MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG TRÒN

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Sự xác định đường tròn

1. Định nghĩa: Đường tròn tâm O bán kính R $(R>0)$ là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R. Kí hiệu $(O;R)$ hoặc (O)

2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn $(O;R)$ *và điểm M, khi đó*

- *M nằm trên đường tròn* $(O;R)$ *khi và chỉ khi* $OM=R$.
- *M nằm trong đường tròn* $(O;R)$ *khi và chỉ khi* $OM<R$.
- *M nằm ngoài đường tròn* $(O;R)$ *khi và chỉ khi* $OM>R$.

3. Cách xác định đường tròn: *Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn và tâm đường tròn đó là giao điểm các đường trung trực của tam giác tạo được tự ba điểm đó.*

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

- *Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.*
- *Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.*

II. Liên hệ giữa đường kính và dây cung.

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- *Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.*
- *Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.*

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- *Trong một đường tròn hai thì dây bằng nhau thì cách đều tâm và hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.*

- *Trong hai dây của một đường tròn thì dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn và dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.*

III. Ví trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn $(O;R)$ *và đường thẳng* Δ. *Đặt* $d=(O,\Delta)$ *là khoảng cánh từ O đến* Δ.

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d<R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d=R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d>R$

Khi đường thẳng Δ *và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng* Δ *được gọi là tiếp tuyến của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn được gọi là tiếp điểm. Khi đường thẳng* Δ *và đường tròn tiếp cắt nhau tại hai điểm thì đường thẳng* Δ *được gọi là cát tuyến của đường tròn.*

2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

- *Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.*
- *Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.*

3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- *Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.*
- *Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.*
- *Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.*

4. Đường tròn nội tiếp tam giác

- *Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.*

• *Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.*

5. Đường tròn bàng tiếp tam giác

• *Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia được gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.*

• *Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.*

• *Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B(hoặc C).*

IV. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

1. Tính chất đường nối tâm

• *Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.*

• *Nếu hai đường tròn cắt nhau thi hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.*

• *Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.*

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn $(O;R)$ *và* $(O';r)$. *Đặt* $d = OO'$

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau: – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	$d = R + r$ $d = \|R - r\|$
Hai đường tròn không giao nhau: – Ở ngoài nhau – (O) đựng (O′)	0	$d > R + r$ $d < \|R - r\|$

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó. Tiếp tuyến chung ngoài là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm. Tiếp tuyến chung trong là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

V. Góc với đường tròn.

1. Góc ở tâm

• Một số khái niệm

+ Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

+ Nếu $0^0 < \alpha < 180^0$ thì cung nằm bên trong góc tròn được gọi cung nhỏ, cung nằm bên ngoài góc tròn được gọi cung lớn.

+ Nếu $\alpha = 180^0$ thì mỗi cung là một nửa đường tròn.

+ Cung nằm bên trong góc tròn được gọi cung bị chắn. Góc bẹt chắn nửa đường tròn.

+ Kí hiệu cung AB là $\overset{\frown}{AB}$. Số đo của cung AB được kí hiệu là $sđ\overset{\frown}{AB}$

- **Một số tính chất**

+ Định lí 1: Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ\overset{\frown}{AB} = sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{BC}$

+ Định lí 2: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau thì hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau, ngược lại hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

+ Định lí 3: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau thì cung lớn hơn căng dây lớn hơn, ngược lại dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

2. Góc nội tiếp

- *Định nghĩa: Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.*
- *Định lí: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.*
- *Hệ quả: Trong một đường tròn thì*

+ Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

+ Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

+ Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0*) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.*

+ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung.

- *Định lí: Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến với dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.*
- *Hệ quả: Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.*

4. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn và góc có đỉnh ở bên ngoài đừng tròn

- *Định lí 1: Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.*
- *Định lí 2: Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.*

5. Tứ giác nội tiếp

- *Định nghĩa: Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn là tứ giác nội tiếp đường tròn.*
- *Định lí 1: Tứ giác nôi tiếp thì tổng số đo hai góc đối diện bằng* 180^0.

• *Định lí 2: Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng* 180^0 *thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.*

Chú ý: *Trong các tứ giác đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.*

6. Đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp

• *Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.*

• *Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.*

• *Cho n – đa giác đều có cạnh a, khi đó*

– *Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp là* $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{n}}$ *và* $r = \dfrac{a}{2\tan\dfrac{180^0}{n}}$

– *Liên hệ giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp là* $R^2 - r^2 = \dfrac{a^2}{4}$.

7. Độ dài đường tròn, cung tròn. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn.

• *Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:* $C = 2\pi R = \pi d$

• *Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung* n^0 *được tính theo công thức:* $l = \dfrac{\pi Rn}{180}$

• *Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức:* $S = \pi R^2$

• *Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung* n^0 *được tính theo công thức:* $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = S = \dfrac{lR}{2}$

VI. Một sô kiến thức bổ sung

1. Một số tính chất về tiếp tuyến

Tính chất 1.1. Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Vẽ tiếp tuyến MT với T tiếp điểm và các cát tuyến MAB, MCD. Khi đó ta có $MT^2 = MA.MB = MC.MD = OM^2 - R^2$

Nhận xét: *Với một điểm M cố định thì* $OM^2 - R^2$ *không đổi, do đó* MT^2 *và MB.MC không đổi. Ta gọi đại lượng* $P_{M/(O)} = OM^2 - R^2$ *là phương tích của M đối với đường tròn (O).*

• **Tính chất 1.2.** Tứ giác ABCD có $MA.MB = MC.MD$ với M là giao điểm của AB và CD thì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

• **Tính chất 1.33.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn, gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Khi đó ta có $MA.MC = MB.MD = R^2 - OM^2$

• **Tính chất 1.4.** Tứ giác ABCD có $MA.MC = MB.MD$ với M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

• **Tính chất 2.1.** Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc nhau tại A, từ M bất kì vẽ các cát tuyến MAB với (O_1) và MCD với đường tròn (O_2). Khi đó M nằm trên tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$.

• **Tính chất 2.2.** Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A và B. Từ điểm M trên đường thẳng AB vẽ MCD là cát tuyến với đường tròn (O_1) và MEF là cát tuyến với đường tròn (O_1), khi đó ta luôn có $MC.MD = ME.MF$

Nhận xét: *Tiếp tuyến qua điểm A trong tính chất 2.1 và đường thẳng MAB trong tính chất 2.1 được gọi là truc đẳng phương của hai đường tròn.*

2. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

• **Tính chất 1.** Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn khi và chỉ góc trong của tứ giác và góc ngoài ở đỉnh đối diện bằng nhau

• **Tính chất 2.** Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi $\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB}$

• **Tính chất 3.** Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$, với M là giao điểm của AB và CD.

• **Tính chất 4.** Tứ giác ABCD có nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi $MA.MC = MB.MD$, với M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

3. Một số định lí hình học nổi tiếng

• **Đường tròn Euler:** Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M, N, P lần lượt ta trung điểm của BC, CA, AB. Gọi S, R, Q lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC. Khi đó chín điểm D, E, F, M, N, P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

• **Hệ thức Euler:** Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi d là độ dài đoạn nối tâm của hai đường tròn. Khi đó ta có $d^2 = R(R-2r)$

• **Định lý Ptoleme:** Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi

$AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

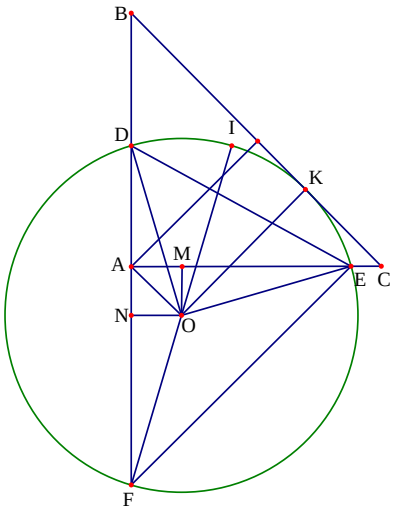
B. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có đường cao AH. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm K rồi dựng hình chữ nhật AHKO. Vẽ đường tròn (O; OK), đường tròn này cắt cạnh AB tại D, cắt cạnh AC tại E. Gọi F là giao điểm thứ hai của (O) với đường thẳng AB. Chứng minh rằng bốn điểm D, A, O, E cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

Kẻ $OM \perp AE; ON \perp AF$, khi đó $\widehat{OMA} = \widehat{ONA} = 90^0$

Tứ giác AMON có $\widehat{OMA} = \widehat{ONA} = \widehat{MAN} = 90^0$ nên AMON là hình chữ nhật. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường phân giác.



Do đó ta được $\widehat{HAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 45^0$ nên suy ra

$$\widehat{OAM} = \widehat{HAO} - \widehat{HAC} = 90^0 - 45^0 = 45^0 = \frac{1}{2}\widehat{MAN}$$

Suy ra AO là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$. Từ đó AMON là hình vuông nên $AM = AN; OM = ON$.

Xét hai tam giác vuông OME và ONF có $OE = OF$ và $OM = ON$ nên $\Delta OME = \Delta ONF \Rightarrow ME = NF$

Từ đó suy ra $AM + ME = AN + NF \Rightarrow AE = AF \Rightarrow \Delta AEF$ vuông cân tại A.

Do đó suy ra $\widehat{DFE} = 45^0$. Kẻ đường kính FI của đường tròn (O) khi đó ta được $\widehat{OFD} = \widehat{ODF}$

Vì $\widehat{DOI}$ là góc ngoài của tam giác ODF nên $\widehat{DOI} = \widehat{OFD} + \widehat{ODF}$

Do đó ta được $\widehat{DOI} = \widehat{OFD} + \widehat{OFD} = 2.\widehat{OFD}$. Chứng minh tương tự $\widehat{EOI} = 2.\widehat{OFE}$

Từ đó $\widehat{DOI} + \widehat{EOI} = 2.\left(\widehat{OFD} + \widehat{OFE}\right)$. Suy ra $\widehat{DOE} = 2.\widehat{DFE} = 90^0$ nên $\widehat{DOE} = \widehat{DAE} = 90^0$.

Từ đó O và A thuộc đường tròn đường kính DE nên bốn điểm O, A, D, E cùng thuộc một đường tròn.

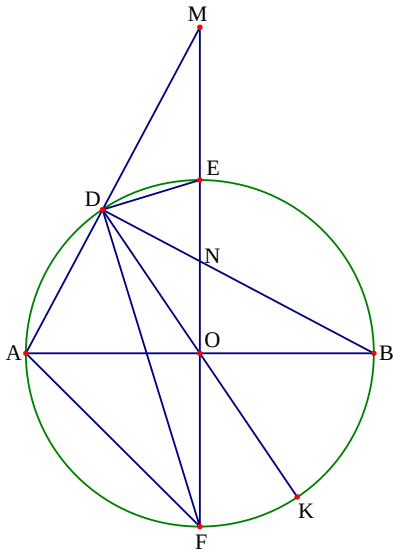
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AB và EF vuông góc với nhau. Lấy D là một điểm thuộc cung AE nhỏ và M là giao điểm của AD và OE, N là giao điểm của OE và DB.

Chứng minh rằng $MA.MD = ME.MF = MN.MO$

Lời giải

Vì D thuộc đường tròn (O) nên

$\overset{\frown}{ADB} = 90^0 \Rightarrow \overset{\frown}{MDN} = 90^0$



Hai tam giác vuông MOA và MDN đồng dạng với nhau nên $\frac{MA}{MN} = \frac{MO}{MD} \Rightarrow MA.MD = MN.MO$

Kẻ đường kính DK của đường tròn (O), khi đó ta được $\overset{\frown}{OFD} = \overset{\frown}{ODF}$. Vì $\overset{\frown}{KOF}$ là góc ngoài của tam giác ODF $\overset{\frown}{KOF} = \overset{\frown}{ODF} + \overset{\frown}{OFD}$

Nên ta được $\overset{\frown}{KOF} = \overset{\frown}{ODF} + \overset{\frown}{ODF} = 2.\overset{\frown}{ODF}$. Chứng minh tương tự ta có $\overset{\frown}{KOB} = 2.\overset{\frown}{ODB}$.

Suy ra $\overset{\frown}{KOF} + \overset{\frown}{KOB} = 2.\left(\overset{\frown}{ODF} + \overset{\frown}{ODB}\right)$ nên ta được

$$\overset{\frown}{BOF} = 2.\overset{\frown}{BDF} \Rightarrow \overset{\frown}{BDF} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BOF} = 45^0$$

Vì D thuộc đường tròn đường kính EF nên $\overset{\frown}{EDF} = 90^0$. Do đó $\overset{\frown}{EDB} = \overset{\frown}{EDF} - \overset{\frown}{BDF} = 45^0$

Từ đó suy ra $\overset{\frown}{MDE} = \overset{\frown}{MDN} - \overset{\frown}{EDB} = 45^0$ nên tam giác AOF vuông cân tại O, do đó $\overset{\frown}{AFO} = 45^0$

Từ các kết quả trên ta được $\overset{\frown}{AFM} = \overset{\frown}{MDE}$ nên suy ra hai tam giác MAF và MED đồng dạng.

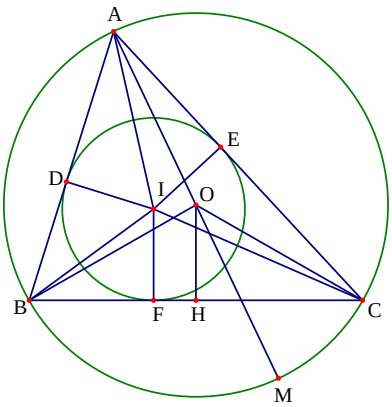
Do đó ta được $\frac{MA}{ME} = \frac{MF}{MD} \Rightarrow MA.MD = ME.MF$

Vậy ta được $MA.MD = ME.MF = MN.MO$

Ví dụ 3. Đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính lần lượt là R và r. Biết rằng $\overset{\frown}{BAC} - \overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{BAC}$. Tính diện tích tam giác ABC theo R và r.

Lời giải

Gọi O và I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với AB, AC, BC. Khi đó ta có



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.r+\frac{1}{2}AC.r+\frac{1}{2}BC.r=\frac{1}{2}r\left(AB+AC+BC\right)$$
$$=\frac{1}{2}r\left(AD+AE+BD+BF+CE+CF\right)$$

Mà ta có $AD=AE,BD=BF,CE=CF$ nên ta được

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}r\left[2.AD+2\left(BF+CF\right)\right]=r\left(AD+BC\right)$$

Vì $\widehat{BAC}-\widehat{ACB}=\widehat{ABC}-\widehat{BAC}$ nên $2\widehat{BAC}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}$

Từ đó ta được $3\widehat{BAC}=180^0\Rightarrow\widehat{BAC}=60^0\Rightarrow\widehat{DAI}=30^0$

Trong tam giác vuông DAI có $AD=DI.\cot\widehat{DAI}=r.\cot 30^0=r\sqrt{3}$

Kẻ đường kính AM của đường tròn (O), khi đó ta được $\widehat{OAB}=\widehat{OBA}$

Từ đó suy ra $\widehat{BOM}=\widehat{OAB}+\widehat{OBA}\Rightarrow\widehat{BOM}=2.\widehat{OAB}$. Tương tự ta có $\widehat{COM}=2.\widehat{OAC}$

Suy ra $\widehat{BOM}+\widehat{COM}=2\left(\widehat{OAB}+\widehat{OAC}\right)\Rightarrow\widehat{BOC}=2.\widehat{BAC}=2.60^0=120^0$

Kẻ OH vuông góc với BC ta được $HB=HC=\frac{BC}{2}$ và $\widehat{HOC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=60^0$

Trong tam giác OHC có $HC=OC.\sin\widehat{HOC}=R.\sin 60^0=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

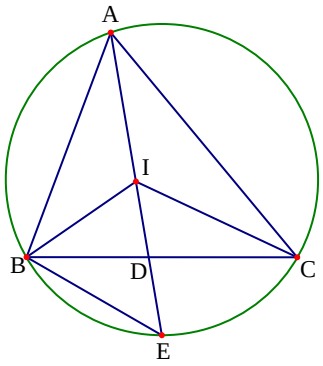
Từ đó suy ra $BC=2.HC=R\sqrt{3}$ nên ta được $S_{ABC}=r\left(r\sqrt{3}+R\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}.r\left(R+r\right)$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nhọn có I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng

$$AI^2=\frac{AB.AC\left(AB+AC-BC\right)}{AB+BC+CA}$$

Lời giải

Gọi D là giao điểm của AI với BC, E là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Khi đó ta thấy $\Delta AEB \backsim \Delta ACD$ và $\Delta DEB \backsim \Delta DCA$ nên ta được $\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AD}$ và $\frac{DE}{DB}=\frac{DC}{DA}$

Từ đó ta được $AE.AD = AB.AC$ và $DE.DA = DB.DC$

Do đó $(AE-DE)AD = AB.AC - DB.DC$

Hay ta được $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

Ta có AD là đường phân giác của tam giác ABC nên ta được

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{BD+CD}=\frac{AB}{AB+AC}\Rightarrow DB=\frac{AB.BC}{AB+AC}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $CD=\frac{AC.BC}{AB+AC}$ nên ta được

$$AD^2 = AB.AC-\frac{AB.AC.BC^2}{(AB+AC)^2}=\frac{AB.AC}{(AB+AC)^2}(AB+BC+CA)(AB+AC-BC)$$

Mà ta lại có AI là phân giác của tam giác ABD nên $\frac{AI}{DI}=\frac{AB}{BD}=\frac{AB}{\frac{AB.BC}{AB+AC}}=\frac{AB+AC}{BC}$

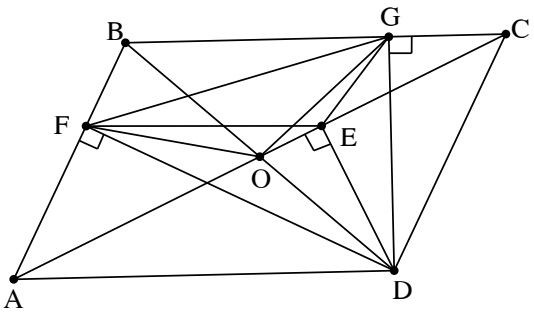
Suy ra $\frac{AI}{AD}=\frac{AB+AC}{AB+BC+CA}$. Từ đó ta được $AI^2=\frac{AB.AC(AB+AC-BC)}{AB+BC+CA}$.

Ví dụ 5. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi E, F, G theo thứ tự là hình chiếu của D trên AC, AB, BC. Chứng minh rằng O nằm trên đường ngoại tiếp tam giác EFG.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: Hình bình hành ABCD có góc B tù.



Ta có tam giác BFD vuông tại F có O là trung điểm của BD nên tam giác BOF cân tại O.

Suy ra $\widehat{BOF}=180^0-2\widehat{OBF}$. Tương tự $\widehat{BOG}=180^0-2\widehat{OBC}$.

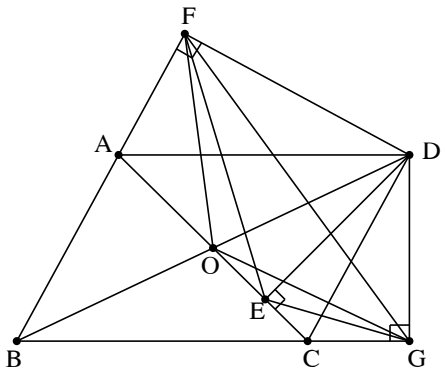
Từ đó ta có $\widehat{FOG}=360^0-2\widehat{ABC}=2\widehat{BAD}$

Do các tứ giác AFED, DEGC nội tiếp nên

ta được

$\widehat{FEO} = \widehat{ADF} = 90^0 - \widehat{BAD}$ và $\widehat{GEC} = \widehat{GDC} = 90^0 - \widehat{BCD} = 90^0 - \widehat{BAD}$

Suy ra $\widehat{FEG} = 180^0 - \left(\widehat{FEO} + \widehat{GEC}\right) = 2\widehat{BAD}$.



Từ đó suy ra $\widehat{FOG} = \widehat{FEG}$ hay tứ giác OEGF nội tiếp.

+ Trường hợp 2: Hình bình hành ABCD có góc B nhọn.

Ta có các tứ giác DECG và DEAF nội tiếp nên ta có

$\widehat{DEG} = \widehat{DCG} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{DEF} = \widehat{DAF} = \widehat{ABC}$

nên $\widehat{FEG} = 2\widehat{ABC}$

Mặt khác $\widehat{FOD} = 2\widehat{ABD}$ và $\widehat{DOG} = 2\widehat{CBD}$ nên

$\widehat{FOG} = 2\widehat{ABC}$

Từ đó ta được $\widehat{FEG} = \widehat{FOG}$ nên suy ra tứ giác FOEG nội tiếp.

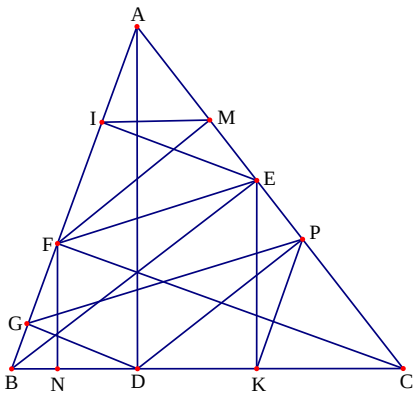
Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF. Gọi G, P lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của E trên AB và BC. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của F trên AC và BC. Chứng minh rằng sáu điểm G, P, I, K, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC vuông, không mất tính tổng quát ta giả sử tam giác ABC vuông tại A, khi đó ba điểm A, E, F trùng nhau. Ba điểm N, D, K trùng nhau. Các điểm I và M trùng với A. Khi đó ta có tứ giác AGDP là hình chữ nhật nên các điểm A, G, P, D cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra G, P, I, K, M, N.

+ Trường hợp 2: Tam giác ABC có ba góc nhọn, khi đó tứ giác AGDP nội tiếp được



Suy ra $\widehat{GAD} = \widehat{GPD}$, từ đó ta được $\widehat{GPC} + \widehat{GBC} = 180^0$ nên tứ giác BCPG nội tiếp đường tròn.

Dễ thấy các tứ giác BCEF và EFIM nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{FEC} + \widehat{FBC} = 180^0$

Từ đó ta được $\overset{\frown}{FEC}=\overset{\frown}{GPC}$ nên suy ra EF//GP

Mặt khác ta có $\overset{\frown}{MIF}+\overset{\frown}{MEF}=180^0$

Nên suy ra $\overset{\frown}{MIF}+\overset{\frown}{MPG}=180^0$

Do đó tứ giác GPMI nội tiếp được trong đường tròn (O_1)

Tương tự ta chứng minh được tứ giác MNPK nội tiếp trong đường tròn (O_2)

Hoàn toàn tương tự như trên ta được tứ giác AIKC nội tiếp

Từ tứ giác BCPG nội tiếp ta được $\overset{\frown}{MPG}=\overset{\frown}{GBC}$ kết hợp với $\overset{\frown}{MIF}+\overset{\frown}{MPG}=180^0$

Ta được $\overset{\frown}{MIF}+\overset{\frown}{GBC}=180^0$ nên suy ra IM//BC, tương tự ta được LP//AB.

Từ đó ta được $\overset{\frown}{IMP}+\overset{\frown}{MCK}=\overset{\frown}{MCK}+\overset{\frown}{AIK}=\overset{\frown}{AIK}+\overset{\frown}{IKP}=180^0$ suy ra $\overset{\frown}{IMP}+\overset{\frown}{IKP}=180^0$

Do đó tứ giác KPMI nội tiếp đường tròn (O_3).

Qua ba điểm không thẳng hàng chỉ xác định duy nhất một đường tròn nên ba đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) trùng nhau. Vậy sáu điểm G, P, I, K, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

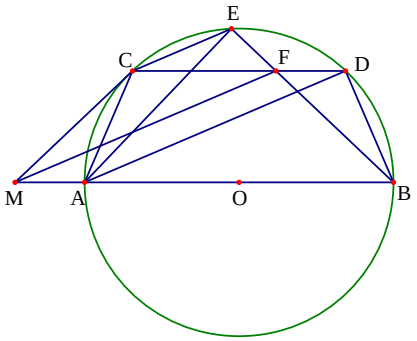
+ Trường hợp 3: Tam giác ABC tù, chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được sáu điểm G, P, I, K, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 7. Cho đường tròn (O) có đường kính AB và dây CD song song với nhau. Từ C kẻ cát tuyến song song với AD cắt đường tròn (O) tại E, đường thẳng BE cắt CD ở F, qua F kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại M. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Điểm E và dây cung CD nằm cùng nửa mặt phẳng bờ AB.



Xét tam giác MAC và tam giác FDB ta có

CD//AB nên ta được $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC};\overset{\frown}{MAC}=\overset{\frown}{FDB}$,

Và MF//AD nên tứ giác MADF là hình bình hành. Từ đó suy ra $MA=FD$

Dễ thấy $\Delta MAC=\Delta FDB$ nên suy ra

$\overset{\frown}{MCA}=\overset{\frown}{FBD}$

Lại có CE//AD nên ta được $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{ED}\Rightarrow\overset{\frown}{CDA}=\overset{\frown}{EAD};\overset{\frown}{EAD}=\overset{\frown}{EBD}$

Kết hợp các kết quả trên ta thu được $\widehat{MCA} = \widehat{CDA}$. Từ đó suy ra MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

+ Trường hợp 2: Điểm E và dây cung CD nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được MC là tiếp tuyến của đường trong (O).

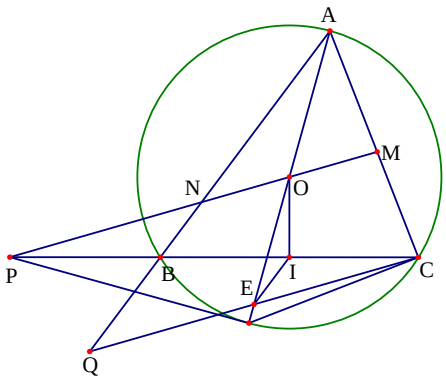
Chú ý: *Vị trí của CD thay đổi dẫn tới hình vẽ khác so với trường hợp 1, vì vậy yêu cầu khi làm bài phải xét cả hai trường hợp 1 và 2, cách chứng minh hoàn toàn tương tự.*

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và đường kính AD, qua D cắt kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt cạnh BC tại P, đường thẳng PO cắt cạnh AB, AC tại N và M. Chứng minh rằng $OM = ON$.

Lời giải

Từ C kẻ đường thẳng song song với PO cắt AB kéo dài tại Q, CQ cắt AD tại E. Gọi I là trung điểm BC, khi đó ta được $OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OIP} = 90^0$.

Lại có PD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ta được $AD \perp PD \Rightarrow \widehat{ODP} = 90^0$.



Hai góc $\widehat{OIP}$ và $\widehat{ODP}$ cùng nhìn đoạn OP dưới góc vuông nên các điểm O, I, D, P cùng nằm trên một đường tròn

Từ đó ta được $\widehat{OPI} = \widehat{ODI}$ (cùng chắn chung $\overset{\frown}{OI}$) và PO//CQ nên $\widehat{OPI} = \widehat{ICQ}$

Do đó ta được $\widehat{ICE} = \widehat{ODI} \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{EDI}$. Dẫn đến bốn điểm E, I, C, D nằm trên cùng một đường tròn.

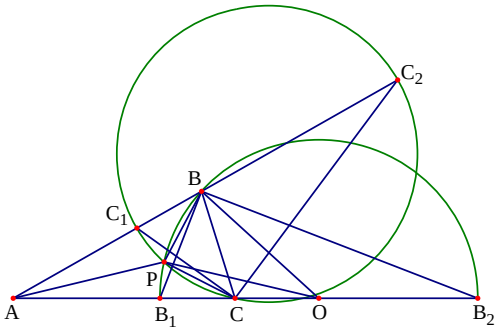
Từ đó suy ra $\widehat{EIC} = 180^0 - \widehat{EDC} = 180^0 - \widehat{ADC} = 180^0 - \widehat{ABC} = \widehat{QBC}$

Nên ta được IE//BQ và $IB = IC$ nên suy ra $EQ = EC$. Từ đó ta được $OM = ON$

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 30^0$. Đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{ABC}$ cắt cạnh AC lần lượt tại B_1, B_2, đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{ACB}$ cắt cạnh AB lần lượt tại C_1, C_2, đường tròn ngoại tiếp tam giác BB_1B_2 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CC_1C_2 tại điểm P ở trong tam giác ABC. Gọi O là trung điểm B_1B_2. Chứng minh rằng CP vuông góc với BP

Lời giải

Do BB_1; BB_2 lần lượt là đường phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{B_1BB_2}=90^0$. Khi đó tam giác BB_1B_2 là tam giác vuông tại B. Do O là trung điểm của B_1B_2 nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BB_1B_2. Do vậy ta có



$\widehat{OBC}=\widehat{OBB_1}-\widehat{CBB_1}=\widehat{BB_1O}-\widehat{B_1BA}=\widehat{BAC}$

Từ đó suy ra $\Delta OBA\backsim\Delta OCB$ nên ta được $\frac{OB}{OC}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow OA.OC=OB^2$

Do đó ta được $OA.OC=OP^2\Rightarrow\frac{OA}{OP}=\frac{OP}{OC}$ suy ra $\Delta OPC\backsim\Delta OAP\Rightarrow\widehat{OPC}=\widehat{PAC}$.

Ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{PBC}-\widehat{PBA}=\left(\widehat{PBB_1}+\widehat{B_1BC}\right)-\left(\widehat{ABB_1}-\widehat{PBB_1}\right)=2\widehat{PBB_1}=\widehat{POB_1}$$
$$=\widehat{PCA}-\widehat{OPC}=\widehat{PCA}-\widehat{PAC}$$

Do đó suy ra $\widehat{PAC}+\widehat{PBC}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}$. Hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{PAB}+\widehat{PCB}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}$.

Cộng từng vế hai đẳng thức cuối ta thu được

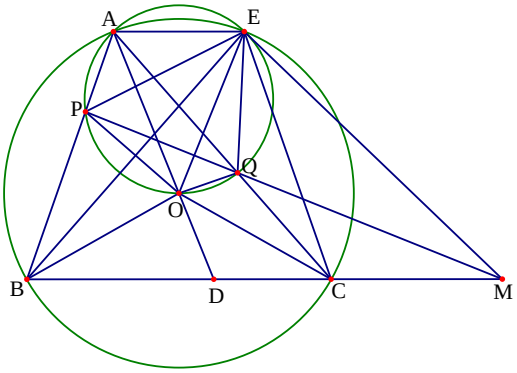
$$\widehat{PAC}+\widehat{PBC}+\widehat{PAB}+\widehat{PCB}=\widehat{PBA}+\widehat{PCA}+\widehat{PBA}+\widehat{PCA}$$

Từ đó suy ra $180^0-\left(\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\right)=2\left(\widehat{PBA}+\widehat{PCA}\right)\Rightarrow\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=60^0$

Mà theo giả thiết thì $\widehat{BAC}=30^0$ nên suy ra $\widehat{PBC}+\widehat{PCB}=90^0\Rightarrow PB\perp PC$

Ví dụ 10. Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Lấy điểm P trên cạnh AB sao cho $\widehat{BOP}=\widehat{ABC}$ và lấy điểm Q trên cạnh AC sao cho $\widehat{COQ}=\widehat{ACB}$. Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với BC qua PQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AQP.

Lời giải



Giả sử đường thẳng AO cắt BC tại D. Do O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $OA = OB$.

Từ đó ta được $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Mà theo giả thiết ta có $\widehat{OAB} = \widehat{ABC}$ nên ta suy ra được hai tam giác ABD và BOP đồng dạng với nhau. Từ đó ta suy ra được

$\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{BP} \Rightarrow AB.BP = AD.BO$ và

$\widehat{BPO} = \widehat{ADB}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có hai tam giác ACD và COQ đồng dạng với nhau.

Từ đó ta cũng được $AC.CQ = AD.CO$ và $\widehat{CQO} = \widehat{ADC}$.

Do đó $\widehat{APO} + \widehat{AQO} = 180^0 - \widehat{BPO} + 180^0 - \widehat{CQO} = 360^0 - \left(\widehat{ADB} + \widehat{ADC}\right) = 180^0$

Suy ra tứ giác APOQ nội tiếp đường tròn hay điểm O nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác APQ.

Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó ta có $OE = OA$ nên suy ra $\widehat{OAE} = \widehat{OEA}$ và tứ giác AEQO nội tiếp nên $\widehat{AEO} = \widehat{AQO}$.

Kết hợp với từ giác AQOP nội tiếp ta suy ra được $\widehat{AEO} = \widehat{AQO} = \widehat{BPO} = \widehat{ADB}$.

Từ đó suy ra $\widehat{EAO} = \widehat{ADB}$ nên AE song song với BC. Mà ta lại có $OB = OC$ nên $AB.BP = AC.CQ$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Khi đó gọi M là giao điểm của PQ và BC là M thì điểm nằm trên tia đối của tia CB.

Từ giác AEPQ nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{PAE} + \widehat{PQE} = 180^0$, kết hợp với AE song song với BC nên ta suy ra được $\widehat{PAE} + \widehat{ABC} = 180^0$. Từ đó ta được

$\widehat{EPQ} = \widehat{EAQ}; \widehat{EAQ} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{EPQ} = \widehat{ACB}$

Từ đó suy ra hai tam giác EPQ và ACB đồng dạng với nhau. Điều này dân đến hai tam giác ABC và EBC bằng nhau nên ta được $\widehat{APE} = \widehat{APQ} - \widehat{EPQ} = \widehat{AOQ} - \widehat{EOQ} = \widehat{AOB}$.

Mặt khác ta lại có $\widehat{OAC} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{AOC}\right) = 90^0 - \widehat{ABC}$ và $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$

Từ đó suy ra $\widehat{AOB} = 180^0 - 2\widehat{OAE} = 180^0 - 2\left(90^0 - \widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 2\left(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right)$

Do đó ta được $\widehat{APE}=2\left(\widehat{ABC}-\widehat{ACB}\right)$.

Ta lại có $\widehat{ABE}=\widehat{ABC}-\widehat{EBC}=\widehat{ABC}-\widehat{ACB}$ nên suy ra $\widehat{APE}=2\widehat{ABE}$ hay $\widehat{PBE}=\widehat{PEB}$

Ta cũng có $\widehat{AQP}=\widehat{AEP}=180^0-\left(\widehat{BAC}+\widehat{ACB}\right)-\left(\widehat{ABC}-\widehat{ACB}\right)=2\widehat{ACB}-\widehat{ABC}$

Nên ta được $\widehat{PMB}=\widehat{ACB}-\widehat{MQP}=\widehat{ACB}-\widehat{AQP}=\widehat{ABC}-\widehat{ACB}$

Suy ra $\widehat{PMB}=\widehat{BEP}=\widehat{ABC}-\widehat{ACB}$ nên tứ giác BPEM nội tiếp đường tròn.

Kết hợp với $\widehat{PBE}=\widehat{PEB}$ ta được $\widehat{BMP}=\widehat{PME}$ nên MP là phân giác của góc $\widehat{BME}$ hay nọi cách khác thì hai đường thẳng ME và BC đối xứng với nhau qua PQ.

Lại có $\widehat{EQM}=180^0-\widehat{EQP}=180^0-\widehat{ABC}$ và $\widehat{PEM}=180^0-\widehat{ABC}$

Từ đó dẫn đến hai tam giác MQE và MPE đồng dạng với nhau, do đó ta được

$ME^2=MP.MQ$

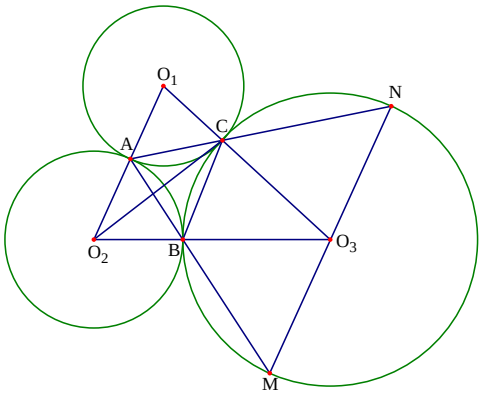
Suy ra ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

Ví dụ 11. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) tiếp xúc ngoài từng đôi một. Từ các tiếp điểm của hai đường tròn (O_1), (O_2) ta nối với với hai tiếp điểm còn lại. Chứng minh hai đường thẳng này cắt đường tròn (O_3) tại hai đầu của đường kính.

Lời giải

Các tam giác O_1AC, O_2AB, O_3BC là các tam giác cân nên ta được

$$\widehat{AO_1C}=180^0-2\widehat{O_1AC};$$
$$\widehat{AO_2B}=180^0-2\widehat{O_2BA};$$
$$\widehat{BO_3C}=180^0-2\widehat{O_3CB}$$



Mà các góc này là góc của tam giác $O_1O_2O_3$ nên ta có

$$\widehat{AO_1C}+\widehat{AO_2B}+\widehat{BO_3C}=180^0$$
$$\Rightarrow \widehat{O_1AC}+\widehat{O_2BA}+\widehat{O_3CB}=180^0$$

Mặt khác ta lại có $\widehat{O_3BM}=\widehat{O_2BA}$; $\widehat{O_3CN}=\widehat{O_1CA}$

Vì các tam giác MO_3B, BO_3C, CO_3N là các tam giác cân nên

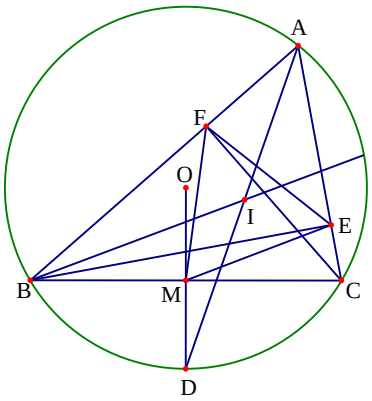
$$\widehat{BO_3M}+\widehat{BO_3C}+\widehat{CO_3N}=180^0-2\widehat{O_1AC}+180^0-2\widehat{O_2BA}+180^0-\widehat{O_3CB}=180^0$$

Hay ta được $\widehat{MO_3N}=180^0$ nên MN là đường kính của đường tròn (O_3).

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

và D là giao điểm của AI với đường tròn (O). Tìm các giá trị của k để $ID = kOA$ biết rằng tam giác MEF đều.

Lời giải



Ta có I là tâm đường tròn nội tiếp nên $DB = DC = DI$.

Do M là trung điểm của BC nên $MB = MC = ME$.

Do đó khi $\widehat{BAC} = 90^0$ thì $E \equiv F$, điều này trái với giả thiết.

Vậy ta được $\widehat{BAC} \neq 90^0$. Ta xét các trường hợp sau

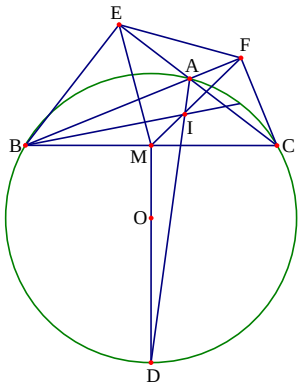
+ Trường hợp 1: Nếu $\widehat{BAC} < 90^0$.

Khi đó ta có $\widehat{EMF} = 180^0 - \left(\widehat{BMF} + \widehat{CME}\right)$. Tam giác BEC và BFC vuông nên tam giác BMF và MCE là tam giác cân

Do đó $\widehat{BMF} = 180^0 - 2\widehat{FBM}$ và $\widehat{CME} = 180^0 - 2\widehat{ECM}$

Suy ta $2\widehat{EMF} = 2\left(\widehat{FBM} + \widehat{ECM} - 90^0\right) = 2\left(180^0 - \widehat{BAC} - 90^0\right) = 180^0 - 2\widehat{BAC}$

Mà ta lại có $\widehat{EMF} = 60^0$ nên ta được $180^0 - 2\widehat{BAC} = 60^0$.



Do đó $\widehat{BAC} = 60^0$ nên suy ra $\widehat{BAD} = 30^0$

Từ đó ta có $\widehat{BOD} = 60^0 \Rightarrow BI = R = OA \Rightarrow DI = R \Rightarrow k = 1$.

+ Trường hợp 2: Nếu $\widehat{BAC} > 90^0$. Khi đó ta có

$$\widehat{EMF} = 180^0 - \left(\widehat{BME} + \widehat{CMF}\right) = 180^0 - \left(180^0 - 2\widehat{EBC} + 180^0 - 2\widehat{FCB}\right)$$
$$= 2\left(\widehat{EBC} + \widehat{FCB} - 90^0\right) = 2\left(90^0 - \widehat{ECB} + 90^0 - \widehat{FBC} - 90^0\right)$$
$$= 180^0 - 2\left(\widehat{ECB} + \widehat{FBC}\right) = 180^0 - 2\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 2\left(\widehat{BAC} - 90^0\right)$$

Mà ta có $\widehat{EMF} = 60^0$ nên $\widehat{BAC} - 90^0 = 30^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^0$

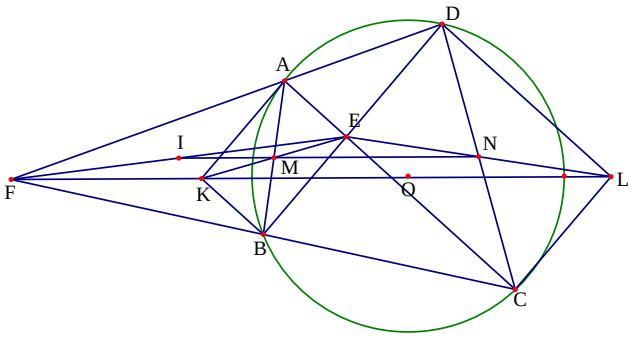
Suy ra $\Rightarrow \widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BOD} = 120^0 \Rightarrow \widehat{MBD} = 60^0$

Từ đó ta được $BD = R\sqrt{3} \Rightarrow ID = R\sqrt{3} \Rightarrow k = \sqrt{3}$

Ví dụ 13. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng AD cắt BC tại F, AC cắt BD tại E. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của EF, AB, CD. Chứng minh rằng hai tam giác IME và IEN đồng dạng với nhau.

Lời giải

Dựng các hình bình hành AEBK, DECL.



Khi đó ta được

$$\overset{\frown}{FAK} = \overset{\frown}{FAB} - \overset{\frown}{KAB} = \overset{\frown}{BCD} - \overset{\frown}{ABD}$$
$$= \overset{\frown}{BCD} - \overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{ACB}$$

Dễ thấy $\Delta FAB \backsim \Delta FCD; \Delta EAB \backsim \Delta EDC$

Do đó ta được $\frac{AK}{CE} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{FA}{FC}$.

Từ đó suy ra $\Delta FAK \backsim \Delta FCE$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\Delta FDL \backsim \Delta FBE$.

Do đó ta được $\overset{\frown}{KFA} = \overset{\frown}{EFC} = \overset{\frown}{EFB} = \overset{\frown}{DFL} = \overset{\frown}{AFL}$

Suy ra ba điểm F, K, L thẳng hàng nên IM//FK và IN//FL, do đó ta lại được ba điểm I, M, N thẳng hàng.

