

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các tính chất cơ bản của diện tích đa giác

Mỗi đa giác có một diện tích xác định, diện tích đa giác là một số dương. Diện tích đa giác có các tính chất sau:

- + Hai đa giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.
- + Hình vuông cạnh có độ dài bằng 1(đvdd) thì diện tích là 1(đvdt), hình vuông đó được gọi là hình vuông đơn vị.
- + Nếu đa giác H được chia thành các đa giác $H_1; H_2; \dots; H_n$ đôi một không có điểm chung trong. Khi đó ta được $S_H = S_{H_1} + S_{H_2} + \dots + S_{H_n}$
- + Nếu một đa giác H suy biến có $S_H = 0$ thì các đỉnh của đa giác cùng nằm trên một đường thẳng.

2. Diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có các cạnh là a, b, c và $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi. Gọi $h_a; h_b; h_c$ là đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c và $r_a; r_b; r_c$ là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các cạnh a, b, c . Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó ta có:

$$1) S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$3) S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = pr = p \cdot r$$

$$4) \text{ Công thức Heron: } S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$5) S_{ABC} = p(p-a) \tan \frac{A}{2} = p(p-b) \tan \frac{B}{2} = p(p-c) \tan \frac{C}{2}$$

Chú ý: Công thức 2 và 5 chỉ áp dụng cho tam giác nhọn.

3. Diện tích các tứ giác.

- + Diện tích hình chữ nhật: $S = ab$, với a, b là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật.

+ Diện tích hình thang: $S = \frac{h(a+b)}{2}$, với a, b là độ dài hai đáy và h là chiều cao.

+ Diện tích hình bình hành: $S = ah_a$, với a và h_a là độ dài cạnh và đường cao tương ứng.

+ Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$, với d_1, d_2 là độ dài hai đường chéo.

+ Diện tích hình thoi: $S = ah = \frac{1}{2}d_1.d_2$, với a và h là độ dài cạnh và đường cao, d_1 và d_2 là độ dài hai đường chéo.

+ Diện tích hình vuông: $S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$, với a là độ dài cạnh và d là độ dài đường chéo của hình vuông.

4. Một số tính chất cơ bản về diện tích tam giác.

+ Nếu hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số hai đáy tương ứng bằng tỉ số hai diện tích. Ngược lại, nếu hai tam giác có cùng đáy thì tỉ số hai chiều cao tương ứng bằng tỉ số hai diện tích.

+ Nếu hai tam giác có cùng chung đáy và có cùng diện tích thì đỉnh thứ ba thuộc đường thẳng song song với đáy.

+ Đường trung bình trong một tam giác chia tam giác đó thành hai phần có diện tích tỉ lệ với $1 : 3$.

+ Đường trung tuyến của một tam giác chia tam giác đó thành hai phần có diện tích bằng nhau.

+ Ba tam giác có chung đỉnh là trọng tâm của một tam giác còn đáy là ba cạnh thì có diện tích bằng nhau.

+ Nếu một tam giác và một hình bình hành có cùng đáy và cùng chiều cao thì diện tích tam giác bằng nửa diện tích hình bình hành.

+ Với mọi tam giác ABC ta luôn có $AB.AC \geq 2S_{ABC}$, dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC vuông tại A .

+ Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\widehat{A} = \widehat{A'}$ hoặc $\widehat{A} + \widehat{A'} = 180^\circ$ thì $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$

Các tính chất nêu trên của tam giác được chứng minh tương đối đơn giản và ta sẽ công nhận chúng khi giải các bài toán về diện tích.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có các cạnh là a, b, c và $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Lời giải

Trong một tam giác luôn tồn tại một đỉnh mà chân đường cao hạ từ đỉnh đó nằm trên cạnh đối diện không mất tính tổng quát, ta giả sử đó là đỉnh A.

Gọi $AH = h$ là đường cao của $\triangle ABC$. Ta có $HB + HC = BC$

Đặt $BH = x$ ($0 \leq x \leq a$). Từ đó ta có $HC = a - x$

Theo định lý Pitago ta có
$$\begin{cases} h^2 + x^2 = c^2 \\ h^2 + (a-x)^2 = b^2 \end{cases}$$

Từ đó ta được $2ax - a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$

Thay vào hệ thức thứ nhất của hệ trên ta được $h^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2 = c^2$ hay ta được

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) \left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2} \end{aligned}$$

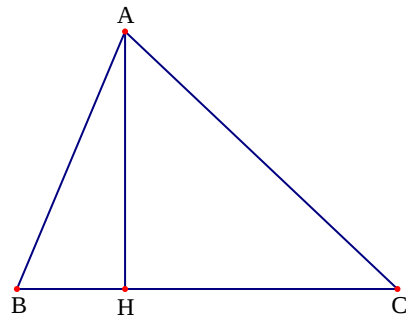
Mặt khác ta có $2p = a + b + c \Rightarrow a + b - c = 2(p - c); b + c - a = 2(p - a); a + c - b = 2(p - b)$

Suy ta $h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$. Từ đó ta suy ra được

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AB = 3AM$ và trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AC = 3AN$. Nối CM và BN cắt nhau tại O. Biết $S_{ABC} = 24\text{cm}^2$. Tính diện tích tứ giác OMAN.

Lời giải



Cách 1: Ta có $S_{OBM} = 2.S_{AMO}$ vì hai tam giác OMB, OAM có chung đường cao hạ từ O và $BM = 2.AM$.
Lại có $S_{ONC} = 2.S_{ANO}$ vì hai tam giác OCN, OAN có chung đường cao hạ từ O và $NC = 2.AN$.

Mà $S_{\Delta MBC} = S_{\Delta NBC} = \frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$ vì hai tam giác MBC và NBC cùng chứa tam giác OBC.

Do vậy suy ra $S_{BOM} = S_{NOC}$ và $S_{AOM} = S_{NOA}$. Từ đó suy ra $S_{ABN} = 4.S_{AON}$ hay $S_{ABN} = 2.S_{AMON}$

Mà $S_{ABN} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Cho nên $S_{AMON} = \frac{1}{6}S_{ABC} = \frac{1}{6}.24 = 4\text{cm}^2$

Cách 2: Ta có $S_{MBC} = \frac{2}{3}S_{ABC}$ vì hai tam giác có chung đường cao hạ từ C và $MB = \frac{2}{3}AB$

$S_{NBC} = \frac{2}{3}S_{ABC}$ vì hai tam giác có chung đường cao hạ từ B và $MC = \frac{2}{3}AC$

Từ đó ta được $S_{NBC} = S_{MBC}$, mà hai tam giác cùng chứa tam giác OBC cho nên $S_{OBM} = S_{OCN}$

Mà ta có $S_{OBM} = \frac{2}{3}S_{AOB}$ và $S_{OCN} = \frac{2}{3}S_{AOC}$ nên suy ra $S_{AOB} = S_{AOC}$

Mà lại có $S_{AMO} = \frac{1}{3}S_{AOB}$ nên ta được $S_{AMO} = \frac{1}{3}S_{AOC}$ và $S_{AMO} = \frac{1}{4}S_{AMC} = \frac{1}{12}S_{ABC}$

Hoàn toàn tương tự ta được $S_{ANO} = \frac{1}{12}S_{ABC}$. Do đó

$$S_{AMON} = S_{AOM} + S_{AON} = \frac{1}{6}S_{ABC} = \frac{1}{6}.24 = 4\text{ cm}^2$$

Ví dụ 3. Cho tứ giác ABCD và điểm O nằm trong tứ giác. Gọi M, N, P, Q là các điểm đối xứng của O qua trung điểm các cạnh của tứ giác. Tính diện tích của tứ giác MNPQ biết $S_{ABCD} = 12\text{cm}^2$.

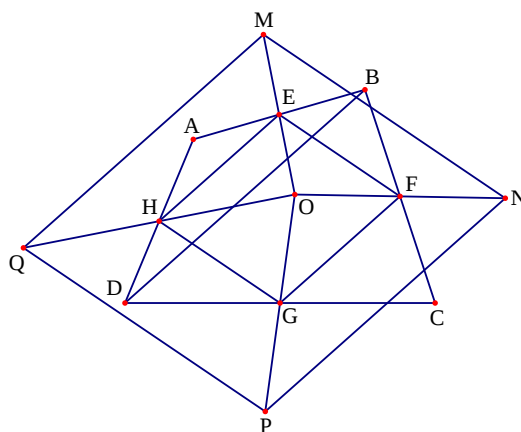
Lời giải

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và AD. Nối các điểm E, F, G, H khi đó dễ chứng minh tứ giác EFGH là hình bình hành.

Nối BD ta có $S_{CGF} = \frac{1}{4}S_{BCD}$ và

$S_{AEH} = \frac{1}{4}S_{ABD}$. Do đó ta được

$$S_{FGC} + S_{AEH} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$



Hoàn toàn tương tự ta được

$$S_{FEB} + S_{DHG} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

Nên suy ra

$$S_{FGC} + S_{AEH} + S_{FEB} + S_{DHG} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Do vậy $S_{EFGH} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Mà ta có $S_{OMN} = 4.S_{OEF}$; $S_{OMQ} = 4.S_{OEH}$; $S_{OPQ} = 4.S_{OHG}$; $S_{ONP} = 4.S_{OFG}$

Do đó ta được $S_{MNPQ} = 4.S_{EFGH}$. Từ đó suy ra $S_{MNPQ} = 2.S_{ABCD}$

Mà ta có $S_{ABCD} = 12 \text{ cm}^2$ nên $S_{MNPQ} = 24 \text{ cm}^2$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c và các đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c . Chứng minh rằng:

a) Nếu $h_a + a = h_b + b$ thì tam giác ABC là tam giác vuông hoặc cân.

b) Nếu $h_a + a = h_b + b = h_c + c$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

a) Theo công thức diện tích tam giác ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$; $h_b = \frac{2S}{b}$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} a + h_a = b + h_b &\Rightarrow a + \frac{2S}{a} = b + \frac{2S}{b} \Rightarrow a - b + \frac{2Sa - 2Sb}{ab} = 0 \\ &\Rightarrow (a - b) - (a - b) \left(\frac{2S}{ab} \right) \Rightarrow (a - b) \left(1 - \frac{2S}{ab} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 2S = ab \end{cases} \end{aligned}$$

+ Nếu $a = b$ thì tam giác ABC cân

+ Nếu $2S = ab$ thì tam giác ABC vuông

b) Theo công thức diện tích tam giác ta có

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}; h_b = \frac{2S}{b}; h_c = \frac{2S}{c}$$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} a + h_a = b + h_b &\Rightarrow a + \frac{2S}{a} = b + \frac{2S}{b} \Rightarrow a - b + \frac{2Sa - 2Sb}{ab} = 0 \\ &\Rightarrow (a - b) - (a - b) \left(\frac{2S}{ab} \right) \Rightarrow (a - b) \left(1 - \frac{2S}{ab} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 2S = ab \end{cases} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta suy ra được $\begin{cases} b = c \\ 2S = bc \end{cases}$ và $\begin{cases} a = c \\ 2S = ac \end{cases}$

Kết hợp các điều kiện trên ta được $a = b = c$ hay tam giác ABC đều

Ví dụ 5. Cho hình bình hành ABCD, trên cạnh AB, CD lấy các điểm E, F sao cho $AF = CE$.

Gọi I là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng $\widehat{AID} = \widehat{CID}$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh

$$S_{AFD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}; S_{EDC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Thật vậy, gọi AM là đường cao của hình bình hành ABCD xuất phát từ A. Khi đó các tam giác ABF, AFD, ECD có cùng đường cao AM

Ta có

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} AM.BF; S_{AFD} = \frac{1}{2} AM.AD; S_{CDF} = \frac{1}{2} AM.FC$$

Vì $BF + FC = BC = AD$ nên ta được

$$\frac{1}{2} AM.AD = \frac{1}{2} AM.BF + \frac{1}{2} AM.FC \Rightarrow S_{AFD} = S_{ABF} + S_{CDF}$$

Mà ta lại có $S_{ABCD} = S_{AFD} + S_{ABF} + S_{CDF} \Rightarrow S_{AFD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

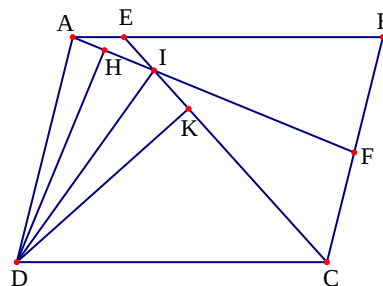
Chứng minh tương tự ta có $S_{CDE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Từ đó ta được $S_{AFD} = S_{CDE}$

Gọi DH là đường cao của tam giác AFD và DK là đường cao của tam giác DEC

Khi đó ta có $S_{AFD} = \frac{1}{2} DH.AF; S_{DEC} = \frac{1}{2} DK.CE$

Từ đó ta được $DH.AF = DK.CE$. Theo giả thiết $AF = CE$ ta được $DH = DK$

Như vậy D nằm trên tia phân giác của góc $\widehat{AIC}$ nên ta được $\widehat{AID} = \widehat{CID}$ (đpcm)



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC, Từ một điểm M nằm trên cạnh BC vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB tại Q và P. Chứng minh rằng $\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} = 1$

Lời giải

Nối AM, BQ, CP. Do $MQ \parallel AB$ nên $S_{AMQ} = S_{BMQ}$

Nên ta được

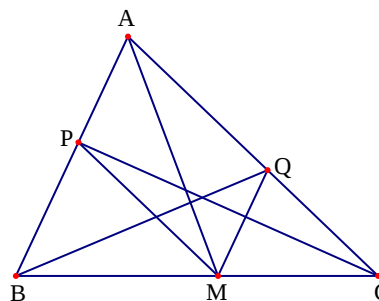
$$S_{AMQ} + S_{CMQ} = S_{BMQ} + S_{CMQ} \Rightarrow S_{AMC} = S_{BQC}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $PM \parallel CA$ nên được

$$S_{AMC} = S_{APC} \text{ suy ra } S_{BQC} = S_{APC}$$

Mà ta lại có $\frac{AP}{AB} = \frac{S_{APC}}{S_{ABC}}; \frac{AQ}{AC} = \frac{S_{AQB}}{S_{ABC}}$ nên suy ra

$$\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} = \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AQB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{APC} + S_{AQB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BQC} + S_{AQB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$



Vậy ta suy ra được $\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} = 1$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có $AB = 2AC$ và đường phân giác AD. Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC và $r; r_1; r_2$ lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ADC, ADB.

$$\text{Chứng minh rằng } AD = \frac{p \cdot r}{3} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right) - p$$

Lời giải

Vì $AB = 2AC$ nên $S_{ABD} = 2S_{ADC}$. Mà hai tam giác ABC và ACD có chung đường cao kẻ từ D nên ta suy ra được $BD = 2CD$

Dễ thấy $S_{ADC} = \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3}pr$, do đó ta

được $S_{ABD} = \frac{2}{3}pr$

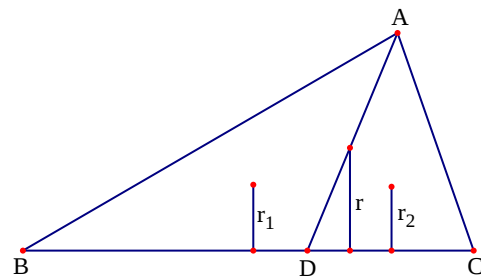
$$\text{Mặt khác ta lại có } \begin{cases} S_{ACD} = \frac{1}{2}r_1(AC + AD + CD) \\ S_{ABD} = \frac{1}{2}r_2(AB + AD + BD) \end{cases}$$

$$\text{Cho nên ta được } \begin{cases} \frac{AC + AD + CD}{2} = \frac{pr}{3r_1} \\ \frac{AB + AD + BD}{2} = \frac{2pr}{3r_2} \end{cases}$$

Cộng từng vế ta được các đẳng thức trên ta có

$$\frac{AC + AD + CD + AB + AD + BD}{2} = \frac{AC + AB + BC + 2AD}{2} = p + AD = \frac{pr}{3} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right)$$

$$\text{Do đó suy ra } AD = \frac{pr}{3} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right) - p$$



Ví dụ 8. Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm E, F bất kì. Gọi M, N, K theo thứ tự là trung điểm của DE, DF, EF. Gọi O là giao điểm của AM và CN. Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải

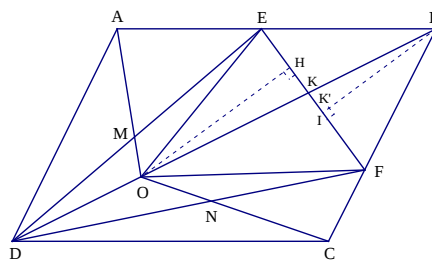
Để chứng minh được $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OAD} + S_{OBC}$

Vì M là trung điểm của DE nên $S_{OAD} = S_{AOE}$

Vì N là trung điểm của DF nên $S_{OCD} = S_{FCO}$

Do đó ta có $S_{AOE} + S_{EOB} + S_{COD} = S_{AOD} + S_{FOB} + S_{FCO}$

Suy ra $S_{EOB} = S_{FOB}$



$$\text{Mặt khác ta có } \begin{cases} S_{\triangle EOB} = S_{\triangle EBK'} + S_{\triangle EOK'} = \frac{1}{2}EK' \cdot BI + \frac{1}{2}OH \cdot EK' \\ S_{\triangle FOB} = S_{\triangle FOK'} + S_{\triangle FBK'} = \frac{1}{2}FK' \cdot OH + \frac{1}{2}FK' \cdot BI \end{cases}$$

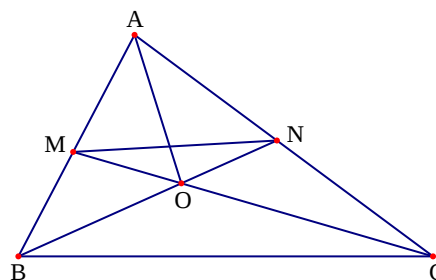
$$EK' \cdot BI + OH \cdot EK' = FK' \cdot OH + FK' \cdot BI \Rightarrow (BI - OH)(EK' - FK') = 0 \Rightarrow EK' = FK'$$

Hay K' là trung điểm của EF nên $K' \equiv K$ suy ra BO đi qua K hay O, K, B thẳng hàng

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC và một đường thẳng chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau và chu vi bằng nhau. Chứng minh các đường thẳng đó luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Giả sử đường thẳng MN thỏa mãn điều kiện của bài. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và r là bán kính của đường tròn. Không mất tính tổng quát ta giả sử O nằm trong hình MBCN.



Mà ta có $AM + AN = MB + BC + CN$ và

$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle MBCN}$$

Do đó ta suy ra được

$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle AMO} + S_{\triangle AON} - S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}r \cdot AM + \frac{1}{2}r \cdot AN - S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}r(AM + AN) - S_{\triangle OMN}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle MBCN} &= S_{\triangle OMB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCN} + S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}r \cdot MB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot CN + S_{\triangle OMN} \\ &= \frac{1}{2}r(MB + BC + NC) + S_{\triangle OMN} \end{aligned}$$

Từ các kết quả trên ta được $S_{\triangle OMN} = 0$ nên ba điểm M, O, N thẳng hàng hay MN đi qua điểm O.

Do O cố định nên MN luôn đi qua điểm cố định.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có diện tích S. Trên cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm M, N thỏa mãn điều kiện $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = k$ với k là một số dương cho trước. Gọi I là giao điểm của BN với CM.

a) Chứng minh rằng $S_{AMIN} = S_{IBC}$

b) Tính diện tích tứ giác AMIN theo S và k, từ đó xác định k để diện tích tứ giác AMIN đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

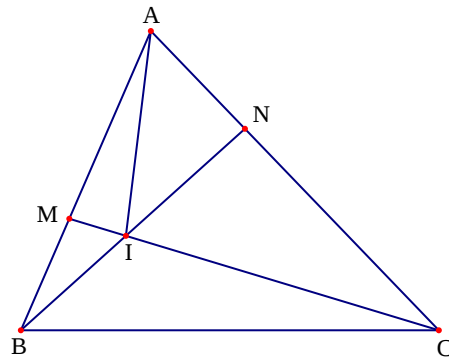
a) Do $\frac{AM}{BM} = k$ nên ta có $\frac{S_{AMC}}{S} = \frac{AM}{AB} = \frac{k}{k+1}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{S_{BNC}}{S} = \frac{CN}{CA} = \frac{k}{k+1}$

Do đó ta được $S_{AMC} = S_{BNC}$, nên suy ra

$S_{AMC} - S_{INC} = S_{BNC} - S_{INC}$ hay ta được

$S_{AMIN} = S_{IBC}$



b) Ta có

$$\frac{BI}{BN} = \frac{S_{IBC}}{S_{INC}} = \frac{S_{IBC}}{S_{IAC}} \cdot \frac{S_{IAC}}{S_{INC}} = \frac{1}{k} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{k+1}{k^2}$$

Từ đó ta được $\frac{BI}{BN} = \frac{BI}{BI+IN} = \frac{k+1}{k^2+k+1}$, do đó $\frac{S_{IBC}}{S_{NBC}} = \frac{BI}{BN} = \frac{k+1}{k^2+k+1}$

Lại do $\frac{CN}{AN} = k$ nên $\frac{S_{NBC}}{S} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow S_{NBC} = \frac{k}{k+1} S$

Do đó ta được $S_{IBC} = \frac{k+1}{k^2+k+1} S_{NBC} = \frac{k+1}{k^2+k+1} \cdot \frac{k}{k+1} S = \frac{k}{k^2+k+1} S$

Do vậy ta được $S_{AMIN} = S_{IBC} = \frac{k}{k^2+k+1} S$.

Do $k^2 + 1 \geq 2k$ nên ta được ..

Vậy ta được $S_{AMIN} \leq \frac{1}{3} S$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $k = 1$ hay M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có diện tích S và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $\frac{MA}{MB} = m$; $\frac{NB}{NC} = n$; $\frac{PC}{PA} = k$.

a) Chứng minh rằng $\frac{S_{MNP}}{S} = \frac{1 + mnk}{(m+1)(n+1)(k+1)}$.

b) Chứng minh rằng nếu AN, BP, CM đồng quy thì $S_{MNP} \leq \frac{1}{4}S$.

c) Giả sử AN, BP, CM là ba đường phân giác của tam giác ABC. Tính diện tích tam giác MNP theo S và ba cạnh của tam giác ABC.

Lời giải

a) Đặt $S_{AMP} = S_1$; $S_{BMN} = S_2$; $S_{CPN} = S_3$. Từ

giả thiết ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{m}{m+1}$; $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{k+1}$.

Do đó ta được

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AP \cdot AM}{AC \cdot AB} = \frac{m}{(m+1)(k+1)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{S_2}{S} = \frac{n}{(m+1)(n+1)} \text{ và } \frac{S_3}{S} = \frac{k}{(n+1)(k+1)}$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{m(n+1) + n(k+1) + n(m+1)}{(m+1)(n+1)(k+1)}$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{S_{MNP}}{S} &= 1 - \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = 1 - \frac{m(n+1) + n(k+1) + n(m+1)}{(m+1)(n+1)(k+1)} \\ &= \frac{(m+1)(n+1)(k+1) - m(n+1) - n(k+1) - n(m+1)}{(m+1)(n+1)(k+1)} = \frac{1 + mnk}{(m+1)(n+1)(k+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{MNP}}{S} = \frac{1 + mnk}{(m+1)(n+1)(k+1)}.$$

b) Giả sử AN, BP, CM đồng quy. Khi đó theo định lí Ceva ta có $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$ hay $mnk = 1$

$$\text{Do đó ta được } \frac{S_{MNP}}{S} = \frac{2}{(m+1)(n+1)(k+1)} \leq \frac{2}{2\sqrt{m} \cdot 2\sqrt{n} \cdot 2\sqrt{k}} = \frac{1}{4}$$

Nên ta được $S_{MNP} \leq \frac{1}{4}S$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = n = k = 1$ hay M, N, P lần lượt

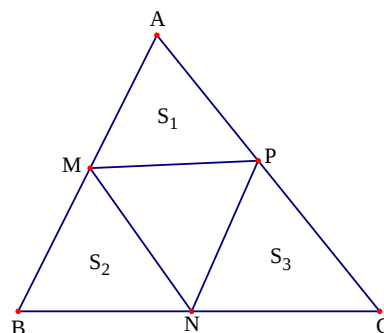
là trung điểm của AB, BC, CA.

c) Giả sử AN, BP, CM là ba đường phân giác của tam giác ABC. Đặt $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$

Áp dụng tính chất đường phân giác ta được $\frac{BM}{AM} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow m = \frac{b}{a}$

Hoàn toàn tương tự ta được $n = \frac{c}{b}$; $k = \frac{a}{c}$.

$$\text{Thay vào hệ thức } \frac{S_{MNP}}{S} = \frac{1 + mnk}{(m+1)(n+1)(k+1)} \text{ ta được } \frac{S_{MNP}}{S} = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$



Do đó ta được $S_{MNP} = \frac{abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Ví dụ 12. Cho tam giác MNP và ba điểm A, B, C lần lượt nằm trên cạnh NP, PM, MN. Qua M, N, P kẻ các đường thẳng lần lượt song song với BC, CA, AB. Ba đường thẳng đó cắt nhau theo từng đôi một tạo thành tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng $S_{MNP}^2 = S_{ABC} \cdot S_{A'B'C'}$

Lời giải

Ta thấy tam giác ABC nằm trong tam giác A'B'C' và có các cạnh tương ứng $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$. Do đó ta có thể chứng minh được AA', BB', CC' đồng quy tại điểm O nằm trong tam giác ABC.

Do $B'C' \parallel BC$ nên ta được $S_{MBC} = S_{B'BC} = S_{C'BC}$ suy

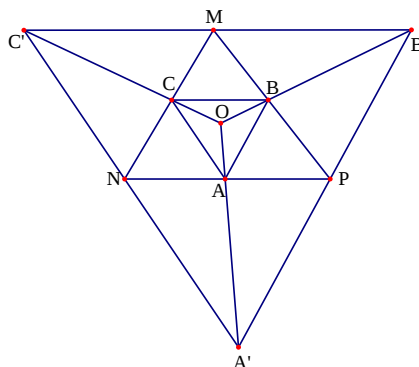
$$\text{ra } S_{OBMC} = S_{OCB'} = S_{OBC'}$$

Để thấy hai tam giác A'B'C' và ABC đồng dạng với nhau, giả sử tỉ số đồng dạng là k.

