tìm phân số đã cho.

Bài 3. Tổng của 4 số là 45. Nếu lấy số thứ nhất cộng thêm 2, số thứ hai trừ đi 2, số thứ ba nhân với 2, số thứ tư chỉ cho 2 thì bốn kết quả đó bằng nhau. Tìm 4 số ban đầu.

Bài 4. Thương của hai số là 3. Nếu tăng số bị chia lên 10 và giảm số chia đi một nửa thì hiệu của hai số mới là 30. Tìm hai số đó.

Bài 5. Một đội công nhân sửa một đoạn đường trong 3 ngày. Ngày thứ nhất đội sửa được $\frac{1}{3}$ đoạn đường, ngày thứ hai đội sửa được một đoạn đường bằng $\frac{4}{3}$ đoạn được làm được trong ngày thứ nhất, ngày thứ ba đội sửa 80 m còn lại. Tính chiều dài đoạn đường mà đội phải sửa.

Bài 6. Hai phân xưởng có tổng cộng 220 công nhân. Sau khi chuyển 10 công nhân ở phân xưởng 1 sang phân xưởng 2 thì $\frac{2}{3}$ số công nhân phân xưởng 1 bằng $\frac{4}{5}$ số công nhân phân xưởng 2. Tính số công nhân của mỗi phân xưởng lúc đầu.

Bài 7. Hai bể nước chứa 800 lít nước và 1300 lít nước. Người ta tháo ra cùng một lúc ở bể thứ nhất 15 lít/phút, bể thứ hai 25 lít/phút. Hỏi sau bao lâu số nước ở bể thứ nhất bằng $\frac{2}{3}$ số nước ở bể thứ hai?

Bài 8. Trước đây 5 năm, tuổi Dung bằng nửa tuổi của Dung sau 4 năm nữa. Tính tuổi của Dung hiện nay.

Bài 9. Tìm một số có chữ số hàng đơn vị là 2, biết rằng nếu xoá chữ số 2 đó thì số ấy giảm đi 200.

Bài 10. Gia đình Đào có 4 người: bố, mẹ, bé Mai và Đào. Tuổi trung bình của cả nhà là 23. Nếu viết thêm chữ số 0 vào bên phải tuổi bé Mai thì được tuổi của bố, tuổi của mẹ bằng $\frac{9}{10}$ tuổi bố và gấp 3 lần tuổi của Đào. Tìm tuổi của mỗi người trong gia đình Đào.

Bài 11. Nhân ngày 1 tháng 6, một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo. số kẹo này được chia hết và chia đều cho mọi đội viên trong phân đội. Để đảm bảo nguyên tắc chia ấy, đội trưởng đã đề xuất cách chia như sau:

- Bạn thứ nhất nhận một viên kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.
- Sau khi bạn thứ nhất lấy phần của mình, bạn thứ hai nhận 2 viên kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Cứ như thế đến bạn cuối cùng, thứ n , nhận n viên kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Hỏi phân đội đó có bao nhiêu đội viên và mỗi đội viên nhận bao nhiêu viên kẹo?

Bài 12. Một người bán sầu riêng thu hoạch được như sau:

- Lần thứ nhất bán 9 trái và $\frac{1}{6}$ số sầu riêng còn lại.
- Lần thứ hai bán 18 trái và $\frac{1}{6}$ số sầu riêng còn lại mới.
- Lần thứ ba bán 27 trái và $\frac{1}{6}$ số sầu riêng còn lại mới, v.v...

Với cách đó thì bán lần sau cùng là vừa hết và số sầu riêng bán mỗi lần đều bằng nhau. Hỏi người đó đã bán bao nhiêu lần và số sầu riêng thu hoạch được là bao nhiêu trái?

Bài 13. Ba lớp A, B, C góp sách tặng các bạn học sinh vùng khó khăn, tất cả được 358 cuốn. Tỉ số số cuốn sách của lớp A so với lớp B là $\frac{6}{11}$. Tỉ số số cuốn sách của lớp A so với lớp C là $\frac{7}{10}$. Hỏi mỗi lớp góp được bao nhiêu cuốn sách?

Bài 14. Dân số tỉnh A hiện nay là 612060 người. Hàng năm dân số tỉnh này tăng 1%. Hỏi hai năm trước đây dân số của tỉnh A là bao nhiêu?

Bài 15. Trong một trường học, vào đầu năm học số học sinh nam và nữ bằng nhau. Nhưng trong học kì 1, trường nhận thêm 15 học sinh nữ và 5 học sinh nam nên số học sinh nữ chiếm 51% số học sinh của trường. Hỏi cuối học kì 1, trường có bao nhiêu học sinh nam, học sinh nữ?

Dạng 2. Loại tìm số gồm hai, ba chữ số

- Số có hai chữ số có dạng: $\overline{xy} = 10x + y$. Điều kiện: $x, y \in N, 0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$.
- Số có ba chữ số có dạng: $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Điều kiện: $x, y, z \in N, 0 < x \leq 9, 0 \leq y, z \leq 9$.

Bài 16. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng:

- Tổng hai chữ số là 12.
- Nếu đổi chỗ hai chữ số thì được một số mới lớn hơn số đó là 36.

Bài 17. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng:

- Tổng hai chữ số là 10.
- Nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số mới nhỏ hơn số đó là 36.

Bài 18. Một số tự nhiên có 5 chữ số. Nếu thêm chữ số 1 vào bên phải hay bên trái số đó ta được một số có 6 chữ số. Biết rằng nếu viết thêm vào bên phải số đó thì được một số lớn gấp ba lần số nhận được khi ta viết thêm vào bên trái số đó. Tìm số đó.

Bài 19. Một số có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục gấp 3 lần chữ số hàng đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số ta được một số có hai chữ số nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị. Tìm số đó.

Bài 20. Một số tự nhiên có hai chữ số có tổng các chữ số bằng 7. Nếu thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số ta được một số có 3 chữ số lớn hơn số đã cho là 180. Tìm số đó.

Dạng 3. Loại làm chung – làm riêng một việc

- Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta coi toàn bộ công việc là một đơn vị công việc, biểu thị bởi số 1.
- Năng suất làm việc là phần việc làm được trong một đơn vị thời gian. Gọi A là khối lượng công việc, n là năng suất, t là thời gian làm việc. Ta có: $A = nt$.
- Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm.

Bài 21. Hai người cùng làm một công việc trong 24 giờ thì xong. Năng suất của người thứ nhất bằng $\frac{3}{2}$ năng suất của người thứ hai. Hỏi nếu mỗi người làm một mình cả công việc thì phải mất thời gian bao lâu?

Bài 22. Một bồn chứa có đặt hai vòi nước chảy vào và một vòi tháo nước ra.

- Bồn trống không, nếu mở riêng vòi thứ nhất thì sau 4 giờ bồn đầy nước.
- Bồn trống không, nếu mở riêng vòi thứ hai thì sau 6 giờ bồn đầy nước.
- Bồn trống không, nếu đồng thời mở cả ba vòi thì sau 7 giờ 12 phút bồn đầy nước. Hỏi nếu bồn chứa đầy nước, mở riêng vòi tháo nước thì sau bao lâu sẽ tháo hết nước ra?

Bài 23. Một công nhân phải làm một số sản phẩm trong 18 ngày. Do đã vượt mức mỗi ngày 5 sản phẩm nên sau 16 ngày anh đã làm xong và làm thêm 20 sản phẩm nữa ngoài kế hoạch. Tính xem mỗi ngày anh đã làm được bao nhiêu sản phẩm.

Dạng 4. Loại chuyển động đều

- Gọi d là quãng đường động tử đi, v là vận tốc, t là thời gian đi, ta có: $d = vt$.
- Vận tốc xuôi dòng nước = Vận tốc lúc nước yên lặng + Vận tốc dòng nước.
- Vận tốc ngược dòng nước = Vận tốc lúc nước yên lặng – Vận tốc dòng nước.

Bài 24. Một xe vận tải đi từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc 50 km/h, rồi từ B quay ngay về A với vận tốc 40 km/h. Cả đi và về mất một thời gian là 5 giờ 24 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B

Bài 25. Một xe đạp khởi hành từ điểm A, chạy với vận tốc 20 km/h. Sau đó 3 giờ, một xe hơi đuổi theo với vận tốc 50 km/h. Hỏi xe hơi chạy trong bao lâu thì đuổi kịp xe đạp?

Bài 26. Một người đi xe gắn máy, đi từ địa điểm A đến địa điểm B trên một quãng đường dài 35 km. Lúc trở về người đó đi theo con đường khác dài 42 km với vận tốc kém hơn vận tốc lượt đi là 6 km/h. Thời gian lượt về bằng $\frac{3}{2}$ thời gian lượt đi. Tìm vận tốc lượt đi và lượt về

Bài 27. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 50 km/h. Đi được 24 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc trên quãng đường còn lại giảm còn 40 km/h. Vì vậy đã đến nơi chậm mất 18 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B

Bài 28. Lúc 6 giờ 15 phút, một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 70 km/h. Khi đến B, ô tô nghỉ 1 giờ rưỡi, rồi quay về A với vận tốc 60 km/h và đến A lúc 11 giờ cùng ngày. Tính quãng đường AB.

Bài 29. Hàng ngày Tuấn đi xe đạp đến trường với vận tốc 12 km/h. Sáng nay do dậy muộn, Tuấn xuất phát chậm 2 phút. Tuấn nhằm tính, để đến trường đúng giờ như hôm trước thì Tuấn phải đi với vận tốc 15 km/h. Tính quãng đường từ nhà Tuấn đến trường.

Bài 30. Một người đi xe máy từ thành phố Thanh Hoá và thành phố Vinh. Nếu chạy với vận tốc 25 km/h thì sẽ muộn so với dự định là 2 giờ. Nếu chạy với vận tốc 30 km/h và giữa đường nghỉ 1 giờ thì cũng muộn mất 2 giờ. Hỏi để đến nơi đúng giờ mà dọc đường không nghỉ thì xe phải chạy mỗi giờ bao nhiêu kilômet?

Bài 31. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc để đi từ thành Huế về Đà Nẵng. Vận tốc xe thứ nhất là 40 km/h, vận tốc xe thứ hai là 60 km/h. Xe thứ hai đến Đà Nẵng nghỉ nửa giờ rồi quay lại Huế thì gặp xe thứ nhất ở cách Đà Nẵng 10 km. Tính quãng đường Huế – Đà Nẵng.

Bài 32. Quãng đường AD dài 9 km, gồm đoạn AB lên dốc, đoạn BC nằm ngang, đoạn CD xuống dốc. Một người đi bộ từ A đến D rồi quay trở về A hết tất cả 3 giờ 41 phút. Tính quãng đường BC, biết vận tốc lúc lên dốc của người đó là 4 km/h, lúc xuống dốc là 6 km/h và lúc đi trên đường nằm ngang là 5 km/h.

Bài 33. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 45 km/h. Sau đó một thời gian, một xe con cũng xuất phát từ A với vận tốc 60 km/h và nếu không có gì thay đổi thì đuổi kịp xe tải tại B. Nhưng sau khi đi được nửa quãng đường AB thì xe con tăng vận tốc lên 75 km/h, nên sau đó 1 giờ thì đuổi kịp xe tải. Tính quãng đường AB.

Bài 34. Một đò máy xuôi dòng từ bến A đến bến B mất 4 giờ và ngược dòng từ B về A mất 5 giờ. Vận tốc của dòng nước là 2 km/h. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B

Bài 35. Một ca nô xuôi dòng từ A đến B mất 5 giờ và ngược dòng từ B đến A mất 6 giờ. Tính khoảng cách AB, biết vận tốc dòng nước là 2 km/h.

Bài 36. Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với ca nô xuôi dòng từ bến A, có một chiếc bè trôi từ bến A với vận tốc 3 km/h. Sau khi đến B, ca nô trở về bến A ngay và gặp bè khi bè đã trôi được 8 km. Tính vận tốc của ca nô.

Bài 37. Một chiếc thuyền đi từ bến A đến bến B hết 5 giờ, từ bến B đến bến A hết 7 giờ. Hỏi một đám bèo trôi theo dòng sông từ A đến B hết bao lâu?

Dạng 5. Loại có nội dung hình học

- Hình chữ nhật có hai kích thước a, b . Diện tích: $S = ab$; Chu vi: $P = 2(a + b)$.
- Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông a, b . Diện tích: $S = \frac{1}{2}ab$.

Bài 38. Chu vi một khu vườn hình chữ nhật bằng 60 m, hiệu độ dài của chiều dài và chiều rộng là 20 m. Tìm độ dài các cạnh của hình chữ nhật.

Bài 39. Một thửa đất hình chữ nhật có chu vi là 56 m. Nếu giảm chiều rộng 2 m và tăng chiều dài 4 m thì diện tích tăng thêm 8 m². Tìm chiều rộng và chiều dài thửa đất.

Bài 40. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 3 lần chiều rộng. Nếu tăng mỗi cạnh thêm 5 m thì diện tích khu vườn tăng thêm 385 m². Tính độ dài các cạnh của khu vườn.

Bài 41. Hiệu số đo chu vi của hai hình vuông là 32 m và hiệu số đo diện tích của chúng là 464 m². Tìm số đo các cạnh của mỗi hình vuông.

Bài 42. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 450 m. Nếu giảm chiều dài đi $\frac{1}{5}$ chiều dài cũ và tăng chiều rộng thêm $\frac{1}{4}$ chiều rộng cũ thì chu vi hình chữ nhật không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng khu vườn.