Ta có $\overset{\frown}{MBE} = \overset{\frown}{ECN}$ và $\frac{MB}{NC} = \frac{AB}{CD} = \frac{EB}{EC}$ nên ta được $\Delta MBE \backsim \Delta NCE$

Từ đó suy ra $\overset{\frown}{MEB} = \overset{\frown}{NEC} = \overset{\frown}{DLE}$. Mà ta có $\Delta FDL \backsim \Delta FBE$ nên ta được $\overset{\frown}{FEB} = \overset{\frown}{FLD}$

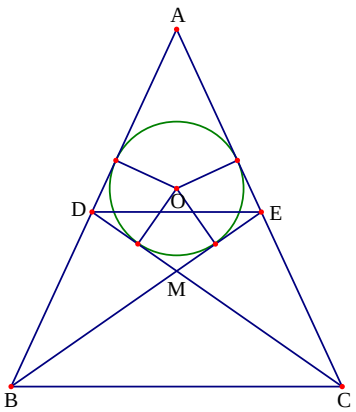
Từ các kết quả trên ta suy ra được $\overset{\frown}{FEK} = \overset{\frown}{FLE}$ nên ta được $\overset{\frown}{IEM} = \overset{\frown}{INE}$

Đến đây ta suy ra được $\Delta IEM \backsim \Delta INE$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC. Đường thẳng d bất kì song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Giả sử tồn tại một đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc với BE, CD. Chứng minh rằng tam giác ANC cân.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của BE và CD. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta được $AD + ME = AE + MD$



Mặt khác do DE//BC nên $S_{EBC} = S_{DBC}$ suy ra

$S_{ABE} = S_{ACD}$

Từ đó gọi r là bán kính của đường tròn (O) thì ta được

$$\frac{1}{2}r(AB + AE + BE) = \frac{1}{2}r(AC + AD + CD)$$

Hay ta được $AB + BE + AE = AC + CD + DA$

Đặt $\frac{AD}{AB} = t(0 < t < 1)$. Do DE//BC nên

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = t$$

Cũng theo định lí Talets ta có $\frac{ME}{MB} = \frac{MD}{MC} = \frac{DE}{BC} = t$.

Từ đó ta được $\frac{ME}{BE}=\frac{MD}{CD}=\frac{t}{t+1}$. Kết hợp các kết quả trên ta được

$AB+\frac{1}{t+1}BE=AC+\frac{1}{t+1}CD$

Và ta lại có $AB+tAB+BE=AC+tAB+DC$

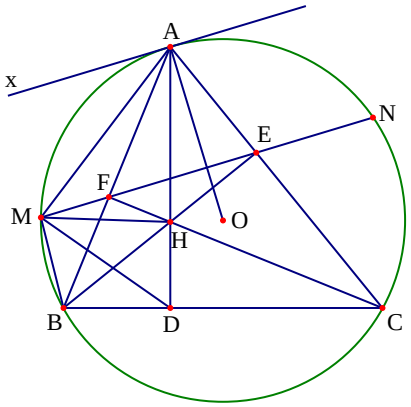
Do đó suy ra $\frac{1-t}{1+t}AB+\frac{1}{1+t}BE=\frac{1-t}{1+t}AC+\frac{1}{1+t}CD$

Do đó ta được $\left(1-\frac{1-t}{1+t}\right)AB=\left(1-\frac{1-t}{1+t}\right)AC\Rightarrow\frac{2t}{1+t}AB=\frac{2t}{1+t}AC\Rightarrow AB=AC$

Vậy tam giác ABC cân tại A.

Ví dụ 15. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N(MF nằm giữa M và E). Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDH.

Lời giải



Trong nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia tiếp tuyến Ax với đường tròn (O). Khi đó ta có $\widehat{ACB}=\widehat{BAx}$.

Mặt khác ta có $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^0$ nên tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn. Suy ra $\widehat{BFE}=\widehat{ACB}$

Do đó ta được $\widehat{BAx}=\widehat{BFE}$ nên suy ra Ax song song với EF

Mà ta có OA vuông góc với Ax nên ta suy ra OA vuông góc với EF. Từ đó suy ra $\widehat{AM}=\widehat{AN}$ nên ta được $\widehat{ABM}=\widehat{AMF}$

Xét hai tam giác ABM và AMF có $\widehat{BAM}$ là góc chung và $\widehat{ABM}=\widehat{AMF}$ nên $\Delta ABM\backsim\Delta AMF$

Do đó ta thu được $\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{AF}\Rightarrow AM^2=AB.AF$.

Xét hai tam giác AFH và ADB có $\widehat{FAH}$ là góc chung và $\widehat{AFH}=\widehat{ADB}$ nên $\Delta AFH\backsim\Delta ADB$

Từ đó ta được $\frac{AF}{AD}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AB.AF=AH.AD$

Kết hợp các kết quả trên ta được $AM^2=AH.AD\Rightarrow\frac{AM}{AD}=\frac{AH}{AM}$

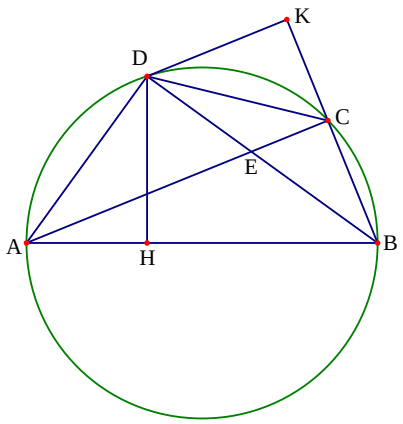
Suy ra $\Delta AMH\backsim\Delta ADM$, do đó ta được $\widehat{AMH}=\widehat{ADM}$.

Vẽ tia tiếp tuyến Mt của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADH, tia Mt nằm trên nửa mặt phẳng bờ MH không chứa điểm D. Khi đó ta có $\widehat{HMt}=\widehat{HDM}$ nên ta suy ra được $\widehat{HMt}=\widehat{HMA}$, điều này dẫn đến hai tia Mt và MA trùng nhau hay MA là là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDH.

Ví dụ 16. Cho tam tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng nếu $\widehat{ABD}=60^0$ và $AE=3CE$ thì tứ giác ABCD luôn có $AB+CD=AD+BC$ hoặc $AB+BC=AD+CD$.

Lời giải

Vẽ DH vuông góc với AB tại H, DK vuông góc với BC tại K.



Ta có $AH=AD.\cos\widehat{HAD}=AD.\cos 60^0=\dfrac{AD}{2}$ và

$DH=AD.\sin\widehat{HAD}=AD.\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}AD}{2}$.

Tam giác HBD vuông tại H nên theo định lí Pitago ta có

$$BD^2=BH^2+DH^2\Rightarrow BD^2=\left(AB-\frac{AD}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}AD}{2}\right)^2$$

Áp dụng định lí Cosin cho tam giác ABD ta được

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB.AD.\cos\widehat{BAD}=AB^2+AD^2-AB.AD$$

Trong tam giác DCK vuông tại K có $\widehat{DCK}=60^0$ nên ta được $CK=\dfrac{CD}{2}$ và $DK=\dfrac{\sqrt{3}.CD}{2}$.

Từ đó ta được $BD^2=BK^2+KD^2=\left(BC+\dfrac{CD}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}CD}{2}\right)^2=BC^2+CD^2+BC.CD$

Do đó ta được $AB^2+AD^2-AB.AD=BC^2+CD^2+BC.CD$.

Mặt khác dễ thấy hai tam giác EAD và EBC đồng dạng với nhau nên ta được $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{EA}{EB}$.

Lại có hai tam giác EBA và ECD đồng dạng với nhau nên $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{EB}{EC}$.

Kết hợp với giả thiết $AE=3CE$ ta được $\dfrac{AD}{BC}.\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{EA}{EB}.\dfrac{EB}{EC}=3\Rightarrow AD.AC=3BC.CD$

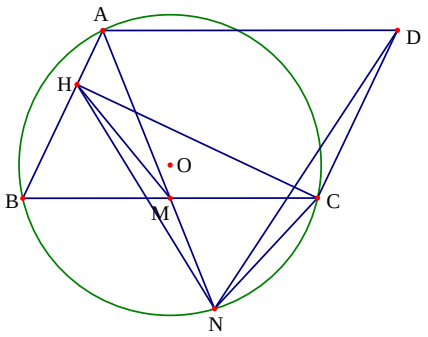
Từ đó ta được $AB^2+AD^2-2AB.AD=BC^2+CD^2-2BC.CD\Leftrightarrow\left(AB-AD\right)^2=\left(BC-CD\right)^2$

Suy ra $AB-AD=\pm\left(BC-CD\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}AB+BC=AD+CD\\AB+CD=AD+BC\end{array}\right.$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 17. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} > 90^0$ và M là trung điểm BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại N. Gọi H là hình chiếu của C trên cạnh AB. Chứng minh rằng tứ giác ADNH nội tiếp đường tròn.

Lời giải



Theo giả thiết ta có $MB = MC$ và

$CH \perp AB; \widehat{A} = \widehat{C} = 90^0$

Từ đó ta được $MH = MB$

Đồng thời cũng có $\overset{\frown}{BAN} = \overset{\frown}{BCN};\ \overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{CMN}$

nên ta được $\Delta AMB \backsim \Delta CMN$. Từ đó suy ra

$\frac{MB}{MN} = \frac{AB}{CN}$. Mà tứ giác ABCD là hình bình hành nên $AB = CD$. Do đó từ hệ thức trên ta suy ra được $\frac{MN}{MH} = \frac{CD}{CN}$

Mặt khác ta lại có $\overset{\frown}{HMB} = 2\overset{\frown}{HCB}$ nên ta được

$$\overset{\frown}{HMN} = \overset{\frown}{HMB} + \overset{\frown}{BMN} = \overset{\frown}{HMB} + \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{AC}\right) = 2\overset{\frown}{HCB} + \left(\overset{\frown}{BAN} + \overset{\frown}{ANC}\right)$$

$$= 2\left(90^o - \overset{\frown}{ABC}\right) + \left(\overset{\frown}{BAN} + \overset{\frown}{ANC}\right)$$

Mà ta lại có $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ANC}$ (chắn cung AC)

Do đó ta suy ra được $\overset{\frown}{HMN} = 180^o - \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{BAN} = \overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{BAN} = \overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BCN} = \overset{\frown}{DCN}$

Nên $\Delta MHN \backsim \Delta CDN$ do đó $\overset{\frown}{CDN} = \overset{\frown}{MHN}$.

Từ đó ta có $\overset{\frown}{NDA} = \overset{\frown}{CDA} - \overset{\frown}{CDN} = \overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{MHN} = \overset{\frown}{MHB} - \overset{\frown}{MHN} = \overset{\frown}{NHB}$

Hay tứ giác ADNH là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 18. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm BC. Hai đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác BEI và CDI cắt nhau ở K. Gọi giao điểm của DE với BC là M. Chứng minh rằng tứ giác BKDM nội tiếp đường tròn.

Phân tích tìm lời giải

Nhận thấy các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADE, BEI và CDI cùng đi qua điểm K. Như vậy để chứng minh tứ giác BKDM nội tiếp đường tròn. Ta cần chỉ ra các tứ giác AEDK và AEHD nội tiếp. Tức là năm điểm A, E, H, K, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

Lời giải

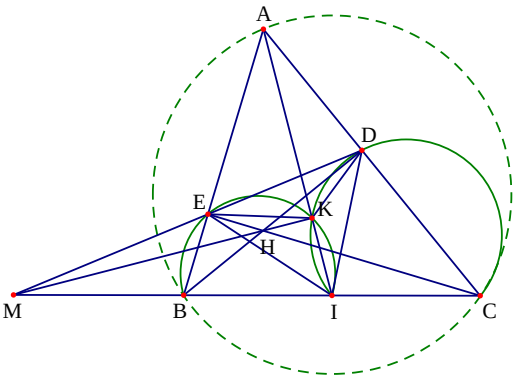
Theo giả thiết ta được các tứ giác BEKI và CDKI nội tiếp đường tròn. Từ đó ta thu được

$$\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{EKI}=\overset{\frown}{IKD}+\overset{\frown}{ACB}=180^0$$

Mà ta lại có

$\overset{\frown}{BAC}+\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{ACB}+\overset{\frown}{EKD}+\overset{\frown}{EKI}+\overset{\frown}{IKD}=540^0.$

Do đó suy ra $\overset{\frown}{BAC}+\overset{\frown}{EKD}=180^0$ nên tứ giác EAKD nội tiếp đường tròn. Từ đó ta có $\overset{\frown}{ADE}=\overset{\frown}{AKE}$, kết hợp với $BD\perp AC;\ CE\perp AB$ suy ra tứ giác BECD nội tiếp.



Do đó ta được $\overset{\frown}{ADE}=\overset{\frown}{ABC}$. Kết hợp

$$\overset{\frown}{ADE}=\overset{\frown}{AKE}\Rightarrow\hat{B}=\overset{\frown}{AKE}\Rightarrow\overset{\frown}{EKI}+\overset{\frown}{AKE}=\overset{\frown}{EKI}+\hat{B}=180^0$$

Vậy ta được ba điểm A, K, I thẳng hàng. Trong tam giác BCD vuông tại D có I là trung điểm cạnh huyền BC nên ta được $\overset{\frown}{IKC}=\overset{\frown}{IDC}=\overset{\frown}{ICD}$. Lại có $\overset{\frown}{IKC}=\overset{\frown}{KAC}+\overset{\frown}{ACK};\ \overset{\frown}{ICD}=\overset{\frown}{ICK}+\overset{\frown}{KCD}$ nên suy ra $\overset{\frown}{KAC}=\overset{\frown}{ICK}$. Mà ta lại có $\overset{\frown}{KAD}=\overset{\frown}{DEK}$ (chắn cung $\overset{\frown}{DK}$) nên suy ra $\overset{\frown}{ICK}=\overset{\frown}{DEK}$ do đó tứ giác MEKC nội tiếp. Từ đó ta được $\overset{\frown}{MEC}=\overset{\frown}{MKC}$.

Theo kết quả trên ta có $\overset{\frown}{IKC}=\overset{\frown}{AED}=\overset{\frown}{MEB};\overset{\frown}{MEC}=\overset{\frown}{MEB}+90^0;\overset{\frown}{MKC}=\overset{\frown}{MKI}+\overset{\frown}{IKC}$

Suy ra $\overset{\frown}{MKI}=90^0\Rightarrow MK\perp KI$ nên các điểm A, E, H, I, K nằm trên đường tròn đường kính AH

Do đó $HK\perp AI$ nên ba điểm M, H, K thẳng hàng.

Tứ giác DEHK nội tiếp nên ta được $\overset{\frown}{HEK}=\overset{\frown}{HDK}$ và tứ giác MEKC nội tiếp nên ta được $\overset{\frown}{KEC}=\overset{\frown}{KMC}$

Do đó suy ra $\overset{\frown}{KMC}=\overset{\frown}{HDK}\Rightarrow\overset{\frown}{KMB}=\overset{\frown}{BDK}$ hay tứ giác BKDM nội tiếp đường tròn.

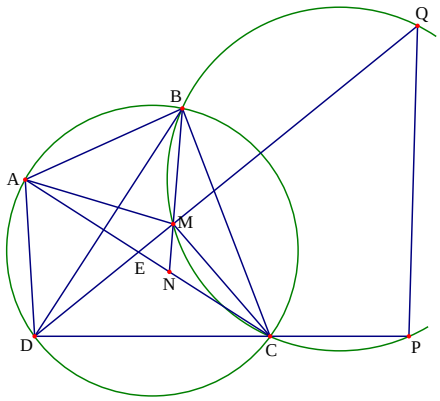
Ví dụ 19. Cho tứ giác ABCD có đường chéo BD không phải là phân giác của các góc $\overset{\frown}{ABC}$ và $\overset{\frown}{ADC}$. Lấy điểm M nằm trong tứ giác thỏa mãn điều kiện $\overset{\frown}{ABD}=\overset{\frown}{MBC}$ và $\overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{MDC}$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi $MA=MC$.

Lời giải

+ Điều kiện cần: Giả sử tứ giác ABCD nội tiếp.

Kéo dài BM cắt AC tại N, DM cắt AC tại E. Khi đó ta được $\Delta BCN \backsim \Delta BDA$. Do đó suy ra

$\frac{CN}{BC}=\frac{AD}{BD}(1)$



Ta có $\Delta DAE \backsim \Delta DBC$ nên ta được $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{BC}$

và $\overset{\frown}{AED}=\overset{\frown}{BCD}\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CN}{BC}=\frac{AE}{BC}$, vì vậy $CN=AE$.

Ta có $\overset{\frown}{ANB}=\overset{\frown}{NBC}+\overset{\frown}{ACB}, \overset{\frown}{BCD}=\overset{\frown}{ACD}+\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{ABD}=\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{NBC}+\overset{\frown}{ACB}$

Suy ra $\overset{\frown}{MEN}=\overset{\frown}{MNE}$ nên ta giác MNE cân tại M hay $MN=ME\Rightarrow MA=MC.$

+ Điều kiện đủ: Giả sử ta có $MA=MC$. Khi đó gọi giao điểm của CD và DM với đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC lần lượt là P và Q. Vì $\overset{\frown}{MBC}=\overset{\frown}{MPC}$ nên $\Delta ADB \backsim \Delta MDP$ do đó suy ra $\frac{DB}{AD}=\frac{DP}{MD}\ (1)$

Mà ta lại có $\overset{\frown}{ADM}=\overset{\frown}{BDP}$ nên ta được $\Delta ADM \backsim \Delta BDP$. Từ đó suy ra $\frac{BP}{AM}=\frac{BD}{AD}\ (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DP}{MD}=\frac{BP}{AM}\ (3)$. Lại có $\Delta DMC \backsim \Delta DPQ$ nên ta được $\frac{PQ}{MC}=\frac{DP}{DM}$

Kết hợp (3) ta được $\frac{BP}{AM}=\frac{PQ}{MC}$. Theo giả thiết $MA=MC\Rightarrow BP=PQ$

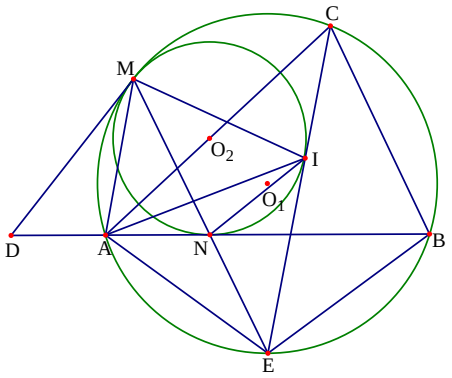
Do đó ta được $\overset{\frown}{DCB}=\overset{\frown}{BQP}=\overset{\frown}{QMP}=\overset{\frown}{MDP}+\overset{\frown}{MPD}=\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ABD}=180^0-\overset{\frown}{DAB}$

Từ đó suy ra tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 20. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc trong tại M(đường tròn tâm O_2 nằm trong đường tròn tâm O_1). Lấy điểm N khác M trên đường tròn (O_2), qua N kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O_2) cắt đường tròn (O_1) tại A và B. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O_1) tại E. Gọi I là tiếp điểm của một tiếp tuyến kẻ từ E với đường tròn (O_2). Đường thẳng EI cắt đường tròn (O_1) tại C. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải

Qua M kẻ tiếp tuyến với hai đường tròn cắt đường thẳng AB tại D. Khi đó theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $DM = DN$. Từ đó suy ra tam giác DMN cân tại D nên ta được $\widehat{DMN} = \widehat{DNM}$



Ta lại có

$$\widehat{DME} = \widehat{DMA} + \widehat{AME} = \frac{1}{2}\left(\text{sd}\widehat{MA} + \text{sd}\widehat{AE}\right)$$

Theo tính chất góc có đỉnh nằm trong đường trong ta có $\widehat{DNM} = \frac{1}{2}\left(\text{sd}\widehat{MA} + \text{sd}\widehat{BE}\right)$

Từ đó ta thu được $\widehat{AE} = \widehat{BE}$ nên $AE = AB$ nên E là điểm chính giữa cung nhỏ AB.

Từ đó suy ra CI là phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

Xét hai tam giác MAE và ANE có $\widehat{BAE} = \widehat{AME}$ và $\widehat{AEM}$ là góc chung

Suy ra $\Delta MAE \backsim \Delta ANE$ nên ta được $\frac{ME}{AE} = \frac{AE}{NE} \Rightarrow AE^2 = ME.NE$

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $\Delta EIN \backsim \Delta EIM$ nên suy ra $EI^2 = ME.NE$

Do đó ta được $AE = IE$ nên tam giác AEI cân tại E, suy ra $\widehat{EAI} = \widehat{AIE}$.

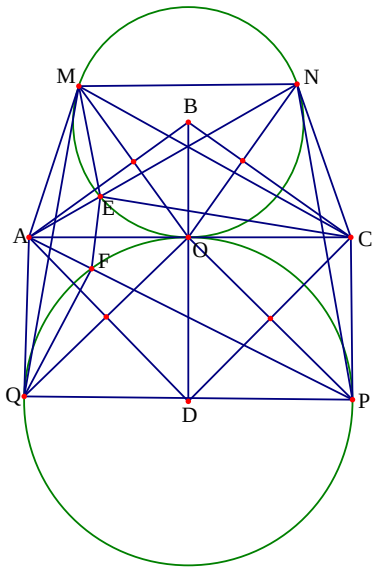
Do đó ta suy ra được $\widehat{CAI} = \widehat{AIE} - \widehat{CAE} = \widehat{IAE} - \widehat{EAB} = \widehat{IAB}$ hay AI là phân giác của góc $\widehat{CAB}$.

Trong tam giác ABC có AI, CI là các đường phân giác trong nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ví dụ 21. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự đối xứng với O qua AB, BC, CD, DA. Đường thẳng AN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN tại E, đường thẳng AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OQP tại F. Chứng minh rằng bốn điểm M, E, F, Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

Vì O, M đối xứng nhau qua AB và O, N đối xứng nhau qua BC nên tâm đường tròn ngoại tam giác OMN là B.



Hơn nữa $AC \perp BD$ nên AO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔOMN.

Vì $\Delta AOB = \Delta AMB$ nên AM là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔOMN. Do đó suy ra $AM = AN$

Tương tự ta có OC, CN là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp ΔOMN. Lại có $AO = AQ = AM$ và $CO = CN = CP$ nên ΔAMQ cân.

Do đó $\overset{\frown}{AMQ} = \overset{\frown}{AQM}$ nên

$\overset{\frown}{AME} - \overset{\frown}{QME} = \overset{\frown}{AQF} - \overset{\frown}{MQF}$.

Vì AM, AQ là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ và PQO nên ta được

Do đó ta được $\overset{\frown}{AME} = \overset{\frown}{MNE}; \overset{\frown}{AQF} = \overset{\frown}{QPF}$

Suy ra $\overset{\frown}{MNE} - \overset{\frown}{QME} = \overset{\frown}{QPF} - \overset{\frown}{MQF} \Rightarrow \overset{\frown}{QME} - \overset{\frown}{MQF} = \overset{\frown}{MNE} - \overset{\frown}{QPF}$ (1)

Vì AM tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNO nên $AM^2 = AE.AN$.

Vì AQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQO nên $AQ^2 = AF.AP$.

Khi đó $AE.AN = AF.AP$ nên tứ giác EFPN nội tiếp $\Rightarrow \overset{\frown}{FEA} = \overset{\frown}{FPN}$ và $\overset{\frown}{EFA} = \overset{\frown}{ENP}$.

Chú ý đến $\overset{\frown}{PNC} = \overset{\frown}{NPC}$ ta có biến đổi góc như sau

$$\overset{\frown}{FEM} - \overset{\frown}{EFQ} = \left(\overset{\frown}{FEA} + \overset{\frown}{AEM}\right) - \left(\overset{\frown}{EFA} + \overset{\frown}{APQ}\right) = \overset{\frown}{FPN} + 180^0 - \overset{\frown}{MNE} - \overset{\frown}{ENP} - 180^0 + \overset{\frown}{QFP}$$

$$= \left(\overset{\frown}{FPN} - \overset{\frown}{ENP}\right) - \overset{\frown}{MNO} + \overset{\frown}{QOP} = 180^0 - \overset{\frown}{MOA} - \overset{\frown}{NOC}$$

$$= \left(\overset{\frown}{FPN} - \overset{\frown}{ENP}\right) - \left(180^0 - \overset{\frown}{MOA} - \overset{\frown}{NOC}\right) + \left(180^0 - \overset{\frown}{QOA} - \overset{\frown}{POC}\right)$$

$$= \left(\overset{\frown}{FPN} - \overset{\frown}{ENP}\right) + \overset{\frown}{MOA} + \overset{\frown}{NOC} - \overset{\frown}{QOA} - \overset{\frown}{POC}$$

$$= \overset{\frown}{FPN} - \overset{\frown}{ENP} + \overset{\frown}{MNO} + \overset{\frown}{ONC} - \overset{\frown}{QPO} - \overset{\frown}{OPC}$$

$$= \overset{\frown}{FPN} - \overset{\frown}{ENP} + \overset{\frown}{MNO} + \overset{\frown}{ONP} + \overset{\frown}{PNC} - \overset{\frown}{QPO} - \overset{\frown}{OPN} - \overset{\frown}{NPC}$$

$$= \overset{\frown}{FPN} - \overset{\frown}{ENP} + \overset{\frown}{MNO} + \overset{\frown}{ONP} - \overset{\frown}{QPO} - \overset{\frown}{OPN}$$

$$= \left(\overset{\frown}{FPN} - \overset{\frown}{ONP}\right) - \left(\overset{\frown}{ENP} - \overset{\frown}{ONP}\right) + \overset{\frown}{MNO} - \overset{\frown}{OPQ}$$

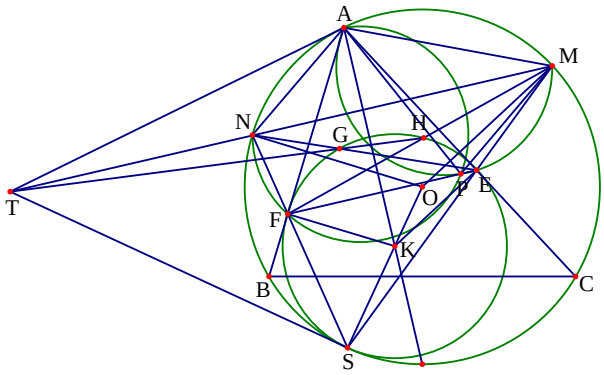
$$= \overset{\frown}{FPO} - \overset{\frown}{ENO} + \overset{\frown}{MNO} - \overset{\frown}{QPO} = \left(\overset{\frown}{MON} - \overset{\frown}{ENO}\right) - \left(\overset{\frown}{QPO} - \overset{\frown}{FPO}\right) = \overset{\frown}{MNE} - \overset{\frown}{QPF} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) nên $\overset{\frown}{FEM} - \overset{\frown}{EFQ} = \overset{\frown}{QME} - \overset{\frown}{MQF}$

Nên suy ra $\overset{\frown}{FEM}+\overset{\frown}{MQF}=\overset{\frown}{EFQ}+\overset{\frown}{QME}\Rightarrow\overset{\frown}{FEM}+\overset{\frown}{MQF}=180^0$. Vậy tứ giác MEFQ nội tiếp.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S. Các đường thẳng SE, SF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N khác S. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác A. Gọi giao điểm của EN, FM với đường tròn (K) lần lượt là G, H. Gọi giao điểm của GH với MN là T. Chứng minh rằng tứ giác AMPN là hình bình hành và tam giác AST cân.

Lời giải



Dễ thấy $\overset{\frown}{APF}=180^0-\overset{\frown}{ANS}=180^0-\overset{\frown}{APE}$ nên ba điểm E, P, F thẳng hàng.

Ta có $\overset{\frown}{APM}=\overset{\frown}{AEM}$ và $\overset{\frown}{AEM}=\overset{\frown}{SEC}$ kết hợp với $\overset{\frown}{SEC}=\overset{\frown}{EFS}$ nên ta được $\overset{\frown}{EFS}=\overset{\frown}{PAN}$. Điều này dẫn đến tứ giác ANFP nội tiếp đường tròn. Do đó $\overset{\frown}{APM}=\overset{\frown}{PAN}$ nên AN song song với PM.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được AM song song với PN. Do vậy tứ giác AMEN là hình bình hành.

Dễ thấy các ta giác SKF và SON đồng dạng với nhau nên suy ra KF song song với ON.

Tương tự ta cũng có KE song song với OM. Từ đó suy ra $\frac{SF}{SN}=\frac{SK}{SO}=\frac{SE}{SM}$ nên MN song song với EF.

Từ đó ta được $\overset{\frown}{HGE}=\overset{\frown}{HFE}=\overset{\frown}{HMN}$ nên tứ giác MNGH nội tiếp.

Giả sử TS cắt đường tròn (O) và (K) lần lượt tại L và J, khi đó

$TS.TL=TM.TN=TH.TG=TS.TJ$. Từ đó suy ra ba điểm S, L, J trùng nhau nên TS là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Tứ giác AMEN là hình bình hành nên AP và MN cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

Ta có $\overset{\frown}{IAM}=\overset{\frown}{PES}=\overset{\frown}{FST}=\overset{\frown}{NAS}$ và $\overset{\frown}{AMI}=\overset{\frown}{AMN}=\overset{\frown}{ASN}$ nên $\Delta AIM\backsim\Delta ANS$

Từ đó suy ra $AM.SN=AI.AS$. Tương tự ta được $AN.SM=AI.SN=AM.SN$.

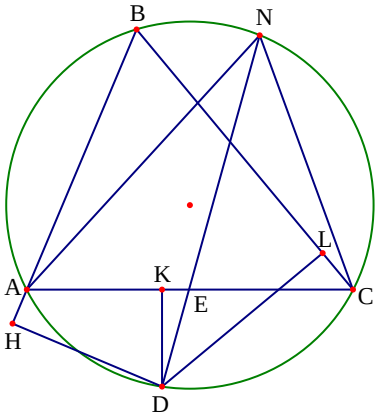
Do TS là tiếp tuyến với đường tròn (O) nên $\frac{TM}{TN}=\frac{SM^2}{SN^2}=\frac{AM^2}{AN^2}$.

Từ đó ta suy ra được TA là tiếp tuyến với đường tròn (O). Do đó tam giác AST cân tại T.

Ví dụ 23. Cho tứ giác ABCD có H, K, L lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AB, BC, CA. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi $\frac{CA}{DK}=\frac{AB}{DH}+\frac{BC}{DL}$.

Lời giải

+ Điều kiện cần: Giả sử tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Khi đó gọi (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD.



Trên đường tròn (O) lấy điểm N sao cho $AN=BC$ suy ra $AB=NC$. Từ đó ta được $\overset{\frown}{ADN}=\overset{\frown}{BDC}$. Gọi E là giao điểm của ND với AC. Khi đó $\overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD}$. Lại có

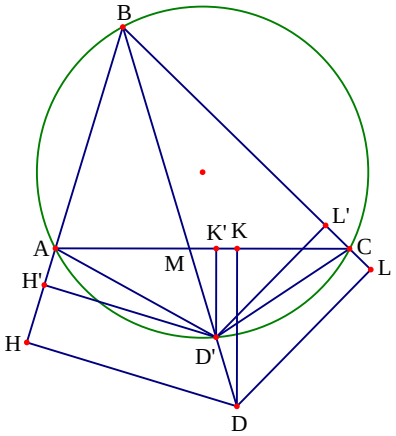
$$\overset{\frown}{AED}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AD}+sd\overset{\frown}{CN}\right)=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AD}+sd\overset{\frown}{AB}\right)=\overset{\frown}{BCD}$$

Từ đó $\Delta ADE\backsim\Delta BDC$, mà DK và DL là hai đường cao tương ứng nên $\frac{DK}{DL}=\frac{AE}{BC}\Rightarrow\frac{BC}{DL}=\frac{AE}{DK}$

Lại có $\Delta CDE\backsim\Delta BDA$, mà DK và DH là hai đường cao tương ứng nên $\frac{CE}{DK}=\frac{BA}{DH}$

Từ đó ta được $\frac{BC}{DL}+\frac{BA}{DH}=\frac{AE}{DK}+\frac{CE}{DK}=\frac{AC}{DK}$

+ Điều kiện đủ: Giả sử tứ giác ABCD có $\frac{CA}{DK}=\frac{AB}{DH}+\frac{BC}{DL}$. Ta cần chứng minh ABCD nội tiếp đường tròn.



Thật vậy, gọi D' là giao điểm của DB với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó tứ giác ABCD' nội tiếp đường tròn. Gọi H', K', L' lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D' xuống AB, BC, CA.

Chứng minh tương tự như trên ta có

$$\frac{CA}{D'K'}=\frac{AB}{D'H'}+\frac{BC}{D'L'}$$

Mặt khác theo định lí Talets ta lại có

$$\frac{D'H}{DH}=\frac{D'B}{DB}=\frac{D'L'}{DL}$$

Từ đó ta suy ra được $D'H'=\frac{D'B.DH}{DB}$ và $D'L'=\frac{D'B.DL}{DB}$

Từ đó ta thu được $\frac{AB}{DH}+\frac{BC}{DL}=\frac{AC.D'B}{DB.D'K'}$, mà ta lại có $\frac{CA}{DK}=\frac{AB}{DH}+\frac{BC}{DL}$

Gọi M là giao điểm của BD và AC, khi đó ta được $\frac{D'B}{DB}=\frac{D'K'}{DK}=\frac{D'M}{DM}$.

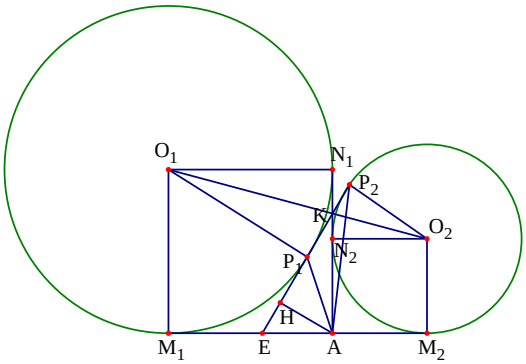
Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta thu được $\frac{|DB-D'B|}{DB}=\frac{|DM-D'M|}{DM}\Rightarrow\frac{DD'}{DB}=\frac{DD'}{DM}$

Mà ta thấy $DB>DM$ nên từ đó ta suy ra được $DD'=0$ hay hai điểm D và D′ trùng nhau.

Do đó tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 24. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ với $R_1>R_2$ sao cho tiếp tuyến chung ngoài M_1M_2 vuông góc với tiếp tuyến chung trong N_1N_2 tại điểm A. Gọi P_1P_2 là tiếp tuyến chung trong thứ hai của hai đường tròn trên trong đó các điểm $M_1;N_1;P_1$ thuộc đường tròn $(O_1;R_1)$ và $M_2;N_2;P_2$ thuộc đường trong $(O_2;R_2)$. Tính diện tích tam giác AP_1P_2 theo R_1 và R_2.

Lời giải



Dễ thấy các đường thẳng $O_1O_2;N_1N_2;P_1P_2$ đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là điểm K.

Theo tính chất các tiếp tuyến chung của hai đường trong ta có $N_1N_2=P_1P_2$. Lại có ngoài M_1M_2 vuông góc với tiếp tuyến chung trong N_1N_2 tại điểm A nên ta được $N_1N_2=P_1P_2=R_1-R_2$.

Mặt khác ta có $O_1N_1//O_2N_2$ nên áp dụng định lí Talets ta có

$$\frac{N_2K}{N_1K}=\frac{R_2}{R_1}\Rightarrow\frac{N_2K}{N_1N_2}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

Kết hợp với $N_1N_2=P_1P_2=R_1-R_2$ ta được $P_2K=N_2K=\frac{R_2(R_1-R_2)}{R_1+R_2}$

Suy ra $AK=AN_2+N_2K=R_2+\frac{R_2(R_1-R_2)}{R_1+R_2}=\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$

Gọi E là giao điểm của hai tiếp tuyến P_1P_2 và M_1M_2.

Khi đó ta có $M_1M_2=EM_1+EM_2=EM_1+EP_2=EM_1+EP_1+P_1P_2=2EM_1+P_1P_2$

Mặt khác ta lại có $M_1M_1=R_1+R_1=AN_1+AN_1=2AN_2+N_1N_2$

Do đó kết hợp với $N_1N_2=P_1P_2=R_1-R_2$ ta được $EM_1=AN_2=R_2$

Từ đó suy ra $AE=AM_1-EM_1=R_1-R_2$

Do vậy ta được $EM_2 = AE + AM_2 = R_1 - R_2 + R_2 = R_1$

Suy ra $EK = EP_2 - KP_2 = EM_2 - KP_2 = R_1 - \dfrac{R_2(R_1 - R_2)}{R_1 + R_2} = \dfrac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 + R_2}$

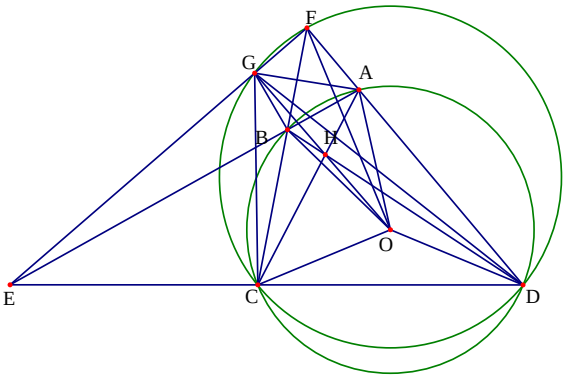
Tam giác AEK vuông tại A có đường cao AH nên ta được $AH.EK = AE.AK$

Từ đó ta tính được $AH = \dfrac{AE.AK}{EK} = \dfrac{2R_1R_2(R_1 - R_2)}{R_1^2 + R_2^2}$

Vậy ta có $S_{AP_1P_2} = \dfrac{1}{2}AH.P_1P_2 = \dfrac{R_1R_2(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 + R_2^2}$.

Ví dụ 25. Cho tứ giác ABCD không phải hình thang nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC, H là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng OH vuông góc với EF.

Phân tích và lời giải



Gọi G là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF và EF(F khác G). Ta cần chứng minh được hai tứ giác AOCG và BOCG nội tiếp đường tròn, từ đó ta suy ra được OG vuông góc với EF. Khi đó ta chỉ cần chứng minh được ba điểm O, H và G thẳng hàng là bài toán được chứng minh.

Thật vậy, ta có các tứ giác CDFG và ACBD nội tiếp nên ta được $\overset{\frown}{CGE} = \overset{\frown}{CDA}; \overset{\frown}{CDA} = \overset{\frown}{CBE}$

Từ đó ta được $\overset{\frown}{CGE} = \overset{\frown}{CBE}$, do đó tứ giác CBGE nội tiếp đường tròn.

Suy ra $\overset{\frown}{GBE} = \overset{\frown}{GCE}$, mà ta lại có $\overset{\frown}{GCE} = \overset{\frown}{GFA}$ nên suy ra $\overset{\frown}{GBE} = \overset{\frown}{GFA}$. Từ đó suy ra tứ giác ABGF nội tiếp đường tròn.

Do vậy $\overset{\frown}{AGF} = \overset{\frown}{ABF}$ kết hợp với $\overset{\frown}{ABF} = \overset{\frown}{CDA}$ thì ta được $\overset{\frown}{AGF} = \overset{\frown}{CDA}$ nên ta lại có tứ giác ADEG nội tiếp đường tròn.

Do đó ta được $\overset{\frown}{AGF} = \overset{\frown}{CDA}$, mà ta lại có $\overset{\frown}{CGE} = \overset{\frown}{CDA}$, do đó ta được $\overset{\frown}{AGF} + \overset{\frown}{CGE} = 2\overset{\frown}{CDA}$

Mà ta có $2\overset{\frown}{CDA} = \overset{\frown}{COA}$ nên $\overset{\frown}{AGF} + \overset{\frown}{CGE} = \overset{\frown}{COA}$.

Suy ra $\overset{\frown}{AGF}+\overset{\frown}{CGE}+\overset{\frown}{CGA}=\overset{\frown}{COA}+\overset{\frown}{CGA}=180^0$ nên tứ giác AOCG nội tiếp đường tròn.

Ta lại có $\overset{\frown}{DGF}=\overset{\frown}{DCB};\ \overset{\frown}{BGE}=\overset{\frown}{DCB}$ nên $\overset{\frown}{DGF}=\overset{\frown}{BGE}+2\overset{\frown}{DCB}$

Lại có $2\overset{\frown}{DCF}=\overset{\frown}{BOD}$ nên $\overset{\frown}{DGF}+\overset{\frown}{BGE}=\overset{\frown}{DOB}$.

Suy ra $\overset{\frown}{DGF}+\overset{\frown}{BGE}+\overset{\frown}{DGB}=\overset{\frown}{BOD}+\overset{\frown}{BGD}=180^0$ nên tứ giác BODG nội tiếp đường tròn.

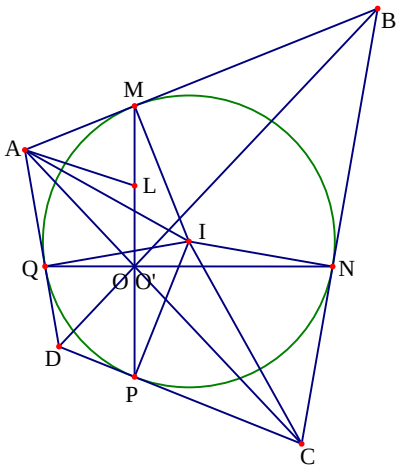
Do đó ta có $\overset{\frown}{OGA}=\overset{\frown}{OGC}$ mà $\overset{\frown}{AGF}=\overset{\frown}{CGE}$, suy ra $\overset{\frown}{OGF}=\overset{\frown}{OGE}$. Mà hai góc này kề bù nhau nên suy ta mỗi góc có số đo 90^0. Do đó ta được $OG\perp EF$.

Hai đường tròn AOCG và BODG có hai giao điểm là O và G. Kết hợp với $HA.HC=HB.HD$ suy ra điểm H phải nằm trên đường thẳng OG hay ba điểm H, O, G thẳng hàng. Vậy ta được OH vuông góc với EF.

Ví dụ 26. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O có AC vuông góc với BD. Các tiếp tuyến tại A, B với đường tròn (O) cắt nhau ở X, các tiếp tuyến tại B,C với đường tròn (O) cắt nhau ở Y, các tiếp tuyến tại C, D với đường tròn (O) cắt nhau ở Z, các tiếp tuyến tại D, A với đường tròn (O) cắt nhau ở T. Giả sử XZ và YT xắt nhau tại E. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ETX, EXY, EYZ, EZT, TXY, XYZ, YZT, ZTX cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I) với M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó O cũng là giao điểm của hai đoạn thẳng MP, NQ và tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi MP vuông góc với QM



Thật vậy, bài toán có hai trường hợp

+ Trường hợp 1: Tứ giác ABCD có một cặp cạnh đối diện song song với nhau, khi đó bổ để hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp 2: Tứ giác ABCD không có cặp cạnh đối diện nào song song với nhau. Khi đó gọi O′ là

giao điểm của AC và MP. Qua A kẻ AL // CD với L

thuộc MP.