Khi đó ta có $\frac{S_{OBMC}}{S_{OBC}} = \frac{S_{OBC'}}{S_{OBC}} = \frac{OC'}{OC} = \frac{S_{OB'C'}}{S_{OB'C}} = \frac{S_{OB'C'}}{S_{OBMC}}$ nên ta được $S_{OBMC}^2 = S_{OBC} \cdot S_{OB'C'} = k^2 \cdot S_{OBC}^2$

Hay ta được $S_{OBMC} = k \cdot S_{OBC}$. Hoàn toàn tương tự ta được $S_{OCNA} = k \cdot S_{OCA}$; $S_{OAPB} = k \cdot S_{OAB}$

Từ đó ta được $S_{MNP} = k \cdot S_{ABC}$ nên ta được $S_{MNP}^2 = k^2 \cdot S_{ABC}^2 = S_{ABC} \cdot S_{A'B'C'}$



Ví dụ 13. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Giả sử AC cắt BD tại O. Chứng minh rằng $S_{MENF} = \frac{1}{2} |S_{OAB} - S_{OCD}|$

Lời giải

Bài toán có hai trường hợp xảy ra

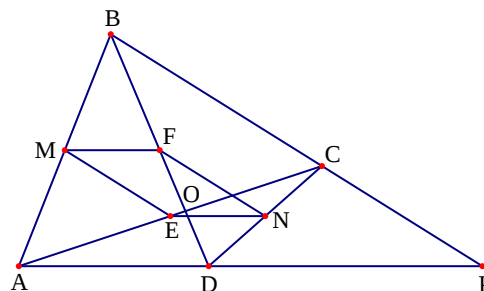
+ Trường hợp 1: Nếu $S_{OAB} = S_{OCD}$, khi đó ta

được $S_{ABD} = S_{ACD}$. Từ đó suy ra AD và BC

song song với nhau, do đó ta được M, N, E, F thẳng hàng. Vậy ta được

$$S_{MENF} = \frac{1}{2} |S_{OAB} - S_{OCD}| = 0.$$

+ Trường hợp 2: Nếu $S_{OAB} \neq S_{OCD}$, khi đó



không mất tính tổng quát ta giả sử

$$S_{OAB} > S_{OCD}$$

Từ đó ta được $S_{ABD} > S_{ACD}$ nên suy ra điểm C gần AD hơn điểm B, do đó BC cắt AD tại điểm P nằm ngoài BC, AD về phía C, D tương ứng. Từ đó ta dễ thấy tứ giác MENF là hình bình hành và $\widehat{APB} = \widehat{ENF}$.

Đặt $\widehat{APB} = \widehat{ENF} = \alpha$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} S_{MENF} &= ME \cdot NF \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} AD \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} (PA - PD)(PB - PC) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{4} (PA \cdot PB + PC \cdot PD - PA \cdot PC - PB \cdot PD) \sin \alpha = \frac{1}{2} (S_{PAB} + S_{PCD} - S_{PAC} - S_{PBD}) \\ &= \frac{1}{2} [(S_{ABCD} + S_{PCD}) + S_{PCD} - (S_{PCD} + S_{ACD}) - (S_{PCD} - S_{BCD})] \\ &= \frac{1}{2} (S_{ABCD} - S_{ACD} - S_{BCD}) = \frac{1}{2} (S_{OAB} - S_{OCD}) \end{aligned}$$

Nếu $S_{OAB} < S_{OCD}$ thì ta có $S_{MENF} = \frac{1}{2} (S_{OCD} - S_{OAB})$

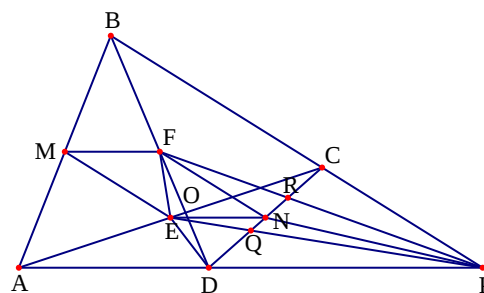
Kết hợp các trường hợp lại ta có $S_{MENF} = \frac{1}{2} |S_{OAB} - S_{OCD}|$

Ví dụ 14. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi E, F lần lượt là các trung điểm của AC, D. Giả sử AD cắt BC tại P. Chứng minh rằng $S_{PEF} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$

Lời giải

Giả sử O là giao điểm của AC với BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Do AD và BC không song song với nhau nên ta có $S_{OAB} \neq S_{OCD}$, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $S_{OAB} > S_{OCD}$. Từ đó ta được $S_{ABD} > S_{ACD}$ nên suy ra điểm C gần AD hơn điểm B, do đó BC cắt AD tại điểm P nằm ngoài BC, AD về phía C, D tương ứng. Từ đó ta dễ thấy tứ giác MENF là hình bình hành và $\widehat{APB} = \widehat{ENF}$.

Đặt $\widehat{APB} = \widehat{ENF} = \alpha$, khi đó ta có



$$\begin{aligned}
S_{MENF} &= ME.NF.\sin\alpha = \frac{1}{4}AD.BC.\sin\alpha = \frac{1}{4}(PA-PD)(PB-PC)\sin\alpha \\
&= \frac{1}{4}(PA.PB + PC.PD - PA.PC - PB.PD)\sin\alpha = \frac{1}{2}(S_{PAB} + S_{PCD} - S_{PAC} - S_{PBD}) \\
&= \frac{1}{2}[(S_{ABCD} + S_{PCD}) + S_{PCD} - (S_{PCD} + S_{ACD}) - (S_{PCD} - S_{BCD})] \\
&= \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{ACD} - S_{BCD}) = \frac{1}{2}(S_{OAB} - S_{OCD})
\end{aligned}$$

Do đó suy ra $S_{NEF} = \frac{1}{4}(S_{OAB} - S_{OCD})$.

Gọi Q, R lần lượt là giao điểm của PE, PF với DC, khi đó dễ thấy DQ và CR nhỏ hơn $\frac{1}{2}CD$.

Từ đó suy ra N nằm giữa hai và do đó N nằm trong tam giác PEF.

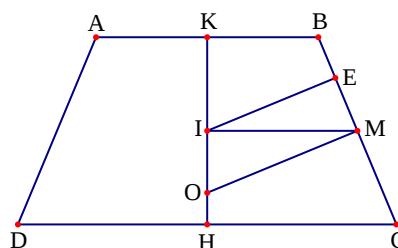
Do EN song song với AP nên ta được $S_{NEP} = S_{NED} = \frac{1}{4}S_{ACD}$. Tương tự ta được $S_{NEP} = \frac{1}{4}S_{BCD}$

Từ đó ta được $S_{PEF} = S_{NEF} + S_{NEP} + S_{NFP} = \frac{1}{4}(S_{OAB} - S_{OCD} + S_{ACD} + S_{BCD}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Ví dụ 15. Cho hình thang ABCD (AB//CD) nội tiếp đường tròn (O; R) và ngoại tiếp (I; r). Tính diện tích hình thang ABCD theo R và r.

Lời giải

Vì ABCD là hình thang nội tiếp đường tròn nên là hình thang cân. Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD, khi đó KH là đường trung trực của AB, CD. Từ đó ta được hai điểm I và O thuộc đoạn KH và I là trung điểm của KH.



Giả sử đường tròn (O; r) tiếp xúc với BC tại E. Gọi M là trung điểm của BC, khi đó ta được IE và OM cùng vuông góc với BC nên IE//OM.

Hình thang cân ABCD ngoại tiếp đường tròn nên ta có $AB + CD = AD + BC$

Từ đó chu vi của hình thang ABCD là $p = \frac{AB + BC + CD + AD}{2} = 2BC$

Do vậy $S_{ABCD} = 2BC.r$. Đặt $BC = 2x$ thì ta được $IM = MB = MC = x$

Do IE//OM nên $\widehat{EIM} = \widehat{IOM}$ nên $\triangle EIO \sim \triangle EIM$, suy ra $\frac{IE}{MI} = \frac{MI}{OM}$

Từ đó ta được $x^2 = MI^2 = IE.OM = r.\sqrt{OC^2 - MC^2} = r.\sqrt{R^2 - x^2}$ hay $x^4 = r^2.R^2 - r^2x^2$

Xét đẳng thức trên ta phương trình ẩn x^2 thì giải ra được

$$x^2 = \frac{r^2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4R^2}{r^2}} - 1 \right) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{r^2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4R^2}{r^2}} - 1 \right)} = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{r^2}} - 1}$$

$$\text{Từ đó ta được } S_{ABCD} = 2BC \cdot r = 4x \cdot r = 2\sqrt{2}r^2 \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{r^2}} - 1} \text{ (đvdt)}$$

Ví dụ 16. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Quay tam giác ABC một góc 90° quanh O ta thu được tam giác $A_1B_1C_1$. Tính diện tích phần chung của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$

Lời giải

Giả sử đường tròn (O) có chiều là

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ là chiều ngược với chiều của kim đồng hồ. Giả sử quay tam giác ABC một góc 90° quanh điểm O theo chiều thuận kim đồng hồ thì thu được tam giác $A_1B_1C_1$. Khi đó các điểm

$A_1; B_1; C_1$ lần lượt thuộc các cung $\widehat{AC}; \widehat{AB}; \widehat{BC}$.

Do đó cạnh A_1B_1 cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

Tương tự thì A_1C_1 cắt AC, BC lần lượt tại P, Q và

B_1C_1 cắt BC, BA lần lượt tại T, K. Như vậy phần

chung của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ là đa giác MNPQTK.

Gọi diện tích của lục giác MNPQTK là S, khi đó ta được $S = S_{ABC} - S_{AMN} - S_{BKT} - S_{CPQ}$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Mặt khác khi quay một góc 90° quanh điểm O thì ta được

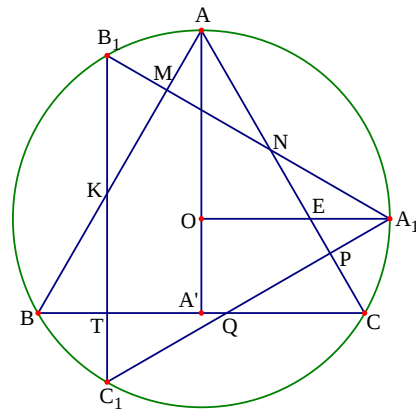
$$OA_1 \perp OA; OB_1 \perp OB; OC_1 \perp OC$$

Từ đó ta suy ra được $OA_1 \parallel BC, OB_1 \parallel CA, OC_1 \parallel AB$.

Gọi giao điểm của OA_1 với AC là E. Do các cung $\widehat{AA_1}; \widehat{BB_1}; \widehat{CC_1}$ có số đo bằng 90° nên ta được $\widehat{AMN} = 90^\circ$, mà ta lại có $\widehat{MAN} = 60^\circ$ nên ta suy ra được $AN = 2AM$. Dễ thấy $\triangle NEA_1$ cân tại E.

$$\text{Do } OE \parallel BD \text{ và } AO = \frac{2}{3}AA' \text{ nên ta được } AE = \frac{2}{3}AC = \frac{2R}{\sqrt{3}}; OE = \frac{BC}{3} = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Từ đó ta được } EN = EA_1 = OA_1 - OE = R - \frac{R}{\sqrt{3}}$$



$$\text{Suy ra } AN = AE - EN = \frac{2}{\sqrt{3}}R - \left(R - \frac{R}{\sqrt{3}}\right) = (\sqrt{3} - 1)R$$

Do vậy ta được

$$S_{AMN} = \frac{MA \cdot MN}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AN}{2} \cdot \frac{AN\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}AN^2}{8} = \frac{\sqrt{3}(4 - 2\sqrt{3})R^2}{8} = \frac{(2\sqrt{3} - 3)R^2}{4}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $S_{BTK} = S_{CPQ} = \frac{(2\sqrt{3} - 3)R^2}{4}$. Do vậy ta được

$$S = \frac{(9 - 3\sqrt{3})R^2}{4}.$$

Ví dụ 17. Cho tứ giác ABCD vừa nội tiếp, vừa ngoại tiếp được đường tròn. Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} = \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}$$

Lời giải

Giả sử đường tròn (I; r) nội tiếp tứ giác ABCD và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. Đặt

$$AM = AQ = x; BM = BN = y; CN = CP = z; DP = DQ = t$$

.

Do tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

Từ đó dễ dàng chứng minh được $\triangle IAM \sim \triangle CIN$ nên

$$\frac{AM}{IN} = \frac{IM}{CN} \Rightarrow AM \cdot CN = IM \cdot IN$$

Do đó ta được $xz = r^2$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$yt = r^2$$

$$\text{Ta có } AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = (x + y)(y + z)(z + t)(t + x)$$

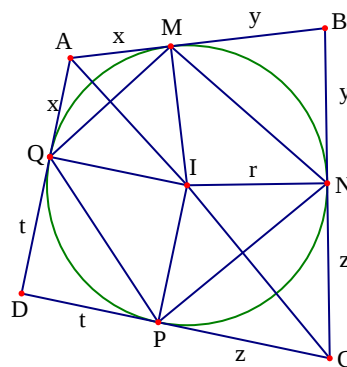
Khai triển tích trên ta được

$$\begin{aligned} AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA &= 2xyzt + yz^2t + xz^2t + zy^2t + xyt^2 + yzt^2 + zxt^2 + xzt^2 + y^2t^2 \\ &\quad + x^2yz + xyz^2 + x^2z^2 + xzy^2 + x^2yt + x^2zt + xy^2t \end{aligned}$$

Chú ý đến $xz = yt = r^2$ ta được

$$\begin{aligned} AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA &= r^2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt) \\ &= r^2(x + y + z + t)^2 = (r \cdot p)^2 = S_{ABCD}^2 \end{aligned}$$

Vậy ta được $S_{ABCD}^2 = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$.



Ví dụ 18. Cho tam giác ABC có diện tích S và ba điểm M, N, P thuộc các cạnh AB, BC, CA tương ứng. Chứng minh rằng một trong ba tam giác AMP, BMN, CPN có một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{S}{4}$.

Có kết luận được trong ba tam giác trên luôn có một tam giác có diện tích lớn hơn $\frac{S}{10^6}$ hay không?

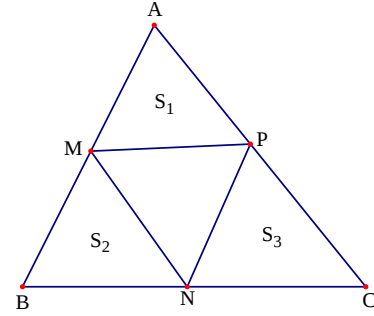
Lời giải

Đặt $S_1 = S_{AMP}$; $S_2 = S_{BMN}$; $S_3 = S_{CPN}$, khi đó ta có

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AC}; \frac{S_2}{S} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC}; \frac{S_3}{S} = \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CP}{CA}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} \cdot \frac{S_2}{S} \cdot \frac{S_3}{S} &= \frac{AM \cdot BM}{AB^2} \cdot \frac{BN \cdot CN}{BC^2} \cdot \frac{CP \cdot AP}{CA^2} \\ &\leq \frac{(AM + BM)^2}{4AB^2} \cdot \frac{(BN + CN)^2}{4BC^2} \cdot \frac{(CP + AP)^2}{4CA^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \end{aligned}$$



Từ đó suy ra một trong ba tỉ số $\frac{S_1}{S}$; $\frac{S_2}{S}$; $\frac{S_3}{S}$ không vượt quá $\frac{1}{4}$ hay một trong ba số

S_1 ; S_2 ; S_3 không vượt quá $\frac{S}{4}$. Như vậy ta không thể kết luận được trong ba số S_1 ; S_2 ; S_3

luôn có một số vượt qua $\frac{S}{10^6}$, chẳng hạn ta chọn M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA} = \frac{1}{10^6}$

thì khi đó S_1 ; S_2 ; S_3 đều bé hơn $\frac{S}{10^6}$.

Ví dụ 19. Cho ngũ giác lồi ABCDE có diện tích S. Chứng minh rằng trong năm tam giác ABC, BCD, CDE, DEA, EAB luôn có một tam giác có diện tích lớn hơn $\frac{S}{4}$.

Lời giải

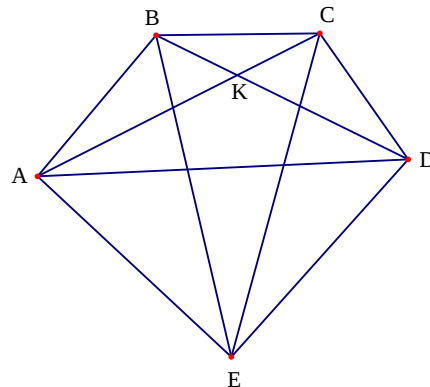
Chú ý rằng nếu điểm K nằm trên cạnh PQ của tứ giác lồi MNPQ thì ta luôn có

$$\min\{S_{PMN}; S_{QMN}\} \leq S_{KMN} \leq \max\{S_{PMN}; S_{QMN}\}$$

+ Nếu $S_{ABC} > \frac{S}{4}$ thì tam giác ABC là tam giác cần tìm.

+ Nếu $S_{BCD} > \frac{S}{4}$ thì tam giác BCD là tam giác cần tìm.

+ Nếu $S_{ABC} \leq \frac{S}{4}$ và $S_{BCD} \leq \frac{S}{4}$ thì ta được



$$S_{ABCDK} = S_{ABC} + S_{BCD} - S_{KBC} < \frac{S}{2}$$

Như vậy một trong hai tam giác KDE hoặc KEA có diện tích lớn hơn $\frac{S}{4}$

+ Nếu $S_{KDE} > \frac{S}{4}$ thì theo chú ý trên trong tứ giác ACDE có điểm K nằm trên cạnh AC.

Khi đó ta được $S_{CDE} \geq S_{KDE} > \frac{S}{4}$ hoặc $S_{DEA} \geq S_{KDE} > \frac{S}{4}$

+ Nếu $S_{KEA} > \frac{S}{4}$ thì tương tự ta có $S_{DEA} > \frac{S}{4}$ hoặc $S_{DEA} > \frac{S}{4}$

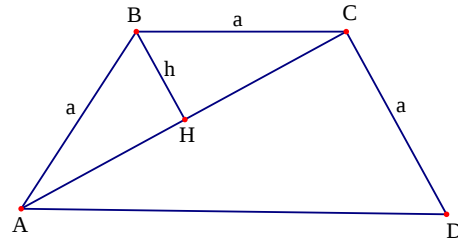
Vậy trong năm tam giác trên luôn có một tam giác có diện tích lớn hơn $\frac{S}{4}$.

Ví dụ 20. Trong các tứ giác lồi có ba cạnh bằng a cho trước tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Giả sử tứ giác lồi ABCD có ba cạnh bằng a là AB, AC, CD. Gọi H là trung điểm của AC, khi đó HB vuông góc với AC. Đặt $BH = x$ thì ta được $x < a$. Ta có

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \leq \frac{1}{2} AC(BH + CD)$$



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\widehat{ACD} = 90^\circ.$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AC(BH + CD) &= \sqrt{a^2 - x^2}(x + a) = \sqrt{(a^2 - x^2)(x + a)^2} = \sqrt{(a - x)(x + a)^3} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}(3a - 3x)(x + a)^3} \leq \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{3a - 3x + 3x + 3a}{4}\right)^4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \end{aligned}$$

Hay $\frac{1}{2} AC(BH + CD) \leq \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $3a - 3x = a + x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ$

Từ đó ta được $S_{ABCD} \leq \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$, đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \widehat{ACD} = 90^\circ \\ \widehat{ACB} = 30^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120^\circ$.

Vậy S_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$, đạt được khi và chỉ khi tứ giác ABCD có

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120^\circ.$$

Ví dụ 21. Cho lục giác lồi ABCDEF có diện tích S và AB song song với DE, BC song song với EF, CD song song với FA.

a) Chứng minh rằng $S_{ACE} \geq \frac{S}{2}$

b) Chứng minh rằng $S_{ACE} = S_{BDF}$

Lời giải

a) Qua A, C, E kẻ các đường thẳng a, c, e lần lượt song song với BC, AB, AF. Giả sử a cắt c tại M, c cắt e tại N, e cắt a tại P. Khi đó dễ thấy các tứ giác ABCM, CDEN, EFAP là hình bình hành. Các hình bình hành này đôi một nằm ngoài nhau và cùng nằm trong đa giác ABCDEF. Từ đó ta được

$$S_{ABC} + S_{CDE} + S_{EFA} = \frac{1}{2}(S_{ABCM} + S_{CDEN} + S_{EFAP}) \leq \frac{S}{2}$$

Suy ra $S_{ACE} \geq \frac{S}{2}$.

Dễ thấy $MN = |AB - DE|$; $NP = |CD - AF|$; $PM = |BC - EF|$

Từ đó ta thấy $S_{ACE} = \frac{S}{2} \Leftrightarrow S_{ABC} + S_{CDE} + S_{EFA} = \frac{S}{2} \Leftrightarrow S_{ABCM} + S_{CDEN} + S_{EFAP} = S$

Hay $S_{MNP} = 0 \Leftrightarrow$ ba điểm M, N, P trùng nhau $\Leftrightarrow AB = DE$; $CD = AF$; $BC = EF$

b) Hoàn toàn tương tự như trên qua B, D, F kẻ các đường thẳng b, d, f lần lượt song song với AF, BC, AB. Giả sử d cắt f tại M', f cắt b tại N', b cắt d tại P'. Khi đó ta có

$$M'N' = |AB - DE| = MN$$

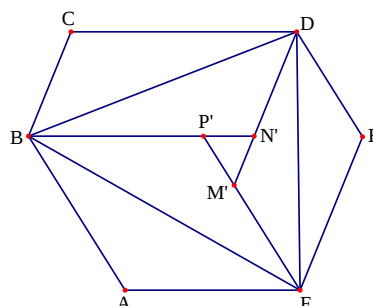
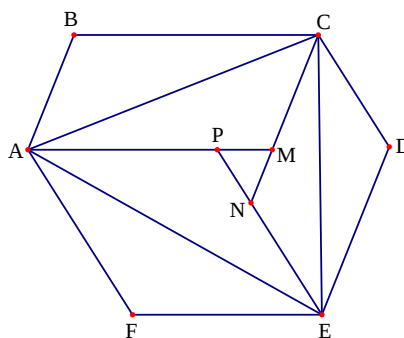
$$N'P' = |CD - AF| = NP$$

$$P'M' = |BC - EF| = PM$$

Do đó ta được $\Delta MNP = \Delta M'N'P'$. Từ đó suy ra

$$S_{ABCM} + S_{CDEN} + S_{EFAP} = S - S_{MNP} = S - S_{M'N'P'} = S_{DEFM'} + S_{FABN'} + S_{BCDP'}$$

Từ đó ta có $S_{ABC} + S_{CDE} + S_{EFA} = S_{DEF} + S_{FAB} + S_{BCD}$ nên suy ra $S_{ACE} = S_{BDF}$



Ví dụ 22. Cho tam giác ABC chứa hình bình hành MNPQ. Chứng minh rằng

$$S_{MNPQ} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}$$

Lời giải

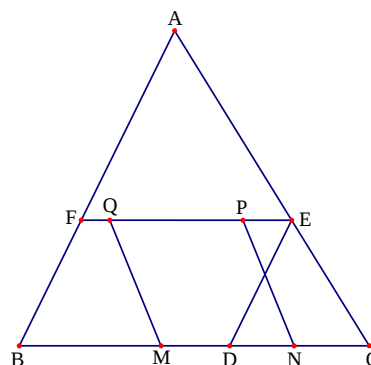
Ta xét các trường hợp sau đây:

+ Trường hợp 1: Tứ giác MNPQ có một cạnh nằm trên cạnh của tam giác ABC. Không mất tính tổng quát ta giả sử cạnh MN nằm trên cạnh BC và M nằm giữa hai điểm B, N.

Gọi giao điểm của PQ với AB, AC lần lượt là F và E. Qua E dựng đường thẳng song song với AB cắt BC tại D, khi đó tứ giác BDEF là hình bình hành và có cùng đường cao với hình bình hành MNPQ.

Mà ta lại có $PQ \leq EF$ nên ta được $S_{MNPQ} \leq S_{BDEF}$

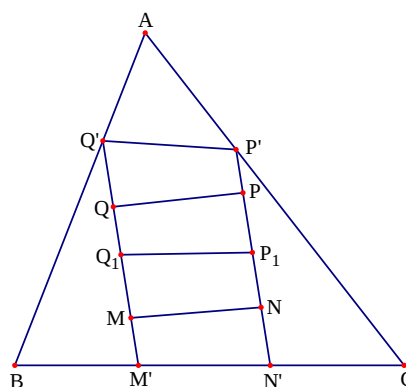
Lại dễ thấy $S_{BDEF} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}$ nên ta được $S_{MNPQ} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}$



+ Trường hợp 2: Tứ giác MNPQ không có cạnh nào nằm trên cạnh của tam giác ABC. Khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử giao điểm của MQ và NP với các cạnh của tam giác ABC được kí hiệu như hình vẽ.

Dễ thấy tứ giác M'N'P'Q' là hình thang có hai đỉnh nằm trên một cạnh của tam giác ABC.

Hai điểm M' và Q hoặc hai điểm N' và P' không thể cùng thuộc một cạnh của tam giác ABC vì MQ và NP không nằm trên một cạnh của tam giác ABC. Hai đỉnh M' và P' hoặc hai đỉnh N' và Q' cũng không thể cùng nằm trên một cạnh của tam giác ABC.