BÀI 6. ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $6x^2 - 5x + 3 = 2x - 3x(3 - 2x).$

b. $\frac{2(x-4)}{4} - \frac{3+2x}{10} = x + \frac{1-x}{5}.$

c. $\frac{2x}{3} + \frac{3x-5}{4} = \frac{3(2x-1)}{2} - \frac{7}{6}.$

d. $\frac{6x+5}{2} - \frac{10x+3}{4} = 2x + \frac{2x+1}{2}.$

e. $(x-4)(x+4) - 2(3x-2) = (x-4)^2.$

f. $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x^2 + x + 1).$

g. $3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300.$

h. $\frac{2(1-3x)}{5} - \frac{2+3x}{10} = 7 - \frac{3(2x+1)}{4}.$

i. $\frac{5x+2}{6} - \frac{8x-1}{3} = \frac{4x+2}{5} - 5.$

k. $\frac{3x+2}{2} - \frac{3x+1}{6} = 2x + \frac{5}{3}.$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $(4x-3)(2x-1) = (x-3)(4x-3).$

b. $25x^2 - 9 = (5x+3)(2x+1).$

c. $(3x-4)^2 - 4(x+1)^2 = 0.$

d. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0.$

e. $(x-2)(x+2)(x^2-10) = 72.$

f. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$

g. $(2x+1)(3x-2) = (5x-8)(2x+1).$

h. $4x^2 - 1 = (2x+1)(3x-5).$

i. $(x+1)^2 = 4(x^2 - 2x + 1).$

k. $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0.$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}.$

b. $\frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} = \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9}.$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{4x^2-1}.$

b. $\frac{2x}{x+1} + \frac{18}{x^2+2x-3} = \frac{2x-5}{x+3}.$

c. $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}.$

d. $\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x}.$

e. $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}.$

f. $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-4}.$

Bài 5. Thương của hai số bằng 3. Nếu tăng số bị chia 10 đơn vị và giảm số chia đi một nửa thì số thứ nhất thu được lớn hơn số thứ hai thu được là 30. Tìm hai số ban đầu.

Bài 6. Chu vi của một hình chữ nhật bằng 140 m, hiệu giữa số đo chiều dài và chiều rộng là 10 m. Tìm số đo các cạnh của hình chữ nhật.

Bài 7. Thùng thứ nhất đựng 40 lít dầu, thùng thứ hai đựng 85 lít dầu. Ở thùng thứ hai lấy ra một lượng dầu gấp 3 lần lượng dầu lấy ra ở thùng thứ nhất. Sau đó lượng dầu còn lại trong thùng thứ nhất gấp đôi lượng dầu còn lại trong thùng thứ hai. Hỏi đã lấy ra bao nhiêu lít dầu?

Bài 8. Chu vi bánh xe lớn của một đầu máy xe lửa là 5,6 m và của bánh xe nhỏ là 2,4 m. Khi xe chạy từ ga A đến ga B thì bánh nhỏ đã lăn nhiều hơn bánh lớn là 4000 vòng. Tính quãng đường AB.

Bài 9. Hai vòi nước cùng chảy trong 12 giờ thì đầy một hồ nước. Cho hai vòi cùng chảy trong 8 giờ rồi khoá vòi thứ nhất lại và cho vòi thứ hai chảy tiếp với lưu lượng mạnh gấp đôi thì phải mất 3 giờ 30 phút nữa mới đầy hồ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình với lưu lượng ban đầu thì phải mất bao lâu mới đầy hồ?

Bài 10. Một ô tô đi quãng đường dài 60 km trong một thời gian đã định. Ô tô đi nửa quãng đường đầu với vận tốc hơn dự định là 10 km/h và đi nửa quãng đường còn lại với vận tốc thấp hơn dự định là 6 km/h nhưng ô tô đã đến đúng thời gian đã định. Tính thời gian ô tô đã dự định đi quãng đường trên.

Bài 11. Một xe ô tô đi từ Hà Nội về Thanh Hoá. Sau khi đi được 43 km thì dừng lại 40 phút. Để về đến Thanh Hoá đúng giờ đã định nó phải đi với vận tốc bằng 1,2 lần vận tốc trước đó. Tính vận tốc lúc đầu, biết rằng quãng đường Hà Nội – Thanh Hoá dài 163 km.

Bài 12. Hai người đi bộ cùng khởi hành từ A để đến B. Người thứ nhất đi nửa thời gian đầu với vận tốc 5 km/h, nửa thời gian sau với vận tốc 4 km/h. Người thứ hai đi nửa quãng đường đầu với vận tốc 4 km/h và nửa quãng đường sau với vận tốc 5 km/h. Hỏi người nào đến B trước?

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ hay (hay $a > b, a \leq b, a \geq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

2. Tính chất

(VẼ HÌNH)

3. Một số bất đẳng thức thông dụng

a. $a^2 \geq 0, \forall a$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$.

$a^2 + b^2 \geq 2ab$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

b. Bất đẳng thức Cô – si:

Với $a, b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Hệ quả: – Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.

– Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

c. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối: (VẼ HÌNH)

d. Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác:

Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, ta có:

a. $a, b, c > 0$.

b. $|a - b| < c < a + b; |b - c| < a < b + c; |c - a| < b < c + a$.

4. Chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh một BDT là lập luận để khẳng định tính đúng đắn của BDT đó.

Để chứng minh một BDT ta thường sử dụng:

- Tính chất của quan hệ thứ tự các số.
- Tính chất của bất đẳng thức.
- Một số BDT thông dụng.

B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất cơ bản

- Để chứng minh một BDT ta có thể sử dụng các cách sau:

- Biến đổi BDT cần chứng minh tương đương với một BDT đã biết.
- Sử dụng một BDT đã biết, biến đổi để dẫn đến BDT cần chứng minh.

- Một số BDT thường dùng:

$$+ A^2 \geq 0.$$

$$+ A^2 + B^2 \geq 0.$$

$$+ A.B \geq 0 \text{ với } A, B \geq 0.$$

$$+ A^2 + B^2 \geq 2AB.$$



- Trong quá trình biến đổi, ta thường chú ý đến các hằng đẳng thức.
- Khi chứng minh BDT ta thường tìm điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra. Khi đó ta có thể tìm GTLN, GTNN của biểu thức.

Bài 1. Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$

b. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$

c. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c).$

d. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc - ca).$

e. $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1).$

f. $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc.$

g. $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc.$

h. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$

Bài 2. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$

b. $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$; với $a, b \geq 0$.

c. $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3.$

d. $a^4 + 3 \geq 4a.$

e. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, với $a, b, c > 0$.

f. $a^4 + b^4 \leq \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}$; với $a, b \neq 0$.

g. $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$; với $ab \geq 1$.

h. $(a^5 + b^5)(a+b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$; với $ab > 0$.

Bài 3. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd.$

b. $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc.$

c. $(a^2 + 4)(b^2 + 4)(c^2 + 4)(d^2 + 4) \geq 256abcd.$

Bài 4. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$

$$\text{b. } 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

$$\text{c. } 2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3.$$

Bài 5. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\text{a. } (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{b. } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2.$$

$$\text{c. } (a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca).$$

$$\text{d. } a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c).$$

Bài 6. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a = ab(a+b)$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\text{a. } \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}; \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$\text{b. } \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1; \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } abc = 1.$$

$$\text{c. } \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1; \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } abc = 1.$$

Bài 7. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\text{a. } ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca). \quad \text{b. } abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b).$$

$$\text{c. } 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0. \quad \text{d. } a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 > a^3 + b^3 + c^3.$$

Bài 8. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\text{a. } \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a} \text{ cũng là độ dài các cạnh của một tam giác khác.}$$

$$\text{b. } \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Dạng 2. Phương pháp làm trội

Dùng các tính chất của bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

- Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Ta biến đổi số hạng tổng quát u_k về hiệu của hai số hạng liên tiếp nhau: $u_k = a_k - a_{k+1}$.

$$\text{Khi đó: } S = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

- Phương pháp chung về tính tích hữu hạn: $P = u_1 u_2 \dots u_n$

Ta biến đổi các số hạng u_k về thương của hai số hạng liên tiếp nhau: $u_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

$$\text{Khi đó: } P = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$$

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$, ta có:

$$\text{a. } \frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}.$$

$$\text{b. } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

$$\text{c. } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

$$\text{d. } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} < 1.$$

Dạng 3. Chứng minh BĐT dựa vào BDT Cô – si

1. Bất đẳng thức Cô – si:

+ Với $a, b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

2. Ứng dụng tìm GTLN, GTNN:

+ Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.

+ Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

Bài 10. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

b. $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$; với $a, b, c > 0$.

c. $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$.

d. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$; với $a, b, c > 0$.

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq (a+b+c)^2$.

b. $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$.

c. $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3$.

Bài 12. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1). Áp dụng chứng minh các BDT sau:

a. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$; với $a, b, c > 0$.

b. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right)$; với $a, b, c > 0$.

c. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Chứng minh: $\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq 1$.

d. $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$.

e. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x+2y+4z=12$. Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4xz}{4z+x} \leq 6$.

f. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các BDT sau:

a. $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c).$

b. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = 1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}.$

c. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab}.$

d. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 1$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30.$

Bài 14. Áp dụng BĐT Cô – si để tìm GTNN của các biểu thức sau:

a. $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}; x > 0.$

b. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}; x > 1.$

c. $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{x+1}; x > -1.$

d. $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{2x-1}; x > \frac{1}{2}.$

e. $y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}; 0 < x < 1.$

f. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}; x > 0.$

g. $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x}; x > 0.$

h. $y = x^2 + \frac{2}{x^3}; x > 0.$

Bài 15. Áp dụng BĐT Cô – si để tìm GTLN của các biểu thức sau:

a. $y = (x+3)(5-x); -3 \leq x \leq 5.$

b. $y = x(6-x); 0 \leq x \leq 6.$

c. $y = (x+3)(5-2x); -3 \leq x \leq \frac{5}{2}.$

d. $y = (2x+5)(5-x); -\frac{5}{2} \leq x \leq 5.$

e. $y = (6x+3)(5-2x); -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$

f. $y = \frac{x}{x^2 + 2}; x > 0.$

BÀI 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$), trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$, đgl bất phương trình bậc nhất một ẩn.

2. Hai qui tắc biến đổi bất phương trình

- Qui tắc chuyển vế: Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải đổi dấu hạng tử đó.
- Qui tắc nhân: Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:
 - Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương.
 - Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a. $3(2x - 3) \geq 4(2 - x) + 13.$

b. $6x - 1 - (3x + 9) \leq 8x - 7 - (2x - 1).$

c. $8x + 17 - 3(2x + 3) \leq 10(x + 2).$

d. $17(x + 5) + 41x \geq -15(x + 4) - 1.$

e. $4(2 - 3x) - (5 - x) > 11 - x.$

f. $2(3 - x) - 1,5(x - 4) < 3 - x.$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a. $\frac{2x - 1}{3} < \frac{x + 6}{2}.$

b. $\frac{5(x - 1)}{6} - 1 \geq \frac{2(x + 1)}{3}.$

c. $2 + \frac{3(x + 1)}{8} \leq 3 - \frac{x - 1}{4}.$

d. $\frac{3x + 5}{2} - 1 \leq \frac{x + 2}{3} + x.$

e. $\frac{\frac{1}{4}x - \frac{2}{5}}{3} - \frac{2x - \frac{1}{3}}{5} < \frac{\frac{1}{3}x - \frac{3}{5}}{2}.$

f. $\frac{2x - 5}{6} + \frac{22 - 7x}{4} > \frac{5 - 2x}{3} - x - \frac{5x + 2}{4}.$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a. $(2x + 3)(2x - 1) > 4x(x + 2).$

b. $5(x - 1) - x(7 - x) < x^2.$

c. $(x - 1)^2 + (x - 3)^2 > x^2 + (x + 1)^2.$

d. $\frac{(2x - 1)^2}{8} < \frac{(3 - x)^2}{2}.$

e. $\frac{(x - 2)^2}{5} + \frac{3(x - 1)^2}{10} < \frac{x^2 + 1}{2}.$

f. $\frac{x(1,5x + 1)}{6} - \frac{(2 - x)^2}{4} \geq \frac{5x}{2} - 2.$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a. $8x - 3 < 5\left(\frac{8x}{5} + 3\right).$

b. $2x + \frac{2x + 1}{2} > 3x - \frac{1}{5}.$

c. $\frac{x + 5}{6} + \frac{x - 1}{3} \leq \frac{x + 3}{2} - 1.$

d. $x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}.$

e. $\frac{x + 7}{15} > \frac{2x}{5} - \frac{x}{3} + \frac{7}{15}.$

Bài 5. Với những giá trị nào của x thì:

- Giá trị của biểu thức $7 - 3(x + 1)$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $2(x - 3) - 4$.
- Giá trị của biểu thức $\frac{x+2}{3} - x + 1$ lớn hơn giá trị của biểu thức $x + 3$.
- Giá trị của biểu thức $(x + 1)^2 - 4$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x - 3)^2$.
- Giá trị của biểu thức $x - \frac{1 - \frac{3}{2}x}{4}$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $\frac{2 - \frac{1}{4}x}{3} + 2$.