Ta có $\overset{\frown}{ALM}=\overset{\frown}{DPM}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{MQP}=\overset{\frown}{AML}$ nên ta được $AL=AM$

Theo định lí Talet ta có $\frac{O'A}{O'C}=\frac{LA}{CP}$ hay $\frac{O'A}{O'C}=\frac{MA}{CP}$. Hoàn toàn tương tự ta gọi O" là giao

điểm của AC và NQ, khi đó ta được $\frac{O"A}{O"C}=\frac{QA}{CN}$. Để ý là $MA=AQ;CP=CN$ nên ta được

$\frac{O'A}{O'C}=\frac{O"A}{O"C}$, suy ra O' và O" trùng nhau. Như vậy ta được AC, MP và NQ đồng quy với

nhau. Chứng minh tương tự ta được BD, MP và NQ đồng quy với nhau. Lại có

$$\overset{\frown}{POQ}=360^0-\left(\overset{\frown}{PDQ}+\overset{\frown}{OQD}+\overset{\frown}{OPD}\right)$$

$$=360^0-\left(180^0-\overset{\frown}{QIP}\right)-\left(90^0-\overset{\frown}{NQI}\right)-\left(90^0-\overset{\frown}{MPI}\right)=\overset{\frown}{QIP}+\overset{\frown}{NQI}+\overset{\frown}{MPI}$$

Hay ta được $\overset{\frown}{QIP}=\overset{\frown}{POQ}-\left(\overset{\frown}{NQI}+\overset{\frown}{MPI}\right)$

Mà ta có $\overset{\frown}{NQI}+\overset{\frown}{MPI}=\overset{\frown}{INQ}+\overset{\frown}{PMI}$, do đó ta được $\overset{\frown}{QIP}=\overset{\frown}{POQ}-\left(\overset{\frown}{INQ}+\overset{\frown}{PMI}\right)$

Mặt khác ta có $\overset{\frown}{MIB}=\overset{\frown}{IMO}+\overset{\frown}{INO}+\overset{\frown}{MON}$.

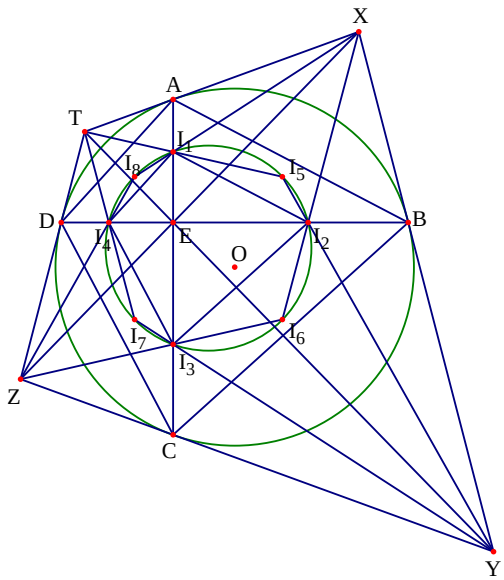
Từ đó suy ra $\overset{\frown}{QIP}+\overset{\frown}{MIN}=\overset{\frown}{POQ}-\left(\overset{\frown}{INQ}+\overset{\frown}{PMI}\right)+\overset{\frown}{IMO}+\overset{\frown}{INO}+\overset{\frown}{MON}=2\overset{\frown}{MON}$

Do đó $\overset{\frown}{MON}=90^0\Leftrightarrow\overset{\frown}{QIP}+\overset{\frown}{MIN}=180^0\Leftrightarrow\overset{\frown}{PDQ}+\overset{\frown}{MBN}=180^0\Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp

đường tròn. Vậy bổ đề được chứng minh xong.

Trở lại bài toán: Gọi $I_1;I_2;I_3;I_4;I_5;I_6;I_7;I_8$

lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ETX, EXY, EYZ, EZT, TXY, XYZ, YZT, ZTX. Theo bổ đề trên ta có E thuộc hai đường chéo XZ, YT và tứ giác XYZT nội tiếp đường tròn.



Từ đó ta được $\overset{\frown}{ZTY}=\overset{\frown}{ZXY}$. Mà

$\overset{\frown}{EDT}=\overset{\frown}{EBX}$ nên ta được $\overset{\frown}{TED}=\overset{\frown}{XED}$. Kết hợp với AC vuông góc với BD ta được

$\overset{\frown}{AET}=\overset{\frown}{AEX}$, do đó điểm I_1 thuộc EA.

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được điểm I_2 thuộc EB. Mà ta lại có

$XA = XB$ nên ta có $\frac{I_1A}{I_1E} = \frac{XA}{XE} = \frac{XB}{XE} = \frac{I_2B}{I_2E}$.

Từ đó theo định lí Talets ta suy ra I_1I_2 song song với AB. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được I_2I_3 song song với BC, I_3I_4 song song với CD, I_4I_1 song song với DA.

Mà tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^0$.

Do đó ta được $\widehat{I_4I_1I_2} + \widehat{I_4I_3I_2} = 180^0$, suy ra tứ giác $I_1I_2I_3I_4$ nội tiếp đường tròn.

Lại có

$$\widehat{I_1I_5I_2} + \widehat{I_1I_3I_2} = \widehat{TI_5Y} + \widehat{ACB} = 180^0 - \frac{\widehat{XTY} + \widehat{XYT}}{2} + \widehat{XAB} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{TXY} + 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{AXB} = 180^0$$

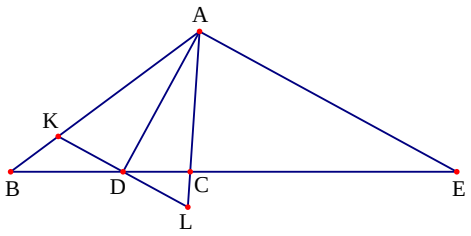
Do đó tứ giác $I_1I_5I_2I_3$ nội tiếp đường tròn. Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên ta cũng được các tứ giác $I_2I_6I_3I_4$, $I_1I_3I_7I_4$, $I_4I_8I_1I_2$ nội tiếp đường tròn. Vậy các điểm $I_1;I_2;I_3;I_4;I_5;I_6;I_7;I_8$ cùng nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 27. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với BC, AC lần lượt tại D, E. Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là P. Giả sử $\widehat{BPC} = 90^0$. Chứng minh rằng $AE + AP = PD$.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC và các điểm D, E lần lượt trên đường thẳng BC sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}$ (với $BD < BC < BE$ và $\widehat{DAE} = 90^0$). Khi đó AD và AE theo thứ tự là đường phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ABC.



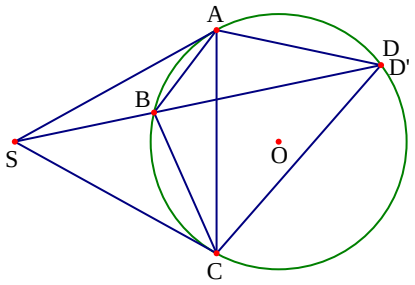
Thật vậy, qua D kẻ đường thẳng KL song song với $AE\left(K \in AB; L \in AC\right)$. Do AD vuông góc với AE nên AD vuông góc với KL. Theo định lí Talets và chú ý đến $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}$, $BD < BC < BE$ ta có

$$\frac{KD}{LD} = \frac{KD}{AE}.\frac{AE}{LD} = \frac{BD}{BE}.\frac{CE}{CD} = \frac{BD}{CD}.\frac{CE}{BE} = 1 \Rightarrow KD = LD$$

Từ đó suy ra tam giác KAL cân tại A nên AD là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$, kết hợp với $\widehat{DAE} = 90^0$ ta suy ra được AD và AE theo thứ tự là đường phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ABC.

Vậy bổ đề 1 được chứng minh.

Bổ đề 2: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau tại S. khi đó ba điểm S, B, D thẳng hàng khi và chỉ khi $AB.CD = AD.BC$



Thật vậy, giả sử ba điểm S, B, D thẳng hàng(B nằm giữa S và D). Khi đó ta có $\widehat{SAB} = \widehat{SDA}$ và $\widehat{SCB} = \widehat{SDC}$ suy ra $\Delta SAB \backsim \Delta SDA$ và $\Delta SCB \backsim \Delta SDC$.

Kết hợp với $SA = SC$ ta được

$\frac{AB}{AD} = \frac{SA}{SD} = \frac{SC}{SD} = \frac{CB}{CD}$, suy ra $AB.CD = AD.BC$.

Ngược lại, giả sử $AB.CD = AD.BC$. Khi đó gọi D' là giao điểm tứ hai của SB với đường tròn (O).

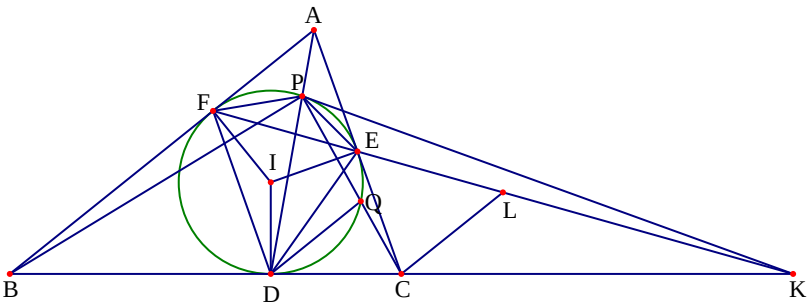
Chứng minh tương tự như trên ta được $AB.CD' = AD'.BC$

Mà ta lại có $AB.CD = AD.BC$ nên ta thu được $\frac{CD'}{CD} = \frac{AD'}{AD}$.

Kết hợp với $\widehat{CD'A} = \widehat{CDA}$ ta được $\Delta CD'A \backsim \Delta CDA$

Do đó suy ra $\widehat{CAD'} = \widehat{CAD}$, suy ra hai tia AD và AD' trùng nhau nên hai điểm D và D' trùng nhau.

Vậy ba điểm S, B, D thẳng hàng. Bổ đề 2 được chứng minh.



Trở lại bài toán: Gọi F là tiếp điểm của của đường tròn (I) với AB, K là giao điểm của BC và EF. Lấy đểm L thuộc đoạn EF sao cho CL song song với AB. Gọi Q là giao điểm thứ hai của PC với đường tròn (I).

Theo định lí Talets và chú ý là $AE = AF; BD = BF; CD = CE$ ta có

$$\frac{KB}{KD} = \frac{BF}{CL} = \frac{BF}{AF}.\frac{AF}{CL} = \frac{BF}{AF}.\frac{AF}{CE} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{CK}{CD} = \frac{BK}{BD}$$

Kết hợp với PC vuông góc với PB, theo bổ đề 1 trên ta suy ra được

$\widehat{QPK} = \widehat{CPK} = \widehat{CPD} = \widehat{QPD}$

Áp dụng bổ đề 2 cho tứ giác EPFD ta được $EP.DF = FP.DE$

Áp dụng bổ đề 2 cho tứ giác EPFD ta suy ra được KP tiếp xúc với đường tròn (I).

Từ đó ta suy ra được $\widehat{QPK} = \widehat{QDP}$. Do đó $\widehat{QPD} = \widehat{QDP}$. Từ đó dẫn đến tam giác DPQ cân tại Q nên suy ra $QD = QP$. Lại áp dụng bổ đề 2 và định lí Ptoleme cho tứ giác PEQD nội tiếp ta được

$$2PE.PQ = 2PE.DQ = PE.DQ + PD.EQ = DE.QP$$

Từ đó suy ra $2PE = DE$.

Từ đó chú ý đến hai tam giác APE và AED đồng dạng với nhau ta được

$2AE = AD;\ 2AP = AE$.

Vậy ta được $AE + AP = 2AE - AE + AP = AD - 2AP + AP = AD - AP = DP$

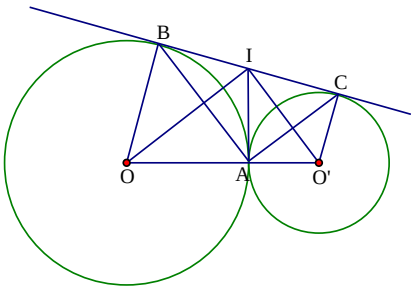
Bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 28. Cho hình chữ nhật ABCD và đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, DA. Từ C kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt AD tại E. Vẽ đường trong (I) nội tiếp tam giác DEC và đường tròn (J) tiếp xúc với CB, CE và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O). Biết rằng hai đường tròn (I) và (J) có cùng bán kính. Tính tỉ số của AB và AD.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc ngoài với nhau. Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn, khi đó ta có

$BC = 2\sqrt{R.r}$



Thật vậy, gọi A là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'). Vẽ tiếp tuyến chung trong tại A của hai đường tròn, tiếp tuyến này cắt BC tại I.

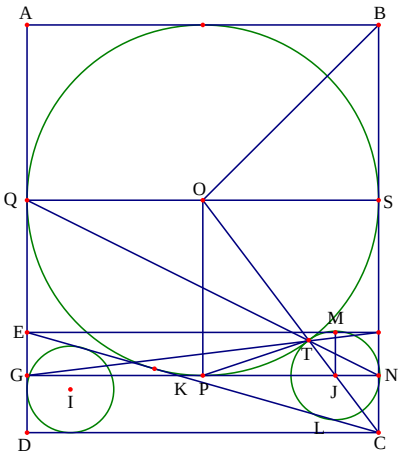
Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $IA = IB; IB = IC \Rightarrow IA = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$

Do đó tam giác ABC vuông tại A nên ta được $\widehat{BAC} = 90^0$

Lại theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có OI là phân giác $\widehat{BIA}$ và O'I là phân giác $\widehat{AIC}$ mà $\widehat{BIA}$ và $\widehat{AIC}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{OIO'} = 90^0$. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông,

Ta có $IA^2 = OA.OA' = R.r \Rightarrow IA = \sqrt{R.r}$. Mà $BC = 2.IA = 2.\sqrt{R.r}$

Trở lại bài toán: Ta kí hiệu $d_{(X,YZ)}$ là khoảng cách từ điểm X đến đường thẳng YZ. Gọi T là tiếp điểm của hai đường tròn (O) và (J). Gọi F là giao điểm của BC và tiếp tuyến với đường tròn (J) kể từ E(khác EC). Gọi G là giao điểm của TF và AD. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường tròn (J) với EF, BC. Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với TM. Gọi Q, S theo thứ tự là tiếp điểm đường tròn (O) với AD, BC. Gọi K, L theo thứ tự là tiếp điểm của CE với đường tròn (O), (J). Đặt R, r lần lượt là bán kính của đường tròn (O), (J) và $CL = CN = x$. Ta thấy EF//CD//OQ//JN và GP//EF nên ta được GP//IN hoặc GP và JN trùng nhau.



Lại có T, N, Q thẳng hàng nên ta có $\frac{d_{(T,PG)}}{d_{(T,EF)}} = \frac{TP}{TM} = \frac{OP}{JM} = \frac{OQ}{JN} = \frac{TQ}{TN} = \frac{d_{(T,JN)}}{d_{(T,EF)}}$

Kết hợp với $\frac{OP}{JM} = \frac{OQ}{JM} = \frac{R}{r} > 1$ nên ta được $d_{(T,PG)} = d_{(T,JN)} > d_{(T,EF)}$

Từ đó chú ý là T, PG, JN cùng thuộc nửa nặt phẳng bờ EF nên ta suy ra được PG và JN trùng nhau.

Điều đó có nghĩa là GN song song với QS. Lại thấy tứ giác OPGQ là hình vuông kết hợp theo bổ đề trên ta thu được $R = OP = OQ = SN = 2\sqrt{R.r}$ nên suy ra $R = 4r$. Ta có tứ giác JNFM là hình vuông nên suy ra

$$EC = EK + KL + LC = EQ + SN + LC = SF + SN + LC = 2SN - FN + LC = 2R - r + x$$

Hay ta được $EC = 2R - \frac{1}{4}R + x = \frac{7}{2}R + x$. Mà ta có $\widehat{EFC} = 90^0$ và $EF = 2R; FC = \frac{1}{4}R + x$.

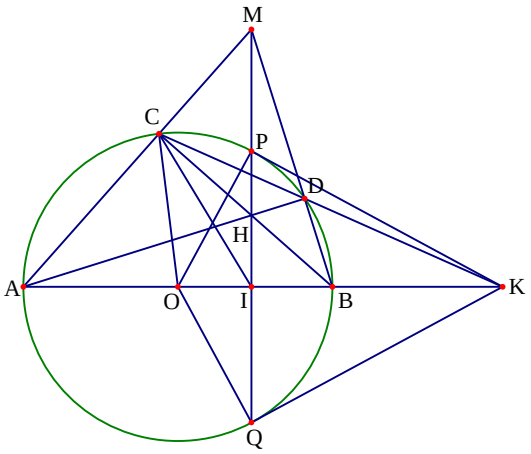
Nên theo định lí Pitago ta được $\left(\frac{7}{4}R + x\right)^2 = (2R)^2 + \left(\frac{1}{4}R + x\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}R$.

Do đó ta được $6AD = 6BC = 6(BN + NC) = 6\left(2R + \frac{1}{3}R\right) = 7.2R = 7AB$ hay ta được $\frac{AB}{AD} = \frac{6}{7}$.

Ví dụ 29. Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Đường thẳng d vuông góc với AB tại I và cắt đường tròn (O) tại P, Q(I không trùng với O). Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d(M không trùng với I). Các tia AM và BM cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại C và D. Hai đường thẳng CD và AB cắt mhau tại K. Chứng minh rằng KP và KQ là hai tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau



+ Trường hợp 1: Điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của AD và BC.

Vì AB là đường kính của đường tròn (O) nên ta có $AD \perp BM$ và $BC \perp AM$.

Từ đó suy ra H là trực tâm tam giác MAB.

Lại có $MI \perp BC$ nên MI cũng là đường cao của tam giác MAB, do đó H thuộc đoạn thẳng MI.

Như vậy ta có

$\widehat{ACH} + \widehat{AIH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ hay tứ giác ACHI nội tiếp đường tròn.

Lại có $\widehat{CHA}$ là góc ngoài của tam giác HAB và $OB = OC$ nên ta suy ra được

$$\widehat{CIO} = \widehat{CIA} = \widehat{CHA} = \widehat{HAB} + \widehat{HBA} = \widehat{DAB} + \widehat{CBO} = \widehat{DCB} + \widehat{BCO} = \widehat{OCD} = \widehat{OCK}$$

Kết hợp với $\widehat{COI} = \widehat{KOC}$ suy ra hai tam giác OCI và OKC đồng dạng với nhau.

Từ đó để ý đến $OP = OC$ ta suy ra được $\frac{OK}{OP} = \frac{OK}{OC} = \frac{OC}{OI} = \frac{OP}{IO}$.

Mà ta lại có $\widehat{KOP} = \widehat{POI}$ nên suy ra được hai tam giác OPK và OIP đồng dạng với nhau.

Do đó ta được $\widehat{KOP} = \widehat{POI} = 90^0$ nên KP là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Do P và Q đối xứng với nhau qua AB nên KQ cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O).

+ Trường hợp 2: Điểm M nằm trong đường tròn (O). Khi đó lập luận tương tự như trên ta được M là trực tâm tam giác HAB. Đến đây lặp lại các chứng minh như trên ta cũng suy ra được KP và KQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

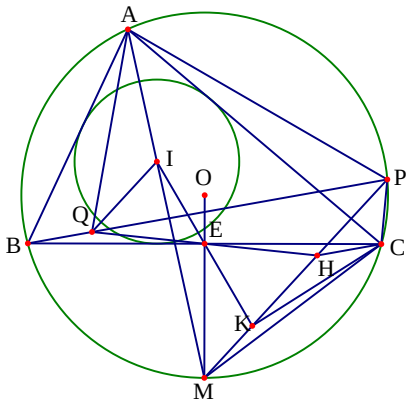
Ví dụ 30. Cho tam giác ABC có $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ nội tiếp đường tròn tâm O và ngoại tiếp đường tròn tâm I. Điểm M nằm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn (O), E là trung điểm của BC và K là điểm đối xứng với I qua E. Đường thẳng MK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P. Chứng minh rằng P thuộc cung nhỏ AC và $BP = AP + CP$

Phân tích tìm lời giải

Dễ thấy $\Delta EIB = \Delta EKC$ nên $\overset{\frown}{KCE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} < \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{BCM}$ do đó K nằm trong $\overset{\frown}{BCM}$. Ta có E, C nằm về một phía với $AM \Rightarrow K$ và C nằm về một phía AM. Do đó điểm K nằm trong góc $\overset{\frown}{AMC}$ nên điểm P thuộc cung nhỏ AC. Để chứng minh $BP = AP + CP$ ta lấy điểm Q trên BP sao cho $PA = PQ$. Khi đó ta thấy tứ giác ABQI nội tiếp. Gọi H là giao điểm của QE với PM thì tứ giác QIHK là hình bình hành. Khi đó E là trung điểm QH nêna tứ giác BQCH là hình bình hành, từ đó $BQ = CH$. Như vậy để có $BP = PA + PC$ ta cần có $CH = CP$, điều này hoàn toàn xẩy ra do tam giác PCH cân.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} EI = EK \\ EB = EC \\ \overset{\frown}{IEB} = \overset{\frown}{KEC} \end{cases} \Rightarrow \Delta EIB = \Delta EKC$



Do đó ta được

$$\overset{\frown}{KCE} = \overset{\frown}{IBE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} < \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{BCM}$$

Từ đó suy ra K nằm trong góc $\overset{\frown}{BCM}$.

Do $\overset{\frown}{ABC} > \overset{\frown}{ACB}$ nên E, C nằm về một phía với $AM \Rightarrow K$ và C nằm về một phía AM. Do đó điểm K nằm trong góc $\overset{\frown}{AMC}$ nên điểm P thuộc cung nhỏ AC.

Lấy điểm Q thuộc BP sao cho $PA = PQ$. Khi đó ta có

$$\overset{\frown}{PAQ} = \overset{\frown}{AQB} = \frac{1}{2}\left(180^o - \overset{\frown}{APB}\right) = \frac{1}{2}\left(180^o - \overset{\frown}{ACB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BAC} - \overset{\frown}{ABC}\right)$$

Do đó ta được $\overset{\frown}{IAQ} + \overset{\frown}{PAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{IBQ} + \overset{\frown}{PBC}$

Mặt khác ta có $\overset{\frown}{PAC} = \overset{\frown}{PBC}$ nên suy ra $\overset{\frown}{IAQ} = \overset{\frown}{IPQ}$. Vì vậy tứ giác ABQI là tứ giác nội tiếp

Do đó $\overset{\frown}{ABQ} = \overset{\frown}{BAI} = \overset{\frown}{IQP} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{QPM}$, suy ra AB // PM và IQ // PM.

Gọi H là giao điểm QE và PM thì tứ giác QIHK là hình bình hành (do IQ//KH, IQ = KH).

Khi đó E là trung điểm QH, suy ra tứ giác BQCH là hình bình hành, từ đó ta được $BQ = CH$.

Do PM // AB và IB // CK nên $\overset{\frown}{PHC} = \overset{\frown}{ABQ} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{MPC}$.

Suy ra tam giác PCH cân. Do đó ta được $CH = CP$ nên ta được $BP = PA + PC$.

Ví dụ 31. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có I là giao điểm của hai đường chéo. Gọi $I_1;I_2;I_3;I_4$ theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác IAB, IBC, ICD, IAD. Chứng minh rằng tứ giác $I_1I_2I_3I_4$ nội tiếp khi và chỉ khi tứ giác ABCD ngoại tiếp.

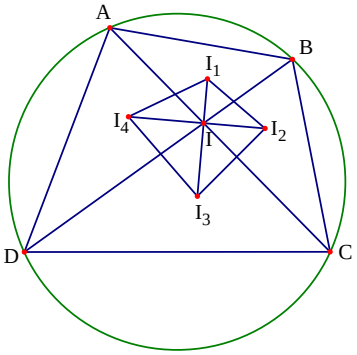
Lời giải

Trước hết ta phát biểu bổ đề: Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì ta có

$$AI^2=\frac{AB.AC\left(AB+AC-BC\right)}{AB+BC+CA}$$

Bổ đề được chứng minh trong ví dụ 5.

Trở lại bài toán: Do tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên ta được $\Delta IAB\backsim\Delta IDC$ và $\Delta IBC\backsim\Delta IAD$



Do đó ta được $\frac{IA+IB-AB}{IA+IB+AB}=\frac{IC+ID-CD}{IC+ID+CD}$ và

$\frac{IB+IC-BC}{IB+IC+BC}=\frac{IA+ID-AD}{IA+ID+AD}$

+ Chứng minh điều kiện cần: Giả sử tứ giác $I_1I_2I_3I_4$ nội tiếp đường tròn. Khi đó ta có $II_1.II_3=II_2.II_4$

Theo bổ đề trên ta có

$$II_1^2=\frac{IA.IB\left(IA+IB-AB\right)}{IA+IB+AB};\ II_3^2=\frac{IC.ID.\left(IC+ID-CD\right)}{IC+ID+CD}$$

$$II_2^2=\frac{IB.IC\left(IB+IC-BC\right)}{IB+IC+BC};\ II_4^2=\frac{ID.IA.\left(ID+IA-DA\right)}{ID+IA+DA}$$

Từ đó ta được $\frac{IA+IB-AB}{IA+IB+AB}.\frac{IC+ID-CD}{IC+ID+CD}=\frac{IB+IC-BC}{IB+IC+BC}.\frac{IA+ID-AD}{IA+ID+AD}$

Kết hợp với kết quả trên ta được $\frac{IA+IB-AB}{IA+IB+AB}=\frac{IC+ID-CD}{IC+ID+CD}=\frac{IB+IC-BC}{IB+IC+BC}=\frac{IA+ID-AD}{IA+ID+AD}$.

Do đó ta được $\frac{AB}{IA+IB}=\frac{CD}{IC+ID}=\frac{BC}{IB+IC}=\frac{DA}{IA+ID}$

Nên suy ra $\frac{AB+CD}{IA+IB+IC+ID}=\frac{BC+DA}{IB+IC+ID+IA}$ hay ta được $AB+CD=BC+DA$

Điều này có nghĩa là tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn.

+ Chứng minh điều kiện đủ: Giả sử tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn ta cần chứng minh tứ giác $I_1I_2I_3I_4$ nội tiếp đường tròn.

Thật vậy giả sử tứ giác $I_1I_2I_3I_4$ không nội tiếp đường tròn. Khi đó ta có $II_1.II_3\neq II_2.II_4$

Tương tự như trên ta được

Từ đó ta được $\frac{IA+IB-AB}{IA+IB+AB}.\frac{IC+ID-CD}{IC+ID+CD}\neq\frac{IB+IC-BC}{IB+IC+BC}.\frac{IA+ID-AD}{IA+ID+AD}$

Kết hợp với kết quả trên ta được $\frac{IA+IB-AB}{IA+IB+AB}=\frac{IC+ID-CD}{IC+ID+CD}\neq\frac{IB+IC-BC}{IB+IC+BC}=\frac{IA+ID-AD}{IA+ID+AD}$.

Do đó ta được $\frac{AB}{IA+IB}=\frac{CD}{IC+ID}\neq\frac{BC}{IB+IC}=\frac{DA}{IA+ID}$

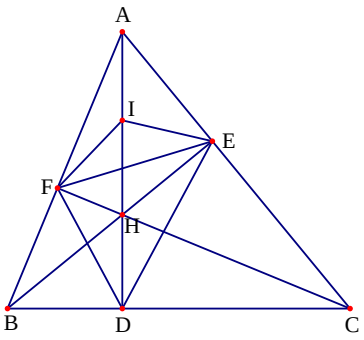
Nên suy ra $\frac{AB+CD}{IA+IB+IC+ID}\neq\frac{BC+DA}{IB+IC+ID+IA}$ hay ta được $AB+CD\neq BC+DA$

Điều này có nghĩa là tứ giác ABCD không thể ngoại tiếp đường tròn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn. Vậy điều giả sử là sai hay tứ giác $I_1I_2I_3I_4$ nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 32. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ADC}=\widehat{BCD}=90^0$. Lấy một điểm E trên cạnh CD. Các đường cao AM, BN của tam giác ABE cắt nhau tại H. Gọi giao điểm của DM và CN là K. giao điểm của KH và CD là L. Chứng minh rằng $KH=KL$.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của AH. Khi đó bốn điểm D, E, F, I cùng thuộc một đường tròn.



Thật vậy, dễ thấy $\widehat{HIE}=2\widehat{HAE};\widehat{HIF}=2\widehat{HAF}$ nên ta được $\widehat{EIF}=2\widehat{BAC}$

Do tứ giác BDHF nội tiếp đường tròn nên ta có

$\widehat{HBF}=\widehat{HDF}$

Do tứ giác CDHE nội tiếp đường tròn nên ta có

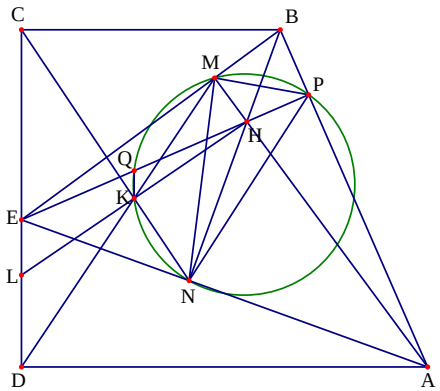
$\widehat{HDE}=\widehat{HCE}$

Do tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{EBF}=\widehat{FCE}$. Từ đó suy ra $\widehat{EDF}=2\widehat{FBH}$.

Do vậy

$\widehat{EDF}+\widehat{EIF}=2\left(\widehat{FBH}+\widehat{BAC}\right)=2.90^0=180^0$

Suy ra tứ giác DEIF nội tiếp đường tròn. Bổ đề được chứng minh.



Trở lại bài toán: Gọi P là giao điểm của EH và AB, Q là trung điểm của EH. Khi đó theo bổ đề trên ta được bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Ta có

$\widehat{ADE} = \widehat{AME} = \widehat{APE} = 90^0 = \widehat{BCE} = \widehat{BNE} = \widehat{BPE}$

nên các đa giác ADEMP và BCENP nội tiếp đường tròn. Do đó ta được

$$\begin{aligned}\widehat{MKN} &= 180^0 - \widehat{KMN} - \widehat{KNM} = 180^0 - \left(\widehat{EMN} - \widehat{EMK}\right) - \left(\widehat{ENM} - \widehat{ENK}\right)\\ &= 180^0 - \widehat{EMN} - \widehat{ENM} + \widehat{EMK} + \widehat{ENK} = \widehat{MEN} + \widehat{EMD} + \widehat{ENC}\\ &= \widehat{AEB} + \widehat{EAD} + \widehat{EBC} = \widehat{AEB} + 90^0 - \widehat{DEA} + 90^0 - \widehat{CEB}\\ &= \widehat{AEB} + 180^0 - \widehat{DEA} - \widehat{CEB} = \widehat{AEB} + \widehat{BEA} = \widehat{NEB} + \widehat{MEA}\\ &= \widehat{APN} + \widehat{BPN} = 180^0 - \widehat{MPN}\end{aligned}$$

Từ đó ta được K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP nên K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Do đó suy ra $\widehat{EDM} = \widehat{EPM} = \widehat{QPM} = \widehat{QKM}$ nên ta được DE song song với KQ.

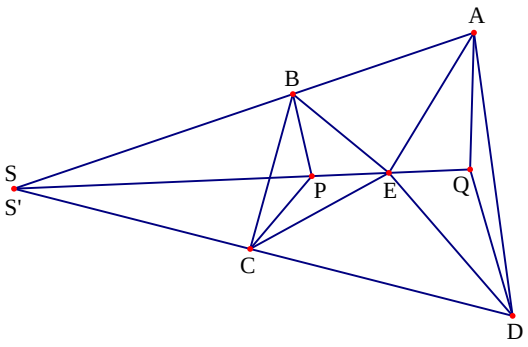
Kết hợp với $QH = QE$ ta được $KH = KL$.

Ví dụ 33. Cho tứ giác ABCD và các điểm P, Q nằm trong tứ giác sao cho các tứ giác ABPQ và CDPQ nội tiếp đường tròn. Giả sử tồn tại điểm E thuộc đoạn PQ thỏa mãn $\widehat{EAQ} = \widehat{EBP}$ và $\widehat{EDQ} = \widehat{ECP}$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

Trích tài liệu Toán Quốc tế - IMO shorlist 2008

Lời giải

Khi E là trung điểm của đoạn thẳng PQ thì dễ thấy AB, CD cùng song song với PQ. Khi đó tứ giác ABCD là hình thang cân. Do đó tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Khi E không là trung điểm của PQ thì AB, CD không song song với PQ. Khi đó gọi S là giao điểm của AB và PQ. Tứ giác ABCD là tứ giác lồi nên điểm S nằm ngoài đoạn thẳng AB.



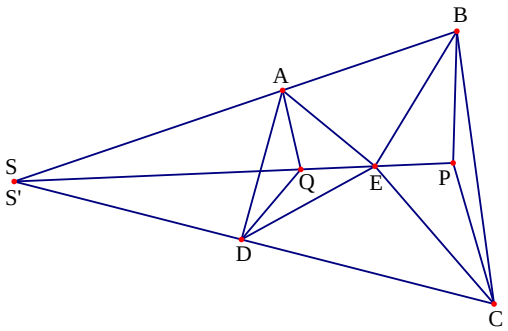
Ta xét hai trường hợp xẩy ra như sau:

+ Trường hợp 1: Điểm S nằm trên tia đối của tia BA.

Do góc $\widehat{BPS}$ là góc ngoài của tam giác BPE. Lại có tứ giác ABPQ nội tiếp đường tròn và $\widehat{EAQ} = \widehat{EBP}$ nên ta được $\widehat{BES} = \widehat{BPS} - \widehat{EBP} = \widehat{SAQ} - \widehat{EAQ} = \widehat{SAE}$

Từ đó suy ra SE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.

+ Trường hợp 2: Điểm S nằm trên tia đối của tia AB.



Do góc $\widehat{BES}$ là góc ngoài của tam giác BPE.

Lại có tứ giác ABPQ nội tiếp đường tròn và $\widehat{EAQ}=\widehat{EBP}$ nên ta được

$$\widehat{BES}=\widehat{BPE}+\widehat{EBP}=\widehat{SAQ}+\widehat{EAQ}=\widehat{SAE}$$

Từ đó $\widehat{BEP}=180^0-\widehat{BES}=180^0-\widehat{SAE}=\widehat{BAE}$.

Từ đó suy ra SE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.

Như vậy cả hai trường hợp ta đều được SE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Từ đó dễ dàng chứng minh được $SA.SB=SE^2$. Do tứ giác ABPQ nội tiếp đường tròn nên ta cũng chứng minh được $SA.SB=SP.SQ$. Từ đó suy ra $SE^2=SP.SQ$. Chú ý là xét từng trường hợp như trên ta thu được

Nếu S nằm trên tia đối của tia BA thì ta được

$$SE^2=SP.SQ=(SE-EP)(SE+EQ)=SE^2+(EQ-EP).SE-EP.EQ$$

Suy ra $SE=\dfrac{EQ-EP}{EP.EQ}$. Nếu S nằm trên tia đối của tia AB, lập luận tương tự ta thu được

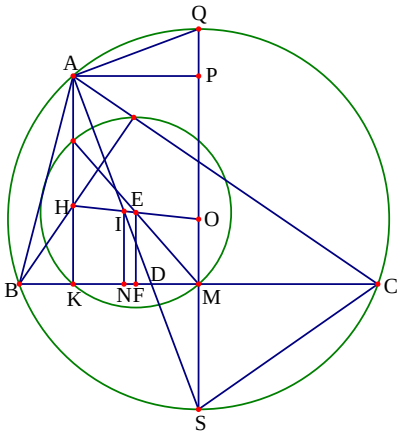
$$SE=\frac{EP-EQ}{EP.EQ}$$

Như vậy kết hợp lại ta được $SE=\dfrac{|EP-EQ|}{EP.EQ}$. Hoàn toàn tương tự gọi S' là giao điểm của PQ và CD. Xét các trường hợp như trên ta cũng chứng minh được $S'E=\dfrac{|EP-EQ|}{EP.EQ}$. Từ đó ta được $SE=S'E$ hay hai điểm S và S' trùng nhau. Từ đó ta được $SP.SQ=SA.SB=SC.SD$, do đó suy ra tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 34. Chứng minh rằng trong một tam giác thì đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp.

Lời giải

Ta dễ dàng chứng minh được trong một tam giác luôn có $AH = 2OM$ với H là trực tâm tam giác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm của BC.



Gọi E là trung điểm OH khi đó E tâm đường tròn Euler.

Gọi SQ là đường kính đường tròn (O). Kẻ $AP \perp SQ; EF \perp BC$, khi đó EF là đường trung bình của hình thang OHKM nên ta được $HK + OM = 2EF$. Từ đó suy ra

$$PO = PM - OM = AK - OM = AH + HK - OM$$
$$= 2OM + HK - OM = OM + HK = 2EF$$

Ta có $\Delta APQ \backsim \Delta IMD \Rightarrow \dfrac{PQ}{DN} = \dfrac{AP}{IN} \Rightarrow PQ.IN = AP.DN = MK.DN\,(1)$

Hai tam giác SDC và SCA có $\widehat{ASC}$ chung, $\widehat{SAC} = \widehat{SCD}$ nên $\Delta SCA \backsim \Delta SDC$

Từ đó $\dfrac{SD}{SC} = \dfrac{SC}{SA} \Rightarrow SC^2 = SD.SA$. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp nên

$SC = SB = SI \Rightarrow SI^2 = SD.SA$.

Từ A, I, D, S hạ vuông góc lên BC tương ứng tại K, N, D, M. Khi đó ta có $MN^2 = MD.MK$

Suy ra ta có $MN.NK = MK.DN$. Kết hợp với (1) ta được $IN.PQ = MN.NK$.

Ta có $EI^2 = (IN - EF)^2 + (MN - MF)^2 \Rightarrow EI^2 = \left(IN - \dfrac{PO}{2}\right)^2 + \left(MN - \dfrac{MK}{2}\right)^2$ hay

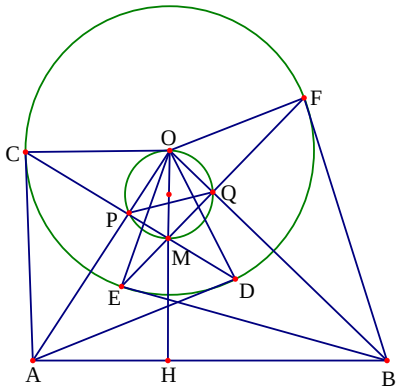
$$EI^2 = IN^2 - IN.PO + \frac{1}{4}\left(PO^2 + MK^2\right) - MN.MK + MN^2 = \frac{1}{4}OA^2 - IN^2 - IN.PO - MN.NK$$
$$= \frac{1}{4}R^2 + r^2 - IN\left(QP + PO\right) = \frac{1}{4}R^2 + r^2 - R.r = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2$$

Từ đó suy ra $EI = \dfrac{R}{2} - r$. Vậy đường tròn nội tiếp tiếp xúc với đường tròn Euler.

Ví dụ 35. Cho đường tròn tâm O có bán kính R và một điểm M nằm trong đường tròn. Qua M vẽ hai đây cung CD và EF không đi qua tâm O. Hai tiếp tuyên tại C và D của (O) cắt nhau tại A, hai tiếp tuyên tại E và F của (O) cắt nhau tại B. Chứng minh rằng AB và OM vuông góc với nhau.

Lời giải

Gọi H là giao điểm của OM và AB, gọi P là giao điểm của AO và CD, gọi Q là giao điểm của BO và EF. Khi đó ta có $OA \perp CD$, $OB \perp EF$.



Tam giác AOC vuông tại C có CP là đường cao nên ta có

$$OA.OP = OC^2 = R^2$$

Tam giác BOF vuông tại F có FP là đường cao nên ta có

$$OQ.OB = OF^2 = R^2$$

Do đó ta được $OA.OP = OB.OF \Rightarrow \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{OB}{OA}$.

Hai tam giác OPQ và OBA có $\widehat{POQ}$ chung và $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{OB}{OA}$.

Do đó ta được $\Delta OPQ \backsim \Delta OBA$ nên ta được

$\widehat{OAB} = \widehat{OQP}$.

Mặt khác ta lại có $\widehat{OPM} = \widehat{OQM} = 90^0$, do đó tứ giác OPMQ nội tiếp nên ta được

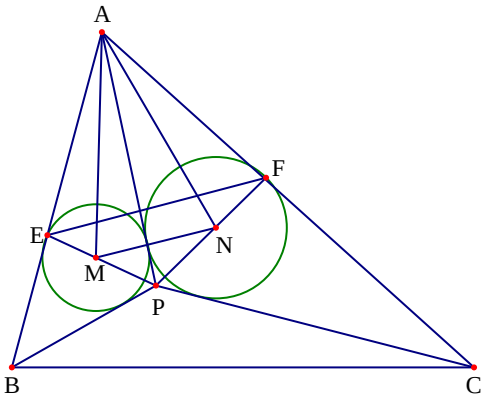
$\widehat{OQP} = \widehat{OMP}$

Mà ta lại có $\widehat{OMP} + \widehat{PMH} = 180^0$. Từ đó ta được $\widehat{OAB} + \widehat{PMH} = 180^0$ nên tứ giác AHMP nội tiếp được. Do $\widehat{APM} = 90^0$ nên ta được $\widehat{AHM} = 90^0$ hay AB và OM vuông góc với nhau

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} < 90^0$. Giả sử P là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC sao cho $\widehat{BAP} = \widehat{ACP}$ và $\widehat{CAP} = \widehat{ABP}$. Gọi M và N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABP và ACP, R là độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AP}$

Lời giải

Gọi E là giao điểm của PM và AB, F là giao điểm của PN và AC. Từ giả thiết ta có $\Delta ABP \backsim \Delta CAP$. Do đó ta được $\widehat{APB} = \widehat{APC} = 180^0 - \widehat{BAC}$.



Suy ra $\widehat{EPF} = \frac{1}{2}\left(\widehat{APB} + \widehat{APC}\right) = 180^0 - \widehat{BAC}$, nên tứ giác AEPF nội tiếp. Cũng từ $\widehat{APB} = \widehat{APC}$ ta được $\widehat{APE} = \widehat{APF}$, do đó ta được $AE = AF$.