Như vậy hai đỉnh M' và N' hoặc P' và Q' cùng nằm trên một cạnh của tam giác ABC. Giả sử M'N' nằm trên cạnh BC. Khi đó trên đoạn N'P' và M'Q' lần lượt các điểm P₁; Q₁ sao cho N'P₁ = NP; M'Q₁ = MQ. Khi đó ta được hình bình hành M'N'P₁Q₁ có cạnh M'N' nằm trên cạnh BC và tam giác ABCD chứa các điểm M', N', P', Q'. Do đó chứng minh tương tự như trên ta được

$$S_{M'N'P_1Q_1} \leq \frac{1}{2}S_{ABC} \Rightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Ví dụ 23. Cho đa giác lồi (H) có n cạnh. Kẻ các đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh kề nhau của hình (H) tạo thành đa giác (H').

a) Chứng minh rằng nếu $n = 4$ thì $S_{(H')} = \frac{1}{2} S_{(H)}$

b) Chứng minh rằng nếu $n \geq 5$ thì $S_{(H')} > \frac{1}{2} S_{(H)}$

c) Lấy ví dụ về ngũ giác lồi (H) thỏa mãn điều kiện $\frac{S_{(H')}}{S_{(H)}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{10^6}$

Lời giải

a) Xét đa giác lồi ABCD như hình vẽ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Khi đó MQ là đường trung bình của tam giác ABD nên

$$S_{AMQ} = \frac{1}{4} S_{ABD}$$

Tương tự ta có

$$S_{MBN} = \frac{1}{2} S_{ABC}; S_{NCP} = \frac{1}{2} S_{BCD}; S_{PDQ} = \frac{1}{2} S_{ACD}$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} S_{AMQ} + S_{MBN} + S_{NCP} + S_{PDQ} \\ = \frac{1}{4} S_{ABD} + \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{2} S_{BCD} + \frac{1}{2} S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \end{aligned}$$

Do đó suy ra $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

b) Giả sử n-giác lồi là $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ và trung điểm các cạnh $A_1 A_2; A_2 A_3; \dots; A_n A_1$ lần lượt là $B_1; B_2; B_3; \dots; B_n$. Khi đó ta có đa giác H là $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ và đa giác H' là $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$.

Các phần của đa giác (H) nằm ngoài đa giác (H') là các tam giác

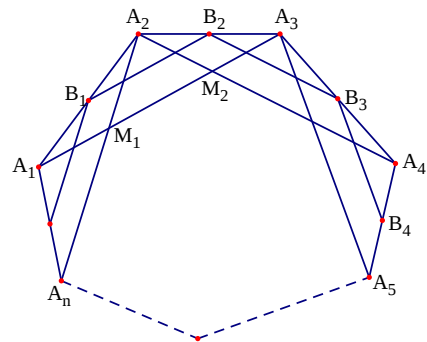
$$B_1 A_2 B_2; B_2 A_3 B_3; B_3 A_4 B_4; \dots; B_n A_1 B_1$$

$$\text{Ta có } S_{B_1 A_2 B_2} + S_{B_2 A_3 B_3} + S_{B_3 A_4 B_4} + \dots + S_{B_n A_1 B_1} = \frac{1}{4} (S_{A_1 A_2 A_3} + S_{A_2 A_3 A_4} + S_{A_3 A_4 A_5} + \dots + S_{A_n A_1 A_2})$$

Trong n tam giác $A_1 A_2 A_3; A_2 A_3 A_4; \dots; A_n A_1 A_2$ thì hai tam giác liên tiếp mới có phần chung và hai tam giác không liên tiếp không có điểm chung trong. Ngoài ra mỗi tam giác trên chứa một tam giác không có điểm chung trong với các tam giác khác, chẳng hạn tam giác $A_1 M_1 M_2$ nằm trong tam giác $A_1 A_2 A_3$ và không có điểm chung trong với các tam giác $A_2 A_3 A_4; A_3 A_4 A_5; \dots; A_n A_1 A_2$.

$$\text{Do đó ta được } S_{A_1 A_2 A_3} + S_{A_2 A_3 A_4} + \dots + S_{A_n A_1 A_2} < 2S_H$$

$$\text{Suy ra } S_{B_1 A_2 B_2} + S_{B_2 A_3 B_3} + S_{B_3 A_4 B_4} + \dots + S_{B_n A_1 B_1} = \frac{1}{4} (S_{A_1 A_2 A_3} + S_{A_2 A_3 A_4} + S_{A_3 A_4 A_5} + \dots + S_{A_n A_1 A_2}) < \frac{1}{2} S_H$$



Hay ta được $S_{(H')} > \frac{1}{2}S_{(H)}$.

c) Xét tam giác đều có cạnh bằng a và I là trung điểm của BE . Kẻ hai đoạn thẳng IC, ID có độ dài bằng 1 lần lượt song song và cùng chiều với AB, AE . Khi đó tam giác ICD là tam giác đều và ta được ngũ giác lồi (H) là $ABCDE$.

Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EA . Khi đó ngũ giác lồi H' là $MNPQE$. Từ đó ta tính được

$$S_{AMR} = \frac{1}{4}S_{ABE} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \text{ và } S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{ABI} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{32}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $S_{EQR} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{32}$.

Đặt $S_n = S_{AMR} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ} + S_{EQR}$ thì ta được

$$S_n > S_{AMR} + S_{BMN} + S_{EQR} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$$

Ta có $S_{(H)} = S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{BCDE} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{BE+CE}{2} \cdot IP < \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a+1}{2}$

Do đó ta được $S_{(H')} = S_{(H)} - S_n < \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a+1}{2} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} + \frac{a+1}{2}$

Do $S_{(H)} > S_{ABE} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ nên $\frac{S_{(H')}}{S_{(H)}} < \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{8} + \frac{a+1}{2}}{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{a+1}{a^2 \sqrt{3}}$

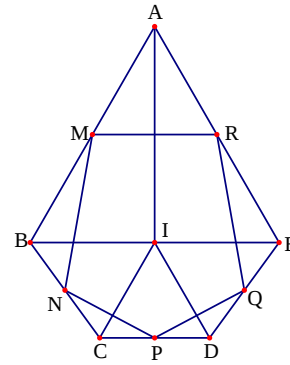
Do đó với $a > \frac{4 \cdot 10^6}{\sqrt{3}}$ thì $\frac{2(a+1)}{a^2 \sqrt{3}} < \frac{4a}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{4}{a \sqrt{3}} < \frac{4}{\frac{4 \cdot 10^6}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{10^6}$

Suy ra $\frac{S_{(H')}}{S_{(H)}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{10^6}$. Vậy ngũ giác $ABCDE$ chọn như trên và $a > \frac{4 \cdot 10^6}{\sqrt{3}}$ thì ta được

$$\frac{S_{(H')}}{S_{(H)}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{10^6}.$$

Ví dụ 24. Cho tam giác đều ABC và một điểm O nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB . Biết $S_{APO} + S_{BMO} + S_{CNO} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba đoạn thẳng AM, BN, CP là đường trung tuyến của tam giác ABC .

Lời giải

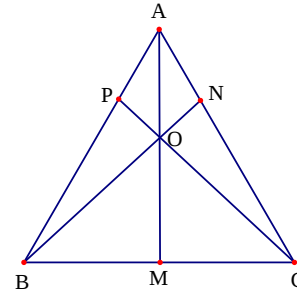


Cách 1: Đặt $S_{OBC} = x$; $S_{OCA} = y$; $S_{OAB} = z$. Khi đó ta có

$$\frac{MB}{MC} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{S_{OMB}}{S_{OMC}} = \frac{S_{AMB} - S_{OMB}}{S_{AMC} - S_{OMC}} = \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = \frac{z}{y}$$

Suy ra $\frac{BM}{CM+MN} = \frac{z}{y+z} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{z}{y+z}$. Từ đó ta được

$$\frac{OM}{AM} = \frac{S_{BOM}}{S_{BAM}} = \frac{S_{BOM}}{S_{BAM}} = \frac{S_{COM}}{S_{CAM}} = \frac{S_{BOM} + S_{COM}}{S_{BAM} + S_{CAM}} = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{x}{S_{ABC}}$$



Do đó ta suy ra $S_{OBM} = \frac{MB}{BC} \cdot S_{OBC} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{OM}{AM} \cdot S_{ABC} = \frac{z}{y+z} \cdot \frac{x}{S_{ABC}} \cdot S_{ABC} = \frac{zx}{z+y}$

Tương tự ta được $S_{CON} = \frac{xy}{x+z}$; $S_{AOP} = \frac{zy}{x+y}$; $S_{COM} = \frac{xy}{y+z}$; $S_{AON} = \frac{yz}{z+x}$; $S_{BOP} = \frac{zx}{x+y}$

Theo bài ra ta có $S_{APO} + S_{BMO} + S_{CNO} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ nên ta được

$$0 = 2 \left(S_{BOM} + S_{CON} + S_{AOP} - \frac{1}{2} S_{ABC} \right) = S_{BOM} + S_{CON} + S_{AOP} - S_{BPO} - S_{COM} - S_{AON}$$

$$= \frac{x(z-y)}{z+y} + \frac{y(x-z)}{x+z} + \frac{z(y-x)}{y+x} = \frac{T}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Với $T = x(z-y)(x+y)(x+z) + y(x-z)(y+z)(y+x) + z(y-x)(z+x)(z+y)$
 $= (z-y)x^3 + (x-z)y^3 + (y-x)z^3 = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

Do đó ta được $x = y$ hoặc $y = z$ hoặc $z = x$. Suy ra $S_{OBC} = S_{OCA}$ hoặc $S_{OCA} = S_{OAB}$ hoặc $S_{OBC} = S_{OAB}$

Nên ta được $MB = MC$ hoặc $AP = BP$ hoặc $AN = NC$. Vậy ít nhất một trong ba đoạn thẳng AM, BN, CP là đường trung tuyến của tam giác ABC .

Cách 2: Đặt $S_{OBM} = x$; $S_{CON} = y$; $S_{AOP} = z$; $S_{COM} = m$; $S_{AON} = n$; $S_{BOP} = p$

Theo bài ra ta có $S_{APO} + S_{BMO} + S_{CNO} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ nên ta được

$$S_{BOM} + S_{CON} + S_{AOP} = S_{BPO} + S_{COM} + S_{AON}$$

Hay $x + y + z = m + n + p$. Do $\frac{x}{p+z} = \frac{OM}{OA} = \frac{m}{n+y}$ nên ta được $xy + xn = pm + zm$.

Tương tự ta được $yz + yp = mn + xn$; $zx + zm = np + yp$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được $xy + yz + zx = mn + np + p$

Do AM, BN, CP đồng quy nên theo định lý Ceva ta được

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{x}{m} \cdot \frac{y}{n} \cdot \frac{z}{p} = 1 \Rightarrow xyz = mnp$$

Từ đó ta có hệ
$$\begin{cases} x + y + z = m + n + p \\ xy + yz + zx = mn + np + p \\ xyz = mnp \end{cases}$$

Theo định lý Viet thì (x, y, z) là một hoán vị của (m, n, p) . Do đó có ba trường hợp xảy ra

+ Trường hợp 1: Khi $x = m$, ta được $MB = MC$ nên AM là đường trung tuyến của tam giác ABC .

+ Trường hợp 2: Khi $x = n$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M và N trên AB .

Vì

$$\frac{1}{2}MH \cdot AB = S_{\triangle AMB} = x + p + z = n + p + z = S_{\triangle ANB} = \frac{1}{2}NK \cdot AB$$

Do đó ta được $MH = NK$ suy ra $MN \parallel AM$.

Nên theo định lý Talet ta được $\frac{MB}{MC} = \frac{NA}{NC}$.

Cũng theo định lý Ceva ta có $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$ nên ta được $PA = PB$. Do đó CP là đường trung tuyến của tam giác ABC .

+ Trường hợp 3: Khi $x = p$. Gọi K là giao điểm của BN và MP . Gọi Q là điểm đối xứng với O qua K . Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M và P trên OP .

$$\text{Vì } x = p \text{ nên ta được } \frac{1}{2}ME \cdot BO = \frac{1}{2}PF \cdot BO \Rightarrow ME = BF.$$

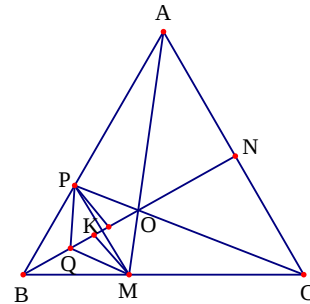
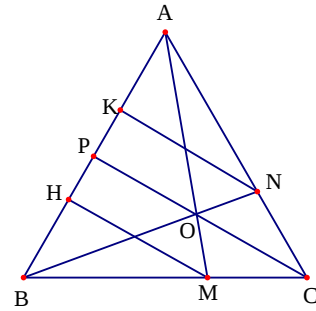
Mà ta lại có $\frac{MK}{PK} = \frac{ME}{PF}$ nên $MK = KP$, kết hợp với

$OK = QK$ ta được $MOPQ$ là hình bình hành.

Do đó ta được $MQ \parallel CO$, $PQ \parallel AO$. Nên theo định lý Talet có $\frac{MB}{MC} = \frac{QB}{QO} = \frac{PB}{PA}$

Do đó theo định lý Ceva ta có $\frac{NC}{NA} = \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Rightarrow NA = NC$

Do đó BN là đường trung tuyến của tam giác ABC .



Ví dụ 25. Cho tứ giác lồi nội tiếp $ABCD$ có đường tròn nội tiếp tâm I . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng $\frac{AO}{CO} = \frac{AI^2}{CI^2}$.

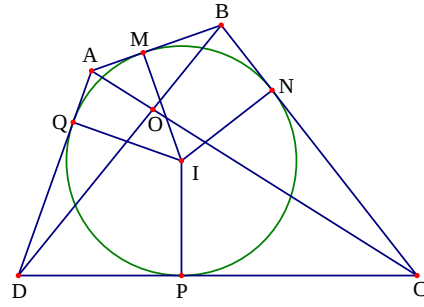
Lời giải

Gọi r là bán kính đường tròn tâm I . Giả sử rằng M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn tâm I với các cạnh AB, BC, CD, DA . Đặt

$$AM = AQ = x; BM = BN = y$$

$$CN = CP = z; DP = DQ = t$$

$$\text{Ta có } AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}, CI = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}.$$



$$\text{Do đó ta suy ra được } \frac{AI^2}{CI^2} = \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{1 - \cos A}{1 - \cos C}. \text{ Sử dụng định lý cosin cho tam giác BAD}$$

ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{(x+y)^2 + (x+t)^2 - BD^2}{2(x+y)(x+t)}$$

$$\text{Suy ra } 1 - \cos A = 1 - \frac{(x+y)^2 + (x+t)^2 - BD^2}{2(x+y)(x+t)} = \frac{BD^2 - (y-t)^2}{2(x+y)(x+t)}.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được

$$1 - \cos C = 1 - \frac{(z+y)^2 + (z+t)^2 - BD^2}{2(z+y)(z+t)} = \frac{BD^2 - (y-t)^2}{2(z+y)(z+t)}.$$

$$\text{Do đó } \frac{AI^2}{CI^2} = \frac{(x+y)(x+t)}{(z+y)(z+t)} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD} = \frac{2S_{ABD}}{\sin \widehat{BAD}} : \frac{2S_{CBD}}{\sin \widehat{BCD}} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AO}{CO}$$

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A} < 90^\circ$ và $AC = 2AB$. Đường phân giác AD cắt đường cao BH tại K (D thuộc BC , H thuộc AC). Đường thẳng CK cắt AB tại E . Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại B khi và chỉ khi diện tích của hai tam giác BDE và HDE bằng nhau.

Lời giải

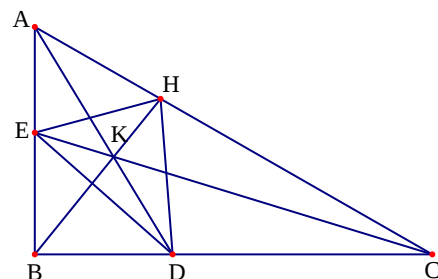
Do $AC = 2AB$ nên ta được $AB < AC$, do đó

$$\widehat{ACB} < \widehat{ABC} \text{ nên ta được } \widehat{ACB} < 90^\circ.$$

Từ $\widehat{A} < 90^\circ$, $\widehat{ACB} < 90^\circ$ và $AB < AC$ suy ra điểm K nằm trong tam giác.

$$\text{Ta có } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \text{ nên ta được } \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}, \frac{CD}{BC} = \frac{2}{3}.$$

+ Điều kiện cần: Giả sử tam giác ABC vuông tại B .



Khi đó dễ thấy $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Từ đó ta được $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$ và $AH = \frac{1}{2}CH$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC với ba đường thẳng AD, BH, CE đồng quy ta được $\frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{HC}{HA} = 1$ nên ta được $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$, do đó $\frac{BE}{BA} = \frac{3}{5}$; $\frac{EA}{AB} = \frac{2}{5}$

Khi đó ta được $\frac{S_{AEH}}{S_{ABC}} = \frac{AE \cdot AH}{AB \cdot BC} = \frac{1}{10}$ và $\frac{S_{CDH}}{S_{ABC}} = \frac{CD \cdot CH}{CB \cdot CA} = \frac{1}{2}$

Cộng theo vế ta được $S_{AEH} + S_{CDH} = \frac{2}{5}S_{ABC}$ nên $S_{BEHD} = \frac{2}{5}S_{ABC}$

Mà ta có $\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}} = \frac{BD \cdot BE}{BC \cdot BA} = \frac{1}{5}$ nên ta được $S_{BDE} = \frac{1}{2}S_{BEHD}$. Từ đó suy ra $S_{BDE} = S_{HDE}$

+ Điều kiện đủ: Giả sử $S_{BDE} = S_{HDE}$.

Theo định lí Menelaus ta có $\frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{HC}{HA} = 1$ nên ta được $\frac{AE}{BE} = \frac{2AH}{HC}$

Từ đó suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{2AH}{AC + AH}$ và $\frac{EB}{AB} = \frac{AC - AH}{AC + AH}$

Từ đó ta được $\frac{2S_{BDE}}{S_{ABC}} + \frac{S_{EAH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CDH}}{S_{ABC}} = 1$ hay $\frac{2BD \cdot BE}{BC \cdot BA} + \frac{AE \cdot AH}{AB \cdot AC} + \frac{CD \cdot CH}{BC \cdot CA} = 1$

Từ đó ta được

$$\frac{2(AC - AH)}{3(AC + AH)} + \frac{2AH^2}{(AC + AH)AC} + \frac{2(AC - AH)}{3AC} = 1$$

$$\Leftrightarrow AC^2 - 5AH \cdot AC + 4AH^2 = 0 \Leftrightarrow (AC - 4AH)(AC - AH) = 0 \Leftrightarrow AC = 4AH$$

Từ $AC = 4AH$ ta được $AB^2 = \frac{AC^2}{4} = AC \cdot AH$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 27. Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AA', BB', CC'. Gọi D, E và F lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AB'C', BC'A' và CA'B'. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF theo độ dài các cạnh của tam giác ABC

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề:

Cho tam giác ABC vuông tại A có

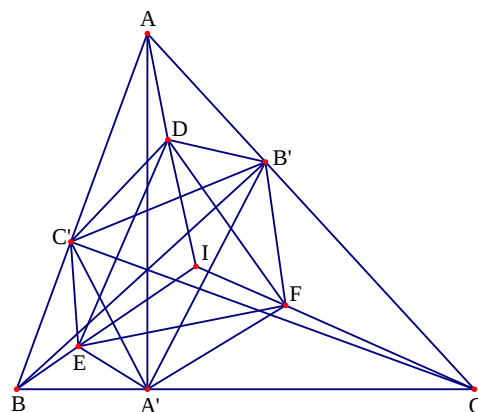
$\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, khi đó ta luôn có

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Thật vậy, gọi AH là đường cao và AM = a là

đường trung tuyến của tam giác ABC. Khi

đó tam giác AHC có $\widehat{AHC} = 90^\circ$; $\widehat{C} = \alpha$ nên



$$\sin \alpha = \frac{AH}{AC}; \cos \alpha = \frac{CH}{AC}$$

Vì AM là trung tuyến ứng với BC nên

$$\widehat{AMB} = 2\alpha.$$

Xét tam giác AHM có

$$\widehat{AHM} = 90^\circ; \widehat{AMH} = 2\alpha \Rightarrow \sin \widehat{AMH} = \frac{AH}{AM}$$

$$\text{hay } \sin 2\alpha = \frac{AH}{a}$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2 \cdot CH}{AC} = \frac{2AH \cdot CH}{AC^2} = \frac{2AH \cdot CH}{BC \cdot CH} = \frac{AH}{a}. \text{ Do đó ta được } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Trở lại bài toán: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi r, p, S lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích của tam giác ABC. Khi đó dễ dàng chứng minh được $S = pr$.

Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và $\widehat{BAC} = 2\alpha$; $\widehat{CBA} = 2\beta$; $\widehat{ACB} = 2\gamma$.

Khi đó ta được $0 < \alpha; \beta; \gamma < 90^\circ$ và $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Dễ dàng chứng minh được

$$\widehat{C'A'B} = \widehat{CA'B'} = 2\alpha; \widehat{A'B'C} = \widehat{AB'C'} = 2\beta; \widehat{B'C'A} = \widehat{BC'A'} = 2\gamma$$

Từ đó ta được $\widehat{EA'B} = \widehat{FA'B} = \widehat{BAI} = \alpha$ và $\widehat{A'BE} = \widehat{A'B'F} = \widehat{ABI} = \beta$

Do đó ta được $\Delta A'EB \sim \Delta A'FB' \sim \Delta AIB$. Suy ra ta có $\frac{A'E}{A'B} = \frac{A'F}{A'B'} = \frac{AI}{AB}$

Do đó ta lại được $\Delta A'EF \sim \Delta A'BB'$ nên ta được $\frac{EF}{BB'} = \frac{A'E}{A'B'}$

Từ đó ta được $\frac{EF}{BB'} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow EF = \frac{AI}{AB} \cdot BB' = \frac{BB'}{AB} \cdot AI = AI \cdot \sin 2\alpha$.

Cũng từ $\Delta A'EF \sim \Delta A'BB'$ ta có $\widehat{EFA'} = \widehat{BB'A} = 90^\circ - \widehat{CBA} = 90^\circ - 2\beta$

Do đó ta được $\widehat{IFE} = \widehat{IFA'} - \widehat{EFA'} = (\alpha + \gamma) - (90^\circ - 2\beta) = \alpha + \beta + \gamma + \beta - 90^\circ = \beta = \widehat{CBE}$

Tương tự ta cũng được $\widehat{IDE} = \widehat{IFE} = \beta$ và $\widehat{IDF} = \widehat{IEF} = \gamma$ nên ta được $\widehat{EDF} = \beta + \gamma$

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $\widehat{FED} = \gamma + \alpha$; $\widehat{DFE} = \alpha + \beta$.

Gọi R là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác DEF. Áp dụng định lý sin cho tam giác DEF và áp dụng đồ đề trên ta được ta được

$$R = \frac{EF}{2 \sin \widehat{EDF}} = \frac{EF}{2 \sin(\beta + \gamma)} = \frac{EF}{2 \cos \alpha} = \frac{AI \cdot \sin 2\alpha}{2 \cos \alpha} = IA \cdot \sin \alpha = r$$

$$\text{Từ đó ta được } R = r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là $R = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R), có các đường cao AD, BE, CF. Tìm công thức liên hệ giữa diện tích tam giác ABC với chu vi tam giác DEF.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC vuông, không mất tính

tổng quát ta giả sử $\hat{A} = 90^\circ$

Khi đó các điểm E, F trùng với A nên không tồn tại tam giác DEF.

+ Trường hợp 2: Tam giác ABC nhọn.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Trước hết ta chứng minh điểm O nằm trong tam giác ABC.

Thật vậy, vẽ đường kính AT cắt CB tại V. Giả sử O nằm ngoài tam giác ABC và thuộc đường thẳng VT, khi đó ta được

$$180^\circ \leq \widehat{BOT} + \widehat{COT} = 2\widehat{BAO} + 2\widehat{CAO} = 2\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAC} \geq 90^\circ$$

mâu thuẫn với tam giác ABC nhọn.

Như vậy tam giác ABC nhọn thì O nằm trong tam giác. Gọi K là giao điểm AO và FE

Dễ thấy các tứ giác AEHF và BDHF nội tiếp.

Kẻ OP vuông góc với AC tại P, theo tính chất góc nội tiếp ta có

$$\widehat{AEF} = \widehat{AHF} = \widehat{ABC} = \widehat{AOP} = 90^\circ - \widehat{OAE}$$

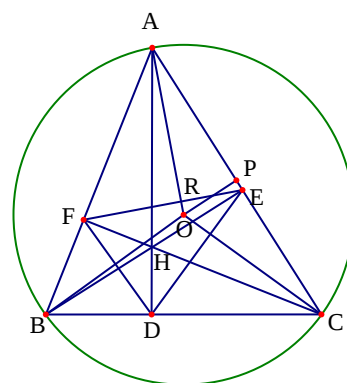
Do đó ta được $\widehat{AKE} = 90^\circ$ hay $AO \perp EF$. Chứng minh tương tự ta được

$$OB \perp FD, OC \perp DE$$

$$\text{Từ đó ta được } S_{ABC} = S_{AFOE} + S_{BFOD} + S_{CDOE}$$

$$\text{Suy ra } 2S_{ABC} = OA.EF + OB.FD + OC.DE = R(EF + FD + DE) = 2R.p_{DEF}$$

Với p_{DEF} là nửa chu vi tam giác DEF.