Bài 6. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

- $\frac{x+1987}{2002} + \frac{x+1988}{2003} > \frac{x+1989}{2004} + \frac{x+1990}{2005}$.
- $\frac{x-1}{99} + \frac{x-3}{97} + \frac{x-5}{95} < \frac{x-2}{98} + \frac{x-4}{96} + \frac{x-6}{94}$.
- $\frac{x-1987}{2002} + \frac{x-1988}{2003} > \frac{x-1989}{2004} + \frac{x-1990}{2005}$.
- $\frac{x+1}{99} + \frac{x+3}{97} + \frac{x+5}{95} < \frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+6}{94}$.

Bài 7.

- Một số có hai chữ số có chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2. Tìm số đó biết rằng nó lớn hơn 21 nhưng nhỏ hơn 36.
- Tìm số nguyên nằm trong khoảng từ 300 đến 400, biết số đó chia cho 3, 4, 5 đều có số dư là 1.
- Tìm số nguyên nằm trong khoảng từ 500 đến 600, biết số đó chia cho 5, 8, 10 có các số dư lần lượt là 2, 5, 7.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa giá trị tuyệt đối

$$|a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

2. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

- Dạng $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ hay $\begin{cases} A < 0 \\ -A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ hay $\begin{cases} B \geq 0 \\ A = -B \end{cases}$.
- Dạng $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ hay $A = -B$.
- Dạng phương trình có chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối
 - Xét dấu các biểu thức chứa ẩn nằm trong dấu GTTD.
 - Chia trục số thành nhiều khoảng sao cho trong mỗi khoảng, các biểu thức nói trên có dấu xác định.
 - Xét từng khoảng, khử các dấu GTTD, rồi giải PT tương ứng trong trường hợp đó.
 - Kết hợp các trường hợp đã xét, suy ra số nghiệm của PT đã cho.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $|-4x| = x + 2$.

b. $|2 - x| = 2 - 3x$.

c. $|2x - 3| = 5x - 6$.

d. $2x - |6x - 7| = -x + 8$.

e. $\left| \frac{1 - 5x}{3} \right| = 6 - 5x$.

f. $\frac{|x + 2|}{2} - \frac{|x - 1|}{3} = \frac{1}{4} + \frac{x + 3}{6}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $|x^2 - 2x| = x$.

b. $|2x^2 - 5x + 3| = -2x^2 + 2$.

c. $|x^2 + 4x - 5| = x^2 - 1$.

d. $|3x^2 - 7x + 2| = -x^2 + 5x - 6$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a. $\left| \frac{3x - 6}{1 - 2x} \right| = x - 2$.

b. $|-2x + 8| = \frac{x^2 - 6x + 8}{x + 3}$.

c. $\frac{|x| - 6}{x^2 - 36} = 2$.

d. $\frac{|x^2 - 4x + 3|}{5x^2 - 7x + 2} = x - 3$.

e. $\frac{-2x^2 + 7x - 4}{|2x + 1|} = 4 - x$.

f. $\frac{|x^2 + 5x + 4|}{x^2 + 3x + 2} = x + 4$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. $|2x + 1| = |x - 1|.$

c. $|1 + 4x| - |7x - 2| = 0.$

e. $||x - 3| + 4| = 6.$

b. $|2 - 5x| = |3x + 1|.$

d. $|2x^2 + 5x - 10| = 2x^2 + 1.$

f. $|x^2 - 3x| = x^2 + 1.$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a. $|2x + 1| - |5x - 2| = 3.$

c. $|x - 2| + |x - 3| = 1.$

e. $|2x + 3| - |x| + x - 1 = 0.$

b. $2|x| - |x + 3| - 1 = 0.$

d. $|x + 1| - 2|x - 1| = x.$

f. $|x - 1| + |x + 1| = 0.$

BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG IV

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a. $3x - 8 \geq 5x + 12.$

b. $-4x + 15 < 24 - 7x.$

c. $x + 1 \geq 7 - 2x.$

d. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} \geq 1 - \frac{x+3}{4}.$

e. $\frac{2x-1}{2} - 2x \leq -(2x+1).$

f. $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \leq x - \frac{x-3}{4}.$

Bài 2.

a. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của bất phương trình: $11x - 7 < 8x + 2.$

b. Tìm tất cả các nghiệm nguyên âm của bất phương trình:

$$\frac{x^2 + 2x + 8}{2} - \frac{x^2 - x + 1}{6} > \frac{x^2 + x + 1}{3} - \frac{x + 1}{4}.$$

c. Tìm nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình: $4(2 - 3x) - (5 - x) > 11 - x.$

d. Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình: $2(3 - x) - 1, 5(x - 4) < 3 - x.$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a. $\frac{x-5}{2005} + \frac{x-15}{1995} < \frac{x-2005}{5} + \frac{x-1995}{15}.$

b. $\frac{1987-x}{15} + \frac{1988-x}{16} + \frac{27+x}{1999} + \frac{28+x}{2000} > 4.$

c. $\left(\frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110} \right) x \geq \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}.$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. $|x - 3| - 5x = 7.$

b. $|x - 5| = |2x - 9|.$

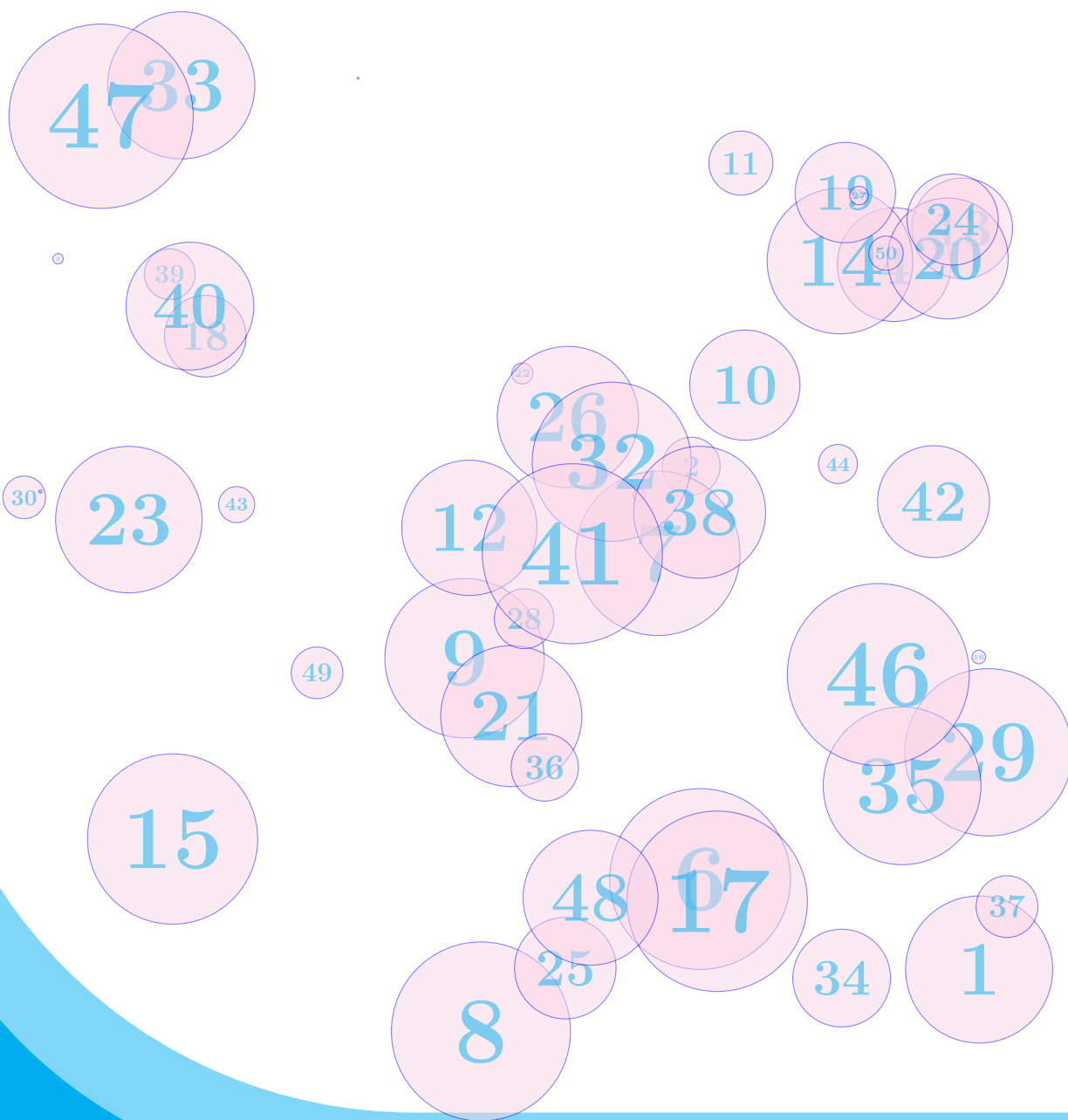
c. $||2x - 11| - x| = 8.$

d. $|4x - 7| + \frac{|7 - 4x|}{4x - 7} = 9.$

e. $\frac{|7x^2 - 9x + 2|}{5x + 4} = 2 - 7x.$

f. $\frac{x^2 - 8x + 15}{|2x^2 - 9x - 5|} = 3x - 9.$

PHẦN HÌNH HỌC



BÀI 1. TỨ GIÁC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Tứ giác $ABCD$ là hình gồm 4 đoạn thẳng AB, BC, CD, AD trong đó bất kì 2 đoạn thẳng nào cũng không nằm cùng trên một đường thẳng.

Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.

⚠ Từ nay, khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.

2. Tổng các góc của một tứ giác

Tổng các góc của một tứ giác bằng 360° .

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Tính góc cơ bản

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$. Tính các góc chưa biết của một tứ giác trong các trường hợp sau

- Tính góc A biết rằng $\widehat{B} = 50^\circ, \widehat{C} = 70^\circ, \widehat{D} = 80^\circ$.
- Tính góc C biết rằng $\widehat{B} = 120^\circ, \widehat{B} = 110^\circ, \widehat{D} = 80^\circ$.
- Tính góc D biết rằng $\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{B} = 90^\circ, \widehat{C} = 90^\circ$.
- Tính góc C biết rằng $\widehat{A} = 70^\circ, \widehat{B} = 50^\circ, \widehat{D} = 90^\circ$.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ thỏa mãn $AB = AD, CB = CD$.

- Chứng minh rằng AC là đường trung trực của đoạn thẳng BD .
- Tính góc B, D biết rằng $\widehat{A} = 100^\circ, \widehat{C} = 60^\circ$.

Dạng 2. Sử dụng tính chất về các góc của một tứ giác để tính góc

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = 120^\circ, \widehat{C} = 60^\circ, \widehat{D} = 90^\circ$. Tính góc A và góc ngoài tại đỉnh A .

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = AD, CB = CD, \widehat{C} = 60^\circ, \widehat{A} = 100^\circ$.

- Chứng minh AC là đường trung trực của BD .
- Tính $\widehat{B}, \widehat{D}$.

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có phân giác trong của góc A và góc B cắt nhau tại E , phân giác ngoài của góc A và góc B cắt nhau tại F . Chứng minh: $\widehat{AEB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$ và $\widehat{AFB} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$.

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, $CB = CD$. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = AB$. Chứng minh:

- Các tam giác ABC và EDC bằng nhau.
- AC là phân giác của góc A .

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ biết số đo của các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ tỉ lệ thuận với 5; 8; 13 và 10.

- Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.
- Kéo dài hai cạnh AB và DC cắt nhau ở E , kéo dài hai cạnh AD và BC cắt nhau ở F . Hai tia phân giác của các góc AED và góc AFB cắt nhau ở O . Phân giác của góc AFB cắt các cạnh CD và AB tại M và N . Chứng minh O là trung điểm của đoạn MN .

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, AC là tia phân giác của góc A . Chứng minh $CB = CD$.

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = a, \widehat{C} = b$. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E , hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại F . Các tia phân giác của hai góc AEB và AFD cắt nhau tại I . Tính góc $\widehat{EIF}$ theo a, b .

Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức tam giác để giải các bài toán liên hệ đến các cạnh của một tứ giác

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh:

- $AB < BC + CD + AD$.
- $AC + BD < AB + BC + CD + AD$.

Bài 11. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB + BD \leq AC + CD$. Chứng minh: $AB < AC$.

Bài 12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

- Chứng minh: $\frac{AB + BC + CD + AD}{2} < OA + OB + OC + OD < AB + BC + CD + AD$.
- Khi O là điểm bất kì thuộc miền trong của tứ giác $ABCD$, kết luận trên có đúng không?

Bài 13. Chứng minh rằng trong một tứ giác thì:

- Tổng độ dài 2 cạnh đối diện nhỏ hơn tổng độ dài hai đường chéo.
- Tổng độ dài hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi của tứ giác.

BÀI 2. HÌNH THANG

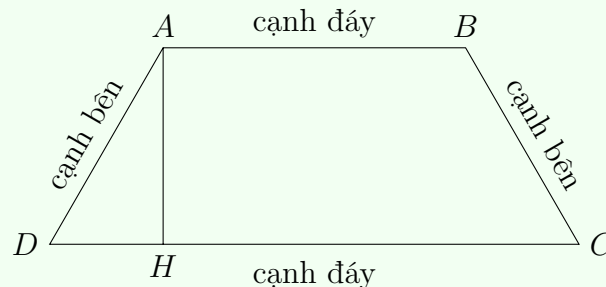
A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Ở hình bên ta có hình thang $ABCD$ trong đó $AB \parallel CD$.

- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.
- Các đoạn thẳng AB, CD gọi là cạnh đáy.
- Trong các hình thang mà hai đáy không bằng nhau, người ta còn phân biệt đáy lớn và đáy nhỏ.
- AH được gọi là đường cao của hình thang

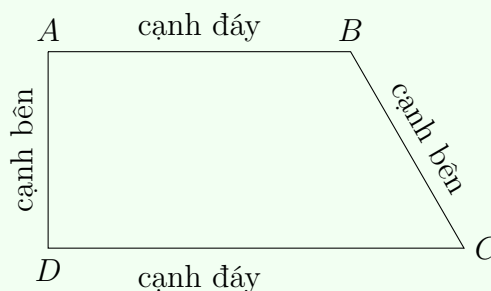


Nhận xét.

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

2. Hình thang vuông

- Hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$. Ta gọi $ABCD$ là hình thang vuông.
- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.



B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Tính chất các góc của một hình thang

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^\circ$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tính các góc của hình thang.

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$, $AD = BC = AB$, $\widehat{BDC} = 30^\circ$. Tính các góc của hình thang.

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$. Chứng minh rằng: $\widehat{A} + \widehat{B} > \widehat{C} + \widehat{D}$.

Bài 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Hai đường phân giác của góc A và B cắt nhau tại điểm K thuộc đáy CD . Chứng minh $AD + BC = DC$.

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

- Chứng minh rằng nếu hai tia phân giác của hai góc A và D cùng đi qua trung điểm F của cạnh bên BC thì cạnh bên AD bằng tổng hai đáy.

- b. Chứng minh rằng nếu $AD = AB + CD$ thì hai tia phân giác của hai góc A và D cắt nhau tại trung điểm của cạnh bên BC .

Bài 6. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ và $BC = AB = \frac{AD}{2}$. Lấy điểm M thuộc đáy nhỏ BC . Kẻ $Mx \perp MA$, Mx cắt CD tại N . Chứng minh rằng tam giác AMN vuông cân.

Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang, hình thang vuông

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$ và AC là tia phân giác của góc A . Chứng minh $ABCD$ là hình thang.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $AM = \frac{1}{2}BC$, N là trung điểm cạnh AB . Chứng minh:

- Tam giác AMB cân.
- Tứ giác $MNAC$ là hình thang vuông.

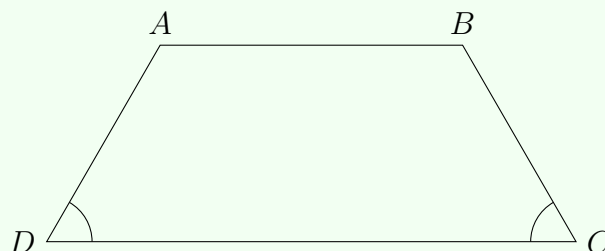
BÀI 3. HÌNH THANG CÂN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.
- Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ \widehat{C} = \widehat{D} \text{ hoặc } \widehat{A} = \widehat{B} \end{cases}$$



! Nếu $ABCD$ là hình thang cân (đáy AB, CD) thì $\widehat{C} = \widehat{D}$ và $\widehat{A} = \widehat{B}$.

2. Tính chất: Trong hình thang cân

- Hai cạnh bên bằng nhau.
- Hai đường chéo bằng nhau.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Sử dụng tính chất của hình thang cân để tính toán và chứng minh

Bài 1. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Kẻ các đường cao AE, BF của hình thang. Chứng minh rằng $DE = CF$

Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

- Chứng minh: $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.
- Gọi E là giao điểm của AC và BD . Chứng minh: $EA = EB$.

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB > CD$) có $CD = a, \widehat{A} + \widehat{B} = \frac{1}{2}(\widehat{C} + \widehat{D})$. Đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC .

- Tính các góc của hình thang.
- Chứng minh AC là phân giác của góc $\widehat{DAB}$.
- Tính diện tích của hình thang.

Bài 4. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{BDC} = 45^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .

- Chứng minh tam giác DOC vuông cân.
- Tính diện tích của hình thang $ABCD$, biết $BD = 6$ (cm).

Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang cân

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A , các đường phân giác BD, CE ($D \in AC, E \in AB$). Chứng minh rằng $BEDC$ là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

Bài 6. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D và E sao cho $AD = AE$.

- a. Chứng minh $BDEC$ là hình thang cân.
- b. Tính các góc của hình thang cân đó, biết $\widehat{A} = 50^\circ$.

Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AC = BD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng DC tại E . Chứng minh:

- a. Tam giác BDE là tam giác cân.
- b. Các tam giác ACD và BDC bằng nhau.
- c. $ABCD$ là hình thang cân.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D , đường thẳng song song với AC cắt BC ở E , đường thẳng song song với AB cắt AC ở F . Chứng minh:

- a. Các tứ giác $BDME, CFME, ADMF$ là các hình thang cân.
- b. Chu vi của tam giác DEF bằng tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh của tam giác ABC .
- c. $\widehat{DME} = \widehat{DMF} = \widehat{EMF}$.

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC, AD > BC$) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên CD , $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$ và $\widehat{D} = 60^\circ$.

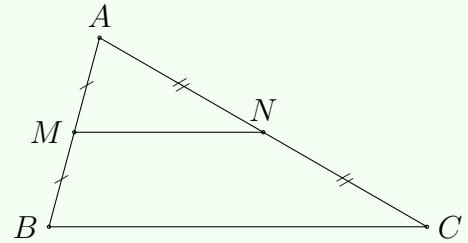
- a. Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân.
- b. Tính độ dài cạnh đáy AD , biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

BÀI 4. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường trung bình của tam giác

- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.
- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.
- Trong hình bên, ta có $MA = MB$ và $NA = NC$ nên MN được gọi là đường trung bình của $\triangle ABC$.



2. Đường trung bình của hình thang

- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.
- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.



B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên cạnh AB , lấy hai điểm D, E sao cho $AD = DE = EB$. Gọi I là giao điểm của AM với CD . Chứng minh: $AI = IM$.

Bài 2. Cho tam giác ABC và hai đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG, CG . Chứng minh tứ giác $MNDE$ có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC . Trên tia BA lấy điểm D sao cho A là trung điểm BD . Trên tia CB lấy điểm E sao cho B là trung điểm CE . Hai đường thẳng AC và DE cắt nhau tại I . Chứng minh rằng:

$$DI = \frac{DE}{3}$$

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ có góc $\widehat{C} = 40^\circ, \widehat{D} = 80^\circ, AD = BC$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD . Tính góc nhọn tạo bởi đường thẳng FE với các đường thẳng AD và BC .

Bài 5. Cho A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng d ($AB > BC$). Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là d , vẽ các tam giác đều AMB và BNC . Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BM, CM, BN, AN . Chứng minh:

a. $PQRS$ là hình thang cân.

b. $SQ = \frac{1}{2}MN$.

Bài 6. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM , D là giao điểm của BI và AC .

- Chứng minh: $AD = \frac{1}{2}DC$.
- So sánh độ dài BD và ID .

Bài 7. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, BD .

- Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q nằm trên một đường thẳng.
- Tính MN, PQ , biết các cạnh đáy của hình thang $AB = a, CD = b (a > b)$.
- Chứng minh rằng nếu $MP = PQ = QN$ thì $a = 2b$.

Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD . Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.

Bài 9. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC . Đường thẳng EF cắt BD ở I , cắt AC ở K .

- Chứng minh: $AK = KC, BI = ID$.
- Cho $AB = 6, CD = 10$. Tính EI, KF, IK .

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC .

- So sánh độ dài các đoạn thẳng EK và CD, KF và AB .
- Chứng minh: $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$.
- Khi $EF = \frac{AB + CD}{2}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Bài 11. Tính độ dài đường trung bình của một hình thang cân biết rằng các đường chéo của nó vuông góc với nhau và đường cao bằng 10 cm.

Bài 12. Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Vẽ đường thẳng d đi qua G cắt các đoạn thẳng AB, AC . Gọi A', B', C' thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên d . Tìm liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC' .

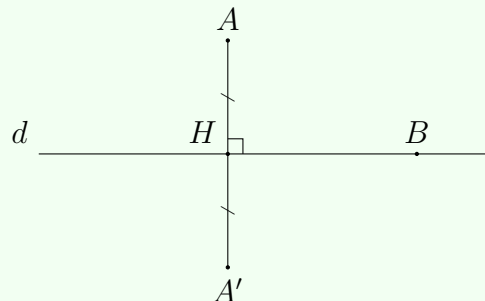
Bài 13. Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Vẽ đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC . Gọi A', B', C', G' thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên d . Tìm liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC', GG' .

BÀI 5. ĐỐI XỨNG TRỰC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

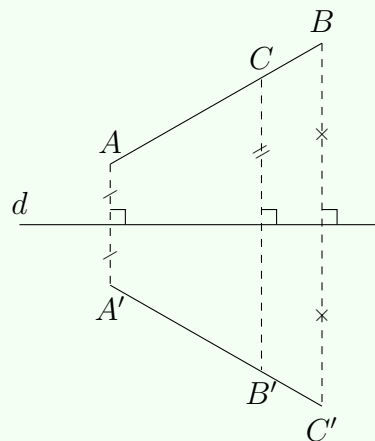
1. Hai điểm đối xứng qua đường thẳng

- Hai điểm được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.
- Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d cũng là điểm B .



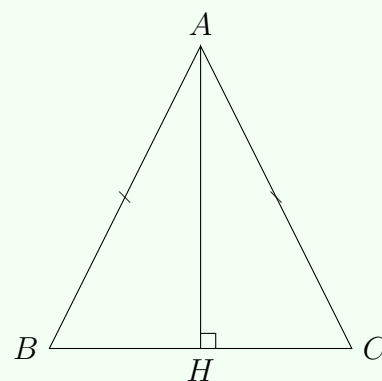
2. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng

- Ở hình bên, hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ gọi là hai đoạn thẳng đối xứng với nhau qua đường thẳng d .
- Ta định nghĩa: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.
- Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hai hình đó.
- Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua đường thẳng thì chúng bằng nhau.



3. Hình có trục đối xứng

- Ở hình bên, điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc cạnh của $\triangle ABC$ qua AH cũng thuộc cạnh của tam giác ABC . Ta nói AH là trục đối xứng của tam giác ABC .
- Ta định nghĩa: Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ qua đường thẳng d cũng thuộc hình $\mathcal{H}$.



B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho góc $\widehat{xOy} = 50^\circ$ và điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox , điểm C đối xứng với A qua Oy .

- So sánh các độ dài OB và OC .
- Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC .

a. Chứng minh hai tam giác BHC và BKC bằng nhau.

b. Cho $\widehat{BAC} = 70^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{BKC}$.

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$). Gọi K là điểm đối xứng với B qua AD , E là giao điểm của CK và AD . Chứng minh $\widehat{CED} = \widehat{AEB}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K lần lượt là điểm đối xứng với điểm H qua các cạnh AB, AC . Chứng minh:

a. Ba điểm I, A, K thẳng hàng.

b. Tứ giác $BIKC$ là hình thang.

c. $IK = 2AH$.

Bài 5. Cho tam giác ABC , các phân giác BM và CN cắt nhau tại I . Từ A vẽ các đường vuông góc với BM và CN , chúng cắt BC thứ tự ở E và F . Gọi I' là hình chiếu của I trên BC . Chứng minh rằng E và F đối xứng nhau qua II' .

Bài 6. Cho hai điểm A, B nằm trong một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d . Tìm điểm $M \in d$ sao cho $MA + MB$ ngắn nhất.

Bài 7. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$ và điểm A nằm trong góc đó. Gọi B, C lần lượt là hai điểm đối xứng với điểm A qua Ox, Oy .

a. Chứng minh tam giác BOC là tam giác cân. Tính các góc của tam giác đó.

b. Tìm điểm $I \in Ox$ và điểm $K \in Oy$ sao cho tam giác AIK có chu vi nhỏ nhất.

Bài 8. Cho tam giác ABC , Cx là phân giác ngoài của góc C . Trên Cx lấy điểm M ($khcC$). Chứng minh rằng: $MA + MB > CA + CB$.

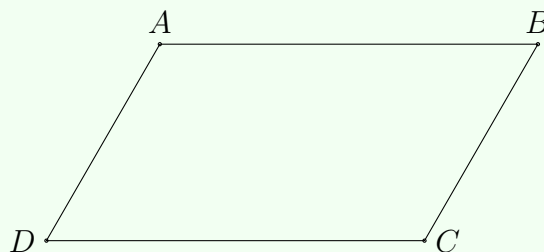
Bài 9. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ và điểm A ở trong góc đó. Tìm điểm B ở trên tia Ox và điểm C ở trên tia Oy sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

BÀI 6. HÌNH BÌNH HÀNH

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.
- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$.
- Từ định nghĩa hình bình hành và hình thang, ta suy ra hình bình hành là hình thang đặc biệt (hình bình hành là hình thang có hai cạnh bên song song).



2. Tính chất: Trong hình bình hành

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.
- Tứ giác có hai góc đối bằng nhau là hình bình hành.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD , F là trung điểm của BC .

- Chứng minh $BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$.
- Chứng minh tứ giác $EBFD$ là hình bình hành.
- Chứng minh các đường thẳng EF , DB và AC đồng qui.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > BC$). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E , tia phân giác của góc B cắt CD ở F .