Do M, N là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABP và ACP nên AM, AN là lần lượt là phân giác của các góc $\widehat{EAP}, \widehat{FAP}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác cho các tam giác AEP và AFP ta có

$$\frac{PM}{EM} = \frac{AP}{AE} = \frac{AP}{AF} = \frac{PN}{PF}$$

Do đó ta được MN//EF nên ta được $\frac{MN}{EF} = \frac{MP}{PE} = \frac{MP}{ME + MP} = \frac{AP}{AE + AP}$. Lại có

$EF = 2AE.\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$ nên ta được $MN = EF.\frac{PM}{PE} = \frac{EF.AP}{AP + AE} = \frac{2AE.AP}{AP + AE}.\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$

Áp dụng định lí sin cho tam giác AMN ta có

$$\frac{1}{R} = \frac{2\sin\widehat{MAN}}{MN} = \frac{2}{MN}.\sin\frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{AP + AE}{AE.AP} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AP}$$

Mặt khác do $\Delta ABP \backsim \Delta CAP$ nên ta được $AB.AP = AC.BP;\ AC.AP = AB.CP$

Nên ta được $AB.AP + AB.CP = AC.BP + AC.AP \Leftrightarrow \frac{AB.AP}{BP + AP} = \frac{AC.AP}{AP + CP}$

Và $\frac{1}{AC} = \frac{BP}{AB.AP};\ \frac{1}{AB} = \frac{CP}{AC.CP}$

Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{AE}{AP} = \frac{BE}{BP} = \frac{AE + BE}{AP + BP} = \frac{AB}{AP + BP} \Rightarrow AE = \frac{AP.AB}{AP + BP}$

Tương tự ta cũng có $AF = \frac{AC.AP}{AP + CP}$. Do đó ta được $AE = \frac{AB.AP}{BP + AP} = AF = \frac{AC.AP}{AP + CP}$

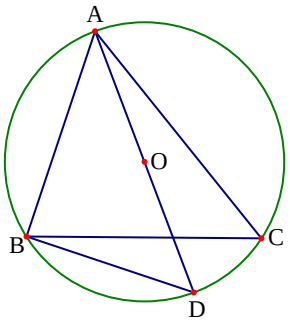
Từ đó suy ra $\frac{1}{AE} = \frac{1}{2}\left(\frac{BP + AP}{AB.AP} + \frac{AP + CP}{AC.AP}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AB} + \frac{BP}{AB.AP} + \frac{CP}{AC.CP}\right) = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

Do đó ta được $\frac{1}{R} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$

Ví dụ 37. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng BD là tia phân giác của góc $\widehat{AIC}$ khi và chỉ khi AC là tia phân giác của góc $\widehat{BJD}$.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh công thức: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ khi đó ta luôn có $S_{ABC} = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}$.



Thật vậy, vẽ đường kính AD khi đó ta có $\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB}$

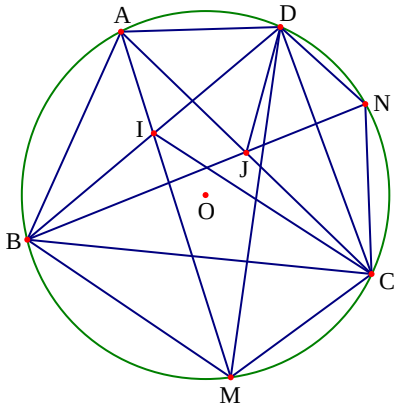
Mà ta có tam giác ABD vuông tại B nên

$\sin\overset{\frown}{ADB} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AB}{2R}$. Do đó ta được $\sin C = \dfrac{AB}{2R}$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.CA.\sin A = \dfrac{1}{2}BC.CA.\dfrac{AB}{2R} = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}$

Trở lại bài toán: Kẻ CM//BD với M nằm trên đường tròn O. Khi đó ta có $BM = CD$ và $\overset{\frown}{DBM} = \overset{\frown}{BDC}$

Do I tà trung điểm của BD nên $IB = ID$, từ đó ta được $\Delta BIM = \Delta DIC$ suy ra $\overset{\frown}{BIM} = \overset{\frown}{DIC}$



+ Nếu BD là phân giác của góc $\overset{\frown}{AIC}$ thì ta được $\overset{\frown}{AID} = \overset{\frown}{DIC}$

Mà ta lại có $\overset{\frown}{BIM} = \overset{\frown}{AID}$ nên ba điểm A, I, M thẳng hàng.

Gọi R là bán kính đường tròn (O), ta có $S_{ABM} = \dfrac{AB.BM.MB}{4R}$ và $S_{ADM} = \dfrac{AD.DM.MB}{4R}$. Vì I là trung điểm của AB nên ta được $S_{AMB} = S_{AMD}$. Suy ra $AB.BM = AD.DM$

Lại có $CD = BM,\ BC = DM$ nên ta có $AB.CD = AD.BC$.

Kẻ DN//AC với N nằm trên đường tròn (O) khi đó ta được $AD = CN,\ AN = CD$

Lại có $S_{ABN} = \dfrac{AB.BN.NA}{4R}$; $S_{CBN} = \dfrac{BC.CN.NB}{4R}$. Do đó ta được $S_{ABN} = S_{CBN}$. Điều này chứng tỏ DN đi qua trung điểm J của BD. Khi đó ta có $AD = NC,\ \overset{\frown}{DAJ} = \overset{\frown}{NCJ}$ suy ra $\overset{\frown}{AJD} = \overset{\frown}{CJN} = \overset{\frown}{AJB}$

Do đó AD là phân giác của góc $\overset{\frown}{BJC}$.

+ Nếu AD là phân giác của góc $\overset{\frown}{BJC}$. Thì lập lại các chứng minh như trên ta được BD là phân giác của góc $\overset{\frown}{AIC}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 38. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có góc $\widehat{BAD}$ tù. Qua A vẽ các tia vuông góc với AD, AB lần lượt cắt các cạnh CB và CD tại P và Q. Giả sử đường thẳng PQ cắt đường thẳng BD tại M. Chứng minh rằng $\widehat{MAC} = 90^0$.

Lời giải

Do tứ giác ABCD nội tiếp nên

$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^0$

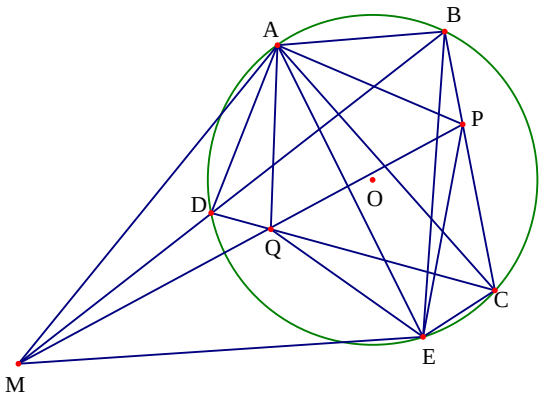
Ta có

$\widehat{DBA} + \widehat{QAP} = \widehat{DAP} + \widehat{QAB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Từ đó ta được $\widehat{BCD} = \widehat{QAP}$.

Lấy điểm E đối xứng với A qua PQ, khi đó ta được $\widehat{QAP} = \widehat{QEP}$. Do đó suy ra

$\widehat{QEP} = \widehat{BCD}$



Mà hai điểm E và C cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ PQ và cùng nhìn đoạn PQ nên tứ giác PQEC nội tiếp đường tròn. Suy ra

$\widehat{ECQ} = \widehat{EPQ}$

Ta có $\widehat{EPQ} = \widehat{APQ}$ và $\widehat{APQ} = \widehat{DAE}$ nên ta được $\widehat{EPQ} = \widehat{DAE}$

Do đó tứ giác DACE nội tiếp, nên điểm E thuộc đường tròn (O). Khi đó ta được

$\widehat{DBE} = \widehat{DAE} = \widehat{QPE}$

Từ đó ta được tứ giác MEPB nội tiếp

Suy ra $\widehat{MEP} + \widehat{MBP} = 180^0$, lại có $\widehat{MEP} + \widehat{MAP}$; $\widehat{MBP} = \widehat{DAC}$

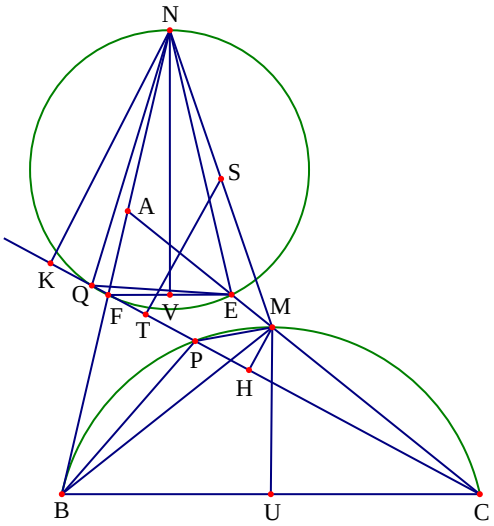
Do đó ta có $\widehat{MAP} + \widehat{DAC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{CAP} + \widehat{DAC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{DAP} = 180^0$

Mà ta có $\widehat{DAP} = 90^0$ nên ta được $\widehat{MAC} = 90^0$

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC có E, F tuộc đoạn CA và BA sao cho EF // BC. Đường trung trực của đoạn thẳng BC cắt AC tại M, đường trung trực của đoạn EF cắt cắt AB tại N. Đường tròng ngoại tiếp tam giác BCM cắt CF tại P khác C, đường trong ngoại tiếp tam giác EFN cắt CF tại Q khác F. Chứng minh rằng đường trung trực của PQ đi qua trung điểm của MN.

Lời giải

Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu của M và N trên CF. Gọi S, T, U, V theo thứ tự là trung điểm của MN, HK, BC, EF. Dễ thấy các tứ giác BCMP và NEFQ nội tiếp đường tròn.



Do đó ta được $\widehat{MPH}=\widehat{MBU}$ và $\widehat{NQK}=\widehat{VEN}$

Lại có $\widehat{MHP}=\widehat{MUB}=90^0;\ \widehat{NKQ}=\widehat{NVE}=90^0$

Suy ra $\Delta MHP\backsim\Delta MUB;\ \Delta NKQ\backsim\Delta NVE$

nên ta được $\frac{HP}{MP}=\frac{UB}{MB};\frac{KQ}{NQ}=\frac{VE}{NE}$

Để ý U, V lần lượt là trung điểm của BC và EF nên

$$\begin{cases}HP=MP.\frac{HP}{MP}=MP.\frac{UB}{MB}=\frac{BC}{2}.\frac{MP}{MB}\\ KQ=NQ.\frac{KQ}{NQ}=NQ.\frac{VE}{NE}=\frac{EF}{2}.\frac{NQ}{NE}\end{cases}$$

Do các tứ giác BCMP và NEFQ nội tiếp và lại có EF//BC nên ta được

$$\begin{cases}\widehat{MBP}=\widehat{MCP}=\widehat{ECF};\ \widehat{PMB}=\widehat{PCB}=\widehat{EFC}\\ \widehat{NQE}=\widehat{NFE}=\widehat{CBF};\ \widehat{QNE}=\widehat{EFC}=\widehat{BCF}\end{cases}$$

Do đó ta được $\Delta MBP\backsim\Delta FCE;\ \Delta NQE\backsim\Delta CBF$ suy ra $\frac{MP}{MB}=\frac{FE}{FC};\frac{NQ}{NE}=\frac{CB}{CF}$

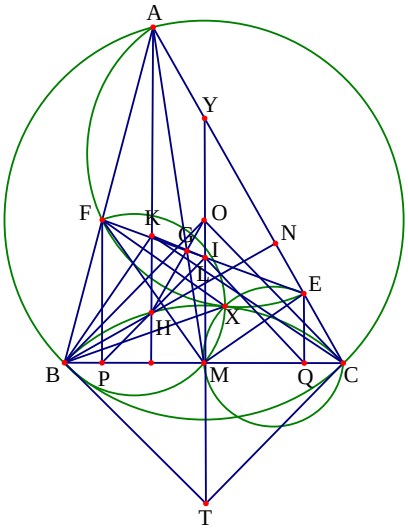
Từ đó ta được $HP=\frac{BC.EF}{2CF}=KQ$. Kết hợp với $TP=TQ$, suy ra $TH=TK$. Mà ta có MH//NK và $SM=SN$ suy ra ST//MH//NK. Điều này có nghĩa là SI là đường trung trực của QP. Từ đó ta được đường trung trực của PQ đi qua trung điểm của MN.

Ví dụ 40. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AD. Tiếp tuyến tai B và C vơia đường tròn (O) cắt nhau tại T. Trên đoạn thẳng AD lấy K sao cho $\widehat{BKC}=90^0$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, KG cắt OT tại L. Lấy các điểm P, Q thuộc đoạn BC sao cho LP//OB, LQ//OC. Các điểm E, F lần lượt thuộc đoạn AC cà AB sao cho QE và PF cùng vuông góc với BC. Gọi (T) là đường tròn tâm T đi qua B, C. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tiếp xúc với đường tròn (T).

Lời giải

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, gọi M và I lần lượt là trung điểm của BC và EF. Gọi N và Y theo thứ tự là giao điểm của BH và TO với AC, X là giao điểm của hai đường tròn ngoại

tiếp hai tam giác BMF và CME. Ta thấy G là giao điểm của OH và MA. Điểm M và I thuộc đoạn OT. Xét hai tam giác AHN và YCM có $\widehat{ANB}=\widehat{CMY}=90^0$ và $\widehat{HAN}=\widehat{MYC}$ nên $\Delta AHN\backsim\Delta YMC$



Suy ra ta được $\frac{AH}{CY}=\frac{HN}{CM}$. Lại có OM//HA và ba điểm H, G, O thẳng hàng nên theo định lí Talet ta được $\frac{KA}{KH}=\frac{LM}{LO}$

Mà LQ//CO nên theo định lí Talets ta có $\frac{LM}{LO}=\frac{QM}{QC}$

Và QE//MY nên ta được $\frac{QM}{QC}=\frac{EY}{EC}$.

Từ đó suy ra $\frac{KA}{KH}=\frac{LM}{LO}=\frac{QM}{QC}=\frac{EY}{EC}$. Do đó

$$\frac{KA+KH}{KH}=\frac{EY+EC}{EC}\Rightarrow\frac{AH}{KH}=\frac{CY}{CE}\Rightarrow\frac{AH}{CY}=\frac{KH}{CE}$$

Do đó ta được $\frac{AH}{CY}=\frac{HN}{CM}=\frac{KH}{CE}$, từ đó ta được $\Delta KHN\backsim\Delta ECM$.

Mặt khác ta thấy tứ giác BKNC nội tiếp nên $\widehat{KCB}=\widehat{KHN}=\widehat{EMC}$. Tương tự ta được $\widehat{KBC}=\widehat{FMB}$.

Do đó ta có $\widehat{FME}=180^0-\widehat{FMB}-\widehat{EMC}=180^0-\widehat{KBC}-\widehat{KCB}=\widehat{BKC}=90^0$

Dễ thấy

$$\widehat{FXE}=360^0-\widehat{FXM}-\widehat{EXM}=\left(180^0-\widehat{FXM}\right)+\left(180^0-\widehat{EXM}\right)=\widehat{FBM}+\widehat{ECM}=180^0-\widehat{FAE}$$

Do đó tứ giác AFXE nội tiếp được. Lại có

$$\widehat{BXC}=360^0-\widehat{FXB}-\widehat{EXC}-\widehat{FXE}=180^0-\widehat{FMB}-\widehat{EMC}+180^0-\widehat{FXE}$$

$$=\widehat{FME}+\widehat{BAC}=90^0+\widehat{BAC}=180^0-\frac{180^0-2\widehat{BAC}}{2}=180^0-\frac{\widehat{BTC}}{2}$$

Do đó X thuộc đường tròn tâm T. Từ các kết quả trên suy ra X là một giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn (T).

Gọi X' là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn (T)

Khi đó ta có $\widehat{BXF}=\widehat{BXX'}+\widehat{FXX'}=\widehat{BCX'}+\widehat{FEX'}$

Ta lại có tứ giác BFXM nội tiếp nên suy ra $\widehat{EMF}=\widehat{EQM}=90^0$, EQ//IM và IM = IE = IF

Từ đó $\overset{\frown}{FXB}=\overset{\frown}{FMB}=\overset{\frown}{MEQ}=\overset{\frown}{EMI}=\overset{\frown}{IEM}=\overset{\frown}{IEX}+\overset{\frown}{MEX}=\overset{\frown}{FEX}+\overset{\frown}{MCX}=\overset{\frown}{FEX}+\overset{\frown}{BCX}$

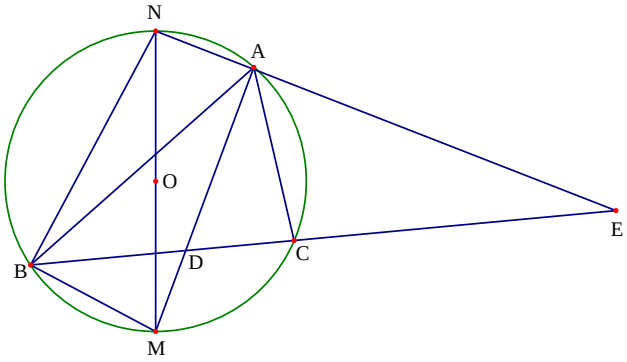
Kết hợp các kết quả lại ta được $\overset{\frown}{BCX'}+\overset{\frown}{FEX'}=\overset{\frown}{FEX}+\overset{\frown}{BCX}$, suy ra X và X' trùng nhau

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tiếp xúc với đường tròn (T).

Ví dụ 41. Cho tam giác ABC với hai đường phân giác trong và ngoài của góc $\overset{\frown}{BAC}$ lần lượt là AD và AE. Chứng minh rằng $AB.AC=BD.CD+AD^2=EB.EC-AE^2$

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tia AD cắt đường tròn (O) tại M nên M nằm chính giữa cung BC. Tia đối của tia AE cắt đường tròn (O) tại N nên N cũng nằm chính giữa cung BC. Từ đó ta được MN là đường kính của đường tròn (O). Từ đó ta được $NM\perp BC$. Xét hai tam giác AMB và ADC có $\overset{\frown}{MAB}=\overset{\frown}{DAC}$ và $\overset{\frown}{AMB}=\overset{\frown}{ACD}$



Suy ra $\Delta AMB\backsim\Delta ACD\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AM}{AC}$ nên ta được $AB.AC=AM.AD$

Từ đó ta được $AB.AC=(AB+DM)AD=AD^2+DM.AD$.

Xét hai tam giác BMD và ACD có $\overset{\frown}{MBD}=\overset{\frown}{CAD}$ và $\overset{\frown}{BDM}=\overset{\frown}{CDA}$ nên ta được $\Delta BMD\backsim\Delta ACD$

Từ đó ta được $\frac{BD}{MD}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow AD.MD=BD.CD$

Do đó ta suy ra $AB.AC=AD^2+DM.AD=AD^2+BD.CD$

Xét hai tam giác ANB và ACE có $\overset{\frown}{BAN}=\overset{\frown}{CAE}$ và $\overset{\frown}{ABN}=\overset{\frown}{AEC}=\overset{\frown}{AMN}$

Nên ta được $\Delta ANB\backsim\Delta ACE$ suy ra $\frac{AB}{AE}=\frac{AN}{AC}$

Do đó ta có $AB.AC=AN.AE=(EN-AE)AE=EN.AE-AE^2$

Xét hai tam giác EAC và EBN có $\overset{\frown}{EAC}=\overset{\frown}{EBN}$ và $\overset{\frown}{ACE}=\overset{\frown}{BNE}$ nên ta được $\Delta EAC\backsim\Delta EBN$

Từ đó ta được $\frac{AE}{EC}=\frac{EB}{EN}\Rightarrow EB.EC=EN.EA$

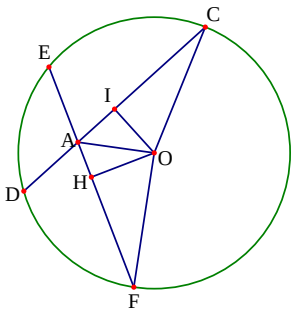
Do đó ta được $AB.AC=EN.AE-AE^2=EB.EC-EA^2$

Vậy ta được $AB.AC=BD.CD+AD^2=EB.EC-AE^2$

Ví dụ 42. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi I là tâm và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi J là tâm và r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 - 2Rr$ và $OJ^2 = R^2 + 2Rr_a$

Lời giải

Trước hết ta phát biểu bổ đề: Cho đường tròn (O; R) và một điểm A nằm trong đường tròn $(A \neq O)$. Qua A kẻ hai dây cung CD và EF, khi đó ta có $AC.AD = AE.AF = R^2 - OA^2$



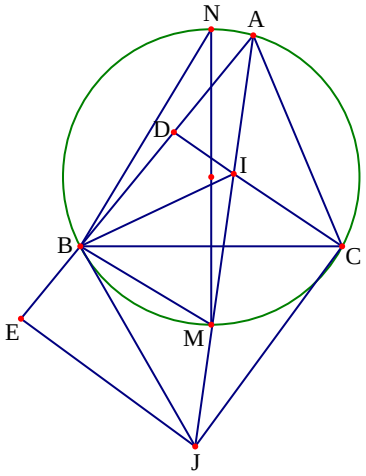
Thật vậy, Gọi I, H lần lượt là trung điểm của CD và EF, khi đó áp dụng định lí Pitago ta có

$$OA^2 = AI^2 + OI^2 = (DI - DA)(AC - IC) + (R^2 - IC^2)$$
$$= DI.AC - AD.AC - DI.CI + DA.CI + R^2 - IC^2$$
$$= ID(AC + AD) - AD.AC + R^2 - 2IC^2 = ID.CD - 2IC^2 - AC.AD + R^2$$

Để ý là $CD = 2IC$ nên ta được $OA^2 = R^2 - AC.AD$ hay $AC.AD = R^2 - OA^2$

Hoàn toàn tương tự ta được $AC.AD = AE.AF = R^2 - OA^2$

Trở lại bài toán : Ta có $\widehat{IBJ} = \widehat{ICJ} = 90^0$ nên tứ giác IBJC nội tiếp đường tròn đường kính IJ. Gọi M là trung điểm của IJ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBJC nên M là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O). Từ đó ta được $MI = MJ$.



Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của I và J trên đường thẳng AB và MN là đường kính đường tròn (O).

Xét kai tam giác vuông IAD và MNB có $\widehat{BAJ} = \widehat{BNM}$ nên ta được $\Delta IAD \backsim \Delta MNB$

Từ đó $\frac{IA}{MN} = \frac{ID}{MB}$ suy ra $IA.MB = IA.IM = ID.MN = 2Rr$

Áp dụng bổ đề cho dây cung AIM ta được $IA.IM = R^2 - OI^2$

Từ đó ta được $R^2 - OI^2 = 2Rr$ hay $R^2 - 2Rr = OI^2$

Tương tự ta có hai tam giác JAE và MNB đồng dạng nên ta được $\frac{JA}{MN}=\frac{JE}{MB}$ hay $\frac{JA}{MN}=\frac{JE}{MJ}$

Từ đó ta được $JA.MJ=JE.MN=2Rr_a$

Xét đường tròn (O) và cát tuyến ta dễ dàng chứng minh được $JA.JM=OJ^2-R^2$

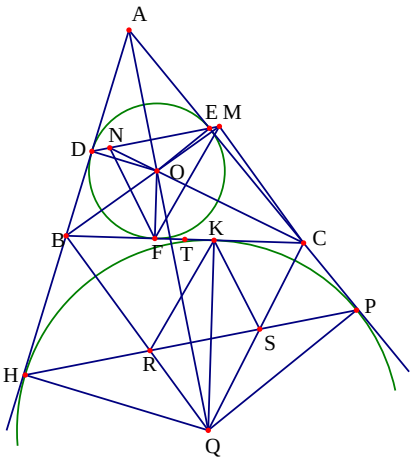
Từ đó suy ra $OJ^2-R^2=2Rr_a$ hay $OJ^2=R^2+2Rr_a$

Ví dụ 43. Cho tam giác ABC và đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, F, E. Đường trong bàng tiếp tâm Q tiếp xúc với cạnh BC, tia AB, tia AC lần lượt tại K, H, P. Đường thẳng DE cắt các tia BO và CO lần lượt tại M và N. Đường thẳng HP cắt các tia BQ và CQ lần lượt tại R và S. Chứng minh rằng

a) $\Delta FMN=\Delta KRS$ b) $\frac{SP}{AB}=\frac{SR}{BC}=\frac{RH}{CA}$

Lời giải

a) Xét trường hợp điểm M nằm ngoài và điểm N nằm trong tam giác ABC. Các trường hợp còn lại tương tự. Ta có



$$\overset{\frown}{MEC}=\overset{\frown}{AEN}=\frac{180^0-\overset{\frown}{BAC}}{2}=\overset{\frown}{OBC}+\overset{\frown}{OCB}=\overset{\frown}{MOC}$$

Nên tứ giác MCOE nội tiếp đường tròn, do đó ta được $\overset{\frown}{OEC}=\overset{\frown}{BMC}=90^0$.

Tương tự ta cũng được tứ giác CRQP nội tiếp đường tròn nên ta được $\overset{\frown}{CRQ}=\overset{\frown}{CPQ}=90^0$. Mặt khác $\overset{\frown}{MBQ}=90^0$

Từ đó ta được tứ giác MBRC là hình chữ nhật.

Gọi T là trung điểm của BC. Ta có M và R đối xứng với nhau qua T. Tương tự N và S đối xứng với nhau qua T.

Từ tính chất của tiếp tuyến ta được $BH=AH-AB=p-(AD+BD)=CF$ trong đó p là nửa chu vi của tam giác ACB. Từ đó suy ra $BF=CK$

Do đó ta được $TF=TK$ hay K và F đối xứng với nhau qua T. Từ đó các tứ giác MFRK, NFSK, MNRS là các hình bình hành. Do đó ta được $\Delta FMN=\Delta KRS$

b) Ta có $\widehat{BKR}=\widehat{BHR}=\widehat{AHP}=\widehat{APH}=\widehat{CPS}$ nên tứ giác RKCP nội tiếp đường tròn.

Do đó ta được $\widehat{KRS}=\widehat{ACB}$. Hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{KSR}=\widehat{ABC}$

Từ đó suy ra $\Delta KRS\backsim\Delta ACB$ nên ta được $\frac{KS}{AB}=\frac{SR}{BC}=\frac{KR}{AC}$

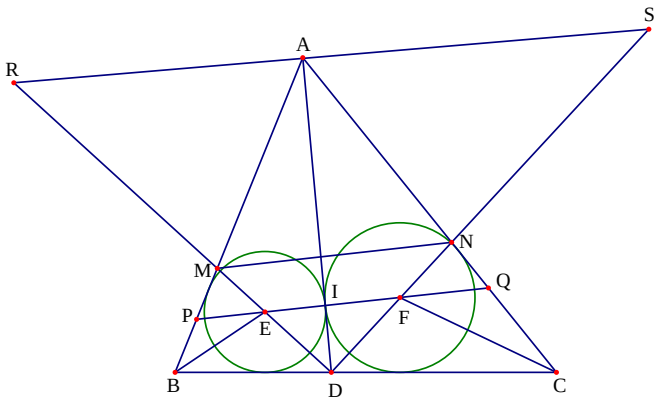
Mà ta lại có $KS=PS$ và $KR=HR$ nên suy ra $\frac{PS}{AB}=\frac{SR}{BC}=\frac{RH}{CA}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 44. Cho tam giác ABC và một điểm D trên cạnh BC(D khác B và C). Gọi E và F lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD. Chứng minh rằng nếu bốn điểm B, C E, F cùng nằm trên một đường tròn thì ta có $\frac{AD+DB}{AD+CD}=\frac{AB}{AC}$.

Phân tích và lời giải

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của DE, DF với AB, AC. Đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Gọi I là giao điểm của AD và EF. Do E và F lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD nên E và F là giao điểm các đường phân giác của hai tam giác ABD và ACD. Trước hết ta biểu diễn được các tỉ số bằng nhau có chứa $AD+BD$ và $AD+CD$. Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta được



$$\frac{AD}{BD}=\frac{AM}{BM}\Rightarrow\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AM+BM}{AM}=\frac{AB}{AM}\Rightarrow\frac{AD+BD}{AB}=\frac{AD}{AM}$$

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AN}{CN}\Rightarrow\frac{AD+DC}{AD}=\frac{AN+NC}{AN}=\frac{AC}{AN}\Rightarrow\frac{AD+DC}{AC}=\frac{AD}{AN}$$

Như vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $AM=AN$.

Thật vậy, do tứ giác BEFC nội tiếp nên ta được $\widehat{APQ}=\widehat{ABE}+\widehat{PEB}=\widehat{ABE}+\widehat{BCF}$

Từ đó ta được $\widehat{APQ}=\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)$. Hoàn toàn tương tự ta cũng được

$\widehat{AQP}=\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)$.

Như vậy tam giác APQ cân tại A nên $AP = AQ$. Qua A kẻ đường thẳng song song với PQ và cắt DM, DN làn lượt tại R, S. Ta có $\frac{EP}{EI} = \frac{AP}{AI} = \frac{AQ}{AI} = \frac{FQ}{IF}$ nên ta được $\frac{IE}{IF} = \frac{EP}{FQ}$

Theo định lí Talets ta có $\frac{IE}{IF} = \frac{AR}{AS}$. Từ đó ta được $\frac{EP}{FQ} = \frac{AR}{AS}$ nên suy ra $\frac{EP}{AR} = \frac{FQ}{AS}$.

Mặt khác ta lại có $\frac{EP}{AR} = \frac{MP}{MA}$ và $\frac{FQ}{AS} = \frac{QN}{AN}$, từ đó ta được $\frac{MP}{MA} = \frac{NQ}{NA}$ nên MN//PQ

Mà $AP = AQ$ nên suy ra $AM = AN$. Từ đó ta được $\frac{AD + DB}{AB} = \frac{AD + DC}{AC}$

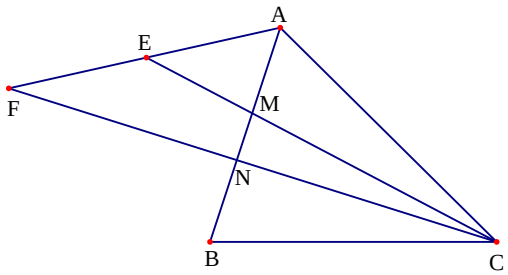
Do đó ta suy ra được $\frac{AD + DB}{AD + CD} = \frac{AB}{AC}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 45. Cho tứ giác ABCD có $AB > BC$ và ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BD với đường tròn (O). Đường thẳng qua O vuông góc với AC tại H. Chứng minh $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC và hai điểm M, N sao cho $\frac{BM.BN}{CM.CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$, khi đó $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.



Thật vậy, qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM, AN lần lượt tại E và F.

Theo định lí Talets ta có

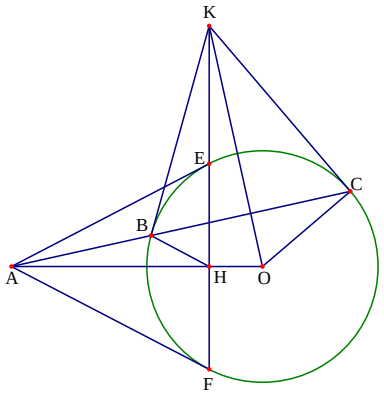
$\frac{BE}{AC} = \frac{MB}{MC}; \frac{BF}{AC} = \frac{BN}{CN}$

Từ đó ta được $\frac{BE.BF}{AC^2} = \frac{BM.BN}{CM.CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$ suy ra $\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BF}$.

Điều này dẫn đến $\Delta EAB \backsim \Delta AFB$ nên $\widehat{BFA} = \widehat{BAE}$.

Mà ta lại có $\widehat{BFA} = \widehat{CAF}$, nên từ đó ta được $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

Bổ đề 2: Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) và cát tuyến ABC. Các tiếp tuyến tại B, C với đường tròn cắt nhau tại K. AE và AF là các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A(E, F là các tiếp điểm). Khi đó ba điểm K, E, F thẳng hàng.



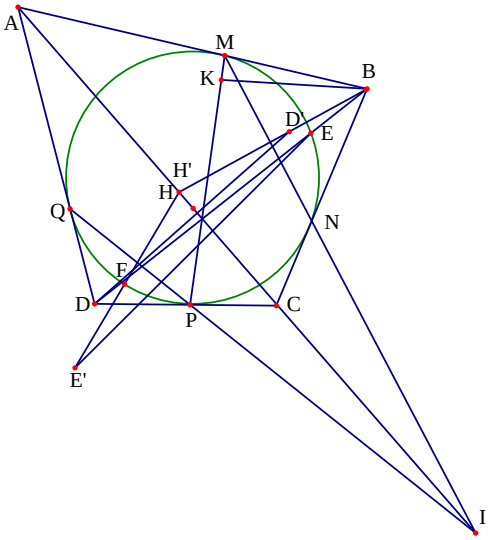
Thật vậy, dựng KH vuông góc với OA tại H. Dễ dàng chứng minh được tứ giác BHOC nội tiếp được đường tròn đường kính OK. Từ đó suy ra $AH.OA = AB.AC = AF^2$.

Gọi H' là giao điểm của EF và OA, khi đó $AH'.OA = AF^2$

Từ đó ta được hai điểm H và H' trùng nhau hay ba điểm K, E, F thẳng hàng

Trở lại bài toán: Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn với các cạnh AB, BC, CD, DA. Lấy diểm D' đối xứng với Aqua AC. Gọi giao điểm của BD' với AC là H'.

Dựng $OH \perp AC$, ta cần chứng minh hai điểm H và H' trùng nhau. Gọi S là giao điểm của MP và BD, kẻ BK//CD với K thuộc MP, khi đó ta được $\frac{BS}{DS} = \frac{BK}{DP}$



Mà ta có $\overset{\frown}{BKM} = \overset{\frown}{CPM} = \overset{\frown}{BMK}$ nên ta được $BK = BM$. Do đó ta được $\frac{BS}{DS} = \frac{BM}{DP}$.

Gọi S' là giao điểm của NQ và BD, khi đó tương tự như trên ta có $\frac{BS'}{DS'} = \frac{BN}{QD}$. Do $BM = BN$ và $DP = DQ$ nên ta được $\frac{BS}{DS} = \frac{BS'}{DS'}$, suy ra hai điểm S và S' trùng nhau. Từ đó suy ra ba đường thẳng BD, MP, NQ đồng quy tại S.

Chứng minh tương tự ta được AC, MP. NQ cũng đồng quy tại S.

Từ cách dựng điểm H' ta được H'C là tia phân giác của góc $\overset{\frown}{BH'D}$ nên suy ra $\frac{BH'}{DH'} = \frac{BS}{DS} = \frac{BM}{DP}$

Mặt khác ta có $BE.BF = BM^2, DE.DF = DP^2$, suy ra $\frac{H'B^2}{H'D^2} = \frac{BE.BF}{DE.DF}$

Áp dụng bổ đề 1 cho tam giác H'BD ta được $\widehat{BH'E} = \widehat{DH'F}$. Nên từ đó ta được $\widehat{FH'C} = \widehat{EH'C}$.

Gọi I và I' lần lượt là giao điểm của NM, PQ với AC. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC với ba điểm M, N, I và tam giác ACD với ba điểm P, Q, I' ta được

$$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CI}{AI} = \frac{AQ}{DQ}.\frac{DP}{CP}.\frac{CI'}{AI'} = 1$$

Từ đó suy ra $\frac{CI}{AI} = \frac{CI'}{AI'}$, từ đó suy ra hai điểm I và I' trùng nhau. Điều này có nghĩa là MN, AC, PQ đồng quy tại I. Giả sử tiếp tuyến với đường tròn (O) tại E, F cắt nhau tại I''. khi đó theo bổ đề 2 thì I'' thuộc MN và cũng thuộc PQ. Nên hai điểm I và I'' trùng nhau. Tứ giác HEIF nội tiếp đường tròn đường kính OI nên ta được $\widehat{EHC} = \widehat{FHC}$.

Gọi E' là điểm đối xứng với E qua AC, khi đó ta có $\begin{cases} \widehat{E'H'C} = \widehat{EH'C} = \widehat{FH'C} \\ \widehat{E'HC} = \widehat{EHC} = \widehat{FHC} \end{cases}$

Từ đó suy ra ba điểm F, E', H' thẳng hàng và F, E' H thẳng hàng.

Từ đó suy ra hai điểm H và H' thẳng hàng, kết hợp với $\widehat{BH'E} = \widehat{DH'F}$ ta được $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 56. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp cúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với các cạnh AB, BC lần lượt tại R, P, Q. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{ARK} = \widehat{CRK}$.

Lời giải

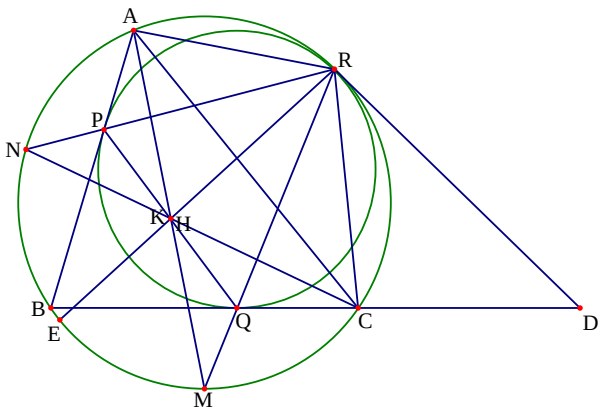
Tại R vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O), tiếp tuyến này cắt BC tại D. Khi đó dễ thấy $DR = DQ$

Từ đó ta được $DC.DB = DR^2$ nên ta được

$$\frac{DR}{DB} = \frac{DC}{DR} = \frac{DQ}{DB} = \frac{DQ - DC}{DB - DR} = \frac{QC}{QB}$$

Các tam giác RDC và có $\widehat{BDR}$ là góc chung và $\widehat{RBC} = \widehat{DRC}$ nên

$\Delta RDC \backsim \Delta BDR$



Từ đó ta được $\frac{RC}{BR}=\frac{DC}{DR}=\frac{QC}{QB}$.

Điều này chứng tỏ RM là đường phân giác của góc $\widehat{CRB}$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được RN là phân giác của góc $\widehat{ARB}$.

Gọi AM, CN lần lượt là phân giác trong của các góc $\widehat{BAC}$; $\widehat{ACB}$, khi đó giao của AM và CN là điểm K.

Xét các tam giác BQR và MCR có $\widehat{RBQ}=\widehat{RBC}=\widehat{RMC}$ và $\widehat{BRM}=\widehat{MRC}$

Suy ra ta được $\Delta BQR\backsim\Delta MCR$ nên ta được $\frac{BQ}{MC}=\frac{BR}{MR}$. Mặt khác ta lại có

$$\widehat{KCM}=\widehat{KCB}+\widehat{BCM}=\frac{1}{2}\left(\widehat{ACB}+\widehat{BAC}\right) \text{ và } \widehat{CKM}=\widehat{KAC}+\widehat{KCA}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ACB}\right)$$

Do đó suy ra $\widehat{KCM}=\widehat{CKM}$ nên tam giác KCM cân tại M. Từ đó ta được $MK=MC$, mà ta lại có $BP=BQ$. Nên kết hợp với các kết quả trên ta được $\frac{BP}{MK}=\frac{BR}{MR}$

Lại có $\widehat{PBR}=\widehat{KMR}$ nên ta được $\Delta BPR\backsim\Delta MKR$. Từ đó dẫn đến

$\widehat{PRB}=\widehat{NRB}=\widehat{KRM}=\widehat{ERM}$, nên suy ra $\overset{\frown}{BN}=\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{EM}$

Ta có $\overset{\frown}{BN}+\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EM}+\overset{\frown}{BE}$ hay $\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{EA}$. Điều này chứng tỏ điểm E nằm chính giữa cung $\overset{\frown}{ABC}$.

Do đó ta được $\widehat{ARK}=\widehat{CRK}$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 47. Cho tam giác ABC. Các đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại $A_1;B_1;C_1$. Các đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy tại N. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của N trên BC, CA, AB. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.

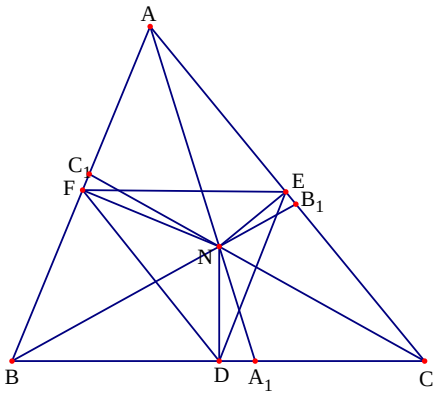
Chứng minh rằng $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{r}{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)$.

Lời giải

Đặt $AB=c;\ BC=a;\ CA=b$ và $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. Khi đó theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau ta tính được

$BA_1=AB_1=p-c;\ CA_1=AC_1=p-b;\ BC_1=CB_1=p-a$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABA_1 với ba điểm $C_1;N;C$ thẳng hàng ta được



$$\frac{C_1A}{C_1B}.\frac{CB}{CA_1}.\frac{NA_1}{NA}=1\Rightarrow\left(\frac{p-b}{p-a}\right).\frac{a}{p-b}.\frac{NA_1}{NA}=1$$

Từ đó ta được $\dfrac{NA_1}{NA}=\dfrac{p-a}{a}\Rightarrow\dfrac{NA_1}{AA_1}=\dfrac{p-a}{p}$. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC, khi đó AH//ND nên theo định lí Talets ta được

$$\frac{ND}{AH}=\frac{NA_1}{AA_1}=\frac{p-a}{p}\Rightarrow ND=\frac{AH.(p-a)}{p}=\frac{2S_{ABC}(p-a)}{a.p}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $NE=\dfrac{2S_{ABC}.(p-b)}{bp}$; $NF=\dfrac{2S_{ABC}(p-c)}{cp}$.

Từ đó $S_{NDE}=\dfrac{1}{2}ND.NE.\sin\left(180^0-\widehat{DNE}\right)=\dfrac{1}{2}ND.NE.\sin\widehat{ACB}=\dfrac{2S^2(p-a)(p-b)}{abp^2}.\sin\widehat{ACB}$

Do đó suy ra

$$\frac{S_{DNE}}{S_{ABC}}=\frac{2S^2(p-a)(p-b)\sin\widehat{ACB}}{abp^2}.\frac{2}{ab.\sin\widehat{ACB}}=\frac{16S^2}{a^2b^2c^2}.\frac{(p-a)(p-b)c^2}{4p^2}=\frac{(p-a)(p-b)c^2}{4R^2p^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $\dfrac{S_{DNF}}{S_{ABC}}=\dfrac{(p-c)(p-a)b^2}{4R^2p^2}$; $\dfrac{S_{ENF}}{S_{ABC}}=\dfrac{(p-b)(p-c)a^2}{4R^2p^2}$

Do đó ta được $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{(p-a)(p-b)c^2+(p-b)(p-c)a^2+(p-c)(p-a)b^2}{4R^2p^2}$

Biến đổi vế phải của đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{(p-a)(p-b)c^2+(p-b)(p-c)a^2+(p-c)(p-a)b^2}{4R^2p^2}$$

$$=\frac{(b+c-a)(c+a-b)c^2+(c+a-b)(a+b-c)a^2+(a+b-c)(b+c-a)b^2}{16R^2p^2}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)}{16R^2p^2}$$

$$=\frac{4abcp-14p(p-a)(p-b)(p-c)}{16R^2p^2}=\frac{16S_{ABC}.R.p-16S_{ABC}^2}{16R^2p^2}=\frac{p^2.R.r-p^2.r^2}{16R^2p^2}=\frac{r}{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

Do đó ta thu được $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{r}{R}\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 48. Giả sử M, N là các điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{NAC};\widehat{MBA}=\widehat{NBC}$. Chứng minh rằng $\frac{AM.AN}{AB.AC}+\frac{BM.BN}{BA.BC}+\frac{CM.CN}{CA.CB}=1.$

Lời giải

Trên tia BN lấy điểm K sao cho $\widehat{BCK}=\widehat{BMA}$. Khi đó ta được $\widehat{ABM}=\widehat{KBC}$. Xét hai tam giác BMA và BCK có $\widehat{BCK}=\widehat{BMA}$ và $\widehat{ABM}=\widehat{KBC}$

Suy ra $\Delta BMA\backsim\Delta BCK$ nên ta được $\frac{AB}{BK}=\frac{BM}{BC}=\frac{AM}{KC}$ hay ta được $\frac{AB}{BM}=\frac{BK}{BC}$

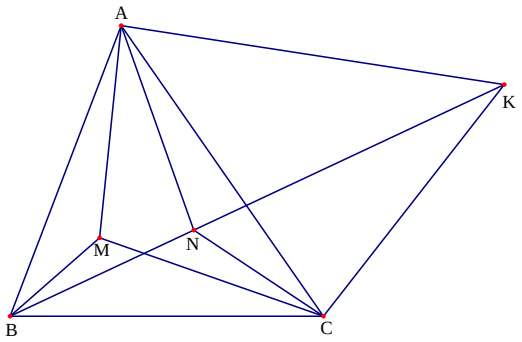
Mặt khác ta lại có

$\widehat{ABK}=\widehat{ABM}+\widehat{MBK};\widehat{MBC}=\widehat{MBK}+\widehat{KBC}$

Nên ta được $\widehat{ABK}=\widehat{MBC}$

Hai tam giác ABK và MBC có $\frac{AB}{BM}=\frac{BK}{BC}$

và $\widehat{ABK}=\widehat{MBC}$ nên đồng dạng với nhau.