+ Trường hợp 3: tam giác ABC tù, không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Khi đó ta có H và O nằm ngoài tam giác ABC. Chứng minh tương tự ta cũng được $AO \perp EF$

Xét đường tròn tâm Q đối xứng với đường tròn tâm O qua BC. Dễ thấy (Q) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và hai đường tròn (O) và đường tròn (Q) có bán kính bằng nhau. Đoạn thẳng OQ vuông góc với BC tại M. Xét tam giác HBC có ba đường cao HD, CE và BF. Khi đó áp dụng kết quả trường hợp 2 ta được

$$S_{HBC} = R(DE + EF + FD)$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} 2S_{HBC} &= 2(S_{ABC} + S_{ABH} + S_{ACH}) \\ &= 2S_{ABC} + AH \cdot BD + AH \cdot CD = 2S_{ABC} + AH \cdot BC \end{aligned}$$

Từ đó ta được $2S_{ABC} + AH \cdot BC = R(DE + EF + FD) \Rightarrow 2S_{ABC} = R(DE + EF + FD) - AH \cdot BC$

Kẻ BQ cắt đường tròn tâm Q tại N, ta thấy $AH \parallel CN \parallel OQ$ và $AH = CN = 2MQ = OQ$

Trong tam giác vuông BQM có $MQ^2 + MB^2 = R^2 \Rightarrow 4MQ^2 + BC^2 = 4R^2$

Từ đó ta được $2S_{ABC} = R(DE + EF + FD) - 2QM \cdot BC = R \cdot p_{DEF} - BC \sqrt{4R^2 - BC^2}$

Ví dụ 29. Cho đa giác lồi (H) có diện tích S. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hình tam giác có diện tích không vượt qua $2S$ chứa hình (H).

Lời giải

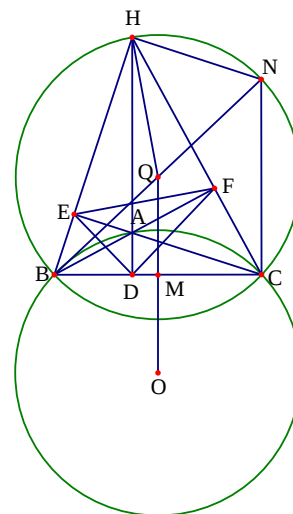
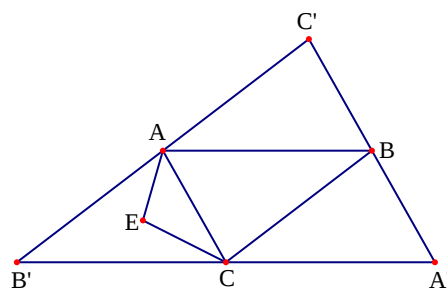
Trong các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của hình (H) ta chọn tam giác có diện tích lớn nhất. Gọi ba đỉnh của tam giác đó là A, B, C. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Nếu $S_{ABC} \leq \frac{S}{2}$

Qua A, B, C kẻ các đường thẳng lần lượt song song với BC, CA, AB tạo thành tam giác $A'B'C'$.

Dễ thấy tam giác $A'B'C'$ chứa hình (H) vì nếu một đỉnh của hình (H) nằm ngoài tam giác

$A'B'C'$, chẳng hạn điểm E như hình vẽ thì khi đó



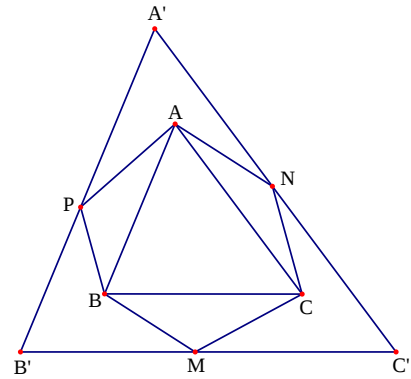
$S_{EBC} > S_{ABC}$, điều này trái với cách chọn tam giác ABC.

Mặt khác dễ thấy A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

Từ đó ta được $S_{A'B'C'} = 4S_{ABC} \leq 2S$.

+ Trường hợp 2: Nếu $S_{ABC} > \frac{S}{2}$

Trong các đỉnh của hình (H) nằm khác phía với A so với BC ta chọn đỉnh xa nhất, không mất tính tổng quát ta giả sử điểm đó là M. Tương tự gọi các đỉnh khác phía B, C đối với CA, AB và xa CA, AB nhất lần lượt là N, P. Khi đó hình (H) chứa lục giác APMBCN.



Từ $S_{ABC} > \frac{S}{2}$ ta được $S_{APB} + S_{BMC} + S_{CNA} < S_{ABC}$.

Qua M, N, P kẻ các đường thẳng lần lượt song song với BC, CA, AB và các đường thẳng này cắt nhau tạo thành tam giác $A'B'C'$. Theo cách chọn M, N, P thì tam giác $A'B'C'$ chứa hình (H). Theo kết quả bài toán trên ta có $S_{A'B'C'} < 2S_{APBMCN} \leq 2S$.

Nếu BC là một cạnh của hình (H) tức là không có đỉnh nào của hình (H) nằm khác phía đối với A so với BC. Qua N, P kẻ hai đường thẳng lần lượt song song với CA, AB. Hai đường thẳng đó tạo với đường thẳng BC tam giác $A'B'C'$. Khi đó dễ thấy tam giác $A'B'C'$ chứa hình (H) và $S_{A'B'C'} < 2S_{APBNC} \leq 2S$.

Nếu tam giác ABC có hai cạnh chẳng hạn BC, CA là hai cạnh của hình (H) thì qua P kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này tạo với hai đường thẳng BC, CA tam giác $A'B'C'$. Khi đó tam giác $A'B'C'$ chứa hình (H) và $S_{A'B'C'} < 2S_{APBC} \leq 2S$.

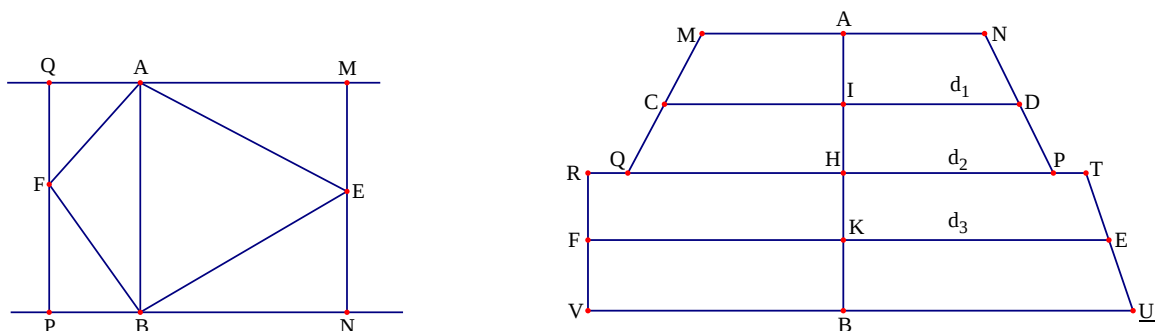
Ví dụ 30. Cho đa giác lồi (H) có diện tích S. Chứng minh rằng (H) chứa một hình tam giác có diện tích:

a) Lớn hơn $\frac{S}{4}$

b) Không bé hơn $\frac{3}{8}S$

Lời giải

Giả sử hai đỉnh xa nhất của hình (H) là A, B. Qua A, B kẻ hai đường thẳng a, b kẻ hai đường thẳng vuông góc với AB. Khi đó dễ thấy hình (H) nằm giữa hai đường thẳng a và b.



a) Đường thẳng AB chia hình (H) thành hai đa giác (H_1) và (H_2) nằm về hai phía của đường thẳng AB. Gọi hai đỉnh của (H_1) và (H_2) xa AB nhất lần lượt là E, F thì các tam giác ABE, ABF nằm trong hình (H), Qua E, F kẻ các đường thẳng song song với AB, chúng tạo với a, b một hình chữ nhật MNPQ chứa hình (H) và không trùng với hình (H).

Dễ thấy $S_{ABE} + S_{ABF} = \frac{1}{2} S_{MNPQ} > \frac{1}{2} S$ nên ta được $S_{ABE} > \frac{S}{4}$ hoặc $S_{ABF} > \frac{S}{4}$.

b) Chia AB thành bốn đoạn thẳng bằng nhau $AI = IH = HK = KB = x$. Qua I, K, H kẻ ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 vuông góc với AB và đường thẳng d_2 chia hình (H) thành hai đa giác (H_1) và (H_2) . Giả sử d_1 cắt biên của hình (H_1) tại C, D. Kéo dài các cạnh chứa C, D cắt a, d_2 tạo thành hình thang MNPQ chứa hình (H_1) . Giả sử d_3 cắt biên của hình (H_2) tại E, F. Kéo dài các cạnh chứa E, F cắt d_2 , b tạo thành hình thang RTUV chứa hình (H_2) .

Vì hình thang MNPQ và RTUV chứa lần lượt các đa giác (H_1) và (H_2) nên ta được

$$S = S_{(H_1)} + S_{(H_2)} \leq S_{MNPQ} + S_{RTUV} = CD \cdot 2x + EF \cdot 2x = 2x(CD + EF)$$

$$S_{AEF} + S_{BCD} = EF \cdot \frac{3x}{2} + CD \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3x}{2}(EF + CD) = \frac{3}{4} \cdot 2x(CD + EF)$$

Từ đó ta được $S_{AEF} + S_{BCD} \geq \frac{3}{4} S$ nên suy ra $S_{AEF} \geq \frac{3}{8} S$ hoặc $S_{BCD} \geq \frac{3}{8} S$

Ngoài ra do hình (H) là đa giác lồi nên hình (H) chứa các tam giác AEF và BCD.

Ví dụ 31. Cho tam giác ABC có diện tích S ngoại tiếp đường tròn (O; r). Kẻ ba tiếp tuyến của đường tròn (O; r) gồm tiếp tuyến song song với BC cắt CA, AB lần lượt tại M, N; tiếp

tuyến song song với CA cắt AB, BC lần lượt tại P, Q; tiếp tuyến song song với AB cắt BC, AC lần lượt tại R, S. Chứng minh rằng ta luôn có $S_{MNPQRS} \leq \frac{2}{3}S$.

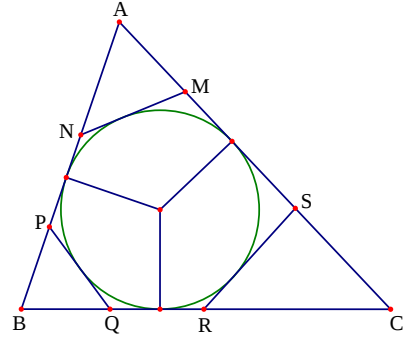
Lời giải

Gọi diện tích các tam giác AMN, BPQ, CRS lần lượt là $S_1; S_2; S_3$. Gọi chiều cao hạ từ A của tam giác

AMN và ABC lần lượt là h_1 và h_a thì ta được

$h_1 = h_a - 2r$. Dễ thấy $\triangle ANM \sim \triangle ABC$ nên ta được

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_1}{h_a}\right)^2 = \left(\frac{h_a - 2r}{h_a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2r}{h_a}\right)^2$$



Tương tự nếu gọi $h_b; h_c$ lần lượt là đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC.

Khi đó ta có $\frac{S_2}{S} = \left(1 - \frac{2r}{h_b}\right)^2$ và $\frac{S_3}{S} = \left(1 - \frac{2r}{h_c}\right)^2$. Dễ thấy

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c = r(a + b + c)$$

Suy ra $\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} &= \left(1 - \frac{2r}{h_a}\right)^2 + \left(1 - \frac{2r}{h_b}\right)^2 + \left(1 - \frac{2r}{h_c}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2r}{h_a} + 1 - \frac{2r}{h_b} + 1 - \frac{2r}{h_c}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \left[3 - 2r \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\right]^2 = \frac{1}{3} \left[3 - 2r \cdot \frac{1}{r}\right]^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Do đó suy ra $S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3}S$ nên ta được $S_{MNPQRS} \leq \frac{2}{3}S$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $1 - \frac{2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_b} = 1 - \frac{2r}{h_c} \Leftrightarrow h_a = h_b = h_c$ hay tam giác ABC đều.

Ví dụ 32. a) Cho tứ giác ABCD không phải là hình bình hành. Chứng minh tập hợp các điểm M nằm trong tứ giác và thỏa mãn $S_{MAB} + S_{MCD} = S_{MAD} + S_{MBC}$ là một đường thẳng.

b) Chứng minh rằng trong ABCD ngoại tiếp đường tròn, các trung điểm của AC, BC và tâm đường tròn nội tiếp cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

a) Giả sử AB và CD không song song với nhau và chúng cắt nhau tại điểm O nằm ngoài cạnh AB, CD về phía B và C. Trên tia OA, OD lấy các điểm E, F sao cho $OE = AB; OF = CD$.

Giả sử điểm M thỏa mãn điều kiện

$$S_{MAB} + S_{MCD} = S_{MAD} + S_{MBC}$$

Khi đó ta có $S_{OEMF} = S_{MOE} + S_{MOF} = S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{S_{ABC}}{2}$

Do đó nếu $S_{OEF} < \frac{S_{ABC}}{2}$ thì điểm M nằm khác phía với O đối với EF. Suy ra

$$S_{MEF} = S_{OEMF} - S_{OEF} = \frac{S_{ABC}}{2} - S_{OEF}$$

Nếu $S_{OEF} > \frac{S_{ABC}}{2}$ thì điểm M nằm trong tam giác OEF. Suy ra $S_{MEF} = S_{OEMF} - S_{OEF} = \frac{S}{2} - S_{OEF}$

Nếu $S_{OEF} = \frac{S_{ABC}}{2}$ thì điểm M thuộc EF nên $S_{MEF} = 0$

Như vậy trong các trường hợp trên ta thấy S_{MEF} không phụ thuộc vào điểm M. Do điểm E và F cố định nên điểm M thuộc đường thẳng d cố định song song với EF hoặc trùng với EF.

b) Nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I; r) thì ta có $AB + CD = AD + BC$

$$\text{Từ đó ta được } S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2}(AB + CD)r = \frac{1}{2}(AD + BC)r = S_{IAD} + S_{IBC}$$

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BD khi đó dễ thấy

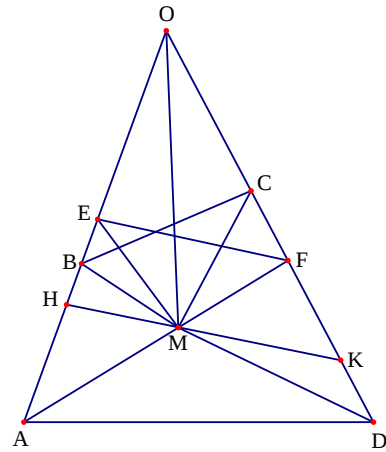
$$S_{PAB} + S_{PCD} = S_{PAD} + S_{PBC} \text{ và } S_{QAB} + S_{QCD} = S_{QAD} + S_{QBC}$$

Do đó I, P, Q thuộc tập hợp các điểm M thỏa mãn $S_{MAB} + S_{MCD} = S_{MAD} + S_{MBC}$.

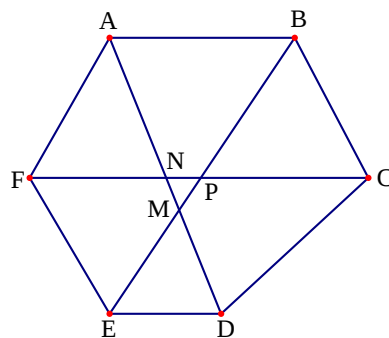
Do đó nếu ABCD không phải là hình bình thì I, P, Q thuộc một đường thẳng. Còn nếu ABCD là hình bình hành thì hiển nhiên kết luận là đúng.

Ví dụ 33. Cho lục giác ABCDEF. Chứng minh rằng nếu mỗi đường chéo AD, BE, CF chia lục giác thành hai đa giác có diện tích bằng nhau thì AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải



Gọi giao điểm của các cặp đường chéo AD và BE, BE và CF, CF và AD lần lượt là M, N, P. Khi đó nếu M thuộc đoạn CF thì AD, BE, CF đồng quy. Giả sử AD, BE, CF không đồng quy, khi đó điểm M không thuộc CF, suy ra điểm M thuộc một trong hai tứ giác FABC hoặc CDEF. Không mất tính tổng quát ta giả sử M nằm trong tứ giác FABC.



Đặt $S_{ABCDEF} = S$. Do $S_{ABCD} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S$ nên

$$S_{MAB} = S_{MDE}$$

Từ đó ta được $MA.MB = MD.ME > PD.NE$

Tương tự ta cũng có $S_{CDEF} = S_{DEFA} = \frac{1}{2}S$ nên ta được $S_{PCD} = S_{PFA}$ suy ra

$$PC.PD = PF.PA > NF.MA.$$

Lại có $S_{EFAB} = S_{FABC} = \frac{1}{2}S$ nên ta được $S_{NBC} = S_{NEF}$ suy ra $NE.NF = NA.NB > MP.PC$

Từ các bất đẳng thức trên ta được $MA.MB.PC.PD.NE.NF > MA.MB.PC.PD.NE.NF$, điều này là vô lí.

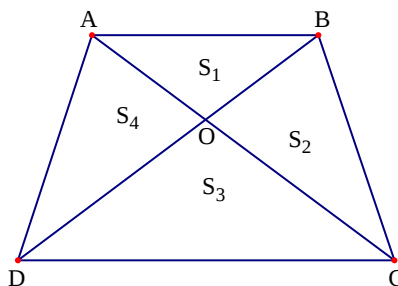
Do đó giả sử AD, BE, CF không đồng quy là sai.

Vậy AD, BE, CF đồng quy tại một điểm.

Ví dụ 34. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) ngoại tiếp đường tròn. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA lần lượt là $r_1; r_2; r_3; r_4$. Chứng minh rằng $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$

Lời giải

Gọi diện tích các tam giác OAB, OBC, OCD, OAD lần lượt là $S_1; S_2; S_3; S_4$. Gọi chu vi các tam giác OAB, OBC, OCD, OAD lần lượt là $p_1; p_2; p_3; p_4$. Do AB song song với CD nên ta được $S_2 = S_4$. Do tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn nên ta được $AB + CD = AD + BC$. Từ đó suy ra



$$AB + CD + AC + BD = AD + BC + AC + BD$$

Hay $p_1 + p_3 = p_2 + p_4$.

Dễ thấy hai tam giác OAB và OCD đồng dạng với nhau nên ta được $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{p_1}{p_3}$

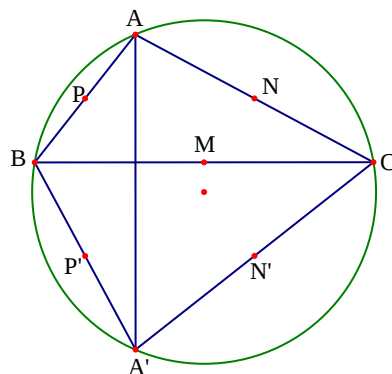
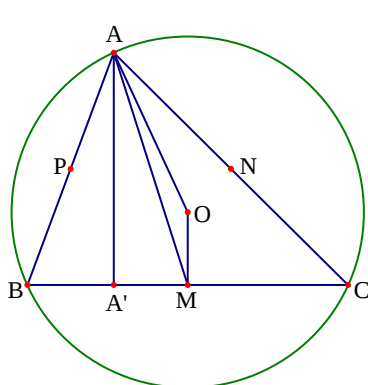
Ta có $\frac{p_1}{p_3} = \frac{OA}{OC} = \frac{S_1}{S_2}$ nên suy ra $\frac{p_1}{S_1} = \frac{p_3}{S_2}$. Tương tự ta có $\frac{p_1}{p_3} = \frac{OB}{OD} = \frac{S_2}{S_3}$ nên suy ra $\frac{p_3}{S_3} = \frac{p_1}{S_2}$.

Suy ra $\frac{p_1}{S_1} = \frac{p_3}{S_3}$. Từ đó ta được $\frac{p_1}{S_1} + \frac{p_3}{S_3} = \frac{p_3 + p_1}{S_2} = \frac{p_2 + p_4}{S_2} = \frac{p_2}{S_2} + \frac{p_4}{S_2}$

Hay ta được $\frac{p_1}{S_1} + \frac{p_3}{S_3} = \frac{p_2}{S_2} + \frac{p_4}{S_4}$, từ đó suy ra $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$.

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) và ba đường trung tuyến AM, BN, CP lần lượt là $m_a; m_b; m_c$. Chứng minh rằng $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}$

Lời giải



Ta xét hai trường hợp sau đây:

+ Trường hợp 1: Xét tam giác ABC không tù. Ta có $R = OA \geq AM - OM$, dấu bằng xảy ra khi O thuộc đoạn AM. Do đó ta được $\frac{R}{m_a} = \frac{OA}{MA} \geq \frac{AM - OM}{MA} = 1 - \frac{OM}{AM}$.

Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC. Khi đó ta lại có $\frac{OM}{AM} \leq \frac{OM}{AA'} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai điểm M, A' trùng nhau.

Do vậy ta được $\frac{R}{m_a} \geq 1 - \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O thuộc đoạn AM đồng thời hai điểm M, A' trùng nhau, điều này có nghĩa là tam giác ABC cân tại A.

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{R}{m_b} \geq 1 - \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}$ và $\frac{R}{m_c} \geq 1 - \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$. Dấu bằng xảy ra lần lượt tại B, C

Do O nằm trong tam giác ABC nên $S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} = S_{ABC}$

Từ đó ta được $\frac{R}{m_a} + \frac{R}{m_b} + \frac{R}{m_c} \geq 3 - \frac{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}}{S_{ABC}} = 3 - 1 = 2$

Hay ta được $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

+ Trường hợp 2: Xét tam giác ABC tù, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\hat{A} > 90^\circ$.

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường tròn (O; R) tại A'. Gọi N' và P' lần lượt là các trung điểm của A'C và A'B.

Khi đó có thể thấy $m_a = AM < A'M = m'_a$; $m_b = BN < BN' = m'_b$; $m_c = CP < CP' = m'_c$

Do đó ta được $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} > \frac{1}{m'_a} + \frac{1}{m'_b} + \frac{1}{m'_c}$ và ta cũng có tam giác A'BC là tam giác nhọn.

Chứng minh tương tự trường hợp 1 ta được $\frac{1}{m'_a} + \frac{1}{m'_b} + \frac{1}{m'_c} \geq \frac{2}{R}$

Do đó ta được $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} > \frac{2}{R}$.

Vậy ta luôn có $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 36. Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M, N thỏa mãn điều kiện $\frac{BM}{CM} = \frac{CN}{2DN} = k$ (k là một số cho trước). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BD với AM, AN. Chứng minh rằng $S_{MNPQ} = S_{APQ}$.

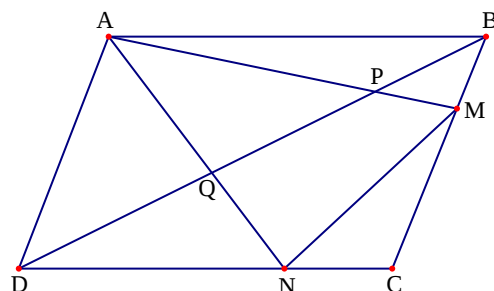
Lời giải

Dễ thấy

$$\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2} AP \cdot AQ \cdot \sin \widehat{PAQ}}{\frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \widehat{MAN}} = \frac{AP \cdot AQ}{AM \cdot AN}.$$

Mà $\frac{BM}{CM} = \frac{CN}{2DN} = k$ nên ta được

$$\frac{BM}{BM + CM} = \frac{k}{k + 1} \text{ hay}$$



$$\frac{BM}{BC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{BM}{AD} = \frac{k}{k+1}$$

Trong tam giác PAD có MB//AD nên theo định lý Talets ta có $\frac{BM}{AD} = \frac{PM}{AP}$

Từ đó ta được $\frac{PM}{AP} = \frac{k}{k+1}$ nên suy ra $\frac{AP}{AP+PM} = \frac{k+1}{2k+1}$ hay $\frac{AP}{AM} = \frac{k+1}{2k+1}$

Lại có $\frac{CN}{2DN} = k$ nên $\frac{DN}{CN} = \frac{1}{2k}$. Do đó $\frac{DN}{DN+CN} = \frac{1}{2k+1} \Rightarrow \frac{DN}{CD} = \frac{1}{2k+1}$

Từ đó suy ra $\frac{AB}{DN} = 2k+1$.

Trong tam giác QAB có DN//AB nên theo định lý Talets ta được $\frac{AQ}{NQ} = \frac{AB}{DN}$

Từ đó ta được $\frac{AQ}{NQ} = 2k+1 \Rightarrow \frac{AQ}{AQ+NQ} = \frac{2k+1}{2k+1+1} \Rightarrow \frac{AQ}{AN} = \frac{2k+1}{2(k+1)}$

Do đó ta được $\frac{AP \cdot AQ}{AM \cdot AN} = \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} \Rightarrow \frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{APQ} = \frac{1}{2} S_{AMN}$

Từ đó suy ra $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{AMN}$ nên ta được $S_{MNPQ} = S_{APQ}$.

Ví dụ 37. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB thỏa mãn điều kiện $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{PA}{PB} = k$ với $k \neq 1; k > 0$. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AM và CP, AM và BN, BN và CP. Tính theo k diện tích tam giác DEF.

Lời giải

Vẽ BH vuông góc với AM tại H, CK vuông góc với AM tại K. Đặt $S_{ADP} = x$. Hai tam giác ADP và BDP có

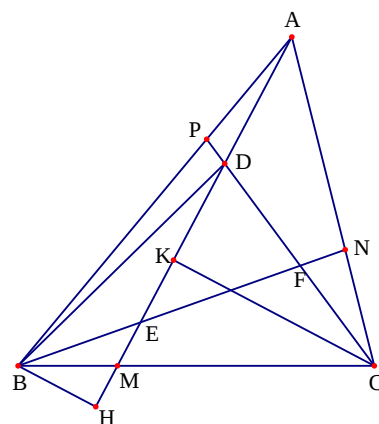
chung đường cao hạ từ D đến AB và $PB = \frac{1}{k} AP$. Nên

ta được $S_{BDP} = \frac{1}{k} S_{APD} = \frac{x}{k}$. Do đó suy ra

$$S_{ABD} = S_{APD} + S_{BPD} = \frac{k+1}{k} \cdot x.$$

Do BH vuông góc với AM và CK vuông góc với AM nên BH//CK.

Do đó theo định lý Talets ta có $\frac{BH}{CK} = \frac{BM}{MC} = k$.