- a. Chứng minh $DE \parallel BF$.
- b. Tứ giác $DEBF$ là hình gì?

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD , M và N là giao điểm của AI và CK với BD .

- a. Chứng minh: $AI \parallel CK$.
- b. Chứng minh: $DM = MN = NB$.

Dạng 2. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Kẻ AH vuông góc với BD ở H , CK vuông góc với BD ở K . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Qua điểm O , vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F , vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H . Chứng minh tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

Bài 6. Cho tam giác ABC . Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D . Giả sử $AE = BF$.

- a. Chứng minh tam giác AED cân.
- b. Chứng minh AD là phân giác của góc A .

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và I, K là trung điểm các đường chéo AC, BD . Chứng minh:

- a. Các tứ giác $MNPQ, INKQ$ là hình bình hành.
- b. Các đường thẳng MP, NQ, IK đồng qui.

Bài 8. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B , vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D .

- a. Chứng minh tứ giác $BDCH$ là hình bình hành.
- b. Tính số đo góc $\widehat{BDC}$, biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$, $AD = 2AB$. Từ C vẽ CE vuông góc với AB . Nối E với trung điểm M của AD . Từ M vẽ MF vuông góc với CE , MF cắt BC tại N .

- a. Tứ giác $MNCD$ là hình gì?
- b. Tam giác EMC là tam giác gì?
- c. Chứng minh: $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD , AD và BC ; M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, EC, CF, FA . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm E, F thuộc đường chéo AC sao cho $AE = EF = FC$. Gọi M là giao điểm của BF và CD ; N là giao điểm của DE và AB . Chứng minh rằng:

- a. M, N theo thứ tự là trung điểm của CD, AB .
- b. $EMFN$ là hình bình hành.

Bài 12. Cho hình thang vuông $ABCD$, có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ và $AD = 2BC$. Kẻ AH vuông góc với BD (H thuộc BD). Gọi I là trung điểm của HD . Chứng minh rằng: $CI \perp AI$.

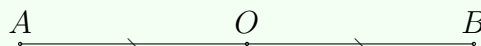
Bài 13. Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC . Chứng minh rằng: các đoạn thẳng EL, FM và DN đồng qui.

BÀI 7. ĐỐI XỨNG TÂM

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

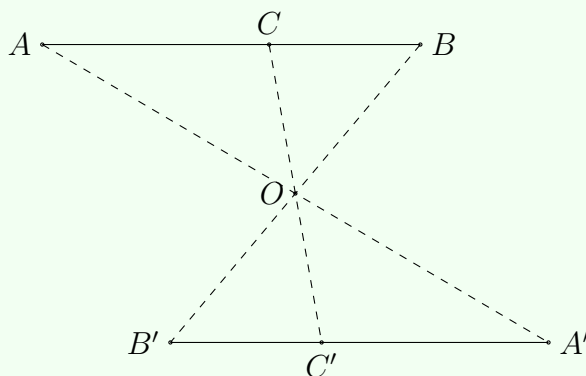
1. Hai điểm đối xứng với nhau qua một điểm

- Hai điểm được gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.
- Ở hình bên hai điểm A và A' đối xứng với nhau qua điểm O .



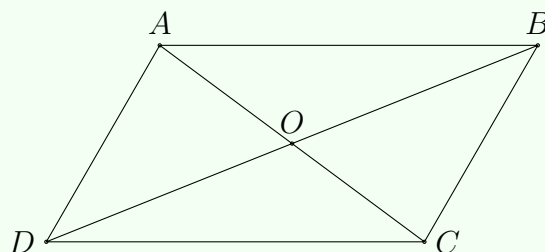
2. Hai hình đối xứng qua một điểm

- Ở hình bên, hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ được gọi là *hai đoạn thẳng đối xứng với nhau qua điểm O* .
- Ta định nghĩa: Hai hình được gọi là đối xứng với nhau qua tâm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O .
- Người ta cũng chứng minh được rằng: Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng qua một điểm thì chúng bằng nhau.



3. Hình có tâm đối xứng

- Trong hình bên, điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc cạnh của hình bình hành qua điểm O cũng thuộc hình bình hành, ta nói: O là tâm đối xứng của hình bình hành $ABCD$.
- Điểm O được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ qua điểm O cũng thuộc hình $\mathcal{H}$.



- Giao điểm của hai đường chéo hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua A , F là điểm đối xứng với D qua C . Chứng minh:

- $AC \parallel EF$.
- Điểm E đối xứng với điểm F qua điểm B .

Bài 2. Cho tam giác ABC , các trung tuyến BD , CE . Gọi H là điểm đối xứng với B qua D , K là điểm đối xứng với C qua E . Chứng minh điểm H đối xứng với điểm K qua điểm A .

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm E trên cạnh AB , I và K là các trung điểm của cạnh AD và BC . Gọi các điểm M , N lần lượt đối xứng với điểm E qua điểm I và điểm K .

- a. Chứng minh các điểm M, N thuộc đường thẳng CD .
- b. Chứng minh $MN = 2CD$.

Bài 4. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$, điểm A nằm trong góc đó. Gọi B là điểm đối xứng với A qua Ox , C là điểm đối xứng với A qua Oy . Chứng minh B đối xứng với C qua O .

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AB và CD theo thứ tự ở M và N . Chứng minh điểm M đối xứng với điểm N qua O .

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm đối xứng là O , một điểm E ở trên đoạn OD . Gọi F là điểm đối xứng của điểm C qua E .

- a. Chứng minh tứ giác $ODFA$ là hình thang.
- b. Xác định vị trí điểm E trên OD để hình thang $ODFA$ là hình bình hành.

Bài 7. Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của A, B, C qua tâm G .

- a. Chứng minh tứ giác $BPNC$ là hình bình hành.
- b. Chứng minh các tam giác ABC, MNP bằng nhau.
- c. Chứng minh các tam giác ABC, MNP có cùng trọng tâm.

Bài 8. Cho tam giác ABC , H là trực tâm, I là giao điểm các đường trung trực. K là điểm đối xứng với H qua trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh K đối xứng với A qua I .

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Trên AB lấy điểm E , trên CD lấy điểm F sao cho $AE = CF$.

- a. Chứng minh E đối xứng với F qua O .
- b. Từ E dựng $Ex \parallel AC$ cắt BC tại I , dựng $Fy \parallel AC$ cắt AD tại K . Chứng minh rằng: $EF = FK$; I và K đối xứng với nhau qua O .

Bài 10. Cho tam giác ABC . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua C , B' là điểm đối xứng với B qua A , C' là điểm đối xứng với C qua B . Gọi BM là trung tuyến của tam giác ABC , $B'M'$ là trung tuyến của tam giác $A'B'C'$.

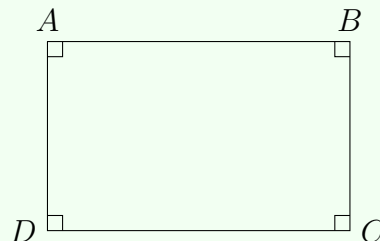
- a. Chứng minh rằng $ABM'M$ là hình bình hành.
- b. Gọi G là giao điểm của BM và $B'M'$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của hai tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$.

BÀI 8. HÌNH CHỮ NHẬT

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.
- Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$.
- Từ định nghĩa hình chữ nhật, ta suy ra: Hình chữ nhật cũng là hình thang cân, cũng là hình bình hành.



2. Tính chất

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Áp dụng vào tam giác

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật

Bài 1. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Gọi I là trung điểm của AC , E là điểm đối xứng với H qua I . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE . Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K .

- Chứng minh tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh $HG = GK = KE$.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Tứ giác $EFGH$ là hình gì?

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác ABC , vẽ hai tam giác vuông cân $ADB (DA = DB)$ và $ACE (EA = EC)$. Gọi M là trung điểm của BC , I là giao điểm của DM với AB , K là giao điểm của EM với AC . Chứng minh:

- a. Ba điểm D, A, E thẳng hàng.
- b. Tứ giác $IAKM$ là hình chữ nhật.
- c. Tam giác DME là tam giác vuông cân.

Bài 4. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC .

- a. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.
- b. Chứng minh tứ giác $ABPN$ là hình thang cân.
- c. Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để $ABPN$ là hình chữ nhật.

Bài 5. Cho tam giác ABC . Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB .

- a. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
- b. Xác định vị trí của điểm O để tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại C . Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$).

- a. Chứng minh tứ giác $PCQM$ là hình chữ nhật.
- b. Gọi I là trung điểm của PQ . Chứng minh rằng khi P di chuyển trên cạnh AC, Q di chuyển trên cạnh BC thì điểm I di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD . Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với AB và AD . Chứng minh rằng:

- a. Tứ giác $AHFK$ là hình chữ nhật.
- b. AF song song với BD và KH song song với AC .
- c. Ba điểm E, H, K thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và $CA; D, E, F$ lần lượt là trung điểm các đoạn HA, HB và HC .

- a. Chứng minh rằng các tứ giác $MNFD$ và $MEFP$ là các hình chữ nhật.
- b. Để các đoạn MD, ME và DP bằng nhau thì tam giác ABC phải là tam giác gì?

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình chữ nhật để giải toán

Bài 9. Tính độ dài trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 7 cm và 24 cm.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A, CH là đường cao ($H \in AB$). Gọi D là điểm đối xứng với điểm B qua A .

- a. Chứng minh tam giác DCB là tam giác vuông.
- b. Chứng minh $\widehat{DCA} = \widehat{HCB}$.

Bài 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vẽ $BH \perp AC (H \in AC)$. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AH và DC ; I, O lần lượt là trung điểm của AB và IC .

a. Chứng minh $IC = KB$ và $MO = \frac{1}{2}IC$.

b. Tính số đo góc $\widehat{BMK}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A . M là điểm bất kì thuộc cạnh BC . Vẽ $MD \perp AB, ME \perp AC$. O là trung điểm của DE .

a. Chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.

b. Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào?

c. Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài ngắn nhất?

Bài 13. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 2AD$. Vẽ tia $AM (M$ thuộc cạnh $DC)$ sao cho $\widehat{DAM} = 15^\circ$. Chứng minh tam giác ABM là tam giác cân.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AC > AB$. AH là đường cao. Trên tia HC lấy $HD = HA$, đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E .

a. Chứng minh $AE = AB$.

b. Gọi M trung điểm BE . Tính số đo góc $\widehat{AHM}$.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AC = 3AB$. Trên cạnh góc vuông AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Tính $\widehat{ACB} + \widehat{AEB}$.

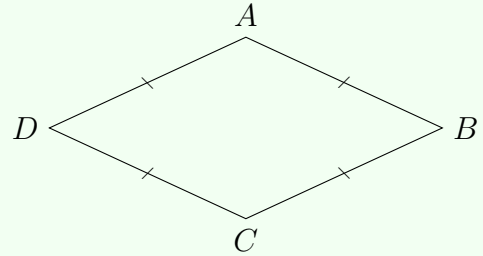
Bài 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$. $KAH \perp BD$. Gọi I là trung điểm của DH . K đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt cạnh BC ở K . Chứng minh K là trung điểm cạnh BC .

BÀI 9. HÌNH THOI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Hình thoi là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
- Tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow AB = BC = CD = AD$.
- Từ định nghĩa hình thoi, ta suy ra: Hình thoi cũng là một hình bình hành.



2. Tính chất: Trong hình thoi

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi.

Bài 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} = 40^\circ, \widehat{D} = 80^\circ, AD = BC$. Gọi E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC, DB, AC .

- Chứng minh tứ giác $EMFN$ là hình thoi.
- Tính góc $\widehat{MFN}$.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD, O$ là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Gọi E, F, G, H lần lượt là các giao điểm của các phân giác trong của các tam giác OAB, OBC, ODC, ODA .

- Chứng minh: ba điểm E, O, G thẳng hàng, ba điểm H, O, F thẳng hàng.
- Chứng minh các tam giác AEB và CGD bằng nhau.
- Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

Bài 4. Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc cạnh BC . Qua M vẽ đường thẳng song song với AB , cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC , cắt AB ở F .

- a. Chứng minh tứ giác $AFME$ là hình bình hành.
- b. Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác $AFME$ là hình thoi.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2AD$, $\widehat{D} = 70^\circ$. Vẽ $BH \perp AD$ ($H \in AD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB .

- a. Chứng minh tứ giác $ANMD$ là hình thoi.
- b. Tính góc $\widehat{HMC}$.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC . Gọi H là trực tâm của tam giác, AD là đường cao. Trên cạnh BC lấy điểm M . Từ M vẽ $ME \perp AB$ ($E \in AB$) và $MF \perp AC$ ($F \in AC$). Gọi I là trung điểm của AM .

- a. Chứng minh tứ giác $DEIF$ là hình thoi.
- b. Chứng minh các đường thẳng MH, ID, EF đồng qui.

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau ở O . Hai đường thẳng d_1 và d_2 cùng đi qua O và vuông góc với nhau. Đường thẳng d_1 cắt các cạnh AB và CD ở M và P . Đường thẳng d_2 cắt các cạnh BC và AD ở N và Q . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình thoi để giải toán

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ cm, $BD = 10$ cm. Tính độ dài của cạnh hình thoi.

Bài 9. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $BM = CN$. Chứng minh tam giác MDN là tam giác đều.