Từ đó suy ra $\frac{AB}{MB}=\frac{BK}{BC}=\frac{AK}{CM}.$

Kết hợp với $\frac{AB}{BK}=\frac{BM}{BC}=\frac{AM}{KC}$ ta thu được $CK=\frac{AM.BC}{BM};AK=\frac{AB.CM}{MB};BK=\frac{AB.BC}{BC}$

Ta lại có $\widehat{MAB}=\widehat{NAC}$ và $\widehat{MAB}=\widehat{NKC}$ nên ta được $\widehat{NAC}=\widehat{NKC}$, từ đó suy ra tứ giác AKCN nội tiếp đường tròn. Khi đó áp dụng định lí Ptoleme ta được

$AC.NK=AK.NC+AN.CK$

Hay ta được $AC.\left(BK-BN\right)=AK.NC+AN.CK$

Nên suy ra $AC\left(\frac{AB.BC}{BM}-BN\right)=\frac{AB.CM}{BM}.CN+\frac{AM.BC}{BM}.AN$

Từ đó suy ra $AB.BC.AC-BN.BM.AC=AB.CM.CN+BC.AN.AN$

Chia cả hai vế cho $AB.BC.CA$ và chuyển vế ta thu được $\frac{AM.AN}{AB.AC}+\frac{BM.BN}{BA.BC}+\frac{CM.CN}{CA.CB}=1$

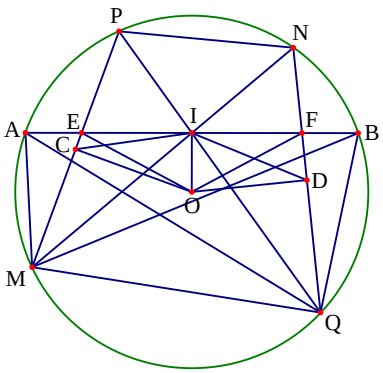
Bài toán được chứng minh xong.

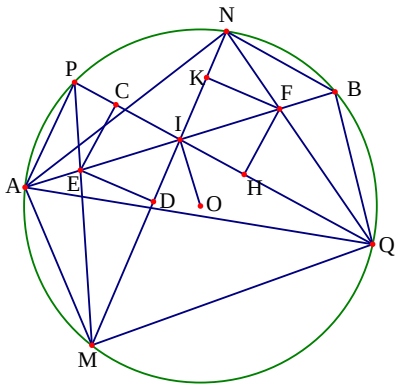
Ví dụ 49. Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB. Qua I dựng hai dây cung MN và PQ sao cho PM và NQ cắt AB lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng I là trung điểm của EF.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau đây:

+ Trường hợp 1: Các điểm E, F lần lượt nằm trên đoạn thẳng MP, NQ. Khi đó ta có các cách chứng minh sau đây.





Cách 1: Do I là trung điểm của AB nên OI vuông góc với AB. Gọi C là trung điểm của PM và D là trung điểm của NQ nên ta được $CO \perp PM;\ OD \perp NQ$.

Ta có $\widehat{MPQ} = \widehat{NMQ} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{MQ};\ \widehat{PMN} = \widehat{PQN} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{PN}$

Từ đó suy ra $\Delta PIM \backsim \Delta NIQ$ nên ta được $\frac{IP}{IN} = \frac{PM}{NQ} = \frac{2PC}{2DN} = \frac{PC}{DN}$

Hai tam giác PIC và NID có $\widehat{MPQ} = \widehat{MNQ}$ và $\frac{IP}{IN} = \frac{PC}{DN}$ nên $\Delta PIC \backsim \Delta NID$ suy ra

$\widehat{PCI} = \widehat{NDI}$

Ta lại có $\widehat{COP} = \widehat{OIA} = 90^0$. Do đó $\widehat{OCE} + \widehat{OIE} = \widehat{OCP} + \widehat{IOA} = 180^0$ nên tứ giác OCEI nội tiếp đường tròn, từ đó suy ra $\widehat{ECI} = \widehat{EOI}$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{IOF} = \widehat{IDF}$.

Kết hợp các kết quả trên ta được $\widehat{IOE} = \widehat{IOF}$.

Trong tam giác OEF có IO vuông góc với EF và $\widehat{IOE} = \widehat{IOF}$ nên suy ra OI vừa là đường cao vừa là phân giác. Do đó tam giác OEF cân tại O, nên OI cũng là đường trung tuyến ứng với cạnh EF.

Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng EF.

Cách 2. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của E trên PQ và MN. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của F trên MN và PQ. Khi đó dễ thấy $\Delta IED \backsim \Delta IFK$ nên ta được $\frac{IE}{IF} = \frac{ID}{IK} = \frac{ED}{FK}$

Tương tự $\Delta IEC \backsim \Delta IFH$ nên ta được $\frac{IE}{IF} = \frac{IC}{IH} = \frac{EC}{FH}$

Hai tam giác PEC và NFK có $\widehat{MPC} = \widehat{MNF}$ và $\widehat{NKF} = \widehat{PCE}$ nên $\Delta PEC \backsim \Delta NFK$

Do đó suy ra $\frac{PE}{NF} = \frac{EC}{FK}$. Tương tự ta cũng được $\frac{ME}{QF} = \frac{ED}{FH}$

Kết hợp các kết quả tên ta thu được $\frac{IE^2}{IF^2} = \frac{PE}{NF}.\frac{ME}{QF}$.

Lại chứng minh được $\Delta BFN \backsim \Delta QFA$ nên suy ra $\frac{BF}{QF}=\frac{FN}{FA}\Rightarrow QF.FN=BF.FA$

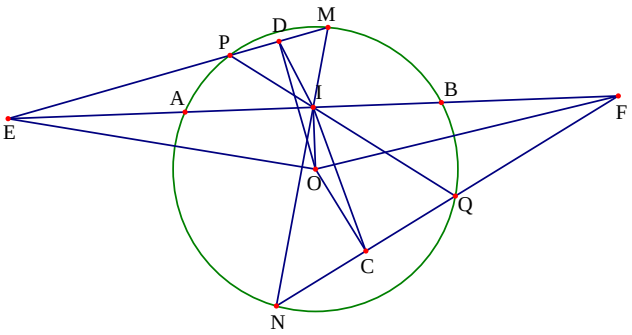
Hoàn toàn tương tự ta được $PE.ME=AE.BE$

Từ đó ta được $\frac{IE^2}{IF^2}=\frac{AE.BE}{BF.AF}=\frac{(AI-EI)(BI+IE)}{(AI+IF)(BI-IF)}=\frac{(AI-EI)(AI+IE)}{(AI+IF)(AI-IF)}=\frac{AI^2-IE^2}{AI^2-IF^2}$

Do đó thoe tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được $\frac{IE^2}{IF^2}=\frac{AI^2-IE^2}{AI^2-IF^2}=\frac{AI^2-IE^2+IE^2}{AI^2-IF^2+IF^2}=\frac{IA^2}{IA^2}=1$

Hay $IE^2=IF^2\Rightarrow IE=IF$. Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng EF.

+ Trường hợp 2: Các điểm E, F nằm ngoài các đoạn thẳng PM và QN. Khi đó gọi C, D lần lượt là hình chiếu của O trên NQ và MP.



Do đó ta được $\widehat{EDO}=\widehat{EIO}=90^0$ nên tứ giác EDIO nội tiếp đường tròn, suy ra ta được $\widehat{EOI}=\widehat{IDM}$. Lại có $\widehat{OCQ}=90^0$ nên suy ra $\widehat{OCQ}+\widehat{OIF}=180^0$ do đó tứ giác EOCF nội tiếp nên $\widehat{IOF}=\widehat{ICF}$

Ta có $\Delta IPM \backsim \Delta INQ$ nên ta được $\frac{IM}{IQ}=\frac{MP}{NQ}$

Mặt khác do $CO\perp NQ$; $DO\perp MP$ nên C, D lần lượt là trung điểm của NQ, MP.

Do đó ta được $\frac{IM}{IQ}=\frac{PM}{QN}=\frac{DM}{CQ}$, kết hợp với $\widehat{PMI}=\widehat{IQN}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{PN}$ nên $\Delta IDM \backsim \Delta ICQ$.

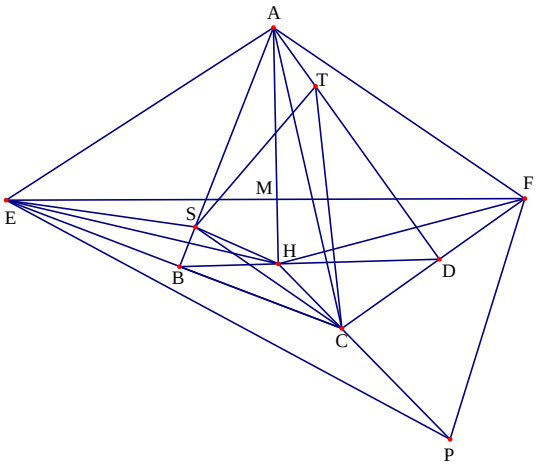
Từ đó suy ra $\widehat{ICQ}=\widehat{IDM}=\widehat{IOF}$. Kết hợp các kết quả trên ta thu được $\widehat{IOE}=\widehat{IOF}$ hay OI là phân giác của góc $\widehat{EOF}$. Mà ta lại có OI vuông góc với EF nên ta suy ra được I là trung điểm của EF.

Nhận xét: bài toán trong ví dụ trên được gọi là "Bài toán con bướm", đây là một trong các bài toán nổi tiếng và có nhiều ứng dụng trong giải toán hình học.

Ví dụ 50. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ABC}=\widehat{CDA}=90^0$. Gọi H là hình chiếu của A trên BD. Gọi S và T lần lượt là điểm nằm trên AB, AD sao cho H nằm trong ΔSCT và $\widehat{CHS}-\widehat{CSB}=90^0$; $\widehat{THC}-\widehat{DTC}=90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác TSH.

Lời giải

Gọi E và F lần lượt là điểm đối xứng với C qua B và D. Ta có $SE = SC$ do đó tam giác SCE cân tại S, suy ra ta được $\widehat{SEB} = \widehat{SCB}$.



Mà theo giả thiết $\widehat{CHS} - \widehat{CSB} = 90^0$ nên ta được $\widehat{CHS} = \widehat{CSB} + 90^0 = 180^0 - \widehat{SCB}$ suy ra tứ giác CHSE nội tiếp đường tròn. Chứng minh tương tự ta cũng được tứ giác CHTF nội tiếp.

Ta có $TF = TC;\ AE = AC = AF$

Trong tam giác CEF có BD là đường trung bình nên BD//EF, lại có $AH \perp BD$ nên $AH \perp EF$ tại M nên $ME = MF$ và $HE = HF$.

Kéo dài HC lấy P sao cho $HE = HP$, khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF.

Mà tứ giác CHSE nội tếp nên ta được $\widehat{ESC} = \widehat{EHC}$ mà hai tam giác SEC và HEP lần lượt cân tại S và H nên ta được $\Delta SEC \backsim \Delta HEP$, nên ta được $\widehat{SEH} = \widehat{CEP}$.

Do đó ta lại được $\Delta SHE \backsim \Delta CEP$. Từ đó ta được $\widehat{SHE} = \widehat{SCE} = \widehat{HPE} = \widehat{HEP}$, suy ra SH//EP.

Mà tứ giác CHTF nội tếp nên ta có $\widehat{FTC} = \widehat{CHF}$ suy ra $\Delta TCF \backsim \Delta HPF$

Do $\widehat{SHE} = \widehat{SCE}$ (cùng chắn cung SE) nên HS là phân giác ngoài của góc $\widehat{CHE}$.

Tương tự ta được HT là phân giác ngoài của góc $\widehat{CHF}$. Từ đó

$\widehat{SHT} = \widehat{SCB} + \widehat{TCD} \Rightarrow \widehat{EPF} = \widehat{SHT}$.

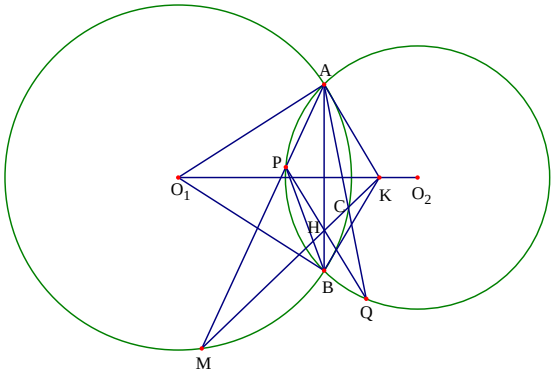
Lại có $\frac{HS}{HT} = \frac{HS}{HE}.\frac{HF}{HT} = \frac{CP}{EP}.\frac{FP}{CP} = \frac{FP}{EP}$ nên ta được $\Delta SHT \backsim \Delta FPE$, do đó $\widehat{STH} = \widehat{FEP}$

Kết hợp với BD//EF và SH//EP nên ta được $\widehat{STH} = \widehat{SHB}$. Vậy BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HST hay đường thẳng BD tiếp xúc với đường trong ngoại tiếp tam giác HST.

Ví dụ 51. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại K. Lấy điểm M trên đường tròn (O_1) không trùng với A và B. Gọi P là giao điểm thứ hai của MA với đường tròn (O_2). Gọi C là giao điểm thứ hai của MK với đường tròn (O_1). Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng CA với đườn tròn (O_2). Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng PQ nằm trên đường thẳng CM.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung lớn $\overset{\frown}{AB}$, trường hợp M thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ được chứng minh tương tự. Gọi H là giao điểm của PQ và MC. Ta cần chứng minh được $PH = QH$. Do BK là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) và KCM là cát tuyến của tương ứng nên ta dễ dàng chứng minh được $\Delta BCK \backsim \Delta MBK$ suy ra $\frac{BC}{BM} = \frac{CK}{BK}$.



Tương tự ta được $\frac{AC}{AM} = \frac{CK}{AK}$. Mà ta lại có $KA = KB$, nên từ các tỉ số trên ta có $\frac{AC}{AM} = \frac{BC}{BM}$.

Ta lại có tứ giác AMBC nội tiếp đường tròn (O_1) nên ta được $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{BCQ} \Rightarrow \overset{\frown}{PMB} = \overset{\frown}{BCQ}$

Mặt khác tứ giác AQB nội tiếp đường tròn (O_2) nên ta được $\overset{\frown}{BPM} = \overset{\frown}{AQB} \Rightarrow \overset{\frown}{BPM} = \overset{\frown}{CQB}$

Do đó ta được $\Delta BMP \backsim \Delta BCQ \Rightarrow \frac{MP}{CQ} = \frac{BM}{BC}$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác APQ với ba điểm C, M, H thẳng hàng ta được

$$\frac{CA}{CQ}.\frac{HQ}{HP}.\frac{MP}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{HP}{HQ} = \frac{AC}{AM}.\frac{MP}{CQ} = \frac{BC}{BM}.\frac{BM}{BC} = 1 \Rightarrow HP = HQ$$

Hay H là trung điểm của PQ. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 52. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường phân giác ngoài của góc $\overset{\frown}{BHC}$ cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của góc $\overset{\frown}{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại K. Chứng minh rằng KH đi qua trung điểm của đoạn BC.

Lời giải

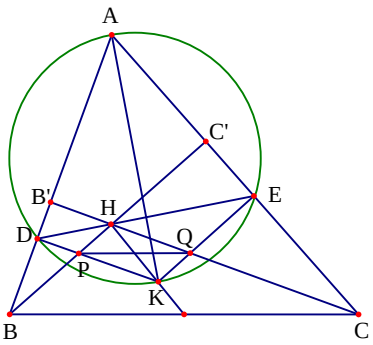
Trước hết ta chứng minh tam giác ADE cân tại A.

Thật vậy, vì HD là phân giác ngoài của góc $\overset{\frown}{BHC}$ nên ta có

$$\overset{\frown}{DHB} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{HBC} + \overset{\frown}{HCB}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(90^0 - \overset{\frown}{ABC}\right) + \left(90^0 - \overset{\frown}{ACB}\right)\right] = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC}$$

Do đó ta được

$\widehat{ADE} = \widehat{DBH} + \widehat{DHB} = 90^0 - \widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$



Tương tự ta có $\widehat{AED} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, suy ra

$\widehat{ADE} = \widehat{AED}$ hay tam giác ADE cân tại A.

Mặt khác ta có AK là phân giác của góc $\widehat{DAE}$ nên cũng là đường trung trực của đoạn DE, từ đó suy ra AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Từ đó ta có $KD \perp AB$, tương tự ta có $KE \perp AC$.

Gọi P là giao điểm của KD và HB, Q là giao điểm của KE và HC. Ta có $KP \perp AB$ và $HQ \perp AB$, từ đó suy ra KP//HQ. Tương tự ta cũng được KQ//HP, do đo tứ giác KPKQ là hình bình hành.

Gọi BB' và CC' là các đường cao của tam giác ABC, ta có DP//HC' và QE//HB'

Nên theo định lí Talet ta có $\frac{PB}{PH} = \frac{DB}{DC'}; \frac{QC}{QH} = \frac{EC}{EB'}$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{DB}{DC'} = \frac{HB}{HC'}; \frac{EC}{EB'} = \frac{DB}{HB'}$

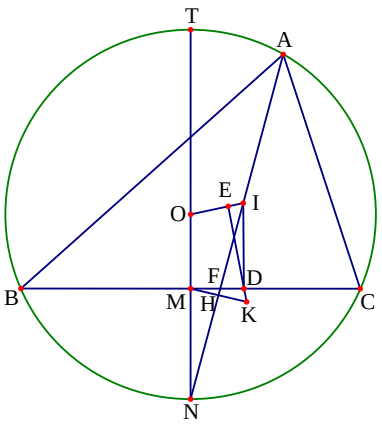
Vì B, C, B', C' cùng thuộc đường tròn đường kính BC nên ta được $\Delta BHC' \backsim \Delta CHB'$

Từ đó ta được $\frac{HB}{HC'} = \frac{HC}{HB'}$. Kết hợp với các kết quả trên ta được $\frac{PB}{PH} = \frac{QC}{QH}$, nên theo định Talet ta được PQ song song với BC. Do HK đi qua trung điểm của PQ nên HK cũng đi qua trung điểm của BC.

Ví dụ 53. Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Gọi D là hình chiếu của I trên BC, M là trung điểm của BC và K đối xứng với M qua AI. Chứng minh rằng KD vuông góc với OI.

Lời giải

Gọi giao điểm thứ hai của AI với đường tròn (O) là N, giao điểm của AI với BC là F. Gọi giao điểm thứ hai của MN với đường tròn (O) là T, khi đó NT là đường kính của đuờn tròn (O). Gọi giao điểm của MK với AN là H, giao điểm của DK với OI là E. Do M và K đối xứng với nhau qua AI nên ta được $MK = 2MH$. Xét hai tam giác vuông NMH và NFM có $\widehat{MNH}$ chung



nên ta được $\frac{MN}{MH}=\frac{FN}{FM}$.

Do đó ta được $\frac{2MN}{MK}=\frac{FN}{FM}$. Do MN//DI nên theo định lí Talet ta được

$\frac{FN}{FM}=\frac{FI}{FD}=\frac{FN+FI}{FM+FD}=\frac{NI}{MD}$

Từ đó $\frac{2MN}{MK}=\frac{NI}{MD}$ suy ra $\frac{MK}{MD}=\frac{2MN}{IN}$. Mà ta lại có $NT=2NO$, $BN=NI$ và $\widehat{NBT}=\widehat{NMB}=90^0$

Trong tam giác NBT vuông tại B có BM là đường cao nên ta được

$BN^2=MN.NT=2MN.NO$

Nên ta được $NI^2=2MN.NO\Rightarrow\frac{2MN}{NI}=\frac{NI}{NO}$

Từ đó $\frac{MK}{MD}=\frac{NI}{NO}$. Chú ý là $\widehat{KMD}=\widehat{INO}$ nên ta được $\Delta MKD\backsim\Delta NIO$

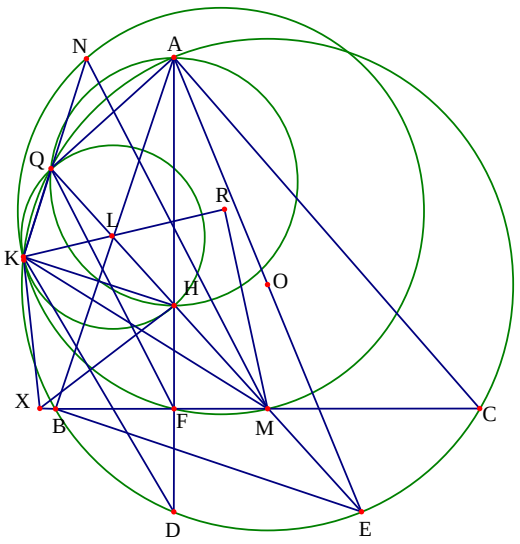
Do đó ta được $\widehat{MDE}+\widehat{MOE}=180^0-\widehat{MDK}+\widehat{NOI}=180^0$

Mà ta lại có $\widehat{DMO}=90^0$ nên ta được $\widehat{DEO}=360^0-180^0-90^0=90^0$. Vậy ta được $DK\perp OI$.

Ví dụ 54. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm của BC. Đường tròn đường kính AH cắt HM tại Q khác H. Lấy điểm X thuộc BC sao cho $XH\perp QM$. Gọi L, P lần lượt là trung điểm của QH và QA. Đường thẳng qua Q song song với LX cắt MP tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNF tiếp xúc với đường tròn đường kính QH.

Lời giải

Cách 1. Gọi AE là đường kính của đường tròn (O) và D đối xứng với H qua BC. Khi đó dễ thấy tứ giác HBEC là hình hình hành nên ba điểm H, M, E thẳng hàng. Lại có Q thuộc đường tròn đường kính AE nên ta được $\widehat{AQF}=90^0$. Mà Q lại thuộc đường tròn đường kính AH nên ta được $\widehat{QAH}=90^0$. Từ đó ta được $\widehat{AQH}=\widehat{AQF}=90^0$ nên ba điểm Q, H, E thẳng hàng. Do vậy bốn điểm Q, H, M, E thẳng hàng.



Đường tròn (X, XH) cắt đường tròn (O) tại

K khác D.

Khi đó ta có

$$\widehat{XKH} = \widehat{XHK} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{KXH}\right) = 90^0 - \widehat{KDH}$$
$$= 90^0 - \widehat{KEA} = \widehat{KAE} = \widehat{KQE}$$

Từ đó suy ra KH và KX là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHQ.

Lại có $\widehat{KQH} = \widehat{KHX} = 90^0 - \widehat{KHQ}$ nên ta được $\widehat{QKH} = 90^0$.

Do đó K thuộc đường tròn đường kính HQ nên ta có $HK \perp QH$ và $LX \perp KH$ nên ta có QK//LX//QN do đó ba điểm K, Q, N thẳng hàng. Dễ thấy hai tam giác KQH và KAE đồng dạng nên suy ra hai tam giác KQA và KHE đồng dạng. Mà ta lại có KP và KM lần lượt là hai trung tuyến của hai tam giác KQA và KHE nên ta được hai tam giác KQP và KHM đồng dạng nên ta được $\widehat{QPK} = \widehat{QMK}$ và $\widehat{QKP} = \widehat{HKM}$

Do XH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính QH nên ta có $XH \perp QH$

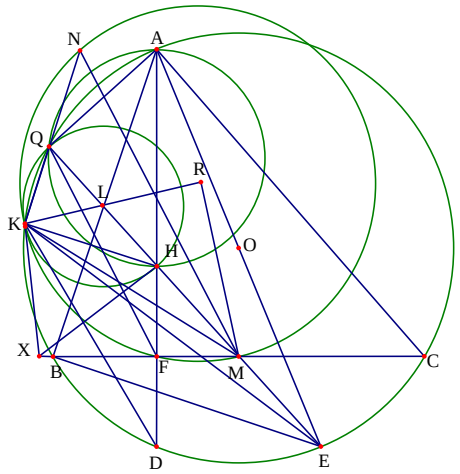
Xét tam giác XHM vuông tại H có đường cao HF nên ta có $XK^2 = XH^2 = XF.XM$

Nên XK tiếp xúc với đường tròn (R) ngoại tiếp tam giác KFM. Từ đó dẫn đến ba điểm K, L, R thẳng hàng.

Như vậy ta được $\widehat{LKQ} = \widehat{LQK} = \widehat{LPM} = 90^0 - \widehat{KHQ} = 90^0 - \widehat{PMK}$.

Khi đó suy ra $\widehat{KRM} = 2\widehat{KNM}$ suy ra N thuộc đường tròn (R), Do đó ta có đường tròn (R) ngoại tiếp tam giác MNF. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MNF tiếp xúc với đường tròn đường kính QH.

Cách 2. Gọi AE là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh tương tự như trên ta được bốn điểm Q, H, M. E thẳng hàng. Gọi đường tròn đường kính QH cắt đường tròn (O) tại K khác A. Lấy D đối xứng với H qua BC. Khi đó D thuộc đường tròn (O). Khi đó ta được QK vuông góc với KH



Dễ thấy hai tam giác KQH và KAE đồng dạng nên ta được $\widehat{KHQ} = \widehat{KEA}$. Mà $\widehat{KDH} = \widehat{KEA}$ nên $\widehat{KDH} = \widehat{KHQ}$.

Từ đó suy ra QE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD, mà lại có $XH \perp QE$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam gác KHE

nằm trên HX, mà X thuộc đường trung trực của DH nên X là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD. Từ đó suy ra $XH = XK$.

Dễ thấy XH tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác QHK nên suy ra XK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác QHK. Chứng minh tương tự cách 1 ta được ba điểm K, L, R thẳng hàng.

Nên ta được $\widehat{LKQ} = \widehat{LQK} = \widehat{LPM} = 90^0 - \widehat{KHQ} = 90^0 - \widehat{PMK}$ suy ra $\widehat{QHK} = \widehat{KMP}$

Cũng từ $HK \perp QH$ và $LX \perp KH$ nên ta có QK//LX//QN do đó ba điểm K, Q, N thẳng hàng.

Dễ thấy $\widehat{LKH} = \widehat{QHK}$, $\widehat{MKF} = \frac{1}{2}\widehat{FRM} = \frac{1}{2}\left(180^0 - 2\widehat{RMF}\right) = 90^0 - \widehat{RMF}$

Ta có biến đổi góc sau đây

$$\widehat{QKF} + \widehat{FMN} = \widehat{QKL} + \widehat{RKM} + \widehat{MKF} + \widehat{FMP} = 90^0 - \widehat{RKH} + \widehat{RKM} + \widehat{MKF} + \widehat{FMP}$$
$$= 90^0 - \widehat{KHQ} + \widehat{RMK} + 90^0 - \widehat{RMF} + \widehat{FMP} = 180^0$$

Do đó tứ giác NKFM nội tiếp, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác MNF tiếp xúc với đường tròn đường kính QH.

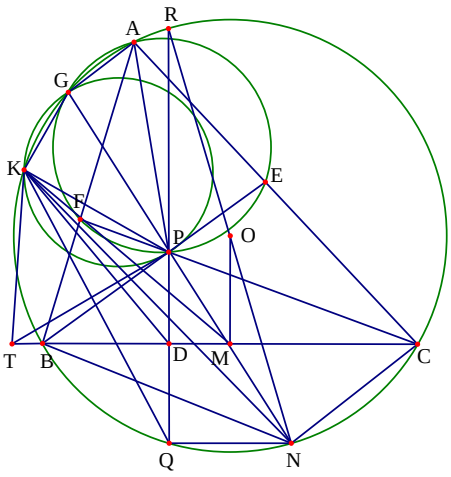
Ví dụ 55. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BPC} = 180^0 - \widehat{BAC}$. Các đường thẳng PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt đường tròn (O) lại điểm G khác A. Đường tròn đường kính PG cắt đường tròn (O) tại K khác G. Gọi D là hình chiếu của P trên BC và M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGP và KDM tiếp xúc nhau.

Lời giải

Từ $\widehat{BPC} = 180^0 - \widehat{BAC}$ suy ra $\widehat{EAF} + \widehat{EPF} = 180^0$ nên tứ giác AEPF nội tiếp đường tròn. Từ đó ta được $\widehat{FAG} = \widehat{FPG}$.

Giả sử đường thẳng GP cắt đường tròn (O) tại N khác G.

Lại có tứ giác GNBK nội tiếp đường tròn (O) nên ta được $\widehat{MNG} = \widehat{GAF}$. Khi đó $\widehat{NPC} = \widehat{FPG} = \widehat{FAG} = \widehat{BNP}$ nên ta có BN//PC. Hoàn toàn tương tự ta có CN//BP. Do đó tứ



giác BNCP là hình bình hành nên M là trung điểm của NP.

Gọi Q đối xứng với P qua điểm D, khi đó DM là đường trung bình của tam giác PQN suy ra $\widehat{PQN}=90^0$.

Lại có $OM\perp DM$ nên suy ra OM là đường trung trực của NQ, do đó Q nằm trên đường tròn (O).

Gọi NR là đường kính đường tròn (O), mà ta lại có $\widehat{PQN}=90^0$. Từ đó suy ra ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Ta có $\widehat{KPG}=90^0-\widehat{KGP}$ và $\widehat{KNR}=90^0-\widehat{KRN}$ mà ta có $\widehat{KGN}=\widehat{KRN}$ nên $\widehat{KPG}=\widehat{KNR}$

Lại có $\widehat{KQR}=\widehat{KNR}$ nên suy ra $\widehat{KPG}=\widehat{KQP}$. Từ đó GN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ.

Gọi tiếp tuyến tại K và P của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPG cắt nhau tại T.

Khi đó ta có $\widehat{KTP}=180^0-2\widehat{KGP}=2\left(90^0-\widehat{KRG}\right)=2\widehat{RNK}=2\widehat{KQP}$

Lại có $LK=TP$ nên T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ, mà BC là đường trung trực của PQ nên T thuộc BC. Suy ra TP vuông góc với GN. Trong tam giác PTM vuông tại P có PD là đường cao nên $TK^2=TP^2=TD.TM$, suy ra TK là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KDP và KDM. Do đó hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGP và KDM tiếp xúc nhau.

Ví dụ 56. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại P và Q. Gọi giao điểm của BI, CI với PQ lần lượt là K, L. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ILK tiếp xúc với đường tròn (I) khi và chỉ khi $AB+AC=3BC$

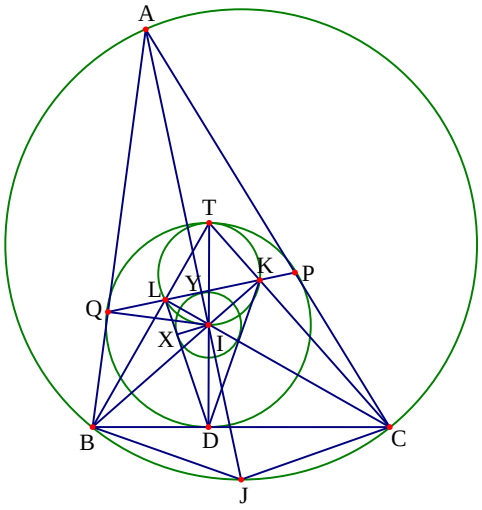
Lời giải

Gọi D là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi J là giao điểm của AI với đường tròn (O). Trước hết ta chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DKL.

Thật vậy, do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta có $\widehat{BIC}=90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Mà AP và AQ là hai tiếp tuyến của đường trò (I) nên tam giác APQ cân tại A. Từ đó ta có $\widehat{BAP}=90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Do đó suy ra $\widehat{BQL}=\widehat{BIC}$ nên tứ giác BQLI nội tiếp, nên ta được $\widehat{LQI}=\widehat{LBI}$

Mà ta có $\widehat{LQB}+\widehat{LIB}=180^0 \Rightarrow \widehat{LQI}+\widehat{LIB}=90^0$ nên ta được $\widehat{LBI}+\widehat{LIB}=90^0$. Từ đó suy ra $\widehat{BLI}=90^0$ hay BL vuông góc với LC. Chứng minh tương tự ta cũng được BK vuông góc với KC



Gọi T là giao điểm của BL và CK, khi đó I là trực tâm của tam giác TBC. Do đó ta được D, I, T thẳng hàng.

Dễ thấy các tứ giác BLKC, MLID và CKID nội tiếp nên ta có

$\widehat{KBL}=\widehat{KCL};\ \widehat{LBI}=\widehat{LDI};\ \widehat{KCI}=\widehat{KDI}$

Từ đó suy ra $\widehat{LDI}=\widehat{KDI}$ nên DI là phân giác của góc $\widehat{LDK}$. Hoàn toàn tương tự ta cũng được LI là phân giác của góc $\widehat{KLD}$. Do đó I là tam đường tròn nội tiếp tam giác DKL.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL tiếp xúc với đường tròn (I) khi và chỉ khi $R_{(IKL)}=\frac{r}{2}$ với r là bán kính đường tròn (I) và $R_{(IKL)}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ILK.

Kẻ IX vuông góc với LD tại X, IY vuông góc với PQ tại Y.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta ILK \backsim \Delta IBC$ nên ta được $\frac{R_{(ILK)}}{R_{(IBC)}}=\frac{IY}{ID}=\frac{IX}{ID}=\sin\widehat{IDX}=\sin\frac{\widehat{A}}{2}$

Hay $\frac{R_{(ILK)}}{IJ}=\frac{IP}{IA}=\frac{r}{AI}$. Từ đó suy ra $R_{(IKL)}=\frac{r}{2}$ khi và chỉ khi $IA=2IJ \Leftrightarrow JA=3JB=3JC$ (*)

Do tứ giác ABJC nội tiếp dường tròn (O) nên áp dụng định lí Ptoleme ta được

$$AI.BC=AB.JC+AC.JB=\left(AB+AC\right).JB$$

Kết hợp với (*) ta được $AB+AC=3BC$. Vậy bài toán được chứng minh.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho P là một điểm nằm trong tam giác ABC $(CA \neq CB)$. Các tia AP, BP, CP cắt đường tròn ngoại tiếp Γ của tam giác ABC lần lượt tại các điểm K, L, M. Tiếp tuyến tại C của đường tròn Γ cắt đường thẳng AB tại S. Chứng minh rằng nếu $SC = SP$ thì $MK = ML$.

Bài 2. Xét năm điểm A, B, C, D và E sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành và BCED là một tứ giác nội tiếp. Cho l là một đường thẳng đi qua A. Giả sử rằng l cắt miền trong của đoạn thẳng DC tại F và cắt đường thẳng BC tại G. Cũng giả sử rằng $EF = EG = EC$. Chứng minh rằng l là phân giác của góc $\widehat{DAB}$.

Bài 3. Cho ABCD là một tứ giác lồi với hai cạnh BC và DA bằng nhau nhưng không song song. Lấy hai điểm E và F lần lượt nằm trên BC và DA sao cho $BE = DF$. Hai đường chéo AC và BD giao nhau tại P. Các đường thẳng BD và EF giao nhau tại Q, hai đường thẳng EF và AC giao nhau tại R. Xét mọi tam giác PQR khi E và F thay đổi. Chứng minh rằng những đường tròn ngoại tiếp các tam giác này có một điểm chung khác ngoài điểm P.

Bài 4. Cho tứ giác lồi ABCD với đường chéo BD không phải là phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và góc $\widehat{CDA}$. Một điểm P nằm trong tứ giác sao cho $\widehat{PBC} = \widehat{DBA}$ và $\widehat{PDC} = \widehat{BDA}$. Chứng minh rằng ABCD là một tứ giác nội tiếp nếu và chỉ nếu $AP = CP$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Lấy điểm A trên nửa vòng (O) sao cho $\widehat{AOC} > 60^0$. Gọi EF là trung trực của AO, D là trung điểm cung AB. Kẻ đường thẳng qua O song song với AD gặp AC tại J. Chứng minh J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác CEF.

Bài 6. Cho hai đường tròn cắt nhau tại M và N với AB là tiếp tuyến chung gần điểm M. Qua M vẽ một cát tuyến song song với AB cắt hai vòng trên tại C và D. AN và BN cắt CD tại P và Q; CA và DB giao nhau tại E. Chứng minh rằng $PE = QE$.

Bài 7. Tam giác ABC có góc A nhỏ nhất. Hai điểm B và C chia đường tròn ngoại tiếp thành hai cung. Điểm U trên cung BC không chứa A. Trung trực của AB và AC cắt AU lần lượt tại V và W. BV cắt CW tại T. Chứng minh rằng $AU = TB + TC$.

Bài 8. Vẽ đường tròn tâm O bất kì đi qua hai đỉnh A, C của tam giác ABC và cắt hai cạnh AB, BC theo thứ tự tại K, N. Các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và KBN cắt nhau tại B và M. Chứng minh rằng $\widehat{OMB} = 90^0$.

Bài 9. Một đường tròn có tâm O trên cạnh AB của một tứ giác nội tiếp ABCD. Ba cạnh còn lại tiếp xúc với đường tròn. Chứng minh rằng $AD + BC = AB$.

Bài 10. Cho tứ giác lồi nội tiếp ABCD có đường tròn nội tiếp tâm I. Gọi P là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $\frac{AP}{CP} = \frac{AI^2}{CI^2}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Đường tròn này tiếp xúc với AB, AC , BC lần lượt tại K, M, L. Giả sử LM cắt BJ tại F, KM cắt CJ lại G. Gọi S, T lần lượt là giao điểm của AF, AG với BC. Chứng minh rằng M là trung điểm của ST

Bài 12. Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I và nội tiếp đường tròn tâm O. Giả sử M là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc với BC tại D. Đường thẳng MD cắt đừng tròn (I) tại điểm thứ hai là P. Dường thẳng qua I vuông góc với MD cắt BC tại N. Đường thẳng NR, NS tiếp xúc với đường tròn (O) lần lượt tại R và S. Chứng minh rằng bốn điểm R, P, D, S cùng thuộc một đường tròn.

Bài 13. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn tâm O và điểm D nằm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng AC. Chứng minh rằng $CE = \frac{AB + AC}{2}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} > 90^0$ nội tiếp đường tròn (O). Trên tia AB lấy điểm D sao cho $\widehat{ACD} = 90^0$. Giả sử d là đường thẳng qua D và vuông góc với AO. Gọi E là giao điểm của d với đường thẳng CA và F là giao điểm của (O) với đường thẳng d(F nằm giữa D và E). Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF và CDF tiếp xúc nhau tại F.

Bài 15. Cho tam giác ABC nhọn có D là hình chiếu của A trên BC, M là trung điểm của BC và H là trực tâm tam giác ABC. Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác

ABC với tia MH và F là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với tia ED. Chứng minh rằng $\frac{BF}{CF}=\frac{AB}{AC}$.

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn điều kiện $AB>BC$ và $AC>BC$. Gọi O và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt đường thẳng AB tại M và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH cắt AC tại N. Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH nằm trên đường thẳng HO.

Bài 17. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=60^0$ và $AB>AC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{AHI}=\frac{3}{2}\widehat{ABC}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}$ lớn nhất. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lấy D và E lần lượt là điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{ABC}$ và $\overset{\frown}{ACB}$. Đường tròn C_1 đi qua A, B và tiếp xúc với AC tại A. Đường tròn C_2 đi qua A, E và tiếp xúc với AD tại A. Hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là P. Chứng minh rằng AP là phân giác của góc $\widehat{BAC}$

Bài 19. Cho tam ABC và hai điểm M, N lần lượt trên hai cạnh AB, AC sao cho $MB=BC=CN$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nôi tiếp tam giác ABC. Tính tỉ số $\frac{MN}{BC}$ theo R và r.

Bài 20. Cho A, B là hai điểm khác nhau trên đường tròn (O) và P trung điểm của đoạn thẳng AB. Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc với AB tại P và tiếp xúc với đường trò (O). Tiếp tuyến d khác đường thẳng AB của đường tròn (O_1) đi qua A, Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C khác A. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với đường thẳng BC tại Q và tiếp xúc với đường thẳng AC. Chứng minh rằng hai đường tròn (O_1) và (O) tiếp xúc với nhau.

Bài 21. Cho tam giác ABC có $AB+AC=3BC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Gọi T là một điểm đối xứng với D qua I. Các đường thẳng BT và CT cắt

cạnh AC, AB lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác TMN nằm trên AI.

Bài 22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB+BC=2BC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M_b, M_c lần lượt là trung tuyến của CA và AB. Giao điểm của M_bM_c và EF là L. Chứng minh rằng đường tròn (L, LI) tiếp xúc với các đường tròn (I) và đường tròn đường kính AO.

Bài 23. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm P bất kì trên cung BC khong chứa A(không trùng với điểm B và C). Tia AP cắt BC tại D. Lấy điểm Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt đường tròn (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt đường tròn (O) tại K khác G. Đường thẳng GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Đường thẳng KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm của AG.

Bài 24. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm P bất kì trên cung BC khong chứa A(không trùng với điểm B và C). Tia AP cắt BC tại D. Lấy điểm Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt đường tròn (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt đường tròn (O) tại K khác G. Đường thẳng GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KGQ và KDM tiếp xúc với nhau.

Bài 25. Cho tam giác ABC có đường phân giác BE. Đường tròn qua A, B tiếp xúc với AC cắt BC tại điểm D khác B. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD. Đường thẳng EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L. Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 26. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt BC tại P. Qua D vẽ đường thẳng song song với EF cắt AC tại Q và cắt AB tại M. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQM di qua trung điểm của BC.

Bài 27. Cho tứ giác ABCD. Trên các đường thẳng BC và AD lấy lần lượt các điểm E và F sao cho AE//CD và CF//AB. Chứng minh rằng tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi tứ giác AECF ngoại tiếp đường tròn.

Bài 28. Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm E trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD sao cho hai điểm E và A khác phía so với BC. Một đường thẳng d đi qua A cắt DC tại F(F nằm giữa C và D) và cắt đường thẳng BC tại K. Giả sử ta có $EF = EK = EC$. Chứng minh rằng là đường phân giác của góc $\widehat{DAB}$.

Bài 29. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường so AH. Gọi Q, I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH. Gọi R là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng hai đường thẳng AQ và IJ vuông góc với nhau tại K và $KI.KJ = \dfrac{R^2.AH}{BC}$.