Từ đó ta được $BH = kCK$, suy ra

$$S_{ADC} = \frac{1}{k} S_{ABD} = \frac{k+1}{k^2} \cdot x.$$

Tương tự ta được $S_{ABE} = S_{BCF} = \frac{k+1}{k^2} \cdot x$. Từ đó $S_{APC} = S_{ADC} + S_{ADP} = x + \frac{k+1}{k^2} \cdot x = \frac{k^2 + k + 1}{k^2} \cdot x$.

Lại có $\frac{AP}{PB} = k$ nên suy ra $\frac{AP}{AP+PB} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow AP = \frac{k}{k+1} AB$.

Do đó $S_{APC} = \frac{k}{k+1} S_{ABC} = \frac{k}{k+1} \cdot x$. Suy ra ta được $\frac{k^2 + k + 1}{k^2} \cdot x = \frac{k}{k+1} \Rightarrow x = \frac{k^3}{(k+1)(k^2 + k + 1)}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{DEF} &= S_{ABC} - (S_{ADC} + S_{ABE} + S_{BCF}) = 1 - \frac{3(k+1)x}{k^2} \\ &= 1 - \frac{3(k+1)}{k^2} \cdot \frac{k^3}{(k+1)(k^2 + k + 1)} = 1 - \frac{3k}{k^2 + k + 1} = \frac{(k-1)^2}{k^2 + k + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta được } S_{DEF} = \frac{(k-1)^2}{k^2 + k + 1}$$

Ví dụ 38. Cho tam giác nhọn ABC có diện tích S và $BC = a$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\frac{DB}{DC} = k$. Tính diện tích tam giác có đỉnh là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABD, ACD theo a, k, S .

Lời giải

Gọi $O; O_1; O_2$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC, ABD, ACD . Khi đó ta suy ra được $OO_1 \perp AB$ tại M và $MA = MB$, $OO_2 \perp AC$ tại N và $NA = NC$.

Kẻ $O_1E \perp BC$ và $OF \perp O_1E$. Các điểm M và E nằm trên đường tròn đường kính BO_1 nên

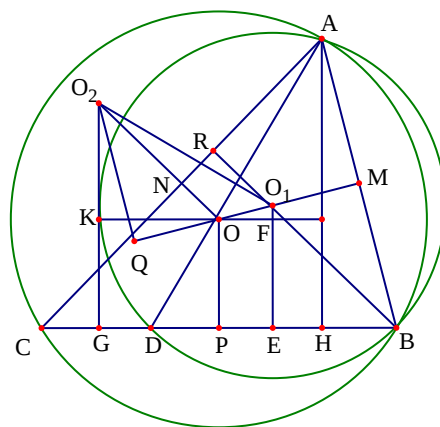
$\widehat{OO_1F} = \widehat{ABH}$. Từ đó ta được $\triangle OO_1F \sim \triangle ABH$

$$\text{nên ta được } \frac{OO_1}{OF} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow OO_1 = OF \cdot \frac{AB}{AH} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } OF = PE = \frac{2(PE + EB) - 2EB}{2} = \frac{BC - BD}{2} = \frac{CD}{2}.$$

Từ giả thiết suy ra $\frac{BC}{CD} = k+1$ nên $CD = \frac{a}{k+1}$, do đó ta được $OF = \frac{a}{2(k+1)}$.

$$\text{Kết hợp với (1) ta được } OO_1 = \frac{a}{2(k+1)} \cdot \frac{AB}{AH} \quad (2)$$



Tương tự kẻ $O_2G \perp BC$ và $OK \perp O_2G$ thì ta được $OO_2 = \frac{ak}{2(k+1)} \cdot \frac{AC}{AH}$ (3)

Kẻ $BR \perp AC$ và $O_2Q \perp OO_1$, xét hai tam giác O_2OQ và BAR ta có $\widehat{O_2OQ} = \widehat{BAR}$ (do tứ giác $AMON$ nội tiếp) nên suy ra $\Delta O_2OQ \sim \Delta BAR$. Từ đó ta được

$$\frac{O_2Q}{O_2O} = \frac{BR}{AB} \Rightarrow O_2Q = O_2O \cdot \frac{BR}{AB} \quad (4).$$

Từ (2), (3) và (4) ta được

$$S_{OO_1O_2} = \frac{1}{2} O_2Q \cdot OO_1 = \frac{1}{2} OO_2 \cdot OO_1 \cdot \frac{BR}{AB} = \frac{ka^2}{8(k+1)^2} \cdot \frac{2S}{\left(\frac{2S}{a}\right)^2} = \frac{k \cdot a^4}{16S(k+1)^2}$$

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC . Các đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại $A_1; B_1; C_1$. Các đường thẳng $AA_1; BB_1; CC_1$ đồng quy tại N . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của N trên BC, CA, AB . Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{R} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

Lời giải

Đặt $AB = c; BC = a; CA = b$ và $p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi

đó theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau ta tính được

$$BA_1 = AB_1 = p - c$$

$$CA_1 = AC_1 = p - b$$

$$BC_1 = CB_1 = p - a$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABA_1

với ba điểm $C_1; N; C$ thẳng hàng ta được

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{CB}{CA_1} \cdot \frac{NA_1}{NA} = 1 \Rightarrow \left(\frac{p-b}{p-a}\right) \cdot \frac{a}{p-b} \cdot \frac{NA_1}{NA} = 1$$

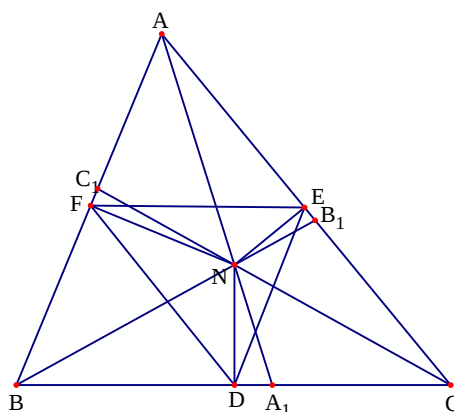
Từ đó ta được $\frac{NA_1}{NA} = \frac{p-a}{a} \Rightarrow \frac{NA_1}{AA_1} = \frac{p-a}{p}$. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC , khi đó

$AH \parallel ND$ nên theo định lý Talets ta được

$$\frac{ND}{AH} = \frac{NA_1}{AA_1} = \frac{p-a}{p} \Rightarrow ND = \frac{AH \cdot (p-a)}{p} = \frac{2S_{ABC}(p-a)}{a \cdot p}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $NE = \frac{2S_{ABC} \cdot (p-b)}{bp}$; $NF = \frac{2S_{ABC}(p-c)}{cp}$.

Từ đó $S_{NDE} = \frac{1}{2} ND \cdot NE \cdot \sin(180^\circ - \widehat{DNE}) = \frac{1}{2} ND \cdot NE \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{2S^2(p-a)(p-b)}{abp^2} \cdot \sin \widehat{ACB}$



Do đó

$$\frac{S_{DNE}}{S_{ABC}} = \frac{2S^2(p-a)(p-b)\sin \widehat{ACB}}{abp^2} \cdot \frac{2}{ab \cdot \sin \widehat{ACB}} = \frac{16S^2}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{(p-a)(p-b)c^2}{4p^2} = \frac{(p-a)(p-b)c^2}{4R^2p^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $\frac{S_{DNF}}{S_{ABC}} = \frac{(p-c)(p-a)b^2}{4R^2p^2}$; $\frac{S_{ENF}}{S_{ABC}} = \frac{(p-b)(p-c)a^2}{4R^2p^2}$

Do đó ta được $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{(p-a)(p-b)c^2 + (p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2}{4R^2p^2}$

Biến đổi vế phải của đẳng thức trên ta thu được

$$\begin{aligned} & \frac{(p-a)(p-b)c^2 + (p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2}{4R^2p^2} \\ &= \frac{(b+c-a)(c+a-b)c^2 + (c+a-b)(a+b-c)a^2 + (a+b-c)(b+c-a)b^2}{16R^2p^2} \\ &= \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a+b+c)}{16R^2p^2} \\ &= \frac{4abcp - 14p(p-a)(p-b)(p-c)}{16R^2p^2} = \frac{16S_{ABC} \cdot R \cdot p - 16S_{ABC}^2}{16R^2p^2} = \frac{p^2 \cdot R \cdot r - p^2 \cdot r^2}{16R^2p^2} = \frac{r}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) \end{aligned}$$

Do đó ta thu được $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right)$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 40. Cho tam giác ABC và D là một điểm nằm trên cạnh BC. Trên cạnh AB và AC lấy lần lượt các điểm N và M. Qua M và N kẻ các đường thẳng song song với AD cắt BC tại P và Q. Chứng minh rằng $S_{MNPQ} = \max\{S_{ABD}, S_{ACD}\}$ khi và chỉ khi $CD = BD$ và

$$\frac{AM}{AC} + \frac{AN}{AB} = 1$$

Lời giải

+ Trước hết ta chứng minh khi $CD = BD$ và

$$\frac{AM}{AC} + \frac{AN}{AB} = 1 \text{ thì } S_{MNPQ} = \max\{S_{ABD}, S_{ACD}\}$$

Thật vậy, khi $CD = BD$ thì D là trung điểm

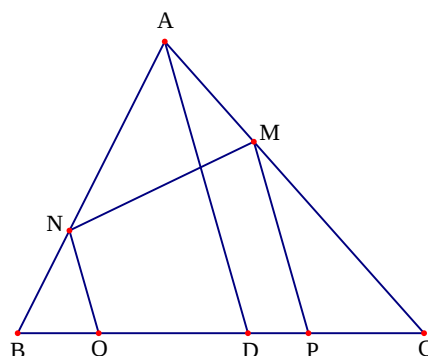
của BC, suy ra $S_{ABD} = S_{ACD}$.

Đặt $\frac{AM}{AC} = m < 1$; $\frac{AN}{AB} = n < 1$ nên ta được

$$m + n = 1$$

Ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AN \cdot AM}{AB \cdot AC} = m \cdot n$ nên

$$S_{AMN} = m \cdot n \cdot S_{ABC}$$



Do $MP \parallel AD$ nên ta có $\frac{MC}{AC} = \frac{CP}{CD} = \frac{AC-MC}{AC} = 1-m$. Tương tự ta có $\frac{BN}{AB} = \frac{BQ}{BD} = 1-n$

Do đó ta được $S_{BNQ} = \frac{BN.BQ}{BD.BA} \cdot S_{BAD}$; $S_{CMP} = \frac{CM.CP}{AC.DC} \cdot S_{CAD}$

Nên ta được $S_{CMP} = (1-m)^2 S_{ACD}$ và $S_{BNQ} = (1-n)^2 S_{BAD}$

Từ đó ta được $S_{MNPQ} = S_{ABC} - S_{AMN} - S_{CMP} - S_{BNQ} = S_{ACD} + S_{BAD} - S_{AMN} - S_{CMP} - S_{BNQ}$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= \left[(1-mn) - (1-m)^2 \right] S_{CAD} + \left[(1-mn) - (1-n)^2 \right] S_{ABD} \\ &= (2m - mn - m^2) S_{CAD} + (2n - mn - n^2) S_{ABD} \end{aligned}$$

Do $2m - mn - m^2$; $2n - mn - n^2$ là các số dương và $S_{ABD} = S_{ACD}$ nên ta được

$$S_{MNPQ} = \left[(2m - mn - m^2) + (2n - mn - n^2) \right] S_{CAD} = \left[1 - (m+n-1)^2 \right] S_{CAD} = S_{CAD}$$

Do đó ta được $S_{MNPQ} = \max\{S_{ABD}, S_{ACD}\}$

+ Ta chứng minh khi $S_{MNPQ} = \max\{S_{ABD}, S_{ACD}\}$ thì $CD = BD$ và $\frac{AM}{AC} + \frac{AN}{AB} = 1$

Thật vậy, do M và N nằm trên BC nên ta có $\frac{AM}{AC} = m < 1$; $\frac{AN}{AB} = n < 1$

Ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AN.AM}{AB.AC} = m.n$ nên ta được $S_{AMN} = m.n.S_{ABC}$

Do $MP \parallel AD$ nên ta có $\frac{MC}{AC} = \frac{CP}{CD} = \frac{AC-MC}{AC} = 1-m$

Tương tự ta có $\frac{BN}{AB} = \frac{BQ}{BD} = 1-n$. Do đó ta được $S_{BNQ} = \frac{BN.BQ}{BD.BA} \cdot S_{BAD}$; $S_{CMP} = \frac{CM.CP}{AC.DC} \cdot S_{CAD}$

Nên ta được $S_{CMP} = (1-m)^2 S_{ACD}$ và $S_{BNQ} = (1-n)^2 S_{BAD}$

Từ đó ta được $S_{MNPQ} = S_{ABC} - S_{AMN} - S_{CMP} - S_{BNQ} = S_{ACD} + S_{BAD} - S_{AMN} - S_{CMP} - S_{BNQ}$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= \left[(1-mn) - (1-m)^2 \right] S_{CAD} + \left[(1-mn) - (1-n)^2 \right] S_{ABD} \\ &= (2m - mn - m^2) S_{CAD} + (2n - mn - n^2) S_{ABD} \end{aligned}$$

Do $2m - mn - m^2$; $2n - mn - n^2$ là các số dương nên ta được

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &\leq \left[(2m - mn - m^2) + (2n - mn - n^2) \right] \cdot \max\{S_{CAD}, S_{ABD}\} \\ &= \left[1 - (m+n-1)^2 \right] \cdot \max\{S_{CAD}, S_{ABD}\} \leq \max\{S_{CAD}, S_{ABD}\} \end{aligned}$$

Do $S_{MNPQ} = \max\{S_{ABD}, S_{ACD}\}$ nên ta được $S_{ABD} = S_{ACD}$ và $m+n=1$

Suy ra ta được $CD = BD$ và $\frac{AM}{AC} + \frac{AN}{AB} = 1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong tất cả các tam giác ABC có $BC = 2$ (đvdd) và đường cao $AH = 1$ (đvdd). Chứng minh rằng tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất là tam giác cân.

Bài 2. Trong một hình thang trung điểm của hai đáy và giao điểm của hai đường chéo thẳng hàng

Bài 3. Cho tam giác ABC có diện tích là S , các đường trung tuyến AD, BE và CF. Gọi S' là diện tích tam giác có độ dài các cạnh bằng AD, BE và CF. Tính $\frac{S'}{S}$

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC và điểm O nằm trong tam giác, các đường thẳng AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại A', B', C' . Chứng minh rằng :

$$a) \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} \geq 6$$

$$b) \frac{OA'}{OA} + \frac{OB'}{OB} + \frac{OC'}{OC} \geq \frac{3}{2}$$

$$c) \frac{AA'}{OA} + \frac{BB'}{OB} + \frac{CC'}{OC} \geq 9$$

$$d) \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{OC}{OC'} \geq 8$$

Bài 4. Cho tam giác ABC có đường cao lần lượt là h_a, h_b, h_c . Lấy M nằm trong tam giác và t_a, t_b, t_c là khoảng cách từ M tới các cạnh BC, CA, AB của tam giác. Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$.

Chứng minh rằng $\min(h_a, h_b, h_c) \leq t_a + t_b + t_c \leq \max(h_a, h_b, h_c)$

Bài 5. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và $BC = a$. Gọi r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ACM, ABM. Chứng minh rằng $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq 2\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{a}\right)$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1 và O là một điểm nằm trong hình vuông. Tìm vị trí của O để $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 7. Cho tam giác ABC có $BC = a; CA = b; AB = c$ và điểm M nằm trong tam giác ABC. Gọi khoảng cách từ M tới cạnh BC, AC, BA lần lượt là x, y, z . Tìm vị trí của M để $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 8. Cho góc xOy và điểm M cố định bên trong góc đó. Xác định vị trí đường thẳng d đi qua M và cắt hai cạnh Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 9. Chứng minh rằng ba đường trung tuyến của tam giác ABC bằng ba cạnh của của một tam giác có diện tích $\frac{3}{4}S_{ABC}$. Từ đó nêu công thức tính diện tích tam giác ABC theo độ dài các đường trung tuyến.

Bài 10. Cho tam giác ABC và một điểm M trên cạnh BC, Các đường thẳng qua M và song song với AC, AB cắt AB, AC lần lượt tại E, F. Gọi $S_0; S_1; S_2$ lần lượt là diện tích tam giác AEF, BEM, CCFM.

a) Chứng minh rằng $S_0^2 = S_1 \cdot S_2$

b) Tính diện tích tam giác ABC theo

S_1 và S_2

Bài 11. Cho tam giác ABC có diện tích S. Trên cạnh AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm C', A', B' sao cho $AC' = C'B; \frac{BA'}{A'B} = \frac{1}{2}; \frac{CB'}{B'A} = \frac{1}{3}$. Giả sử AA' cắt BB' tại M, BB' cắt CC' tại N, CC' cắt AA' tại P. Tính diện tích tam giác MNP theo S.

Bài 12. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của AB, CD. Các điểm N, Q lần lượt thuộc các cạnh BC, DA. Biết rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành. Chứng minh rằng $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Bài 13. Cho tam giác ABC có $AB = 3(\text{cm}); BC = 4(\text{cm}); CA = 5(\text{cm})$. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến kẻ từ B chia tam giác ABC thành bốn phần. Tính diện tích mỗi phần.

Bài 14. Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích S. Đặt $AB = a; BC = b; CD = c; DA = d$.

a) Chứng minh rằng $(a + c)(b + d) \geq 4S$

b) Trong các tứ giác có cùng chu vi $2p$, tìm chu vi có diện tích lớn nhất.

c) Chứng minh rằng $(a + b)(c + d) \geq 4S$

Bài 15.

a) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba đường phân giác có độ dài không vượt quá 1

thì $S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba đường phân giác có độ dài không nhỏ hơn 1

thì $S_{ABC} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 16. Cho đa giác lồi (H) có diện tích S và chu vi $2p$. Chứng minh rằng:

a) Nếu (H) chứa đường tròn (O; r) thì $r \leq \frac{S}{p}$.

b) Nếu (H) luôn chứa một đường tròn có bán kính $r > \frac{S}{p}$.

Bài 17. Cho tam giác ABC và điểm T thuộc cạnh BC sao cho $TB = 2TC$. Gọi H là hình chiếu của B trên AT và D là trung điểm BC. Biết rằng $\widehat{TAB} = 2\widehat{TAC}$. Chứng minh rằng $DH \perp AC$.

Bài 18. Cho hình thang ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $R = 3\text{cm}$ và $BC = 2\text{cm}, AD = 4\text{cm}$. Lấy một điểm M trên cạnh AB sao cho $MB = 3MA$. Gọi N là trung điểm của cạnh CD. Đường thẳng MN cắt AC tại P. Tính diện tích tứ giác APND.

Bài 19. Chứng minh rằng tam giác có hai đường phân giác bằng nhau là tam giác cân.

Bài 20. Cho tam giác ABC có $r_a; r_b; r_c$ lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

Bài 21. Cho tam giác ABC nhọn có d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến các cạnh BC, CA, AB. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng khi đó ta có hệ thức $d_a + d_b + d_c = R + r$

Bài 22. Cho tam giác ABC và một điểm O bất kì nằm trong tam giác. Tia AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện của tam giác ABC lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng biểu thức $\left(\frac{OA \cdot AP}{PO}\right) \left(\frac{OB \cdot BM}{MO}\right) \left(\frac{OC \cdot CN}{NO}\right)$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông tại A và hai đường phân giác BD và CE cắt nhau ở O. Biết diện tích tam giác BOC bằng a. Tính tích BD.CE theo a.

Bài 24. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng BD là tia phân giác của góc $\widehat{AIC}$ khi và chỉ khi AC là tia phân giác của góc $\widehat{BJD}$.

Bài 24. Cho tứ giác ABCD có diện tích S nội tiếp đường tròn bán kính R. Biết độ dài các cạnh của tứ giác là $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và $AC = e$. Giả sử tồn tại một đường tròn tiếp xúc với các tia đối của BA, DA, CD, CB và $2p = a + b + c + d$. Chứng minh rằng

$$R = \frac{S \cdot e}{p^2 - e^2}$$

Bài 26. Cho K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC có B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của AC và AB. Đường thẳng C_1K cắt đường thẳng AC tại B_2 , đường thẳng B_1K cắt đường thẳng AB tại C_2 . Giả sử diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác AB_2C_2 . Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

Bài 27. Cho tam giác ABC có diện tích S. Ba điểm M, N, P lần lượt nằm khác phía với A, B, C đối với các đường thẳng BC, CA, AB. Qua M, N, P kẻ lần lượt các đường thẳng a, b, c song song với BC, CA, AB tương ứng. Gọi giao điểm của b và c, c và a, a và b lần lượt là A', B', C' .

Chứng minh rằng nếu $S_{APB} + S_{BMC} + S_{CNA} < S$ thì $S_{A'B'C'} < 2S_{APBMCN}$.

Bài 28. Cho tứ giác ABCD và hai điểm M, N lần lượt thuộc cạnh AB, CD sao cho

$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k$ (k là một số dương cho trước). Gọi giao điểm của AN và DM là E, giao điểm của BN và CM là F.

a) Chứng minh rằng $S_{MENF} = S_{AED} + S_{BFC}$.

b) Giả sử $k = 1$, chứng minh rằng $\frac{AE}{EN} + \frac{DE}{EM} + \frac{BF}{FN} + \frac{CF}{FM} \geq 4$.

Bài 29. Cho tam giác ABC và đường thẳng d đi qua A. Hạ đường thẳng BB' và CC' vuông góc với d. Xác định vị trí của d sao cho $BB' + CC'$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 30. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng tổng các bình phương của khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường tròn đến các cạnh của tam giác đều ABC bằng bình phương đường cao của tam giác đó.

Bài 31. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BD, AC. Hai đường thẳng qua P, Q lần lượt song song với AC, BD cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $S_{ABM} = S_{CDM}$ và $S_{BCM} = S_{ADM}$.

Bài 32. Cho tam giác nhọn ABC, có các điểm A_1, B_1, C_1 trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$

Bài 33. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AM, BN, CP. Chứng minh rằng tỉ số diện tích của hai tam giác $A_1B_1C_1$ và MNP không phụ thuộc vào vị trí điểm M, N, P.

Bài 34. Cho tam giác đều ABC có cạnh a và điểm M nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt cạnh đối diện BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F sao cho

$$S_{AFM} + S_{BDM} + S_{CEM} = S_{AEM} + S_{CDM} + S_{BFM}$$

Chứng minh rằng điểm M nằm trên ít nhất một đường trung tuyến của tam giác đã cho.

Bài 35. Cho tam giác ABC nhọn và ba đường cao AG, BD, CE cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm của DE và AH. Đường thẳng qua I và song song với BC cắt tia AB, tia DB lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của AH. Chứng minh rằng $IP = IQ$ và I là trực tâm của tam giác MBC.

Bài 36. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm N trên cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Xét các điểm tương ứng trên AB, CD. Tìm điều kiện của biểu thức $AE - DF$ để tồn tại vị trí của M

trên AD sao cho $\frac{S_{NEMF}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{9}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Qua A vẽ đường thẳng xy song song với BC.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \text{ (đvdt)}$$

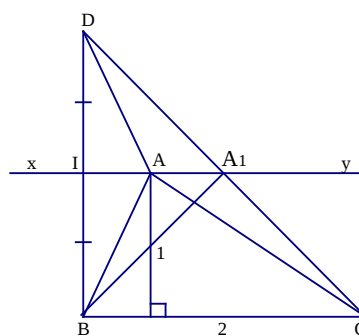
Mặt khác $S_{ABC} = r \cdot p = 1$ với r là bán kính đường tròn nội tiếp và p là nửa chu vi tam giác ABC. Từ đó ta được

$$\frac{r}{2} (AB + BC + CA) = 1 \Rightarrow r (AB + BC + CA) = 2$$

Gọi D là điểm đối xứng với B qua xy, ta có $AB = AD$

Vì $r (AB + AC + 2) = 2$. Mà r lớn nhất nên $AB + AC + 2$ nhỏ nhất hay $AD + AC$ nhỏ nhất.

Dễ thấy $AD + AC \geq DC$ không đổi. Từ đó suy ra $\min_{(AD+AC)} = CD$, dấu bằng xảy ra khi $A \equiv A_1$. Khi đó A_1I là đường trung bình của tam giác BCD nên A_1 là trung điểm của CD, suy ra $BA_1 = CA_1$, suy ra $\triangle BCA_1$ cân hay $\triangle ABC$ cân.

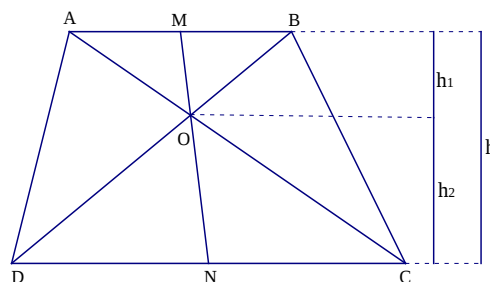


Bài 2. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} h (AB + CD)$

$$S_{AMND} = \frac{1}{2} h \left(\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} \right) = \frac{1}{4} h (AB + CD)$$

$$S_{OMB} = \frac{1}{2} h_1 \cdot MB = \frac{1}{2} h_1 \cdot \frac{AB}{2} = \frac{h_1}{4} \cdot AB$$

$$S_{ONC} = \frac{1}{2} h_2 \cdot NC = \frac{1}{2} h_2 \cdot \frac{CD}{2} = \frac{h_2}{4} \cdot CD$$



Mà ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2} h_1 \cdot AB$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot AB$. Do đó ta được

$$\left. \begin{aligned} S_{BOC} &= S_{ABC} - S_{OAB} = \frac{1}{2} h \cdot AB - \frac{1}{2} h_1 \cdot AB = \frac{1}{2} h_2 \cdot AB \\ S_{BOC} &= S_{BCD} - S_{ONC} = \frac{1}{2} h \cdot CD - \frac{1}{2} h_2 \cdot CD = \frac{1}{2} h_1 \cdot CD \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_2 \cdot AB = h_1 \cdot CD$$

Mặt khác $S_{ABCD} = S_{AMND} + S_{MNO} + S_{MOB} + S_{BOC} + S_{NOC}$.