Bài 10. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Trên AD và CD lấy các điểm M, N sao cho $AM + CN = AD$. Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC , MP cắt BC tại Q . Tứ giác $MDCQ$ là hình gì?

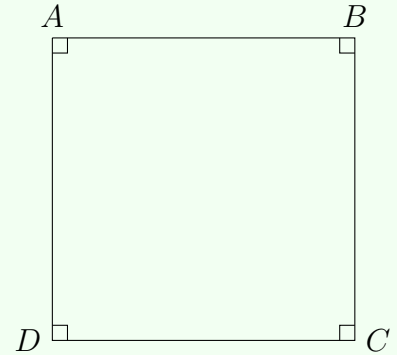
Bài 11. Cho P là một điểm chuyển động trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Hạ $PM \perp AB$; $PN \perp AC$ ($M \in AB$; $N \in AC$). Gọi K, S là hai đỉnh khác của hình thoi $KMSN$. Chứng minh KS đi qua một điểm cố định.

BÀI 10. HÌNH VUÔNG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.
- Tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = AD \end{cases}$
- Từ định nghĩa hình vuông ta suy ra
 - Hình vuông là hình chữ nhật có 4 cạnh bằng nhau.
 - Hình vuông là hình thoi có 4 góc vuông.



2. Tính chất

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.
- Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A . Phân giác trong AD của góc A ($D \in BC$). Vẽ $DF \perp AC$, $DE \perp AB$. Chứng minh tứ giác $AEDF$ là hình vuông.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình vuông.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , M là một điểm thuộc cạnh BC . Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC , chúng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và F .

- Tứ giác $AFME$ là hình gì?
- Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác $AFME$ là hình vuông.

Bài 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Gọi M là giao điểm của AF và DE , N là giao điểm của BF và CE .

- a. Tứ giác $ADFE$ là hình gì?
- b. Tứ giác $EMFN$ là hình gì?

Bài 5. Cho tam giác ABC . Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông $ABCD$ và $ACEF$. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của $ABCD$ và $ACEF$; M, P lần lượt là trung điểm BC và DF . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình vuông để giải toán

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh các AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = DF$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BF .

- a. Chứng minh các tam giác ADF và BAE bằng nhau.
- b. Chứng minh MN vuông góc với AF .

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E , trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$.

- a. Chứng minh tam giác EDF vuông cân.
- b. Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh $BI = DI$.
- c. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Chứng minh O, C, I thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC , dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông $ABCD$ và $ACEF$. Vẽ đường cao AH kéo dài HA gặp DF tại E . Chứng minh rằng $DI = IF$.

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông $ABEF$ và $ADGH$. Chứng minh:

- a. $AC = FH$ và $AC \perp FH$.
- b. Tam giác CEG là tam giác vuông cân.

Bài 10. Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB , các hình vuông $AMCD, BMEF$.

- a. Chứng minh AE vuông góc với BC .
- b. Gọi H là giao điểm của AE và BC . Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.
- c. Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB .

Bài 11. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh CD lấy điểm M . Tia phân giác của góc $\widehat{ABM}$ cắt AD ở I . Chứng minh rằng: $BI \leq 2MI$.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm E thuộc đường chéo AC . Kẻ $EF \perp AD, EG \perp CD$.

- a. Chứng minh rằng: $EB = FG$ và $EB \perp FG$.
- b. Chứng minh rằng: Các đường thẳng BE, AG, CF đồng qui.

Bài 13. Cho tam giác ABC . Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC , các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$. Vẽ hình bình hành $EAGH$. Chứng minh rằng:

- a. $AK = BC$ và $AH \perp BC$.
- b. Các đường thẳng KA, BF, CD đồng qui.

BÀI 11. ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Các đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD$ thoả điều kiện gì thì tứ giác $EFGH$ là:

- Hình chữ nhật.
- Hình thoi.
- Hình vuông.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A , trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AC , K là điểm đối xứng của điểm M qua điểm I .

- Tứ giác $AMCK$ là hình gì?
- Tứ giác $AKMB$ là hình gì?
- Có trường hợp nào của tam giác ABC để tứ giác $AKMB$ là hình thoi?

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông $ABDE, ACGH$.

- Chứng minh tứ giác $BCHE$ là hình thang cân.
- Vẽ đường cao AK của tam giác ABC . Chứng minh AK, DE, GH đồng qui.

Bài 4. Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

- Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?
- Cho biết diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 30 cm^2 . Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , trung tuyến AM . Gọi D là trung điểm của AB , E là điểm đối xứng của điểm M qua điểm D .

- Chứng minh điểm E đối xứng với điểm M qua đường thẳng AB .
- Các tứ giác $AEMC, AEBM$ là hình gì?
- Cho $BC = 4 \text{ cm}$. Tính chu vi tứ giác $AEBM$.
- Tam giác vuông thoả điều kiện gì thì $AEBM$ là hình vuông?

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC . Các đường thẳng BM, DN cắt đường chéo AC tại P, Q .

- Chứng minh $AP = PQ = QC$.
- Tứ giác $MPNQ$ là hình gì?
- Xác định tỉ số $\frac{CA}{CD}$ để $MPNQ$ là hình chữ nhật.
- Xác định góc $\widehat{ACD}$ để $MPNQ$ là hình thoi.
- Tam giác ACD thoả mãn điều kiện gì để $MPNQ$ là hình vuông?

Bài 7. Cho hình thoi $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ đường thẳng qua B song song với AC , đường thẳng qua C song song với BD , hai đường thẳng đó cắt nhau ở K .

- Tứ giác $OBKC$ là hình gì?
- Chứng minh $AB = OK$.
- Tìm điều kiện của hình thoi $ABCD$ để $OBKC$ là hình vuông.

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có $BC = 2AB$ và $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD .

- Tứ giác $ECDF$ là hình gì?
- Tứ giác $ABED$ là hình gì?
- Tính số đo của góc $\widehat{AED}$.

Bài 9. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Gọi O là trung điểm của EF . Qua O vẽ đường thẳng song song với AB , cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N .

- Tứ giác $EMFN$ là hình gì?
- Hình thang $ABCD$ có thêm điều kiện gì để $EMFN$ là hình thoi?
- Hình thang $ABCD$ có thêm điều kiện gì để $EMFN$ là hình vuông?

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = AC = a$.

- Lấy điểm D trên cạnh AC và điểm E trên cạnh AB sao cho $AD = AE$. Các đường thẳng vuông góc với EC vẽ từ A và D lần lượt cắt cạnh BC ở K và L . Chứng minh $BK = KL$.
- Một hình chữ nhật $APMN$ thay đổi có đỉnh P trên cạnh AB , đỉnh N trên cạnh AC và có chu vi luôn bằng $2a$. Điểm M di chuyển trên đường nào?
- Chứng minh khi hình chữ nhật $APMN$ thay đổi thì đường vuông góc vẽ từ M xuống đường chéo PN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 11. Cho hình vuông $ABCD$. E là điểm trên cạnh DC , F là điểm trên tia đối của tia BC sao cho $BF = DE$.

- Chứng minh tam giác AEF vuông cân.
- Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh I thuộc BD .
- Lấy điểm K đối xứng với A qua I . Chứng minh tứ giác $AEKF$ là hình vuông.

Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 2AB$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và AD .

- Chứng minh $AE \perp BF$.
- Chứng minh tứ giác $BFDC$ là hình thang cân.
- Lấy điểm M đối xứng của A qua B . Chứng minh tứ giác $BMCD$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Kẻ tia Ax song song với BC . Trên Ax lấy điểm D sao cho $AD = DC$.

- Tính số đo các góc $\widehat{BAD}, \widehat{DAC}$.

- b. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
- c. Gọi E là trung điểm của BC . Chứng minh tứ giác $ADEB$ là hình thoi.

Bài 14. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Gọi K là giao điểm của AC và DM, L là trung điểm của BD và CM .

- a. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?
- b. Tứ giác $MDPB$ là hình gì?
- c. Chứng minh: $AK = KL = LC$.

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB và CD .

- a. Các tứ giác $AEFD, AECF$ là hình gì?
- b. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE . Chứng minh rằng tứ giác $EMFN$ là hình chữ nhật.
- c. Hình bình hành $ABCD$ nói trên có thêm điều kiện gì để $EMFN$ là hình vuông?

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường trung tuyến AM . Gọi H là điểm đối xứng với M qua AB, E là giao điểm của MH và AB . Gọi K là điểm đối xứng với M qua AC, F là giao điểm của MK và AC .

- a. Xác định dạng của tứ giác $AEMF, AMBH, AMCK$.
- b. Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A .
- c. Tam giác vuông ABC có thêm điều kiện gì thì $AEMF$ là hình vuông?

ĐA GIÁC - DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

BÀI 1. ĐA GIÁC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.
- Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

2. Một số kết quả

- Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
- Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$.
- Số các đường chéo của đa giác n cạnh bằng $\frac{n(n - 3)}{2}$.

3. Diện tích

- Diện tích tam giác bằng nửa tích một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó: $S = \frac{1}{2}a.h$.
- Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông: $S = \frac{1}{2}ab$.
- Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó: $S = ab$.
- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó: $S = a^2$.
- Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao: $S = \frac{1}{2}(a + b)h$.
- Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó: $S = ah$.
- Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.

B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh đa giác $EBFGDH$ là lục giác đều.

Bài 2. Cho tam giác ABC , O là trọng tâm của tam giác. Gọi E, F, G lần lượt là các điểm đối xứng với điểm O qua trung điểm của AB, BC, AC . Chứng minh lục giác $AEBFCG$ là lục giác đều.

Bài 3. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

- Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
- Chứng minh ngũ giác $ABCDEF$ là ngũ giác đều.

Bài 4. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi K là giao điểm của hai đường chéo AC và BE .

- Tính số đo mỗi góc của ngũ giác.
- Chứng minh $CKED$ là hình thoi.

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. E là điểm bất kì nằm trên đường chéo AC . Đường thẳng qua E , song song với AD cắt AB, DC lần lượt tại F, G . Đường thẳng qua E , song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại H, K . Chứng minh hai hình chữ nhật $EFBK$ và $EGDH$ có cùng diện tích.

Bài 6. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Vẽ $BP \perp MN$, $CQ \perp MN (P, Q \in MN)$.

- Chứng minh tứ giác $BPQC$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh $S_{BPQC} = S_{ABC}$.

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh các tứ giác $ADCM$ và $ABCN$ có diện tích bằng nhau.

Bài 8. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm và $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Tính diện tích của hình thang đó.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông $ABDE, ACFG, BCHI$. Chứng minh $S_{BCHI} = S_{ABDE} + S_{ACFG}$.

Bài 10. Diện tích hình bình hành bằng 24 cm^2 . Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến các đường thẳng chứa các cạnh hình bình hành bằng 2 cm và 3 cm. Tính chu vi của hình bình hành.

Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, O, E, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Các đoạn thẳng AO, BE, CN và DK cắt nhau tại L, M, R, P . Chứng minh $S_{ABCD} = 5.S_{MLPR}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BA, BC . Lấy điểm M trên đoạn thẳng EF ($M \neq E, M \neq F$). Chứng minh $S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A , điểm M thuộc đáy BC . Gọi BD là đường cao của tam giác ABC ; H và K chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Chứng minh: $MH + MK = BD$.

Bài 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K và L là hai điểm thuộc cạnh BC sao cho $BK = KL = LC$. Tính tỉ số diện tích của:

- Các tam giác DAC và DCK .
- Tam giác DAC và tứ giác $ADLB$.
- Các tứ giác $ABKD$ và $ABLD$.

Bài 15. Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến AM, BN cắt nhau tại G . Diện tích tam giác AGB bằng 336 cm^2 . Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 16. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = 3DA$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 4EC$. Gọi F là giao điểm của AE và CD .

- Chứng minh: $FD = FC$.

b. Chứng minh: $S_{ABC} = 2S_{AFB}$.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC , đường cao AH và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Gọi P, Q, R lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AC, AB . Chứng minh: $MP + MQ + MR = AH$.

Bài 18. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB . Từ N kẻ đường thẳng song song với BM cắt đường thẳng BC tại D . Biết diện tích tam giác ABC bằng a (cm^2).

a. Tính diện tích hình thang $CMND$ theo a .

b. Cho $a = 128 \text{ cm}^2$ và $BC = 32 \text{ cm}$. Tính chiều cao của hình thang $CMND$.

Bài 19. Cho tứ giác $ABCD$. Kéo dài AB một đoạn $BM = AB$, kéo dài BC một đoạn $CN = BC$, kéo dài CD một đoạn $DP = CD$ và kéo dài DA một đoạn $AQ = DA$. Chứng minh $S_{MNPQ} = 5.S_{ABCD}$.

Bài 20. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$ và ba đường cao ứng với ba cạnh lần lượt có độ dài h_a, h_b, h_c . Gọi r là khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác của tam giác đến một cạnh của tam giác. Chứng minh $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

Bài 21. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác sao cho các đường thẳng AM, BN, CP đồng qui tại điểm O . Chứng minh $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.

Bài 22. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, P, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, AD ; O là giao điểm của MN và PQ . Chứng minh:

a. $S_{AOQ} + S_{BOP} = S_{MPQ}$.

b. $S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Bài 23. Cho tứ giác $ABCD$. Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC . Đường thẳng đó cắt cạnh DC ở E . Chứng minh: $S_{ADE} = S_{ABCD}$.