Bài 30. Gọi M là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC. Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AC và F là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB. Biết tam giác MEF là tam giác đều. Tính tỉ số $\dfrac{TK}{R}$ với T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và K là giao điểm thứ hai của tia AT với đường tròn bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 31. Từ điểm M trên đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt BC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng $BP^2 + PQ^2 + QC^2 = \dfrac{a^2}{2}$

Bài 32. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA tiếp xúc với BD lần lượt tại H, K, M, N. Chứng minh rằng $HM = KN$ khi và chỉ khi tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn.

Bài 33. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ điểm A, B, C dựng các tiếp tuyến với đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt hai tiếp tuyến còn lại tại M, N. Hạ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh rằng HA là phân giác của góc $\widehat{MHN}$

Bài 34. Cho tứ giác ABCD không phải là hình thang nội tiếp đường tròn (O) và hai tam giác ABD, ACD nhọn. Gọi E, F lần lượt là trực tâm của các tam giác ABD, ACD. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên đoạn thẳng BE, CF(khác với các đầu mút của đoạn thẳng) sao cho $BM = CN$. Khi đó tứ giác AMND có thể nội tiếp đường trong được không.

Bài 35. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm (O) đồng thời lại ngoại tiếp một đường tròn khác (O'). Gọi N, P, Q, M lần lượt là các tiếp điểm của đường trong (O') với các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $MP \perp NQ$.

Bài 36. Cho tam giác ABC có $AB = AC$, đường cao AH và phân giác AD. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHC, biết $\widehat{BDI} = 45^0$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

Bài 37. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O, r) và M là trung điểm của BC. Gọi giao điểm của đường cao AH và MO là I. Chứng minh rằng $AI = r$.

Bài 38. Cho tam giác ABC không cân tại A và có các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ là các góc nhọn. Xét điểm D di động trên cạnh BC sao cho D không trùng với B, C và hình chiếu của A trên BC. Đường thẳng d vuông góc với BC tại D cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F. Gọi (N) và (P) lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác BDE, CDF. Chứng minh rằng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi tiếp tuyến chung khác d của hai đường tròn (N) và (P) đi qua điểm A.

Bài 39. Cho tam giác ABC không cân tại A và có các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ là các góc nhọn. Xét điểm D di động trên cạnh BC sao cho D không trùng với B, C và hình chiếu của A trên BC. Đường thẳng d vuông góc với BC tại D cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F. Gọi M, N, P lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BDE, CDF. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi tiếp tuyến chung khác d của hai đường tròn (N) và (P) đi qua điểm A.

Bài 40. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm của BC. Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt đường tròn (O) tại K khác Q. Đường thẳng KQ cắt dường tròn ngoại tiếp tam giác KFM tại N khác K. Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm của AQ.

Bài 41. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, trung tuyến AO có độ dài bằng độ dài cạnh BC. Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC thứ tự tại M, N (M khác B, N khác C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng AO lần lượt tại I và K. Chứng minh tứ giác BOIM nội tiếp được một đường tròn và tứ giác BICK là hình bình hành.

Bài 42. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R), M là một điểm bất kì trên cung nhỏ BC (M khác B, C). Đường tròn (O'; R') tiếp xúc trong với đường tròn (O; R) tại điểm M (với $R' < R$). Các đoạn thẳng MA, MB, MC lần lượt cắt đường tròn (O'; R') tại điểm thứ hai

là D, E, F. Từ A, B, C kẻ các tiếp tuyến AI, BJ, CK với đường tròn (O'; R') trong đó I, J, K là các tiếp điểm. Chứng minh DE // AB và AI = BJ + CK.

Bài 43. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại T. Các điểm A và E nằm trên đường tròn (O_1). Các đường thẳng AB, DE tiếp xúc với đường tròn (O_2) lần lượt tại B, D. Gọi P là giao điểm của AE và BD. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AT}=\frac{ED}{ET}$ và $\widehat{ATP}+\widehat{ETP}=180^0$

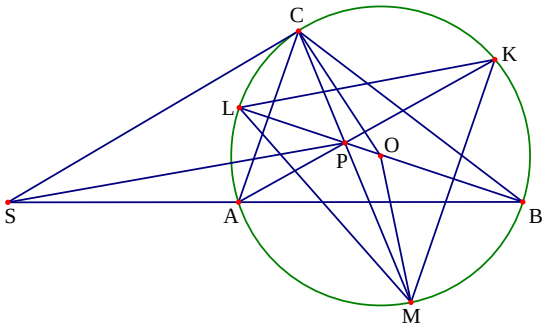
Bài 44. Cho hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại A và B sao cho OA vuông góc với O'A, OO' cắt hai đường tròn tại C, E, D, F sao cho các điểm C, O, E, D, E, O', F nằm trên đường thẳng theo thứ tự đó. BE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CA tại M. BD cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là L và cắt AF tại N. Chứng minh rằng: $\frac{KE}{KM}.\frac{LN}{LD}=\frac{O'E}{OD}$

Bài 45. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC'. Gọi D, E, F lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp trong các góc $\widehat{B'AC'}$, $\widehat{C'A'B}$, $\widehat{B'A'C}$ của các tam giác AB'C', BC'A', CA'B' tương ứng. Đường tròn bàng tiếp trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là trực tâm tam giác MNP.

Bài 46. Tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Đường tròn đi qua H với tâm là trung điểm của BC giao với đường BC tại A_1 và A_2. Tương tự, đường tròn đi qua H với tâm là trung điểm của CA giao với đường CA tại B_1 và B_2, đường tròn qua H với tâm là trung điểm của AB giao với đường AB tại C_1 và C_2. Chứng minh rằng $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Gọi O là tâm của đường tròn Γ, vì SC là tiếp tuyến của (O) nên



$$SC^2 = SA.SB \Rightarrow SP^2 = SA.SB \Rightarrow \frac{SP}{SA} = \frac{SB}{SP}$$

Do đó $\Delta SAP \backsim \Delta SPB \Rightarrow \widehat{SAP} = \widehat{SPB}$

$\Rightarrow 180^0 - \widehat{SAP} = 180^0 - \widehat{SPB} \Rightarrow \widehat{SPL} = \widehat{BAP}$

Hơn nữa $\widehat{PLK} = \widehat{BAP}$ nên $\widehat{PLK} = \widehat{SPL}$.

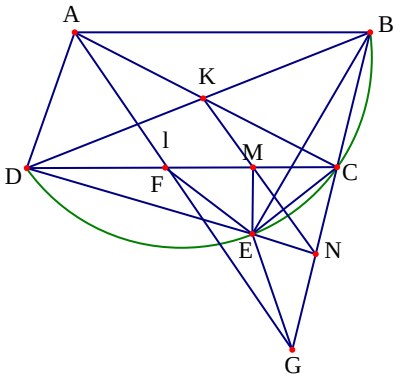
Suy ra SP // LK. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $CA < CB$.

Khi đó đặt $\widehat{PCO} = \alpha,\ 0 \le \alpha < 90^0$. Do SC vuông góc với CO nên $\widehat{PCS} = 90^0 - \alpha$.

Do $SP = SC$ nên tam giác SPC cân tại S, suy ra $\widehat{SPC} = \widehat{SCP} = 90^0 - \alpha$. Cũng do $OM = OC$ nên tam giác OMC cân tại O, suy ra $\widehat{CMO} = \widehat{MCO} = \alpha$. Gọi K, I lần lượt là giao điểm của MO và PS, MC và PS

Do đó $\widehat{SKM} = \widehat{CMO} + \widehat{MIS} = \alpha + \left(90^0 - \alpha\right) = 90^0$. Ta được $OM \perp SP$, mà SP // LK nên ta được $OM \perp LK$. Các điểm K, L, M cùng thuộc (O) nên suy ra tam giác KLM này cân tại M hay $MK = ML$.

Bài 2. Gọi K là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của CF và CG.



Khi đó ta có ta có KM // AF và MN // FG nên K, M, N thẳng hàng và song song với đường thẳng l.

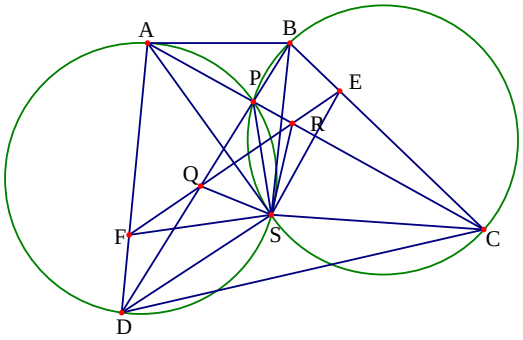
Do đó ta được $EF = EC$ nên EM vuông góc với CF và $EG = EC$ nên EN vuông góc với CG. Điểm E cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nên K, M, N là đường thẳng Simson của E đối với tam giác BCD.

Từ đó ta được EK là đường trung trực của đoạn thẳng BD.

Từ đó suy ra $\widehat{DAF}=\widehat{FGC}=\widehat{MNC}=\widehat{KEB}=\frac{1}{2}\widehat{DEB}=\frac{1}{2}\widehat{DCB}=\frac{1}{2}\widehat{DAB}$

Điều này dẫn đến l là đường phân giác của góc $\widehat{BAD}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác PAD và PBC giao nhau tại P và S. Ta sẽ chứng minh S là điểm chung khác của các đường tròn tiếp tam giác PQR khi E và F thay đổi, có nghĩa là ta cần chứng minh tứ giác PQSR nội tiếp hay ta cần chứng minh $\widehat{SQR}=\widehat{SPR}$. Từ tính chất của góc cùng chắn một cung trong hai đường tròn qua tứ giác PADS và PBCS ta có



$\widehat{ADS}=\widehat{SPC}=\widehat{SBC}$ và $\widehat{DAS}=\widehat{SPD}=\widehat{SCB}$

Theo giả thiết ta có $AD=BC$ nên ta được $\Delta ADS=\Delta CBS$ do đó $SD=SB$

Kết hợp với giả thiết $BE=DF$, ta suy ra $\Delta FDS=\Delta EBS$

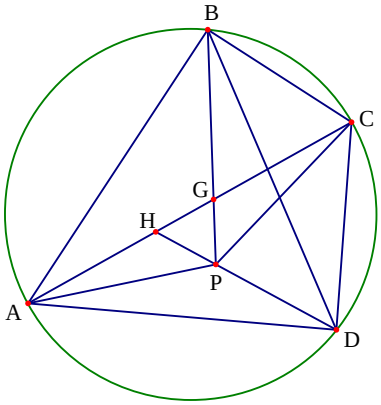
Do đó ta được $SE=SF$ và $\widehat{FSE}=\widehat{DSB}$. Suy ra hai tam giác cân FSE và DSB đồng dạng với nhau

Nên ta được $\widehat{QFS}=\widehat{QDS}$, điều này dẫn đến tứ giác QFDS nội tiếp. Từ đó ta được $\widehat{FDS}=\widehat{SQR}$, mà ta lại có $\widehat{FDS}=\widehat{SPR}$. Do đó ta được $\widehat{SQR}=\widehat{SPR}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.

+ Điều kiện cần: Nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì $AP=CP$

Kẻ đường thẳng BP và DP cắt AC lần lượt tại G và H.



Theo giả thiết $\widehat{PBC}=\widehat{DBA}$ và $\widehat{PDC}=\widehat{BDA}$ và dựa vào những góc cùng chắn cung ta có ba tam giác BAD, BGC, CHD có hai góc bằng nhau từng đôi một

nên chúng đồng dạng.

Suy ra tỷ số $\frac{GC}{BC}=\frac{AD}{BD}$ và $\widehat{BGC}=\widehat{CHD}$ nên ta giác PGH cân

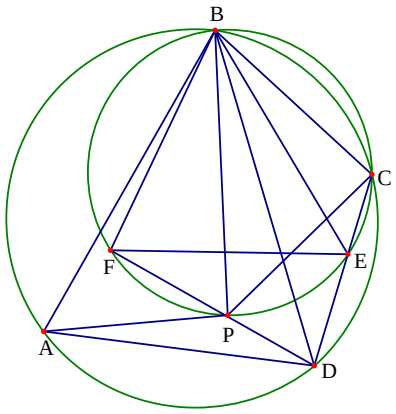
Từ đó suy ra $PG=PH$ và $\widehat{AHP}=\widehat{CGP}$.

Hoàn toàn tương tự $\Delta ADH \backsim \Delta BDC$ nên ta được

$$\frac{AH}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

Từ đó ta được $CG=AH$. Do đó suy ra $\Delta AHP=\Delta CGP$ nên $AP=CP$.

+ Điều kiện đủ: Nếu $AP=CP$ thì tứ giác ABCD nội tiếp



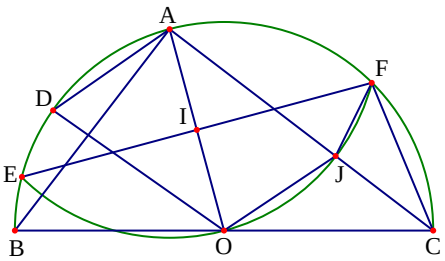
Vẽ đường tròn nội tiếp tam giác BCP cắt CD và DP lần lượt tại E và F. Theo giả thiết và dựa vào những góc cùng chắn cung ta có $\Delta ADB \backsim \Delta PDE$

Từ đó ta được $\frac{AD}{BD}=\frac{PD}{ED}$, lại có $\widehat{ADP}=\widehat{BDE}$ nên suy ra $\Delta ADP \backsim \Delta BDE$. Suy ra ta được $\frac{AP}{BE}=\frac{DP}{DE}$. Ta cũng có $\Delta DCP \backsim \Delta DFE$ nên ta suy ra $\frac{CP}{EF}=\frac{DP}{DE}$.

Từ các điều trên và theo giả thiết $AP=CP$ ta được $BE=FE$ nên ta giác BEF cân. Điều này dẫn đến $\widehat{FBE}=\widehat{BFE}$. Tứ giác nội tiếp BFEC nên ta được $\widehat{BFE}+\widehat{BCE}=180^0$.

Mà ta lại có $\widehat{BFE}=\widehat{FBE}=\widehat{EPD}=\widehat{BAD}$. Do đó ta được $\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0$. Điều này chứng tỏ tứ giác ABCD nội tiếp. Vậy tứ giác ABCD nội tiếp nếu và chỉ nếu $AP=CP$.

Bài 5. Ta có $\widehat{BOD}=\frac{1}{2}\widehat{BOA}$ và $\widehat{BCA}=\frac{1}{2}\widehat{BOA}$.

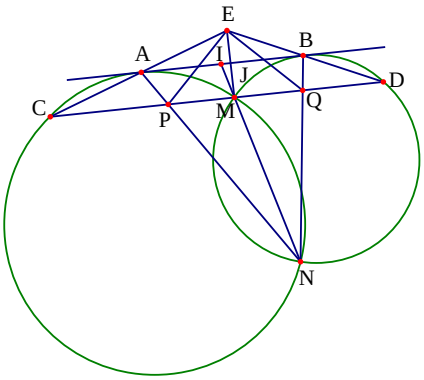


Do đó ta được $\widehat{BOD}=\widehat{BCA}$ nên ta được OD // CA. Mà ta lại có OJ // AD. Từ đó suy ra tứ giác OJAD là hình bình hành nên suy ra $AJ=OD=R$. Theo giả thiết EF là trung trực của OA nên ta có $AF=OF=R$ và $AE=OE=R$.

Nên từ đó ta được $AF = AJ = AE = AO = R$, điều này chứng tỏ tứ giác FJOE nội tiếp trong đường tròn tâm A bán kính $AO = R$. Theo trên ta có $AF = AE = R$ nên ta được $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF}$ do đó suy ra $\overset{\frown}{FCA} = \overset{\frown}{ACE}$, nên CA là đường phân giác của góc $\overset{\frown}{ECF}$ trong tam giác CEF.

Với đường tròn tâm A ta có $\overset{\frown}{EFJ} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EAJ}$. Với đường tròn tâm O ta có $\overset{\frown}{EAJ} = \overset{\frown}{EFC}$ suy ra $\overset{\frown}{EFJ} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EFC}$ nên FJ cũng là đường phân giác của góc $\overset{\frown}{CFE}$ trong tam giác CEF. Từ đó suy ra J là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác CEF, đó chính là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác CEF.

Bài 6. Theo giả thiết AB // CD ta được $\overset{\frown}{EBA} = \overset{\frown}{EDC}$. Do AB là tiếp tuyến với đường tròn Γ_2 nên ta được $\overset{\frown}{ABM} = \overset{\frown}{BDM}$



Từ đó ta được $\overset{\frown}{EBA} = \overset{\frown}{ABM}$

Chứng minh tương tự ta có $\overset{\frown}{EAB} = \overset{\frown}{BAM}$.

Do vậy ta được $\overset{\frown}{EAB} = \overset{\frown}{MAB}$ nên ta được $AE = AM$

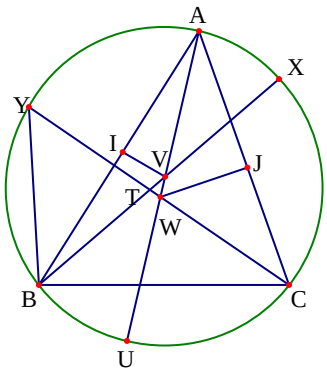
Từ đó ta được $\overset{\frown}{EAJ} = \overset{\frown}{MAJ}$ nên suy ra $\overset{\frown}{AJE} = \overset{\frown}{AJM}$

Suy ra $EM \perp AB$ nên ta được $EM \perp PQ$

Do IA là tiếp tuyến của vòng Γ_1 và IB là tiếp tuyến của vòng Γ_2 nên ta có $IA^2 = IM.IN = IB^2$

Từ đó ta được $AI = BI$ nên suy ra $MP = MQ$. Từ đó ta được tam giác EPQ có EM là đường cao và cũng là đường trung tuyến. Do đó tam giác EPQ cân, nên suy ra $EQ = EP$

Bài 7. Kéo dài BV và CW cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại X và Y. Vì JW là đường trung trực của AC nên tam giác AWC cân tại W. Từ đó ta được $\overset{\frown}{CAU} = \overset{\frown}{ACY}$, mà ta lại có $\overset{\frown}{AYC} = \overset{\frown}{CUA}$, cạnh AC chung nên hai tam giác ACY và CAU bằng nhau. Do đó ta được $AU = CY$. Từ đó suy ra $AU = CY = TY + TC$ (1)

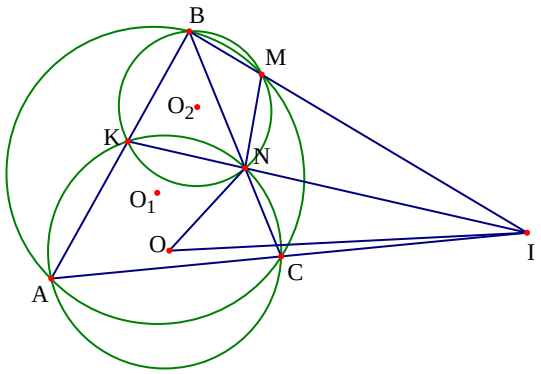


Vì IV là đường trung trực của AB (theo giả thiết) nên tam giác AVB cân tại V.

Từ đó ta được $\overset{\frown}{BAU} = \overset{\frown}{ABX}$, mà ta lại có $\overset{\frown}{CAU} = \overset{\frown}{ACY} = \overset{\frown}{ABY}$

Do đó ta được $\overset{\frown}{BAU} + \overset{\frown}{CAU} = \overset{\frown}{ABX} + \overset{\frown}{ABY}$. Nên ta được $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{XY}$, do đó suy ra $\overset{\frown}{BYC} = \overset{\frown}{YBX}$ nên tam giác YTB cân tai T. Từ đó suy ra $TY = TB$. Do đó ta được $AU = TB + TC$.

Bài 8. Gọi giao điểm của BM và AC là I. Gọi r là bán kính đường tròn tâm O, d là khoảng giữa hai điểm I và O.



Khi đó phương tích của điểm I đối với vòng tròn tâm O là $d^2 - r^2 = IO^2 - ON^2 = IC.IA = IN.IK$

Trục đẳng phương của hai đường tròn là tập hợp các điểm có phương tích bằng nhau đối với hai đường tròn đó. Nếu hai vòng tròn cắt nhau tại hai điểm thì trục đẳng phương đi qua hai điểm ấy.

Dễ thấy AC, KN, BM lần lượt là trục đẳng phương của từng cặp đường tròn (O) và (O_1), (O_1) và (O_2), (O) và (O_2). Do đó suy ra ba trục đẳng phương này đồng quy tại I.

Do vậy ta có đẳng thức $IM.IB = IN.IK = IO^2 - ON^2$ (1)

Vì $\overset{\frown}{NMI} = \overset{\frown}{NCA}$ (cùng bù với góc $\overset{\frown}{AKN}$). Do đó $\overset{\frown}{NMI} + \overset{\frown}{NCI} = 180$

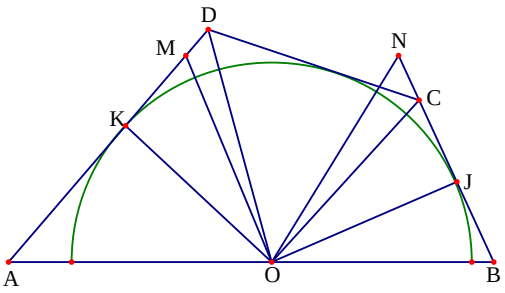
Từ đó suy ra tứ giác IMNC nội tiếp nên ta được $BM.BI = BN.BC = BO^2 - ON^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $IM.IB - BM.BI = IO^2 - BO^2 \Rightarrow IB(IM - BM) = IO^2 - BO^2$

Hay $(IM + BM)(IM - BM) = IO^2 - BO^2 \Rightarrow IM^2 - BM^2 = IO^2 - BO^2$

Điều này dẫn đến $OM \perp MB$ nên ta suy ra $\overset{\frown}{OMB} = 90^0$

Bài 9. Gọi J, K lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O) với BC và AD. Đặt $\widehat{JCO}=\alpha$ và $\widehat{KDO}=\beta$, từ đó suy ra $\widehat{BCD}=2\alpha$ và $\widehat{CDA}=2\beta$. Tứ giác nội tiếp ABCD có $\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0$. Từ đó ta được $\widehat{BAD}+2\alpha=180^0$ hay $\widehat{BAD}=180^0-2\alpha$



Lấy điểm M trên tia AD sao cho $AM=AO$ ta sẽ có tam giác MAO cân tại A,

Từ đó ta được $\widehat{AMO}=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{BAD}\right)$ nên suy ra $\widehat{KMO}=\frac{1}{2}\left[180^0-\left(180^0-2\alpha\right)\right]=\alpha$

Hai tam giác vuông OKM và OJC có $OK=OJ=R$ và $\widehat{KMO}=\widehat{JCO}=\alpha$ nên chúng bằng nhau. Từ đó suy ra $KM=JC$ (1). Lấy điểm N trên BC sao cho $BN=BO$, khi đó ta sẽ có tam giác NBO cân tại B. Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên ta sẽ có $\widehat{JNO}=\beta$ và hai tam giác vuông OKD và OJN bằng nhau. Nên ta được $KD=JN$ (2). Từ đó ta được $AO=AM=AK+KM$ và $BO=BN=BJ+JN$

Cộng theo vế và kết hợp với (1), (2) ta được $AO+BO=AK+JN+BJ+KM$

Hay suy ra $AO+BO=AK+KD+BJ+JC$ nên ta được AB = AD + BC

Bài 10. Bạn đọc tự vẽ hình

Gọi r là bán kính đường tròn tâm I. Giả sử rằng M,N,P,Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn tâm I với các cạnh AB,BC,CD,DA. Đặt $AM=AQ=x, BM=BN=y, CN=CP=z, DP=DQ=t$

Ta có $AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, CI=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$. Do đó $\frac{AI^2}{CI^2}=\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{1-\cos A}{1-\cos C}$. Sử dụng định lý cosin cho tam giác BAD ta có $\cos A=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB.AD}=\frac{(x+y)^2+(x+t)^2-BD^2}{2(x+y)(x+t)}$

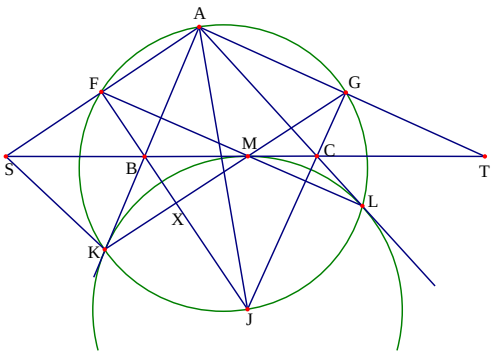
Suy ra $1-\cos A=1-\frac{(x+y)^2+(x+t)^2-BD^2}{2(x+y)(x+t)}=\frac{BD^2-(y-t)^2}{2(x+y)(x+t)}$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $1-\cos C=1-\dfrac{(z+y)^2+(z+t)^2-BD^2}{2(z+y)(z+t)}=\dfrac{BD^2-(y-t)^2}{2(z+y)(z+t)}$.

Do đó $\dfrac{AI^2}{CI^2}=\dfrac{(x+y)(x+t)}{(z+y)(z+t)}=\dfrac{AB.AD}{CB.CD}=\dfrac{2S_{ABD}}{\sin\widehat{BAD}}:\dfrac{2S_{CBD}}{\sin\widehat{BCD}}=\dfrac{S_{ABD}}{S_{CBD}}=\dfrac{AP}{CP}$

Bài 11. Ta có $KM\perp BJ$ nên KM song song với đường phân giác góc $\widehat{ABC}$. Khi đó

$$\widehat{BMK}=\frac{1}{2}\widehat{ABC};\ \widehat{FMB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}.$$



Gọi X là giao điểm của KM và FJ. Trong tam giác XMF có

$\widehat{XFM}=90^0-\widehat{FMB}-\widehat{BMK}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Các giao điểm K, M đối xứng nhau qua FJ nên ta được $\widehat{KFJ}=\widehat{JFM}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}=\widehat{KAJ}$

Do đó bốn điểm K, I, J, A cùng nằm trên một đường tròn nên ta được $\widehat{JFA}=\widehat{JKA}=90^0$.

Điều này dẫn đến KM//AS, nên tứ giác SKMA là hình thang suy ra $SM=AK$.

Hoàn toàn tương tự ta có $TM=AL$. Hơn nữa ta lại có $AK=AL$ nên ta được $SM=TM$

Bài 12. Từ cách xác định điểm P suy ra NP là tiếp tuyến của đường tròn (I). Ta xẽ chứng minh $ND=NS$ hay N thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (O). Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, ta cần chứng minh được D, M, J thẳng hàng.

Thật vậy, gọi T là điểm đối xứng với D qua I, khi đó T thuộc đường tròn (I). Gọi L là tiếp điểm của (J) với BC. Dễ thấy ba điểm A, I, J thẳng hàng, do đó ta dễ chứng minh được A, T, L thẳng hàng. Từ đó theo bổ đề hình thang ta được ba điểm L, M, I thẳng hàng.

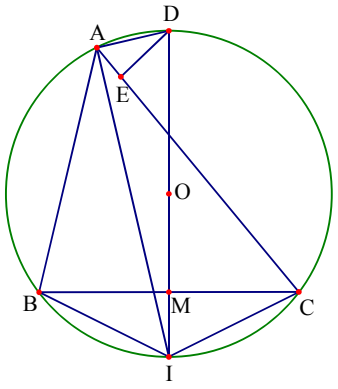
Giả sử MD cắt JL tại J'. Do AH//LJ nên theo định lí Talets ta có $\dfrac{ID}{LJ'}=\dfrac{MI}{ML}$. Mặt khác ta cũng tho định lí Talets có $\dfrac{MI}{ML}=\dfrac{AT}{AL}=\dfrac{IT}{JL}=\dfrac{ID}{JL}$ Do đó ta được $\dfrac{ID}{JL}=\dfrac{ID}{J'L}$, suy ra hai điểm J và J' trùng nhau. Từ đó ta được ba điểm M, D, J thẳng hàng.

Gọi E là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ không chứa A của đường tròn (O), khi đó ta được $EI=EB=EC$.

Lại có $\widehat{IBJ}=90^0$ nên từ đó ta được E là trung điểm của IJ. Gọi F là giao điểm của MD và IN, do ba điểm M, D, J thẳng hàng nên $JF\perp FI$. Kết hợp các điều trên ta được các điểm B, J, C,

I, F cùng thuộc một đường tròn tâm E đường kính IJ. Từ đây ta thấy do N thuộc đoạn BC nên N thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (E). Mặt khác tam giác DIN vuông nên ta lại có $NF.NI = ND^2$. Từ đó ta được phương tích của N đối với hai đường tròn (E) và (I) là bằng nhau, do đó N thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (E) và (I). Như vậy N là tâm đẳng phương của ba đường tròn (I), (O) và (E). Từ đó suy ra N thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (O). Từ đó suy ra $NP = ND = NR = NS$ hay các điểm P, D, R, S cùng nằm trên đường tròn tâm N. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 13. Gọi I là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn (O), do D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn (O) nên ID là đường kính của đường tròn (O). Xét hai tam giác ADI và ECD có



$\widehat{DAI} = \widehat{DEC} = 90^0$ và $\widehat{AID}$ chung. Suy ra

$\Delta ADI \backsim \Delta EDC$ nên ta được $\frac{CE}{AI} = \frac{CD}{ID} \Rightarrow CE = AI.\frac{CD}{ID}$ (*)

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác ABIC nội tiếp đường tròn (O) ta được $AI.BC = BI.AC + IC.AB$

Để ý là $IB = IC$ nên $AI = \frac{IB(AB + AC)}{BC}$. Thay vào (*) ta được $CE = (AB + AC).\frac{IB}{BC}.\frac{CD}{ID}$ (**)

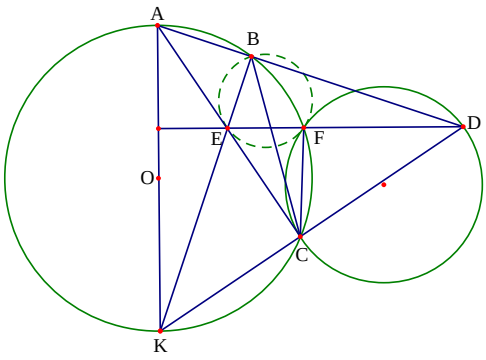
Gọi M là trung điểm của BC. Xét hai tam giác IBM và IDC có $\widehat{IBM} = \widehat{IDC}$ và

$\widehat{BMI} = \widehat{DCI} = 90^0$

Nên ta được $\Delta IBM \backsim \Delta IDC$ suy ra $\frac{IB}{BM} = \frac{ID}{CD} \Rightarrow \frac{IB}{BM}.\frac{CD}{ID} = 1 \Rightarrow \frac{IB}{BC}.\frac{CD}{ID} = \frac{1}{2}$

Từ đó ta được $CE = \frac{AB + AC}{2}$.

Bài 14. Gọi K là điểm đối xứng với A qua O, khi đó ta được $\overset{\frown}{ACK} = 90^0$, do đó ba điểm D, C, K thẳng hàng. Mặt khác do $\overset{\frown}{ABC} > 90^0$ nên tia BK sẽ nằm giữa hai tia BA và BC. Ta sẽ chứng minh KF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BEF và CDF. Thật vậy, do E là giao điểm của hai đường cao trong tam giác AKD nên E là trực tâm. Suy ra ba điểm B, E, K thẳng hàng và



$\overset{\frown}{KEF} = 180^0 - \overset{\frown}{KAD} = \overset{\frown}{KFB}$.

Từ đó ta được $\Delta KEF \backsim \Delta KFB$ nên ta được $KF^2 = KE.KB$. Mặt khác ta lại có

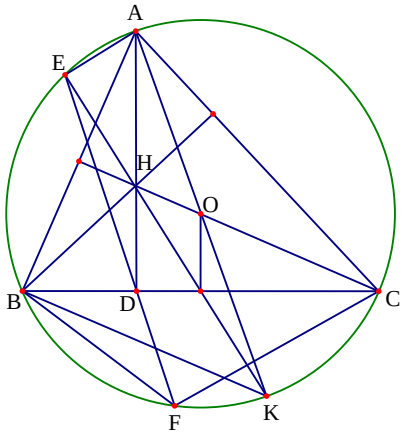
$\overset{\frown}{KFC} = \overset{\frown}{KAC} = \overset{\frown}{KDF}$

Do đó ta suy ra $\Delta KFC \backsim \Delta KDF$ nên ta được $KF^2 = KC.KD$

Từ đó ta được $KF^2 = KE.KB = KC.KD$ nên KF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF và CDF. Vậy hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF và CDF tiếp xúc nhau tại F.

Bài 15. Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC cân tai A, khi đó ta được $AB = AC$, suy ra $BF = CF$. Do đó ta luôn có $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.



+ Trường hợp 2: Tam giác ABC không cân tại A, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $AB > AC$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi AK là đường kính của đường tròn (O). Ta có

$$\overset{\frown}{BCK} = \overset{\frown}{ACK} - \overset{\frown}{ACB} = 90^0 - \overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{CBH}$$

$$\overset{\frown}{CBK} = \overset{\frown}{ABK} - \overset{\frown}{ABC} = 90^0 - \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCH}$$

Từ đó suy ra $\Delta BCK \backsim \Delta CBH$. Dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hanh nên M là trung điểm của HK, hay ba điểm M, H, K thẳng hàng. Từ đó ta có $\widehat{AEM} = \widehat{AEK} = 90^0$. Lại có $\widehat{AEM} = 90^0 = \widehat{ADM}$ nên bốn điểm A, M, E, D cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{AED} = \widehat{AEF} = \widehat{ACF}$. Mặt khác ta lại có $\widehat{ABM} = \widehat{AFC}$ nên ta được $\Delta ABM \backsim \Delta AFC$

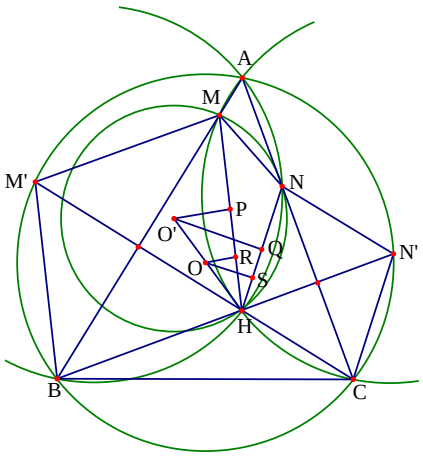
Từ đó ta được $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{FC}$, nên ta được $\frac{AM}{CM} = \frac{AB}{FB}$. Mặt khác do $BM = CM$ nên suy ra $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

Bài 16. Đặt $\widehat{BAC} = a; \widehat{ABC} = b; \widehat{ACB} = c$. Gọi O′ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH. Gọi M′ và N′ lần lượt là giao điểm của đường tròn (O) với CH và BH(M′ khác C và N′ khác B). Ta có bốn điểm A, M, H, C cùng nằm trên một đường tròn nên ta được $\widehat{MHM'} = \widehat{MAC} = a$

Hơn nữa $\widehat{BM'C} = \widehat{BN'C} = \widehat{BAC} = a$.

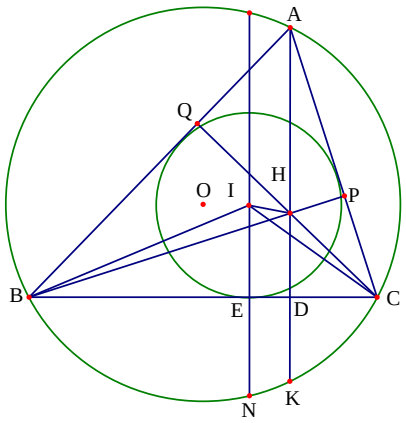
Ta cũng có $\widehat{ABH} = \widehat{ACN'}$. Từ $HM' \perp AB$ và $HN' \perp AC$ nên ta được $\widehat{M'HB} = 90^0 - \widehat{ABH} = a$

Do đó tứ giác HBM′M là hình thoi. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được tứ giác HCN′N là hình thoi. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của O′ trên HM và HN. Khi đó P và Q lần lượt là trung điểm của HM và HN. Gọi R và S lần lượt là hình chiếu của O trên HM và HN. Ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác M′BC và N′BC nên R là giao điểm của HM với đường trung trực của BM′ và S là giao điểm của HN với CN′.



Khi đó ta có $\frac{HP}{HR} = \frac{HQ}{HS}$, từ đó suy ra ba điểm H, O, O′ thẳng hàng. Vậy tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH nằm trên đường thẳng HO.

Bài 17.



Cách 1. Gọi D là giao điểm của AH và BC, gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và gọi K là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn (O). Đường thẳng qua I vuông góc với BC cắt BC và cung nhỏ BC của đường trong (O) lần lượt tại E và N. Khi đó ta có

$$\widehat{BIC}=180^0-\left(\widehat{IBC}-\widehat{ICB}\right)=180^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)$$

$$=180^0-\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{BAC}\right)=90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAC}=120^0$$

Ta cũng có $\widehat{BNC}=180^0-\widehat{BAC}=120^0=\widehat{BIC}$.

Mặt khác ta lại có IN vuông góc với BC nên ta được $IE=EN$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có $DH=DK$. Lại có $ED\perp IN$ và $ED\perp HK$. Từ đó suy ra tứ giác IHKN là hình thang cân, nên từ đó suy ra $IH=NK$. Từ đó ta được

$\widehat{AHI}=180^0-\widehat{IHK}=180-\widehat{AKN}=\widehat{ABN}$. Từ $IE=EN$ và $BE\perp IN$ ta dễ dàng suy ra được hai tam giác IBE và NBE bằng nhau.

Do đó suy ra $\widehat{NBE}=\widehat{IBE}=\widehat{IBA}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$, nên ta được $\widehat{AHI}=\widehat{ABN}=\frac{3}{2}\widehat{ABC}$

Cách 2. Gọi P, Q, D lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ các đỉnh B, C, A của tam giác ABC.

Ta cần chứng minh $\widehat{IBH}=\widehat{ICH}$ Ta có $\widehat{IBH}=\widehat{ABP}-\widehat{ABI}=30^0-\frac{1}{2}\widehat{ABC}$ và

$\widehat{ICH}=30^0-\frac{1}{2}\widehat{ABC}$

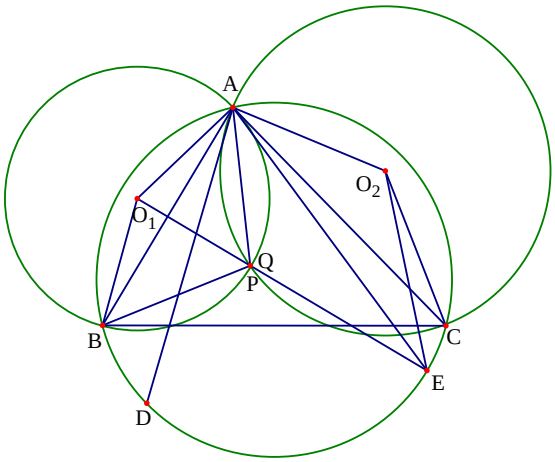
Do $\widehat{ABH}=\widehat{ACH}=30^0$ và $\widehat{ACB}+\widehat{ABC}=120^0$. Suy ra tứ giác BIHC nội tiếp đường tròn. Do đó ta được $\widehat{BHI}=\widehat{BCI}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$. Mặt khác

$\widehat{BHD}=90^0-\widehat{HBR}=90^0-\left(\widehat{ABC}-\widehat{ABH}\right)=120^0-\widehat{ABC}$

Do đó $\widehat{AHI}=180^0-\widehat{BHI}-\widehat{BHD}=60^0-\frac{1}{2}\widehat{ACB}+\widehat{ABC}=60^0-\frac{1}{2}\left(120^0-\widehat{ABC}\right)+\widehat{ABC}=\frac{3}{2}\widehat{ABC}$

Vậy ta được $\widehat{AHI}=\frac{3}{2}\widehat{ABC}$. Điều phải chứng minh.

Bài 18. Xét trường hợp tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}$, các trường hợp khác chứng minh tương tự. Giả sử O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn C_1 và C_2. Ta sẽ chứng minh các đường tròn C_1, C_2 và đường thẳng O_1E cùng đi qua điểm P.



Thật vậy, trên đoạn thẳng O_1E lấy điểm Q sao cho $BO_1 = QO_1$, suy ra điểm Q nằm trên đường tròn C_1. Do đường tròn C_1 tiếp xúc với AC tại A nên ta có $\widehat{BO_1A} = 2\widehat{BAC}$.

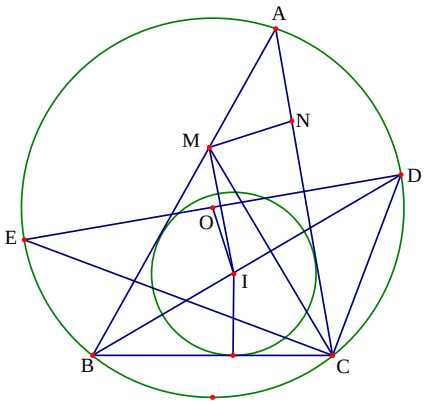
Hơn nữa do E là điểm chính giữa cung $\widehat{ACB}$ nên hai điểm E và O_1 nằm trên đường trung trực của AB. Từ đó suy ra O_1E là phân giác của góc $\widehat{BO_1A}$. Do đó suy ra $\widehat{BO_1Q} = \widehat{BAC}$.

Tam giác BO_1Q cân tại O_1 nên suy ra $\widehat{BQE} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{QO_1B} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Ta cũng có Q nằm trên đường trung trực O_1E của AB nên A và B đối xứng với nhau qua O_1E. Từ đó ta được $\widehat{AQE} = \widehat{BQE} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

Vì đường tròn (O_2) tiếp xúc với AD tại A nên ta cũng có $\widehat{AO_2E} = 2\widehat{DAE} = 180^0 - \widehat{BAC}$.

Do đó ta được $\frac{1}{2}\widehat{AO_2E} + \widehat{AQE} = \frac{1}{2}\widehat{AO_2E} + \widehat{BQE} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 180^0$ nên Q nằm trên đường tròn C_2. Từ đó ta được Q là giao điểm của hai đường tròn C_1, C_2. Từ đó suy ra hai điểm P và Q trùng nhau. Do đó ta được $\widehat{BAP} = \frac{1}{2}\widehat{BO_1P} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Vậy AP là phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Bài 19. Gọi đường tròn (O) và (I) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Gọi D là giao điểm của đường thẳng BI với đường tròn (O). Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên từ đó ta suy ra D là điểm chính giữa cung AC không chứa B. Từ đó ta được $OD \perp CN$ và $OD = R$.



Trước hết ta chứng minh hai tam giác MNC và IOD đồng dạng với nhau. Thật vậy, do $BC = BM$ nên đường phân giác BI vuông góc với CM. Do $OD \perp CN$ và $ID \perp MC$ nên $\widehat{ODI} = \widehat{NCM}$

Trong tam giác MNC có $\frac{MC}{NC} = \frac{CM}{BC} = 2\sin\frac{\widehat{BCM}}{2}$. Do $\widehat{DIC} = \frac{1}{2}\left(\hat{B} + \hat{C}\right) = \widehat{DCI}$, từ đó ta được $ID = CD = AD$.