Từ đó suy ra $S_{MNO} = S_{ABCD} - S_{AMND} - S_{MOB} - S_{BOC} - S_{NOC}$

$$= \frac{h_2}{4} \cdot AB + \frac{1}{4} h_1 \cdot CD - \frac{h_2}{4} \cdot AB = \frac{h_2}{4} \cdot AB - \frac{h_1}{4} \cdot CD = 0$$

Do đó $S_{OMN} = 0$ Thẳng hàng nên ba điểm M, N, O thẳng hàng.

Bài 3. + Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $AG = 2GD$, $BG = 2GE$, $CG = 2GF$. Gọi H là trung điểm của GC nên ta được $GH = GF$.

Tam giác BGC có HD là đường trung bình nên $HD \parallel BG$ và $HD = \frac{1}{2}BG$ suy ra $HD = EG$. Do đó tứ giác HEGD là hình bình hành nên

$$S_{GDH} = S_{EGH} = S_{EGF}$$

Ta có $S_{GDH} = \frac{1}{2}S_{GDC}$. Mà $S_{GDC} = \frac{1}{3}S_{ADC}$ nên suy ra $S_{GDH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}S_{ADC} = \frac{1}{6}S_{ADC}$

Ta lại có $S_{ADC} = \frac{1}{2}S$ nên suy ra $S_{GDH} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}S$. Từ đó ta được $S = 12S_{GDH}$

+ Ta có $S' = S_{CDF} + S_{ADE} + S_{BEF}$ và $S_{CDF} = 3S_{GDH}$

Hai tam giác GDH và EGD có cùng cạnh đáy GD và hai đỉnh đối diện hai cạnh đó nằm trên cùng một đường thẳng song song với GD nên $S_{GDH} = S_{EGD}$. Mà $S_{ADE} = 3S_{EGD}$ nên $S_{ADE} = 3S_{GDH}$

Ta cũng có hai tam giác EFG và EGH có cạnh đáy bằng nhau và đường cao bằng nhau

Từ đó suy ra $S_{EFG} = S_{EGH} = S_{GDH}$. Mà $S_{BEF} = 3S_{EFG}$ nên ta được $S_{BEF} = 3S_{GDH}$

Từ các kết quả trên ta được $S' = 9S_{GDH}$. Từ đó ta có $\frac{S'}{S} = \frac{9 \cdot S_{GDH}}{12 \cdot S_{GDH}} = \frac{9}{12}$

Bài 4. Dễ dàng chứng minh được

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

Đặt S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, OBC, OCA, OAB.

$$\text{a) Ta có } \frac{OA}{OA'} = \frac{AA' - OA'}{OA'} = \frac{S}{S_1} - \frac{S_1}{S_1} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$$

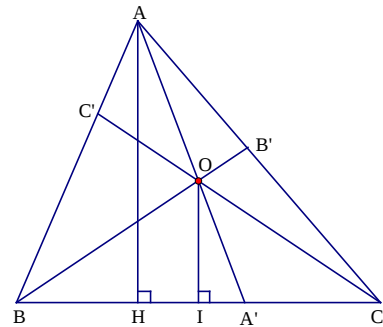
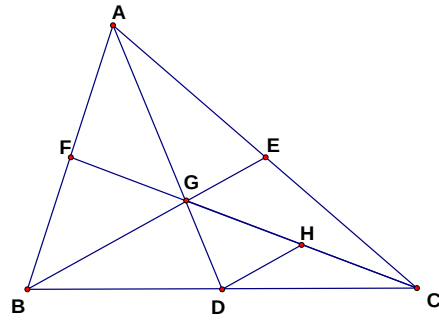
$$\text{Tương tự ta có } \frac{OB}{OB'} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}; \frac{OC}{OC'} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}. \text{ Từ đó}$$

suy ra

$$\frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} - \frac{OC}{OC'} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_1 + S_3}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} \right) + \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} \right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1} \right) \geq 6$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S \Leftrightarrow O$ là trọng tâm tam giác ABC.

$$\text{b) Chứng minh tương tự như trên ta được } \frac{OA'}{OA} = \frac{S_1}{S_2 + S_3}; \frac{OB'}{OB} = \frac{S_2}{S_1 + S_3}; \frac{OC'}{OC} = \frac{S_3}{S_1 + S_2}$$



$$\text{Do đó } \frac{OA'}{OA} + \frac{OB'}{OB} + \frac{OC'}{OC} = (S_1 + S_2 + S_3) \left(\frac{1}{S_1 + S_2} + \frac{1}{S_2 + S_3} + \frac{1}{S_1 + S_3} \right) - 3 \geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}$$

Vậy $\frac{OA'}{OA} + \frac{OB'}{OB} + \frac{OC'}{OC} \geq \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S \Leftrightarrow O$ là trọng tâm tam giác ABC

c) Ta có $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$ nên

$$\frac{AA'}{OA'} + \frac{BB'}{OB'} + \frac{CC'}{OC'} = \left(\frac{AA'}{OA'} + \frac{BB'}{OB'} + \frac{CC'}{OC'} \right) \left(\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} \right)$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{AA'}{OA'} + \frac{BB'}{OB'} + \frac{CC'}{OC'} \right) = \left(\frac{S}{S_1} + \frac{S}{S_2} + \frac{S}{S_3} \right) \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} \right) = (S_1 + S_2 + S_3) \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) \geq 9$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S \Leftrightarrow O$ là trọng tâm tam giác ABC

$$\text{d) Ta có } N = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{OC}{OC'} = \frac{(S_2 + S_3)(S_1 + S_3)(S_1 + S_2)}{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$$

$$\text{Do đó } N^2 = \frac{(S_2 + S_3)^2 (S_1 + S_3)^2 (S_1 + S_2)^2}{S_1^2 \cdot S_2^2 \cdot S_3^2} \geq \frac{4S_2 \cdot S_3 \cdot 4S_1 \cdot S_3 \cdot 4S_1 \cdot S_2}{S_1^2 \cdot S_2^2 \cdot S_3^2} \geq 64$$

Từ đó suy ra $N \geq 8$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S \Leftrightarrow O$ là trọng tâm tam giác ABC

Bài 4. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta được $h_c \geq h_b \geq h_a$

Ta có $\text{Min}(h_a, h_b, h_c) = h_a$ và

$$\text{Max}(h_a, h_b, h_c) = h_c$$

$$\text{Lại có } 2S_{\triangle ABC} = a \cdot t_a + b \cdot t_b + c \cdot t_c \geq c(t_a + t_b + t_c)$$

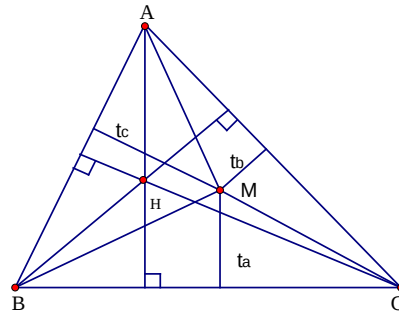
$$\text{Suy ra } t_a + t_b + t_c \leq \frac{2S_{\triangle ABC}}{c} = h_c$$

$$\text{Mặt khác } 2S_{\triangle ABC} = a \cdot t_a + b \cdot t_b + c \cdot t_c \leq a(t_a + t_b + t_c)$$

$$\text{Suy ra } t_a + t_b + t_c \geq \frac{2S_{\triangle ABC}}{a} = h_a. \text{ Từ đó ta được } h_a \leq t_a + t_b + t_c \leq h_c$$

$$\text{Do vậy ta được } \text{Min}(h_a, h_b, h_c) \leq (t_a + t_b + t_c) \leq \text{Max}(h_a, h_b, h_c)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $h_a = h_b = h_c$ hay tam giác ABC đều.



Bài 5. Ta có $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} a \cdot h_a$.

Ta có $h_a \leq AM$. Từ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow 4S_{\triangle ABC} = 2ah_a$

nên

$$\frac{4}{a} = \frac{2h_a}{S_{\triangle ABC}} \leq \frac{2AM}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2AM}{2S_{\triangle ABM}} = \frac{AM}{S_{\triangle ABM}}$$

Mà ta lại có $2S_{\triangle ABC} = (a+b+c) \cdot r$.

$$\text{Từ đó ta được } \frac{2}{r} = \frac{a+b+c}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}{2S_{\triangle ACM}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a} + \frac{2}{r} \leq \frac{AM + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}{2S_{\triangle ABM}} = \frac{\left(\frac{MA}{2} + \frac{c}{2} + \frac{a}{4}\right) + \left(\frac{MA}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{4}\right)}{S_{\triangle ABM}} = \frac{p_{AMB}}{S_{\triangle AMB}} + \frac{p_{AMC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Hay $\frac{4}{a} + \frac{2}{r} \leq \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq 2\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{a}\right)$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 6. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1 và O là một điểm nằm trong hình vuông.

Tìm vị trí của O để $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Vẽ $BH \perp OA$ khi đó ta có ta được $2S_{\triangle AOB} = OA \cdot BH \leq OA \cdot OB$.

Ta thấy $(OA - OB)^2 \geq 0 \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 \geq 2OA \cdot OB$

Do đó ta được $OA^2 + OB^2 \geq 4S_{\triangle AOB}$

Chứng minh được tự ta được

$$OB^2 + OC^2 \geq 4S_{\triangle OCB}; OC^2 + OD^2 \geq 4S_{\triangle OCD}; OD^2 + OA^2 \geq 4S_{\triangle OAD}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) \geq 4(S_{\triangle AOB} + S_{\triangle OCB} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OAD}) = 4S_{ABCD} = 4$$

Hay ta được $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \geq 2$

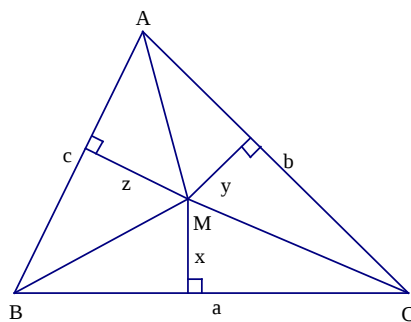
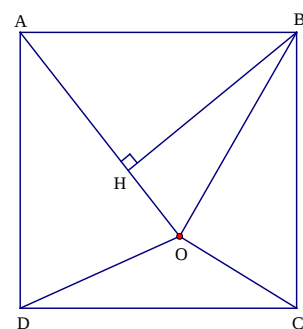
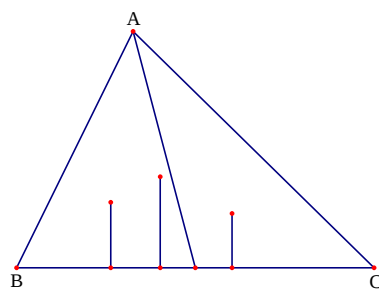
Vậy $\text{Min}_{(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2)} = 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow O$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Bài 7. Ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle AMC}$ nên ta được

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} \text{ hay } 2S_{\triangle ABC} = ax + by + cz$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned} 2S_{\triangle ABC} \cdot \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) &= (ax + by + cz) \cdot \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) + ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + ac\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + bc\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \end{aligned}$$



Suy ra $2S_{\triangle ABC} \cdot \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2$

Từ đó suy ra $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}$ không đổi. Vậy $\text{Min} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = \frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}} = \frac{2p^2}{S_{\triangle ABC}}$

với p là nửa chu vi tam giác ABC . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm các đường phân giác.

Bài 8. Giả sử dựng được đường thẳng d cắt Ox, Oy

lần lượt tại A, B thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ lớn

nhất. Vẽ $MC \parallel Oy$ với C thuộc Ox , khi đó ta có

$$\frac{S_{MOA}}{S_{MOC}} = \frac{OA}{OC}, \frac{S_{BOA}}{S_{MOB}} = \frac{AB}{BM}$$

Mà ta có $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{BM}$ nên ta được $\frac{S_{MOA}}{S_{MOC}} = \frac{S_{BOA}}{S_{MOB}}$.

Do đó $\frac{S_{BOA}}{S_{MOB} \cdot S_{MOA}} = \frac{1}{S_{MOC}} \Leftrightarrow \frac{S_{MOA} + S_{MOB}}{S_{MOB} \cdot S_{MOA}} - \frac{1}{S_{MOC}} = 0$. Đặt $\frac{1}{S_{MOC}} = k$ không đổi, từ đó ta được

$$\frac{1}{S_{MOB}} + \frac{1}{S_{MOA}} = k \Leftrightarrow \frac{2}{BK \cdot OM} + \frac{2}{AH \cdot OM} = k \Leftrightarrow \frac{1}{BK} + \frac{1}{AH} = \frac{k \cdot OM}{2}$$

Mà ta thấy $\frac{1}{BK} \geq \frac{1}{BM}; \frac{1}{AH} \geq \frac{1}{AM}$. Do đó ta được $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM} \leq \frac{1}{AH} + \frac{1}{BK} = \frac{OM \cdot k}{2}$ không đổi

Từ đó suy ra $\text{Max} \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM} \right) = \frac{OM \cdot k}{2}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} BM = BK \\ AM = AH \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp OM$$

Vậy đường thẳng d cần xác định là đường thẳng đi qua M và vuông góc với OM .

Bài 9. Giả sử M, N, P lần lượt là trung điểm của $BC,$

CA, AB của tam giác ABC . Dựng hình bình hành

$BMKN$, khi đó các tứ giác $MNKC, APCK$ cũng là

hình bình hành, nên ta được $AK = CP$.

Như vậy tam giác AMK có ba cạnh bằng ba đường

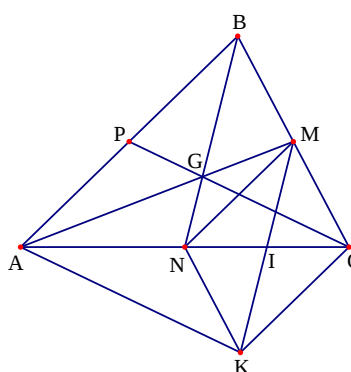
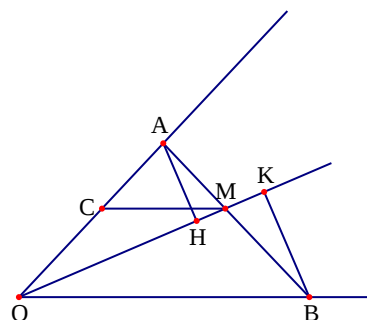
trung tuyến của tam giác ABC . Do $MCKN$ là hình

bình hành nên hai đường chéo MK, CN cắt nhau tại

trung điểm I của mỗi đường.

$$\text{Từ đó } S_{AMK} = 2S_{AMI} = 2 \cdot \frac{3}{4} S_{AMC} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{3}{4} S_{ABC}$$

Đặt $AM = m_a; MK = BN = m_b; AK = CP = m_c$ và



$$q = \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c)$$

Khi đó theo công thức Heron ta có $S_{AMK} = \sqrt{q(p-m_a)(q-m_b)(q-m_c)}$

$$\text{Do vậy ta được } S_{ABC} = \frac{4}{3}S_{AMK} = \frac{4}{3}\sqrt{q(p-m_a)(q-m_b)(q-m_c)}$$

Bài 10.

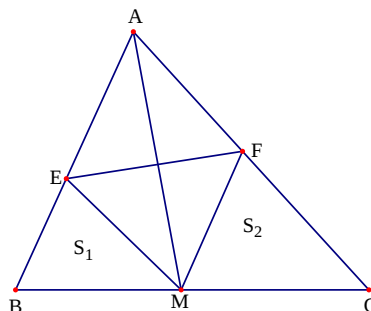
a) Ta có tứ giác AEMF là hình bình hành nên

$$S_{AEM} = S_0$$

Dễ thấy $\triangle BEM \sim \triangle MFC$ nên ta được

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{BM}{CM}\right)^2 = \left(\frac{BE}{AE}\right)^2 = \left(\frac{S_{AEM}}{S_{AEM}}\right)^2 = \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2$$

Từ đó ta được $S_1 \cdot S_2 = S_0^2$.



b) Ta có $S_{ABC} = S_1 + S_2 + 2S_0 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

Bài 11.

Ta có $S_{MNP} = S - S_{AMB} - S_{BNC} - S_{CPA}$

Lại có

$$\frac{AM}{A'M} = \frac{S_{AMB}}{S_{A'MB}} = \frac{S_{AMB}}{S_{CMB}} \cdot \frac{S_{CMB}}{S_{A'MB}} = \frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC}{BA'} = 9$$

Từ đó suy ra $AM = 9A'M = \frac{9}{10}AA'$

Do đó ta được $S_{AMB} = \frac{9}{10}S_{ABA'} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{3}{10}S$.

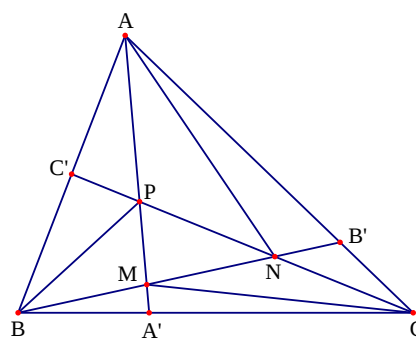
Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{BN}{B'N} = \frac{S_{BNC}}{S_{B'NC}} = \frac{S_{BNC}}{S_{ANC}} \cdot \frac{S_{ANC}}{S_{B'NC}} = \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{AC}{B'C} = 1.4 = 4$$

Do đó ta được $BN = \frac{4}{5}BB'$ nên $S_{BNC} = \frac{4}{5}S_{BB'C} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}S = \frac{S}{5}$. Tương tự ta cũng tính được

$$S_{CPA} = \frac{2}{5}S$$

Do vậy ta có $S_{MNP} = S - \frac{3}{10}S - \frac{1}{5}S - \frac{2}{5}S = \frac{S}{10}$



Bài 12. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, AD.

Khi đó dễ thấy tứ giác MIPK là hình bình hành

Do đó ta được

$$S_{BMI} + S_{DPK} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{CDA} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $S_{CPI} + S_{AMK} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Từ đó suy ra $S_{MIPK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Do các tứ giác MNPQ, MIPK là các hình bình hành nên ba đoạn thẳng MP, NQ, IK có chung trung điểm O. Do vậy, nếu hai điểm I và N trùng nhau thì K và Q trùng nhau, khi

đó $S_{MNPQ} = S_{MIPK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Nếu hai điểm I và N không trùng nhau thì hai điểm K và Q cũng không trùng nhau. Khi đó $IN \parallel KQ$ hay $BC \parallel AD$, nên tứ giác ABCD là hình thang có MP là đường trung bình.

Gọi khoảng cách giữa BC và AD là h, khi đó ta có $S_{MNPQ} = S_{MNP} + S_{MPQ} = \frac{1}{2}MP \cdot h = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Vậy ta luôn có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Bài 13. Ta có $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC

vuông tại B, nên $S = S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = 6(\text{cm}^2)$.

Giả sử chân đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác kẻ từ B lần lượt là H, D, P. Khi đó dễ thấy điểm D nằm giữa hai điểm A và P, điểm H nằm giữa hai điểm A và D.

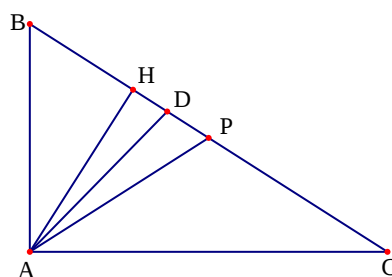
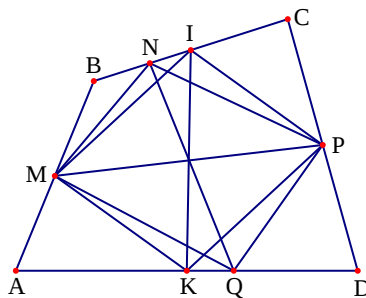
Do đó tam giác ABC được chia thành bốn tam giác ABH, BHD, BDP, BPC.

Ta có $S_{BPC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 3(\text{cm}^2)$. Dễ thấy $\frac{S_{ABH}}{S} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{ABH} = \frac{9}{25}S = \frac{54}{25}(\text{cm}^2)$

Ta có $\frac{AD}{CD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{S_{BAD}}{S} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{7} \Rightarrow S_{BAD} = \frac{3}{7}S = \frac{18}{7}(\text{cm}^2)$.

Ta được $S_{BHD} = S_{BAD} - S_{ABH} = \frac{18}{7} - \frac{54}{25} = \frac{72}{175}(\text{cm}^2)$ và $S_{BDP} = S_{ABP} - S_{BAD} = 3 - \frac{18}{7} = \frac{3}{7}(\text{cm}^2)$

Vậy ta được $S_{ABH} = \frac{54}{25}(\text{cm}^2)$; $S_{BDH} = \frac{72}{175}(\text{cm}^2)$; $S_{BDP} = \frac{3}{7}(\text{cm}^2)$; $S_{BPC} = 3(\text{cm}^2)$.



Bài 14. a) Ta có $(a+c)(b+d) = ab + cd + ad + bc$

Ta có $2S_{ABC} \leq AB \cdot BC = a \cdot b$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại B.

$2S_{CDA} \leq c \cdot d$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ACD vuông tại D.

$2S_{DAB} \leq d \cdot a$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác DAB vuông tại A.

$2S_{BCD} \leq bc$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác BCD vuông tại C.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $(a+c)(b+d) = ab + cd + ad + bc \geq 4S$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

b) Gọi p là nửa chu vi tứ giác ABCD, khi đó ta có $4p^2 = (a+b+c+d)^2 \geq 4(a+c)(b+d)$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a+c = b+d$. Mặt khác ta có $(a+c)(b+d) = ab + cd + ad + bc \geq 4S$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình

chữ nhật. Do đó ta được $4p^2 \geq 16S$ hay $S \leq \frac{p^2}{4}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác

ABCD là hình chữ nhật và $a+c = b+d$, điều này tương đương với tứ giác ABCD là hình vuông. Vậy trong các tứ giác có cùng chu vi $2p$ thì hình vuông có diện tích lớn nhất bằng $\frac{p^2}{4}$.

c) Trong nửa mặt phẳng có bờ là BD chứa điểm C

lấy điểm C' sao cho $\triangle ABCD = \triangle DC'B$

Từ đó ta được $BC' = CD = c$; $C'D = BC = b$

Khi đó suy ra $S_{ABCD} = S_{ABC'D} = S$

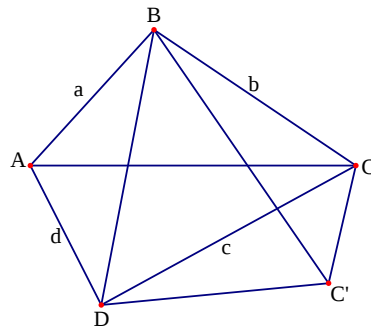
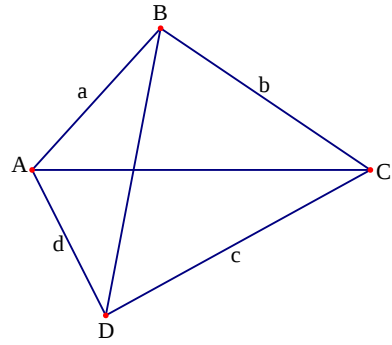
Mà ta có $(a+c)(b+d) = ab + cd + ad + bc \geq 4S$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Từ đó suy ra $4S_{ABC'D} \leq (a+c)(b+d)$, dấu bằng xảy

ra khi và chỉ khi tứ giác ABC'D là hình chữ nhật.

Khi đó hai tam giác ABD và C'DB vuông lần lượt tại A, C' và bằng nhau, do đó ta được hai tam giác ABD và CBD bằng nhau có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$.

Bài 15.



Giả sử ba đường phân giác AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại I.

a) Giả sử $AD \leq 1$; $BE \leq 1$; $CF \leq 1$ và BC là cạnh lớn nhất của tam giác ABC.

Khi đó ta có $AF \leq BF$; $AE \leq CE$ nên

$$S_{AEF} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$$

Do đó ta được $S_{BCEF} \geq \frac{3}{4} S_{ABC}$ hay

$$S_{ABC} \leq \frac{4}{3} S_{BCEF}$$

Do $\hat{A} \geq 60^\circ$ nên ta được $\widehat{BIF} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \leq 60^\circ$

Từ đó suy ra $S_{ABC} \leq \frac{4}{3} S_{BCEF} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} BE \cdot CF \cdot \sin \widehat{BIF} \leq \frac{2}{3} \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Giả sử $AD \geq 1$; $BE \geq 1$; $CF \geq 1$ và AC là cạnh bé nhất của tam giác ABC.

Khi đó ta có $BF \geq AF$; $BD \geq CD$ nên ta được $S_{BDF} \geq \frac{1}{4} S_{ABC}$

Do đó suy ra $S_{ACDF} \leq \frac{3}{4} S_{ABC}$ hay $S_{ABC} \geq \frac{4}{3} S_{ACDF}$.

Do AC là cạnh nhỏ nhất của tam giác ABC nên $\hat{B} \leq 60^\circ$ nên $\hat{A} + \hat{C} \geq 120^\circ$

Ta có $\widehat{CID} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \geq 60^\circ$ nên ta được $60^\circ \leq \widehat{CID} < 90^\circ$.