Bài 24. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC = 10 \text{ cm}, BD = 12 \text{ cm}$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Biết $\widehat{AOB} = 30^\circ$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Bài 25. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

a. Tứ giác $IJKL$ là hình gì?

b. Cho biết diện tích hình thang $ABCD$ bằng 20 cm^2 . Tính diện tích tứ giác $IJKL$.

Bài 26. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ phân giác AM của góc A ($M \in CD$), phân giác CN của góc C ($N \in AB$). Các phân giác AM, CN lần lượt cắt BD tại E và F . Chứng minh diện tích hai tứ giác $AEFN$ và $CFEM$ bằng nhau.

BÀI 2. ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $AD = 6,8$ cm. Gọi H, I, E, K là các trung điểm tương ứng của BC, HC, DC, EC .

- Tính diện tích tam giác DBE .
- Tính diện tích tứ giác $EHIK$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm đối xứng O , cạnh a . Một góc vuông xOy có tia Ox cắt cạnh AB tại E , tia Oy cắt cạnh BC tại F . Tính diện tích tứ giác $OEBF$.

Bài 3. Tính diện tích một hình thang vuông, biết hai đáy có độ dài 6 cm và 9 cm, góc tạo bởi cạnh bên và đáy lớn có số đo bằng 45° .

Bài 4. Cho hình thang $ABCD$ có độ dài hai đáy $AB = 5$ cm, $CD = 15$ cm, độ dài hai đường chéo $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Từ A vẽ đường thẳng song song với BD , cắt CD tại E .

- Chứng minh tam giác ACE là tam giác vuông.
- Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 5. Gọi O là điểm nằm trong hình bình hành $ABCD$. Chứng minh: $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO}$.

Bài 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$, O là điểm nằm trong hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = b$. Tính tổng diện tích các tam giác OAB và OCD theo a và b .

Bài 7. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm cạnh AB . Trên cạnh AC , lấy điểm N sao cho $AN = 2NC$. Gọi I là giao điểm của BN và CM . Chứng minh:

Bài 8. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm cạnh AB . Trên cạnh AC , lấy điểm N sao cho $AN = 2NC$. Gọi I là giao điểm của BN và CM . Chứng minh:

- $S_{BIC} = S_{AIC}$.
- $BI = 3IN$.

Bài 9. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC . Chứng minh $S_{ABNM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$.

Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và DC sao cho $AE = CF$; I là điểm trên cạnh AD ; IB và IC lần lượt cắt EF tại M và N . Chứng minh: $S_{IMN} = S_{MEB} + S_{NFC}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC . Hãy chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua D .

Bài 12. Cho tam giác ABC có $BC = a$, đường cao $AH = h$. Từ điểm I trên đường cao AH , vẽ đường thẳng song song với BC , cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M và N . Vẽ MQ, NP vuông góc với BC . Đặt $AI = x$.

- Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a, h, x .
- Xác định vị trí điểm I trên AH để diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất.

Bài 13. Cho tam giác ABC và ba đường trung tuyến AM, BN, CP . Chứng minh rằng sáu tam giác tạo thành trong tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Bài 14. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Một đường thẳng song song với hai đáy cắt AD ở E , MN ở I , BC ở F . Chứng minh $IE = IF$.

Bài 15. Cho tứ giác $ABCD$. Qua trung điểm K của đường chéo BD , vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC , cắt AD tại E . Chứng minh CE chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 16. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AC lấy các điểm M, N sao cho $AM = MN = NC$. Đường thẳng qua M , song song với AB , cắt đường thẳng qua N song song với BC tại O . Chứng minh OA, OB, OC chia tam giác ABC thành ba phần có diện tích bằng nhau.

Bài 17. Cho ngũ giác $ABCDE$. Hãy vẽ một tam giác có diện tích bằng diện tích ngũ giác $ABCDE$.

BÀI 1. ĐỊNH LÝ TALET TRONG TAM GIÁC - TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tỷ số hai đoạn thẳng

- Tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.
- Tỷ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD đgl tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

3. Định lý Ta – lét trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}; \frac{AB}{B'B} = \frac{AC}{C'C}.$$

4. Định lý Ta – lét đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} \Rightarrow B'C' \parallel BC.$$

5. Hệ quả

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng song song với một cạnh và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

6. Tính chất đường phân giác trong tam giác

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

$$AD, AE \text{ là các phân giác trong và ngoài của góc } \widehat{BAC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}.$$

7. Nhắc lại một số tính chất của tỉ lệ thức

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} ad = bc \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \end{cases}.$$

B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng

Bài 1. Cho tam giác ABC , G là trọng tâm. Qua G vẽ đường thẳng song song với cạnh AC , cắt các cạnh AB, BC lần lượt ở D và E . Tính độ dài đoạn thẳng DE , biết $AD + EC = 16 \text{ cm}$ và chu vi tam giác ABC bằng 75 cm .

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Đường thẳng song song hai đáy cắt cạnh AD tại M , cắt cạnh BC tại N sao cho $MD = 3MA$.

a. Tính tỉ số $\frac{NB}{NC}$.

b. Cho $AB = 8 \text{ cm}$, $CD = 20 \text{ cm}$. Tính MN .

Bài 3. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Qua B' vẽ đường thẳng a song song với BC , cắt cạnh AC tại C'' .

a. So sánh độ dài các đoạn thẳng AC' và AC'' .

b. Chứng minh $B'C' \parallel BC$.

Bài 4. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Đường thẳng a song song với BC cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH lần lượt tại B', C', H' .

a. Chứng minh $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$.

b. Cho $AH' = \frac{1}{3}AH$ và diện tích tam giác ABC là $67,5 \text{ cm}^2$. Tính diện tích tam giác $AB'C'$.

Bài 5. Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm chia cạnh AB thành hai đoạn thẳng có độ dài $AD = 13,5 \text{ cm}$, $DB = 4,5 \text{ cm}$. Tính tỉ số các khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC .

Bài 6. Cho tam giác ABC có $BC = 15 \text{ cm}$. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho $AK = KI = IH$. Qua I và K vẽ các đường thẳng $EF \parallel BC$, $MN \parallel BC$ ($E, M \in AB$; $F, N \in AC$).

- a. Tính độ dài các đoạn thẳng MN và EF .
- b. Tính diện tích tứ giác $MNFE$, biết rằng diện tích của tam giác ABC là 270 cm^2 .

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Qua điểm I thuộc đoạn OB , vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC , cắt các cạnh AB, BC và các tia DA, DC theo thứ tự tại các điểm M, N, P, Q .

- a. Chứng minh: $\frac{IM}{OA} = \frac{IB}{OB}$ và $\frac{IM}{IP} = \frac{IB}{ID} \cdot \frac{OD}{OB}$.
- b. Chứng minh: $\frac{IM}{IP} = \frac{IN}{IQ}$.

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của cạnh AB , F là trung điểm của cạnh CD . Chứng minh rằng hai đoạn thẳng DE và BF chia đường chéo AC thành ba đoạn bằng nhau. HD : Gọi M, N lần lượt là giao điểm của DE và BF với AC . Chứng minh: $AM = MN = NC$.

Bài 9. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Vẽ đường thẳng song song với cạnh AB , cắt cạnh AD ở M , cắt cạnh BC ở N . Biết rằng $\frac{DM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{m}{n}$. Chứng minh rằng: $MN = \frac{mAB + nCD}{m + n}$

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$ có các góc B và D là góc vuông. Từ một điểm M trên đường chéo AC , vẽ $MN \perp BC$, $MP \perp AD$. Chứng minh: $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$

Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Một cát tuyến qua D , cắt đường chéo AC ở I và cắt cạnh BC ở N , cắt đường thẳng AB ở M .

- a. Chứng minh rằng tích $AM \cdot CN$ không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến qua D .
- b. Chứng minh hệ thức: $ID^2 = IM \cdot IN$.

Bài 12. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B', C' . Chứng minh: $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'}$

Bài 13. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB, BC, CD lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho $AD = \frac{1}{4}AB, BE = \frac{1}{4}BC, CF = \frac{1}{4}CA$. Tính diện tích tam giác DEF , biết rằng diện tích tam giác ABC bằng $a^2 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{BK} = \frac{1}{2}$. Trên cạnh BC lấy điểm L sao cho $\frac{CL}{BL} = \frac{2}{1}$. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AL và CK . Tính diện tích tam giác ABC , biết diện tích tam giác BQC bằng $a^2 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 15. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA} = \frac{1}{3}.$$

Tính diện tích tam giác tạo thành bởi các đường thẳng AE, BF, CD , biết diện tích tam giác ABC là S .

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song

Bài 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}$.

- Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.
- Chứng minh hình bình hành $EFGH$ có chu vi không đổi.

Bài 17. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của CD . Gọi I là giao điểm của AM và BD , K là giao điểm của BM và AC .

- Chứng minh $IK \parallel AB$.
- Đường thẳng IK cắt AD, BC lần lượt ở E và F . Chứng minh $EI = IK = KF$.

Bài 18. Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ CD . Từ D , vẽ đường thẳng song song với cạnh BC , cắt AC tại M và AB tại K . Từ C , vẽ đường thẳng song song với cạnh bên AD , cắt cạnh đáy AB tại F . Qua F , vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC , cắt cạnh bên BC tại P . Chứng minh rằng:

- MP song song với AB .
- Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng qui.

Bài 19. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Đường thẳng song song với BC qua O , cắt AB ở E và đường thẳng song song với CD qua O , cắt AD ở F .

- Chứng minh đường thẳng EF song song với đường chéo BD .
- Từ O vẽ các đường thẳng song song với AB và AD , cắt BC và DC lần lượt tại G và H . Chứng minh hệ thức: $CG \cdot DH = BG \cdot CH$.

Dạng 3. Tính chất đường phân giác của tam giác

Bài 20. Cho tam giác ABC cân ở A , $BC = 8$ cm, phân giác của góc B cắt đường cao AH ở K , $\frac{AK}{AH} = \frac{3}{5}$.

- Tính độ dài AB .
- Đường thẳng vuông góc với BK cắt AH ở E . Tính EH .

Bài 21. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = m$, $AC = n$; AD là đường phân giác trong của góc A . Tính tỉ số diện tích của tam giác ABD và tam giác ACD .

Bài 22. Cho tam giác ABC cân ở A , phân giác trong BD , $BC = 10$ cm, $AB = 15$ cm.

- Tính AD, DC .
- Đường phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC tại D' . Tính $D'C$.

Bài 23. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM và đường phân giác trong AD .

- Tính diện tích tam giác ADM , biết $AB = m$, $AC = n$ ($n > m$) và diện tích $\triangle ABC$ bằng S .
- Cho $n = 7$ cm, $m = 3$ cm. Diện tích tam giác ADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích tam giác ABC ?

Bài 24. Cho tam giác ABC có $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 7$ cm. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , O là giao điểm của hai đường phân giác BD, AE .

- Tính độ dài đoạn thẳng AD .
- Chứng minh $OG \parallel AC$.

Bài 25. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM , đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ cắt AB ở D , đường phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt cạnh AC ở E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

Bài 26. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), AD là phân giác trong của góc A . Qua trung điểm E của cạnh BC , vẽ đường thẳng song song với AD , cắt cạnh AC tại F , cắt đường thẳng AB tại G . Chứng minh $CF = BG$.

Bài 27. Cho tam giác ABC và ba đường phân giác AM, BN, CP cắt nhau tại O . Ba cạnh AB, BC, CA tỉ lệ với 4, 7, 5.

a. Tính MC , biết $BC = 18$ cm.

b. Tính AC , biết $NC - NA = 3$ cm.

c. Tính tỉ số $\frac{OP}{OC}$.

d. Chứng minh: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

e. Chứng minh: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} > \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}$.

Bài 28. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Đường phân giác của góc AIB cắt cạnh AB ở M . Đường phân giác của góc AIC cắt cạnh AC ở N .

a. Chứng minh rằng $MM \parallel BC$.

b. Tam giác ABC phải thỏa điều kiện gì để có $MN = AI$?

c. Tam giác ABC phải thỏa điều kiện gì để có $MN \perp AI$?

Bài 29. Cho hình thang cân $ABCD$, đáy lớn DC , góc $\widehat{D} = 60^\circ$. Đường phân giác của góc D cắt đường chéo AC tại I , chia AC thành hai đoạn theo tỉ số $\frac{4}{11}$ và cắt đáy AB tại M . Tính các cạnh đáy AB, DC , biết $MA - MB = 6$ cm.

Bài 30. Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng cắt AB ở E, AD ở F và cắt đường chéo AC ở G . Chứng minh hệ thức: $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$.

Bài 31. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy một điểm M và trên cạnh CD lấy một điểm N sao cho $DN = BM$. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, DB, AC đồng qui.