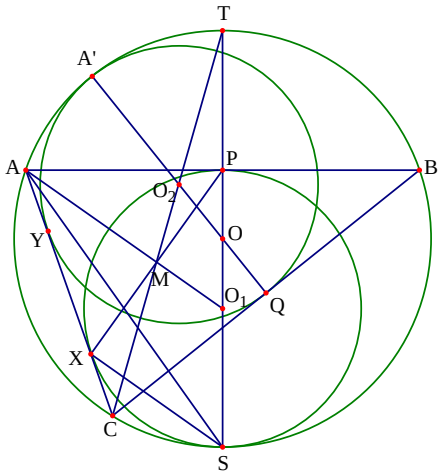
Giả sử E là giao điểm thứ hai của DO với đường tròn (O), khi đó DE là đường kính của của đường tròn (O).

Suy ra $\widehat{DEC} = \widehat{CBD} = \frac{1}{2}\widehat{BCM} = \alpha$. Từ đó ta được $\frac{DI}{DO} = \frac{CD}{OD} = \frac{2R\sin\alpha}{R} = 2\sin\alpha$

Do đó suy ra $\frac{CM}{CN} = \frac{DI}{DO}$, nên ta được $\Delta MNC \backsim \Delta IOD$. Từ đó ta có $\frac{MN}{BC} = \frac{OI}{OD} = \frac{OI}{R}$.

Theo hệ thức Ơle ta có $OI^2 = R^2 - 2Rr$ nên ta được $\frac{MN}{BC} = \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}$

Bài 20. Gọi S là tiếp điểm của hai đường tròn (O) và (O_1). Gọi giao điểm thứ hai khác S của đường thẳng SP với đường tròn (O). Gọi X là d với đường tròn (O_1). Gọi M là trung điểm của XP. Khi đó ta có $\widehat{TBP} = \widehat{ASP}$ nên suy ra $\Delta BPT \backsim \Delta ASP$. Từ đó ta được $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PS}$. Lại có $\widehat{SPX} = \widehat{PAM}$. Do đó ta có $\Delta PAM \backsim \Delta ASP$, nên



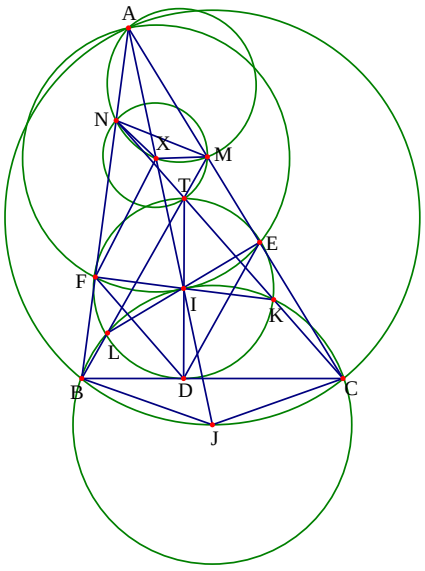
ta được $\frac{XS}{XP}=\frac{M}{MA}=\frac{XP}{2MA}$ và $\frac{XP}{SP}=\frac{MA}{PA}$

Từ các kết qua trên ta được $\frac{XS}{XP}.\frac{PT}{PB}=\frac{XP}{2MA}.\frac{PA}{PS}=\frac{XP}{2MA}.\frac{MA}{XP}=\frac{1}{2}$. Gọi A′ là giao điểm của đừng tròn (O) với đường trung trực của đoạn thẳng BC sao cho A và A′ nằm cùng một phía so với BC. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng A′Q và CT. Khi đó ta được $\widehat{NCQ}=\widehat{TCB}=\widehat{TCA}=\widehat{TBA}=\widehat{TBP}$ và $\widehat{CA'Q}=\frac{1}{2}\widehat{CBA}=\frac{1}{2}\widehat{XAP}=\widehat{PAM}=\widehat{SPX}$. Do đó ta được $\Delta NCQ\backsim\Delta TBP$. Tương tự ta cũng được $\Delta CA'Q\backsim\Delta SPX$. Từ đó suy ra $\frac{QN}{QC}=\frac{PT}{PB};\frac{QC}{QA'}=\frac{XS}{XP}$ nên ta được $QA'=2QN$. Do đó N là trung điểm của A′Q. Gọi Y là tiếp điểm của đường tròn (O_2) với AC. Khi đó $\widehat{ACN}=\widehat{ACT}=\widehat{BCT}=\widehat{QCN}$

Lại có $CY=CQ$ nên ta được $\Delta ACN=\Delta QCN$, suy ra $NY\perp AC$ và $NY=QN=NA'$

Do đó N là tâm của đường tròn (O_2) hay hai đường tròn (O_1) và (O) tiếp xúc với nhau.

Bài 21. Gọi X là trung điểm của AI. Ta sẽ chứng minh X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác TMN. Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AC và AB. Gọi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi giao điểm của AI với đường tròn (O) là J. Gọi giao điểm của ường tròn (I) với đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC là K, L sao cho K nằm giữa L và C. Do từ giác BCIL nội tiếp và TLDE nội tiếp kết hợp với tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau khi đó ta có $\widehat{BLI}=180^0-\widehat{ICB};\widehat{TLE}=\widehat{TDE}=\widehat{ICB}$. Từ đó suy ra ba điểm B, L, T thẳng hàng. Hoàn toàn tương tự ta được ba điểm C, K, L thẳng hàng. Từ đó suy ra M, N là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc B, C với AC, AB.



Ta có $\widehat{MTN}=\widehat{BTC}=\widehat{EDF}=90^0-\widehat{BAC}$. Đặt $AB=c$ và p là nửa chu vi tam giác ABC. Ta lại có

$AM=CE=p-AB$

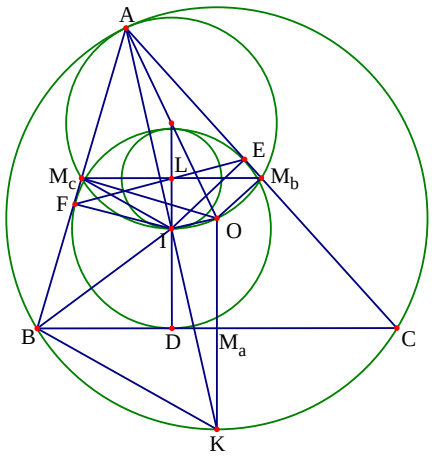
Và cũng có $NF = AB - 2BF = AB - (AB + BC - CA) = AC - BC = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = p - c$

Nên ta được $AM = NF$, từ đó suy ra $\Delta AXM = \Delta FXN$ do đó $\widehat{FNX} = \widehat{AMX}$

Từ đó suy ra tứ gác AMXN nội tiếp. Lại có AX là phân giác của góc $\widehat{MAN}$ nên $\widehat{MAX} = \widehat{NAX}$ hay $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{XN}$. Do đó ta được $XM = XN$ nên X nằm trên đường trung trực của MN.

Lại có $\widehat{NXM} = 180^0 - \widehat{BAC} = 2\widehat{MTN}$ nên X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNT

Bài 22. Gọi M_a là trung điểm của BC. Gọi giao điểm của AI với đường tròn (I) là K. Do đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC nên ta suy ra AB, BC, CA là các tiếp trên của (I).



Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau và kết hợp giả thiết ta được

$$AE = AF = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{2BC - BC}{2} = \frac{BC}{2}$$

Từ đó suy ra $AF = BM_a$. Do AK là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên K nằm chính giữa cung BC không chứa A của đường tròn (O). Nên được $\widehat{FAI} = \widehat{KBM_a}$ và $KM_a \perp BC$

Từ đó dẫn đến $\Delta AFI = \Delta BM_aK$ nên ta được

$AI = BK$

Ta lại có $\widehat{IBK} = \widehat{IBC} + \widehat{CBK} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$, $\widehat{BKI} = \widehat{ACB}$, do đó ta được

$$\widehat{BIK} = 180^0 - \left(\widehat{IBK} + \widehat{BKI}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) - \widehat{ACB}$$

$$= \widehat{BAC} + \widehat{ABC} - \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = \widehat{IBK}$$

Do đó ta được tam giác BKI cân tại K, suy ra $BK = IK$

Khi từ đó ta được $AI = BK = DI$, suy ra I là trung điểm của AK. Do đó ta được $AK \perp OI$

Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên suy ra OM_a, OM_b, OM_c lần lượt là đường trung trực của BC, CA, AB. Nên ta được $\widehat{AM_cO} = \widehat{AM_bO} = 90^0$. Từ đó suy ra M_b, M_c thuộc đường tròn đường kính AO. Lại có $\widehat{AIO} = 90^0$ nên I thuộc đường tròn đường kinh AO.

Do $IE \perp AC$, $IF \perp AB$ nên E, F nằm trên đường thẳng Simson của I đối với tam giác AM_bM_c

Từ đó suy ra $IL \perp M_bM_c$ nên ba điểm I, L, D thẳng hàng

Điều này dẫn đến ba điểm A, L, M_a thẳng hàng nên từ đó ta suy ra L là trung điểm của M_bM_c.

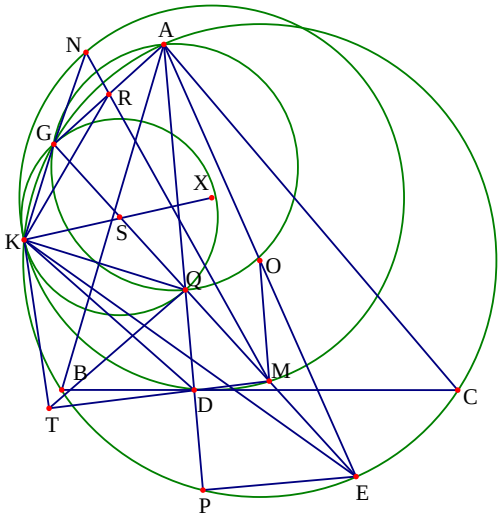
Gọi T là tâm đường tròn đường kính OA, khi đó TI đi qua trung điểm L

Từ đó hai đường tròn (L, LI) và (T) tiếp xúc với nhau.

Từ $IA = IK$ và $M_aK = ID$ ta được $LI = \dfrac{DI}{2}$ nên suy ra (L, LI) tiếp xúc với đường tròn (I)

Bài 23. Gọi GQ cắt đường tròn (O) tại E khác G. Do $\overset{\frown}{AGQ} = 90^0$ nên AE là đường kính của đường tròn (O). Do OM//AP và O là trong điểm của AM nên M là trung điểm của QS. Từ đó ta được DM//PS và cùng vuông giác với PA nên DM là trung trực của PQ. Do tứ giác AHKE nội tiếp đường tròn (O) nên ta được $\overset{\frown}{KGE} = \overset{\frown}{KAE}$. Do đó ta có $\overset{\frown}{KQG} = 90^0 - \overset{\frown}{KGQ} = 90^0 - \overset{\frown}{KAE} = \overset{\frown}{AEK} = \overset{\frown}{QPK}$

Lại có tứ giác KPEA nội tiếp đường tròn (O) nên $\overset{\frown}{KPQ} = \overset{\frown}{KEA}$ Do đó ta được $\overset{\frown}{LQG} = \overset{\frown}{KPQ}$, suy ra GS tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQP.



Gọi tiếp tuyến tại K, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác KGQ cắt nhau tại T.

Khi đó $\overset{\frown}{KTQ} = 180^0 - 2\overset{\frown}{KGQ} = 2\overset{\frown}{KQG} = 2\overset{\frown}{KPG}$ nên T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ

Mà DM là đường trung trực của PQ nên T nằm trên DM. Trong tam giác TQM vuông lại Q có QD là đường cao ta có $TK^2 = TQ^2 = TD.TM$. Từ đó suy ra TK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM. Hay TK là tiếp tuyến chung của hai

đường tròn ngoại tiếp tam giác KGQ và

KDM với tiếp điểm là K

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác KGQ và KDM tiếp xúc với nhau tại K.

Gọi S, X lần lượt ta tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác GKQ và KMD, khi đó K, S, X thẳng hàng.

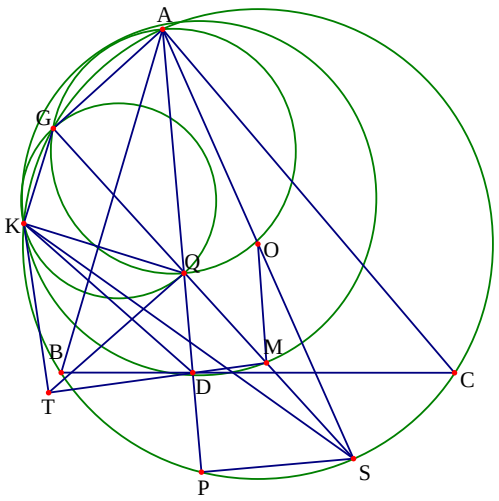
Dễ thấy hai tam giác vuông KGQ và KAE đồng dạng với nhau từ đó suy ra hai tam giác KGA và KQE đồng dạng với nhau. Gọi R là trung điểm của GA, khi đó KR và KM lần lượt là trung tuyến của hai tam giác KGA và KQE nên suy ra hai tam giác KGR và KQM đồng dạng với nhau. Nên ta được $\widehat{GRK} = \widehat{QMK}$

Từ đó ta được tứ giác KGRM nội tiếp. Khi đó ta có biến đổi góc sau

$$\widehat{DMN} = 180^0 - \widehat{DKN} = 180^0 - \left(\widehat{GKS} + \widehat{XKM} + \widehat{MKD}\right)$$
$$= 180^0 - \left(90^0 - \widehat{KMR} + \widehat{TMK} + 90^0 - \widehat{TMD}\right)$$

Điều này dẫn đến ba điểm M, N, R thẳng hàng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 24. Gọi GQ cắt đường tròn (O) tại S khác G. Do $\widehat{AGQ} = 90^0$ nên AS là đường kính của đường tròn (O).



Do OM//AP và O là trong điểm của AM nên M là trung điểm của QS. Từ đó ta được DM//PS và cùng vuông giác với PA nên DM là trung trực của PQ. Do tứ giác AHKS nội tiếp (O) nên $\widehat{KGS} = \widehat{KAS}$. Do đó ta được

$\widehat{KQG} = 90^0 - \widehat{KGQ} = 90^0 - \widehat{KAS} = \widehat{ASK} = \widehat{QPK}$

Lại có tứ giác KPSA nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{KPQ} = \widehat{KSA}$. Do đó ta được

$\widehat{LQG} = \widehat{KPQ}$, suy ra GS tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQP. Gọi tiếp tuyến tại K, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác KGQ cắt nhau tại T.

Khi đó ta có $\widehat{KTQ} = 180^0 - 2\widehat{KGQ} = 2\widehat{KQG} = 2\widehat{KPG}$ nên T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ

Mà DM là đường trung trực của PQ nên T nằm trên DM.

Trong tam giác TQM vuông lại Q có QD là đường cao ta có $TK^2 = TQ^2 = TD.TM$

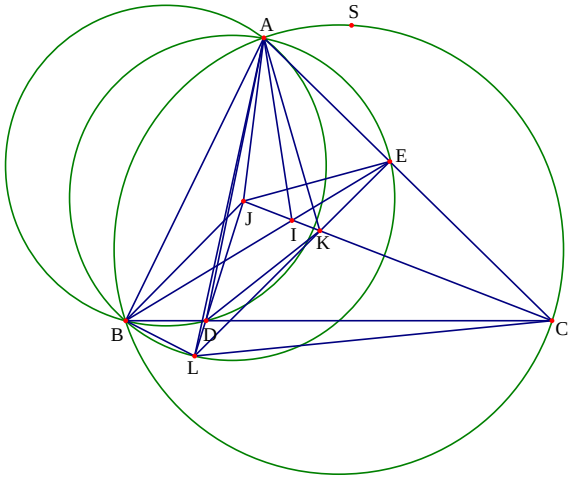
Từ đó suy ra TK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM

Hay TK là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác KGQ và KDM với tiếp điểm là K

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác KGQ và KDM tiếp xúc với nhau tại K.

Bài 25.

Cách 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIE cắt CI tại J khác I. Khi đó ta có $\widehat{CJE} = \widehat{IAC}$ nên suy ra $\Delta CEJ \backsim \Delta CIA$



Do đó ta được

$$\frac{CE}{CJ} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow CI.CJ = CE.CA.$$

Dễ thấy $\widehat{CAD} = \widehat{ABD}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung) và AK, CI lần lượt là phân giác của $\widehat{CAD}$; $\widehat{ABC}$ nên từ đó ta được $\widehat{KAC} = \widehat{IBC}$

Xét hai tam giác CKA và CIB có $\widehat{ACK} = \widehat{BCI}$ và $\widehat{KAC} = \widehat{IBC}$ nên $\Delta CKA \backsim \Delta CIB$

Từ đó suy ra $\frac{CK}{CI} = \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$. Từ

$$CK.CJ = \frac{CK}{CI}.(CI.CJ) = \frac{CD}{CA}.(CE.CA) = CE.CD \Rightarrow \frac{CK}{CE} = \frac{CD}{CI}$$

Và lại có $\widehat{ECK} = \widehat{ICD}$ nên ta được $\Delta CEK \backsim \Delta CJD$, suy ra $\widehat{CEK} = \widehat{CJD}$.

Do L là giao điểm của KE với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE nên L là giao điểm của KE với JD, từ đó suy ra $\widehat{AEL}=\widehat{AJL}$ nên tứ giác CEJL nội tiếp đường tròn. Do đó ta được $\widehat{DLK}=\widehat{KCE}=\widehat{KCD}$ nên tứ giác AKCL nội tiếp được.

Cũng từ $\Delta CKA\backsim\Delta CIB$ ta được $\widehat{AKJ}=\widehat{CIE}=\widehat{CAJ}$ nên ta được $\Delta CAJ\backsim\Delta AKJ$

Do đó ta được $\frac{AJ}{CJ}=\frac{KJ}{AJ}\Rightarrow AJ^2=JK.JC=JD.JD$ nên $\Delta JAD\backsim\Delta JLA$

Từ đó $\widehat{ALD}=\widehat{JAD}=\widehat{DAC}-\widehat{JAC}=\widehat{ABC}-\widehat{AKJ}=\widehat{ABC}-\frac{1}{2}\left(\widehat{DAB}+\widehat{ACB}\right)=\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}-\widehat{ACB}\right)$

Suy ra $\widehat{ALE}=\widehat{ALD}+\widehat{DLE}=\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}-\widehat{ACB}\right)+\frac{1}{2}\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=\widehat{ABE}$

Từ đó suy ta tứ giác ABLE nội tiếp đường tròn. Suy ra được

$$\widehat{BLC}=\widehat{BLE}+\widehat{ELC}=180^0-\widehat{BAC}+\frac{1}{2}\widehat{BAC}=180^0-\frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

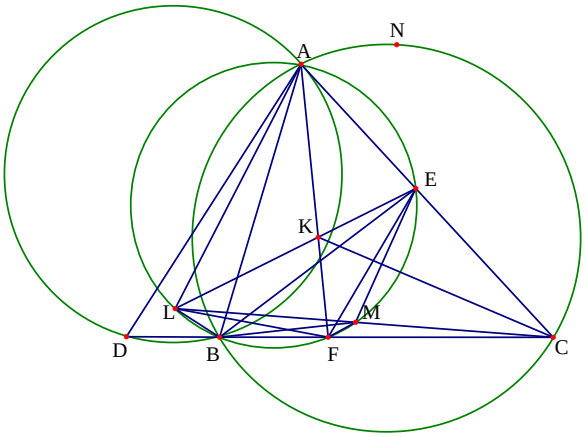
Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BLC khi đó ta có

$$\widehat{BSC}=2\left(180^0-\widehat{BLC}\right)=2\left[180^0-\left(180^0-\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right)\right]=\widehat{BAC}$$

Từ đó suy ra S thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Cách 2. Trước hết ta thấy $\widehat{CAD}=\widehat{ABC}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung). Gọi giao điểm của AK và BC là F.

Ta có $\widehat{FAC}=\frac{1}{2}\widehat{DAC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=\widehat{CBE}$, do đó tứ giác AEFB nội tiếp đường tròn.



Do BE là phân giác của góc $\widehat{ABC}$ nên điểm E nằm chính giữa cung AF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Từ đó ta được LE là đường phân giác của góc $\widehat{ALF}$ và CA là phân giác của góc $\widehat{BCA}$

Áp dụng tính chất đường phân giác cho tam giác ALF, CAF ta được $\frac{LA}{LF}=\frac{KA}{KF}=\frac{CA}{CF}$. Gọi CL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại M khác L.

Khi đó $\Delta CEM \backsim \Delta CLA$ và

$\Delta CBM \backsim \Delta CLF$.

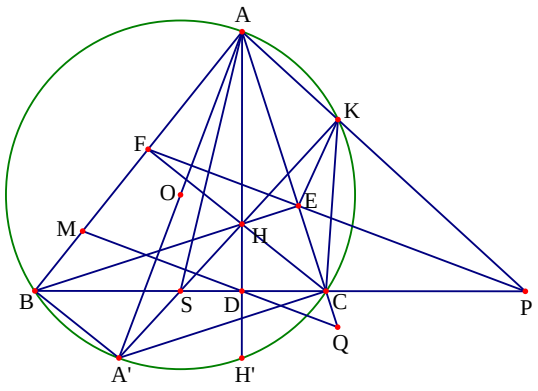
Do đó ta được $\frac{ME}{MC}=\frac{LA}{CA}=\frac{LF}{CF}=\frac{MB}{MC}$ nên suy ra $BM=ME$.

Từ đó suy ra $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{ME}\Rightarrow\overset{\frown}{ELM}=\overset{\frown}{MLB}$ hay LC là phân giác của góc $\overset{\frown}{BLE}$

Từ đó ta được $\overset{\frown}{BLC}=\overset{\frown}{CLE}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ABE}$. Gọi N là điểm chính giữa cung BC có chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó ta có $NB=NC$ và $\overset{\frown}{BNC}=\overset{\frown}{BAC}=2\overset{\frown}{BLC}$ hay N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BLC

Bài 26.

Cách 1. Vẽ đường kính AA' của đường tròn (O). Gọi giao điểm của AH' với BC là S cà cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Khi đó dễ thấy HB song song với A'C và CF song song với A'B. Từ đó suy ra tứ giác BHCA' là hình bình hành, nên S là trung điểm của BC. Như vậy để chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQM di qua trung điểm của BC. Ta cần chứng minh được tứ giác MSQP nội tiếp.



Thật vậy, dễ thấy $\overset{\frown}{A'AC}=\overset{\frown}{A'KC}=\overset{\frown}{CBA'}$.

Suy ra ta có

$\overset{\frown}{CAH}+\overset{\frown}{HAA'}=\overset{\frown}{AKE}+\overset{\frown}{KEC}=\overset{\frown}{A'BC}$

Dễ thấy tứ giác AKEH nội tiếp đường tròn nên ta được $\overset{\frown}{HAE}=\overset{\frown}{HKE}$, suy ra $\overset{\frown}{A'AD}=\overset{\frown}{EKC}$ mà

Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn nên ta có $\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{FEA}$, nên ta suy ra được

$\overset{\frown}{ABD}=\overset{\frown}{FEA}=\overset{\frown}{CEP}$

Lại có $\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{CBA'}=90^0$ nên ta được $\overset{\frown}{A'AH}+\overset{\frown}{HAC}+\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{A'AH}+\overset{\frown}{HAC}+\overset{\frown}{FEA}=90^0$

Do đó ta suy ra được AA' vuông góc với EF. Từ đó ta có

$$\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{BPF}+\overset{\frown}{FEA}\Rightarrow 90^0-\overset{\frown}{CAH}=\overset{\frown}{BPF}+90^0-\overset{\frown}{CAH}-\overset{\frown}{A'AH}\Rightarrow\overset{\frown}{BPH}=\overset{\frown}{A'AH}=\overset{\frown}{EKC}$$

Từ đó dẫn đến tứ giác EKPC nội tiếp đường tròn, nên ta được $\widehat{FEA}=\widehat{CEP}=\widehat{CKP}$

Do ta có $\widehat{FEA}+\widehat{CAH}+\widehat{A'AH}=\widehat{FEA}+\widehat{HKE}+\widehat{EKC}=90^0$ nên suy ra $\widehat{HKE}+\widehat{EKC}+\widehat{CKP}=90^0$

.

Từ đó ta được $\widehat{AKH}+\widehat{PKH}=180^0$ nên ba điểm A, K, P thẳng hàng và H là trực tâm tam giác APS

Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với AD là H'

Đến đây ta thấy tứ giác ASH'P nội tiếp đường tròn nên suy ra $DS.DP=AD.DH'=DB.DC$

Lại do MQ song song với EF nên $\widehat{MQA}=\widehat{FEA}=\widehat{ABC}$ nên tứ giác BMQC nội tiếp đường tròn.

Từ đó ta được $DC.DB=DQ.DM$ Kết hợp hai kế quả trên ta được $DM.DQ=DS.DP$ nên tứ giác MSDP nội tiếp đường tròn. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PQM di qua trung điểm của BC.

Cách 2. Dễ thấy $\widehat{BEF}=\widehat{BED}$ nên ta được $\widehat{DEC}=\widehat{FEA}=\widehat{CEP}$. Do QM song song với EF nên ta lại có $\widehat{MQA}=\widehat{QEP}$, từ đó suy ra $\widehat{CED}=\widehat{DQC}$. Điều này dẫn đến tam giác tam giác DEQ cân tại D nên ta được $DQ=DE$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $DM=DF$

Đặt $AB=c;BC=a;CA=b$ và $\widehat{BAC}=\alpha;\ \widehat{ABC}=\beta;\ \widehat{ACB}=\gamma$.

Trong tam giác vuông ABE và ACF có $AE=c\cos\alpha;\ AF=b\cos\alpha$

Từ đó ta được $AE^2=c^2\cos^2\alpha;\ AF^2=b^2\cos^2\alpha$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác AEF ta được $EF^2=AF^2+AE^2-2AF.AE.\cos\alpha$

Suy ra ta được $EF^2=\cos^2\alpha\left(b^2+c^2-2bc\cos\alpha\right)\Rightarrow EF^2=a^2\cos^2\alpha\Rightarrow EF=a\cos\alpha$

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $DF=b\cos\beta;\ DE=c\cos\gamma$

Mà các tam giác FDM và EDQ cân nên ta được $DM=DF=b\cos\beta;\ DQ=DE=c\cos\gamma$.

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác PQM cắt BC tại S. Khi đó ta có $DM.DQ=DS.DP$

Lại có tứ giác BMCQ nội tiếp đường tròn nên ta được $DM.DQ=DB.DC$

Từ đó ta được $b\cos\beta.c\cos\gamma=c\cos\beta.b\cos\gamma=BD.DC=DS.DP$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC với ba điểm E, F, P thẳng hàng ta được

$$\frac{AF}{BF}.\frac{BP}{PC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}.\frac{a+CP}{CP}.\frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha}=1\Rightarrow\frac{b}{c}.\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\left(1+\frac{a}{CP}\right)=1$$

Từ đó ta suy ra được

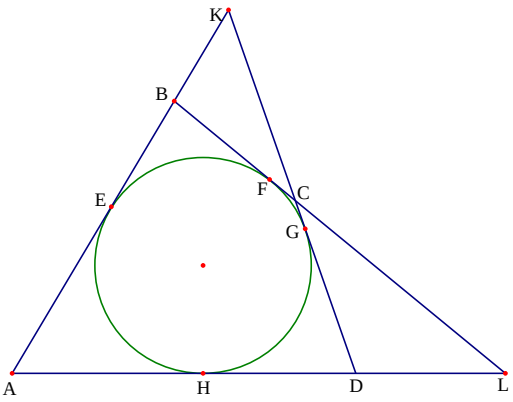
$$\frac{DC}{BD}\left(1+\frac{a}{CP}\right)=1\Rightarrow 1+\frac{a}{CP}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow CP=\frac{a.CD}{BD-CD}\Rightarrow BP-a=\frac{a.CD}{BD-CD}$$

$$\Rightarrow BP=\frac{a.CD}{BD-CD}\Rightarrow BD+DP=\frac{a.CD}{BD-CD}\Rightarrow DP=\frac{(BD+a)-BD^2}{BD-CD}$$

$$\Rightarrow DP=\frac{2BD.CD}{BD-CD}=\frac{2DS.DP}{BD-CD}\Rightarrow DS=\frac{BD-CD}{2}$$

Điều này chứng tỏ S là trung điểm của BC. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PQM đi qua trung điểm của BC.

Bài 27. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Cho tứ giác ABCD. Gọi giao điểm của AB và CD là K, giao điểm của BC và AD là L. Khi đó các điều kiện sau đây tương đương với nhau:



a) Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn

b) $BK+BL=DK+DL$

c) $AK+CL=AL+CK$

- Ta chứng minh tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tương đương với

$BK+BL=DK+DL$

+ Nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn, khi đó gọi E, F, G, H lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn với AB, BC, CD, DA. Ta có

$$BK+BL=(KE-BE)+(BF+FL)=(KG-BF)+(BF+HL)$$
$$=KG+HD+DL=KG+DL+DG=DK+DL$$

+ Nếu $BK+BL=DK+DL$. Vẽ đường tròn (O) nội tiếp tam giác AKD.

Từ L vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt AK tại B′.

Theo chứng minh trên ta được $B'K+B'L=DK+DL$

Từ đó ta được $|BK-B'K|=|B'L-BL|\Rightarrow BB'=|B'L-BL|$, nên hai điểm B và B′ trùng nhau. Điều này chứng tỏ tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn.

- Ta chứng minh tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tương đương với

$AK+CL=AL+CK$

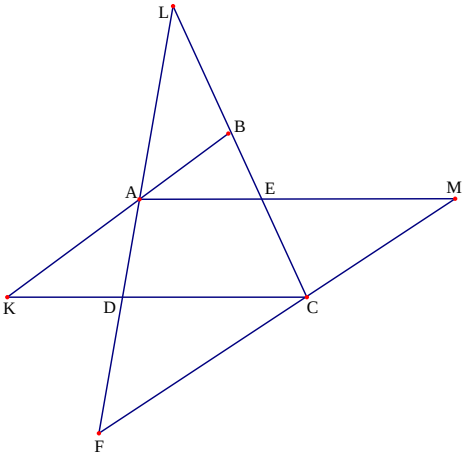
+ Nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn, khi đó gọi E, F, G, H lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn với AB, BC, CD, DA. Ta có

$$AK+CL=(AE+EK)+(FL-CF)=(AH+KG)+(LH-CG)$$
$$=AH+LH+KG-CG=AL+CK$$

+ Nếu $AK+CL=AL+CK$. Chứng minh tương tự như trên ta cũng được tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn.

Trở lại bài toán: Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu tứ giác ABCD có một cặp cạnh song song hoặc cả hai cặp cạnh cùng song song. Khi đó bằng cách kiểm tra trực tiếp ta được tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi tứ giác AECF ngoại tiếp đường tròn.



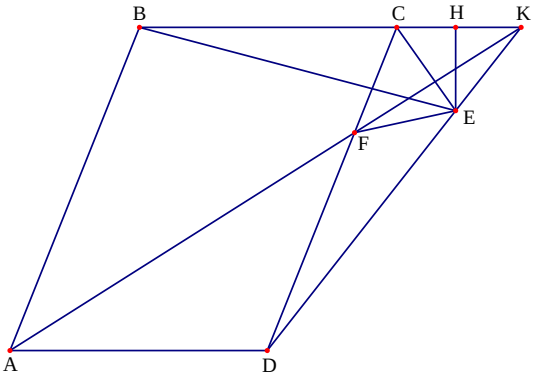
+ Nếu tứ giác ABCD không có cặp cạnh nào song song với nhau. Khi đó gọi giao điểm của AB và CD là L, giao điểm của AD và BC là L, giao điểm của AE và CF là M. Theo bổ để trên ta có tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi

$AK+CL=AL+CK \Leftrightarrow CM+CL=AL+AM$

Khi và chỉ khi tứ giác AECF nội tiếp đường tròn.

Vậy tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi tứ giác AECF ngoại tiếp đường tròn

Bài 28. Vì tứ giác BCED nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{CDE}=\widehat{CBE}$, ta kí hiệu $\widehat{CDE}=\widehat{CBE}=\varphi$.



Đặt $EF=EK=EC=x$. Khi đó E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CKF, đường tròn này có bán kính là $R=x$. Dễ

thấy tam giác CEK cân tại E, đặt

$\widehat{CKE} = \widehat{KCE} = \alpha$. Tam giác CEF cân tại E

nên ta được $\widehat{FCE} = \widehat{KFE} = \beta$. Để ý ta thấy

rằng hai tam giác AFD và KFC đồng dạng

với nhau nên ta được

$$\frac{AD}{KC} = \frac{FD}{FC} \Rightarrow \frac{BC}{KC} = \frac{FD}{FC}$$

Mặt khác ta có $\widehat{CEB} = \widehat{ECK} - \widehat{EBC} = \alpha - \varphi$. Áp dụng định lí sin cho tam giác BCE ta được $\frac{BC}{\sin\widehat{CEB}} = \frac{x}{\sin\varphi} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{x}{\sin\varphi}$. Hay ta được $BC = \frac{x}{\sin\varphi}.\sin(\alpha-\varphi)$.

Từ tam giác cân DEK ta có $\cos\alpha = \frac{CH}{CE} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}.\frac{CK}{x} \Rightarrow CK = 2x.\cos\alpha$.

Tương tự trong tam giác DEF và CEF ta có $FD = \frac{x}{\sin\varphi}.\sin(\beta-\varphi)$ và $CF = 2x\cos\beta$.

Từ đó ta được $\frac{BC}{CK} = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{2\cos\alpha.\sin\varphi}$ và $\frac{FD}{FC} = \frac{\sin(\beta-\varphi)}{2\cos\beta.\sin\varphi}$

Suy ra ta được $\frac{BC}{CK} = \frac{FD}{FC} \Leftrightarrow \frac{\sin(\beta-\varphi)}{2\cos\beta.\sin\varphi} = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{2\cos\alpha.\sin\varphi} \Leftrightarrow \frac{\sin(\beta-\varphi)}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha}$

Nhưng $0 < \alpha;\ \beta < 90^0$, do đó ta được $0 < \alpha - \varphi;\ \beta - \alpha < 90^0$.

+ Nếu ta có $\alpha > \beta$ thì ta có $\cos\alpha < \cos\beta$ và $\sin(\alpha-\varphi) > \sin(\beta-\varphi)$.

Suy ra ta được $\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\cos\beta} < \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha}$

+ Nếu ta có $\alpha < \beta$ thì ta có $\cos\alpha > \cos\beta$ và $\sin(\alpha-\varphi) < \sin(\beta-\varphi)$.

Suy ra ta được $\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\cos\beta} > \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha}$.

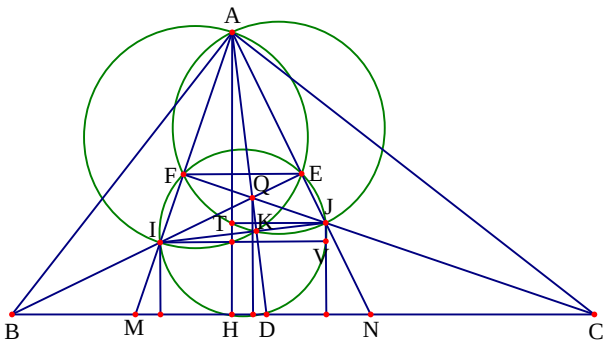
Do đó ta suy ra được $\alpha = \beta$. Khi đó hai tam giác CEK và CEF bằng nhau, nên ta được

$CK = CF$.

Từ đó ta được tam giác KCF cân tại C nên suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{CFK} = \widehat{CKF} = \widehat{DAK}$ hay AK là

phân giác của góc $\widehat{DAB}$.

Bài 29. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH.



Đặt $AB = c, BC = a, CA = b, AH = h$. Gọi giao điểm của AI, AJ với BC lần lượt là M, N.

Gọi giao điểm của BI với AN là E. giao điểm của CJ với AM là F. Từ giả thiết ta được

$$\widehat{ABF} = \widehat{HAF} = \widehat{BCF} = \widehat{ACF}$$

$$\widehat{ABE} = \widehat{CBE} = \widehat{HAE} = \widehat{CAE}$$

Khi đó $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ nên $\frac{AB}{BC} = \frac{R_1}{R} = \frac{BH}{AB}$ (1) và $\Delta ABC \backsim \Delta HAC$ nên $\frac{AC}{BC} = \frac{R_2}{R} = \frac{CH}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\frac{R_1^2 + R_2^2}{R^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1 \Rightarrow R_1^2 + R_2^2 = R^2$ (3)

Ta có $(R_1 + R_2)^2 \le 2(R_1^2 + R_2^2)$ nên suy ra $R_1 + R_2 \le \sqrt{2}.R$ (4)

Cũng từ (1) và (2) và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{R_1 + R_2}{R} = \frac{BH}{AB} + \frac{CH}{AC} \ge 2\sqrt{\frac{BH.CH}{AB.AC}} = 2\sqrt{\frac{AH^2}{BC.AH}} = 2\sqrt{\frac{h}{a}} \Rightarrow R_1 + R_2 \ge 2R.\sqrt{\frac{h}{a}} \quad (5)$$

Dễ thấy $h \le AD = \frac{a}{2}$ hay $0 < x = \frac{h}{a} \le \frac{1}{2}$ nên ta được $x(1-2x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge \sqrt{2}.x$

Do đó ta suy ra $\sqrt{\frac{h}{a}} \ge \sqrt{2}.\frac{h}{a}$, nên ta được $R_1 + R_2 \ge \frac{2\sqrt{2}.h.R}{a}$ (6)

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $R_1 = R_2$ hay tam giác ABC vuong cân tại A.

Từ (1) và (2) ta có $R_1R_2 = \frac{R.AB}{BC}.\frac{R.AC}{BC} = \frac{R^2.ah}{a^2} = \frac{R^2.h}{a}$ (7)

Từ tâm Q của đường tròn nội tiếp tam giác ABC hà đường vuông góc xuống các cạnh của tam giác ABC ta có hệ thức $b + c = a + 2R$. Áp dụng hệ thức này vào các tam giác ABH và ACH ta được

$$2(R + R_1 + R_2) = (AH + BH - AB) + (AH + CH - AC) + (AB + AC - BC) = 2AH$$

Từ đó ta được $R + R_1 + R_2 = h$ (8)

Kẻ TJ vuông góc với AH tại T và JP//AH, IP//CB cắt JP tại P và cắt AH tại V. Tam giác IJP vuông tại P có $IJ^2 = IP^2 + JP^2$ hay $IJ^2 = \left(R_1 + R_2\right)^2 + \left(R_1 - R_2\right)^2 \Rightarrow IJ = \sqrt{2}R = AQ$ (9)

Ta có $\overset{\frown}{ABE} + \overset{\frown}{BAE} = \left(\overset{\frown}{ABE} + \overset{\frown}{HAE}\right) + \overset{\frown}{BAH} = \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ACB} = 90^0$ và $BA = BN,\ AE = EN$.

Tương tự ta có $CF \perp AM$ và $CA = CM, AF = FM$.

Do đó EF là đường trung bình của tam giác AMN nên EF//BC và $\overset{\frown}{EFC} = \overset{\frown}{FCB}$ (10)

Từ đó suy ra các điểm I, J, E, F nằm trên đường tròn đường kính IJ. Từ $IE \perp AJ, JF \perp AI$ và IE cắt JF tại Q nên AK chính là đường cao của tam giác AIJ hay $AQ \perp IJ$ tại K.

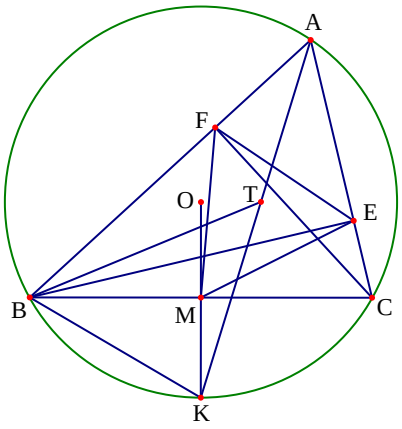
Từ đó ta được A, J, K, F, T thuộc đường tròn đường kính AJ và A, I, E, K, V thuộc đường tròn đường kính AI. Từ đó ta được $\overset{\frown}{EAK} = \overset{\frown}{IAH}$ và $\overset{\frown}{EIJ} = \overset{\frown}{EFJ}$,

Kết hợp với (10) ta được $\overset{\frown}{EAK} = \overset{\frown}{IAH}$, suy ra $\Delta IAV \backsim \Delta JAK$ nên ta có $\frac{IV}{AI} = \frac{KJ}{AJ} \Rightarrow \frac{R_1}{KJ} = \frac{AI}{AJ}$ (11)

Hoàn toàn tương tự ta được $\overset{\frown}{FAK} = \overset{\frown}{JAH}$ nên $\Delta JAT \backsim \Delta IAK$ suy ra $\frac{R_1}{KI} = \frac{AJ}{AI}$ (12)

Từ (11) và (12) ta được $\frac{R_1}{KJ} = \frac{KI}{R_2}$ nên $KI.KJ = R_1.R_2$. Kết hợp với (7) ta được $KI.KJ = \frac{R^2.AH}{BC}$

Bài 30. Kí hiệu $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ là số đo ba góc trong của tam giác ABC. Từ $\overset{\frown}{BTK} = \frac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$ và $\overset{\frown}{TBK} = \overset{\frown}{CBK} + \frac{\hat{B}}{2}$ suy ra ta được $\overset{\frown}{BTK} = \overset{\frown}{TBK}$ nên ta được $BK = TK$



Chú ý là $MF = BM = MC = ME$ nên tam giác MEF cân tại M. Từ đó ta được tam giác MEF đều nên $\overset{\frown}{EMF} = 60^0$

Khi $\hat{A} = 90^0$ thì điểm E và F trùng nhau, điều này trái với giả thiết. Nên ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC có góc A nhọn. Khi đó ta được

$$\widehat{EMF}=180^0-\left(\widehat{BMF}+\widehat{CME}\right)=180^0-\left(180^0-2\widehat{FBM}+180^0-2\widehat{ECM}\right)$$
$$=2\left(\widehat{FBM}+\widehat{ECM}-90^0\right)=2\left(180^0-\widehat{BAC}-90^0\right)=180^0-2\widehat{A}$$

Mà ta có $\widehat{EMF}=60^0$ nên ta được $\widehat{A}=60^0$, do đó $\widehat{BAK}=30^0$ suy ra $\widehat{BOK}=60^0$

Điều này dẫn đến $BK=R$ nên ta được $\frac{TK}{R}=\frac{BK}{R}=1$

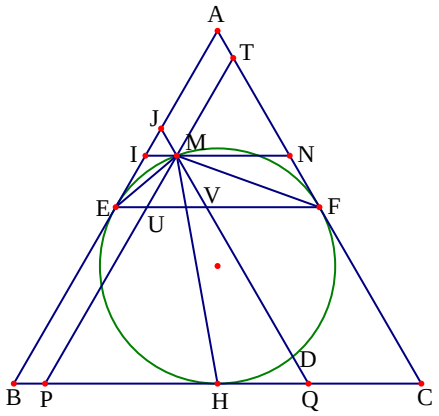
+ Trường hợp 2: Tam giác ABC có góc A tù. Khi đó ta được

$$\widehat{EMF}=180^0-\left(\widehat{BME}+\widehat{CMF}\right)=180^0-\left(180^0-2\widehat{EBC}+180^0-2\widehat{FCB}\right)$$
$$=2\left(\widehat{EBC}+\widehat{FCB}-90^0\right)=2\left(90^0-\widehat{ECB}+90^0-\widehat{FBC}-90^0\right)$$
$$=180^0-2\left(\widehat{ECB}+\widehat{FBC}\right)=180^0-2\left(180^0-\widehat{A}\right)=2\widehat{A}-180^0$$

Mà ta có $\widehat{EMF}=60^0$ nên ta được $\widehat{A}=120^0$, do đó $\widehat{BAK}=60^0$ suy ra $\widehat{BOK}=120^0$

Từ đó ta được $\widehat{MBK}=60^0$, điều này dẫn đến $BK=R\sqrt{3}$. Do đó ta được $\frac{TK}{R}=\frac{BK}{R}=\sqrt{3}$

Bài 31. Gọi H, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Đường thẳng qua M song song với AB cắt BC tại P và cắt AC tại T, đường thẳng qua M song song với AC cắt BC tại Q và AB tại J, Đường thẳng qua M song song với BC cắt AB tại I và cắt AC tại N.