Do đó $S_{ABC} \geq \frac{4}{3} S_{ACDF} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot CF \cdot \sin \widehat{CID} \geq \frac{2}{3} \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

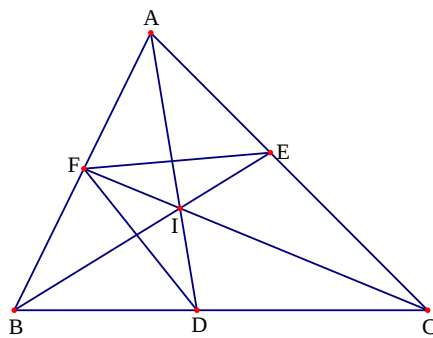
Bài 16.

a) Xét đa giác lồi $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$, do đa giác chứa đường tròn (I; r) nên các khoảng cách từ I đến các cạnh của đa giác đều không nhỏ hơn r. Khi đó ta được

$$\begin{aligned} S &= S_{IA_1 A_2} + S_{IA_2 A_3} + \dots + S_{IA_n A_1} = \frac{1}{2} (A_1 A_2 \cdot d_1 + A_2 A_3 \cdot d_2 + \dots + A_n A_1 \cdot d_n) \\ &\geq \frac{1}{2} (A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1) r = p \cdot r \end{aligned}$$

Trong đó $d_1; d_2; \dots; d_n$ là khoảng cách từ I đến $A_1 A_2; A_2 A_3; \dots; A_n A_1$ và p là nửa chu vi của đa giác.

Từ đó ta suy ra được $r \leq \frac{S}{p}$.



b) Ứng với mỗi cạnh $A_i A_{i+1}$ dựng một hình chữ nhật $A_i A_{i+1} M_i N_i$ nằm trong đa giác $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ sao cho $A_i N_i = \frac{S}{2p}$. Ta gọi hình chữ nhật $A_i A_{i+1} M_i N_i$ là (C_i) . Khi đó ta có

$$S_{(C_i)} = \frac{A_i A_{i+1}}{2p} \cdot S$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} S_{(C_1)} + S_{(C_2)} + S_{(C_3)} + \dots + S_{(C_n)} &= \frac{A_1 A_2}{2p} \cdot S + \frac{A_2 A_3}{2p} \cdot S + \frac{A_3 A_4}{2p} \cdot S + \dots + \frac{A_n A_1}{2p} \cdot S \\ &= S \cdot \frac{A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1}{2p} = S \end{aligned}$$

Gọi (H_0) hình bằng hợp của n hình chữ nhật nói trên, khi đó do hai hình chữ nhật liên tiếp có phân hồng lên nhau nên ta được $S_{(H_0)} < S_{(C_1)} + S_{(C_2)} + S_{(C_3)} + \dots + S_{(C_n)} = S$. Điều này có nghĩa là hình (H_0) không phủ kín được đa giác $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$. Điều này chứng tỏ tồn tại một điểm O nằm ngoài tất cả các hình chữ nhật $(C_1); (C_2); \dots; (C_n)$.

Giả sử trong các đường thẳng $A_1 A_2; A_2 A_3; \dots; A_n A_1$ thì $A_i A_{i+1}$ là đường thẳng gần O nhất và gọi d là khoảng cách từ O đến $A_i A_{i+1}$. Ta sẽ chứng minh $d > \frac{S}{2p}$.

Thật vậy, qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với $A_i A_{i+1}$ và $M_i N_i$ lần lượt tại L và K . vì đoạn $M_i N_i$ và điểm O nằm về một phía so với $A_i A_{i+1}$ và điểm O nằm ngoài hình chữ nhật $A_i A_{i+1} M_i N_i$ nên ta được $d = OL > KL = A_i N_i = \frac{S}{2p}$.

Như vậy đường tròn tâm O có bán kính $r = d$ nằm trong đa giác $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$.

Bài 17.

Lấy F đối xứng với C qua đường thẳng AT , AT cắt CF tại K và FH kéo dài cắt AC tại E . Ta có

$$2 = \frac{TB}{TC} = \frac{S_{ATB}}{S_{ATC}} = \frac{AB \sin \widehat{2TAC}}{AC \sin \widehat{TAC}} = \frac{2AB \cos \widehat{TAC}}{AC}$$

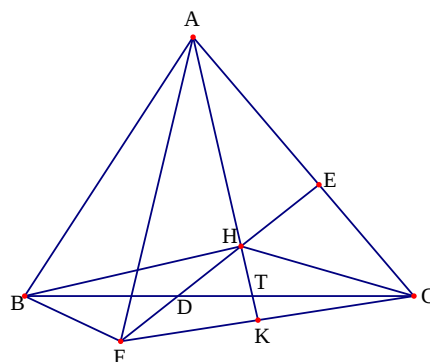
$$\text{Suy ra } \frac{AF}{AB} = \cos \widehat{TAC} = \cos \widehat{FAB}$$

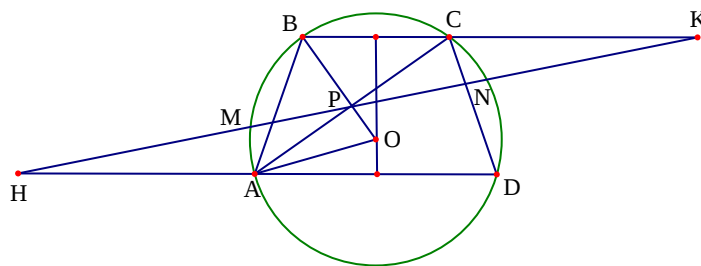
Do đó $\widehat{AFB} = 90^\circ = \widehat{AHB}$ nên suy ra A, H, F, B cùng thuộc một đường tròn. Mà $AT \perp CF$ nên $BH \parallel CF$.

Từ đó ta được $\widehat{EFK} = \widehat{BHF} = \widehat{BAF} = \widehat{EAK}$.

Suy ra FH vuông góc với AC tại H và H là trực tâm tam giác ACF .

Từ đó dễ thấy $BHCF$ là hình bình hành nên suy ra F, D, H, E thẳng hàng. Vậy ta được $DH \perp AC$



Bài 18.

Đường thẳng MN cắt các đường thẳng BC và AD lần lượt tại K và H.

Áp dụng định lý Talets ta có $\frac{HA}{BK} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$; $\frac{HD}{KC} = \frac{DN}{CN} = 1$

Kết hợp với giả thiết ta được $2 + CK = 3AH$, $AH + 4 = CK$ nên ta được $AH = 3\text{cm}$, $CK = 7\text{cm}$.

Từ $\frac{CP}{AP} = \frac{CK}{AH} = \frac{7}{3}$ nên ta được $\frac{CP}{AC} = \frac{7}{10}$.

Từ đó ta được $\frac{S_{CPN}}{S_{CAD}} = \frac{CP \cdot CN}{CA \cdot CD} = \frac{7}{20}$ nên ta được $S_{APND} = \frac{20-7}{20} \cdot S_{CAD} = \frac{13}{20} \cdot S_{CAD}$

Tam giác CAD và hình thang ABCD có chiều cao bằng nhau. Nên ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Tâm O của đường tròn nằm trong hình thang ABCD

Khi đó ta được $h = \sqrt{BO^2 - \frac{BC^2}{4}} + \sqrt{OA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}(\text{cm})$

Từ đó suy ra $S_{APND} = \frac{13}{20} (2\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot \frac{4}{2} = \frac{13}{10} (2\sqrt{2} + \sqrt{5})(\text{cm}^2)$

+ Trường hợp 2: Tâm O của đường tròn nằm ngoài hình thang ABCD

Khi đó ta được $h = \sqrt{BO^2 - \frac{BC^2}{4}} - \sqrt{OA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}(\text{cm})$

Từ đó suy ra $S_{APND} = \frac{13}{20} (2\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot \frac{4}{2} = \frac{13}{10} (2\sqrt{2} - \sqrt{5})(\text{cm}^2)$

Bài 19. Bạn đọc tự vẽ hình

Xét tam giác ABC có hai phân giác BD và CE bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng với A qua phân giác ngoài của tam giác ABC tại B và C. Khi đó, rõ ràng M, N thuộc BC. Giả sử AM cắt phân giác ngoài góc B tại P, AN cắt phân giác ngoài góc C tại Q. Gọi R là hình chiếu của C trên đường thẳng BP, S là hình chiếu của B trên đường thẳng CQ.

Dễ thấy các tam giác ABM, CAN cân nên P, Q lần lượt là trung điểm của AM, AN; tức là PQ là đường trung bình của tam giác AMN hay $PQ \parallel BC$.

Ta biết rằng hai tam giác có chung đáy và đỉnh còn lại nằm trên cùng một đường thẳng song song với đáy thì diện tích của chúng bằng nhau. Từ $AP \parallel BD \parallel CR$ ta có

$$S_{PBD} = S_{ABD}, S_{RBD} = S_{CBD}.$$

Do đó ta được $S_{PDR} = S_{PBD} + S_{RBD} = S_{ABD} + S_{CBD} = S_{ABC}$. Hoàn toàn tương tự ta được $S_{ESQ} = S_{ABC}$.

$$\text{Suy ra } S_{PDR} = S_{ESQ} \Rightarrow \frac{1}{2} BD \cdot PR = \frac{1}{2} CE \cdot SQ \Rightarrow PR = SQ \text{ (do } BD = CE).$$

Tứ giác BCSR có $\widehat{BSC} = \widehat{BRC} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, mà $PQ \parallel BC$ nên tứ giác PQSR cũng nội tiếp. Ta lại có $PR = SQ$ nên tứ giác này là hình thang cân, suy ra $\widehat{RPQ} = \widehat{SQP} \Rightarrow \widehat{PBM} = \widehat{QCM}$.

Từ đó dễ dàng có được $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ hay tam giác ABC cân tại A.

Bài 20. Gọi D, E, F lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C và S là diện tích của tam giác ABC.

$$\text{Đặt } BC = a, CA = b, AB = c \text{ và } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Ta thấy } S_{DAB} + S_{DAC} - S_{DBC} = S \Rightarrow r_a(b+c-a) = 2S.$$

$$\text{Hay ta được } r_a(p-a) = S$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } r_b(p-b) = r_c(p-c) = S.$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta có

$$p(r_a + r_b + r_c) - (r_a \cdot a + r_b \cdot b + r_c \cdot c) = 3S$$

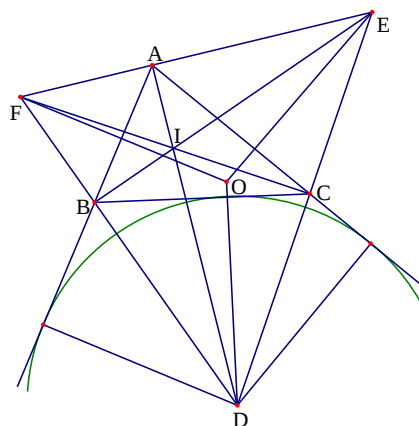
$$\text{Do đó suy ra } p(r_a + r_b + r_c) = 2(S_{BDC} + S_{ECA} + S_{FAB}) + 3S \Rightarrow p(r_a + r_b + r_c) = 2S_{DEF} + S \quad (1)$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF, dễ thấy A, B, C là các chân đường cao của tam giác DEF nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ABC bằng $\frac{1}{2}$ bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

$$\text{Để thấy OD vuông góc với BC hay } S_{OBDC} = \frac{1}{2} OD \cdot BC = R \cdot a. \text{ Tương tự ta có}$$

$$S_{OCEA} = R \cdot b; S_{OAFB} = R \cdot c.$$

$$\text{Cộng theo vế các đẳng thức trên ta có } S_{DEF} = R(a+b+c) = 2Rp \Rightarrow \frac{2S_{DEF}}{p} = 4R \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

Bài 21. Ta thấy tứ giác ONAP nội tiếp trong đường tròn đường kính AO nên theo định lý Ptoleme ta có $AP.ON + AN.OP = AO.PN$

$$\text{Hay ta có } \frac{c}{2}.d_b + \frac{b}{2}.d_c = R.\frac{a}{2} \Rightarrow c.d_b + b.d_c = R.a$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$b.d_a + a.d_b = R.c; a.d_c + c.d_a = R.b$$

Ta cũng có $d_a.a = OM.BC = 2S_{OBC}$.

Hoàn toàn tương tự ta có $d_b.b = S_{OCA}$; $d_c.c = S_{OAB}$.

Cộng tất cả các đẳng thức trên lại ta được

$$(a+b+c)(d_a+d_b+d_c) = R(a+b+c) + (S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA})$$

Do đó ta được $2p(d_a+d_b+d_c) = R.2p + 2S \Rightarrow d_a+d_b+d_c = R+r$. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Nếu tam giác ABC không nhọn thì hệ thức trên có thể thay đổi thành

$$d_a+d_b-d_c = R+r; d_a-d_b+d_c = R+r; d_b+d_c-d_a = R+r$$

Tương ứng với các trường hợp tam giác tù tại C, B, A. Các hệ thức này cũng được chứng minh tương tự như trên.

Bài 22. Dễ thấy hai tam giác OAP và OBP có cùng

đường cao hạ từ O nên ta có $\frac{S_{OAP}}{S_{OBP}} = \frac{AP}{BP}$. Do đó

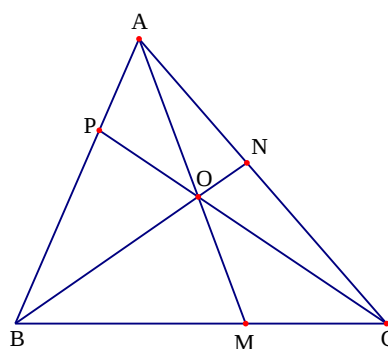
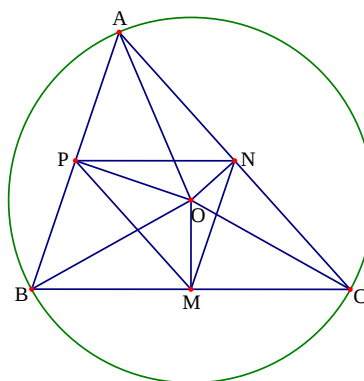
$$\frac{S_{OPA}}{S_{OPB} + S_{OPA}} = \frac{AP}{BP + AP} = \frac{AP}{AB} \text{ hay } \frac{S_{OPA}}{S_{AOB}} = \frac{AP}{AB}.$$

Mặt khác ta thấy hai tam giác AOB và BOM có

chung đường cao hạ từ B nên ta có $\frac{S_{AOB}}{S_{BOM}} = \frac{OA}{OM}$. Từ

$$\text{đó } \frac{S_{AOP}}{S_{BOM}} = \frac{OA.AP}{AB.OM}.$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{S_{BOM}}{S_{CON}} = \frac{OB.BM}{BC.ON}; \frac{S_{CON}}{S_{AOP}} = \frac{OC.CN}{AC.OP}$



$$\text{Do đó ta được } \frac{S_{BOM}}{S_{CON}} \cdot \frac{S_{CON}}{S_{AOP}} \cdot \frac{S_{AOP}}{S_{BOM}} = \frac{OB \cdot BM}{BC \cdot ON} \cdot \frac{OC \cdot CN}{AC \cdot OP} \cdot \frac{OA \cdot AP}{AB \cdot OM}$$

$$\text{Hay } \frac{OB \cdot BM}{BC \cdot ON} \cdot \frac{OC \cdot CN}{AC \cdot OP} \cdot \frac{OA \cdot AP}{AB \cdot OM} = 1. \text{ Từ đó suy ra } \frac{OB \cdot BM}{ON} \cdot \frac{OC \cdot CN}{OP} \cdot \frac{OA \cdot AP}{OM} = AB \cdot BC \cdot CA$$

Do tam giác ABC có AB, BC, CA cho trước nên AB.BC.CA không đổi

$$\text{Suy ra } \frac{OB \cdot BM}{ON} \cdot \frac{OC \cdot CN}{OP} \cdot \frac{OA \cdot AP}{OM} \text{ có giá trị không đổi}$$

Vậy biểu thức $\left(\frac{OA \cdot AP}{PO}\right) \left(\frac{OB \cdot BM}{MO}\right) \left(\frac{OC \cdot CN}{NO}\right)$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Bài 23. Đặt $AB = z$, $BC = x$, $CA = y$. Do BD và CE là

các đường phân giác nên ta có $\frac{AD}{CA} = \frac{AB}{BC} = \frac{z}{x}$. Từ

đó ta được

$$\frac{AD}{AD+DC} = \frac{z}{x+z} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{z}{x+z} \Rightarrow AD = \frac{zy}{x+z}$$

Do AO là phân giác trong của tam giác AOD nên ta được

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{OB}{OB+OA} = \frac{AB}{AB+AD}$$

$$\text{Từ đó ta được } \frac{OB}{BD} = \frac{x+z}{x+y+z}, \text{ hoàn toàn tương tự ta được } \frac{OC}{CE} = \frac{x+y}{x+y+z}$$

Để ý đến tam giác ABC vuông tại A nên $x^2 = y^2 + z^2$. Do đó ta được

$$\frac{OD \cdot OC}{BD \cdot CE} = \frac{(x+z)(x+y)}{(x+y+z)^2} = \frac{x^2 + xy + zy + zx}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx} = \frac{x^2 + xy + zy + zx}{2(x^2 + xy + yz + zx)} = \frac{1}{2}$$

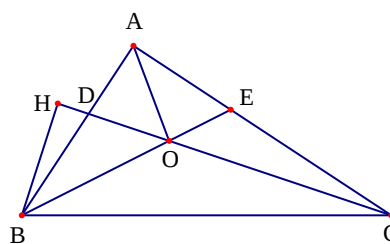
Vậy ta được $BD \cdot CE = 2OB \cdot OC$.

Do O là giao điểm hai đường phân giác BD và CE nên ta được $\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} = 135^\circ$

Kẻ BH vuông góc với OC tại H. Khi đó tam giác BOH vuông cân tại H, suy ra $BH = \frac{OB\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Do đó ta được } S_{BOC} = \frac{1}{2} BH \cdot OC = \frac{\sqrt{2}}{4} OB \cdot OC \Rightarrow OB \cdot OC = 2\sqrt{2}a. \text{ Từ đó ta suy ra}$$

$$BD \cdot CE = 4a\sqrt{2}.$$



Bài 24. Kẻ $CM \parallel BD$ với M nằm trên đường tròn O .

Khi đó ta có $BM = CD$ và $\widehat{DBM} = \widehat{BDC}$. Do I là trung điểm của BD nên $IB = ID$, từ đó ta được

$$\triangle BIM = \triangle DIC \text{ suy ra } \widehat{BIM} = \widehat{DIC}$$

+ Nếu BD là phân giác của góc $\widehat{AIC}$ thì ta được $\widehat{AID} = \widehat{DIC}$

Mà ta lại có $\widehat{BIM} = \widehat{AID}$ nên ba điểm A, I, M thẳng hàng.

Gọi R là bán kính đường tròn (O) , ta có

$$S_{ABM} = \frac{AB \cdot BM \cdot MB}{4R} \text{ và } S_{ADM} = \frac{AD \cdot DM \cdot MB}{4R}$$

Vì I là trung điểm của AB nên ta được $S_{AMB} = S_{AMD}$, suy ra $AB \cdot BM = AD \cdot DM$

Lại có $CD = BM$, $BC = DM$ nên ta có $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Kẻ $DN \parallel AC$ với N nằm trên đường tròn (O) khi đó ta được $AD = CN$, $AN = CD$

$$\text{Lại có } S_{ABN} = \frac{AB \cdot BN \cdot NA}{4R}; S_{CBN} = \frac{BC \cdot CN \cdot NB}{4R}$$

Do đó ta được $S_{ABN} = S_{CBN}$. Điều này chứng tỏ DN đi qua trung điểm J của BD

Khi đó ta có $AD = NC$, $\widehat{DAJ} = \widehat{NCJ}$ suy ra $\widehat{AJD} = \widehat{CJN} = \widehat{AJB}$. Do đó AD là phân giác của góc $\widehat{BJC}$.

+ Nếu AD là phân giác của góc $\widehat{BJC}$. Thì lặp lại cách chứng minh như trên ta được BD là phân giác của góc $\widehat{AIC}$.

Bài 24. Gọi (O) là đường tròn tiếp xúc với các tia đối của BA, DA, CD, CB theo thứ tự tại M, N, P, Q . Khi đó theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AM = AQ, BM = BP, CN = CP, DN = AQ$.

Khi đó ta thấy

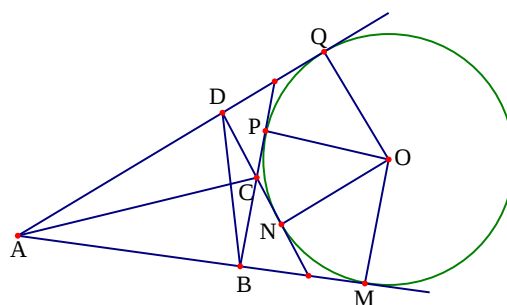
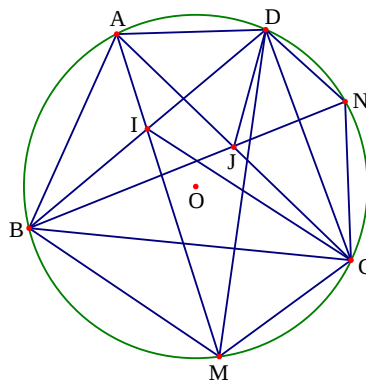
$$AM = AB + BM = AB + BP = AB + BC + CP$$

$$AQ = AD + DQ = AD + DN = AD + DC + CN$$

Do ta có $AM = AQ$, $CN = CP$ nên ta được $AB + BC = AD + DC$

Mà lại có $2p = a + b + c + d$ nên ta được $a + b = c + d = p$.

Đặt $BD = f$. Khi đó ta có $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABD} + S_{BCD}$



Áp dụng công thức về diện tích trên cho các tam giác ABC, ADC, ABD, BCD nội tiếp đường tròn ta được

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} = \frac{abe}{4R}; S_{ACD} = \frac{AC \cdot CD \cdot DA}{4R} = \frac{cde}{4R}$$

$$S_{ABD} = \frac{AB \cdot BD \cdot DA}{4R} = \frac{adf}{4R}; S_{BCD} = \frac{BC \cdot CD \cdot DB}{4R} = \frac{bcf}{4R}$$

$$\text{Do đó ta được } S_{ANCD} = \frac{(ab+cd)e}{4R} \text{ hoặc } S_{ANCD} = \frac{(ad+bc)f}{4R}$$

$$\text{Suy ra } S_{ABCD}^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)ef}{16R^2} \Leftrightarrow 16S^2 \cdot R^2 = (ab+cd)(ad+bc)ef$$

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác nội tiếp ABCD ta được

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD \text{ hay } ac + bd = ef$$

$$\text{Từ } S_{ANCD} = \frac{(ab+cd)e}{4R} \text{ ta được } ab+cd = \frac{4R \cdot S}{e} \text{ thay vào hệ thức trên ta được}$$

$$\begin{aligned} 4Re \cdot S &= (ac+bd)(ad+bc) = ab(c^2+d^2) + cd(a^2+b^2) = ab(p^2-2cd) + cd(p^2-2ab) \\ &= p^2(ab+cd) - 4abcd = \frac{4Rp^2S}{2} - 4S^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được } Rp^2 = Re^2 + e \cdot S \text{ hay } R = \frac{S \cdot e}{p^2 - e^2}$$

Bài 26. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AB_2 = x$; $AC_2 = y$.

Phân giác BK cắt cạnh AC tại D. Ta có $\frac{KB}{KD} = \frac{c}{AD} = \frac{a}{CD} = \frac{a+c}{b} > 1$.

Suy ra $AD = \frac{bc}{a+c}$ và D nằm giữa A và B_2 . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD

với B_2, K, C_1 thẳng hàng ta được $\frac{B_2D}{B_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{KB}{KD} = 1$. Do đó ta được $\frac{x - \frac{bc}{a+c}}{x} \cdot \frac{a+c}{b} = 1 \Rightarrow$

$x = \frac{bc}{a+c-b}$. Tương tự ta cũng được $y = \frac{bc}{a+b-c}$. Từ giả thiết $S_{ABC} = S_{AB_2C_2}$ nên suy ra $xy = bc$

Từ hợp các kết quả trên ta được $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Theo định lí cosin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

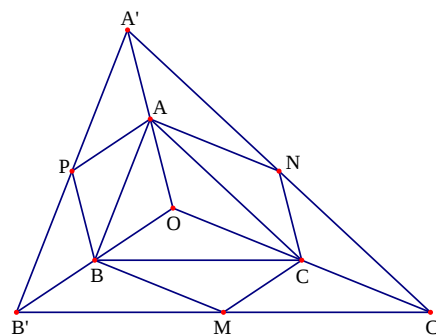
Từ đó ta suy ra $\cos A = \frac{1}{2}$ nên ta được $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Bài 27. Dễ thấy ba đường thẳng AA' , BB' , CC' đồng quy tại điểm O và

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC} = k < 1$$

Khi đó ta có $\frac{S_{APB}}{S_{OAB}} = \frac{S_{AA'B}}{S_{OAB}} = k$. Hoàn toàn

tương tự ta cũng được $\frac{S_{BMC}}{S_{OBC}} = \frac{S_{CNA}}{S_{OCA}} = k$



Do đó theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{S_{APB}}{S_{OAB}} = \frac{S_{BMC}}{S_{OBC}} = \frac{S_{CNA}}{S_{OCA}} = \frac{S_{APB} + S_{BMC} + S_{CNA}}{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}} = \frac{S_{APB} + S_{BMC} + S_{CNA}}{S} = k < 1$$

Do $S_{OAPB} = S_{OAB'}$ nên ta được $\frac{S_{OA'B'}}{S_{OAPB}} = \frac{S_{OA'B'}}{S_{OAB'}} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OA + AA'}{OA} = 1 + k$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{S_{OB'C'}}{S_{OBMC}} = \frac{S_{OC'A'}}{S_{OCNA}} = k + 1$.

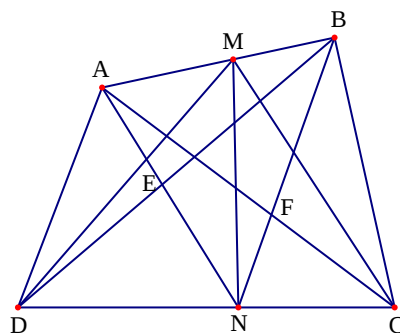
Từ đó ta được $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABBMCN}} = \frac{S_{OA'B'} + S_{OB'C'} + S_{OC'A'}}{S_{OAPB} + S_{OBMC} + S_{OCNA}} = 1 + k < 2$

Bài 28. a) Từ giả thiết ta được $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = \frac{k}{k+1}$

Từ đó ta được $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CNA}}{S_{CDA}} = \frac{k}{k+1}$.