BÀI 2. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hai tam giác đồng dạng

Định nghĩa 1. Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:

$$\widehat{A'} = \widehat{A}, \widehat{B'} = \widehat{B}, \widehat{C'} = \widehat{C}; \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

! Khi viết kí hiệu hai tam giác đồng dạng, ta phải viết theo đúng thứ tự các cặp đỉnh tương ứng: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

Định lí 1. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với hai cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

! Định lí trên cũng đúng trong trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

2. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

- **Trường hợp 1:** Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC.$$

- **Trường hợp 2:** Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, \widehat{A'} = \widehat{A} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC.$$

- **Trường hợp 3:** Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

$$\widehat{A'} = \widehat{A}, \widehat{B'} = \widehat{B} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC.$$

3. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

- **Trường hợp 1:** Nếu tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.
- **Trường hợp 2:** Nếu tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.
- **Trường hợp 3:** Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

4. Tính chất của hai tam giác đồng dạng

Nếu hai tam giác đồng dạng với nhau thì:

- Tỷ số hai đường cao tương ứng bằng tỷ số đồng dạng.
- Tỷ số hai đường phân giác tương ứng bằng tỷ số đồng dạng.
- Tỷ số hai đường trung tuyến tương ứng bằng tỷ số đồng dạng.
- Tỷ số các chu vi bằng tỷ số đồng dạng.
- Tỷ số các diện tích bằng bình phương tỷ số đồng dạng.

B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Sử dụng tam giác đồng dạng để tính toán

Bài 1. Cho tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỷ số k .

- Tính tỷ số chu vi của hai tam giác.
- Cho $k = \frac{3}{5}$ và hiệu chu vi của hai tam giác là 40 dm. Tính chu vi của mỗi tam giác.

Bài 2. Cho tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỷ số $k = \frac{4}{3}$. Tính chu vi của tam giác ABC , biết chu vi của tam giác $A'B'C'$ bằng 27 cm.

Bài 3. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 7$ cm. Tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC và có chu vi bằng 75 cm. Tính độ dài các cạnh của $\Delta A'B'C'$.

Bài 4. Cho tam giác ABC và các đường cao BH, CK .

- Chứng minh $\Delta ABH \sim \Delta ACK$.
- Cho $\widehat{ACB} = 40^\circ$. Tính $\widehat{AKH}$.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$. Trên hai cạnh AB, BC lấy hai điểm P và Q sao cho $BP = BQ$. Gọi H là hình chiếu của B trên đường thẳng CP .

- Chứng minh $\Delta BHP \sim \Delta CHB$.
- Chứng minh: $\frac{BH}{BQ} = \frac{CH}{CD}$.
- Chứng minh $\Delta CHD \sim \Delta BHQ$. Từ đó suy ra $\widehat{DHQ} = 90^\circ$.

Bài 6. Hai tam giác ABC và DEF có $\widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}, AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $DE = 6$ cm.

- Tính độ dài các cạnh AC, DF, EF , biết rằng cạnh AC dài hơn cạnh DF là 3 cm.
- Cho diện tích tam giác ABC bằng 39,69 cm². Tính diện tích tam giác DEF .

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH, BH = 4$ cm, $CH = 9$ cm. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

- Chứng minh $\Delta AKI \sim \Delta ABC$.
- Tính diện tích tam giác ABC .

c. Tính diện tích của tứ giác $AKHI$.

Bài 8. Cho tam giác ABC , có $\widehat{A} = 90^\circ + \widehat{B}$, đường cao CH . Chứng minh:

a. $\widehat{CBA} = \widehat{ACH}$.

b. $CH^2 = BH \cdot AH$.

Bài 9. Cho tam giác ABC , hai trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G . Tính diện tích tam giác GMN , biết diện tích tam giác ABC bằng S .

Bài 10. Cho hình vuông $ABCD$, cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng với C qua D , EB cắt AD tại I . Trên EB lấy điểm M sao cho $DM = DA$.

a. Chứng minh $\triangle EMC \sim \triangle ECB$.

b. Chứng minh $EB \cdot MC = 2a^2$.

c. Tính diện tích tam giác EMC theo a .

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh AB , lấy điểm M sao cho $2AM = 3MB$. Một đường thẳng qua M , song song với BC , cắt AC tại N . Một đường thẳng qua N , song song với AB , cắt BC tại D .

a. Chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle NDC$.

b. Cho $AN = 8$ cm, $BM = 4$ cm. Tính diện tích các tam giác AMN , ABC và NDC .

Dạng 2. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Bài 12. Cho tam giác ABC . Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA .

a. Chứng minh $\triangle A'B'C' \sim \triangle CAB$.

b. Tính chu vi của $\triangle A'B'C'$, biết chu vi của $\triangle ABC$ bằng 54 cm.

Bài 13. Cho tam giác ABC , G là trọng tâm của tam giác. Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của AG, BG, CG . Chứng minh các tam giác EFH và ABC đồng dạng với nhau và G là trọng tâm của tam giác EFH .

Bài 14. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh BC, CA, AB lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho AM, BN, CP đồng quy tại O . Qua A và C vẽ các đường thẳng song song với BO cắt CO, OA lần lượt ở E và F .

a. Chứng minh: $\triangle FCM \sim \triangle OMB$ và $\triangle PAE \sim \triangle PBO$.

b. Chứng minh: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

Bài 15. Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy 2 điểm D, E sao cho $AD = 8$ cm, $AE = 6$ cm.

a. Chứng minh $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

b. Tính chu vi của tam giác ADE , khi biết $BC = 25$ cm.

c. Tính góc ADE , biết $\widehat{C} = 20^\circ$.

Bài 16. Cho góc xOy ($xOy \neq 180^\circ$). Trên cạnh Ox , lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 5$ cm, $OB = 16$ cm. Trên cạnh Oy , lấy 2 điểm C, D sao cho $OC = 8$ cm, $OD = 10$ cm.

a. Chứng minh: $\triangle OCB \sim \triangle OAD$.

b. Gọi I là giao điểm của AD và BC . Chứng minh $\widehat{BAI} = \widehat{DCI}$.

Bài 17. Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = 24 \text{ cm}$, $AC = 28 \text{ cm}$. Đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của các điểm B, C trên đường thẳng AD .

a. Tính tỉ số $\frac{BM}{CN}$.

b. Chứng minh $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$.

Bài 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ $CE \perp AB$ và $CF \perp AD$, $BH \perp AC$.

a. Chứng minh $\triangle ABH \sim \triangle ACE$.

b. Chứng minh: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

Bài 19. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

a. Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

b. Đường thẳng qua O , vuông góc với AB, CD theo thứ tự tại H, K . Chứng minh $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$.

Bài 20. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi O là giao điểm của ba đường cao AH, BK, CI .

a. Chứng minh $OK \cdot OB = OI \cdot OC$.

b. Chứng minh $\triangle OKI \sim \triangle OCB$.

c. Chứng minh $\triangle BOH \sim \triangle BCK$.

d. Chứng minh $BO \cdot BK + CO \cdot CI = BC^2$.

Bài 21. Cho tam giác ABC vuông ở A , $AB = 5,4 \text{ cm}$, $AC = 7,2 \text{ cm}$.

a. Tính BC .

b. Từ trung điểm M của BC , vẽ đường thẳng vuông góc với BC , cắt đường thẳng AC tại H và cắt đường thẳng AB tại E . Chứng minh $\triangle EMB \sim \triangle CAB$.

c. Tính EB và EM .

d. Chứng minh BH vuông góc với EC .

e. Chứng minh $HA \cdot HC = HM \cdot HE$.

Bài 22. Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH .

a. Hãy nêu từng cặp các tam giác đồng dạng.

b. Cho $AB = 12,45 \text{ cm}$, $AC = 20,50 \text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AH, BH, CH .

Bài 23. Cho tam giác ABC và đường cao AH , $AB = 5 \text{ cm}$, $BH = 3 \text{ cm}$, $AC = \frac{20}{3} \text{ cm}$.

a. Tính độ dài AH .

b. Chứng minh $\triangle ABH \sim \triangle CAH$. Từ đó tính $\widehat{BAC}$.

Bài 24. Cho tứ giác $ABCD$, có $\widehat{DBC} = 90^\circ$, $AD = \sqrt{20} \text{ cm}$, $AB = 4 \text{ cm}$, $DB = 6 \text{ cm}$, $DC = 9 \text{ cm}$.

a. Tính góc $\widehat{BAD}$.

b. Chứng minh $\triangle BAD \sim \triangle DBC$.

c. Chứng minh $DC \parallel AB$.

BÀI 3. ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm. Tia phân giác của góc A , cắt cạnh BC tại D .

- Tính $\frac{DB}{DC}$.
- Đường thẳng qua D , song song với AB , cắt AC tại E . Chứng minh $\triangle EDC \sim \triangle ABC$.
- Tính DE và diện tích của tam giác EDC .

Bài 2. Cho tam giác cân ABC , $AB = AC = b$, $BC = a$. Vẽ các đường cao BH , CK .

- Chứng minh $BK = CH$.
- Chứng minh $KH \parallel BC$.
- Tính độ dài HC và HK .

Bài 3. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là trung điểm của BC . Trên các cạnh AB , AC lấy lần lượt các điểm K , H sao cho $BK \cdot CH = BI^2$. Chứng minh:

- $\triangle KBI \sim \triangle ICH$.
- $\triangle KIH \sim \triangle KBI$.
- KI là phân giác của góc $\widehat{BKH}$.
- $IH \cdot KB + HC \cdot IK > HK \cdot BI$.

Bài 4. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH , đường phân giác trong AD , đường trung tuyến AM .

- Chứng minh $HD + DM = HM$.
- Vẽ các đường cao BF , CE . So sánh hai đoạn thẳng BF và CE .
- Chứng minh $\triangle AFE \sim \triangle ABC$.
- Gọi O là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh $BO \cdot BF + CO \cdot CE = BC^2$.

Bài 5. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB , AC lấy lần lượt các điểm D , E sao cho $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Đường trung tuyến AI ($I \in BC$) cắt đoạn thẳng DE tại H . Chứng minh $DH = HE$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{C} = 30^\circ$ và đường phân giác BD ($D \in AC$).

- Tính tỉ số $\frac{DA}{CD}$.
- Cho $AB = 12,5$ cm. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

Bài 7. Cho tam giác đều ABC cạnh a , M là trung điểm của BC . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{DME} = 60^\circ$.

- Chứng minh $BD \cdot CE = \frac{a^2}{4}$.
- Chứng minh $\triangle MBD \sim \triangle EMD$ và $\triangle ECM \sim \triangle EMD$.

c. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng DE .

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{A} = 20^\circ$, $AB = AC = b$, $BC = a$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC} = 20^\circ$.

a. Chứng minh $\triangle BDC \sim \triangle ABC$.

b. Vẽ AE vuông góc với BD tại E . Tính độ dài các đoạn thẳng AD, DE, AE .

c. Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Bài 9. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM , K là điểm trên AM sao cho $AM = 3AK$, BK cắt AC tại N , P là trung điểm của NC .

a. Tính tỉ số diện tích của các tam giác ANK và AMP .

b. Cho biết diện tích $\triangle ABC$ bằng S . tính diện tích tam giác ANK .

c. Một đường thẳng qua K cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại I và J . Chứng minh $\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AJ} = 6$.

Bài 10. Cho tam giác ABC . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC . O là giao điểm các đường trung trực, H là trực tâm, G là trọng tâm của tam giác ABC .

a. Chứng minh $\triangle OMN \sim \triangle HAB$.

b. So sánh độ dài AH và OM .

c. Chứng minh $\triangle HAG \sim \triangle OMG$.

d. Chứng minh ba điểm H, G, O thẳng hàng và $GH = 2GO$.

Bài 11. Cho tam giác ABC , các đường cao AK và BD cắt nhau tại G . Vẽ các đường trung trực HE, HF của AC và BC . Chứng minh:

a. $BG = 2HE$.

b. $AG = 2HF$.

Bài 12. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($AB \parallel DC, \widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$). Đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC . Chứng minh $BD^2 = AB \cdot DC$

Bài 13. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), O là trung điểm của cạnh đáy BC . Một điểm D di động trên cạnh AB . Trên cạnh AC lấy một điểm E sao cho $CE = \frac{OB^2}{BD}$. Chứng minh:

a. Hai tam giác DBO, OCE đồng dạng.

b. Tam giác DOE cũng đồng dạng với hai tam giác trên.

c. DO là phân giác của góc $\widehat{BDE}$, EO là phân giác của góc $\widehat{CED}$.

d. Khoảng cách từ điểm O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB .

Bài 14. Cho tam giác ABC , trong đó $\widehat{B}, \widehat{C}$ là các góc nhọn. Các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H .

a. Chứng minh: $A'A \cdot A'H = A'B \cdot A'C$.

b. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Giả sử đường thẳng GH song song với cạnh đáy BC . Chứng minh: $A'A^2 = 3A'B \cdot A'C$.

Bài 15. Cho hình thang $KLMN$ ($KN \parallel LM$). gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Qua E , vẽ một đường thẳng song song với LM , cắt MN tại F . Chứng minh: $\frac{1}{EF} = \frac{1}{KN} + \frac{1}{LM}$.

Bài 16. Qua một điểm O tùy ý ở trong tam giác ABC , vẽ đường thẳng song song với AB , cắt AC và BC lần lượt tại D và E ; đường thẳng song song với AC , cắt AB và BC lần lượt ở F và K ; đường thẳng song song với BC , cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh: $\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1$.

Bài 17. Qua một điểm O tùy ý ở trong tam giác ABC , vẽ các đường thẳng AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C' . Chứng minh: $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$.

Bài 18. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC , lấy lần lượt các điểm P, Q, R . Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AP, BQ, CR đồng qui tại O thì $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$ (định lí Ceva).

Bài 19. Trên các đường thẳng qua các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC , lấy lần lượt các điểm P, Q, R (không trùng với đỉnh nào của tam giác). Chứng minh rằng nếu ba điểm P, Q, R thẳng hàng thì $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$ (định lí Menelaus).