Đặt $BP=x;PQ=y;QC=z$. Do tam giác ABC đều nên ta có

$$BP=AT=MI=MJ=IJ=x$$
$$PQ=MQ=NC=MP=IB=y$$
$$QC=MN=AJ=MTNT=z$$

Từ đó ta được $BP^2+PQ^2+QC^2=AT^2+TN^2+NC^2=AJ^2+JI^2+IB^2$. Như vậy chỉ cần xét điểm M nằm trên cung nhỏ EF là đủ.

Cách 1. Ta có $a^2=\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right)$ (1)

Gọi D là giao điểm của MQ với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có $\widehat{QMH}=\widehat{QHD}$ nên ta được $\Delta MHQ\backsim\Delta HDQ$, suy ra $\frac{QH}{QM}=\frac{QD}{QH}$ hay

$QH^2=QD.QM$

Mà ta có $QD=MJ=x$ nên ta được $QH^2=xy$ (2).

Mặt khác do Q thuộc đoạn thẳng HC nên ta được $QH = HC - QC = \dfrac{x+y+z}{2} - z = \dfrac{x+y-z}{2}$ (3)

Từ (2) và (3) ta được $\left(\dfrac{x+y-z}{2}\right)^2 = xy$, khai triển và thu gọn ta được

$x^2+y^2+z^2 = 2(xy+yz+zx)$

Thay vào hệ thức (1) ta được $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{a^2}{2}$

Cách 2. Giả sử EF cắt MP tại U và cắt MQ tại V. Ta có

$\widehat{MEF} = \widehat{MFN} = \widehat{FMV};\ \widehat{EMU} = \widehat{MEI} = \widehat{MFE}$

Từ đó suy ra $\Delta MEU \backsim \Delta FMV$ nên ta được $\dfrac{MU}{EU} = \dfrac{FV}{MV}$ hay $MU.MV = EU.FV$ nên

$UV^2 = BP.QC$

Mặt khác ta lại có $PQ - UV = MQ - MV = VQ = \dfrac{a}{2}$. Từ đó ta có biến đổi sau

$$A = xy+yz+zx = BP.PQ + PQ.QC + QC.BP = PQ(BP+QC) + UV^2$$
$$= PQ.\frac{a}{2} - UV(PQ-UV) = PQ.\frac{a}{2} - UV.\frac{a}{2} = \frac{a}{2}(PQ-UV) = \frac{a^2}{2}$$

Thay vào hệ thức (1) ta được $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{a^2}{2}$

Cách 3. Gọi G là tâm tam giác đều ABC, xét điểm M nằm trên đường tròn tâm G bán kính $GM = r$. Gọi H và K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ G và M xuống BC. Kẻ GS vuông góc với MK(S thuộc MK). Đặt $PQ = 2PK = 2QK = y$. Giả sử K thuộc đoạn BH. Khi đó ta có

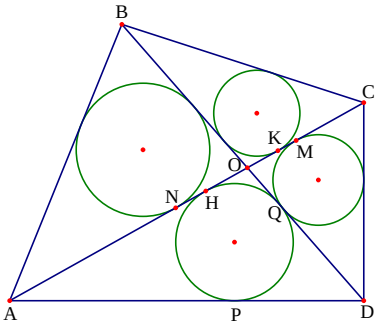
$$BP^2 + QC^2 = (BH - PK - KH)^2 + (CH - KQ + KH)^2$$
$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{y}{2} - KH\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{y}{2} + KH\right)^2 = 2\left(\frac{a}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 + 2KH^2$$

Mặt khác ta có $KH^2 = MG^2 - MS^2 = r^2 - (MK - SK)^2 = r^2 - \left(\dfrac{y\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = r^2 - \dfrac{3}{4}\left(y - \dfrac{a}{3}\right)^2$

Từ đó ta được $BP^2 + PQ^2 + QC^2 = \dfrac{1}{2}(a-y)^2 + y^2 + 2r^2 - \dfrac{3}{2}\left(y - \dfrac{a}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3}a^2 + 2r^2$

Mà $GM = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Từ đó ta được $BP^2 + PQ^2 + QC^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Bài 32. Xét tam giác OAD có đường trong nội tiếp với các tiếp điểm P, Q, N. Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau ta có



$AD+DO+OA=2AP+2DP+2ON=2AD+2ON$

Do đó ta được $ON=\dfrac{DO+AO-AD}{2}$

Hoàn toàn tương tự $OK=\dfrac{OB+OC-BC}{2}$

Từ đó suy ra

$KN=KO+ON=\dfrac{AC+BD-AD-BC}{2}$

Tương tự ta cũng chứng minh được $HM=\dfrac{AC+BD-AB-CD}{2}$

Ta có $HM=KN\Leftrightarrow\dfrac{AC+BD-AB-CD}{2}=\dfrac{CA+BD-AD-BC}{2}\Leftrightarrow AB+CD=BC+AD$

Điều này tương đương với tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn.

Bài 33. Từ M và N hạ MP, NQ vuông góc với BC. Khi đó MP, AH, NQ song song với nhau.

Do đó $\overset{\frown}{NCQ}=\overset{\frown}{BCy}=\overset{\frown}{BAC}=\overset{\frown}{CBx}=\overset{\frown}{MBP}$ nên $\Delta BPM\backsim\Delta CQN\Rightarrow\dfrac{BP}{CQ}=\dfrac{BM}{CN}\ (1)$

Theo định lí Thalet ta có $\dfrac{HP}{HQ}=\dfrac{AM}{AN}$. Mặt khác $MA=MB$ và $NA=NC$ nên

$\dfrac{HP}{HQ}=\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{MB}{NC}\ (2)$

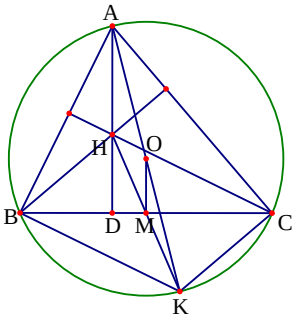
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{HP}{HQ}=\dfrac{PP}{CQ}=\dfrac{MB}{NC}$. Do đó ta được $\dfrac{MB}{NC}=\dfrac{HP-BP}{HQ-CQ}=\dfrac{HB}{HC}$

Mặt khác lại có $\overset{\frown}{MBC}=\overset{\frown}{NCB}$ nên $\Delta MBH\backsim\Delta NCH\Rightarrow\overset{\frown}{MHB}=\overset{\frown}{NHC}$

Mà $AH\perp BC$ nên $\overset{\frown}{MHA}=\overset{\frown}{NHA}$ nên HA là phân giác của góc $\overset{\frown}{MHN}$.

Bài 34. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Trong một tam giác thì khoảng cách từ một đỉnh đến trực tâm bằng hai lần khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến cạnh đối diện của đỉnh đó.

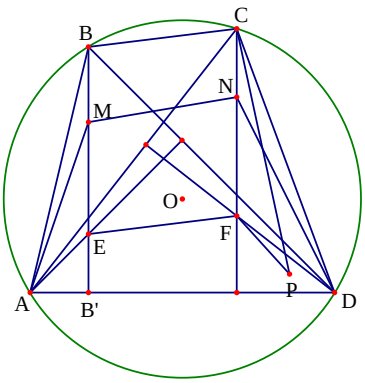


Thật vậy, giả sử giả thiết bài toán được cho như hình vẽ, ta cần chứng minh được $AH=2MO$. Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Khi đó tứ giác BHCK là hình bình

hành nên ta suy ra được ba điểm H, M, K thẳng hang và M là trung điểm của HK. Trong tam giác KAH có MO là đường trung bình nên $AH = 2MO$. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Áp dụng bổ đề trên ta được $BE = CF$, mà ta có BE//CF nên tứ giác BCFE là hình bình hành. Tứ giác BCNM cũng là hình bình hành nên ta được MN//EF.

Gọi B' là giao điểm của BE với AD. Ta có BB' vuông góc với AD. Do $\overset{\frown}{AED} = 180^0 - \overset{\frown}{ABD}$ và $\overset{\frown}{AFD} = 180^0 - \overset{\frown}{ACD}$, mà ta lại có $\overset{\frown}{ABD} = \overset{\frown}{ACD}$. Nên ta được $\overset{\frown}{AED} = \overset{\frown}{AFD}$, điều này dẫn đến tứ giác AEFD nội tiếp đường tròn.



Do $\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{ADC}$ và $\overset{\frown}{CAE} = \overset{\frown}{BDF}$ nên ta được $\overset{\frown}{EAB} = \overset{\frown}{FDC}$

Giả sử tứ giác AMND nội tiếp đường tròn. Khi đó từ tứ giác AEFD nội tiếp nên ta được

$\overset{\frown}{AMN} + \overset{\frown}{ADN} = \overset{\frown}{AEF} + \overset{\frown}{ADF}$

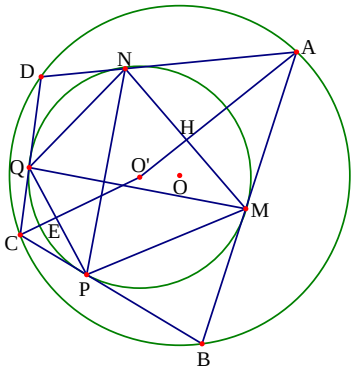
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AMB'} + \overset{\frown}{B'MN} + \overset{\frown}{ADN} = \overset{\frown}{AEB'} + \overset{\frown}{B'EF} + \overset{\frown}{ADF}$ hay ta được $\overset{\frown}{AMB'} + \overset{\frown}{ADN} = \overset{\frown}{AEB'} + \overset{\frown}{ADF}$.

Mà ta có $\overset{\frown}{B'MN} = \overset{\frown}{B'EF}$ nên ta được $\overset{\frown}{ADN} - \overset{\frown}{ADF} = \overset{\frown}{AEB'} - \overset{\frown}{AMB'}$ hay $\overset{\frown}{NDF} = \overset{\frown}{MAE}$.

Lấy điểm P nằm cùng phía với D so với CF sao cho hai tam giác PFC và AEB bằng nhau.

Ta có $\overset{\frown}{FPC} = \overset{\frown}{EAB}$, kết hợp với $\overset{\frown}{EAB} = \overset{\frown}{FDC}$ ta được $\overset{\frown}{FPC} = \overset{\frown}{FDC}$, suy ra bốn điểm F, P, D, C cùng thuộc một đường tròn. Cũng từ cách lấy điểm P cho ta hai tam giác PFN và AEM bằng nhau nên ta được $\overset{\frown}{NPF} = \overset{\frown}{MAE}$. Kết hợp với $\overset{\frown}{NDF} = \overset{\frown}{MAE}$ ta được $\overset{\frown}{NPF} = \overset{\frown}{NDF}$ nên bốn điểm N, D, P, F cùng thuộc một đường tròn. Do đó năm điểm F, P, C, D, N cùng thuộc một đường tròn. Điều này là vô lí vì ba điểm N, F, C thẳng hang. Chứng tỏ điều ta giả sử là sai. Do vậy tứ giác AMND không thể nội tiếp được.

Bài 35. Gọi giao điểm của O'A và MN là H, giao điểm của O'C và PQ là E. Ta có tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) nên ta được $\widehat{A}+\widehat{C}=180^0$. Tứ giác ABCD lại ngoại tiếp đường tròn (O') nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có



$$\widehat{O'AM}=\frac{1}{2}\widehat{A},\ \widehat{O'CQ}=\frac{1}{2}\widehat{C}$$

$$\Rightarrow \widehat{O'AM}+\widehat{O'CQ}=90^0 \Rightarrow \widehat{O'AM}=\widehat{CO'Q}$$

Do đó ta được $\Delta O'MA \backsim \Delta CQO' \Rightarrow \frac{O'M}{CQ}=\frac{MA}{QO'}$

Đặt $MA=AN=x;\ BN=BP=y;\ CP=CQ=z;\ DQ=DM=t;\ O'M=O'Q=r.$

Khi đó ta có $\frac{r}{z}=\frac{x}{r}\Rightarrow r^2=x.z$. Tương tự

$$\Delta O'NB \backsim \Delta DMO' \Rightarrow \frac{O'N}{DM}=\frac{NB}{MO'}\Rightarrow \frac{r}{t}=\frac{y}{r}\Rightarrow r^2=y.t$$

Suy ra $r^2=x.z=y.t$ Do AM và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn (O') nên ta có $O'A\perp MN$ tại M và H là trung điểm của MN. áp dụng hệ thức lượng vào $\Delta O'MA$ vuông tại M, có đường cao MH nên ta được

$$\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{O'M^2}\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}MN\right)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{r^2}\Rightarrow MN^2=\frac{4x^2r^2}{x^2+r^2}\Rightarrow MN^2=\frac{4x^2\left(x.z\right)}{x^2+\left(x.z\right)}$$

Suy ra $MN^2=\frac{4x^2.z}{x+z}$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$PQ^2=\frac{4xz^2}{x+z};\quad NP^2=\frac{4y^2t}{y+t};\quad MQ^2=\frac{4yt^2}{y+t}$$

Do đó ta được

$$MN^2+PQ^2=\frac{4x^2z}{x+z}+\frac{4xz^2}{x+z}=\frac{4xz\left(x+z\right)}{x+z}=4xz=4r^2$$

$$NP^2+MQ^2=\frac{4y^2t}{y+t}+\frac{4yt^2}{y+t}=\frac{4yt\left(y+t\right)}{y+t}=4yt=4r^2$$

Như vậy tứ giác MNPQ có $MN^2+PQ^2=NP^2+MQ^2$. Theo bổ đề bốn điểm ta được $MP\perp NQ$

Bài 36. Bạn đọc tự vẽ hình.

Gọi O là giao điểm của AH và BD, ta có CO là là phân giác của góc $\widehat{ACB}$ suy ra $\widehat{ACO}=\widehat{BCO}$.

Hạ $OK \perp AC\left(K \in AC\right)$, khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Nếu K trùng với điểm D, khi đó tam giác ABC đều vì có O vừa là tâm đường tròn nội tiếp vừa là trực tâm, do đó ta được $\widehat{BAC} = 60^0$.

+ Trường hợp 2: Nếu K thuộc đoạn DA và không trùng với D, khi đó ta có

Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHC nên $I \in OC$ và $\widehat{OHI} = \widehat{CHI} = 45^0$. Suy ra hai tam giác OHC và OKC bằng nhau, nên ta được $\widehat{OKI} = \widehat{CKI} = 45^0 \Rightarrow \widehat{OKI} = \widehat{ODI} = 45^0$. Do đó tứ giác OKDI nội tiếp nên $\widehat{COD} = \widehat{CKI} = 45^0$. Từ đó

$$2\widehat{COD} = 2\left(\widehat{OBC} + \widehat{OCB}\right) = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$$

Do đó ta được $\widehat{BAC} = 90^0$.

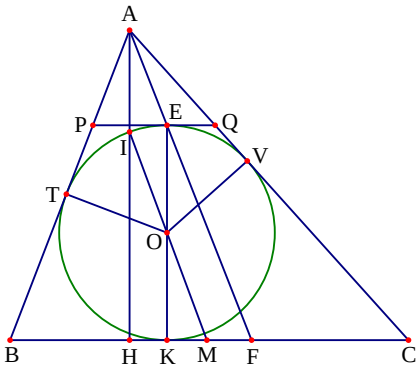
+ Trường hợp 3: Nếu K thuộc đoạn DC và không trùng với điểm D, khi đó tương tự như trường hợp 2 ta chứng minh được tứ giác ODKI nội tiếp. Do đó ta được

$\widehat{DOC} = \widehat{CKI} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$.

Tuy nhiên khi đó ta có $\widehat{BDC} > \widehat{BAC} = 90^0$ mâu thuẫn với điều kiện K thuộc đoạn DC. Do đó trường hợp 3 không xẩy ra. Khi tam giác ABC đều hoặc vuông cân tại A ta đều chứng minh được $\widehat{BDI} = 45^0$

Vậy $\widehat{BAC} = 60^0$ hoặc $\widehat{BAC} = 90^0$

Bài 37.



Cách 1. Giả sử đường tròn tâm O tiếp xúc với các cạnh với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại K, T, V.

Gọi KE là đường kính của đường tròn (O).

Đường thẳng đi qua điểm E và song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Khi đó PQ tiếp xúc với đường tròn (O) tại E.

Gọi $2p = AB + BC + CA$. Khi đó áp dụng định lí Talets ta có $\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{EQ}{FC} = \dfrac{AQ + EQ}{AC + FC} = \dfrac{AV}{AC + FC}$

Lại có $\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AQ + AP + PQ}{AB + BC + CA} = \dfrac{AT + AV}{2p} = \dfrac{AV}{2p}$

Từ đó ta được $FC = p - AC$, mà ta lại có $2BK = 2p - 2AC$ nên ta được $BK = p - AC$

Điều này dẫn đến $FC = BK$, suy ra $MK = MF$ nên MO là đường trung bình của tam giác EKF

Suy ra MO//EF nên tứ giác AIOE là hình bình hành. Do đó ta được $AI = OE = r$

Cách 2. Tia OA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Khi đó AD là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên điểm D nằm chính giữa cung BC không chứa A, suy ra $BD = CD$.

Nên ta được $MD \perp BC$ và MD//AH. Áp dụng định lí Talets ta được $\frac{AI}{MD} = \frac{AO}{DO}$.

Ta lại có $\widehat{BOD} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = \widehat{CBD} + \widehat{OBC} = \widehat{OBD}$ nên ta được $OD = BD$.

Gọi T là tiếp điểm của AB với đường tròn tâm O, khi đó ta có $\Delta AOT \backsim \Delta BDM$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{AM}{MD} = \frac{AO}{DO} = \frac{AO}{BD} = \frac{OT}{MD}$, nên suy ra $AI = OT = r$

Cách 3. Đặt $AB = c, BC = a, CA = b$ và $2p = a + b + c$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $AC > AB$, khi đó hai điểm H và K cùng nằm trên tia MB.

Ta có $b^2 - c^2 = HC^2 - HB^2 = (HB + HC)(HC - HB) = 2a.MH$

Chú ý là điều này đúng cho cả hai trường hợp H nằm giữa B và M hoặc B nằm giữa M và H.

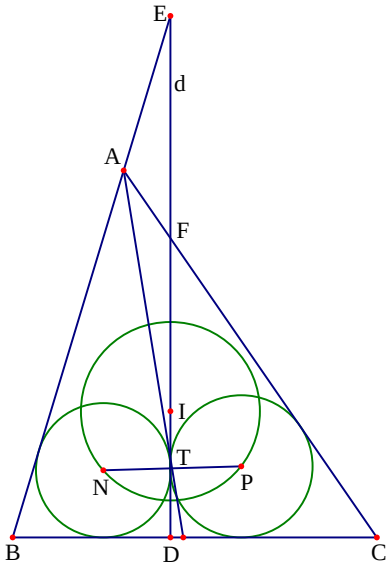
Từ đó ta được $MK = KC - MC$. Suy ra $MK = \frac{b-c}{2}$. Do đó ta có $\frac{MH}{MK} = \frac{b^2 - c^2}{2a}.\frac{2}{b-c} = \frac{b+c}{a}$

Mặt khác ta có $AH.a = 2S_{ABC} = 2r(a + b + c)$ nên ta suy ra $\frac{AH}{r} = \frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a}$

Do vậy $\frac{AI}{r} = \frac{AH - HI}{r} = \frac{AH}{r} - \frac{IH}{OK} = \frac{AH}{r} - \frac{MH}{MK} = 1 + \frac{b+c}{a} - \frac{b+c}{a} = 1$. Vậy ta được $AI = r$

Bài 38.

- Giả sử đường thẳng d đi qua điểm tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, khi đó do D tà tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC nên ta được ta có



$$BD = \frac{AB + BC - AC}{2};\ CD = \frac{CA + CB - AB}{2}$$

Từ đó suy ra

$$BD - DC = \frac{BA + BC - AC}{2} - \frac{CA + CB - AB}{2} = AB - AC$$

Gọi giao điểm của tiếp tuyến đi qua A(khác AB) của đường tròn (N) với đường thẳng là T. Khi đó tứ giác TABD ngoại tiếp đường tròn nên ta được

$$AB + TD = AT + BD$$

Kết hợp với đẳng thức trên ta được

$$AC + TD = AT + CD$$

Điều này chứng tỏ tứ giác TACD ngoại tiếp đường tròn.

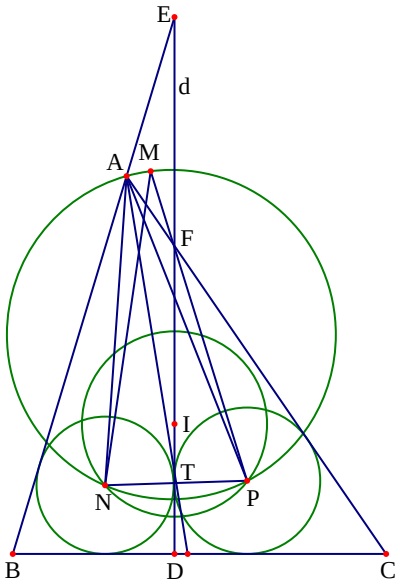
Vậy AT tiếp xúc với đường tròn (P) hay nói cánh khác AT là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (N) và (P) đi qua điểm A.

Gọi giao điểm của tiếp tuyến đó với đường thẳng d là T. Khi đó các tứ giác TABD và TACD ngoại tiếp đường tròn. Do đó $AB + TD = AT + BD$ và $AC + TD = AT + DC$. Từ đó $BD - DC = AB - AC$.

Lại có $BD + CD = BC$ nên ta được $BD = \frac{AB + BC - AC}{2};\ CD = \frac{CA + CB - AB}{2}$

Từ đó suy ra D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh BC. Từ đó suy ra d đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 39. • Giả sử tiếp tuyến chung của hai đường tròn (N) và (P) đi qua A, ta cần chứng minh bốn điểm A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn. Thật vậy, để ý là các ba điểm E, M, N thẳng hàng và ba điểm F, M, P thẳng hàng. Do đó ta có



$$\widehat{NMP} = 180^0 - \widehat{EMF} = 180^0 - \left(90^0 + \frac{\widehat{EAF}}{2}\right)$$

$$= 90^0 - \frac{180^0 - \widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Mặt khác do tiếp tuyến chung khác d của hai đường tròn (N) và (P) đi qua điểm A nên $\widehat{NAP} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Do đó ta được $\widehat{NMP} = \widehat{NAP}$ nên tứ giác AMNP nội tiếp đường tròn.

Ta cần chứng minh tiếp tuyến chung khác d của hai đường tròn (N) và (P) đi qua A

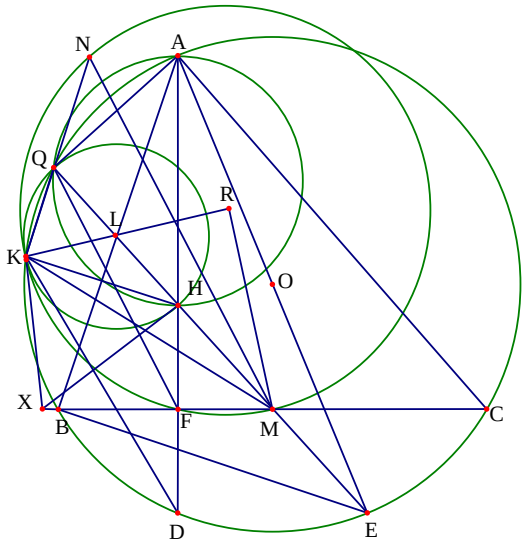
Thật vậy, lập luận như trên ta được $\widehat{NMP} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$. do tứ giác AMNP nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{NMP} = \widehat{NAP}$. Từ đó suy ra $\widehat{NAP} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Qua A vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (N), khi đó ta được $\widehat{NAx} = \frac{1}{2}\widehat{BAx}$. Do đó ta được

$$\widehat{APx} = \widehat{NAP} - \widehat{NAx} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{BAx} = \frac{1}{2}\widehat{CAx} = \widehat{PAC}$$

Từ đó suy ra Ax đối xứng với AC qua AP, mà AC tiếp xúc với đường tròn (P) nên Ax cũng tiếp xúc với đườn tròn (P). Suy ra tiếp tuyến chung khác d của hai dường tròn (N) và (P) đi qua điểm A.

Vậy từ hai ý trên ta được bốn điểm A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi d đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 40. Gọi L và R lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác KHQ và KMF. Ta cần chứng minh ba điểm K, L, R thẳng hàng.



Thật vậy, gọi AE là đường kính của đường tròn (O) và D đối xứng với H qua BC. Khi đó dễ thấy tứ giác HBEC là hình hình hành nên ba điểm H, M, E thẳng hàng. Lại có Q thuộc đường tròn đường kính AE nên ta được $\widehat{AQF}=90^0$. Mà Q lại thuộc đường tròn đường kính AH nên ta được $\widehat{QAH}=90^0$. Từ đó ta được $\widehat{AQH}=\widehat{AQF}=90^0$ nên ba điểm Q, H, E thẳng hàng. Do vậy bốn điểm Q, H, M. E thẳng hàng. Gọi tiếp tuyến tại K và H của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHQ cắt nhau tại X.

Khi đó ta có $\widehat{XKH}=\widehat{XHK}=\widehat{KQH}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung). Mà ta lại có $\widehat{KQH}=\widehat{KAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{KE}$ của đường tròn (O)). Từ đó ta có

$$\widehat{KXH}=180^0-2\widehat{KHX}=180^0-2\widehat{KQH}=2\left(90^0-\widehat{KQH}\right)=2\left(90^0-\widehat{KAE}\right)=2\widehat{AEK}=2\widehat{KDH}$$

Lại có $XH=XK$ nên X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD.

Do D và H đối xứng nhau qua BC nên BC là đường trung trực của DH, từ đó suy ra X thuộc đường thẳng BC. Do XH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính QH nên ta có $XH\perp QH$

Xét tam giác XHM vuông tại H có đường cao HF nên ta có $XK^2=XH^2=XF.XM$

Từ đó suy ra XK là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngại tiếp tam giác KQH và KFM với tiếp điểm K là giao điểm của hai đường tròn. Do đó ta suy ra hai đường tròn ngại tiếp

tam giác KQH và KFM với tiếp xúc nhau K. Từ đó suy ra hai tâm đường tròn và tiếp điểm cùng nằm trên một đường thẳng.

Gọi P là trung điểm của AQ, ta cần chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Thật vậy, ta có bốn điểm Q, H, M, E thẳng hàng, từ đó suy ra $\widehat{KQH} = \widehat{KAE}$ nên hai tam giác vuông KQH và KAE đồng dạng. Từ đó suy ra hai tam giác KQA và KHF đồng dạng

Mà ta lại có KP và KM lần lượt là hai trung tuyến của hai tam giác KQA và KHE nên ta được hai tam giác KQP và KHM đồng dạng, suy ra $\widehat{QPK} = \widehat{QMK}$ và $\widehat{QKP} = \widehat{HKM}$.

Từ đó suy ra tứ giác QPMK nội tiếp đường tròn. Ta có biến đổi góc sau

$$\widehat{CMN} = \widehat{QKF} = \widehat{QMK} + \widehat{LKM} + \widehat{MKF} = \widehat{KPQ} + \widehat{RMK} + 90^0 - \widehat{RMF}$$
$$= 90^0 - \widehat{PMK} + \widehat{RMK} + 90^0 - \widehat{RMF} = 180^0 - \widehat{BMP} = \widehat{CMP}$$

Do đó ba điểm M, P, N thẳng hàng hay MN đi qua trung điểm của AQ. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 41. Vì tứ giác AMIN nội tiếp nên

$\widehat{ANM} = \widehat{AIM}$

Vì tứ giác BMNC nội tiếp nên $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{ABC}$.Suy ra tứ giác BOIM nội tiếp

Từ chứng minh trên suy ra tam giác AMI đồng dạng với tam giác AOB

$$\Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow AI.AO = AM.AB\,(1)$$

Gọi E, F là giao điểm của đường thẳng AO với (O) (E nằm giữa A, O).

Chứng minh tương tự (1) ta được:

$$AM.AB = AE.AF = (AO - R)(AO + R) = AO^2 - R^2 = 3R^2$$
$$\Rightarrow AI.AO = 3R^2 \Rightarrow AI = \frac{3R^2}{AO} = \frac{3R^2}{2R} = \frac{3R}{2} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}$$

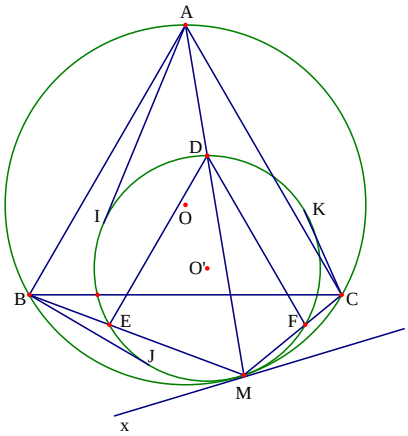
Tam giác AOB và tam giác COK đồng dạng nên

$$OA.OK = OB.OC = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OA} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

Do đó ta được OI = OK suy ra O là trung điểm IK, mà O là trung điểm của BC

Vì vậy BICK là hình bình hành

Bài 42. Kẻ tiếp tuyến chung Mx của hai đường tròn (O) và (O'). Khi đó ta được



$\widehat{MAB} = \widehat{BMx};\ \widehat{MDE} = \widehat{xME}$

Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MDE}$ nên AB // DE.

Ta có $AI^2 = AD.AM;\ BJ^2 = BE.BM$

Suy ra $\frac{BE}{BM} = \frac{AD}{AM} \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{BM}{AM}$

Do đó ta được $\frac{BJ^2}{AI^2} = \frac{BE.BM}{AD.AM} = \frac{BM^2}{AM^2}$

Suy ra $\frac{BJ}{AI} = \frac{BM}{AM}$, tương tự ta được $\frac{CK}{AI} = \frac{CM}{AM}$.

Như vậy ta có $\frac{BJ+CK}{AI} = \frac{BM+CM}{AM}$, mà ta chứng minh được $AM = BM + CM$.

Suy ra $AI = BJ + CK$.

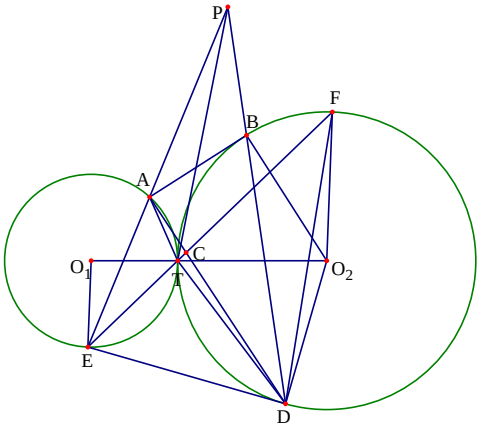
Bài 43.

+ Gọi $r_1; r_2$ lần lượt là bán kính của các đường tròn (O_1) và (O_2). Gọi F là giao điểm của ET với đường tròn (O_2).

Xét hai tam giác ETD và EDF có $\widehat{DEF}$ là góc chung và $\widehat{EDT} = \widehat{EFD}$ nên $\Delta ETD \backsim \Delta EDF$

Từ đó suy ra $\frac{ET}{ED} = \frac{ED}{EF} \Rightarrow ED^2 = ET.EF$. Ta lại có

$\left(\frac{ED}{ET}\right)^2 - 1 = \frac{ED^2}{ET^2} - 1 = \frac{ET.EF}{ET^2} - 1 = \frac{EF - ET}{ET} = \frac{FT}{ET}$.



Xét hai tam giác cân O_1ET và O_2FT có $\widehat{O_1ET} = \widehat{O_2FT}$ nên $\Delta O_1ET \backsim \Delta O_2FT$.

Do đó ta được $\frac{FT}{ET} = \frac{O_2T}{O_1T} = \frac{r_2}{r_1}$. Từ đó ta được

$\left(\frac{ED}{ET}\right)^2 - 1 = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \left(\frac{ED}{ET}\right)^2 = \frac{r_2}{r_1} + 1 \Rightarrow \frac{ED}{ET} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1} + 1}$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được $\frac{AB}{AT} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1} + 1}$. Từ đó ta thu được $\frac{AB}{AT} = \frac{ED}{ET}$

.

+ Gọi C là giao điểm của AB, DE. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác CAE với ba điểm P, B, D thẳng hàng ta được $\frac{PA}{PE}.\frac{DE}{DC}.\frac{BC}{BA}=1$.

Mà ta lại có $BC=DC$ nên ta thu được $\frac{PA}{PE}.\frac{DE}{DC}.\frac{BC}{BA}=\frac{PA}{PE}.\frac{DE}{AB}=1\Rightarrow\frac{PA}{PE}=\frac{AB}{DE}$.

Lại có $\frac{AB}{AT}=\frac{ED}{ET}\Rightarrow\frac{AB}{ED}=\frac{AT}{ET}$ nên suy ra $\frac{PA}{PE}=\frac{AT}{ET}$. Từ đó ta suy ra TP là đường phân giác ngoài tại đỉnh T của tam giác ATE.

Do đó ta được $\widehat{ATP}=\frac{1}{2}\widehat{AFT}$. Như vậy $\widehat{ATP}+\widehat{ETP}=\widehat{ATP}+\widehat{ATP}+\widehat{ETP}=\widehat{ATF}+\widehat{ETA}=180^0$

Bài 44. Ta có $\widehat{AOO'}=2\widehat{ACF}$ và $\widehat{AO'O}=2\widehat{AFC}$. Mà ta có $\widehat{OAO'}=90^0$ nên $\widehat{AOO'}+\widehat{AO'O}=90^0$.

Từ đó suy ra $\widehat{ACF}+\widehat{AFC}=45^0$. Mà tam giác O'AL cân nên ta lại có

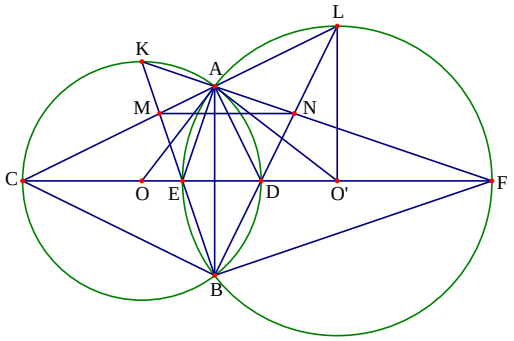
$$\widehat{O'AL}=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{AO'L}\right)=90^0-\frac{1}{2}\widehat{AO'L}$$
$$=90^0-\widehat{ABL}=90^0-\widehat{ABD}=90^0-\widehat{ACF}$$

Mặt khác ta có

$$\widehat{CAL}=\widehat{CAO}+\widehat{OAO'}+\widehat{O'AL}.$$

Do đó

$$\widehat{CAL}=\widehat{ACF}+90^0+90^0-\widehat{ACF}=180^0.$$



Từ đó suy ra ba điểm C, A, L thẳng hàng. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được K, A, F thẳng hàng.

Áp dụng định lia Menelaus cho tam giác CME với bộ ba điểm K, A, F thẳng hàng ta được

$$\frac{KE}{KM}.\frac{AM}{AC}.\frac{FC}{FE}=1\Rightarrow\frac{KE}{KM}=\frac{AC.EF}{AM.FC}$$

Áp dụng định lia Menelaus cho tam giác CME với bộ ba điểm K, A, F thẳng hàng ta được

$$\frac{LD}{LN}.\frac{AN}{AF}.\frac{CF}{CD}=1\Rightarrow\frac{LN}{LD}=\frac{AN.CF}{AF.CD}$$

Lại có $\frac{EF}{CD}=\frac{2EO'}{2OD}=\frac{O'E}{OD}$. Do đó $\frac{KE}{KM}.\frac{LN}{LD}=\frac{AC.EF.AN.CF}{AM.FC.AF.CD}=\frac{AC.AN.FE}{AM.AF.CD}=\frac{AC.AN.O'E}{AM.AF.OD}$

Do hai tứ giác AEBF và ACBD nội tiếp nên ta được $\widehat{EBA}=\widehat{EFA};\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$

Suy ra ta được $\begin{cases} \widehat{MAN} = \widehat{CAF} = 180^0 - \left(\widehat{ACF} + \widehat{AFC}\right) = 180^0 - 45^0 = 135^0 \\ \widehat{MBN} = \widehat{EBA} + \widehat{ABD} = \widehat{EFA} + \widehat{ACD} = \widehat{CAF} = 45^0 \end{cases}$

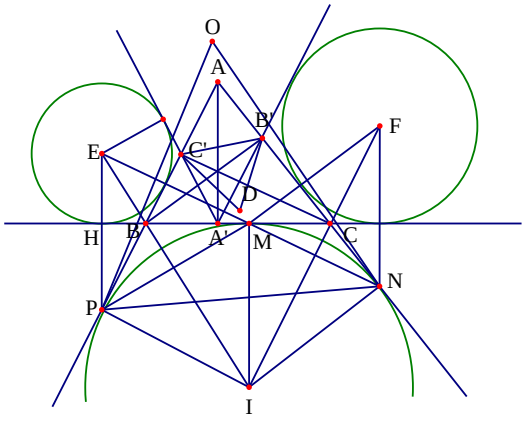
Từ đó ta được $\widehat{MAN} + \widehat{MBN} = 180^0$ nên tứ giác AMBN nội tiếp đường tròn.

Từ đó ta được $\widehat{AMN} = \widehat{ABN} = \widehat{ACD} = \widehat{ACF}$, suy ra MN song song với CF.

Theo định lí Talets ta được $\frac{AC}{AM} = \frac{AF}{AN} \Rightarrow \frac{AC.AN}{AM.AF} = 1$.

Do đó từ $\frac{KE}{KM}.\frac{LN}{LD} = \frac{AC.AN.O'E}{AM.AF.OD}$ ta thu được $\frac{KE}{KM}.\frac{LN}{LD} = \frac{O'E}{OD}$

Bài 45. Gọi I là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Gọi H là tiếp điểm của đường tròn (E) với đường thẳng BC.



Nhận thấy ba điểm E, B, I thẳng hàng và ba điểm I, C, F thẳng hàng.

Dễ thấy tứ giác AC'A'C nội tiếp được, do đó ta có $\widehat{EA'H} = \frac{1}{2}\widehat{BA'C'} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAP}$.

Xét hai tam giác vuông EA'H và IPA có

$\widehat{EA'H} = \widehat{IAP}$ nên suy ra $\Delta EA'H \backsim \Delta IAP$

Do đó ta được $\frac{HA'}{PA} = \frac{EH}{IP}$. Mà ta lại có $IM = IP$, $MB = PB$ và HE//IM nên ta có $\frac{EH}{IM} = \frac{HB}{BM}$

Từ đó suy ra $\frac{HA'}{PA} = \frac{EH}{IP} = \frac{EH}{IM} = \frac{HB}{BM} = \frac{HB}{PB}$ suy ra $\frac{HB}{HA'} = \frac{PA}{PB}$

Do đó ta được HP//AA'. Nên theo tiên đề Oclit thì ba điểm E, H, P thẳng hàng, do đó IM//EP.

Từ đó ta được $\widehat{PEI} = \widehat{PIB} = \widehat{EHM}$ nên ta có tam giác EPI cân tại P, suy ra $EP = PI = IM$

Tứ giác EPIM có EP//IM và lại có $EP = PI = IM$ nên nó là hình thoi.

Hoàn toàn tương tự ta cũng được PIND, FNIIM là các hình thoi

Từ đó ta được EM//IP//DN và $EM = PI = DN$; FM//NI//DP và $FM = NI = DP$

Suy ra các tứ giác EMND, FMPD là các hình bình hành nên ta được PM//FD và MN//DE.

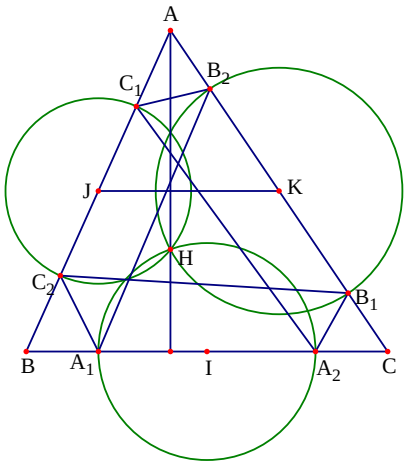
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF, kho đó ta có $OD = OE = OF$

Kết hợp với $PE = PI = PD$ nên ta được PO là đường trung trực của DE hay $PO \perp DE$

Mà ta có DE//MN nên ta có $PO \perp MN$. Chứng minh tương tự ta được $ON \perp MP$.

Vậy O là trực tâm tam giác MNP.

Bài 46. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC và P là giao điểm thứ hai của hai đường tròn tâm J và K.



Khi đó ta có JK vuông góc với PH. Vì JK//BC nên ta được JK vuông góc với AH. Do đó điểm P nằm trên đường cao AH của tam giác ABC và AH cũng là đường thẳng đi qua hai giao điểm của hai đường tròn tâm J, K. Từ đó ta suy ra được $AB_1.AB_2 = AC_1.AC_2$ nên tứ giác $B_1B_2C_1C_2$ nội tiếp đường tròn.

Chứng minh tương tự ta có BH là đường thẳng đi qua hai giao điểm của hai đường tròn tâm I, J. Nên ta được $BA_1.BA_2 = BC_1.BC_2$, do đó tứ giác $A_1A_2C_1C_2$ nội tiếp đường tròn.

Và CH là là đường thẳng đi qua hai giao điểm của hai đường tròn tâm I, K. Nên ta được $CA_1.CA_2 = CB_1.CB_2$, do đó tứ giác $A_1A_2B_2B_2$ nội tiếp đường tròn

Như vậy các tứ giác $B_1B_2C_1C_2$, $A_1A_2C_1C_2$ và $A_1A_2B_2B_2$ nội tiếp cùng một đường tròn

Điều này chứng tỏ 6 điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn có tâm là giao điểm các đường trung trực của AB, BC, AC và đó cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.