Suy ra $\frac{S_{AMC} + S_{CNA}}{S_{ABC} + S_{CDA}} = \frac{k}{k+1}$ hay $\frac{S_{AMCN}}{S_{ABCD}} = \frac{k}{k+1}$

Lại có $\frac{S_{AMD}}{S_{ABD}} = \frac{S_{CNB}}{S_{CDA}} = \frac{k}{k+1}$



Nên ta được $\frac{S_{AMD} + S_{CNB}}{S_{ABD} + S_{CDB}} = \frac{k}{k+1}$ hay $\frac{S_{AMD} + S_{CNB}}{S_{ABCD}} = \frac{k}{k+1}$. Từ đó ta được

$$S_{AMCN} = S_{AMD} + S_{CNB}.$$

Trừ cả hai vế của đẳng thức trên cho $S_{AME} + S_{CNF}$ thì ta được $S_{MENF} = S_{ADE} + S_{BCF}$.

b) Dễ thấy $S_{AMD} + S_{BMC} = S_{NAB}$ và $S_{DNA} + S_{CNB} = S_{MCD}$

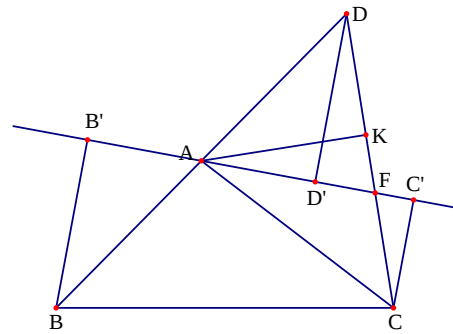
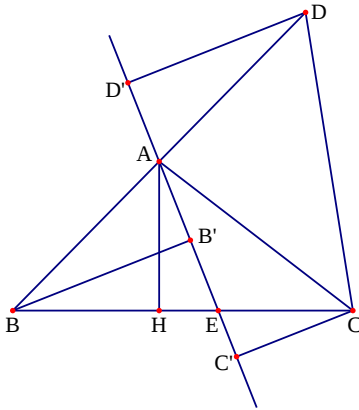
Do $k=1$ nên $S_{NMD} = \frac{1}{2}S_{MCD}$ và $S_{NMC} = \frac{1}{2}S_{MCD}$

Do đó ta được $\frac{AE}{NE} = \frac{S_{AMD}}{S_{NMD}} = 2 \frac{S_{AMD}}{S_{MCD}}$ và $\frac{BF}{NF} = \frac{S_{BMC}}{S_{NMC}} = 2 \frac{S_{BMC}}{S_{MCD}}$

Suy ra $\frac{AE}{NE} + \frac{BF}{NF} = \frac{2(S_{AMD} + S_{BMC})}{S_{MCD}} = \frac{2S_{NAB}}{S_{MCD}}$. Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{DE}{ME} + \frac{CF}{MF} = \frac{2S_{MCD}}{S_{NAB}}$

Từ đó ta được $\frac{AE}{NE} + \frac{DE}{ME} + \frac{BF}{NF} + \frac{CF}{MF} = 2 \left(\frac{S_{NAB}}{S_{MCD}} + \frac{S_{MCD}}{S_{NAB}} \right) \geq 4$

Bài 29.



Đặt $S = S_{ABC}$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua A. Hạ DD' vuông góc với đường thẳng d, khi đó ta có $S_{ACD} = S_{ABC} = S$ và $DD' = BB'$. Đường thẳng d đi qua A luôn cắt một trong hai đường thẳng BC hoặc CD.

+ Nếu d cắt cạnh BC tại E thì ta được $BB' + CC' = \frac{2S_{ABE}}{AE} + \frac{2S_{ACE}}{AE} = \frac{2S}{AE}$

+ Nếu d cắt cạnh CD tại F thì ta được $BB' + CC' = \frac{2S_{ADE}}{AF} + \frac{2S_{ACF}}{AF} = \frac{2S}{AF}$

Đặt $x = \max\{AB, AC\}$ thì ta được $AE \leq x$ và $AF \leq x$. Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $BB' + CC' \geq \frac{2S}{x}$. Do đó ta được

+ Nếu $AB > AC$ thì $x = AB$ và $BB' + CC' \geq \frac{2S}{AB}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi điểm B trùng với điểm E hoặc điểm C trùng với điểm F hay đường thẳng d trùng với AB.

Vậy nếu $AB > AC$ thì $BB' + CC'$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2S}{AB}$, đạt được khi đường thẳng d trùng với AB.

+ Tương tự nếu $AB < AC$ $BB' + CC'$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2S}{AC}$, đạt được khi đường thẳng d trùng với AC và nếu $AB = AC$ $BB' + CC'$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2S}{AB}$, đạt được khi đường thẳng d trùng với AB hoặc đường thẳng d trùng với AC .

Bài 30. Giả sử K là điểm bất kì trên đường tròn (O) .

Khi đó nếu điểm K trùng với một đỉnh của tam giác ABC thì kết luận trên hiển nhiên đúng.

Xét điểm không trùng với các đỉnh của tam giác ABC . Không mất tính tổng quát ta giả sử K nằm trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) .

Gọi $A_1; B_1; C_1$ lần lượt là hình chiếu của K trên các cạnh BC, CA, AB . Gọi AH là đường cao của tam giác đều ABC . Khi đó ta cần chứng minh được

$$KA_1^2 + KB_1^2 + KC_1^2 = AH^2.$$

Trước hết ta chứng minh ba điểm $A_1; B_1; C_1$ thẳng hàng.

Thật vậy, dễ thấy $\widehat{AKC} = \widehat{C_1KA_1} = 120^\circ$ nên các tứ giác $AC_1B_1K; KB_1CA_1$ nội tiếp đường tròn có đường kính tương ứng là AK và CK . Từ đó ta được $\widehat{AKC_1} = \widehat{AB_1C_1}$ và $\widehat{CKA_1} = \widehat{CB_1A_1}$

Từ $\widehat{AKC} = \widehat{C_1KA_1} = 120^\circ$ ta được $\widehat{AKC_1} + \widehat{C_1KC} = \widehat{C_1KC} + \widehat{CKA_1}$

Do đó ta chỉ ra được $\widehat{AKC_1} = \widehat{CKA_1}$. Điều này dẫn đến $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{CB_1A_1}$ suy ra ba điểm

$A_1; B_1; C_1$ thẳng hàng. Để ý là $S_{A_1KC_1} = S_{C_1KB_1} + S_{B_1KA_1}$ và $\widehat{CKB} = \widehat{BKA} = 60^\circ$ nên

$$KC_1 \cdot KA_1 = KC_1 \cdot KB_1 + KB_1 \cdot KA_1.$$

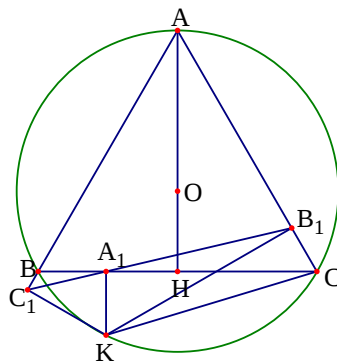
Mặt khác ta lại có $S_{AKB} + S_{BKC} - S_{AKC} = S_{ABC}$

Do đó ta được $AB \cdot KC_1 + BC \cdot KA_1 - AC \cdot KB_1 = BC \cdot AH$ hay $KC_1 + KA_1 - KB_1 = AH$.

Từ đó ta suy ra $KC_1^2 + KA_1^2 + KB_1^2 + 2KC_1 \cdot KA_1 - 2KC_1 \cdot KB_1 - 2KB_1 \cdot KA_1 = AH^2$

Mà ta có $KC_1 \cdot KA_1 = KC_1 \cdot KB_1 + KB_1 \cdot KA_1$ nên ta được $2KC_1 \cdot KA_1 = 2KC_1 \cdot KB_1 - 2KB_1 \cdot KA_1 = 0$

Do đó ta được $KA_1^2 + KB_1^2 + KC_1^2 = AH^2$. Vậy bài toán được chứng minh.



Bài 31. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo và kí hiệu $S = S_{ABCD}$. Khi đó do $MP \parallel AC$ nên ta được

$$S_{APC} = S_{ACM} \text{ nên suy ra } S_{ABC} + S_{ACP} = S_{ABC} + S_{ACM}.$$

$$\text{Từ đó } S_{ABCP} = S_{ACBM}.$$

Mặt khác lại có $S_{ABP} = \frac{1}{2}S_{ABD}$; $S_{BCP} = \frac{1}{2}S_{BCD}$ nên ta được

$$S_{ABP} + S_{BCP} = S_{ABCP} = \frac{1}{2}(S_{ABD} + S_{BCD}) = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S$$

$$\text{Do đó ta được } S_{ABCP} = S_{ACBM} = \frac{1}{2}S.$$

Chúng minh hoàn toàn tương tự ta được $S_{ABMD} = S_{ABQD} = \frac{1}{2}S$.

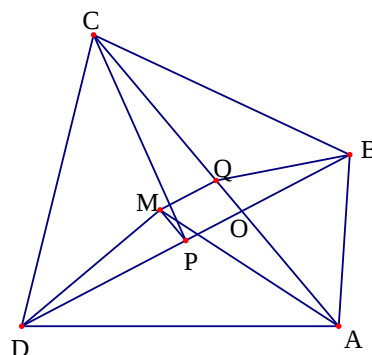
$$\text{Đặt } S_{ABM} = a; S_{BMC} = b; S_{CMD} = c; S_{AMD} = d$$

$$\text{Khi đó từ } S_{ABM} + S_{BMC} = S_{ABCM} = \frac{1}{2}S \text{ ta được } a + b = \frac{1}{2}S$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } S_{ABM} + S_{AMD} = S_{ABMD} = \frac{1}{2}S \text{ nên } a + d = \frac{1}{2}S$$

$$\text{Suy ra } 2a + b + d = S. \text{ Mà ta lại có } a + b + c + d = S \text{ nên suy ra } 2a + b + d = a + b + c + d \Rightarrow a = c$$

$$\text{Từ đó suy ra } S_{ABM} = S_{CMD} \text{ và } S_{BMC} = S_{ADM}.$$



Bài 32.

+ Điều kiện cần: Giả sử AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy, ta

$$\text{cần chứng minh } \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

Cách 1: Dễ thấy

$$S_{\Delta ABA_1} = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBA_1}; S_{\Delta ACA_1} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta OCA_1}$$

$$S_{\Delta ABA_1} = \frac{1}{2}AH \cdot A_1B; S_{\Delta OA_1B} = \frac{1}{2}OI \cdot BA_1$$

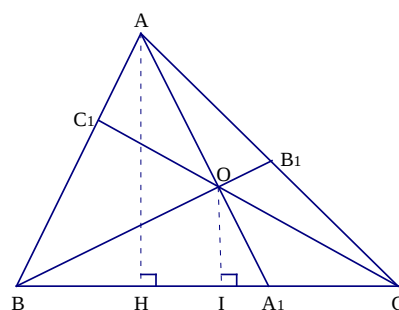
$$S_{\Delta ACA_1} = \frac{1}{2}AH \cdot A_1C; S_{\Delta COA_1} = \frac{1}{2}OI \cdot CA$$

$$\text{Từ đó } \frac{S_{\Delta ABA_1}}{S_{\Delta ACA_1}} = \frac{A_1B}{A_1C}; \frac{S_{\Delta OA_1B}}{S_{\Delta OA_1C}} = \frac{A_1B}{A_1C} \text{ nên } \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{S_{\Delta ABA_1}}{S_{\Delta ACA_1}} = \frac{S_{\Delta OA_1B}}{S_{\Delta OA_1C}} = \frac{S_{\Delta AA_1B} - S_{\Delta OA_1B}}{S_{\Delta AA_1C} - S_{\Delta OA_1C}} = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}}$$

$$\text{Tương tự ta được } \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OAB}}; \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\Delta OBC}}. \text{ Khi đó}$$

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}} \cdot \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OAB}} \cdot \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\Delta OBC}} = 1$$

+ Điều kiện đủ: Giả sử ta có $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$. Cần chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy



Thật vậy, gọi O là giao điểm của AA_1, BB_1 . Từ C kẻ CO cắt AB tại C' .

Theo phần thuận ta có $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Mà theo đầu bài ta có $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$

Do đó ta được $\frac{C'A}{C'B} = \frac{C_1A}{C_1B} \Rightarrow C' \equiv C_1$. Suy ra AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy

Bài 33. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề

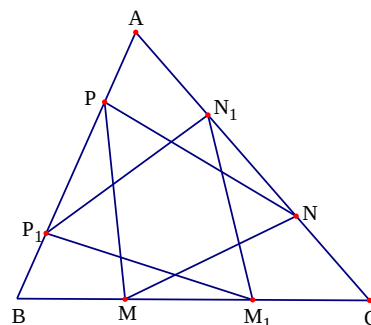
sau: Nếu trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác

ABC lấy các điểm M, N, P và các điểm M_1, N_1, P_1

lần lượt đối xứng với M, N, P qua trung điểm

tương ứng của BC, CA, AB thì diện tích của hai

tam giác MNP và $M_1N_1P_1$ bằng nhau.



Thật vậy, gọi a, b, c và x, y, z lần lượt là độ dài của BC, CA, AB và BM, CN, AP . Khi đó ta có

$$\frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \frac{BM \cdot BP}{AB \cdot BC} = \frac{x(c-z)}{ca}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \frac{y(a-x)}{ab}; \frac{S_{APN}}{S_{ABC}} = \frac{z(b-y)}{bc}$

Do đó ta được $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{BMP} - S_{CMN} - S_{APN}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{x(c-z)}{ca} - \frac{y(a-x)}{ab} - \frac{z(b-y)}{bc}$

Để ý là các điểm M_1, N_1, P_1 lần lượt đối xứng với M, N, P qua trung điểm tương ứng của BC, CA, AB nên ta được $AP = BP_1; AN_1 = CN; BM = CM_1$ nên hoàn toàn tương tự ta cũng tính được

$$\frac{S_{M_1N_1P_1}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{x(c-z)}{ca} - \frac{y(a-x)}{ab} - \frac{z(b-y)}{bc}$$

Do đó ta được $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$. Vậy bổ đề được chứng minh.

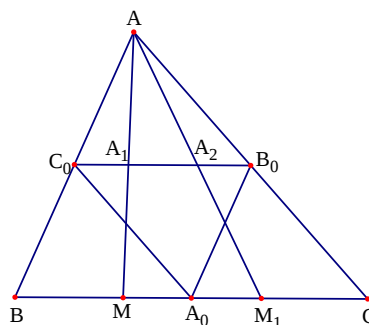
Trở lại bài toán: Gọi $A_0; B_0; C_0$ theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Gọi $A_2; B_2; C_2$ theo thứ tự là các điểm đối xứng với $A_1; B_1; C_1$ qua trung điểm của $B_0C_0; C_0A_0; A_0B_0$

Áp dụng bổ đề trên ta có $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_2B_2C_2}$.

Ta có $\triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C_0$, trên hai cạnh tương ứng BC

và B_0C_0 ta có $\frac{A_2B_0}{A_2C_0} = \frac{A_1C_0}{A_1B_0} = \frac{BM}{CM}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{B_2C_0}{B_2A_0} = \frac{B_1A_0}{B_1C_0} = \frac{CN}{AN}; \frac{C_2A_0}{C_2B_0} = \frac{C_1B_0}{C_1A_0} = \frac{AP}{BP}$



Do đó ta được tam giác $A_2B_2C_2$ tương ứng với tam giác MNP nên suy ra

$$\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta MNP$$

Từ đó ta được $\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{MNP}} = \frac{1}{4}$ mà $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_2B_2C_2}$ nên ta được $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{MNP}} = \frac{1}{4}$

Từ đó ta có tỉ số diện tích của hai tam giác $A_1B_1C_1$ và MNP không phụ thuộc vào vị trí điểm M, N, P.

Bài 34.

Đặt

$$S_1 = S_{AFM}; S_2 = S_{BDM}; S_3 = S_{CEM}; S'_1 = S_{AEM}; S'_2 = S_{CDM}; S'_3 = S_{BFM}$$

Theo giả thiết ta được $S_1 + S_2 + S_3 = S'_1 + S'_2 + S'_3$

Lại đặt $S_1 + S'_1 = x; S_2 + S'_2 = y; S_3 + S'_3 = z$.

Hai tam giác BMA và BMD có chung đường cao hệ từ B

nên ta có $\frac{S_2}{S_1 + S'_1} = \frac{DM}{AM}$. Tương tự ta được $\frac{S'_2}{S_3 + S'_3} = \frac{DM}{MA}$.

$$\text{Do đó ta được } \frac{S_2}{S_1 + S'_1} = \frac{S'_2}{S_3 + S'_3} = \frac{S_2 + S'_2}{S_1 + S'_1 + S_3 + S'_3} = \frac{y}{z + x}$$

Suy ra $S_2 = \frac{xy}{z + x}; S'_2 = \frac{yz}{z + x}$. Tương tự ta được $S_1 = \frac{zx}{y + z}; S'_1 = \frac{xy}{z + y}$ và

$$S_3 = \frac{yz}{x + y}; S'_3 = \frac{zx}{x + y}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= S'_1 + S'_2 + S'_3 \Leftrightarrow xy \left(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{z+y} \right) + yz \left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{z+x} \right) + zx \left(\frac{1}{z+y} - \frac{1}{x+y} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{xy(y-x)}{(z+x)(y+z)} + \frac{yz(z-y)}{(x+y)(z+x)} + \frac{zx(x-z)}{(y+z)(x+y)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \\ z=x \end{cases} \end{aligned}$$

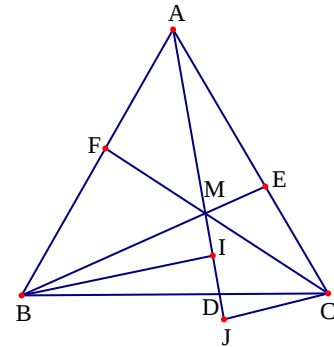
Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x = z$, khi đó ta được $S_1 + S'_1 = S_3 + S'_3$

Do đó ta có $S_{BMA} = S_{CMA}$. Kẻ $BI \perp AD; CJ \perp AD$ suy ra $BI = CJ$.

Do đó hai tam giác IBD và JCD bằng nhau, suy ra $BD = CD$ hay AD là đường trung tuyến.

Do đó điểm M nằm trên đường trung tuyến AD.

Vậy điểm M nằm trên ít nhất một đường trung tuyến của tam giác đã cho



Bài 35. Vẽ HK vuông góc với DE tại K và AL

vuông góc với ED tại L. Ta có $\frac{AI}{AH} = \frac{AL}{HK} = \frac{S_{ADE}}{S_{HDE}}$ và

$$\frac{GA}{GH} = \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}}$$

Mặt khác ta chứng minh được $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ và $\triangle HDE \sim \triangle HBC$

Do đó $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{HDE}}{S_{HBC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$ nên ta được

$$\frac{S_{ADE}}{S_{HDE}} = \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}}$$

Do đó ta suy ra $\frac{AI}{HI} = \frac{GA}{GH} \Rightarrow \frac{AI}{AG} = \frac{IH}{GH}$.

Do $PQ \parallel BC$ nên theo định lý Talet ta có $\frac{IP}{GB} = \frac{AI}{GI} = \frac{IH}{GH} = \frac{IQ}{GB}$. Suy ra $IP = IQ$.

Mặt khác cũng từ $\frac{AI}{HI} = \frac{GA}{GH}$ ta được $\frac{IH + IA}{GH + GA} = \frac{HI}{HG}$

Mà ta có $2MA = AH = IH + IA$ và $2GM = GH + GA$ nên ta được

$$\frac{2MA}{2GM} = \frac{HI}{GI} \Rightarrow \frac{MA}{GM} = \frac{HI}{GI} \Rightarrow \frac{GA}{GM} - 1 = \frac{GI}{GH} - 1 \Rightarrow \frac{GA}{GM} = \frac{GI}{GH} \Rightarrow GA \cdot GH = GI \cdot GM$$

Mà ta chứng minh được $\triangle GBH \sim \triangle GAC$ nên ta có $GH \cdot GH = GB \cdot GC$

Do đó ta được $GI \cdot GM = GB \cdot GC$ nên hai tam giác vuông GBI và GMC đồng dạng với nhau

Suy ra $\widehat{GBI} = \widehat{GMC}$, mà ta lại có $\widehat{GMC} + \widehat{GCM} = 90^\circ$ nên ta được $\widehat{GBI} + \widehat{GCM} = 90^\circ$

Gọi F là giao điểm của BI với MC, khi đó tam giác BFC vuông tại F hay $BI \perp MC$

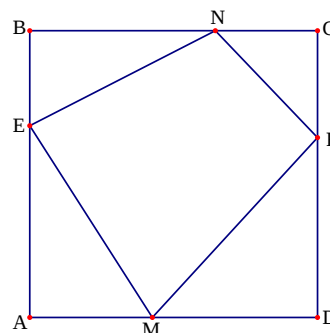
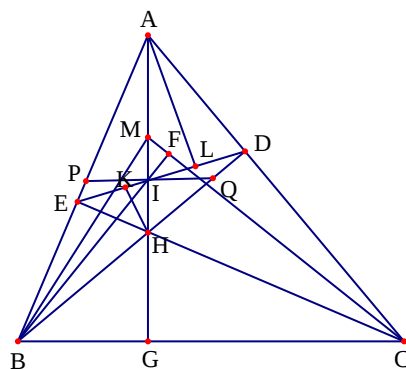
Tam giác BCM có hai đường cao MG và BF cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác BMC.

Bài 36. Giả sử có điểm M trên đoạn AD thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi a là độ dài cạnh hình vuông. Đặt

$$AE = x; DF = y; AM = z; AE - DF = n \text{ với}$$

$$0 \leq x, y, z \leq a; -a \leq n \leq a$$

Ta có $S_{ABCD} - S_{NEMF} = S_{AME} + S_{DMF} + S_{CNF} + S_{BNE}$ hay



$$\begin{aligned}
 a^2 - \frac{5}{9}a^2 &= \frac{1}{2}zx + \frac{1}{2}(a-z)y + \frac{1}{6}a(a-y) + \frac{1}{3}a(a-x) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{18}a^2 &= \frac{1}{3}ax + \frac{1}{6}ay - \frac{1}{2}xz - \frac{1}{2}(a-z)y \\
 \Leftrightarrow a^2 &= 6ax + 3ay - 9az - 9a(a-z)
 \end{aligned}$$

Thay $x = n + y$ vào đẳng thức trên ta được

$$a^2 = 6a(n+y) + 3ay - 9z(n+y) - 9(a-z)y \Leftrightarrow a^2 = 6ax - 9zn$$

Kết hợp với điều kiện $0 \leq z \leq a$ hay $0 \leq \frac{a}{9}\left(6 - \frac{a}{n}\right)$ ta được $\frac{a}{3} \leq n \leq a$ hoặc $-a \leq n \leq -\frac{a}{3}$

Đây chính là các điều kiện cần tìm.

Ngược lại, giả sử có điều kiện $\frac{a}{3} \leq n \leq a$ hoặc $-a \leq n \leq -\frac{a}{3}$.

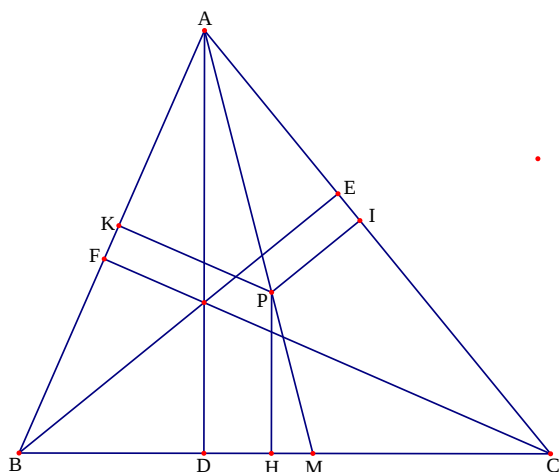
Trên tia AD lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a}{9}\left(6 - \frac{a}{n}\right)$.

Từ điều kiện trên ta chứng minh được $0 \leq AM \leq a$, suy ra M nằm trên cạnh AD. Khi đó ta được

$$S_{NEMF} = S_{ABCD} - (S_{AME} + S_{DMF} + S_{CNF} + S_{BNE})$$

$$\text{Suy ra } S_{AME} + S_{DMF} + S_{CNF} + S_{BNE} = \frac{1}{2} \left[a^2 (AE^2 - DF^2) \left(AM^2 - \frac{2a}{3} \right) \right] = \frac{4}{9}a^2$$

$$\text{Do đó ta được } S_{NEMP} = \frac{5}{9}S_{ABCD} \text{ hay } \frac{S_{NEMP}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{9}.$$



$$T = \frac{BC}{PH} + \frac{CA}{PI} + \frac{AB}{PK} = \frac{BC^2}{BC \cdot PH} + \frac{CA^2}{PI \cdot CA} + \frac{AB^2}{PK \cdot AB} = \frac{BC^2}{2S_{PBC}} + \frac{CA^2}{2S_{PCA}} + \frac{AB^2}{2S_{PAB}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$2T = \frac{BC^2}{S_{PBC}} + \frac{CA^2}{S_{PCA}} + \frac{AB^2}{S_{PAB}} \geq \frac{(AB + BC + CA)^2}{S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}} = \frac{(AB + BC + CA)^2}{S_{ABC}} \text{ không đổi,}$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{(AB+BC+CA)^2}{S_{ABC}}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{BC}{S_{PBC}} = \frac{CA}{S_{PCA}} = \frac{AB}{S_{PAB}} \Leftrightarrow \frac{BC}{BC \cdot PH} = \frac{CA}{CA \cdot PI} = \frac{AB}{AB \cdot PK} \Leftrightarrow PH = PI = PK$$

Hay P là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC.

_____ **HẾT** _____